

ROZHLEDY

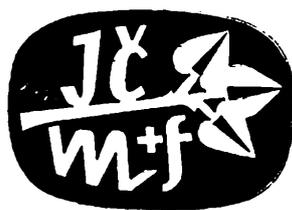
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, Petr Benda, doc. dr. Josef Dibelka, Stanislav Horák, doc. Jaroslav Chudý, Miloš Jelínek, prof. dr. Josef Korous, doc. Emil Kraemer, doc. dr. Cyril Palaj, CSc. Evžen Říman, CSc. Jiří Sedláček, CSc. Ladislav Sehnal, inž. dr. Václav Šindelář, prof. dr. Ján Vanovič, František Vencálek



ROČNÍK 41

1962/63

Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

O B S A H

Matematika:

Cihlář Rudolf: Kružnice devíti bodů v trojúhelníku	49
Čapla Vasil: Vznik prvního počítačového stroje	193
Divíšek Jiří: Použití grafických papírů k znázornění některých funkcí	199, 252
Drábek Karel - Pavlíček Jan: Řešení úlohy z konstrukcí trojúhelníka	104
Havelka Jan: Právítko reálných kořenů kvadratických rovnic	343
Horák Stanislav st.: Neurčitá rovnice $x^2 + y^2 = 2z^2$	294
Hroník Jaromír: Vybrané úlohy o minimech	441
Jech Tomáš: Apolloniova kružnice	337
Jeništa Oldřich: O určitém vztahu u obecného trojúhelníka	248
Jokl Evžen: Grafická metoda umocňování a odmocňování	296, 348
Klier Emanuel: Lagrangeův důkaz poučky Wilsonovy a Fermatovy	289
Klír Jiří: Logické obvody	6
Kršňák Pavel: Herónov vzorec a niektoré aplikácie	1
Lanta Oldřich: Z geometrie trojúhelníka	145
Lopovok Lev: Útvary s nepřístupnými prvky	433
Nohel Mojmir: Jak poznáme geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných	385
Sýkorová Eugenie - Klír Jiří: Samočinné počítače	241
Tondl Aleš: Neurčité rovnice prvního stupně	101, 152
Trávníček Stanislav: O jednom způsobu definice funkce	97, 147
Vicovský Karel: Technické příklady na racionální funkce	392
Weigel Jan: Poznámka k jedné úloze IX. ročníku MO	203

Deskriptivní geometrie:

Berka Otto: Úlohy o mimoběžkách	107
Drs Ladislav: Užití průsečíku výšek trojúhelníka k řešení některých úloh deskriptivní geometrie	352
Filip Jozef: K úlohám o mimoběžkách	446
Glivický Josef: Poznámka k jedné úloze z konstrukcí trojúhelníka	302
Granát Luděk: Použití geometrie v automatizaci obrábění	155, 208
Holubář Josef: Některé geometrické vlastnosti granátotvaru	255
Hradecký František: Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly	405, 448
Klimčík Josef - Machala František: Osová afinita	396
Koman Milan: Dělení pravidelného čtyřstěnu	53
Machala František: Elipsa jako afinní obraz kružnice	399
Machala František: Přibližná konstrukce elipsy	401

Fyzika:

Burjan Václav: Elektrostatické stroje ve vakuu	264
Hacar Bohumil: Řeka, která teče do kopce	260
Chmela Pavel: Ohybové jevy v mikroskopickém zobrazení	372
Juráš Vladimír: O tlaku v kapalinách	267
Kos Zdeněk: Povodně	61, 115
Kos Zdeněk: Sedimentace	460
Kraus Ivo - Maršák Zlatěk: Praktické užití fotoelasticimetrie	455
Kraus Kamil: Fyzikální vlastnosti ferritů a jejich užití	279, 316
Kupka Zdeněk - Pospíšil Jaroslav: Jednotka svítivosti	420
Lepil Oldřich: Hranice aerodynamického letu	13
Marek Jiří: Energetická bilance raketového pohonu	354
Maršák Zlatěk - Kraus Ivo: Základy fotoelasticimetrie	414
Rein František: Horské observatoře a jejich význam v meteorologii	21

Santholzer Vilém: Fyzikální podstata měřicích zařízení pro ionizační metody	112, 161
Santholzer Vilém: Fyzikální základy měřicích zařízení pro ionizační metody	223
Santholzer Vilém: GM počítače	273
Santholzer Vilém: Základní měřicí zařízení k počítačovým metodám	312
Santholzer Vilém: Fyzikální základy jaderných zbraní.	322
Šindelář Václav: Moment setrvačnosti	18
Šindelář Václav: Nová měrová soustava	58, 118, 163, 229, 269
Šindelář Václav: Značení tónů v hudební akustice	304
Šindelář Václav: Deformační tlakoměry	330
Šindelář Václav: Výpočet výsledné chyby měřených fyzikálních veličin, určených známými vztahy	362
Šoler Kliment: Vlastnosti a podstata sil působících v jádře atomů	214
Štefan Jan: Dopplerův jev v raketové technice	65, 121
Vavřina Karel: Vlastnosti a použití elektretů v praxi	226

Astronomie:

Sehnal Ladislav: Umělé družice a kosmické rakety	24, 377
Šimek Miloš: Rádiový výzkum meteorů	68

Různé:

Kolmý Rudolf: Zavedení metrické soustavy	428
Kolomý Rudolf: Některé staré české míry	431
Kotyk Josef: Za prof. dr. Janem Sobotkou	42
Kotyk Josef: Rozhledy pomáhají škole	44
Menšík Miroslav: Přijímací pohovory na vysoké školy technického směru	240
Menšík Miroslav: Čvíčíme na přijímací pohovory	obálka č. 5, 6
Menšík Miroslav: Čtenáři nám píší	obálka č. 7
Menšík Miroslav: Našim autorům	obálka č. 8
Sedláček Jiří: Československý šach o našich Rozhledech	240
Schmidtmayer Josef: Znalosti a návyky v matematice při vstupu na vysoké školy technického směru	233
Soutěž o nejlepší rys	475
Szebényi Tibor: Príspevok k dejinám matematických strojov	466
Tichý Zdeněk: Slovensko-český slovníček matematických a fyzikálních termínů	obálka č. 1, 2, 3
Valešová Marie: Hovořili jsme v Brně s našimi čtenáři	obálka č. 10

Recenze:

Drábek Karel: Václav Medek: Deskriptivna geometria	469
Dubský Jaromír: Desátý ročník matematické olympiády	383
Jeništa Oldřich: Josef Dovrtěl: Sběrka úkolů z technického kreslení pro průmyslové školy stavební	94
Jeništa Oldřich: M. Menšík: Deskriptivní geometrie I	143
Jeništa Oldřich: O. Setzer: Deskriptivní geometrie II	191
M. Z.: V. Čihák - Z. Tichý: Logaritmické pravítko	47
Sedláček Jiří: Cesta k vědě z novu vychází	96
Setzer Ota: Ze zahraničních časopisů	424, 470

Matematické zábavy:

Čulík Karel: Úloha o jízdním řádu - řešení	29
Koman Milan: Žertovný příklad z trigonometrie	132

Koman Milan: Pohádka o králi, jablkách a dvou koších	288
Koman Milan: Dvě zajímavé skládky	380
Koman Milan: Záhada běžeckého závodu	423
Kotzig Anton: Zajímavosti okolo jedné hry	379
Matoušek Josef: Zajímavá vlastnost čísel . . .	187
Sedláček Jiří: Zamyšlení nad kalendářem - řešení	31
Sedláček Jiří: Řešení úlohy o druhé odmocnině	79
Sedláček Jiří: Úloha o ornamentu . . .	382
Setzer Ota: Nedbalý student - řešení . . .	30
Urban Alois: Hokejové mistrovství světa a matematika	465

Fyzikální zajímavosti:

Brauner Bohuslav: Fordovo kluzné auto	31
Brauner Bohuslav: Zachycený radiokrypton	133
Smrž Ladislav: Kapilární voltmetr	32

Matematická a fyzikální olympiáda:

Hatala Peter: Štvrtá medzinárodná matematická olympiáda . . .	136, 176
Chytilová Marta: Seznam vítězů 3. ročníku FO . . .	obálka č. 5
Janovič Jozef: III. ročník fyzikálnej olympiády v Západoslovenském kraji . . .	obálka č. 2
Janovič Jozef: Sústreďenie úspešných riešiteľov MO a FO Západoslovenského kraja . . .	obálka
Košťál Rostislav a kol.: Zobrazování soustavou centrováných kulových ploch; hlavní roviny a uzlové body . . .	83
Košťál Rostislav a kol.: Pohyb složené soustavy těles, spojených vláknem . . .	138
Košťál Rostislav a kol.: Určování hustoty látek pevných a kapalných . . .	178
Sedláček Jiří: Matematická olympiáda v Čs. televizi . . .	35
Sedláček Jiří: Skončil jedenáctý ročník matematické olympiády . . .	80
Sedláček Jiří: Seznam vítězů XI. ročníku MO . . .	obálka č. 2
Ungermaň Zdeněk: Třetí ročník FO ve Východočeském kraji . . .	obálka č. 4
Mezinárodní matematická olympiáda . . .	41
Přípravné úlohy XII. matematické olympiády . . .	82
Soutěžní úlohy MO . . .	134, 174
Úlohy pro I. kolo IV. ročníku fyzikální olympiády . . .	37
XII. ročník matematické olympiády . . .	33
IV. ročník soutěže fyzikální olympiády . . .	35

<i>Úlohy k řešení:</i>	26, 73, 74, 124, 167, 172, 283
<i>Redakční sdělení:</i>	48, 432

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. Jazyková úprava:

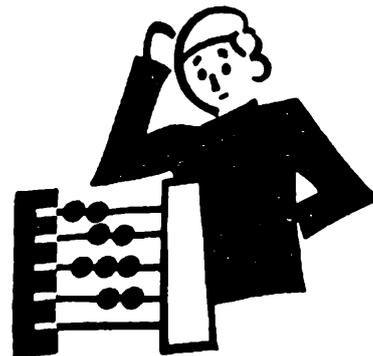
dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n.p. v Praze. 1963.

Matematika

Pavel Kršňák, P. I., Banská Bystrica:

Herónov vzorec a niektoré aplikácie



Pri rôznych úlohách často sa stretávame s výpočtom obsahu P trojuholníka ABC , ktorý je daný stranami a, b, c . Obsah P počítame podľa známeho Herónovho vzorca, ktorý je nasledovný

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

V ďalšej časti ukážeme jeden spôsob jeho vyvedenia.

Pre stručnejší zápis strany trojuholníka ABC budeme označovať nasledovne: $BC = a, AC = b, AB = c$. Výšky prislúchajúce jednotlivým stranám a, b, c budeme označovať v_a, v_b, v_c , kolmý priemet vrcholov A, B, C na protilahlé strany, resp. na ich predĺženie A', B', C' .

Skorej než pristúpime k samotnému odvodeniu Herónovho vzorca dokážeme platnosť nasledujúcich pomocných viet:

Pomocná veta 1. V ľubovoľnom trojuholníku ABC rozdiel štvorcov dĺžok dvoch strán sa rovná rozdielu štvorcov dĺžok ich pravouhlých priemetov na stranu tretiu.

Ak označíme c_1, c_2 priemety strán a, b na stranu c , potom je $a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2$.

Dôkaz. Voľme označenie strán trojuholníka tak, aby bolo $a \geq b$. Potom uhol $\alpha = \sphericalangle BAC$ je buď ostrý (obr. 1a), alebo pravý (obr. 1b), alebo tupý (obr. 1c). V každom z týchto troch možných prípadov platí

$$\begin{aligned} a^2 &= c_1^2 + v_c^2 \\ b^2 &= c_2^2 + v_c^2. \end{aligned}$$

Teda $a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2$. To bolo treba dokázať.

P o m o c n á v e t a 2. Za označenia zvoleného v pomocnej vete 1 platí pre strany trojuholníka vzorec

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2cc_1$$

D ô k a z. Pre pravouhlé priemety c_1, c_2 strán a, b na stranu c (resp. na jej predĺženie) platí buď $c_2 = c - c_1$ (obr. 1a, b), alebo $c_2 = c_1 - c$ (obr. 1b, c).

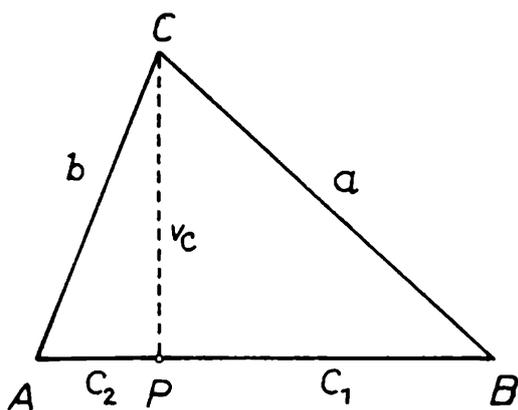
Pretože je $(p - q)^2 = (q - p)^2 = q^2 - 2pq + p^2$, v oboch prípadoch dostaneme

$$c_2^2 = c^2 - 2cc_1 + c_1^2.$$

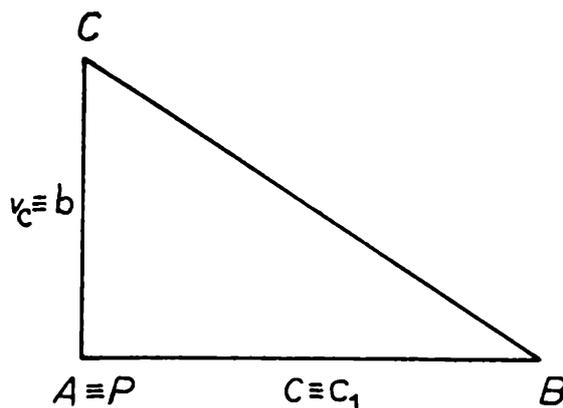
Podľa pomocnej vety 1 je teda

$$a^2 - b^2 = c_1^2 - (c^2 - 2cc_1 + c_1^2), \text{ čiže}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2cc_1.$$



Obr. 1a



Obr. 1b

P o m o c n á v e t a 3. Výška v_c každého trojuholníka o stranách a, b, c sa vypočíta podľa vzorca

$$v_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

D ô k a z. V každom trojuholníku (viď obr. 1a, b, c,) platí

$$v_c^2 = a^2 - c_1^2 = (a + c_1)(a - c_1) \quad (1)$$

Z pomocnej vety 2 plynie

$$c_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \quad (2)$$

Dosadením rovnosti (2) do rovnosti (1) dostaneme

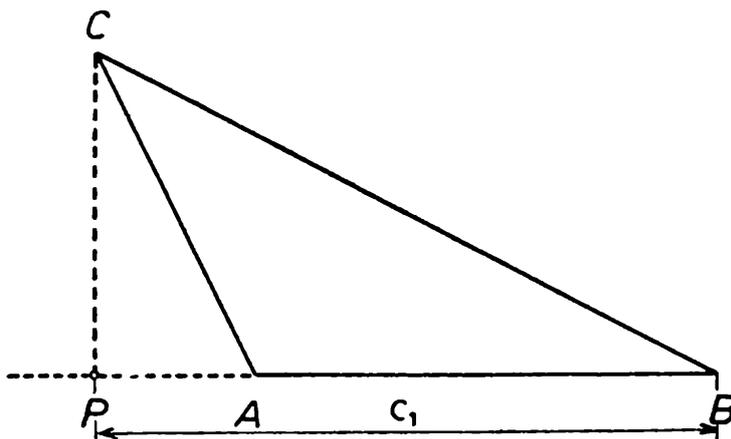
$$v_c^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}.$$

Po úprave

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{1}{4c^2} \left[(a+c)^2 - b^2 \right] \cdot \left[b^2 - (a-c)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4c^2} (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c). \end{aligned} \quad (3)$$

Ak označíme $\frac{a+b+c}{2} = s$, potom je

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s \\ a+c-b &= 2(s-b) \\ b+a-c &= 2(s-c) \\ b-a+c &= 2(s-a). \end{aligned}$$



Obr. 1c

Ak tieto hodnoty dosadíme do (3), dostaneme

$$v_c^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot 2s \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-a).$$

Z tejto rovnosti vyplýva

$$v_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (4)$$

V e t a 1. Obsah P trojuholníka ABC o stranách a, b, c sa vypočíta podľa vzorca (Herónov vzorec)

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

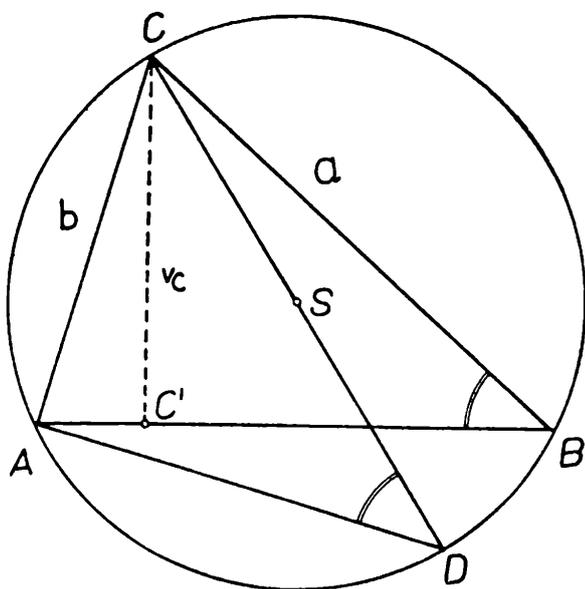
kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

D ô k a z. Vieme, že obsah P trojuholníka sa dá vypočítať podľa vzorca $P = \frac{1}{2} c \cdot v_c$. Ak do tejto rovnosti dosadíme za v_c rovnosť (4), dostaneme

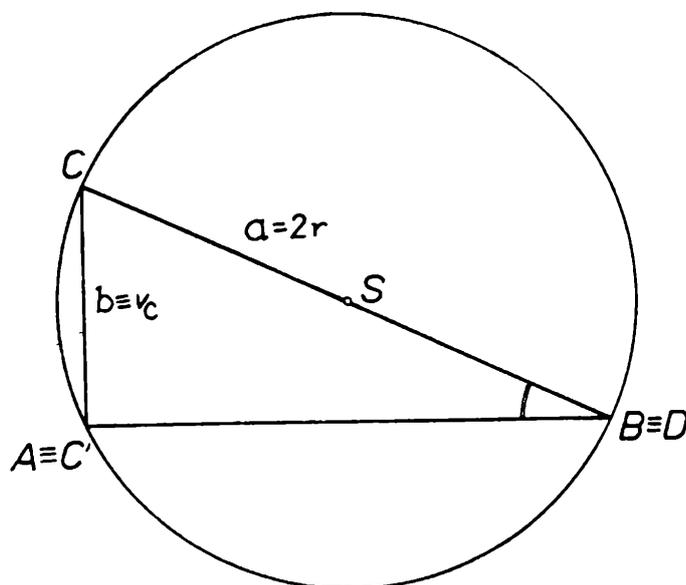
$$P = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{teda } P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pomocnú vetu 3 s výhodou môžeme použiť na určenie polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC . K tomu dokážeme platnosť nasledujúcej pomocnej vety.



Obr. 2a



Obr. 2b

P o m o c n á v e t a 4. V trojuholníku ABC je súčin jeho dvoch strán rovný súčinu výšky kolmej na stranu tretiu a priemeru kružnice opísanej trojuholníku ABC . Ak označíme polomer kružnice opísanej písmenom r , potom je $ab = v_c \cdot 2r$.

D ô k a z. Trojuholník ABC má pri vrchole A uhol ostrý (obr. 2a), alebo pravý (obr. 2b), alebo tupý (obr. 2c). V každom prípade platí

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC \text{ (podľa vety o obvodových uhloch),}$$

$$\sphericalangle CC'B = \sphericalangle CAD \text{ (podľa vety Thaletovej).}$$

Teda podľa vety (u, u) je $\triangle CAD \sim \triangle CC'B$, to znamená, odpovedajúce strany musia byť úmerné, čiže musí platiť

$$CA : CC' = CD : CB$$

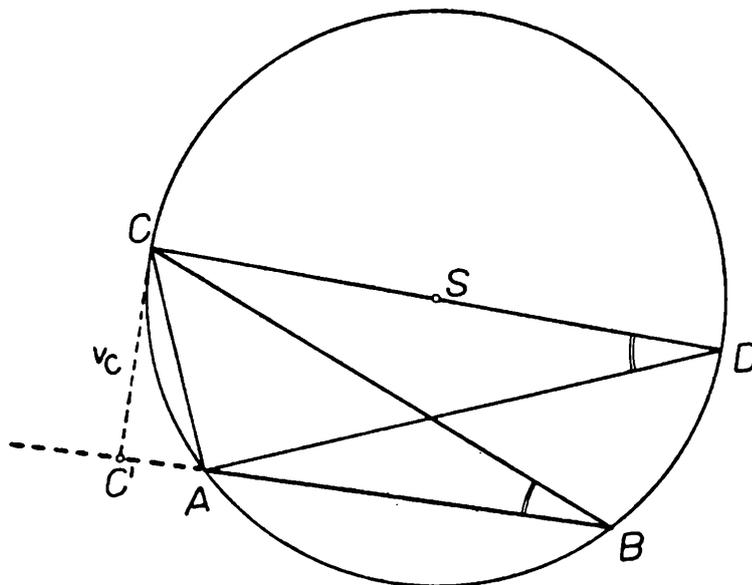
$$CA \cdot CB = CC' \cdot CD$$

$$ab = v_c \cdot 2r.$$

V e t a 2. Polomer r kružnice opísanej trojuholníku o stranách a, b, c je daný rovnosťou

$$\text{a) } r = \frac{abc}{4P},$$

$$\text{b) } r = \frac{ab}{2v_c}.$$



Obr. 2c

D ô k a z. a) Podľa pomocnej vety 4 platí

$$ab = v_c \cdot 2r.$$

Dosadením rovnosti (4) dostávame

$$ab = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot 2r,$$

z toho vyplýva

$$r = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

teda podľa vety 1

$$r = \frac{abc}{4P}. \quad (5)$$

b) Vieme, že pre obsah trojuholníka môžeme písať $P = \frac{1}{2} c \cdot v_c$,

z toho vyplýva

$$\frac{c}{2} = \frac{P}{v_c} \quad (6)$$

Ak vzťah (6) dosadíme do rovnosti (5), dostaneme

$$r = \frac{ab}{2P} \cdot \frac{P}{v_c} = \frac{ab}{2v_c}.$$

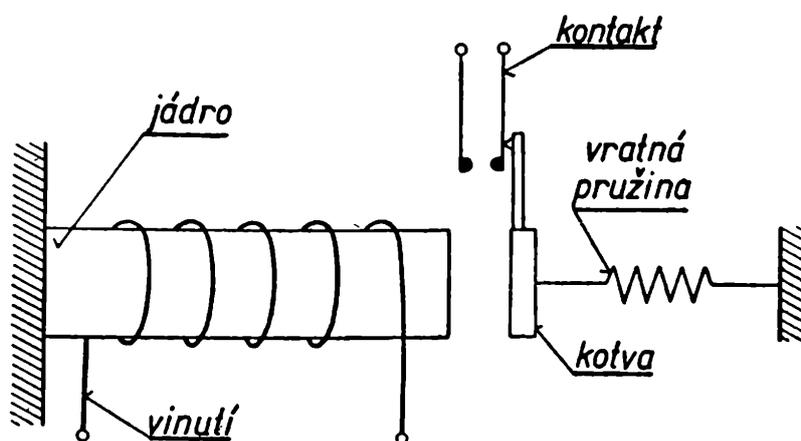
Tejto rovnosti často používame na určenie polomeru opísanej kružnice trojuholníka ABC .

Inž. Jiří Klír, Výzkumný ústav matematických strojů,
Praha:

Logické obvody

Tento článek patří do souboru článků o matematických strojích, které byly již dříve v Rozhledech uváděny. K jeho pochopení je třeba přečíst nejdříve článek Booleova algebra z 2. a 3. čísla loňského ročníku. Oba články spolu těsně souvisí.

Logickým obvodem je jakákoliv fyzikální soustava vyznačující se tím, že modeluje (zobrazuje) jisté logické vztahy, které můžeme většinou popsat vhodnou soustavou Booleových funkcí. V matematických strojích se téměř výhradně užívá logických obvodů elektrických, kde informace jsou zobrazeny elektrickými impulsy. Výklad omezíme proto pouze na tento druh obvodů.

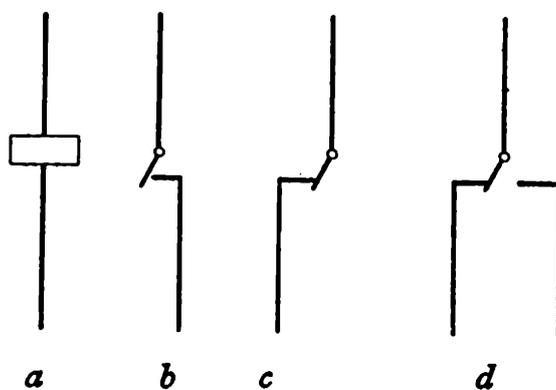


Obr. 1. Princip elektromagnetického relé.

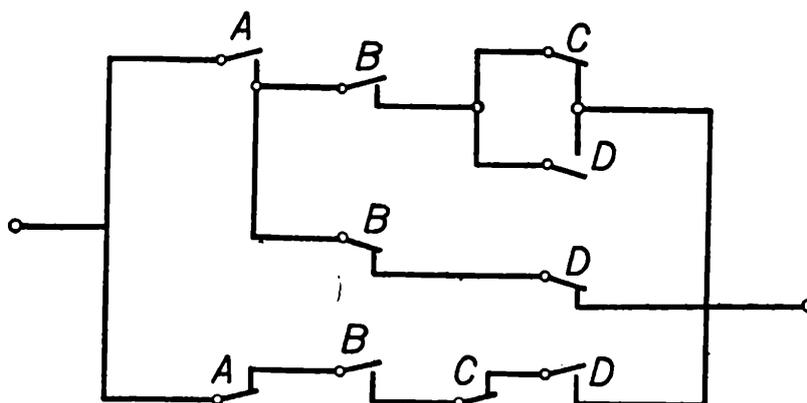
Logické obvody mohou být sestavovány z různých prvků. Nejstarším, dnes možno již říci klasickým prvkem logických obvodů v číslicových počítačích je elektromagnetické relé, které může mít nejrůznější konstrukční provedení. V každém případě má však relé z funkčního hlediska dvě charakteristické části: ovládací a ovládanou.

Ovládací část se u elektromagnetického relé skládá z ferro-

magnetického jádra s cívkou a z ferromagnetické kotvy s vratnou pružinou (obr. 1). Protéká-li cívkou elektrický proud, zmagnetuje se jádro a přitáhne k sobě kotvu (tzv. pracovní stav relé). Když proud cívkou přestane protékat, přestane být jádro zmagnetováno - jádro musí být proto z materiálu magneticky měkkého - a kotva je vrácena pružinou do své původní polohy (tzv. klidový stav relé).



Obr. 2. Způsob kreslení kontaktů a vinutí relé: a) vinutí, b) spínací kontakt, c) rozpínací kontakt, d) přepínací kontakt.



Obr. 3. Příklad kontaktního obvodu.

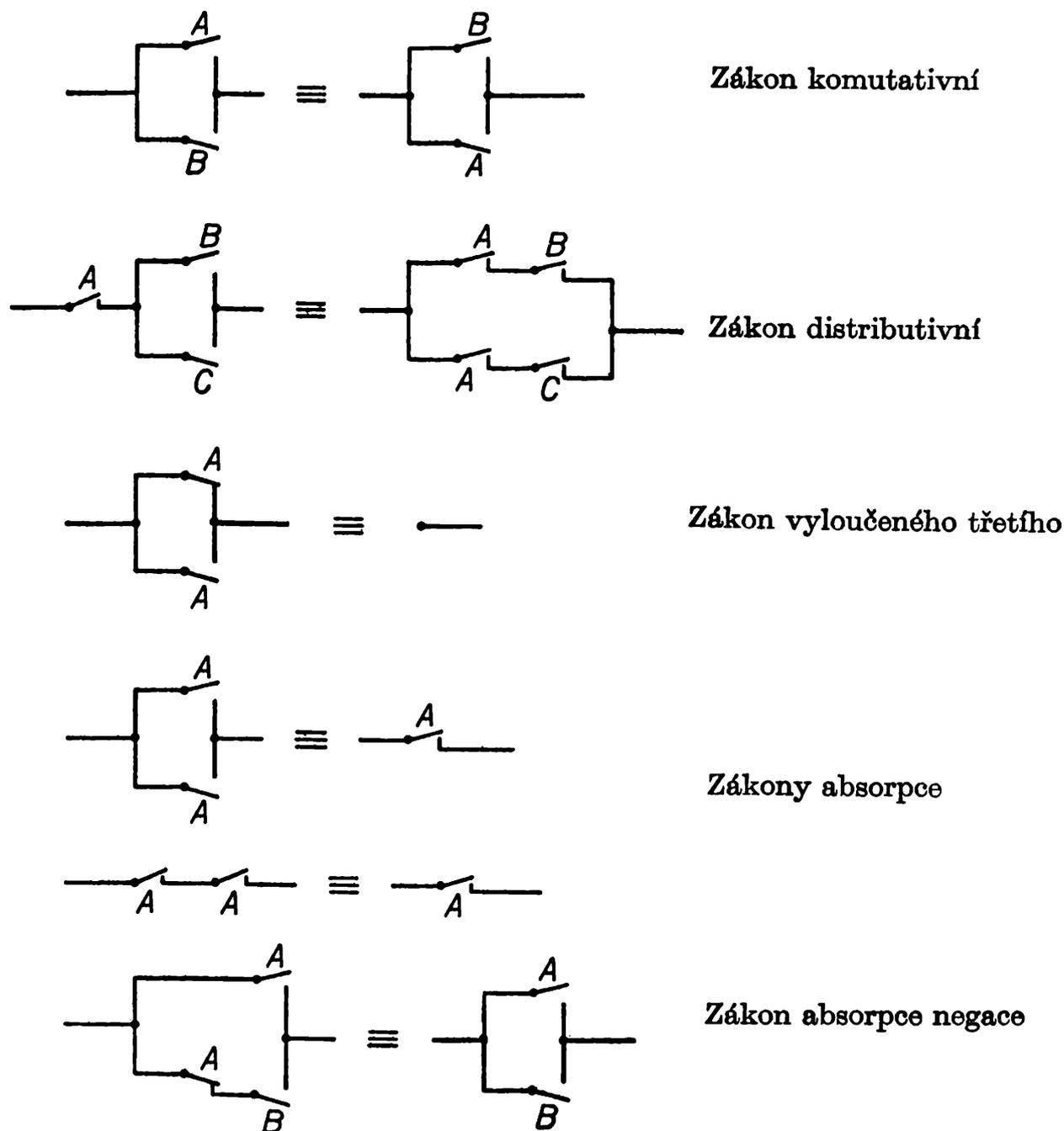
Ovládanou část relé tvoří soustava kontaktů. Kontakty jsou ovládány kotvou, která je při svém přitahu k jádru přepíná z jejich polohy klidové do polohy pracovní. Podle stavu v pracovní a klidové poloze existují dva základní typy kontaktů:

1. spínací v klidové poloze jsou rozpojeny, v pracovní poloze spojeny;
2. rozpínací v klidové poloze jsou spojeny, v pracovní poloze rozpojeny.

Sdružením kontaktů obou typů v kontakt jediný dostaneme pak kontakt přepínací. Způsob kreslení kontaktů a vinutí relé ve schématech je naznačen na obr. 2.

Stavy jistého relé a všech jeho kontaktů je možno přiřadit k hodnotám jistého výroku či Booleovy proměnné - viz článek [1] a to

v podstatě dvěma způsoby. Zpravidla se užívá takové přiřazení, že pravdivému výroku (označenému symbolem 1) odpovídá pracovní stav relé (nebo průchodný obvod, složený z kontaktů relé) a nepravdivému výroku (označenému symbolem 0) odpovídá klidový stav relé (nebo neprůchodný obvod, složený z kontaktů relé).



Obr. 4. Kontaktní vyjádření některých zákonů Boolovy algebry.

Kontaktními obvody lze realizovat elementární výrokové (Booleovy) funkce, tj. logický součet, součin a negaci tak, že:

negace je vyjádřena rozpínacím kontaktem, neboť ten je průchodný (pravdivý) v klidovém stavu relé, který odpovídá nepravdivému výroku;

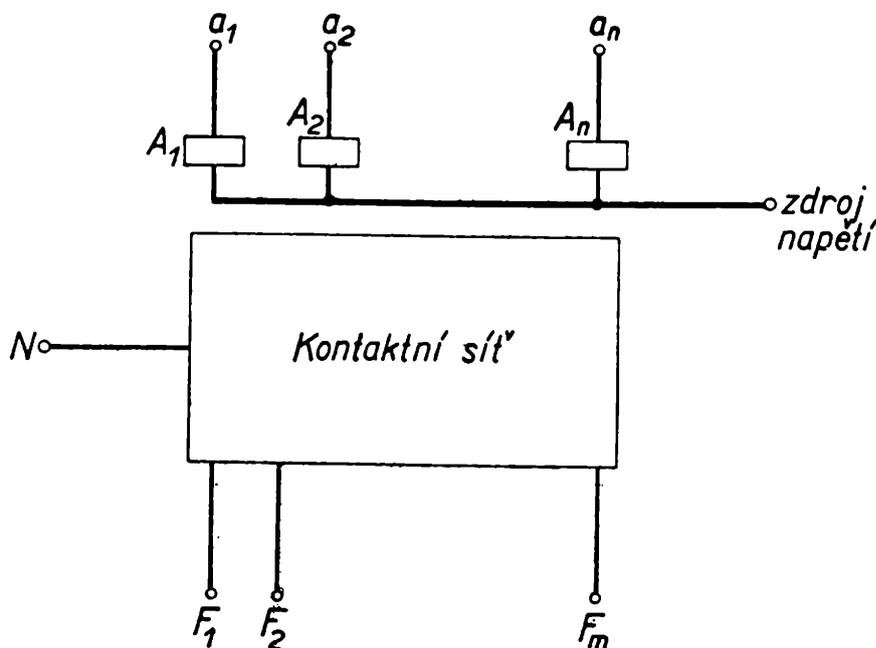
logický (Booleův) součet je vyjádřen paralelním spojením dvou kontaktů, neboť v tomto případě je obvod průchodný (pravdivý) ve všech případech, kdy je průchodný (pravdivý) alespoň jeden z obou kontaktů;

logický (Booleův) součin je vyjádřen sériovým spojením dvou kontaktů, neboť takový obvod je průchodný (pravdivý) pouze v případě, kdy jsou průchodné (pravdivé) oba kontakty současně.

Sériovým a paralelním spojováním spínacích a rozpínacích kontaktů je možno vyjadřovat libovolné Booleovy funkce. Na obr. 3 je např. zakreslen kontaktní obvod, odpovídající Booleově funkci

$$F = A [B(\bar{C} + D) + \bar{B}D] + \bar{A}BCD .$$

Pro kontaktní obvody platí stejné zákony, které jsme v článku [1] uváděli pro Booleovu algebru. Některé z nich jsou na obr. 4, kde pro ekvivalenci obvodů užíváme znaku \equiv .



Obr. 5. Princip dekodéru.

V číslicových počítačích se nejčastěji užívá tzv. *j e d n o d o b ý c h l o g i c k ý c h o b v o d ů*, kterým se někdy říká *d e k o d é r y*. Obecné schéma zapojení dekodéru je znázorněno na obr. 5. Na v s t u p y (vstupní relé) A_1, A_2, \dots, A_n přicházejí různé signály v podobě kombinací elektrického napětí na vodičích a_1, a_2, \dots, a_n (každý vodič má pouze dva stavy: *j e* nebo *n e n í* na něm napětí). Kontaktní síť má být zapojena tak, aby ke každému signálu na vstupu odpovídal jednoznačně určitý signál na výstupních vodičích F_1, F_2, \dots, F_m , který má opět podobu kombinace napětí. Napětí se na výstupní vodič dostává z napáječe N , který je trvale připojen ke zdroji napětí, přes vhodně zapojenou kontaktní síť.

Požadavky kladené na dekodér jsou obvykle zadány tabulkou, která vyjadřuje závislost výstupních kombinací napětí na kombinacích napětí vstupních, při čemž stav s napětím se označuje symbolem 1 a stav bez napětí symbolem 0. Hodnoty příslušející vstupním vodičům představují pak Booleovy proměnné a hodnoty příslušející výstupním vodičům jsou Booleovými funkcemi. Návrh dekodéru spočívá v převedení tabulkového vyjádření jednotlivých Booleových funkcí do algebraického tvaru. Získané algebraické tvary se pak snažíme co nejvíce zjednodušit, abychom ušetřili co nejvíce kontaktů.

Jako příklad navrhne jednoduchý dekodér o třech vstupech a třech výstupech, který je definován tabulkou na obr. 6. Ujijeme-li

A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Obr. 6. Tabulka požadavků na dekodér nakreslený na obr. 7.

postupu popsaného v článku [1], dostaneme následující rozvoje pro jednotlivé Booleovy funkce:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3, \\
 F_2 &= \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3, \\
 F_3 &= \overline{A_1} A_2 A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}.
 \end{aligned}$$

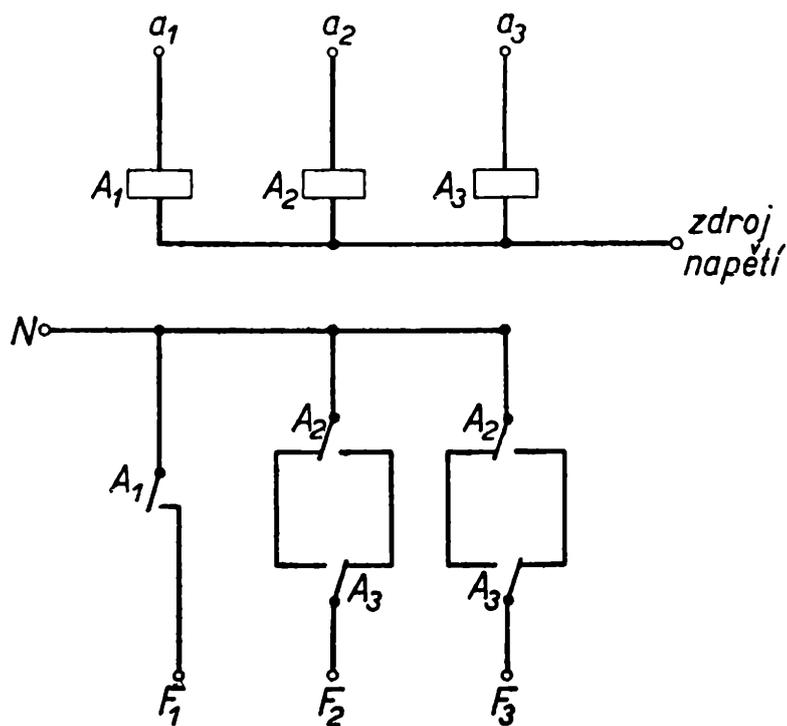
Užitím pravidel Booleovy algebry, která jsou uvedena v článku [1], můžeme tyto funkce zjednodušit až na výrazy:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= A_1, \\
 F_2 &= A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2, \\
 F_3 &= A_2 \overline{A_3} + \overline{A_2} A_3.
 \end{aligned}$$

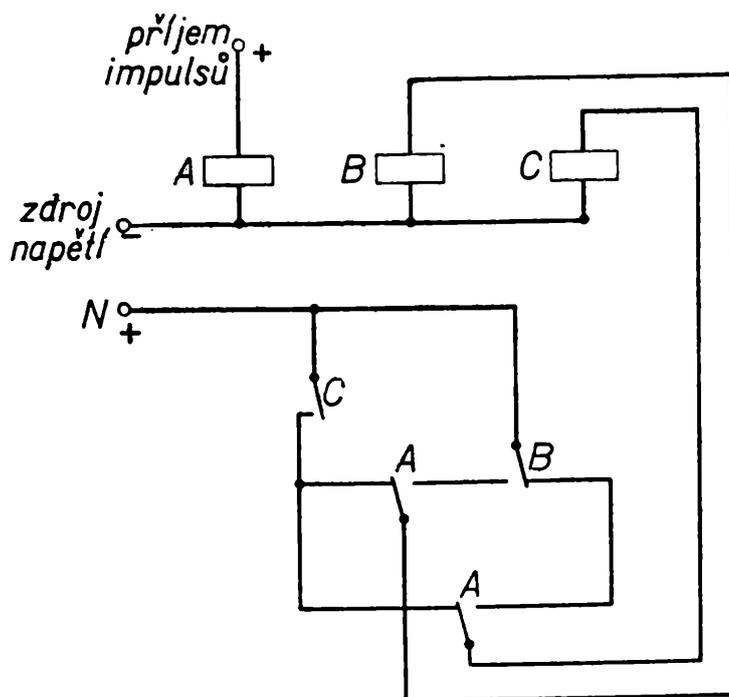
Doporučujeme, aby si čtenář zjednodušení sám provedl.

Schéma dekodéru je na obr. 7. Určené funkce F_1 , F_2 a F_3 jsou zde zobrazeny kontaktní sítí, která vhodně spojuje odpovídající výstupy s napáječem N .

Kromě jednodobých logických obvodů (dekodérů) existují ještě logické obvody mnohobobé. U nich jsou některé výstupy spojeny zpětnými vazbami s některými vstupy. Kombinace hodnot na



Obr. 7. Schéma dekodéru podle tabulky na obr. 6.



Obr. 8. Schéma jednoduchého mnohobého obvodu.

výstupech není pak závislá jednoznačně na kombinaci hodnot na vstupech, ale je dána celou předchozí posloupností stavů vstupních hodnot. Problematika mnohodobých obvodů je však značně složitá a vymyká se zaměření tohoto článku. Vážnější zájemce odkazujeme na práce, uvedené v seznamu literatury pod čísly [3], [4], [5].

Jako ilustraci uvedme alespoň schéma velmi jednoduchého mnohodobého logického obvodu na obr. 8. Jde o malý čítač impulsů, u něhož kombinace stavů relé B a C závisí na tom, kolik napěťových impulsů přijalo relé A . Stavů relé se mění podle tabulky:

A	B	C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0
0	0	0

Při přijímání dalších impulsů na vstupu A se uvedená posloupnost stavů relé B a C stále stejně cyklicky opakuje.

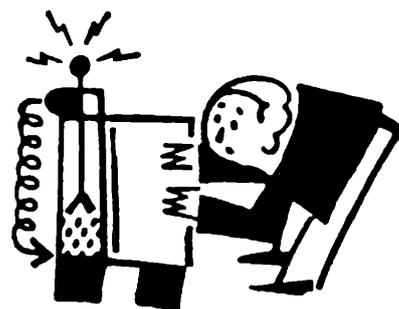
Relé není jediným možným prvkem logických obvodů, neboť místo něho může být použita i jakákoliv jiná fyzikální soustava, která je schopna nabývat dvou vzájemně odlišitelných stavů. V současné době se pro logické obvody číslicových počítačů užívá zejména elektronek různých druhů nebo různých speciálních prvků vyvinutých pro tento účel. Způsob návrhu struktury logických obvodů zůstává však v podstatě stejný jako u obvodů reléových.

Literatura:

- [1] *Klír J.*: Booleova algebra. Rozhledy mat.-fyz., 1960/61, čís. 2 a 3.
- [2] *Klír J.*: Matematické stroje. Rozhledy mat.-fyz., 1959/60, čís. 1.
- [3] *Klír J., Seidl L.*: Metody analýzy a syntézy reléových obvodů. Slaboproudý obzor, 1958, čís. 7, 8 a 9.
- [4] *Gavrilov M. V.*: Teorie reléových kontaktových schémat. SNTL, Praha 1953.
- [5] *Roginskij V. N.*: Elementy strukturnovo sinteza relejnych schem upravlenija. Izdatelstvo Akademii nauk SSSR. Moskva 1959.

Oldřich Lepil, Gottwaldov:

Hranice aerodynamického letu



Již několikrát pronikl člověk za hranice atmosféry a na umělých družicích dosáhl vzdáleností několika stovek kilometrů od povrchu Země. Let v této výšce umožnil raketový motor, který není odkázán na ovzduší a jeho reaktivní tažná síla se uplatní i v prostoru, kde již aerodynamické síly nepůsobí. Jak je tomu však s letadly opatřenými křídly? Mohou i tyto letouny vzlétat do libovolných výšek? Pokusme se nalézt na tuto otázku odpověď.

Byli jsme již svědky mnoha výškových i rychlostních rekordů, dosažených na nejmodernějších letadlech. Tak v roce 1945 byl maximální dostup letadel 12 000 až 13 500 m a jejich největší rychlost 600 až 700 km . h⁻¹. Použitím turboreaktivních motorů dostup i maximální rychlost prudce vzrostla. V letech 1945 až 1950 vzlétala sériová letadla do výšek 15 až 16 km a dosahovala rychlosti 1000 až 1100 km . h⁻¹.

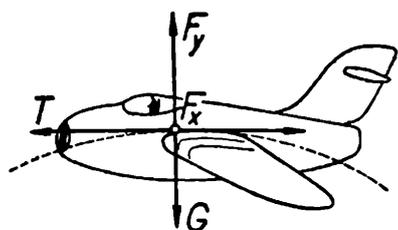
Další růst rychlosti, a tím i dostup letadel se zpomalil, když bylo dosaženo rychlosti srovnatelné s rychlostí zvuku. Při těchto rychlostech bylo pozorováno prudké zvýšení odporu, který klade letadlu ovzduší a který byl současně spojen s poklesem vztlaku, udržujícím letadlo v přímém letu. Letadla se stávala obtížně ovladatelná, vznikaly vibrace a jiné nebezpečné úkazy. Trvalo určitou dobu než byl celý úkaz této tzv. z v u k o v é b a r i é r y prozkoumán, než byly navrženy vhodné tvary letounů i nové konstrukce turboreaktivních motorů velmi značných výkonů.

Po překonání zvukové bariéry rychlost i dostup letadel dále rostly. V roce 1958 byl vytvořen na americké stíhačce F-104 rychlostní rekord 2259 km . h⁻¹ a bylo dosaženo rekordní výšky 27,8 km. Ale již v následujícím roce překonali tyto rekordy sovětsí piloti Iljušin na letadle T-431 dosažením výšky 28 760 m a Mosolov, který s letadlem E 66 vyvinul rychlost 2508 km . h⁻¹. Konečně 28. dubna 1961 dosáhl G. Mosolov na letadle téhož typu výšky 34 200 m.

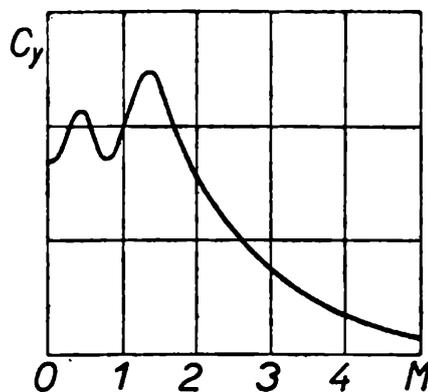
Z tohoto přehledu by se zdálo, že lety okřídlených letounů nejsou nijak ohraničeny. Rozeberme však tuto otázku z fyzikálního stanoviska.

Let v ovzduší je umožněn silami, které vznikají při obtékání nosných ploch letadla pohybujícího se ve vzduchu určitou rychlostí. Je tedy samozřejmé, že výška i rychlost letu bude určována v podstatě tímto vzájemným působením mezi vzduchem a letadlem. Vlastnosti vzduchu se však s výškou pronikavě mění. Je-li například na hladině moře atmosférický tlak vzduchu 1 at a hustota $0,125 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, pak ve výšce 20 km je tlak pouze 0,054 at a hustota $0,009 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Ve výškách 80 až 100 km je již tlak i hustota vzduchu zanedbatelně malá.

V běžných úvahách o pohybu letadla vzduchem považujeme vzduch za spojité prostředí. Víme však, že vzduch je složen z velkého množství částic, molekul, vykonávajících chaotický tepelný pohyb. Ve velkých výškách, kde je počet molekul v objemové jednotce malý, začne se projevovat i nespojitost vrstvy atmosféry.



Obr. 1. Síly, působící na letadlo při letu.



Obr. 2. Závislost součinitele vztlakové síly na rychlosti letadla.

Nejjednodušším pohybem letadla je přirozeně let stálou rychlostí po přímce. V tom případě jsou všechny síly, působící na letadlo, podle prvního pohybového zákona v rovnováze. Které síly to vlastně jsou, vidíme na obr. 1.

Vztlaková síla F_y , vznikající při obtékání křídel letadla, udržuje v rovnováze celkovou tíhu letadla G a umožňuje tak aerodynamický let. Druhá síla F_x , která vzniká při pohybu v ovzduší, je nežádoucí, protože je namířena proti pohybu. Tento tzv. č e l n ý o d p o r musí být překonáván tahem motoru.

Obě aerodynamické síly můžeme teoreticky vyjádřit rovnicemi

$$F_x = c_x \rho S \frac{v^2}{2},$$

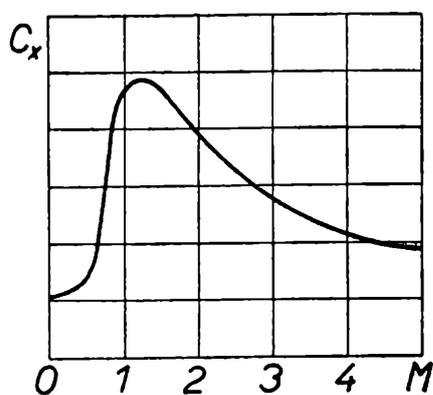
$$F_y = c_y \rho S \frac{v^2}{2}$$

V těchto rovnicích je c_x - součinitel čelního odporu; c_y - součinitel vztlakové síly; ρ - hustota vzduchu; S - plocha křídel; v - rychlost

letadla. Obě rovnice jsou základními vztahy pro výpočet aerodynamických sil a momentů při nízkých rychlostech, tj. značně nižších než je rychlost zvuku. Při těchto rychlostech součinitelé c_x a c_y prakticky nezávisí na rychlosti a jsou určeny především vnějšími tvary letadla a úhlem náběhu, tj. úhlem mezi osou profilu křídla a směrem letu.

Složitější situace nastává při velmi vysokých rychlostech. Tyto rychlosti letadel jsou vyjadřovány Machovými čísly M . Číslo M udává, kolikrát je rychlost letadla větší nebo menší než je rychlost zvuku. Letadlo letící podzvukovou rychlostí má tedy $M < 1$; při letu rychlostí zvuku je $M = 1$ a při větších rychlostech je rychlost letadla vyjádřena $M > 1$.

Při rychlostech $M \geq 1$ se mění především hodnota součinitelů c_x a c_y . Součinitel vztlakové síly poněkud narůstá již při $M = 0,6$ až $0,8$, potom však prudce klesá a při M kolem 1 znovu roste. Při větších rychlostech plynu klesá. Celkový průběh této závislosti je znázorněn na obr. 2.



Obr. 3. Závislost součinitele čelního odporu na rychlosti letadla.

Průběh hodnot součinitele čelního odporu je vcelku jednodušší. Při $M = 0,8$ až $0,9$ začíná rychle narůstat, při $M = 1$ dosahuje maxima a potom zvolna klesá. Graf závislosti c_x na M je na obr. 3.

Je sice dosud ještě málo údajů o hodnotách obou součinitelů při rychlostech větších než $M = 5$, ale současné pokusy s raketovými letadly svědčí o dalším poklesu hodnot c_x i c_y .

Vraťme se nyní k našemu letadlu, letícímu rovnoměrným přímočarým pohybem. Při tomto pohybu musí být všechny síly v rovnováze a tak je vlastně vztlaková síla F_y rovna tíze letadla G a tažná síla motoru T , mířící zhruba ve směru letu, je opět rovna čelnímu odporu F_x .

Můžeme tedy napsat

$$G = c_y \rho S \frac{v^2}{2}, \quad (1)$$

$$T = c_x \rho S \frac{v^2}{2}. \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) jsou výchozími vztahy pro výpočet základních charakteristik letadla, například rychlosti a největší možné výšky letu, dostupů letadla, potřebné tažné síly hnací jednotky k dosažení požadovaných charakteristik atp.

Zamysleme se na základě předcházejících poznatků nad otázkou maximálního dostupu letadla při různých rychlostech letu. Vyjdeme z předpokladu, že máme k dispozici letoun vybavený motorem, schopným vyvinout libovolný tah. Pak vyplývá z rovnice (2), že naše letadlo může také vyvinout libovolnou rychlost. Úvahy provedeme rozborem rovnice (1), kterou však musíme poněkud upravit.

Je samozřejmé, že nás zajímá především let do velikých výšek, a to takových, že výška letadla nad zemským povrchem již není zanedbatelná ve srovnání s poloměrem Země. To současně také znamená, že ani let rovnoběžný se zemským povrchem nemůžeme považovat přesně za přímočarý. Letadlo vlastně letí po kružnici (na obr. 1 tečkovaně) o poloměru $r + h$, kde r je poloměr Země a h výška letadla nad zemským povrchem. Na letadlo potom působí vedle sil, které jsme dříve uvažovali, ještě odstředivá síla

$$F_0 = m \frac{v^2}{r + h},$$

kde m je hmota letadla.

Tak například při rychlosti $2000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ má zlomek $\frac{v^2}{r + h}$ číselnou hodnotu 0,047 a odstředivá síla představuje pouze asi 0,5 % váhy letadla. Avšak s růstem rychlosti odstředivá síla rychle roste a nelze ji zanedbat při výpočtech. Jestliže uvážíme odstředivou sílu, nabude rovnice (1) tvaru

$$G = c_y \rho S \frac{v^2}{2} + m \frac{v^2}{r + h}. \quad (3)$$

Pro hmotu letadla plyne z rovnice $G_0 = m g_0$ (G_0 - tíha letadla na zemském povrchu; g_0 - tíhové zrychlení), že $m = \frac{G_0}{g_0}$. Tíha letadla se ve velké výšce mění, poněvadž tíhového zrychlení ubývá. Platí rovnice

$$\frac{G}{G_0} = \left(\frac{r}{r + h} \right)^2 \Rightarrow G = G_0 \left(\frac{r}{r + h} \right)^2$$

Dosadíme do rovnice (3) za m a G , po úpravě vyjde

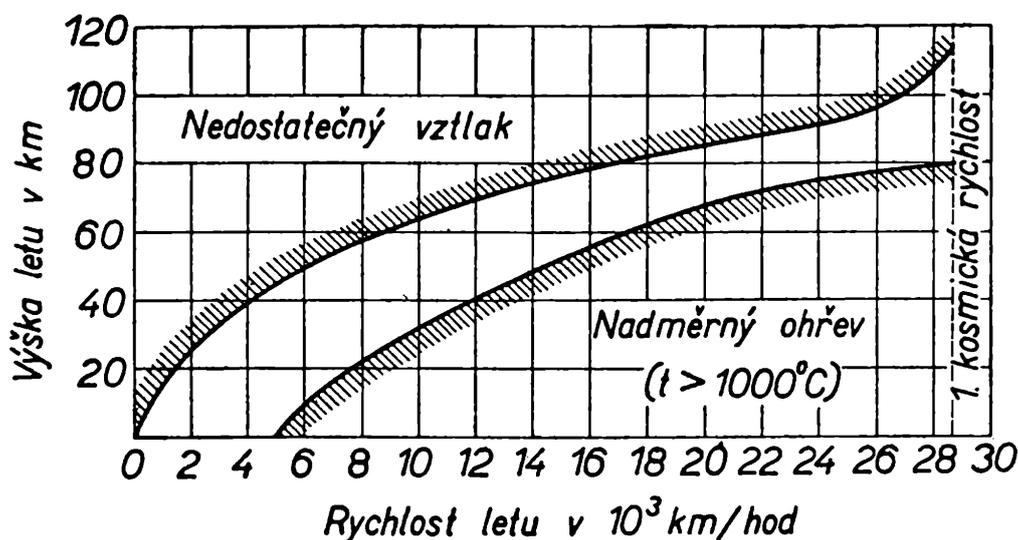
$$\left(\frac{r}{r + h} \right)^2 = v^2 \left[\frac{1}{2} c_y \rho \frac{S}{G_0} + \frac{1}{g_0} \cdot \frac{1}{r + h} \right]. \quad (4)$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme vypočítat pro každou výšku potřebnou rychlost nepřetržitého vodorovného letu v dané výšce, známe-li další členy rovnice, tj. některé parametry letadla. Pro každé měrné zatížení křídla $\frac{G_0}{S}$ a součinitele vztlakové síly c_y můžeme získat závislost mezi výškou a rychlostí letu.

Jedna možná závislost je naznačena na obr. 4 horní křivkou. Tato křivka představuje hranici nad níž není plynulý vodorovný let možný, poněvadž v této oblasti je váha letadla větší než součet vztlakové a odstředivé síly. Při zmenšení měrného zatížení křídla letadla a zvětšení c_y se bude tato hranice posouvat poněkud nahoru, při zvětšení zatížení a zmenšení c_y se bude snižovat. Charakter křivky se však nezmění.

Pomocí rovnice (4) můžeme také vypočítat první kosmickou rychlost, tj. rychlost potřebnou k vytvoření umělé družice Země. Je to vlastně rychlost v takové výšce, kde je hustota vzduchu zanedbatelná a aerodynamická vztlaková síla je prakticky rovna nule. Pak je v rovnici (4) první člen v závorce roven nule a po úpravě plyne pro první kosmickou rychlost známý vztah

$$v_k = r \sqrt{\frac{g_0}{r+h}}$$



Obr. 4. Hranice aerodynamického letu (pro určité $\frac{S}{G_0}$ a c_y).

Z uvedeného tedy vyplývá, že letadlo může teoreticky dosáhnout libovolné výšky, až se v krajním případě změní v umělou družici Země. Dostup letadla je ovšem vázán dosažením dostatečně vysoké rychlosti a tuto rychlost mohou dodat moderním letadlům pouze raketové motory. Po dosažení první kosmické rychlosti již není třeba dále zvyšovat rychlost, ba dokonce ve větších výškách bude tato rychlost, potřebná k letu rovnoběžně se zemským povrchem, postupně klesat.

Pro úplnost ještě připomeňme, že rekordní výšky uvedené v úvodu jsou vyšší než by odpovídalo závislosti na obr. 4. Tyto rekordy byly totiž vytvořeny krátkodobým letem po balistické křivce. Letadlo nabere potřebnou maximální rychlost v menší výšce než odpovídá hranici aerodynamického letu a potom přejde do strmého stoupání. Le-

tadlo pak poletí setrvačností po parabolické dráze za hranicemi aerodynamického letu, rychlost se přitom zmenšuje až letadlo dosáhne největší výšky nad Zemí.

Všimli jsme si především otázky dosažení největší výšky. Současně si však musíme uvědomit, že velmi rychlá letadla nemohou létat libovolnou rychlostí nízko nad Zemí. Existují jistá omezení rychlosti v malých výškách způsobená ohřevem povrchu letadla při styku se vzduchem. Toto omezení je nazýváno *tepelnou bariérou* a je naznačeno na obr. 4. Poloha tepelné bariéry na grafu je určena především vlastnostmi konstrukčních materiálů, z nichž jsou provedena křídla a trup letadla.

Prakticky to vlastně znamená, že dnešní letadla mohou plynule létat rychlostmi a ve výškách, vymezených oběma křivkami na obr. 4. Mimo tyto hranice jsou možné jen lety krátkodobé. Platí tedy pro aerodynamický let určitá omezení. Člověk se však těchto omezení nezalekl a jeho pronikání do prostoru nezná hranic.

Inž. dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti někdy nebývá studenty dostatečně jasně chápán, ačkoliv jde o fyzikální veličinu zcela názornou a srozumitelnou. Zopakujme si proto význam této důležité veličiny.

Hmotový moment setrvačnosti, nebo krátce *moment setrvačnosti* J , má při rotačním pohybu těles obdobný význam jako hmota (tj. velikost hmoty nebo též hmotnost) m při pohybu posuvném (translačním). Moment setrvačnosti nějakého tělesa je veličinou, která vystihuje, jak je jeho h m o t a rozložena vzhledem k ose rotace. Definiční vztah můžeme psát ve tvaru

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2, \quad (1)$$

kde m_i je hmota i -té části tělesa a r_i vzdálenost (těžiště) této části od osy rotace. Vzdálenost r_i bychom měřili ve směru kolmém k rotační ose.

Je-li ρ hustota všech částí vyšetřovaného tělesa, lze také psát

$$m_i = \rho \cdot V_i, \quad (2)$$

kde V_i je objem i -té části tělesa. Vztah (1) můžeme podle toho psát také ve tvaru

$$J = \rho \sum_{i=1}^n V_i \cdot r_i^2, \quad (3)$$

kde výraz za sumačním znaménkem vystihuje, jak je o b j e m vyšetřovaného tělesa rozložen vzhledem k rotační ose. Podle analogie s definicí (hmotového) momentu setrvačnosti můžeme tento výraz nazvat *objemovým momentem setrvačnosti*, značeným J_V . Protože tedy platí

$$J_V = \sum_{i=1}^n V_i \cdot r_i^2, \quad (4)$$

lze rovnici (3) psát také ve tvaru

$$J = \rho \cdot J_V. \quad (5)$$

Zcela analogicky bychom mohli *plošným (průřezovým) momentem setrvačnosti*, značeným na rozdíl od předešlých J_S , nazvat veličinu, která by vystihovala, jak je p l o c h a (plošný obsah, resp. průřez) rozložena vzhledem k nějaké zvolené ose. Zpravidla se přitom jedná o (omezenou) plochu rovinnou a o osu, která v této rovině leží, případně, jež je k ní kolmá. Definiční vztah pro plošný moment setrvačnosti podle toho zní

$$J_S = \sum_{i=1}^n S_i \cdot r_i^2, \quad (6)$$

kde S_i je plošný obsah i -té části vyšetřované plochy a r_i (kolmá) vzdálenost těžiště této části od osy rotace.

Momenty setrvačnosti, ať již hmotový, objemový, či plošný jsou tedy zcela srozumitelnou veličinou, jež ovšem při rychlejším studiu, zdá se být neprávem a ovšem zdánlivě jakousi záhadností. Na rozdíl od hmoty, s níž jsme na začátku provedli srovnání, má ovšem moment setrvačnosti pro totéž těleso neproměnnou hodnotu jen tehdy, nemění-li se jeho tvar, rozměry nebo hustota, či vztažná rotační osa.

Tak např. vlivem teplotní roztažnosti mění se při změně teploty moment setrvačnosti kyvadla nebo setrvačky hodin. Tím se ovšem mění i doba kyvu a chod hodin. Abychom tento nežádoucí vliv vhodně paralyzovali, je zapotřebí použít kompenzace (např. bimetalické), nebo pro toto ústrojí volit takové materiály, jejichž teplotní roztažnost je malá (např. invar).

Je-li α teplotní roztažnost (součinitel teplotní roztažnosti) materiálu nějakého tělesa, jehož moment setrvačnosti vůči určité ose je při teplotě τ_1 roven J_0 , pak při jiné teplotě τ_2 můžeme moment setrvačnosti J téhož tělesa vůči stejné ose vypočítat ze vztahu

$$J = J_0 (1 + \alpha \Delta \tau)^2, \quad (7)$$

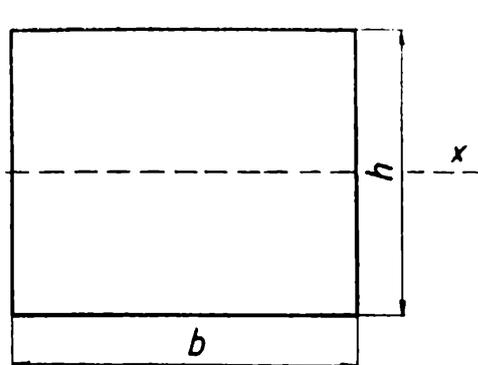
kde $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1$. Pokuste se sami odvodit si tento jednoduchý vzorec.

Zvolme si u nějakého tělesa osu rotace a vypočtěme si jeho moment setrvačnosti k této ose. Chceme-li nyní určit moment setrvačnosti téhož tělesa, za stejných podmínek, pouze k jiné ose, která je rovnoběžná s osou původní, použijeme tzv. *Steinerovy věty*, která rovnicí vyjádřena zní

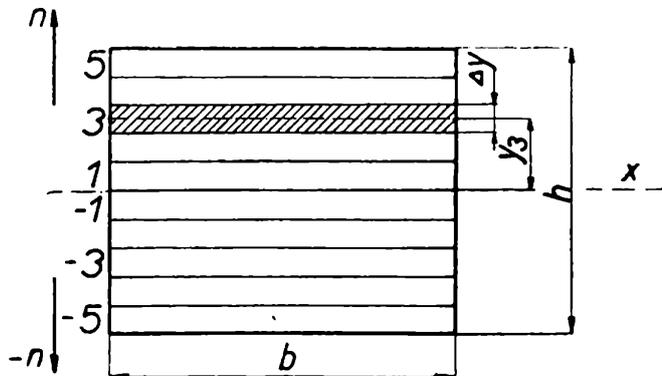
$$J_2 = J_1 + m \cdot a^2 \quad (8)$$

Při tom značí J_1 známý moment setrvačnosti k původní ose, J_2 hledaný moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou původní, a kol-

mou vzdálenost obou os a m hmotu tělesa, jehož moment setrvačnosti vyjadřujeme. Kdybychom si provedli výpočty pro několik rovnoběžných os, zjistili bychom, že nejmenší hodnotu bude mít moment setrvačnosti (uvažovaný pro různé osy daného směru) vzhledem k ose procházející těžištěm tělesa. Ovšem pro různé směry os procházejících těžištěm téhož tělesa, bude mít moment setrvačnosti obecně různé hodnoty. Tak bychom



Obr. 1.



Obr. 2.

došli k tzv. hlavním momentům setrvačnosti a k elipsoidu setrvačnosti. O tom však podrobněji až někdy jindy.

Vypočteme si jako příklad plošný (průřezový) moment setrvačnosti obdélníkového průřezu (délky stran b a h , viz obr. 1) vzhledem k ose x procházející těžištěm průřezu a rovnoběžné se stranou délky b .

Rozdělme si vyšetřovaný průřez na úzké proužky stejné šířky Δy , rovnoběžné s osou x (obr. 2). Kolmá vzdálenost těžiště i -tého proužku budiž y_i . Podle (6) můžeme psát

$$J_{S(x)} = \sum S_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=-n}^n b \cdot \Delta y \cdot y_i^2 = 2 \cdot b \sum_{i=1}^n \Delta y \cdot y_i^2 \quad (9)$$

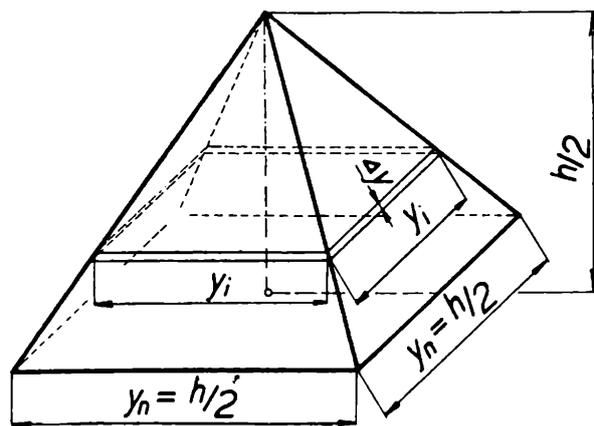
Protože y_i roste lineárně od nuly do $h/2$, je suma $\sum_1^n \Delta y \cdot y_i^2$ rovna objemu jehlanu o čtvercové podstavě strany $h/2$ a výšce rovněž $h/2$, čili (viz též obr. 3)

$$\sum_{i=1}^n \Delta y \cdot y_i^2 = \frac{1}{3} y_n^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} h^3 = \frac{1}{24} h^3 \quad (10)$$

Po dosazení do rovnice (9) dostáváme

$$J_{S(x)} = 2 \cdot b \cdot \frac{1}{24} h^3 = \frac{1}{12} b \cdot h^3, \quad (11)$$

což je hledaný výsledek.



Obr. 3.

Horské observatoře a jejich význam v meteorologii

Novodobá meteorologická měření a pozorování, založená na poznatku, že meteorologie je fyzikou atmosféry, začala se konat v 18. století. Jedna z nejstarších meteorologických stanic ve střední Evropě byla např. v pražském Klementinu. Její vznik, v osmdesátých letech 18. stol., je spojen se jmény matematiků a astronomů tehdejší pražské university, Steplingem a Strnadem. Na mezinárodně srovnatelnou základnu se meteorologická pozorování dostala ustavením vědecké meteorologické společnosti *Societas Meteorologica Palatina* v Mannheimu. R. 1789 organizovala tato společnost první evropskou mezinárodní meteorologickou staniční síť s úkolem shromažďovat poznatky o fyzikálních veličinách v přízemní vrstvě atmosféry.

Záhy však začali meteorologové pociťovat naléhavou nutnost doplnit plošnou přízemní analýzu povětrnostních dějů i poznatky a rozborem z trojrozměrného prostoru. Čím dále tím více bylo totiž zřejmé, že počasí a podnebí při zemském povrchu je výsledkem, projevem a, možno říci, odrazem fyzikálních dějů odehrávajících se ve vyšších vrstvách zemského ovzduší. Musela proto i meteorologie jít doplňovat svá poznání co možná vysoko. Před vynálezem letadla (ať již aerostatu - balónu či aerodynu - letounu) zbývala jediná možnost - vrcholky vysokých hor.

V dnešní době, kdy máme k dispozici četná měření letadlová a pravidelné údaje radiosond (je to miniaturní meteorologická stanice měřící zpravidla teplotu, vlhkost, tlak vzduchu a směr a rychlost větru, získané hodnoty předává vysílačkou na svou základnu; je vypouštěna v pravidelných intervalech několikrát denně na balónu a dosahuje výšek 20 až 40 km nad zemí) je zdánlivě již vyřešen problém získávání výškových meteorologických dat moderními prostředky.

Jsou však taková měření a pozorování, která nelze radiosondami ani letadly provádět. Vyžadují totiž dlouhodobou registraci meteorologických veličin na jednom místě, případně i přítomnost odborníka, kterou nemůže vždy automat nahradit.

Postupně proto vznikaly v 19. i v našem století na vrcholech hor horské meteorologické observatoře. Jak jsme se již zmínili, byly dříve prakticky jediným zdrojem informací o meteorologických dějích ve vyšších hladinách atmosféry a sloužily k základům poznávání vertikální struktury zemského ovzduší. Vynálezem letadla, balónu s posádkou a konečně především objevem radiosondy (Molčanov v SSSR v třicátých letech)

byl zdánlivě jejich význam odsunut do pozadí. Brzy se však poznalo, že tomu tak není.

Horské meteorologické stanice a observatoře poskytují totiž jedinečné možnosti být přítomen bez časového omezení přímo tam, kde se počasí a jeho důležité složky vytvářejí. Vrcholy hor mají proudění vzduchu málo ovlivněné zemským povrchem, často se přímo na nich vyskytují oblaky, změny fyzikálních charakteristik vzduchu způsobené přísunem vzduchu teplejšího či chladnějšího, vzduchu o jiné vlhkosti atd. se na horách projevují mnohem výrazněji a bezprostředněji než v nížině, kde jsou ovlivněny termodynamickou setrvačností rozsáhlých ploch zemského povrchu.

Přehled některých horských observatoří u nás i ve světě

Místo	země	nadmořská výška v m
Lomnický štít	ČSSR	2633
Chopok	ČSSR	2026
Praděd	ČSSR	1492
Lysá hora	ČSSR	1324
Churáňov	ČSSR	1039
Milešovka	ČSSR	837
Svratouch	ČSSR	736
Fichtelberg	NDR (u hranic ČSSR)	1217
Sněžka	Polsko (” ”)	1606
Kasprowy Wierch	Polsko (” ”)	1988
Hohenpeissenberg	NSR (od 18. stol.)	977
Brocken	NDR	1142
Sonnblick	Rakousko	3106
Zugspitze	NSR (u rakouských hranic)	2960
Puy de Dome	Francie	1467
Weissfluhjoch	Švýcarsko	
Jungfrauojoch	Švýcarsko	3457
Bjelašnica	Jugoslávie	2067
Säntis	Švýcarsko	2500
Avilla	Španělsko	1100
Sulak	SSSR	3000
Alagez	SSSR	3260
Kazbegi	SSSR	3900
Mt. Washington	USA	
Manua Loa	Havajské ostrovy	4170

Mnohé moderní meteorologické disciplíny, např. studium struktury oblaků a jejich částic - vodních kapek a ledových krystalů, studium vývoje oblaků, studium záření a optických vlastností atmosféry a mnohé jiné lze s úspěchem provádět právě na horských observatořích. V takových případech jsou poměrně krátkodobá letadlová měření často nedostatečná a málo charakteristická. Slouží však naproti tomu jako doplněk observatorních měření, protože mají na druhé straně tu výhodu, že jsou

prováděna právě ve větší vzdálenosti od pevného zemského povrchu.

Rovněž v klasických meteorologických problémech, jako je studium vlivu hor na rozložení srážek v jejich okolí, studium měření srážek v členitém terénu vůbec vliv horstev na průběh počasí v bližších a vzdálenějších oblastech je nezbytná spolupráce horských meteorologických stanic.

I když je služba na takovýchto místech poměrně obtížná a někdy i nebezpečná (v létě silné bouřky, v zimě vichřice, závěje a námrazy), je velmi potřebná a pro ty, kteří ji někdy vykonávali je nezapomenutelně krásným zážitkem bezprostředního styku s přírodou. Někteří význační světoví odborníci v meteorologii dokonce požadují, aby všichni meteorologové prošli službou na některé vrcholové observatoři, aby se tak důvěrně seznámili s počasím a jeho projevy.

V Evropě se začala tradice horských meteorologických observatoří rozvíjet především koncem 19. století v Alpách. Dodnes pracují a stále slouží jak vědě, tak i meteorologickému provozu observatoře na vrcholu Zugspitze, na Sonnblicku, na Jungfraujochu, na Säntisu, vesměs v nadmořských výškách přes 3000 m. V září minulého roku (1961) se např. v rakouských Alpách konala mezinárodní meteorologická konference na oslavu 75. výročí práce observatoře na Sonnblicku (3106 m).

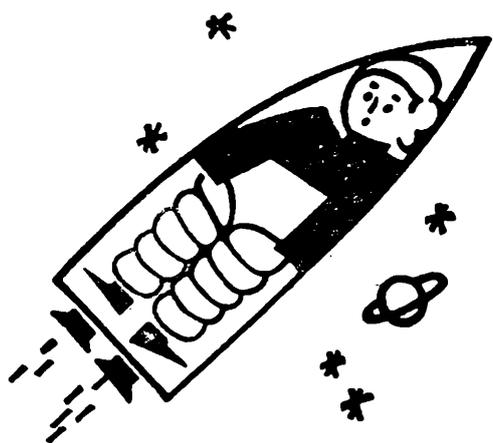
Mimo Evropu jsou nejznámější observatoře sovětské na Kavkaze, a americké (např. Mt. Washington). O tom, že ani při velmi rozvinutých technických možnostech výškových měření není úloha horských observatoří podceňována, svědčí též to, že v SSSR byly v posledních desetiletích zakládány některé kavkazské observatoře, a USA založily novou horskou observatoř v Pacifiku na ostrově Manua Loa (Hawaii) asi před 6 lety.

I na území Československé socialistické republiky existuje řada meteorologických stanic a několik observatoří v horách a na horských vrcholech. Nejvyšší z nich je na Lomnickém štítě (2633 m n. m.), která pracuje od r. 1940. Byla postavena těsně před druhou světovou válkou. Druhá nejvyšší observatoř je v nízkých Tatrách na Chopku (2006 m). Dalšími vrcholovými meteorologickými stanicemi u nás jsou např. Praděd (1492 m), Lysá hora (1326 m), Churáňov (1026m). I na nižších vrcholech jsou známé observatoře. Nejstarší vrcholovou meteorologickou observatoří u nás je Milešovka (837 m), která oslaví v r. 1964 již 60 let své nepřetržité činnosti. I když její absolutní nadmořská výška není imponující ve srovnání s výškami alpských či tatranských observatoří, přece jen její relativní výška (nad okolím je Milešovka jako ojedinělý kuželový vrchol vysunuta zhruba o 500 m) ji činí velmi cennou pro studium meteorologických dějů nad nížinou.

Stručný a zdaleka neúplný přehled několika horských observatoří uvádíme v tabulce na předchozí stránce.

Závěrem bychom chtěli zdůraznit jen tolik, že práce horských observatoří není samozřejmě jediným zajímavým odvětvím dnešní meteorologie. Poskytuje však velmi cenné údaje pro další rozvoj poznání přírodních dějů na jedné straně i neocenitelné zážitky těm, kdož ji provádějí na straně druhé. Proto ani v době radiosond, meteorologických raket a výzkumu počasí pomocí umělých družic Země není a nebude zastaralým odvětvím meteorologie.

Astronomie



Ladislav Sehnal, CSc, Ondřejov:

Umělé družice a kosmické rakety

Přehled vypuštěných umělých družic, uveřejněný v prvním čísle minulého 40. ročníku našeho časopisu, doplňujeme nyní dalším pokračováním, obsahujícím umělé družice, vypuštěné do 31. května 1962.

Nejvýznamnějším objektem, obsaženým v tabulce, je bezesporu kosmická loď *Vostok 2*, s níž obletěl *S. G. Titov* 17 krát Zemi. Rovněž Američané vypustili na kosmických lodích *Mercury 6* (20. února) a *Mercury 7* (24. května) dva kosmonauty, *J. H. Glenna* a *M. S. Carpentera*. Oba obletěli třikrát Zemi.

Z nových typů družic se objevuje družice *Oso* (Orbital Solar Observatory), která má za účel zevrubný výzkum slunečního záření. Družice *Ariel* je první družicí, vypuštěnou v mezinárodní spolupráci, je to společný anglicko-americký projekt.

Nová série sovětských umělých družic byla zahájena 16. března 1962 vypuštěním družice *Kosmos 1*. Tyto družice *Kosmos* nesou řadu vědeckých aparatur, sloužících k důkladnému studiu blízkého okolí Země. Zajímavé je na nich to, že sklon dráhy není již 65° , jako u všech předcházejících sovětských umělých družic, ale 49° .

Některé družice, vypuštěné v USA jsou tajné a je pouze oznamováno datum jejich vypuštění, případně pouze některé údaje o dráze družice. K nim patří např. družice *Samos* a *Midas*. Družice *Discoveer* byly opět používány k vyzkoušení možnosti návratu malého uza-

vřeného pouzdra k Zemi. Toto pouzdro bylo úspěšně zachyceno u družic Discoverer 25, 29, 30, 32, 35, 36 a 39.

Družice typu Ranger slouží k pokusům o přistání malé kabiny na Měsíci. V případech prvního a druhého pokusu se však loď Ranger nedostala na dráhu k Měsíci a obíhá kolem Země jako umělá družice. Proto je zařazena v našem přehledu do umělých družic, zatím co částečně úspěšné pokusy Ranger 3 a Ranger 4 jsou uvedeny v tabulce

Umělé družice

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu min	Výška perigea km	Sklon dráhy o
27. IV. 1961	Explorer 11	47	107,8	429	28,8
16. VI. 1961	Discoverer 25	1050	90,9	192	82,1
29. VI. 1961	Transit 4	87	103,8	760	66,8
7. VII. 1961	Discoverer 26	1050	95	198	95
12. VII. 1961	Tiros 3	142	100,3	636	48
12. VII. 1961	Midas 3	1750	161,5	2990	90
6. VIII. 1961	Vostok 2	5215	88,5	147	64,9
16. VIII. 1961	Explorer 12	42	1587	669	33,4
23. VIII. 1961	Ranger 1	337	90,6	152	33
25. VIII. 1961	Explorer 13	95	97,5	102	37,7
30. VIII. 1961	Discoverer 29	1050	91,5	128	82,1
12. IX. 1961	Discoverer 30	1050	92,4	200	82,6
13. IX. 1961	Mercury 4	1350	88,4	128	33
17. IX. 1961	Discoverer 31	1050	90,8	200	82,7
13. X. 1961	Discoverer 32	1050	90,8	202	81,7
21. X. 1961	Midas 4	1750	166	3000	95,8
5. XI. 1961	Discoverer 34	1050	97,1	195	82,5
15. XI. 1961	Discoverer 35	1050	89,7	202	81,6
15. XI. 1961	Transit 4	100	105,6	825	52,4
18. XI. 1961	Ranger 2	?	88,2	160	33,3
29. XI. 1961	Mercury 5	1450	88,3	138	88,3
12. XII. 1961	Discoverer 36	1050	91,8	205	81,2
8. II. 1962	Tiros 4	142	100,3	613	48
20. II. 1962	Mercury 6	1485	88,6	138	32,5
27. II. 1962	Discoverer 38	1050	90	179	82
7. III. 1962	Oso 1	220	95,8	480	32,8
7. III. 1962	Samos	?	94	215	90
16. III. 1962	Kosmos 1	?	96,1	197	49
6. IV. 1962	Kosmos 2	?	101,9	183	49
9. IV. 1962	Midas 5	?	153	2430	86,7
18. IV. 1962	Discoverer 39	?	89,5	171	73,4
24. IV. 1962	Kosmos 3	?	93,8	197	49
26. IV. 1962	Kosmos 4	?	93,7	192	49
26. IV. 1962	Ariel 1	66	100,9	336	53,8
26. IV. 1962	Discoverer 40	?	91,1	153	73,1
15. V. 1962	Discoverer 41	?	94,2	258	82,3
24. V. 1962	Mercury 7	1500	88,5	234	32,5
28. V. 1962	Kosmos 5	?	102,6	176	49

Datum vypuštění	Název	Váha kg
26. I. 1962	Ranger 3	327
23. IV. 1962	Ranger 4	?

kosmických raket. Ranger 3 minul Měsíc ve vzdálenosti 36 000 km a Ranger 4 dopadl po 64 hodinách letu na odvrácenou část Měsíce.

Některé z těles, uvedených v našem přehledu, již neexistují, neboť se přiblížily k Zemi a nakonec zanikly v atmosférických vrstvách. Přesto však je počet umělých těles, která obíhají kolem Země mnohem větší, než pouhý počet družic. Jsou to především poslední stupně nosných raket a dále též různé ochranné obaly a části družic, které obíhají kolem Země po drahách, podobných původně vypuštěným umělým družicím.

Ačkoliv od napsání tohoto článku uplynula pouze velmi krátká doba, je již uvedený přehled opět zastaralý. Historický let dvou sovětských astronautů A. Nikolajeva a P. Popoviče na kosmických lodích Vostok 3 a Vostok 4 překonal všechna očekávání.

Redakce.

Úlohy k řešení



Řešitelům

Jako v předcházejících čtyřiceti ročnících Rozhledů vypisujeme i letos soutěž v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky.

Pokyny řešitelům: Úlohy řešte samostatně, věcně, logicky správně, užívejte jen zavedených termínů i označení, pište čitelně perem nebo strojem po jedné straně papíru formátu A4, každou úlohu na zvláštní list. V pravém dolním rohu každého listu uveďte plné jméno, jméno školy i třídu a svou podrobnou adresu.

Zbývající úlohy budou otištěny příště. Řešení úloh z tohoto čísla zašlete do 31. ledna 1963 na adresu: doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

Jména všech správných řešitelů otiskneme, nejlepší řešitele odměníme hodnotnými knižními cenami podle počtu a kvality řešení. Jsou ovšem vítána i ojedinělá řešení žáků nižších tříd. Bylo by žádoucí, aby mezi řešiteli bylo i více žáků ze Slovenska, více studentů průmyslových škol a také více děvčat.

Mimo soutěž mohou nám zaslat svá řešení i naši čtenáři nestudenti, ovšem bez nároku na některou z odměn.

Matematika:

1. Rovnoramenný trojúhelník P_1 má základnu x_1 a ramena x_2 , rovnoramenný trojúhelník P_2 má základnu x_2 a ramena $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, trojúhelník P_3 základnu x_3 a ramena $x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$, ..., trojúhelník P_n základnu x_n a ramena $x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$.

Dokažte, že s rostoucím n se blíží trojúhelníky P_n tvarem rovnostrannému trojúhelníku, jehož obvod je roven obvodu trojúhelníka P_1 .

Josef Břejcha

2. Sestrojte tětíkový čtyřúhelník (tj. čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici), jsou-li dány délky a, b, c, d jeho stran.

Svatopluk Fučík

3. Najděte všechna celá čísla x , pro něž je trojčlen $x^2 + 2x + 46$ roven druhé mocnině prvočísla.

Josef Holubář

4. V intervalu od 0° do 360° najděte všechny úhly, které vyhovují rovnici $\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi = \frac{1}{4}$.

Stanislav Horák

5. Jsou dány čtyři různé kružnice $k_i = (S_i; r_i)$ a bod U . Sestrojte rovnoběžník $A_1A_2A_3A_4$ tak, aby bod U byl jeho středem a vrcholy A_i ležely na kružnicích k_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Stanislav Horák

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + (n-1)^{10} + n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}.$$

František Klauz

7. Vyšetřete, pro která x má význam logaritmus výrazu $\frac{z+1}{z-1}$, v němž

$$z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}$$

Josef Kotyk

8. Je dán čtyřčlen $16x^3 + 20x^2 + 16x + 1$. Ukažte, že lze najít nekonečně mnoho přirozených čísel x takových, že funkční hodnota našeho čtyřčlenu pro tato čísla x je číslo dělitelné jedenácti.

Jiří Sedláček

9. V rovině jsou dány rovnoběžky a, b, c , přímka s s nimi různoběžná a mimo ně bod G . Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož vrchol A leží na přímce a , vrchol B na přímce b , vrchol C na přímce c a kromě toho: α) jeho střed S leží na přímce s nebo β) strana EF prochází bodem G (popř. v prodloužení).

Ota Setzer

10. Mezi čísla 1951 až 2000 najděte všechny dvojice prvočísel, jejichž rozdíl je 4.

Jan Vyšín

Deskriptivní geometrie:

1. Pravidelnému čtyřstěnu lze vepsat čtyři shodné kulové plochy tak, aby se každá z nich dotýkala tří stěn čtyřstěnu a aby se všechny kulové plochy dotýkaly navzájem. a) Dokažte toto tvrzení. b) Sestrojte půdorys a nárys čtyřstěnu ($a = 10$ cm) i kulových ploch. c) Vypočtete velikost poloměru kulových ploch.

Josef Holubář

2. Je dán čtyřboký pravidelný jehlan, takový, že mu lze vepsat pět shodných koulí. První čtyři se dotýkají podstavy a každá z nich se dotýká dvou sousedních pobočných stěn jehlanu a dvou sousedních koulí, pátá koule se dotýká všech čtyř pobočných stěn jehlanu a všech předchozích čtyř koulí. a) Určete podmínku, kdy lze v čtyřbokém pravidelném jehlanu sestavit uvedené pět koulí. b) Vypočtete velikost poloměru těchto koulí. c) Sestrojte půdorys a nárys takového jehlanu s pěti uvedenými koulemi.

Josef Holubář

3. Jsou dány tři přímky a, b, c , z nichž každé dvě jsou mimoběžné. Sestrojte kvádr $ABCD A'B'C'D'$ tak, aby vrchol A ležel na přímce a , vrchol B na přímce b , hrana $A'B'$ na c a aby podstava $ABCD$ byla čtverec.

Stanislav Horák

4. Jsou dány body A, B rovnoběžkové kružnice k_1 a body C, D rovnoběžkové kružnice k_2 kulové plochy. Sestrojte kulovou plochu a na ní bod, v němž kružnice $k \equiv (A, B, C)$ protne podruhé kružnici k_2 .

Ota Setzer

(Pokračování.)

Řešení úloh z minulých ročníků



Úloha o jízdním řádu

Pokladník podniku jezdil pravidelně elektrikou každý den s penězi do banky, odkud odcházel pěšky domů. Na konci měsíce mu bylo vždy podnikem uhrazeno jízdné podle předložených jízdenek.

Od podniku k bance vedly po téže trati linky 1, 2, 3 elektrických drah. Jezdily přesně podle jízdního řádu v pravidelných intervalech, a to č. 1 a 2 v devítiminutových a č. 3 v osmnáctiminutových.

Pokladník nekončil práci pravidelně, ale použil vždy prvního vozu ze tří linek 1, 2, 3, který přijel do stanice. K svému překvapení zjistil po několika vyúčtováních, že poměr odevzdaných lístků z tratí č. 1, 2, 3 jest 4:2:3 a že tedy počet lístků z trati, která má delší časový interval, není nejmenší.

Dovedete z daných údajů napsat jízdní řád všech tří linek mezi 15. a 16. hodinou, víte-li, že v 15,00 hod. vyjíždí od podniku vůz trati číslo 2?

Řešil Břetislav Fiala, Tesla Pardubice.

Nechť vůz trati č. 1 přijíždí vždy po x minutách za vozem trati č. 2, vůz trati č. 3 po y minutách za každým druhým vozem trati č. 2.

Předpokládáme, že pokladníkovy příchody na stanici jsou časově rovnoměrně rozloženy v době od 15,00 do 15,18. Počet jízdenek z určité trati závisí na intervalu mezi odjezdem bezprostředně předchozího vozu jiné trati a odjezdem vozu naší trati. Sledy vozů všech tří tratí se opakují po 18 minutách, stačí proto sledovat interval (15,00 — 15,18). Čím větší je pauza mezi vozy jedoucími po sobě, tím je větší počet pokladníkových příchodů do stanice i pravděpodobnost použití vozu té trati, který po této pauze přijíždí. Tím se řídí i počet odevzdaných jízdenek

$$4 : 2 : 3 = [x + (x + y)] : 2(9 - x) \quad y.$$

Řešením dostaneme $x = 7$, $y = 6$ a jízdní řády mezi 15. a 16. hodinou jsou:

trať č. 1: 15,07; 15,16; 15,25; 15,34; 15,43; 15,52

trať č. 2: 15,00; 15,09; 15,18; 15,27; 15,36; 15,45; 15,54

trať č. 3: alternativa a) 15,06; 15,24; 15,42

b) 15,15; 15,33; 15,51.

Správné řešení zaslali také:

Eva Marunová, Kaplice a *Karel Kunc*, Znojmo.

Nedbalý student

Student dostal úlohu: Určete plochu trojúhelníka ABC, jehož vrcholy jsou dány pravoúhlými souřadnicemi, tj. vzdálenostmi x , y od dvou kolmých přímek, ležících v rovině trojúhelníka $A(0; 0)$, $B(1; 11)$. Souřadnice třetího vrcholu si nedbale opsal: $C(a, b, c)$, takže nevěděl, co s čárkami mezi ciframi a , b , c . Pro jistotu vypočetl plochu trojúhelníka ABC pro oba možné případy $C(a, b; c)$ i $C(a; b, c)$, vždy mu však vyšel stejný výsledek 9,15. Dovedete z toho určit, jaké byly cifry a , b , c ?

Řešila s. *Milada Dvořáková*, Brandýs n. L.

Předpokládejme, že a , b , c jsou některé z cifer 1, 2, 9; pak souřadnice třetího vrcholu trojúhelníka $C\left(\frac{10a+b}{10}; c\right)$ a $C'\left(a; \frac{10b+c}{10}\right)$ jsou kladná čísla. V tom případě je $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$ záporného smyslu a obsah obou trojúhelníků je záporný $P = -9,15$. Souřadnice bodů $A(0; 0)$ $B(1; 11)$ dosadíme do vzorce pro obsah trojúhelníka:

$$P = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + y_3(y_1 - y_2)].$$

Dostaneme pro souřadnice třetího vrcholu C neurčitou rovnici:

$$-18,3 = y_3 - 11x_3.$$

Dosadíme-li sem nejprve $x_3 = \frac{10a+b}{10}$, $y_3 = c$

$$\text{a potom } x_3 = a, y_3 = \frac{10b+c}{10},$$

vznikne po menší úpravě soustava neurčitých rovnic:

$$-183 = 10c - 110a - 11b$$

$$-183 = 10b + c - 110a.$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme

$$21b - 9c = 0,$$

tj. poměr $b : c = 3 : 7$.

Protože b i c jsou jednociferná kladná čísla, jest $b = 3$, $c = 7$; z jedné rovnice soustavy pak plyne $a = 2$.

Souřadnice bodů C a C' jsou: $C(2, 3; 7)$, $C'(2; 3, 7)$.

Správné řešení zaslal také s. *Antonín Lukš* z Olomouce.

Zamyšlení nad kalendářem

Na který den v týdnu připadne Nový rok v roce 2000? Uvažte, že v roce 1961 připadl 1. leden na neděli.

Řešení úlohy zaslali redakci tyto naši čtenáři: inž. Ferdinand Holiš, Olomouc; Vladimír Kos, Bělohrad; Vítězslav Krejcar, studující III.b SVVŠ Krnov; Helena Mrázová, studující II.c střední průmyslové školy strojnické v Praze-Karlíně; Ivanka Mrázová, žákyně VIII.a ZDŠ v Praze 1 ve Štěpánské ul. a Karel Vrbenský, studující I.e SVVŠ v Ostravě I. Otiskujeme dnes řešení Karla Vrbenského.

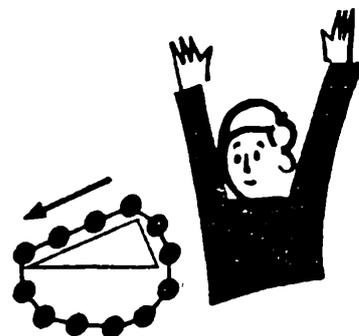
Ř e š e n í: Během každého roku nepřestupného se posune Nový rok o jeden den v týdnu, během roku přestupného o dva dny v týdnu. V uvažovaných 39 letech je 9 let přestupných a 30 let nepřestupných. Od r. 1961 do r. 2000 se posune tedy Nový rok o $30 \cdot 1 + 9 \cdot 2$ dní čili o 48 dní, tj. o 6 týdnů a 6 dní. Proto v r. 2000 připadne Nový rok na sobotu.

Závěrem se ještě trochu zamysleme nad kalendářem směrem do minulosti. Letos vzpomínáme stého výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků. Dne 28. března 1962 uplynulo právě sto let od chvíle, kdy se konala první schůze tehdy nově založeného spolku universitních studentů. Položme si otázku: Na který den v týdnu připadl 28. březen 1862, víme-li, že 28. března 1962 připadl na středu. Řešení této úlohy však už můžeme jistě přenechat čtenářům.

J. S.

Fyzikální zajímavosti

Fordovo kluzné auto



Společnost Fordových závodů předvedla svým akcionářům nové kluzné auto o délce 3 m bez kol, které klouže na vrstvě vzduchu, vháněného pod podlahu. Zdvihání se děje pomocí tří trysek, umístěných pod kluzným vozem. Dvě zadní trysky vyvinují dostatek reaktivní síly, aby vůz jel rychlostí $25,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Přední tryska zdvihá předek vozu.

Vůz byl nazván *l e v a c a r a* Ford očekává, že se z tohoto vozidla

vyvine masové transportní auto, které bude jezdit po kolejích, protože k tomu účelu není dost vhodná žádná silnice. Pohon je poháněn turbínou turbogenerátoru na stlačený vzduch, který dodá energii ke zdvihu i k pohybu vpřed. Společnost Curtis Wright nedávno oznámila, že takový vzdušný vůz jede asi 30 cm nad zemí.

Podobný vůz předvedla letos v Paříži zájemcům francouzská automobilka Renault.

(Podle Business Week, USA, 1960)

Dr. B. B.

Poznámka redakce.

Fyzikální podklady: viz článek inž. Z. Růžhy, Létající stroje využívající vzdušného polštáře; Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1960/61.

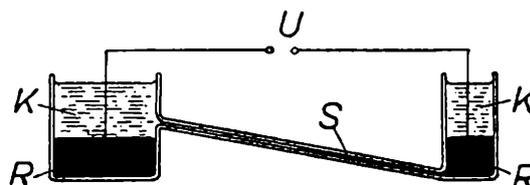
Inž. Ladislav Smrž, ÚN SMS, Praha:

Kapilární voltmetr

Elektrické pole zmenšuje povrchové napětí u kapalin. Takové pole vzniká např. při dotyku dvou různých kapalin. Proto také kapka rtuti v jakékoli tekutině je plošší než na vzduchu. Při průchodu elektrického proudu se však velikost elektrického pole mění vznikající elektrolytickou polarizací. Tím se mění také povrchové napětí kapaliny. To ukazuje pokus, provedený podle obr. 1, kde R je kapka rtuti v misce se zředěnou



Obr. 1.



Obr. 2.

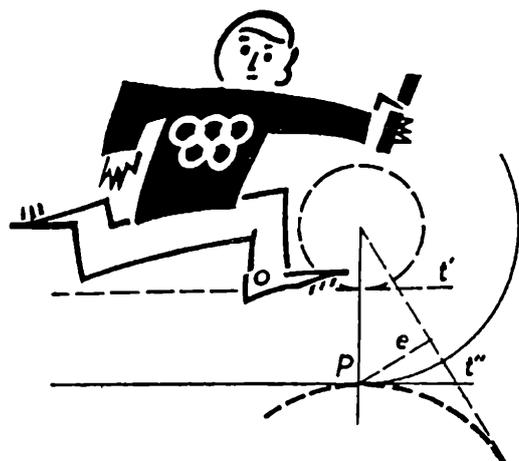
kyselinou sírovou s přísadou dvojjchromanu draselného a H je železný hřebík. Kapka rtuti je plochá, poněvadž její povrchové napětí je zmenšeno dotykem s elektrolytem. Posuneme-li nyní hřebík tak, aby se jeho špička dotkla kapičky rtuti, vznikne elektrický proud a vyvolá polarizaci. Jejím působením se sníží elektrické pole mezi elektrolytem a rtutí, a tím se zvětší povrchové napětí rtuťové kapičky. Kapka se smrští a přeruší elektrický proud, čímž zanikne po krátké době i polarizace (také působením dvojjchromanu draselného, který je depolarizátorem). Tím se kapka rtuti opět roztáhne, dotkne se hřebíku a celý děj se znovu opakuje. Kapka rtuti pravidelně pulzuje, podobně jako srdeční sval.

Závislosti povrchového napětí na elektrickém poli bylo využito k sestavení zajímavého přístroje pro měření malých elektrických napětí, kapilárního voltmetru. Jeho schéma je na obr. 2. Tvoří jej dvě různé velké nádoby se rtutí, které jsou spojené kapilárou. Nad rtutí je zředěná kyselina sírová K . Poloha rtuťové sloupečku v kapiláře S je dána rovnováhou mezi zemskou tíží a povrchovým napětím rtuti. Při měření připojeného napětí U protéká přístrojem proud, jehož hustota v malé nádobce je mnohonásobně větší než ve velké nádobce. Vznikne zde velmi rychle polarizace, která změnou elektrického pole vyvolá změnu povrchového napětí rtuti. Tím se posune sloupeček rtuti R v kapiláře S a z velikosti změny se dá usuzovat na velikost připojeného měřeného napětí. Tato změna není úměrná velikosti napětí, dá se však ověřit porovnáním s jiným měřicím zařízením.

Kapilárního voltmetru se dříve dosti používalo při fyzikálních měření. Nevýhodou však byla příliš velká proudová spotřeba a velmi malý měřicí rozsah, nejvýše 1 volt.

Matematická olympiáda

XII. ročník matematické olympiády



Otiskujeme první část přípravných úloh I. kola XII. ročníku MO (školní r. 1962/63) a prosíme naše čtenáře, aby na texty těchto úloh upozornili žáky i učitele. Žáky pak zveme k účasti na naší soutěži. Podrobné pokyny uveřejníme v letáku, který bude zaslán na školy; informace o studijní literatuře a podmínkách soutěže podá učitel matematiky nebo referent MO na škole.

P ř i p o m í n á m e :

V I. kole musí žák podat řešení všech šesti přípravných úloh, z toho musí být čtyři řešení vyhovující. Dále musí ze šesti soutěžních úloh předložit alespoň čtyři řešení; přitom čtyři řešení soutěžních úloh musí být vyhovující.

Řešení první trojice přípravných úloh odevzdají žáci svým učitelům matematiky do konce listopadu t. r., řešení dalších tří přípravných úloh do 20. prosince t. r. Každou úlohu napíšou na zvláštní list, na kterém bude záhlaví, jehož uspořádání sdělí učitel matematiky.

Těšíme se, že se naši čtenáři přičiní o propagaci naší soutěže na škole.

I. Přípravné úlohy

I. Kategorie A.

1. Určete všechna celá čísla x, y , která vyhovují rovnici

$$(3x + y)(x + y) = p,$$

kde p je dané prvočíslo.

2. Určete pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti, jejichž součet je $5a$ a součin b^5 . Proveďte diskusi.

3. Určete oblast všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice vyhovují nerovnostem

$$2x + y \geq 2,5, \quad \sin(y - x) < 0.$$

2. Kategorie B.

1. Vypočítejte kolika nulami končí dekadický zápis čísla $100!$ (100 faktoriál).

2. Vyšetřte průběh funkce

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}$$

a načrtněte její graf. Dokažte, že platí $y \leq \sqrt{2}$ pro všechna x , pro něž je funkce definována.

3. Určete koeficienty a, b, c, d dvojčlenů $ax + b, cx + d$ tak, aby byly splněny zároveň tyto podmínky:

a) $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 = x^2 + 1$ pro všechna x ;

b) $(ax + b)(cx + d) = 2$ pro $x = 2$.

3. Kategorie C.

1. Jestliže přirozené číslo n není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel $n^3 + 1$ a $n^3 - 1$ je dělitelné sedmi.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x + y}{2p + 4} + \frac{y + p^2 - 4}{p^2 - 4} = 1,$$

$$(p - 2)^2 x - 2py = 2p^2 x$$

o neznámých x, y , je-li dáno reálné číslo p .

3. Jestliže pro čísla a, b platí $a + b = -5$, potom výraz

$$\left[\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + 2a^2b + ab^2} + \frac{1}{a + b} - \frac{a^2 - ab - 2b^2}{(a + b)^3} \right] \cdot \frac{a}{a - b} - \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

má pro všechna a, b stále touž hodnotu; stanovte ji.

4. Kategorie D.

1. Je-li n libovolné přirozené číslo liché, je číslo $(n^2 - 1)(n + 3)$ dělitelné číslem 24; dokažte.

2. Pěticiferné číslo *378*, kde hvězdičky znamenají neznámé cifry, je dělitelné číslem 72. Určete úsudkem a výpočtem chybějící cifry. Návod: Rozložte 72 v součin dvou nesoudělných čísel.

3. Dokažte, že hodnota výrazu

$$V = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$a \neq b ; a \neq c ; b \neq c ,$$

nezávisí na číslech a, b, c .

(Pokračování)

Matematická olympiáda v Čs. televizi

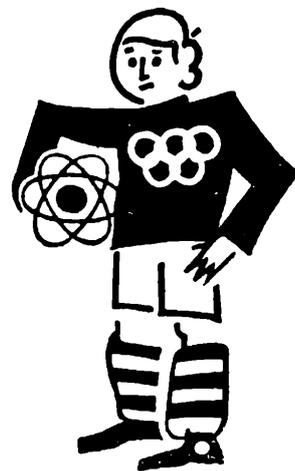
Matematická olympiáda se objevila poprvé v naší televizi v dubnu 1962 při příležitosti druhého kola soutěže. V neděli 8 dubna 1962 se konalo po celé naší republice druhé kolo MO pro tři kategorie A, B, C. V Praze se sešli řešitelé v budově Pedagogického institutu a zde právě pořídili pracovníci čs. televize několik záběrů pro televizní noviny.

Věříme, že i v budoucnu věnuje naše televize i rozhlas této naší celostátní matematické soutěži občas pozornost a přispěje tak k propagaci matematiky mezi naší mládeží.

J.S.

Fyzikální olympiáda

IV. ročník soutěže fyzikální olympiády



Ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a Československým svazem mládeže pořádá ve školním roce 1962/63 čtvrtý ročník soutěže fyzikální olympiády (FO).

Soutěž FO je řízena celostátně ústředním výborem fyzikální olympiády (ÚVFO) se sídlem Praha 1 - Malá Strana, Maltézské náměstí 1 (Jednota československých matematiků a fyziků) a Olomouc, Fierlingerova 10 (katedra fyziky University Palackého). V každém kraji je řízena krajským výborem fyzikální olympiády (KVFO).

Soutěž je dobrovolná a je určena žákům výběrových škol II. cyklu. Bude probíhat ve třech kategoriích. Kategorie A je pro žáky 3. ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a 3. a 4. ročníků středních odborných škol. Kategorie B je určena žákům 2. ročníku a kategorie C žákům 1. ročníků všech středních výběrových škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu může žáku z nižší třídy povolit vyučující učitel s referentem pro FO na škole. Tyto mimořádné případy ohlásí referent KVFO.

Soutěž v kategorii B a C probíhá ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

V prvním kole mají soutěžící žáci za úkol do 16. února 1963 řešit 9 úloh a prostudovat samostatně fyzikální téma. Řešené úlohy odevzdávají soutěžící svému učiteli fyziky v těchto termínech:

úlohu p r v o u až t ř e t í nejpozději do 30. listopadu 1962,

úlohu č t v r t o u až š e s t o u nejpozději do 5. ledna 1963,

úlohu s e d m o u až d e v á t o u nejpozději do 16. února 1963.

Řešení úloh se klasifikuje takto:

1. v ý b o r n ě, jestliže je úloha rozřešena správně nebo řešení má nejvyšší formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;

2. d o b ř e, jestliže řešení vystihuje úkol, který měl řešitel podat, ale má při tom větší odborné nedostatky. Dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytnou-li se v něm závažné formální nedostatky;

3. n e v y h o v u j í c í, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo podané řešení je z větší části neúplné; řešení je nevyhovující, když výklad chybí nebo je neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice spolu s referentem FO na škole. Po ukončení prvního kola, tj. po 16. únoru 1963, navrhne referent FO na škole úspěšné řešitele do druhého kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem příslušnému KVFO. Po kontrole úloh rozhodne KVFO o zařazení řešitelů do druhého kola. KVFO si může dát předložit opravené řešení úlohy již po ukončení jednotlivých termínů.

Za úspěšného řešitele prvního kola bude považován ten žák, který úspěšně (tj. s klasifikací 1. nebo 2. stupně) rozřeší aspoň šest úloh. Aby se soutěžící stali úspěšnými řešiteli, musí v kategoriích A a B řešit jednu experimentální úlohu uvedenou pod číslem 9, kdežto v kategorii C musí řešit dvě experimentální úlohy uvedené pod čísly 6 a 9.

Pozvání na druhé kolo dostane řešitel od KVFO prostřednictvím ředitelství své školy.

Druhé kolo proběhne ve dvou půldnech za učitelského dozoru. V jednom půldni bude úkolem rozřešit tři teoretické úlohy v době tří hodin. V druhém půldni bude úloha experimentální. Jedna z úloh - teoretická

nebo experimentální - bude z fyzikálního tématu zadaného k prostudování.

Účastník druhého kola, který rozřeší úspěšně aspoň dva příklady, bude úspěšným řešitelem.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A vybere ÚVFO na návrh KVFO nejvýš 80 soutěžících ze všech krajů k účasti na třetím kole soutěže.

Pokyny pro soutěžící

Prvý list řešení každé úlohy opatřte záhlavím podle tohoto vzoru:

Jméno a příjmení:	Kategorie:	Nechat prázdné místo
Třída:	Školní rok:	Posudek:
Škola:	I. kolo	Posuzovali:
Místo:		
Kraj:		

Úloha č. .
Text úlohy
Řešení úlohy

Na každý další list napište své jméno, školu, číslo úlohy a stránku. Řešení úloh pište čitelně a v úhledné úpravě na listy formátu A4. Každou úlohu vypracujte na samostatném listu papíru, pomocné obrázky nebo náčrtky schémat k řešené úloze proveďte tužkou.

Řešení úloh doprovodte vždy slovním výkladem tak, aby každý porozuměl vašemu myšlenkovému postupu. Úloha bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

V obecném řešení provádějte rozměrové zkoušky; při numerickém řešení uvádějte jednotky.

Při řešení úloh se opírejte především o učebnice fyziky. Váš učitel fyziky nebo referent FO vám poradí i jiné vhodné studijní pomůcky.

Úlohy pro 1. kolo

IV. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

1. Skleněná koule se vzduchem byla zvážena při 15 °C. Pak byla při otevřeném kohoutku zahřáta na 80 °C a kohoutek pak byl zavřen. Nato byla koule znovu zvážena a zjištěn úbytek hmoty 0,250 g. Jaký je objem koule, lze-li roztažnost nádoby zanedbat? Hustota vzduchu při 0 °C je $\rho_0 = 1,293 \text{ g.dm}^{-3}$.

2. Paprsek dopadá na skleněný pravouhlý hranol rovnoramenný rovnoběžně s přeponou $BC = 8 \text{ cm}$ (obr. 1) a to v bodě A , pro který $BA = 1 \text{ cm}$. V kterém bodě D a v jakém směru opustí paprsek hranol? Index lomu skla $n = 1,6$.

3. Rozptylná soustava odděluje prostředí předmětové o indexu lomu $N_1 = 1,00$ a prostředí obrazové o indexu lomu $N_2 = 1,33$. Vzdálenost obou ohnisek je 9,5 cm a ohnisková vzdálenost $f = 4,5 \text{ cm}$.

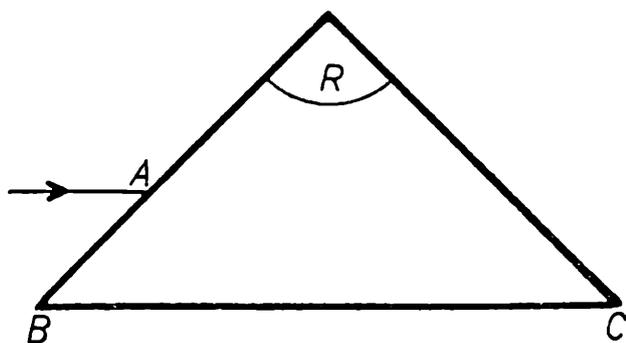
a) Sestrojte obraz zdánlivého předmětu výšky 2,0 cm, který je ve vzdálenosti 2,5 cm od kladné hlavní roviny předmětové užitím paprsku 1. rovnoběžného s optickou osou; 2. jdoucího ohniskem; 3. jdoucího záporným hlavním bodem; 4. jdoucího záporným uzlovým bodem. Jaký je obraz? Napište postup a vysvětlete konstrukci.

b) Vypočtete polohu a velikost obrazu.

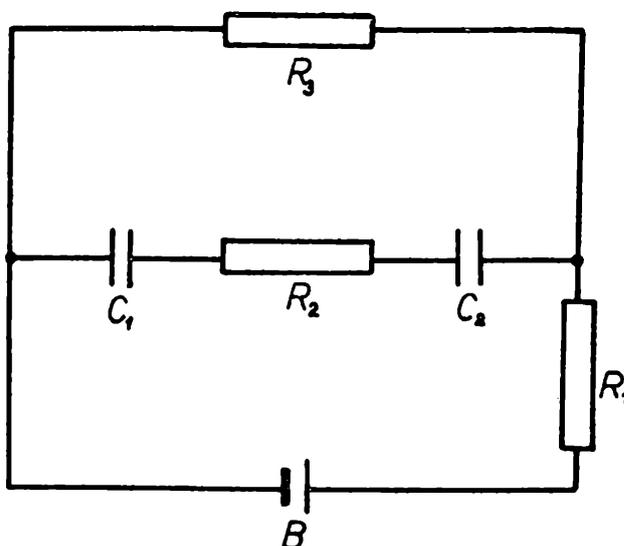
4. Na jaké napětí se nabijí kondenzátory C_1 a C_2 , připojíme-li je ke zdroji B (obr. 2)?

Je dáno: $\mathcal{E} = 2,2 \text{ V}$, $R_i = 0,4 \Omega$; $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$; $C_2 = 3 \mu\text{F}$.

5. Čtyři žárovky, z nichž při zapojení na 110 V svítí normálně dvě při spotřebě 40 W a dvě při spotřebě 60 W, jsou připojeny na napětí 220 V podle připojeného schématu (obr. 3). Jaký výkon má každá žárovka v tomto zapojení a jaké napětí je mezi body A a B ? Odpor žárovek považujte za nezávislý na teplotě.



Obr. 1.



Obr. 2.

6. Baterie galvanických článků ($\mathcal{E} = 0,9 \text{ V}$; $r_i = 0,6 \Omega$) se skládá ze 30 článků spojených ve tři stejné paralelní skupiny. Kolik mědi se vyloučí při zapojení baterie za 5 minut z roztoku a) CuCl , b) CuSO_4 ? Vnější odpor je 205Ω . Uvažte, na kolik platných číslic má smysl hmotu mědi vypočítat.

7. Kolejnice železniční trati z Břeclavi do Přerova mají v úseku před vjezdem do nádraží v Přerově směr magnetického poledníku a jsou vodorovné. Kolejnice jsou izolovány od země i mezi sebou a jsou od sebe vzdáleny 1,435 m. Po kolejnicích jede vlak rychlostí $60 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Vysvětlete, proč milivoltmetr zapojený v libovolném místě (nablízku jedoucího vlaku) mezi kolejnicemi ukáže napětí a stanovte velikost tohoto napětí. Ostatní potřebné údaje si sami opatřte z příslušných tabulek. Stanovte dále,

a) zda záleží na tom, je-li měřicí přístroj zapojen před vlakem nebo za ním, tj. zda se údaj po přejezdu vlaku nějak změní;

b) na kterou kolejnici musíme připojit vstupní svorku (+) přístroje, jede-li vlak k Přerovu nebo jede-li od něho.

8. Na anodě elektronky se vlivem kinetické energie dopadajících elektronů vyvine 3,9 cal tepla za 20 minut. Jaká je rychlost dopadajících elektronů, je-li proud $I = 0,006 \text{ A}$?

9. Určete ohniskovou vzdálenost dané spojky první metodou, uvedenou v tématu k prostudování odd. d 1.

Kategorie B

1. Vodorovnou trubicí (obr. 4) o širším průřezu 5 cm^2 a užším průřezu 1 cm^2 protéká voda. V širším průřezu je rychlost vody 5 cm.s^{-1} . Svislou trubicí délky 20 cm a průřezu 2 cm^2 se má nasávat voda z dolní nádoby.

a) Jakou rychlostí proudí voda v zúženém místě?
b) Jaká je podmínka pro to, aby voda z nádoby vystoupila až k užšímu průřezu trubice?

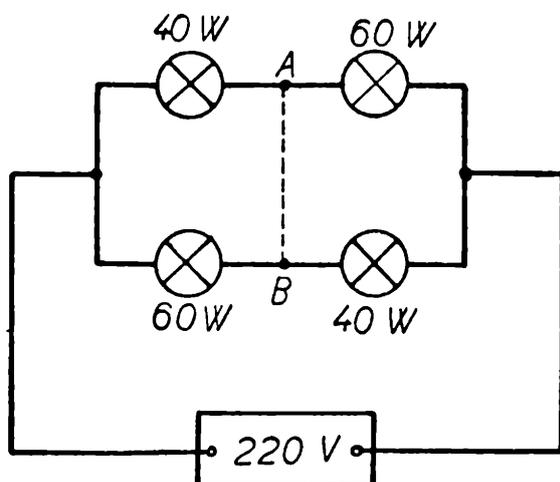
c) Jaký bude tlak v širším průřezu trubice, nastane-li tento případ?

2. Na ocelovém laně o průřezu 50 mm^2 je do moře spuštěna olovnice do hloubky 1200 m . Olovené závaží na konci lana má hmotu 50 kg .

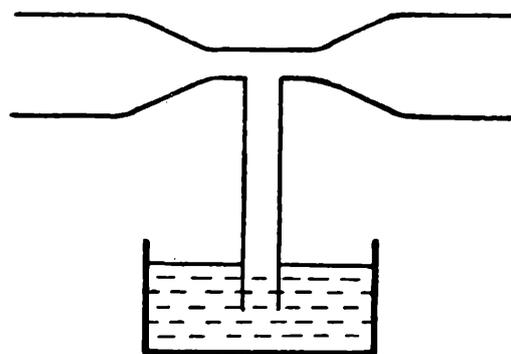
a) Stanovte prodloužení lana.

b) Určete relativní prodloužení a posuďte, zda protažení lze za daných podmínek považovat za pružné.

Hustotu $\rho = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ mořské vody považujte za konstantní.



Obr. 3.



Obr. 4.

3. Ve válcové kalorimetrické nádobě poloměru 5 cm je 500 g vody, ve které plave 5 g ledu. Do nádoby ponoříme měděný váleček o hmotě 100 g zahřátý na $50 \text{ }^\circ\text{C}$. Jaká bude výsledná teplota vody? O jakou výšku stoupne její hladina

a) ponořením válečku,
b) roztáním ledu?

Zanedbejte tepelné ztráty a nepřihlížejte k závislosti hustoty a měrných tepel na teplotě. (Skupenské teplo tání ledu $l = 80 \text{ cal.g}^{-1}$, měrné teplo mědi $c = 0,091 \text{ cal.g}^{-1}.\text{deg}^{-1}$, hustota mědi $\rho_{Cu} = 8,9 \text{ g.cm}^{-3}$.)

4. Ve válci Diesela motoru je na konci komprese vzduch stlačen na 50 at a má teplotu $700 \text{ }^\circ\text{C}$. Pracovní válec má průměr 15 cm a píst je v horní krajní poloze vzdálen od hlavy válce o $l = 3 \text{ cm}$.

Při vstřikování paliva za expanze urazí píst dráhu $l_1 = 1,5 \text{ cm}$; musí se vstříknout tolik paliva, aby tlak plynů při hoření byl stálý. Výhřevnost paliva je $8500 \text{ kcal.kg}^{-1}$.

a) Určete hmotu stlačeného vzduchu.

b) Určete teplotu vzduchu v okamžiku, kdy píst má od hlavy válce vzdálenost $l + l_1$.

- c) Kolik tepla se uvolní spálením paliva při pohybu pístu po dráze l_1 ?
d) Kolik paliva se vstříklo do válce?

5. Na pružině je zavěšena miska, jejíž hmota je zanedbatelná. Pružina se prodlouží závažím hmoty 1 kg o 10 cm. Tahem ve svislém směru prodloužíme zatíženou pružinu o 5 cm. Určete:

- a) Jak se mění tlaková síla, kterou působí závaží na misku (obecně);
b) nejmenší a největší tlakovou sílu, kterou působí závaží na misku, a v kterých je to polohách;
c) kdy se tlaková síla rovná právě váze závaží, a v které je to poloze?

6. Betonový sloupek válcového tvaru s ocelovým jádrem téhož tvaru je sevřen v rovnoběžných čelistích zkušebního lisu a namáhán silou 10 000 kp. Změny průřezu sloupku při zkoušce neuvažujte. Vypočtete zkrácení sloupku a normálové napětí betonu a oceli, je-li průměr sloupku 23 cm, délka 60 cm, průměr ocelového jádra 3 cm, modul pružnosti v tlaku pro beton $2 \cdot 10^5$ kp.cm⁻² pro ocel $2,1 \cdot 10^6$ kp.cm⁻².

7. Na podlaze nákladního auta pobité plechem leží podélně dřevěná bedna se zbožím, dlouhá 2 m a široká 1,6 m. Těžiště nákladu leží ve výši 0,6 m nad středem podstavy. Předpokládejte, že podlaha auta je stále v téže vodorovné rovině.

a) Auto dosáhne za 30 sekund od okamžiku rozjezdu rychlosti 60 km.h⁻¹. Je nutno zajistit bednu proti posunutí, rozjíždí-li se auto pohybem rovnoměrně zrychleným? Součinitel vlečného tření je 0,15.

b) V jaké nejmenší vzdálenosti od železničního přejezdu musí auto jedoucí rychlostí 60 km.h⁻¹ začít brzdit, smí-li přejíždět koleje rychlostí 30 km.h⁻¹ a nemá-li se bedna posunout?

c) Může projíždět auto zatáčkou o poloměru 100 m rychlostí 60 km.h⁻¹ bez nebezpečí, že se bedna převrhne?

8. Vlákno je vedeno přes dvě pevné kladky a nese mezi nimi volnou kladku, na níž je zavěšeno těleso o hmotě m_2 . Na koncích vlákna jsou tělesa o hmotě m_1 a m_3 . Části vlákna mezi kladkami jsou svislé. Určete zrychlení jednotlivých těles a napětí vlákna. Tření a hmotu kladek zanedbávejte. Vlákno je dokonale ohebné a neproměnné délky.

9. Stanovte kapilární konstantu lihu. K dispozici máte Bunsenův stojan, přímou kapilární trubici, opatřenou kohoutkem nebo nastavenou gumovou hadičkou se šroubovou tlačkou, kádinku a laboratorní váhy se sadou závaží. Víte, že povrchové napětí vody je $7,3 \cdot 10^{-2}$ N.m⁻¹.

Kategorie C

1. Traktor přejíždí přes pole jedním směrem rychlostí $v_1 = 9$ km.h⁻¹, opačným směrem rychlostí $v_2 = 5$ km.h⁻¹. Stanovte průměrnou rychlost jízdy. Řešte nejprve obecně.

2. Hmotný bod se pohybuje přímočaře rovnoměrně zrychleně. Je známo, že po uplynutí t sekund od okamžiku, kdy se bod začal pohybovat, urazil za dalších $\tau = 10$ s dráhu $s = 30$ m. Během těchto τ sekund se rychlost bodu zvětšila $n = 5$ krát. Určete zrychlení pohybu. Řešte nejprve obecně.

3. Letadlo letí ve výšce $h = 5000$ m nad zemí rychlostí (ve vodorovném směru) $v = 600$ km.h⁻¹. V jaké vodorovné vzdálenosti d od místa A je nutno volně pustit z letadla libovolné těleso, aby dopadlo do místa A , zanedbáme-li odpor vzduchu?

4. Výtah mající s naloženým materiálem celkovou váhu $G = 1000$ kp se zvedá se stálým zrychlením $a = 2$ m.s⁻². Jak velká práce se vykoná za prvních 2,5 sekundy zdvihu?

5. Vůz o váze $G = 500$ kp se rozjíždí rovnoměrně zrychleně a po ujetí dráhy $s = 30$ m od počátku pohybu nabude kinetické energie $W_k = 630$ kpm. Stanovte:

- rychlost v vozu na konci dráhy s ;
- zrychlení a vozu;
- sílu F působící na vůz podél dráhy s .

6. Určete hustotu drobných tělísek (např. broků) pyknometrem.

7. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí v_1 a současně z výše, které může ještě toto těleso dosáhnout, bylo vrženo druhé těleso dolů rychlostí v_2 . Kde a s jakou rychlostí se obě tělesa setkají? Ověřte si, zda výsledky jsou rozměrově správné.

8. Umělá družice hmoty m je vynesena druhým stupněm rakety do výšky $h = 500$ km nad zemský povrch, kde její rychlost má již vodorovný směr a velikost $v_1 = 3100$ m.s⁻¹.

a) Jakou rychlost v_2 ve vodorovném směru musí družici udělit poslední stupeň rakety, má-li se družice pohybovat po kruhové dráze kolem Země?

b) Jak velkou průměrnou tažnou silou musí působit motor posledního stupně na umělou družici, aby této rychlosti dosáhla, shořeli-li palivo za dobu $t = 1$ min? Zemský poloměr je $R = 6378$ km. Gravitační zrychlení g považujte za stálé a rovné 10 m.s⁻².

9. Stanovte závislost síly F na prodloužení x pružiny, tak, že pružinu upevníte svisle a napínáte ji závažím.

a) Proveďte 10 měření, zhotovte tabulku i graf závislosti síly $F[p]$ na prodloužení $x[cm]$.

b) Pro každé měření stanovte podíl $\frac{F}{x} \left[\frac{p}{cm} \right]$. Určete tuhost pružiny $k = \frac{F}{x}$,

tj. sílu potřebnou k prodloužení pružiny o jednotkovou délku (jako aritmetický průměr vypočtených hodnot).

c) Určete pomocí grafu váhu předmětu zavěšeného na pružině a výsledek ověřte zvážením předmětu na laboratorních váhách.

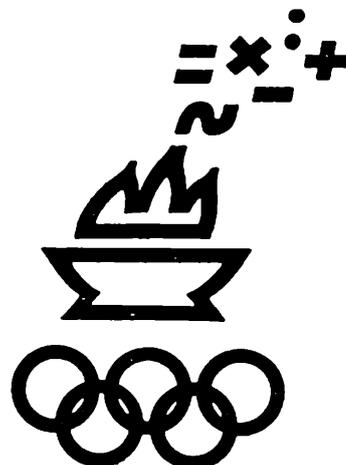
d) Určete z grafu potenciální energii pružiny prodloužené o délku $x = 6$ cm.

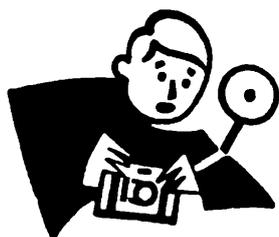
e) Odvoďte obecný vzorec pro energii natažené pružiny, v němž bude energie vyjádřena pomocí prodloužení x a tuhosti pružiny k .

Pokračování

Mezinárodní matematická olympiáda

Mezinárodní matematická olympiáda se konala na zámku Hluboká u Českých Budějovic ve dnech 8. až 14. července 1962 za účasti soutěžících studentů z Bulharska, Československa, Maďarska, NDR, Polska, Rumunska a SSSR. O průběhu se dočtete v příštích číslech.





Josef Kotyk, Pardubice:

Za prof. dr. Janem Sobotkou

(*2. IX. 1862, † 10. V. 1931)

Vzpomínka k 100. výročí jeho narození

Když se mně před léty, ještě jako žákou střední školy, dostalo do rukou klasické dílo „*Traité de la géométrie descriptive*“, zakladatele deskriptivní geometrie Monge¹⁾, zapůsobilo na mě ihned prvními řádky svého programu. Autorova slova, že pracuje, aby vymanol francouzský národ z dosavadní závislosti na cizím průmyslu, a že tím dojde ke konečnému cíli, jímž je zvětšení národní moci, se vtiskla v mou paměť nerasmazatelným písmem pro celý život. Okolnost, že také moji středoškolští učitelé, kteří vyučovali nauce Mongeově, se řídili Mongeovým přáním a vychovávali své žáky k přesnosti v myšlení i v provádění konstruktivních prací, prohloubila záhy můj zájem o deskriptivní geometrii tou měrou, že jsem také již před maturitou přikročil k soustavnému studiu prvního vzorného vědeckého díla o deskriptivní geometrii v jazyce českém „*Deskriptivní geometrie promítání paralelního*“ (1906), které napsal náš vynikající geometr a můj pozdější vysokoškolský učitel dr. Jan Sobotka, profesor přírodovědecké fakulty Karlovy university v Praze.

V době mých vysokoškolských studií zářilo jméno prof. Sobotky ovšem již jako hvězda první velikosti v řadě vědeckým světem uznávaných pracovníků geometrického bádání naší doby. Všem jeho posluchačům bylo také známo zanícení, s nímž Sobotka věnoval své síly i schopnosti, dny i noci vědě, které zasvětil svůj život. Pro přednášky na universitě nebyl tehdy - na rozdíl od vysokých škol technických - zaveden žádný určitý, blíže stanovený program, což otvíralo badatelům druhu Sobotkova v bádání i ve výkladech zcela volné pole vědecké činnosti. Obětavý Sobotka, neznající oddechu ani osobního pohodlí, nezavedl také žádný pravidelný přednáškový cyklus a přednášel každého roku jinou, vždy

¹⁾ Caspard Monge (čti mónž 1746 až 1818), profesor polytechniky v Paříži, položil deskriptivní geometrii pevné vědecké základy a učinil ji tak řečí inženýrů.

původní látku. Netajil se svým přesvědčením,²⁾ že osudy národů budou vždy víc a více podmíněny tím, jak se v nich ujme matematická vzdělanost. Hlavní účel, který svou vědeckou činností sledoval a který vyzařoval i z jeho přednášek, byl proto i jemu vysoký cíl Mongeův, aby přesnost, logická zkázněnost, matematický způsob myšlení a matematické vědění cele pronikly naši národní kulturu a dokonalá matematická vzdělanost brzo přivedla náš lid do jedné řady s nejpokročilejšími národy světa.

Reformní tendence didaktických názorů Sobotkových se týkaly však nejen vysokých škol, nýbrž také škol všeobecně vzdělávacích, jako ohnišek národní a lidové kultury. Má-li matematické vědění zůstat žákům trvalým majetkem pro celý život, žádal Sobotka, aby vyučování ryzí matematice bylo vždy úzce spojeno s cvičeními v matematice aplikované,³⁾ topografickými pracemi v terénu, praktickými cvičeními měřickými v poli apod. Jeho požadavky, aby škola zůstávala v trvalém a nejužším styku se životem, aby vyučování matematice se přiblížilo praxi, doznaly však teprve nejnovějším rozmachem technických věd náležitého docenění. Jeho snaha otevřít všechny brány vědění každému, kdo se chce dále vzdělávat, došla v dnešním zřízení plného porozumění a uskutečnění.

Profesor Sobotka měl však vřelý vztah i k dějinám svého národa. Svědčí o tom jeho slova: „Národ netvoříme toliko my, kteří jsme jeho živou přítomností, národ tvoříme jen ve spojení s těmi, kteří působili před námi, i s těmi, kteří přijdou po nás, v první řadě ovšem s těmi, ať živými či mrtvými, kteří se pro jeho dobro a blaho obětovali.“ Jak hluboká a opravdová láska k národu září z těchto slov! Neméně byla Sobotkova láska k pracujícímu člověku. „Těšiti se z výsledků vlastní práce, avšak stejnou měrou také z úspěchů těch, kdož přicházejí s námi do společné práce“, říkával, „to je komunismus, jemuž přeji u nás velikou budoucnost.“

Vzpomínáme-li dnes, v době dovršení výstavby socialismu, slov milovaného učitele, musíme doznat, že jeho podrobné znalosti mu i v politic-

²⁾ Cituji (také v dalším) výroky prof. Sobotky z jeho přednášek, cvičení i besed s posluchači. Některé z nich vstoupily již do literatury; viz např. články prof. Fr. Kadeřávka a prof. K. Vorovky v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky, roč. LII, čís. 1 a 2, str. 1 až 11 aj.

³⁾ Sobotkovy návrhy, aby na středních školách byla zavedena zvláštní praktika aplikované matematiky, pronikly i na mezinárodní fórum; bylo o nich jednáno např. na mezinárodním sjezdu matematiků v Cambridge roku 1912 aj.

kém směru dovolovaly předvídat průběh událostí a další vývoj poměrů s jistotou opravdu matematickou. Pro vzácné vědecké i lidské vlastnosti skláníme se proto v úctě před památkou p r o f. d r. J a n a S o b o t k y, velikého člověka, jemuž jsme zavázáni vděčností za práci, kterou vykonal pro rozvoj české vědy a českého školství.

J o s e f K o t y k, Pardubice:



Rozhledy pomáhají škole

Koncem školního roku (zpravidla v 10. čísle ročníku) obrací se redakce R o z h l e d ů na ředitelství středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol i na učitele matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie s výzvou, aby provedli nábor předplatitelů do nového ročníku našeho časopisu. Tento úkol si velmi usnadníme, vezmeme-li k přímé pomoci čísla R o z h l e d ů. Ukáží, jak dobrý časopis, který plní už přes 40 let¹⁾ své poslání, se doporučuje sám.

Myslím nejprve na vyšší třídy jedenáctiletých středních škol, v nichž vyučuji. V nich jsem Rozhledy již po léta učinil lepším žákům trvalým průvodcem při studiu, neboť jsou stálým zdrojem hlubšího poučení při nejrozmanitějších příležitostech, jež učivo matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie přináší. Sešity nejnovějších ročníků jsou proto žákům běžně k dispozici, sešity starších ročníků zájemcům půjčuji. Tak se před lety i mně dostaly Rozhledy poprvé do ruky.

Provést nábor předplatitelů Rozhledů pro nový ročník je ve vyšších třídách středních škol úkolem zcela snadným a radostným. Žáci, zpravení o významu akce, se sami hlásí o časopis, jenž jim již léta prokazuje dobré služby. U žáků 8. a 9. postup. ročníku, kde nevyučuji, získávám zájem o Rozhledy po celou dobu školního roku. Činím tak příležitostně, zpravidla když (někdy jen v ojedinelých hodinách) zastupuji jejich nepřítomného učitele matematiky nebo fyziky. Zážitky z jedné takové hodiny vylíčím nyní podrobněji.

Jako úkol vhodný k procvičování volil jsem tehdy zjednodušování složených zlomků. Stačil však jeden, aby třídu zaměstnal na větší

část hodiny. Vzpomínám si, že běželo o zlomek $\frac{5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5}}{5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5}}$

Uvítal jsem, že o jeho zjednodušení se různí řešitelé pokoušeli různými způsoby. Z důvodů metodických a pro zajímavost je uvádím.

¹⁾ Rozhledy začala JČMF vydávat od počátku školního roku 1921/22 místo dřívější Přílohy k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky. V podrobnostech viz článek Frant. Veselého „Jak vznikl náš časopis Rozhledy matematicko-fyzikální“ v Rozhledech roč. 40, čís. 9, str. 386 až 390.

Žák A prováděl žádané početní výkony jednotlivě:

$$\text{V čitateli } 5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5} = 9\frac{15+12}{20} = 9\frac{27}{20} = 10\frac{7}{20},$$

$$\text{ve jmenovateli } 5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5} = 1\frac{15-12}{20} = 1\frac{3}{20},$$

$$\text{načež } 10\frac{7}{20} : 1\frac{3}{20} = \frac{207}{20} : \frac{23}{20} = \frac{9}{1} = 9$$

Žák B považoval provádění jednotlivých početních výkonů za roztržitěné úpravy částí daného výrazu, i shrnul je, přičemž ponechal v úloze tvar složeného zlomku:

$$\frac{5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5}}{5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5}} = \frac{9\frac{15+12}{20}}{1\frac{15-12}{20}} = \frac{10\frac{7}{20}}{1\frac{3}{20}} = \frac{\frac{207}{20}}{\frac{23}{20}} = \frac{207}{20} : \frac{23}{20} = 9.$$

Žák C dal přednost počítání s čísly desetinnými:

$$\frac{5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5}}{5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5}} = \frac{5,75 + 4,6}{5,75 - 4,6} = \frac{10,35}{1,15} = 9.$$

Žák D vytkl všem dosavadním způsobům neobratnost, neboť převádějí daný složený zlomek v jiný zlomek složený a teprve ten potom zjednodušují. Postřehl, že žák C dosáhl cíle v podstatě tehdy, když zlomek rozšiřoval stem, rozhodl se proto zlomek rovněž rozšířit avšak dvaceti:

$$\frac{\left(5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5}\right) \cdot 20}{\left(5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5}\right) \cdot 20} = \frac{(100 + 15) + (80 + 12)}{(100 + 15) - (80 + 12)} = \frac{115 + 92}{115 - 92} = \frac{207}{23} = 9.$$

Žák E poukazoval rovněž na zdlouhavost uvedených způsobů a změnil myšlenku rozšiřovat zlomek za opačnou. Daný zlomek „krátil“ -

tak to říkal - postupně číslem $\frac{3}{4}$, zlomek tak získaný $\frac{5 + 4\frac{3}{5}}{5 - 4\frac{3}{5}}$ dále čís-

lem $\frac{3}{5}$ a dostal $\frac{5 + 4}{5 - 4} = \frac{9}{1} = 9.$

Ve třídě to náhle zašumělo.

Nebylo nikoho, kdo by úlohu nesledoval se soustředěnou pozorností.

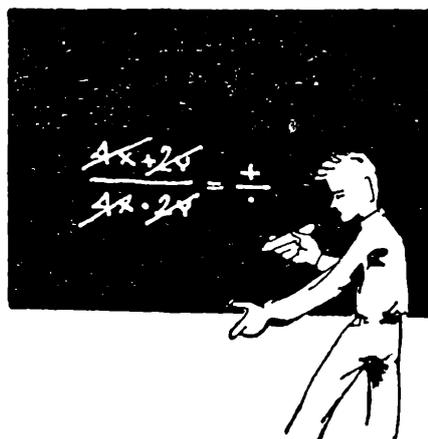
Mimořádná hodina, jež bývá na přání žáků leckdy zmařena „tichým“ zaměstnáním nebo četbou, vnesla do ní čilý pracovní ruch, jenž vyvrcholil v učeném hádání o různých způsobech řešení úlohy, o jejich správnosti či výhodnosti. Čas však pokročil a bylo třeba výměnu názorů zakončit, poznatky shrnout a hodinu uzavřít.

Teď pomohly i Rozhledy.

Měl jsem je ovšem po ruce, otevřel jedno z čísel 36. ročníku a dal žáku F příkaz, aby z obrázku školní tabule, jež doprovázel v číslech 1. až 7. jejich matematickou stať (viz obr. 1), opsal příklad tam uvedený:

$$\frac{4x + 2y}{4x \cdot 2y} = \frac{+}{+}$$

to stačilo, aby i nejslabší žáci třídy pochopili nesprávnost „krácení“, provedeného žákem E, neboť „krácením“ důsledněji vykonaným mohl by místo k správnému výsledku i on dospět k závěru, že daný zlomek



Obr. 1.

$$\frac{5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{5}}{5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{5}} = \frac{+}{-}$$

Zájem o Rozhledy, jednou vzbuzený, vzrůstal, když jsem žákům odpovídal na četné dotazy. Několik čísel časopisu jsem jim mohl ihned ukázat. Z obsahu doporučil jsem jim na prvním místě článek d o c. d r. K a r l a H a v l í č k a: V y p o ř á d e j m e s e s e s l o ž e n ý m i z l o m k y (roč. 35, čís. 7, str. 289 až 291). Příslušný sešit jsem jim ovšem také ihned zapůjčil. Hlásilo se jich mnoho. Z těchto řad vzešli také noví čtenáři a předplatitelé Rozhledů.

Poznámka. Chyba, které se dopustil žák E - a učinil tak velmi odhodlaně, neboť v ý s l e d e k b y l s p r á v n ý - vyskytuje se i při d ě l e n í, např.

$$(9p^2 - 16q^2) : (3p - 4q) = 3p + 4q, \text{ neboť } \text{prý} \\ 9p^2 : 3p = 3p \text{ zároveň } (-16q^2) : (-4q) = +4q,$$

při řešení rovnic, např. soustavy $x^2 + y^2 = 53$, $7x + 2y = 53$, z níž srovnáváním domněle plyne $x^2 = 7x$, $y^2 = 2y$ a (poněvadž $x \neq 0$, $y \neq 0$) ihned kořeny $x = 7$, $y = 2$, aj.

O tom, jak značně může dobrý časopis přispět k růstu vědeckého pracovníka, svědčí také vřelý poměr, který mají k Rozhledům naši přední

badatelé. Prof. dr. František Vyčichlo, nositel Řádu práce, dlouholetý redaktor Rozhledů, se netajil přátelům z Jednoty čs. matematiků a fyziků, že musí vděčně splatit dluh Rozhledům, jimž se pro celý svůj život cítí zavázán za služby, které mu prokázaly.²⁾

Rozhledy pomáhají svým čtenářům prohlubovat znalosti srozumitelnou, někdy i zábavnou formou a informují je o nejnovějších časových problémech matematiky a technicky užití fyziky; tak podporují snažení naší školy, spjaté se životem a technickým pokrokem, konstatovala redakce Rozhledů v úvodníku, jímž zahajovala jubileum 40. ročník časopisu.

Za účinnou pomoc při zvyšování úrovně vyučování reálným předmětům na našich středních školách a za vynikající dlouholetou propagaci matematiky a fyziky mezi žactvem dostalo se Rozhledům nejvyššího uznání. Vysoké v y z n a m e n á n í Z a z á s l u h y o v ý s t a v b u, jež bylo časopisu propůjčeno rozhodnutím presidenta republiky ze dne 17. dubna 1962 bude mu pro příště nejlepším doporučením na jeho pouti ke čtenářům.

Recenze

Inž. Vlastimil Čihák
a inž. Zdeněk Tichý:



Logaritmické pravítko

SNTL, Praha 1961, 232 stránky, 59 obrázků, 13 tabulek, 3 přílohy, II. řada polytechnické knihovny, svazek 17., vydavatel Čs. společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí, brožovaný výtisk za 9,40 Kčs.

Jako výklad o logaritmickém pravítku je tato knížka vhodná pro potřebu pracujících i pro učitele a žáky všeobecně vzdělávacích a odborných škol. Hodí se také pro posluchače prvních semestrů vysokých škol.

P r v n í č á s t obsahuje výklad o grafickém znázorňování reálných čísel na číselné ose, i přibližných číslech a počítání s nimi. V stručnosti je uveden výklad o mocninách, odmocninách, logaritmech a logaritmických tabulkách.

V d r u h é č á s t i je popis logaritmického pravítka a jeho stupnic a je v ní pojednáno také o systémech logaritmických pravítek.

T ř e t í č á s t je věnována počítání na logaritmickém pravítku: algebraickým výpočtům, trigonometrickým výpočtům a řešení rovnic až do třetího stupně.

²⁾ Viz můj článek † Fr. Vyčichlo a Rozhledy v Rozhledech, roč. 36, čís. 6, str. 288.

Každá operace na logaritmickém pravítku je zdůvodněna pomocí zobrazovacích rovnic příslušných stupnic; na řešeném příkladě je ilustrován postup výpočtu a na závěr je vysloveno stručné pravidlo pro postup výpočtu a pravidlo pro určení polohy desetinné čárky ve výsledku. Výklad doplňují reprodukce logaritmických stupnic nastavených pro operace popisované v knížce.

Autoři zavedli jednoduchý pojem třídy čísel a založili na něm svůj výklad. Pojem *třídy čísel* definují tak, že do téže třídy čísel patří reálná čísla a a b právě tehdy, existuje-li celé číslo k , za $a = 10^k b$. Při násobení a dělení na logaritmickém pravítku je totiž lhostejné, které číslo (prvek) z příslušné třídy vezmeme, neboť třída výsledku se tím nezmění; poloha desetinné čárky se pak určí na základě příslušného pravidla o řádu výsledku.

Čtvrtá část obsahuje praktické úlohy pro logaritmické pravítko a návod ke zhotovení cvičného modelu logaritmického pravítka z lepenky, na němž lze snadno počítat cvičení uvedená v knížce.

Dr. J. Kabele ve svém článku Logaritmické pravítko na str. 197 až 204 časopisu Matematika ve škole, čís. 4, ročník XII (1961—1962), konstatuje, že není námitek proti zařazení logaritmického pravítka do osnov základní školy, že však nezbytnou podmínkou je opatřit školám kvalitní logaritmická pravítka, vypracovat metodickou příručku o logaritmickém pravítku a doplnit v tomto ohledu kvalifikaci učitelů. Recenzovaná knížka je takovou vhodnou příručkou.

Na konci knihy je připojen rejstřík a přehled naší i cizí literatury o logaritmickém pravítku.

M. Z.

Redakční sdělení



* Rozhledy se objednávají pouze u místní Poštovní novinové služby nebo přímo u poštovního doručovatele. Přání a stížnosti týkající se donášky časopisu podejte nejdříve u svého poštovního úřadu. Nedocílíte-li nápravy, sdělte nám to písemně.

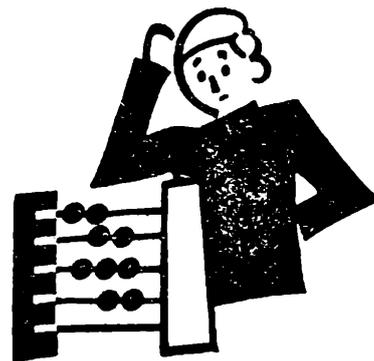
* Autory příspěvků žádáme, aby psali strojem a věnovali zvláštní péči ručně vpisovaným textům a znakům. Obrázky - mimo fotografie je nutno provádět tuší a popisovat normalisovaným písmem, šablonou 5 mm. Reprodukci budou dvakrát zmenšeny.

* V č. 9 ročníku 40 na str. 412 (10 ř. zdola) budiž $J.s$ místo Jms^2 .

Matematika

Rudolf Cihlář, Český Krumlov:

Kružnice devíti bodů v trojúhelníku



Ve 4. čísle tohoto časopisu, ročník 1959 (37), str. 145 byl uveřejněn článek inž. dr. Josefa Langra, Kružnice devíti bodů v trojúhelníku. V tomto článku byly uvedeny některé geometrické vlastnosti této kružnice, např., že její střed pólí vzdálenost mezi středem kružnice trojúhelníku opsané a průsečíkem výšek, její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané aj.

Článek končí připomínkou, že o dalších vlastnostech této kružnice bude uveřejněn v časopise další článek, a proto chci v tomto článku uvést další zajímavé vlastnosti této kružnice.

Tato kružnice zajímala matematiky Leonharda Eulera (1707—1783) a Karla Wilhelma Feuerbacha (1800—1834), kteří se touto kružnicí zabývali. Proto se v německé matematické literatuře dosti často setkáváme s označením kružnice devíti bodů v trojúhelníku; jako Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice. K. W. Feuerbach se zabývá např. kružnicí ve svém díle *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, které bylo vydáno roku 1822 v Norimberku. L. Eulerovi se podařilo dokázat, že kružnice devíti bodů se dotýká vepsané kružnice a všech tří vněpřipsaných kružnic trojúhelníku.

V tomto článku se budeme zabývat právě touto vlastností a pro snazší pochopení a ulehčení se omezíme jen na obecný pravoúhlý trojúhelník. Pro důkaz uvedené vlastnosti použijeme rovinné analytické geometrie, jejíž kurs byl v tomto časopise uveřejněn z pera doc. Emila Kraemera v minulých ročnících.

Pravoúhlou soustavu os souřadnic x a y zvolíme tak, aby její počátek P splýnul s vrcholem C , osa x se stranou CA a osa y se stranou CB (obr. 1).

Délky stran trojúhelníku ABC byly zvoleny pro snazší výpočty takto: $AC = 4b$, $BC = 4a$ a $AB = 4c$, mezi nimiž podle Pythagorovy věty platí vztah

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vrcholy trojúhelníku ABC jsou $A(4b; 0)$, $B(0; 4a)$ a $C(0; 0)$.

Čtenář si dále sám ověří, že středy stran trojúhelníku ABC jsou $A_o(0; 2a)$, $B_o(2b; 0)$ a $C_o(2b; 2a)$.

Kružnice devíti bodů k_9 v obecném trojúhelníku prochází těmito trojicemi bodů

- a) středy stran A_o, B_o, C_o ;
- b) patami výšek A', B', C' ;
- c) středy úseků výšek mezi jejich společným průsečíkem V a vrcholy trojúhelníku A'', B'', C'' .

Tím, že uvažujeme pravoúhlý trojúhelník, splývají tyto body:

$$A' = B' = A'' = B'' = C'' = C.$$

Proto, jak z obr. 1 je patrné, je kružnice devíti bodů k_9 v tomto případě kružnice opsaná obdélníku $PB_oC_oA_o$ a prochází bodem C' , tj. patou výšky ke straně AB . Snadno nahlédneme, že střed O_9 kružnice k_9 je určen souřadnicemi $(b; a)$ a její poloměr

$$r_9 = c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Je tedy možno po úpravě naopak napsat rovnici kružnice k_9 ve tvaru

$$x^2 + y^2 - 2bx - 2ay = 0 \quad (1)$$

V dalším najdeme rovnice kružnic k_0, k_1, k_2, k_3 , tj. kružnic vepsané a vně připsané. Označme středy těchto kružnic se zachováním jejich pořadí: O_0, O_1, O_2, O_3 a podobně jejich poloměry r_0, r_1, r_2, r_3 .

Z obr. 1 je patrné, že kružnice k_0 je určena středem $S_0(r_0; r_0)$ a poloměrem r_0 . Její rovnice po krátké úpravě zní

$$x^2 + y^2 - 2r_0x - 2r_0y + r_0^2 = 0. \quad (2)$$

Z planimetrie víme, že

$$r_0 = \frac{P}{s}, \text{ kde } P \text{ je obsah trojúhelníka } ABC \text{ a } s \text{ je jeho poloviční obvod.}$$

Platí tedy

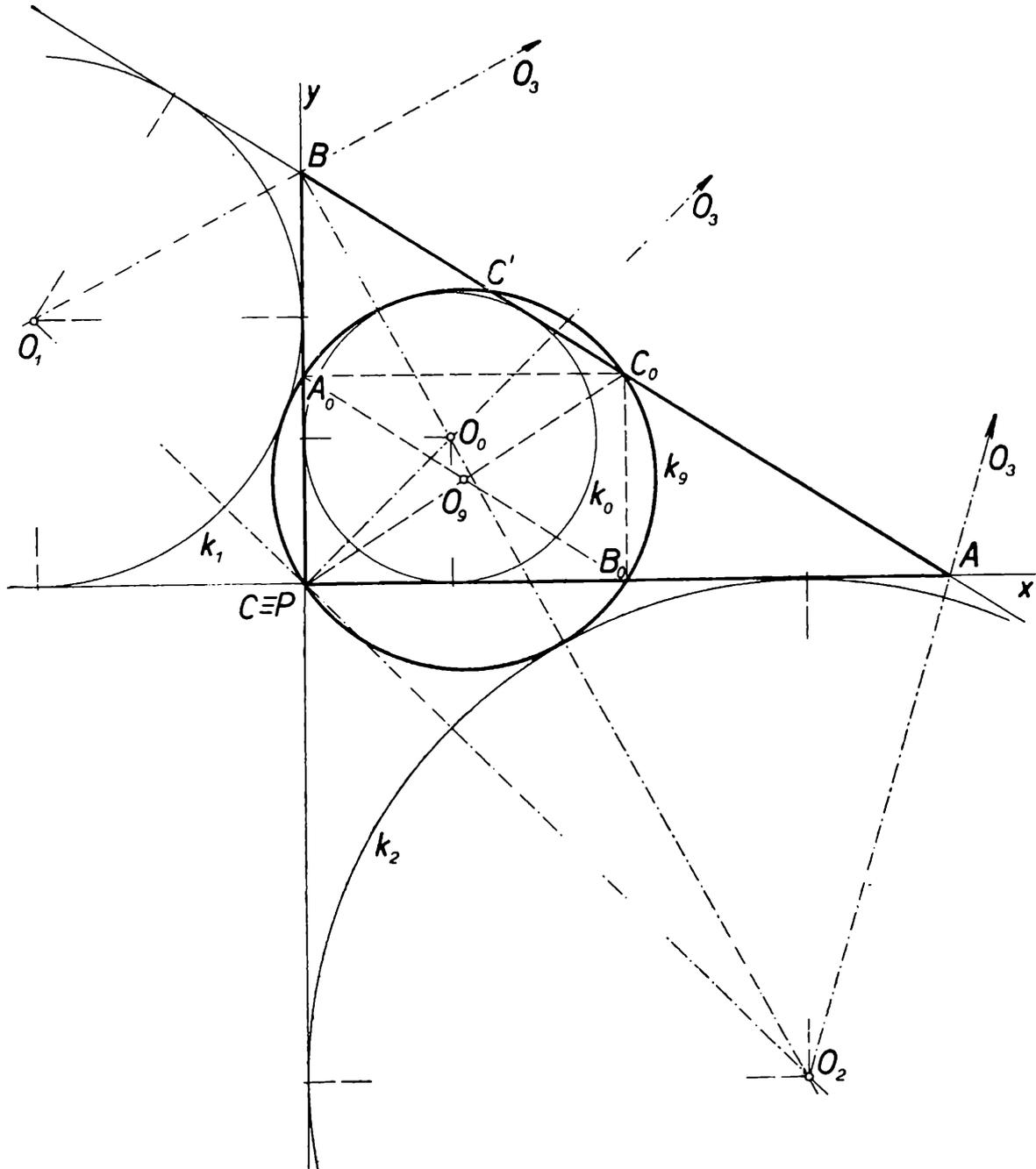
$$P = 8ab \quad \text{a} \quad s = 2(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}), \text{ z čehož pak}$$

$$r_0 = \frac{4ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Výraz r_o v rovnici (3) upravme usměrněním zlomku na konečný tvar

$$r_o = 2(a + b - c) \quad (3')$$

Pro stanovení vzájemné polohy obou kružnic k_o a k_p hledíme průsečíky obou kružnic, určených rovnicemi (1) a (2), v nichž proměnné x , y považujeme za souřadnice hledaných průsečíků.



Obr. 1

Odečtením rovnic (1) a (2) a dosazením za r_o z rovnice (3') obdržíme rovnici ve tvaru

$$(2a + b - 2c) \cdot x + (a + 2b - 2c) \cdot y - 2(a + b - c)^2 = 0 \quad (4)$$

Pro snazší počítání zavedme přechodně do rovnice (4):

$$2a + b - 2c = j, \quad a + 2b - 2c = k \quad \text{a} \quad 2(a + b - c)^2 = m,$$

čímž rovnice (4) nabude tvaru

$$j \cdot x + k \cdot y - m = 0. \quad (4')$$

Z této rovnice platí, že

$$x = \frac{m - k \cdot y}{j}.$$

Po dosazení za x do rovnice (1) a náležité úpravě obdržíme tuto kvadratickou rovnici pro y

$$(k^2 + j^2) \cdot y^2 - 2(a j^2 + km - bj k) \cdot y + m^2 - 2bjm = 0 \quad (5)$$

Její diskriminant zní

$$D_o = 4j^2 [(aj - bk)^2 + 2m(ak + bj) - m^2] \quad (6)$$

Pro vyčíslení diskriminantu D_o si určíme nejdříve

a) $(aj - bk)^2 = (a - b)^2 r_o^2,$

b) $2m(ak + bj) = r_o^2 \left[\frac{r_o^2}{4} - (a - b)^2 \right],$

c) $m^2 = \frac{r_o^4}{4}.$

Po dosazení takto získaných výrazů do diskriminantu (6) obdržíme

$$D_o = 4j^2 \left[(a - b)^2 r_o^2 + \frac{r_o^4}{4} - (a - b)^2 r_o^2 - \frac{r_o^4}{4} \right] = 4j^2 \cdot 0,$$

což znamená, že

$$D_o = 0$$

Kvadratická rovnice (5) pro y má diskriminant roven nule. Má tedy jeden dvojnásobný kořen, což znamená, že oba průsečíky kružnic k_o a k_g splývají v jediný bod.

Z toho tedy vyplývá, že se obě kružnice k_o a k_g dotýkají.

Čtenář by si sám mohl provést důkaz o dotyku obou jmenovaných kružnic také kdyby si dokázal platnost rovnosti

$$O_g O_o = r_g \pm r_o.$$

Abychom podobným způsobem mohli zjistit vzájemnou polohu kružnic k_1 a k_g , stanovme nejdříve rovnici kružnice k_1 . Její střed $S_1 (-r_1; r_1)$, kde r_1 je její poloměr.

Velikost poloměru r_1 určíme opět z planimetrického vztahu

$$\triangle ABO_1 + \triangle ACO_1 - \triangle BCO_1 = \triangle ABC,$$

kde

$$\triangle ABO_1 = 2cr_1, \quad \triangle ACO_1 = 2br_1, \quad \triangle BCO_1 = 2ar_1 \text{ a } \triangle ABC = 8ab$$

Po dosazení do uvedeného vztahu a vyčíslení obdržíme pro

$$r_1 = 2(a - b + c).$$

Rovnice kružnice k_1 po krátké úpravě zní

$$x^2 + y^2 + 2r_1x - 2r_1y + r_1^2 = 0. \quad (7)$$

Hledáme opět společné body obou kružnic k_1 a k_9 , a to shodným postupem jako v předcházející úloze. Odečtením obou rovnic (1) a (7) obdržíme lineární rovnici pro x a y . Z ní pak vyjádříme neznámou x a dosazením do rovnice (1) obdržíme opět kvadratickou rovnici pro y , o jejímž diskriminantu se opět přesvědčíme, že je roven nule. Závěr bude, že se kružnice k_1 a k_9 dotýkají.

Úplně shodně budeme postupovat při zkoumání poloh kružnic k_2 a k_9 , a poslední dvojice k_3 a k_9 . Poloměry r_2 a r_3 kružnic k_2 a k_3 získáme z planimetrických vztahů

a) $\triangle ABO_2 + \triangle BCO_2 - \triangle ACO_2 = \triangle ABC$ pro r_2 a

b) $\triangle ACO_3 + \triangle BCO_3 - \triangle ABO_3 = \triangle ABC$ pro r_3

Můžeme nyní shrnout naše pozorování o vzájemných polohách kružnic k_0 , k_1 , k_2 a k_3 ke kružnici devíti bodů k_9 v tuto větu:

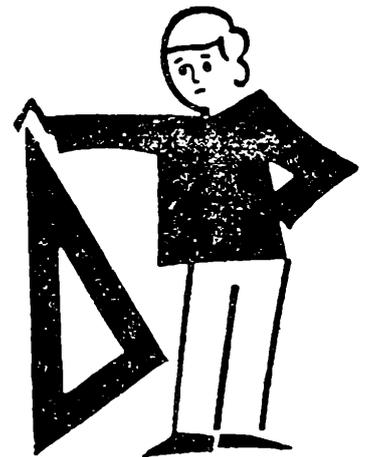
Kružnice devíti bodů v obecném pravoúhlém trojúhelníku se dotýká kružnice trojúhelníku vepsané a všech tří vně připsaných kružnic.

P o z n á m k a: Tato věta, které se též říká **v ě t a E u l e r o v a** nebo **F e u e r b a c h o v a**, byla v tomto článku dokázána pro obecný pravoúhlý trojúhelník, ale platí pro jakýkoliv trojúhelník. Byla dále zobecněna pro sférický trojúhelník a v rovině byla zobecněna tak, že místo kružnic se uvažují jisté kuželosečky.

Deskriptivní geometrie

M i l a n K o m a n, Praha:

Dělení pravidelného čtyřstěnu

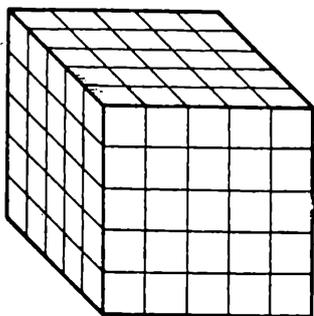


Úvodem si všimněme jednoho dělení krychle. Je dána libovolná krychle. Rozdělme každou její hranu na n shodných úseček. Krajními body těchto úseček proložíme roviny rovnoběžně se všemi stěnami dané krychle (obr. 1, kde zvoleno $n = 5$).

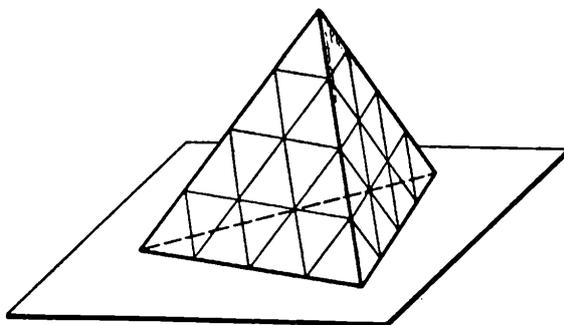
Snadno zjistíme, že těmito rovinami rozdělíme původní krychli na n^3 nových shodných krychliček.

Pokusme se řešit podobnou úlohu pro pravidelný čtyřstěn. Ukáže se, že řešení v tomto případě není již zdaleka tak jednoduché.

Uvažujme libovolný pravidelný čtyřstěn s vodorovnou podstavou. Rozdělme každou jeho hranu na n shodných úseček. Krajními body těchto úseček proložíme roviny rovnoběžné se všemi stěnami daného čtyřstěnu (obr. 2, kde zvoleno $n = 4$).



Obr. 1



Obr. 2

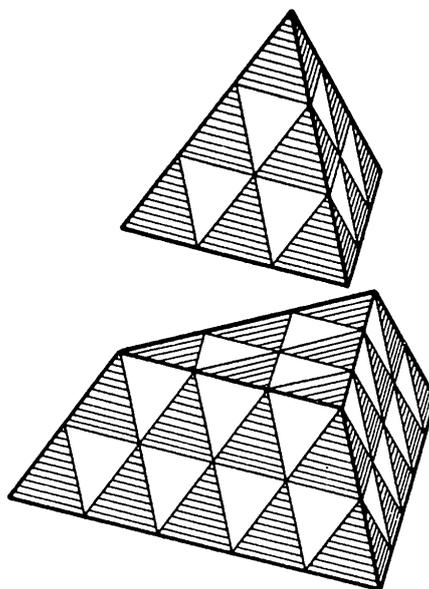
Ptejme se nyní:

1. Jaká tělesa vzniknou rozdělením daného čtyřstěnu těmito rovinami.

2. Kolik těchto nových těles vznikne.

Na první pohled se zdá, že vzniknou při tomto dělení opět samé pravidelné čtyřstěny. Ukáže se však, že nás v tomto případě prvotní názor klame. Avšak než odpovíme na 1. otázku, uvedeme nejdříve některé přípravné úvahy.

Všimněme si, že řez kterékoliv naší roviny se čtyřstěnem je rozdělen ostatními uvažovanými rovinami na vesměs samé shodné rovnostranné trojúhelníky. Přitom tyto trojúhelníky můžeme rozdělit do dvou druhů. Jednak na trojúhelníky, které jsou přímo stejnohlelé s řezy původního čtyřstěnu, v nichž leží (na obr. 3 jsou vyšrafovány) a jednak na trojúhelníky, které jsou nepřímo stejnohlelé s příslušnými řezy (na obr. 3 jsou ponechány bílé). První z těchto trojúhelníků budeme dále nazývat trojúhelníky 1. druhu, ostatní trojúhelníky 2. druhu.



Obr. 3

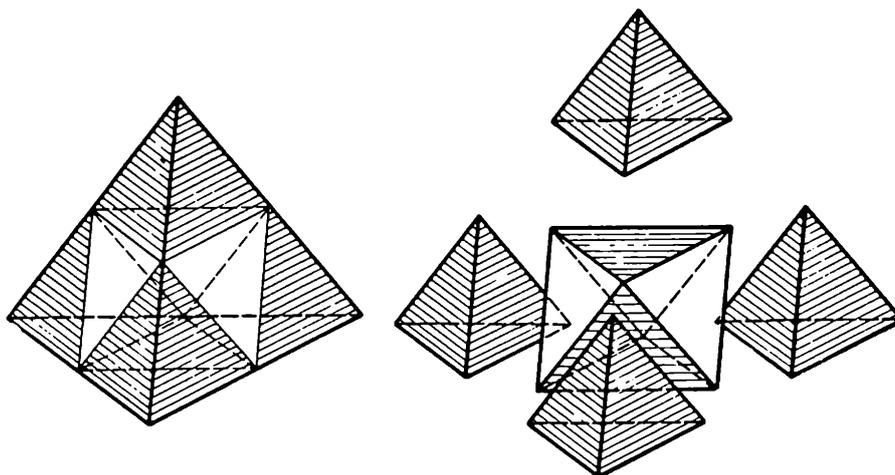
Nyní již můžeme odpovědět podrobně na otázku, jakého druhu jsou tělesa, která vzniknou z daného čtyřstěnu výše popsáním dělením.

Tělesa, která leží nad libovolnými trojúhelníky 1. druhu, nebo pod libo-

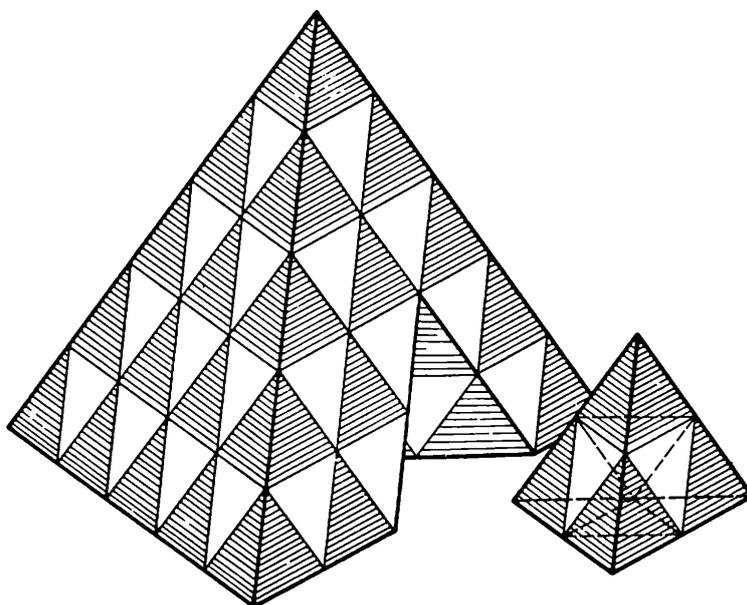
volnými vodorovnými trojúhelníky 2. druhu, jsou shodné pravidelné čtyřstěny.

Tělesa, která leží nad libovolným vodorovnými trojúhelníky 2. druhu, nebo pod libovolnými vodorovnými trojúhelníky 1. druhu, jsou shodné pravidelné osmistěny.

O správnosti těchto tvrzení se nejdříve přesvědčíme v případě, že $n = 2$. Roviny, které procházejí středy tří hran (vycházejících z téhož vrcholu) protnou čtyřstěn v trojúhelnících, které nazveme „středními



Obr. 4



Obr. 5

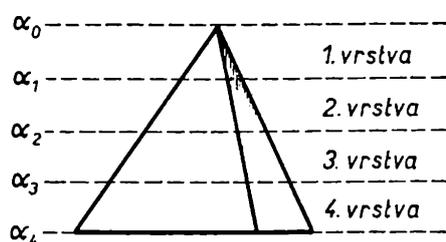
řezy“. Roviny „středních“ řezů zřejmě oddělí od původního čtyřstěnu čtyři nové shodné pravidelné čtyřstěny (obr. 4). Po oddělení zůstane těleso, které má celkem 8 shodných stěn tvaru rovnostranného trojúhelníka (čtyři z těchto stěn jsou „střední“ řezy a čtyři jsou části stěn původního čtyřstěnu). Jak známo, existuje jediné takové těleso. Je jím pravidelný osmistěn.

Tím jsme ukázali, že při tomto dělení vzniknou jednak pravidelné čtyřstěny, jednak pravidelné osmistěny. Snadno již sami ověříte, že je správné tvrzení i o jejich rozmístění nad či pod trojúhelníky 1. a 2. druhu.

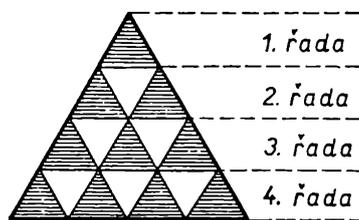
Budiž nyní $n > 2$. Zřejmě každý trojúhelník 1. druhu (s výjimkou trojúhelníků ležících ve stěnách původního čtyřstěnu) je „středním“ řezem jistého čtyřstěnu, pro který lze aplikovat právě uvedenou úvahu (obr. 5).

Tím je dokázáno tvrzení pro tělesa rozmístěná nad vodorovnými trojúhelníky 1. a 2. druhu a pod vodorovnými trojúhelníky 1. druhu. Není těžké doplnit důkaz i pro tělesa rozmístěná pod vodorovnými trojúhelníky 2. druhu.

Nyní budeme zkoumat, kolik čtyřstěnů a kolik osmistěnů při tomto dělení vznikne. Opět nejdříve uvedeme některé pomocné úvahy.



Obr. 6



Obr. 7

Vodorovné roviny, kterými protínáme daný čtyřstěn, označme počínaje od vrcholu po řadě $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (viz obr. 6, kde zvoleno $n = 5$). Zvolme nyní libovolné k z čísel $1, 2, \dots, n$ a uvažujme řez roviny α_k s daným čtyřstěnem (na obr. 7 je zobrazen zvlášť jeden takový řez pro $k = 4$). Počítejme, kolik trojúhelníků 1. a 2. druhu tento řez obsahuje.

Všechny trojúhelníky 1. a 2. druhu jsou rozmístěny v k řadách (viz obr. 7). Přitom trojúhelníky 1. druhu jsou rozmístěny takto: V první řadě je jeden trojúhelník a v každé následující řadě vždy o jeden více než v předcházející. Počet U_k všech těchto trojúhelníků se tudíž rovná součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti s první členem $a_1 = 1$ a diferencí $d = 1$, tj.

$$U_k = \frac{1}{2} k(k + 1) = \frac{1}{2} (k^2 + k).$$

Podobně určíme počet V_k trojúhelníků 2. druhu

$$V_k = \frac{1}{2} (k - 1) k = \frac{1}{2} (k^2 - k)$$

Všechna tělesa, která vzniknou při dělení původního čtyřstěnu, jsou rozmístěna v n vrstvách určených rovinami $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Očíslujeme tyto vrstvy opět počínaje od vrcholu po řadě čísly $1, 2, \dots, n$ (obr. 6, kde zvoleno $n = 5$).

Přitom počet P_k pravidelných čtyřstěnů ležících v k -té vrstvě (kde

$k = 1, 2, \dots, n$) se rovná součtu trojúhelníků 2. druhu roviny α_{k-1} a trojúhelníků 1. druhu roviny α_k (viz výše uvedené tvrzení), tj.

$$P_k = \frac{1}{2} [(k-2)(k-1) + k(k+1)] = k^2 - k + 1$$

Podobně vypočteme počet Q_k pravidelných osmistěnnů ležících v k -té vrstvě (kde $k = 1, 2, \dots, n$). Každý takový osmistěnn má po jedné stěně v rovinách α_{k-1} a α_k . Je tedy počet Q_k pravidelných osmistěnnů k -té vrstvy roven počtu trojúhelníků 1. druhu roviny α_{k-1} , nebo což je totéž počtu trojúhelníků 2. druhu roviny α_k , tj.

$$Q_k = \frac{1}{2} (k^2 - k)$$

Odtud snadno zjistíme, že počet S_n všech čtyřstěnnů vzniklých při dělení původního čtyřstěnu je dán součtem

$$S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

a počet T_n pravidelných osmistěnnů je dán součtem

$$T_n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$

Proveďme nyní tyto výpočty:

a) Napišme pod sebe čísla P_1, P_2, \dots, P_n a sečteme je:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1^2 - 1 + 1, \\ P_2 &= 2^2 - 2 + 1, \\ P_3 &= 3^2 - 3 + 1, \\ P_4 &= 4^2 - 4 + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ P_n &= n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

Po sečtení dostaneme

$$S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

Pro součet n prvních členů posloupnosti druhých mocnin přirozených čísel platí známý vzorec

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Součet v druhé závorce určíme jako součet prvních n členů aritmetické posloupnosti přirozených čísel. Odtud vypočteme

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) + n,$$

neboli

$$S_n = \frac{1}{3} n(n^2 + 2)$$

b) Snadno vypočteme, že

$$Q_k = \frac{1}{2} P_k - \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad 1 \leq k \leq n$$

Odtud tedy dostaneme

$$T_n = \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + \dots + P_n) - \frac{1}{2} n,$$

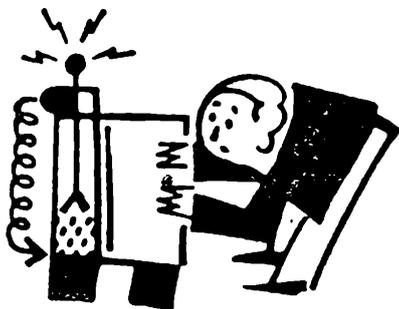
čili

$$T_n = \frac{1}{6} (n-1) n(n+1)$$

Nakonec můžeme odpovědět také na otázku, kolik nových částí celkem vznikne popsáním dělením čtyřstěnu. Tento počet je dán součtem

$$S_n + T_n = \frac{1}{2} n (n^2 + 1)$$

Fyzika



Inž. dr. Václav Šindelář, Praha:

Nová měrová soustava

Jednotná měrová soustava byla v ČSSR vyhlášena zákonem č. 35 Sb., ze dne 29. března 1962. Vzhledem k důležitosti tématu uveřejňujeme několik podrobnějších článků, aby tak byli naši čtenáři včas informováni. Současně žádáme autory našich článků, aby se řídili v budoucnu uvedenými pravidly.

Redakce

Měření je základem veškerého kvantitativního poznání. Správnosti měření a jeho jednotnosti lze dosáhnout zajištěním hlavních etalonů nebo etalonových zařízení všech důležitých fyzikálních a technických veličin, jež se opírají o jednotnou koherentní racionalisovanou měrovou soustavu. Taková soustava nebyla u nás dosud obecně zavedena a používána zvláště v technické praxi. Ve fyzice používala se dříve soustava CGS (centimetr-gram-sekunda) v různých obměnách, v poslední době

přecházelo se na soustavu MKSA. I v některých technických odvětvích (např. v elektrotechnice od r. 1948) byla již tato soustava běžně používána. Ve většině technických oborů však, a to jak v praxi, tak i při výuce, uplatňovala se dosud *soustava technická*, jež se od obou dříve uvedených soustav lišila hlavně ve volbě základních veličin a jejich jednotek. Zatímco ve fyzikálních soustavách byla jednou ze základních veličin *h m o t n o s t*¹⁾ (dříve nazývaná hmotou), byla základní veličinou v technické soustavě síla. Jednotky obou těchto veličin měly (každá ve své soustavě) shodné pojmenování *k i l o g r a m* i značku *kg*. Silový kilogram měl být označován na rozdíl od kilogramu hmotnosti hvězdičkou (*kg**), ve většině případů se to však neprovádělo a docházelo k častým záměnám a nejasnostem. Zvláště ve výuce na některých průmyslových školách bylo velkým nedostatkem, že si studenti v prvním ročníku osvojili kilogramu používat pouze pro hmotnost a ihned v ročnících následujících používali jednotku s týmž názvem i značkou pouze pro sílu. Všechny tyto obtíže odstraňuje nová *j e d n o t n á m ě r o v á s o u s t a v a* v ČSSR, jež byla vyhlášena zákonem č. 35 Sb. ze dne 29. března 1962. Tento zákon stanoví zákonné jednotky důležitých fyzikálních a technických veličin. O zákonných jednotkách promluvíme si v jednom z dalších odstavců. K tomuto odstavci si uvedeme ještě několik vysvětlivek.

Jednotnou je taková soustava, jež je používána ve všech odvětvích národního hospodářství a jež z širšího hlediska je v souladu s mezinárodními dohodami. Nová měrová soustava v ČSSR je např. v zásadním souhlasu s mezinárodní měrovou soustavou SI (*S y s t ě m e I n t e r n a t i o n a l*), která byla po řadu let zpracovávána mezinárodní komisí ISO/TC 12 (*I n t e r n a t i o n a l S t a n d a r d O r g a n i s a t i o n*) spolu s národními komisemi členských států. Soustava SI, jež vychází zhruba z dřívější soustavy MKSA byla přijata v roce 1960 na XI. generální konferenci pro váhy a míry, jež se konala v Paříži.

Koherentní je taková měrová soustava, kde jednotky všech odvozených veličin jsou vázány na základní jednotky tak, jak odpovídá platným fyzikálním vztahům (z lat. *cohaerentia-souvislost*). Jednotky, které odpovídají zásadám takové tvorby, nazýváme také koherentními. Např. koherentní jednotkou rovinného úhlu je radián (*rad*), kterou můžeme, chceme-li její koherentnost zvláště výrazně vyznačit, psát ve tvaru $\frac{m}{m}$ (metr na metr). Nekoherentní jednotkou rovinného úhlu je *s t u p e ň* (*1°*). V odstavci, ve kterém se budeme zabývat jednotlivými jednotkami všech důležitých veličin jsou koherentními jednotkami příslušné je d-

¹⁾ V tomto článku je užíváno nově navrhovaného termínu *hmotnost* místo dřívějšího *h m o t a* (značka *m*). Pozn. redakce.

notky hlavní a z nich vytvářené díly a násobky. Vedlejší jednotky jsou zpravidla nekoherentní.

Racionalizovaná (racionální) je taková měrová soustava, v níž odvozování jednotek, jež vycházejí z fyzikálních zákonů, které mají tzv. tvar převratných čtverců, např. Coulombovy zákony, Savartův zákon, zákon pro intenzitu světla (bodového) zdroje aj., děje se z racionalizovaných formulací těchto zákonů. Tak se např. vychází z elektrostatického Coulombova zákona ve tvaru

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \varepsilon r^2}$$

a nikoliv z tvaru dříve používaného

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon' r^2}.$$

Nový racionalizovaný tvar se liší od staršího tvaru číselným faktorem 4π ve jmenovateli, rovným velikosti plného prostorového úhlu, tj. poměru povrchu koule ke čtverci jejího poloměru. Tím, že takovéto zákony píšeme v novém tvaru, zavádíme iracionální faktor 4π do rovnic, kde je oprávněn prostorovou symetrií fyzikálního pole kolem zdroje nějakého toku (v daném případě silového pole kolem bodového elektrického náboje) a vylučujeme jej tak z rovnic, kde nemá oprávnění. Je ovšem pro porozumění třeba dodat, že zavedením tohoto faktoru do fyzikální rovnice nezmění se velikost veličiny (v tomto případě síly), kterou z ní počítáme. Změní se ovšem velikost některé konstanty nebo veličiny na pravé straně rovnice (v daném případě dielektrické konstanty).

Rozdělení a tvoření jednotek fyzikálních veličin

Každá fyzikální veličina má v jednotné měrové soustavě jedinou *jednotku hlavní* a různé *jednotky dílčí* a *násobné*, které jsou odvozeny předepsaným způsobem z hlavní jednotky. Z nich se vždy definuje pouze jednotka hlavní a to pomocí příslušného platného definičního vztahu. Jednotky základních veličin a některých jednotek odvozených jsou *jednoduché*, jednotky většiny odvozených veličin jsou *složené*. Pro zjednodušení bývá některým jednotkám (zpravidla hlavním) častěji se vyskytujících veličin přiřčen zvláštní název a značka. U složených jednotek můžeme odvozovat dílčí a násobné jednotky z dílců a násobků jednotlivých jednotek (základních veličin nebo odvozených veličin, jejichž hlavní jednotka má zvláštní pojmenování), které jsou obsaženy ve složené jednotce.

Příklad. Jednoduchou jednotkou je například hlavní jednotka délky (metr, m), hmotnosti (kilogram, kg), objemu (krychlový

metr, m^3), periody (sekunda, s), (součinitele) valivého tření (metr, m), frekvence (sekunda na minus první, s^{-1}) apod.

Složenou jednotkou je např. hlavní jednotka rychlosti (metr za sekundu, $m s^{-1}$), hustoty (kilogram na krychlový metr, $kg m^{-3}$), síly (kilogram krát metr za sekundu na druhou, $kg m s^{-2}$), průtočného objemu (objemového průtoku) (krychlový metr za sekundu, $m^3 s^{-1}$), elektrického náboje (ampérsekunda, As) apod.

Složených jednotek, jež mají svoje zvláštní pojmenování a značku je celá řada, např. jednotka síly (newton, $N = kg m s^{-2}$), práce (energie) (joule, $J = kg m^2 s^{-2}$), elektrického náboje (coulomb, $C = As$), elektrického napětí (volt, $V = kg m^2 s^{-3} A^{-1}$), osvětlení (lux, $lx = kg s^{-3}$) apod. Můžeme se setkat i s hlavní jednotkou veličiny, která je převráceně vzatou veličinou jinou a přitom hlavní jednotky obou veličin mají zvláštní názvy a značky. Jsou to např. veličiny: elektrický odpor (ohm, $\Omega = 1 kg m^2 s^{-3} A^{-2}$) a elektrická vodivost (siemens, $S = 1 kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2$). Tedy platí

$$1 \text{ ohm} = \frac{1}{1 \text{ siemens}} \quad \text{a} \quad 1 \text{ siemens} = \frac{1}{1 \text{ ohm}}$$

Takovéto rozmnožování názvů odvozených veličin, i když se zdá být mnohdy účelné, není rozhodně správné z hlediska měrové jednotnosti, zvláště u dvou veličin, jež jsou takto vzájemně vázány reciprocitou.

(Pokračování)

Inž. Zdeněk Kos, ŘVR, Praha:

Povodně

Dne 2. prosince 1959 ve 21 hod. 45 min. se protrhla přehrada Malpasset na řece Reyran v jižní Francii. Obrovské spousty vod se vyvalily do údolí rychlostí až $70 km \cdot h^{-1}$. Městečko Fréjus, které leží asi 10 km pod přehradou, bylo zaplaveno vlnou až 7 m vysokou. Zahynulo 405 lidí a byly způsobeny velké materiální škody.

Tato zpráva, která se objevila ve světovém tisku v prosinci roku 1959 vzrušila nejen stavitele přehrad, ale celou světovou veřejnost. Přední odborníci začali ihned vyšetřovat příčiny katastrofy. Tyto příčiny nutno znát, aby v budoucnosti nedocházelo k podobným katastrofám. Jak zjistila komise, která byla ustavena pro vyšetření katastrofy, bylo rozhodující příčinou prolomení skalního podloží pod základy hráze.

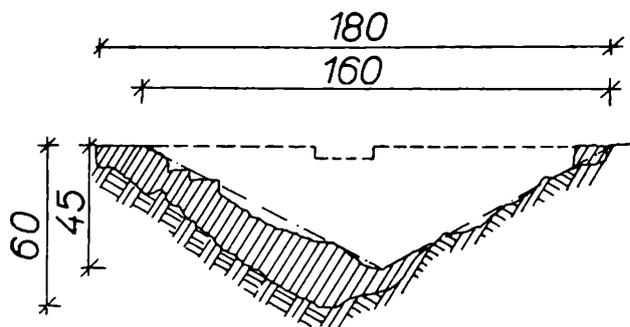
Katastrofální povodeň, která pod přehradou vznikla, je příkladem povodně, jejíž příčinou bylo zřícení přehrad. Tyto povodně patří k nejstrašnějším vůbec. Ale i povodně, vyvolané prudkými dešti, které za-

chvátí velké území, nebo prudkým táním sněhu a ledovců, jsou příčinou rozsáhlých škod a ztrát na lidských životech.

Povodně jsou jednou z nejobávanějších hrozeb přírody. Jejich historie je stará jako dějiny lidstva. Pravěké kultury vznikaly na březích velkých řek, které byly dopravními tepnami, zdrojem závlahové vody a zásobování vodou vůbec, i ochranou před dravou zvěří. Tyto řeky se však měnily ve smrtící živel v dobách povodní. Zejména Čína je známá svým bojem s každoročními záplavami řek Chuang-Ho a Jang-Tse, kdy při povodních se téměř každých deset let rozlévaly záplavy na území o rozloze dvacetkrát větším než je náš stát. Při nich statisíce lidí přicházelo o život a byla ničena práce mnoha let.

Člověk však není proti povodním bezbranný. Zkoumá jejich příčiny a snaží se zabránit jejich zhoubným následkům. Proti povodním se bojuje výstavbou velkých nádrží, kde se zachytí největší množství povodňové vody, která se pozvolna vypouští, úpravou toku jeho prohloubením, eventuálně napřímením nebo výstavbou hrází podél toků, které by ochránily přilehlé území. Další opatření spočívá v zalesňování ploch povodí, odkud odtéká v době velkých srážek nebo rychlého tání sněhu největší množství vod. V lese se nashromáždí ohromná množství vod, jejíž odtok se tak zpomalí a zmenší se povodňová vlna.

Když navrhujeme stavby na ochranu před povodněmi, musíme na prvním místě řešit umístění a rozměry těchto staveb, jak velký zdržný prostor má mít ochranná nádrž, jak velké má být koryto řeky, jak vysoké musí být hráze, aby je velká voda nestrhla atd. Na tyto otázky odpovídá věda, která se zabývá studiem vody v jejích různých



Obr. 1

formách na zeměkouli, čili hydrologie. Tato věda má širší obsah než hydraulika, která se zaměřuje pouze na zkoumání rovnováhy a pohybu kapalin z hlediska mechaniky. Podkladem pro hydrologii je klimatologie a meteorologie, čili nauka o počasí a povětrnosti, geologie, hydraulika a užitá čili aplikovaná matematika, zejména její část matematická statistika.

Hydrologie slouží řadě oborů jako je zásobování vodou, plavba, závlahy, využití vodní energie a rovněž boji proti povodním. Povodňový režim toku se nejdříve studuje, hledá se příčina povodní, jak často a kdy se vyskytují největší povodně, jak závisejí na atmosférických srážkách, teplotě atd. Data, jako stav vody na tocích, tj. výška hladiny v určitém místě a průtok, tj. množství vody, které protéká určitým místem za jednotku času (např. $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), zaznamenávají se denně. Dále

se tyto údaje zpracovávají statistickými metodami. Pomocí jich stanovíme, jak často asi můžeme očekávat povodně určité velikosti. Přitom je zvykem v hydrologii nazývat povodeň, která se vyskytuje jednou za pět, deset, či sto let *v o d o u p ě t i l e t o u, d e s e t i l e t o u, č i s t o l e t o u.*

Uvedeme si příklad na nejjednodušší zpracování povodňových průtoků na Labi v Děčíně. Nejdříve si musíme opatřit záznam těchto povodní za dostatečně dlouhé období. Tento záznam má většinou tvar tabulky sestavené s údaji v časovém sledu, jako např. tabulka 1.

Tabulka 1. Povodně na Labi v Děčíně o maximálním průtoku nad 1000 m³.s⁻¹

Rok	den a měsíc	maximum průtoku m ³ s ⁻¹
1900	27. ledna	1868
	1. března	2323
1901	10. dubna	3779
	8. března	1300
	13. dubna	1109
1949	24. května	1370
	3. června	1048
1950	15. února	1216

Tabulka 2.

Pořadové číslo	průtok m ³ s ⁻¹	pravdě- podobný počet vý- skytů za sto let
1	3779	2
2	3700	4
3	3600	6
4	2921	8
5	2841	10
6	2643	12
123	1026	246
124	1018	248
125	1005	250

Údaje průtoků z tabulky 1 uspořádáme podle velikosti od největšího průtoku k nejmenšímu. Pořadové číslo v této tabulce udává, kolikrát byla povodeň o velikosti, příslušející k tomuto pořadovému číslu, překročena za padesát let. (tab. 2).

Na základě této tabulky můžeme předpovídat povodně i v budoucnosti. Tak například povodeň $2841 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ se vyskytla za padesát let pětkrát. Předpokládáme, že tomu tak bude i v budoucnosti. V hydrologii většinou pracujeme s obdobím sto let. Pak musíme hodnoty pořadových čísel zdvojnásobit, abychom dostali pravděpodobný počet výskytů za sto let. Povodeň $2841 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ se tedy pravděpodobně vyskytne za sto let desetkrát, čili jednou za $100 : 10 = 10$ let a nazýváme ji *v o d o u d e s e t i l e t o u*. Podobně povodeň větší než $3700 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ se pravděpodobně vyskytne za sto let čtyřikrát, čili jednou za $100 : 4 = 25$ let a nazýváme ji *v o d o u d v a c e t i p ě t i l e t o u*.

Tento výpočet, který jsme právě provedli, je pouze hrubý odhad. Metodami matematické statistiky lze z údajů, které máme k dispozici, získat podrobnější a přesnější hodnoty. Kromě těchto dlouhodobých odhadů jsou předvídaný průtoky hlavně pro plavbu i na kratší období několika dnů. Vychází se při tom ze současného stavu, ze srážek, z předpovědí počasí, ze záznamů průběhu průtoků v minulosti, zejména za povodní a jiných činitelů.

Podívejme se dále na povodně z hlediska hydrauliky. Pohyb vody za povodně je hydraulicky velmi složitý. V určitém říčním profilu, tj. řezu, vedeném kolmo na směr toku, se každým okamžikem mění průtok i střední rychlost v profilu a tyto hodnoty se rovněž mění od jednoho profilu k druhému. Protože se v řekách mění i profil od místa k místu, stanovíme nejlépe průběh povodňové vlny přímým měřením vodních stavů, eventuálně průtoků. U katastrofálních povodní, jaké vzniknou na tocích zřícením přehrady, musíme přibližný průběh povodňové vlny stanovit na základě výpočtu. Ovšem i tento výpočet se bude opírat o zkušenosti s katastrofami přehrad a s povodňovými vlnami tím vzniklými. Zdálo by se, že usuzovat podle zkušenosti při jevu tak řídkém jako je zřícení přehrady, není na místě. Ve skutečnosti není zřícení přehrady tak nesmírně vzácné. Za posledních padesát let došlo více než k tisíci katastrofám přehrad.

Nejdůležitější údaje, které potřebujeme znát o povodňové vlně, která vznikne v případě katastrofy přehrady, je maximální průtok a doba trvání povodně v místě přehrady i v profilech pod přehradou. Pro maximální průtok odvodil L. L. Lištvan vzorec

$$Q_{\max} = K \cdot B \cdot H^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

kde K je koeficient o hodnotách 0,5 až 0,9, B je délka hráze v koruně v metrech, H je výška průrvy, nebo rozdíl horní a dolní hladiny v metrech.

(Pokračování)

Dopplerův jev v raketové technice

Úvod

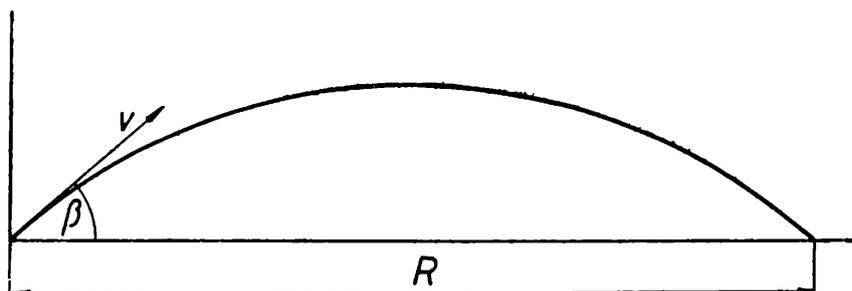
V roce 1842 odvodil profesor pražské stavovské techniky J. Ch. Doppler vztah pro změnu kmitočtu zdroje, způsobenou pohybem pozorovatele, zdroje nebo prostředí. Tento jev, později nazývaný jevem Dopplerovým, byl nejprve pozorován v akustice, ale platí pro všechny druhy vlnění. Za více než sto let od objevu našel uplatnění v různých oborech lidské činnosti, např. v astronomii se určují podle změny vlnové délky čar ve spektru hvězd a mlhovin jejich rychlosti vzhledem k Zemi. V tomto článku se budeme zabývat aplikací Dopplerova jevu v oblasti rádiových vln k měření rychlosti raket.

Rychlost rakety

Změření rychlosti rakety je důležitá úloha, neboť např. pro dostřel balistické rakety platí, že

$$R = \frac{v^2 \sin 2\beta}{g}, \quad (1)$$

kde R je dostřel, v počáteční rychlost, β úhel elevace a g gravitační zrychlení Země (obr. 1). Tento vzorec platí pro zjednodušený případ, kdy nebereme v úvahu odpor vzduchu, zakřivení Země a změnu gravitačního zrychlení s výškou. Dostřel je přímo úměrný dvojnoci počáteční rychlosti, a proto na ní více závisí než na úhlu elevace.



Obr. 1

Při vypouštění umělých družic Země a kosmických raket je nutné kontrolovat dosažení rychlosti nezbytné k pohybu po stanovené dráze. Měřením rychlosti lze též získat údaje pro kontrolu polohy rakety, která byla určena jinou metodou. Ve všech těchto příkladech je vidět nutnost přesného měření rychlosti.

K měření lze principiálně použít několika metod. Aerodynamického měření lze však použít jen při letu v nízkých vrstvách atmosféry (asi do výše 30 km). Dále je možné měřit gyroskopickým integrujícím akcelerometrem. Podmínkou správnosti této metody je, aby měření probíhalo bez přerušení od okamžiku startu. Údaje měření se přenášejí na Zemi telemetrickým systémem a tento přenos vnese zpravidla do měření chyby. Tohoto způsobu se používá s úspěchem v autonomních systémech řízení raket. V autonomním způsobu řízení jsou všechny potřebné přístroje umístěny na palubě rakety, která nedostává žádné řídicí povely ze Země. Systém je odolný proti poruchám zvenčí, což je důležité ve vojenské technice.

V případě, že je nutné znát rychlost rakety na Zemi, je výhodné měřit pomocí Dopplerova jevu. Připomeneme si nejdříve vztahy popisující tento jev.

Dopplerův jev

Protože se jedná o rádiové vlny, je rychlost pohybu prostředí k rychlosti zdroje či pozorovatele zanedbatelná a budeme ji považovat za nulovou. Mějme tedy zdroj vlnění a pozorovatele (vysílač a přijímač). Klidný zdroj vysílá za sekundu f vln. Mezi dvěma po sobě jdoucími kmity uplyne doba $T = \frac{1}{f}$. Jestliže se zdroj pohybuje směrem k pozorovateli rychlostí v , pak za dobu T se přiblíží zdroj k pozorovateli o délku vT , takže každý následující kmit potřebuje k dosažení pozorovatele dobu kratší o $\frac{vT}{c}$ než kmit předchozí. Pozorovatel proto vnímá kmit o frekvenci

$$f_1 = \frac{1}{T - \frac{v}{c}T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c}{c - v} f, \quad (2)$$

tzn., že frekvence kmitočtu se zvýšila. Přitom značí c rychlost vlnění.

Bude-li se zdroj od pozorovatele vzdalovat, pak pozorovatel bude vnímat kmitočet

$$f_2 = \frac{c}{c + v} f \quad (3)$$

V opačném případě se tedy kmitočet snížil.

Jestliže je v klidu zdroj a pozorovatel se k němu blíží rychlostí u , mají vlny vůči pozorovateli relativní rychlost $c + u$ a on tedy vnímá kmitočet

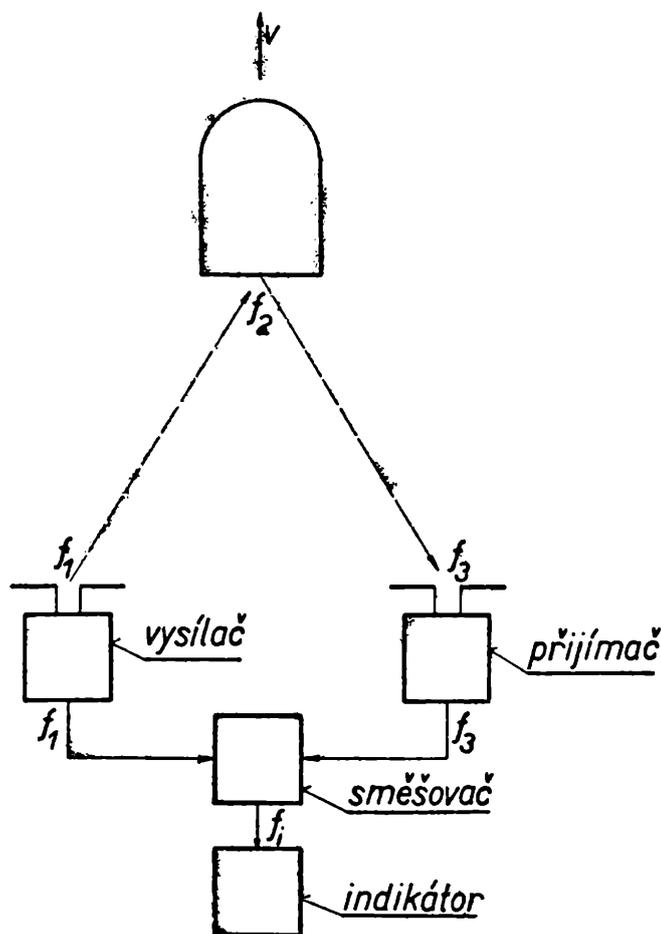
$$f'_1 = \frac{c + u}{\lambda} = \frac{c + u}{c} f, \quad (4)$$

kde λ je vlnová délka, pro níž platí $f = \frac{c}{\lambda}$. V tomto případě vnímá pozorovatel kmitočet větší a naopak, v případě, kdy se pohybuje směrem od zdroje rychlostí u , kmitočet menší

$$f_2 = \frac{c - u}{c} f \quad (5)$$

Doposud jsme předpokládali, že pohyb zdroje nebo pozorovatele se děje po spojnici obou dvou. V případě, že tomu tak není a směr pohybu je různoběžný s jejich spojnicí, místo s rychlostmi u a v počítáme s pravoúhlými průměty těchto rychlostí do jejich spojnice.

1. systém. Praktické provedení zařízení k měření rychlosti můžeme rozdělit do tří systémů. Blokové schéma prvního systému je na obr. 2.



Obr. 2

Vysílač nepřetržitě vysílá kmitočet f_1 , který dopadá na povrch rakety pohybující se rychlostí v jako kmitočet f_2 (změna Dopplerovým jevem). Od povrchu se kmitočet f_2 odráží a je přijímán, znovu pozměněn Dopplerovým jevem, pozemní stanicí jako kmitočet f_3 .

Pro kmitočty f_2 a f_3 plyne ze vzorců (4) a (3)

$$f_2 = \frac{c - v}{c} f_1, \quad f_3 = \frac{c}{c + v} f_2, \quad (6) \quad (7)$$

kde c je rychlost šíření elektromagnetických vln ($3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Dosazením za f_2 do vzorce (7) zjistíme, že na Zemi je přijímán kmitočet

$$f_3 = \frac{c - v}{c + v} f_1, \quad (8)$$

který je ve směšovači směšován s původním kmitočtem f_1 , který byl vyslán k raketě. Ve směšovači vznikají dva interferenční kmitočty $f_1 - f_3$ a $f_1 + f_3$. Vhodným filtrem oddělíme rozdílový kmitočet

$$f_i = f_1 - f_3 = \frac{2v}{c + v} f_1. \quad (9)$$

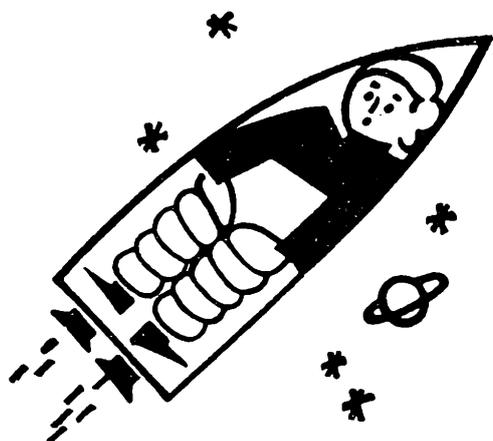
Ve jmenovateli zlomku můžeme zanedbat rychlost rakety proti rychlosti světla, protože rychlost dnešních raket je kolem $10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (druhá kosmická rychlost je $1,119 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) a rychlost světla $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tj. o čtyři řády větší. Potom

$$f_i = \frac{2v}{c} f_1. \quad (10)$$

Interferenční kmitočet je tedy přímo úměrný rychlosti.

(Pokračování)

Astronomie



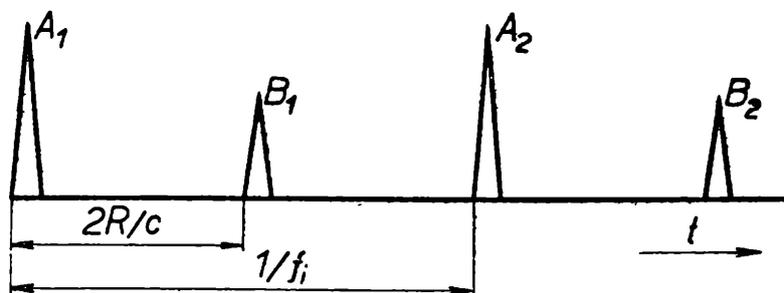
Inž. Miloš Šimek, Astronomický ústav
ČSAV, Ondřejov:

Rádiový výzkum meteorů

Elektronika a radiotechnika proniká v posledních desetiletích do mnoha různých vědních oborů. Typickým příkladem toho je i vznik nové vědní astronomické disciplíny - radioastronomie. Tento článek se zabývá meteorickou radioastronomií. Elektrickou energii vysíláme do prostoru a po odrazu od ionizované stopy meteoru přijímáme její část opět na Zemi.

Základní částí meteorického radaru je vysílač, přijímač, anténní systém a indikátor, nebo jiné registrační zařízení. Vysílač obvykle vy-

sílá impulsy, které mají délku řádově $10 \mu\text{s}$, jejichž opakovací frekvence, tzn. počet impulsů vyslaných za jednu sekundu, bývá od 50 do 1000 Hz. Po rozptýlu ionizovanou stopou meteoru jsou vracející se impulsy zesíleny v přijímači a můžeme je pozorovat na obrazovce indikátoru s lineární časovou základnou. Začátek odběhu je synchronizován vysílacím impulsem. Díky této synchronizaci se všechny odražené impulsy objeví jako odraz v jednom bodě časové základny, který trvá tak dlouho, dokud trvá dostatečná ionizace ve stopě. Označíme-li vzdálenost meteorické stopy od radarové stanice R , potom čas, který uplyne mezi vysláním a přijetím odraženého impulsu je $t = 2R \cdot c^{-1}$, kde c je rychlost šíření rádiových vln. Tento časový interval může být přesně změřen vzdáleností mezi základním a odraženým impulsem na časové ose indikátoru a tak určena vzdálenost R (obr. 1).



Obr. 1. Způsob určení vzdálenosti. A_1, A_2 jsou vysílací impulsy, B_1, B_2 jsou odražené impulsy; f_i je opakovací frekvence.

Jedním z nejdůležitějších parametrů meteorického radaru je volba použité vlnové délky. Je nutno vzít v úvahu, za jakých podmínek dostaneme nejvíce odrazů od meteorických stop. Atmosféra je složena převážně z kyslíku a dusíku. Ve výškách od 100 do 500 km jsou tyto plyny ionizovány, takže vzniká silná elektricky vodivá vrstva - i o n o s f é r a která je neprostupná pro elektromagnetické vlny delší než 60 m. V nižších vrstvách atmosféry dochází k značnému útlumu energie; např. při délce vlny 25 m se amplituda signálu zmenší na polovinu. Ohyb a útlum v ionosféře se zvětšuje, když rádiové vlny dopadají na ionosféru pod malým úhlem. Tyto efekty se však rychle zvětšují při zkracování délky vln a jsou téměř zanedbatelné pro rádiové vlny kratší než 10 m. Z druhé strany je použitelná vlnová délka omezena tím, že elektronová hustota v meteorické stopě musí být taková, aby rádiové vlny nepronikly touto stopou aniž by se odrazily. Výpočet a praxe ukazují, že optimální oblast délek rádiových vln, použitelných pro rádiové pozorování meteorů, je 4 až 10 m.

Jak jsme se již zmínili, vysílač vysílá v pravidelných intervalech krátké impulsy. Na okamžik, např. $10 \mu\text{s}$, snesou vysílací elektronky velké přetížení, protože mezi vysláním dvou po sobě jdoucích impulsů uplyne poměrně dlouhá doba (při opakovací frekvenci $f_i = 500 \text{ Hz}$

„odpočívá“ vysílač skoro 2 ms, tzn. téměř padesátkrát déle než pracuje). Proto se používá poměrně velkých výkonů impulsu (desítky i stovky kW) a potom se střední výkon vysílače pohybuje okolo několika set wattů.

$$P_{\text{stř}} = P_i f_i \tau,$$

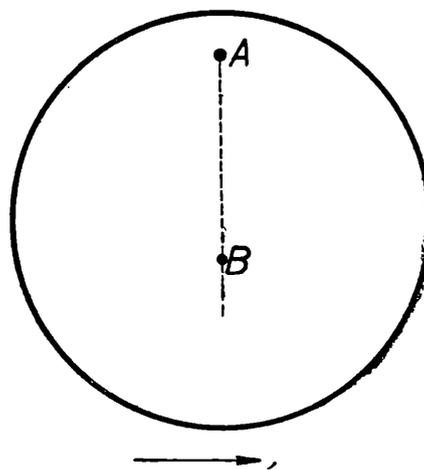
kde $P_{\text{stř}}$ je výkon vysílače, P_i je impulsní výkon vysílače, f_i je opakovací frekvence (počet impulsů za sekundu) a τ je šířka impulsu.

Jako indikátoru se obyčejně užívá obrazovky, kde osa x je lineární časová osa, jejíž odběh je synchronizován vysílacími impulsy. Na ose y je amplituda signálu. Vysílací impuls se zobrazí na počátku odběhu, tedy v nulové vzdálenosti, zatím co odražený signál od meteorické stopy způsobí amplitudovou výchylku na časové ose (viz obr. 1). Potom interval mezi body $A_1 - B_1$ ($A_2 - B_2$) nám určuje vzdálenost meteorické stopy. Tímto způsobem vizuálně můžeme zjistit počet, vzdálenost, trvání a amplitudu odražených signálů. Trvání odrazu závisí na mnoha veličinách, např. na délce rádiové vlny, vysílacím výkonu, elektronové hustotě ve stopě a podobně. Většina meteorických stop se na obrazovce indikátoru projeví odrazem, který trvá asi 0,1 s. Není však výjimkou, že odraz trvá několik sekund, i 1 až 5 minut.

Takové vizuální pozorování je velice nepřesné a únavné. Proto se indikace meteorických odrazů kombinuje s fotografickým záznamem, kdy se používá indikátoru s modulací jasu. Princip tohoto zobrazení je stejný jako v předešlém případě, ale přijatý signál se neprojevuje zvětšením amplitudy, nýbrž zvýšením jasu na časové (vzdálenostní) ose. Před obrazovkou se pohybuje kolmo na časovou osu filmový pás rychlostí několika cm za minutu, na kterém je možno určit čas výskytu, vzdálenost, trvání i amplitudu (jas) odraženého signálu (obr. 2).

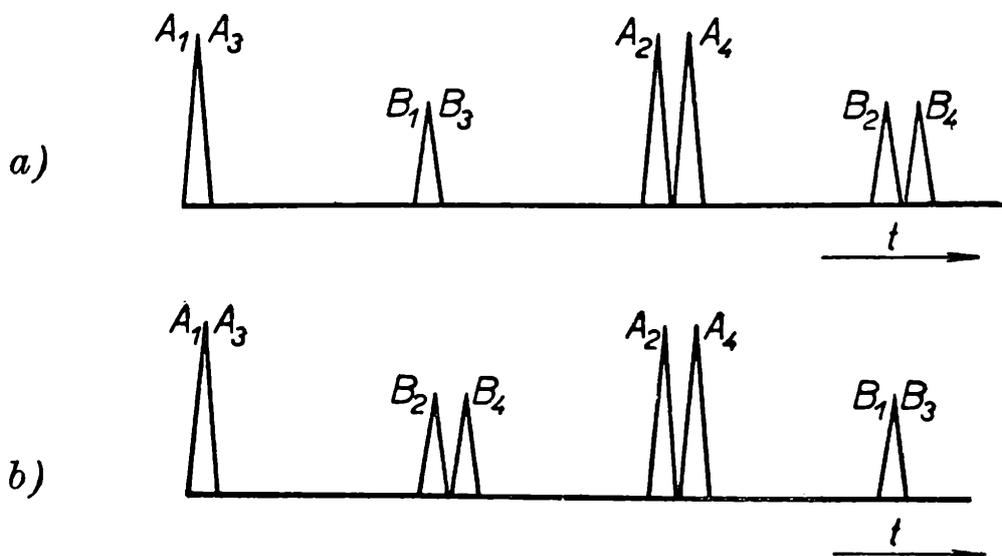
Zbývá ještě se zmínit o dosahu radaru. Největší vzdálenost, kterou můžeme jednoznačně určit při uvedených způsobech zobrazení, je dána dobou, která uplyne mezi dvěma posobě jdoucími impulsy. Např. při opakovací frekvenci 500 Hz jsou to 2 ms ($1/f_i$). Rádiové vlny se šíří

rychlostí světla, to znamená, že za dobu 2 ms urazí rádiový impuls 300 km k cíli a zpět (celkem 600 km). V tomto případě může být nejvzdálenější cíl ve vzdálenosti o něco menší než 300 km, abychom mohli jednoznačně určit jeho vzdálenost. Pro zdvojnásobení dosahu může být



Obr. 2. Indikátor s modulací v jasu. A je vysílací, synchronizační impuls, B je odraz od meteorické stopy; šipka udává směr pohybu filmu.

upraven vysílač tak, že každý čtvrtý vysílaný impuls je časově posunut. Odběh na obrazovce je synchronizován lichými impulsy a každý odraz se na stínítku obrazovky objeví na dvou místech. Poloha jednoduchého odraženého impulsu (B_1, B_3) určuje správnou vzdálenost (obr. 3).



Obr. 3. Zdvojnásobení dosahu radaru. A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vysílací impulsy, B_1, B_2, B_3, B_4 jsou odrazy od meteorické stopy; při opakovací frekvenci 500 Hz je meteorická stopa v případě a) vzdálena 150 km, v případě b) 450 km.

A nyní ještě několik slov o objektech našeho pozorování - o meteorech. Meteor je drobné tělíčko, kterému se na jeho dráze kolem Slunce postaví do cesty zemská atmosféra. Protože se pohybuje obrovskou rychlostí (11 až 72 km . s⁻¹), má velkou kinetickou energii ($\frac{1}{2}mv^2$), např. při hmotnosti $m = 1$ g a rychlosti $v = 40$ km . s⁻¹ vychází kinetická energie 8 . 10⁵ joulů. Při průletu zemskou atmosférou naráží meteor na jednotlivé molekuly vzduchu. Dochází k excitaci těchto molekul - elektrony, kroužící kolem atomových jader, jsou vyraženy do vyšších energetických hladin a při svém návratu na původní dráhy vyzáří světelná kvanta. Při dostatečném počtu srážek ve výšce 80 až 120 km nad zemským povrchem vidíme, že meteor zasvítil. Jistá část kinetické energie se dále promění v tepelnou, tělíčko se prudce zahřeje. Vedle excitace dochází ještě k ionizaci, a to tehdy, kdy nastane odtržení elektronu od jádra. Potom se tyto ionizované částice rychle rozptylují, difundují, a tak vlivem opětového spojování (rekombinace) a difúze hustota iontů a elektronů klesá.

Abychom získali odraz od meteorické stopy, je nutné, za předpokladu společné antény pro vysílač a přijímač, aby byla kolmá k vysílanému elektromagnetickému paprsku. Ve zvláštních případech, kdy dochází k silné ionizaci, můžeme dostat odraz od vznikající meteorické stopy

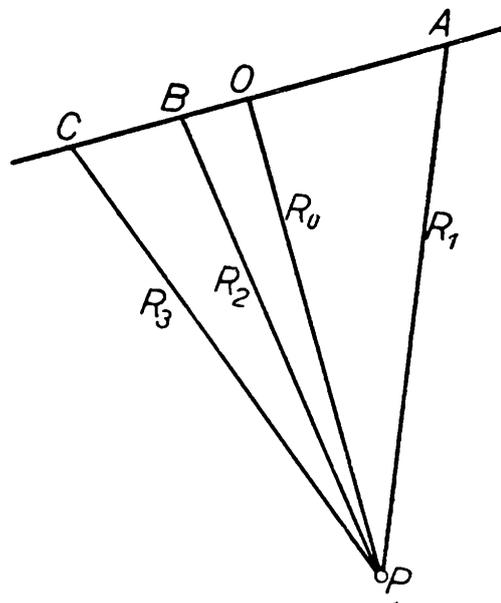
(čelní ozvěna) v místech vzdálených od paty kolmice, spuštěné na stopu (obr. 4). V tomto případě vznikne na filmovém záznamu hyperbola, která za předpokladu rovnoměrného pohybu meteoru mezi body $A-C$ udává rychlost meteorického tělíska. Snadno lze ukázat, že známe-li nejmenší vzdálenost R_0 v čase t_0 a obě souřadnice, např. bodu A , můžeme napsat

$$AO = v (t_1 - t_0) ,$$

$$R_1^2 - R_0^2 = v^2 (t_1 - t_0)^2 ,$$

$$v = \frac{R_1^2 - R_0^2}{t_1 - t_0} .$$

Přesnější výsledek získáme proměřením souřadnic R a t pro několik bodů na stopě a dosazením do rovnice hyperboly můžeme určit v , R_0 a t_0 . Tato metoda má však tu nevýhodu, že pouze zlomek procenta pozorovaných meteorů dává dostatečně silnou ionizaci, aby vznikla čelní ozvěna. Proto se pro určování rychlostí používá složitější metody Fresnelových zón, kdy vlivem interference v blízkém okolí bodu O (obr. 4) dochází ke změnám amplitudy odraženého signálu. Výhodou tohoto způsobu je, že můžeme určovat rychlosti i u poměrně slabých meteorů, které vytvářejí stopu trvající okolo 0,1 s.



Obr. 4. Měření rychlosti meteoru pomocí čelní ozvěny. P je vysílací stanice, R_0, R_1, R_2, R_3 jsou vzdálenosti bodů O, A, B, C na meteorické stopě od vysílací stanice.

Díky tomu, že rádiové pozorování meteorů není omezeno ani denní dobou, ani počasím, poskytuje bohatý materiál k vědeckému zpracování. Uvážíme-li, že při fotografické přehlídce oblohy získáme za jednu jasnou a bezměsíční noc několik fotografií meteorů, a radar zaznamená několik set odrazů za hodinu, vidíme, jaký krok kupředu znamená radiotechnika v astronomii.

Soutěž Rozhledů

(Pokračování)



1. Trestuhodný cestující bezohledně vyhodil láhev z rychlíku, jedoucího plnou rychlostí po vodorovném přímém náspu. Láhev dopadla rychlostí $v = 26,6 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$ na vodorovné pole v místě vzdáleném o délku $s = 30 \text{ [m]}$ ve směru pohybu vlaku a v kolmé vzdálenosti $y = 12 \text{ [m]}$ od trati. Veličiny y a s značí vodorovné vzdálenosti místa dopadu od svislého průmětu místa vyhození. Předpokládejte, že láhev byla vyhozena vodorovným směrem kolmo na trať a zanedbejte odpor vzduchu.

- Jak velká je výška h místa, odkud láhev byla vyhozena nad polem?
 - Jakou rychlostí c_1 byla láhev vodorovně a kolmo na trať vyhozena?
 - Jakou rychlostí c_2 se pohyboval rychlík? Převedte na $[\text{km} \cdot \text{hod}^{-1}]$!
- Rozhodněte, zda oba výsledky vyhovují zadání!
(Pokyn: Kladte $g = 9,8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$.)

Evžen Říman

2. Cyklista akrobat, vážící i s kolem 72 [kp] , projíždí kruhovou dráhu poloměru $r = 2,4 \text{ [m]}$, která leží ve svislé rovině (tzv. kolo smrti). V nejnižším místě má rychlost $v_1 = 13,3 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$. Tření a odpor vzduchu zanedbejme. a) Jak velkou rychlost v_2 má v nejvyšším bodě své dráhy (poloha střemhlav).

- Jak velkou tlakovou silou (F_1 resp. F_2) působí cyklista na podlahu v nejnižším resp. nejvyšším místě své dráhy?
- Která je minimální rychlost v_0 , kterou by ještě mohl mít v nejvyšším místě své kruhové dráhy?

d) Písmenem α označte úhel, který svírá spojnice středu kruhu a těžiště cyklisty se svislým průměrem kruhové dráhy a najděte obecný vztah pro závislost rychlosti v cyklisty na velikosti úhlu α !

Tíhové zrychlení kladte $g = 9,8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$.

Evžen Říman

3. Železný kotouč (hustoty $s = 7850 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ o průřezu $S = 80 \text{ [cm}^2]$ a výšce $h = 7,53 \text{ [cm]}$ plove na rtuti (hustoty $s_1 = 13\,550 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ v nádobě průřezu $S_0 = 230 \text{ [cm}^2]$). Určete: a) Jak hluboko h_1 je kotouč ponořen do rtuti? b) Jak vysokou vrstvu vody ($s_2 = 1000 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$) nutno do nádoby přilít, aby celý kotouč byl ponořen? Jaký je objem přilité vody? c) O kolik procent své výšky se kotouč vynořil ze rtuti po přilítí vody?

Evžen Říman

4. Automobil jede do mírného táhlého kopce rychlostí $c_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jede-li totéž vozidlo ze stejného kopce zpět, pak při stejném výkonu motoru bude mít stálou rychlost vyšší a to $c_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Máme vypočítat, jakou rychlostí c_0 by se uvedené vozidlo, rovněž při stejném výkonu, pohybovalo po vodorovné silnici.

P o z n. S ohledem na malý úhel sklonu vozovky (při jízdě do kopce a zpět) a nepříliš rozdílné rychlosti vozidla uvažujeme celkovou třecí sílu ve všech třech případech stejnou.

Václav Šindelář

5. Kolikrát se zvětší celková povrchová energie, rozprášíme-li vodní kapku poloměru $r_1 = 0,3 \text{ cm}$ na drobné kapičky o poloměrech $r_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$? Jaká bude hodnota celkové povrchové energie po rozprášení, je-li povrchové napětí vody za určitých podmínek $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$? Přitom víme, že plošná hustota energie je rovna povrchovému napětí.

Václav Šindelář

6. Chronometr s mosazným kyvadlem má správný chod při teplotě $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$. Máme vypočítat, o kolik se chronometr zpozdí za 24 hodin, jestliže se teplota místnosti, v níž chronometr je umístěn, zvýší na $t_1 = +20 \text{ }^\circ\text{C}$. Délkovou teplotní roztažnost (tj. součinitel teplotní délkové roztažnosti) mosazi bereme rovnou $\alpha = 19 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ a v uvažovaném teplotním rozmezí ji pokládáme za stálou.

Václav Šindelář

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

Matematika:

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník, vepsaný do dané kružnice, je-li dán součet základny a příslušné výšky trojúhelníka. Určete podmínky řešitelnosti.

Josef Glivický

(Došlo 19 řešení.)

Řešil Lubomír Vašek, SVVŠ Gottwaldov:

R o z b o r. Předpokládejme, že řešením úlohy je rovnoramenný trojúhelník ABC vepsaný do kružnice $k \equiv (S, r)$. Spojnice CS protíná základnu AB v bodě M . Označme $AB = a$, $CM = v$. Na polopřímku CM nanese vzdálenost $MD = a$, pak $CD = a + v$. Vzdálenost $MB =$

$= MA = \frac{a}{2}$. Je tedy poměr $MA : MD = 1 : 2 = \text{tg} \sphericalangle MDB$.

K o n s t r u k c e. Na kružnici $k \equiv (S, r)$ zvolíme bod C , spojíme se středem a na polopřímku CS nanese délku $a + v = CD$. V bodě C vedeme kolmici k CD , na níž nanese $CQ = \frac{a + v}{2}$. Spojnice QD protíná kružnici k obecně ve dvou vrcholech hledaných rovnoramenných trojúhelníků B a B' a je ramenem hledaného úhlu MDB .

D ů k a z vyplývá z rozboru a konstrukce.

D i s k u s e. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky QD a kružnice $k \equiv (S, r)$. Je-li přímka sečnou, obdržíme dvě řešení, je-li tečnou, pak jedno řešení, v případě nesečny neexistuje řešení.

Uvažujme o případě, že spojnice QD je tečnou kružnice k . Vrchol B jediného rovnoramenného trojúhelníka je bodem dotyku spojnice QD a trojúhelník SBD je pravoúhlý. Odvěsna $SB = r$, odvěsna $BD = 2r$ (neboť $\text{tg } \sphericalangle MDB = \frac{1}{2}$ a $BD = \frac{SB}{\text{tg } \sphericalangle MDB} = 2r$). Přeponu SD určíme podle Pythagorovy věty $SD = \sqrt{SB^2 + BD^2} = \sqrt{r^2 + 4r^2} = r\sqrt{5}$. Poněvadž $SC = r$, pak $a + v = CD = r + r\sqrt{5} = r(1 + \sqrt{5})$.

Aby úloha měla řešení, musí $a + v \leq r(1 + \sqrt{5})$.

2. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ protne rovinou jdoucí hranou BC tak, aby obě vzniklá tělesa měla stejný objem.

Josef Glivický

(Došlo 14 řešení.)

Řešil Josef Žáček, SVVŠ Cheb:

Předpokládejme, že jsme určili rovinu ρ , jdoucí hranou BC a rozdělující daný jehlan $ABCDV$ na dvě části o stejném objemu. Rovina ρ protíná stěnu ADV v úsečce EF . Těleso $ABCDEF$ je klín s čtvercovou podstavou $ABCD$ a hranou EF rovnoběžnou s rovinou podstavy. Označme hranu podstavy $AB = a$, střed podstavy P a $PV = v$. Proložme spojnicí PV rovinu kolmou k podstavě a současně rovnoběžnou s hranou AB . Její stopa protne hranu AD v bodě K tak, že $AK = KD$. Bodem H vedme v této rovině kolmici $HL = x$, což je výška klínu, bod L je vnitřním bodem úsečky $KP = \frac{1}{2}a$. Spojnicí EF proložme rovinu rovnoběžnou s rovinou podstavy. Ta protne VP v bodě T . Bude $HT = FH = HE = \frac{1}{2}FE$. Označme pak $HT = n$, $TV = v - x$. Trojúhelníky KPV a HTV jsou stejnolehle, a proto platí

$$HT : TV = KP : PV,$$

to jest

$$n : (v - x) = \frac{a}{2} : v,$$

$$\text{z toho } 2n = \frac{a(v - x)}{v}, \text{ nebo}$$

$$EF = \frac{a(v - x)}{v}.$$

Objem klínu je dán vzorcem $V_k = \frac{1}{6} (2a + c) \cdot bv$, přičemž rozměry podstavy klínu jsou a, b , hrana klínu c a výška v . V našem případě jest $a = b, v = x, c = EF = \frac{a(v-x)}{v}$.

Objem daného jehlanu je $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot v$. Podle podmínky úlohy jest

$$V_k = \frac{1}{2} V$$

$$\frac{1}{6} \left[2a + \frac{a(v-x)}{v} \right] ax = \frac{1}{6} a^2 \cdot v,$$

po úpravě

$$v = \left(2 + \frac{v-x}{v} \right) x,$$

to jest

$$x^2 - 3vx + v^2 = 0,$$

$$x = \frac{v}{2} (3 \pm \sqrt{5})$$

V našem případě vyhovuje kořen $x = \frac{v}{2} (3 - \sqrt{5})$ poněvadž výška klínu musí být menší než výška jehlanu.

Je nutno vésti rovinu rovnoběžnou s rovinou podstavy $ABCD$ ve výšce $\frac{v}{2} (3 - \sqrt{5})$, která protíná stěnu ADV v úsečce EF , určující se spojnicí BC rovinu řezu ρ , která rozděluje původní jehlan $ABCDV$ na dvě tělesa stejného objemu.

3. Jak musíme v trojčlenu $x^4 + bx^2 + c$ zvolit koeficienty b, c , aby tento trojčlen byl dělitelný výrazem $x^2 + cx + b$ za předpokladu, že b, c jsou reálná čísla různá od nuly?

Stanislav Horák

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Jiří Kotyč, 10. b, 2. JSŠ Pardubice:

Dělme dané dva mnohočleny

$$\begin{array}{r} (x^4 + bx^2 + c) : (x^2 + cx + b) = x^2 - cx + c^2 \\ \underline{-(x^4 \pm cx^3 \pm bx^2)} \\ -cx^3 \\ \underline{+(cx^3 \mp c^2x^2 \mp bcx)} \\ c^2x^2 + bcx + c \\ \underline{-(c^2x^2 \pm c^3x \pm bc^2)} \\ x(bc - c^3) + (c - bc^2). \end{array}$$

Aby se zbytek rovnal nule, musí být

$$\begin{aligned}bc - c^3 &= 0, \\c - bc^2 &= 0.\end{aligned}$$

Tato soustava má tato reálná řešení:

- I. $b = c = 0$, což nevyhovuje, neboť má být $b \neq 0, c \neq 0$.
- II. $b \neq 0, c = 0$, nevyhovuje.
- III. $b = c = 1$. V tomto případě je

$$(x^4 + x^2 + 1) (x^2 + x + 1) = x^2 - x + 1$$

Lubomír Vašek, 2. e, SVVŠ Gottwaldov řešil příklad takto: Má-li být trojčlen dělitelný druhým, musí platit

$$x^4 + bx^2 + c = (x^2 + cx + b) (x^2 + mx + n)$$

pro všechna x . Po vynásobení na pravé straně došel k identitě

$$\begin{aligned}x^4 - bx^2 - c &= x^4 + x^3(c + m) + \\&+ x^2(b + n + mc) + x(bm + cn) + bn\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách x dospěl k soustavě rovnic

$$\begin{aligned}c + m &= 0, \\b + n + mc &= b, \\bm + cn &= 0, \\bn &= c.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostal $b = c = 1; m = -1, n = 1$.

4. Jestliže v trojúhelníku je (při obvyklém označení) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$, pak o výškách tohoto trojúhelníka platí

$$v_{avc} + v_{bvc} \sqrt{2} = 2 v_{avb}$$

Dokažte!

Stanislav Horák

(Došlo 17 řešení.)

Řešení autorovo:

O stranách trojúhelníka platí

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Dosadíme-li za úhly, obdržíme rovnici

$$2c = b + a \sqrt{2}. \tag{1}$$

Ze vzorce pro obsah P trojúhelníka vyplývá

$$a = \frac{\sqrt{2}P}{v_a}, \quad b = \frac{2P}{v_b}, \quad c = \frac{2P}{v_c}$$

Dosadíme-li do (1), dojdeme po menší úpravě k danému vztahu.

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhel při základně je α . Na rameni AC sestrojíme vnitřní bod D tak, aby $BD = BA$, na rameni BC sestrojíme vnitřní bod E tak, aby $DE = BA$. Jak veliký musí být úhel α , aby $CE = AB$?

Stanislav Horák

(Došlo 22 řešení.)

Řešil Jan Švejda, 1. e, SVVŠ Praha 3:

Označme $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle BDE = \delta$, $\sphericalangle BED = \varepsilon$, $\sphericalangle DEC = \varphi$. Trojúhelník BDE je rovnoramenný ($BD = DE$), a proto $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BED = \varepsilon$. Zřejmě platí

$$2\varepsilon + \delta = 2R. \quad (1)$$

Trojúhelník DEC je rovnoramenný, a proto $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ECD = \gamma$. Platí tudíž

$$2\gamma + \varphi = 2R. \quad (2)$$

Ale z trojúhelníka ABC dostaneme

$$\gamma = 2R - 2\alpha, \quad (3)$$

a proto

$$\varphi = 2R - 4R + 4\alpha = 4\alpha - 2R.$$

Dále víme, že

$$\varepsilon + \varphi = 2R. \quad (4)$$

Ale při vrcholu B jsou úhly α , γ , ε a o nich platí

$$\varepsilon = \alpha - \gamma = \alpha - 2R + 2\alpha = 3\alpha - 2R.$$

Po dosazení nabude rovnice (4) tvaru

$$(3\alpha - 2R) + (4\alpha - 2R) = 2R$$

a z toho

$$\alpha = \frac{6R}{7}.$$

* *

*

K letošnímu Dni učitelů dostal vyznamenání Za zásluhy o výstavbu zástupce ředitele Matematického ústavu ČSAV Rudolf Zelinka, který je dobře znám i naší mládeži jako autor řady časopi-seckých pojednání a knižních publikací a zejména pak jako dlouholetý jednatel ústředního výboru matematické olympiády. Přejeme novému nositeli tohoto vysokého státního vyznamenání zejména pevné zdraví a mnoho úspěchů v další práci.

Redakce

Řešení úlohy o druhé odmocnině



Má se nalézt přirozené číslo x takové, aby $x^2 = 1234567890\dots$, kde tečky znamenají libovolný počet libovolných číslic¹).

Jiří Sedláček

Prvních několik číslic hledaného x obdržíme odmocněním. Při tom jsou dvě možnosti: x^2 má buď sudý počet číslic, nebo lichý počet číslic.

V prvním případě obdržíme způsobem, kterému se dříve na školách učilo, prvních osm číslic

$$\sqrt{\begin{array}{c} 12|34|56|78|90 \\ 3\ 34 : 6 \\ \hline \text{atd} \end{array}} = 35136418 \dots$$

Když umocníme tento částečný výsledek na druhou, najdeme potom snadno devátou číslici 3.

Je tedy $x = 351\ 364\ 183$, a to je nejmenší z čísel tohoto druhu.

Vyhovují ovšem také všechna čísla $x \cdot 10^n$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Lze však nalézt zkusmo i další čísla tohoto druhu, např.

$$x = 351364183006,$$

s větším počtem číslic různých od nuly. Pak ovšem vyhovují i čísla

$$x = 351\ 364\ 183\ 005$$

kde tečky znamenají libovolný počet libovolných číslic. Neboť např. $x = 351\ 364\ 183\ 005\ 99 < 351\ 364\ 183\ 006\ 00$, a tedy součet posledních tří řádků při umocňování nemá vliv na prvních deset míst výsledku.

V druhém případě dostaneme prvních deset číslic odmocněním

$$\sqrt{1|23|45|67|89|0.} = 1111111106$$

a poslední číslici 5 obdobně jako v prvním případě.

¹) Tato úloha byla uveřejněna v 7. čísle Rozhledů, roč. 40 (1961–62), str. 328.

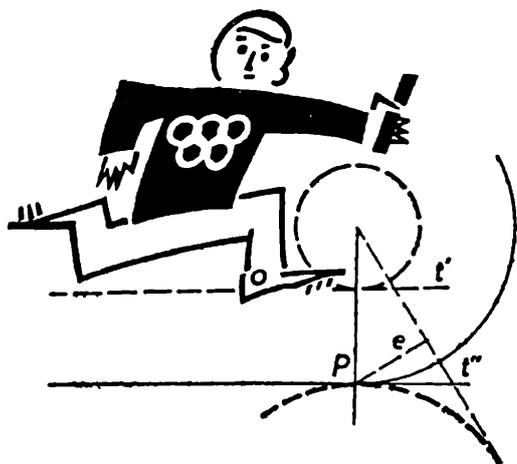
Je tedy $x = 11\ 111\ 111\ 065$ nejmenším číslem tohoto druhu.

Také v tomto případě vyhovují čísla, která mají od jistého místa libovolný počet libovolných číslic.

Dr. Miloslav Hlaváček, Praha

Poznámka redakce. Další řešení úlohy o druhé odmocnině zaslali Josef Kleiner z Dobroměřic, inž. Jan Rataj z Plzně a Štefan Porubský ze Zvolena.

Matematická olympiáda



Skončil jedenáctý ročník matematické olympiády

V uplynulém školním roce 1961—62 vstoupila naše matematická olympiáda už do druhého desetiletí své existence. Jedenáctý ročník soutěže se konal ve znamení oslav stého výročí zložení Jednoty čs. matematiků a fyziků, která už po několik let je spolu s ministerstvem školství a kultury, Matematickým ústavem ČSAV a ústředním výborem ČSM pořadatelkou MO u nás. Spoluúčast Jednoty při organizaci naší celostátní matematické soutěže se projevuje zejména v tom, že JČMF připravuje matematické přednášky pro mladé olympioniky. V uplynulém ročníku MO bylo z několika krajů konstatováno, že se zlepšila spolupráce ČSM s organizátory soutěže. Ústřední výbor ČSM pomohl soutěžícím také v tom, že zajistil v nakladatelství Mladá fronta vydávání matematických brožurek. Knížky začaly vycházet během jedenáctého ročníku MO pod názvem *Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů*. Upozorníme však, že tato pomocná literatura není v běžném knižním prodeji, nýbrž hospodaří s ní výhradně jen orgány MO a JČMF.

Tak jako v létech minulých, tak i v uplynulém ročníku, řídil soutěž ústřední výbor MO, jehož předsedou je akademik Josef Novák a jednatelem Rudolf Zelinka. Zásady, podle nichž olympiáda probíhala, byly rovněž celkem nezměněny. Příklady prvního kola se dostaly soutěžícím do rukou na zvláštních letácích a také náš časopis otiskl jejich text. O pololetních prázdninách se sešly v Klánovicích u Prahy dvě desítky

vybraných olympioniků na soustředění, které mělo studijní ráz a bylo též jakousi přípravou na mezinárodní MO. Do Klánovic se sjeli opravdu ti nejlepší z nejlepších z celé naší republiky. Toto první olympijské celostátní soustředění se plně osvědčilo.

Vraťme se však k dalšímu průběhu soutěže. Po skončení 1. kola se úspěšní řešitelé dostali do 2. kola, které má vždy povahu školní písemné práce. Pro kategorie A, B, C se 2. kolo konalo v neděli 8. dubna 1962 v jednotlivých krajských střediscích, zatímco účastníci kategorie D se sešli k 2. kolu v neděli 15. dubna 1962 v jednotlivých okresech. Pro kategorie B, C, D tím celá soutěž skončila a krajské a okresní výbory MO vybraly podle výsledků 2. kola nejúspěšnější řešitele z těchto tří kategorií. V některých místech - jako např. v Praze - vyhlásily krajské a okresní výbory MO slavnostně výsledky 2. kola a předaly úspěšným olympionikům diplomy a hodnotné odměny na slavnosti doplněné kulturním programem. Pro nejvyšší kategorii však teprve nejtěžší úkol nastával. Úspěšní účastníci 2. kola kategorie A se dostali do celostátního 3. kola, které se konalo letos po prvé mimo hlavní město republiky. Šedesát studentů se sešlo v sobotu 26. května 1962 v Pedagogickém institutu v Liberci, kde se konal závěr soutěže. Pro informaci otiskujeme texty čtyř úloh, které byly vybrány v XI. ročníku MO pro 3. kolo:

1. Je daný trojčlen

$$2x^2 - x - 36.$$

Určíte všechny celé čísla x , pro které sa hodnota daného trojčlena rovná druhé mocniny prvočísla.

2. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic x, y .

Vyšetřete množinu všech bodů, jejichž souřadnice v této soustavě splňují nerovnosti

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leq y \leq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x}.$$

Načrtněte obraz této množiny.

3. Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky PM, QN , kde přímka PQ je kolmá ke každé z obou mimoběžek. V rovině φ kolmé k úsečce PQ a procházející jejím středem S je dána kružnice $k \equiv (S, r)$.

Dokažte, že každá úsečka XY , jejíž krajní body X, Y leží po řadě na mimoběžkách PM, QN a která obsahuje bod kružnice k , má touž délku; vyjádřete tuto délku pomocí poloměru r a délky $v = PQ$.

Jaký útvar vyplní krajní body X všech takových úseček XY ?

4. V rovině je daná kružnice $k \equiv (S, r)$. Okrem toho je daný bod $A \neq S$, ktorý leží vnútri kružnice k . Svetelný lúč vychádzajúci z daného bodu A sa odráža od kružnice k v istom bode B , ďalej sa odráža od kružnice k v istom bode C a odtiaľ sa vracia naspäť do bodu A .

Vypočítajte sinus dutého uhla $\sphericalangle SAB$ pomocou čísel $r, d = SA$ a rozhodnite o riešiteľosti úlohy.

V Liberci se také týž den odpoledne konala tradiční beseda s účastníky MO. Jména vítězů 3. kola přináší Rozhledy na jiném místě.

Co říci závěrem. Naše soutěž se během uplynulých ročníků dobře vžila nejen na našich školách, ale je populární i v širší veřejnosti. Bohužel, nemůžeme však být právě s ohledem na tuto dlouholetou tradici plně spokojeni s výsledky XI. ročníku MO. Kvalita odevzdaných prací nebyla vždy tak dobrá, jak bychom si přáli. To se projevilo také při výběru studentů do 3. kola, kde byl tento pokles úrovně vzhledem k uplynulým létům zvláště patrný. Věříme, že tento jev nebude trvalý a že v dalších ročnících se matematické vědomosti našich studentů podstatně zlepší.

Jiří Sedláček

Přípravné úlohy XII. matematické olympiády

(II. část úloh)

(Dokončení)

1. Kategorie A

4. Vyjádřete délky úhlopříček tětívového čtyřúhelníka pomocí délek jeho stran. (Použijte kosinové věty.)

5. V rovině je dán svou polohou čtverec $ABCD$ a pevný bod Q , který neleží na obvodu čtverce. Buď P libovolný bod obvodu čtverce. Nad úsečkou QP sestrojme rovnostranný trojúhelník PQR .

Vyšetřte, jaký útvar vyplní body R , když bod P probíhá obvod daného čtverce.

6. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$. Vyšetřte geometrické místo bodů této krychle, jejichž vzdálenosti od rovin ABC , ABA' , ADA' mají součet AB .

2. Kategorie B

4. Vyjádřete délky stran pravoúhlého trojúhelníka pomocí jeho obvodu $2x$ a obsahu y^2 .

5. Je dán pevný bod A , přímka p a kladné číslo r . Kružnice k prochází bodem A , má poloměr r a tečna směru p se jí dotýká v bodě X . Vyšetřte geometrické místo bodů X .

6. Budte m , n , p velikosti tří stěnových úhlopříček kvádru, které vycházejí z téhož vrcholu.

Vypočtěte jeho a) objem, b) obsahy stěn, c) rozměry. Diskuse vzhledem k m , n , p .

3. Kategorie C

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a přímka p , jejíž vzdálenost od středu S je d . Sestrojte čtverec, jehož jedna strana leží v přímce p a jehož protější strana je tětívou kružnice k . Diskuse.

5. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky p a v něm dvě čtvrtkružnice o středech A , B (A , C jsou krajní body jedné, B , D krajní body druhé). Vypočtěte poloměr x kružnice k , která leží ve čtverci, dotýká se obou čtvrtkružnic a úsečky BC . Potom kružnici k sestrojte.

6. Jsou dány délky a , b odvěsen pravoúhlého trojúhelníka ABC . Osa jeho pravého úhlu protne přeponu v bodě M , kolem něhož opíšeme kružnici $k \equiv (M, x)$ tak, aby se dotýkala obou odvěsen. Vypočtete poloměr x této kružnice, délky úseček AM , BM a jejich poměr.

4. Kategorie D

4. Nádražní chodba dlouhá 42,8 m a široká 9,2 m je vydlážděna čtvercovými dlaždicemi dvojího druhu: strana větší dlaždice je o 10 cm větší než strana menší dlaždice. Obruby dlažby tvoří jedna řada menších dlaždic; celkem je jich 332. Ostatní část chodby je vydlážděna většími dlaždicemi. Vypočtete rozměry dlaždic a počet větších dlaždic.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r = 4 \text{ cm})$. Vpište do ní rovnoramenný lichoběžník tak, aby se z bodu S jevila jeho ramena pod úhlem 90° a aby prodloužená ramena svírala úhel 45° .

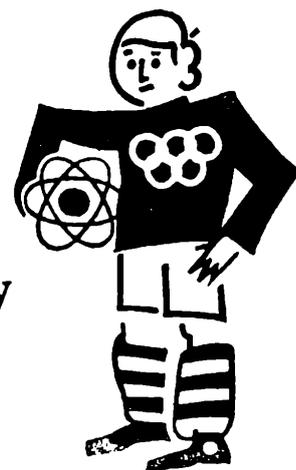
6. Jsou dány 3 různé body A , B , C . Narýsujte všechny takové přímky, z nichž každá má od bodů A , B , C stejné vzdálenosti. Rozhodněte, za kterých podmínek je úloha řešitelná a kolik má řešení.

Fyzikální olympiáda

*Téma k prostudování pro první kolo IV. ročníku
soutěže FO kategorie A ve šk. roce 1962/63*

Zobrazování soustavou centrovaných kulových ploch; hlavní roviny a uzlové body

Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál
s kolektivem spolupracovníků



a) Geometrická optika je probírána za zjednodušujících podmínek, že zobrazovací paprsky jsou blízké optické ose; tyto paprsky nazýváme *paprsky nulové* nebo *paraxiální*. Prostor, na který se omezujeme, nazývá se *Gaussův prostor*. Na Gaussův prostor lze se omezit vhodnou volbou clon. Pak můžeme ve vztahu Snelliově a dalších vztazích psát místo funkcí sinus a tangens přímo úhly měřené v obloukové míře.

Při zobrazování čočkami se pro zjednodušení vedle toho předpokládá, že čočky jsou nekonečně tenké; tento předpoklad však není nikdy splněn.

Nesplnění prvního předpokladu omezení na prostor Gaussův vede k odchýlkám, které označujeme jako vady čoček. Druhý předpoklad o čočkách vede k nepřesnostem při určování ohniskových vzdáleností. Ukážeme proto, jak musíme měřit veličiny vyskytující se v zobrazova-

cích rovnicích pro nekonečně tenké čočky, abychom jich mohli užít přesně i pro čočky konečné tloušťky. Tuto otázku budeme řešit nejdříve obecně.

Zavedeme pojem *soustavy centrovaných kulových ploch*. Jde o soustavu, u níž jsou středy křivosti všech kulových ploch na jedné přímce - tzv. *optické ose*. Jednotlivé plochy oddělují prostředí s různými indexy lomu a poslední prostředí může mít i jiný index lomu než prostředí první.

Při zobrazování si zvolíme chod paprsků zleva doprava, takže předmětový prostor je od zobrazovací soustavy vlevo. Nyní si zvolíme libovolný bod v předmětovém prostoru první lámavé plochy a vytvoříme jeho obraz lámavou plochou. Tento obraz je předmětem pro druhou lámavou plochu; vytvoříme jeho obraz druhou lámavou plochou a postupujeme takto tak dlouho, až dostaneme obraz vytvořený poslední lámavou plochou. Tím dostaneme bod, který je obrazem daného bodu; těmto bodům říkáme body sdružené.

U každé lámavé plochy máme *ohnisko předmětové a obrazové*. Proto také celá soustava bude mít předmětové a obrazové ohnisko. Obrazové ohnisko celé soustavy dostaneme, když v prvním prostředí zvolíme na optické ose bod v nekonečnu, k němu sestrojíme obraz první lámavou plochou, pak k tomuto obrazu (jako k předmětu) obraz druhou lámavou plochou a tak postupujeme dále, až dostaneme obraz v posledním prostředí. Tento bod je obrazem bodu v nekonečnu v prvním prostředí vytvořený všemi lámavými plochami; je proto obrazovým ohniskem celé soustavy kulových ploch.

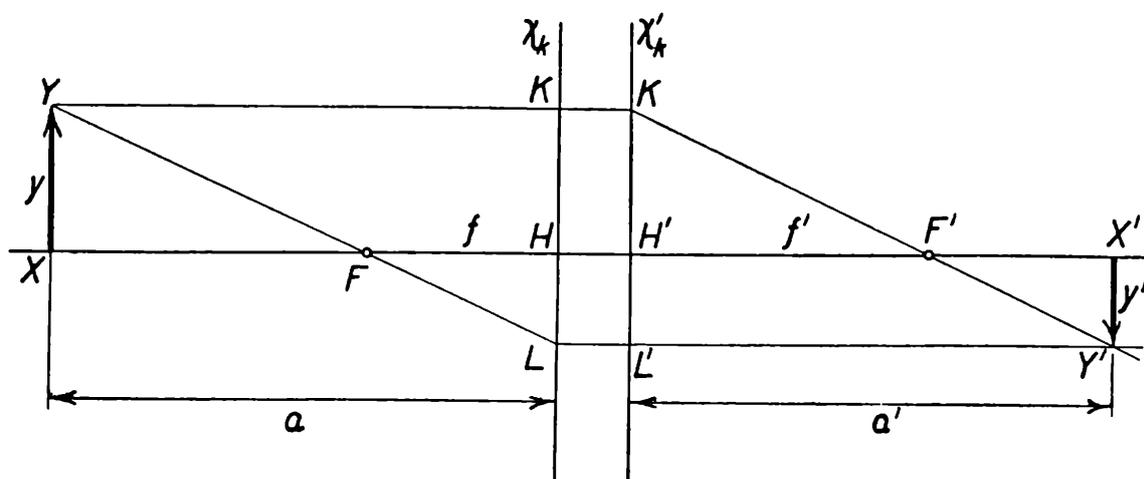
Potom zvolíme bod na optické ose v nekonečnu v posledním prostředí a hledáme předmět, jehož obrazem by byl tento zvolený bod. Najdeme nejprve předmět, jehož obraz vytvořený poslední lámavou plochou je zvolený bod v nekonečnu, pak k tomuto bodu (jako k obrazu) najdeme předmět vytvořený předposlední plochou a tak postupujeme dále, až dostaneme předmět v prvním prostředí, jehož obraz je v nekonečnu v posledním prostředí. Dostali jsme tak předmětové ohnisko celé soustavy kulových ploch. Roviny proložené ohnisky kolmo k optické ose jsou *ohniskové roviny*. Ohnisková rovina předmětová je sdružena k rovině obrazové v nekonečnu a ohnisková rovina obrazová je sdružena k rovině předmětové v nekonečnu.

Dále se dají najít dvě roviny kolmé k optické ose té vlastnosti, že předmět v jedné rovině se zobrazuje v druhé rovině přímý a stejně velký. Tyto roviny nazýváme *kladné hlavní roviny* centrované soustavy kulových ploch, a to rovinu, v níž je předmět, kladnou hlavní rovinou *předmětovou* a rovinu, v níž je obraz, kladnou hlavní rovinou *obrazovou*. Proto libovolný bod kladné hlavní roviny předmětové má obraz v kladné hlavní rovině obrazové stejně daleko od optické osy a na téže straně optické osy. Leží v rovině určené optickou osou a zvoleným bodem před-

mětové kladné hlavní roviny. Proto předmětový paprsek protínající kladnou hlavní rovinu předmětovou musí mít za obraz paprsek, který prochází sdruženým bodem v kladné hlavní rovině obrazové.

Při konstrukci obrazu použijeme vlastností ohniskových a hlavních rovin. Soustavu centrovaných ploch nahradíme ohniskem předmětovým F , ohniskem obrazovým F' , kladnou hlavní rovinou předmětovou χ_k a kladnou hlavní rovinou obrazovou χ'_k . Záleží nyní na vzájemné poloze ohnisek F , F' a kladných hlavních rovin χ_k , χ'_k . Může nastat mnoho případů. Zobrazení provedeme na seskupení ohnisek a hlavních rovin zakresleném na obr. 5.

K danému bodu Y sestrojíme ve všech případech obraz užitím těchto dvou paprsků:



Obr. 5

1. Bodem Y vedeme paprsek rovnoběžně s optickou osou. Paprsek protne optickou osu v nekonečnu a tomuto bodu přísluší jako obraz ohnisko F' . Kladnou hlavní rovinu předmětovou protne v bodě K , jehož obraz je K' . Proto obraz paprsku musí procházet bodem K' a F' .

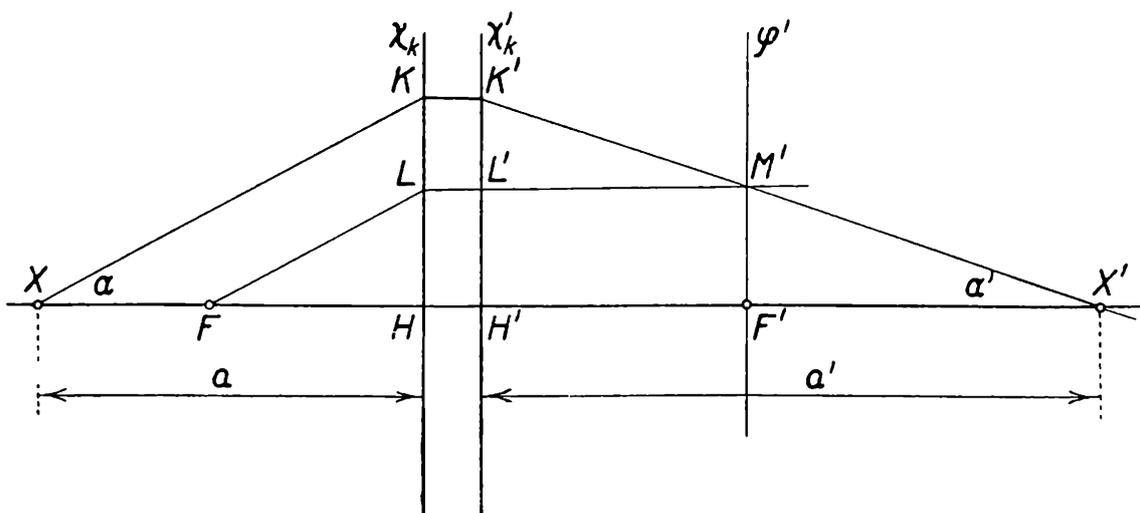
2. Bodem Y vedeme paprsek jdoucí ohniskem předmětovým F ; tento paprsek protne kladnou hlavní rovinu předmětovou v bodě L . Bodu L přísluší obraz L' v kladné hlavní rovině obrazové a ohnisku F bod v nekonečnu na optické ose. Proto obrazem paprsku YF je paprsek jdoucí bodem L' rovnoběžně s optickou osou.

Bod Y leží na obou uvedených paprscích. Proto v průsečíku obrazů obou paprsků je obraz bodu Y' . Každý paprsek jdoucí bodem Y musí mít obraz jdoucí bodem Y' .

Důležité je si pamatovat: Spojovat můžeme jen body buď prostoru předmětového (tedy i s body na předmětové hlavní rovině) nebo jen body prostoru obrazového. Nesmíme spojovat bod z prostoru předmětového s bodem prostoru obrazového.

K libovolnému bodu X na optické ose sestrojíme obraz X' takto: Bodem X (obr. 6) vedeme libovolný paprsek XK a bodem F k němu rovnoběžku.

Tyto rovnoběžky mají společný bod v nekonečnu a jeho obraz je v ohniskové rovině φ' . Paprsek jdoucí ohniskem F jde po lomu rovnoběžně s optickou osou a protíná ohniskovou rovinu obrazovou v bodě M' , jenž je obrazem jejich společného bodu v nekonečnu. Rovnoběžka jdoucí bodem X protíná kladnou hlavní rovinu předmětovou v bodě K a jeho obraz K' je v kladné hlavní rovině obrazové. Spojnice bodu K' s bodem M' dává lomený paprsek a jeho průsečík s optickou osou je bod X' , který je tedy obrazem bodu X .



Obr. 6

b) Z obr. 5 můžeme odvodit i algebraické vztahy. Při jedné lámavé ploše splývají obě kladné hlavní roviny ve vrcholu kulové plochy. U soustavy centrovaných kulových ploch nejsou obecně obě hlavní roviny totožné. U jedné lámavé plochy byla vzdálenost předmětového ohniska od vrcholu plochy, tj. od kladné hlavní roviny předmětové, měřená proti směru dopadajícího paprsku, ohniskovou vzdáleností předmětovou, vzdálenost obrazového ohniska od vrcholu plochy, tj. od kladné hlavní roviny obrazové, měřená ve směru jdoucího paprsku, ohniskovou vzdáleností obrazovou. U soustavy centrovaných ploch definujeme ohniskové vzdálenosti zcela obdobně.

Ohnisková vzdálenost předmětová f je vzdálenost předmětového ohniska od kladné předmětové hlavní roviny, měřená kladně proti postupujícímu paprsku.

Ohnisková vzdálenost obrazová f' je vzdálenost obrazového ohniska od kladné hlavní roviny obrazové, měřená kladně ve směru postupujícího paprsku.

Označme průsečíky kladných hlavních rovin s optickou osou H a H' . Nazýváme je *kladné hlavní body*, a to *předmětový* a *obrazový*.

Zvolíme-li v prostoru předmětovém počátek v ohnisku předmětovém F , směr kladné osy x proti postupujícímu paprsku a směr kladné osy y kolmo vzhůru k optické ose a v prostoru obrazovém počátek v ohnisku obrazovém F' , kladnou osu x' směrem postupujícího paprsku a kladnou osu y' kolmo vzhůru k optické ose a označíme-li souřadnice bodu $Y(x, y)$ a bodu $Y'(x', y')$ a $HX = a$, $H'X' = a'$ (obr. 5), pak platí z podobných trojúhelníků

$$\frac{f}{a - f} = \frac{HF}{FX} = \frac{HL}{XY} = \frac{HL}{HK} = \frac{H'L'}{H'K'} = \frac{X'Y'}{H'K'} = \frac{F'X'}{H'F'} = \frac{a' - f'}{f'}$$

z rovnosti prvního a posledního vztahu plyne

$$ff' = aa' - af' - a'f + ff'$$

čili

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad (1)$$

což je zobrazovací rovnice ve tvaru Gaussově (vztažená na hlavní body).

Dá se odvodit (nebudeme to však provádět), že poměr ohniskových vzdáleností $\frac{f}{f'}$ je roven poměru indexů lomu prostoru předmětového a obrazového $\frac{N}{N'}$. Když $N = N'$, musí být $f = f'$

Dosadíme-li do (1)

$$a = f + x, \quad a' = f' + x',$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f}{f + x} + \frac{f'}{f' + x'} &= 1 \\ ff' + fx' + ff' + f'x &= ff' + fx' + f'x + xx', \\ xx' &= ff', \end{aligned} \quad (2)$$

což je zobrazovací rovnice ve tvaru Newtonově (vztažená na ohniska).

Pro příčné zvětšení $\frac{y'}{y}$ pak vychází z podobných trojúhelníků $\triangle YXF$ a $\triangle FHL$ a trojúhelníků $\triangle K'H'F'$ a $\triangle F'X'Y'$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}. \quad (3)$$

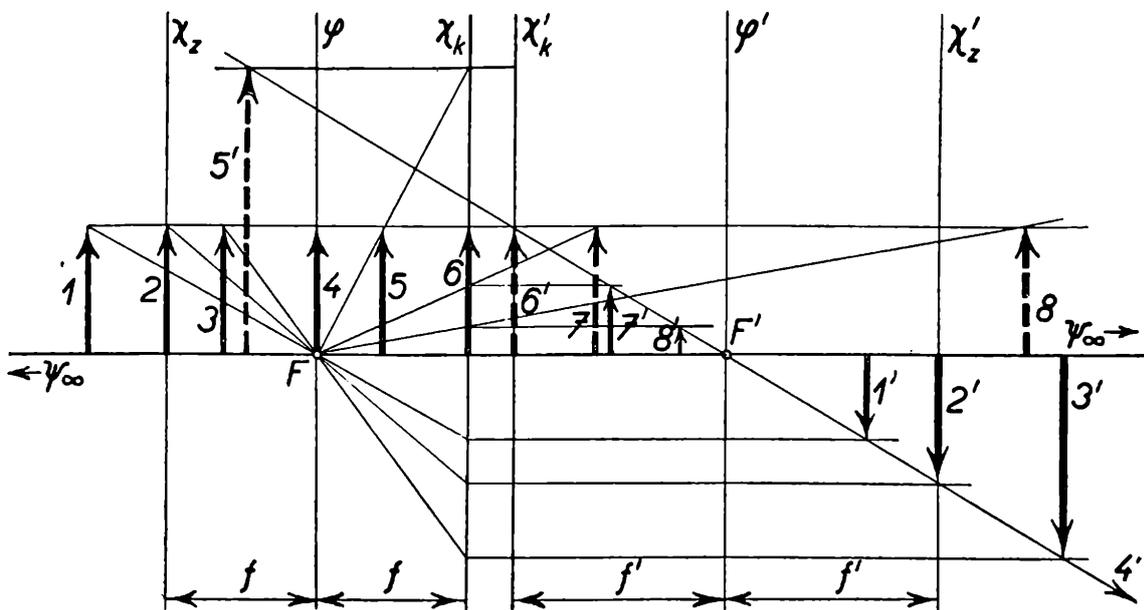
Přísluší tedy bodu $Y(x, y)$ bod Y' o souřadnicích

$$x' = \frac{ff'}{x}, \quad y' = -\frac{f}{x}y$$

Pro zobrazování musíme si především uvědomit toto:

Postupuje-li paprsek zleva doprava, pak prostor od kladné hlavní roviny předmetové vlevo je *prostor předmetový*, prostor od kladné hlavní roviny obrazové vpravo je *prostor obrazový*. Předmět v prostoru předmetovém je *předmět skutečný*, předmět mimo prostor předmetový je *předmět zdánlivý*. Jestliže dostaneme obraz v prostoru obrazovém, jde o *obraz skutečný*, vyjde-li mimo prostor obrazový, je *obraz zdánlivý*. Jestliže se paprsky v prostoru obrazovém obrátí (např. zrcadlem) a jdou znovu na zobracovací soustavu, je po obrácení chodu paprsků vpravo prostor předmetový a vlevo prostor obrazový.

Z uvedených rovnic vyplývá pro případ polohy ohnisek a hlavních rovin vyznačených v obr. 7, tj. pro $f > 0$ a $f' > 0$, tento přehled zobrazení (ψ_∞ značí rovinu v nekonečnu, χ_z předmetovou rovinu v dvojnásobné vzdálenosti ohniskové, χ'_z obrazovou rovinu v dvojnásobné vzdálenosti ohniskové, χ_k , χ'_k kladné hlavní roviny, φ , φ' ohniskové roviny):

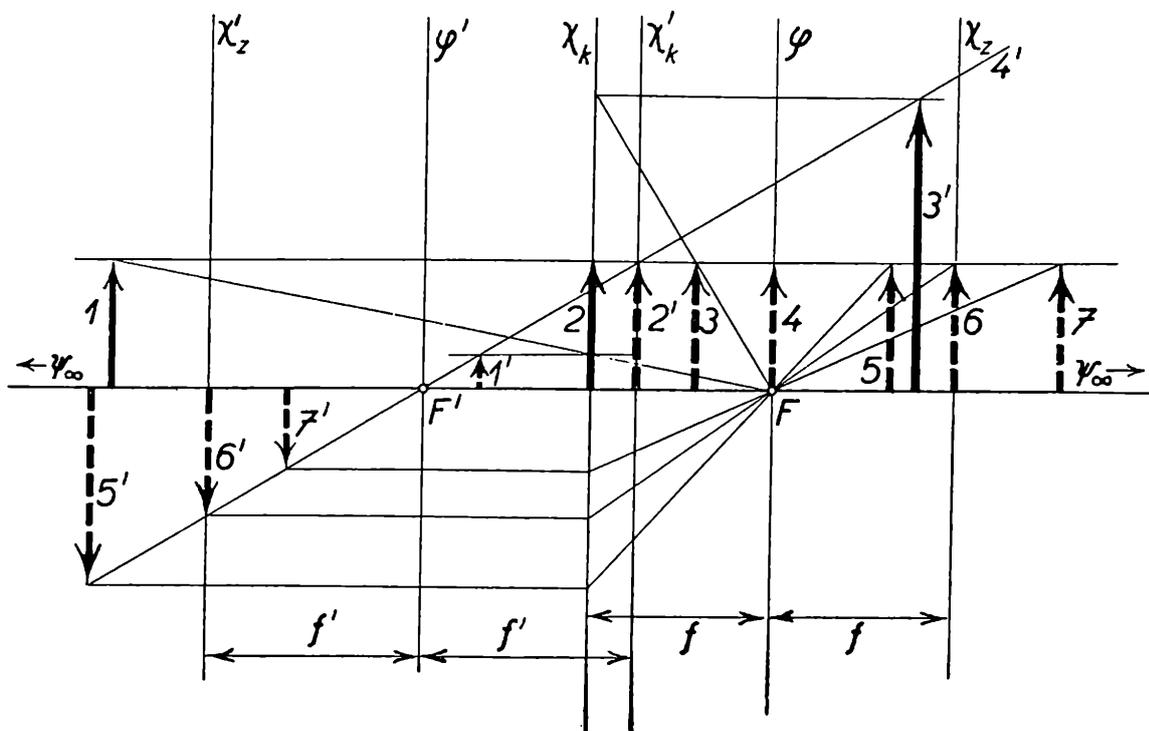


Obr. 7

Předmět:	Obraz:	
v ψ_∞	ve φ'	skutečný, převrácený, zmenšený
(1) mezi ψ_∞ (zleva) a χ_z	mezi φ' a χ'_z	skutečný, převrácený, zmenšený
(2) v χ_z	v χ'_z	skutečný, převrácený, stejně velký
(3) mezi χ_z a φ	mezi χ'_z a ψ_∞ (zprava)	skutečný, převrácený, zvětšený
(4) ve φ	v ψ_∞	
(5) mezi φ a χ_k	mezi ψ_∞ (zleva) a χ'_k	zdánlivý, přímý, zvětšený
(6) v χ_k	v χ'_k	zdánlivý, přímý, stejně velký
(7, 8) mezi χ_k a ψ_∞ (zprava)	mezi χ'_k a φ'	skutečný, přímý, zmenšený

Je-li $f < 0, f' < 0$, pak dostáváme (obr. 8) tento přehled zobrazení:

Předmět: v ψ_∞	Obraz: ve φ'	
(1) mezi ψ_∞ (zleva) a χ_k	mezi φ' a χ'_k	zdánlivý, přímý, zmenšený
(2) v χ_k	v χ'_k	zdánlivý, přímý, zmenšený
(3) mezi χ_k a φ	mezi χ'_k a ψ_∞ (zprava)	zdánlivý, přímý, stejně velký
(4) ve φ	v ψ_∞	skutečný, přímý, zvětšený
(5) mezi φ a χ_z	mezi ψ_∞ (zleva) a χ'_z	zdánlivý, převrácený, zvětšený
(6) v χ_z	v χ'_z	zdánlivý, převrácený, stejně velký
(7) mezi χ_z a ψ_∞ (zprava)	mezi χ'_z a φ'	zdánlivý, převrácený, zmenšený.



Obr. 8

Protože se při $f > 0, f' > 0$ po lomu svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou soustředí do ohniska, mluvíme o soustavě spojné (zvláštním případem je spojka). Při $f < 0, f' < 0$ se svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou láme tak, jakoby vycházel z obrazového ohniska; mluvíme zde o soustavě rozptylné (zvláštním případem je rozptylka).

Dává tedy spojná soustava ke skutečnému předmětu skutečný obraz, pokud není předmět mezi ohniskem a kladnou hlavní rovinou; v tomto případě je obraz zdánlivý (virtuální) a zvětšený. Rozptylná soustava dává ke skutečnému předmětu vždy jen zdánlivý obraz, a to zmenšený. Skutečný předmět má skutečný obraz vždy převrácený, zdánlivý obraz vždy přímý.

c) Zavedli jsme pojem kladných hlavních rovin jako rovin kolmých k optické ose, v nichž předmět i obraz je stejně velký a přímý. Můžeme najít i takové roviny, v nichž obraz i předmět je stejně velký, ale převrácený, jak jsme se zmínili na straně 88 a 89; tyto roviny nazýváme *záporné hlavní roviny* (χ_z, χ'_z). Nejsou to roviny základní, jsou to jen důsledky zavedení ohnisek a kladných hlavních rovin. Z příčného zvětšení

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

dostáváme pro kladné hlavní roviny

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = +1$$

čili

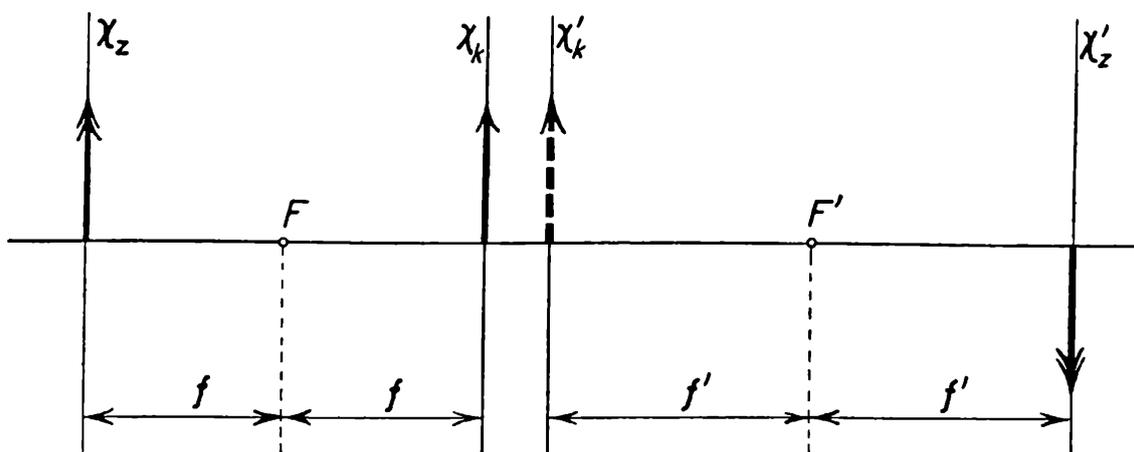
$$x = -f, \quad x' = -f'$$

a pro záporné hlavní roviny

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = -1$$

čili

$$x = f, \quad x' = f'.$$



Obr. 9

Jsou tedy hlavní roviny prostoru předmětového rozloženy kolem předmětového ohniska na obě strany ve vzdálenosti f (f může mít znaménko $+$ nebo $-$). Hlavní roviny prostoru obrazového jsou rozloženy kolem ohniska obrazového na obě strany ve vzdálenosti f' (f' může mít rovněž znaménko $+$ nebo $-$). Pro $f > 0$ a $f' > 0$ znázorňuje rozložení hlavních rovin obr. 9.

Průsečíky záporných hlavních rovin s optickou osou nazývají se záporné hlavní body (předmětový a obrazový).

Paprsku jdoucího záporným hlavním bodem můžeme rovněž použít k zobrazování předmětu.

Vedle příčného zvětšení $\frac{y'}{y}$ zavádíme ještě *úhlové zvětšení* $\frac{\alpha'}{\alpha}$, kde α

je úhel, který svírá paprsek se zápornou osou x , a α' úhel, který svírá paprsek se zápornou osou x' . Vztah pro toto zvětšení odvodíme takto:

Použijeme obrázku 6. Z něho plyne pro malé úhly α a α'

$$\alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha = \frac{HK}{a}, \quad \alpha' \doteq \operatorname{tg} \alpha' = \frac{H'K'}{a'}$$

Poněvadž $HK = H'K'$, je

$$a\alpha = a'\alpha',$$

a tedy úhlové zvětšení

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a}{a'} = \frac{x+f}{x'+f'}.$$

Poněvadž

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x},$$

je

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{x+f}{\frac{ff'}{x} + f'} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}.$$

Bude tedy úhlové zvětšení rovno 1 v bodech, pro něž bude splněna podmínka

$$\frac{x}{f'} = 1, \quad \frac{f}{x'} = 1,$$

tedy v bodech

$$x = f' \quad \text{a} \quad x' = f \quad (4)$$

Body o těchto souřadnicích se nazývají *kladný uzlový bod předmětový* U_k a *kladný uzlový bod obrazový* U'_k . Jejich souřadnice jsou dány vztahy (4). Úhlové zvětšení bude rovno -1 tehdy, když

$$\frac{x}{f'} = -1, \quad \frac{f}{x'} = -1$$

čili

$$x = -f', \quad x' = -f$$

Prvý bod je *záporný uzlový bod předmětový* U_z , druhý bod je *záporný uzlový bod obrazový* U'_z (obr. 10).

Vychází:

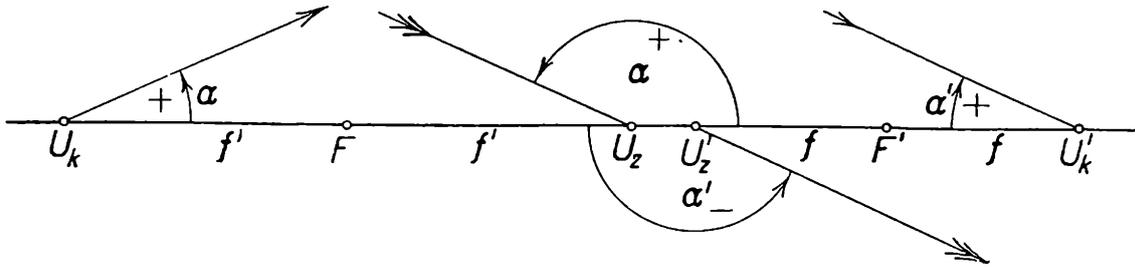
Paprsek jdoucí do záporného uzlového bodu U_z , vychází rovnoběžně posunut z uzlového bodu U'_z . Uzlové body jsou v prostoru předmětovém ve vzdálenosti f' od ohniska F na obě strany, v prostoru obrazovém jsou ve vzdálenosti f od ohniska F' na obě strany.

Paprsku jdoucího záporným uzlovým bodem můžeme opět s výhodou užít při zobrazování. Je proto možné užít k zobrazování těchto čtyř paprsků:

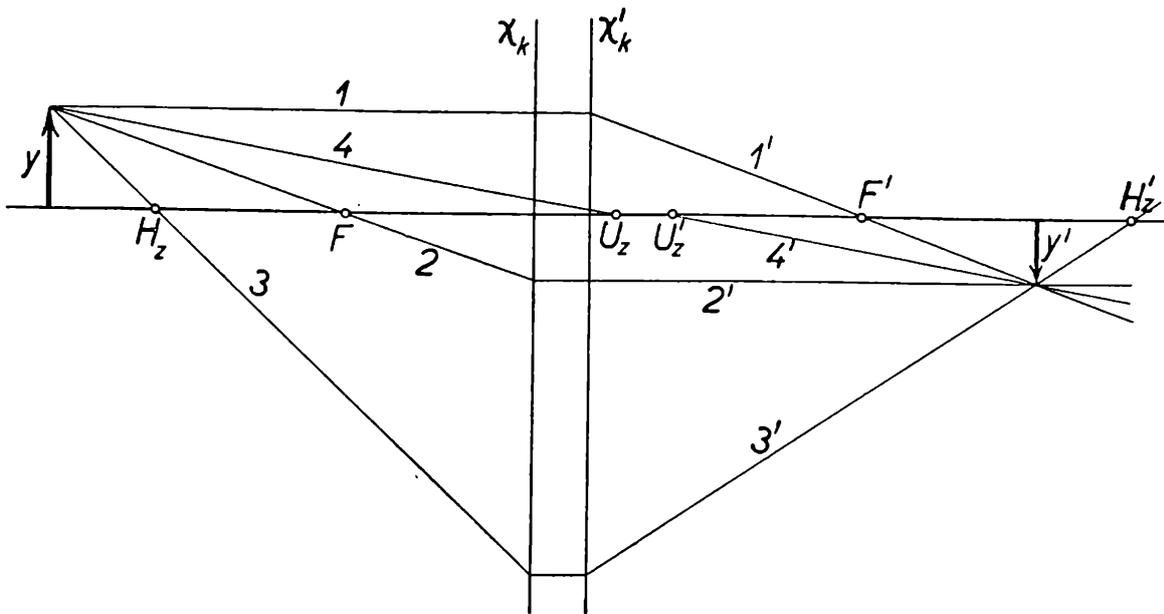
1. paprsku rovnoběžného s optickou osou,
2. paprsku jdoucího ohniskem,
3. paprsku jdoucího záporným hlavním bodem H_z a
4. paprsku jdoucího záporným uzlovým bodem.

Chod těchto paprsků pro $f > 0, f' > 0$ - pro soustavu spojnou - ukazuje obr. 11, pro $f < 0, f' < 0$ - pro soustavu rozptylnou - obr. 12.

d) K měření ohniskových vzdáleností tlustých čoček uijeme dvou metod. Prostor před čočkou a za čočkou bude mít při měření týž index lomu. Proto ve vztazích (1), (2) a (3) píšeme $f' = f$.



Obr. 10



Obr. 11

1. Zvolíme si pevně polohu předmětu P i stínítka S tak, abychom na stínítku mohli vytvořit čočkou obraz předmětu (obr. 13).

Obraz na stínítku vznikne ve dvou různých polohách čočky. Označme si vzdálenost obrazu od kladné hlavní roviny obrazové, jejíž polohu neznáme, v prvním případě a_1 a v druhém případě a_2 , a velikosti obrazu v prvním případě y_1 , v druhém případě y_2 . Pak musí platit podle (3) pro poměr velikosti obrazu a předmětu ($f' = f$)

$$\frac{y_1}{y} = - \frac{a_1 - f}{f}, \quad \frac{y_2}{y} = - \frac{a_2 - f}{f}$$

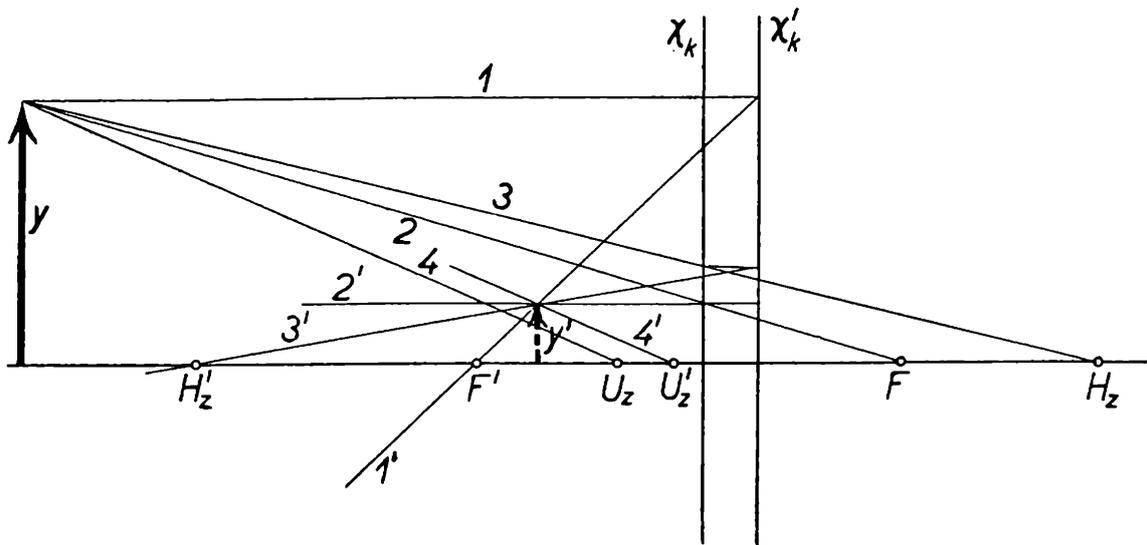
Ódečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$\frac{y_1' - y_2'}{y} = \frac{a_2' - a_1'}{f}$$

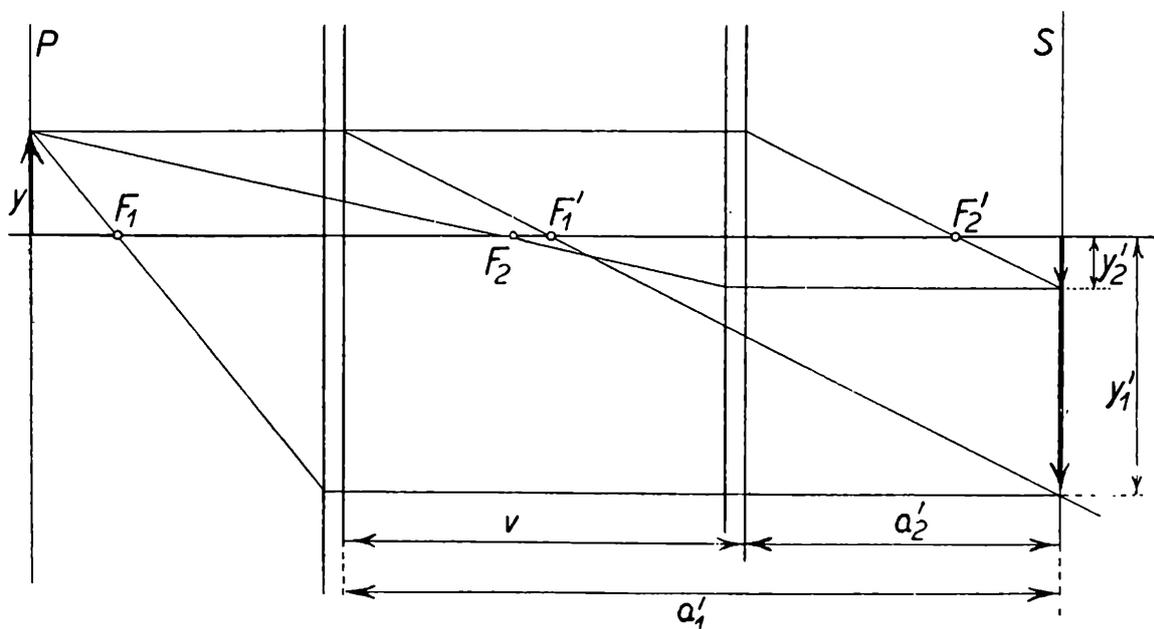
čili

$$f = \frac{a_2' - a_1'}{y_1' - y_2'} y = \frac{v}{y_1' - y_2'} y, \quad (5)$$

kde $v = a_2' - a_1'$. Naměříme-li vzdálenost v , o niž musíme posunout



Obr. 12



Obr. 13

čočku z první polohy do druhé, dále velikost předmětu y a velikost obrazů v obou polohách y_1' , y_2' , pak můžeme f vypočítat podle vztahu (5). Tento vztah byl odvozen bez předpokladu o tloušťce čočky, a proto lze jej použít i v obecném případě.

Při měření provedeme nastavení pro pět různých vzdáleností předmětu a stínítka a vypočteme střední hodnotu z vypočtených f a příslušnou chybu výsledku.

2. Najdeme polohu obrazu nekonečně vzdáleného předmětu; pak pro jiný předmět najdeme obraz, který je převrácený a stejně veliký jako předmět. V prvním případě najdeme tedy polohu obrazového ohniska a v druhém případě polohu záporné hlavní roviny obrazové. Vzdálenost ohniska od této roviny udává ohniskovou vzdálenost. Tato metoda je opět přesná i pro tlustou čočku.

Měření opakujeme desetkrát a určíme střední hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

Poznámka: Na článku spolupracovala s autorem *Dagmar Košťálová*, členka Jihomoravského krajského výboru FO. Svými připomínkami k článku přispěli členové ústředního výboru FO, *prof. dr. B. Havelka*, *dr. M. Chytilová* a *Vl. Rudolf* a členové Jihomoravského krajského výboru FO *Josef Konrád*, *František Šuráň* a *dr. Bohumil Vlach*.

Recenze



Inž. arch. Josef Dovrtěl

Sbírka úkolů z technického kreslení pro průmyslové školy stavební

Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960, 29 stran, 58 obrázků, cena brožovaného výtisku 11,80 Kčs.

Kniha je schválena výnosem ministerstva školství a kultury jako pomocná kniha pro 1. a 2. ročník průmyslových škol stavebních. Obsahuje úvod, výťah z učebné osnovy, textovou část doprovázející výkresovou část a odkazy na literaturu. Navazuje na učebnice těchto odborných škol *Menšík-Pospíšil, Deskriptivní geometrie - technické kreslení*.

V úvodu autor uvádí, že účelem sbírky je poskytnout žákům i učitelům stavebních průmyslových škol zásobu námětů k úkolům z technického kreslení, a to námětů tvarově příbuzných s prvky, které se vyskytují ve stavebnictví, ovšem takových, které jsou vhodné k procvičení teoretických poznatků z deskriptivní geometrie, jichž znalost se předpokládá. Na volených příkladech se má názorně nacvičit prostorová představivost.

Textová část je rozdělena na sedm skupin. První skupina se zabývá

základy pravoúhlého promítání, druhá obsahuje příklady na zobrazování jednoduchých i složitých těles v promítání pravoúhlém, kosoúhlém a axonometrickém a připojuje i příklady na rovinné řezy a na průniky těles. Třetí skupina je věnována rovnoběžnému osvětlování a další skupiny jednájí postupně o perspektivě, kótovaném promítání, rotačních a zborcených plochách. Poslední skupina uvádí příklady na plochy šroubové.

Kniha je sbírkou úkolů z deskriptivní geometrie, vzatých ze stavebnictví. Pro příklady jsou voleny nejen stavební elementy, ale i náročnější podklady, např. velmi členité interiéry, nebo dokonce bloky domů, městská prostranství apod. Žák i učitel najde proto ve sbírce jak příklady konstruktivně snadné, tak i vysoce obtížné. Vzhledem k výběru úkolů všech stupňů obtížnosti mohou ze sbírky vedle žáků a učitelů průmyslových škol stavebních čerpat náměty pro grafické práce také posluchači vysokých škol technického směru a učitelé deskriptivní geometrie na stavebních fakultách. Tito učitelé zejména tehdy použijí sbírky, nejsou-li právě stavebními inženýry. Ze sbírky totiž poznají i odbornou terminologii různých stavebních prvků, kterou by si jinak museli pracněji osvojovat z jiné odborné literatury.

Příkladů je ve sbírce více, nežli udává uvedený počet. Pod číslem 1 až 58 jsou vlastně označeny nikoli jednotlivé příklady, ale celé tabulky s příklady. Každá tabulka obsahuje několik různých obrázků, i když se třeba vztahují k jedinému předmětu. Autor se snažil, aby u každého zvoleného předmětu uvedl pohledy z různých stran a různými promítacími způsoby. Často vedle pohledů připojil i řezy těles, aby tím čtenáři ujasnil představu o tvarových podrobnostech zobrazovaného předmětu.

Kniha má více kladů nežli nedostatků. I o těch je třeba se zmínit již bproto, aby při příštích vydáních, ke kterým dojde, již byly odstraněny. Jako hlavní nedostatek považují způsob, jakým byla kniha vytištěna. Text byl psán pro tisk na psacím stroji pravděpodobně ve velkém chvatu a některá slova byla teprve dodatečně vpisována. Opticky je to nevkusná úprava. Avšak v textu jsou i neopravené překlipy. V textu uvedená pojmenování geometrických prvků nejsou graficky zvýrazněna, resp. odlišena od ostatního tisku (např. podtržením), užití indexy u písmenného označení jsou psány stejně velikými typy jako vlastní označení a navíc ještě na téže úrovni. Mnohdy v textu není jasně rozlišeno písmeno *l* od číslice *1*. To jsou chyby, které jistě nevznikly vinou autora.

K vlastní jeho práci bych chtěl podotknout, že 29 stran textu, který má vysvětlit konstrukci 58 tabulek naplněných velmi četnými příklady, je skutečně málo a bylo toho dosaženo slohem tak stručným, že je to na některém místě až na úkor srozumitelnosti. Po formální stránce bylo by lépe užít pro označení os souřadnic písmen malé abecedy (x , y , z) místo písmen velkých, kterých autor užívá k označení bodů, jak ostatně se dnes všeobecně v naší literatuře užívá. A z téhož důvodu nezdá se

vhodným označení bodů velkými písmeny řecké abecedy. To sice autor užil výjimečně jen pro dělicí body (např. Δ_l , Δ_p) zřejmě pro vyznačení zvláštní funkce těchto bodů. Konec konců však tyto nedostatky nejsou na újmu jasnosti textu. V knize by se však nemělo vyskytovat libovolné užívání různých termínů pro jednu a tutéž věc nebo pojem, tím méně pak, jestliže je v literatuře již ustálená terminologie. Jako příklad uvádím, že vedle kosoúhlé axonometrie se mluví v knize i o kosé nebo šikmé axonometrii. Dříve užívaný termín *p r o n i k* byl nahrazen již dávno termínem *p r ů n i k*, který je duchu českého jazyka bližší (viz např. *pronikati - průnik, procházeti - průchod*). Autor používá někdy pravotočitého, jindy levotočivého systému os souřadnic. Je pravda, že v této otázce nejsou autoři ještě zajedno. Ale v jedné práci měl by být zachováván jediný způsob, aby toto měnění nerušilo tolik čtenáře, zejména žáka. Někdy může tato věc svést čtenáře i k jinému pojmání zobrazeného předmětu. V grafickém projevu by mělo být v obrázkové části důsledně prováděno rozlišení prvků daných od pomocných konstrukcí a od výsledku (čáry plné, čárkované, čerchované; čáry tenké a tučné). V části, jednající o osvětlení, by bylo třeba zdůraznit technické osvětlení.

Nakonec poznamenávám, že opravdová snaha autora k všestrannému vyčerpání látky vedla ho téměř na všech obrázcích k jejich přeplnění různými variantami na úkor přehlednosti.

Přes všechny tyto výtky lze však knihu doporučit všem zájemcům o deskriptivní geometrii, protože sbírka znamená přínos v naší odborné literatuře.

Oldřich Jeništa

Cesta k vědě zнову vychází

V roce 1962, ve kterém vzpomínáme 100. výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků, začala znovu vycházet známá populární knižnice *Cesta k vědě*. Starší generace čtenářů se dobře pamatuje na řadu svazečků útlých rozsahem, ale hodnotných obsahem, které u nás v C e s t ě vycházely péčí Jednoty - a ostatně i nynější naši studenti s úspěchem čerpají z těchto pramenů. Dalšího vydávání této oblíbené knižnice se nyní ujalo nakladatelství Československé akademie věd a jako první svazek v obnovené edici připravilo knížku inž. Miroslava Valacha *S t r o j e p o m á h a j í m y s l e t*. Brožovaný výtisk kapesního formátu má 152 stran a stojí 7,40 Kčs. Na obálce svazku nakladatelství oznamuje, že jsou k tisku připraveny tyto další brožury:

Bouška-Vanýsek: *Z a t m ě n í a z á k r y t y n e b e s k ý c h t ě l e s*;
Pačes: *F y z i k a n í z k ý c h t e p l o t*; Dupač: *P r a v d ě p o d o b n o s t v e v ě d ě a t e c h n i c e*.

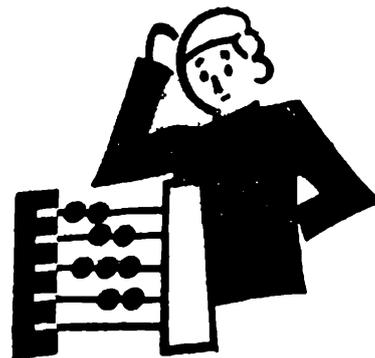
Doporučujeme tuto novou knižnici s dobrou a dávnou tradicí pozornosti našich mladých čtenářů.

J. S.

Matematika

Stanislav Trávníček, Olomouc:

O jednom způsobu definice funkce



Mějme dānu nějakou množinu M čísel, a necht x značí libovolné číslo z této množiny. Pak definujeme funkci jako pravidlo, jímž je každému číslu x z množiny M přiřazeno jediné číslo y (x je nezávisle proměnná, čísla y vytvářejí nějakou množinu N). Jak znāmo, lze funkce vyjādřit např. rovnicí (vzorcem), tabulkou nebo grafem. Za základní způsob lze považovat vyjādření rovnicí; pomocí rovnice lze totiž sestavit tabulku i sestojit graf funkce.

V praxi se někdy setkáváme s funkcemi, které jsou pro různé hodnoty nezávisle proměnné definovány různými vzorci. Uvedme si nejprve několik příkladů.

Příklad 1. Funkce y je definována takto:

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0 \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Tento zkrácený zápis znamená, že pro $x < 0$ je $y = -x$ a pro $x \geq 0$ je $y = x^2$. Označíme-li $y(x_0)$ hodnotu funkce y pro hodnotu nezávisle proměnné x_0 , máme např. $y(-2) = 2$, neboť $-2 < 0$ a k výpočtu hodnoty funkce použijeme 1. řādku, $y(2) = 4$, neboť $2 > 0$ a hodnotu funkce vypočteme podle vzorce ve druhém řādku. Tato funkce je tedy pro $x < 0$ lineární (a grafem je přímka $y = -x$) a pro $x \geq 0$ je kvadratická (a grafem je parabola $y = x^2$). Všimněme si, že pro $x_0 = 0$ se obě části grafu stýkají v bodě 0 (obr. 1); my jsme tento bod přidali ke grafu kvadratické funkce.

ČÍSLO

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pro } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

STRANA

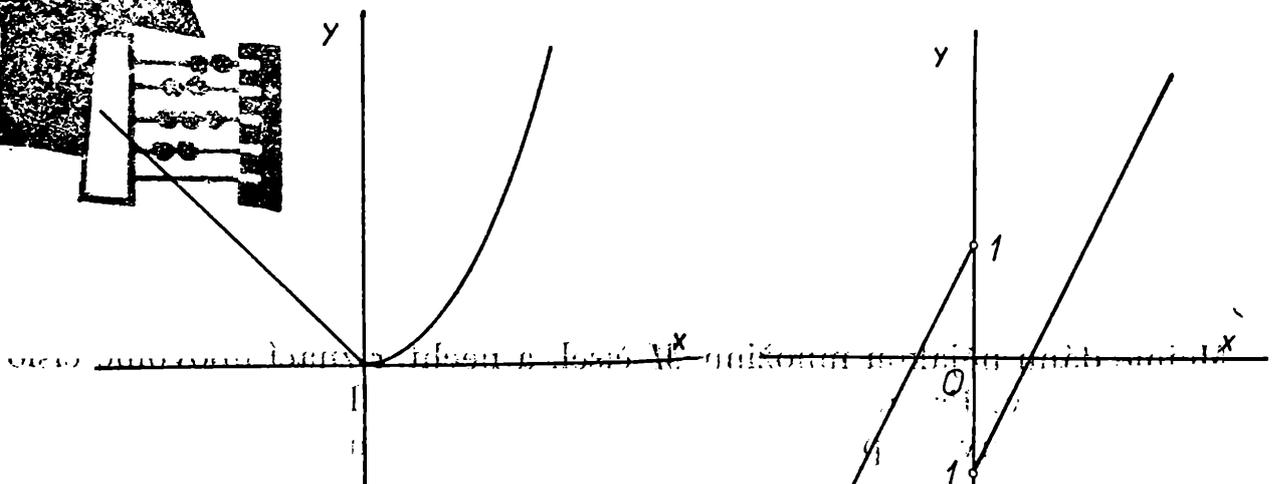
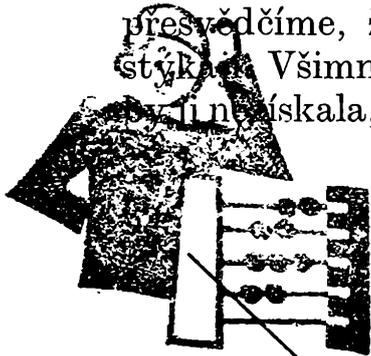
její graf je na obr. 2. Tato funkce není definována pro $x_0 = 0$.

Příklad 3. Je dána funkce

$$y = \begin{cases} -2 & \text{pro } x < -1 \\ 2x & \text{pro } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

MATEMATIKA

Graf této funkce (obr. 3) se skládá ze tří přímkových částí. Lehce se přesvědčíme, že pro $x_1 = -1$ a pro $x_2 = 1$ se jednotlivé části grafu stýkají. Všimněme si, že tuto vlastnost neměla funkce z příkladu 2 a že její graf není spojitý, ani kdybychom jakkoli doplnili definici funkce pro $x = 0$.



Obr. 1

Obr. 2

Zápis, kterým definujeme v jednotlivých příkladech funkci y , je sice přehledný a vhodný pro grafické znázorňování funkcí, ale jeho nedostatkem je, že tu nemáme funkci vyjádřenou jednou rovnicí pro všechna x , pro něž je definována. To často bývá při práci s funkcemi na závalu. Položme si nyní otázku, zda je možno nalézt vyjádření funkcí, definovaných pro různá x různými vzorci (jako v příkladech 1 až 3), pomocí jediné rovnice. Tuto otázku vyřešíme nejprve obecně, pak zvlášť pro mnohočleny a nakonec i pro lineární funkce.

Mějme funkci

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{pro } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{pro } x > x_0 \end{cases}$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$ jsou dané známé funkce, definované pro všechna x (což

se dále vždy předpokládá), a x_0 je dané číslo (viz příklad 1 a 2). Tuto funkci y chceme vyjádřit jedinou rovnicí pro všechna x , pro než je definována, tj. pro $x \neq x_0$. Uvažujme dále funkce

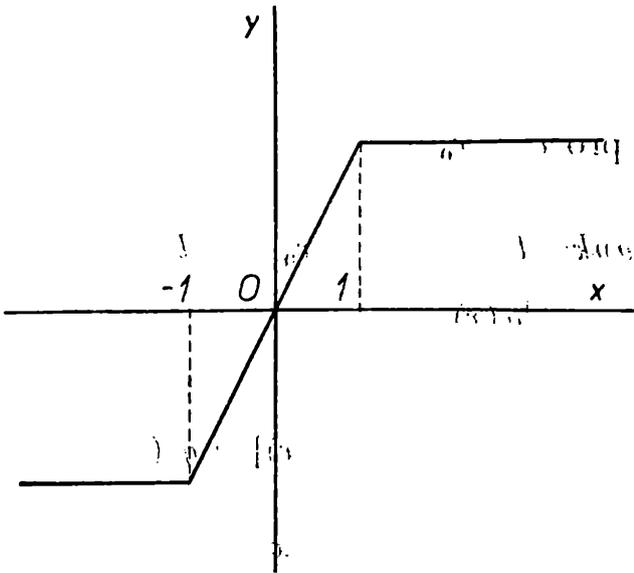
$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x < x_0 \\ 0 & \text{pro } x > x_0 \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_0 \\ 1 & \text{pro } x > x_0 \end{cases}$$

Pak $y = u(x) f_1(x) + v(x) f_2(x)$ (1)

je hledaná rovnice, kterou je vyjádřena funkce y . Dostáváme totiž pro $x < x_0$ $y = 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) = f_1(x)$ a pro $x > x_0$ $y = 0 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) = f_2(x)$.

Rovnice (1) je ovšem zatím jen zdánlivé řešení naší otázky, protože se v ní vyskytují funkce $u(x)$ a $v(x)$, které opět nejsou vyjádřeny jedinou rovnicí pro všechna x .

Hledejme takovéto vyjádření pro funkce $u(x)$ a $v(x)$. Vyjdeme od libovolné funkce $\varphi(x)$, pro níž platí $\varphi(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $\varphi(x) > 0$ pro $x > x_0$. Tuto vlastnost má řada funkcí, např. $x - x_0$, $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3 + 4(x - x_0)$ apod.



Obr. 3

Pak zřejmě podle definice absolutní hodnoty je $|\varphi(x)| = -\varphi(x)$ pro $x < x_0$, $|\varphi(x)| = \varphi(x)$ pro $x > x_0$. Vytvořme funkci $\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$.

Pak máme

$$\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} = -1 \text{ pro } x < x_0$$

$$\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} = 1 \text{ pro } x > x_0$$

a dále je

$$1 - \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} = 2 \text{ pro } x < x_0, \quad 1 - \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} = 0 \text{ pro } x > x_0$$

Můžeme tedy položit $u(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right)$; podle předchozího je sku-

tečně $u(x) = 1$ pro $x < x_0$ a $u(x) = 0$ pro $x > x_0$. Podobně lze položit $v(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right)$, o čemž se čtenář snadno sám přesvědčí. Z rovnice

(1) tak po dosazení za $u(x)$ a $v(x)$ dostaneme

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right) f_1(x) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right) f_2(x)$$

což je hledané vyjádření funkce y pomocí jedné rovnice. Jednoduchou úpravou odsud dostaneme

$$y = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] - \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$$

Označíme-li

$$\frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] = \alpha(x), \quad \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] = \beta(x),$$

je funkce y vyjádřena rovnicí

$$y = \alpha(x) - \beta(x) \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$$

Tak docházíme k větě:

V 1. Je dána funkce

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{pro } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{pro } x > x_0 \end{cases}$$

(v bodě x_0 není definovaná). Tuto funkci lze pro $x \neq x_0$ vyjádřit rovnicí

$$y = \alpha(x) - \beta(x) \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)},$$

kde $\alpha(x) = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)]$, $\beta(x) = \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)]$ a $\varphi(x)$

je libovolná funkce, splňující podmínky $\varphi(x) < 0$ pro $x < x_0$, $\varphi(x) > 0$ pro $x > x_0$.

Pro $x < x_0$ je skutečně

$$y = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] - \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] \frac{-\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

a po zkrácení $\varphi(x) \neq 0$ je

$$y = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] + \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] = f_1(x)$$

a podobně pro $x > x_0$ je

$$y = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)] - \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = f_2(x)$$

(Pokračování)

Neurčitá rovnice prvního stupně

Nejjednodušší neurčitá rovnice prvního stupně má tvar

$$ax + by = c, \quad (1)$$

kde a, b, c jsou celá čísla.

Neurčitá, vlastně správněji by se mělo říkat *n e d o s t a t e č n ě* u r č ě n á rovnice, se nazývá proto, že dvě neznámé mají vyhovovat jen jedné podmínce. Dosadíme-li do rovnice (1) za x všechny možné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, obdržíme z rovnice (1) opět nekonečně mnoho hodnot neznámé y . Řešení tedy nečiní žádných obtíží. Stačí zvolit za x hodnotu jakoukoliv a příslušnou hodnotu y vypočítat, nebo naopak.

Aby však byl počet řešení omezen, můžeme vyžadovat, aby x a y byla celá čísla. Máme tedy určit kladná nebo záporná celá čísla x a y tak, aby vyhovovala dané rovnici (1).

Mluvíme-li tedy o neurčitých (diofantických) rovnicích, máme vždy na zřeteli tuto podmínku, kterou můžeme vyjádřit také takto: Máme určit celé číslo x tak, aby zbytek při dělení čísla $ax - c$ číslem b se rovnal nule. Pišme tuto podmínku ve tvaru

$$ax - c = bl \quad \text{nebo} \quad \frac{ax - c}{b} = l \quad (1')$$

Důkaz je zřejmý; stačí položit za l číslo $-y$ a okamžitě obdržíme rovnici (1).

Jestliže zbytek při dělení čísla a číslem b je a_1 a při dělení čísla c číslem b je c_1 , máme určit číslo x tak, aby zbytek při dělení čísla $a_1x - c_1$ číslem b byl roven nule. Provedeme důkaz.

Jestliže

$$a = bk + a_1, \text{ kde } a_1 < b$$

$$c = bh + c_1, \text{ kde } c_1 < b \quad \text{dosadíme do vztahu (1'), obdržíme}$$

$$(bk + a_1)x - (bh + c_1) = bl$$

$$bkx - bh + a_1x - c_1 = bl, \quad \text{čili} \quad kx - h + \frac{a_1x - c_1}{b} = l;$$

aby levá strana rovnosti se rovnala celému číslu l je nutno, aby zbytek při dělení čísla $a_1x - c_1$ číslem b byl roven nule.

Můžeme tedy řešení rovnice (1) převést na řešení rovnice s menšími koeficienty

$$a_1x + by = c_1 \quad (2)$$

Z důkazu je také patrné, že dělíme-li rovnici (I) číslem b , nemusí být kořen y_1 , který je řešením rovnice (2) řešením rovnice (1), protože koeficientem u y byla celá rovnice dělena. Číslo x je však příslušným kořenem rovnice (2) i (1) a dovedeme druhý kořen y rovnice (1) vypočítat, dosadíme-li x do rovnice (1).

Tímto postupem, to znamená postupným dělením, můžeme převést i nejsložitější rovnice na jednoduché. Je však vždy nutné správně si uvědomit, který z obou kořenů má pro rovnici význam.

P ř í k l a d: Řešte rovnici

$$23x + 17y = 234 \quad (I)$$

Vydělíme rovnici nejmenším koeficientem, to je 17 a sestavíme novou rovnici, jejíž koeficienty budou zbytky vzniklé dělením. Nová rovnice bude mít tvar

$$6x + 17y = 13 \quad (II)$$

Protože řešení této rovnice není na první pohled patrné, vydělíme znovu celou rovnici číslem 6 a sestavíme novou tvaru

$$x + 2y = 2 \quad (III)$$

Rovnice (III) má řešení $x = 1$ a $y = 1$. Protože rovnice (III) vznikla z rovnice (II) vydělením koeficientu u x má pro rovnici (II) význam kořen $x = 1$. Ten dosadíme do rovnice (II) a vypočteme $y = 1$. Rovnice (II) má tedy kořeny $x_1 = 5$, $y = 1$. Rovnice (II) však vznikla z rovnice (I) vydělením koeficientu u y , bude tedy kořen $x_1 = 5$ zároveň kořenem rovnice (I) a po dosazení do rovnice (I) vypočteme kořen y_1 .

Rovnice (I) má kořeny $x_1 = 5$, $y_1 = 1$.

Abychom však mohli rovnici (1) s celočíselným řešením převést na rovnici (2), je nutné, aby koeficienty a , b byla čísla nesoudělná, nebo aby společný faktor, který obsahují, byl obsažen také v absolutním členu.

Kdyby totiž koeficienty a , b měly společného nesamozřejmého dělitele d , to znamená, že

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d,$$

pak by rovnice (1) měla tvar

$$a_1 dx + b_1 dy = c,$$

nebo (vydělíme-li rovnici číslem d)

$$a_1 x + b_1 y = \frac{c}{d}$$

To znamená podle předem dané podmínky, že x a y jsou celá čísla, aby celé číslo na straně levé se rovnalo číslu necelému na straně pravé, což je ovšem nemožné.

Nežli tedy přistoupíme k řešení rovnice (1), musíme se vždy přesvědčit, je-li výše uvedená podmínka splněna.

V úvodu bylo řečeno, že rovnice (1) má být řešena jen celými čísly. Tím není počet řešení omezen, protože rovnice (1) má-li jedno řešení, má řešení nekonečně mnoho. Ukážeme si, jak spolu všechna řešení souvisí a vyslovíme větu:

Jsou-li koeficienty a, b nesoudělné a a_1, b_1 jakékoli řešení rovnice $ax + by = c$, potom vzorce

$$x = x_1 - bk \quad (3)$$

$$y = y_1 + ak \quad (4)$$

pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ udávají všechna řešení rovnice (1).

Důkaz: Jsou-li x, y a x_1, y_1 dvě libovolná řešení rovnice (1) platí

$$ax + by = c$$

$$ax_1 + by_1 = c$$

a podle zákona tranzitivnosti

$$ax + by = ax_1 + by_1,$$

z čehož po úpravách obdržíme

$$ax - ax_1 + by - by_1 = 0$$

$$b(y - y_1) = a(x_1 - x)$$

$$y - y_1 = \frac{a(x_1 - x)}{b}$$

Protože $y - y_1$ a $x - x_1$ jsou podle předpokladu celá čísla a koeficienty a, b jsou nesoudělné, musí rozdíl $x_1 - x$ být dělitelný číslem b .

Můžeme tedy psát

$$x_1 - x = bk$$

z čehož

$$x = x_1 - bk, \quad (3)$$

dosadíme-li do výrazu pro $y - y_1$, obdržíme

$$y - y_1 = \frac{abk}{b}$$

a po zkrácení a úpravě dostaneme

$$y = y_1 + ak. \quad (4)$$

(Pokračování)

E , takže $AE = t_a$. Označíme-li D patu kolmice z bodu A na stranu BC , je $v_a = AD$ a pravoúhlý trojúhelník ADE je jednoznačně určen. Zřejmě určení úsečky $x = EF$, kde bod F leží v opačné polorovině k $(ED; A)$, stačí již ke konstrukci trojúhelníka z předepsaných podmínek.

K tomu potřebujeme tyto věty a vztahy:

V ě t a 1. Je-li O střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, pak pro průsečík F osy souměrnosti strany BC s jemu opsanou kružnicí platí

$$FO = FB = FC$$

D ů k a z plyne z toho, že $\triangle OBF$ (viz obr. 1) je rovnoramenný, neboť

$$\sphericalangle OBF = \sphericalangle CBF + \sphericalangle CBO = \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

$$\sphericalangle BOF = 2R - \sphericalangle AOB = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Obdobně pro trojúhelník OCF .

V ě t a 2. Osa úhlu v trojúhelníku dělí protější stranu v poměru stran přilehlých k úsekům.

D ů k a z. V $\triangle ABG$ (obr. 1) protíná osa úhlu β stranu AG v bodě O . Vedme bodem G rovnoběžku s touto osou a stanovme její průsečík B' s prodloužením strany AB za bod B . Protože $\triangle BB'G$ je rovnoramenný ($\sphericalangle BB'G = \sphericalangle ABO$, $\sphericalangle BGB' = \sphericalangle OBG = \sphericalangle ABO$), je $BB' = BG$. Z podobných trojúhelníků ABO , $AB'G$ plyne

$$AB \cdot AB' = AO \cdot AG,$$

z čehož

$$AB \cdot (AB' - AB) = AO \cdot (AG - AO), \text{ tj. } AB : BB' = AO : OG,$$

a tedy

$$AB : BG = AO : OG \quad (1)$$

Podobně se dokáže

$$AC : CG = AO : OG \quad (1a)$$

Porovnáním (1) a (1a) plyne

$$AB : BG = AC : CG$$

z čehož

$$BG : CG = AB : AC$$

což jsme měli dokázat.

I. Trojúhelníky ABF , BGF (viz znovu obr. 1), kde G je průsečík osy úhlu α se stranou BC , které mají společný úhel při vrcholu F , jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle BAF = \frac{1}{2}\alpha, \sphericalangle GBF = \sphericalangle CBF = \sphericalangle CAF = \frac{1}{2}\alpha.$$

Odtud plyne

$$AB : BG = AF : BF$$

tj. (použijeme-li výsledku věty 1)

$$AB : BG = AF : OF \quad (2)$$

Spojením úměr (1) a (2) dostaneme

$$AO : OG = AF : OF \quad (3)$$

a úpravou

$$(AO - OG) : OG = (AF - FO) : OF$$

Protože $OG = OH$, kde H je průsečík rovnoběžky ve vzdálenosti 2ρ se stranou BC , lze psát upravenou úměru takto

$$AH : OG = AO : OF \quad (4)$$

II. Přepíšme úměru (3) na tvar

$$OG : OF = AO : AF \quad (3a)$$

Stejnou úpravou jako při úměře (3) získáme

$$OG : FG = AO : OF \quad (4a)$$

Z úměr (4) a (4a) pak dostaneme

$$OG : FG = AH : OG \quad (5)$$

III. Protože $\triangle FEG \sim \triangle OKG \sim \triangle ALH$, kde K je pata kolmice z bodu O na stranu BC a L průsečík výšky AD a rovnoběžky ve vzdálenosti 2ρ s přímkou BC , platí

$$OK : EF = OG : FG \quad \text{a} \quad AL : OK = AH : OG,$$

a tedy

$$AL : OK = OK : EF. \quad (6)$$

Protože $AL = v_a - 2\rho$, $OK = \rho$ a $EF = x$, napišme úměru takto

$$x(v_a - 2\rho) = \rho^2. \quad (7)$$

K o n s t r u k c e. Sestrojíme nejdříve pravoúhlý trojúhelník ADE , kde $v_a = AD$ je jedna odvěsna, $t_a = AE$ přepona a jeho druhá odvěsna DE leží v hledané straně BC . Pomocí Euklidovy věty určíme z (7) úsečku $x = EF$ a tím i bod F . Střed O vepsané kružnice je potom v průsečíku přímky AF s rovnoběžkou vedenou ve vzdálenosti ρ k přímce DE a položenou v polorovině $(DE; A)$. Tečny z vrcholu A k této kružnici dávají v průsečících s přímkou DE zbývající vrcholy B, C hledaného trojúhelníka.

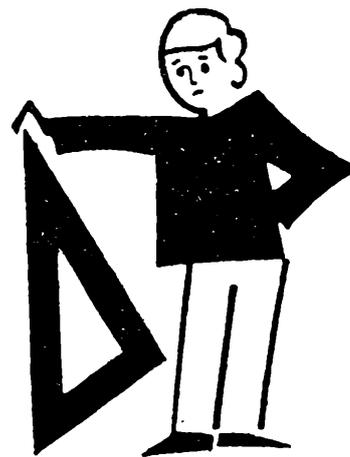
Důk a z je důsledkem rozboru a konstrukce, neboť sestroyený trojúhelník ABC splňuje dané podmínky.

D i s k u s e. Řešení úlohy existuje, je-li

$$2q < v_a < t_a$$

a existuje-li, pak je pouze jedno řešení. V případě, že $v_a = t_a$ je příslušný trojúhelník rovnoramenný a není třeba provádět konstrukci podle našeho návodu.

Deskriptivní geometrie



O t t o B e r k a, Gottwaldov:

Úlohy o mimoběžkách

Na bývalých středních školách (reálkách a gymnasiích) jako závěr látky o promítání na dvě průmětny bývala probírána osa dvou mimoběžek. „Osa“ byla pro slabší žáky postrachem, pro žáky s dobrým prospěchem kontrolou jejich vědomostí. Při řešení této úlohy je nutno totiž znát skoro všechny základní úlohy o bodu, přímce a rovině. Proto na reálkách byla tehdy osa mimoběžek také velmi často jedním z příkladů při maturitní písemné práci.

Co to vlastně ta osa dvou mimoběžek je? Je to zvláštní případ jednoho obecnějšího pojmu - příčky dvou mimoběžek. Představme si v prostoru dvě mimoběžky a , b . Na mimoběžce a zvolme bod P , na b bod Q . Pak přímka PQ se nazývá p ř í č k a dvou mimoběžek. Příčka dvou mimoběžek je tedy každá přímka, která protíná dané dvě mimoběžky. Je zřejmé, že vzhledem k libovolné volbě bodů P a Q je takových příček nekonečně mnoho. Zpravidla klademe podmínku, aby příčka procházela daným bodem, nebo aby byla rovnoběžná s danou přímkou. V těchto dvou případech je pak úloha jednoznačná. Tyto dvě základní úlohy o příčkách dvou mimoběžek nyní vyřešíme.

P ř í k l a d 1. Bodem $C(-2; 2; 1,5)$ veďte příčku c mimoběžek $a \equiv NA[N(3; 0; -1), A(-2; 5; 4)]$, $b \equiv BD[B(3; 5; 2), D(-2; 1; 3)]$.
Obr. 1.

Prostorové řešení. V závorce je uvedeno konstruktivní řešení.

1. Bodem C a mimoběžkou a je určena rovina ϱ . (Bodem C vedeme $a' \parallel a$; $(a', a) \equiv \varrho$.)

2. Určíme průsečík Y mimoběžky b s rovinou ϱ . (Přímku b proložíme rovinu $\tau \perp \nu$, ν nárysna; $\tau_2 = b_2$; $\tau \cdot a' \equiv K$; $\tau \cdot a \equiv L$; $KL \equiv q$; $q_1 \cdot b_1 \equiv Y_1$; Y_2 na b_2 . Přímka q se nazývá krycí přímka.)

3. Pak příčka $c \equiv CY$. Příčka c protíná mimoběžku a v bodě X . Kontrola přesného rýsování: $X_1X_2 \perp x_{1,2}$.

P o z n á m k a. Protože rovina $\varrho \equiv (a', a)$ protíná mimoběžku b právě v jediném bodě Y , a protože přímka CY nutně protíná mimoběžku a (ležící v ϱ) také v jediném bodě X , je úloha jednoznačná, tzn. existuje právě jediná příčka dvou mimoběžek jdoucí daným bodem C . Jestliže rovina ϱ bude ve zvláštním případě rovnoběžná s mimoběžkou b , pak ϱ neprotíná b a úloha nemá řešení.

P ř í k l a d 2. Vedte příčku ck mimoběžkám a, b rovnoběžnou s přímkou s ; $a \equiv PA$ [$P(-3; 1; 0)$, $A(2; 5; 5,5)$], $b \equiv BC$ [$B(2; 2; 2)$, $C(-3; 1,5; 5)$] $s \equiv FG$ [$F(-3; 5; 3)$, $G(2; 3; 5)$]. Obr. 2.

Prostorové a konstruktivní řešení.

1. Mimoběžkou b vedeme rovinu ϱ rovnoběžnou s přímkou s . (Na b zvolíme bod B a jím vedeme $d \parallel s$; $\varrho \equiv b \cdot d$.)

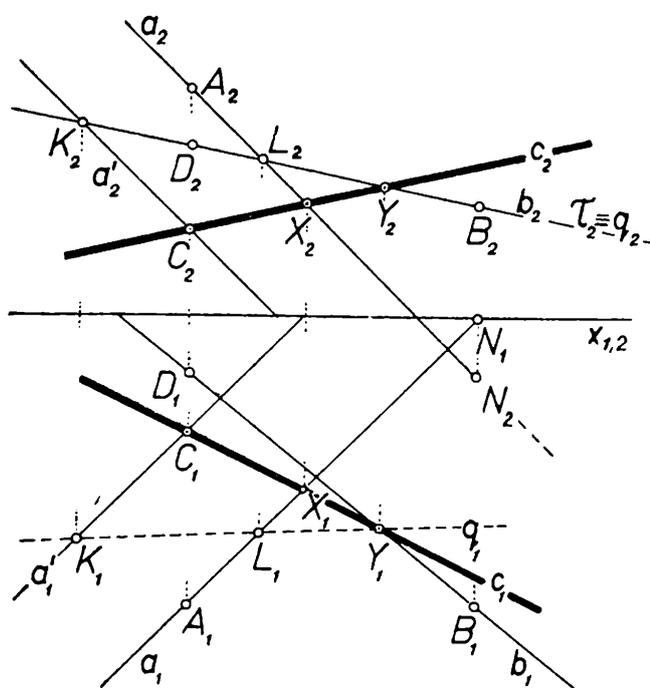
2. $X \equiv a \cdot \varrho$ (pomocí krycí přímky).

3. Přímka c vedená bodem X rovnoběžně s přímkou s je hledaná příčka c . Příčka c protne mimoběžku b v bodě Y .

Pak kontrola přesného rýsování je: $Y_1Y_2 \perp x_{1,2}$.

P o z n á m k a. Jestliže rovina ϱ protne mimoběžku a , má úloha jedno řešení. Jestliže rovina ϱ bude ve zvláštním případě rovnoběžná s mimoběžkou a , pak ϱ neprotíná a a úloha nemá řešení.

Nyní již víme, co je příčka mimoběžek. O s a m i m o b ě ž e k je zvláštní případ příčky. Jestliže je příčka kolmá k oběma mimoběžkám, nazývá se osa, nebo také nejkratší příčka dvou mimoběžek. Obsahuje totiž nejkratší úsečku mezi oběma mimoběžkami. Osa o mimoběžek a, b je také osou souměrnosti útvaru U , který se skládá ze dvou mimoběžek. Zvolíme-li totiž na a bod R , pak R souměrně sružený podle osy o leží zase na a , a tedy na útvaru U . Podobně: Zvolíme-li na b bod Q , pak Q' leží

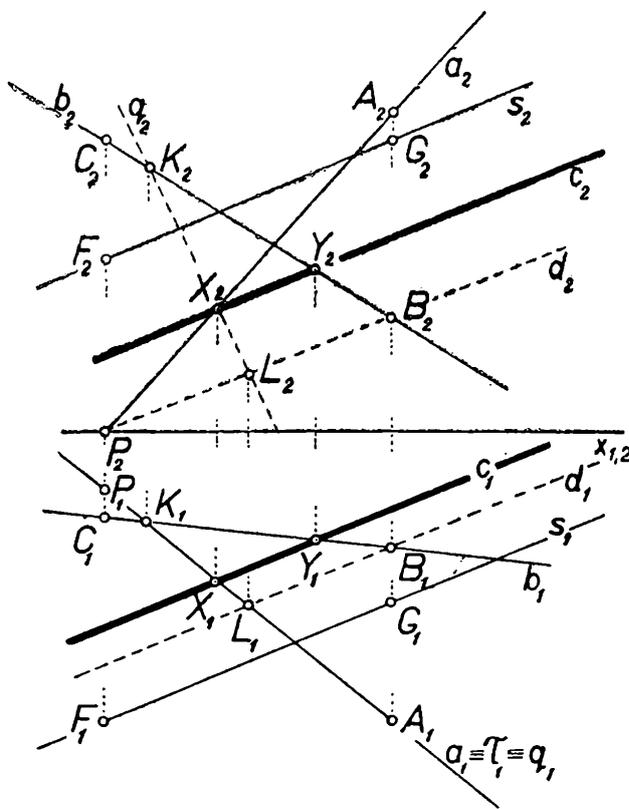


Obr. 1

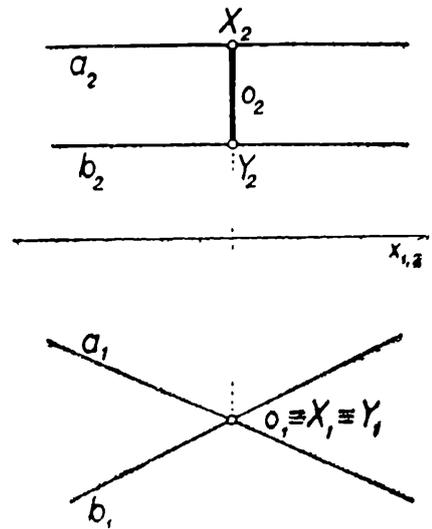
na b , tzn. na útvaru U . Z toho vyplývá, že osa o je osou souměrnosti mimoběžek a, b . Jelikož $a \perp o, b \perp o$, pak každá mimoběžka je v této osové souměrnosti samodružná.

Než přistoupíme ke konstrukci osy dvou mimoběžek v obecné poloze vzhledem k průmětnám, vyřešíme nejprve dva jednoduché příklady osy mimoběžek.

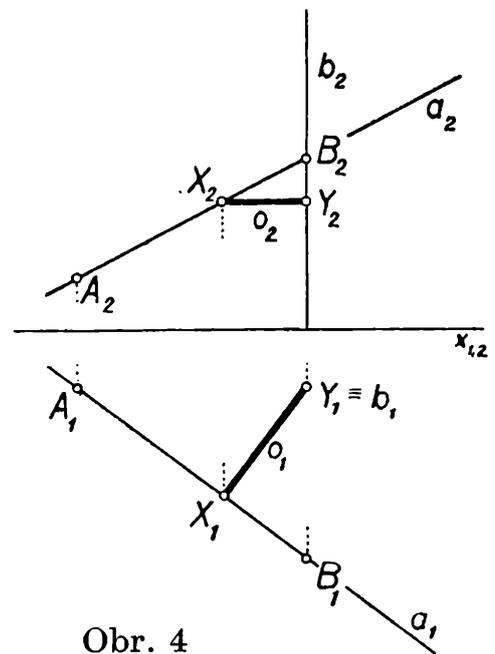
Příklad 3. Sestrojte osu dvou mimoběžek $a \parallel \pi, b \parallel \pi$. Obr. 3.
Prostorové řešení. Jelikož je $a \parallel \pi, b \parallel \pi$, pak nutně je $o \perp \pi$.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Příklad 4. Sestrojte osu dvou mimoběžek $a \equiv AB[A(-3; 1; 1), B(0; 4; 3)], b \perp \pi(0; 1; ?)$. Obr. 4.

Řešení. Jelikož $b \perp \pi$, pak nutně je osa $o \parallel \pi$.

Příklad 5. Sestrojte osu o dvou mimoběžek $a \equiv PA[P(-6; 7,5; 0), A(-2; 4; 2)], b \equiv BD[B(5; 5; 3), D(-6; 8,5; 9)]$. Obr. 5.

Z definice osy dvou mimoběžek i z příkladů 3 a 4 je vidět, že osa dvou

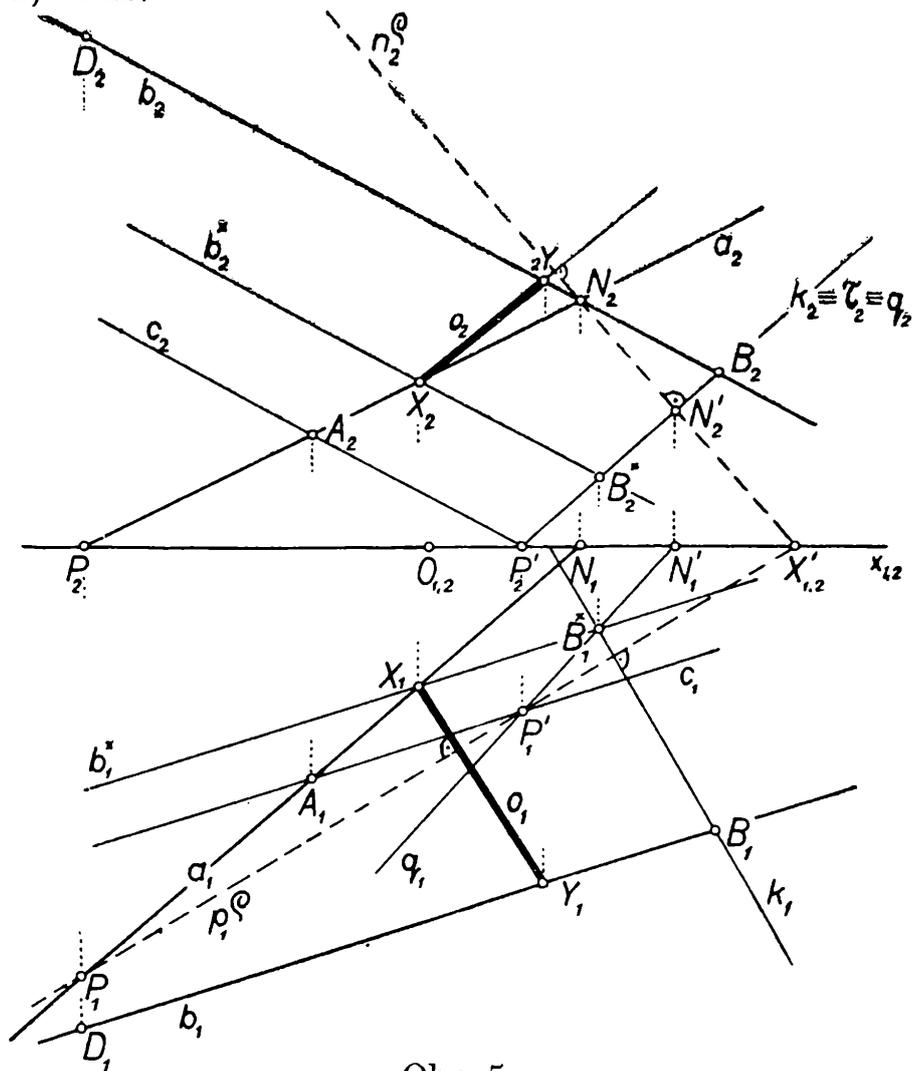
mimoběžek je kolmá ke každé rovině rovnoběžné s danými mimoběžkami. Podle toho vypadá řešení.

Prostorové a konstruktivní řešení.

1. Mimoběžkou a proložíme rovinu $\rho \parallel b$. (Bodem A na mimoběžce a vedeme $c \parallel b$; $(a \cdot c) \equiv \rho$.)

2. Mimoběžku b promítneme pravouhle do ρ a označíme b^\times . (Bodem B na b vedeme $k \perp \rho$; určíme nejdříve stopy p_1^e a n_2^e a pak $k_1 \perp p_1^e$ a $k_2 \perp n_2^e$; kolmicí k proložíme kolmo promítací rovinu τ k nárysně a určíme průsečnici $q \equiv \tau \cdot \rho$; pak $q \cdot k \equiv B^\times$; bodem B^\times vedeme $b^\times \parallel b$.)

3. $(b^\times \cdot a) \equiv X$.



Obr. 5

4. V bodě X vztyčíme kolmicí $o \perp \rho$, ($o_1 \perp p_1^e$, $o_2 \perp n_2^e$), kde o je hledaná osa.

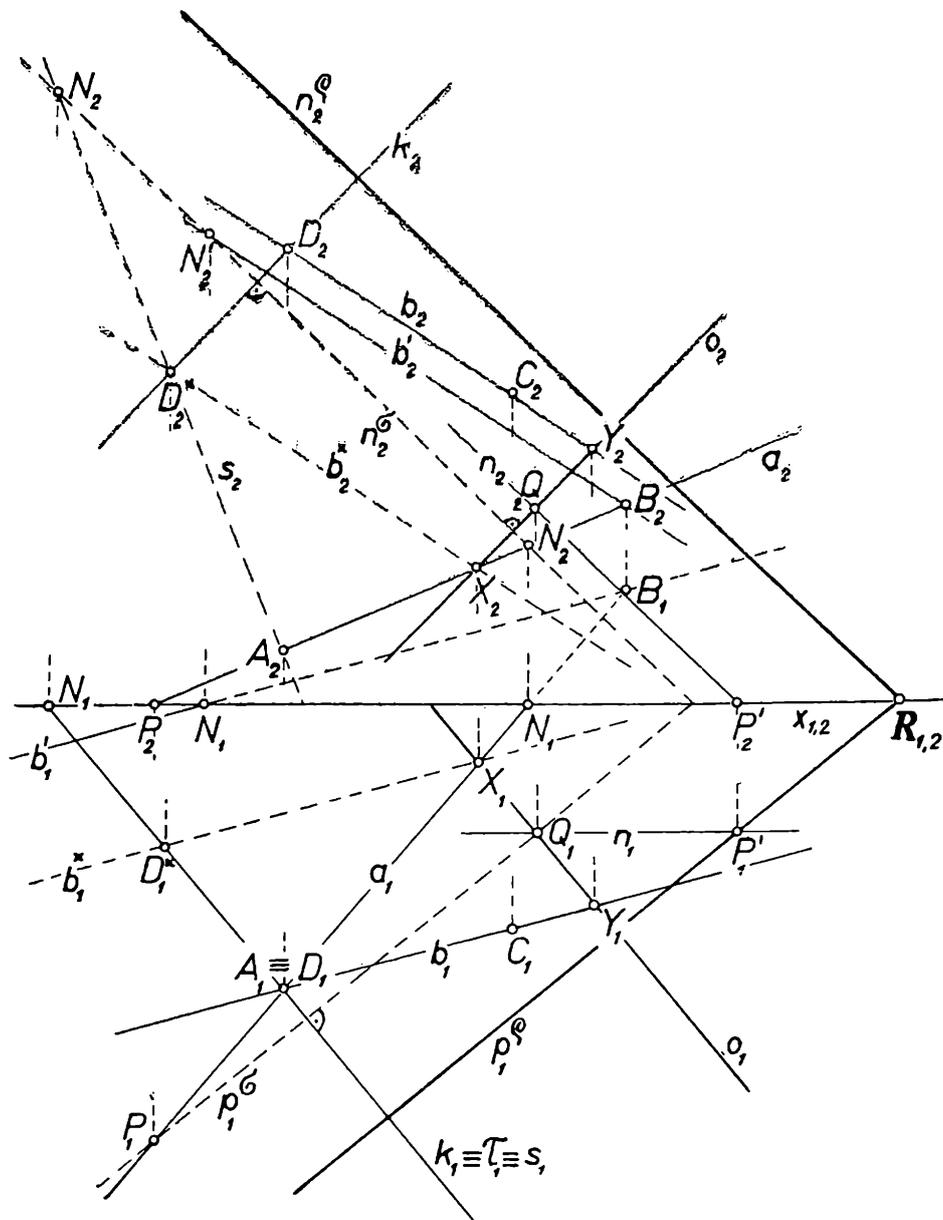
Osa o protne mimoběžku b v bodě Y . Pak kontrola přesného rýsování je $Y_1 Y_2 \perp x_{1,2}$. Úloha je vždy řešitelná a má jen jedno řešení.

Po vyřešení předcházejících příkladů procvičíme své znalosti na tomto dalším příkladě.

Příklad 6. Na ose x najděte bod R , ležící v rovině ρ , která je stejně vzdálená od dvou daných mimoběžek $a \equiv AB[A(-3; 5; 1), B(3; -2; 3,5)]$, $b \equiv CD[C(1; 4; 5,5), D(-3, 5; 8)]$. Obr. 6.

Prostorové řešení.

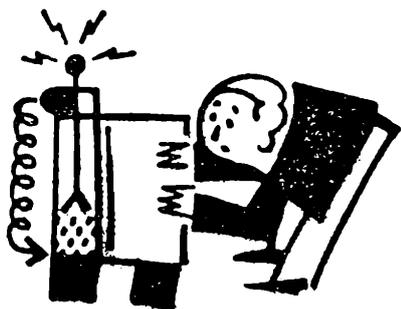
1. Sestrojíme osu o mimoběžek a, b .
2. Středem Q osy o mimoběžek a, b vedeme $o \perp o$ a její průsečík s osou x (stopní bod) je hledaný bod R .



Obr. 6

Cvičení

1. Bodem $E(-3; 2; 2)$ vedte příčku p mimoběžek $a \equiv AB[A(-3; 4; 4), B(3; -1; -2)]$, $b \equiv CD[C(-3; 5; 3), D(3; 3; 3)]$.
2. K mimoběžkám $a \equiv AB[A(-3; 1; 0), B(3; 4; 3)]$, $b \equiv CD[C(-3; 1; 3), D(3; 0; 3)]$ sestrojte příčku $p \parallel s \equiv EF[E(-3; 0; 5), F(3; 6; 1)]$.
3. Sestrojte osu mimoběžek $a \equiv PN[P(4; 6; 0), N(-2; 0; 3)]$, $b \equiv QB[Q(-3; 2; 0), B(0; 3; -3)]$. Počátek zvolte 3 cm vpravo od středu.
4. Sestrojte osu mimoběžek $a \equiv PA[P(-5; 5; 0), A(4; -5; 6)]$, $b \equiv BC[B(-5; 4; 6), C(4; 3; 2)]$. Počátek zvolte 2 cm vlevo od středu.
5. Jsou dány tři mimoběžky a, b, c , na nichž leží hrany rovnoběžnostěnu. Sestrojte jej. $a \equiv KL[K(-5,5; 3,5; 0), L(0; 4; 9)]$, $b \equiv MN[M(-1; 12,5; 9,5), N(-3; 9; 12)]$, $c \equiv PQ[P(-7; 11,5; 5,5), Q(2; 3; 0)]$.



Fyzikální podstata měřicích zařízení pro ionizační metody

(Podstata nejzákladnějších dosimetrických přístrojů, I. část.)

Dosimetrie se zabývá zjišťováním a měřením ionizačního záření (tj. záření alfa, beta, gama, paprsků Roentgenových a neutronů¹).

Zdrojem záření jsou radioaktivní látky přirozené nebo umělé. Dnes se převážně používá umělých radioisotopů. Zdrojem záření jsou také zařízení k urychlování nabitých částic, popř. jaderné reaktory. Dosimetrie provádí měření a k t i v i t y (tj. radioaktivity) radioaktivních preparátů, měření d á v k y ionizačního záření, a určuje také závislost mezi aktivitou zdroje a dávkami jeho záření. Důležitou součástí dosimetrie je f y z i k a o c h r a n y p ř e d z á ř e n í m, někdy nazývaná z d r a v o t n i c k o u f y z i k o u. Dosimetrie a ochrana před zářením je součástí tzv. r a d i o - l o g i c k é f y z i k y, zabývající se účinky záření na hmotu také ze širšího hlediska praktického využití záření v průmyslu, v biologii a zejména v lékařství.

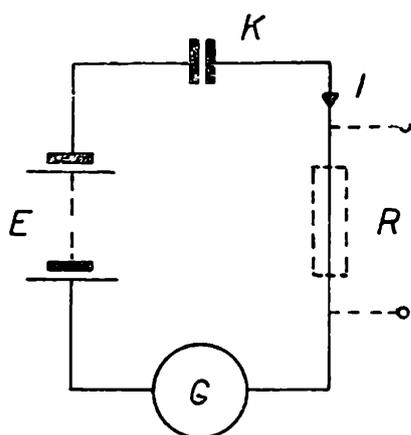
Záření a paprsky radioaktivní i paprsky Roentgenovy při průchodu hmotou ztrácejí svou energii i o n i s a c í. Jsou proto souborně nazývány z á ř e n í i o n i s a č n í. Při každé ionisaci vzniká ion záporný, tj. vytržený elektron, a ion kladný, tj. atom, z něhož byl elektron vytržen. Vytržené elektrony se snadno připojují na neutrální atomy a molekuly. V elektrickém poli se ionty záporné pohybují k anodě, kladné ke katodě, a tak vzniká i o n i s a č n í p r o u d.

Neutrony samy nemohou ionisovat a následkem toho je poměrně nesnadné je dokazovat a měřit. Důkaz neutronů je možný jen pomocí srážek s jádry atomů hmoty, kterou neutrony procházejí. Jsou to jednak

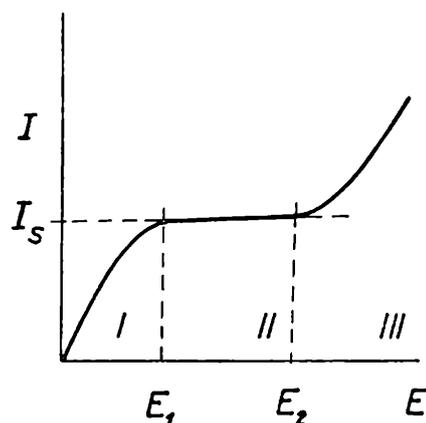
¹) Podrobné poučení o dosimetrii obsahují knihy: D o s i m e t r i e i o n i s a č n í h o z á ř e n í od K. K. A g l i n c e v a, R a d i o l o g i c k á f y s i k a od F. B ě h o u n k a, A. B o h u n a a J. K l u m p a r a, a M e t o d y p r o d e t e k c i a r e g i s t r a c i j a d e r n ě h o z á ř e n í od V. P e t ř í l k y. Dosimetrické metody používané v lékařství popisuje kniha R a d i o i s o t o p y v b i o l o g i i a l é k a ř s t v í, napsal kolektiv autorů za redakce J. P e t r o v é.

srážky pružné neboli rozptylné neutronů, kdy neutron odvádá značnou část své energie lehkému jádru, např. jádru vodíkovému. Odražené vodíkové jádro (proton) hustě ionisuje.

Neutron může být při srážce pohlcen, a tento děj nazýváme srážkou nepružnou. Následkem absorpce neutronu vznikne jaderná reakce, např. jádro boru se účinkem neutronu mění na jádro lithia a helia. Letící heliové jádro (částice alfa) silně ionisuje. K detekci neutronů, tj. k jejich zjišťování se používá obou metod: pružného rozptylu i jaderných reakcí²⁾.



Obr. 1. Schéma obvodu ionizační komory K . V obvodu je zdroj napětí E , galvanometr G a odpor R , na němž vzniká napětí úměrné ionizačnímu proudu.



Obr. 2. Závislost ionizačního proudu I na napětí E , připojeném na ionizační komoru. I_s je nasycený ionizační proud. V oblasti II . mezi napětími E_1 , E_2 dochází k saturaci proudu. Oblast I . je rekombinační, v oblasti III . se uplatňuje ionisace nárazová.

K zjišťování dávkových záření nebo dávkové intenzity tj. dávky, kterou hmota nebo tkáň dostane za jednotku času, se nejčastěji využívá účinků ionizačních. I v biologii a lékařství je dostačující ryze fyzikální určování dávek. Za biologickou jednotku dávky mohla by být vzata nějaká biologická změna, vyvolaná účinkem záření, např. úbytek bílých krvinek a četné jiné změny, avšak v praxi bylo by podobné zjišťování velmi obtížné. Proto se používá ryze fyzikálního stanovení dávky ionizačního záření, což je i stanovení energie záření, která byla pohlcena v ozářeném prostředí.

Na obr. 1 je schéma obvodu ionizační komory. Ionty uvolněné zářením ve vzduchu je možno snadno odvést elektrickým polem na elektrody a vzniklý elektrický náboj je možno změřit. Zdroj napětí E vytvoří mezi kovovými deskami K elektrické pole.

Za normálních podmínek plyny nemají volné elektrické náboje a nevedou elektřinu. Plyn se stane vodivým teprve následkem ionisace zá-

²⁾ Podrobnější poučení je např. ve stati *Přehled dosimetrických metod od Z. Spurného* (Jaderná energie 1960, str. 83), a v již uvedených spisech.

řením. Na odporu R v obvodu ionizační komory K vzniká napětí úměrné iontovému proudu I .

Na obr. 2 je voltampérová charakteristika průchodu elektřiny ionizační komorou. V obvodu I je přímá úměrnost mezi proudovou intenzitou I a potenciálovým rozdílem E . Platí zde tedy Ohmův zákon, a proto se obor I nazývá také oborem Ohmova zákona. Nazývá se také oborem *r e k o m b i n a c e*, neboť při nízkém napětí E nejsou k elektrodám odvedeny všechny vytvořené ionty; část se jich znovu spojuje na neutrální atomy neboli *r e k o m b i n u j e*. Iontový proud vzrůstá s napětím, proto oblasti I k měření nepoužíváme. Teprve při určitém napětí E_1 na elektrodách komory nedochází již k rekombinaci a všechny vytvořené ionty jsou odváděny k elektrodám. Obvodem prochází *n a s y c e n ý p r o u d*, který se již se vzrůstajícím napětím nemění a je *p ř í m o ú m ě r n ý* pouze intenzitě ionizačního záření. Oblast II mezi napětími E_1, E_2 je *s a t u r a č n í o b l a s t í*, neboť zde dochází k nasycení ionizačního proudu. V této oblasti pracují ionizační komory.

Při zvyšování napětí nad hodnotu E_2 se zvětšuje kinetická energie uvolněných elektronů, takže mohou samy při nárazu na neutrální atomy vytvářet ionty. Oblast III je oblast *n á r a z o v é i o n i s a c e*, kde počet vytvořených iontů lavinovitě vzrůstá; dochází k *p l y n o v é m u z e s í l e n í*.

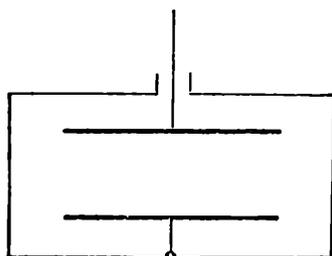
Každé zařízení k měření ionizačního záření se v podstatě skládá ze dvou částí. Je to především *č i d l o z á ř e n í*, které účinky záření převádí na elektrický náboj nebo na elektrický proud - např. *i o n i s a č n í k o m o r a* nebo *G e i g e r ů v - M ů l l e r ů v p o č í t a č* - a dále *e l e k t r i c k é m ě ř í c í z a ř í z e n í*, které dodaný elektrický signál vhodně zpracuje a indikuje.

Mezi nejstarší detektory záření patří *i o n i s a č n í k o m o r y*. Ionizační prostor s elektrodami bývá uzavřen v krytu vhodného tvaru, aby bylo možno definovat objem vzduchu, v němž dochází k ionisaci, a při měření se neuplatňovaly rušivé vlivy z okolí. Je mnoho různých konstrukcí ionizačních komor, kterých se využívá v jaderné fyzice, ale i při ozařování rentgenem a při terapeutickém (léčebném) využití radioisotopů. Ionizačních komor se užívá také jako součásti *d o s i m e t r ů*³⁾, tj. přístrojů na zjišťování a měření záření, *o c h r a n n ý c h d o s i m e t r ů* a *v ý s t r a ž n ý c h p ř í s t r o j ů* (*m o n i t o r ů*) k účelům ochrany pracovníků se zářením a radioaktivními látkami. Mají tedy velký význam pro *d o s i m e t r i c k o u k o n t r o l u n a p r a c o v i š t í c h*, pro bezpečnost práce v radiologii.

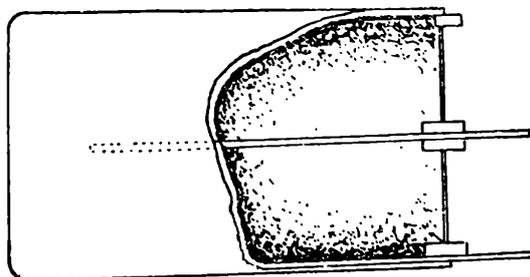
Měřicí zařízení se připojuje na *s b ě r n o u e l e k t r o d u* ionizační komory. Jedna elektroda je obvykle tvořena pláštěm komory a je udržována na zemním potenciálu. Při jiných zapojeních je na konstatním

³⁾ Dosis - dávka, v tomto případě dávka záření.

vyšším potenciálu. Ionizační proudy, odváděné sběrnou elektrodou, jsou velmi malé, 10^{-10} až 10^{-15} A. Sběrná elektroda musí být proto upevněna v dobrém izolátoru. Užívá se jantaru, síry a v současné době umělých polymerů, kterými je možno janta nahrazovat.



Obr. 3. Schéma ionizační komory k měření záření alfa.



Obr. 4. Ionizační komora k měření malých množství záření gama a beta.

Na obr. 3, 4 a 5 jsou schémata různých typů ionizačních komor. Komory k měření korpuskulárního záření, které se pohlcuje ve velmi tenkých vrstvách pevných látek - např. záření alfa - jsou sestaveny tak, aby bylo možno zdroj záření vkládat dovnitř. Na obr. 3 je schéma komory k měření záření alfa, v podstatě deskového kondensátoru v kovovém obalu. Komora má snímatelné víko a radioaktivní preparát se klade na jednu elektrodu. Rozměry komory se volí tak, aby se využilo všech iontů vytvořených zářením, tj. celého dosahu paprsků alfa ve vzduchu, který nebývá větší než asi 9 cm.

Inž. Zdeněk Kos, ŘVR, Praha

Povodně

(Dokončení)

Dále zjednodušeně předpokládáme, že povodňový průtok, který nastane po protržení hráze, ubývá úměrně s dobou od svého maxima Q_{\max} až k nule, čili grafické znázornění časového průběhu povodňové vlny v místě přehrady je dáno trojúhelníkem (obr. 2a). Obsah tohoto trojúhelníka vyjadřuje objem povodňové vlny, o němž předpokládáme, že je roven objemu nádrže V

$$V = \frac{1}{2} Q_{\max} \cdot t \quad [m^3 = m^3 \cdot s^{-1} \cdot s] \quad (2)$$

Z této rovnice vyplývá doba prázdnění nádrže t

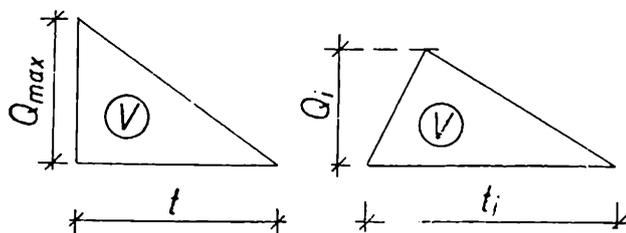
$$t = \frac{2V}{Q_{\max}} \quad (3)$$

Směrem po toku se povodňová vlna zplošťuje, zmenšuje se její největší průtok a zvětšuje se doba jejího trvání. Pro zjednodušení opět předpokládáme, že průtok lineárně stoupá až ke své největší hodnotě Q_i a pak opět lineárně klesá. Doba trvání povodně v profilu i je t_i . Časový průběh povodně je opět dán trojúhelníkem, jehož základna je v časové ose a výšku tvoří Q_i (obr. 2b). Dále předpokládáme, že objem povodňové vlny zůstane zachován

$$V = \frac{1}{2} Q_i t_i \quad (4)$$

Pak bude maximální průtok v profilu i

$$Q_i = \frac{2 V}{t_i} \quad (5)$$



Obr. 2. Průběh povodňové vlny po protržení hráze.

Doba trvání průchodu povodňové vlny se zvětšila v profilu i vzdáleném L od přehrady z doby t na t_i a tento rozdíl $t_i - t = \Delta t$ je úměrný vzdálenosti L

$$\Delta t = bL, \quad (6)$$

kde b je koeficient úměrnosti. V profilu i je tedy

$$t_i = t + \Delta t = t + bL \quad (7)$$

a dosazením z rovnice (3) plyne:

$$t_i = \frac{2 V}{Q_{max}} + bL \quad (8)$$

Hledaný průtok Q_i pak dostaneme, když dosadíme z rovnice (8) do (5), zavedeme nový koeficient $a = \frac{b}{2}$ a upravíme

$$Q_i = \frac{V Q_{max}}{V + a L Q_{max}} \quad (9)$$

Koeficient a je uveden pro různé toky v tabulce 3.

Tabulka 3.

Druh toku	spád ‰	koeficient a
Malý nížinný tok	0,1 — 0,5	1,50
Střední nížinný tok	0,05 — 0,1	1,25
Malý tok v rovině	0,5 — 5	1,00
Střední tok v rovině	0,1 — 0,5	0,80
Malý tok v kopcovitém území	5 — 50	0,65
Střední tok v kopcovitém území	0,5 — 5	0,50
Malé horské bystřiny	20 — 500	0,40
Střední horské bystřiny	5 — 50	0,35

Užití těchto rovnic a tabulky si ověříme na konkrétním případě katastrofy přehrady Malpasset. V rovnici (1) je poměrně obtížné stanovit správně koeficient K . Pro přehradu Malpasset můžeme však počítat maximální průtok přesněji, protože známe přibližně otvor, kterým se povodňová vlna vyvalila. Podle zpráv odborného tisku má přibližně tvar trojúhelníka rovnoramenného, směrem dolů se zužujícího, o základně v koruně hráze šířky asi 160 m a výšce $H = 45$ m (obr. 1). Můžeme tudíž vypočítat maximální průtok jako přepad plným profilem tohoto trojúhelníka. Přibližný vzorec je tento

$$Q_{\max} \doteq 0,7 b H^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

kde $b = 160$ m je šířka otvoru v koruně hráze. Když přepočteme vzorec (10) pro šířku údolí v místě přehrady $B = 180$ m, dostáváme rovnici

$$Q_{\max} \doteq 0,62 B H^{\frac{3}{2}} \quad (10')$$

Rovnice (10') má stejný tvar jako rovnice Lištvanova (2) a odpovídá jí pro $K = 0,62$. Z této rovnice jsme vlastně určili koeficient K přesněji než pouze odhadem v mezích 0,5 až 0,9. Dosazením hodnot do rovnice (10) vychází

$$Q_{\max} \doteq 0,7 \cdot 160 \cdot 45^{\frac{3}{2}} = 33\,900 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (10'')$$

Doba prázdnění nádrže se určí z rovnic (3), (10'') a objemu nádrže $V \doteq 51\,000\,000 \text{ m}^3$

$$t = \frac{2V}{Q_{\max}} = \frac{2 \cdot 51\,000\,000}{33\,900} \doteq 3000 \text{ s} = 50 \text{ min.}$$

V městečku Fréjus, které je vzdáleno $L = 10\,000$ m od přehrady, je možno spočítat maximální průtok podle rovnice (9)

$$Q_i = \frac{V \cdot Q_{\max}}{V + a \cdot L \cdot Q_{\max}} = \frac{51\,000\,000 \cdot 33\,900}{51\,000\,000 + 0,5 \cdot 10\,000 \cdot 33\,900} = 7860 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tento průtok zhruba šestkrát převyšuje největší přirozenou povodeň, která se kdy v městečku Fréjus vyskytla. Dobu trvání povodně určíme z rovnice, kterou dostaneme úpravou (6)

$$t_i = \frac{2V}{Q_i} = \frac{2 \cdot 51\,000\,000}{7860} \doteq 12\,900 \text{ s} \doteq 3 \text{ hod } 35 \text{ min.}$$

Tyto vzorce byly sice značně přibližné a byly odvozeny za zjednodušujících předpokladů. Tento postup je však v inženýrské praxi běžný, zejména při navrhování staveb, kdy se nám jedná nejdříve o hrubou představu o průběhu nějakého jevu. Teprve když navrhujeme stavbu, posoudíme ji přesnějším, avšak složitějším způsobem.

Inž. dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Nová měrová soustava

(Pokračování)

Nyní si uvedme několik příkladů na j e d n o t k y h l a v n í, d í l č í a n á s o b n é. U délky je hlavní jednotkou metr (m), dílčí jednotkou milimetr (mm), mikrometr (μm), ve zvláštních případech můžeme užít i decimetru (dm) a centimetru (cm). Násobnou jednotkou je kilometr (km), málo používaný megametr (Mm) aj. Hlavní jednotkou rychlosti je metr za sekundu ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), dílčími jednotkami mohou být milimetr za sekundu ($\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$), případně centimetr za sekundu ($\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$), ale také metr za minutu ($\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$), metr za hodinu ($\text{m} \cdot \text{h}^{-1}$) a dokonce i kilometr za hodinu ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$), jak se snadno přesvědčíme rovnicí

$$1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = (1000 \text{ m}) \cdot (3\,600 \text{ s})^{-1} = 1000 \cdot 3600^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{1}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

tedy $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} < 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Násobnými jednotkami rychlosti je kilometr za minutu ($\text{km} \cdot \text{min}^{-1}$), kilometr za sekundu ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$), případně jiné další jednotky.

Hlavní jednotka z á k l a d n í c h v e l i č i n - j i c h ž j e š e s t - j e s o u č a s n ě j e d n o t k o u z á k l a d n í. Základních jednotek je stejný počet jako základních veličin, tedy šest. Jsou to m e t r, k i l o g r a m, s e k u n d a, a m p é r, t e p l o t n í s t u p e ň a k a n d e l a. Jak bylo již v příkladu uvedeno, mají i základní veličiny svoje jednotky dílčí a násobné. Hlavní jednotky odvozených veličin obsahují v různých mocninách buď základní jednotky nebo jednotky odvozených veličin, pokud mají svůj zvláštní název a značku. Píšeme-li jednotky odvozených veličin pouze pomocí součinu příslušných mocnic základních jednotek, mají (u složitějších veličin) někdy spíše význam f y z i k á l n í h o r o z m ě r u a nevystihují často s náležitou s r o z u m i t e l n o s t í fyzikální závislost.

Patrné to je u měrného tepla (c), v jehož jednotce, kdybychom ji psali pouze jako součin jednotek základních, nebyla by patrna energie, kterou musíme dodat k ohřátí jednotkové hmotnosti nějaké látky o 1 stupeň. Podobné by to bylo i u řady jednotek veličin jiných.

Příklad. Hlavní jednotka z r y c h l e n í (a) = $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (slovy metr za sekundu na druhou, nebo správněji metr krát sekunda na minus druhou),

hlavní jednotka v ý k o n u (P) = $1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$;

hlavní jednotka d y n a m i c k é v i s k o s i t y (η) = $1 \text{ newtonsekunda na metr čtverečný} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$;

hlavní jednotka m ě r n ě h o t e p l a (c) = $1 \text{ joule na kilogram a stupeň teplotní} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{deg}^{-1}$;

hlavní jednotka k a p a c i t y (C) = $1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$;

hlavní jednotka m a g n e t i c k é h o m o m e n t u (m) = $1 \text{ weber-metr} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{m} = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$

Tvorba složených názvů je v nauce o elektřině a magnetismu, někdy i v jiných fyzikálních oborech, dosti častá: např. ampérsekunda, voltsekunda, voltampér, ohmmetr, aj.

Tvoření dílčích a násobných složených jednotek je již poněkud složitější v těch případech, kdy se v nich objevují jednotky veličin, jež mají svůj zvláštní název. Podobně mohou nastat případy, při nichž klademe na složenou jednotku požadavek názornosti, jež je někdy na závadu měrové jednotnosti, podle které bychom se měli snažit vystačit s co nejmenším počtem jednotek. Nežli si uvedeme opět několik příkladů, probereme si v krátkosti zásady odvozování dílčích a násobných jednotek z jednotek hlavních. Abychom nerozmnožovali příliš počet odvozovaných jednotek, byla dohodnuta zásada, že dílčí jednotky se mají tvořit z jednotky hlavní dělením tisícem, milionem atd; tedy vlastně násobením číslem 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} atd., zřejmě odstupňovaným vždy po třech rádech. Podobně jednotky násobné se mají vytvářet násobením hlavní jednotky tisícem, milionem atd., tedy čísly 10^3 , 10^6 , 10^9 atd., stejně odstupňovanými opět po třech rádech. Pro vytváření odvozených jednotek byly dohodnuty také pro každý násobek určitá předpona a značka, jež se obě přidávají před název a značku výchozí jednotky hlavní. Tab. 1.

V takových případech, kdy se jeví užitečným v okolí hlavní jednotky ještě vytvářet (v rozmezí 10^3 a 10^{-3} jejího násobku) další dílčí a násobné jednotky, lze použít předpon a značek uvedených na tabulce 2.

Používání takto tvořených jednotek se máme - pokud je to možné - vyvarovat a zvykat si používat násobků 10^3 , 10^{-3} atd. Je sice pravda, že např. v délce jsme velmi zvyklí používat centimetru, zvláště v běžném životě. Nečinilo by však potíže, kdybychom si zvykli udávat hodnoty v milimetrech místo v centimetrech, nebo naopak v metrech, jde-li o hodnotu větší. V technické praxi, zvláště strojní, se používání milimetrů stalo zcela všeobecným. Horší je to se stavební technikou, kde je používání centimetrů ještě příliš vžito.

Tabulka 1

Jednotka	předpona	značka	představuje násobek hlavní jednotky	Příklad jednotky	
				název	značka
násobná	tera-	T-	10^{12}	teraohm	TΩ
”	giga-	G-	10^9	gigajoule	GJ
”	mega-	M-	10^6	megawatt	MW
”	kilo-	k-	10^3	kilowatt	kW
hlavní	—	—	1	watt	W
dílčí	mili-	m-	10^{-3}	milivolt	mV
”	mikro-	μ-	10^{-6}	mikroampér	μA
”	nano-	n-	10^{-9}	nanometr	nm
”	piko-	p-	10^{-12}	pikofarad	pF
”	femto-	f-	10^{-15}	femtogram	fg
”	atto-	a-	10^{-18}	attocoulomb	aC
					aj.

Tabulka 2

Jednotka	předpona	značka	představuje násobek hlavní jednotky	Příklad jednotky	
				značka	název
násobná	hekto—	h-	10^2	hektolitr	h
”	deka-	da-	10	dekalumen	dalm
hlavní	—	—	1	metr	m
dílčí	deci—	d-	10^{-1}	decimetr	dm
”	centi—	c-	10^{-2}	centimetr	cm
					aj.

P ř í k l a d. Některé příklady jednotek dílčích a násobných, odvozovaných předepsaným postupem, byly již připojeny k přehledným tabulkám. Je však nutno si uvést příklad jedné veličiny, u níž jsou tyto stupínky „posunuty“. Je to jednotka hmotnosti: kilogram (kg). Jako hlavní a zejména jako základní jednotka neměla by mít název tvořený předponou, jako je tomu u jiných jednotek. Protože však byla jednotka hmotnosti gram původně jednotkou výchozí a z ní byl vytvořen kilogram, ponechal se jí tento název, přestože je tím systém tvorby nepatrně porušen, neboť tento název jedné z nejobecnějších veličin je příliš rozšířen a vžit.

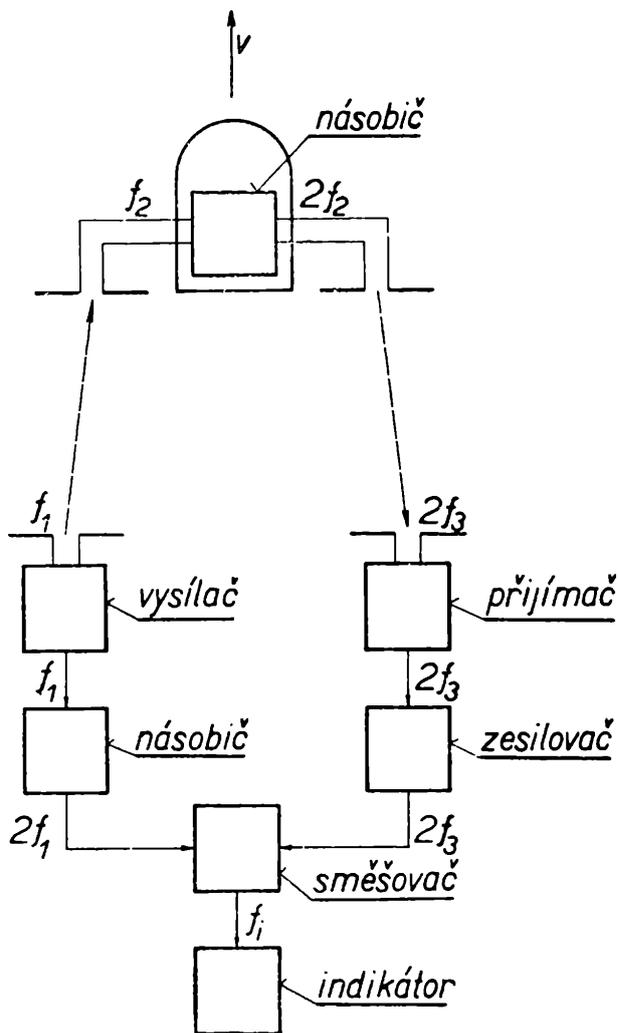
(Pokračování)

Jan Štefan, studující, Brno:

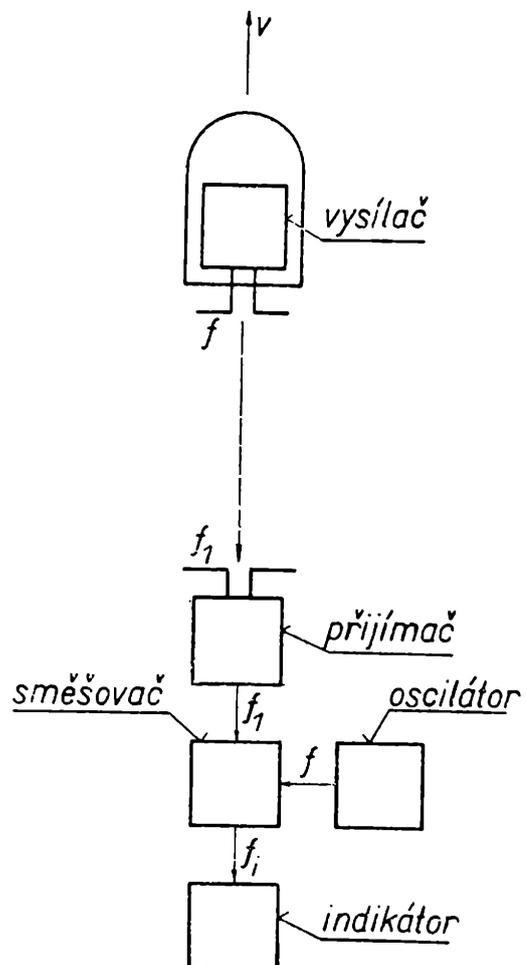
Dopplerův jev v raketové technice

(Dokončení)

Nevýhoda tohoto systému je v tom, že nerozlišuje, na jakém tělese se elektromagnetické vlny odrážejí. Vylučuje sice nepohyblivé cíle (při rychlosti $v = 0$ je $f_i = 0$), ale za přítomnosti dvou pohybujících se cílů ve vyzařovacím úhlu antény je měření podle jejich povahy buď značně ztíženo nebo úplně znemožněno.



Obr. 3



Obr. 4

Další nevýhodou je okolnost, že intenzita elektromagnetického pole klesá se čtvercem vzdálenosti. Než dorazí signál k raketě, značně se zeslabí. Při odrazu od rakety či selektivního prvku na raketě, tyto se stanou novými zářiči energie. Ta dospěje k přijímači, řídící se stejným zákonem poklesu intenzity. Dopadající energie se vlivem ztrát celá ne-

odrazí a tak nakonec k přijímači dospěje jen velmi malá část vyslaného výkonu. Na Zemi je nejen nutno používat výkonné vysílače, ale i velmi citlivé přijímače. Malá úroveň signálu umožňuje rušení šumen. Na raketě nemůže být zesilovač, který by přijaté signály zesiloval a nazpět vysílal k Zemi, neboť silnou vazbou mezi vstupem a výstupem by se zesilovač rozkmital. Tyto nevýhody jsou odstraněny v druhém systému.

2. *systém*. Jeho schéma je na obr. 3. Vyslaný signál je na raketě zesílen, zdvojnásoben a vyslán k Zemi. Protože příjem a vysílání se děje na různých kmitočtech, je možné už použít zesilovače, neboť vazba mezi vstupem a výstupem se snižuje na minimum. Ve směšovači vzniklý *i n t e r f e r e n ě n í k m i t o ě t* je rovněž přímo úměrný rychlosti a je

$$f_i = \frac{4v}{c} f_1, \quad (11)$$

kde f je původní vyslaná, nenásobená frekvence. Výhoda získaná tímto řešením je zřejmá. Signál může přijmout, znásobit a vyslat zpět jediné vhodně vybavená raketa. Ostatní objekty, nacházející se ve vyzařovacím úhlu pozemní antény, nemohou rušit svým odrazem.

3. *systém* (obr. 4). U tohoto systému probíhá rádiové spojení jen ve směru raketa—Země. Na raketě je umístěn vysílač řízený stabilním oscilátorem. Na Zemi je přijímaný signál směšován se signálem místního, rovněž velmi stabilního oscilátoru. Za předpokladu, že oba oscilátory mají úplně stejný kmitočet, platí obdobný vztah

$$f_i = \frac{v}{c} f, \quad (12)$$

když jsme opět ve jmenovateli zanedbali v proti c . Jestliže mají oscilátory různé kmitočty, musíme jejich rozdíl od interferenčního kmitočtu odečíst. Přesnost měření rychlosti tímto systémem je závislá na stabilitě obou oscilátorů. Proto si stability povšimneme blíže.

Stabilita oscilátorů

Nestabilita oscilátoru se projevuje odchylkami a náhodnými změnami kmitočtu, které jsou způsobovány:

a) *Mechanickými vlivy*. Na raketě je to přetížení a vibrace působící po dobu chodu motorů. Způsobují krátkodobé i trvalé změny rozměrů rezonančních obvodů, mění se vzdálenost mezi elektrodami elektronek i mezi vodiči, takže může dojít i k uvolnění nevhodně připevněných součástek. Tyto vlivy se dají zmenšit speciálními konstrukcemi elektronek (tzv. keramické „raketové“ elektronky), vpalováním závitů cívek na keramické kostry. Celková stabilita konstrukce se zajišťuje plošnými spoji a zaléváním přístrojů do umělých pryskyřic, které pak tvoří kompaktní celky.

b) *Změnami teploty.* Ta hraje velkou úlohu hlavně u polovodičových součástek, které mají velký teplotní součinitel. Se změnami teploty se mění vzdálenosti mezi elektrodami elektronek, a tím nastávají změny jejich vzájemných kapacit. Mění se permitivita dielektrik a tedy kapacita kondenzátorů. Změny indukčností cívek nastávají při změně jejich rozměrů vlivem dilatace materiálu.

Tyto změny se dají do jisté míry vykompenzovat kombinací součástek s kladnými a zápornými součiniteli, ale nedají se úplně odstranit. Proto je nutné i tyto přístroje udržovat na konstantní teplotě.

c) *Změny způsobené stárnutím* součástek, které se vylučují jejich umělym stárnutím. Při krátkodobých letech, trvajících několik minut, tyto změny nepadají v úvahu. Změny způsobené kolísáním napájecích napětí se vylučují různými druhy stabilizátorů.

Je nutné se ještě zmínit o časové stabilitě oscilátorů. Po zapnutí oscilátoru se začnou jednotlivé součástky průtokem proudu zahřívát. Se změnou teploty se mění parametry obvodu a tím i oscilační kmitočet. Po nějaké době se teplota ustálí a na oscilátor pak budou působit jen vlivy výše uvedené.

Největší stability dosahují oscilátory řízené piezoelektrickými výbrusy krystalů křemene. Tyto se chovají jako stabilní, velmi kvalitní rezonátory, jejichž rezonanční kmitočet závisí jen na tloušťce výbrusu a tedy též na teplotě, s kterou se tato tloušťka mění.

Přesnost měření

U 1. a 2. systému nehrají ani větší změny kmitočtu roli, neboť každá změna je při směřování vykompenzována. U těchto systémů stačí k přesnému měření zajistit, aby časová změna kmitočtu nebyla příliš velká. Jestliže se totiž raketa při měření nachází ve vzdálenosti s od pozemní stanice, pak doba, která uplyne od vyslání do příjmu je

$$t = \frac{2s}{c} \quad (13)$$

Za tuto dobu se změní vysílaný kmitočet o

$$f_t = \Phi t = \Phi \frac{2s}{c}, \quad (14)$$

kde Φ je rychlost změny frekvence. Skutečný interferenční kmitočet, který naměříme, je

$$f'_i = f_i \pm f_t = f_i \pm \frac{2\Phi s}{c}. \quad (15)$$

Měření je zatíženo chybou, která je tím větší, čím je vzdálenost větší a čím je rychlost změny frekvence vyšší.

U 3. systému je chyba měření způsobena jen odchylkou frekvencí obou oscilátorů, a proto se na jejich stabilitu kladou největší požadavky.

Řešil Jiří Durdil, III. r., SVVŠ Praha 8:

Při postupu metodou matematické indukce činíme dva kroky:

Ověření platnosti. Bernoulliho nerovnost platí zřejmě pro $n = 2$, neboť pro $a \neq 0$ je $a^2 > 0$; proto $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$.

Nyní činíme tento závěr z n na $n + 1$:

Jestliže pro určité celé $n > 1$ za učiněných předpokladů $a > -1$, $a \neq 0$ platí $(1 + a)^n > 1 + na$, o čemž jsme se pro $n = 2$ skutečně přesvědčili, platí za týchž předpokladů také $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a$.

Důkaz. Nechť tedy jest

$$(1 + a)^n > 1 + na. \quad (1)$$

Jestliže obě strany této nerovnosti znásobíme kladným číslem $1 + a$, dostaneme $(1 + a)^n (1 + a) > (1 + na) (1 + a)$ neboli $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a + na^2$. Avšak pro $a \neq 0$ je $a^2 > 0$; při $n > 1$ je rovněž $na^2 > 0$. Je tedy $1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a$ a proto také

$$(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a, \quad (2)$$

jak jsme očekávali.

Shrnutí. Ukázali jsme, že nerovnost (1) platí pro $n = 2$. Podle (2) platí proto také pro $n = 3$. Jestliže (1) platí pro $n = 3$, platí podle (2) také pro $n = 4$ atd. Bernoulliho nerovnost (1) platí tedy za učiněných předpokladů obecně.

7. Průměrná výška kosmické lodi „Vostok“ byla $h = \text{km}$. Předpokládáme-li, že oko rozliší ještě dva body od sebe, je-li zorný úhel aspoň $\alpha = 2'$, určete, jak dlouhé předměty mohl major Gagarin na povrchu Země pozorovat: 1. pouhým okem, 2. kdyby byl měl dalekohled s 500násobným zvětšením.

Evžen Říman

(Došlo 20 řešení.)

Řešil Ivan Netuka, III. B, SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové:

1. Nejmenším předmětem, který lze pozorovat, nechť je úsečka AB . Budiž V místo pozorovatelovo, pak $\triangle ABV$ je rovnoramenný a má základnu AB , výšku h a úhel při vrcholu $\alpha = 2'$. Z tohoto trojúhelníka plyne, užijeme-li známého přibližného vztahu platného pro malé úhly, ihned

$$AB = 2h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \doteq 2h \operatorname{arc} \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 2,54 \cdot 10^5 \text{ [m]} \cdot \operatorname{arc} 1' \doteq 147,5 \text{ m.}$$

2. Nechť je CD nejmenší úsečka viděná dalekohledem a V místo pozorovatelovo. Úhel CVD , tj. úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníka

$$CVD \text{ je } \beta = \frac{2'}{500} = 0,004'. \text{ Platí opět}$$

$$CD = 2h \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 2h \operatorname{arc} \frac{\beta}{2} = 2h \operatorname{arc} 0,12'' = 5,08 \cdot 10^5 \text{ [m]} \cdot 5,76 \cdot 10^{-7} \doteq \doteq 0,2926 \text{ [m]} \doteq 30 \text{ cm.}$$

Za ideálních podmínek mohl major Gagarin vidět pouhým okem předměty větší než 147,5 m, dalekohledem předměty větší než 30 cm.

P o z n á m k a: Jelikož pro malé úhly roste \arcsin lineárně, mohli jsme počítat $CD = \frac{1}{500} AB$.

Deskriptivní geometrie:

1. Jsou dány různoběžky roviny α , β , v rovině α je dán bod A neležící na průsečnici daných dvou rovin a úsečka délky a . Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož strana má délku a , tak, aby strana AB ležela v rovině α a strana CD v rovině β . Prostorové řešení proveďte obecně, graficky rozřešte úlohu pro případ, že rovina α je půdorysna, rovina β je nárysna, $A(0; 6; 0)$, $a = 4,5$.

Stanislav Horák

(Došlo 14 řešení.)

Řešení autorovo:

Strana AB prodloužená za bod B a strana CD prodloužená za bod C se protnou v bodě M . Trojúhelník AMD je rovnostranný trojúhelník; délka jeho strany je $2a$. Přitom přímka AB je průsečnice roviny ρ , v níž leží hledaný šestiúhelník, s rovinou α a přímka CD je průsečnice roviny ρ s rovinou β . Bod M leží tudíž na průsečnici rovin α , β . Sestrojíme jej snadno, neboť $AM = 2a$.

Zbývá sestrojit bod D . Poněvadž $MD = 2a$, leží bod D v rovině β na kružnici $k \equiv (M; 2a)$. Poněvadž $AD = 2a$, leží bod D také na kulové ploše $\kappa \equiv (A; 2a)$. Tato kulová plocha je rovinou β prořata v kružnici m . Bod D je tedy společný bod kružnic k , m . Body AMD určují již rovinu ρ , v níž sestrojíme žádaný šestiúhelník.

Úloha má nejvýše čtyři různá řešení. Tento počet se může snížit na dvě. Úloha však nemusí mít žádné řešení.

2. Body A , B , C tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka a leží na hlavní kružnici kulové plochy, jejíž poloměr r je dán. Sestrojte průměty této kulové plochy, je-li dán bod A , nárys bodu B a souřadnice x_c bodu C .

Stanislav Horák

(Došlo 11 řešení.)

Řešení autorovo:

Poloměr r kulové plochy je zároveň poloměrem hlavní kružnice, která je opsána rovnostrannému trojúhelníku ABC . Proto

$$AB = AC = BC = r\sqrt{3}.$$

Bod B leží tudíž na kulové ploše κ opsané kolem A poloměrem $r\sqrt{3}$. Průměty této pomocné kulové plochy můžeme sestrojit a můžeme pak sestrojit i půdorys B_1 bodu B . Bod C leží podobně na ploše κ a na kulové ploše κ' opsané kolem B poloměrem $r\sqrt{3}$. Plochy κ , κ' se protínají v kružnici k , na níž je bod C . Kromě toho bod C leží i v rovině ρ kolmé k základnici a mající od počátku vzdálenost x_c . Tato rovina protne kružnici k v bodě C . Střed kružnice opsané trojúhelníku ABC je již středem hledané kulové plochy.

Bod B_1 dostaneme jen v případě, že $A_2B_2 \leq r\sqrt{3}$. Platí-li rovnost, existuje právě jeden bod B_1 , platí-li nerovnost, existují dva různé body B_1, B'_1 a tudíž dva různé body B, B' . Podmínky existence bodu C jsou mnohem složitější a proto se spokojíme tímto: Bod C existuje jenom tehdy, když rovina ρ má s kružnicí k společný aspoň jeden bod. Nejvýše může mít společné dva různé body. Podle toho vidíme, že úloha má nejvýše čtyři různá řešení. Tento počet se může zredukovat na dvě nebo na jediné řešení.

3. Jsou dány dvě rovnoběžné roviny ρ, σ a úsečka AB , jejíž krajní bod A leží v rovině ρ a bod B v rovině σ . Úsečka AB není kolmá k daným rovinám. Sestrojte rotační komolý kužel, jemuž lze vepsat kulovou plochu a jenž má jednu podstavu v rovině ρ a druhou v rovině σ , přičemž body A, B leží na obvodech podstav a úsečka AB protíná střednou kužele v jeho vnitřním bodě.

Karel Příkrý

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Vladimír Kos, 3 b., SVVŠ, Nová Paka:

Přímkou AB proložíme rovinu τ kolmou k rovinám ρ a σ . Označme $r \equiv \rho \cap \tau, s \equiv \sigma \cap \tau$. Hledaný komolý kužel je rovinou τ prořat v osovém řezu, jímž je rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ tak, že AC leží na r, BD na s . Půjde o sestavení tohoto lichoběžníka.

Lichoběžníku $ACBD$ lze vepsat kružnici k , jež je řezem kulové plochy vepsané komolému kuželi s rovinou τ . Kružnice se dotýká základů AC, BD lichoběžníka pořadě v bodech K, L a ramen CB, AD v bodech M, N . I platí

$$AK = AN, \quad DL = DN.$$

Sečtením obou rovnic obdržíme

$$AK + DL = AD.$$

Tuto rovnici znásobíme dvěma a můžeme psát

$$AC + BD = AD + BC = 2 \cdot AD.$$

Vrcholem B vedme rovnoběžku s úhlopříčkou CD ; ta protne přímkou AC v bodě B' . Trojúhelník $AB'B$ je rovnoramenný a přitom

$$AB' = AC + BD = 2 \cdot AD$$

Známe-li tudíž AD , můžeme sestavit lichoběžník $ACBD$.

Odtud máme toto řešení. V rovině τ sestavíme trojúhelník $AB'B$. (Je totiž určen ramenem AC a výškou k základně, což je vzdálenost rovnoběžek r, s .) Pak platí $\frac{1}{2} AB' = AD$ a lichoběžník můžeme sestavit. Otočením lichoběžníka kolem jeho osy vznikne hledaný komolý kužel.

Aby existovalo řešení, musí být $\frac{1}{2} AB' \geq KL$ (vzdálenost rovnoběžek r, s). Můžeme tedy říci, že

pro $\frac{1}{2} AB' > KL$ jsou dvě různá řešení,

pro $\frac{1}{2} AB' = KL$ přejde komolý kužel v rovnostranný válec

a pro $\frac{1}{2} AB' < KL$ neexistuje žádné řešení.

Ivan Netuka z 3. b SVVŠ v Hradci Králové založil své řešení na tom,

že $AD = AF$, kde F je pata kolmice spuštěné z bodu B na přímkou r . Vztah dostal z toho, že lichoběžníku $ACBD$ lze vepsat kružnici.

P o z n á m k a r e d a k c e. Střed kružnice k označme S a jinak ponecháme dřívější označení. Ze shodnosti trojúhelníků AFS , ADS plyne, že $\sphericalangle ASF$ je pravý. Střed S dostaneme tedy jako průsečík osy pásu omezeného rovnoběžkami r , s s kružnicí sestavenou nad průměrem AF .

Fyzika:

1. Motorový vlak, jedoucí přesně podle jízdního řádu, projíždí daný úsek trati předepsanou rychlostí $v_0 = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ale v místě A zpozoruje řidič návěstí, které žádá snížení rychlosti na hodnotu $v_2 = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Začne ihned brzdit s konstantním zpožděním $a_1 = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, takže v místě B již má vlak sníženou rychlost v_2 , se kterou jede až do místa C , kde další návěstí povoluje zvýšit rychlost na původní hodnotu v_0 . Od místa C jede proto vlak rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a_3 = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, takže v místě D nabude opět předepsanou rychlost v_0 , se kterou jede dále. Vzdálenost $AD = s = 3612 \text{ m}$. Tření a odpor vzduchu zanedbáme.

a) Dokažte, že doba jízdy se tímto nepředvídaným snížením rychlosti prodlužuje oproti jízdnímu řádu o hodnotu

$$t_4 = \frac{2 a_1 a_3 s - (a_1 + a_3) v_0 (v_0 - v_2)}{2 a_1 a_3 v_0 v_2} (v_0 - v_2)$$

a určete tuto dobu opoždění číselně!

b) Označte úsek brzdění $AB = s_1$ a potřebnou dobu t_1 ; úsek snížené rychlosti označte $BC = s_2$ a potřebnou dobu t_2 . Úsek zrychlování budiž označen $CD = s_3$ a doba k jeho projetí potřebná budiž t_3 . Dobu, za kterou by vlak projel úsek $AD = s$ původní rychlostí v_0 označte t_0 .

Nyní vyjádřete všechny hledané veličiny (tj. $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3, t_4, t_0$) o b e c n ý m i výrazy obsahujícími jen dané veličiny (totiž s, v_0, v_2, a_1, a_3) a potom je vypočítejte numericky z daných číselných hodnot!

(Návod: pohyb rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpožděný).

Evžen Říman

(Došlo 18 řešení.)

Řešil Lubomír Vašek, 2 E, SVVŠ, Gottwaldov:

Protože pohyb vlaku je v úseku $AB = s_1$ rovnoměrně zpožděný, v úseku $BC = s_2$ rovnoměrný a v úseku $CD = s_3$ rovnoměrně zrychlený, platí vztahy:

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad (1)$$

$$s_2 = v_2 t_2, \quad (2)$$

$$s_3 = v_2 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2 \quad (3)$$

$$v_0 = v_2 + a_3 t_3 \quad (4)$$

$$v_2 = v_0 - a_1 t_1 \quad (5)$$

Dále platí

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \quad (6)$$

$$s = v_0 t_0, \quad (7)$$

$$t_4 = t_1 + t_2 + t_3 - t_0, \quad (8)$$

Z rovnic (4) a (5) ihned plyne

$$t_1 = \frac{v_0 - v_2}{a_1} \quad (9)$$

$$t_3 = \frac{v_0 - v_2}{a_3} \quad (10)$$

Z (1) a (9) pak obdržíme

$$s_1 = \frac{v_0(v_0 - v_2)}{a_1} - \frac{1}{2} a_1 \frac{(v_0 - v_2)^2}{a_1^2} = (v_0 - v_2) \frac{(v_0 + v_2)}{2 a_1} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2 a_1} \quad (11)$$

a obdobně z (2) a (10) vyjde

$$s_3 = \frac{v_2(v_0 - v_2)}{a_3} + \frac{1}{2} a_3 \frac{(v_0 - v_2)^2}{a_3^2} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2 a_3}. \quad (12)$$

Pak

$$s_2 = s - (s_1 + s_3) = \frac{2 a_1 a_3 s - (v_0^2 - v_2^2) (a_1 + a_3)}{2 a_1 a_3}. \quad (13)$$

Vztahy (2) a (13) dají

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{2 a_1 a_3 s - (v_0^2 - v_2^2) (a_1 + a_3)}{2 a_1 a_3 v_2}. \quad (14)$$

Poněvadž ze (7) plyne

$$t_0 = \frac{s}{v_0}, \quad (15)$$

dá vztah (8) po úpravě

$$\begin{aligned} t_4 = t_1 + t_2 + t_3 - t_0 &= \frac{v_0 - v_2}{a_1} + \frac{v_0 - v_2}{a_3} + \\ &+ \frac{2 a_1 a_3 s - (v_0^2 - v_2^2) (a_1 + a_3)}{2 a_1 a_3 v_2} - \frac{s}{v_0} = \\ &= \frac{2 a_1 a_3 s - (a_1 + a_3) v_0 (v_0 - v_2)}{2 a_1 a_3 v_0 v_2} (v_0 - v_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Pro dané hodnoty $v_0 = 21$ [m . s⁻¹], $v_2 = 18$ [km . h⁻¹] = 5 [m . s⁻¹], $a_1 = 0,25$ [m . s⁻²], $a_3 = 0,2$ [m . s⁻²], $s = 3612$ [m] dají vztahy (9), (14), (10), (16), (15), (11), (13), (12) tyto výsledky:

$t_1 = 64$ [s]; $t_2 = 348$ [s]; $t_3 = 80$ [s]; $t_4 = 320$ [s]; $t_0 = 172$ [s]; $s_1 = 832$ [m]; $s_2 = 1740$ [m]; $s_3 = 1040$ [m].

Kontrola: $s_1 + s_2 + s_3 = (832 + 1740 + 1040)$ [m] = 3612 [m] = s .

P o z n á m k a r e d a k c e: Řešitel *Karel Prokop, I. r. VŠSE Plzeň*, doprovodil své řešení vtipným grafem.

2. Určete oběžnou dráhu T prvního Sputniku, jehož vzdálenost od povrchu Země v perigeu (přízemí) $h_1 = 227$ km a v apogeu (odzemí) $h_2 = 947$ km. Předpokládejte rovníkový poloměr Země $R = 6378$ km.

Řešte dvěma způsoby: a) Pomocí gravitačního zákona: Síla, kterou se Sputnik a Země přitahují je stejně veliká jako odstředivá síla při kruhovém pohybu Sputniku. Dána hmota Země $m_0 \doteq 6 \cdot 10^{24}$ kg a hodnota gravitační konstanty $\kappa = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11}$ [N · kg⁻² m²].

b) Pomocí třetího Keplerova zákona, víte-li že oběžná doba Měsíce je $T_1 \doteq 27\frac{1}{3}$ dne $\doteq 2,36 \cdot 10^6$ s a jeho střední vzdálenosti od středu Země je $r_1 = 348\,000$ km.

(V obou případech řešte pro kruhový pohyb Sputnika, při čemž za poloměr kladete aritmetický průměr hodnot h_1 a h_2).

Evžen Říman

(Došlo 18 řešení.)

Řešil Lubor Košťál, 3 D, SVVŠ, Brno::

Pohyb družice považujeme za kruhový o poloměru

$$r = R + \frac{h_1 + h_2}{2} = 6378 \text{ [km]} + \frac{227 + 947}{2} \text{ [km]} = 6965 \cdot 10^3 \text{ [m]}$$

a) Podle gravitačního zákona působí na sebe hmoty m a m_0 silou

$$F_1 = \kappa \frac{m m_0}{r^2} \quad (1)$$

kde κ je gravitační konstanta m, m_0 jsou hmoty těles a r jejich vzdálenost. Na Sputnika působí odstředivá síla

$$F_2 = m a_n = m \frac{v^2}{r}, \quad (2)$$

kde pro obvodovou rychlost platí

$$v = \frac{2 \pi r}{T}, \quad (3)$$

při čemž T je doba oběhu, takže

$$F_2 = m \frac{4 \pi^2}{T^2} r \quad (2a)$$

Velikosti sil F_1 a F_2 jsou stejné, čili $F_1 = F_2$, tedy

$$\frac{m m_0}{r^2} = m \frac{4 \pi^2}{T^2} r$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou T a obdržíme

$$T = 2 \pi r \sqrt{\frac{r}{\kappa m_0}} \quad (4)$$

Dosazením číselných hodnot a užitím vztahu [N] = [kg · m · s⁻²] máme

$$T = 2 \pi \cdot 6965 \cdot 10^3 \text{ [m]} \sqrt{\frac{6965 \cdot 10^3 \text{ [m]} \cdot 3 \cdot 10^{11}}{20 \text{ [kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}] \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}} = 5775 \text{ [s]}$$

Oběžná doba Sputniku byla 1 h 36 min a 15 s.

b) Podle třetího Keplerova zákona je poměr čtverců oběžných dob roven poměru třetích mocnin hlavních poloos. V našem případě uvažujeme kruhový pohyb obou těles, proto místo hlavní poloosy zavedeme poloměry oběžných drah. Platí tedy

$$\frac{\overline{T^2}}{T_1^2} = \frac{r^3}{r_1^3}, \quad (5)$$

kde T , r se vztahují ke Sputniku, r_1 , T_1 k Měsíci. Z toho

$$T = \frac{r T_1}{r_1} \sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{6965 \text{ [km]} \cdot 2,36 \cdot 10^6 \text{ [s]}}{384 \cdot 10^3 \text{ [km]}} \sqrt{\frac{6965}{348000}} = 5765 \text{ [s]}$$

Oběžná doba vypočtená pomocí Keplerova zákona je 1 h 36 min 5 s. Hodnoty vypočtené oběma způsoby souhlasí s přesností na 0,2 %.

3. Největší dalekohled světa má ohniskovou vzdálenost $f_1 = 16,7 \text{ [m]}$.

a) Určete jeho zvětšení Z , použije-li se jako okuláru spojná čočka, která dá pro vzdálenost zřetelného vidění ($l = 25 \text{ cm}$) zvětšení $Z_2 = 32$.

b) Do jaké vzdálenosti h by bylo lze pozorovat odlet Sputniku I (odstartoval 4. 10. 1957), který měl tvar koule o průměru $2r = 58,3 \text{ cm}$, aby se jeho obraz jevil v tomto dalekohledu stejně veliký, jako se jeví Měsíc prostému oku, tj. v zorném úhlu $\alpha = 31'$?

(Návod: Zvětšení lupy $Z = \frac{l}{f}$; zvětšení dalekohledu se rovná poměru ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru. Pro malé úhly platí $\text{tg } \alpha \approx \text{arc } \alpha$.)

Evžen Říman

(Došlo 17 řešení.)

Řešil Milan Plaček, III. B, SVVŠ, Kroměříž:

a) Zvětšení dalekohledu se určí ze vzorce $Z = \frac{f_1}{f_2}$, kde f_1 , f_2 jsou ohniskové vzdálenosti objektivu a okuláru. Ohniskovou vzdálenost okuláru f_2 obdržíme ze vztahu pro zvětšení lupy: $f_2 = \frac{l}{Z_2}$, což dosazeno do hořejšího vzorce dá hledané zvětšení dalekohledu

$$Z = \frac{f_1 Z_2}{l} = \frac{16,7 \text{ [m]} \cdot 32}{0,25 \text{ [m]}} = 2137,6$$

b) Pro zvětšení dalekohledu platí $Z = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} \doteq \frac{\alpha}{\beta}$ (neboť tangenty malého úhlu lze nahradit arkusem), kde α je zorný úhel obrazu v dalekohledu a β je zorný úhel předmětu viděného pouhým okem. Z tohoto vztahu plyne $\beta = \frac{\alpha}{Z}$

Vzdálenost h , do které by bylo možné pozorovat družici, určíme z rovnoramenného trojúhelníka (se základnou $2r$, výškou h a úhlem β proti

základně. S použitím výsledku docílíme v odst. a) máme $h = r \cotg \frac{\beta}{2} \doteq$

$$\doteq \frac{2r}{\text{arc}\beta} = \frac{2rZ}{\text{arc}\alpha} = \frac{2rf_1Z_2}{l \text{arc}\alpha} = \frac{0,583 \text{ [m]} \cdot 16,7 \text{ [m]} \cdot 32}{0,25 \text{ [m]} \cdot \text{arc } 31'}$$

$$= \frac{1246 \text{ m}}{0,0090175} = 1,382 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 138,2 \text{ km}$$

Odlet Sputniku I by bylo možno pozorovat do vzdálenosti 138,2 km.

(Pokračování)

Matematické zábavy



Žertovný příklad z trigonometrie

Ve 3. čísle minulého ročníku našeho časopisu jsme přinesli v rubrice *Matematické zábavy* článek M. Komana *Dobře nebo špatně?* V tomto příspěvku bylo uvedeno několik příkladů na slučování zlomků, které přes nesprávný početní postup vedly ke správnému výsledku.

K uveřejněnému článku dostala naše redakce dopis s. Karla Kocmana, žáka SPŠE v Brně, ve kterém nám zasílá svůj příklad vedoucí opět *při nesprávném řešení k správnému výsledku*. Chyba, které se zde můžeme výjimečně dopustit, se dosti často vyskytuje u začátečníků při studiu goniometrických funkcí. Jedná se o tento hezký příklad:

$$\frac{\sin 5^\circ - \sin 15^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 5^\circ - \cos 15^\circ + \cos 25^\circ} = \frac{\sin (5^\circ - 15^\circ + 25^\circ)}{\cos (5^\circ - 15^\circ + 25^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \text{tg } 15^\circ.$$

Jak vidíte, je zde využito *chybné představy*, že např. zápis $\sin 5^\circ$ je součin z „ \sin “ a „ 5° “, takže bylo možno použít pravidla o vytýkání.

Škoda, že se s. Kocman nepokusil tento příklad trochu zobecnit. Celkem snadno se dá totiž objevit tento příklad:

$$\frac{\sin (\alpha - \beta) + \sin \alpha + \sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha - \beta) + \cos \alpha + \cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin [(\alpha - \beta) + \alpha + (\alpha + \beta)]}{\cos [(\alpha - \beta) + \alpha + (\alpha + \beta)]} =$$

$$= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$$

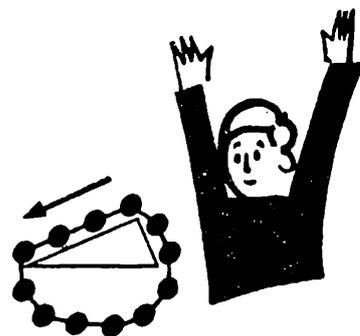
Důkaz i podmínky si jistě sami doplníte.

Setkáte-li se proto ve své praxi s podobnými příklady, pokuste se vždy najít obecnější pravidlo. V matematice je totiž důležité, ale i zajímavé, formulovat a řešit nové problémy a objevovat další dosud neznámá pravidla.

-mk

Fyzikální zajímavosti

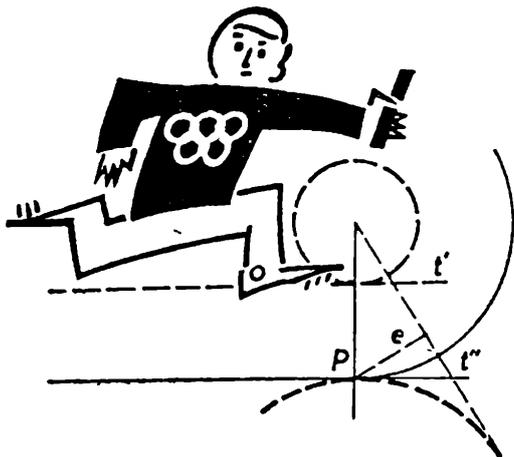
Zachycený radiokrypton



Průmyslové využití radioaktivních izotopů je brzděno hlavně tím, že radioaktivní záření je lidskému zdraví nebezpečné. Proto se pro průmyslové využití hledají takové radioizotopy, které by měly nejmenší zhoubné účinky na lidské zdraví. Jedním z dobře užitelných zdrojů radioaktivního záření by byl krypton 85. Krypton 85 vzniká štěpením uranu v jaderných reaktorech. Má ty přednosti, že je chemicky netečný, nemůže proto vniknout do metabolických pochodů v lidském těle a vysílá měkké záření β , takže náklady na stínící zařízení se mohou podstatně snížit. Upotřebitelnost tohoto izotopu je však omezena skutečností, že krypton je za normální teploty a tlaku plynem. Aby mohlo být průmyslově použito kryptonu jako trvalého zdroje β záření, musel být plyn pod velkým tlakem stlačen do silnostěnných nádob, které však silně pohlcovaly β záření. D. I. Chlečka a C. A. Ziegler z Traceho laboratoře v USA vyvinuli nový způsob k zachycení atomů kryptonu v krystalové mřížce dehtouhelného derivátu hydrochinonu, jako podobně mohou být zachycovány tyto atomy i jiné atomy v geolitu, molekulárních mřížkách. Zahřívají krypton s dehtouhelným derivátem hydrochinonu v tlakových bombách za vysokého tlaku. Po dosažení určité teploty bomby zvolna ochlazují. Vzniknou krystaly, kde v krystalové mříži hydrochinonu jsou umístěny atomy kryptonu. Takové krypton-hydrochinonové mřížky vysílají záření 25krát intenzivnější, než vydává stejný objem plynného kryptonu za normálních okolností, tj. za normálního atmosférického tlaku.

Chlecka a Ziegler se domnívají, že takovouto „mřížkou“ budou moci měřit tloušťku tak lehkého materiálu jako je papír. Měřicí a registrační schopnosti takové mřížky jsou zcela mimořádné. Tak např. lze zjistit ve vzduchu velmi nepatrné množství kyslíčnicku siřičitého nebo ozónu, řádově několik molekul kyslíčnicku siřičitého v biliónu molekul vzduchu. (Podle Scientific American, Nový York 1960.) Inž. dr. B.

Matematická olympiáda



Soutěžní úlohy MO

Řešení této první trojice soutěžních úloh odevzdají žáci svému učiteli do 18. prosince 1962; učitel opravená řešení předá příslušnému výboru MO.

1. Kategorie A

1. Je dána velikost výšky v , příslušné k přeponě pravoúhlého trojúhelníka, a poloměr ρ kružnice tomuto trojúhelníku vepsané.

a) Vypočtete délku přepony c pomocí čísel v , ρ .

b) Sestavte kvadratickou rovnici (o jedné neznámé), jejímiž kořeny jsou délky odvěsen a , b uvažovaného trojúhelníka.

Pro které hodnoty v a ρ existuje takový pravoúhlý trojúhelník?

2. Buď dána kružnice k a její určitý průměr AB délky $2r$. Z bodu A se dá do pohybu bod X a s ním v témže okamžiku z bodu B bod Y ; přitom se body X , Y pohybují po kružnici k v témže smyslu. Bod X se pohybuje rovnoměrně zrychleně a při prvním průchodu bodem B je velikost jeho rychlosti v ; bod Y se pohybuje rovnoměrně rychlostí c .

Určete rychlosti c , v tak, aby byly splněny tyto dva požadavky:

(1) Bod X dostihne poprvé bod Y za bodem A , ale před bodem B .

(2) Když po třech obězích bod X dospěje do polohy A , tu současně bod Y dospěje do polohy B .

3. Určete velikosti všech ostrých úhlů α , pro něž obě čísla

$$\operatorname{tg} \alpha, \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha}$$

jsou přirozená.

2. Kategorie B

1. Najděte všechna alespoň trojčíselná přirozená čísla x , která mají tuto vlastnost: Číslo x a jeho druhá mocnina x^2 končí (v desítkové soustavě) stejným posledním trojčíslem.

2. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a uvnitř tohoto úhlu bod P ; dále je dána úsečka velikosti r .

Sestrojte trojúhelník ABC , který má tyto vlastnosti:

(1) Body A, B, C leží po řadě uvnitř polopřímek OM, ON, OP .

(2) Kružnice, která se dotýká přímky AB a je trojúhelníku ABC vně vepsaná, má střed O a poloměr r .

3. Je dáný kvádr $ABCD A'B'C'D'$ ($ABCD$ je jedna jeho stěna a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o rozměrech $a = AB, b = AD, c = AA'$. Roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od kvádru dva štvorstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré zostalo, pomocou čísel a, b, c .

3. Kategorie C

1. Jestliže přirozené číslo n je druhou mocninou přirozeného čísla, potom součin dvou posledních cifer (dekadického zápisu) čísla n je číslo sudé. Dokažte.

2. Je dáný obdélník $ABCD$. Označme M patu kolmice spustené z bodu B na přímku AC .

a) Vypočítajte vzdialenosti AM, BM, CM, DM pomocou rozmerov $a = AB, b = AD$ daného obdĺžnika.

b) Rozhodnite, či existuje taký obdĺžnik $ABCD$, v ktorom platí $DM = 3 \cdot BM$.

3. Jsou dány tři lineární rovnice

$$\begin{aligned} px - 2y &= 2p - 1, \\ 2x + py &= p - 1, \\ (p - 1)x + y &= p + 1 \end{aligned}$$

s neznámými x, y .

Najděte všechna reálná čísla p , pro něž mají uvedené tři rovnice společné řešení; vypočtete tato řešení.

4. Kategorie D

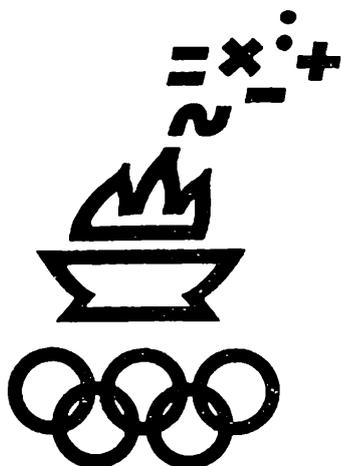
1. Je daná kružnice $k \equiv (S, r = 5 \text{ cm})$ a v nej tetiva AC délky 9 cm. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD tak, aby body B, D ležali na kružnici k a aby uhlopriečka AC rozpoľovala jeden z uhlov lichobežníka $ABCD$.

2. Najděte všechna trojčíselná (přirozená) čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, potom dostaneme čtyřčíselné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

3. Kvádr $ABCD A'B'C'D'$ (o stěně $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) má dané rozměry $a = AB, b = AD, c = AA'$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kvádru dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí a, b, c . Narýsujte jeho síť pro $a = 4 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$.

Mezinárodní matematická olympiáda



P e t e r H a t a l a, studující, Bratislava:

Štvrtá medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 8.—15. júla 1962 sa v rámci osláv 100. výročia založenia Jednoty československých matematikov a fyzikov (JČMF) konala v ČSSR IV. medzinárodná matematická olympiáda (MMO). Poriadateľmi súťaže boli ministerstvo školstva a kultúry a JČMF. Štvrtej MMO sa zúčastnilo 56 žiakov zo 7 štátov: z Bulharska, ČSSR, Maďarska, NDR, Poľska, Rumunska a SSSR. Súťažiaci boli vybraní na základe výsledkov v národných olympiádach. Medzi nimi boli 4 dievčatá (po jednom z Bulharska, NDR, Poľska a SSSR). Zahraničné delegácie prichádzali do Prahy v piatok a sobotu 6. a 7. júla. Naši žiaci boli v hlavnom meste už od 4. júla, kde sa zúčastnili na inštruktáži.

V nedeľu dopoludnia si všetci súťažiaci prezreli pamätihodnosti Prahy; po obede odcestovali autobusmi zahraničné delegácie do Českých Budějovic. Naši žiaci spolu s niektorými členmi Organizačného komitétu MMO prišli do Českých Budějovic v pondelok 9. júla. V ten deň si prezreli všetci účastníci MMO miesto nastávajúcich „bojov“ - zámok Hluboká a Alšovu juhočeskú galériu.

Vlastná súťaž sa konala v sále Alšovej galérie v dňoch 10. a 11. júla 1962. Počas týchto dvoch dní sme riešili 7 úloh z teórie čísel, algebry, stereometrie, trigonometrie a planimetrie. Úlohy vybrala medzinárodná komisia 5. a 6. júla na svojom zasadaní v Prahe. Táto komisia sa skladala z vedúcich jednotlivých delegácií; jej predsedom bol s. akademik Josef Novák. Vedúcim našej delegácie bol s. Rudolf Zelinka, pedagogickým vedúcim s. docent Jan Vyšín.

Prvý deň sme mali riešiť 3 úlohy, na ktoré boli určené 4 hodiny čistého času. Po tejto písomnej práci pripadalo priemerne na každého člena nášho družstva 16,9 bodu z 20 možných, čo nám dávalo reálne predpo-

klady na obsadenie jedného z popredných miest v neoficiálnom hodnotení družstiev. Prvý príklad sme vyriešili piati na plný počet bodov, na druhou, hoci sa nám zdal ľahší ako prvý, sme získali všetky body iba štyria. Tretia úloha nerobila našim žiakom veľa ťažkostí, pretože podobné úlohy sa riešili i v našich matematických olympiádach.

V stredu 11. júla bolo treba vyriešiť 4 úlohy počas piatich hodín. Tu sa nám už darilo menej; na jeden príklad bolo menej času ako v utorok i úlohy boli ťažšie. Z 26 možných bodov pripadalo teraz na každého nášho riešiteľa iba 9,6 bodu. Prvý príklad druhého dňa vyriešili traja naši žiaci na plný počet bodov, druhý už iba jeden a dvaja na ňom stratili všetky body. Najviac bodov sme však stratili na tretej a štvrtej úlohe zo stredy. Ani jeden náš riešiteľ nezískal na žiadnej z týchto úloh plný počet bodov; na 3. úlohe piati a na poslednej dokonca šiesti sme nezískali ani bod.

V stredu 11. júla sa zúčastnil minister školstva a kultúry s. dr. František Kahuda slávnostnej večere v jedálni internátu v Českých Budějoviciach. S radosťou konštatoval, že na IV. MMO sme privítali aj sovietskych žiakov, prítomnosťou ktorých, ako sa neskoršie ukázalo, sa zvýšila úroveň MMO.

Ďalšie dva dni, štvrtok a piatok, venovali súťažiaci návštevám historických miest - Husinca, Prachatíc, Č. Krumlova, Rožmberku a i., ďalej priehrad Lipno a Orlík. Vo štvrtok si účastníci MMO prezreli závody ČZ Strakonice a Jitex Písek. Novými dojmami na nás zapôsobilo divadlo s otáčavým hladiskom v Českom Krumlove; tam sme videli Shakespearov Večer trojkráľový.

Slávnostné ukončenie súťaže bolo v sobotu 14. júla opäť v sále Alšovej juhočeskej galérie. Na slávnosti sa zúčastnil i námestník ministra školstva a kultúry s. Václav Hendrych a ďalší hostia. Slávnostný prejav predniesol predseda Organizačného komitétu MMO a medzinárodnej komisie s. akademik Josef Novák. Vo svojom prejave hovoril o perspektívach matematiky a úlohách matematiky v ostatných vedách. Tiež spomenul, že prví, ktorým sa podarilo zorganizovať MMO, boli súdruhovia z Rumunska. Tento prejav postupne prečítali vedúci jednotlivých delegácií vo svojich materinských jazykoch. K súťažiacim prehovoril aj námestník ministra školstva a kultúry s. V. Henrych. Potom rozdal s. akademik J. Novák víťazom súťaže diplomy. Spomienkové čestné uznanie dostali i ostatní účastníci MMO.

Po udelení cien menom zahraničných súťažiacich prehovorila sovietska žiačka Lidia Gončarovová, ktorá získala jednu z prvých cien a v mene vedúcich zahraničných delegácií profesor Gheorghe Simionescu z Rumunska. Po zakončení slávnosti dostali všetci súťažiaci a delegáti pamiatkové predmety od poriadateľov IV. MMO a od rumunskej delegácie. Sovietska delegácia venovala všetkým účastníkom MMO ukážky literatúry pre súťažiacich v matematickej olympiáde v SSSR.

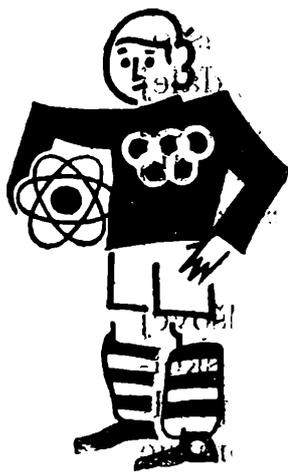
Celkovo udelila medzinarodna komisia 4 prve, 12 druhych a 15 tretich cien. Nasi ziaci z 31 udelenych cien získali jednu druhu a tri tretie ceny. Plny počet bodov - 46 - získal iba jeden riesitel: J o s i f B e r n s t e j n z Moskvy. Tento sa stal absolutnym vitazom IV. medzinarodnej matematickej olympiady.

Pro z n á m k a : 1. cena nad 40 bodov, 2. cena nad 33 bodov, 3. cena nad 28 bodov.

V nedeľu 15. júla odcestovali účastníci MMO autobusmi do Prahy, kde večer videli v Národnom divadle predstavenie Smetanovej opery Libuša. V pondelok odchádzali jednotlivé delegácie z nášho hlavného mesta do vlasti; rumunská delegácia odcestovala až vo štvrtok 19. júla vlakom, pretože plánovaná cesta lietadlom sa nemohla uskutočniť pre nedostatok miest v lietadle.

(Pokračovanie)

Fyzikální olympiáda



Pohyb složené soustavy těles spojených vláknem

Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků

V článku Pohyb složené soustavy těles spojených vláknem jsme ukázali způsob řešení těchto soustav. Pro složené soustavy není tento způsob vhodný a proto ukážeme v části a) druhý způsob řešení. Tento způsob aplikujeme v části b) nejprve na oba příklady uvedené v titulém článku a) pak jej aplikujeme na dva složitější příklady.

Druhý způsob řešení:

Z daného systému vybereme si určité těleso a vyznačíme si všechny síly, které na ně působí, tedy např. váhu tělesa a sílu, která se přenáší

1) Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 40, 1961-62, ses. 4, str. 187 až 191; III. ročník Fyzikální olympiády, leták, 1961, str. 26-30.

na těleso vláknem. Pak napíšeme, že výsledná síla působící na toto těleso se musí rovnat součinu jeho setrvačné hmoty a jeho zrychlení. Stejnou úvahu provedeme postupně pro všechna další tělesa systému. Tento způsob je vhodný i pro případy, kdy se tělesa v dané soustavě pohybují s různým zrychlením.

b) Příklady

Příklad 1. Těleso o hmotě m_1 je uváděno do pohybu po vodorovné rovině tělesem o hmotě m_2 , které je k němu připojeno vláknem vedeným přes kladku (obr. 14). Vypočítejte zrychlení soustavy a sílu napínající vlákno.

Na tělese o hmotě m_2 působí síla m_2g směrem dolů a vlákno silou F_1 směrem vzhůru; vlivem těchto sil nabude toto těleso zrychlení a . Proto platí

$$m_2g - F_1 = m_2a. \quad (1)$$

Na těleso o hmotě m_1 působí vlákno silou F_1 (váha tělesa se ruší tlakovou silou podložky na těleso) a uvádí do pohybu se zrychlením a . Proto platí

$$F_1 = m_1a \quad (2)$$

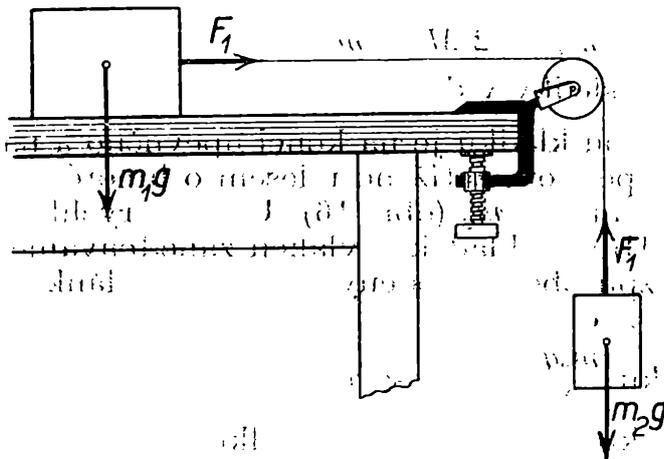
Do rovnice (1) dosadíme za F_1 z rovnice (2).

$$m_2g - m_1a = m_2a$$

a z toho

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Výsledky souhlasí s výsledky vypočtenými prvou metodou.



Obr. 14

těchto sil nabude těleso zrychlení a směrem vzhůru. Proto platí

$$Mg - F_2 = -Ma \quad (3)$$

Na pravé straně působí na těleso o hmotě M a na přivažek o hmotě m směrem dolů síla $(M + m)g$ a směrem nahoru vlákno silou F_2 . Vlivem těchto sil nabudou tato tělesa zrychlení a směrem dolů; proto pro ně platí

$$(M + m)g - F_2 = (M + m)a \quad (4)$$

Z rovnice (3) plyne

$$F_2 = Mg + Ma \quad (5)$$

a po dosazení do (4) dostáváme pro a

$$a = \frac{m}{2M + m} g \quad (6)$$

Po dosazení do (5) dostáváme pro F_2

$$F_2 = Mg + \frac{Mm}{2M+m}g = \frac{2M(M+m)}{2M+m}g \quad (7)$$

Osa kladky podléhá síle

$$F_4 = 2F_2 = \frac{4M(M+m)}{2M+m}g$$

Zbývá ještě určit tlakovou sílu přivažku na těleso hmoty M , jež musí být podle zákona akce a reakce táž, jako tlaková síla tělesa hmoty M na přivažek. Určíme si ji oběma způsoby.

Na těleso o hmotě M na pravé straně působí směrem dolů jeho váha Mg , pak přivažek silou F_1 a vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil nabývá těleso o hmotě M zrychlení a ; tedy

$$Mg + F_1 - F_2 = Ma.$$

Odtud

$$F_1 = F_2 + Ma - Mg.$$

Za F_2 dosadíme ze (7), za a z (6) a dostaneme

$$F_1 = \frac{2M(M+m)}{2M+m}g + \frac{Mm}{2M+m}g - Mg = \frac{2mM}{2M+m}g \quad (8)$$

Na těleso o hmotě m působí jeho váha mg směrem dolů a těleso o hmotě M tlakovou silou F_1 směrem vzhůru; tím nabude těleso o hmotě m zrychlení a směrem dolů. Proto

$$\begin{aligned} mg - F_1 &= ma \\ \text{čili} \quad F_1 &= m(g - a) \end{aligned}$$

a po dosazení za a z (6) dostaneme opět

$$F_1 = mg \left(1 - \frac{m}{2M+m} \right) = \frac{2mM}{2M+m}g$$

Všechny výsledky jsou v soulase s výsledky v dřívějším článku.

Příklad 3. Vlákno nesoucí volnou kladku je na konci upevněno a na druhém konci, vedeném přes kladku pevnou, zatíženo tělesem o hmotě m_1 . Na volné kladce je zavěšeno těleso o hmotě m_2 (obr. 16). Určete zrychlení obou těles a sílu napínající vlákno. Hmotu kladek a vláken zanedbáváme.

Tento příklad vypočteme jednak způsobem uvedeným v prvním článku¹⁾ (pod a), jednak způsobem uvedeným zde (pod b).

a) Váha m_2g se rozkládá na složku $\frac{m_2g}{2}$, která se ruší pevností závěsu,

a na druhou, stejně velkou složku, která působí přes kladku I na těleso o hmotě m_1 . Označme zrychlení tělesa o hmotě m_1 písmenem a a počítejme je kladně směrem dolů. Poněvadž při pohybu vykoná těleso o hmotě m_2

dráhu rovnou polovině dráhy tělesa o hmotě m_1 , bude jeho zrychlení $\frac{a}{2}$

a bude mít opačný směr než u tělesa o hmotě m_1 . Protože váha m_2g a tažné síly obou vláken u volné kladky udělují zrychlení $\frac{a}{2}$ hmotě m_2 , uděluje

tažná síla jednoho vlákna hmotě m_2 zrychlení $\frac{a}{4}$. Proto síla způsobující pohyb je

$$F = \left(m_1 - \frac{m_2}{2} \right) g$$

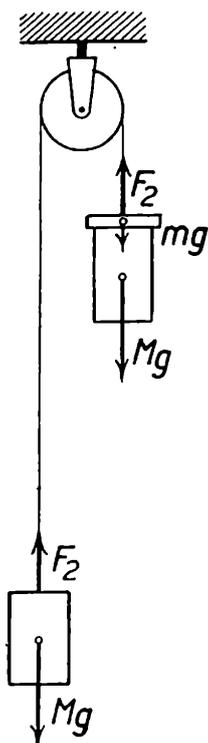
Jestliže $F > 0$, působí na m_1 síla směrem dolů, jestliže $F < 0$, působí na m_1

síla směrem nahoru. Tato síla uvádí do pohybu hmotu m_1 se zrychlením a a hmotu m_2 se zrychlením $\frac{a}{4}$. Proto musí platit

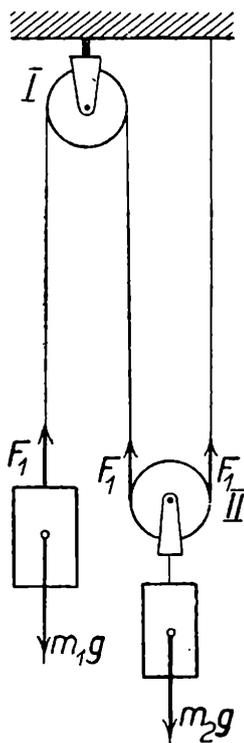
$$m_1 a + m_2 \frac{a}{4} = \left(m_1 - \frac{m_2}{2} \right) g$$

Z toho vychází, že těleso o hmotě m_1 se pohybuje se zrychlením

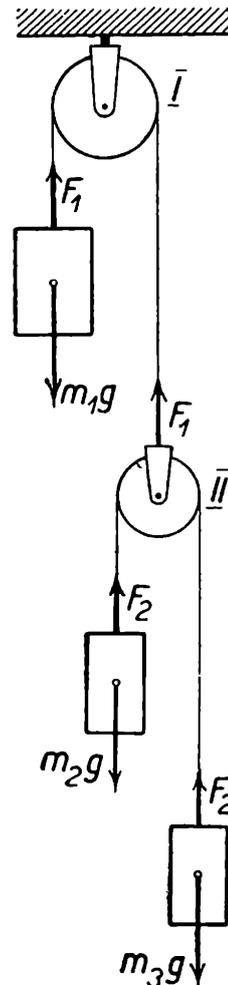
$$a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g$$



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Jestliže $a > 0$, pak se pohybuje těleso o hmotě m_1 směrem dolů. Těleso o hmotě m_2 se pohybuje se zrychlením $\frac{a}{2}$

Sílu napínající vlákno vypočteme z pohybu tělesa o hmotě m_1 ;

$$F_1 = m_1 (g - a) = m_1 \frac{4m_1 + m_2 - 4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2} g = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$$

Sílu napínající vlákno můžeme též vypočíst z pohybu druhého tělesa; po-
něvadž těleso o hmotě m_2 napíná dvě vlákna, je

$$F_1 = \frac{1}{2} m_2 \left(g + \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} \right) g = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$$

b) Na těleso o hmotě m_1 působí síla $m_1 g$ směrem dolů, vlákno silou F_1

směrem nahoru, a těleso se pohybuje se zrychlením a , pro něž platí

$$m_1 g - F_1 = m_1 a; \quad (9)$$

přítom a bereme kladně směrem dolů.

Na těleso o hmotě m_2 působí síla $m_2 g$ směrem dolů a dvě vlákna silou $2 F_1$ směrem vzhůru. Poněvadž při pohybu vykoná těleso o hmotě m_2 dráhu rovnou polovině dráhy tělesa o hmotě m_1 , bude jeho zrychlení $\frac{a}{2}$ a bude mít opačný směr než u tělesa o hmotě m_1 . Proto bude platit

$$m_2 g - 2 F_1 = - m_2 \frac{a}{2} \quad (10)$$

Vyloučení F_1 z rovnice (9) a (10) dostaneme

$$(2 m_1 - m_2) g = (4 m_1 + m_2) \frac{a}{2}$$

a z toho

$$a = \frac{2 (2 m_1 - m_2)}{4 m_1 + m_2} g$$

Pak síla napínající vlákno z rovnice (9)

$$F_1 = m_1 (g - a) = \frac{3 m_1 m_2}{4 m_1 + m_2} g$$

Příklad 4. Určete s jakým zrychlením se pohybují tělesa při spojení vyznačeném na obr. 17. Přítom k hmotám kladek a vláken ani zde nepřihlížíme.

Každé z uvedených tří těles udílí zrychlení všem tělesům. Každé z těchto těles bude se pohybovat s jiným zrychlením. Proto je výhodnější řešit tuto úlohu druhým způsobem, na který se zde omezíme.

Na těleso hmoty m_1 působí váha $m_1 g$ směrem dolů a první vlákno silou F_1 směrem nahoru. Vlivem těchto sil pohybuje se toto těleso se zrychlením a_1 , které označíme kladně směrem dolů; pro ně platí

$$m_1 g - F_1 = m_1 a_1 \quad (11)$$

Na těleso hmoty m_2 působí váha $m_2 g$ směrem dolů a druhé vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil pohybuje se těleso se zrychlením a_2 , které označíme kladně směrem dolů; pro ně platí

$$m_2 g - F_2 = m_2 a_2 \quad (12)$$

Na těleso hmoty m_3 působí váha $m_3 g$ směrem dolů a vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil pohybuje se těleso se zrychlením a_3 , které označíme kladně směrem dolů. Pro ně platí

$$m_3 g - F_2 = m_3 a_3 \quad (13)$$

Na osu kladky II působí směrem vzhůru síla F_1 a směrem dolů síly $F_2 + F_2$ stejně od osy vzdálené. Proto musí platit

$$F_1 = 2 F_2 \quad (14)$$

Označíme-li zrychlení tělesa o hmotě m_2 vzhledem ke kladce II písmenem a (kladně směrem dolů), bude se těleso o hmotě m_3 pohybovat vzhledem ke kladce II se zrychlením $-a$. Proto musí platit

$$a - a_1 = a_2, \quad -a_1 - a = a_3,$$

a tedy

$$a = a_1 + a_2 = -a_1 - a_3$$

čili

$$2 a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (15)$$

Máme zde pět rovnic (11), (12), (13), (14) a (15) pro pět neznámých a_1 , a_2 , a_3 , F_1 a F_2 . Jejich řešením dostaneme

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2 + 3 m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3 m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$F_1 = \frac{8 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$F_2 = \frac{4 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

Vyjede-li zrychlení kladně, znamená to, že směřuje dolů.

Poznámka: Na článku spolupracovali s autorem členové Jihomoravského krajského výboru FO *Dagmar, Košťálová a František, Švarň*. Svými připomínkami k článku přispěli členové Ústředního výboru FO *dr. M. Chytilová a V. Rudolf*.

Recenze

M. Menšík:

Deskriptivní geometrie

1. díl, Praha 1962, Státní nakladatelství technické

literatury, 208 str., 231 obr., cena 7,10 Kčs.

Ceskoslovenská společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí vydává ve Státním nakladatelství technické literatury Polytechnickou knižnici. V této knižnici vycházejí tři řady popularizačně vědeckých děl. Rada I. má název *Co máme vědět*, rada II. jsou *Průručky* a rada III. se jmenuje *Udělejte si sami*.

V II. řadě knižnice vyšla nedávno jako 22. svazek Menšíkova *Deskriptivní geometrie, I. díl*. Je to vkusná knížka kapesního formátu a představuje kompendium základů deskriptivní geometrie i jejích základních klasických promítacích metod. Čtenář najde v díle v podstatě vše, co se probírá z deskriptivní geometrie jak na středních všeobecně vzdělávacích školách, tak i na středních odborných školách. Latka je tam systematicky seřazena a podána slohem tak jasným, že je výklad přístupný každému a tedy i tomu, kdo dosud nestudoval tento před-



mět. Látka je podána - možno říci - v kostce, ale přesto plně a uceleně, dokonce v některých partiích, pokud jsou důležité pro technickou praxi, je látka středoškolská ještě patřičně doplněna nebo zvláště jakoby zdůrazněna.

Svazek obsahuje osm kapitol. V úvodní kapitole se čtenář doví o historickém vývoji deskriptivní geometrie a po výkladu o nevlastních útva-rech a o dělicím poměru a dvojpoměru přechází autor ihned ke kuželosečkám i k oběma zvláště důležitým geometrickým příbuznostem - kolineaci a afinitě. V druhé kapitole vykládá autor stereometrii, aby se tím usnadnil výklad pravoúhlého promítání, které je probíráno v kapitole třetí. Tato kapitola je nejrozsáhlejší a zabírá plnou třetinu celého díla. To má své opodstatnění. Autor zde totiž probírá všechny základní jevy pravoúhlého promítání a proto se již jimi nemusí zabývat v dalších kapitolách, jako např. v kapitole čtvrté o kosoúhlém promítání a v kapitole šesté o axonometrii. Dobré prostudování pravoúhlého promítání poslouží i při čtení kapitoly páté o kótovaném promítání. V sedmé kapitole hovoří autor o rotačních tělesech a zakončuje dílo osmou kapitolou o rovinných řezech těles.

Stručný, ale výstižný text publikace je doplněn velmi názornými, přesto však jednoduchými obrázky, bez nichž si ovšem nelze představit žádné dílo z oboru deskriptivní geometrie. K jasnosti obrázků přispívá sice velkou měrou velmi precízní a čistý tisk, avšak značnou obtíž při čtení obrázků působí jejich malý formát. Vhodným doplňkem díla je bohatý seznam domácích i cizojazyčné literatury z nejnovější doby i přehled vysokoškolských skript vztahujících se k stejné tematice. Obálka Miroslava Maryšky je vkusná a dokonce lákavá, takže čtenář zajímavící se o deskriptivní geometrii s radostí sáhne po této knížce.

Publikace může nejen dobře běžně sloužit žákům středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol, ale bude z ní s úspěchem těžit i student před maturitou, bude-li si chtít rychle a souborně zopakovat látku deskriptivní geometrie v rozsahu potřebném pro úspěšný výkon maturity. Neocenitelné služby může však dílo poskytnout pracujícím, kteří si buď chtějí osvojit znalost deskriptivní geometrie, nebo kteří chtějí studovat při zaměstnání, aby mohli složit maturitu. Poněvadž kniha shrnuje látku přesně systematicky, bude jistě vyhledávanou příručkou i pro vysokoškoláky a to ať již v studiu denním či v studiu při zaměstnání (v studiu dálkovém nebo večerním). Zejména pro studenty z řad pracujících by měl být připojen podrobný a spolehlivý index, aby čtenář mohl snadno najít potřebný výklad ke kterékoliv úloze deskriptivní geometrie. Vynechání takového indexu je podstatný nedostatek, přesto však hodnotu knihy nesnižuje. V příštích vydáních, k nimž jistě bude muset Státní nakladatelství technické literatury přikročit velmi brzy, měl by se tento nedostatek odstranit a index připojit.

Oldřich Jeništa

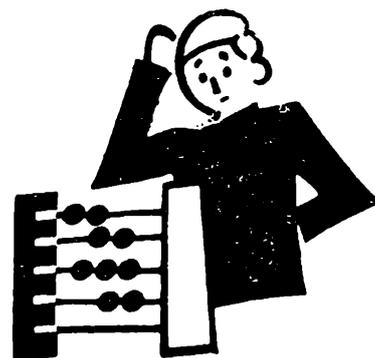
K řešení základních úkolů v průmyslové a zemědělské výrobě, v investiční výstavbě a kdekoliv jinde, zejména pak k pronikavému zvýšení produktivity práce, zvědečtění řízení a plánování národního hospodářství bude zapotřebí rozsáhlých teoretických prací v oblasti přírodních a technických věd, zejména v takových oborech, jako jsou matematika, fyzika, chemie, biologie, kybernetika a další.

*President republiky A. Novotný
na 12. sjezdu KSČ, 4. 12. 1962*

Matematika

Oldřich Lanta, Ostrava:

Z geometrie trojúhelníka.



1. Je dán trojúhelník ABC . Označme paty jeho výšek P_1, P_2, P_3 . Trojúhelník, jehož paty jsou právě tyto tři body, nazýváme *ortický* (obr. 1). A tu platí:

Věta 1. Výšky trojúhelníka ABC jsou osami úhlů ortického trojúhelníka $P_1P_2P_3$.

Důkaz. a) Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, je průsečík V jeho výšek (tzv. *ortocentrum*) vnitřním bodem obou uvažovaných trojúhelníků. Poněvadž

$$\sphericalangle VP_3B = \sphericalangle VP_1B = 90^\circ$$

lze čtyřúhelníku VP_3BP_1 opsat kružnici, v níž

$$\sphericalangle VP_1P_3 = \sphericalangle VBP_3;$$

jsou to totiž obvodové úhly nad menším obloukem VP_3 . Z téhož důvodu je ve čtyřúhelníku VP_1CP_2

$$\sphericalangle VP_1P_2 = \sphericalangle VCP_2.$$

Protože pravouhlé trojúhelníky VCP_2 , VBP_3 mají při vrcholu V shodné úhly, platí

$$\sphericalangle VCP_2 = \sphericalangle VBP_3.$$

Z posledních tří rovností vyplývá

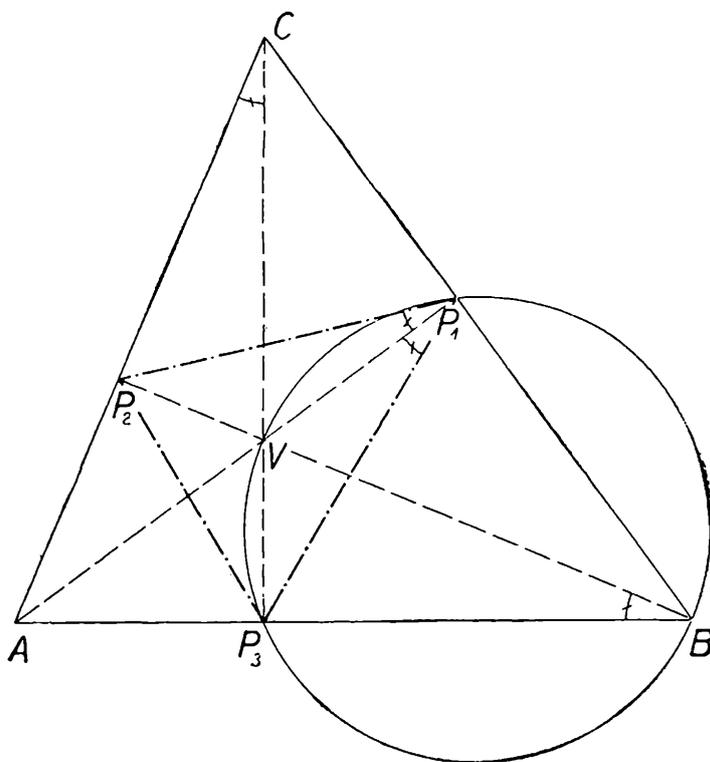
$$\sphericalangle VP_1P_3 = \sphericalangle VP_1P_2.$$

Podobně dokážeme, že

$$\sphericalangle VP_2P_1 = \sphericalangle VP_2P_3 \text{ a } \sphericalangle VP_3P_2 = \sphericalangle VP_3P_1$$

Tím je vyslovená věta 1. dokázána pro ostroúhlý trojúhelník.

b) V trojúhelníku tupoúhlém je ortocentrum vnějším bodem daného i ortického trojúhelníka a dvě výšky trojúhelníka ABC jsou osami vnějších úhlů ortického trojúhelníka $P_1P_2P_3$. Důkaz je podobný jako v případě a) a čtenář si jej snadno sám provede. Věta 1. tedy platí i v tomto případě.



Obr. 1

c) V pravouhlém trojúhelníku paty dvou výšek splývají s vrcholem pravého úhlu, takže ortický trojúhelník neexistuje a uvedená věta ztrácí význam.

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a věta 1. je dokázána.

Z předešlého vyplývá i správnost této věty:

Věta 2. Ortocentrum trojúhelníka ABC je středem kružnice dotýkající se stran ortického trojúhelníka; vrcholy A, B, C jsou středy dalších tří kružnic, dotýkajících se stran ortického trojúhelníka.

O jednom způsobu definice funkce

(Dokončení)

Uvedme nyní příklad na použití věty V. 1.

Příklad 4. Vyjádřete funkci

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x > 0 \\ x + \sin x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

pomocí jedné rovnice.

Podle V. 1. máme $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x + \sin x$, $x_0 = 0$ a z toho $\alpha(x) = \frac{1}{2} \sin x$, $\beta(x) = \frac{1}{2} (-2x - \sin x) = -\frac{1}{2} (2x + \sin x)$. Za $\varphi(x)$ lze volit libovolnou funkci, která splňuje podmínky uvedené ve V. 1. Nám půjde o to, zvolit $\varphi(x)$ v ho d n ě, aby se vyjádření dané funkce y co nejvíce zjednodušilo. Ukážeme, že lze zvolit a je vhodné zvolit v tomto příkladě $\varphi(x) = 2x + \sin x$, že tedy

$$\begin{aligned} 2x + \sin x &< 0 \text{ pro } x < 0, \\ 2x + \sin x &> 0 \text{ pro } x > 0. \end{aligned}$$

Dokažme nejprve platnost druhého řádku. Předně je $-1 \leq \sin x \leq 1$; pro $0 < x \leq \frac{1}{2}$ je $\sin x > 0$ (x je v 1. kvadrantě) a tedy $2x + \sin x > 0$; pro $x > \frac{1}{2}$ je $2x > 1$, tedy $2x + \sin x > 0$, neboť první člen je větší než 1 a druhý není menší než -1 . Tím je dokázáno, že pro libovolné $x > 0$ je $2x + \sin x > 0$. Podobně pro $x < 0$ je $2x + \sin x < 0$, neboť $2(-x) + \sin(-x) = -(2x + \sin x)$. Lze tedy volit $\varphi(x) = 2x + \sin x$. Podle V. 1 lze pak danou funkci vyjádřit rovnicí

$$y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} (2x + \sin x) \frac{|2x + \sin x|}{2x + \sin x}$$

a po krácení máme výsledek

$$y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} |2x + \sin x|$$

Za funkci $\varphi(x)$ lze vždy volit $\varphi(x) = x - x_0$, neboť $x - x_0 < 0$ pro $x < x_0$ a $x - x_0 > 0$ pro $x > x_0$. Větu 1 pak můžeme vyslovit takto:

V. 2. Je dána funkce

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{pro } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{pro } x > x_0 \end{cases}$$

(v bodě x_0 není definovaná). Tuto funkci lze pro $x \neq x_0$ vyjádřit rovnicí

$$y = \alpha(x) - \beta(x) \frac{|x - x_0|}{x - x_0},$$

kde $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ mají stejný význam jako ve větě 1.

Příklad 5. Vyjádřete jedinou rovnicí funkci z příkladu 2. Máme $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 2x - 1$, $x_0 = 0$ a z toho $\alpha(x) = 2x$, $\beta(x) = 1$. Podle V. 2 lze tedy danou funkci vyjádřit rovnicí

$$y = 2x - \frac{|x|}{x}$$

Zajímavý výsledek dostaneme, jsou-li dané funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ mnohokleny (tj. např. lineární nebo kvadratické funkce), které mají ve styčném bodě x_0 tutéž hodnotu (viz příklad 1). Nejprve si však musíme uvést některé poznatky z dělitelnosti mnohočlenů. Budeme zachovávat obvyklé označení mnohočlenů, tj.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Říkáme, že mnohočlen $P(x)$ je dělitelný dvojčlenem $x - x_0$, lze-li psát $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, kde $Q(x)$ je opět mnohočlen.

Příklad 6. Dokažte, že dvojčlen $x^m - x_0^m$, kde m je libovolné přirozené číslo, je dělitelný dvojčlenem $x - x_0$.

Dvojčlen $x^m - x_0^m$ lze rozložit takto:

$$x^m - x_0^m = (x - x_0)(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + x^{m-3}x_0^2 + \dots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}),$$

o čemž se lehce přesvědčíme roznásobením pravé strany. Dá se tedy psát ve tvaru $x^m - x_0^m = (x - x_0)Q(x)$, kde $Q(x)$ je mnohočlen, a to značí, že je dvojčlen $x^m - x_0^m$ dělitelný dvojčlenem $x - x_0$.

Příklad 7. Je dán mnohočlen $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$. Dosaďme-li $x_0 = 1$, vidíme, že $P(1) = 0$, tj. že číslo 1 je kořenem mnohočlenu $P(x)$. Ukážeme, že je $P(x)$ dělitelné dvojčlenem $x - 1$.

Máme totiž

$$\begin{aligned} P(x) - P(1) &= 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 - (2 - 4 + 3 - 1) = \\ &= 2x^3 - 2 - 4x^2 + 4 + 3x - 3 - 1 + 1 = 2(x^3 - 1) - 4(x^2 - 1) + \\ &\quad + 3(x - 1) \end{aligned}$$

Dvojčleny $x^3 - 1$ a $x^2 - 1$ rozložíme podle příkladu 5 a dostáváme

$$P(x) = 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 4(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1).$$

Po vytknutí $x - 1$ je konečně

$$P(x) = (x - 1)[2(x^2 + x + 1) - 4(x + 1) + 3] = (x - 1)(2x^2 - 2x + 1).$$

Mnohočlen $P(x)$ je tedy dělitelný dvojčlenem $x - 1$.

Výsledky příkladů 6 a 7 lze zobecnit. Vyslovme tuto pomocnou větu:

Je-li x_0 kořenem mnohočlenu $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, tj. $P(x_0) = 0$, pak je mnohočlen $P(x)$ dělitelný dvojčlenem $x - x_0$ a můžeme tedy psát $P(x) = (x - x_0) Q(x)$, kde $Q(x)$ je mnohočlen.

Je totiž

$$P(x) - P(x_0) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n - (a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n),$$

a po vhodném uspořádání máme

$$P(x) - P(x_0) = a_0(x^n - x_0^n) + a_1(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - x_0). \quad (2)$$

Na pravé straně jsou výrazy typu $a(x^m - x_0^m)$, které jsou podle příkladu 6 rozložitelné ve tvaru

$$a(x^m - x_0^m) = a(x - x_0)(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \dots + x x_0^{m-2} + x_0^{m-1}).$$

Ze všech členů na pravé straně rovnice (2) lze proto vytknout $x - x_0$, takže dostaneme $P(x) = (x - x_0) Q(x)$, kde $Q(x)$ je mnohočlen, který na pravé straně (2) zůstal po vytknutí $x - x_0$. Tím jsme dokázali naši pomocnou větu. V algebře se tato věta nazývá **v ě t a B e z o u t o v a** (čti bezutova).

Z věty 2 a z pomocné věty plyne:

V. 3. *Je dána funkce*

$$y = \begin{cases} P_1(x) & \text{pro } x < x_0 \\ P_2(x) & \text{pro } x \geq x_0, \end{cases}$$

kde $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou mnohočleny a $P_1(x_0) = P_2(x_0)$. Tuto funkci lze pro všechna x vyjádřit jedinou rovnicí

$$y = A(x) - B(x) |x - x_0|, \quad (3)$$

kde $A(x)$ a $B(x)$ jsou mnohočleny definované takto:

$$A(x) = \alpha(x) = \frac{1}{2} [P_1(x) + P_2(x)], \quad B(x) = \frac{\beta(x)}{x - x_0} = \frac{P_1(x) - P_2(x)}{2(x - x_0)}.$$

Vidíme, že $A(x)$ je mnohočlen. Ukážeme, že i $B(x)$ je mnohočlen. Podle předpokladu je $P_1(x_0) = P_2(x_0)$, tj. $P_1(x_0) - P_2(x_0) = 0$. To znamená, že x_0 je kořenem mnohočlenu $P_1(x) - P_2(x)$. Podle pomocné věty lze tento mnohočlen rozložit ve tvaru

$$P_1(x) - P_2(x) = (x - x_0) Q(x),$$

kde $Q(x)$ je mnohočlen. Pro $x \neq x_0$ máme

$$B(x) = \frac{(x - x_0) Q(x)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} Q(x),$$

což je rovněž mnohočlen. Je proto možné podle V. 2 vyjádřit danou funkci pro $x \neq x_0$ rovnicí

$$y = \alpha(x) - \beta(x) \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = \alpha(x) - \frac{\beta(x)}{x - x_0} |x - x_0|$$

a to je

$$y = A(x) - B(x) |x - x_0|$$

Podívejme se, co nám dává výsledná rovnice pro $x = x_0$. Napišme si ji ve tvaru $y = \frac{1}{2} [P_1(x) + P_2(x)] - B(x) |x - x_0|$. Pro $x = x_0$ odsud dostáváme $y_0 = \frac{1}{2} [P_1(x_0) + P_2(x_0)]$. Ježto je podle předpokladu $P_1(x_0) = P_2(x_0)$, máme $y_0 = \frac{1}{2} [P_2(x_0) + P_2(x_0)] = P_2(x_0)$. Danou funkci je tedy možné vyjádřit rovnicí (3) pro všechna x .

Příklad 8. Vyjádřete jedinou rovnicí funkci z příkladu 1. Je tu $P_1(x) = -x$, $P_2(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $P_1(0) = P_2(0) = 0$, předpoklady věty 3 jsou splněny. Je proto dále $A(x) = \frac{1}{2} (x^2 - x)$, $B(x) = \frac{-x - x^2}{2x} = -\frac{1}{2} (x + 1)$ a danou funkci můžeme podle V. 3 vyjádřit pro všechna x jedinou rovnicí

$$y = \frac{1}{2} (x^2 - x) + \frac{1}{2} (x + 1) |x|.$$

Obraťme se nyní k funkcím, které jsou definovány třemi vzorci pro různá x . Ukážeme si, že i tyto funkce lze vyjádřit jedinou rovnicí pro všechna x , pro něž jsou definovány. Platí tu podobné věty jako V. 1, V. 2 a V. 3. Vyslovme např. větu obdobnou s větou 2:

V. 4. Je dána funkce

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{pro } x < x_1 \\ f_2(x) & \text{pro } x_1 < x < x_2 \\ f_3(x) & \text{pro } x > x_2, \end{cases}$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$ a $f_3(x)$ jsou dané známé funkce, definované pro všechna x , a $x_1 < x_2$ jsou daná čísla; daná funkce y není definovaná v bodech x_1 a x_2 . Tuto funkci lze vyjádřit rovnicí

$$y = \alpha(x) - \beta(x) \frac{|x - x_1|}{x - x_1} - \gamma(x) \frac{|x - x_2|}{x - x_2}, \quad (4)$$

kde

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_3(x)], \beta(x) = \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)],$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} [f_2(x) - f_3(x)].$$

Je-li totiž $x < x_1$ (a tedy i $x < x_2$), je $|x - x_1| = -(x - x_1)$,

$$|x - x_2| = -(x - x_2),$$

odkud

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} [f_1(x) + f_3(x)] - \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] \frac{-(x - x_1)}{x - x_1} - \frac{1}{2} [f_2(x) - \\ &- f_3(x)] \frac{-(x - x_2)}{x - x_2} = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_3(x)] + \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)] + \\ &+ \frac{1}{2} [f_2(x) - f_3(x)] = f_1(x); \end{aligned}$$

stejným způsobem dostaneme, že pro $x_1 < x < x_2$ je z rovnice (4) $y = f_2(x)$ a pro $x > x_2$ je podle rovnice (4) $y = f_3(x)$, což souhlasí s tím, jak byla daná funkce definovaná.

Na závěr si ještě probereme případ, když je funkce definována lomenou čarou, tj. platí-li $f_1(x) = k_1x + q_1$ (pro $x < x_1$), $f_2(x) = k_2x + q_2$ (pro $x_1 \leq x < x_2$), $f_3(x) = k_3x + q_3$ (pro $x \geq x_2$), přičemž $f_1(x_1) = f_2(x_1)$, $f_2(x_2) = f_3(x_2)$. Podle věty 4 máme $\alpha(x) = \frac{1}{2} (k_1x + q_1 + k_3x + q_3) = \frac{1}{2} [(k_1 + k_3)x + q_1 + q_3]$ a dále je $\beta(x) = \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x + q_1 - q_2] = \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (k_1 - k_2)x_1]$, neboť z rovnosti $f_1(x_1) = f_2(x_1)$, tj. $k_1x_1 + q_1 = k_2x_1 + q_2$, plyne $q_1 - q_2 = -(k_1 - k_2)x_1$. Je tedy $\beta(x) = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) (x - x_1)$ a podobně $\gamma(x) = \frac{1}{2} (k_2 - k_3) (x - x_2)$.

Podle věty 4 můžeme pro $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ vyjádřit naši funkci rovnicí

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} [(k_1 + k_3)x + q_1 + q_3] - \frac{1}{2} (k_1 - k_2) (x - x_1) \frac{|x - x_1|}{x - x_1} - \\ &- \frac{1}{2} (k_2 - k_3) (x - x_2) \frac{|x - x_2|}{x - x_2} \end{aligned}$$

a po krácení máme

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} [(k_1 + k_3)x + q_1 + q_3] - \frac{1}{2} (k_1 - k_2) |x - x_1| - \\ &- \frac{1}{2} (k_2 - k_3) |x - x_2|; \end{aligned} \quad (5)$$

této rovnice lze zřejmě použít i v případě, že některá konstanta k_i je rovna nule. Přesvědčte se dosazením, že je rovnice (5) správná i pro x_1 a x_2 a že tedy máme danou funkci y vyjádřenou jedinou rovnicí pro všechna x . Ukážeme si nyní příklad na použití rovnice (5).

Příklad 9. Vyjádřete jedinou rovnicí funkci z příkladu 3. Máme tu $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $f_1(-1) = -2$, $f_2(-1) = -2$, $f_2(1) = f_3(1) = 2$. Vidíme, že $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$, $q_1 = -2$, $q_3 = 2$. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (5), je funkce z příkladu 3 vyjádřena rovnicí

$$y = |x + 1| - |x - 1|$$

pro všechna x .

Úloha. Vyslovte větu obdobnou s větou 2 a větou 4 pro funkci, která je definována pro různá x pomocí čtyř vzorců. Napište rovnici dané funkce v případě, že všechny čtyři části jsou přímkové.

Aleš Tondl, České Budějovice:

Neurčité rovnice prvního stupně

(Dokončení)

Tím jsme dokázali, že každé řešení x , y má tvar právě dokázaných vzorců. Zbývá ještě dokázat, že každá dvojice čísel x_o , y_o , které dostaneme ze vzorců (3), (4) pro celé k jsou řešením rovnice (1).

Abychom si ověřili správnost, dosadíme hodnoty $x_o = x_1 - bk$ a $y_o = y_1 + ak$ do rovnice (1). Obdržíme

$$\begin{aligned} ax_o + by_o &= a(x_1 - bk) + b(y_1 + ak) = ax_1 - abk + by_1 + bak = \\ &= ax_1 + by_1 = c, \end{aligned}$$

z čehož je patrné, že x_o a y_o je řešením naší rovnice (1).

Poněvadž diofantické rovnice mají vždy nekonečně mnoho řešení (máme na mysli jen řešení celými čísly) a protože tyto rovnice často pocházejí z praxe, kde se nevyskytují záporná čísla, omezujeme někdy řešení rovnice jen pro kladná čísla.

Při tomto omezení nemusí vždy existovat řešení rovnice (1). Taková možnost nastává tehdy, je-li součet koeficientů větší než absolutní člen, $a + b > c$.

První podmínkou, aby rovnice (1) měla řešení jen kladnými celými čísly, je platnost nerovnosti $a + b \leq c$. Dá se dokázat, že potom počet kladných řešení je o 1 větší než celistvá hodnota podílu $\frac{c}{ab}$.

Jestliže v rovnici (1) je $b < 0$, má rovnice tvar

$$ax - b_1y = c, \text{ kde } b_1 = -b > 0$$

a vzorce (3) a (4) mají tvar

$$x = x_1 + b_1k \quad \text{a} \quad y = y_1 + ak.$$

Jest patrné, že v tomto případě je nekonečně mnoho řešení kladnými čísly. Ukážeme si nyní několik řešení neurčitých rovnic, které pro zvláštní vztah mezi koeficienty a, b, c se dají řešit elementárními metodami.

a) Má-li rovnice $ax + by = 1$ řešení x_1, y_1 , potom součiny cx_1 a cy_1 jsou řešením rovnice $ax + by = c$.

D ů k a z. $ax_1 + by_1 = 1$.

Vynásobíme-li rovnici číslem c , obdržíme

$$\begin{aligned} acx_1 + bcy_1 &= c \\ c(ax_1 + by_1) &= c \\ c \cdot 1 &= c, \text{ což bylo dokázat.} \end{aligned}$$

V některém případě může být tedy výhodnější, řešíme-li místo rovnice (1) rovnici, jejíž pravá strana je rovna 1.

b) Někdy je též výhodné zavést za původní neznámé x, y , nové u, v , které jsou s původními spojeny vztahy.

$$\begin{aligned} x + y &= 2u \\ x - y &= 2v \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \end{aligned}$$

a po dosazení do

$$ax + by = c$$

je

$$\begin{aligned} a(u + v) + b(u - v) &= c \\ au + av - bv + bu &= c \\ u(a + b) + v(a - b) &= c. \end{aligned}$$

Obdržíme tedy novou rovnici, jejímiž koeficienty je součet a rozdíl původních koeficientů, která se v některých případech může velmi snadno řešit.

P ř í k l a d. Řešte rovnici $17x - 11y = 12$.

Za x a y zavedeme nové neznámé u a v tak, aby

$$x = u + v \quad \text{a} \quad y = u - v,$$

obdržíme

$$\begin{aligned} 17(u + v) - 11(u - v) &= 12 \\ 17u + 17v - 11u + 11v &= 12 \\ 6u + 28v &= 12 \end{aligned}$$

a po zkrácení

$$3u + 14v = 6;$$

tato rovnice má řešení

$$u_1 = 2, \quad v_1 = 0$$

původní rovnice, použijeme-li hned vzorců (3) a (4), má řešení

$$\begin{aligned}x &= 2 + 11k \\ y &= 2 + 17k,\end{aligned}$$

kde k je libovolné celé číslo.

c) Jestliže v rovnici $ax + by = c$ je c násobkem některého z koeficientů, buď $c = am$, nebo $c = bm$,

kde m je celé číslo, změní se po dosazení rovnice (1) v rovnici

$$\begin{aligned}\text{buď } ax + by &= am, & \text{nebo } ax + by &= bm \\ ax - am + by &= 0 & ax + by - bm &= 0 \\ a(x - m) + by &= 0 & ax + b(y - m) &= 0,\end{aligned}$$

z kterých je okamžitě patrné jedno řešení

$$\begin{aligned}x_1 &= m & x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 & y_1 &= m,\end{aligned}$$

odkud se ostatní řešení určí již známými vzorci (3) a (4).

d) Je-li absolutní koeficient c dělitelný $a \pm b$, tedy platí-li

$$c = m(a \pm b),$$

kde m je celé číslo, promění se rovnice (1) v rovnici

$$\begin{aligned}ax + by &= m(a \pm b) \\ ax + by &= ma \pm mb \\ ax + by - ma \mp mb &= 0 \\ a(x - m) + b(y \mp m) &= 0,\end{aligned}$$

z které plyne okamžitě jedno řešení

$$\begin{aligned}x_1 &= m \\ y_1 &= \pm m\end{aligned}$$

a s použitím vzorců (3) a (4) všechna ostatní řešení rovnice (1).

e) Jestliže v rovnici (1) je $b = \pm(a + 1)$, změní se rovnice (1) na rovnici

$$\begin{aligned}ax + by &= c \\ ax \pm (a + 1)y &= c \\ ax \pm ay \pm y &= c \\ a(x \pm y) \pm y &= c,\end{aligned}$$

odkud je patrné, že

$$\begin{aligned}y_1 &= \pm c \\ x_1 \pm y_1 &= 0,\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}x_1 &= -c \\ y_1 &= \pm c\end{aligned}$$

a tedy ze vzorců (3) a (4) obdržíme

$$\begin{aligned}x &= -c - bk \\y &= \pm c + ak,\end{aligned}$$

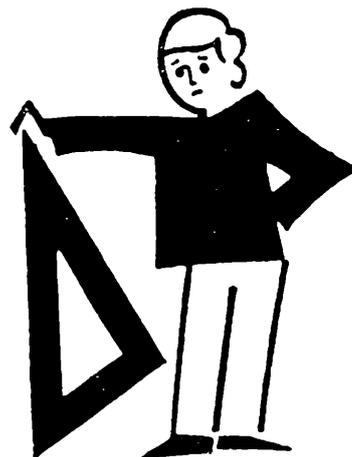
kde k je libovolné celé číslo.

Výše uvedených metod se dá použít tehdy, splňují-li koeficienty určité předepsané podmínky. To znamená, že se vyskytují neurčité rovnice, které nelze řešit žádnou výše popsanou metodou. Vybral jsem tyto způsoby řešení proto, že řeší neurčité rovnice velmi jednoduše. Jsou však známá i obecná řešení neurčitých rovnic, například pomocí *metody Fermatovy, řetězových zlomků* apod., které řeší neurčité rovnice bez ohledu na vztahy mezi koeficienty. Důkazy těchto řešení však vyžadují určité znalosti z teorie čísel, a proto jsem tato řešení vynechal.

Deskriptivní geometrie

Luděk Granát, Praha:

Použití geometrie v automatizaci obrábění

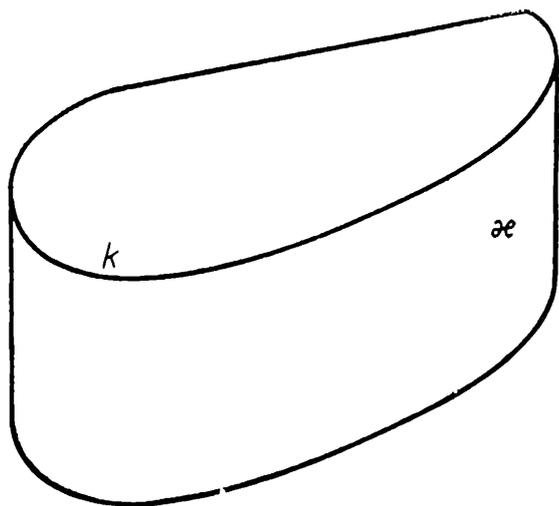


Jednou z nejnovějších metod, které podstatně zvyšují produktivitu práce v oboru obrábění, je číslicové řízení obráběcích strojů. Řekneme si něco o geometrických otázkách spjatých s programováním dráhy středu frézy, která má obrábět danou součástku.

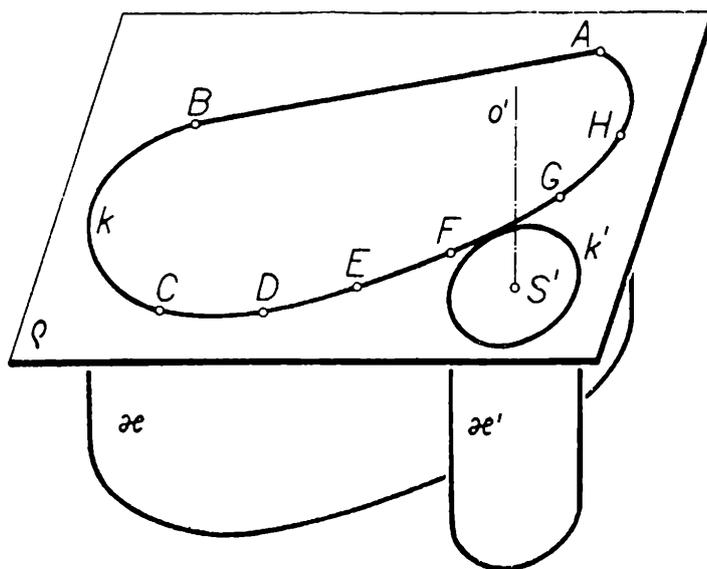
V dalších úvahách budeme předpokládat, že k řízení je použito tzv. *lineárního interpolátoru*. Je to zařízení, které dodává příslušnému řídicímu ústrojí frézky takové průběžné informace, že pohyb středu frézy mezi dvěma po sobě následujícími body, tzv. *opěrnými body*, se děje po přímce. Tyto opěrné body tvoří sled bodů, jejichž postupným spojováním úsečkami dostáváme lomenou čáru, která nahrazuje „ideální“ dráhu středu frézy. Úkolem programátora je stanovit souřadnice opěrných bodů. Tyto souřadnice lze buď vypočítat, nebo odměřit z výkresu. Výpočty obsahují často velmi mnoho operací a pokud

nemají trvat příliš dlouhou dobu, je tedy třeba k jejich zvládnutí rychlých samočinných počítačů. Grafické metody mají vůči nim jeden základní nedostatek, a to malou přesnost. Jestliže však grafické řešení zabezpečuje potřebnou přesnost¹⁾, a to zvláště v případech, kdy tvar součástky je dán graficky, pak použití grafických metod je výhodné. Výsledky dostáváme rychle a bez použití drahých zařízení. V tomto článku se budeme zabývat grafickými metodami.

Mějme součástku znázorněnou na obr. 1. Těleso, které máme obráběním získat, je z geometrického hlediska kolmý válec κ , jehož podstavná



Obr. 1



Obr. 2

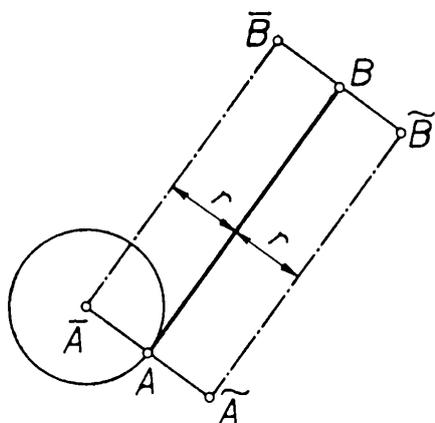
hrana k leží v rovině ρ a sestává z úsečky AB , kruhového oblouku \widehat{BC} a křivky $CDEFGHA$, z níž známe jen uvedené body, jdoucí za sebou v daném sledu. Obráběcím nástrojem je válcová fréza, která při rotaci kolem své osy, rovnoběžné se stranami válce κ , představuje rotační válec o podstavné hraně k' (obr. 2). Při obrábění tento válec κ' obaluje obráběné těleso κ , to znamená, že v každé své poloze se dotýká podél své strany tělesa κ . Protneme-li pláště obou válců, které jsou v pracovní poloze, libovolnými rovinami rovnoběžnými s rovinou ρ , jsou pak všechny řezy na válci κ , resp. κ' , shodné s křivkou k , resp. k' . Je zřejmé, že ve všech těchto rovinách je vzájemná poloha zmíněných řezů stejná. Stačí tudíž uvažovat dvojici řezů v jedné z těchto rovin, např. v rovině ρ křivky k a k' . Křivku k nazveme obrysem součástky a střed kružnice k' středem frézy. Veškerá vyšetřování se pak budou týkat jedné roviny. Obrábění tohoto druhu nazýváme rovinným, na rozdíl od prostorového, kde obráběné těleso není válec a příslušné vztahy jsou složitější.

¹⁾ Přesnost lze zvětšit často vhodnou volbou měřítka, avšak i toto má své omezení.

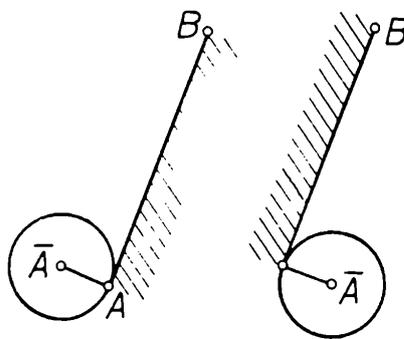
Řešení úlohy - od grafického zadání obrysu až po nalezení vhodných opěrných bodů dráhy středu frézy - se rozpadá na několik částí. Při jejich probírání nebudeme mít na mysli právě součástku znázorněnou na obr. 1, ale jednoduché případy, které se při rovinném obrábění vyskytují.

Určení ekvidistant

Máme-li při obrábění dostat úsečku AB v daném sledu jako část obrysu (obr. 3), pak střed frézy se musí pohybovat po úsečce \overline{AB} nebo $\tilde{A}\tilde{B}$ rovnoběžné s úsečkou AB a vzdálené od ní o poloměr frézy r . K určení dráhy středu frézy musíme ještě udat, z které strany se má obrábět. Stojíme-li v bodě A a hledíme ve směru na B , pak máme-li



Obr. 3



Obr. 4a, b

mít střed frézy po levé ruce, říkáme, že obrábíme zleva (obr. 4a), máme-li střed frézy po pravé ruce, říkáme, že obrábíme zprava (obr. 4b). Můžeme si ještě umluvit, že v případě obrábění zleva budeme vždy brát velikost poloměru frézy kladně, v případě obrábění zprava záporně. Podle této úmluvy přísluší k úsečce AB a orientovanému poloměru r jediná úsečka \overline{AB} , po níž se musí při požadovaném obrábění pohybovat střed frézy. Úsečku \overline{AB} nazveme ekvidistantou úsečky AB . Krajní body \overline{A} , \overline{B} , které leží na kolmicích vztyčených k úsečce AB v jejich krajních bodech, nazveme počáteční a koncový bod ekvidistanty.

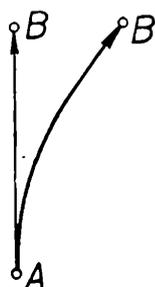
Obecně pak definujeme ekvidistantu dané křivky jako dráhu středu kružnice, která se po této křivce kutálí. Jelikož v každé poloze má kutálející se kružnice s danou křivkou společnou tečnu, a tedy i normálu, vytíná daná křivka a její ekvidistanta na těchto normálách stejně dlouhé úseky. Z této vlastnosti vyplývá tedy název ekvidistanty²⁾.

Z předcházejících úvah plyne, že dráha středu frézy pro daný obrys

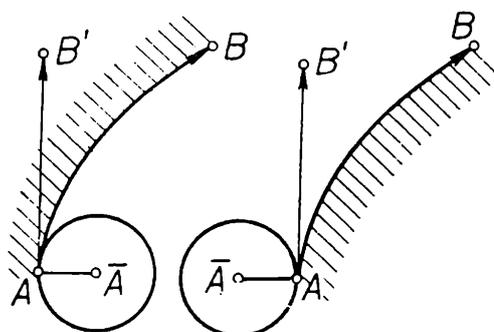
²⁾ Aequus (lat.) = stejný, distantia (lat.) = vzdálenost.

je totožná s ekvidistantou tohoto obrysu. Dále pak při obrábění zleva (zprava) bude dráha středu frézy totožná s větví ekvidistanty, která spolu s obrysem vytíná na jeho normálách úsečku r kladné (záporné) velikosti. Přitom orientace obrysu a příslušné ekvidistanty je táž.

Zatím jsme definovali obrábění zleva a zprava pro úsečku. Obdobně budeme postupovat u orientovaného oblouku křivky AB . Nahradíme totiž tento oblouk libovolnou orientovanou úsečkou AB' , která leží na

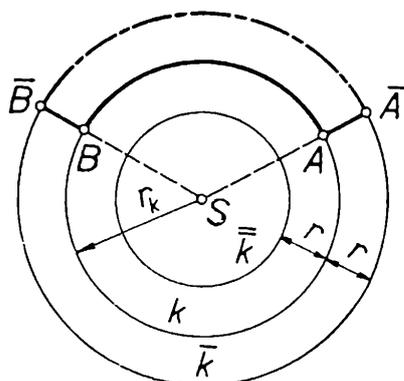


Obr. 5

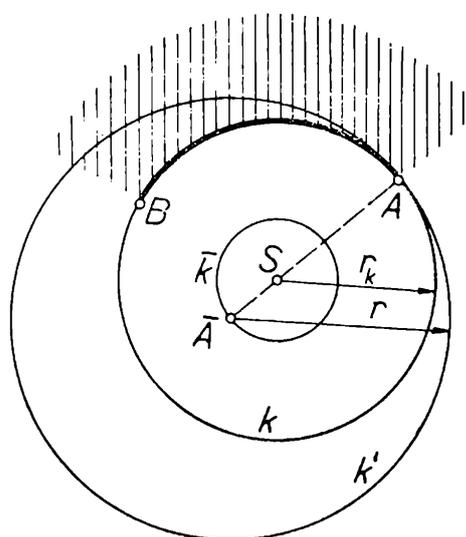


Obr. 6 a, b

tečně křivky v bodě A a jejíž počáteční bod A je totožný s počátečním bodem oblouku AB . Orientace úsečky AB' a oblouku AB je táž, tj. pohybujeme-li se v kladném smyslu z bodu A místo po křivce po její tečně, dostáváme se do bodu B' (obr. 5). Říkáme, že obrábíme oblouk



Obr. 7



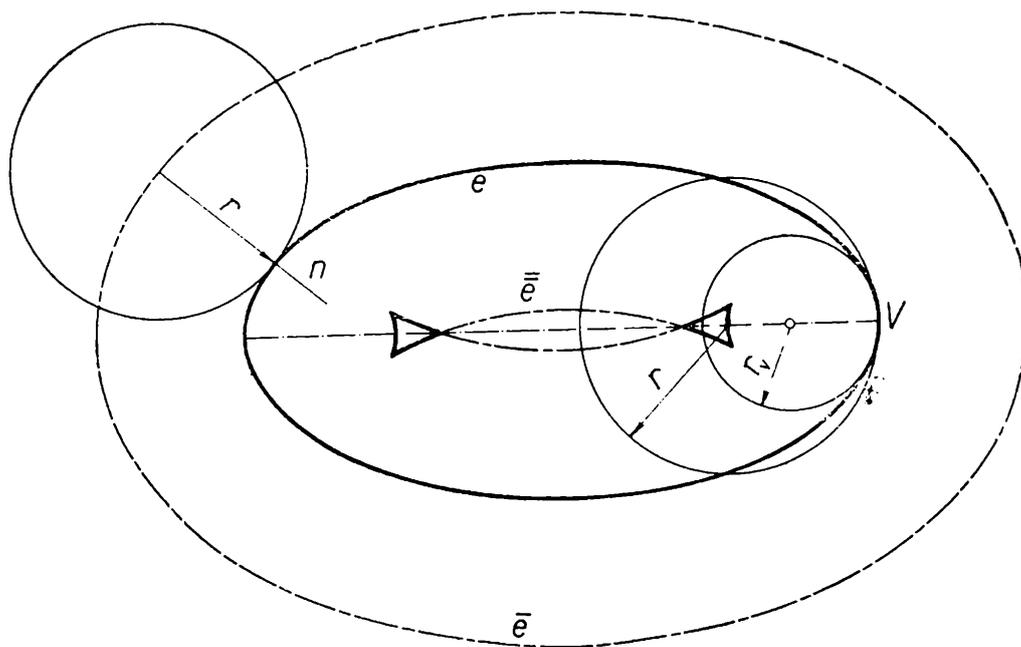
Obr. 8

AB zprava (obr. 6a), resp. zleva (obr. 6b), jestliže počáteční poloha frézy (v bodě A) přísluší zároveň obrábění úsečky AB' zprava, resp. zleva.

Zabývejme se nyní ekvidistantami některých běžně se vyskytujících oblouků obrysu.

Jak se snadno přesvědčíte, skládá se ekvidistanta kružnice k ze dvou s ní soustředných kružnic \bar{k} , $\bar{\bar{k}}$, jejichž poloměry se liší od poloměru r_k

kružnice k o konstantu r (poloměr frézy); pro $r = r_k$ dostáváme bod a kružnici. Je-li tedy částí obrysu orientovaný kruhový oblouk AB kružnice k , pak dráha středu frézy bude kruhový oblouk $A\bar{B}$, ležící na jedné z kružnic $\bar{k}, \bar{\bar{k}}$ (obr. 7). Na které z nich bude ležet, to zřejmě záleží na orientaci oblouku AB a na tom, zda obrábíme zprava či zleva. Na obr. 7 obrábíme zprava kladně orientovaný oblouk AB . Nemusíme jistě zvlášť dokazovat, že body \bar{A}, \bar{B} leží na normálách kružnice (to jsou však její průměry) v jejích bodech A, B .



Obr. 9

Jestliže fréza při obrábění nemá žádný bod uvnitř kružnice k , na níž leží obráběný oblouk, mluvíme o vnějším frézování, v opačném případě o vnitřním frézování. Při vnitřním frézování musí vždy být poloměr r_k kružnice k větší než absolutní hodnota poloměru $|r|$ frézy. Je-li $r_k < |r|$, zabírá fréza za stanovený obrys a dochází k tzv. podfrézování (obr. 8).

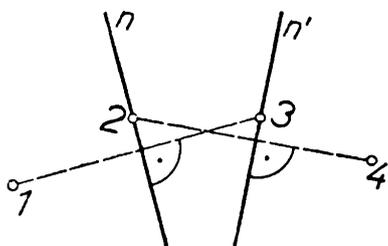
Konstrukce ekvidistanty elipsy není tak jednoduchá jak tomu bylo u kružnice. Hned předešleme, že to nebude kuželosečka, ale křivka složitější, tzv. t o r o i d a. Musíme ji sestrojovat bodově. Při tom vyjdeme z vlastnosti ekvidistanty, že vytíná s elipsou na normálách elipsy úsečky konstantní délky r (obr. 9).

Při vnějším frézování - u elipsy vnější a vnitřní frézování definujeme analogicky jako u kružnice - nenastává žádná potíž. Při vnitřním frézování dochází v okolí hlavních vrcholů elipsy k podfrézování, je-li absolutní hodnota $|r|$ poloměru frézy větší než poloměr r_V hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu V elipsy (obr. 9). Odtud plyne, že

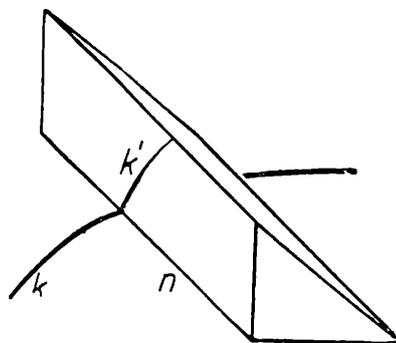
nelze vždy vyfrézovat součástku o daném obrysu frézou předem daného poloměru. V dalším budeme uvažovat jen ty případy, kdy příslušné frézování je možné.

Obdobným způsobem jako u elipsy můžeme postupovat i u obrysů, jejichž části se skládají z oblouků parabol a hyperbol.

Uvažujme nyní řadu bodů $1, 2, \dots, N$, které leží na nenarýsované kuželosečce, pro niž však neznáme vrcholy ani ohniska. Konstrukce tečen a normál kuželosečky v těchto bodech není snadná, a proto saháme raději k přibližným konstrukcím. Obvykle nahrazujeme normálu, např. v bodě 2, kolmicí (procházející bodem 2) ke spojnici bodů 1 a 3, normálu v bodě 3 kolmicí ke spojnici bodů 2 a 4 atd. (obr. 10). Abychom dostali přímky, které nahrazují normály v prvním a posledním bodě, je nutné ještě zvolit body 0 a $N + 1$ tak, aby ležely na předpokládaném prodloužení uvažované křivky za dané body 1 a N .



Obr. 10



Obr. 11

Je-li obrysová křivka vyrýsována, lze použít některé z přibližných konstrukcí normál³⁾, např. pomocí speciálního zrcadlového pravítka (obr. 11). Hrana n pravítka leží v normále křivky k , jestliže tato křivka a její zrcadlový obraz k' netvoří na hraně n hrot.

Podobně jako u kuželoseček používáme přibližných konstrukcí také v případě, kdy obrysem je empirická křivka (bez výjimečných bodů, jako jsou např. body vratu), která je buď vyrýsována, nebo je dána svými jednotlivými body. (Pokračování)

Navštivte Národní technické muzeum v Praze

Výstava infračerveného záření bude otevřena v Národním technickém muzeu v druhé polovině prosince. Návštěvníci uvidí též navádění raket na cíl.

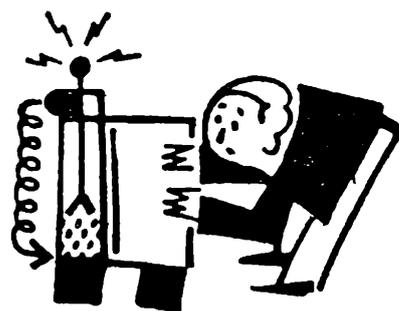
Muzeum v Praze 7, Kostelní 42 je přístupno od 10 do 17 hodin denně mimo pondělí.

Redakce

³⁾ Bližší viz v článku dr. Kubálkové, Přibližné konstrukce, 9. číslo 36. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních.

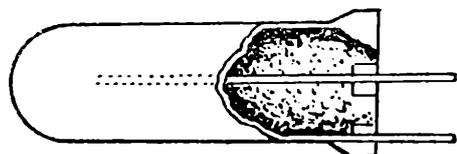
Prof. dr. Vilém Santholzer, KU,
Hradec Králové:

Fyzikální podstata měřicích zařízení pro ionisační metody



(Podstata nejzákladnějších dosimetrických přístrojů, I. část.) (Dokončení)

Zvláštním druhem ionisační komory tohoto typu jsou komory k měření radioaktivních plynů, především radonu (rádiové emanace). Komory jsou obvykle válcové a osovou sběrnou elektrodou ve tvaru silného drátu. Komora musí být vzduchotěsná a má dva kohouty, aby ji bylo možno evakuovat a převádět do ní radon. Komora se kalibruje nejlépe radonem



Obr. 5. Náprstková ionisační komora k měření velkých intenzit záření gama.

ze standardního roztoku rádia (asi 10^{-8} g Ra). Malý přenosný přístroj tohoto typu se nazývá emanometr, např. kufříkový emanometr Běhounkův.

Dosah paprsků beta ve vzduchu je i několik metrů, neboť ionisační hustota na dráze elektronu je mnohem menší než u paprsků alfa, které jsou heliovými jádry. Ionisační hustota je počet párů iontů na 1 cm dráhy, popř. na $1 \mu\text{m}$ tkáně v biologii. V ionisační komoře se využívá tudíž jen části energie paprsků beta, a provádějí se srovnávací měření s preparátem kvalitativně stejným o známé aktivitě. Paprsky beta mají větší tvrdost, tj. procházejí většími vrstvami hmot než paprsky alfa, a proto není nutné zářiče vkládat dovnitř komory. Částice beta se vpouštějí do ionisačního prostoru hliníkovým nebo celofánovým okénkem. Komory (železné, mosazné, hliníkové) jsou v podstatě podobné komorám na měření aktivity alfa, jejich rozměry jsou však větší, např. $30 \times 30 \times 30$ cm, aby získaný náboj vzhledem k malé ionisační hustotě byl postačující. V tzv. tlakové komoře, naplněné plynem pod vyšším tlakem, je možno dráhu rychlé částice zkrátit z metrů na decimetry a využít pak všech iontů.

Na obr. 4 je komora k měření malých intenzit záření gama a tvrdého záření beta, na obr. 5 je náprstková komora k měření vyso-

kých intenzit záření gama. K měření fotonového záření, tj. paprsků Roentgenových a gama, je možno používat podobných typů ionizačních komor jako pro záření korpuskulární (záření částicovité, částice alfa, beta, pozitrony.) Při konstrukci komor pro záření rentgenové a gama je nutno počítat s materiálem, z něhož je komora zhotovena, s vlivem stěn komory. Fotonové paprsky totiž neionisují přímo, nýbrž prostřednictvím sekundárních elektronů (sekundárního záření beta), které uvolňují z atomů. Vlnivé záření vytrhává elektrony i ze stěn komory, zvláště jsou-li zhotoveny z těžkých kovů. I tyto elektrony ionisují vzduch uvnitř komory. Přídavná ionisace tvoří podstatný podíl, na ionisaci celkové a někdy může být značně větší než ionisace ve vzduchu uvnitř komory. Vliv stěn komory není nutno respektovat jen v případě měření srovnávacích, kdy např. radiový preparát srovnáváme s kvalitativně stejným preparátem (standardem). Vliv stěn komory je nutno respektovat při měření dávkového záření nebo dávkové intenzity, kdy je nutno přesně definovat objem vzduchu, v němž se uplatňuje pohlcená zářivá energie. Vyplývá to i z definice jednotky r (rentgenu) pro dávku záření: je to taková dávka záření rentgenového nebo gama, jehož přidružená korpuskulární emise, tj. sekundární elektrony, vytvoří v 0,001 293 g vzduchu (tj. v 1 cm³ vzduchu za normálního tlaku a při teplotě 0° C) ionty, nesoucí úhrnem po jedné elektrostatické jednotce náboje obojího znaménka.

Přídavné ionisaci vlivem stěn komory může se zabránit tím, že svazek paprsků se přesně vycloní a prochází komorou, aniž se dotýká stěn. Komor tohoto typu, tzv. v z d u c h o v ý c h nebo s u d o v ý c h k o m o r užívá se k přesným cejchovním měřením.

Běžné typy ionizačních komor k měření paprsků rentgenových a gama mají stěny z látek ekvivalentních vzduchu, tj. v nichž sekundární elektrony vznikají stejně jako ve vzduchu. Vzdušný prostor komory nebo d o s i m e t r i c k é k o m ů r k y k proměřování zářivých polí a k individuální ochraně pracovníků se zářením musí být obklopen takovým pevným materiálem, aby jeho interakce (vzájemné působení) s primárním i sekundárním zářením bylo stejné jako s nehybnou stěnou vzduchu. Komůrky z materiálu ekvivalentního vzduchu slují n á p r s t k o v é k o m ů r k y. Podle teorie je taková komůrka považována za malou dutinu naplněnou plynem uvnitř pevné látky. Existuje i o n i s a č n í p o d o b n o s t mezi dutinou naplněnou plynem a pevnou látkou, jejíž tvar je geometricky podobný objemu plynu. Pro větší komory se užívá pertinaxových trubek, jejichž vnitřní stěna je opatřena grafitovým povlakem a tudíž je vodivá. Malé ionizační komůrky se vyrábějí ze směsi bakelitu a tuhy.

Ionizační komory k měření neutronů jsou plněny látkami, jejichž atomy účinkem neutronů uvolňují silně ionisující korpuskulární záření. Používá se jednak potahu na stěnách komory (sloučeniny boru, uranu

235 nebo plutonia), jednak plyných sloučenin, jimiž se komory plní.

Neozářenou ionizační komorou by vlastně neměl procházet proud, neboť za ideálních podmínek je vzduch dokonalým izolátorem. Přesto se vždycky i v prostoru neozářeném vyskytuje nepatrný proud spontánní nebo samovolný spád. Vzniká následkem slabé ionisace způsobené zářením přirozených radioaktivních prvků, které ve velmi nepatrných množstvích se vyskytují ve všech látkách. Slabou ionisací působí i kosmické paprsky. Protože ionisace nikdy nemůže být dokonalá, vzniká i tak slabý proud. Celkový spontánní proud je nutno pečlivě změřit a při každém měření odečítat od naměřeného proudu ionizačního.

Inž. dr. Václav Šindelář, Praha:

Nová měrová soustava

(Pokračování)

Nyní několik poznámek k odvozování dílčích a násobných jednotek složených. Vcelku jednoduchý postup je u veličin, jež ve svém rozměru mají malý počet základních jednotek. Např. u rychlosti (v), zrychlení (a), elektrického náboje (Q), intenzity magnetického pole (H), teplotní vodivosti (α), hustoty zářivého toku (J) aj. V nich zpravidla postačí při tvorbě odvozované dílčí nebo násobné jednotky použít normálně vytvořeného dílu nebo násobku jedné ze základních jednotek, obsažených v příslušné hlavní jednotce. Probereme si jednotlivé uvedené případy.

Příklad. Rozměrová rovnice rychlosti translačního pohybu zní:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = L \ L^{-1},$$

(v) = 1 m . s⁻¹, je jednotka hlavní.

Odvozenými jednotkami rychlosti jsou např.

(v) = (10³ m) . s⁻¹ = 1 km . s⁻¹,

(v) = (10⁻³ m) . s⁻¹ = 1 mm . s⁻¹ zaměňujeme-li jednotku délky, nebo

(v) = 1 m . (60 s)⁻¹ = 1 m min⁻¹,

(v) = 1 m (3600 s)⁻¹ = 1 m . h⁻¹ měníme-li jednotku času, nebo

(v) = (10³ m) . (3600 s)⁻¹ = 1 km . h⁻¹ měníme-li jednotku obou veličin, vystupujících v rozměrové rovnici.

V prvním z právě uvedených příkladů jsme psali rozměrovou rovnici, v níž hranatými závorkami, v nichž se uvádí značka některé veličiny, naznačujeme, že v uvedené rovnici přihlížíme pouze k rozměrům těchto veličin a ne k jejich velikosti nebo číselným faktorům. Rozdíl je ihned patrný, napíšeme-li normální a rozměrovou rovnici pro obsah kruhu:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \quad [S] = [d]^2 = L^2$$

ve druhé (rozměrové) rovnici vynecháváme číselné faktory. Pokračujeme ve zmíněných příkladech.

Příklady.
$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[s]}{[t][t]} = \frac{[s]}{[t]^2} = L \ T^{-2},$$

(a) = 1 m . s⁻² je hlavní jednotka zrychlení; odvozenými jednotkami jsou například:

(a) = (10³ m) . s⁻² = 1 km . s⁻²,

(a) = (10⁻³ m) . s⁻² = 1 mm . s⁻² měníme-li jednotky délky,

(a) = 1 m . (60 s)⁻² = 1 m . min⁻² apod. měníme-li jednotku času,

(a) = (10³ m) . (3600 s)⁻² = 1 km . h⁻² měníme-li jednotky délky i času.

Přestože vyjadřování rychlosti v jednotkách km . h⁻¹ je v praxi velmi běžné a vžitě - snadno by bylo možno použít ovšem jiné jednotky, vhodnější z měrového hlediska - mohlo by se zdát vyjadřování zrychlení v jednotkách km . h⁻² jako nepraktické. Mohli bychom se proto setkat s jednotkou vytvořenou velmi nevhodně i když by se snad zdála být praktickou. Je to jednotka

$$(a) = \frac{(v)}{(t)} = \frac{1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{\text{s}^{-1}} = 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{s}^{-1},$$

jež obsahuje na jednu jednotku času ale dvě: hodinu a sekundu. Vytváření takových jednotek není správné a je velmi škodlivé z hlediska měrové jednotnosti.

Dalšími příklady tvorby násobných a dílčích jednotek jsou:

[Q] = [I] . [t] = I . T,

(Q) = 1 A . s = 1 C = 1 coulomb je hlavní jednotka elektrického náboje.

Odvozenými jsou např.:

(Q) = (10⁻³ A) . s = 1 mAs = 1 mC,

(Q) = (10³ A) . s = 1 kA . s = 1 kC apod.

[H] = $\frac{[I][l]}{[l]^2} = \frac{[I]}{[l]} = I \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot I,$

(H) = 1 A . m⁻¹ je hlavní jednotkou intenzity magnetického pole. Odvozenými jednotkami jsou např.:

(H) = (10³ A) . m⁻¹ = 1 kA . m⁻¹,

(H) = 1 A . (10⁻³ m)⁻¹ = 1 A mm⁻¹,

(H) = (10³ A) (10⁻³ m)⁻¹ = 1 kA . mm⁻¹ apod.

Je ovšem jistě samozřejmé, že vytvoření jednotky

(H) = (10⁻³ A) (10⁻³ m)⁻¹ = 1 mA . mm⁻¹

by nemělo žádného smyslu, protože

$$(H) = 1 \text{ mA} \cdot \text{mm}^{-1} = \frac{10^{-3} \text{ A}}{10^{-3} \text{ m}} = \frac{\text{A}}{\text{m}} = \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$$

její velikost je stejná s velikostí hlavní jednotky.

Dalším příkladem je teplotní vodivost α :

Její rozměr je

$$[\alpha] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]} = \frac{\frac{[Q] \cdot [l]}{[S] \cdot [\tau] \cdot [t]}}{\frac{[m]}{[V]} \cdot \frac{[Q]}{[m][t]}} = \frac{[Q][l][l]^3[m][t]}{[Q][l]^2[\tau][t][m]} = [l]^2[\tau]^{-1} = L^2 T^{-1}.$$

Přitom v rozměrové rovnici značí λ tepelnou vodivost, ρ hustotu, c měrné teplo, Q teplo (energie), l délku (tloušťku stěny a délkový rozměr pro vyjádře-

ní plošného obsahu a objemu), S plošný obsah, τ čas, t teplotu, m hmotnost a V objem. Teplotní vodivost α nějaké látky je rovna podílu tepelné vodivosti λ a součinu hustoty ρ a měrného tepla c_p při stálém tlaku (vše u téže látky). Jednotkami jsou:

$$\begin{aligned}(\alpha) &= 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \text{ což je jednotka hlavní. Odvozenými jednotkami je např.} \\(\alpha) &= (10^{-3} \text{ m})^2 \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\(\alpha) &= 1 \text{ m}^2 \cdot (60 \text{ s})^{-1} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{min}^{-1}, \\(\alpha) &= (10^{-3} \text{ m})^2 (60 \text{ s})^{-1} = 1 \text{ mm}^2 \cdot \text{min}^{-1} \text{ apod.}\end{aligned}$$

U hustoty zářivého toku zní rozměrová rovnice

$$[J] = \frac{[P]}{[S]} = \frac{[m] [l]^2 [\tau]^{-3}}{[l]^2} = [m] [\tau]^{-3} = \text{M T}^{-3},$$

$$\begin{aligned}(J) &= 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \text{ je jednotka hlavní. Odvozenými jednotkami je např.} \\(J) &= (10^{-3} \text{ kg}) \cdot \text{s}^{-3} = 1 \text{ g} \cdot \text{s}^{-3}, \\(J) &= (10^{-3} \text{ kg}) (10^{-3} \text{ s})^{-3} = 1 \text{ g} \cdot \text{ms}^{-3} \text{ apod.}\end{aligned}$$

Mohli bychom se snadno přesvědčit, že hodnoty všech veličin v uvedených jednotkách lze snadno přepočítat násobením faktorem $10^{\pm 3i}$ kde i je malé celistvé kladné číslo.

Probrali jsme si některé příklady, jak se jednotky tvoří. Řekli jsme si také o terminologii, týkající se jednotek. Víme, co je to jednotka základní, hlavní, násobná a dílčí, jednoduchá a složená. Zbývá se ještě zmínit o j e d n o t k á c h v e d l e j š í c h. Nová měrová soustava má pro každou fyzikální veličinu jednu jednotku hlavní a potřebný počet násobných a dílčích jednotek, které jsou z ní odvozovány. V technické praxi se však dosud setkáme s velkým množstvím jednotek, jejichž použití vedle správných jednotek koherentních bude nutno dočasně připustit, ovšem za předpokladu, že počet takovýchto nekoherentních jednotek bude co nejmenší a že takovéto jednotky nebudou vázány na samostatné definice (kterých se ve dřívějších dobách užívalo), nýbrž pouze na příslušné jednotky hlavní. Takovýmto nekoherentním jednotkám říkáme souhrnně v e d l e j š í j e d n o t k y. U veličin, pro které zákon nebo státní norma stanoví zákonné jednotky, budou připuštěny pouze ty vedlejší jednotky, které stanoví příslušná státní norma. Bližší viz v odstavci o zákonných jednotkách. Za vedlejší jednotky je možno pokládat i jednotky jiných měrových soustav, nežli soustavy platné. Schematicky je přehled vzájemné vazby různých jednotek znázorněn v obr. 1.

P ř í k l a d. Uvedme si několik vedlejších jednotek. Jednotkou síly v soustavě CGS byl $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$, v soustavě MTS (metr- tuna- sekunda) $1 \text{ st en} = 1 \text{ sn} = 10^3 \text{ N}$. Násobnými jednotkami odvozenými z obou uvedených jsou např.

$$1 \text{ me g a d y n} = 10^6 \text{ dynů} = 10 \text{ N}, \text{ respektive } 1 \text{ kilosten} = 1 \text{ ksn} = 10^6 \text{ N apod.}$$

Všechny jednotky uvedené v tomto příkladu jsou jednotkami vedlejšími. Jednotka síly sten (sn) je vedlejší jednotkou pro svůj samostatný název a značku. Svoji velikostí je ovšem shodná s násobnou jednotkou síly, odvozené z hlavní jednotky platné soustavy:

$$1 \text{ kilonewton} = 1 \text{ kN} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ t} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ Mg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ sten} = 1 \text{ sn}.$$

Jinými vedlejšími jednotkami síly je např. *kilopond* (kp) dříve nazývaný „silovým kilogramem“ (kg*), který byl základní jednotkou technické soustavy. Z této jednotky jsou odvozovány násobné a dílčí jednotky další: *megapond* (Mp), *pond* (p), *milipond* (mp) aj. Ty jsou ovšem také z hlediska platné soustavy jednotkami vedlejšími. V anglické soustavě měr je jednotkou síly $1 \text{ poundal} = 1 \text{ pdl} = 0,138\,255 \text{ N}$. Příkladů vedlejších jednotek síly mohli bychom uvést ještě další řadu. Stejně tak tomu je i u jiných fyzikálních veličin.

Protože státní norma, která bude obsahovat všechny jednotky, bude uvádět pro sílu kromě newton (N) pouze kilopond (kp), budou mít zákonný charakter pouze tyto dvě jednotky a z nich odvozované síly a násobky. Z toho budou zákonnými vedlejšími jednotkami kilopond a jeho díly a násobky.

Než přikročíme k dalšímu odstavci, ve kterém stručně probereme jednotky, které budou mít zákonný charakter, zmíníme se ještě o způsobu psaní jednotek. Jednotka má svým názvem i značkou co nejnázorněji vystihovat příslušný fyzikální vztah. Je-li proto nějaká veličina odvozována z jiných veličin, ať již základních nebo odvozených - např. rychlost z dráhy a času, energie ze síly a dráhy, má obsahovat její jednotka názvy nebo značky jednotek těchto veličin, např. rychlost $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, energie $1 \text{ J} = \text{N} \cdot \text{m}$ apod. Jen při rozměrových rovnicích rozepisují se jednotky odvozených veličin pouze z jednotek veličin základních, např. jednotka síly $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, energie $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Tento způsob je výhodný proto, že vyjadřováním jednotek odvozených veličin pouze jednotkami základními ztrácí se mnohdy fyzikální srozumitelnost, např. u měrného tepla, jak již bylo uvedeno dříve v příkladech nebo u tlaku, u něhož je fyzikálně srozumitelnější jednotka $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ nežli $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, nebo povrchového napětí $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ proti $1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$, u skupenského tepla $1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ proti $1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ aj.

Stejný důvod vedl ostatně k tomu, že některým důležitějším a častěji používaným jednotkám byly dávány samostatné značky a jména, např. u elektrického odporu $1 \text{ ohm} = 1 \Omega = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$. Při vyjadřování jednotek odvozených veličin pomocí jednotek základních - zejména pro rozměrové rovnice - má se dodržovat určité pořadí základních veličin, které je shodné jako u bývalé soustavy MKSA: délka, hmotnost, čas, elektrický proud, teplota a svítivost. Je tedy správněji psát pro roze-psanou jednotku energie $1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ nežli $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, i když ve druhém případě pořadí odpovídá logičtěji veličinám zastoupeným v definičním vztahu. U složitějších jednotek však ani toto hlediska není zpravidla průkazné, např. u elektrické kapacity: $1 \text{ coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$ apod.

Značka složených jednotek píše se nejlépe jako součin značek jednotlivých jednotek, obsažených v příslušné složené jednotce, a to v příslušných mocninách. Dělení je pak vyznačeno násobením značkou se zápor-

ným exponentem, např. u měrného tepla $J \cdot \text{kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ apod. Tohoto způsobu bylo používáno ve všech příkladech v našem pojednání. Tento způsob je nejvýhodnější a předchází se jím omylům. Je ovšem možné použít také zlomkové čáry. Značky jednotek ve tvaru zlomku smějí mít však pouze jedinou zlomkovou čáru, např. $J/\text{kg deg}$ a nikoliv $J/\text{kg/deg}$. Je-li použití zlomkové čáry vhodné pro názornost výkladu, je výhodnější použít zlomkové čáry vodorovné.

Součiny jednotlivých značek ve složené jednotce není nutno naznačovat násobící tečkou. V žádném případě se nesmějí tečky používat mezi předponou a značkou u násobných nebo dílčích jednotek, např. kg, Mp, GW, mC, apod. V některých výjimečných případech je násobící tečka v součinu značek nutná. Je to u jednotek, obsahujících dílčí jednotky odvozené předponou mili- (m-, tedy 10^{-3} díl). Mohlo by totiž dojít k náhodné záměně součinu značek např. u metr krát sekunda, (čili $m \cdot s$) se značkou složenou milisekunda (ms) apod.

(Pokračování)

Úlohy k řešení

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

(Pokračování)



Matematika:

8. V rovině ρ je dán rovnostranný trojúhelník ABC , jehož strana má velikost $a = 1$. Ukažte, že je možno v rovině ρ najít nekonečně mnoho bodů X takových, že všechny tři vzdálenosti AX , BX , CX jsou racionální čísla.

Jiří Sedláček

(Došlo 13 řešení.)

Řešil Jiří Čmelík, 3. d, SVVŠ, Liberec:

Dokážeme, že takových bodů X , pro něž jsou vzdálenosti AX , BX , CX racionální čísla, je možno najít nekonečně mnoho na polopřímce CA za bodem A . Položme zde $AX = x$, takže $CX = 1 + x$. Dále označme $BX = m$. Potom podle kosinové věty je

$$m = \sqrt{x^2 + 1 - 2x \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Položme

$$x = \frac{2k - 1}{1 - k^2}, \quad (1)$$

kde k je racionální číslo, splňující vztah $\frac{1}{2} < k < 1$. Nyní vztah (1) dosadíme do vzorce pro m . Po úpravě vychází

$$m = \sqrt{\frac{(k^2 - k + 1)^2}{(1 - k^2)^2}} = \frac{|k^2 - k + 1|}{|1 - k^2|}$$

Vzhledem k tomu, že pro všechna reálná čísla k platí $k^2 - k + 1 > 0$ a že jsme volili $\frac{1}{2} < k < 1$, bude

$$m = \frac{k^2 - k + 1}{1 - k^2}.$$

Vidíme, že pro každé takto zvolené racionální číslo k vychází také vzdálenost m jako racionální číslo (a zbývající dvě vzdálenosti jsou ovšem též racionální). Protože je možno zvolit nekonečně mnoho čísel k popsaných vlastností, plyne z toho, že existuje nekonečně mnoho bodů X v rovině ρ , které splňují požadavky naší úlohy.

Poznámka redakce. V 8. úloze si někteří řešitelé nevěděli rady s důkazem, který je ze školského hlediska trochu neobvyklý. Je to příklad tzv. existenčního důkazu, přičemž je zde situace složitější ještě tím, že se mluví o nekonečně mnoha bodech X . K matematickému důkazu, který vyžaduje 8. úloha, stačí prostě sestrojít vhodným způsobem body X tak, abychom měli zaručeno, že jich je nekonečně mnoho. K úplnosti tohoto důkazu není třeba, aby řešitel popisoval, jak ke konstrukci bodů X došel. To je právě patrné z řešení J. Čmelíka.

V 8. úloze se nežádalo, abychom vyšetřili všechny body X v rovině ρ , pro něž všechny tři vzdálenosti AX , BX , CX jsou racionální čísla. Toto vyšetřování by bylo zajisté obtížnější než důkaz 8. úlohy.

9. Nad stranami trojúhelníka ABC jsou sestrojeny vně čtverce o vrcholech ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 . Dokažte, že platí

- $AC_1 = BC_2$, $BA_1 = CA_2$, $CB_1 = AB_2$;
- $\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{B_2C_2}^2 + \overline{C_2A_2}^2$;
- $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{B_1B_2}^2 + \overline{C_1C_2}^2 = 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$.

Josef Brejcha

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Josef Daneš, 2. d, SVVŠ, Praha:

a) Je-li $R = \gamma$, pak $AC_1 = a + b = BC_2$.

Je-li $R \neq \gamma$, pak $\triangle ACC_1 \cong \triangle BCC_2$,

neboť

$$CC_1 = BC, CC_2 = AC, \sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_2.$$

Je tedy též $AC_1 = BC_2$.

Analogicky odvodíme i zbývající relace.

b) Podle kosinové věty pro $\triangle AA_1A_2$ platí:

$$\overline{A_1A_2}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(2R - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha. \quad (1)$$

Podle kosinové věty pro $\triangle ABC$ je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vychází po snadné úpravě

$$\overline{A_1A_2}^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \quad (3)$$

a analogicky další dvě relace

$$\begin{aligned} \overline{B_1B_2}^2 &= 2(a^2 + c^2) - b^2, \\ \overline{C_1C_2}^2 &= 2(a^2 + b^2) - c^2. \end{aligned} \quad (4)$$

c) Podle kosinové věty pro trojúhelník $A_1B_1A_2$ vychází:

$$\begin{aligned} \overline{A_1B_1}^2 &= \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2B_1}^2 - 2A_1A_2 \cdot A_2B_1 \cos \widehat{A_1A_2B_1} = \\ &= \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2B_1}^2 - 2A_1A_2 \cdot A_2B_1 \cos(R + \widehat{AA_2A_1}) = \\ &= \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2B_1}^2 + 2A_1A_2 \cdot A_2B_1 \sin \widehat{AA_2A_1} \end{aligned} \quad (5)$$

Ze sinové věty pro $\triangle AA_1A_2$ určíme:

$$\sin \widehat{AA_2A_1} = \frac{b}{A_1A_2} \sin \widehat{A_1AA_2} = \frac{b}{A_1A_2} \sin \alpha. \quad (6)$$

Dosazením do (5) s použitím relace (3) bude

$$\overline{A_1B_1}^2 = 2b^2 + 3c^2 - a^2 + 2bc \sin \alpha = 2b^2 + 3c^2 - a^2 + 4P \quad (7)$$

kde P je plošný obsah $\triangle ABC$.

Analogicky získáme další relace:

$$\left. \begin{aligned} \overline{B_1C_1}^2 &= 2c^2 + 3a^2 - b^2 + 4P \\ \overline{C_1A_1}^2 &= 2a^2 + 3b^2 - c^2 + 4P \\ \overline{A_2B_2}^2 &= 3b^2 + 2c^2 - a^2 + 4P \\ \overline{B_2C_2}^2 &= 3c^2 + 2a^2 - b^2 + 4P \\ \overline{C_2A_2}^2 &= 3a^2 + 2b^2 - c^2 + 4P \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sečtením rovnic (7) a (8) vychází ihned

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{B_2C_2}^2 + \overline{C_2A_2}^2,$$

odečtením rovnic (3) a (4) plyne

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{B_1B_2}^2 + \overline{C_1C_2}^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$$

10. Nech n je přirozené číslo a p prvočíslo. Dokážte, že číslo $np + (p-1) \cdot n$ je dělitelné číslem p .

Milan Hejný

(Došlo 15 řešení.)

Riešenie autora:

Nakoľko je číslo np zrejme deliteľné číslom p , stačí dokázať, že aj $n^p - n$ je deliteľné číslom p .

Podľa binomickej vety platí:

$$(m + 1)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} m^{p-i}$$

čo možno písať aj takto:

$$(m + 1)^p - m^p - 1 = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} m^{p-i} \quad (1)$$

Nech $1 \leq i \leq p - 1$; kombinatorické číslo

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i! (p-i)!}$$

je nutne prvočíslom p deliteľné, lebo ani $i!$ ani $(p-i)!$ nemôže byť deliteľom prvočísla p . Je teda pravá (a preto aj ľavá) strana rovnice (1) deliteľná prvočíslom p . Súčet

$$(1^p - 0^p - 1) + (2^p - 1^p - 1) + \dots + [n^p - (n-1)^p - 1]$$

sa skladá zo sčítancov deliteľných prvočíslom p , je preto sám deliteľný prvočíslom p . Jednoduchou úpravou ukážeme, že horný súčet je rovný výrazu

$$n^p - n,$$

ktorý tým pádom musí byť deliteľný prvočíslom p .

Tvrdenie „Ak je p prvočíslom a n prirodzené číslo, potom výraz $n^p - n$ je deliteľný prvočíslom p “, je známe pod názvom *veta Fermatova*, podľa P. F e r m a t a (1601–1665). Bližšie viď roč. 38, str. 246 nášho časopisu.

12. Jsou-li a a b přirozená čísla, pak lze výraz

$$V_1 = (a + b)^2 + 2(a + 2b)^2 + 3(a + 3b)^2 + 4(a + 4b)^2$$

napsat jako součet čtverců dvou přirozených čísel a výraz

$$V_2 = (a + b)^2 + 2(a + 2b)^2 + 3(a + 3b)^2 + 4(a + 4b)^2 + \\ + 5(a + 5b)^2 + 6(a + 6b)^2$$

jako součet čtverců tří přirozených čísel. Dokažte!

Ota Setzer

(Došlo 14 řešení.)

Daný výraz V_1 upravíme na

$$V_1 = 10a^2 + 60ab + 100b^2 \quad (1)$$

Tento výraz převedeme na součet čtverců dvou přirozených čísel

$$A = xa + yb \quad \text{a} \quad B = ua + zb,$$

$$V_1 = A^2 + B^2 = a^2(x^2 + u^2) + 2ab(xy + uz) + b^2(y^2 + z^2), \quad (2)$$

kde x, y, u, z jsou celá nezáporná čísla.

Srovnáním koeficientů při $a^2, 2ab, b^2$ v rovnicích (1) a (2) dostáváme neurčité rovnice

$$x^2 + u^2 = 10, \quad (3)$$

$$xy + uz = 30, \quad (4)$$

$$y^2 + z^2 = 100 \quad (5)$$

Z rovnice (3) plyne $x_1 = 1, u_1 = 3$ nebo $x_2 = 3, u_2 = 1$, po dosazení do (4) a (5) je $z_1 = 10, y_1 = 0, z_2 = 8, y_2 = 6, V_1 = a^2 + (3a + 10b)^2$ nebo $V_1 = (3a + 8b)^2 + (a + 6b)^2$.

Výraz V_1 lze dvojím způsobem vyjádřit jako součet čtverců dvou přirozených čísel.

Po provedení naznačených výkonů dostaneme

$$V_2 = 21a^2 + 182ab + 441b^2, \quad (6)$$

$$V_2 = (xa + yb)^2 + (ra + sb)^2 + (ua + zb)^2,$$

$$V_2 = a^2(x^2 + r^2 + u^2) + 2ab(xy + rs + uz) + b^2(y^2 + s^2 + z^2) \quad (7)$$

Srovnání koeficientů v rovnicích (6) a (7) vede ke vztahům:

$$x^2 + r^2 + u^2 = 21, \quad (8)$$

$$xy + rs + uz = 91, \quad (9)$$

$$y^2 + s^2 + z^2 = 441 \quad (10)$$

Řešením rovnice (8) jsou kořeny $x_1 = 1, r_1 = 4, u_1 = 2$ a jejich přestavy. Rovnice (9) a (10) se změní na

$$y + 4s + 2z = 91,$$

$$y^2 + s^2 + z^2 = 441,$$

jejichž vyhovující kořeny jsou $s_1 = 14, z_1 = 14, y_1 = 7$ nebo $s_2 = 16, z_2 = 8, y_2 = 11$, takže

$$V_2 = (a + 11b)^2 + (4a + 16b)^2 + (2a + 8b)^2$$

nebo

$$V_2 = (a + 7b)^2 + (4a + 14b)^2 + (2a + 14b)^2.$$

Výraz V_2 lze dvojím způsobem vyjádřit jako součet čtverců tří přirozených čísel.

Deskriptivní geometrie:

4. Jsou dány mimoběžky a , b a mimo ně bod O . Sestrojte rotační komolý kužel, jehož jedna kruhová hrana se dotýká přímky a , druhá kruhová hrana přímky b a jehož osa o jde bodem O .

Ota Setzer

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Peter Hatala, SVVŠ, Bratislava:

R o z b o r Označme k kruhovou hranu, která sa dotýka priamky a a k_1 kruhovou hranu, ktorá sa dotýka priamky b . Priamka a a kruhová hrana k ležia v jednej rovine ρ , podobne priamka b a kruhová hrana k_1 v rovine σ . Potom tieto roviny sú rovnobežné, pretože sú to roviny podstav rotáčného komolého kužela. Stredy S , S_1 kruhových hrán k , k_1 budú ležať na kolmici m z bodu O na roviny ρ , σ .

Z toho vyplýva konštrukcia: Bodom $A \in a$ vedieme priamku $a_1 \parallel b$ a bodom $B \in b$ vedieme priamku $b_1 \parallel a$; potom $\rho \equiv (a, a_1)$ a $\sigma \equiv (b, b_1)$. Ďalej zostrojíme z bodu O kolmicu m na roviny ρ , σ . Označme S priesečník roviny ρ s priamkou m a S_1 priesečník roviny σ s priamkou m . Ďalej vedme kolmice $r \perp a$, $r \ni S$ a $s \perp b$, $s \ni S_1$ a označme $P \equiv r \cdot a$ a $P_1 \equiv s \cdot b$.

D i s k u s i a: Ak padnú body S , S_1 mimo priamok a , b , má úloha jedno riešenie; v prípade $SP = S_1P_1$ dostaneme valec.

Ak bod S (S_1) padne na priamku a (b) a bod S_1 (S) nepadne na priamku b (a), dostaneme priamy rotačný kužel, čo je krajný prípad rotáčného komolého kužela.

Ak padnú oba body S , S_1 porade na priamky a , b , nemá úloha riešenie.

P o z n á m k a r e d a k c e: Někteří řešitelé nepochopili text příkladu a považovali za tečnu podstavné kružnice každou přímku, která má sice s touto kružnicí jediný společný bod, ale neleží v její rovině.

Seznam úspěšných řešitelů ze 40. ročníku Rozhledů

Uveřejňujeme abecední seznam našich čtenářů, kteří se úspěšně zúčastnili soutěže Rozhledů v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, uveřejněných ve 40. ročníku tohoto časopisu. Za

jménem každého řešitele jsou uvedena čísla správně vyřešených příkladů z příslušného oboru, v závorce čísla úloh, řešených s menšími nedostatky. Nesprávná řešení neuvádíme vůbec.

Jiří Čmelík, SVVŠ, Liberec - M 7, 8, 10, 12 (1, 3, 4, 6), F 1, 2 (3); Josef Daneš, SVVŠ, Praha-Vysočany M 1, 3—5, 8—12 (2, 6, 7), G 2, 4 (3), F (1—5); Vlasta Drdová, SVVŠ, Kadaň - M 5; Jiří Durdil, SVVŠ, Praha 8 - M 2, 3, 5—7, 10—12 (1, 4, 8), G 1, 2, 4 (3), F 1, 3—5 (2); Svatopluk Fučík, SVVŠ, Hradec Králové - M 1—4, 7—12 (5, 6), G 1—4, F 1, 2, 5 (3); Vojtěch Gazda, PŠ, Prostějov M 1; Peter Hatala, SVVŠ, Bratislava M 2, 3, 5—8, 11 (1, 4, 10), G 1—4, F 1—3; František Hrnčíř, SVVŠ, Nová Paka - M 1—3, 7—12 (4, 6), G 1—4, F 1—3, 5 (4); Olga Hrstková, SVVŠ, Gottwaldov - M 7; Miroslav Izák, SVVŠ, Dobruška - F 1, 2 (3); Jaroslav Ježek, SVVŠ, Praha 4 - M 2, 3, 6—12 (1, 4, 5), G 1, 2, 4 (3), F 1—3, 5 (4); Zdeněk Jiráček, SVVŠ, Hradec Králové - M 2, 5, 7—12 (1, 4, 6), G 2, 4 (1, 3), F 1, 2, 4, 5 (3); Ladislav Kochbach, SVVŠ, Praha 7 - M 1; Oto Kopál, SVVŠ, Partizánské F 2; Vladimír Kos, SVVŠ, Nová Paka M 1, 2, 5, 6, 8, 10, 11 (4, 7, 9); Lubor Košťál, SVVŠ, Brno - M 1—3, 5—7, 9, 10, 12 (4) G 1—4, F 1, 2, (3); Jiří Kotyk, JSS, Pardubice - M 3, 4; Ivan Netuka, SVVŠ, Hradec Králové M 3, 5, 7 (1, 4), G 1, 3, 4; Antonín Pelíšek, SVVŠ, Písek - M 5, 12, F 1—3; Milan Plaček, SVVŠ, Kroměříž - M 5 (4, 6, 7), F 1—3; Miroslav Podhorský, SVVŠ, Žďár n. Sáz. - M 2, 5, 7, 9, 10 (1, 4, 6, 12), G 2 (3), F 2 (1, 3—5); Karel Prokop, VŠSE, Plzeň - M 2, 4, 5, 7, 9, 12 (1, 6, 11), G 1, 2 (3), F 1—3 (5); Jan Švejda, SVVŠ, Praha 3 M 5, 9 (6); Karel Tregl, SVVŠ, Rožnov p. R. M 5, 7 (1), G (1), F 1 (3); Lubomír Vašek, SVVŠ, Gottwaldov - M 1, 3—7 (11), F 1—5; Ivo Zapletal, SVVŠ, Přerov - M 5—7, 10; Josef Žáček, SVVŠ, Cheb M 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12 (1, 4, 6), F 1, 2 (3.)

Redakce přihlédla k počtu a jakosti zaslanych řešení a stanovila toto pořadí vítězných řešitelů:

- 1.—2. *Svatopluk Fučík, František Hrnčíř,*
3. *Jaroslav Ježek,*
4. *Jiří Durdil.*

V jednotlivých kategoriích předmětů jsou nejlepší:

Matematika:

1. *Svatopluk Fučík,*
- 2.—4. *Josef Daneš, František Hrnčíř, Jaroslav Ježek.*

Deskriptivní geometrie:

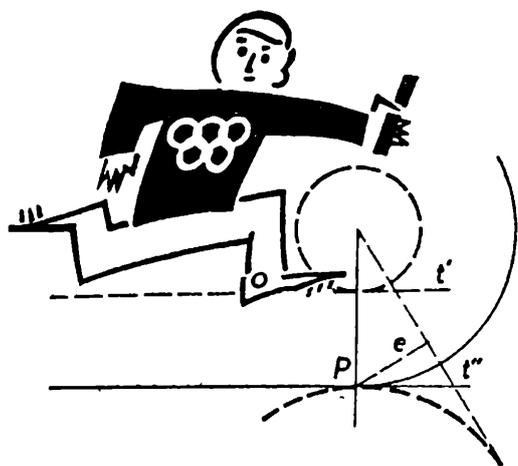
1.—4. *Svatopluk Fučík, Peter Hatala, František Hrnčíř, Lubor Košťál.*

Fyzika:

1.—2. *Vladimír Kos, Lubomír Vašek.*

Blahopřejeme vítězům!

Matematická olympiáda



Soutěžní úlohy MO

Řešení této druhé trojice soutěžních úloh odevzdají žáci svému učiteli do 28. února 1963; opravená řešení učitel předá příslušnému výboru MO.

1. Kategorie A

4. Ak (nekonečná) aritmetická postupnosť prirodzených čísel obsahuje tretiu mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečné množstvo takých mocnín. Dokážte!

Uvedte príklad (nekonečnej) aritmetickej postupnosti prirodzených čísel, ktorej žiadny člen nie je treťou mocninou prirodzeného čísla.

5. Je daný rovnostranný trojuholník ABC o strane dĺžky 1.

Vyšetrite geometrické miesto bodov X v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B, C platí

$$AX : BX : CX = 1 : 2 : 3$$

6. Buď dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$, který má tyto vlastnosti: Lze sestrojít dvě (různé) kulové plochy, z nichž se každá dotýká všech šesti přímk, na nichž leží hrany daného čtyřstěnu. Přitom každá z těchto kulových

ploch se dotýká přímky A_3A_4 ve vnitřním bodě úsečky A_3A_4 , kdežto přímky A_1A_2 se dotýká v bodě, který nenáleží úsečce A_1A_2 .

Dokažte, že každé dvě protější hrany daného čtyřstěnu mají touž délku.

2. Kategorie B

4. V rovině jsou dány tři kružnice o poloměrech délek 1, 2, 3; každé dvě z těchto kružnic mají vnější dotyk.

Určete, kolik kružnic se zároveň dotýká vně každé ze tří daných kružnic a vypočítejte jejich poloměry.

5. V rovině leží čtyři body. Pět z jejich šesti vzájemných vzdáleností (v cm) je rovno číslům 1, 2, 3, 4, 5. Načrtněte všechny možné případy vzájemné polohy těchto čtyř bodů a vyložte jejich odvození.

6. Sú dané tri kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0, \\x^2 + bx + a &= 0, \\x^2 + x - a + b + 1 &= 0,\end{aligned}$$

kde x je neznáma.

Reálne čísla a, b určite tak, aby každé dve z týchto rovníc mali spoločný aspoň jeden reálny koreň.

. Kategorie C

4. Najdite všetky trojice prirodzených čísel, ktorých súčet je rovný ich súčinu.

5. V rovině je dán trojúhelník ABC ; vně tohoto trojúhelníka jsou sestrojeny čtverce $ABMN$, $BCPQ$ se středy O_1, O_2 .

Dokažte, že středy úseček AC , MQ a body O_1, O_2 jsou vrcholy jistého čtverce.

6. V rovině je dán kruhový oblouk s krajními body A a B .

Vyšetřte geometrická místa středů kružnic vepsaných a vně vepsaných trojúhelníku ABC , jestliže bod C probíhá vnitřek daného oblouku.

4. Kategorie D

4. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1, 4 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, 4 \text{ cm})$, $k_3 \equiv (S_3, r)$, z nichž každá se dotýká vně obou dvou zbývajících kružnic.

Sestrojte všechny kružnice, které mají s každou z daných kružnic vnitřní dotyk. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k poloměru r .

5. Výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

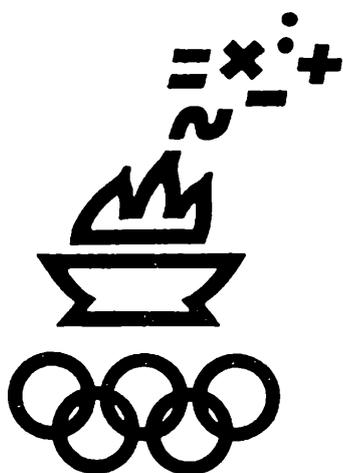
rozložte na součinitelov a potom určite všetky trojice čísel x, y, z , pre ktoré $V = 0$.

6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami velikostí $a = BC$, $b = AC$. Označme D bod, ve kterém se přímky AB dotýká kružnice trojúhelníka ABC vepsaná.

a) Vypočtete pomocí čísel a , b velikost poloměru kružnice danému trojúhelníku ABC vepsaná.

b) Dokažte, že obsah trojúhelníka ABC je roven obsahu obdélníka o rozměrech DA , DB .

Mezinárodní matematická olympiáda



P e t e r H a t a l a, studující, Bratislava:

Štvrtá medzinárodná matematická olympiáda

Ak máme hodnotiť výkon nášho družstva, rozhodne s ním nemôžeme byť spokojní. Hoci sme sa všetci snažili čo najlepšie obstáť, skončili sme až za maďarskými, sovietskymi a rumunskými studentmi. Jednou z príčin nášho pomerne nepriaznivého výsledku v hodnotení družstiev - i keď len neoficiálnom - je podľa názoru našich žiakov tá skutočnosť, že súťažiaci väčšiny ostatných štátov boli starostlivejšie pripravovaní. Iste nemalý vplyv na výsledky IV. MMO mal i výber príkladov. Napríklad dôkazové úlohy zo stereometrie sa v školách i v MO vyskytujú veľmi zriedkavo.

Štvrtá medzinárodná matematická olympiáda dobre splnila svoje poslanie: nadviazať priateľstvá medzi mladými matematikmi socialistických krajín a porovnať úroveň vyučovania matematiky v týchto krajinách. Napriek menším jazykovým ťažkostiam sme si všetci dobre rozumeli. O tom svedčí aj ten fakt, že si mnohí se svojimi novými priateľmi dopisujeme. Pri svojich rozhovoroch sme sa dozvedeli, že V. MMO bude pravdepodobne v júli 1963 v Poľsku. Želáme si, aby sa naše družstvo na budúcej MMO umiestilo lepšie ako na tohoročnej MMO v Československu. Preto s chuťou do toho, riešitelia matematickej olympiády!

Tabulka č. 1. Bodový zisk jednotlivých žiakov na IV. MMO.

Zem	Žiak č.								Spolu bodov
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Maďarsko	45	39	39	32	32	23	41	38	289
SSSR	46	42	31	36	30	22	37	19	263
Rumunko	32	38	39	28	32	35	30	23	257
ČSSR	30	19	35	33	20	23	29	23	212
Polsko	20	30	39	32	11	19	33	28	212
Bulharsko	33	37	32	26	25	13	15	15	196
NDR	14	21	18	18	21	21	34	6	153

Texty úloh zadaných na IV. medzinárodnej matematickej olympiáde

V zátvorke za textom je uvedená zem, ktorá úlohu zadala a maximálne bodové hodnotenie toho ktorého príkladu.

Prvá písomná práca:

1. Vypočítajte najmenšie prirodzené číslo n , ktoré má tieto vlastnosti:
 - (1) jeho vyjadrenie v desiatkovej sústave končí cifrou 6;
 - (2) ak pred číslo n napíšeme cifru 6 a poslednú cifru 6 škrtneme, dostaneme štvornásobok hľadaného čísla n .

(Poľsko — 6 bodov)

2. Určite všetky reálne čísla x , ktoré splňujú nerovnosť

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

(Maďarsko — 6 bodov)

3. Je daná kocka $ABCD A' B' C' D'$ (protiľahlé steny sú $ABCD$, $A' B' C' D'$ a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Bod X prebieha konštantnou rýchlosťou obvod štvorca $ABCD$ v práve napísanom poriadku a bod Y prebieha tou istou rýchlosťou obvod štvorca $B' C' C B$ v práve napísanom poriadku; body X , Y sa začnú pohybovať v tom istom okamihu, pričom počiatočné polohy sú A a B' . Vyšetrite geometrické miesto stredov Z úsečiek XY a zostrojte náčrtok.

(ČSSR — 8 bodov)

Druhá písomná práca:

4. Riešte rovnicu

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

(Rumunsko — 6 bodov)

5. Je daná kružnica k a na nej tri rôzne body A , B , C . Zostrojte na kružnici k (kružidlom a pravítkom) ďalší bod D tak, aby vznikol štvoruholník $ABCD$, ktorému je možné vpísať kružnicu.

(Bulharsko — 7 bodov)

6. Je daný rovnoramenný trojuholník. Kružnica jemu opísaná má polomer r , kružnica vpísaná má polomer ρ . Dokážte, že vzdialenosť d stredov oboch týchto kružníc je

$$d = \sqrt{r(r-2\rho)}$$

(NDR — 6 bodov)

7. Je daný štvorsten $SABC$. K tomuto štvorstenu existuje päť guľových plôch, z ktorých každá sa dotýka všetkých šiestich priamok SA, SB, SC, AB, BC, CA . Tento štvorsten je pravidelný.

Obrátene, ku každému pravidelnému štvorstenu je možné zostrojiť päť takých guľových plôch. Dokážte obe tieto vety a zostrojte náčrtok.

(SSSR — 8 bodov)

Zoznam odmenených žiakov na IV. MMO

1. ceny

Josif Bernštejn, SSSR; Kéry Gerzson, MLR; Lidia Gončarovová, SSSR; Sebestyén Zoltán, MLR.

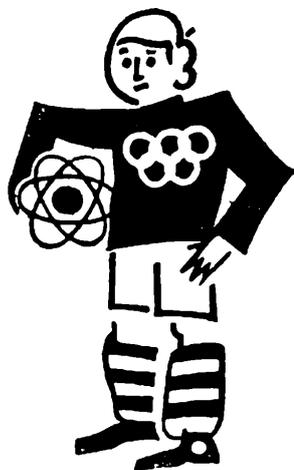
2. ceny

Kóta József, MLR; Gálfi László, MLR; Marcin Kuczma, PLR; Gheorghe Eckstein, RLR; Szidarovszky Ferenc, MLR, Alexandru Buimovici, RLR; Bojan Marinov Bonev, BLR; Alexej Potěpun, SSSR; Grigorij Margulis, SSSR; Peter Hatala, ČSSR; Gheorghe Lustig, RLR; Karl-Heinz Tetsch, NDR.

3. ceny

obdržalo 15 účastníkov MMO, medzi nimi *Jaroslav Ježek, Josef Daneš a Karel Veselý*; všetci z Prahy.

Fyzikální olympiáda



Téma k prostudovaniu pro první kolo IV ročníku soutěže FO, kategorie C ve školním roce 1962/63

Určování hustoty látek pevných a kapalných

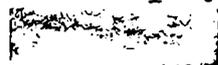
Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál
s kolektivem spolupracovníků.

Hustota je hmota látky v jednotkovém objemu. Proto ji určíme z hmoty m a příslušného objemu V podle vztahu

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

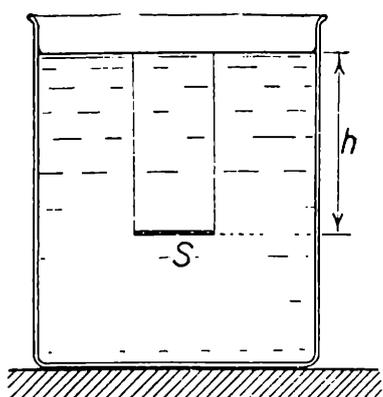
Jednotka hustoty v soustavě SI je $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pro určování hustoty látek máme mnoho metod. Poněvadž některé metody vyžadují znalosti z hydromechaniky, probereme v první části hydrostatický tlak, Archimédův zákon a plavání těles, a teprve v dalších částech přejdeme k vlastnímu tématu.

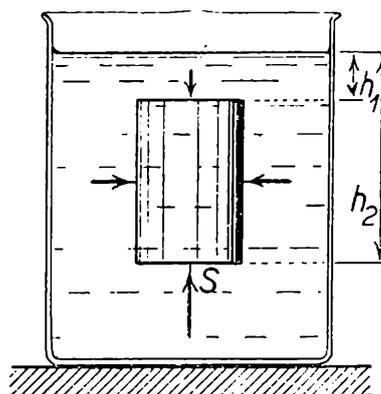


1. *Hydrostatický tlak.* Když kapalina podléhá jen své váze, pak tlak kapaliny připadající na jednotku plošnou se nazývá hydrostatický tlak.

Abychom určili velikost hydrostatického tlaku, zvolíme v kapalině vodorovnou jednotkovou plochu a určíme sílu, kterou působí kapalina se shora na tuto plochu, tj. určíme váhu kapaliny nad touto plochou. Váha této kapaliny je dána součinem objemu kapaliny V , její hustoty ρ a tíhového zrychlení g . Objem kapaliny - tvaru přímého válce - je dán součinem plošného obsahu podstavu S a výšky kapaliny h nad podstavou: $V = S \cdot h$ (obr. 18). Je tedy hydrostatický tlak p jako podíl



Obr. 18



Obr. 19

tlakové síly F působící na plochu S a velikosti této plochy vyjádřen vztahem

$$p = \frac{F}{S} = \frac{V \rho g}{S} = h \rho g$$

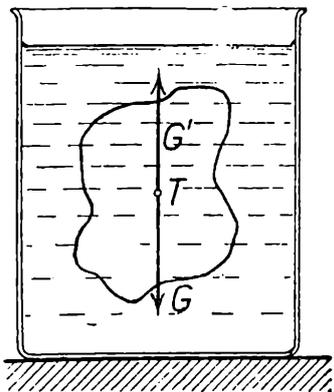
Jednotkou hydrostatického tlaku v soustavě SI je tedy $\frac{N}{m^2}$ a v soustavě technické $\frac{kp}{m^2}$

Poněvadž zvolená vodorovná ploška v určité vzdálenosti pod povrchem kapaliny podléhá tlakové síle směrem dolů a přitom se nepohybuje, musí na ni působit stejně velká síla směrem vzhůru tzv. vztlaková síla, která bude táž jako tlaková síla směrem dolů. Poněvadž tlak uvnitř kapaliny působí všemi směry, bude hydrostatický tlak v určité hloubce pod povrchem stálý, ať je poloha plochy jakákoliv.

2. *Archimedův zákon.* V nádobě s kapalinou je válec (obr. 19): Kapalina působí na něj tlakem sešhora, zdola a se stran. Poněvadž tlaky se stran jsou vždy ve stejné hloubce pod povrchem kapaliny stejné, ruší se. Je-li horní podstava válce ve vzdálenosti h_1 pod hladinou a dolní

podstava ve vzdálenosti h_2 pod hladinou, pak směrem vzhůru působí na válec tlaková síla $S \cdot h_2 \rho g$ a směrem dolů tlaková síla $S \cdot h_1 \rho g$, kde S je plocha podstavy a ρ hustota kapaliny. Poněvadž $h_2 > h_1$, působí na válec výsledná tlaková síla směrem vzhůru velikosti $S(h_2 - h_1) \rho g$. Poněvadž $S(h_2 - h_1)$ je objem válce, je $S(h_2 - h_1) \rho g$ hmota kapaliny tělesem vytlačené a $S(h_2 - h_1) \rho g$ váha kapaliny tělesem vytlačené. Je tedy válec nadlehčován silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Tím jsme odvodili Archimedův zákon, ale jen pro válec.

K odvození Archimedova zákona pro libovolné těleso provedme důkaz Stevinův. Představme si, že se část kapaliny přemění ve skupenství pevné, aniž by přitom změnila svou hustotu (obr. 20). V těžišti tohoto tělesa bude působit jeho váha G směrem dolů. Poněvadž se těleso nevede do pohybu, musí stejně velká síla G' působit v těžišti směrem svislým vzhůru. Tato síla může souviset jen s tlakovými silami, kterými kapalina působí na těleso, poněvadž jiné další síly na těleso nepůsobí. Je tedy výslednice těchto tlakových sil rovna váze tělesa a působí opačným směrem než váha tělesa. Nyní místo uvedeného tělesa dejme do kapaliny těleso stejného tvaru a objemu, jiné větší - hustoty než je hustota kapaliny. Pak tlakové síly působící na toto těleso musí být



Obr. 20

stejně jako dříve, poněvadž souvisí s kapalinou. Je tedy toto těleso nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Poněvadž tvar tělesa jsme mohli volit zcela libovolně, platí tento zákon, který nazýváme zákonem Archimedovým, obecně: Těleso je v kapalině nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené.

Označme hmotu tělesa m , jeho objem V a jeho hustotu ρ ; jeho váha je $G = mg$ a síla, kterou je toto těleso nadlehčováno,

je rovna součinu z jeho objemu $V = \frac{m}{\rho}$,

hustoty kapaliny ρ_1 a tíhového zrychlení, tedy silou $F_1 = \frac{m}{\rho} \rho_1 g$. Proto celková síla působící na těleso ponořené v kapalině je

$$F = G - F_1 = mg - \frac{m}{\rho} \rho_1 g = m \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) g$$

3. *Plavání těles.* Těleso v kapalině podléhá jednak své váze působící v těžišti, jednak vztlakové síle působící v těžišti kapaliny tělesem vytlačené. Jestliže je hustota tělesa ρ větší než hustota kapaliny ρ_1 , pak

těleso podléhá výsledné síle $V(\rho - \rho_1)g$ směrem dolů, kde V je objem tělesa. Těleso vlivem této síly klesá ke dnu.

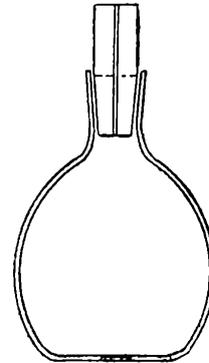
Když $\rho = \rho_1$, pak se obě síly navzájem ruší a těleso nepodléhá silovému působení. Proto, je-li jednou uvedeno do klidu v určité poloze, zůstává v ní. Říkáme, že se vznáší v kapalině.

Když $\rho_1 > \rho$, pak na úplně ponořené těleso působí směrem vzhůru výsledná síla $V(\rho_1 - \rho)g$, těleso se pohybuje směrem vzhůru a začne se vynořovat z kapaliny. Při vynoření zmenšuje se objem vytlačené kapaliny; aby těleso zůstalo v klidu, musí se objem vytlačené kapaliny zmenšit na takovou hodnotu V_1 , aby obě síly byly stejně velké, tj. aby

$$V_1\rho_1g = V\rho g \text{ čili } \frac{V_1}{V} = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Pak říkáme, že těleso plave na kapalině.

Je tedy váha plovoucího tělesa vždy rovna váze kapaliny vytlačené ponořenou částí tělesa.



Obr. 21

II. část

Určování hustoty látek pevných

Z metod pro určování hustoty pevných látek uvedeme si následující čtyři metody.

1. *Měřením rozměrů a vážením.* Jde-li o určení hustoty tělesa, jehož objem dovedeme z rozměrů vypočítat, změříme jeho rozměry a vypočteme objem V . Vážením určíme jeho hmotu m . Pak hustota

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Tato metoda se nazývá přímá.

2. *Měřením objemu a vážením.* Objem pravidelného i nepravidelného tělesa (vhodných rozměrů) můžeme přímo měřit kalibrovanou nádobou. Poněvadž měření kalibrovanou nádobou je málo přesné, není ani toto určování hustoty dostatečně přesné.

3. *Pyknometrem.* Pyknometr je skleněná nádobka se zabroušenou zátkou (obr. 21), opatřenou kapilárou; při určité teplotě vejde se do něho vždy přesně stejný objem kapaliny (kapalinu, která vyteče kapilárou vysajeme pijavým papírem tak, aby kapilára byla kapalinou na-

plněna). Pyknometru použijeme k tomu, abychom hmotu drobných tělísek srovnávali s hmotou kapaliny stejného objemu. Tím vyloučíme měření objemu.

Při určování hustoty touto metodou budeme postupovat takto:

1. Nejdříve určíme hmotu drobných tělísek m , pro niž platí

$$m = V \cdot \rho, \quad (1)$$

kde V je jejich objem a ρ hustota.

2. Zvážíme pyknometr naplněný kapalinou známé hustoty ρ_1 ; jeho hmotu označme m_1 .

3. Potom do pyknometru s kapalinou nasypeme drobná tělíska; tím by se zvětšila jeho hmota na $m_1 + m$, ale část kapaliny objemu V z pyknometru vyteče; tato kapalina bude mít hmotu $V \cdot \rho_1$. Proto bude mít pyknometr s kapalinou a tělíska hmotu

$$m_2 = m_1 + m - V \cdot \rho_1.$$

Neznámé V nahradíme ze vztahu (1)

$$V = \frac{m}{\rho}$$

a dostaneme

$$m_2 = m_1 + m - m \frac{\rho_1}{\rho}$$

a z toho

$$m_1 + m = m_2 = m \frac{\rho_1}{\rho}$$

a tedy

$$\rho = \frac{m}{m_1 + m - m_2} \rho_1$$

Určování objemu, které je nepřesné, nahradili jsme zde vážením, které je mnohem přesnější.

4. *Dvojím vážením.* Při této metodě určíme hmotu tělesa vážením a objem z nadlehčení tělesa v kapalině známé hustoty. Postupujeme takto:

1. Nejdříve určíme hmotu tělesa m . Platí opět

$$m = V \cdot \rho.$$

2. Potom těleso zavěšené na misce tenkým drátkem ponoříme do kapaliny známé hustoty ρ_1 . Podle Archimedova zákona je těleso nadlehčováno silou rovnou váze kapaliny tělesem vytlačené. Bude se tedy těleso ná vahách chovat tak, jako by jeho hmota byla menší o hmotu vytlačené kapaliny. Poněvadž vytlačený objem kapaliny je roven obje-

mu tělesa, nastane na vahách rovnováha při vyvážení závažím hmoty m_2 , pro něž platí

$$m_2 = m - V \cdot \rho_1,$$

$$m_2 = m - m \frac{\rho_1}{\rho}$$

Odtud dostáváme

$$m \frac{\rho_1}{\rho} = m - m_2$$

čili

$$\rho = \frac{m}{m - m_2} \rho_1.$$

Při přesném měření přihlížíme i k hmotě drátku, kterým těleso při vážení připevňujeme, i k nadlehčení jeho ponořené části v kapalině.

III. část

Určování hustoty kapalin

Z metod pro určování hustoty kapalin uvedeme si sedm metod.

1. *Měřením objemu a vážením.* Objem kapaliny určíme kalibrovanou nádobou a hmotu vážením; pak

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Určování objemu kalibrovanou nádobou je značně nepřesné, a proto je i výsledek nepřesný.

2. *Pyknometrem.* Měření objemu zde vyloučíme tím, že srovnáme hmoty stejného objemu kapaliny o neznámé hustotě ρ a kapaliny o známé hustotě ρ_1 . Postupujeme takto:

1. Nejdříve určíme hmotu prázdného pyknometru m .

2. Pak naplníme pyknometr kapalinou o neznámé hustotě ρ a určíme jeho hmotu m_1 . Pro hmotu kapaliny pak platí

$$m_1 - m = V \cdot \rho,$$

kde V je objem pyknometru.

3. Po vyčištění pyknometru naplníme pyknometr kapalinou o známé hustotě ρ_1 a určíme jeho hmotu m_2 . Pro hmotu této kapaliny platí

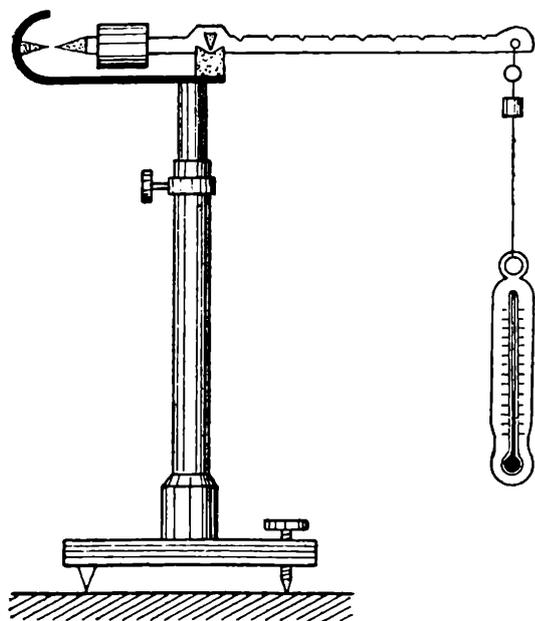
$$m_2 - m = V \rho_1$$

Vydělením obou rovnic vyloučíme V a dostaneme

$$\rho = \frac{m_1 - m}{m_2 - m} \rho_1$$

3. *Užitím zákona Archimedova.* Při této metodě srovnáváme nadlehčení nějakého pomocného tělesa v kapalině, jejíž hustotu určíme, s nadlehčením v kapalině, jejíž hustotu známe. Tím odpadne opět určování objemu. Postupujeme takto:

1. Určíme hmotu pomocného tělesa, zavěšeného tenkým drátkem na misce vah, na vzduchu; označíme ji m .



Obr. 22

2. Potom zvažíme pomocné těleso ponořené do kapaliny, jejíž hustotu určíme, když nádoba s kapalinou bude spočívat na pevné podložce; rovnováha nastane při hmotě závaží m_1 . Pak podle Archimedova zákona je rozdíl hmot závaží při prvním a druhém vážení roven hmotě kapaliny vytlačené pomocným tělesem; tedy

$$m - m_1 = V \cdot \rho$$

3. Provedeme totéž ještě jednou, jen užijeme kapaliny o známé hustotě ρ_1 ; hmotu označme m_2 .

Pak

$$m - m_2 = V \cdot \rho_1$$

Vydělením obou rovnic vyloučíme objem V a dostaneme

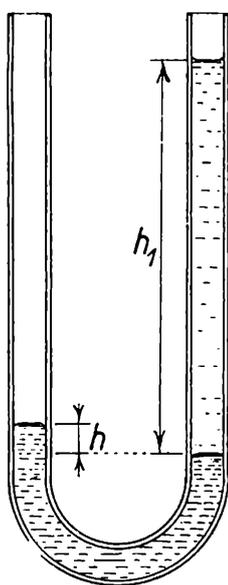
$$\rho = \frac{m - m_1}{m - m_2} \rho_1$$

Při přesném vážení je třeba přihlídnout k hmotě drátu, kterým je těleso připevněno, případně i k jeho nadlehčení v kapalinách.

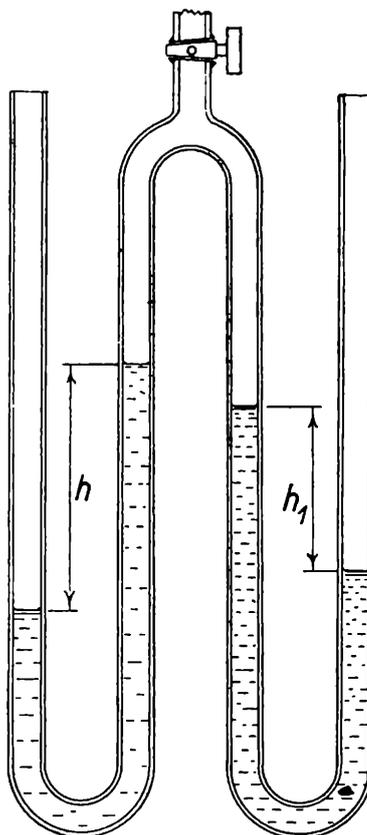
4. *Mohrovými vážkami.* Abychom nemuseli provádět vždy vážení pomocného tělesa na vzduchu a ve dvou kapalinách, jsou k měření vhodně upraveny vážky zvané Mohrovy (obr. 22). Jsou to nerovnoramenné váhy, které na delším konci nesou tělísko; bývá jím teploměr, aby se mohla hned určit i teplota kapaliny. Když je teploměr zavěšen, jsou váhy v rovnováze. Rameno od teploměru k ose je rozděleno na deset dílků. Ponoří-li se teploměr do destilované vody teploty 4°C , vyrovná se nadlehčení teploměru největším závažím daným k vážkám, zavěšeným nad teploměr. Je tedy hmot největšího závaží rovna hmotě destilované vody teploty 4°C vytlačené teploměrem. Poněvadž hustota destilované vody při 4°C je $1000,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, považujeme toto závaží za 1000 jednotek. Jestliže při vyvažování teploměru ponořeného do jiné kapaliny

musíme zavěsit závaží jezdce - do n-tého dílku na rameni, je hustota kapaliny přímo $\frac{n}{10} 10^3 \text{ kgm}^{-3}$. Abychom nemuseli dávat jezdce mezi dílky na stupnici, užíváme vedle základního jezdce ještě dalších jezdců, 10krát, 100krát a 1000krát lehčích, kterými postupně najdeme rovnováhu na vahách a určíme přímo hustotu kapaliny v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

5. *Spojitými nádobami.* U kapalin, které se nemísí, můžeme použít k měření hustoty U-trubice.



Obr. 23.



Obr. 24.

Jestliže se nádoba skládá ze dvou ramen (třeba různé šířky), pak se ustálí obě kapaliny v rovnováze tak, že na plochu postavenou dole v nádobě působí z obou stran stejně velké tlakové síly, a tedy i stejně velké hydrostatické tlaky. Poněvadž stejné výšky jedné kapaliny působí stejně velkým hydrostatickým tlakem, musí hydrostatické tlaky obou kapalin na společné rozhraní být stejné (obr. 23). Označíme-li hustoty kapalin ρ a ρ_1 , výšky nad společným rozhraním h a h_1 , musí platit

$$h\rho g = h_1\rho_1 g ,$$

čili

$$h : h_1 = \rho_1 : \rho ,$$

tj. výšky nad společným rozhraním jsou v nepřímém poměru k hustotám kapalin.

Známe-li hustotu jedné kapaliny a naměříme výšky h a h_1 nad společným rozhraním, můžeme určit hustotu druhé kapaliny.

Jestliže se kapaliny mísí, použijeme dvou U-trubic (obr. 24). Je samozřejmé, že lze jich použít i tehdy, když se kapaliny nemísí. Do jedné z U-trubic nalejeme kapalinu, jejíž hustotu máme určit, do druhé U-trubice nalejeme kapalinu, jejíž hustotu známe. Pak kohoutem mezi oběma U-trubicemi buď vysajeme něco vzduchu, nebo vzduch tam zhustíme. Přetlak mezi vzduchem vnějším a zředěným, popř. zhuštěným, se projeví v rozdílu hladin kapalin. Hydrostatický tlak každé kapaliny mezi oběma jejími povrchy musí být roven přetlaku vzduchu, a tedy musí platit

$$h\rho = h_1\rho_1,$$

kde h a h_1 jsou příslušné rozdíly hladin. Z naměřených výšek h a h_1 a ze známé hustoty ρ_1 určíme hustotu ρ .

6. *Plovoucím tělesem.* Určování hustoty je založeno na úkazu, že váha tělesa plovoucího na kapalině se rovná váze vytlačené kapaliny. Proto v kapalině o větší hustotě se ponoří méně než v kapalině o hustotě menší. K měření použijeme válcovité skleněné trubice zkumavky dole zatížené a opatřené stupnicí s počátkem u dna trubice. Ponoří-li se tato zkumavka nejprve v kapalině o neznámé hustotě ρ do výšky h a v kapalině o známé hustotě ρ_1 do výšky h_1 , musí platit

$$S h \rho g = S h_1 \rho_1 g = m g,$$

při čemž S je průřez zkumavky a m její hmota. Z toho

$$\rho = \frac{h_1 \rho_1}{h}.$$

7. *Hustoměry.* Aby nebylo třeba při určování hustoty kapaliny pomocí plovoucího tělesa měřit v kapalině o známé hustotě a aby se nemusela z údajů na plovoucím tělese hustota počítat, jsou sestrojeny přístroje - hustoměry, které ukazují přímo hustotu kapaliny. Jsou to trubice dole zatížené a opatřené stupnicí, která platí pro určitou teplotu; stupnice je nerovnoměrná. Měří-li se za jiné teploty, je třeba údaj opravit nebo zahřát kapalinu na teplotu udanou na hustoměru. Aby byl hustoměr hodně citlivý, hotoví se trubice nesoucí stupnici velmi úzkou. Aby nebyl hustoměr příliš dlouhý, hotoví se hustoměr zvlášť pro kapaliny hustší než voda s 1000 (u starších 1,000) nahore a zvlášť pro kapaliny řidší než voda s 1000 (1,000) dole.

Poznámka: Na článku s autorem spolupracovala *Dagmar Košťálová*, členka Jihomoravského krajského výboru FO. Svými připomínkami k článku přispěl *Vl. Rudolf*, člen ústředního výboru FO.

Josef Matoulek, studující ČVUT, Praha:

Zajímavá vlastnost čísel



Poměrně známou zábavnou úlohou při počítání s čísly - číslem budeme v tomto článku označovat vždy přirozené číslo - je tato úloha:

Úloha. Napište libovolné třímístné číslo, které nemá první a poslední číslici stejnou (např. 884). Z tohoto čísla utvořte další číslo tak, že číslice napíšete v obráceném pořadí (tj. č. 488). Odečtete nyní menší číslo od většího ($884 - 488 = 396$) a k rozdílu přičtete číslo, které z něho dostanete napsáním číslic v opačném pořadí. Výsledek je vždy 1089. Tedy v uvedeném příkladu $396 + 693 = 1089$.

Úvodní poznámky. Libovolné n -ciferné číslo A lze psát jako mnohočlen uspořádaný podle mocnin čísla 10

$$A = a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + a_{n-3} 10^{n-3} + \dots + a_1 10^1 + a_0.$$

Místo toho budeme psát stručněji

$$A \equiv (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$$

Číslo, které z něho dostaneme zapsáním číslic v opačném pořadí, nazvěme přidružené a označme $\bar{A} \equiv (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$. Budeme vždy předpokládat $a_{n-1} > a_0$, a tudíž $A > \bar{A}$, neboť v tomto případě je $A - \bar{A} > 0$. Kdyby tomu bylo naopak, vzali bychom přidružená čísla při odčítání v opačném pořádku. Ukážeme, že tento předpoklad lze zavést bez újmy na obecnosti řešení, nebudeme-li uvažovat případ $a_{n-1} = a_0$, který vyloučíme. Je-li totiž $\bar{A} < A$, musíme místo rozdílu $A - \bar{A}$ uvážít rozdíl $\bar{A} - A$. Číslo A je však přidružené k číslu $\bar{\bar{A}}$ (tj. $A = \bar{\bar{A}}$), takže lze psát $\bar{A} - A = \bar{A} - \bar{\bar{A}}$, čímž jsme rozdíl $\bar{A} - A$ převedli na rozdíl přidružených čísel $\bar{A}, \bar{\bar{A}}$, v němž platí však $\bar{A} > \bar{\bar{A}}$, a tedy také $\bar{a}_{n-1} > \bar{a}_0$. Je tedy případ $a_0 > a_{n-1}$ ekvivalentní s případem $\bar{a}_{n-1} > \bar{a}_0$. V dalším budeme vždy rozdíl $A - \bar{A}$ značit R a součet $R + \bar{R}$ označíme S .

Trojčiferná čísla. Libovolné trojčiferné číslo $A \equiv (a_2, a_1, a_0)$ lze psát ve tvaru $A = 10^2 \cdot a_2 + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$; číslo přidružené $\bar{A} \equiv (a_0, a_1, a_2)$ lze psát ve tvaru $\bar{A} = 10^2 \cdot a_0 + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_2$. Rozdíl $A - \bar{A}$ je $R = 10^2 (a_2 - a_0) + a_0 - a_2 = 10^2 (a_2 - a_0 - 1) + 10^1 \cdot 9 + 10^0 (10 + a_0 - a_2)$.

Smysl této úpravy je ten, aby koeficienty při mocninách 10 byly nezáporné. Lze tudíž psát

$R \equiv (a_2 - a_0 - 1, 9, 10 + a_0 - a_2)$, $\bar{R} \equiv (10 + a_0 - a_2, 9, a_2 - a_0 - 1)$ a snadno určíme $S = R + \bar{R}$, dále je

$$S = 10^2 (a_2 - a_0 - 1) + 10^1 \cdot 9 + 10^0 (10 + a_0 - a_2) + 10^2 (10 + a_0 - a_2) + 10^1 \cdot 9 + 10^0 (a_2 - a_0 - 1) = 10^2 \cdot 9 + 2 \cdot 10^1 \cdot 9 + 10^0 \cdot 9 = 1089.$$

Tím jsme dokázali, že pro každé trojčiferné číslo, pro které je $a_0 \neq a_{n-1}$, je $S = 1089$.

P o z n á m k a. Stejně se dokáže, že pro každé dvojčiferné číslo, které nemá obě číslice stejné, je $S = 99$.

Čtyřmístná čísla. Libovolné čtyřčiferné číslo $A \equiv (a_3, a_2, a_1, a_0)$ rozvedeme $A = 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$ a přidružené číslo $\bar{A} \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3)$ rozvedeme $\bar{A} = 10^3 \cdot a_0 + 10^2 \cdot a_1 + 10^1 \cdot a_2 + 10^0 \cdot a_3$ a určíme $R = A - \bar{A}$, tedy

$$R = 10^3 (a_3 - a_0) + 10^2 (a_2 - a_1) + 10^1 (a_1 - a_2) + 10^0 (a_0 - a_3) \dots (1)$$

Tento výraz upravíme nyní tak, aby všechny jeho koeficienty byla nezáporná čísla. Přitom budeme předpokládat $a_3 > a_0$. To můžeme, jak jsme zdůvodnili v úvodních poznámkách. Úprava výrazu (1) závisí na tom, zda $a_2 > a_1$, nebo $a_2 < a_1$, či $a_2 = a_1$. Budeme uvažovat každý případ zvláště.

a) $a_2 > a_1$. Platí-li tato nerovnost, pak lze výraz (1) upravit takto

$R = 10^3 (a_3 - a_0) + 10^2 (a_2 - a_1 - 1) + 10^1 (a_1 - a_2 + 9) + 10^0 (10 - a_3 + a_0)$. Poněvadž koeficienty v tomto rozvoji jsou celá nezáporná čísla menší než deset, lze psát

$$R \equiv (a_3 - a_0, a_2 - a_1 - 1, a_1 - a_2 + 9, 10 - a_3 + a_0)$$

a z toho

$$\bar{R} \equiv (10 - a_3 + a_0, a_1 - a_2 + 9, a_2 - a_1 - 1, a_3 - a_0).$$

Nyní snadno určíme $S = R + \bar{R}$, čili

$$S = 10^3 (a_3 - a_0) + 10^2 (a_2 - a_1 - 1) + 10^1 (a_1 - a_2 + 9) + 10^0 (10 - a_3 + a_0) + 10^3 (10 - a_3 + a_0) + 10^2 (a_1 - a_2 + 9) + 10^1 (a_2 - a_1 - 1) + 10^0 (a_3 - a_0) = 10890.$$

Máme výsledek. Za předpokladu, že $(a_3 - a_0)(a_2 - a_1) > 0$, je $S =$

= 10 890. V předpokladu je zahrnut i případ $a_3 < a_0$, $a_2 < a_1$, který je možno podle úvodních poznámek převést na $a_3 > a_0$, $a_2 > a_1$, jež jsme vyšetřili.

b) $a_2 < a_1$. Platí-li tato nerovnost, pak lze výraz (1) upravit takto

$$R = 10^3 (a_3 - a_0 - 1) + 10^2 (a_2 - a_1 + 10) + 10^1 (a_1 - a_2 - 1) + 10^0 (10 + a_0 - a_3).$$

V tomto rozvoji jsou koeficienty u mocnin deseti celá nezáporná čísla menší než deset. Lze tudíž psát

$R \equiv (a_3 - a_0 - 1, a_2 - a_1 + 10, a_1 - a_2 - 1, 10 + a_0 - a_3)$ a z toho plyne

$$\bar{R} \equiv (10 + a_0 - a_3, a_1 - a_2 - 1, a_2 - a_1 + 10, a_3 - a_0 - 1).$$

Snadno nyní určíme součet $S = R + \bar{R}$, čili

$$S = 10^3 (a_3 - a_0 - 1) + 10^2 (a_2 - a_1 + 10) + 10^1 (a_1 - a_2 - 1) + 10^0 (10 + a_0 - a_3) + 10^3 (10 + a_0 - a_3) + 10^2 (a_1 - a_2 - 1) + 10^1 (a_2 - a_1 + 10) + 10^0 (a_3 - a_0 - 1) = 9999.$$

Shrneme-li předpoklady, které jsme učinili, s předpoklady obrácenými podle úvodních poznámek, do jediné nerovnosti $(a_3 - a_0)(a_2 - a_1) < 0$, pak za tohoto předpokladu je $S = 9999$.

c) $a_2 = a_1$. Platí-li tato rovnost, lze výraz (1) upravit takto

$$R = 10^3 (a_3 - a_0) + 10^0 (a_0 - a_3) = 10^3 (a_3 - a_0 - 1) + 10^2 (10 - 1) + 10^1 (10 - 1) + 10^0 (10 + a_0 - a_3).$$

Koeficienty v tomto rozvoji jsou celá nezáporná čísla menší než deset, a proto

$$R \equiv (a_3 - a_0 - 1, 9, 9, 10 + a_0 - a_3) \text{ a z toho}$$

$$\bar{R} \equiv (10 + a_0 - a_3, 9, 9, a_3 - a_0 - 1).$$

Nyní snadno určíme $S = R + \bar{R}$, pak je

$$S = 10^3 (a_3 - a_0 - 1) + 10^2 \cdot 9 + 10^1 \cdot 9 + 10^0 (10 + a_0 - a_3) + 10^3 \cdot (10 + a_0 - a_3) + 10^2 \cdot 9 + 10^1 \cdot 9 + 10^0 \cdot (a_3 - a_0 - 1) = 10989.$$

Za předpokladu, že $a_2 = a_1$, je tedy $S = 10989$.

Pěticiferná čísla. Lze dokázat, že pro pěticiferná čísla je rozhodující hodnota výrazu $m = (a_4 - a_0)(a_3 - a_1)$. Pro $m > 0$, je $S = 109890$; pro $m < 0$, je $S = 99099$; je-li $m = 0$ a $a_4 \neq a_0$, pak je $S = 109989$.

n-ciferná čísla: libovolné n -ciferné číslo lze psát ve tvaru $A = 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + 10^{n-k} \cdot a_{n-k} + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$.

Číslo přidružené je

$$\bar{A} = 10^{n-1} \cdot a_0 + 10^{n-2} \cdot a_1 + \dots + 10^{n-k} \cdot a_{k-1} + \dots + 10^1 \cdot a_{n-2} + 10^0 \cdot a_{n-1}.$$

Určíme nyní $R = A - \bar{A}$, čili

$$R = 10^{n-1} (a_{n-1} - a_0) + 10^{n-2} (a_{n-2} - a_1) + \dots + 10^{n-k} (a_{n-k} - a_{k-1}) + \\ + 10^1 (a_1 - a_{n-2}) + 10^0 (a_0 - a_{n-1}).$$

Položme nyní

$$a_{n-k} - a_{k-1} = b_k \quad (2)$$

Je tedy

$$R = 10^{n-1} \cdot b_1 + 10^{n-2} \cdot b_2 + \dots + 10^{n-k} \cdot b_k + \dots + 10^1 \cdot b_{n-1} + \\ + 10^0 \cdot b_n. \quad (3)$$

Z výrazu (2) plyne: $b_k + b_{n-k+1} = 0$. Z toho ihned následují další závěry:

a) pro n liché neexistuje ve výrazu (3) prostřední člen ($b_{\frac{n+1}{2}} = 0$),

b) protože $b_1 > 0$ je pro n liché počet různých součtů S roven $3^{\frac{n-3}{2}}$, v dalším budeme počet součtů S n -ciferného čísla značit $q(S)_n$. Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý, neboť z n koeficientů b_k může jich právě $\frac{n-3}{2}$

nabývat hodnot $b_k > 0$, $b_k < 0$, $b_k = 0$, nezávisle na sobě, protože $b_{\frac{n+1}{2}} = 0$ a $b_1 = -b_n > 0$, a určením koeficientu b_k je zároveň určen koeficient b_{n-k+1} .

c) protože $b_1 > 0$ je pro n sudé $q(S)_n = 3^{\frac{n-2}{2}}$. Důkaz tohoto tvrzení je analogický důkazu v odst. b.

d) pro $n = 2r$ (tj. sudé) je $q(S)_{2r} = q(S)_{2r+1}$. Důkaz tohoto tvrzení plyne z odst. b, c.

S rostoucím n roste $q(S)_n$ velmi rychle, neboť se velmi rychle zvětšuje počet koeficientů b_k , o jejichž hodnotách je třeba uvažovat: pro $n = 2, 3$ je to 0, a tudíž $q(S)_{2,3} = 3^0 = 1$; pro $n = 4, 5$ je tento počet 1, ... Je tedy velmi obtížné podat obecné řešení pro n -ciferné číslo. Všimneme si proto pouze jednoho zvláštního případu

$$b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1} = 0.$$

Tento případ znamená, že $a_{n-k} = a_{k-1}$. Potom R plyne ze vztahu (3)

$$R = 10^{n-1} \cdot b_1 + 10^0 \cdot b_n = 10^{n-1} \cdot b_1 - 10^0 \cdot b_1 = 10^{n-1} (b_1 - 1) + \\ + 10^{n-2} \cdot 9 + \dots + 10^1 \cdot 9 + 10^0 \cdot (10 - b_1).$$

Je tedy

$$R \equiv (b_1 - 1, 9, 9, \dots, 9, 10 - b_1)$$

a

$$\bar{R} \equiv (10 - b_1, 9, 9, \dots, 9, b_1 - 1).$$

Určíme nyní $S = R + \bar{R}$,

$$S = 10^{n-1} (b_1 - 1) + 10^{n-2} \cdot 9 + 10^{n-3} \cdot 9 + \dots + 10^1 \cdot 9 + 10^0 (10 -$$

$$\begin{aligned}
& - b_1) + 10^{n-1} (10 - b_1) + 10^{n-2} \cdot 9 + 10^{n-3} \cdot 9 + \dots + 10^1 \cdot 9 + \\
& + 10^0 (b_1 - 1) = 10^{n-1} \cdot 9 + 10^{n-2} \cdot 9 + \dots + 10^{n-k} \cdot 9 + \dots + \\
& + 10^1 \cdot 9 + 10^0 \cdot 9 + 10^{n-2} \cdot 9 + 10^{n-3} \cdot 9 + \dots + 10^{n-k} \cdot 9 + 10^1 \cdot 9.
\end{aligned}$$

Tím jsme upravili součet na součet dvou geometrických řad. První má $a_1 = 9$, $q = 10$ a n členů a tudíž

$$s_1 = 9 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = 10^n - 1$$

Druhá má $a_1 = 90$, $q = 10$, a $(n - 2)$ členů, její součet je

$$s_2 = 90 \frac{10^{n-2} - 1}{10 - 1} = 10 (10^{n-2} - 1) = 10^{n-1} - 10.$$

Určíme nyní $S = s_1 + s_2 = 10^n + 10^{n-1} - 11$.

Je tedy možno vyslovit tento závěr: Je-li A takové n -ciferné číslo ($a_{n-1} \neq a_0$), pro které platí $a_{k-1} = a_{n-k}$ ($k \neq 1, n$), pak je $S = 10^n + 10^{n-1} - 11$.

Recenze

O. Setzer:

Deskriptivní geometrie

II. díl, Praha 1962, Státní nakladatelství technické literatury, 208 str., 163 obr., cena 7,10 Kčs.



Tato knížka, kterou vydala ve Státním nakladatelství technické literatury Československá společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí jako 23. svazek Polytechnické knihovny a to v II. řadě „Příručky“, se napojuje na dílo Doc. RNDr. Miroslava Menšíka „Deskriptivní geometrie, I. díl“. Je nejen stejným způsobem zevně vypravena, ale i svou náplní je zcela obdobně pojata, takže je vlastně pokračováním I. dílu. Pro porozumění textu je ovšem třeba, aby čtenář zprvu si prostudoval I. díl. Takto vyzbrojen, čtenář bez jakýchkoliv obtíží může považovat text za jasný. Knižka obsahuje partie deskriptivní geometrie, vyžadující již znalost základních promítacích způsobů.

Dílo je rozděleno úměrně na sedm kapitol. V úvodní kapitole autor seznamuje čtenáře s prostorovými křivkami, poněvadž se s nimi pak čtenář stále setkává ve všech dalších kapitolách. Druhá kapitola je věnována plochám a to zejména těm plochám, které mají značný význam

v technické praxi, ať již jsou to plochy zborcené (důležité pro stavebnictví), cyklické (vyskytující se na mnohých architektonicky významných budovách), klínové (uplatňují se ve strojírenství i ve stavebnictví), topografické (základní plochy v zeměměřičství, lesnictví i zemědělství), šroubové (velmi důležité ve strojírenství) apod. Nemenší význam pro praktické použití má i látka, kterou autor vložil do třetí kapitoly o průnicích ploch a těles. Na mnoha předmětech, které někdy i denně bereme do ruky, na různých strojích, které vidíme kolem sebe, na četných budovách, mimo něž chodíme, můžeme při bystřejším pohledu vidět průniky různých jednoduchých i složitých geometrických těles. Zobrazení různých těles v deskriptivní geometrii často vyžaduje, aby těleso se jevilo dostatečně plasticky. Tomu napomáhá vhodné osvětlení, které autor vykládá ve čtvrté kapitole. Poněvadž se zplastičením zobrazovaného předmětu zvýší prostorová představa tělesa, je znalost geometrického osvětlení pro deskriptivní geometrii velmi důležitá. Zbývající část knihy až do konce věnuje autor dalšímu důležitému způsobu promítání a to promítání středovému neboli centrálnému. V páté kapitole zasvěcuje čtenáře do základů této projekce a seznamuje jej se základními pojmy. Výklad je jasný, takže čtenář snadno vnikne do tohoto od rovnoběžného promítání zcela odlišného způsobu projekce. V šesté kapitole přechází autor na lineární perspektivu. Nejprve seznamuje čtenáře s nejobvyklejšími metodami konstrukce perspektivy, jako jsou metody průsečná, vrstevná nebo i zářezová, ale uvádí i speciální metody jako je tříúběžníková nebo cylindrická perspektiva a dvojstředové (bicentrální) promítání. Protože perspektiva zobrazuje předměty téměř tak, jak je lidské oko skutečně vidí, má tento promítací způsob veliký význam zejména při zobrazování předmětů velikých rozměrů, např. při zobrazování budov, mostů, velikých strojů aj. Autor uzavírá své dílo sedmou kapitolou o fotogrammetrii, takže se čtenář poučí i o konstruování půdorysu, nárysu a bokorysu nějakého předmětu z jeho fotografického snímku.

Publikace umožní nejen studentům středních odborných nebo všeobecně vzdělávacích škol nahlédnout do dalších zajímavých partií deskriptivní geometrie, se kterými se na škole dosud buď vůbec nesetkali, anebo jen velmi letmo, ale kniha se stane dobrou pomocnicí zejména studentům I. a II. ročníku vysokých škol technických. V knize najdou stručnou a encyklopedickou formou obsaženu téměř všechnu látku, probíranou v deskriptivní geometrii. Že v díle najdou neocenitelnou podporu hlavně všichni studenti večerního nebo dálkového studia, není třeba ani zdůrazňovat. A pokud se čtenář chce ještě hlouběji seznámit a deskriptivní geometrii, najde na konci knihy výčet nejnovější literatury tohoto oboru a to jak domácí, tak i zahraniční. Stejně jako I. díl, má i díl II. značný nedostatek v tom, že chybí věcný index a že obrázky jsou dosti malé. Tento nedostatek bude však jistě odstraněn v příštích vydáních, k nimž pravděpodobně brzy dojde.

Oldřich Jeništa

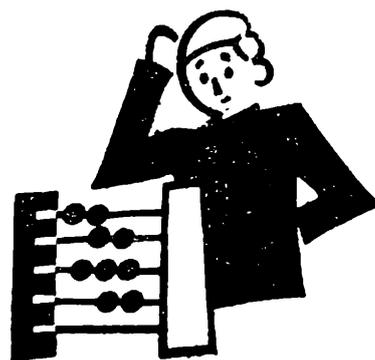
Proto hlavní důraz ve vysokém školství klademe na technické a přírodovědecké směry, přičemž přední místo musí patřit základním teoretickým disciplínám, zvláště matematice, fyzice, chemii a biologii.

President republiky A. Novotný
na XII. sjezdu KSČ. 1962

Matematika

Inž. V a s i l Č a p l a, Praha:

Vznik prvního počítačícího stroje



Roku 1958 byly objeveny dopisy a perokresby, které dokazují, že není správný dosud trvající názor, že B l a i s e P a s c a l (čti bléz paskal) sestrojil první počítačící stroj.

Nejstarší počítačící pomůckou byly lidské prsty. Dalšími počítačícími nástroji byly kamínky, kterým se latinsky říká *c a l c u l u s* a odtud máme název kalkulační stroj, kalkulovat apod. Kamínky pokládáme za předchůdce různých počítadel, například čínského *s u a n - p a n*, jehož existence byla zjištěna v době asi 3500 let před n. l., japonského *s o r o b a n*, římského *a b a c u s* apod. Uvedení počítadla měla za základ pětčíslicovou (kvitární) soustavu. Ruská počítadla *š č o t y*, používaná dodnes i v Sovětském svazu, kde soupeří s kalkulačními stroji, neboť lze na nich sčítat, odečítat, násobit i dělit, jsou sestrojena na základě desítkové (dekadické) soustavy.

V r. 1960 vydalo Státní nakladatelství technické literatury překlad knihy Norberta Wienera, *K y b e r n e t i k a*, kde na str. 16 čteme:

„Leibniz sám, jako jeho předchůdce Pascal, se zajímal o konstrukci kovových počítacích strojů.“ Obdobný názor, že Pascal a Leibniz jsou prvními, kde sestrojili sčítací a kalkulační stroje, najdeme i v jiných publikacích jak u nás, tak i v cizině. Proto bude třeba seznámit se s tehdejšími stavy.

Blaise Pascal (1623—62) byl slavný francouzský matematik a fyzik. V publikaci Kobronskij-Pekelis, Bystryje myslj (Rychleji než myšlení), Moskva, 1959, je uvedeno, že E. Pascal, otec Blaise, se stal r. 1638 vedoucím skupiny nespokojenců, kterým francouzská vláda zkrátila bezpracný důchod z kapitálu. Upozorněn svým přítelem, uprchl do zahraničí, neboť „všemohoucí“ ministr Ludvíka XIII., kardinál Richelieu (čti rišlijé), který nestrpěl odpor, dal příkaz, aby E. Pascal byl zatčen. Pascalova žena a děti, syn Blaise a dcera Jacquelina (čti žakelina) zůstaly v Paříži.

Dne 3. dubna 1639 se dávala v pařížském divadle hra Tyranská láska. Kardinál Richelieu, který je považován za skutečného vládce při králi Ludvíku XIII., navštívil představení. Hra byla svěřena skupině mladých dívek-ochotnic. Představení, ve kterém vynikala zejména mladistvá Jacquelina, mělo velký úspěch. Po představení přišel Richelieu do zákulisí, aby vyjádřil mladé herečce své nadšení, ta postoupila ke kardinálovi a poprosila ho o milost pro svého otce. Kardinál slíbil udělat, o čem prosí.

Tak se vrátil E. Pascal do Francie, kde na Richelieuův příkaz dostal místo intendanta, tj. výběrčího daní. Protože s funkcí výběrčího daní byly spojeny nekonečné a úmorné výpočty, syn Blaise se snažil pomoci svému otci. Ačkoli mu bylo tehdy teprve 17 let, počal sestavovat počítací stroj, který dokončil v r. 1642 ve svých devatenácti letech.

Protože často slýcháme, že prý Pascal vynalezl počítací stroj, je třeba zjistit, v čem tkví tento „vynález“. Celé 17. a začátek 18. stol. se považuje za věk hodinových mechanismů, které - jak známo - pracují na principu ozubených koleček. Jelikož tohoto principu použil i Pascal pro stavbu svého sčítacího stroje, nelze mluvit o vynálezu. Snad za nepatrný vynález nebo podle dnešní praxe za tzv. „zlepšovák“ by se mohl považovat páčkový mechanismus, sloužící k přenosu s kolečka nižšího řádu na kolečko vyššího řádu po vykonání celé jedné otáčky. Protože i takový páčkový mechanismus byl sestrojen Schickhardtem ještě před Pascalovým narozením, nelze mluvit ani o „zlepšováku“.

Musíme však přiznat, že sestrojení sčítacího stroje nebylo tak snadné. Jednou z nesnází byla soustava tehdejší francouzské měny, která se skládala z denárů (haléřů), sou (vyslov sú, desetníků) a liber (asi 2 koruny). Dvanáct denárů tvořilo 1 sou a 20 sou libru; podobně je tomu dodnes v Anglii, kde 12 pencí platí 1 šilink, 20 šilinků je 1 libra. Proto muselo být první kolečko Pascalovy sčítačky vybaveno 12 zuby, druhé 20 zuby a ostatních 8 koleček po 10 zubech. Otáčením koleček doprava se pro-

vádělo sčítání, doleva odečítání. Podle dekretu Ludvíka XIII., uděleného Pascalovi v r. 1649, vyrobili různí mechanici asi 50 počítacích strojů, z nichž některé se zachovaly v muzeích, například v Paříži, Drážďanech apod. Problémem stavby počítacích strojů se více nezabýval.

G o t t f r i e d W i l h e l m L e i b n i z (vyslov lajbnyce) 1646—1716, známý německý polyhistor, filosof a matematik; žil v téže době jako I. Newton. Leibnizova filosofie má určitý vztah k matematickým strojům. Wiener ve své publikaci (5) píše: „Leibnizova filosofie se soustřeďuje kolem dvou úzce spjatých koncepcí: univerzálního symbolismu a logického kalkulu. Z nich se odvozuje soustava matematických značek a symbolická logika našich dnů. A právě tak, jako se kalkul v aritmetice hodí pro mechanizaci, počínaje počítadlem a stolním počítacím strojem až k ultrarychlým matematickým strojům dneška, obsahuje Leibnizův *c a l c u l u s r a t i o c i n a t o r z á r o d k y m a c h i n a e r a t i o n a t r i c i s*, myslícího stroje. Kdybych měl zvolit někoho za patrona kybernetiky v dějinách vědy, musil bych zvolit Leibnize.“

Leibniz již roku 1671 79 let po Pascalově smrti - navrhl počítací stroj, který dokázal sčítat, odečítat, násobit a dělit a který nyní nazýváme kalkulačním strojem. Téhož roku přijel do Paříže, kde hledal mechaniky, kteří by mohli jeho projekty realizovat. Teprve v Paříži se dozvěděl, že čtyři roky před jeho narozením sestrojil Pascal sčítací stroj, a proto nelze tvrdit, že Leibniz převzal Pascalovu myšlenku a sestrojil počítací stroj, vybavený též možností násobit a dělit. Mechanici postavili v Paříži Leibnizův stroj, který Leibniz osobně předvedl 1. února 1673 na schůzi Royal Society v Londýně, kde byl jeho počítací stroj velmi oceněn. Proto byl Leibniz jednomyslně zvolen členem Royal Society. Zároveň s Leibnizem předváděl v Royal Society svůj počítací stroj též Angličan Moreland. Jeho počítací stroj byl sestrojen na podkladě Neperových kostiček; dovedl jen sčítat a odečítat.

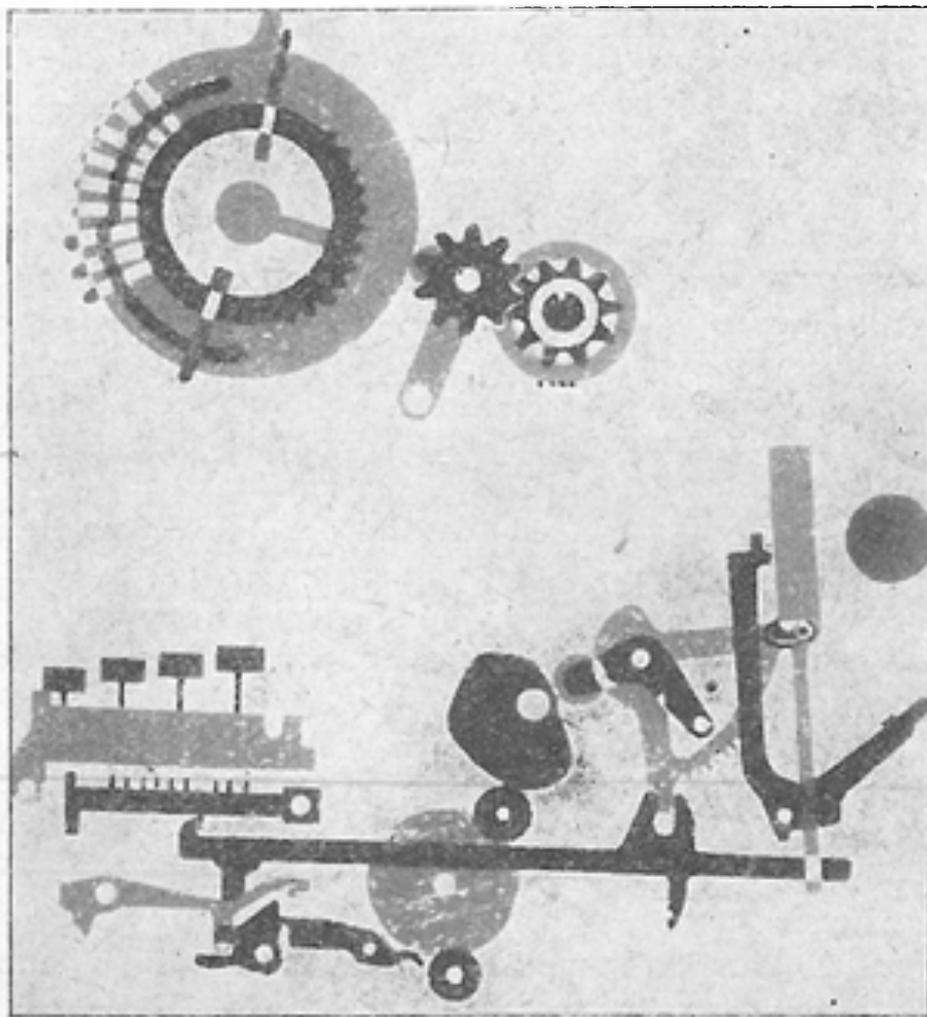
Protože jemná mechanika v této době nebyla ještě na výši, nebyl také Leibnizův počítací stroj bez závad. Leibniz se proto obrátil na pařížského mechanika Oliviera se žádostí o zlepšení svého stroje. Poněkud zlepšený stroj předvedl Leibniz 9. ledna 1675 ve Francouzské akademii věd. Na základě posudku odborníků objednal francouzský ministr financí Colbert u Leibnize dva takové stroje. Dodány však nebyly, neboť stále vykazovaly závady. Vedle filosofických a matematických prací se Leibniz snažil zdokonalit svůj stroj, a proto se obracel na různé mechaniky a profesory, avšak jeho úsilí bylo marné. Tato snaha ho stála asi 24 000 tolarů.

Leibnizův stroj používal válcových ozubených kol se stupňovitě uspořádanými zuby a posuvným zařízením na nastavování čísel. Tohoto principu stavby kalkulačních strojů se používá i u některých dnešních kalkulačních strojů.

Nyní si objasníme, proč měl Leibnizův stroj závady. Na začátku našeho století prozkoumal Leibnizův počítací stroj inženýr Burkhardt a zjistil,

že kromě nedostatečného provedení jemných součástí, hlavní závada tkvěla v tom, že bylo příliš malé místo, určené pro přenos z nižšího řádu do vyššího. Leibnizův stroj je vystaven od r. 1879 v muzeu v Hannoveru.

Dokonalý kalkulační stroj sestrojil v r. 1778 württemberský farář Philipp Matthäus Hahn (1739—80), který se přeškolil na jemného mechanika. Tak spojil práci konstruktéra s prací jemného mechanika, což Leibnizovi scházelo. K sestrojení svého kalkulačního stroje použil principu konstrukce Leibnizova stroje, avšak válcová ozubená kola se stupňovitě uspořádanými zuby, postavil kolmo. Jeden z Hahnových příbuzných zlepšil konstrukci tohoto stroje a tak se používalo



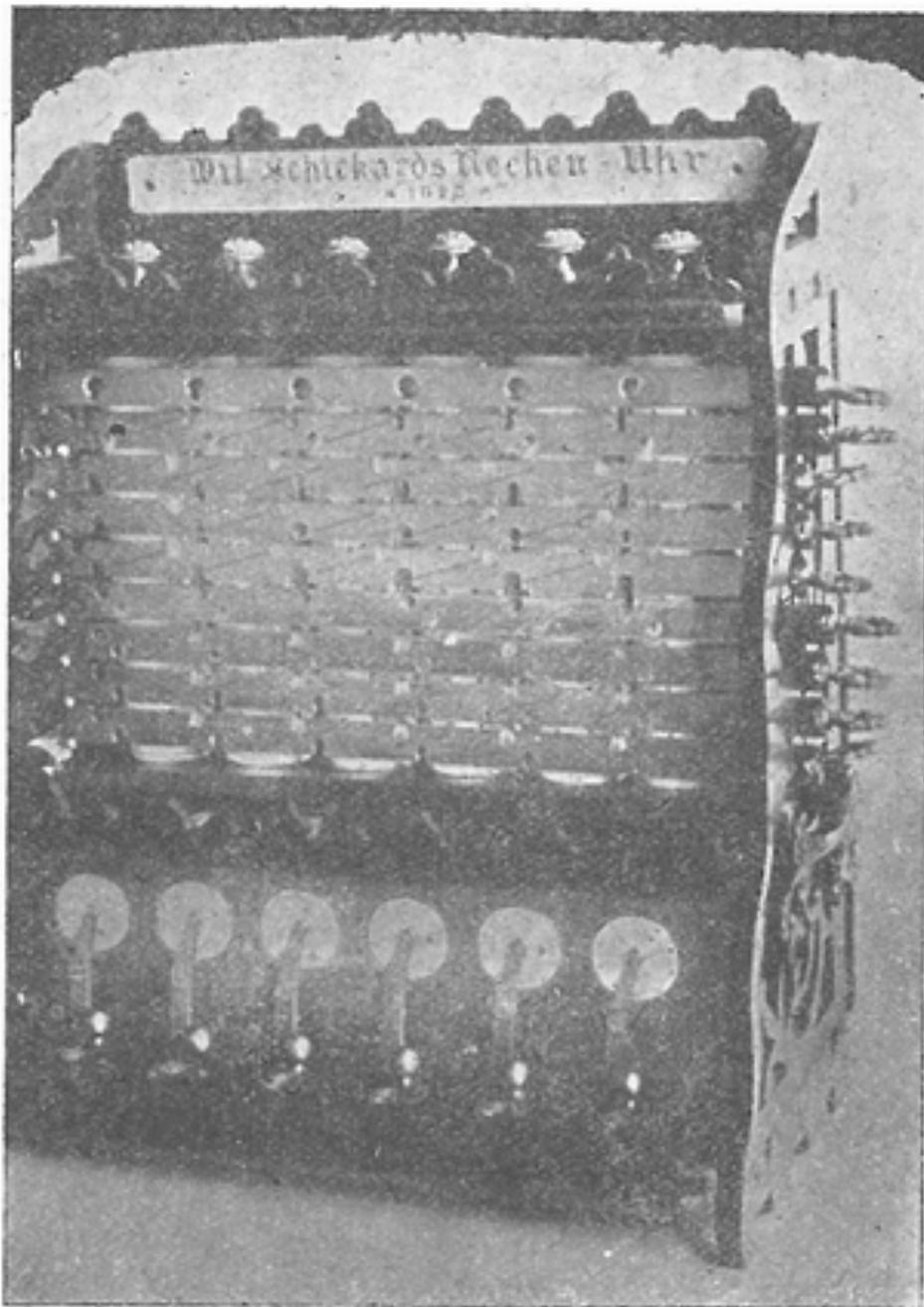
Obr. 1. Soustava paprskového soukolí a ostatní mechanismy Odhnerovy kalkulačky.

Hahnových strojů až do začátku našeho století. Bylo jich vyrobeno asi tisíc kusů a některé z nich jsou v museích ve Štutgartu a v Drážďanech.

Princip stavby počítacích strojů na podkladě ozubených koleček lákal hodináře, neboť to byl vlastně jejich obor. Na stavbě počítacích strojů pracovali hodinář Ludvíka IV. Grillet (1678), Lépine (1725), Hillerin de Boistissandeau (1730) i jiní. V Rubišově (nyní v Polsku) postavil hodinář A. Stern v letech 1810—20 tři prototypy

počítacích strojů poháněných hodinovým strojem. Sternovy stroje vykonávaly nejen čtyři základní aritmetické operace, ale i druhé odmocňování.

S výrobou kalkulačních strojů, které představovaly kombinaci strojů Leibnizových a Hahnových, začal v Paříži r. 1820 **C h a r l e s X a v i e r**



Obr. 2. Počítací stroj Wilhelma Schickhardta (Wil. Schickhards Rechen-Uhr 1623).

T h o m a s d e C o l m a r. Tyto stroje byly sice kalkulačními, tj. prováděly čtyři základní aritmetické operace, nebyly však dokonalé.

V Rusku popsal **Z. S l o n i n s k i j** v r. 1845 počítací stroj s možností provádění druhého odmocňování. Vynálezce byl poctěn Ruskou akademií věd premií druhého stupně.

Dosud používanou kapesní sčítačku sestrojil r. 1874 ruský pedagog K r u m m e r. V tomtéž roce se přihlásil Švéd W i l l g o d t T h. O d h n e r, inženýr státních papíren v Petrohradě. Ve své konstrukci kalkulačního stroje použil originální myšlenky ozubených kol s proměnným počtem zubů. Stroj byl zkonstruován k zeměměřickým (geodetickým) výpočtům, neboť se v této době konala v Rusku pozemková reforma. Tento dodnes velmi oblíbený kalkulační stroj se staví i nyní pro geodetické a jiné matematické výpočty jako jednoduchý, nebo jako dvojitý, nebo i trojitý kalkulační stroj. Odhnerův stroj se stal základem konstrukce malých páčkových kalkulačních strojů, uváděných například značkami Originál Odhner, Mira, Brunsviga, Thales, Walther aj. Odhnerovy kalkulačky se začaly vyrábět v Petrohradě r. 1894 v nově zřízené továrně.

Jinou zvláštní sčítačku sestrojil r. 1878 opět v Rusku akademik P. L. Č e b y š e v. Na tomto stroji byl řešen skutečně originálně způsob přenášení čísel do vyššího řádu. Otáčky kolečka nižšího řádu desetkrát zmenšeny se přenášely na kolečko vyššího řádu. V r. 1882 upravil Čebyšev stroj zvláštním mechanismem pro násobení a dělení a vyvinul tak tzv. „automatický“ kalkulační stroj. Jeho princip se stal podkladem stavby strojů značek Burroughs a Merchant v USA.

V dnešní době existuje 720 značek různých sčítacích a kalkulačních strojů, které se v poslední době modernizují, neboť se používá nových stavebních prvků jako jsou relé, elektronky, polovodiče a tranzistory.

To je stručný nástin vzniku a vývoje stolních počítacích strojů, jak jej čtenář najde v některých publikacích.

V r. 1960 jsem zjistil v časopise *Physikalische Blätter*, č. 8, z r. 1958 že byl objeven počítací stroj, postavený před narozením Pascala. Dotazem v Sovětském svazu, v Polsku, i ve Spojených státech amerických jsem zjistil, že objev zůstal bez povšimnutí.

Dr. Fr. Hammer, vydavatel Keplerovy pozůstalosti, našel v Keplerově písemnostech dopis a perokresbu, představující počítací stroj. V dopise oznamuje S c h i c k h a r d t, profesor matematiky a astronomie univerzity v Tübingen u Štuttgartu, Keplerovi, že podle vzoru počítacího stroje, který sám dříve postavil, sestrojil pro Keplera druhý stroj, který ještě před dokončením padl za oběť ohni. O prvním počítacím stroji psal Wilhelm Schickhardt (1592—1635) Keplerovi (1571—1630) dne 20. září 1623 (rok Pascalova narození), že stroj „datos numeros statim authomatos computet, addat, substrahat, multiplicet, dividatque“. Z toho je patrné, že proti pozdějšímu Pascalovu stroji dovedl Schickhardtův stroj též násobit a dělit. Hammer našel pak v městské knihovně v Štuttgartu další důkaz o tomto stroji, a to dokonalé vyobrazení, doprovázené poznámkami, které připojil stavitel stroje, mechanik W i l h e l m P f i s t e r z Tübingen. O svém objevu podal Hammer zprávu na kongresu pro dějiny matematiky v Oberwolfachu r. 1958. První Schickhardtův stroj byl zničen

asi v době třicetileté války. V Tübingen se nyní pokoušejí o rekonstrukci tohoto stroje podle nalezených perokreseb a poznámek mechanika Pfistera. Podle nich je patrné, že jde o stroj s ozubenými kolečky pro sčítání a odečítání i s převodem a o válcovou konstrukci pro násobení a dělení. Byl to tedy kalkulační stroj.

Konečně je nutno upozornit na starořecký přístroj vyzvednutý potápěči před 60 lety z mořského dna, který sloužil astronomickým výpočtům (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1961—62, č. 5).

Literatura

1. V. Čapla, Vznik a vývoj matematických strojů od nejstarších dob do začátku druhé světové války. Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky, ČSAV č. 6.
2. L. S. Chrenov, Malyje vyčislitelnyje mašiny, Moskva, 1957.
3. J. Klír - V. Čapla, Vznik a vývoj strojů na zpracování informací, Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 4, roč. 38.
4. K. Křišťoufek, Elektronické počítací stroje, Martin, 1958.
5. N. Wiener, Kybernetika, SNTL, Praha 1960.
6. N. Kobrinskij - B. Pekelis, Bystreje mysli, Moskva, 1959.
7. Vom Abacus zu Odhner, Göteborg, 1958.
8. Physikalische Blätter č. 8/1958.
9. Referativnyj žurnal. Matematika, Akademie věd SSSR, r. 1960.

Jiří Divíšek, PJ, České Budějovice:

Použití grafických papírů k znázornění některých funkcí

I. část

V některých technických knihách či časopisech se často setkáváme s grafy funkcí, které jsou narýsovány ve zvláštní síti. Vzdálenosti jednotlivých bodů označených postupně přirozenými čísly na osách souřadnic se s rostoucím číslem postupně zmenšují a při pozornějším zkoumání nám připomenou stupnici logaritmického pravítka. Takové síti říkáme *logaritmická*. Sestrojíme ji takto:

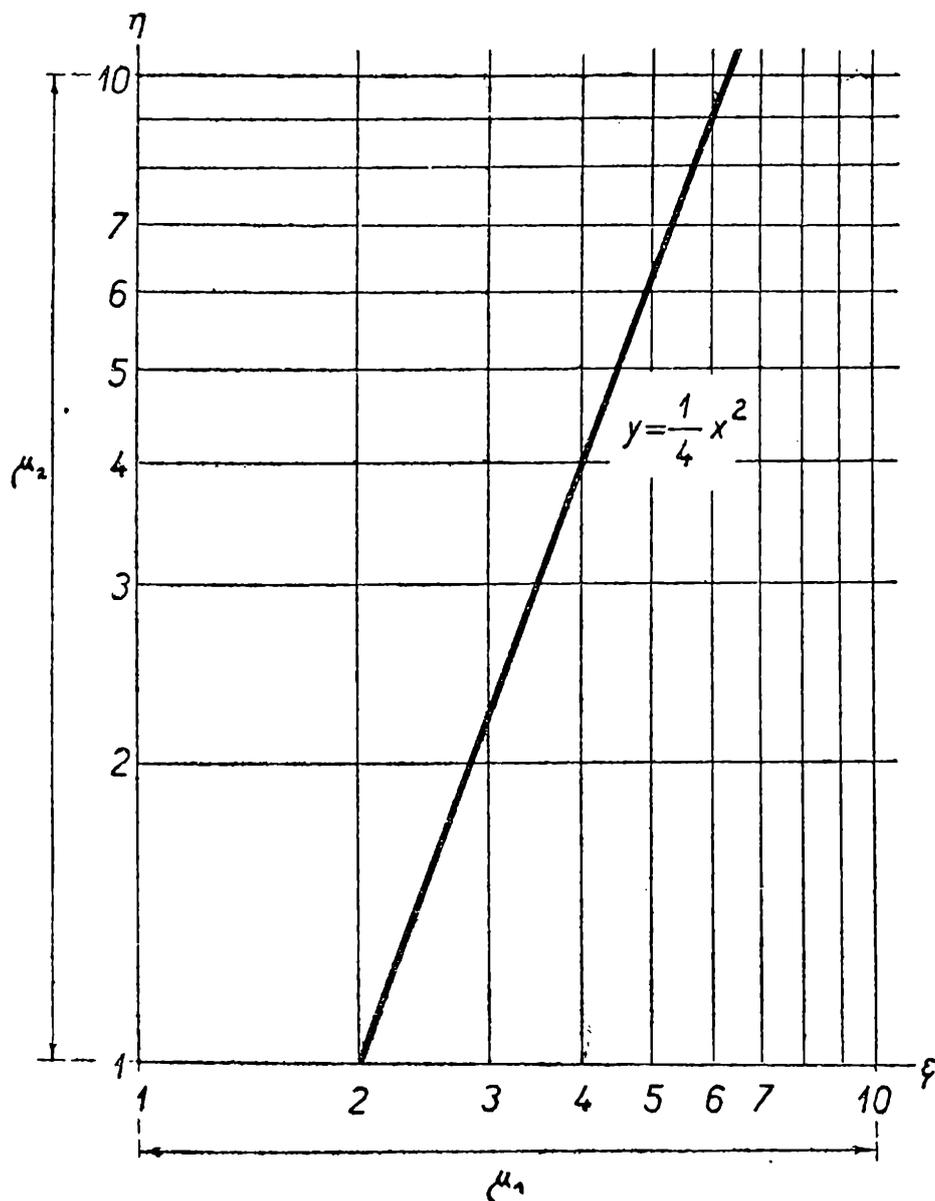
Zvolme dvě navzájem kolmé přímky, které budeme pokládat za osy souřadnic a jejich průsečík za počátek. Vyznačme na kladné části osy ξ a η body, jejichž souřadnice jsou dány vztahy

$$\xi = \mu_1 \cdot \log x, \quad (1)$$

$$\eta = \mu_2 \cdot \log y, \quad (2)$$

když za x a y postupně dosazujeme přirozená čísla a jimi příslušné body označujeme, přičemž čísla μ_1 a μ_2 jsou vhodně zvolená kladná čísla - tzv. m o d u l y, udávající délku jednotkové úsečky na příslušné ose (obr. 1). Čísla, kterými jsme body označili, se nazývají kóty. Tím vznikla na obou osách tzv. f u n k č n í s t u p n i c e - v našem případě logaritmická. Rovnice (1) a (2) se nazývají z o b r a z o v a c í r o v n i c e.

Vzhledem k tomu, že $\log 1 = 0$ a $\log 10 = 1$, bude počátek označen kótami (1; 1) a bod na ose ξ , jehož souřadnice je právě μ_1 , bude označen



Obr. 1

kótami (10; 1). Logaritmickou síť sestrojíme nyní tak, že jednotlivými body funkčních stupnic na osách ξ a η vedeme systém rovnoběžek, s osami. Každý bod X o souřadnicích (ξ, η) bude označen nikoliv svými souřadnicemi, ale kótami (x, y) , které vyhovují zobrazovacím rovnicím (1) a (2). Říkáme, že bod (ξ, η) je logaritmickým obrazem bodu (x, y) .

V praxi se ukázalo, že tato funkční síť je velkým pomocníkem techniků,

neboť velmi zjednodušuje grafy některých funkcí. Proto se dnes vyrábí podobně jako papír milimetrový i papír logaritmický, který usnadňuje rýsování této sítě. Ukážeme si na několika příkladech, jak se s ním pracuje.

Příklad 1.

Sestrojte graf funkce $y = \frac{1}{4} x^2$ pro kladná x v logaritmické síti!

Řešení:

Tabulka hodnot

x	2	3	4	6
y	1	$\frac{9}{4}$	4	9

Chápeme-li tyto hodnoty jako kóty a přeneseme-li je do logaritmické sítě, hned je patrné, že vyznačené body leží na přímce (obr. 1). To nás přivádí na myšlenku, kterou vyjádříme větou a tu dokážeme:

Věta. Grafem funkce

$$y = r \cdot x^h, \quad (3)$$

kde r je kladné reálné číslo, h libovolné reálné číslo a jejímž oborem jsou kladná reálná čísla, je v logaritmické síti přímka.

Důkaz. Vzhledem k předpokladům věty existuje $\log y$ a tedy

$$\log y = \log r + h \cdot \log x$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že iba moduly jsou stejné a tedy platí $\mu_1 = \mu_2 = \mu \neq 0$ a tímto číslem předchozí rovnici vynásobíme. Pak

$$\mu \cdot \log y = \mu \cdot \log r + \mu \cdot h \cdot \log x$$

a srovnáním se vztahy (1) a (2) dostáváme

$$\eta = \mu \cdot \log r + h \cdot \xi \quad (4)$$

Označme $\mu \cdot \log r = q$, $h = k$

Pak rovnice (4) nabývá tvaru

$$\eta = k \cdot \xi + q. \quad (4')$$

To je ale početní vyjádření přímky určené směrnici k a úsekem vyřazeným na ose η .

Na první pohled je patrné, že sestavení grafu funkce (3) na logaritmickém papíru bude daleko snazší než na papíru milimetrovém. Pro technickou praxi je však důležité, že tento graf bude i přesnější! Tak například k sestavení grafu funkce $y = \frac{1}{8} x^3$ nám stačí zjistit dva body, jimiž graf (tj. přímka) prochází. Jsou to třeba body o kótách (2; 1) a (4; 8). Je zároveň vidět, že uvedený graf neprochází počátkem (1; 1) (obr. 2).

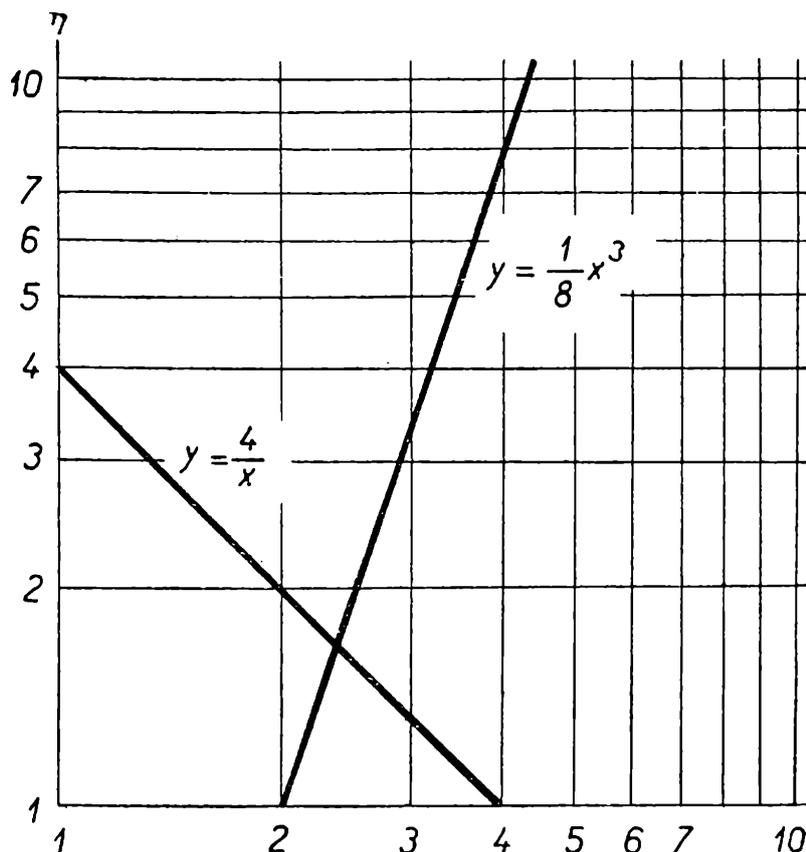
Zamysleme se tedy nad tím, jaký tvar musí zkoumaná funkce mít, aby její graf v logaritmické síti procházel počátkem! Odpověď najdeme ve vztahu (4'). Zřejmě musí být $q = 0$, tedy $\mu \cdot \log r = 0$. To ale lze splnit

pouze tak, že $r = 1$. Závěr: Grafem funkce $y = x^k$ je v logaritmické síti přímka, která prochází počátkem a má směrnici k . Za obor funkce však můžeme dát opět jen kladná reálná čísla.

Příklad 2. Popište graf funkce $y = \frac{4}{x}$ sestrojený v logaritmické síti!

Řešení. Vzhledem k tomu, že jsme připustili všechny reálné hodnoty pro číslo h - tedy i záporné, má i naše funkce požadovaný tvar (3), kde $r = 4$ a $h = -1$.

Grafem dané funkce bude tedy přímka, která neprochází počátkem a je určena například body o kótách (1; 4) a (4; 1) (obr. 2).



Obr. 2

Položme si nyní takovouto otázku: Když grafem každé funkce typu (3) je v logaritmické síti nějaká přímka, je také každá libovolná přímka v této funkční síti obrazem nějaké funkce typu (3)? Pokusme se odpovědět:

Nechť je dána přímka v logaritmické síti a její početní vyjádření ať je

$$\eta = k \cdot \xi + q. \quad (5)$$

Hodnoty proměnných (souřadnic) můžeme pokládat za logaritmy hodnot jiných proměnných (kót), které označíme x a y , takže platí

$$\eta = \log y \quad \text{a} \quad \xi = \log x$$

a rovnici (5) přepíšeme ve tvaru

$$\log y = k \cdot \log x + q. \quad (6)$$

Číslo q je konstantní a můžeme ho položit rovno $q = \log r$, kde r je kladné číslo. Rovnice (6) pak nabude tvaru

$$\log y = k \cdot \log x + \log r,$$

ale ten vyjadřuje totéž, co rovnice $y = r \cdot x^k$, a tu můžeme chápat jako funkci typu (3).

Závěr: Každá přímka v logaritmické síti představuje jistou funkci tvaru $y = r \cdot x^h$.

Příklad 3. Najděte funkci vyjádřenou grafem na obrázku č. 2.

Řešení: Daná přímka prochází body o kótách (1; 3) a (5; 7). Hledaná funkce má tvar (3). Protože hodnotě $x = 1$ přísluší hodnota $y = r$, je $r = 3$. Číslo h pak vypočteme pomocí druhého bodu

$$7 = 3 \cdot 5^h$$

$$\log 7 = \log 3 + h \cdot \log 5$$

$$h \doteq 0,525.$$

Přibližné vyjádření hledané funkce je tedy $y = 3 \cdot \sqrt{x}$.

Poznámka: Protože platí $\log x^n = n \cdot \log x$, bude souřadnice bodu o kótě 10^n n -krát větší než souřadnice bodu o kótě 10. To znamená, že vzdálenost dvou bodů na ose, jejichž kóty jsou 10^n a 10^{n+1} je vždy rovna modulu, neboť

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} - \xi_n &= \mu \cdot \log 10^{n+1} - \mu \cdot \log 10^n \\ &= \mu \cdot (n+1) \cdot \log 10 - \mu \cdot n \cdot \log 10 \\ &= \mu \cdot \log 10 \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že logaritmická funkce je definována pouze pro kladná x , nebudou body na záporných poloosách označovány zápornými čísly, ale čísly kladnými menšími než 1.

(Dokončení)

Jan Weigel, PI, Brno:

Poznámka k jedné úloze IX. ročníku MO

V IX. ročníku MO, kategorie C, byla předložena úloha:

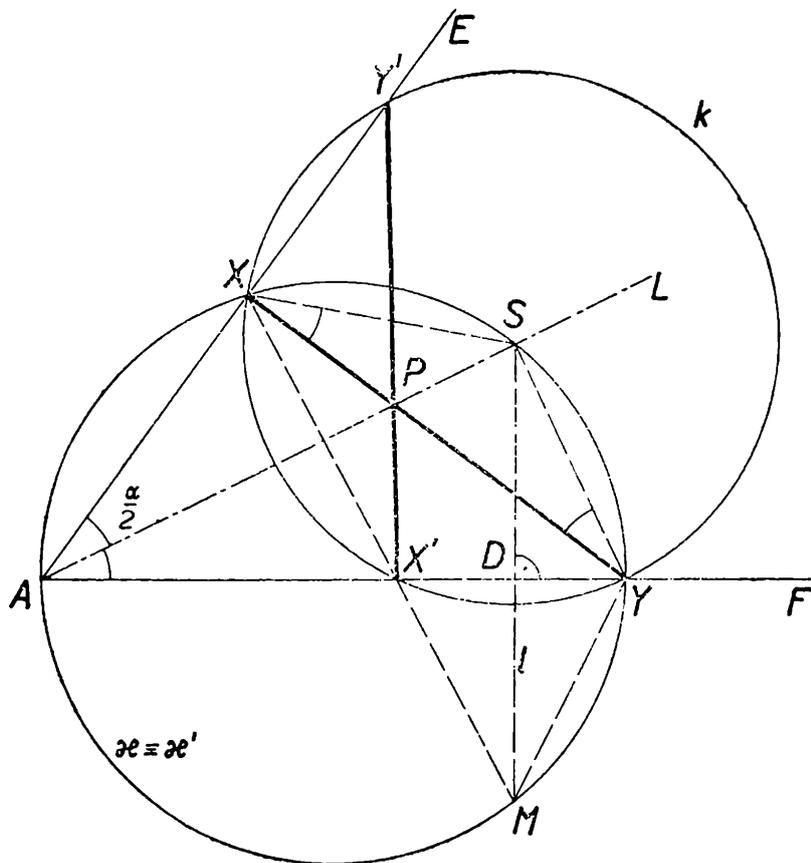
Je daný dutý úhel $\sphericalangle PCQ = \gamma$ a kružnice $k \equiv (S, r)$, která sa dotýká priamok CP, CQ v bodech P, Q . Vo vnútri úsečiek CP, CQ zostrojte po rade také body A, B , že priamka AB je dotyčnicou kružnice k , pričom platí $AB = c$, kde c je dané kladné číslo.

V tomto článku ukážeme řešení obdobné úlohy. Je dán dutý úhel $\sphericalangle EAF = \alpha$ a uvnitř něho bod P . Na ramenech daného úhlu sestrojte body X, Y tak, aby přímka $p \equiv XY$ procházela bodem P a aby

úsečka XY měla velikost $XY = c$, kde c je dané kladné číslo. Bod P leží na ose úhlu $\sphericalangle EAF$ a $AP = d$, kde d je dané kladné číslo. (Při obecné poloze bodu P nelze úlohu řešit pravítkem a kružítkem.)

Rozbor (Obr. 1). Uvnitř dutého úhlu $\sphericalangle EAF$ je na jeho ose dán bod P , ($AP = d$).

Je-li $c = 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, pak $XY \perp AP$ (trojúhelník XAY je rovnoramenný) a řešení dané úlohy je jediné a triviální. Nechť je $c > 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ a body X, Y jsou řešením. Pak jsou druhým řešením též body X', Y' , kde dvojice X, X' a Y, Y' jsou odpovídající si body v souměrnosti podle osy AP . Čtyřúhelník $XX'YY'$ je rovnoramenný lichoběžník a lze mu tedy opsat kružnici k , jejíž střed S leží na polopřímce AP .



Obr. 1

Úloha bude tedy řešena, sestrojíme-li bod S a budeme-li znát poloměr r kružnice k . Potřebné vztahy ke konstrukci budeme hledat (obr. 1). (Na obrázku je naryšován ostrý úhel; nalezené vztahy platí však pro každý dutý úhel.) Z bodu S sestrojíme přímkou $l \perp AX'$, označíme její průsečík s AX' písmenem D a bod, v němž se l protíná s přímkou XX' , označíme M ; tento bod vždy existuje, neboť $SD \perp AX'$ a $XX' \perp AP$ jsou kolmice ke dvěma různoběžkám. Body A a M leží v téže polorovině

vytáté přímkou XS , neboť vnitřek úsečky AM leží uvnitř úhlu $\sphericalangle XSM$. Platí $\sphericalangle XAS = \sphericalangle X'AS$ (AS je osa úhlu $\sphericalangle XAX'$), dále platí $\sphericalangle X'AS = \sphericalangle SMX'$ (úhly s rameny kolnými - oba ostré) a tedy $\sphericalangle XAS = \sphericalangle XMS$ $\left(= \frac{\alpha}{2} \right)$.

Vrcholy těchto úhlů leží na oblouku $XAMS$ kružnice κ (obvodové úhly). Trojúhelník $X'MY$ je rovnoramenný, D je středem úsečky $X'Y$, $MD \equiv MS$ je osou úsečky $X'Y$, a tedy též osou úhlu $\sphericalangle X'MY$.

Platí tedy: $\sphericalangle X'MY = 2 \sphericalangle X'MS = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Body A, M leží

v téže polorovině vytáté přímkou XY , neboť polopřímka $XX' \equiv XM$ leží uvnitř úhlu $\sphericalangle AXY$. Leží tedy body A, X, Y, M na kružnici κ' . Úhly $\sphericalangle XAY$ a $\sphericalangle XMY$ jsou shodné úhly obvodové. Kružnice κ a κ' jsou totožné, neboť jsou to kružnice opsané témuž trojúhelníku AXS . Proto leží všech pět bodů A, X, S, Y, M na obvodu kružnice κ a úhly $\sphericalangle YXS = \sphericalangle SAY = \frac{\alpha}{2}$ (obvodové úhly nad obloukem SY kružnice κ).

Dovedeme tedy sestrojiti trojúhelník rovnoramenný $XY S$. V tomto trojúhelníku $XS = YS = r$ a r je hledaný poloměr kružnice k .

Je tedy třeba určit již jen velikost úsečky AS .

Platí: $\triangle ASX \sim \triangle XSP$ (podle věty uu , neboť $\sphericalangle XAS = \sphericalangle PXS$, a $\sphericalangle ASX$ je společný oběma trojúhelníkům).

Můžeme tedy psát

$$AS : SX = SX : SP$$

a použijeme-li označení $AP = d$, $SP = AS - d$, $SX = r$, pak

$$AS : r = r : (AS - d),$$

což lze postupně upravovat

$$AS^2 - AS \cdot d = r^2$$

$$AS^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} AS + \frac{d^2}{4} = r^2 + \frac{d^2}{4},$$

čili

$$\left(AS - \frac{d}{2} \right)^2 = r^2 + \frac{d^2}{4}. \quad (1)$$

Odtud lze velikost úsečky $\left(AS - \frac{d}{2} \right)$ sestrojiti jako přeponu pravoúhlého

trojúhelníka, který má odvěsny velikostí r a $\frac{d}{2}$.

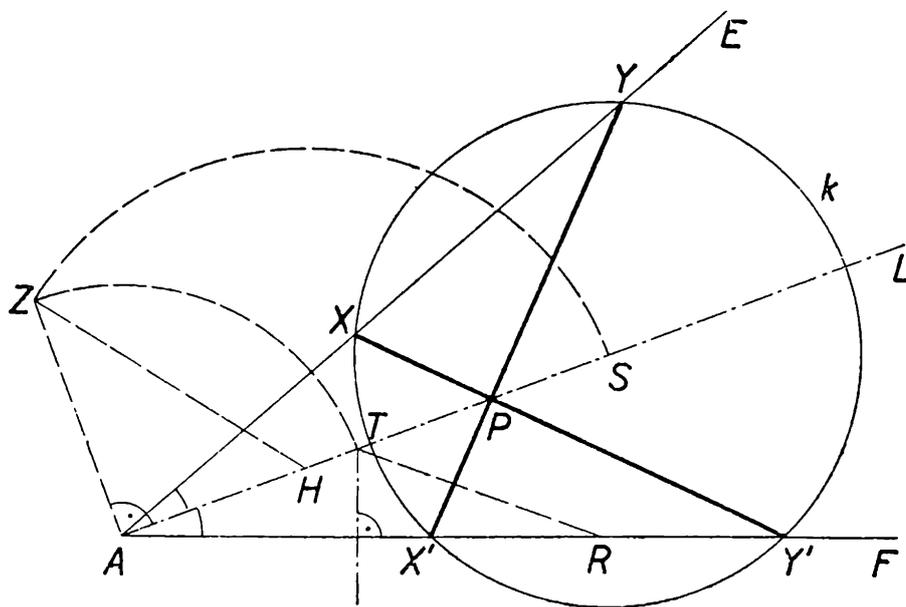
Konstrukce (obr. 2). Sestrojíme daný úhel $\sphericalangle EAF$, jeho osu AL a na ní bod P tak, aby $AP = d$. Na polopřímce AF sestrojíme bod R tak, aby $AR = c$. Sestrojíme osu úsečky AR a označíme její průsečík s AP písmenem

T. Potom je $AT = r$ hledaným poloměrem kružnice k . Rozpůlíme úsečku AP bodem H . Platí tedy $AH = \frac{d}{2}$. V bodu A sestrojíme kolmici $AZ \perp AP$ a učiníme $AZ = AT = r$. Trojúhelník HAZ je pravoúhlý a platí v něm podle Pythagorovy věty $AZ^2 + AH^2 = ZH^2$ a tedy podle (1) je

$$ZH = AS - \frac{d}{2},$$

čili $HZ = AS - AH = HS$. Tím je poloha bodu S určena a to jednoznačně. Platí totiž $AH < HZ = HS$, neboť AH je odvěsnou a HZ je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku HAZ .

Správnost konstrukce vyplývá z rozboru, není ji třeba tedy zvlášť dokazovat.



Obr. 2

Diskuse. Vedme bodem P ležícím na ose dutého úhlu $\sphericalangle EAF$ přímky p_i ($i = 1, 2, \dots$) tak, aby protínaly obě ramena tohoto úhlu v bodech X_i, Y_i a označme písmeny X_0, Y_0 průsečíky přímky $p_0 \perp AP$ s rameny AE, AF . Potom platí pro velikosti úseček

$$X_i Y_i > X_0 Y_0 = 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

což dokážeme takto (obr. 3):

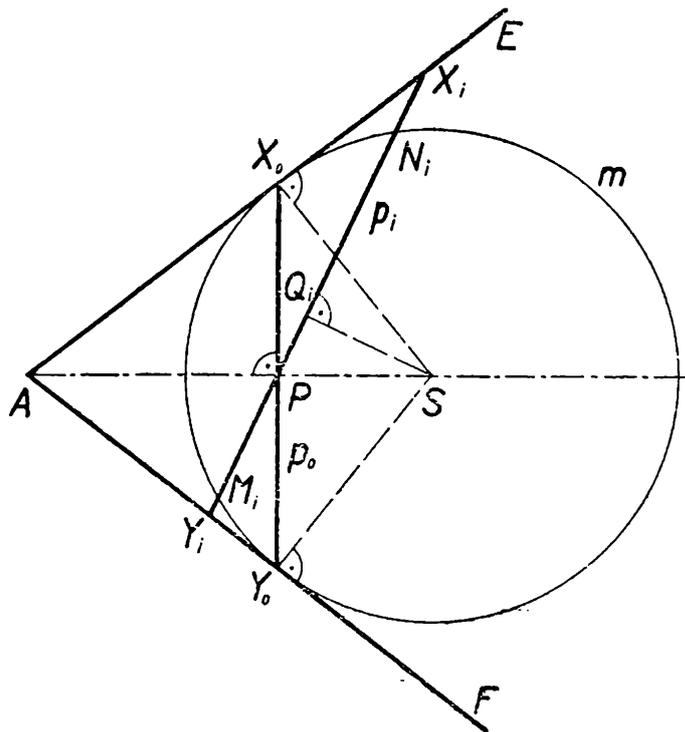
V daném úhlu $\sphericalangle EAF$ vedme bodem P přímku $p_0 \perp AP$. Ta protne ramena AE, AF po řadě v bodech X_0, Y_0 . Sestrojíme kružnici m se středem S ležícím na AP tak, aby se dotýkala přímk AE, AF v bodech X_0, Y_0 . Každá přímka p_i ($i \neq 0$) protne ramena AE, AF v bodech X_i, Y_i . Bude stále $X_i \neq X_0$ a $Y_i \neq Y_0$. Body X_i a Y_i jsou vnějšími body vzhledem ke kružnici m , neboť jsou to body na tečnách, různé od bodů

dotyku. Přímky p_i procházejí vnitřním bodem P kružnice m (P je vnitřní bod, neboť je středem tětivy $X_o Y_o$), každá p_i protíná tedy kružnici m ve dvou bodech, které označme M_i a N_i . Pro velikost tětivy $M_i N_i$ platí

$$M_i N_i > X_o Y_o, \quad (2)$$

neboť vzdálenost $g = SQ_i$ středu S tětivy $M_i N_i$ je menší než vzdálenost bodu S od tětivy $X_o Y_o$. (V pravoúhlém $\triangle PQS$ je PS přeponou, $PQ \perp M_i N_i$ odvěsnou.) Dále platí vzhledem k uspořádání bodů na kružnici a bodů vnějších X_i, M_i, N_i, Y_i

$$X_i Y_i > M_i N_i \quad (3)$$



Obr. 3

a tedy z tranzitivnosti nerovností (3) a (2) plyne

$$X_i Y_i > X_o Y_o.$$

Tím je nerovnost (1) dokázána.

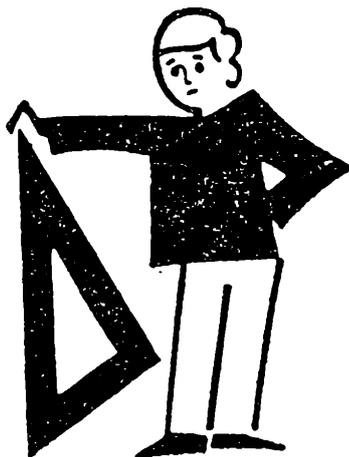
Je-li tedy $c = 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, pak má úloha jedno řešení $XY \perp AP$, je-li

$c > 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, má úloha dvě symetrická řešení a konečně je-li

$c < 2 \cdot d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, úloha řešení nemá.

D o d a t e k: Řešená úloha může být též vyslovena jinak: S e s t r o j - t e trojúhelník, je-li dána jeho jedna strana, úhel proti ní a symetrála tohoto daného úhlu.

Deskriptivní geometrie



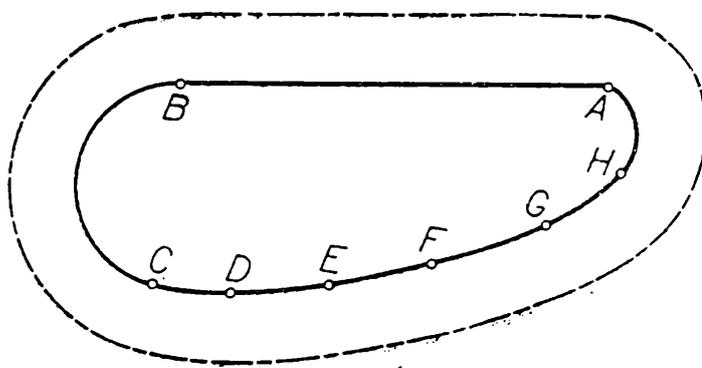
L u d ě k G r a n á t, Praha:

Použití geometrie v automatizaci obrábění

(Dokončení)

Navazování ekvidistant jednotlivých částí obrysu

Podívejme se opět na součástku zobrazenou na obr. 1. Její obrys je nakreslen na obr. 12. Část obrysu je úsečka AB , část je kruhový oblouk \widehat{BC} . Musíme umět navazovat ekvidistanty těchto částí, abychom dostali vhodnou dráhu středu frézy při obrábění. Podívejme se především, jaké případy mohou nastat při navazování ekvidistant úseček a kruhových oblouků a jak příslušné navázání provést.



Obr. 12

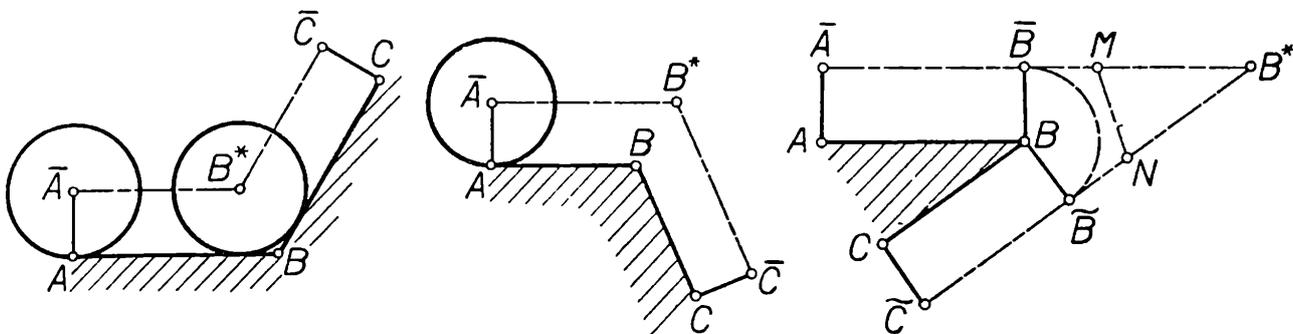
Mějme tyto na sebe navazující části obrysu:

1. Dvě úsečky AB a BC .

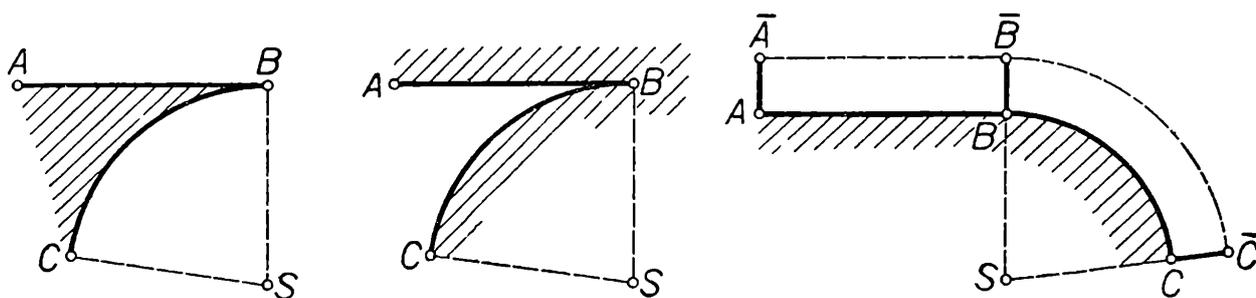
Leží-li obě úsečky na jedné přímce, je řešení zřejmé. Neleží-li na jedné přímce, pak jako opěrný bod dráhy středu frézy zvolíme průsečík B^* přímek, na nichž leží ekvidistanty daných úseček (obr. 13a, b). V případě, že průsečík B^* leží příliš daleko od bodu obrysu B , můžeme pro navázání ekvidistant použít kruhového oblouku \widehat{BB} , nebo vhodné lomené čáry $\overline{BMN\tilde{B}}$ (obr. 13c).

2. Úsečka AB a kruhový oblouk \widehat{BC} o středu S .

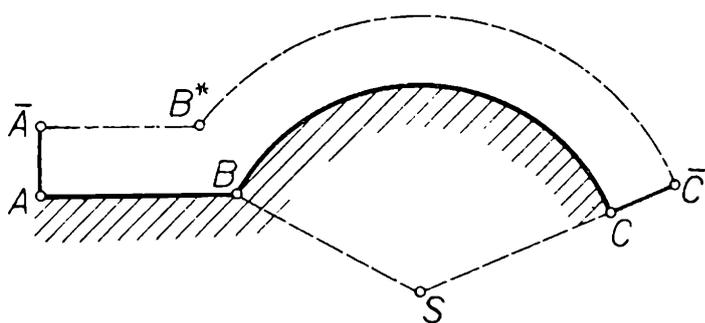
Je-li úsečka tečnou daného oblouku, pak z technických důvodů vyloučíme případy, kdy při pohybu po obrysu bychom se v bodě B vraceli proti smyslu pohybu na úsečce (obr. 14a, b). V ostatních případech koncový bod ekvidistanty úsečky je zároveň počátečním bodem ekvidistanty daného kruhového oblouku (obr. 14c).



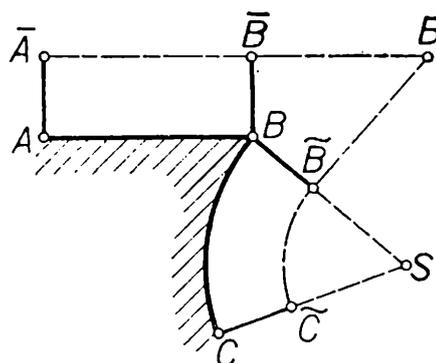
Obr. 13a, b, c



Obr. 14a, b, c



Obr. 15

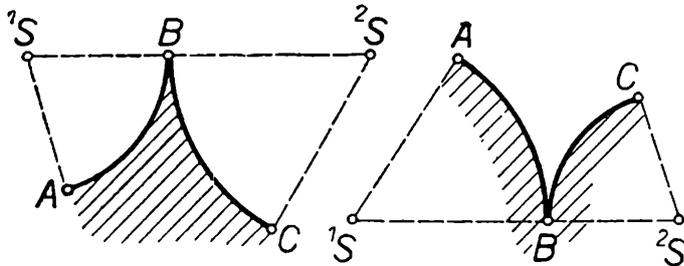


Obr. 16

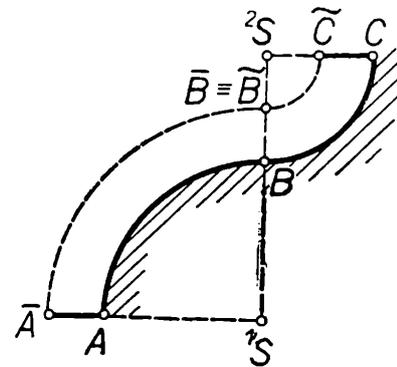
Není-li úsečka AB tečnou daného oblouku, pak dostáváme opěrný bod dráhy středu frézy buď v průsečíku ekvidistant (obr. 15), nebo v průsečíku tečny ekvidistanty oblouku v bodě \tilde{B} s přímkou, na níž leží ekvidistanta úsečky (obr. 16). Leží-li bod B^* příliš daleko od \bar{B} , můžeme provést stejné opatření jako v případě 1.

3. Dva kruhové oblouky \widehat{AB} a \widehat{BC} o středech 1S a 2S .

Mají-li oblouky v bodě B společnou tečnu, pak opět vyloučíme z technických důvodů případy, kdy při pohybu po obrysu součástky bychom se v bodě B vraceli proti smyslu pohybu po prvním oblouku (obr. 17). V ostatních případech koncový bod ekvidistanty prvního oblouku je již počátečním bodem ekvidistanty druhého oblouku (obr. 18a, b).]

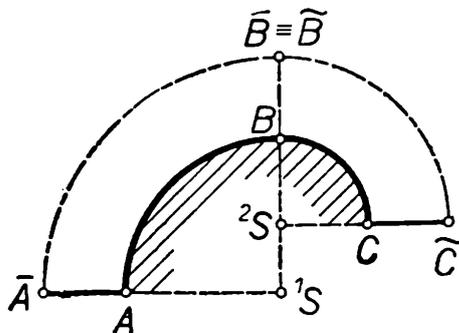


Obr. 17

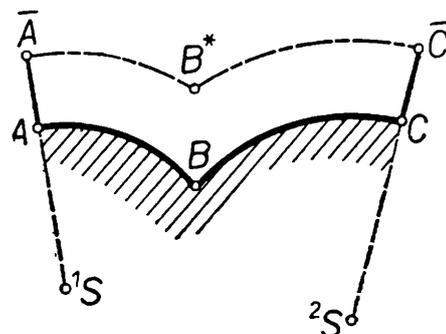


Obr. 18a

Nedotýkají-li se uvažované oblouky v bodě B , pak dostáváme opěrný bod dráhy středu frézy buď v průsečíku B^* ekvidistant (obr. 19), nebo v průsečíku tečen ekvidistant oblouků v bodech \bar{B} a \tilde{B} (obr. 20). Dráha středu frézy sestává pak např. na obr. 20 z kruhového oblouku $\widehat{A\bar{B}}$, úseček $\bar{B}B^*$ a $B^*\tilde{B}$ a dalšího kruhového oblouku $\widehat{B\tilde{C}}$. Vychází-li bod B^* příliš daleko od B , můžeme postupovat podobně jako v 1. a 2. případě.



Obr. 18b



Obr. 19

Navazování ekvidistant úseček nebo kruhových oblouků a křivek, daných jednotlivými body nebo vyrýsovaných, provádíme obdobným způsobem, jak jsme ukázali výše.

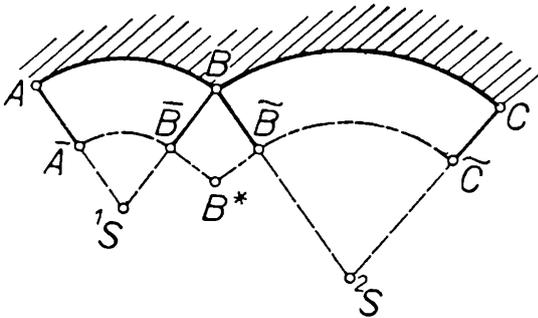
Vždy ovšem nebývá obrys zadán tak, že je přímo u každé jeho části dán počáteční a koncový bod. Mějme např. obrys součástky narýsovaný na obr. 21. Jeho zadání vypadá takto: Úsek obrysu AB je kruhový oblouk o počátečním bodu A a leží na kružnici k_1 o středu S_1 . Bod B je bodem dotyku kružnice k_1 s kružnicí k_2 o středu S_2 . Úsek BC je opět kruhový oblouk, ležící na kružnici k_2 . Úsek CD je úsečkou ležící na společné tečně kružnice k_2 a kružnice k_3 o středu S_3 . Úsek DE je kruhový

oblouk na k_3 , přičemž koncový bod E je dán. Úsek EA je oblouk empirické křivky, dané jednotlivými body $E, 1, \dots, 6, A$.

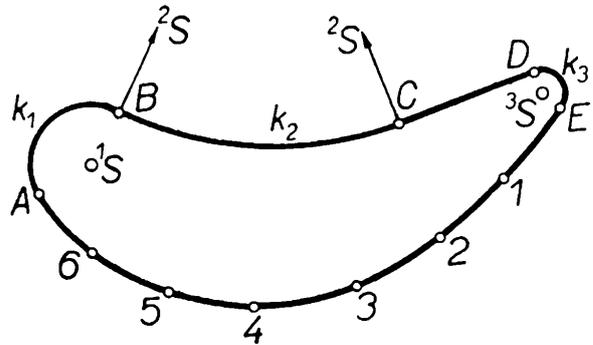
V tomto případě musíme nejprve sestrojít popsané body B, C, D (je-li více možností, volíme tu, která odpovídá náčrtu) a potom teprve sestrojíme podle předešlých úvah hledanou ekvidistantu.

Nahrazování dráhy středu frézy lomenou čarou

Zatím jsme dospěli k dráze středu frézy složené z úseček, kruhových oblouků a křivky dané svými jednotlivými body. Jak bylo řečeno na začátku tohoto článku, musíme nahradit ještě takto určenou dráhu lomenou čarou, s přesností předem danou. Vzdálenost, o kterou se nejvýše může odchýlit bod lomené čáry od dráhy středu frézy, označme si ε . Vrcholy této lomené čáry - opěrné body - se snažíme vybrat tak, aby jich bylo co nejméně. Od tohoto požadavku však často upouštíme za cenu zjednodušení metody vyhledávání těchto bodů.



Obr. 20



Obr. 21

Nejdříve ukážeme nahrazování kruhového oblouku \widehat{AB} lomenou čarou při dovolené odchylce ε . Kruhový oblouk \widehat{AB} leží na kružnici k o středu S a poloměru ρ . Bod A je počáteční bod a bod B koncový bod kladně orientovaného oblouku. Lomená čára musí ležet v mezikruží určeném kružnicemi k_1, k_2 , které jsou soustředné s kružnicí k a mají poloměr $\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon$. Řešením bude část mnohoúhelníka (až na krajní úseky), opsaného kružnici k_1 a vepsaného kružnici k_2 . Délka strany s tohoto mnohoúhelníka se získá pomocí Pythagorovy věty (obr. 22)

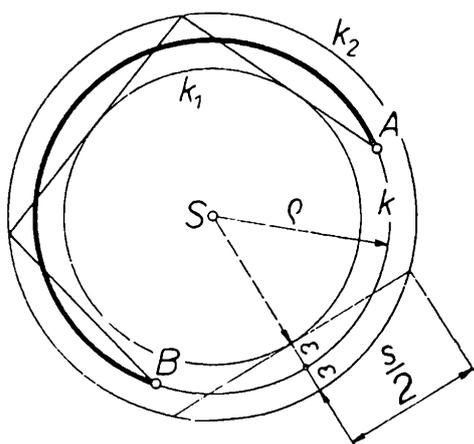
$$\frac{s}{2} = \sqrt{(\rho + \varepsilon)^2 - (\rho - \varepsilon)^2} = 2\sqrt{\rho\varepsilon}.$$

Protože bod A neleží na kružnici k_2 , bude první postup kratší. Můžeme vést bodem A tečnu ke kružnici k_1 a sestrojít její příslušný průsečík s k_2 . Další postup provedeme tak, že z nalezeného průsečíku na kružnici k_2 vedeme tečnu ke kružnici k_1 a sestrojíme průsečík této tečny s kružnicí k_2 . K témuž výsledku dospějeme rychleji, jestliže na kružnici k_2 sestrojíme bod, jehož vzdálenost od předcházejícího opěrného bodu

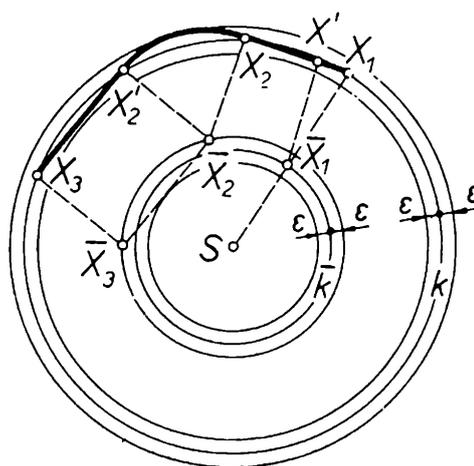
je rovna s (v příslušném smyslu). Nakonec se musíme dostat do bodu B , aniž by lomená čára vyšla ze zmíněného mezikružší.

Někdy může být tato úloha upravena tak, že lomená čára, nahrazující daný kruhový oblouk s přesností ε , má být dané kružnici opsána či vepsána. Postup je zcela obdobný předešlému.

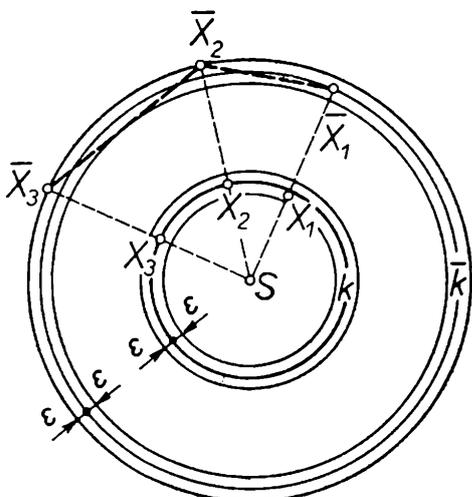
Musíme ještě vyšetřit vztah dovolené odchylky na ekvidistantní kružnici a obrysu, protože při obrábění nás zajímá, s jakou přesností dostaneme obrys. Nahradíme-li při vnitřním obrábění ekvidistantní kružnici



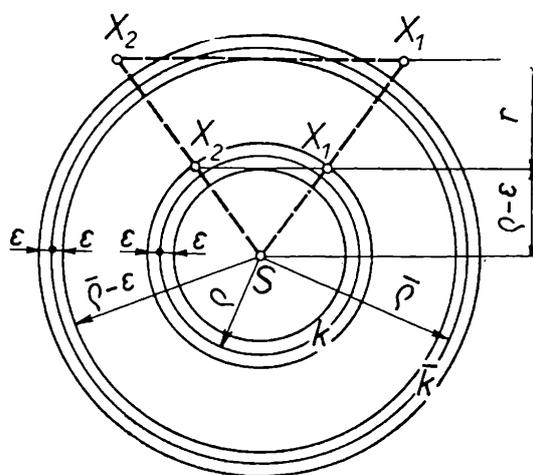
Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24



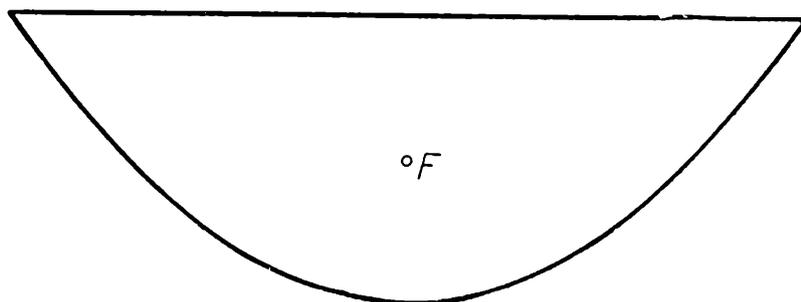
Obr. 25

\bar{k} lomenou čarou $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3 \dots$ s dovolenou odchylkou ε pro obrys, dostaneme místo obrysové kružnice k při obrábění čáru složenou z kruhových oblouků $\widehat{X_1X_1'}$, $\widehat{X_2X_2'}$, a z úseček $X_1'X_2$, $X_2'X_3$, ..., jejichž žádný bod není od dané obrysové kružnice k vzdálen o více než ε (viz obr. 23).

Nahradíme-li též při vnějším frézování ekvidistantní kružnici lomenou čarou $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ s dovolenou odchylkou ε pro obrys, pak dostaneme místo obrysové kružnice k lomenou čáru $X_1X_2X_3$, která nevyčerpává povolenou odchylku ε (obr. 24). Chceme-li ušetřit počet opěrných bodů dráhy

středu frézy, pak můžeme nahradit ekvidistantní kružnicí \bar{k} lomenou čarou, opsanou kružnicí soustředné s danou o poloměru $\bar{\rho} - \varepsilon$, kde $\bar{\rho}$ je poloměr kružnice \bar{k} . Tato lomená čára je zároveň vepsána kružnicí soustředné s kružnicí \bar{k} , o poloměru $\bar{\rho} + \varepsilon + |r| \frac{\bar{\rho} + \varepsilon}{\bar{\rho} - \varepsilon}$ (obr. 25). Výjimku zde může tvořit první a dva poslední kroky, kdy musíme dávat pozor, abychom nepřekročili u obrysu dovolenou odchylku.

V některých případech je též třeba, aby obrys, který dostaneme při obrábění, se nejen nelišil od daného obrysu o více než dovoluje přípustná odchylka, ale ležel celý buď uvnitř, nebo vně daného obrysu. Příslušná vyšetřování přenecháváme čtenáři.



Obr. 26

Závěrem provedeme nahrazení křivky dané jednotlivými body lomenou čarou s přesností ε . Je třeba zjistit, jaká má být délka úseček, z nichž se lomená čára skládá. To provedeme takto: Kruhové oblouky proložíme jednotlivými trojicemi za sebou následujících bodů křivky. Pro tyto oblouky známou metodou (pro lomenou čáru vepsanou kružnicí) vyšetříme délku úseček lomené čáry. Protože dvěma za sebou jdoucími body křivky procházejí dva kruhové oblouky, dostáváme dvě délky úseček lomené čáry. Zvolíme tu menší. Pak protínáme narýsovanou křivku vždy příslušnou délkou z předcházejícího opěrného bodu a získáme vrcholy lomené čáry, která nám danou křivku nahrazuje. V tomto případě ovšem úvahy o přesnosti nelze provádět přesně, neboť známe pouze některé body křivky.

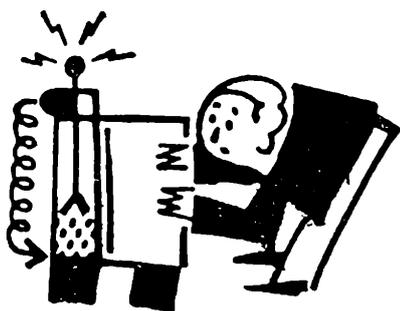
Cvičení.

1. Zjistěte, kolik úseků musí mít lomená čára nahrazující čtvrtkružnici o poloměru 100 mm s přesností 0,01 mm. Totéž proveďte pro případy, kdy lomená čára má být kružnicí opsána či vepsána.

Návod: Zjistěte nejprve velikost středového úhlu, který odpovídá úsečce příslušné lomené čáry.

2. Sestrojte opěrné body dráhy středu frézy, která má vyfrézovat součástku, jejímž obrysem je oblouk paraboly o parametru 25 mm a úsečka (obr. 26). Poloměr frézy $r = 20$ mm, $\varepsilon = 0,2$ mm.

3. Sestrojte opěrné body dráhy středu frézy, která má vyfrézovat součástku, jejíž obrys je znázorněn na obr. 21. Poloměr frézy $r = 20$ mm, $\varepsilon = 0,3$ mm.



Doc. dr. Kliment Šoler, ČVUT, Praha:

Vlastnosti a podstata sil působících v jádře atomů

Jádro atomu je složeno z nukleonů, tj. z protonů a neutronů. Tyto částice jsou v jádře atomů uspořádány podobně jako elektrony v obalu atomů, tj. jsou rozděleny do slupek, jichž zákonitost je vyjádřena tzv. magickými čísly (viz Rozhledy m. f., ročník 1961/62, číslo 9, str. 425). Pro nukleony platí tytéž zákony jako pro tělesa konečných rozměrů, tj. Newtonův zákon gravitační pro přitažlivé síly působící mezi každými dvěma hmotnými částicemi a Coulombův zákon pro odpudivé síly působící mezi každými dvěma souhlasně nabitými elektrickými částicemi. Dosadíme-li však do těchto zákonů hmotu nukleonů a jejich vzdálenosti v jádře atomů, uvidíme, že to jsou síly velmi malé, jichž působením se značná soudržnost atomového jádra nedá vysvětlit. Velikost jaderných sil, působících soudržnost atomového jádra, totiž dovoluje určit tzv. h m o t o v ý d e f e k t (schodek).

1. *Hmotový defekt a vazebná energie.* Údaje o velikosti jaderných sil nám dává Einsteinův vztah mezi hmotou a energií, který uvádí, že energie je s hmotou ekvivalentní. Hmotě m odpovídá energie W daná vztahem

$$W = \Delta m c^2,$$

kde c značí rychlost světla ve vakuu. Z uvedeného vztahu vyplývá, že každá hmota představuje úžasné množství energie, kterou ovšem není možno tak snadno uvolnit. Podaří-li se nějak hmotě energii dodat, velikost hmoty se tím zároveň zvětší o určitou dávku Δm . Naopak, jestliže se při určitém ději hmota zmenší o dávku Δm (hmotový defekt), uvolní se tím dávka energie daná Einsteinovým vztahem

$$W = m c^2.$$

Dodáváme-li určitému hmotnému útvaru energii, jeho hmota se tím poněkud zvyšuje, vydává-li tento útvar energii, jeho hmota se poněkud zmenšuje. Dávky energie, přicházející v úvahu při běžných přeměnách energie, jsou však tak nepatrné, že se při nich tyto změny hmoty nedají pozorovat. Dají se však zjistit v oblasti atomového jádra a jsou důka-

zem existence jaderných sil, které drží jádro atomu pohromadě a mohou se při jeho vytvoření uvolnit. Hmotový defekt nám dokonce dává cenné informace o velikosti těchto sil.

Protože známe hmotu protonu ($m_p = 1,007\ 582$ hmotových jednotek) i hmotu neutronu ($m_n = 1,008\ 930$ h. j.), můžeme určit hmotu, která by měla být obsažena v jádru helia (helionu), známé částice alfa, vznikající při rozpadu radioaktivních látek

$$m_{He} = 2 (m_p + m_n) = 4,033\ 024 \text{ hmotových jednotek .}$$

Experimentálně však byla pro tuto částici zjištěna hmota

$$m_{He} = 4,002\ 764 \text{ hmotových jednotek .}$$

Při složení helionu (alfa částice) ze dvou protonů a dvou nukleonů tudíž nastal hmotový defekt

$$\Delta m = 0,030 \text{ hmotových jednotek .}$$

Příslušné (ekvivalentní) množství energie se uvolnilo tím, že se z těchto čtyř volných nukleonů vytvořila jedna částice alfa. Naopak, kdybychom chtěli alfa částici na tyto volné nukleony rozdělit, museli bychom odpovídající množství energie alfa částici dodat.

Hmota jádra je tudíž menší než součet hmot všech jeho stavebních součástí. Úbytku hmoty odpovídá ekvivalentní (odpovídající) úbytek energie. Tento úbytek energie je roven práci, kterou vykonaly přitažlivé síly působící mezi nukleony při vytvoření tohoto jádra. Stejně velkou práci by bylo nutno vykonat vnějšími silami, aby se heliové jádro opět rozdělilo na jednotlivé volné nukleony (vypaření, desintegrace jádra).

Tento pokles energie je mírou stability atomového jádra a označuje se proto jako jeho vazebná energie.

Vazebná energie jádra je množství energie, které se uvolní při vytvoření jádra z volných nukleonů a kterou bychom museli naopak vynaložit, abychom toto jádro rozložili na volné nukleony.

Vazebná energie připadající na hmotovou jednotku činí

$$W_1 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ [kg]} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ joulu .}$$

V jaderné fyzice se energie částic většinou vyjadřuje pomocí jednotky elektronvolt (eV). Elektronvolt je energie, kterou získá elektron, který proběhne potenciálovým rozdílem 1 voltu. Protože náboj elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulombu = $1,6 \cdot 10^{-19}$ ampérsekund, je

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ [As]} \cdot 1 \text{ [volt]} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ [joulu]} .$$

Opačně

$$1 \text{ [joule]} = 6,242 \cdot 10^{18} \text{ [eV]} .$$

Na hmotovou jednotku tudíž připadá vazebná energie

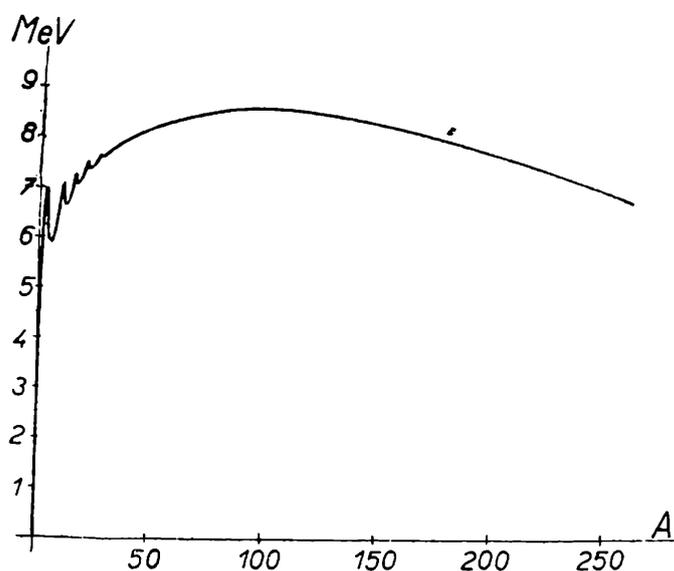
$$W_1 = 1,49 \cdot 10^{-10} \cdot 6,242 \cdot 10^{18} \text{ eV} = 931 \cdot 10^6 \text{ eV} = 931 \text{ MeV}$$

(1 MeV = megaelektronvolt = $1 \cdot 10^6$ eV).

Vypočítáme-li tudíž vazebnou energii pro heliové jádro, dostaneme

$$W = m c^2 = 0,03 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} [\text{kg}] \cdot 9 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 4,5 \cdot 10^{-12} [\text{joulu}] = \\ = 28 [\text{MeV}] .$$

Na prvý pohled je to zdánlivě malé množství energie. Nesmíme však zapomínat, že tato energie je vztažena na nepatrnou hmotu. Přepočítáme-li tuto energii na gram nebo kilogram látky, zjistíme, že je to energie neobyčejně koncentrovaná, jakou nám nemůže poskytnout žádný jiný dosud známý zdroj energie.



Obr. 1

Hmota jádra tudíž není určena pouze počtem a hmotou nukleonů, z nichž je jádro složeno, ale také vazebnou energií jádra, která je pro ně stejně charakteristická.

Podobně pro jádro deuteria, jež se skládá z protonu a z neutronu, činí hmotový defekt 0,0023 hmotových jednotek, čemuž odpovídá vazebná energie 2,18 MeV, tedy podstatně menší než u alfa částice.

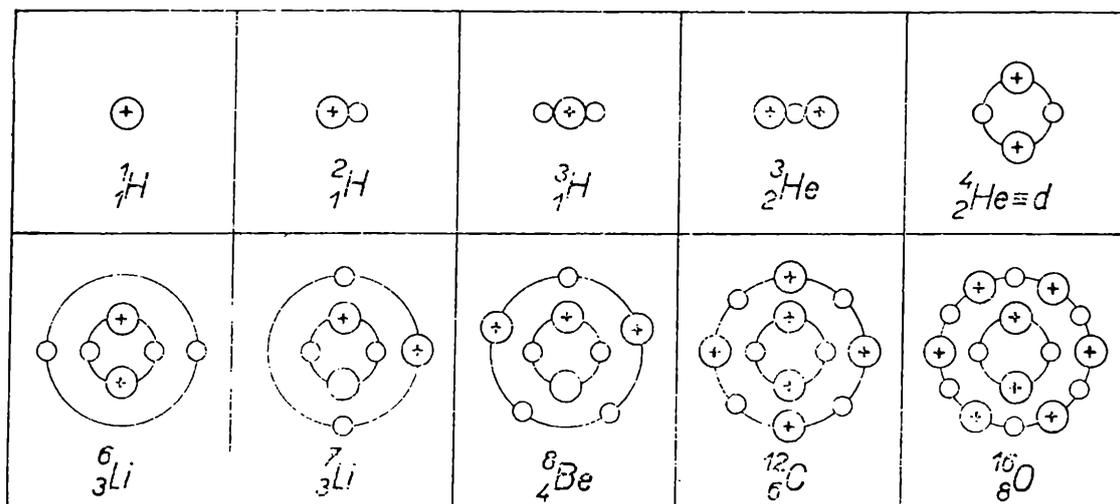
Stejným způsobem je možno vypočítat vazebné energie všech jader, jichž hmotové defekty byly pozorováním určeny. Z provedených příkladů je patrné, že se při tom musí dít určení hmoty jader s velkou přesností, alespoň na pět desetinných míst. Dnešní metody jaderné fyziky to již také dovolují.

Ukazuje se, že vazebná energie různých atomů roste přibližně úměrně s počtem nukleonů obsažených v jádře, tj. s hmotovým číslem prvku A .

Proto se často počítá vazebná energie připadající na jeden nukleon. U nejjednodušších prvků je vazebná energie připadající na nukleon poměrně malá, u středně těžkých dosahuje v rozmezí hmotových čísel $A = 50$ až 80 nejvyšší hodnoty 8,5 až 8,6 MeV na nukleon a pak opět klesá, až u nejtěžších jader dosahuje hodnoty 7,5 MeV na nukleon (obr. 1).

Pro nejjednodušší prvky je průběh poněkud složitější. Hmotový defekt zde vykazuje několik lokálních maxim pro jádra, která obsahují 4, 8, 12 a 16 nukleonů. Vysvětlujeme to tím, že tato jádra jsou vlastně složena z celistvého počtu alfa částic (helionů), která mají zvlášť velkou vazebnou energii.

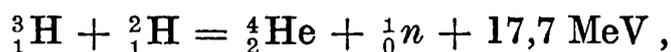
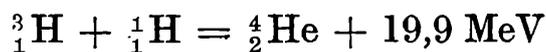
Jaderná energie se může uvolnit při přeměně jádra s menší vazebnou energií v jádro s vazebnou energií větší. Rozdíl obou energií se při takové přeměně uvolní jednak ve formě pohybové energie částic, které při tom vznikají, jednak ve formě elektromagnetického záření. Z toho dostáváme základní údaje o možných formách uvolňování jaderné energie.



Obr. 2

Jaderná energie se uvolňuje při přeměnách (transmutacích) atomových jader, při nichž vznikají středně těžká jádra. Děje se to buď štěpením těžších jader v jádra lehčí, nebo skládáním (syntézou) lehčích jader v jádra těžší.

První děj nastává například při štěpení jader uranu. Užívá se ho dnes již běžně v jaderných reaktorech a bylo ho použito v uranové a v plutoniové atomové pumě. Druhý děj nastává při spojení jader vodíku, nebo jeho izotopů. Tímto dějem se například uvolňuje energie na Slunci. Na Zemi ho zatím bylo užito ve vodíkové pumě. Dnes jsou již v plném proudu pokusy usilující o využití této tzv. termokleární energie i pro mírové účely. Nejběžnější reakce tohoto druhu jsou děje



kde 1_0n značí neutron (obr. 2).

Podmínkou této reakce však je, že může probíhat pouze v prostředí vysoce koncentrované energie. Atomy vstupující do reakce získávají potřebnou energii většinou ve formě tepelné energie při velmi vysokých teplotách, jež se ve vodíkové pumě vytvářejí pomocnou uranovou nebo plutoniovou pumou, která vytvoří podmínky, za nichž může proběhnout syntéza vodíkových jader (obr. 2).

2. *Jaderné síly.* Má-li jádro atomu držet pevně pohromadě, musí mezi jeho nukleony působit zvlášť velké přitažlivé síly. Nemůže to být zřejmě síla gravitační. Na to jsou hmoty nukleonů příliš malé. Musí proto být jaderné síly soudržnosti zcela nového druhu. Mezi nukleony musí působit jakési silové pole, podobné poli elektromagnetickému, ale jiné povahy. Že vazebná energie jader zhruba roste rovnoměrně s počtem nukleonů, o tom svědčí, že mezi nukleony musí působit síly pouze krátkého dosahu, jichž účinek se vzdáleností klesá daleko rychleji než v gravitačním a Coulombově zákonu. Síly tyto se proto prakticky projevují pouze mezi dvěma sousedními nukleony, kdežto pro vzdálenější částice jsou již tak malé, že k nim nemusíme přihlížet. Jaderné síly jsou charakterizovány zejména těmito vlastnostmi:

1. Jaderné síly mají velmi malý dosah. Poloměr jejich působení v žádném případě nepřesahuje velikost jádra, tj. asi $2 \cdot 10^{-15}$ m. Krátký dosah těchto sil je podmíněn tím, že jejich účinek se vzdáleností velmi prudce klesá, nutno pro něj předpokládat alespoň exponenciální pokles se vzdáleností. Z této vlastnosti vnitrojaderných sil vyplývá, že potenciální energie jádra připojením další částice roste právě úměrně s rostoucím počtem částic.

2. Jaderné síly vykazují tzv. saturační efekt (efekt nasycení). Tím rozumíme fakt, že jeden nukleon může působit (býti v interakci) pouze s omezeným počtem jiných nukleonů. Jaderné síly se tudíž chovají podobně jako chemické valenční síly. Tento jev je patrný zejména u lehčích jader. Proto například jádro helia (helion, alfa částice) představuje neobyčejně pevný komplex (vazebná energie asi 28 MeV). Neexistuje však žádné jádro složené z pěti nukleonů. To lze vysvětlit tím, že ve skupině čtyř nukleonů se silová působení nasytí (saturují), takže tento komplex již není s to vázat nukleon pátý. Saturační efekt se projevuje i u těžších jader, avšak v poněkud odlišné formě. Vazebná energie jádra je - jak bylo již dříve uvedeno - zhruba úměrná hmotovému číslu, tedy počtu nukleonů v jádře. To svědčí o tom, že v jádře každý nukleon reaguje skutečně pouze s omezeným počtem svých sousedů. Kdyby totiž každý nukleon působil s každým, musela by být vazebná energie úměrná počtu těchto působení, tedy

veličině A ($A - 1 \doteq A^2$). Ve skutečnosti je úměrná pouze první mocnině A .

3. Jaderné síly se vyznačují nábojovou nezávislostí. Silové působení jimi podmíněné nezávisí na elektrickém náboji reagujících částic. Síly mezi kterýmikoli dvojicemi nukleonů jsou stejné. Dvojice: proton-neutron, proton-proton, neutron-neutron navzájem působí - pokud se jaderných sil týče - zcela stejně. Experimentálně bylo toto zjištění potvrzeno pomocí pokusů s rozptylem částic.

4. Jaderné síly jsou charakterizovány tzv. spinovou závislostí. Spin částice je při tom působen její rotací kolem vlastní osy a je dán směrem její rotační osy a smyslem otáčení. Síly tyto tudíž závisí na vzájemné orientaci integrujících částic.

5. Jaderné síly mají necentrální charakter. Znamená to, že závisí (podobně jako síly magnetické) na vzájemné orientaci spinů (os otáčení) jednotlivých nukleonů a průvodiče vedeného od jednoho nukleonu k druhému (podobně jako u Biot-Savartova zákona).

3. *Mechanismus jaderných sil.* K vysvětlení podstaty jaderných sil byla vyslovena řada teorií. Typickým znakem všech těchto teorií je předpoklad, že to jsou tzv. výměnné síly, vznikající při vzájemné přeměně stavebních součástí atomového jádra. Při silovém působení protonu a neutronu se podle těchto teorií mění proton v neutron a obráceně, tj. poloha obou částic v jádře se stále mění. Přenos silového působení mezi nukleony je pak vždy umožňován prostřednictvím částic, vyměňovaných při této přeměně nukleonů. Vyměňované částice jsou vždy menší nežli nukleony, avšak jsou to vesměs částice s nenulovou klidovou hmotou. Vlivem těchto výměn, provázených popřípadě i změnou charakteru částic, mizí v jádře ostrý rozdíl mezi protony a neutrony, takže kolektivní označení obou těchto částic jako nukleony dostává v této teorii hlubší opodstatnění.

a) *Teorie lehkých částic*, tj. *teorie leptonového pole*. První formulaci mechanismu jaderných sil představuje tzv. *teorie leptonového pole*. Termín *leptony* je společným označením pro skupinu lehkých částic, mezi něž patří elektron, pozitron a neutrino. *Pozitron* je částice stejné hmoty a stejného náboje jako elektron (značka e^-), ale má opačný náboj. Značí se e^+ . *Neutrino* je neutrální částice o klidové hmotě rovné nepatrnému zlomku hmoty elektronu, pomocí níž se vysvětluje změna hybnosti některých jaderných částic. Značí se řeckým písmenem ν .

První teorie tohoto druhu byla navržena sovětskými fyziky *Tamem a Ivaněnkem* (1932). Vychází z myšlenky, že silové působení mezi protonem a neutronem probíhá tak, že proton emituje pozitron + neutrino, čímž se změní v neutron. Emitované částice jsou

pohlčeny neutronem, který se při tom naopak změní v proton. Můžeme to symbolicky naznačit rovnicemi

$$p = e^+ + \nu + n \quad \text{i} \quad n = e^- + \nu + p.$$

Celý proces výměny lze naznačit rovnicí

$$p + n \rightarrow (n' + e^+ + \nu) + n \rightarrow n' + (e^+ + \nu + n) \rightarrow n' + p'$$

Z protonu p a neutronu n vznikne opět proton p' a neutron n' , ale jiný (naznačeno čárkou). Vedle toho může probíhat také symetrický proces, při němž je neutronem emitován elektron + neutrino a neutron se při tom mění v proton. Uvolněné částice jsou opět pohlceny jiným protonem, který se tím mění v neutron

$$p + n \rightarrow p + (e^- + \nu + p') \rightarrow (p + e^- + \nu) + p' = n' + p'$$

Žádný z těchto dějů však nedovede vysvětlit působení mezi souhlasnými nukleony. Zde je nutno předpokládat složitější děje. Například vzájemné působení dvou protonů vykládá tato teorie takto: Oba protony emitují po jednom pozitronu a jednom neutrinu, přičemž se změní na neutrony. Částice emitované prvním protonem jsou pohlceny neutronem vzniklým z druhého protonu, který se mění zpět v proton a obráceně. Výsledkem interakce (silového působení) v tomto případě tudíž není změna charakteru reagujících částic. Příslušný pochod je možno naznačit rovnicí

$$p_1 + p_2 \rightarrow (n_1 + e_1^+ + \nu_1) + (n_2 + e_2^+ + \nu_2) \rightarrow \\ \rightarrow (n_1 + e_2^+ + \nu_2) + (n_2 + e_1^+ + \nu_1) = p'_1 + p'_2.$$

Teorie výměnných procesů spojených s uvolňováním elektronů a pozitronů vysvětluje též aktivitu beta.

Pozitrony vznikají při procesu

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu.$$

Pozitrony vznikají při procesu

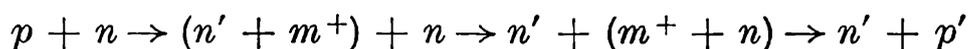
$$n \rightarrow p + e^- + \nu$$

Neutrino je při tom vždy z jádra emitováno současně s elektronem nebo pozitronem. Odnáší však s sebou pokaždé různě velkou část energie uvolněné při rozpadu beta a děj tak vede ke vzniku beta částic všech rychlostí, tj. ke vzniku spojitého spektra beta záření.

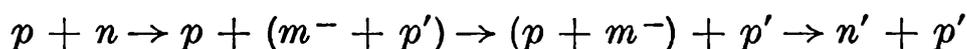
Teorie lehkých částic vyhovuje obecně pouze kvalitativně. Číselné hodnoty silových působení mezi částicemi z ní vyplývající jsou značně menší než hodnoty vyplývající z měření. Zato poměrně jednoduše a zdařile se uplatňuje při matematické formulaci aktivity beta, kde jiné teorie narážejí na značné matematické potíže.

b) Teorie mezonového pole. Radikální a velmi plodnou změnu v názorech na mechanismus jaderných sil znamenají teorie mezonové. První teorii tohoto druhu vypracoval v roce 1935 japonský fyzik Yukawa. Tato teorie předpokládá jedinou vyměňovanou částici, původně hypotetického charakteru, jež je dnes všeobecně nazývána mezon. Jako mezon označujeme částice, jichž hmota leží mezi hmotou elektronu a mezi hmotou protonu a jež má hmotu několiksetkrát větší než je hmota elektronu. Tato částice může mít kladný nebo záporný náboj o velikosti jednoho elementárního náboje, nebo může být také neutrální. Částice tohoto druhu byly později objeveny v kosmickém záření Neddermeyerem a Andersonem (1936). Dnes jich dokonce známe celou řadu typů. Značíme je m^+ , m^- nebo m^0 (mezon neutrální).

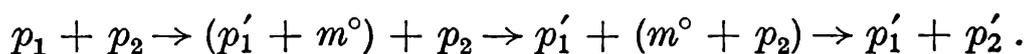
Silovému působení mezi protonem a neutronem odpovídá v mezonové teorii proces, který lze popsat takto: Proton emituje kladný mezon a mění se v neutron. Vzniklý mezon je pohlcen neutronem, který se tak mění v proton. Schematicky to lze zapsat rovnicí



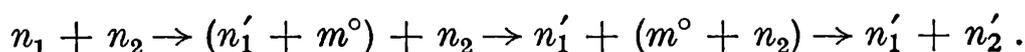
Vedle toho existuje souměrný proces: neutron vyše záporný mezon a přechází v proton. Emitovaný mezon je pohlcen protonem a mění se na neutron. Takový proces lze zapsat rovnicí



Silové působení mezi stejně nabitými částicemi je podle mezonové teorie provázáno výměnou neutrálního mezonu. Charakter nukleonů se při tom nemění. Při interakci protonu s protonem probíhá proces



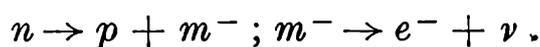
Podobně při působení neutronu s neutronem dochází k ději



Při výkladu aktivity beta musí mezonová teorie předpokládat, že mezon je částice nestálá a rozpadá se ve velmi krátké době dále na pozitron (nebo elektron) a na neutrino. Některé mezony experimentálně zjištěné skutečně této přeměně podléhají. Beta aktivita tudíž probíhá ve dvou fázích. Při emisi pozitronu probíhá děj



Podobně při emisi elektronu probíhá děj



Experimentální ověření předpokladů mezonové teorie po objevu mezonu způsobilo neobyčejný rozvoj tohoto pojetí jaderných sil. V současné době mezonové teorie, jež představují řadu obměn původní Yukavovy formulace, mají pro teorii jádra neobyčejný význam, který lze porovnat s významem Maxwellovy teorie elektromagnetického pole pro nauku o elektřině. Její stylizace však dosud není ani zdaleka tak dokonalá a při jejím propracování ještě bude nutno vyřešit řadu dalších otázek.

4. *Závěr.* Poznáním stavby atomového jádra a sil v něm působících pronikl člověk do zcela nového světa. I když se při tom jedná o obor, který nemůžeme vnímat pomocí našich smyslů, a když si skutečnou podobu jednotlivých částic nedovedeme přesně představit, podařilo se nám vytvořit si takové obrazy tohoto nového světa, které nám dovolují tento svět a děje v něm probíhající popisovat a formulovat a zpracovávat je i matematicky. Byly vyvinuty metody a přístroje, které dovolují jevy tohoto mikrosvětla pozorovat, vyhodnocovat a ověřovat na nich nově tvořené teorie. To vše je skvělým potvrzením toho, co prohlásil V. I. Lenin již před půl stoletím, kdy se při proniknutí do mikrosvětla objevila krize tehdejší fyziky. Hmotný svět je poznatelný a člověk ho bude poznávat stále lépe, podrobněji a dokonaleji. Obrazy, které si o tomto světě tvoříme, jsou stále přesnější a výstižnější, takže se stále více blíží skutečné pravdě.

Poznání světa atomového jádra zároveň ukazuje, že při přechodu z jednoho oboru (makrosvět) do druhého (mikrosvět) není možno mechanicky přenášet zákonitosti z jednoho světa do druhého. Mikrosvět má své zákony, ale i tyto zákony jsou pro člověka poznatelné a nejsou se zákony makrosvětla v rozporu.

Poměrně značná energie ukrytá v jádře atomů vyžaduje, aby v tomto jádře bylo uloženo ohromné množství pohybů, které této energii odpovídají. Nelze předem říci, zda se jedná pouze o pohyby mechanické nebo i o nějaké jiné změny. Výsledky dnešní jaderné fyziky však beze sporu takové pohyby potvrzují. Potvrzuje to zejména značná pohybová energie částic, které vznikají při přeměnách atomových jader. I o nukleonech platí to, co kdysi prohlásil V. I. Lenin o elektronu, že jsou stejně nevyčerpatelné jako atom sám a že jsou důkazem toho, že příroda je ve své existenci nekonečná.

Pozoruhodné je to, že soudržnost nukleonů v atomovém jádře zajišťují v ý m ě n n é síly, tj. jev, že jednotlivé nukleony jsou stále ve velmi živém styku, že se navzájem stále ovlivňují tím, že si stále vyměňují určité částice. Jádro atomu není žádná „mrtvá“ hmota, ale něco plného ruchu a života. Atomové jádro představuje jakési organizované seskupení nukleonů, pro něž platí pevný řád a zákony.

Fyzikální základy měřicích zařízení pro ionizační metody

(Podstata nejzákladnějších dozimetrických přístrojů, II. část)

Chtěl bych uvést několik nejzákladnějších údajů o měřicích zařízeních pro ionizační metody¹⁾.

Jako měřicího systému se používá různých elektrometrů nebo elektronických zařízení²⁾. K přesným laboratorním měřením dodnes se používá klasických přístrojů na principu elektrostatickém, které připomínají staré elektroskopy. Používá se elektrometrů, kde se hodnota připojeného napětí určuje podle průhybu tenkého vlákna umístěného v elektrickém poli. Průhyb se pozoruje mírně zvětšujícím mikroskopem. Elektrometry jsou jednovláknové nebo dvouvláknové; vlákna jsou z platiny nebo pokoveného křemene. Elektrometry úbytkové se před měřením nabijí na určitý potenciál a pak se zjišťuje úbytek potenciálu následkem záření. Elektrometry přírůstkové slouží k zjišťování přírůstku náboje následkem ionizačního proudu.

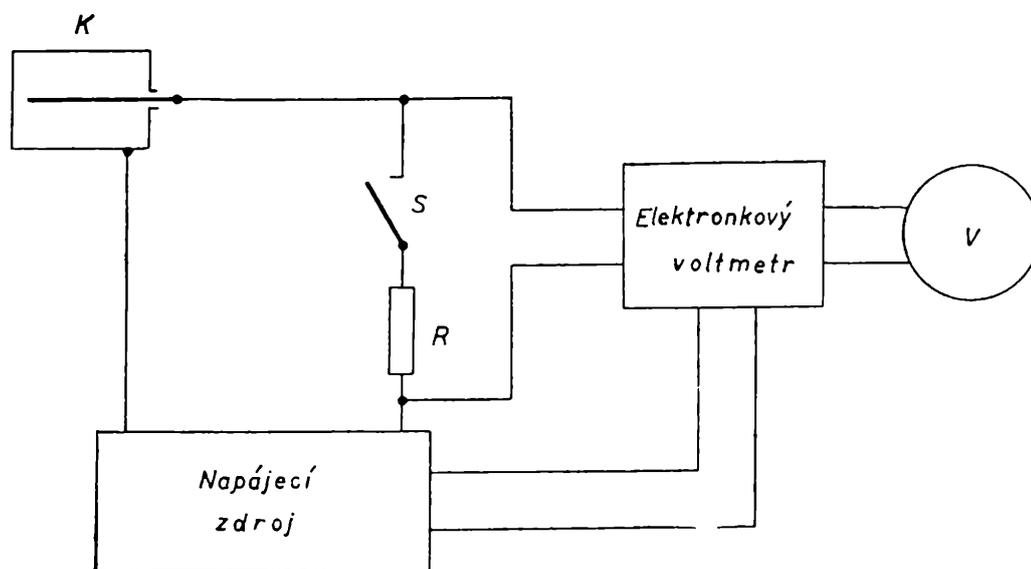
Přímé měření nepatrného ionizačního proudu způsobeného zářením v ionizační komoře většinou není možné. Měření proudu se převádí na měření napětí běžné velikosti, zařadíme-li do obvodu ionizační komory vysoký odpor. Např. proud 10^{-12} A - měřitelný jen velmi citlivým galvanometrem při průtoku odporem 10^{12} ohmů působí na odporu napětí 1 V, které se dá měřit podstatně jednodušeji. Použitý voltmetr musí mít velmi vysoký odpor.

Všechny měřicí systémy používané k ionizačním měřením jsou v podstatě voltmetry s vnitřním odporem 10^{12} ohmů i více. Pro přístroje přenosné je vhodný elektronkový voltmetr. Má velmi vysoký vstupní odpor a měřicí přístroj je v něm ovládán prostřednictvím elektronického zařízení. Elektronkový voltmetr stejnosměrného napětí

¹⁾ Stať o fyzikální podstatě ionizačního měření používaných v dozimetrických přístrojích byla uveřejněna v Rozhledech matematicko-fyzikálních, č. 3, 4 roč. 1962/3, str. 112, 161.

²⁾ O měřicích přístrojích vyráběných u nás i jinde pojednává kniha Laboratoře pro práci s radioizotopy, autorů Beránka, Hubáčka, Pulkrába a Webera. Elektrometry a ionizační komory vyrábí Ústav pro výzkum, výrobu a využití radioizotopů v Praze. Průkopníkem v tomto oboru u nás je akademik František Běhouněk.

v podstatě je složen z jedné nebo několika zesilujících elektronek, z citlivého ručkového měřidla a napájecího zdroje (obr. 1). U přenosných přístrojů k tomu přistupuje ještě žhavicí a anodová baterie. Jistá nestabilita je zaviněna nestabilitou zdrojů a kolísavými vlastnostmi elektronek. U měřiče tohoto typu je nutno před každým měřením provádět nulování, tj. nastavení nuly měřidla, aby se nestabilita rušivě neuplatňovaly. Podstatně menší nestabilita mají *d y n a m i c k é e l e k t r o m e t r y*, kterých se začalo používat místo běžných elektronkových voltmetrů. Stejnoseměrné napětí z ionizační komory se *v i b r a č n í m k o n d e n z á t o r e m* přeměňuje na střídavé napětí, zesilované a měřené *s t ř í d a v ý m e l e k t r o n k o v ý m v o l t m e t r e m*. Toto zařízení je stabilnější a jednodušší než stejnoseměrný



Obr. 1. Schéma zařízení k měření intenzity záření a dávky záření metodou ionizační. Na obr. značí *K* ionizační komoru, *R* odpor v obvodu komory, *V* voltmetr, *S* spínací dotek. V sepnutém stavu je měřena intenzita záření, v rozepnutém dávka záření.

elektronkový voltmetr. Tzv. univerzální elektrometry jsou dynamické elektrometry s různými ionizačními komorami k měření aktivity přírodních i umělých radioizotopů.

Ionizační měření může být podle obr. 1 provedeno dvojím způsobem. Buď jako stanovení *d á v k y*, kdy zařízení funguje jako *d o z i m e t r*, nebo jako měření *d á v k o v é i n t e n z i t y* (dávky za jednotku času), kdy zařízení funguje jako *i n t e n z i m e t r* a měří např. v jednotkách *r / m i n*. Je-li možno odporem zapojeným do obvodu ionizační komory odvádět celý náboj, je napětí na odporu, a tudíž i údaj na měřidle voltmetru úměrný ionizačnímu proudu a intenzitě záření, které dopadá na ionizační komoru. Je-li odpor velmi vysoký, náboj způsobený ionizačním účinkem záření se hromadí na sběrné elektrodě komory, protože přes vysoký odpor nemůže dostatečně rychle odtékat. Napětí na sběrné elektrodě je pak - v jistém rozsahu - úměrné celkovému

náboji vzniklému v komoře, a tudíž i úhrnné dávce záření, které bylo v komoře pohlceno. Měřič dávkové intenzity (*i n t e n z i m e t r*) záření je možno pouhým odpojením odporu v obvodu ionizační komory změnit v měřič celkové dávky (*d o z i m e t r*).

Přenosný, bateriový měřič intenzity, používající elektronických zařízení a vhodný k měření v terénu, se nazývá *r e n t g e n o m e t r*, popř. *m i k r o r e n t g e n o m e t r*. Je mnoho různých typů těchto přístrojů. Sovětské přístroje se vyznačují moderní konstrukcí a velkou trvanlivostí. Např. bateriový *g a m a r e n t g e n o m e t r K a r a g a č 2* je zařízení k měření dávkové intenzity do 100 mr/s. Má ionizační komoru upevněnou na prodlužovací tyči dlouhé 1,5 m. Je vhodný k měření na větší vzdálenost, k zjišťování zavlečených aktivit, radioaktivní kontaminace (znečištění) v terénu, ztracených zářičů apod. Byly sestaveny také rentgenometry, jejichž ionizační komoru gama je možno umístit ve vzdálenosti až 100 metrů od vlastního měřicího zařízení. Jsou vybaveny světelnou i akustickou signalizací, takže mohou fungovat i jako

v ý s t r a ŝ n é p ř í s t r o j e. Dobře se hodí ke kontrole některých pracovišť.

Celkové ozáření osob, které pracují v prostoru se zářením nebo v zamořeném terénu, se měří *o s o b n í m i d o z i m e t r y*. Pracovník má při sobě pouze nabitou ionizační komůrku, aby nemusel nosit při práci, popř. i v terénu celý přístroj. Snímatelná komůrka se nazývá „slepý“ dozimetr nebo kapesní dozimetr apod. Komůrka se nejprve nabije na určité napětí. Exponovaná komůrka se přeměří elektrometrem a zjistí se pokles napětí, který je úměrný dávce záření. U nás se vyrábí často používaný *R a - X - m e t r*, který slouží k nabíjení i vyhodnocování slepých dozimetrů a ionizačních komůr.



Obr. 2. Kapesní dozimetr tužkového typu. Vyrábí se pro rozsahy 25 r, 200 mr, 500 mr a 1000 mr. Hmotnost přístroje je 30–35 gramů. Výrobce: ÚVVR (Ústav pro výzkum a využití izotopů) v Praze.

Osobní, malé dozimetrické komůrky jsou náprstkového typu s velmi dobře izolovanou elektrodou, pro dávky do 200 milirentgenů. Ra-X-metr se zapojuje na síť, nebo má vlastní bateriový zdroj.

K zjišťování malých dávek záření Rentgenova nebo gama se dnes nejčastěji používá tzv. *t u ŝ k o v ý c h d o z i m e t r ů* (obr. 2). Používají vlákna ve formě smyčky a jsou obdobné Lauritsenovu elektrometru, který se vyznačuje malými rozměry měřicího systému. V ochranném tužkovém dozimetru je elektrometrický systém (společně

s malým mikroskopem) upevněn v pouzdře velikosti plnicího pera, které je možno nosit v kapse. „Tužka“ se před použitím nabije a zjišťuje se pokles náboje vlivem ozáření. Rozsah stupnice je obvykle 0,2 r; jsou však i tužkové dozimetry pro vyšší dávky záření.

Toleranční, tj. nejvyšší přípustná dávka byla roku 1955 stanovena jakožto 0,3 rem týdně. V poslední době byla však pro celotělové ozáření snížena na 0,1 rem za pracovní týden. Československé předpisy pro ochranu pracovníků se zářením jsou velmi pokrokové³⁾.

Jednotka rem je tzv. biologický ekvivalent rentgenu, je to dávka jakéhokoliv druhu záření, které u člověka vyvolá stejný účinek jako jeden rentgen (r) vysokovoltového rentgenového záření v rentgence s napětím asi 250 kV. Jednotka rem byla zvolena proto, aby byl vystižen vliv kvality záření na biologickou účinnost záření. Např. paprsky alfa, protony nebo neutrony mají větší biologickou účinnost než paprsky Roentgenovy a gama. Rychlé neutrony účinkují 10krát silněji i více, paprsky alfa 20krát. Zkratka rem je z anglického: *rentgen-equivalent-man* nebo *mammal*, tj. ekvivalent rentgenu na člověka nebo savce.

Toleranční intenzita záření je hraniční mezí. Pracovníci se zářením mají si pracovní podmínky upravit tak, aby byli vystaveni dávce pokud možno nejmenší. Celková dávka má být podle možnosti rozdělena na pravidelné denní dávky, tj. pokud možno nemá být dávkou jednorázovou.

Karel Vavřina, ČVUT, Praha:

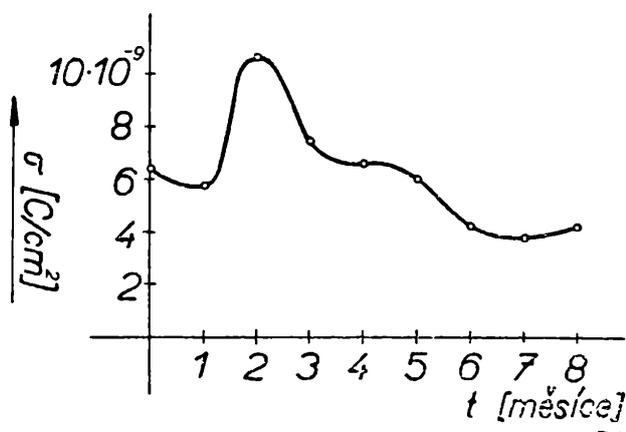
Vlastnosti a použití elektretů v praxi

Když již byly známy všechny úzké vztahy mezi elektrickými a magnetickými jevy, začal se hledat materiál, který by byl elektrickou obdobou permanentního magnetu. Základní požadovanou vlastností bylo, aby tento materiál byl schopen vytvořit trvalé elektrické pole. Teprve po první světové válce se podařilo japonským vědcům, pracujícím na výzkumu dielektrik, získat látku, mající tuto vlastnost. Tato látka

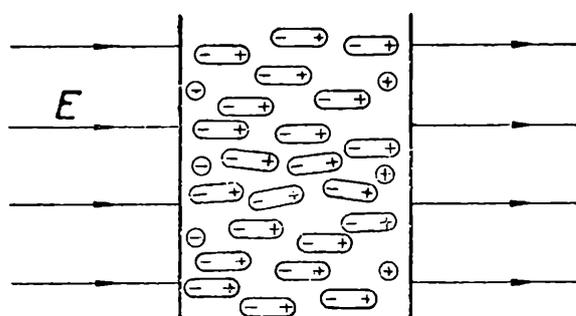
³⁾ Na vypracování příslušných norem se podstatně podílí dozimetrické oddělení Ústavu jaderného výzkumu ČSAV, jehož vedoucím je akademik Běhounek, a odbor ionizačního záření Ústavu hygieny práce a chorob z povolání v Praze.

dostala název *e l e k t r e t*. V dnešní době všechny významné elektrety jsou dielektrické látky organického nebo anorganického původu.

Nejrozšířenější způsob získání elektretu je ochlazování roztaveného (u organických látek) nebo zahřátého na vysokou teplotu (anorganické polokrystalické materiály) dielektrika, v silném elektrostatickém poli, tvořeného napětím řádově desítky kilovolt. Ztuhlá hmota v podobě plochého kotouče má pak na svých rovných plochách elektrické náboje opačného znaménka tak trvalé, že například u elektretu z brazilského vosku a smůly se úbytek náboje neprojeví ani po třech letech. Náboje nelze odstranit ani mytím, ani seškrabáním, ani ozářením Roentgenovými paprsky. Kolem elektretu, jako kolem každého elektricky nabitého tělesa, se vytvoří trvalé elektrické pole.



Obr. 1



Obr. 2

Jednou z charakteristických vlastností, kterými popisujeme elektrety, je plošná hustota elektrického náboje na povrchu látky, tzv. *p o v r c h o v á h u s t o t a n á b o j e*. U běžných elektretů z dielektrik organického původu se povrchová hustota pohybuje kolem 1 až $2 \cdot 10^{-9} Ccm^{-2}$, zatímco elektrety získané z anorganických látek mají povrchovou hustotu náboje 3 až $4 \cdot 10^{-9} Ccm^{-2}$.

Další důležitou vlastností je závislost povrchové hustoty náboje na čase. Na obr. 1 je znázorněna závislost povrchové hustoty náboje na čase pro elektret získaný z $CaTiO_3$ (titaničitan vápenatý). Z obrázku je patrné, že povrchová hustota náboje z počátku (tj. těsně po vyrobení) kolísá a po několika měsících se již téměř nemění. Je nutné zdůraznit, že elektrety získané z dielektrik organického původu se musí uchovávat v kovové fólii, tj. ve zkratovaném stavu. Opomeneli se toto opatření, ztrácí rychle tyto elektrety svůj náboj. Po zkratování jsou však schopny částečně si náboj obnovit.

Jak si však vysvětlíme vznik náboje v elektretu? Hrubý názor nám mohou dát tyto úvahy: Jistě víte, že při vložení dielektrika do elektro-

statického pole se dielektrikum polarizuje, to znamená, že molekuly vytvoří elektrické dipóly, které se natočí svým kladným pólem ve směru intenzity elektrostatického pole. V našem případě je toto natočení v silném elektrickém poli umožněno zvýšenou teplotou. Při dostatečně silném elektrickém poli se mohou některé dipóly porušit, a tím vzniknou ionty, které se vlivem pole počnou pohybovat. Kladné ionty se pohybují proti směru působícího pole. Proto se na krajních plochách dielektrika, kolmých ke směru elektrického pole, vytvoří náboje. O rozložení nábojů nám dává dobrý názor obr. 2. Bude-li při stálém působení elektrického pole dielektrikum zvolna tuhnout, budou rozložené náboje postupně „zamrzávat“. Při úplném ztuhnutí materiálu „zamrzlé“ náboje vytvoří vlastní elektrostatické pole. Kolísání povrchové hustoty náboje, patrné z obr. 1, se vysvětluje částečným pohybem iontů.

V současné době ve všech pracích, které popisují přípravu elektretů z různých dielektrik, jsou uváděny jako nejvhodnější látky pro získání elektretu dielektrika organického původu, hlavně pryskyřice, parafíny a umělé hmoty jako nylon apod. Nejznámější elektrety jsou z kar-naubského vosku, naftalenu, brazilského vosku, nylonu, organického skla atd. Velmi malé znalosti jsou však o elektretech z dielektrik anorganických polykrystalických látek. Tyto elektrety jsou většinou keramickými hmotami na bázi titaničitanů. Nejznámější jsou $MgTiO_3$, $CaTiO_3$, nebo titaničitan vizmutu, $BiO \cdot 4 TiO_3$.

Prvé pokusy o praktické uplatnění elektretu byly při konstrukci měřicích přístrojů. Teprve po druhé světové válce se použití elektretů v praxi velmi rychle rozšířilo. Zajímavé použití elektretů je například ve sdělovací technice, kde byl zkonstruován kondenzátorový mikrofon. Membrána mikrofonu kmitala přímo nad povrchem elektretu, což umožnilo odstranit těžké akumulátorové baterie potřebné k napájení normálního kondenzátorového mikrofonu. Je překvapující, že při normální hlasitosti elektretový mikrofon dává bez jiného napájecího zdroje dvakrát vyšší napětí než stejný uhlíkový mikrofon při normálním napájecím napětí.

Elektretu se dá též výhodně použít v elektronice při vytváření mřížkového napětí v elektronkách, v obrazovkách při řízení paprsků elektronů, nebo pro jiná zařízení využívající elektrostatického pole. V poslední době se používají elektrety i při konstrukci paměťových prvků pro počítačové stroje. Uplatnění našel již elektret i v silnoproudé technice a energetice, například při konstrukci indukčních elektromotorů.

Uvedené možnosti použití elektretu nejsou zcela vyčerpávající, neboť lze očekávat, že elektrety budou mít v rozvoji elektrotechniky tak široké použití, jako mají dnes permanentní magnety a elektromagnety.

Nová měrová soustava

(Pokračování)

Zákonné jednotky

Ve smyslu zmíněného zákona jsou zákonnými jednotkami *jednotky základní* a *ty jednotky druhotné*, které stanoví státní norma. Přesně budeme znát výčet druhotných jednotek, až bude tato norma schválena. Zatím uvádím pro první informaci hlavní zásady, které jsou obsaženy v připravovaném návrhu státní normy. Zákonnými druhotnými jednotkami budou jednak hlavní jednotky některých veličin, dále ty vedlejší jednotky, které norma připustí, a konečně násobky a díly jednotek základních a v normě uvedených jednotek hlavních i vedlejších, pokud jsou vytvářeny předepsaným způsobem, o němž bylo již hovořeno. Je to vytváření dekadické (násobků a dílů), v několika výjimečných případech nedekadické, především u času a jednotek rovinného úhlu ve stupňové míře. Zákonnými budou asi také takové dílčí a násobné složené jednotky uvedených veličin, v nichž bude předepsaným způsobem použito násobku nebo dílu některé z obsažených jednotek, a to i takových, které mají své vlastní pojmenování a značku, např. joule (J), newton (N), kilokalorie (kcal), ampér (A) aj.

Příklad. Příkladem složené jednotky je např. hlavní jednotka *dynamické viskozity* (η) = $1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ (1 newtonsekunda na 1 metr na druhou). Násobnými jednotkami mohly by být $1 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$, $1 \text{ N} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-2}$, $1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}^{-2}$ apod. Dílčími jednotkami by byly např. $1 \text{ mN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$, $1 \text{ N} \cdot \text{ms} \cdot \text{m}^{-2}$, $1 \text{ mN} \cdot \text{min} \cdot \text{m}^{-2}$ aj.

Je zde uvedeno několik příkladů, ovšem snahou je co možná omezit počet takto odvozovaných jednotek. Žádoucí je, aby se pokud možno vystačilo s *jednotkami hlavními*. Zvláště žádoucí je to ve fyzice. V technické praxi, kde je často požadováno, aby běžněji vyjadřované vlastnosti látek měly co nejstručnější číselné vyjádření, je volba jednotek rozmanitější. Dochází zde ovšem často i k nekohorentní tvorbě jednotek, jako např. u jednotky tlaku

$$(p) = 1 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2},$$

kde je patrné, že v násobné jednotce ($1 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$), která by byla odvozena z jednotky hlavní ($1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$) použitím dílu vztažné veličiny (plošného obsahu), rozepsané do základních jednotek, vyskytuje se délka vlastně ve dvou jednotkách (m, cm), což není jistě zcela správné. Přesto

se setkáváme v praxi s jednotkami $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, $\text{kp} \cdot \text{mm}^{-2}$, $\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$, Ωcm apod. *Ve člancích našeho časopisu budeme používat především jednotek základních a hlavních, výjimečně jednotek vedlejších. Z násobných a dílčích jednotek se omezíme v případě požadované názornosti jen na takové, jež budou tvořeny zcela exaktním způsobem. Ve dvou dalších odstavcích si probereme jednak zákonné jednotky základní, jednak zákonné jednotky druhotné. Pak si ještě uvedeme v tabulkovém přehledu hlavní jednotky veličin, jež nemají podle připravovaného návrhu státní normy zákonný charakter. Tabulkový přehled slouží jednak pro informaci o struktuře zákonných jednotek, jednak bude vodítkem pro používání jednotek v člancích našeho časopisu.*

Základní jednotky

U každé veličiny je tento postup: název veličiny a její nejpoužívanější značka, rozměr se symboly: L pro délku, M pro hmotnost, T pro čas, I pro elektrický proud, Θ pro teplotu a I^* pro svítivost (jen pro fotometrii). Rozměr je uveden za značkou veličiny v hranaté závorce a značka základní nebo hlavní jednotky je v kulaté závorce. Definice jsou jen u jednotek základních. U některých veličin je připojena poznámka terminologická nebo o vedlejších jednotkách.

Délka a l aj.: $[l] = L$; $(l) = 1 \text{ metr} = 1 \text{ m}$.

Definice. Metr je délka rovnající se 1 650 763,73 násobku vlnové délky záření šířícího se ve vakuu, které přísluší přechodu mezi energetickými hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86. Definice byla schválena 14. X. 1960 XI. generální konferencí pro váhy a míry v Paříži.

Poznámka. Proti dřívější zvyklosti je jednou normálně vytvořenou dílčí jednotkou 1 mikrometr (μm). Dřívější název 1 mikron bude pravděpodobně povoleno používat, značka bude však pouze μm .

Hmotnost (massa) m; $[m] = M$; $(m) = 1 \text{ kilogram} = 1 \text{ kg}$.

Definice. Kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu, který je uložen u Mezinárodního úřadu pro váhy a míry v Paříži. Tato definice byla přijata v roce 1901 na III. generální konferenci pro váhy a míry.

Poznámka. U této základní veličiny je anomálie při tvorbě dílčích a násobných jednotek, protože název základní jednotky je sám již vytvořen předponou (kilo-). Pro svoji omezenou reprodukovatelnost by bylo žádoucí také tuto definici nahradit novou, nebyl však dosud nalezen plně vyhovující princip, o který by se definice opírala. Protože termínu hmota se používá ve filosofii, je vhodné používat nového názvu **hmotnost**. Zvláštní název jednotky hmotnosti, odlišný od normálního, se připouští u tuny $(t) = 10^3 \text{ kg}$, má se však dávat přednost názvu megagram (Mg) pro touž jednotku.

Čas t, τ ; $[t] = T$; $(t) = 1 \text{ sekunda} = 1 \text{ s}$.

Definice. Sekunda je 31 556 925,974 7 díl tropického roku 1900, leden 0 ve 12 hodin efemeridního času. Také tato definice, určená již v roce 1954, byla schválena v roce 1960 na XI. generální konferenci pro váhy a míry.

P o z n á m k a. Pro jednotku času lze používat pouze názvu sekunda. Název vteřina ponechává se pouze pro dílčí jednotku úhlu ve stupňové míře. Zvláštnost této jednotky je tvorba násobných jednotek 1 den ($1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$), 1 hodina ($1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$) a 1 minuta ($1 \text{ min} = 60 \text{ s}$). Zlomky sekundy se tvoří dekadicky, např. 1 milisekunda (ms) apod. Sekunda se rozumí, což je zřejmé z definice, středního slunečního času na rozdíl od sekundy hvězdného času.

Elektrický proud I ; $[I] = \text{I}$; $(I) = 1 \text{ ampér} = 1 \text{ A}$.

Definice. Ampér je elektrický proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými velmi dlouhými (teoreticky nekonečně dlouhými) vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$, tj. $2 \cdot 10^{-7}$ newtonů na 1 metr délky. Tato definice byla přijata v r. 1948 na IX. generální konferenci pro váhy a míry.

Teplota t ; $[t] = \Theta$; $(t) = 1 \text{ stupeň (teplotní) (deg; } ^\circ\text{K, } ^\circ\text{C)}$.

Definice. Teplotní stupeň je 273,16 díl teplotního rozdílu mezi absolutní teplotní nulou a teplotou trojného bodu vody (jako základním teplotním bodem), měřený v termodynamické stupnici. Tato definice byla přijata v roce 1954 na X. generální konferenci pro váhy a míry.

P o z n á m k a. Značka teplotního stupně u libovolného teplotního rozdílu (Δt) je deg. Vyjadřuje-li rozdíl nějaké teploty od absolutní nuly, udávají se hodnoty v jednotkách stupně Kelvina ($^\circ\text{K}$), vyjadřuje-li se rozdíl teplot od nulového bodu praktické teplotní stupnice, udávají se hodnoty v jednotkách stupně Celsia ($^\circ\text{C}$). Podrobně je mezinárodní praktická stupnice z r. 1948 (přijátá na IX. generální konferenci pro váhy a míry) v navrhovaném doplnění z roku 1960 uvedena v pojednání V. Šindeláře: Mezinárodní praktická teplotní stupnice v doplněném znění z r. 1960, Věstník úřadu pro normalizaci, 1961, č. 3., str. 34–39).

Svítivost I ; $[I] = \text{I}^*$; $(I) = 1 \text{ kandela} = 1 \text{ cd}$.

Definice. Kandela je svítivost $\frac{1}{6} \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ povrchu absolutně černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny a tlaku $1,01325 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$), což odpovídá 760 torrům, ve směru kolmém k tomuto povrchu. Tato definice byla přijata rovněž v roce 1948 na IX. generální konferenci.

Veličiny odvozené a jejich hlavní jednotky

(pokud budou mít zákonný charakter)

Do této skupiny jsou zahrnuty také veličiny geometrické, pokud mají fyzikální význam.

Plošný obsah S ; $[S] = L^2$. $(S) = 1$ čtverečný metr $= 1 \text{ m}^2$.

Poznámka. Neobvyklým způsobem vytvořené násobné jednotky ar (1 a = 100 m²) a hektar (1 ha = 10⁴ m²) zůstanou pravděpodobně jednotkami zákonného charakteru. Názvu plocha, vyjadřujícího geometrický útvar, se nemá samotného používat pro veličinu kvantitativního charakteru. Místo plošný obsah lze použít také velikost plochy, průřez apod.

Objem V ; $[V] = L^3$. $(V) = 1$ krychlový metr $= 1 \text{ m}^3$.

Poznámka. Běžná jednotka 1 litr (l) bude asi rovněž zákonnou jednotkou. Přitom

$$1 \text{ l} = 1,000\,028 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \doteq 1 \text{ dm}^3$$

V běžné praxi lze používat poslední aproximace. Název „obsah“ pro tuto veličinu je nevhodný. Jde-li o měrné nádoby, je možno termín zpřesnit, např. použitím výrazu *vnitřní objem*.

Úhel (rovinný) α, β , $[\alpha] = 1$. $(\alpha) = 1$ radián $= 1 \text{ rad}$.

Poznámka. Lze používat také jednotek stupňové míry, a to 1 stupeň (1°) a 1 grad = 1^g, při čemž 1^g = $\frac{\pi}{200}$ rad, 1° = $\frac{\pi}{180}$ rad. Další dělení úhlového stupně na minuty je obdobné jako u jednotek času. Pravý úhel se značí \perp .

Prostorový úhel ω ; $[\omega] = 1$. $(\omega) = 1$ steradián $= 1 \text{ sr}$.

Pro plný prostorový úhel používá se také názvu *spat* (sp). Přitom 1 sp = 4 π sr.

Poznámka k úhlům. Podobně jako rovinný úhel můžeme vyjádřit ve stupňové míře, lze totéž provést i u prostorového úhlu. Používání prostorové stupňové míry je však velmi málo běžné.

Rovinný i prostorový úhel jsou veličiny poměrné (viz jejich definice). Je-li žádoucí zvlášť vyznačit koherentnost jejich jednotek, mohli bychom pro ně použít označení $\frac{\text{m}}{\text{m}}$, respektive $\frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}$.

Kmitočet (frekvence) ν, f ; $[\nu] = T^{-1}$. $(\nu) = 1$ hertz $= 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Síla (F); $[F] = L.M.T^{-2}$. $(F) = 1$ newton $= 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Newton je síla, která uděluje tělesu s hmotností 1 kg zrychlení 1 m \cdot s⁻².

Vedlejšími zákonnými jednotkami budou asi také:

$(F) = 1$ kilopond $= 1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}$ (přesně) - názvem „kilopond“ odstraňuje se možnost záměny bývalého „silového kilogramu“ a základní jednotky hmotnosti „hmotnostního kilogramu“. Násobné a dílčí

jednotky odvozené z této vedlejší jednotky síly jsou vytvářeny obdobně jako u kilogramu, např.

1 milipond = 1 mp = 10^{-6} kp = 9,806 65 · 10^{-6} N (býv. silový miligram, mg*),

1 pond 1 p = 10^{-3} kp = 9,806 65 · 10^{-3} N (býv. silový gram, g*),

1 megapond = 1 Mp = 10^3 kp = 9,806 85 · 10^3 N (býv. silová tuna, t*).

P o z n á m k a. Pro tíhový účinek těles doporučuje se používat názvu **tíh a** (tíh o v á síl a) místo **v á h a**. Pod pojmem váhy se sice ve fyzice obecně rozuměla tíhová síla, v běžné praxi se však rozuměla velmi často vahou vlastní hmotnost (např. vsázková váha, kusová váha aj.); nebyl tedy pojem váhy používán jednoznačně. V připravované normě pro mechaniku je dokonce navrhováno, aby název váha byl přiřazen jako druhořadý k veličině hmotnosti. (Pokračování)

Různé

Doc. J o s e f S c h m i d t m a y e r, ČVUT, Praha:

Znalosti a návyky v matematice při vstupu na vysoké školy technického směru



Mnozí z vás - milí čtenáři - budou v nejbližších týdnech konat přijímací pohovory na vysoké školy technického směru. Nezapomeňte, že v letošním školním roce budou již v prvním čtvrtletí roku 1963. Důležitou částí těchto pohovorů je všude matematika a fyzika.

Přinášíme vám proto několik cenných poznámek vysokoškolského učitele o mezerách ve vašich znalostech, které se až zarážejícím způsobem hromadně objevují nejen při přijímacím řízení, nýbrž i v prvních semestrech pozdějšího vysokoškolského studia. Z dlouholeté zkušenosti vám můžeme dotvrdit, že s podobnými základními neznalostmi se setkáváme např. i na fakultě stavební.

Vyzkoušejte své vlastní znalosti na příkladech dále uvedených a snažte se alespoň v poslední chvíli si doplnit případné nedostatky. Upozorněte na tento článek i své učitele a požádejte je o případnou pomoc.

Redakce

Úvod. Celonárodní diskuse k dokumentu O v ý h l e d e c h d a l š í h o r o z v o j e n a š í s o c i a l i s t i c k é s p o l e č n o s t i, právě tak jako dokument sám a jako mnohá vyjádření ÚV KSČ, znovu zdůraznila nezbytnost rozvoje vysokoškolského vzdělávání s technickým a přírodovědeckým zaměřením.

Ve výčtu konkrétních vědních oborů je uváděna při takových příležitostech na čelném místě právě matematika. Ale její roli dnes již nelze chápat jen v souvislosti s tvorbou poznatků; stále více se ukazuje, že právě matematika si může vydobýt významné postavení při výchově mladého člověka k práci.

Matematika totiž vytváří stále složitější poznatky z faktů jednodušších; ale taková stavba je jen tehdy bezpečná, navazuje-li na spolehlivé hlavní znalosti a návyky. Není-li jich, velmi brzy se zhroutí hromadění nových skutečností, jež nemají oč se opřít. A zde může trvale a spolehlivě pomoci jen soustavná práce, která je základem každého dobrého díla a která je z nejvýznamnějších rysů výchovy nového, lepšího člověka. Návyky dobré práce v matematice (tj. vytrvalost, důslednost, systém) jsou dobrou a užitečnou přípravou pro každou jinou činnost.

Bohužel matematika je jedním z předmětů, které působí potíže studentům nejnižších ročníků vysokých škol technického zaměření. Přitom technické vědy (např. v oblasti elektrotechniky, automatizace, ekonomie atd.) neustále zvyšují nároky na důkladné teoretické základy, aby mohly v praxi co nejlépe pomáhat rozvoji společnosti. A mezi tyto nároky patří stále častěji nároky právě na matematiku.

Proto již řadu let se snažíme na naší elektrotechnické fakultě ČVUT pomáhat studentům od prvního ročníku, aby mohli s úspěchem ovládnout matematiku samu a jejím prostřednictvím i teorii jiných předmětů s matematikou úzce spjatých.

Chceme-li však pomoci hned od počátku roku, musíme nejprve vědět, komu a v čem, abychom pak mohli určit, jak. Proto hned v prvních hodinách vyučování na počátku školního roku jsme dali novým studentům řešit několik úloh a podrobně jsme zpracovali výsledky. Nejsou právě uspokojivé. Domnívám se však, že nedostatky ve znalostech matematiky, které se při tom projevily, by bylo možno z velké části odstranit soustavnější pozorností k matematice.

V tomto článku vás chci o celé akci blíže informovat. Protože vás asi naše vlastní opatření ke zlepšení situace tolik nezajímají, seznámím vás jen s úlohami samými. Zároveň vám ukáži některé zcela elementární poznatky a postřehy, které by měl absolvent střední školy mít. Upozorním také na typické chyby, kterých byste se měli natrvalo vyvarovat.

Bylo by cenné, kdyby vám těchto několik poznámek alespoň trochu pomohlo k odstranění některých nedostatků jak ve vaší nynější i bu-

doucí práci, tak také v přípravě k přijímacímu řízení na vysokých školách. To platí zejména pro všechny, kteří mají v úmyslu - po absolvování střední školy - dříve nebo později přejít na vysoké školy technického zaměření.

Podklady a výsledky průzkumu. Uvedu nyní přehled úloh. V závorce je vždy cíl, který úloha sledovala. Všimněte si těchto cílů. Uvědomíte si pak, že úloha v matematice není nikdy samoučelná. Cvičí paměť, úsudek, ostrí důvtip, vyjasňuje souvislosti atd.

U každé úlohy jsou dále vytknuty typické nedostatky, které se objevily v písemném zpracování a u některých úloh je uvedeno správné řešení.

$$1. \text{ Řešte rovnici: } \frac{2}{3} x^2 - 4x + \frac{13}{2} = 0$$

(Poznat, zda budou nejprve odstraněny zlomky, které vzorce pro kořeny kvadratické rovnice jsou známy a jaké je „sžítí“ s komplexními čísly.)

Hlavní nedostatky:

a) V mnoha případech nebyly odstraněny zlomky a lomené koeficienty byly dosazovány do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice; v těchto případech pak došlo dříve či později k numerické chybě.

b) U některých absolventů průmyslových škol se objevila tendence vyjadřovat lomené koeficienty desetinnými čísly, třeba přibližně. Ovšem bez jakékoli poznámky, že jde o přibližné hodnoty kořenů.

c) Projevily se velké rozpaky nad vyjádřením imaginárních kořenů. Zdrucující většina studentů skončila konstatováním, že diskriminant je záporný, takže rovnice nemá reálné kořeny. Následovaly marné (opakované, škrtané) pokusy o vyjádření těchto kořenů.

Jak daleko stručnější než výčet nedostatků je správný postup: Nejprve odstraníme z dané rovnice zlomky (znásobením rovnice šesti) a řešíme takto vzniklou ekvivalentní rovnici:

$$4x^2 - 24x + 39 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{8} \left(+ 24 \pm \sqrt{576 - 624} \right),$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(6 \pm i \sqrt{3} \right).$$

Použití jednoduššího vzorce, který využívá sudosti koeficientu v lineárním členu, se nevyskytlo.

$$2. \text{ Řešte rovnici: } \frac{3}{x-2} + 7 = \frac{4x-5}{x-2}.$$

(Problém ekvivalence dvou rovnic. Poznat, zda bude formálně získaný výsledek správně zhodnocen.)

Hlavní nedostatky:

a) Zcela formální odstranění zlomků, někdy s poznámkou $(x - 2) \neq 0$, a mechanické určení kořene nové rovnice, tj. $x = 2$, bez přihlídnutí k původní výhradě $x - 2 \neq 0$.

b) Téměř nikdy zkouška, málokdy zmínka o ekvivalenci. Závěr (tj. rovnice nemá kořen) jen zřídka správný.

3. Rozložte v nejjednodušší činitele výraz $x^4 - y^4$.

(Prokázat znalost elementárních vzorců z algebry.)

Třebaže tato úloha byla relativně nejúspěšnější, projevila se neočekávaná fantazie. Místo správného bleskového rozkladu

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

(nebyl totiž požadován rozklad v činitele vesměs lineární) se objevily náměty jako např.:

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4, \\ &= xxxx - yyyy \text{ apod.} \end{aligned}$$

4. Určete největší společný dělitel čísel 360, 630, 13 860.

(Prokázat, že je znám význam pojmu „největší společný dělitel“ a že nebude tento pojem zaměňován za „nejmenší společný násobek“ několika čísel.)

Podstatný nedostatek: Nebylo jasno, co je vůbec společný násobek a co je společný dělitel. I ze správných rozkladů daných čísel v prvočinitele byly činitele největšího společného dělitele vybírány tak rozmanitými způsoby, že je ani neuvádím.

5. Seřadte podle velikosti zlomky $\frac{14}{23}$, $\frac{156}{275}$, $\frac{61}{109}$.

(Poznat, zda zpracovatel bude mechanicky převádět na společného jmenovatele, nebo zda půjde výhodnější cestou a vyjádří zlomky - přibližně - desetinnými čísly.)

Nedostatky (v postřehu): Zdrcující většina studentů uváděla na společného jmenovatele; jen málo z nich dospělo ke správnému výsledku. Menší část pak pochopila výhodnost desetinného vyjádření:

$$\begin{array}{ll} 61_0 : 109 = 0,55\dots; & 156_0 : 275 = 0,56\dots; \\ 650 & 1850 \\ 105 & 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14_0 : 23 = 0,6\dots \\ 2 \end{array}$$

6. Definujte přesně, co je logaritmus čísla c při základu z .

(Ověřit paměť a snad i úsudek.)

Tato druhá neúspěšnější úloha ukázala, že studenti vcelku dobře reprodukují požadovanou definici.

7. Víte-li, že $\log_b a = -\frac{1}{3}$, jak velký je $\log_b \left(\frac{1}{a^{\frac{4}{5}}}\right)$?

(Ověřit schopnost aplikovat poznatky o mocninách a o logaritmech.)

Hlavní nedostatky: a) Neobratnost při aplikování vzorců pro mocniny s racionálním mocnitelem a vzorců pro práci s logaritmy.

Některé perly: $L < -\frac{1}{3}$; $L = \log_b \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}} \right]$;

$$L = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{-\frac{1}{3^{\frac{4}{5}}}} = -3^{\frac{4}{5}} (!!).$$

Uvědomte si dobře tyto nesmysly.

Přitom správný postup je až žertovně stručný:

$$\begin{aligned} \log_b a = -\frac{1}{3}; \quad L = \log_b \left(\frac{1}{a^{\frac{4}{5}}}\right) &= \log_b a^{-\frac{4}{5}} = \left(-\frac{4}{5}\right) \log_b a = \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

8. Vypište všechny vzorce pro obsah trojúhelníka, které znáte.

(Ověřit zažití rozmanitých vzorců. Za správnou odpověď pokládáno uvedení aspoň tří správných vzorců.)

Všeobecně bylo uváděno základní vyjádření $P = \frac{1}{2} zv$. Překvapila skoro úplná neznalost velmi důležitého vyjádření $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Z ostatních se vyskytl častěji vzorec Heronův. Speciální vzorce, např. pro rovnostranný trojúhelník, vzorce s poloměrem opsané nebo vepsané kružnice, se téměř nevyskytly.

9. Je dáno $\alpha = \frac{17}{20} \pi$ [rad]. Určete α° .

(Ověřit úsudek a názor na to, jaký počet stupňů odpovídá obloukové míře π .)

Hlavní nedostatky: a) Nejistota v počtu stupňů. Kromě správného údaje 180° se nejčastěji vyskytly domněnky: 90° , 360° .

b) Toporný postup i ve správně rozřešených úlohách:

$$\alpha^\circ = \frac{17}{20} \cdot 180^\circ = \frac{3060^\circ}{20} = 153^\circ.$$

Proč to zbytečné násobení 17 · 180, když bylo možno krátit 180 proti 20? Tento nedostatek vám zbytečně ztěžuje práci. Krácení není pro týrán studentů, ale pro zjednodušení práce. Využívejte ho co nejvíce!

10. Vypočítejte $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, znáte-li: $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3}$. Úhel α je ostrý.

(Ověřit úsudek a elementární znalosti z trigonometrie.)

Naprosté překvapení, jedna z nejneúspěšnějších úloh.

Hlavní nedostatky: a) Ze skutečnosti, že $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}$, byly vyvozeny katastrofální závěry: $\cos \alpha = 4$, $\sin \alpha = 3$. Přitom nejzákladnějšími poznatky z trigonometrie jsou vztahy: $|\cos \alpha| \leq 1$, $|\sin \alpha| \leq 1$!!
b) Neznalost elementárních vztahů mezi jednotlivými goniometrickými funkcemi.

Nepatrný zlomek studentů přistoupil k věci správně a hlavně zcela prostě: $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3} = \frac{b}{a}$; zvolme $a = 3$, $b = 4$, pak $c = 5$ (podle Pythagorovy věty), $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

11. Kolik je $\operatorname{cotg} 30^\circ$?

12. Vyjádřete $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

(Ověřit paměť nebo rychlý orientační úsudek - v úloze 11.)

Některé perly:

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}; 1 (!!);$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}, \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} (!!)$$

Všimněte si dobře těchto nesmyslů.

13. Napište vzorec pro objem a povrch koule, pro obsah a obvod kruhu. (Ověřit paměť, úsudek.)

Hlavní nedostatky: Nespolehlivá znalost konstant, které ve vzorcích vystupují. Mnohem překvapivější je špatný postřeh fyzikálního rozměru výsledku.

Některé ukázky nesmyslných výsledků

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3} \pi r^2, \quad \frac{2}{3} \pi r, \quad \frac{4}{3} \pi r^4, \quad \frac{4}{3} \pi d^3 (!!).$$

$$S_{\text{koule}} = \pi r^3, \quad \frac{\pi d^3}{6}, \quad 2 \pi r^2, \quad \frac{3}{4} \pi r^2, \quad \frac{4}{3} \pi r^2 (!!).$$

14. Tato úloha se týkala dělení mnohočlenu mnohočlenem.

Protože někteří studenti tuto úlohu dříve neprobírali, nezabývám se jí blíže.

Písenná práce byla psána ve dvou paralelkách po asi 180 studentech. Z celkové doby asi 60 minut připadlo 35 minut čistého času na vypracování, zbytek času byl spotřebován na diktování textů úloh a na poznámky na tabuli. Výsledky v obou paralelkách byla přibližně stejné. Mohly by vás zajímat počty zcela (nebo jen s nepatrnými nedostatky) správných řešení jednotlivých úloh. Jsou uvedeny v tomto přehledu, a to v procentech z celkového počtu studentů (jde o výsledky z jedné parallelky):

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Správné odpovědi v %	15	19	70	30	28	65	22	27	51	8	55	35	46	8

Celý soubor všech 14 úloh vypracovalo správně - nebo jen s malými nezávažnými nedostatky 14 studentů, tj. 8% (z přesného počtu 175 osob).

Mohlo by se zdát, že neúspěchy spoluzavinila krátká doba poskytnutá k vypracování. Že tomu tak není, ukázaly domácí práce, odevzdávané vždy t ý d e n po zadání. Třebaže jejich tematika byla na podobné elementární úrovni, objevovaly se zejména v prvních týdnech, velmi závažné nedostatky, a to u nemalého počtu studentů.

Závěr. Soubor probraných úloh měl ověřit, v jakém rozsahu lze spolehat na trvalé návyky a základní vědomosti z některých úseků matematiky, které jsou pro studenta na technické vysoké škole i pro inženýra nezbytné. V rámci tohoto článku postačí, zdůrazním-li souvislost průzkumu především s důležitými úseky matematiky které jsou: spolehlivé zvládnutí základních algebraických výrazů $(a + b)^2$, $a^2 - b^2 \dots$), počítání se zlomky, řešení lineárních a kvadratických algebraických rovnic (včetně otázek ekvivalence rovnic a zkoušky), počítání s racionálními

mocninami kladných čísel, počítání s logaritmy, spolehlivá znalost základů trigonometrie, znalost vzorců pro obsahy rovinných obrazců, pro povrchy a objemy těles, i zběhlost v numerickém počítání.

Věřím, že odstraňování nedostatků na těchto úsecích práce se může projevit zlepšením výsledků v partiích obtížnějších. Těm pak, kteří mají zájem o studium na vysoké škole technické, velmi usnadní jak přípravu, tak studium samo.

Československý šach o našich Rozhledech

Na 4. straně obálky svého 5. čísla (roč. 1962) přinesl časopis *Československý šach* poznámku nazvanou *Matematika na šachovnici*, ve které upozorňuje své čtenáře na naše Rozhledy. Poznámka si totiž všímá článku Milana Komana, který byl před časem otištěn v našem časopise právě pod názvem *Matematika na šachovnici*. Pisatel článku v závěru doporučuje našim šachistům, aby si Komanův článek prostudovali.

Znovu se potvrzuje, že šachová hra má s matematikou mnoho společného.

J. S.

Přijímací pohovory na vysoké školy technického směru

Rychle se přiblížila doba, kdy mnozí z vás - milí čtenáři - budou pozváni k přijímacím pohovorům na vysokou školu. Letos poprvé je jejich termín tak časný, že předběhl o řadu měsíců i maturitu. To má pro vás své výhody i nevýhody. U maturity budete klidnější a většinou již budete vědět, jaká bude v nejbližší době další cesta vašeho života. Nevýhodou je, že půjdete k pohovoru dříve, než budou doplněny a uceleny vaše znalosti, což právě je jedním z hlavních úkolů maturitní zkoušky. Tím budou ovšem postíženy i předměty, které jsou předmětem přijímacích pohovorů.

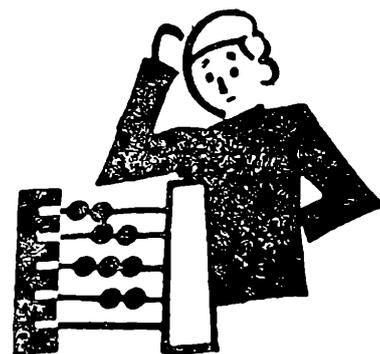
Velmi záleží na vašich učitelích a na vás, abyste přišli co nejlépe připraveni z toho, co předpisují učebné osnovy k probrání do doby, kdy budete pozváni k pohovoru. Pro vaši informaci o rozsahu látky proto otiskujeme na obálce tohoto a příštího čísla Rozhledů řadu příkladů, které byly loni dávány při přijímacích pohovorech z matematiky na stavební fakultě ČVUT v Praze.

M. M.

Matematika

Eugenie Sýkorová, PŠJ, Praha,
Inž. Jiří Klír, VÚMS, Praha:

Samočinné počítače



Tímto článkem navazujeme na několik předchozích článků o matematických strojích, které byly uveřejněny v minulých ročnících Rozhledů. Přehled těchto článků uvádíme v seznamu literatury pod čísly [1] až [4]. Doporučujeme, aby si čtenář uvedené články přečetl (pokud možno v uvedeném pořadí) dříve, než přistoupí ke čtení tohoto článku, neboť jsou v nich vysvětleny některé pojmy, kterých zde užíváme.

Co je samočinný počítač. S a m o č i n n ý m p o č í t a č e m se rozumí číslicový matematický stroj (viz článek [1], který samočinně provádí velké množství aritmetických nebo i jiných operací, při čemž samočinně manipuluje s čísly zobrazenými v číslicovém kódu (článek [1]). Manipulace s čísly a postupné provádění operací je přitom řízeno instrukční sítí (někdy nazývanou též programem), kterou je třeba předem sestavit a před spuštěním počítače ji do něho ve vhodné formě vložit, např. pomocí děrné pásky, děrných štítků, klávesnice, magnetické pásky apod. Pro moderní samočinné počítače je pak zvláště charakteristické, že mohou podle potřeby upravovat svůj pracovní postup, nebo dokonce vloženou instrukční síť i přetvářet.

Samočinné počítače jsou vlastně nejvyšším typem matematických strojů. Tím, že je možno do nich vkládat různé instrukční sítě, jsou to stroje univerzální. Jsou totiž schopny řešit v podstatě jakoukoliv úlohu, u níž známe takový algoritmus vedoucí k jejímu řešení (článek [1]), při kterém vystačíme s operacemi, jež daný počítač může provádět. Existují však též samočinné počítače, které mají instrukční síť pevně vestavěnou

a nelze ji proto vyměňovat. Takovým počítačům říkáme j e d n o ú č e-
l o v é.

Základní části samočinného počítače. Každý samočinný počítač se skládá z pěti základních částí, pro které se ujal tyto názvy:

1. p a m ě ť, 2. o p e r a č n í j e d n o t k a, 3. ř a d i č, 4. v s t u p,
5. v ý s t u p.

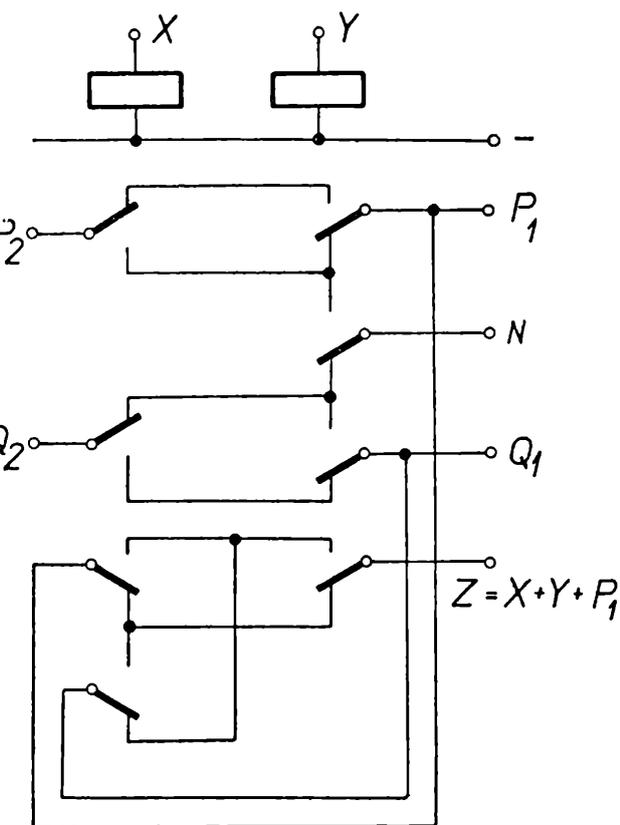
P a m ě ť í rozumíme zařízení, do kterého se vkládají čísla zobrazená číslicovým kódem a v potřebný okamžik se odtud opět vyjímají. Paměti mohou být založeny na nejrůznějších fyzikálních principech, jimiž se zde

však zabývat nebudeme; jejich vysvětlení věnujeme v budoucnu samostatný článek.

Paměť je obvykle rozdělena na jednotlivé části. Do každé z těchto částí je možno uložit jedno číslo. Ke každé části paměti je přiřazeno číslo, kterému se říká a d r e s a. Určité číslo zaznamenáváme tedy na jistou adresu nebo vyjímáme z jisté adresy.

Do paměti samočinného počítače se ukládá jednak instrukční síť a vstupní hodnoty (konstanty dané úlohy), jednak různé mezivýsledky a výsledky konečné. Od paměti se vyžaduje zejména vysoká spolehlivost, značná kapacita a velká rychlost při záznamu nebo vyjímání informací.

O p e r a č n í j e d n o t k a slouží k provádění jednoduchých aritmetických a logických operací s čísly zobrazenými v číslicovém kódu. Je



Obr. 1

tvořena logickými obvody, s jejichž problematikou jsme se seznámili v článcích [2] a [3]. Tak např. reléová sčítačka, která provádí součet v jednom řádu dvojkové číselné soustavy (viz článek [4]), je zapojena podle obr. 1. Signály o sčítaných číslicích procházejí vinutými relé X a Y . Přijde-li signál o jedničce, příslušné relé přitáhne a přeloží své kontakty z klidové polohy do polohy pracovní. Vodiče Q_1 a P_1 obstarávají přenos z nižšího řádu, vodiče Q_2 a P_2 přenos do vyššího řádu. Má-li jistý přenos být roven jedničce, je napětí na vodiči P . Je-li přenos roven 0, je napětí na příslušném vodiči Q . Svorka N je tzv. n a p a j e č, na němž je trvalé napětí. Na svorce Z je signál o výsledku součtu včetně přenosu z nižšího řádu.

Doporučujeme, aby si čtenář sám ověřil, že uvedené schéma splňuje tabulka

X	Y	Q_1	P_1	Z	Q_2	P_2
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1

Každý počítač má obvykle jednu základní operaci, na níž jsou převedeny operace ostatní. Typ operační jednotky závisí na zvolené základní operaci, na způsobech (algoritmech) převádění ostatních operací počítače na operaci základní a na tom, zda operace se provádějí postupně po jednotlivých řádech (takové počítače se nazývají sériové) nebo současně ve všech řádech (paralelní počítače).

Často bývá za základní operaci počítače zvoleno sčítání. Odčítání se v takovém případě může nahradit přičítáním devítkového nebo desítkového doplňku, násobení lze uskutečnit např. opakovaným přičítáním a dělení opakovaným odčítáním.

Ř a d i č je řízení, které přijímá z paměti *i n s t r u k c e*, tj. pokyny o provádění dílčích operací, a podle nich řídí činnost celého počítače. Jeho úkolem je převádět vhodná čísla z paměti do operační jednotky, řídit činnost operační jednotky, výsledky operací vkládat do vhodných míst paměti, rozhodovat o pořadí výběru instrukcí podle výsledku operací a ovládat vstup a výstup. Tyto úkoly plní řadič tím, že na základě informací obsažených v instrukční síti otvírá nebo zavírá v různých dobách různé signální cesty, např. mezi operační jednotkou a pamětí, dále uvnitř operační jednotky, mezi pamětí a výstupem apod. Jeho orgány jsou proto rozprostřeny prakticky po celém počítači.

Úkolem *v s t u p u* je přijmout informace v jisté podobě a přeměnit je tak, aby počítač byl schopen s nimi manipulovat. V přeměněné podobě ukládá pak vstup informace do paměti počítače.

Vstupy mohou být různých druhů. Mezi starší druhy patří vstupy pomocí tlačítek, klávesnic, děrných štítků, děrných pásek a magnetofonových pásek. Mezi moderní druhy vstupů patří zařízení pro přímé čtení tištěného nebo psaného textu nebo zařízení pro přijímání mluvených zpráv.

Úkolem *v ý s t u p u* je převést výsledky do takového tvaru, aby byl srozumitelný člověku. Podobně jako vstupy, jsou i výstupy různých

druhů. U moderních počítačů se obvykle dává přednost přímému tisku. Používá se buď automatických psacích strojů nebo různých speciálních rychlotiskáren, které provádějí tisk současně po celých řádkách. V mnoha případech se výsledky zobrazují na stínítka zvláštních obrazovek a odtud se snímají fotograficky. Některé počítače (např. čs. samočinný počítač SAPO) užívají jako doplněk též světelné tablo, ze kterého lze výsledky opisovat.

Instrukční síť je úplná logicky sklouberá soustava instrukcí, podle níž lze rozřešit danou úlohu. Základním elementem instrukční sítě je *i n s t r u k c e*, to je povel k provedení jedné dílčí operace. Úplná instrukce obsahuje pět základních informací:

1. odkud (z které adresy paměti) se má vyjmout první číslo, s nímž se má operovat,
2. odkud (z které adresy paměti) se má vyjmout druhé číslo, s nímž se má operovat,
3. co (jaká operace) se má s připravenými čísly provést,
4. kam (na kterou adresu paměti) se má uložit výsledek provedené operace,
5. odkud (z které adresy paměti) se má vyjmout následující instrukce.

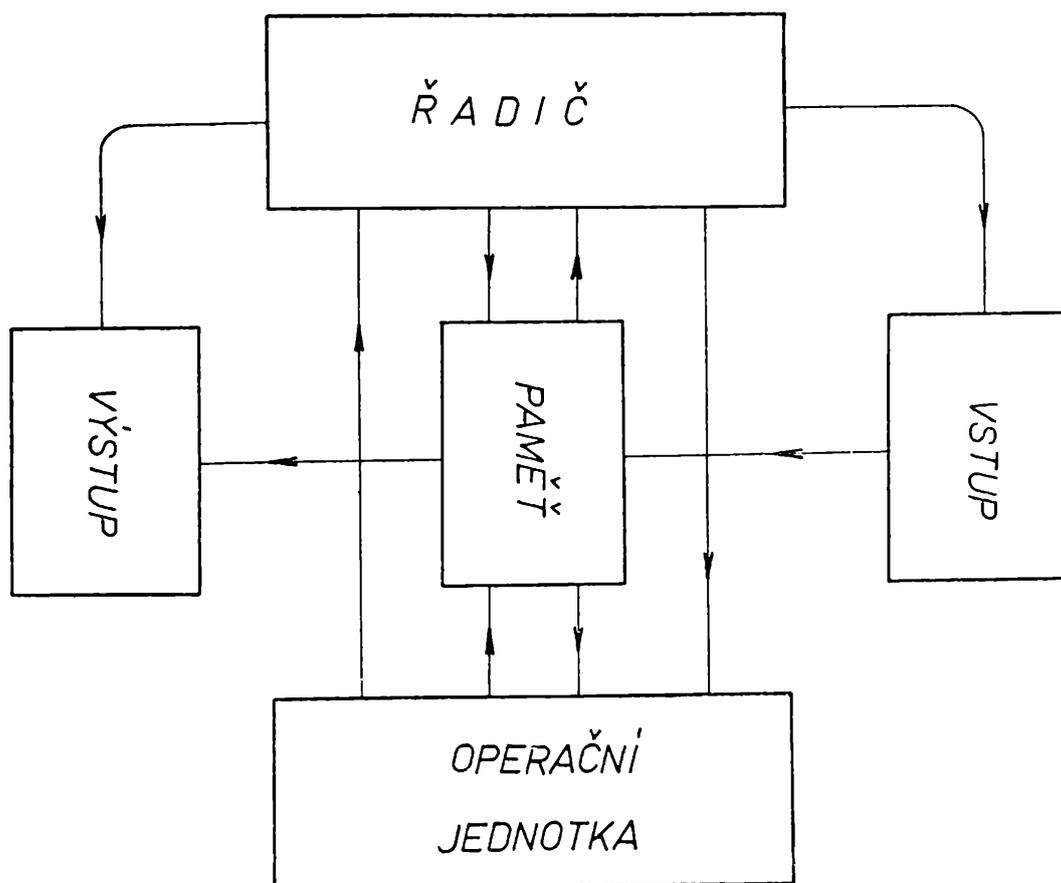
Uvedené informace jsou zobrazeny číslicovým kódem stejně jako informace o číslech. Proto lze s instrukcemi provádět stejné operace jako s obyčejnými čísly a tím *i n s t r u k c e* podle potřeby během výpočtu přetvářet.

Většina počítačů však užívá instrukce neúplné, tj. takové, v nichž nejsou obsaženy některé ze základních pěti uvedených informací. Úplná instrukce se pak vytvoří z několika instrukcí neúplných.

Podle úplnosti instrukcí se samočinné počítače dělí na *j e d n o a d r e s o v é* až *p ě t i a d r e s o v é*. Názvy jsou odvozeny od toho, kolik informací o adresách je obsaženo v jednotlivých instrukcích. Tak např. jednoadresový počítač pracuje podle instrukcí, v nichž je obsažena informace pouze o jediné adrese. Proto je u jednoadresového počítače zapotřebí např. pro součet dvou čísel celkem tři instrukcí: odkud vyjmout první číslo, odkud druhé a kam uložit výsledek. Rozhodování o výběru další instrukce se pak u jednoadresového počítače provádí pomocí tzv. *i n s t r u k c e p o d m í n ě n ě h o p ř e c h o d u*. Pokud řadič nedojde k této instrukci, provádí výběr instrukcí bez rozhodování, tj. vždy z adresy o jednotku vyšší. Jakmile však dojde k instrukci podmíněného přechodu, zvolí výběr další instrukce podle toho, zda výsledek předchozí operace splňuje nebo nesplňuje určitý požadavek (např. požadavek, aby výsledek byl záporný apod.). Není-li požadavku vyhověno, pokračuje se instrukcí uloženou opět na adrese o jednotku vyšší. Je-li však požadavek splněn, pokračuje se instrukcí uloženou na adrese dané v instrukci podmíněného přechodu.

Sestavení instrukcí sítě zabere nejvíce času při řešení úlohy na samočinném počítači. Vlastní výpočet bývá proveden velmi rychle díky značným rychlostem moderního počítačů. Je třeba vybrat takovou metodu pro řešení daného problému, kterou lze rozvést do posloupnosti základních aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení), popřípadě i jiných jednoduchých operací, které může daný počítač provádět.

Instrukční sítě, sestavené pro určitou úlohu, lze ovšem kdykoliv použít znovu. Proto se již použité instrukční sítě ukládají ve vhodné podobě - např. pomocí děrných štítků - do archivu pro případné další použití. Má-li počítač v zásobě dostatečné množství instrukčních sítí, je jeho užívání velmi pohotové a časové úspory jsou značné.



Obr. 2

Obtížnost programování a složitost instrukčních sítí závisí na počtu a druhu operací, které může daný počítač provádět. Čím více operací může počítač provádět, tím je programování snadnější a instrukční sítě jsou jednodušší. Vzrůstá však složitost počítače a tím i výrobní cena. Proto je snahou konstruktérů samočinných počítačů nalézt vhodný kompromis mezi oběma hledisky.

Spolupráce základních částí počítače. Vzájemné vazby mezi základními částmi samočinného počítače jsou znázorněny na obr. 2. Postup při výpočtu na počítači, který užívá úplných instrukcí, je následující: Po spuštění počítače vybere řadič nejprve z paměti první instrukci. Na zá-

kladě informací obsažených v této instrukci vybere z příslušných adres paměti čísla a vloží je do operační jednotky. Současně působí na operační jednotku, aby provedla operaci vyžadovanou danou instrukcí. Po provedení operace zavede řadič výsledek na požadovanou adresu paměti a současně přijme od operační jednotky informaci o znaménku výsledku nebo o jiném údaji. Podle znaménka (popř. jiného údaje) vybere pak řadič z paměti další instrukci, a to z jedné ze dvou možných adres. Celý postup se pak znovu opakuje.

Jak jsme si všimli, může se samočinný počítač po skončení každé operace rozhodovat o dalším postupu podle toho, zda výsledek předchozí operace byl kladný nebo záporný, popř. podle jiného hlediska. Tato vlastnost, charakteristická pro moderní samočinné počítače je velmi výhodná v tom smyslu, že počítač si může přizpůsobit svůj postup tak, aby co nejúčelněji postupoval při řešení dané úlohy.

Protože instrukce jsou vyjádřeny čísly, je možno s nimi provádět tytéž početní úkony, které je možno provádět s čísly vůbec. Tím je možno instrukce - a tak i celou instrukční síť - podle potřeby přetvářet. Také to je velmi výhodná vlastnost, která umožňuje podstatně zjednodušit instrukční síť a tím velmi usnadnit programování.

Instrukční síť nelze sestavovat obecně pro libovolný počítač. Vždy je třeba vyjít z toho, jaké operace může počítač provádět. Proto instrukční síť sestavené pro jistý počítač se nedají bezprostředně použít pro počítač jiný. Ze snahy po sjednocení programování byla však vytvořena tzv. *m e z i n á r o d n í a l g o r i t m i c k á ř e č* ALGOL. Sestaví-li se instrukční síť v této řeči ALGOL, je možno ji velmi jednoduše převádět do instrukčních sítí jednotlivých počítačů. Je to záležitost pouze mechanická a není k tomu zapotřebí vysoce kvalifikované osoby.

Užití samočinných počítačů. V současné době je užití samočinných počítačů nejrozsáhlejší ve třech oblastech:

1. ve vědeckotechnických výpočtech,
2. ve zpracovávání administrativních údajů,
3. v automatizaci průmyslu.

Potřeba provádění rozsáhlých vědeckotechnických výpočtů, které nelze obvyklými prostředky zvládnout nebo které musí být rychle provedeny (např. výpočty spojené s předpovědí počasí), dala v podstatě hlavní popud ke stavbě prvních samočinných počítačů. Ty se znamenitě osvědčily, i když ve srovnání se současnými moderními počítači byly velmi pomalé. Na samočinných počítačích bylo vyřešeno již mnoho vědeckých problémů, pro které existovaly dříve jen hypotézy, neboť pro jejich složitost nebylo možno obvyklými prostředky řešení provést. Různé technické soustavy mohly být pomocí samočinných počítačů řešeny s přihlédnutím ke všem parametrům, zatímco dříve se mnohé parametry pro zjednodušení výpočtů zanedbávaly. Tím vším přispěly samočinné počítače neobyčejně k rozvoji vědy a techniky.

Rozsáhlé zpracovávání administrativních údajů je nezbytné v mnoha hospodářských odvětvích, např. v peněžnictví, v obchodě, v hospodářském plánování a jinde. Samočinné počítače nahrazují a zkvalitňují práci mnoha pracovníků a představují tak značné úspory. Ještě větších úspor je možno dosáhnout zapojením samočinných počítačů do průmyslové výroby, kde řídí různé pochody podle vložených instrukčních sítí a podle informací přijímaných od měřicích přístrojů. Velmi důležité je zejména jejich užití v průmyslu radioaktivních látek, v jaderné energetice a všude tam, kde jde o prostředí škodlivé lidskému zdraví.

Užití samočinných počítačů není však zdaleka omezeno na uvedené tři oblasti. Protože kromě aritmetických operací mohou vykonávat též různé operace logické, je možno jich užít i v oborech zcela nematematických. Pro ilustraci uveďme jen některé z těchto oborů. Je to např. překládání z jednoho jazyka do jiného, řízení letadel a jiných dopravních prostředků, strojové provádění lékařských diagnóz, strojové hraní šachů a jiných her, skládání hudby nebo psaní literárních prací a mnohá jiná užití.

Závěr. Tradice samočinných počítačů je jen o málo delší než dvacetiletá, neboť první z nich byly dokončeny za druhé světové války. Za tuto poměrně krátkou dobu ovlivnily samočinné počítače silně vývoj vědy a techniky a též samy prodělaly obrovský rozvoj. Stavba prvních počítačů trvala mnoho let a každý počítač byl vyroben jen v jediném exempláři, zatímco dnes je celá řada počítačů vyráběna sériově. První počítače byly určeny pro složité vědeckotechnické výpočty. Dnes zasahují samočinné počítače i do takových oborů, kde o žádné výpočty nejde.

Vývoj samočinných počítačů je v současné době zaměřen zejména na zvyšování rychlosti, snižování objemu, zvyšování kapacit pamětí a zdokonalování vstupů a výstupů.

Literatura

- [1] Klír J., *Matematické stroje*. Rozhledy mat.-fyz., 1959/60, č. 1.
- [2] Klír J., *Booleova algebra*. Rozhledy mat.-fyz., 1960/61, č. 2 a 3.
- [3] Klír J., *Logické obvody*. Rozhledy mat.-fyz., 1962/63, č. 1.
- [4] Klír J., *Číselné soustavy*. Rozhledy mat.-fyz., 1960/61, č. 1.
- [5] Klír J., Čapla V., *Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války*. Rozhledy mat.-fyz., 1959/60, č. 4, 5 a 6.
- [6] Riss J., *Analogové matematické stroje*. Rozhledy mat.-fyz., 1959/60, č. 6.

O určitém vztahu u obecného trojúhelníka

Na 81. straně ve 24. ročníku Rozhledů matematicko-přírodovědeckých uvedl inž. Josef Langr zajímavý vztah u obecného trojúhelníka. Sestrojíme-li totiž nad jednotlivými stranami obecného trojúhelníka ABC rovnoramenné trojúhelníky tak, že strany AB , BC , CA jsou základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků, jichž ramena svírají vždy úhel 120° , pak vrcholy vzniklých rovnoramenných trojúhelníků D , E a F tvoří rovnostranný trojúhelník DEF . Viz obr. 1.

Tento vztah se dá dokázat několika způsoby, z nichž zde podám způsob, ke kterému stačí vědomosti ze střední školy.

Nechť $\triangle ABC$ je dán stranami a , b , c . Jeho úhly α , β , γ si vyjádříme stranami použitím kosinové věty:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\end{aligned}\tag{1}$$

Ramena jednotlivých rovnoramenných trojúhelníků, sestavených postupně nad stranami a , b , c trojúhelníka ABC , označme d , e , f . V každém z těchto rovnoramenných trojúhelníků známe základnu (postupně a nebo b nebo c) a všechny úhly (30° , 30° , 120°). K vypočtení ramen použijeme sinové věty, např.

$$d : a = \sin 30^\circ : \sin 120^\circ,$$

z čehož obdržíme

$$d = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

a obdobně

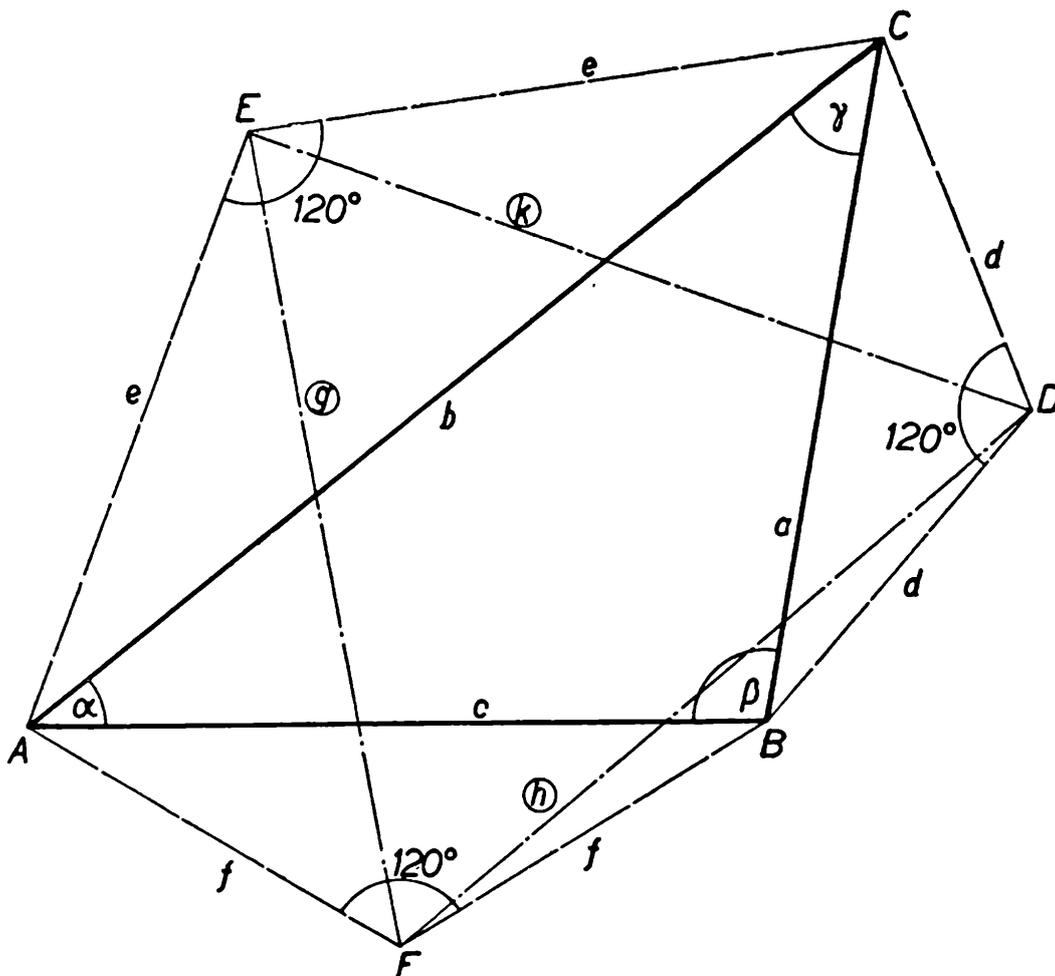
$$e = \frac{b}{3} \sqrt{3}\tag{2}$$

$$f = \frac{c}{3} \sqrt{3}$$

Označme strany $\triangle DEF$ písmeny g, h, k . Stranu g vyčíslíme z $\triangle AEF$, v němž známe strany e, f a úhel jimi sevřený $(\alpha + 60^\circ)$. Z kosinové věty dostaneme

$$g^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos(\alpha + 60^\circ). \quad (3)$$

V této rovnici rozvedeme $\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos \alpha \cdot \cos 60^\circ - \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ$ a nahradíme $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Z rovnice (1) dosadíme pak za $\cos \alpha$ příslušný výraz. Dostaneme



Obr. 1

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}}, \end{aligned}$$

což můžeme psát ve tvaru

$$\sin \alpha = \frac{1}{2bc} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Dosadíme-li za $a + b + c = 2s$,
obdržíme

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Podle Heronova vzorce obsah trojúhelníka je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a je možno proto psát

$$\sin \alpha = \frac{2P}{bc} \text{ a obdobně } \sin \beta = \frac{2P}{ac}, \sin \gamma = \frac{2P}{ab} \quad (4)$$

Dále

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 60^\circ) &= \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 4P\sqrt{3}}{4bc} \end{aligned}$$

Obdobně

$$\begin{aligned} \cos(\beta + 60^\circ) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 4P\sqrt{3}}{4ac}, \\ \cos(\gamma + 60^\circ) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 4P\sqrt{3}}{4ab}. \end{aligned} \quad (5)$$

Do rovnice (3) dosadíme nyní vypočtené hodnoty (2), (4) a (5):

$$g^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3} P\sqrt{3}.$$

Podobně pak obdržíme

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3} P\sqrt{3}, \\ k^2 &= \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3} P\sqrt{3} \end{aligned} \quad (6)$$

z čehož plyne

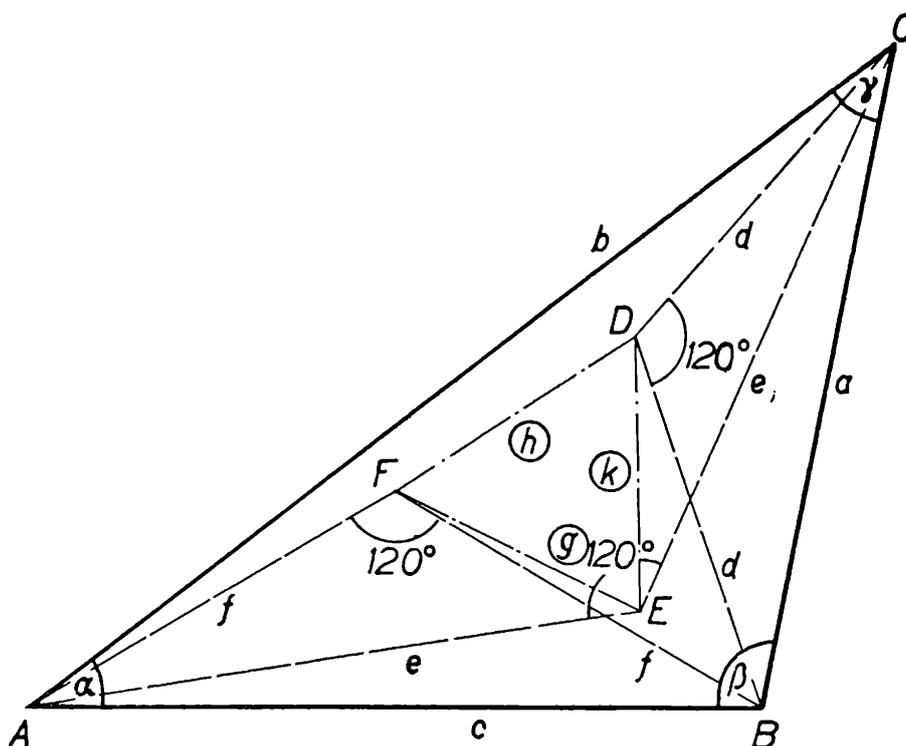
$$g^2 = h^2 = k^2, \text{ resp. } g = h = k.$$

Je tedy $\triangle DEF$ rovnostranný.

To jsme uvažovali případ, že rovnoramenné trojúhelníky nad stranami obecného $\triangle ABC$ sestrojujeme vně. Pro případ, že tyto rovnoramenné trojúhelníky sestrojujeme dovnitř (obr. 2), rovnice (1) a (2) se nijak nezmění. Protože však úhly sevřené stranami d a e , e a f , f a d se mění, dostaneme rovnici (3) ve tvaru

$$g^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cdot \cos(\alpha - 60^\circ)$$

a rovnice (6) pak budou znít



Obr. 2

$$g^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} P\sqrt{3},$$

$$h^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} P\sqrt{3},$$

$$k^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} P\sqrt{3},$$

z čehož plyne, že opět $g^2 = h^2 = k^2$, resp. $g = h = k$, takže i v tomto případě je $\triangle DEF$ rovnostranný.

Použití grafických papírů k znázornění některých funkcí

(Dokončení)

II. část

Sledujeme-li pozorně průběh exponenciální funkce, jistě si povšimneme zajímavosti, kterou vyjadřuje následující tabulka

$y = 3^x$	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
	$\log y$	-1,4314 $-3 \log 3$	-0,9542 $-2 \log 3$	-0,4771 $-1 \log 3$	0	0,4771 $1 \log 3$	0,9542 $2 \log 3$	1,4314 $3 \log 3$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
	$\log y$	0,9031 $3 \log 2$	0,6021 $2 \log 2$	0,3010 $1 \log 2$	0	-0,3010 $-1 \log 2$	-0,6021 $-2 \log 2$	-0,9031 $-3 \log 2$

Z tabulky je patrné, že rovnoměrnému růstu hodnoty x odpovídá sice nerovnoměrný růst resp. pokles hodnoty y , ale rovnoměrný růst nebo pokles hodnoty $\log y$. Můžeme se tedy domnívat, že zavedení nerovnoměrné stupnice na osu η a ponechání rovnoměrné stupnice na ose ξ bude mít za následek jakési „napřímení“ - říkáme anamorfosu grafu exponenciální funkce. Tím budou totiž právě rychleji rostoucí funkční hodnoty redukovány. Vhodnou síť pro znázornění exponenciální funkce sestrojíme tedy tak, že na osu ξ nanese rovnoměrnou stupnici o vhodném modulu a na osu η funkční stupnici logaritmickou. Podobně jako logaritmický papír, vyrábí se i papír usnadňující konstrukci takovéto sítě. Nazývá se *semilogaritmický*. Modul u obou druhů papíru bývá obvykle 90 mm pro logaritmickou stupnici a rovnoměrná stupnice je provedena v milimetrech.

Všimněme si trochu podrobněji *semilogaritmické sítě*. Počátek bude nyní označen kótami (0; 1). Zobrazovací rovnice budou

v případě, že rovnoměrná stupnice má modul roven jedné, mít tvar

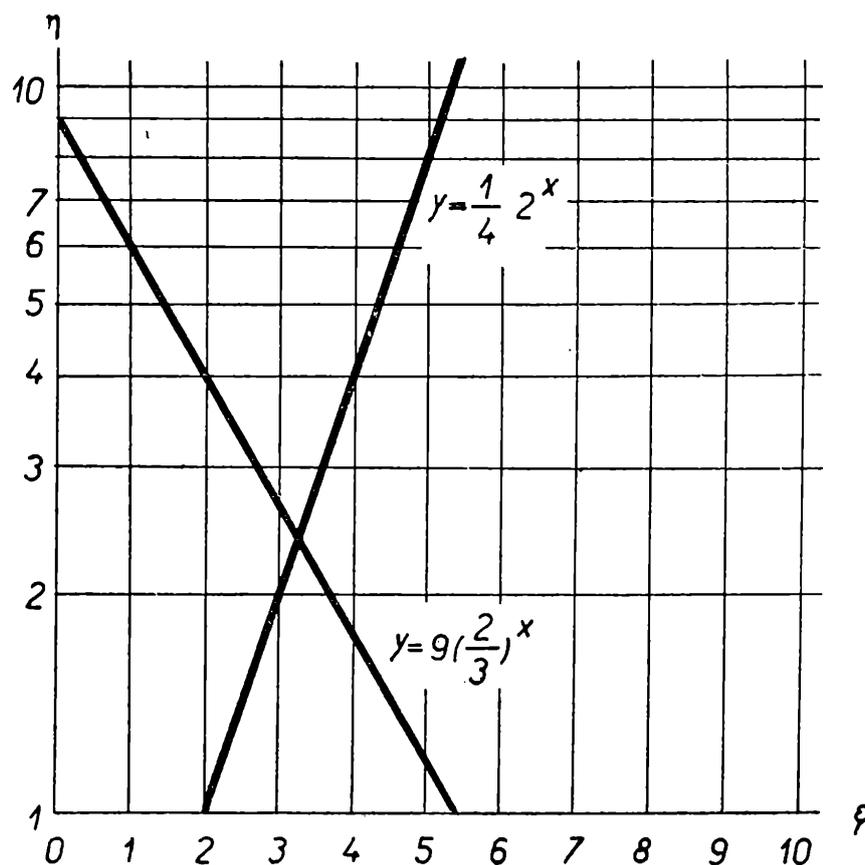
$$\xi = x \quad (7)$$

$$\eta = \mu \cdot \log y \quad (8)$$

Aby byly naše úvahy přesné, dokážeme si nejprve následující větu:
V ě t a. *Grafem funkce*

$$y = C \cdot a^x, \quad (9)$$

kde C a a jsou kladná čísla reálná a x libovolné reálné číslo, je v semilogaritmické síti přímka. Tato přímka prochází počátkem jen tehdy, je-li $C = 1$.



Obr. 3

D ů k a z: Předpoklady věty nám umožňují dosadit y do vztahu (8) a po úpravě dostaneme

$$\eta = \mu \cdot \log C + \mu \cdot x \cdot \log a .$$

Označme

$$\mu \cdot \log C = q \quad \mu \cdot \log a = k$$

Pak naše rovnice nabývá tvaru

$$\eta = k \cdot x + q$$

Užijeme-li ještě vztahu (7), dostáváme

$$\eta = k \cdot \xi + q$$

a to je početní vyjádření přímky. Aby tato přímka procházela počátkem, musí platit $q = 0$, tzn. $C = 1$.

Příklad 4. Sestrojte graf funkce $y = \frac{1}{4} 2^x$ v semilogaritmické síti.

Řešení: Podle právě dokázané věty již víme, že grafem této funkce bude přímka, která neprochází počátkem. Stačí tedy najít dvě dvojice vyhovujících hodnot (x, y) a ty zaneš jako kóty do sítě. Jsou to například čísla $(3; 2)$ a $(4; 4)$ (obr. 3).

Poznámka: Na rozdíl od logaritmické sítě, kde obě osy byly označovány pouze kladnými kótami vzhledem k přípustným hodnotám logaritmické funkce, budou na ose ξ v semilogaritmické síti i záporná čísla. Záporná část osy η bude však opět označována pouze kladnými čísly menšími než 1. Například bod souměrně sdružený k bodu $(0; 10)$ podle počátku bude označen kótami $(0; 10^{-1})$, ale bod souměrně sdružený podle počátku k bodu $(10; 0)$ bude označen $(-10; 0)$. Graf funkce $y = \frac{1}{4} 2^x$ bude tedy ve 4. kvadrantu procházet bodem $(1; \frac{1}{2})$, dále bodem $(0; \frac{1}{4})$ a ve 3. kvadrantu bodem $(-1; \frac{1}{8})$.

Podobně jako v první části článku pokusíme se i teď odpovědět na otázku, zda také každá přímka narýsovaná v semilogaritmické síti představuje jistou exponenciální funkci a jak můžeme takovou funkci určit. Nechť tedy nějaká daná přímka má početní vyjádření

$$\eta = k \cdot \xi + q \quad (10)$$

Hodnoty η můžeme pokládat za logaritmy jiných hodnot proměnné y a toto přiřazení je zřejmě jednoznačné. Čísla k a q pak můžeme chápat jako

$$k = \log a \quad q = \log C$$

Jde v podstatě o „delogarithmování“ čísel k a q . Tím rovnice (10) nabude tvaru

$$\log y = x \cdot \log a + \log C \quad (11)$$

když za ξ píšeme prostě x ve shodě se vztahem (7). Rovnice (11) však vyjadřuje totéž, co rovnice (9). Znázorňuje tedy každá přímka v semilogaritmické síti jistou exponenciální funkci.

Příklad 5. Je dána přímka v semilogaritmické síti. Víme, že prochází body $(2; 4)$ a $(1; 6)$ (obr. 3). Najděte tvar funkce, kterou vyjadřuje!

Řešení. Hledaná funkce má jistě tvar (9) a tedy vzhledem k daným podmínkám musí platit

$$4 = C \cdot a^2 \quad 6 = C \cdot a$$

Ze druhého vztahu zřejmě plyne $C = 6 : a$ a dosazeno do prvního dává $4 = 6 \cdot a$. Tedy $a = \frac{2}{3}$ a $C = 9$. Hledaná funkce má tedy tvar $y = 9 \cdot (\frac{2}{3})^x$.

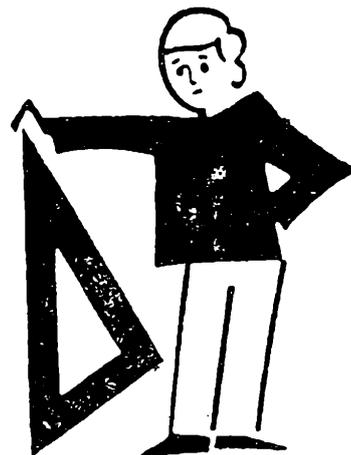
Semilogaritmické sítě však můžeme použít i k znázornění jiných funkcí. Čtenáři je jistě známo, že graf funkce $y = \log_a x$ vznikne z grafu funkce $y = a^x$ překlopením kolem osy 1. a 3. kvadrantu. To tedy znamená, že semilogaritmické sítě můžeme použít i pro znázornění funkce logaritmické sítě, jestliže vyměníme stupnice na osách. Analogicky bychom dokázali, že grafem logaritmické funkce v takové síti je přímka a naopak přímka představuje funkci logaritmickou tak, jak jsme to prováděli v

předchozí části článku. Vzhledem k tomu, že funkce uvedených typů se v technické praxi zvláště často vyskytují, jsou *g r a f i c k é p a p í r y* - jak se souhrnně říká uvedeným papírům i papírům podobným - významným ulehčením i příspěvkem k zpřesnění práce.

Deskriptivní geometrie

Doc. Josef Holubář, Praha:

Některé geometrické vlastnosti granátotvaru



Dvanáctistěn kosočtverečný (rombický dodekaedr), známý v krystalografii pod názvem *g r a n á t o t v a r*, je mnohostěn, jehož stěny jsou shodné kosočtverce. Osm z jeho vrcholů tvoří osm vrcholů pravidelných shodných trojhranů a zbývajících šest jsou vrcholy pravidelných shodných čtyřhranů. Granátotvar má 24 shodných hran. V krystalografii se odvozuje z pravidelného osmistěnu, který je základním tvarem krystalografické soustavy krychlové, nebo z krychle, která patří do téže krystalografické soustavy. Na obr. 1 je reprodukována fotografie dvou krystalů českého granátu, které mají tvar granátotvaru a kombinace granátotvaru se čtyřřadvacetistěnem.¹⁾

1. Odvození granátotvaru z krychle. Sestrojíme vně krychle nad jejími stěnami shodné čtyřboké pravidelné jehlany o výšce v . Označíme-li a velikost hrany krychle, potom:

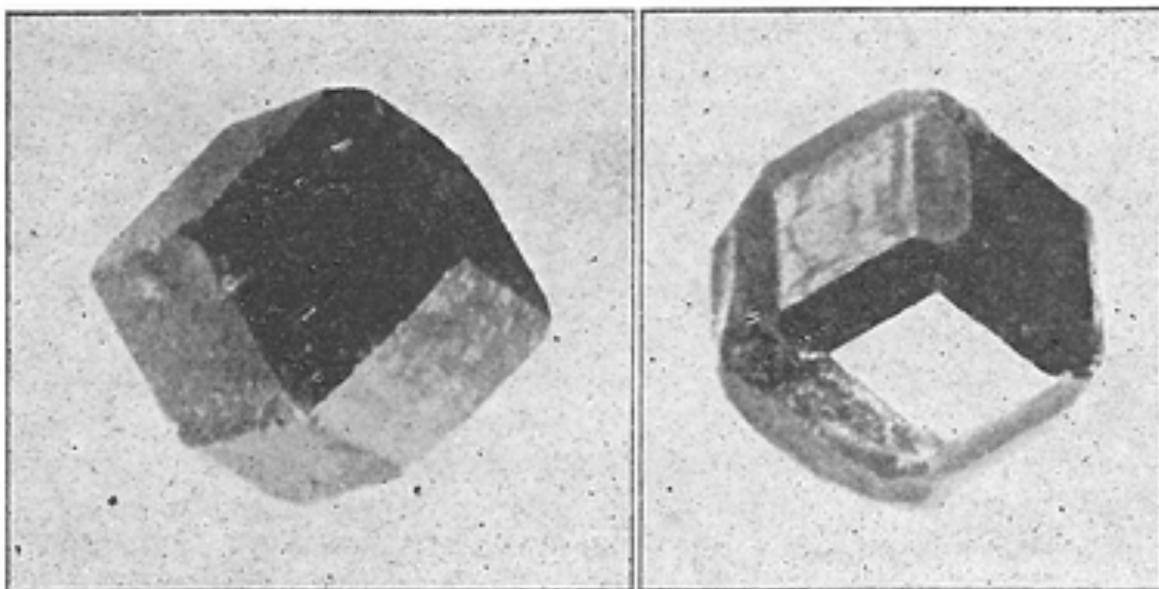
a) Je-li $v < \frac{1}{2} a$, vznikne z krychle s připojenými šesti zmíněnými jehlany mnohostěn omezený 24 shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Je to čtyřřadvacetistěn *k o n v e x n í*, neboť každá z rovin (hraničních), které jsou určeny jeho stěnami, má s mnohostěnem společnou

¹⁾ Pro koordinaci geometrie s mineralogií odkazujeme čtenáře např. na knihu: V. R o s i c k ý, *K r y s t a l o g r a f i e*, Praha 1929. Nákladem České akademie věd a umění.

jen příslušnou stěnu a celý mnohostěn leží v jediném poloprostoru (tzv. opěrném), vyřazeném touto hraniční rovinou.

b) Je-li $v > \frac{1}{2}a$, vznikne z krychle s připojenými šesti jehlany čtyřicetistěn *n e k o n v e x n í*, neboť zřejmě neleží celý v jediném poloprostoru vyřazeném rovinou kterékoliv stěny.

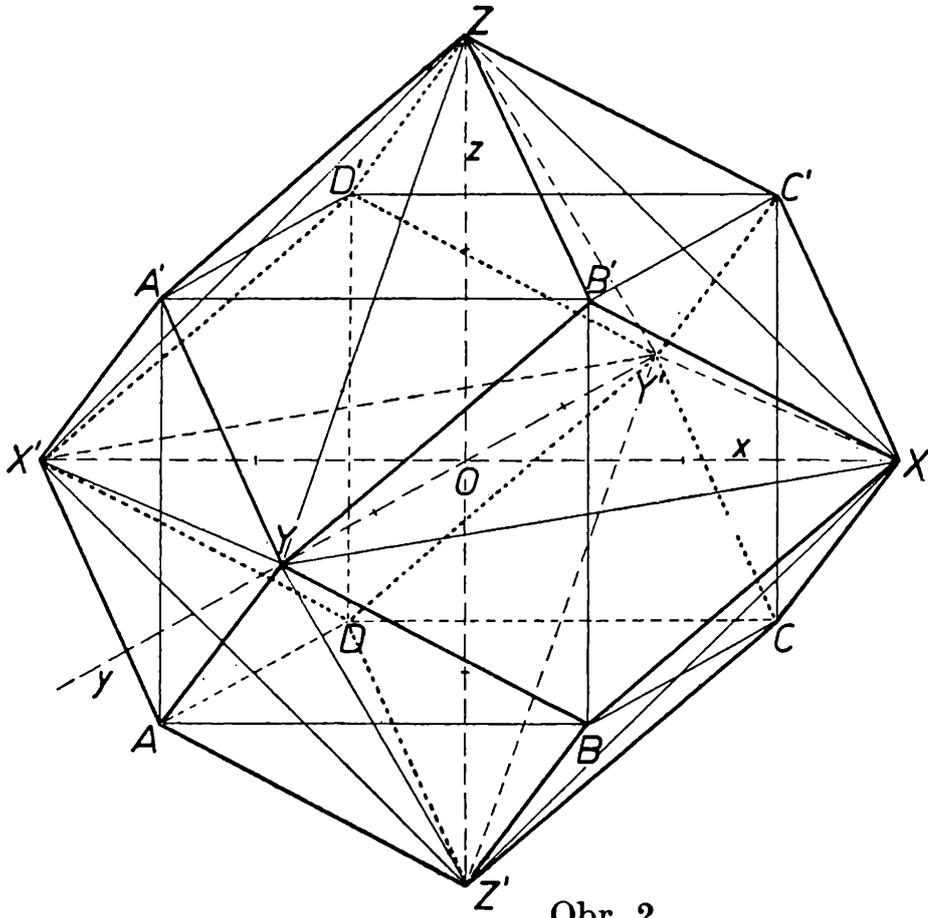
c) Je-li $v = \frac{1}{2}a$, pak vždy dvě hraniční roviny určené stěnami dvou jehlanů, a to stěnami, které obsahují touž hranu krychle, splývají.



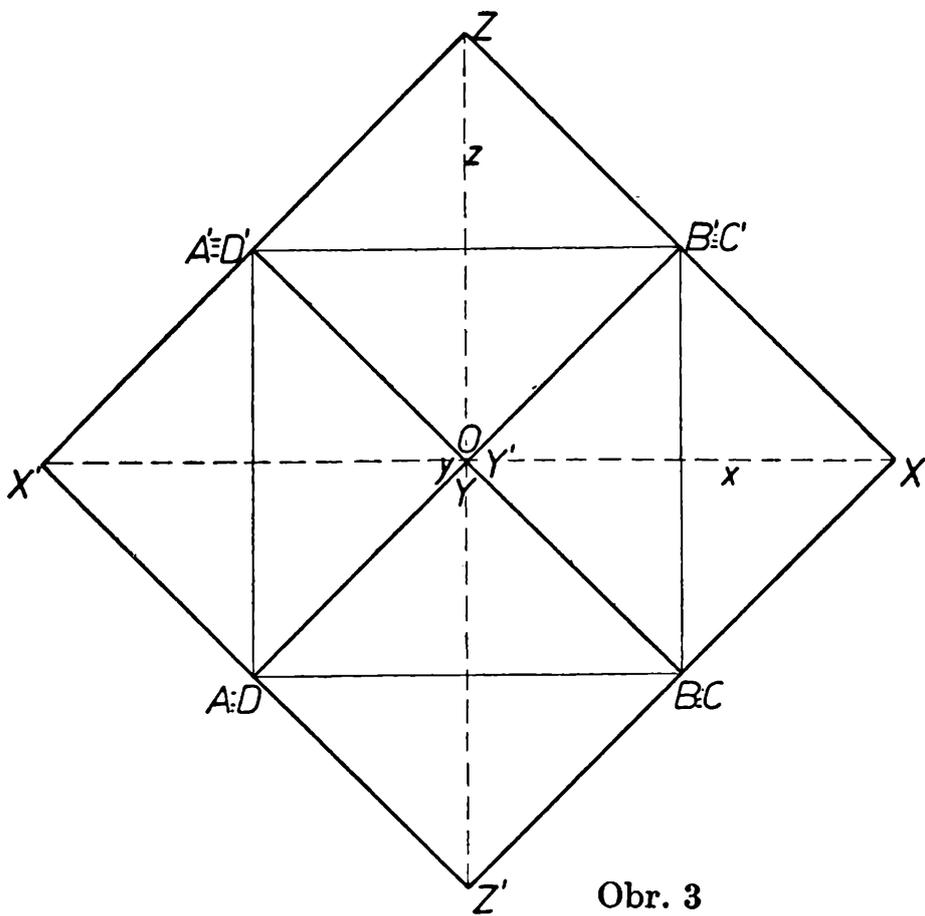
Obr. 1

Každá z nich svírá totiž s rovinou příslušné stěny krychle 45° ; je kolmá na rovinu úhlopříčného řezu krychle, a to na tu, která prochází touž hranou krychle. Z trojúhelníkových stěn jehlanů (viz na obr. 2 a 3, např. trojúhelníky $B'C'Z$, $B'C'X$) vznikne vždy na mnohostěnu stěna tvaru kosočtverce (v našem případě stěna $B'XC'Z$, protože platí, že $\triangle B'C'Z \cong \triangle B'C'X$ apod.). Dostaneme tak konvexní dvanáctistěn kosočtverečný, tj. *g r a n á t o t v a r*.

Granátotvar se tedy jeví jako společná část dvanácti opěrných poloprostorů, které jsou určeny dvanácti hraničními rovinami, jež procházejí po řadě vždy hranou dané krychle $ABCD A'B'C'D'$, a které jsou kolmé k rovinám úhlopříčných řezů krychle, např. je rovina $(B'ZC'X) \perp \perp (B'C'DA)$ apod. Přitom střed krychle náleží všem dvanácti uvažovaným poloprostorům. Bylo by možno granátotvar definovat i takto a z této definice pak odvodit jeho geometrické vlastnosti.



Obr. 2



Obr. 3

Granátotvar, který jsme vyloženým způsobem odvodili z krychle $ABCD A'B'C'D'$, je znázorněn na obr. 2 v kosoúhlé projekci ($\omega = 150^\circ$, $q = \frac{1}{2}$, kde osový kříž (O, x, y, z) je dán krystalografickými osami x, y, z dané krychle.²⁾ Na obr. 3 je sestrojen nárys téhož granátotvaru. Mohl by to být při jiném označení vrcholů současně také jeho půdorys i bokorys. Nárysem osmi kosočtverečných stěn granátotvaru jsou tu shodné čtverce a zbývající čtyři stěny granátotvaru se tu zobrazují v shodné úsečky.

Poznámka. Obrazy útvarů jsou na obr. 2, 3 zapsány bez indexů.

Obr. 3 dobře poslouží hned k důkazu základních vlastností našeho mnohostěnu, které vyplývají z jeho odvození:

a) Ze vzájemné polohy dvanácti hraničních rovin vyplývá souměrnost granátotvaru jednak podle tří rovin (xy) , (yz) , (zx) , jednak podle dalších šesti rovin úhlopříčných řezů krychle, které obsahují pořadě dvojice jejich protilehlých hran. Jak víme, jsou tyto roviny v příslušných dvojicích k sobě kolmé. Je celkem devět rovin souměrnosti granátotvaru a společný jejich bod O je jeho středem souměrnosti.

b) Společné body vždy čtyř hraničních rovin, které dávají vznik čtyřbokému jehlanu nad každou stěnou výchozí krychle, tvoří šest vrcholů granátotvaru. Jsou to body X, X' na ose x , Y, Y' na ose y a Z, Z' na ose z (obr. 2 a 3). Vrcholy $A, B, C, D, A', B', C', D'$ krychle jsou pořadě společné body vždy tří hraničních rovin dříve popsaných. Je tedy celkem 14 vrcholů granátotvaru.

c) Snadno se dokáže, že lze granátotvaru vepsat kulovou plochu, která se dotýká stěn granátotvaru v jejich středech. Je to kulová plocha, která se dotýká všech hran výchozí krychle. Dále lze také sestrojiti kulovou plochu, která se dotýká všech hran granátotvaru. Tyto kulové plochy jsou soustředné a mají střed O ve středu granátotvaru.

2. Úhlopříčky stěn granátotvaru, které mají své krajní body pořadě X, X' ; Y, Y' ; Z, Z' , tvoří hrany pravidelného osmistěnu do granátotvaru vepsaného. Také tohoto osmistěnu lze použít jako výchozího mnohostěnu k odvození granátotvaru, jak jsme se už zmínili v úvodu v souvislosti s krystalografií.

Hraniční roviny použité v odst. 1 jsou zde určeny pořadě hranami osmistěnu, jsou kolmé vždy na rovinu osového řezu osmistěnu a tvoří se sousedními stěnami osmistěnu, které se v příslušných hranách osmistěnu sbíhají, stejné odchylky. Vně osmistěnu dávají nad jeho stěnami

²⁾ Pokud je zde použito některých termínů užívaných jen v krystalografii, najde čtenář vysvětlení souvislostí s terminologií obvyklou v geometrii v autorově článku *Některé geometrické vlastnosti klenec*. Viz časopis *Matematika ve škole*, roč. IX, 1959, č. 5, str. 264–277.

vznik osmi pravidelným trojbokým jehlanům s hlavními vrcholy $A, B, C, D, A', B', C', D'$, jak je názorně vidět na obr. 3. Toto odvození granátotvaru nemusíme zde už podrobněji popisovat.

3. Připomeňme ještě některé v ý p o č t y, jejichž snadné odvození ponecháváme čtenáři a uvedeme jenom výsledky.

Je-li a velikost hrany krychle, z níž jsme granátotvar odvodili, potom platí:

a) Velikost h hran granátotvaru - např. na obr. 2 a 3 hranu $B'Z$ je

$$h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$$

Velikost u delších stěnových úhlopříček - např. úsečku XZ - je

$$u = a \sqrt{2}$$

kratší stěnové úhlopříčky (např. $B'C'$) mají velikost a . Tělesové úhlopříčky mají velikost $2a$, resp. $a \sqrt{3}$

b) Poloměr kulové plochy vepsané granátotvaru je

$$\rho = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

poloměr kulové plochy, která se dotýká hran tělesa, je

$$\rho' = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$$

c) Úhly trojhranů a čtyřhranů, které v nich tvoří roviny sousedních stěn granátotvaru, mají velikost

$$\varphi = 120^\circ$$

d) Objem granátotvaru je $V = 2a^3$, povrch $S = 6a^2\sqrt{2}$

* * *

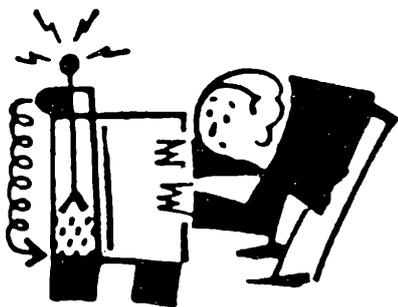
Matematická olympiáda

Sdělujeme, že soutěž 2. kola MO v kategoriích A, B, C se koná v neděli 7. dubna t. r., v kategorii D v neděli 21. dubna t. r.

Soutěž 3. kola se koná v sobotu 25. května t. r. patrně v Brně.

R. Zelinka





Doc. dr. Bohumil Hačar, Prostějov:

Řeka, která teče do kopce

Nejeden čtenář, který přečte tento nadpis, si nepochybně pomyslí, že to má být nějaký žert. Je to však míněno vážně, ovšem rčení „do kopce“ je jen potud správné, pokud tím míníme rostoucí vzdálenost od středu Země. Řeka, kterou mám při tom na mysli je Mississippi, nazývaná „Otec řek“. Její ústí do Mexického zálivu leží přibližně na 30. rovnoběžce a její pramen vyvěrá ve výši 500 m nad mořem na malé vysočině nad jezerem Glazierovým, na 47. rovnoběžce. Ústí řeky je o 5600 m dále od středu Země nežli pramen. Tato skutečnost plyne z elipsoidického tvaru Země, jak se snadno přesvědčíme malým výpočtem.

Podle prací sovětského geodéty T. N. Krasovského, založených na nejnovějších triangulačních měřeních severní polokoule, a to jak v SSSR, tak v západní Evropě i v USA a ukončených r. 1940, je velká poloosa zemského elipsoidu $a = 6\,378\,295$ m, malá poloosa $b = 6\,356\,920$ m.

Z těchto čísel lze vypočítat vzdálenost bodů 30. a 47. rovnoběžky od středu Země. Považujeme-li Zemi za zploštělý rotační elipsoid o poloosách a a b , je kterýkoli poledník elipsa o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Body A (pramen) a B (ústí) jsou body této elipsy. Z pravouhlého trojúhelníku $\triangle OA'A$ (obr. 1) platí pro souřadnice x , y bodu A vztah $y = x \operatorname{tg} 47^\circ$ anebo, položíme-li $\operatorname{tg} 47^\circ = k$, je $y = kx$. Dále je

$$OA = r_{47} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dosadíme do rovnice elipsy $y = kx$, dostáváme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1$$

a odtud

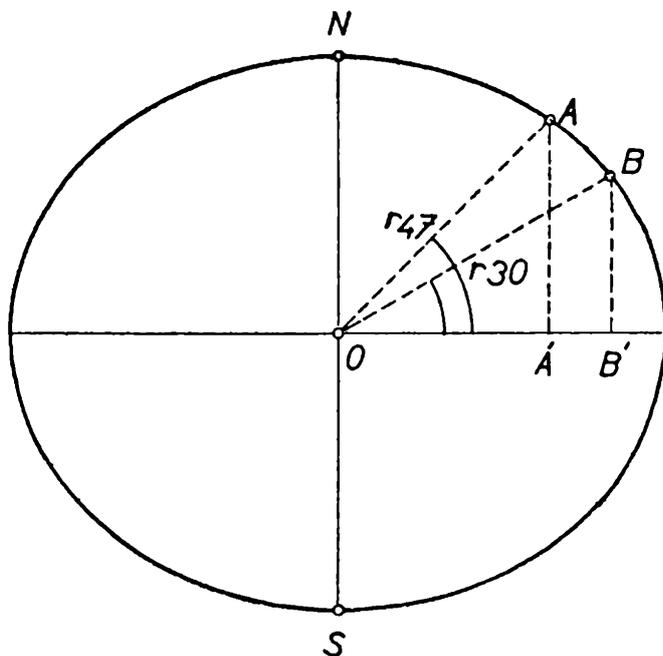
$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2}$$

Protože $y^2 = k^2 x^2$, dostaneme

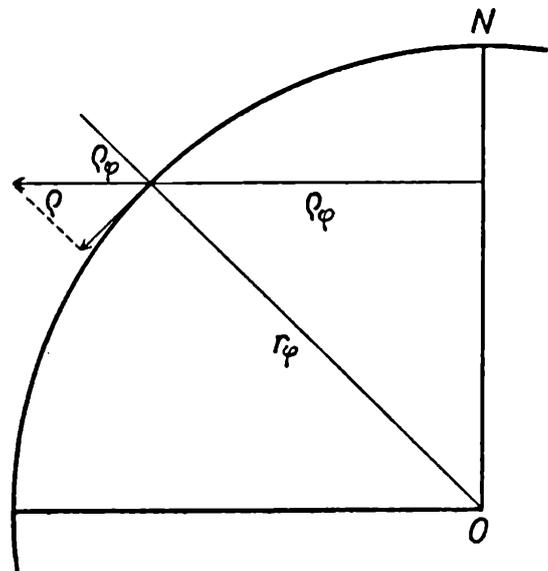
$$y^2 = \frac{k^2 a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2}$$

a ze vztahu pro r_{47} bude

$$r_{47} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 (1 + k^2)}{k^2 a^2 + b^2}}$$



Obr. 1



Obr. 2

Ježto je $k = \operatorname{tg} 47^\circ$, dále $\log k = 0,030\ 36$, $\log k^2 = 2 \log k = 0,060\ 72$, $k^2 = 1,1501$, $k^2 + 1 = 2,1501$. Dále je $k^2 a^2 = 4,6790 \cdot 10^{13}$, $b^2 = 4,0411 \cdot 10^{13}$, tedy $k^2 a^2 + b^2 = 8,7201 \cdot 10^{13}$, a (logaritmicky) $r_{47} = 6\ 367\ 000$ m. Délka r_{47} je vzdálenost kteréhokoli bodu 47. rovnoběžky od středu Země.

Z téhož vzorce dostaneme i délku $OB = r_{30}$, dosadíme-li za k hodnotu

$$\operatorname{tg} 30^\circ, \text{ tj. } \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Výsledek je

$$OB = r_{30} = 6\ 373\ 100 \text{ m.}$$

Je tedy $r_{30} - r_{47} = 6100$ m.

Poněvadž však pramen vyvěrá 500 m nad mořem, bude tento rozdíl o 500 m menší, tedy 5600 m. O tolik je vzdálenost ústí řeky Mississippi od středu Země větší než vzdálenost pramene od téhož středu.

Jak vysvětlíme tuto překvapující skutečnost? Ukážeme si, že je to účinek odstředivé síly vznikající rotací Země. Je tedy popsán je v dalším důkazu zemské rotace. Ostatně skýtá Mississippi i jiný známý a často uváděný důkaz. Podle Gilberta působí zemská rotace znatelně na erozivní činnost veletoku, neboť eroze pravého (západního) břehu je asi o 9 % větší než eroze levého (východního) břehu ve shodě s teorií Coriolisových sil.

Samozřejmě není Mississippi jediná řeka, o níž lze říci, že „teče do kopce“. Avšak veliká délka jejího toku vinoucího se velmi přibližně podél devadesátého (záp.) poledníku způsobuje, že se u ní jeví tato okolnost zvláště nápadně.

Avšak význam jevu se objeví ve zvláště jasném světle, srovnáme-li tok Mississippi s tokem jiné velké řeky, a to s Nilem.

Nil vytéká z jezera Viktoria Njanza (dříve Ukereve), které leží na rovníku ve výši 1135 m nad mořem a vlévá se do Středoziemního moře na 30. rovnoběžce. Délka jeho toku od středu jezera Viktoria Njanza až k ústí je 5400 km. Je to také řeka severní polokoule, teče však od jihu k severu a kromě značnějších oklik a zákrutů, téměř přesně podél 30. poledníku. Neteče tedy „do kopce“ jako Mississippi, nýbrž zcela prostě tak, jak jsme zvyklí očekávat. V čem je příčina tohoto rozdílu?

Směr vektoru odstředivé síly je kolmý k rotační ose Země. Na rovníku, kde zeměpisná šířka $\varphi = 0$, bude tedy tento směr totožný se směrem svislým, tj. s vertikálou. Na zeměpisné šířce φ bude odchýlen od vertikály o úhel φ , na pólu bude $\varphi = 90^\circ$. V místě, jehož zeměpisná šířka je φ , má horizontální (tj. tangenciální k povrchu Země) složka odstředivého zrychlení velikost

$$\gamma_\varphi = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \varrho_\varphi \sin \varphi,$$

kde ϱ_φ je poloměr φ té rovnoběžky a $T = 86\,164$, (hvězdný den) je doba rotace Země. Protože však $\varrho_\varphi = r_\varphi \cos \varphi$, při čemž r_φ značí zemský poloměr v místech φ té rovnoběžky, je dále

$$\gamma_\varphi = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_\varphi \cos \varphi \sin \varphi.$$

Zlomek v závorce je úhlová rychlost zemské rotace ω , takže lze také psát

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{2} \omega^2 r_\varphi \sin 2\varphi.$$

Považujeme-li zde r_φ za konstantní, tedy Zemi za kouli, což smíme vzhledem k poměrně malému zploštění, vidíme, že horizontální složka odstředivého zrychlení γ_φ nabývá maximální hodnoty pro $\varphi = 45^\circ$ zároveň s činitelem $\sin 2\varphi$. U řeky Mississippi je průměrná hodnota γ_φ

blíží maximu než u Nilu, kde tato veličina na počátku je dokonce nulová. Účinek tohoto vlivu lze učinit ještě zřejmějším, srovnáme-li u obou veletoků zrychlení, kterého se dostává vodním částicím od gravitační a odstředivé síly. Podle výše uvedeného vzorce vypočteme pro Mississippi, a to pro ústí i pramen, tj. pro $\varphi = 47^\circ$ a $\varphi = 30^\circ$

$$\gamma_{47} = 0,0168 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \gamma_{30} = 0,0146 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

tedy střední hodnota přibližně¹⁾ $\bar{\gamma} = 0,0157 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Jako protějšek této hodnoty třeba vypočítat složku tíhového zrychlení udíleného vodním částicím. K tomu účelu užijeme vztahu pro zrychlení na nakloněné rovině. Výsledek, k němuž tak dospějeme, bude ovšem jen přibližný, protože povrch Země není rovina.

Délka toku Mississippi²⁾ se udává na 3840 km, pro rozdíl vzdáleností pramene a ústí od středu Země jsme již uvedli 5600 m. Složka tíhového zrychlení udílená vodním částicím bude tedy přibližně

$$g' = g \sin \alpha, \text{ kde } \sin \alpha = \frac{5,600}{3840} = 0,00146.$$

Zvolíme-li $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a zanedbáme-li nepatrnou změnu g se zeměpisnou šířkou, bude $g' = 0,0143 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Je tedy $\bar{\gamma} > g'$, jak jsme tvrdili.

Délka toku Nilu je 5400 km, rozdíl vzdáleností středu jezera Viktoria Njanza a ústí řeky od středu Země je 6330 km. Zde je tedy $\sin \alpha = \frac{6,330}{5400} = 0,00117$. Pro složky zrychlení odstředivé síly vychází

$$\gamma_{30} = 0,0146 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \gamma_0 = 0,00000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

pro přibližnou střední hodnotu³⁾ tedy $\bar{\gamma} = 0,0073 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Složka tíhového zrychlení g' udílená vodním částicím je $g' = g \cdot \sin \alpha = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,00117 = 0,0115 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Zde je tedy naopak $g' > \bar{\gamma}$ v soulase se skutečným směrem toku.

¹⁾ Přesnou střední hodnotu lze vypočítat pomocí integrálního vzorce pro střední hodnotu funkce (viz E. K r i e g e l s t e i n, Ú v o d d o i n t e g r á l n í h o p o č t u, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1961/62, str. 393, 437)

$$\mu = \int_{x_2}^{x_1} \frac{f(x) dx}{x_1 - x_2},$$

kterého použijeme pro výraz γ_φ . Při tom je $x_1 = \frac{47\pi}{180}$, $x_2 = \frac{30\pi}{180}$. Vyjde tak $\bar{\gamma} = 0,0162$, tedy hodnota o něco větší. Pro náš účel je tento rozdíl bezvýznamný.

²⁾ Délka toku od pramenů Missouri do ústí Mississippi je 7052 km.

³⁾ Přesná hodnota γ pro Nil je $0,0080 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Elektrostatické stroje ve vakuu

Generátory na výrobu elektrického proudu mají těžká železná jádra a měděné vodiče, elektromotory se otáčejí účinkem magnetických polí opět za pomoci těžkých železných jader. Rovněž transformátory pracují s magnetickým polem uvnitř značně těžkých jader. Přesto však poměr výkonu k váze u jmenovaných strojů je daleko větší než u nějakého elektrostatického generátoru, např. Wimshurstovy električky. Avšak v nejnovější době vlivem myšlenky o možném použití při meziplanetárních letech se přece uvažuje o zařízeních elektrostatických.

Poměr výkonu k váze by byl u elektrostatických strojů lepší, kdyby bylo možno použít vyšších napětí. Soudíme tak z kvadratické závislosti energie W nabitého vodiče o kapacitě C na napětí U :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 .$$

Za obyčejného atmosférického tlaku je velikost napětí omezena tzv. k o r o n o v ý m v ý b o j e m, který nastává při vyšších napětích, a který případně přejde ve výboj jiskrový při ještě vyšších napětích. Vysokých napětí však je možno použít ve vakuu. Jak se ve vakuu lépe udržuje vysoké napětí, o tom poučuje tab. 1.

Tabulka 1

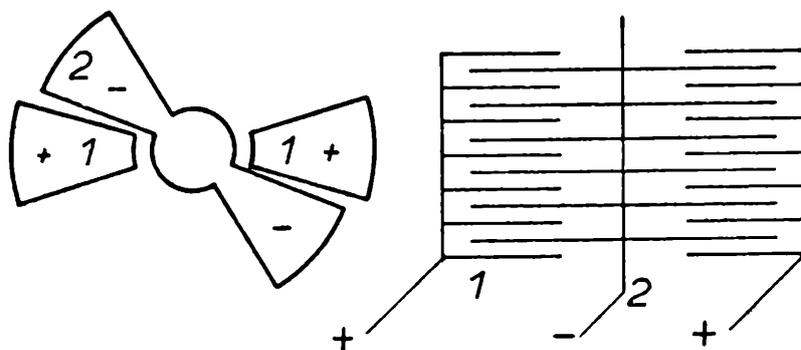
Tlak	Napětí, při kterém přeskóčí el. jiskra mezi rovnými deskami 1 cm od sebe vzdálenými
760 torr	31 kV
10^{-4} torr	230 kV

Velmi jednoduchý a účinný by byl vakuový elektrostatický generátor na výrobu střídavého proudu. Je znázorněn na obr. 1, (1 je nabitý stator, 2 je rotor). Při otáčení se přibližují a oddalují desky rotoru a statoru. Kapacita C má maximum v časových okamžicích t označených na obr. 2 jako I a III a minimum v okamžicích II a IV. Její průběh je možno vyjádřit vztahem:

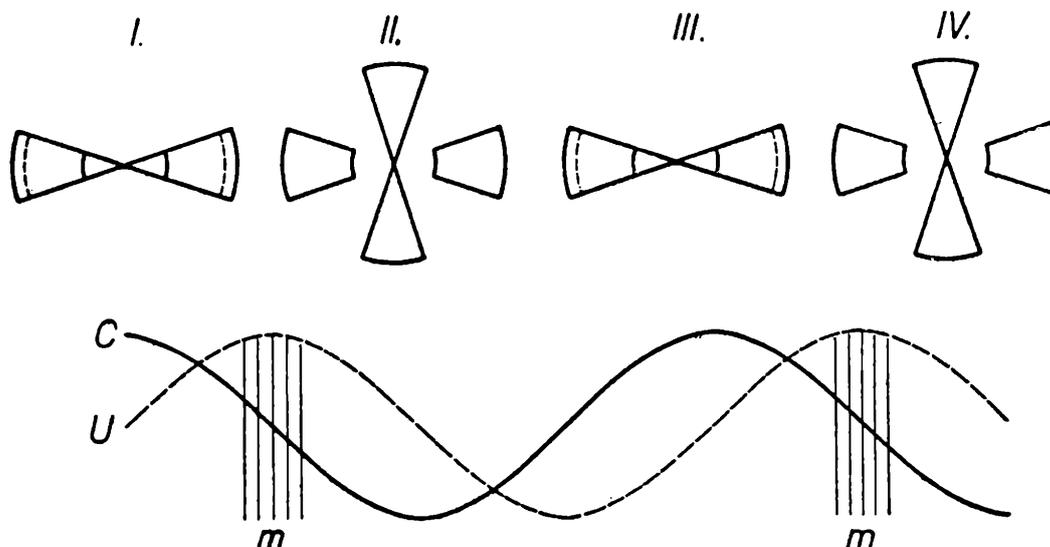
$$C = C_0 + C_1 \cos 2t ,$$

kde C_0 je minimální kapacita.

Napětí bude mít maximum v časových intervalech mezi I a III, III a IV. Kdyby napětí mělo maximum v okamžicích II a IV, mechanická práce, na jejíž úkor by vznikl užitečný elektrický výkon, by byla v průměru nulová, poněvadž by tato práce spotřebovaná v intervalu I—II se opět uvolnila v intervalu II—III. Proto pro výrobu elektrického proudu je nutné, aby napětí bylo posunuto ve fázi vzhledem ke kapacitě o úhel okolo 45° . Pak v intervalu I—II současně s nej-



Obr. 1. Elektrostatický generátor proudu; 1 stator; 2 rotor.



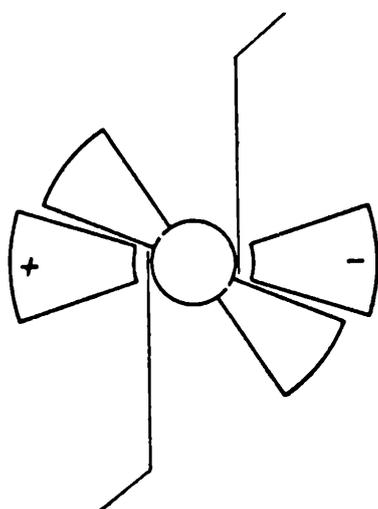
Obr. 2. Časový průběh kapacity a napětí; m oblast maximální změny kapacity a maxima napětí.

větší změnou kapacity což značí odtékání náboje čili proud v připojeném vedení - bude napětí největší a v intervalu II—III bude nejmenší. Tím se stane, že ztráta mechanické energie je větší než její zisk, či obráceně získá se jako výsledek elektrická energie.

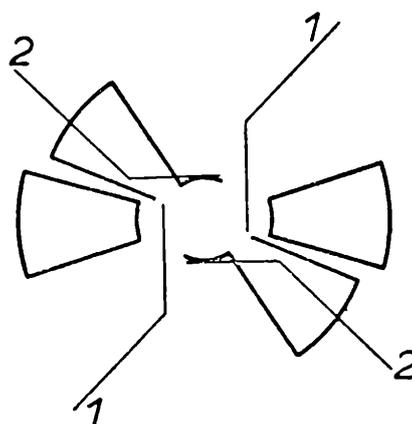
S pokusným zařízením tohoto typu při průměru rotoru 300 mm, maximálním napětím 600 kV a proudem 5 mA se dosáhlo ve vakuu výkonu 3 kW. Desek ve vzdálenosti 2 mm bylo přes 100.

Třeba ještě připomenout, že zařízení se pouze na počátku nabije na vysoké napětí, ale potom již se další náboj nedodává. Náboj jen probíhá od generátoru do vedení a nazpět.

Jednoduchý by byl též elektrostatický motor pracující ve vakuu. Jako synchronní motor na střídavý proud by pracoval generátor, který byl shora popsán. V tomto případě by musilo napětí na motoru sledovat s fázovým opožděním 45° za kapacitou motoru. Pak maximální napětí připadne do intervalu II—III. Tento synchronní motor se roztočí pomocným motorem tak, aby se točil o něco rychleji než generátor budící střídavý proud. Synchronní motor se pak samočinně přibrzdí, dokud nebude vyšší napětí připadat do časového intervalu, kdy kapacita vzrůstá. Pak bude konat mechanickou práci na úkor elektrické energie. Přitom bude jeho výkon se řídit zatížením. Při nulovém výkonu bude kapacita fázově 90° před napětím, při maximálním zatížení o 135° a kdyby zatížení ještě vzrostlo, motor se zastaví.



Obr. 3. Elektrostatický motor.



Obr. 4. Elektrostatický měnič napětí; 1 sběrače pro vysoké napětí; 2 sběrače pro nízké napětí.

Asynchronní elektrostatický motor je znázorněn na obr. 3. Kladné a záporné napětí je přiváděno trvale na dvě polovice statoru. Do rotoru se náboj přivádí sběrači. V poloze označené na obr. 3 právě část rotoru u kladné části statoru dostala kladné napětí a opačná část záporné. Vlivem odpuzivých sil působí tedy na rotor moment sil a rotor se otočí. Po otočení o 180° se vymění též sběrače, které přivádějí napětí do jednotlivých částí rotoru, takže do části rotoru, která je nyní nalevo, opět půjde kladné napětí a otáčení bude pokračovat.

Měnič elektrostatického napětí na jiné napětí je proveden podobně jako motor. Vysoké napětí se zavádí kolektory do rotoru v okamžicích, když je kapacita nejmenší. Pootočením se proto přibližuje ke statoru a se stoupající kapacitou se napětí snižuje. V okamžicích, když je rotor nejblíže statoru, tedy při nejnižším napětí, se toto nízké napětí odvádí.

Úpravou pro přeměnu nízkého napětí na vysoké ukazuje obr. 4. Nízké napětí se přivádí v okamžicích s velkou kapacitou a odvádí se po otočení rotorů tak, že kapacita klesne a tím se napětí zvýší.

Nedávno byl vyvinut elektrostatický motor podobné konstrukce. Má kotoučový rotor o průměru 3,2 cm z izolačního materiálu. Okolo něho jsou uspořádány tři páry statorových elektrod, které se kotouče nedotýkají a sousední elektrody jsou přitom vždy opačně nabité. Na ně se přivádí napětí 8 až 13 kV. Nastává koronový výboj. Vzduch mezi elektrodami statoru a kotoučem rotoru se ionizuje a na izolační kotouč proti elektrodě se přivede souhlasný náboj jako na příslušné elektrodě. Koronový výboj vykonává tedy funkci sběrače. Vytvoří se tím otáčivý moment (souhlasné náboje) a kotouč se roztočí. U nejbližší opačně nabitě elektrody se lokální elektrostatický náboj na kotouči vybijí a toto místo se opět nabije opačně (to je souhlasně s touto sousední elektrodou) a opět vzniká točivý moment a tak se děj opakuje.

Motor na ložiskách z kamene dosahuje rychlosti 12 000 otáček za minutu. Neobsahuje magnetický materiál a dokonce ani rotor není kovový. Zkoušky s generátory ukázaly, že je možno dosáhnout váhy 1,5 kg na 1 kW výkonu.

Literatura

Nature 192, č. 4803, 18. XII. 1961, str. 649—650.
Electronic Technology 39, č. 1, str. 10—12 (1962).

V l a d i m í r J u r á š, VUT, Brno:

O tlaku v kapalinách

V niektorých učebniciach fyziky sa vyskytujú nasledujúce tvrdenia: Hydrostatický tlak p predstavuje potenciálnu energiu objemovej jednotky kvapaliny. Alebo: Merný tlak je energia objemovej jednotky. Alebo: Súčin $p \cdot V$ má rozmer energie a môže byť považovaný za energiu kvapaliny vyplňujúcej objem V a nachádzajúcej sa pod tlakom p (tlaková energia).

K prvému tvrdeniu sa autor dostáva nasledujúcou úvahou. Majme vo válci s pohyblivým piestom a výtokovým otvorom, umiestneným oproti piestu, uzavrenú kvapalinu. K pôsobeniu gravitácie zatiaľ neprihliadajme. Výtokový otvor nech je uzavrený a na piest plochy S nech pôsobí kolmá sila veľkosti F . V určitom okamžiku otvoríme vý-

tokový otvor. Kvapalina začne vytekať určitou rýchlosťou v . Pri posunutí piestu o dĺžku x vykoná sila F prácu

$$A = F \cdot x = p \cdot S \cdot x ,$$

pričom z válca vytečie kvapalina s kinetickou energiou

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} s \cdot V \cdot v^2 = \frac{1}{2} s \cdot S \cdot x \cdot v^2 .$$

Keďže sa jedná o ideálnu kvapalinu bez vnútorného trenia, platí

$$A = E_k ,$$

tj.

$$p \cdot S \cdot x = \frac{1}{2} s \cdot S \cdot x \cdot v^2$$

a po krátení

$$p = \frac{1}{2} s \cdot v^2 .$$

Tento výsledok je správny, avšak autor z neho robí nesprávny uzáver, hovoriac: „Hydrostatický tlak p predstavuje potenciálnu energiu objemovej jednotky kvapaliny, pretože po uvoľnení kvapaliny, uzavrenej pod určitým tlakom nadobúda táto energiu kinetickú.“ Uvedené tvrdenie je nesprávne preto, že ideálna kvapalina, keďže vliv gravitácie neuvažujeme, nemôže mať žiadnu potenciálnu energiu nech sa nachádza pod akol'vek veľkým tlakom, pretože je nestlačiteľná. Kinetická energia vytekajúcej vody nepredstavuje nejakú energiu akumulovanú v kvapaline nachádzajúcej sa pod tlakom p , ale vzniká na úkor práce sily F , ktorá pôsobí na piest.

Autor druhej vety postupoval nasledovne: Merným tlakom p nazývame silu pôsobiacu na jednotku plochy. Ponevadž

$$p = \frac{\text{sila}}{\text{plocha}} \tag{1}$$

dostávame násobením čitateľa i menovateľa dĺžkou

$$p = \frac{\text{práca}}{\text{objem}} = \frac{\text{energia}}{\text{objem}}$$

Že výsledok tejto úvahy je nesprávny, už vieme. Úvaha sama má nasledujúce nedostatky. Za prvé sila, ktorou je stlačená kvapalina, násobená nejakou dĺžkou, nie je práca. Za druhé plocha násobená nejakou dĺžkou nie je objem.

Postup, vychádzajúci z rovnosti rozmeru veličín $p \cdot V$ a E , ktorého výsledkom je tretie tvrdenie, je taktiež nesprávny, pretože dve veli-

činy, ktorých rozmer je rovnaký nemusia byť ešte rovnakej fyzikálnej povahy. Tak napr. rozmer momentu sily je rovný rozmeru práce, avšak moment sily nie je rovný práci sily.

Podáme ešte iný dôkaz, ktorý vyvracia názory uvedené na začiatku. Dôkaz prevedieme sporom.

Predpokladajme, že uvažované tvrdenie platí. Potom môžeme energiu kvapaliny obsaženej v nádobe, ktorá je uzavrená piestom, tlačným nejakým pružným perom konštantnou silou, napr. 1 kp, zvyšovať nad všetky medze zmenšovaním prierezu piestu. To však odporuje zákonu o zachovaní energie.

Iný dôkaz sporom: Pretože tlak v kvapaline je rovný potenciálnej energii objemovej jednotky kvapaliny, musí tlak so stúpajúcou hĺbkou pod hladinou klesať, pretože klesá potenciálna energia objemovej jednotky kvapaliny. Tento dôsledok je však v spore so skutočnosťou, preto uvedený predpoklad, že tlak je rovný potenciálnej energii objemovej jednotky kvapaliny, je nesprávny.

Inž. dr. Václav Šindelář, Praha:

Nová měrová soustava

(Dokončení)

H u s t o t a, m ě r n á h m o t n o s t, ρ ; $[\rho] = L^{-3} \cdot M$. (ρ) = 1 kilogram na 1 krychlový metr = 1 kg . m⁻³.

Vedlejší jednotka, jež bude mít asi také zákonný charakter je

(ρ) = 1 kilogram na 1 liter = 1 kg . l⁻¹ = 0,999 972 . 10³ kg . m⁻³.

V běžné praxi lze považovat jednotky 1 kg . l⁻¹ = 1 kg . dm⁻³ - což je násobná jednotka odvozená z jednotky hlavní - za rovnocenné.

T l a k, p ; $[p] = L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}$. (p) = 1 newton na 1 čtverečný metr = 1 N . m⁻².

Vedlejší jednotkami, jež budou mít podle návrhu státní normy zákonný charakter jsou:

(p) = 1 bar = 1 b = 10⁵ N . m⁻² (přesně),

(p) = 1 kilopond na 1 čtverečný metr = 1 kp . m⁻² = 9,806 65 N . m⁻² (přesně),

(p) = 1 torr = 133,322 N . m⁻².

P o z n á m k a. V běžné praxi lze používat přibližnou rovnost jednotky $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}$ tlakem vyvozeným hydrostatickým tlakem sloupce vody výšky 1 mm. Je-li žádoucí použít třeba poslední jednotku, je její značka 1 mm H_2O . Názvu milimetr rtuťového sloupce s označením mm Hg se neuzívá. Nahrazuje jej jednotka torr, která se rovná hydrostatickému tlaku rtuťového sloupce výšky 1 mm (při hustotě rtuti $\rho = 13,5951 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, brané při 0°C) při teplotě 0°C a normálním tíhovém zrychlení ($g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Násobná jednotka $1 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, odvozená z vedlejší jednotky, je rovna $9,80665 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ a nazývá se také technická atmosféra, se značkou at.

Shodné jednotky má také mechanické napětí (σ, τ) a jiné další veličiny.

D y n a m i c k á v i s k o z i t a, η ; $[\eta] = \text{L}^{-1} \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-1}$. (η) = 1 newtosekunda na 1 čtverečný metr = $1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vedlejší zákonnou jednotkou bude asi

$$(\eta) = 1 \text{ poise} = 1 \text{ P} = 0,1 \text{ Ns} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

K i n e m a t i c k á v i s k o z i t a, ν ; $[\nu] = \text{L}^2 \text{ T}^{-1}$ (ν) = 1 metr na druhou za 1 sekundu = $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Vedlejší zákonnou jednotkou bude asi

$$(\nu) = 1 \text{ stok} = 1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

P o z n á m k a. Protože je v praxi dosud rozšířeno měření kinematické viskozity Englerovým viskozimetrem a udávání jejich hodnot ve stupních Englerových ($^\circ\text{E}$), bude asi na přechodnou dobu povoleno v technické praxi používání také této jednotky. Při tom zhruba platí, že

$$\nu = \frac{E}{100} \cdot 7,6 \left(1 - \frac{1}{E^3}\right)$$

což je převodní vztah kinematické viskozity, vyjádřené v jednotkách St (ν) a ve $^\circ\text{E}$ (E).

P r á c e, A ; e n e r g i e, E, W ; $[A] = \text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-2}$. (A) = 1 joule = $= 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Vedlejšími jednotkami, majícími zákonný charakter, budou pravděpodobně

$$(A) = 1 \text{ watthodina} = 1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J (přesně)},$$

$$(A) = 1 \text{ kilopondmetr} = 1 \text{ kp} \cdot \text{m} = 9,80665 \text{ J (přesně)},$$

$$(A) = 1 \text{ kilokalorie} = 1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J (přesně)},$$

$$(A) = 1 \text{ elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

P o z n á m k a. Hlavní jednotka t e p l a (Q), jako jedné z forem energie, je rovněž 1 J. Také vedlejší jednotky, je-li třeba jich použít, jsou stejné. 1 kilokalorií se rozumí mezinárodní tabulková kilokalorie, jež byla přijata v roce 1956 na 5. mezinárodní konferenci o vlastnostech páry.

Přitom platí

$$1 \text{ Mcal} = 1,163 \text{ kWh (přesně)}.$$

V ý k o n, P ; (P) = $\text{L}^2 \text{ M} \text{ T}^{-3}$. (P) = 1 watt = $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \text{ s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

Za vedlejší zákonnou jednotku bude asi uznána také jednotka

$$(P) = 1 \text{ kůň} = 1 \text{ k} = 735,499 \text{ W} \doteq 735,5 \text{ W}.$$

případně ještě

$$(P) = 1 \text{ kilopondmetr za 1 sekundu} = 1 \text{ kp} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 9,80665 \text{ W} \text{ (přesně)}.$$

P o z n á m k a. Stejně jednotky jako mechanický výkon má také v elektrotechnice činný výkon P , zdánlivý výkon (S, P_s) a jalový výkon (Q, P_q) . Není ještě jisto, zda bude pro zdánlivý výkon připuštěna také jednotka 1 voltampér = 1 VA a pro jalový výkon 1 voltampér reaktanční = 1 VA r.

$$\text{Elektrický náboj } Q; [Q] = \text{T} \cdot \text{I}. (Q) = 1 \text{ coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ ampérsekunda} = 1 \text{ As}.$$

Vedlejší jednotkou bude také

$$(Q) = 1 \text{ ampérhodina} = 1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C (přesně)}.$$

$$\text{Elektrické napětí } U; [U] = \text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-3} \cdot \text{I}^{-1}. (U) = 1 \text{ volt} = 1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}.$$

P o z n á m k a. Stejnou jednotku má také elektrický potenciál (V, φ) , elektromotorická síla (E, e) , pro níž může být také použit ekvivalentně název elektromotorické napětí.

$$\text{Elektrický odpor } R; [R] = \text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-3} \cdot \text{I}^{-2}. (R) = 1 \text{ ohm} = 1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{A}^1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}.$$

P o z n á m k a. Stejnou jednotku jako odpor, (rezistance) má také zdánlivý odpor, impedance Z a jalový odpor, reaktance X .

$$\text{Elektrická vodivost } G; [G] = \text{L}^{-2} \cdot \text{M}^{-1} \cdot \text{T}^3 \cdot \text{I}^2. (G) = 1 \text{ siemens} = 1 \text{ S} = 1 \text{ V}^{-1} \cdot \text{A} = 1 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2.$$

P o z n á m k a. Stejnou jednotku jako vodivost (konduktance) $\left(G = \frac{1}{R}\right)$ má také zdánlivá vodivost, admittance $Y = \frac{1}{Z}$ a jalová vodivost, susceptance $B = \frac{1}{X}$.

$$\text{Elektrická kapacita } C; [C] = \text{L}^{-2} \cdot \text{M}^{-1} \cdot \text{T}^4 \cdot \text{I}^2. (C) = 1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} = 1 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2.$$

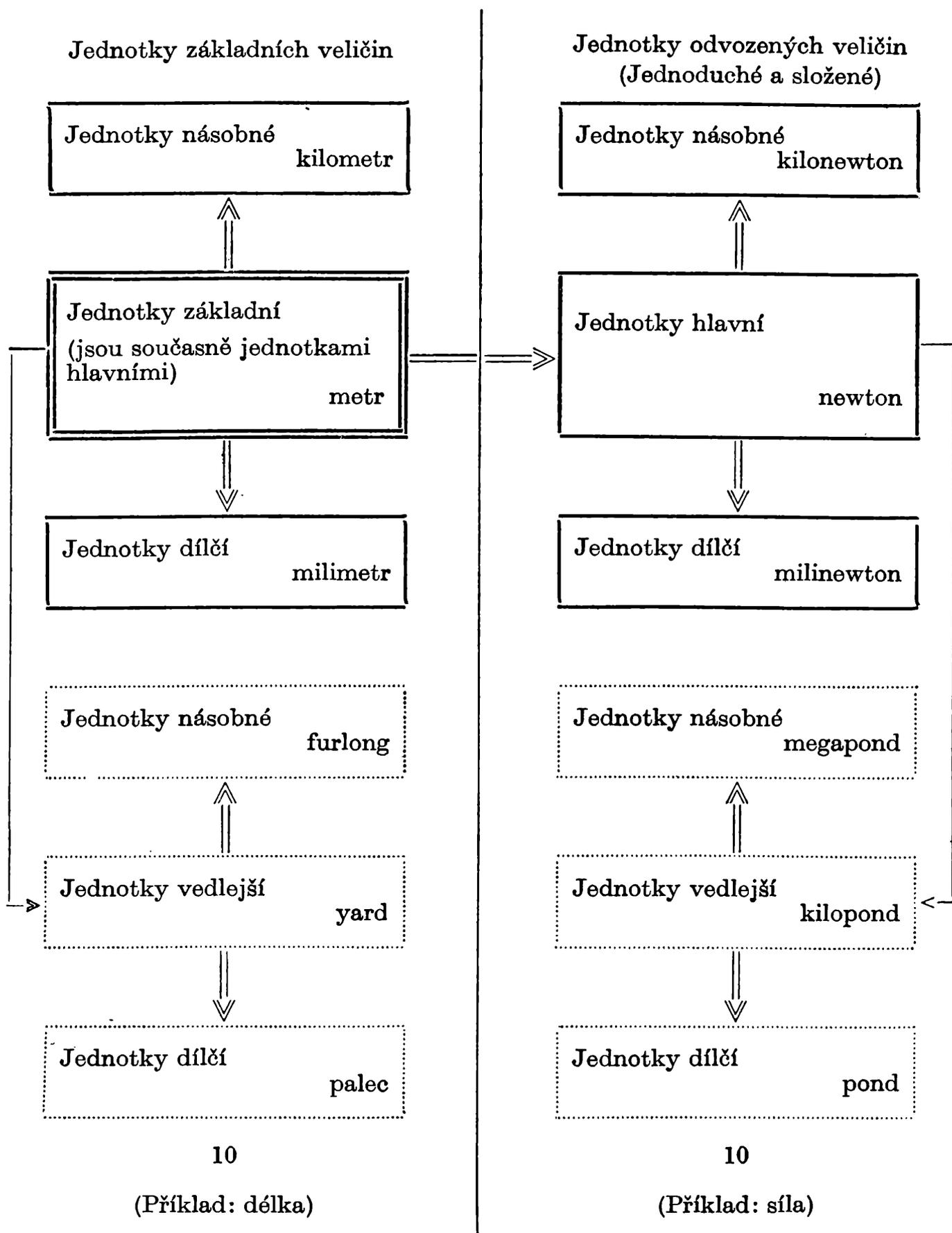
$$\text{Indukčnost vlastní } L; [L] = \text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-2}. (L) = 1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}.$$

P o z n á m k a. Stejnou jednotku má také indukčnost vzájemná, M , a magnetická vodivost, permeance \mathcal{A} .

$$\text{Magnetický indukční tok } \Phi; [\Phi] = \text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-1} \\ [\Phi] = 1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}.$$

P o z n á m k a. Stejnou jednotku má také někdy dosud používané magnetické množství p , jako veličina pomocná, nemající reálnou povahu.

Schéma rozdělení jednotek



(Kromě jednotky základní jsou všechny ostatní jednotkami druhotnými.)

Magnetická indukce, B ; $[B] = \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-1}$. (B) = 1 tesla = 1 T = 1 Wb \cdot m⁻² = 1 V \cdot s \cdot m⁻² = 1 kg s⁻² A⁻¹.

Magnetické napětí (U_m), magnetický potenciál (skalární) (V_m , φ_m) a magnetomotorická síla E_m , jinak též nazývaná magnetomotorickým napětím, mají vesměs shodný rozměr I a stejnou hlavní jednotku 1 ampér = 1 A (viz též elektrický proud). V praxi je však výhodné používat jednotku ampérzávit (Az), kterou můžeme definovat jako magnetomotorickou sílu, buzenou proudem velikosti 1 ampéru, protékajícím odvodem s jedním závitem. Jednotka ampérzávit bude asi rovněž jednotkou zákonnou.

Světelný tok, Φ ; $[\Phi] = \text{I}^*$. (Φ) = 1 lumen = 1 lm.

Lumen je světelný tok vyzařovaný do prostorového úhlu 1 steradiánu bodovým zdrojem, jehož svítivost je ve všech směrech 1 kandela.

Osvětlení, E ; $[E] = \text{L}^{-2} \text{I}^*$. (E) = 1 lux = 1 lx.

Lux je osvětlení plochy, na jejíž každý čtverečný metr dopadá rovnoměrně rozdělený světelný tok 1 lumenu.

Jas, L ; $[L] = \text{L}^{-2} \cdot \text{I}^*$. (L) = 1 nit = 1 nt.

Nit je jas zdroje, jehož svítivost 1 m² zdánlivé plochy zdroje je 1 cd. Zdánlivou plochou se přitom rozumí velikost průmětu skutečné plochy (resp. její velikosti) do roviny kolmé ke směru pozorování.

* * *

Tímto přehledem jsme vyčerpali zákonné jednotky, jednak základní, jednak druhotné. Hlavní jednotky ostatních důležitých veličin budou stanoveny různými speciálními normami. Tyto jednotky však nebudou mít zákonný charakter. Hlavní jednotky všech veličin (zákonných i ostatních) uvedeme příště v přehledných tabulkách.

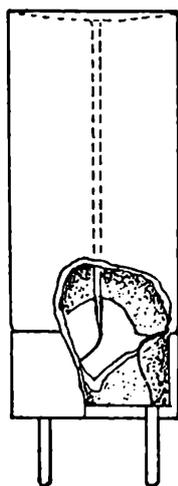
Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

GM počítače

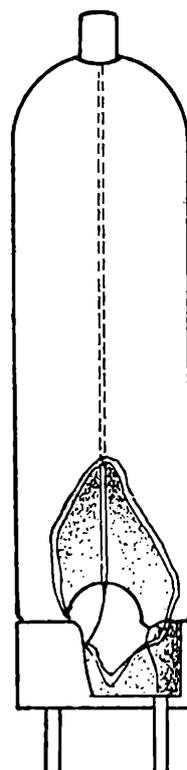
(Podstata nejzákladnějších dozimetrických přístrojů, III. část.)

Náboj vzniklý ionizací jednotlivou částicí nebo paprskem je - kromě u záření alfa - tak nepatrný, že jej nemohou zaznamenat ani nejcitlivější přístroje. Přesto je možno také ionizační metodou počítat jednotlivé částice a paprsky, jestliže se využije zvětšení uvolněného náboje následkem ionizace nárazové. Je-li na elektrody ionizační komory připojeno patřičně velké napětí nutné k vytvoření nárazové ionizace, potom každá jednotlivá částice, která v komoře uvolní ale-

spoň jeden iontový pár, je podnětem ke vzniku „laviny“ dalších iontů, jak se obrazně uvádí. Úhrnný náboj tak uvolněný je až 10^8 krát větší než náboj původní. Tak vzniká elektrický i m p u l s, který po dalším elektronickém zesílení může uvést do chodu počítaadlo. Na tomto principu pracují Geigerovy - Müllerovy počítače, stručně označované GM počítače. Trubice se plní zředěným plynem a kladná elektroda je tvořena tenkým drátem, aby napětí potřebné k vzniku nárazové ionizace nebylo příliš vysoké. V okolí tenkého drátu je vysoká intenzita elektrického pole, která prudce zrychluje záporné ionty (elektrony), takže při napětí kolem 1000 voltů vzniká iontová lavina.



Obr. 1. Geigerův-Müllerův počítač k měření paprsků gama.



Obr. 2. GM počítač se slídivým okénkem k měření záření beta.

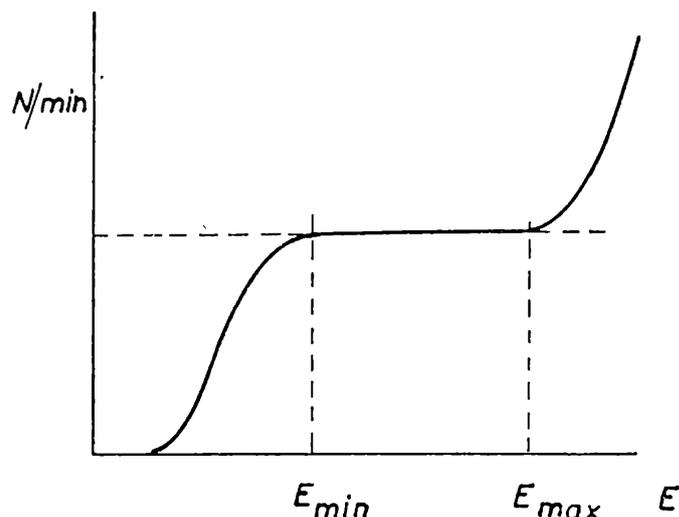
Převážná většina počítačů má válcovitý tvar (obr. 1 a 2). Vnější válec je katodou, tenký drát v ose trubice anodou. Mezi katodou a anodou je napětí, jehož hodnota je závislá na rozměrech počítače a druhu plynu jímž je naplněn; u běžných počítačů je obvykle kolem 1000 voltů, u speciálních počítačů v rozmezí 300 V až 3000 V. Tlak v počítači bývá od několika desítek torrů do 1 atm. (1 torr = 1 mm Hg). U běžných počítačů kolem 100 torrů.

Na obr. 3 je charakteristika běžného GM počítače, udávající závislost počtu impulsů N zaznamenaných počítačem za minutu, na napětí připojeném na elektrody počítače. Mezi napětími E_{\min} a E_{\max} je tzv. sedlo počítače, zvané také plošina (plato) po-

čítáče. V tomto napěťovém oboru má počítač pracovat. Nejvýhodnější je pracovat uprostřed plošiny.

Ionizující částice vniknuvší do trubice vzbudí při napětí např. 1000 volt iontovou lavinu. Výboj je nutno uměle přerušit, neboť nárazová ionizace by jej udržovala trvale a počítač by nebyl schopen indikovat další částici nebo paprsek. Starší počítače mohly indikovat pouze záření malé četnosti (tj. malé intenzity), neboť potřebovaly poměrně dlouhou dobu k „zotavení“ po každém výboji, aby mohly dále indikovat. Rozlišovací schopnost je doba, za kterou je počítač schopen zaznamenat další paprsek. Tato doba má být pokud možno nejkratší.

U starších počítačů se zhasnutí výboje docílilo vhodným zapojením, jímž se po výboji snížilo napětí. Dnes se vyrábějí počítače samozhášecí, v nichž se výboj přerušuje vlivem vhodné plynové náplně.



Obr. 3. Charakteristika Geigerova-Müllerova počítače. Na jedné ose je počet impulsů zaznamenaných GM počítačem za minutu (N/min), na druhé ose napětí připojené na elektrody GM počítače. V oblasti $E_{min} - E_{max}$ je sedlo počítače.

Molekuly zhašecího plynu pohltí přebytečnou energii výboje a nárazová ionizace se rychle přeruší. Nejčastěji je náplň ze směsi vzácného plynu - např. argonu tlaku kolem 100 torrů s parami těkavých látek, např. alkoholu, aldehydů aj., o tlaku asi 10 torrů. Molekuly organických látek se však výbojem rozkládají a počítače mají omezenou životnost (10^3 až 10^9 impulsů). V novější době bylo proto použito trubice halogenových náplní chlorových nebo bromových par, jejichž účinek je týž jako látek organických. Pohlcování energie působí u halogenů pouze reversibilní (vratnou) disociaci dvouatomových molekul. Regenerace molekul zhašecího plynu znamená teoreticky neomezenou životnost počítače. Počítače tohoto typu slouží též nízkonapěťové, neboť pracují již asi od 300 V.

Závod, který GM počítačí trubice vyrobil, udává vždy určité pracovní napětí, kdy počítač správně funguje. K napájení laboratorních GM počítačů se obvykle používá zdroje stejnosměrného napětí 500 až 2000 voltů s plynulou regulací. Umístíme-li do blízkosti počítače radioaktivní látku, a zvyšujeme-li zvolna napětí, začne od určitého napětí indikace paprsků, jak je patrné z grafu na obr. 7. Počítač má pracovat při napětí v oblasti, kdy křivka je prakticky rovnoběžná s osou napětí, v již uvedeném sedle (plošině) počítače. Při nižších napětích je počet zaznamenaných paprsků (nebo částic) silně závislý na kolísání napájecího napětí. Při vyšším napětí by došlo k trvalému výboji mezi elektrodami a k zničení počítače. Sedlo počítače má u vysokonapěťových počítačů rozsah několika set voltů. Jeho sklon k ose napětí je velmi malý. Zkracováním sedla a zvětšováním jeho sklonu se projevuje konec životní doby GM trubice.

Vysokonapěťové počítače se samozhášecí náplní se vyrábějí v podstatě jako tři druhy počítačů: počítače alfa, beta a gama. Počítače pro detekci záření alfa a záření beta malé energie, které je pohlcováno tenkými vrstvami hmot, mají velmi tenké slídové okénko (asi 0,01 mm) s malým průměrem, aby vydrželo přetlak vzduchu.

Počítače pro detekci záření gama mají válcový tvar a jsou obvykle zhotoveny ze skla nebo z kovu (obr. 1). Anodou je tenký drát v ose trubice, katodou stříbrný povlak na vnitřní stěně pláště trubice nebo kovová stěna sama. Elektrody mohou být vyvedeny na čepičky na obou koncích trubice, nebo má počítač běžný spodek podobně jako elektronka. K měření velmi měkkého záření gama a záření korpuskulárního se tento typ počítače nehodí, neboť skleněná nebo kovová stěna trubice měkké paprsky silně pohlcuje. Proto se používá počítačů beta s velmi tenkou skleněnou nebo kovovou stěnou (0,2 až 0,3 mm), nebo se slídovým okénkem. K měření preparátů vysílajících částice beta jsou zvláště vhodné počítače beta „zvonkového“ tvaru se slídovým okénkem, zvané také okénkové počítače (obr. 2). Slídová fólie (asi 0,02 mm) je přitmelena v čele trubice. Anodou je drátek upevněný pouze na jednom konci a před slídovým okénkem je ukončen malou skleněnou kuličkou. S trubicemi s okénky zvláště s trubicemi alfa je třeba zacházet velmi opatrně, neboť tenká okénka jsou vystavena přetlaku a ničí se i dotekem. Při měření musí být počítač upevněn ve vhodném držáku, při uskladnění nutno jej přechovávat v tuhé krabici vyložené vatou.

Nízkonapěťové počítače s náplní halogenových par se obvykle vyrábějí ze skla, s tloušťkou stěny a tvarem přizpůsobenými k příslušnému použití.

Celkově je možno GM počítače charakterizovat těmito vlastnostmi: výška impulsu nezávisí od primární ionizace, účinnost pro paprsky gama je pouze asi 1 %, pro částice alfa a beta až 100 %. GM počítače

mají poměrně krátkou životnost a poměrně malou rozlišovací schopnost. Tzv. scintilační počítače pracující na jiném principu, mají dlouhou životnost, velkou rozlišovací schopnost a jsou citlivé ke všem druhům záření; zvláště k záření gama. Výška impulsu je u nich závislá na energii záření.

Podle druhu konstrukce a účelu se GM počítače dělí na obalové, kde katodou je vodivý povlak na vnitřní stěně trubice, celkové, okénkové, průtokové (pro měření radioaktivity plyných látek, zvláště sloučenin radiouhlíku C 14) a širokéhlé, jimiž lze indikovat všechny paprsky a částice vycházející z preparátu v prostrovém úhlu 2π a 4π . Takové nazýváme proto 2π počítače, popř. 4π počítače. Existují ještě i jiné počítače.

Počítače k indikaci neutronů jsou zhotoveny podobně jako počítače gama. A podobně jako komory ionizační mají vnitřní stěnu pokrytou látkou, v níž účinkem neutronů probíhá jaderná reakce, která je zdrojem ionizačního záření.

Počet impulsů v počítači je vždycky větší než odpovídá aktivitě měřeného radioaktivního vzorku, a to o tzv. pozadí neboli spontánní efekt. Také u ionizačních komor se vždycky vyskytuje spontánní proud. Počítač i v nepřítomnosti radioaktivní látky zaznamená malý počet impulsů následkem paprsků kosmických a všudepřítomných stop radioaktivních prvků, hlavně v materiálech, z nichž je počítač vyroben. Pozadí trubice je nutno určit před každým měřením i po něm a odečítat jej od celkového počtu impulsů naměřených s preparátem. Pozadí je možno snížit asi na polovinu umístěním trubice do olověného nebo barytového krytu (asi 3 až 5 cm Pb; barytový kryt je značně veliký). Četnost impulsů s preparátem zmenšená o pozadí (aktivita korigovaná), je přímo úměrná aktivitě preparátu.

U trubice se uplatňuje také geometrická účinnost, tj. počítačem prochází jen určitá část paprsků, které preparát vysílá všemi směry. Tzv. geometrie měření zřejmě závisí od vzdálenosti radioaktivního preparátu a velikosti okénka, jímž paprsky vstupují do trubice. Proto je třeba určit korekci na geometrické podmínky při měření. Rozhoduje i plošnost preparátu, kdy korekce je složitější než pro preparát prakticky bodový.

V novější době se začalo používat tzv. počítačů scintilačních (scintilace jiskření), pracujících na jiném principu než GM počítače, na principu excitace atomu, kdy elektron není z atomu vytržen (nenastává ionizace), avšak vlivem energie paprsku je posunut do vyšší energetické polohy. Na excitaci se spotřebuje přibližně stejné množství energie jak na ionizaci. Elektron nezůstává na vyšší energetické hladině, nýbrž v nepatrném zlomku sekundy se vrací do původní hladiny. Tím se energie opět uvolňuje, a to ve formě fotonu zpravidla ve viditelné části světelného záření. Na podobném jevu byl

založen na počátku našeho století C r o o k e s ů v s p i n t h a r i s k o p se sirníkem zinečnatým, na němž dopady částic alfa bylo možno pozorovat lupou jako světelné záblesky¹).

R u t h e r f o r d (čti radzerford) ještě do roku 1919 pracoval podobným primitivním zařízením a dokázal tak rozbití dusíkového jádra zasaženého částicemi alfa na jádro vodíkové (proton) a jádro izotopu kyslíku. Protony vymrštěné z jádra se projevíly světelnými záblesky ve světélkující látce.

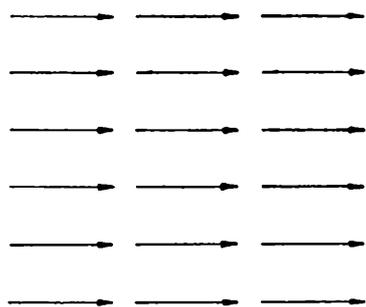
V dnešní době se záblesky již nepozorují okem a lupou, avšak pomocí f o t o n á s o b i č e se původní jejich intenzita ze s c i n t i l á t o r u zesiluje. Podobně jako u GM trubice nakonec vzniká napěťový impuls, který je elektronicky upraven a zaznamenán. Jako s c i n t i l á t o r ů se dnes používá různých látek původu anorganického, organického i plastických hmot. Čidlo paprsků může mít velmi malé rozměry a mnohem větší účinnost pro paprsky gama než GM počítače. Podrobnější vysvětlení fyzikálních základů scintilačních počítačů bude obsahem jiného článku.

Tzv. p r o p o r c i o n á l n í p o č í t a č e jsou konstrukčně shodné s GM počítači, avšak jejich pracovní napětí je nižší. Pracují v oboru p r o p o r c i o n á l n í h o z e s í l e n í. Tento obor je před počítačím oborem, v němž pracují GM počítače. Také proporcionální počítače využívají nárazové ionizace, avšak výška impulsů je úměrná primárnímu počtu iontů způsobených částicemi. Tyto počítače jsou vhodné k detekci silně ionizujících částic, protonů, částic alfa apod. Jejich účinnost pro paprsky gama je nepatrná. Výhodou je kratší zotavovací doba a delší životnost než běžných GM počítačů. Je možno jich použít k identifikaci různých částic, nebo k zjištění spektrálního složení svazku stejných částic, které se však liší svou energií, např. v nehomogenním svazku záření beta. V praxi se nejčastěji pracuje s již uvedenými, běžnými GM počítači, které pracují v G e i g e r o v ě o b l a s t i, kdy již všechny impulsy jsou stejně veliké, nezávisle na tom, kolik iontů bylo primárně částicemi vytvořeno.

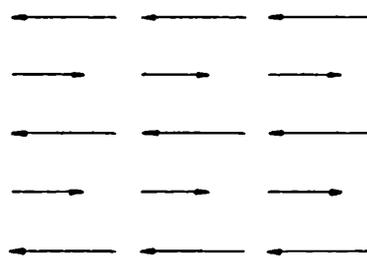
¹) C r o o k e s (čti krúks) zhotovil spinthariskop roku 1903, ale již předtím E l s t e r a G e i t e l studovali záblesky vyvolané dopadem částic alfa.

Fyzikální vlastnosti ferritů a jejich užití

I. *Úvod.* Rozvoj průmyslu, zvláště elektrotechnického, vymohl si vznik nových materiálů, které by splnily vysoké požadavky na ně kladené. Vznikla celá velká skupina látek, které se zařadily svými vlastnostmi vyplývajícími z jejich atomové struktury mezi vodiče a izolátory. Tyto látky charakterizované za normální teploty poměrně malou vodivostí, nazýváme p o l o v o d i č i. Polovodiče mají při teplotách v blízkosti absolutní nuly vlastnosti izolátorů, při vyšších teplotách mají naopak vlastnosti srovnatelné s vodiči. Z toho plyne, že vodivost polovodičů vzrůstá s rostoucí teplotou, v čemž spočívá jeden z hlavních rozdílů mezi kovy a polovodiči. Polovodiče mají různé cenné vlastnosti. Mohou např. usměrňovat a zesilovat elektrický proud, mohou vykazovat termoelektrické, fotoelektrické, ale i magnetické vlastnosti. Skupinu polovodičů s magnetickými vlastnostmi, tzv. f e r r i m a g n e t i k, tvoří f e r r i t y.



Obr. 1. Ferromagnetismus - uspořádání magnetických momentů.



Obr. 2. Ferrimagnetismus - uspořádání magnetických momentů.

II. *Teorie ferrimagnetismu.* Krystalová mřížka ferromagnetické látky¹⁾ je vytvořena atomy téhož prvku, které mají stejné a t o m o v é m a g n e t i c k é m o m e n t y (viz odst. VII. tohoto článku). Pierre Weiss¹ předpokládal, že uvnitř ferromagnetické látky existuje velmi silné molekulární pole intenzity $H_m = NJ$ (N je koeficient molekulárního pole, J magnetizace), které podporuje paralelní orientaci těchto atomových momentů. Při nízkých teplotách, při nichž je energie tepelných pohybů kT^2) malá ve srovnání s energií molekulárního pole, jsou magnetické

¹⁾ Viz K. Kraus, Ferromagnetismus z hlediska moderní fyziky, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1961/62, str. 364, 419.

momenty všech atomů rovnoběžné (obr. 1). Toto uspořádání charakterizuje **f e r r o m a g n e t i s m u s**.

Při studiu magnetických vlastností ferritů zjistil francouzský fyzik **L o u i s N e é l**, že jejich krystalová mřížka je vytvořena dvěma různými typy atomů, které zaujímají dvě krystalograficky odlišné polohy: tetraedrální polohu *A* (tetraedr - čtyřstěn) a oktaedrální (oktaedr - osmištěn) polohu *B*, a jejichž magnetické momenty jsou obecně různé. Při nízkých teplotách směřují magnetické momenty jednoho typu atomů v jednom směru, momenty druhého typu atomů jsou ve směru opačném. Proto má systém výslednou spontánní magnetizaci (viz odst. VII. tohoto článku) konečné hodnoty (obr. 2). V tomto případě mluvíme o **f e r r i m a g n e t i s m u**.

Louis Neél upravil Weissovou teorii molekulárního pole předpokladem, že molekulární pole H_m je přímo úměrné magnetickému momentu těsně sousedících atomů. Poněvadž pak mřížka ferrimagnetické látky lze rozdělit ve dvě tzv. **p o d m ř í ž k y** (podmřížka *A*, a podmřížka *B*) se spontánními magnetizacemi J_{as} , J_{bs} , nutno také uvažovat dvě molekulární pole: molekulární pole intenzity H_{ma} , působící na atomy v polohách *A*, a molekulární pole H_{mb} , které působí na atomy v polohách *B*. Pro tato pole platí vztahy

$$H_{ma} = n_{aa} J_{as} + n_{ab} J_{bs} \quad (1)$$

$$H_{mb} = n_{ba} J_{as} + n_{bb} J_{bs} \quad (2)$$

v nichž n_{aa} , n_{bb} , $n_{ab} = n_{ba}$ jsou koeficienty molekulárního pole reprezentující interakce vzájemné působení mezi podmřížkami, které jsou trojího druhu: *A — A*, *B — B*, *A — B*.

Z hlediska magnetismu jsou meziatomové interakce nejučinnější, jestliže působí mezi jedním iontem v poloze *A* a jedním v poloze *B*. Tyto *A — B* interakce jsou negativní a mají snahu orientovat atomové magnetické momenty antiparalelně. Podstatně slabší jsou zpravidla negativní interakce mezi atomy, které zaujímají tutéž polohu: tedy interakce *A — A*, *B — B*.

Právě v důsledku silných negativních interakcí *A — B* je mřížka při nízkých teplotách rozdělena ve dvě podmřížky, z nichž jedna obsahuje pouze polohy *A*, druhá pouze polohy *B*.

Koeficient n_{ab} je tudíž negativní a veliký ve srovnání s koeficienty n_{aa} , n_{bb} . Spontánní magnetizace J_{as} , J_{bs} podmřížek *A*, *B* jsou pak orientovány antiparalelně a výsledná spontánní magnetizace J_s je dána jejich aritmetickým rozdílem

$$J_s = J_{as} - J_{bs}, \quad (3)$$

²⁾ *k* je Boltzmannova konstanta, *T* absolutní teplota.

když $J_{as} < J_{bs}$. Tvrzením (3) je také zhruba vysvětlena podstata ferrimagnetismu.

Všimněme si dále závislosti výsledné spontánní magnetizace J_s na absolutní teplotě T , která je charakteristická pro většinu ferritů. Ze studia ferromagnetismu je známo, že při zcela určité teplotě, zvané Curieův bod³⁾, ztrácí látka ferromagnetické vlastnosti a stává se látkou paramagnetickou, což znamená, že její spontánní magnetizace je při této teplotě rovna nule. U ferritů byly však zjištěny dvě teploty, při nichž výsledná spontánní magnetizace je nulová. Jsou to kompenzační teplota T_k a Curieova teplota T_c . Mezi těmito teplotami je však podstatný rozdíl.

Uvažme například, že při teplotách nižších než T_k je spontánní magnetizace J_{as} větší než spontánní magnetizace J_{bs} . Při teplotách nad T_k je tomu obráceně: $J_{bs} > J_{as}$, z čehož lze usoudit, že při kompenzační teplotě mění spontánní magnetizace obou podmřížek svoje znaménka. Při kompenzační teplotě musí tudíž být absolutní hodnoty obou spontánních magnetizací sobě rovny, což vzhledem ke vztahu (3) dává $J_s = 0$.

Toto tvrzení lze také potvrdit tímto celkem jednoduchým pokusem. Při teplotě nižší než T_k dáme vzorku ferritu určitou remanentní magnetizaci. Vyhřejeme-li pak vzorek na teplotu T , pro níž platí $T_k < T < T_c$, zjistíme, že při teplotě T_k změní remanentní magnetizace spontánně své znaménko.

Tento pokus je současně nepřímým ověřením existence dvou podmřížek.

Při Curieově teplotě naproti tomu je jak $J_{as} = 0$, tak i $J_{bs} = 0$, čili $J_s = 0$. Zobrazíme-li pak uvedenou závislost $J_s - T$ graficky, dostaneme křivku podle obr. 3. Spontánní magnetizace J_s s rostoucí teplotou T klesá a nabývá prvně nulové hodnoty při T_k . Při dalším ohřátí vzorku stoupá magnetizace znova, projde maximem a nabude konečné nulové hodnoty při Curieově teplotě T_c .

III. *Rozdělení ferritů.* Podle struktury můžeme ferrity rozdělit v zásadě do tří skupin:

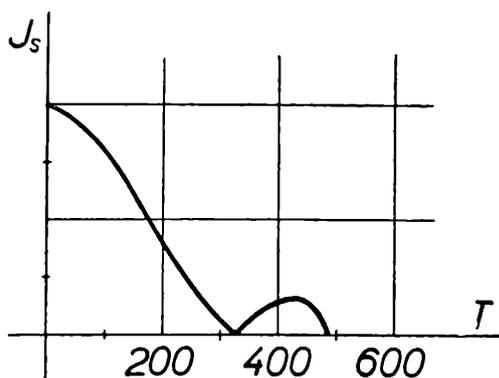
1. ferrity se spinelovou strukturou - s p i n e l y,
2. ferrity s hexagonální (šesterečnou) strukturou,
3. ferrity s granátovou strukturou - g r a n á t y.

1. *Ferrity se spinelovou strukturou.* Ferrity této skupiny jsou vyjádřeny obecným vztahem $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{MO}$, kde M značí dvojmocný kov Mn, Fe, Co, Ni, Zn, Cd, Mg, Cu, nebo kombinace iontů těchto kovů.

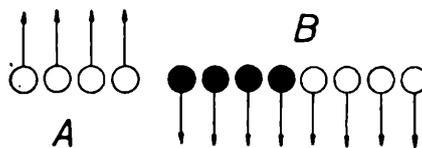
Spinelová struktura je složitý typ struktury kubické (krychlové) mřížkově konstanta je $\alpha = 8,37 \text{ \AA}$ (viz odst. VII. tohoto článku).

³⁾ Viz Inž. L. Smrž, Curieův bod, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1961/62, str. 280.

Jak již bylo řečeno, můžeme mřížku rozdělit ve dvě podmřížky. Z toho pak vyplývá, že kovové ionty mohou zaujímat dva krystalografické odlišné typy poloh, a to polohy *A* a polohy *B*. Jedna molekula mřížky má jednu tetraedrální polohu *A* obklopenou 4 atomy kyslíku a dvě oktaedrální polohy *B* obklopené 6 atomy kyslíku. Mřížka pak obsahuje 8 poloh *A* a 16 poloh *B* což znamená, že v mřížce je 8dvojmocných iontů M^{++} , 16 trojmocných iontů Fe^{+++} a 32 iontů O^{--} . Podle toho, kterou polohu zaujmají dvojmocné ionty M^{++} a kterou trojmocné ionty Fe^{+++} , rozdělujeme dále spinelové ferrity do tří skupin:



Obr. 3. Závislost $I_s - T$



Obr. 4. Ferrity spinelové inverzní).

a) Spinelové ferrity inverzní, např. molekula magnetitu, tj. ferritu železnatého Fe_2O_3 . FeO se skládá z jednohodvojmocného iontu Fe^{++} a ze dvou trojmocných iontů Fe^{+++} ; možno psát $Fe_3O_4 = Fe^{++}O_3^{--} + Fe_2^{+++}O_3^{--}$. Bylo dokázáno, že jeden iont Fe^{+++} je poloze *A*, jedna z poloh *B* je obsazena dvojmocným iontem Fe^{++} , druhá trojmocným iontem Fe^{+++} . Řekli jsme, že *A* – *B* interakce, které převažují nad interakcemi *A* – *A*, resp. *B* – *B*, jsou negativní, tzn. mají snahu orientovat magnetické momenty atomů v polohách *A* a *B* antiparalelně. To tedy znamená, že magnetický moment iontu Fe^{+++} v poloze *A* ruší moment iontu Fe^{+++} v poloze *B*, poněvadž jsou oba přesně stejně veliké a mají opačný smysl. Molekulární moment je tudíž dán magnetickým momentem dvojmocného iontu Fe^{++} v poloze *B*, tedy obecně momentem *M*-iontu. Mřížka spinelového inverzního ferritu obsahuje 8 dvojmocných iontů M^{++} , které zaujmají 8 poloh *B* a 16 trojmocných iontů Fe^{+++} , z nichž 8 zaujímá 8 poloh *A* a 8 zbývajících 8 poloh *B*. Schematicky je toto uspořádání znázorněno na obr. 4, z něhož je patrné, že spinelové ferrity inverzní jsou magnetické. Jsou to ferrity

Fe_2O_3FeO - ferrit železnatý,

Fe_2O_3CoO - ferrit kobaltnatý,

Fe_2O_3NiO - ferrit nikelnatý,

Fe_2O_3MgO - ferrit hořečnatý,

Fe_2O_3MnO - ferrit manganatý.

(Pokračování)

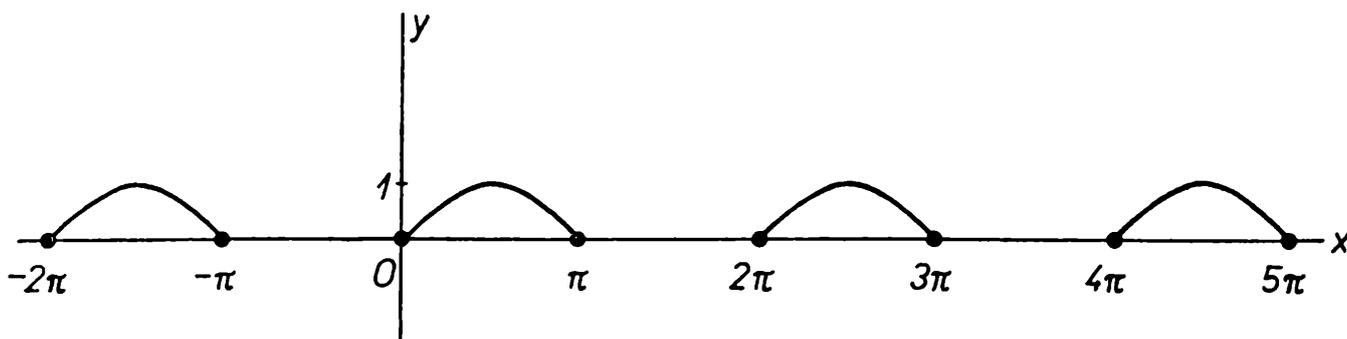
¹⁾ Pro názornost jsou obrázky 4 až 7 kresleny s polovičním počtem iontů v jednotlivých polohách.

funkce je tedy množina všech x , pro něž $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$ (kde za k možno dosadit libovolné celé číslo). Pro všechna x z této množiny je

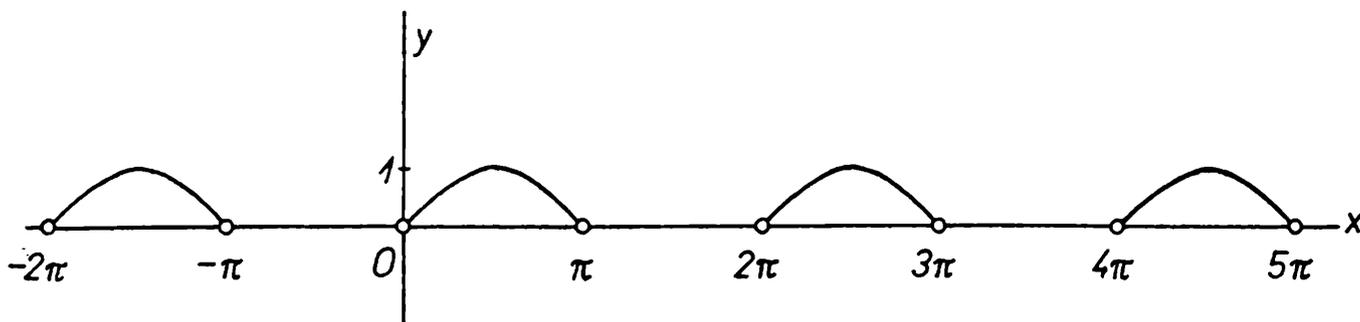
$$\left(y = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x} = \sin x \right)$$

Graf této funkce viz na obr. 2.

Plnými (prázdnými) kolečky na obr. 1 (na obr. 2) vyznačujeme to, že body $[k\pi, 0]$ patří (nepatří) k příslušnému grafu.



Obr. 1



Obr. 2

Fyzika:

4. V trubici kruhového průřezu (vnitřní průměr $2r = 30$ mm) tvaru (obr. 1) je uložena ocelová koule (hustoty $\rho = 8,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), jež se v trubici může volně pohybovat (třecí odpory při pohybu zanedbáváme). Přitom předpokládejme, že v místě styku koule s vnitřní stěnou trubice je mezi oběma tak malá mezera, že styk můžeme pokládat za vzduchotěsný. Ve svislé větvi trubice je normální barometrický tlak ($b = 760$ torrů). Má se vypočítat, na jaký tlak p (v newtonech na čtvereční metr $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$) musíme připojit vodorovnou větev trubice, aby se koule ustavila v obloukové části trubice do výšky $h = 100$ mm. Podle obrázku rozumíme touto výškou h svislou odlehlost těžiště koule od osy vodorovné větve trubice. Přitom je poloměr oblouku trubice $R = 200$ mm. Tíhové zrychlení volně rovné $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Václav Šindelář

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Lubomír Vašek, 2. e, SVVŠ, Gottwaldov:

Váha mg ocelové koule (v dané poloze ve výšce h) se rozkládá ve dvě složky F_1 a F_2 . Síla F_2 je rušena pevností stěny trubice, takže na velikost tlaku p má vliv jen síla F_1 . Její velikost je zřejmě

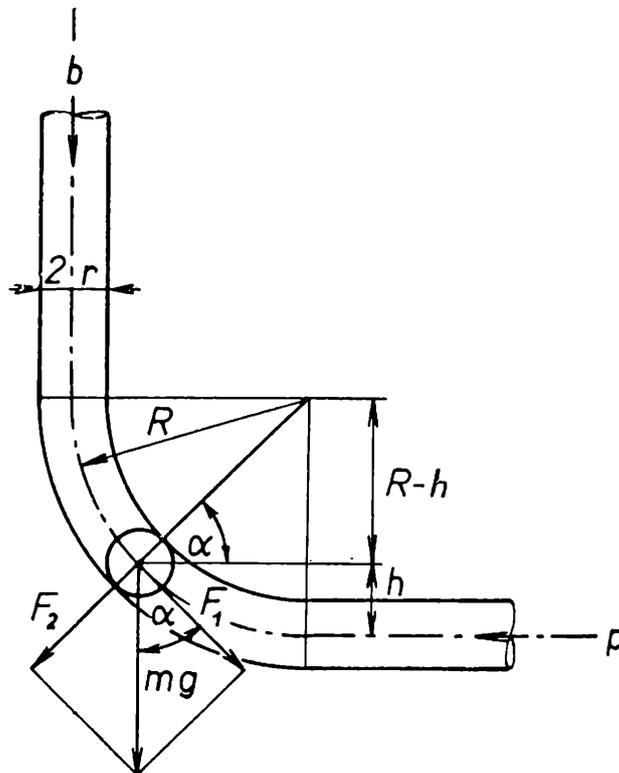
$$F_1 = mg \cdot \cos \alpha . \quad (1)$$

Poněvadž

$$\sin \alpha = \frac{R - h}{R} ,$$

jest

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{R - h}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R} . \quad (2)$$



Obr. 1

P o z n á m k a Jak správně uvádí řešitel Fr. Hrnčíř, je úhel α roven 45° .

Hmotu m koule můžeme vyjádřit vztahem

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad (3)$$

Dosadíme-li (2) a (3) do (1), dostaneme

$$F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R}$$

Celková tlaková síla F_p , způsobená hledaným tlakem p

$$F_p = \pi r^2 \cdot p$$

musí být rovna součtu tlakové síly F_b , způsobené barometrickým tlakem b

$$F_b = \pi r^2 \cdot b$$

a síly F_1 .

Platí tedy

$$\pi r^2 \cdot p = \pi r^2 b + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \cdot \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R},$$

odkud

$$p = \frac{4}{3} r \rho g \cdot \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R} + b \quad (4)$$

Dané hodnoty převedeme do soustavy MKSA:

$$r = 15 \text{ mm} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad \rho = 8,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \quad g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \\ R = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}; \quad h = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}; \quad b = 760 \text{ torrů} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

a dosadíme-li do (4), bude

$$p = \frac{4}{3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 8,7 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 0,1 - 0,01}}{0,2} + \\ + 1,013 \cdot 10^5 \doteq 1,03 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

5. Ve svislé trubici (délky $L = 1 \text{ m}$) vnitřního průměru $2r = 10 \text{ mm}$ je válcový píst délky $l = 20 \text{ mm}$ z materiálu hustoty $\rho = 2,7 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ (hliník). Píst je těsný, jakékoliv odpory při jeho pohybu v trubici pomíjíme. Nad pístem je stálý tlak $b = 760 \text{ torrů}$. Spodním koncem je trubice připojena na velkou nádobu, v níž je stálý tlak $p = 2 \text{ atm}$. Je-li píst na začátku sledovaného děje na spodním konci svislé trubice a je-li uvolněn, počne se pohybovat směrem vzhůru. Máme určit: a) jaký bude pohyb pístu v trubici a b) jakou rychlostí v opustí píst trubici.

Václav Šindelář

(Došlo 13 řešení.)

Řešil Lubomír Vašek, 2. e, SVVŠ, Gottwaldov:

a) Na píst působí shora barometrický tlak b . Dolů tedy působí síla F_1 rovná součtu váhy pístu a barometrického tlaku. Tedy

$$F_1 = mg + b \cdot \pi r^2,$$

kde m je hmota pístu. Nahoru působí síla

$$F_2 = p \cdot \pi r^2$$

Výsledná síla F , působící na píst směrem vzhůru, je

$$F = F_2 - F_1 = p \cdot \pi \cdot r^2 - (mg + b \cdot \pi \cdot r^2). \quad (1)$$

Poněvadž síla F zůstává po dobu pohybu uvnitř trubice stálá (tlak p je stálý), jde zřejmě o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Pro pohyb rovnoměrně zrychlený platí Newtonův 2. pohybový zákon, který můžeme psát ve tvaru

$$F = m \cdot a,$$

kde a je zrychlení daného pohybu.

Můžeme tedy výraz (1) psát ve tvaru

$$m \cdot a = p \cdot \pi \cdot r^2 - (mg + b \cdot \pi \cdot r^2),$$

odkud

$$a = \frac{r^2 (p - b)}{m} - g \quad (2)$$

Poněvadž hmota (hmotnost) m pístu jest

$$m = \pi r^2 \cdot l \cdot \rho,$$

lze dosadit do (2) a dostaneme

$$a = \frac{p - b}{l \cdot \rho} - g \quad (3)$$

Můžeme tedy říci: Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením a , které je dáno vztahem (3).

b) Pro dráhu L pohybu rovnoměrně zrychleného platí

$$L = \frac{1}{2} a \cdot t^2,$$

kde t je doba, po kterou pohyb trvá. Odtud je

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \quad (4)$$

Pro hledanou rychlost v platí

$$v = a \cdot t$$

Dosadíme-li (4), dostaneme

$$v = a \cdot \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{2La}$$

Dosadíme za a ze (3) a dostaneme

$$v = \sqrt{2L \cdot \left(\frac{p - b}{l \cdot \rho} - g \right)}. \quad (5)$$

Dané hodnoty převedeme do soustavy MKSA:

$L = 1 \text{ m}$; $r = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; $l = 20 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $\rho = 2,7 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $b = 760 \text{ torrů} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$; $p = 2 \text{ atm} = 2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a dosadíme do (5):

$$v = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 - 1,013 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,7 \cdot 10^3} - 9,81 \right)} = \doteq 61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Matematické zábavy

Milan Koman, Praha:

Pohádka o králi, jablkách a dvou koších



Vymyslel jsem si pro vás pohádku. Začíná stejně jako mnoho jiných starých pohádek.

Před dávnými a dávnými lety, za devatero horami a devatero řekami žil starý král. Tento starý král měl dva syny, staršího Miroslava a mladšího Jaromíra. Jednoho dne si je dal k sobě zavolat a pravil: „Milí moji synové. Jsem již stár a je čas, abyste se po mně ujali mého království. Zde vidíte dva koše. V prvním je sedm zlatých jablek, druhý je prázdný. Každé z jablek představuje jedno knížectví, ze kterého se skládá moje království. O jablka a tedy o knížectví se nyní rozdělte.

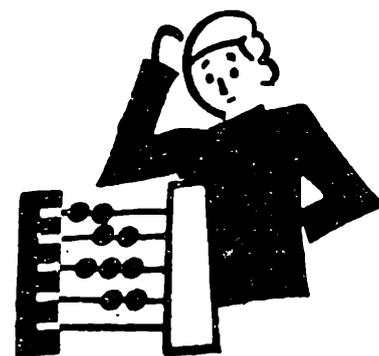
Budete střídavě přemísťovat z plného koše podle svého vlastního uvážení, buď jedno, nebo dvě, anebo tři jablka do druhého koše. Avšak ten, kdo bude brát z prvního koše poslední jablko, je již nebude dávat do druhého koše, ale ponechá si je. Potom druhý z vás zahájí obdobnou hru se zbylými jablky. Celý postup budete opakovat tak dlouho, pokud se o všechna jablka nerozdělíte. Nuže, Miroslave, začni!“

Konec pohádky vám zatím zamlčím. Věřím, že sami zjistíte, který ze synů si mohl promyšleným postupem zajistit větší část otcova království. Napište nám o tom!

Matematika

Inž. Emanuel Klier, Plzeň:

Lagrangeův důkaz poučky Wilsonovy a Fermatovy



V dnes již dávno zapomenutém spisu *Základové nauky o číslech*. Pro milovníky počtářství vůbec a studující zvláště sepsal dr. F. J. Studnička, profesor matematiky na c. k. vysokých školách Karlo-Ferdinandských. V Praze, 1875, je na str. 97 a dále uveden Lagrangeův důkaz poučky Wilsonovy a Fermatovy podle *Mémorial de Berlin*, 1771, str. 125. O tomto důkaze píše Studnička, že je méně přiměřený nauce o číslech, poněvadž není založen pouze na úvahách čistě číselně teoretických, je však všeobecnější, než jiné důkazy.

V úpravě přiměřené čtenářům tohoto časopisu podám Lagrangeův (čti Lagránž-) důkaz, z něhož je zřejma genialita Lagrangeova, který jakoby mimochodem dokáže různé poučky, v textu označené A, B, C, D. Přitom poučka Fermatova jeví se jako speciální případ obecnější poučky Lagrange - Wilsonovy.

Joseph Louis Lagrange (1736 až 1813) narodil se v Turině. Po krátké návštěvě university stal se v 17 letech profesorem matematiky na dělostřelecké škole. V roce 1766 přichází do Berlína na pozvání Bedřicha Velikého, kde zaujímá místo po Eulerovi jako ředitel matematické třídy Berlínské akademie věd. Z té doby pochází jeho důkaz Wilsonovy poučky. V roce 1787 odchází do Paříže jako profesor matematiky na *École normale* a *École polytechnique*. Vedle Eulera je největší matematik, zvláště analytik, doby před Gaussem.

Základní rovnice. Učiníme pouze tyto dva předpoklady:

1. Číslo p je dané prvočíslo.
 2. Číslo x je zcela libovolné (kladné, záporné lomené, komplexní atd.).
- Vyjdeme od součinu

$$\prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+p-1) \quad [1]$$

Po roznásobení bude

$$\prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = x^{p-1} + C_1 x^{p-2} + \dots + C_{p-2} x + C_{p-1} \quad [2]$$

Přitom C_i je součet součinů čísel od 1 do $p-1$ po i číslech.

Např.

$$C_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1).$$

To však je součet $p-1$ členů aritmetické posloupnosti

$$C_1 = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Poněvadž $p-1$ je sudé, je C_1 dělitelno p .

$$C_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot (p-1) + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots$$

$$C_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot (p-2)(p-1) + \dots$$

$$C_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) = (p-1)!$$

Ukážeme, že všechna C_i jsou dělitelna p kromě C_{p-1} , jak je zřejmo z poslední rovnice.

Součin [1], resp. [2] přetvoříme dvojím způsobem na součin $\prod_{k=1}^p (x+k)$.

1. Násobíme-li [1] dvojklenem $(x+p)$ a užijeme [2], bude

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^p (x+k) &= (x+1)(x+2) \dots (x+p) = \\ &= (x+p) [x^{p-1} + C_1 x^{p-2} + \dots + C_{p-1}]. \end{aligned} \quad [3]$$

2. V rovnici [1] pišme $(x+1)$ místo x a dostaneme užitím [2]

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{p-1} (x+1+k) &= (x+2)(x+3) \dots (x+p) = \\ &= (x+1)^{p-1} + C_1 (x+1)^{p-2} + \dots + C_{p-1}. \end{aligned}$$

Tato rovnice násobena $(x+1)$ dává

$$\prod_{k=1}^p (x+k) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+p) = \\ = (x+1)^p + C_1(x+1)^{p-1} + \dots + C_{p-1}(x+1) \quad [4]$$

Tím dostáváme pro $\prod_{k=1}^p (x+k)$ dva výrazy [3], [4], které po roznáso-
bení a rozvinutí dle binomické poučky zní

$$\left. \begin{aligned} & x^p + C_1 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + C_3 x^{p-3} + \dots + C_{p-1} x \\ & + p x^{p-1} + p C_1 x^{p-2} + p C_2 x^{p-3} + \dots + p C_{p-2} x + p C_{p-1} \end{aligned} \right\} [3']$$

$$\left. \begin{aligned} & x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \binom{p}{3} x^{p-3} + \dots + p \cdot x + 1 \\ & + \binom{p-1}{0} C_1 x^{p-1} + \binom{p-1}{1} C_1 x^{p-2} + \binom{p-1}{2} C_1 x^{p-3} + \dots + \\ & \quad + (p-1) C_1 x + C_1 + \\ & + \binom{p-2}{0} C_2 x^{p-2} + \binom{p-2}{1} C_2 x^{p-3} + \dots + (p-2) C_2 x + C_2 + \\ & \quad + \binom{p-3}{0} C_3 x^{p-3} + \dots + (p-3) C_3 x + C_3 + \\ & \quad + C_{p-1} x + C_{p-1} \end{aligned} \right\} [4']$$

Poněvadž výrazy [3'] a [4'] jsou si rovny pro jakékoliv x , musí si být
rovny koeficienty při těchto mocninách v obou výrazech, takže při
mocnině x^{p-i} bude

$$C_i + p C_{i-1} = \binom{p}{i} + \binom{p-1}{i-1} C_1 + \binom{p-2}{i-2} C_2 + \dots + \\ + \binom{p-(i-2)}{i-(i-2)} C_{i-2} + \binom{p-(i-1)}{i-(i-1)} C_{i-1} + \binom{p-i}{i-i} C_i \quad [5]$$

čili

$$(i-1) C_{i-1} = \binom{p}{i} + \binom{p-1}{i-1} C_1 + \binom{p-2}{i-2} C_2 + \dots + \\ + \binom{p-(i-2)}{i-(i-2)} C_{i-2} \quad [6]$$

Určení koeficientů C_i . V rovnici [6] kladme postupně $i = 2, 3, \dots, p$
a dostaneme

$$\left. \begin{aligned}
C_1 &= \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \\
2C_2 &= \binom{p}{3} + \binom{p-1}{2} C_1 \\
3C_3 &= \binom{p}{4} + \binom{p-1}{3} C_1 + \binom{p-2}{2} C_2 \\
(p-1)C_{p-1} &= 1 + C_1 + C_2 + \dots + C_{p-2}.
\end{aligned} \right\} [7]$$

C_1 je, jak jsme již i dříve shledali, dělitelno p . Poněvadž každý binomický koeficient $\binom{p}{k}$ je dělitelný p , ježto p se nemůže zkrátit se žádným číslem jmenovatele a protože každé předchozí C_i je dělitelno p , jsou všechna C_i dělitelna p , což ve vhodné symbolice píšeme.

$$Z \frac{C_i}{p} = 0$$

a čteme: Zbytek vzniklý dělením čísla C_i číslem p se rovná nule.

Poučka Wilsonova. Poslední z rovnic [7] dostaneme také srovnáním členů bez x (absolutních členů) rovnic [3'], [4'] a můžeme ji napsat ve tvaru

$$C_{p-1} + 1 = p C_{p-1} - (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{p-2}).$$

Pravá strana je dělitelna p , takže musí být

$$C_{p-1} + 1 = (p-1)! + 1$$

dělitelno p , čili

$$Z \frac{(p-1)! + 1}{p} = 0, \quad [8]$$

což je poučka Wilsonova. Je to výjimka z pravidla o dělitelnosti koeficientů C_i prvočíslem p . C_{p-1} stane se teprve zvětšením o 1 dělitelným p .

Je zajímavé, že tuto poučku Wilson nedokázal. Nedokázal ji ani Waring, který mu ji koncem 18. století předložil. Důkaz podali Lagrange, Euler a později i jiní.

Příklad. Pro $p = 5$ máme

$$C_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 5 \cdot 2,$$

$$C_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 5 \cdot 7,$$

$$C_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 10,$$

$$C_4 + 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 24 + 1 = 5 \cdot 5.$$

Wilsonova poučka rozšířená Lagrangem. Při důkazu věty Wilsonovy vypadlo číslo x úplně z počtu. Vraťme se však k rovnicím [1], resp. [2] a pišme je ve tvaru

$$x^{p-1} - 1 - \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = -C_1 x^{p-2} - \dots - (C_{p-1} + 1).$$

Podle dosud uvedeného je pravá strana dělitelná p , tedy i strana levá a máme Wilsonovu poučku rozšířenou Lagrangem

$$Z \frac{x^{p-1} - 1 - \prod_{k=1}^{p-1} (x+k)}{p} = 0. \quad [9]$$

Příklad. Pro $p = 3$, $x = -\frac{\pi}{2}$ je

$$\begin{aligned} Z \frac{\frac{\pi^2}{4} - 1 - \left(-\frac{\pi}{2} + 1\right) \left(-\frac{\pi}{2} + 2\right)}{3} &= Z \frac{\left(-1 + \frac{3\pi}{2} - 2\right)}{3} = \\ &= Z \frac{3 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{3} = 0. \end{aligned}$$

Poučka Fermatova je speciální případ věty předchozí. Budiž x od nuly různé, celé, kladné nebo záporné a nesoudělné s p (x není celistvým násobkem p). Pak dělení čísla x číslem p zní

$$\frac{x}{p} = m + \frac{z}{p},$$

kde m je celé číslo a zbytek z může nabýt hodnot od 1 do $p-1$. Je tedy z vždy menší než p . To, oč je menší než p , označme p' , takže p' může nabýt hodnot mezi $p-1$ a 1 až

$$\frac{x}{p} = m + \frac{p-p'}{p},$$

čili

$$x + p' = p(m+1). \quad [10]$$

V součinu [1] se nutně vyskytne faktor $x + p'$ a dle [10] je tedy celý součin dělitelný p . Proto [9] se zredukuje na větu Fermatovu

$$Z \frac{x^{p-1} - 1}{p} = 0. \quad [11]$$

Že předešlá úvaha platí i pro záporné x , potvrzuje [11], neboť mocnitél

$p - 1$ je sudý a tudíž výsledek pro kladné i záporné x je týž.

Příklad. Pro $p = 3$, $x = \pm 5$ je

$$Z \frac{(\pm 5)^2 - 1}{3} = Z \frac{24}{3} = 0$$

Poznámky. 1. P e t r F e r m a t žil v letech 1595 až 1665. Byl parlamentním radou ve francouzském městě Toulouse. Nalezl řadu číselně teoretických pouček bez důkazu. Důkazy k nim podali teprve nejbystřejší matematikové, jako Euler aj. Některé z jeho pouček nejsou správné. Tak např., že čísla tvaru

$$2^{2^K} + 1$$

jsou prvočísla. Již pro $K = 5$ je, jak Euler dokázal,

$$2^{32} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297 = 641\ 6\ 700\ 417$$

2. Poučka [10] se nazývá m a l o u v ě t o u F e r m a t o v o u. V e l k á v ě t a F e r m a t o v a, že totiž rovnici $x^n + y^n = z^n$ není možno řešit celými čísly pro $n > 2$, není, kromě speciálních případů, dosud dokázána.

3. V některých knihách, tak např. ve zmíněné knížce Studničkové, je uvedeno

$$2^{32} + 1 = 4\ 294\ 667\ 297,$$

ač pátá číslice zpředu má být 9 (a nikoliv 6), jak mne upozornil prom. ped. Jaroslav Štingl. Jemu také děkuji za některé úpravy textu tohoto článku.

S t a n i s l a v H o r á k st. ČVUT:

Neurčitá rovnice $x^2 + y^2 = 2z^2$

I. Než přistoupíme k řešení této rovnice, řekneme si, jak vypadá řešení pythagorejské rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Její řešení je

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

Např. pro $u = 7$, $v = 4$ obdržíme

$$a = 33, \quad b = 56, \quad c = 65$$

a tato tři čísla jsou již řešením rovnice (1).

P o z n á m k a. Říkává se, že za u, v máme dosazovat čísla navzájem nesoudělná a různé parity (dvě čísla různé parity znamená, že jedno z nich je liché a druhé sudé), a to proto, abychom obdrželi tzv. p r i m i t i v n í řešení. Na příkladě si vysvětlíme, co je primitivní řešení. Rovnice (1) má řešení 3, 4, 5. To je primitivní řešení, neboť všechna tři čísla jsou nesoudělná. Naproti tomu řešení 6, 8, 10 není primitivní, neboť všechna tři čísla mají společného dělitele 2. Toto řešení obdržíme z přešlého znásobením dvěma.

II. Po tomto úvodě můžeme přistoupit k řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = 2z^2. \quad (2)$$

Této rovnici je možné dát tento tvar

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = z^2. \quad (3)$$

Rovnice (3) je však v podstatě pythagorejská rovnice (1), a proto jejím řešením je

$$\frac{x+y}{2} = u^2 - v^2, \quad \frac{x-y}{2} = 2uv, \quad z = u^2 + v^2.$$

Odtud pak snadno již dostaneme řešení rovnice (2)

$$\begin{aligned} x &= u^2 + 2uv - v^2, \\ y &= u^2 - 2uv - v^2, \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Přitom u, v jsou nesoudělná čísla různé parity proto, abychom obdrželi primitivní řešení rovnice (2).

Položme např. $u = 5, v = 4$; pak

$$x_1 = 49, y_1 = -31, z_1 = 41.$$

Poněvadž v rovnici (2) se vyskytují jen dvojmoči neznámých, můžeme psát $y_1 = 31$.

P ř í k l a d. Nechť a, b, c jsou řešením rovnice (2), tj. platí $a^2 + b^2 = 2c^2$. Sestrojme nyní trojúhelník ABC tak, aby $AB = c, AC = b, BC = a$ (volme taková řešení, aby se trojúhelník dal sestrotit). Dokažte, že o úhlech tohoto trojúhelníka při obvyklém označení platí

$$4 \sin a \sin \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$

Ř e š e n í. Pro trojúhelník ABC platí kosinová věta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Ale z textu příkladu vyplývá, že

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

a tudíž naše rovnice nabude tvaru

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 4 \cos \gamma.$$

Této rovnici dáme ještě tvar

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 \cos \gamma.$$

Ale pro každý trojúhelník platí $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$, což dosaženo do hoření rovnice dá po kratší úpravě žádaný vztah.

Cvičení 1. Pro úhel v trojúhelníku z příkladu uvedeném v textu platí

$$\cos \alpha = \frac{2 \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma}{2 \sin \beta \sin \gamma}.$$

Dokažte.

2. Jestliže čísla v rovnicích (4) mají být stranami trojúhelníka, musí platit $u \geq 4$ v. Dokažte.

3. Čtverec má stranu délky z . Nad jeho úhlopříčkou je sestrojen pythagorejský trojúhelník. Pro které čtverce, jejichž strana z je menší než 51, je úloha možná?

E v ž e n J o k l, ČVUT, Praha:

Grafická metoda umocňování a odmocňování

V tomto článku je vyložena jednoduchá metoda grafického výpočtu obecné mocniny $y = x^u$ pro racionální exponent u . Metoda využívá možnosti, jež dává graf mocninné funkce na logaritmickém papíru. Čtenář, který není obeznámen s používáním grafických papírů pro konstrukci grafů, nalezne všechny potřebné informace v článku Jak se graficky znázorňují funkce ve 4. čísle tohoto časopisu, ročník 1961/62.

Chceme-li vypočítat např. $3,256^5$, můžeme postupovat několika způsoby, jež jsou známé ze školy.

1. Příмым výpočtem, tj. násobit $3,256 \cdot 3,256 \cdot 3,256 \cdot 3,256 \cdot 3,256$, a to buď obyčejným způsobem, nebo na počítacím stroji,
2. Pomocí logaritmických tabulek.
3. Pomocí logaritmického pravítka.

Odmocňování se provádí nejčastěji pomocí logaritmování, v případě druhých a třetích odmocnin jsou však i jiné způsoby běžné.

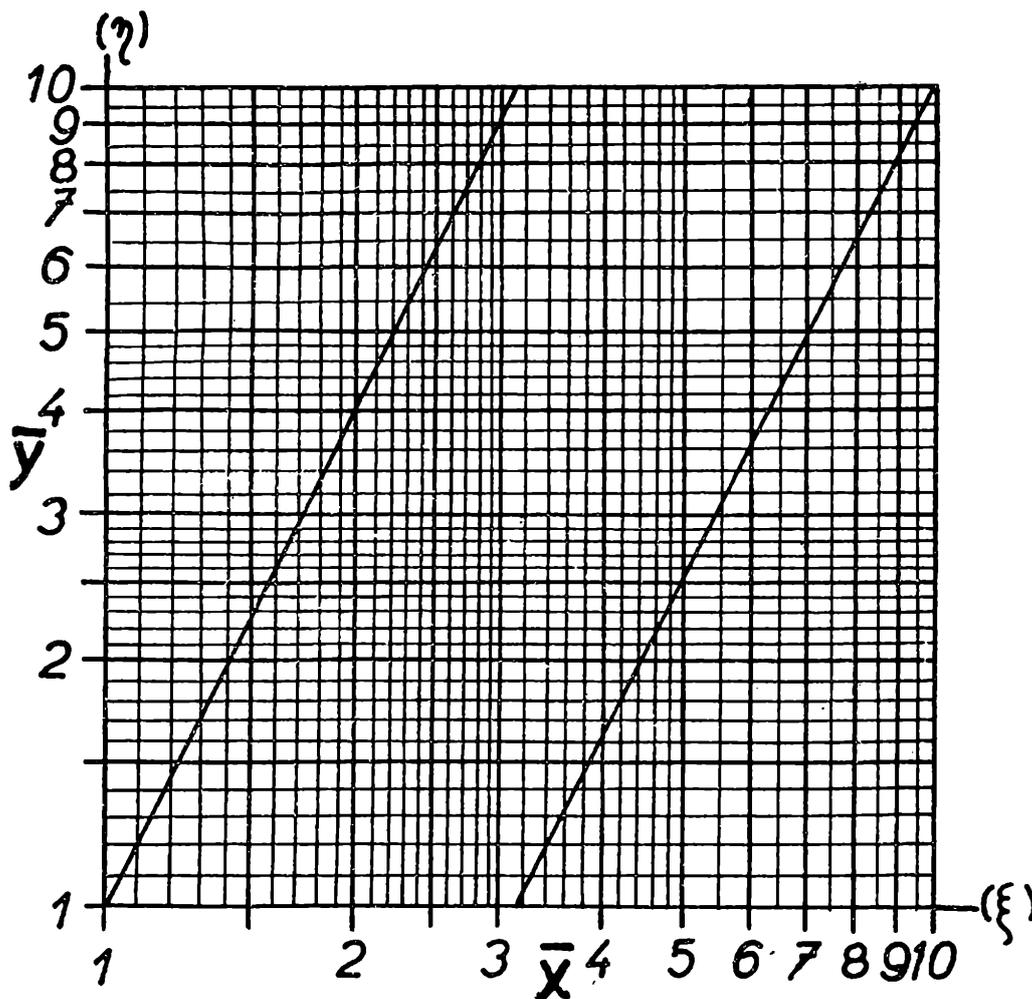
Jelikož je možno odmocninu $\sqrt[n]{x}$ chápat jako mocninu $x^{\frac{1}{n}}$, nebudeme

v dalším textu rozlišovat umocňování a odmocňování, nýbrž budeme mluvit jen o umocňování, předpokládáme, že mocnitel je racionální číslo, to znamená, že se dá psát jako podíl dvou celých čísel m, n .

Přistoupíme nyní k výkladu grafické metody, spočívající na grafickém znázornění funkce

$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad (1)$$

na logaritmickém papíru. Předpokládáme, že čtenář již ví, co je logaritmický papír, a že se na něm zobrazují mocninné funkce (tedy i (1))



Obr. 1

přímkami. Na obr. 1 je logaritmický papír o zobrazovacích rovnicích $\xi = 10 \log x, \eta = 10 \log y, 1 \leq x < 10, 1 \leq y < 10$. Funkce $y = x^2$ se na něm zobrazí úsečkou, jdoucí počátkem, o směrnici rovné dvěma. Můžeme tedy pomocí tohoto grafu nalézt bezprostředně druhou mocninu každého čísla mezi 1 a 3,16 ($\doteq \sqrt[10]{10}$). Pro čísla větší než 3,16 potřebovali bychom prodloužit graf nad horní okraj. Jelikož se však na logaritmickém papíru opakuje dělení stupnice v intervalech $\langle 1, 10 \rangle, \langle 10, 100 \rangle, \text{atd.}$, není třeba zvětšovat papír, ale stačí překotovat stupnici y (v tomto případě

násobit všechny kóty deseti) a pokračování grafu nakreslit do dřívějšího obrázku, jak je provedeno na obr. 1. Nyní můžeme určit x^2 již pro všechna x od 1 do 10. Pro x mezi 10 a 31,6 splývá příslušný graf s již nakresleným pro x od 1 do 3,16, je však třeba násobit kóty x deseti a kóty y stem. Z obrázku např. čteme $26,3^2 = 692$. Tak je možno pomocí nakreslených dvou úseček nalézt druhou mocninu kteréhokoliv kladného čísla, jestliže vynásobíme kóty x a y vhodnými mocninami deseti.

Tím je vyložena hlavní myšlenka metody, jak na omezeném papíru bude možno nalézt mocninu kteréhokoliv kladného čísla. Uvidíme, že graf funkce (1) se bude skládat z konečného počtu úseček, které se předem mohou snadno zakreslit a pak půjde vždy jen o to určit, kterou z nich je třeba vzít v úvahu (je-li jich víc nad sebou) a určit řád mocniny.

Zjistit řád daného čísla x je velmi snadné. Číslo x má řád j (řád je vždy celé číslo), platí-li $10^j \leq x < 10^{j+1}$. Tak např. 3,25 má řád 0, 32,5 má řád 1, 0,0325 má řád -2 , 100 má řád 2 atd. Každé kladné číslo x můžeme psát ve tvaru

$$x = \bar{x} \cdot 10^j, \quad (2)$$

kde \bar{x} je řádu 0 (platí tedy $1 \leq \bar{x} < 10$) a j je řád čísla x . Podobně budeme psát $y = \bar{y} \cdot 10^p$. Rovnice (1) nyní zní

$$(\bar{x} \cdot 10^j)^{\frac{m}{n}} = \bar{y} \cdot 10^p \quad (3)$$

V dalším budeme předpokládat, že v rovnici (3) jsou m , n celá nesoudělná, $n > 0$.

Praktický význam pro sestavení grafu rovnice (3) má tato věta:

Graf rovnice (3) na logaritmickém papíru $\xi = 10 \log \bar{x}$, $\eta = 10 \log \bar{y}$ se skládá z konečného počtu úseček (celkem je jich $|m| + n - 1$) o směrnici $\frac{m}{n}$, jež vytínají $|m|$ stejně dlouhých úseků na stupnici \bar{x} a n stejně dlouhých úseků na stupnici \bar{y} . Důkaz věty není obtížný.

Rovnici grafu dostaneme z (3) a z rovnic logaritmického papíru vyloučením \bar{x} , \bar{y} , což dává

$$\frac{\eta}{10} = \frac{m}{n} \frac{\xi}{10} + \frac{j m}{n} - p. \quad (4)$$

Ihned je vidět, že jde o přímky o směrnici $\frac{m}{n}$. Protínají osu (ξ) v celistvých násobcích $\frac{10}{m}$, neboť z podmínky $\eta = 0$ plyne $\xi = 10 \left(\frac{p n}{m} - j \right)$ a osu (η) v celistvých násobcích $\frac{10}{n}$, neboť z $\xi = 0$ plyne $\eta = 10 \left(\frac{j m}{n} - p \right)$.

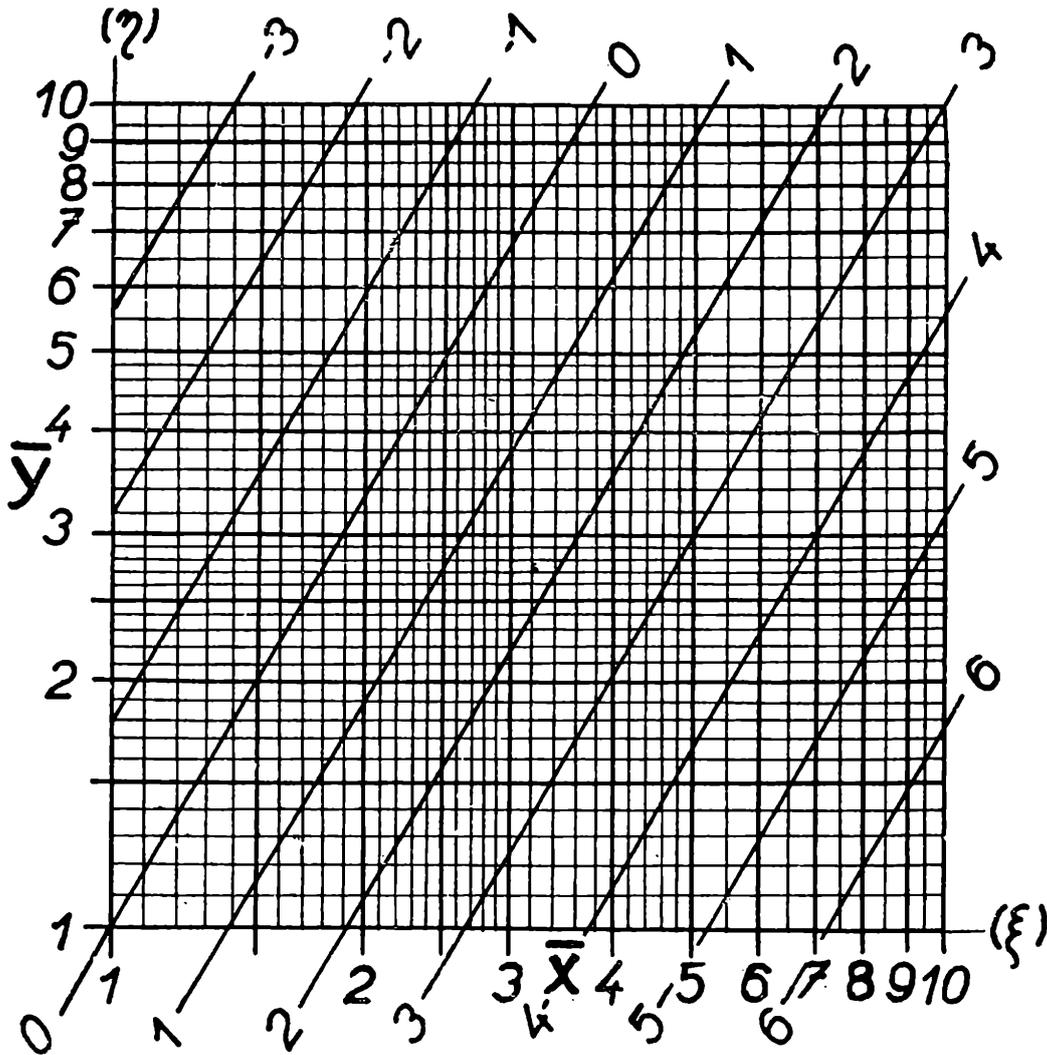
Pro další potřebu očísľujeme jednotlivé úsečky grafu. Rovnici (4) pišme takto

$$\frac{\eta}{10} = \frac{m}{n} \frac{\xi}{10} - \frac{i}{n}$$

takže číslo i je celé číslo, rovnající se

$$i = pn - jm. \quad (5)$$

Z rovnice grafu je vidět, že přímky grafu vytínají na ose (η) i -násobky



Obr. 2

úseku, dlouhého $\frac{10}{n}$, takže přímka, jdoucí počátkem, má číslo $i = 0$, přímka, která je pod ní, dostane číslo $i = +1$, atd., na opačné straně od počátku budou mít zase čísla záporná $i = -1, -2$, atd. Je-li $m > 0$, probíhá i od $-n$ do m , je-li $m < 0$, probíhá i od 0 do $m - n$. V obou případech krajní hodnoty přísluší dvěma bodům (rohům papíru), takže úseček je $|m| + n - 1$. Tím je celá věta dokázána. Na obr. 2 je příklad pro $m = 7, n = 4$, na obr. 3 pro $m = -9, n = 5$.

Místo pracného výpočtu pravé strany v (6) je možno počítat p podle vzorce

$$p = \left[\frac{k + jm}{n} \right], \quad (7)$$

kde k se zjistí takto: Vyneseme kótu \bar{x} na příslušné stupnici (tj. na dolním okraji papíru) a přečteme číslo úsečky, která probíhá nejbližše nad právě sestrojeným bodem. Výjimečně se může stát, že zmíněný bod leží právě v průsečíku některé z úseček a osy (ξ), pak vezmeme číslo právě této úsečky. Důkaz uvedeného tvrzení, že vzorce (6) a (7) jsou ekvivalentní, je poněkud náročný a čtenář jej může vynechat.

Pro číslo k platí nerovnosti

$$k \leq m \log \bar{x} < k + 1.$$

Na chvíli zavedme označení

$$k^* = m \cdot \log \bar{x} \text{ a } P = \left[\frac{k + jm}{n} \right].$$

Dokážeme, že $P = p$, kde p je definováno v (6). Platí nerovnosti

$$p \leq \frac{k^* + jm}{n}, \quad P \leq \frac{k + jm}{n} < P + 1.$$

V důsledku $k \leq k^*$ je $P \leq p$. Kdyby bylo $P < p$, pak by bylo p větší než P nejméně o jednu (obě jsou čísla celá) a musí tedy být

$$\frac{k + jm}{n} < p.$$

Je tedy

$$P \leq \frac{k + jm}{n} < p \leq \frac{k^* + jm}{n} < \frac{k + 1 + jm}{n}.$$

Z toho by plynulo

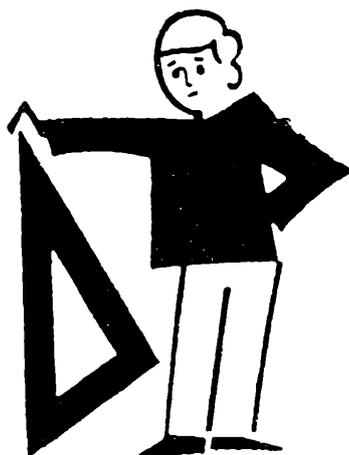
$$k + jm < pn < k + 1 + jm,$$

neboli

$$k < pn - jm < k + 1,$$

avšak mezi sousedními celými čísly nemůže být další celé číslo. Platí proto $P = p$.

(Pokračování)



Josef Glivický, Prostějov:

Poznámka k jedné úloze z konstrukcí trojúhelníka

V 3. čísle letošního ročníku *Rozhledů* byla řešena úloha:

Sestrojit trojúhelník, který je dán výškou v_a , těžnicí t_a a poloměrem ρ vepsané kružnice.

Tato úloha patří ke skupině konstruktivních úloh trojúhelníků, mezi jejichž určovacími prvky jsou poloměry kružnic opsaných a vepsaných. O takových úlohách obsírně pojednal František Hradecký v 10. čísle 36. ročníku *Rozhledů* (str. 433 a násl.) a zmíněnou úlohu řešil velmi jednoduchým způsobem na základě věty:

Přímka spojující střed strany trojúhelníka a bod na výšce jdoucí protějším vrcholem, jenž má od tohoto vrcholu vzdálenost ρ a (leží mezi patou výšky a vrcholem), prochází středem kružnice trojúhelníku vepsané.

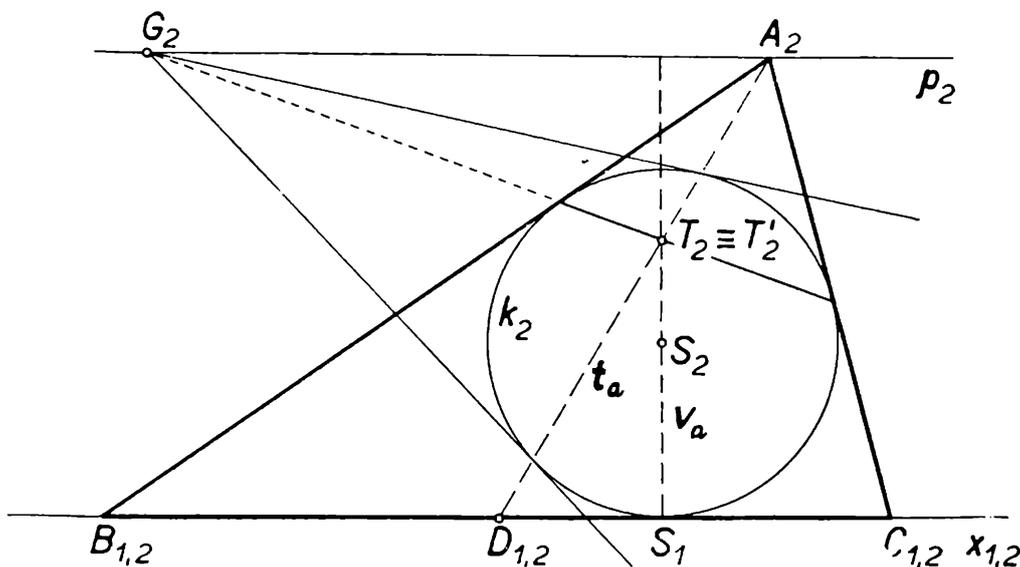
V této poznámce bych chtěl naznačit, jak je možno naši úlohu řešit na základě prostorové interpretace použitím metod deskriptivní geometrie.

Zvolme si plochu kulovou poloměru ρ , jejíž střed S leží v druhé průmětně a která se dotýká první průmětny; bod dotyku je na ose $x_{1,2}$ v bodě S_1 . V druhé průmětně zvolme také přímku p_2 rovnoběžnou s osou $x_{1,2}$ ve vzdálenosti v_a , která je množinou vrcholů A rotačních kuželových ploch opsaných dané ploše kulové. Všechny tyto rotační kuželové plochy protnou první průmětnu (za předpokladu, že $v_a > 2\rho$) v elipsách o stejné velké vedlejší ose. Tečné roviny proložené přímkou p_2 k ploše kulové protínají totiž první průmětnu ve dvou přímkách rovnoběžných s osou $x_{1,2}$ od ní stejně vzdálených. Tyto tečné roviny se dotýkají plochy kulové v bodech T a T' a jejich průměty z bodů A do první průmětny jsou vedlejšími vrcholy elips, v nichž příslušné plochy kuželové protínají první průmětnu.

Druhým průmětem plochy kulové je kružnice k_2 poloměru ρ a druhé průměty bodů T a T' jsou totožné $T_2 \equiv T'_2$ (obr. 1). Zároveň je druhý

průmět $T_2 \equiv T'_2$ pólem přímky p_2 vzhledem ke kružnici k_2 ¹⁾. Druhým průmětem jedné z ploch kuželových opsaných ploše kulové jest trojúhelník $B_{1,2} C_{1,2} A_2$. Spojnice bodu A_2 s bodem $T_2 \equiv T'_2$ protne osu $x_{1,2}$ v bodě $D_{1,2}$, který je půlícím bodem úsečky $B_{1,2} C_{1,2}$. Bodem $D_{1,2}$ prochází kolmo k druhé průmětně vedlejší osa průsečné elipsy.

Na základě toho pak již snadno provedeme konstrukci trojúhelníka z daných prvků. Ke kružnici o poloměru ρ vedeme tečnu $x_{1,2}$ a ve vzdálenosti $v_a > 2\rho$ sestrojíme rovnoběžku p_2 . Nyní určíme pól $T_2 \equiv T'_2$ této přímky vzhledem ke kružnici.²⁾ Za předpokladu, že $t_a > v_a$ vedeme bodem $T_2 \equiv T'_2$ rovnoběžku s přímkou, na které je mezi oběma rovnoběžkami p_2 a $x_{1,2}$ vyřtata úsečka délky t_a a tím obdržíme vrchol A_2 trojúhelníka $A_2 B_{1,2} C_{1,2}$. Existuje ovšem i řešení souměrné k vertikále vedené středem kružnice.



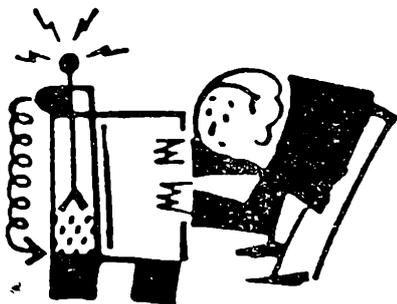
Obr. 1

Jiné řešení: Pól spojnice $A_2 D_{1,2}$ leží též na přímce p_2 . Vedeme bodem S_2 kolmici k přímce, která mezi oběma rovnoběžkami p_2 a $x_{1,2}$ vytíná úsečku délky t_a . Tato kolmice protne přímku p_2 v bodě G_2 , jehož polára je již výsledná poloha t_a procházející bodem A_2 a $D_{1,2}$.

¹⁾ P o z n á m k a. Z bodu P ležícího vně kružnice k vedte k této kružnici tečny t, u s dotykovými body T, U ; nakreslete si příslušný obrázek sami. Spojnice $p \equiv TU$ se nazývá p o l á r a bodu P vzhledem ke kružnici k . Bodu P říkáme p ó l poláry p vzhledem ke kružnici k . Lze dokázat, že leží-li bod R na poláře p , jde jemu příslušná polára r pólem P přímky p a opačně každá přímka r jdoucí bodem P má odpovídající pól R na poláře p bodu P .

Této vlastnosti uijeme pro konstrukci poláry q bodu Q ležícího uvnitř kružnice k . Vedeme jím dvě libovolné přímky p, r a určíme jejich póly P, R . Pak hledaná polára je $q \equiv PR$.

²⁾ Z bodu, ve kterém přímka $S_1 S_2$ protíná přímku p_2 , sestrojíme obě tečny ke k_2 . Spojnice bodů dotyku těchto tečen s kružnicí k_2 protne $S_1 S_2$ v hledaném pólu $T_2 \equiv T'_2$. Tato konstrukce není v obr. 1 zakreslena.



Inž. dr. Václav Šindelář, Praha:

Značení tónů v hudební akustice

Označování tónů v hudební akustice je jistě každému běžně známo jednak z fyziky, jednak z hudební výchovy. Některé podrobnosti vzniku tohoto označování jsou však již méně známy. Zmíním se o nich krátce, především si však musíme zopakovat některé pojmy, s nimiž se dále setkáme a některé základní akustické veličiny. **H u d e b n í a k u s t i k a** je dílčím oborem akustiky, pojednávajícím o zvuku se zřetelem k potřebám hudby. Patří do ní nauka o hudebních zvukových zdrojích (hudebních nástrojích) a rozbor různých hudebních **z v u k ů** či **t ó n ů** - což je hudebně výraz běžnější, ač obecně méně fyzikálně výstižný¹⁾ - **co do v ý š k y, b a r v y, i n t e n z i t y** (síly), i posuzování souzvuků.

V ý š k a z v u k u je jeho základní charakteristickou veličinou, určenou **f r e k v e n c í z v u k u**. Jednotkou, stejně jako u frekvence je 1 Hz (hertz). Stojí za zmínku, že subjektivně vnímaná výška zvuku se od objektivní poněkud liší a má také zvláštní jednotku zvanou **m e l**²⁾. Závislost mezi subjektivní a objektivní výškou byla stanovena empiricky.

B a r v a z v u k u (barvitost, zabarvení) je dána časovým průběhem výchylky kmitajícího zdroje, respektive částice prostředí, jež přenáší zvuk, a to v jedné periodě (tj. v době jednoho kmitu). Barva zvuku je závislá na tzv. **v r c h n í c h h a r m o n i c k ý c h t ó n e c h**, jež spolu s **t ó n e m z á k l a d n í m** tvoří vyšetřovaný zvuk. Všechny složky se rozumějí přitom s konstantní amplitudou. Základní tón určuje výšku a intenzitu zvuku, alikvotní složky (vrchní harmonické tóny) pak jeho barvu.

¹⁾ **T ó n e m - t é ž t ó n e m č i s t ý m** rozumíme zpravidla zvuk s čistě harmonickým časovým průběhem (tedy graficky zobrazitelný sinusovkou).

²⁾ **M e l** jako jednotka subjektivní výšky zvuků je definována jako jedna tisícinová výška zvuku frekvence 1000 Hz o hladině zvuku, rovné 40 dB (decibelů).

S intenzitou a silou zvuku je to poněkud složitější. *I n t e n z i t a* z v u k u je fyzikální objektivní veličina a je rovna zvukové energii (tj. energii zvukových vln), která projde za jednotku času jednotkovou plochou (ve vyšetřovaném místě), kolmou na směr šíření zvuku. Protože jde o energii za čas, je vlastně intezita zvuku totožná se z v u k o v ý m v ý k o n e m. Jednotka je např. $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$, neboli $W \cdot m^{-2}$, častěji se používají jednotky dílčí, jako $W \cdot cm^{-2}$ apod. Pro s u b j e k t i v n í sílu z v u k u byla navržena původně veličina, zvaná dnes h l a d i n o u z v u k u (hladinou zvukového tlaku, hladinou intenzity), vázaná s fyzikální intenzitou logaritmicky. Její jednotkou je 1 B (bel), známou jednotkou dílčí 1 dB (decibel). Přitom platí, že vzroste-li fyzikální intenzita desetkrát, stoupne hodnota hladiny zvuku o 1 bel. Objevilo se však, že s ohledem na výšku zvuků tato veličina nevystihuje subjektivní zvukový vjem správně a byla proto zavedena veličina nová, zvaná h l a d i n a h l a s i t o s t i, jako míra zvukového vjemu, rovná hladině zvuku, tzv. referenčního tónu (který má frekvenci 1000 Hz), při níž se tento zvuk (tón) jeví v místě poslechu stejně hlasitým jako vyšetřovaný zvuk. Její jednotkou je 1 Ph (fón; phon). Ani tato veličina nevystihuje správně subjektivní míru zvukového vjemu. Proto byla zavedena veličina další, zvaná h l a s i t o s t, vázaná s hladinou hlasitosti prakticky dostatečně vyhovujícím vztahem. Jednotkou hlasitosti je 1 s ó n.

Když jsme si krátce prošli charakteristické akustické parametry, vraťme se k výšce zvuku. Pro další úvahy předpokládejme zvuky s časovým průběhem harmonickým, tedy tóny. Přibližně harmonický časový průběh má např. ladička nebo flétna. Posloupnost nějakého počtu tónu o jistých hudebních intervalech nazýváme h u d e b n í s t u p n i c í (tóninou). Přitom rozumíme h u d e b n í m i n t e r v a l e m interval dvou tónů, rovný podílu jejich frekvencí. Podíl rozumí se obvykle čísla většího k menšímu (podíl je tedy větší než jedna) a obě čísla jsou jednoduchá, celistvá. Kmitočet řady tónů vzájemně odstupňovaných o stejný hudební interval tvoří g e o m e t r i c k o u ř a d u. Nejeví se nám tedy tóny o stejném rozdílu kmitočetů jako stejně výškově odlehlé. Aby tomu tak bylo, musely by mít stejný poměr kmitočetů.

U každé hudební stupnice nazýváme tón, kterým stupnice začíná, z á k l a d n í m t ó n e m. Výšky ostatních tónů stupnice pak udáváme obvykle vzhledem k tónu základnímu, tedy relativně. Jsou-li např. kmitočty několika tónů stupnice ν_1, ν_2, ν_3 atd., při čemž ν_1 je kmitočet tónu základního, jsou r e l a t i v n í v ý š k y ostatních tónů rovny

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}, \frac{\nu_3}{\nu_1}, \frac{\nu_4}{\nu_1} \text{ atd.}$$

Základní hudební stupnicí je s t u p n i c e d i a t o n i c k á, jež může být buď *tvrdá* (durová, dur) nebo *měkká* (mollová, moll). Od stupnice

diatonické se odvozuje stupnice *c h r o m a t i c k á*. Ve všech stupnicích má jejich poslední tón dvojnásobnou frekvenci proti tónu základnímu. Jeho relativní výška je zřejmě vždy rovna 2, zatím co relativní výška tónu základního je zřejmě rovna 1.

Při souzvuku tónu základního a posledního (téže stupnice) se nám zdá, jako by tón poslední byl opakováním tónu základního ve vyšší poloze. Proto je poslední tón jedné stupnice základním tónem stupnice další (vyšší), jež na předchozí navazuje atd. Souzvuk základního a posledního tónu (nebo libovolného tónu s tónem dvojnásobné frekvence proti prvnímu) je po *u n i s o n i t ě* (tj. souzvuku dvou tónů stejné frekvence) nejdokonalejším *d v o j z v u k e m*.

D i a t o n i c k á s t u p n i c e obsahuje osm tónů. Při tom podle předešlého může první (základní) tón jedné stupnice být posledním předchozí (nižší) stupnice a poslední její tón opět prvním (základním) stupnice následující (vyšší). Osm tónů jedné stupnice je možno značit římskými číslicemi a podle latiny je nazvat *p r i m a*, *s e k u n d a*, *t e r c i e*, *k v a r t a*, *k v i n t a*, *s e x t a*, *s e p t i m a* a *o k t á v a*. V následující tabulce si uvedeme relativní výšky těchto osmi tónů (vždy ve druhém řádku) a poměry relativních výšek tónů sousedních (vždy ve třetím řádku), a to pro stupnici tvrdou i měkkou.

Tab. I. *Diatonická stupnice tvrdá (a) a měkká (b)*

a	{	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
		1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
		(9/8)	(10/9)	(16/15)	(9/8)	(10/9)	(9/8)	(16/15)	
b	{	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
		1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2
		(9/8)	(16/15)	(10/9)	(9/8)	(16/15)	(9/8)	(10/9)	

Je jistě zřejmé, že poměr relativních výšek sousedních tónů je jejich intervalem. Tak např. interval dvou sousedních tónů o relativní výšce 5/4 a 4/3 je roven

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$$

Z tabulky I. je zřejmé, že tóny obou diatonických řad nejsou ekvidistantní, to znamená, že sousední tóny nemají stejné intervaly. U obou se vyskytují trojí intervaly:

$$9/8, \quad 10/9, \quad 16/15$$

Některé tóny obou stupnic jsou stejné (I, II, IV, V, VIII). Zbývající tři (III, VI, VII) jsou v mollové stupnici (proti stupnici durové) posunuty o stejný interval blíže k základnímu tónu. Jejich relativní výška

(vzhledem k základnímu tónu) je tedy m e n š í, nežli u stupnice du-rové. Proto se nazývají také m a l á t e r c i e, m a l á s e x t a a m a l á s e p t i m a. Interval, o který jsou zmíněné tři tóny posunuty blíže k základnímu tónu, si snadno vypočteme. Tak např. pro tercii (viz tabulku I)

$$\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24},$$

podobně je tomu ovšem i pro sextu

$$\frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{24},$$

a podobně i pro septimu. Společně v obou diatonických stupnicích máme tedy čtyři intervaly, a to

$$\begin{array}{ll} \frac{9}{8} \text{ tzv. velký celý tón,} & \frac{10}{9} \text{ malý celý tón,} \\ \frac{16}{15} \text{ velký půltón,} & \frac{25}{24} \text{ malý půltón.} \end{array}$$

Přitom poměr frekvencí malého a velkého tónu, který je roven

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$$

se nazývá k o m a, bývá nejmenším intervalem, s kterým se prakticky v hudební akustice operuje. Hudebně cvičené ucho dovede však rozeznat ještě zlomek tohoto intervalu v mezích asi jedné třetiny až pětiny. Třetinu nebo pětinu ovšem musíme brát z logaritmů, čili mohli bychom (pro zmíněnou pětinu) psát např.

$$\frac{\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{80}}$$

K tomu, proč zlomek intervalu musíme vyjádřit právě jako zlomek logaritmu číselného vyjádření tohoto intervalu, tj. jako odmocninu příslušného poměru, dojdeme jednoduchou úvahou: Víme, že hudební interval je určen poměrem frekvence krajních tónů, které jej omezují. Představme si nyní, že na sebe navazují intervaly, vyjádřené týmž poměrem, např. $\frac{1}{10}, \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$ atd., které jsou v tomto případě omezeny posloupností tónů o frekvencích 1, 10, 100, 1000 atd., což je zřejmě posloupnost geometrická. Tuto posloupnost můžeme psát také ve tvaru $10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$. Exponenty této posloupnosti rostou podle aritmetické posloupnosti. Kdybychom nyní chtěli najít

poloviční interval vzhledem k uvedenému intervalu $\frac{1}{10}$, znamenalo by to proložit geometrickou posloupnost novými členy tak, aby nová posloupnost byla opět geometrická, ale o polovičním kvocientu, a tedy zmenšit diferenci aritmetické posloupnosti exponentů na poloviční, tj. najít posloupnosti tónů o frekvencích $10^0, 10^{\frac{1}{2}}, 10^1, 10^{\frac{3}{2}}, 10^2, 10^{\frac{5}{2}}$. Při dělení intervalu na třetiny snížila by se diference aritmetické posloupnosti exponentů na třetinu a obecně při dělení intervalu na k dílů snížila by se diference na $\frac{1}{k}$ -tou část původního rozdílu exponentů sousedních členů posloupnosti. Jinými slovy $\frac{1}{k}$ -tý díl nějakého intervalu se v číselném vyjádření objeví jako $\frac{1}{k}$ -tý díl logaritmu tohoto intervalu.

P ř í k l a d Chceme-li určit polovinu intervalu, např. mezi tóny frekvencí 1 a 10, musí tón frekvence x nějakého tónu mezi nimi dělit interval tak, aby platilo

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{10},$$

z čehož $x^2 = 10$, a tedy $x = \sqrt{10}$. Hledaný poloviční interval je

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{10} = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

Tuto rovnici můžeme psát také ve tvaru

$$2 \cdot \log x = \log 10,$$

čili

$$\log x = \frac{1}{2} \log 10,$$

z čehož opět

$$x = \sqrt{10}.$$

Kromě uvedených intervalů vyskytuje se v diatonické stupnici ještě další, poslední interval, a to poměr malého a velkého půltónu, tedy

$$\frac{16}{15} \quad \frac{25}{24} = \frac{128}{125}.$$

Všechny zde uváděné intervalové hodnoty platí pro tzv. *ladění přirozené*.

Je zajímavé, že prvním známým hudebním teoretikem byl již Pythagoras (asi 582 až 500 př. n. l.). Studoval fyzikální (tedy objektivní) základy hudebních intervalů, vnímaných sluchem (subjektivně). Používal k tomu monochordu neboli strunáku (sonometru), jenž je nejstarším a nejjednodušším akustickým zdrojem. Tohoto přístroje se dodnes používá k demonstraci, případně ke studiu chvění strun. Tvoří jej obvykle plochá dřevěná (rezonanční) skříň, dlouhá asi 1 m, na níž je napnutá struna. Napínání se provádí kolíčkem, který bývá ještě doplněn siloměrem, aby byla známa též napínací síla struny. Někdy místo kolíčku je kladka, přes níž je volný konec struny veden a je na něj připojena miska, na kterou se vkládá závaží. Pak ovšem není nutný siloměr (dynamometr).

Struna je napnuta přes dva pražce (tvaru trojbokých hranolů). Pod strunu se může vložit také posuvná kobylka. Struna se rozechvívá (příčně) buď smyčcem nebo drnkáním. Strunu můžeme rozechvít také podélně, přejíždíme-li ji podélně kouskem kůže, natřeným kalafunou. Je-li na rezonanční skříni napnuto více strun, jde o podobný přístroj, zvaný polychor. Pythagoras²⁾ určil pro libozvučné dvojzvuky, a to oktávy, kvinty a kvarty s primou poměry frekvencí příslušných tónů (tedy 2:1, 3:2, 4:3) a byl poměry takových jednoduchých čísel tak překvapen, že se snažil se svými žáky aplikovat objevené základy harmonie i na jiné objekty, jež přikládal zvláštnímu charakteru těchto čísel. Pokládal tato čísla za podstatu všech věcí a aplikace zabíhaly i do abstraktních úvah (např. harmonie sfér).

Zopakovali jsme si stručně některé základní pojmy z hudební akustiky, vysvětlili jsme si pojem tónů a řekli jsme si, jak je možno je řadit do stupnice. Zatím jsme si ovšem neřekli, který tón bereme za základní (teoreticky by jím mohl být ovšem libovolný tón) a jaké volíme pro jednotlivé tóny ve stupnici pojmenování a označení. Aby bylo možné nejširší dorozumění v hudbě, je toto pojmenování a označování do značné míry v celém světě sjednoceno a dohodnuto, vychází ovšem ze starých tradic. Aby bylo jmen i značek co nejméně, je řada tónů v celém frekvenčním oboru, používaném v hudbě, rozdělena do několika oktáv, jež vzájemně na sebe navazují. Ve všech oktávách se opakuje stejný základ jmen i značek, vzájemně jsou v různých oktávách tóny rozlišeny použitím velké a malé abecedy (u písmenového označení) a dále různými indexy, příčkami nad písmeny, čárkováním apod. Tak např. tón c první oktávy (jinak zvané jednočárkované) mohl by mít označení c , c' , c^1 , c_1 , tentýž tón ze spodní oktávy (kontraoktávy) mohl by mít označení C , C_1 , C^1 . c_{-2} apod.

²⁾ Viz dr. Č. Strouhal, Akustika a A. Libický, Stručný přehled dějin fyziky v pořádku chronologickém.

Nejběžnější je značení velkými písmeny ve třech nejspodnějších oktávách, v ostatních oktávách malými písmeny. Pořadí oktáv vyznačuje se u písmenové značky číselným indexem, a to u prvních tří oktáv v pravém rohu dole, u ostatních oktáv (s výjimkou malé oktávy, kde jsou tóny značeny písmeny bez přídavných indexů) číselným indexem v pravém rohu nad písmenem, což je ovšem do jisté míry nevhodné, protože jsme z matematiky zvyklí takto psát mocniny (např. c^3 ze třetí oktávy apod.). Zde jsme trochu předběhli. Řekli jsme si o způsobu značení tónu, ale celou *h u d e b n í a b e c e d u*, jak někdy říkáme písmenovým značkám posloupnosti tónů v jedné oktávě, dosud jsme neuvedli. Tvoří ji sedm písmen, a to

I	II	III	IV	V	VI	VII
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>

Písmena nejsou v abecedním pořádku. Původně tomu však tak bylo. Začínalo se tónem *a*, po němž následoval tón *b* a další písmena v běžném pořádku. Z tohoto *b*, psaného goticky, vzniklo transkripce (přepisování) dnešní *h*. V některých zemích se však značení *b* udrželo déle.

Běžné označování oktáv, počínaje od nejnižších tónů postupně k vyšším, je toto:

s u b k o n t r a o k t á v a (též podspodní, např. A_2), *k o n t r a o k t á v a* (spodní C_1), *v e l k á o k t á v a* (C), *m a l á o k t á v a* (*c*), *p r v n í o k t á v a* (též jednočárkovaná, např. c^1) *d r u h á o k t á v a* (dvoučárkovaná c^2), *t ř e t í o k t á v a* (tříčárkovaná, c^3), *č t v r t á o k t á v a* (čtyřčárkovaná, c^4) atd.

Základem *l a d ě n í* je šestý tón, patřící do první oktávy, tedy a^1 , zvaný komorní *a*. Jeho kmitočet je 435 Hz. V Německu se používá pro tento výchozí tón poněkud vyšší frekvence (440 Hz). Podle tohoto tónu se ladí nástroje v orchestru a udává jej též časový signál našeho rozhlasu.

Známe-li výchozí tón ladění a jeho frekvenci, dovedli bychom si vypočítat frekvence také ostatních tónů. Tak např., je-li frekvence tónu a^1 rovna $\nu = 435$ Hz, vychází (podle tabulky I) pro základní tón této oktávy c^1 frekvence

$$435 \cdot \frac{3}{5} = 261 \text{ Hz}$$

Z této frekvence bychom dovedli již vypočítat také frekvenci libovolného tónu jiného v téže oktávě, i o oktávách jiných (bylo by možno přitom vyjít také přímo od a^1). Např. frekvence tónu e^1 je rovna

$$261 \cdot \frac{5}{4} = 435 \frac{3}{4} \text{ Hz apod.}$$

Takové ladění, jež souhlasí přesně s čísly uvedenými v tabulce I, nazývá se *p ř i r o z e n é (č i s t é) l a d ě n í*. Zpívané tóny jsou v přiro-

zeném ladění, v tomto ladění umožňují hrát i smyčcové nástroje. U *piana*, varhan a v orchestrální hudbě jsou z praktických důvodů volena ladění jiná. Přitom je třeba se ještě zmínit o *st u p n i c i c h r o m a t i c k é*, u níž vznikají další tóny vkládáním do intervalů celých tónů. Nové tóny vznikají buď zvyšováním předchozího (pro rozlišení se připojuje k písmenovému označení koncovka *-is*), nebo snižováním následujícího (koncovka *-es*). Je tedy sled tónů v chromatické stupnici tento: *c, cis, des, d, dis, es, e, f, fis, ges, g, gis, as, a, ais, hes, h*. Příkladem si uvedeme frekvence několika tónů v ladění Delezennově: *f* (4/3), *fis* (45/32), *ges* (64/45), *g* (3/2) aj. U klavíru je známé *l a d ě n í t e m p e r o v a n é*, při němž jsou intervaly sousedních tónů vesměs konstantní. Zde je tento pořad tónů: *c, cis, des, d, dis = es, e, f, fis = ges, g, gis = as, a, ais = hes, h*. Počet tónů je tedy zredukován na dvanáct.

Vraťme se ještě jednou k označování tónů. Z hudební výchovy všichni známe slabikové označování stupnice tónů (někdy zvané též francouzské):

I	II	III	IV	V	VI	VII	(VIII)
<i>ut</i>	<i>re</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>(do)</i>

Původ tohoto označování je velmi starý a jeho původcem je mnich *Guido z Arezza*³⁾. Aby usnadnil zpěvní cvičení posloupnosti tónu ve stupnicích a rozeznávání celých tónů a půltónů, používal tohoto latinského hymnu:⁴⁾

*Ut queant laxis resonare figris - mira gestorum famuli tuorum
solve polluti labii reatum - Sancte Joannes.*

V této mnemotechnické⁵⁾ skladbě, které se musel každý žák dokonale naučit, jsou počáteční slabiky (které jsou v uvedeném latinském textu podtrženy) postupně vždy o celý tón výše, vyjma interval *mi-fa*, kde je ovšem půltón. Následují po sobě: *ut, re, mi, fa, sol, la* a tvořily tzv. *hexachord*. Poslední slabika *si* (pro naše nynější *h*) získala toto označení až v 16. století podle návrhu *Anselma Flanderského*. Zbývá dodat, že místo první slabiky *ut* se pohodlněji zpívá běžněji používaná slabika *do*.

³⁾ *Guido z Arezza* (zvaný latinsky *Aretinus*) narodil se r. 995 v Arezzu v Apeninách (podle některých pramenů uvádí se za rodiště Paříž). Byl mnichem benediktinského řádu v klášteře v Pompose. Zemřel r. 1050. Zreformoval notové písmo a zlepšil zpěvní techniku (viz dr. Č. Strouhal, *Akustika*).

⁴⁾ *Metrický Králův* překlad tohoto latinského hymnu zní:

„Zbožní ctitelé, aby mohli volným - hlasem zázračné tvoje skutky hlásat,
vinu hříšných rač z jejich úst jím sníti, - ó svatý Jene!“

⁵⁾ *Mnemotechnika* (technika paměti) usnadňuje zapamatovat si nějaký pojem tím, že jej sdružuje uměle s nějakým pojmem jiným, který si lze lépe zapamatovat.

Základní měřicí zařízení k počítačovým metodám

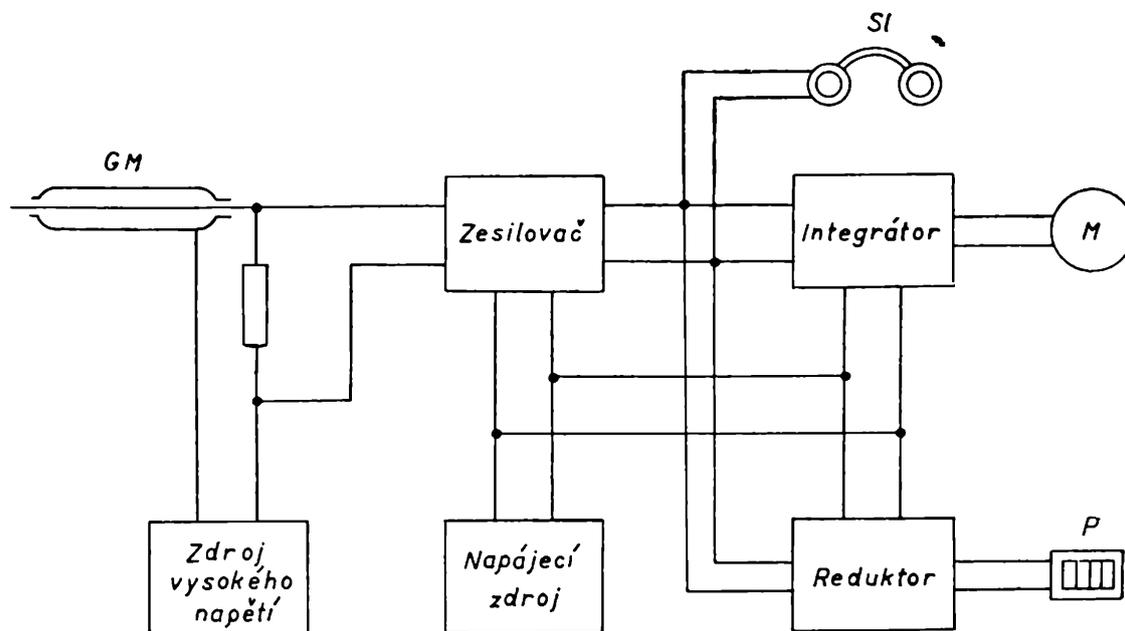
(Podstata nejzákladnějších dozimetrických přístrojů, IV. část)

U ionizačních komor se měření nepatrných proudů převádí na měření napětí běžných hodnot. Také v *GM* počítačích se impulsy proudu převádějí vhodným odporem na impulsy napětí. Odpor je zapojen do obvodu počítací trubice (obr. 1). K zesílení malých rázů napětí, jejichž počet je úměrný množství částic prošlých počítačem, užívá se střídavých elektronkových zesilovačů, v nichž se i tvar impulsů vhodně upraví na stejnou velikost. Z čidla (*GM* trubice) se impulsy vedou nejprve do zesilovače, kde se vhodně zesílí; pak projdou *diskriminátorem*, elektrickým obvodem, který potlačuje impulsy nižších amplitud než je nastavená úroveň, a propouští pouze vyšší impulsy. Ty vstupují do *obvodu tvarovacího*, který dá všem impulsům stejný tvar. Pak teprve jsou impulsy vedeny do *reduktoru impulsů*, jehož úkolem je snížit počet přicházejících impulsů v určitém poměru, aby bylo možno registrovat vyšší četnosti paprsků. Reduktory obsahují elektronické obvody s tou vlastností, že dvěma impulsům na vstupu odpovídá pouze jeden impuls na výstupu. *Reduktor binární* snižuje impulsy v poměru $1 : 2^n$, tj. $1 : 2$, $1 : 4$, $1 : 8$, $1 : 16$ atd. *Reduktor dekadický* umožňuje odečítat výsledek přímo v desítné soustavě, neboť snižuje počet impulsů v poměru $1 : 10^n$. Zapojí-li se za reduktor mechanické počítadlo, je možno redukováný počet impulsů snadno sčítat (obr. 1).

K orientačnímu sledování četnosti měřených paprsků je možno použít obyčejného sluchátka anebo signalizační doutnavky. V sluchátku se každý paprsek prošlý počítačem projeví zapraskáním, v doutnavce zábleskem.

Reduktor dekadický obsahuje větší počet elektronek než reduktor binární, avšak práce s ním je pohodlnější, neboť s odečítáním výsledků na binárním (dvojkovém) reduktoru jsou spojeny početní úkony. V poslední době jsou počítací dekády v reduktoru nahrazovány tzv. *dekatrony* nebo *počítacími elektronkami*. V redukční dekádě v reduktoru jsou čtyři dvojité triody a 10 indukčních doutnavek. To vše může nahradit nově vynalezený a již vyráběný typ elektronky, *plynový dekatron*, nebo jedna vakuová dekadická *počítací elektronka*. Znamená to i podstatné zlevnění. Pro vysoké četnosti se však dosud používá redukčních dekád s elektronkami.

K rychlému stanovení střední četnosti paprsků je možno místo reduktoru impulsů a počítadla impulsů použít integrátorového zapojení. Za zesilovač se připojuje *integrátor*, který zjišťuje průměrnou hodnotu počtu impulsů za jednotku času a udává ji výchylkou ručkového měřidla *M* (obr. 1). Integrátorové zapojení je vhodné k měření radioaktivních preparátů s větší četností impulsů a s menší požadovanou přesností měření. Měřidlo je v tomto případě zapojeno do anodového obvodu koncové elektronky; v mřížkovém obvodu je zapojen tzv. integrační *RC* článek, tj. obvod s odporem a kapacitou, jehož účinkem vzniká na mřížce napětí úměrné četnosti impulsů. Měřidlo (miliampérmetr) udává hodnotu anodového proudu, která je úměrná napětí na integrační kapacitě a tudíž i četnosti impulsů. Měřidlo je obvykle cejchováno v impulsích za minutu. Je zřejmé, že integrátor se hodí zvláště k měření vysokých četností paprsků, kdy se mění jen nepatrně střední



Obr. 1. Schéma zařízení k měření radioaktivního záření počítačem. Na obr. značí *GM* počítač, *Sl* sluchátka, *M* ručkové měřidlo, *P* mechanické počítadlo.

hodnota četnosti následkem statistických fluktuací, tj. kolísání počtu paprsků vysílaných radioaktivním preparátem za jednotku časovou.

Každý měřicí přístroj s *GM* počítačem musí obsahovat také zdroj vysokého napětí pro počítačovou trubici a napájecí zdroj pro zesilovač a ostatní zařízení.

Je zřejmé, že počítačové zařízení s *GM* počítačem může být použito k určování dávky záření i k určování četnosti paprsků neboli intenzity záření. Již jsme se zmínili o tom, že *GM* počítač zdaleka nezaznamenává jako impulsy všechny částice, které jsou z preparátu vysílány (geo-

metrická účinnost počítače). Paprsky gama mimo to ionizují poměrně řídké, takže mnohý z nich proletí trubicí a nevytvoří ani jeden pár iontů. Uplatňuje se i absorpce (pohlcování) záření ve stěnách počítače, ve vzduchu mezi zdrojem záření a počítačem a ve vlastní hmotě radioaktivního preparátu (samoabsorpce). Uplatňují se i ztráty způsobené příliš rychlým vysíláním dvou paprsků za sebou, tzv. *koincidenční chyba*, neboť přístroj není schopen rozlišit a odděleně registrovat dva impulsy, mezi nimiž je příliš krátký časový interval. Jsou ještě jiné zdroje chyb při absolutním měření s *GM* počítači.

Cílem absolutní dozimetrie je přesné určení množství radioizotopů v jednotkách *curie*. 1 curie = 1c je takové množství radioaktivní látky, v němž se za 1 sekundu radioaktivně přeměňuje $3,7 \cdot 10^{10}$ atomů. Každá radioaktivní přeměna je spojena s emisí částice a úkolem je tedy určit počet částic vysílaných za sekundu do prostorového úhlu 4π . Četnost preparátu neznámého obsahu je možno určit absolutně jednoduchým způsobem, je-li k dispozici *preparát standardní*, s nímž jej můžeme srovnávat za stejných podmínek. Přitom odpadají korekce na geometrii, absorpci aj. Uspokojivých výsledků se docílí i tehdy, když se srovnávají dva různé radioizotopy s nepřilíš odlišnými druhy záření.

Přístroje s *GM* počítačem můžeme rozdělit na přístroje s *integrátorem* (nazývané také *radiometry*), které určují střední četnost paprsků a na přístroji určují jednotlivé částice a paprsky, tj. *počítače s reduktory* pro přesné sečítání paprsků, a tzv. *indikátory* pouze k informativnímu určování množství záření.

Indikátor je nejjednodušší přístroj s *GM* trubicí, který intenzitu záření udává podle četnosti záblesků signalizační doutnavky. Indikátoru je možno použít i k orientačnímu zjišťování radioaktivity zamořeného terénu. Jako „indikátory“ se označují také různé měřiče intenzity záření pracující s přesností asi $\pm 20\%$, např. *bateriový indikátor záření beta-gama*, v němž detektorem je *GM* trubice a k indikaci slouží mikroampérmetr cejchovaný v mr/h. Přístroj má tři rozsahy: 0—10, 0—50, 0—500 mr/h (vyrábí METRA, Blansko). Nebo *tranzistorový indikátor beta-gama* (typu NIC 253 T), určený rovněž k orientačním měřením. Detektorem je *GM* trubice. K napájení slouží tři akumulátory NiCd. Váha přístroje je pouze 0,4 kg (vyrábí TESLA, Liberec, závod Přemyšlení). Přehled u nás vyráběných indikátorů je v cit. knížce inž. Jiřího Beránka a spolupracovníků.

K přesnějšímu určování stupně zamoření je možno použít radiometrů. Radiometry se dělí na *beta-gama radiometry* a *alfa radiometry*. Jsou vhodné k určování zamoření terénu, předmětů i lidí. Nejrozšířenější jsou *beta-gama-radiometry*¹⁾, složené z měřicí skříňky („pultu“)

¹⁾ T e r m o n u k l e á r n í z b r a ň. Její účinky a ochrana proti ní. Podle sovětských autorů vydalo Naše vojsko 1959.

a sondy s hlavicí. V přenosné skřínce je napájecí zdroj a měřicí přístroj. V sondě spojené kabelem se skřínkou je vestavěna počítací trubice a zesilovač. Hliníkové otáčecí pouzdro sondy je možno natočit tak, aby se zakryly otvory ve stěně sondy a bylo tak zadrženo záření beta. Radiometr má k indikaci záření sluchátko a k měření dávkové intenzity integrátor s ručkovým měřidlem. Stupnici je možno cejchovat v mili-rentgenech za minutu, nebo v „rozpadech“ na 1 cm^2 . Není-li zapotřebí přesného měření, vyhovuje takové cejchování k účelům praktickým a ryze orientačním.

K přesným měřením na pevných stanovištích nebo v pojízdných laboratořích je třeba používat počítačů s reduktory. Hlavním přístrojem radiační hlídky v terénu je *rentgenometr*, využívající ionizační komory. Je to v podstatě intenzimetr určující střední dávkovou intenzitu záření. Rentgenometrem je možno měřit hladinu záření beta i gama v širokém pásmu od setin do několika set rentgenů za sekundu. V rentgenometru jsou čtyři vstupní odpory, jejichž zapojení odpovídá různým měřicím rozsahům. Rentgenometr nese radiační hlídku na popruhu, takže měřidlo může stále odečítat.

Přístroje s čidlem scintilačním (se scintilačním počítačem), pracující na základě světelných záblesků vyvolaných zářením, rozdělují se obdobně jako přístroje s *GM* trubicemi. O nich bude pojednáno v jiné stati.

Závěr

Dozimetrické přístroje, jejichž fyzikální podstata byla stručně vysvětlena, je možno rozdělit do dvou skupin:

I. Přístroje využívající *metody ionizační*, tj. měření celkového proudu iontů vytvořených zářením.

II. Přístroje na základě *metody počítačové*, které indikují jednotlivé částice nebo paprsky.

Přístroje I. skupiny je možno rozdělit na:

1. *dozimetry*, které měří dávku záření;
2. *intenzimetry*, zvané též *rentgenometry*, určující dávkovou intenzitu záření (dávku za jednotku časovou).

Přístroje II. skupiny se rozdělují na:

1. přístroje s *GM* trubicí, které dále rozdělujeme na:
 - a) přístroje s integrátorem, zvané též *radiometry*, které měří střední četnost paprsků nebo částic;

b) přístroje určující jednotlivé částice a paprsky, tj. *počítače s reduktory*, pro přesné sečítání paprsků;

c) *indikátory* k informativnímu určování množství záření;

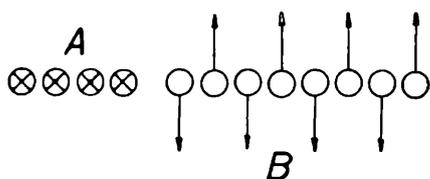
2. přístroje s *čidlem scintilačním (se scintilačním počítačem)*, které využívají záblesků způsobených zářením ve scintilátorech. Rozdělují se podobně jako přístroje s *GM* trubicemi.

K a m i l K r a u s, SPŠS, Plzeň

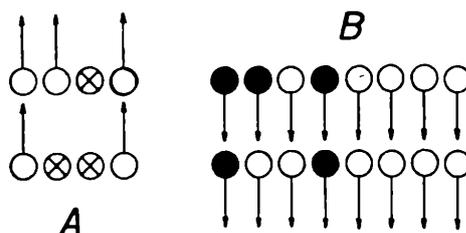
Fyzikální vlastnosti ferritů a jejich užití

(Dokončení)

b) *Spinelové ferrity normální*. Molekula spinelového ferritu normálního má dvojmocný iont M^{++} v poloze *A* a dva trojmocné ionty Fe^{++} v obou polohách *B*. Dvojmocný iont je v tomto případě iont kovu bez vlastního magnetického momentu, např. Zn, Cd. Negativní interakce $A - B$ jsou zde prakticky nulové. Zůstávají tedy pouze negativní interakce $B - B$, které orientují magnetické momenty obou trojmocných iontů v polohách *B* antiparalelně. Poněvadž pak tyto momenty



Obr. 5. Ferrity spinelové normální.



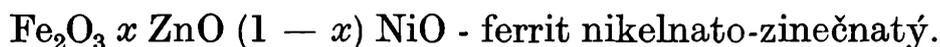
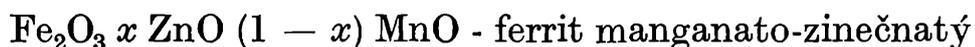
Obr. 6. Ferrity směšové.

jsou stejně veliké, vzájemně se ruší. Proto je molekulární moment normálního spinelového ferritu nulový. Mřížka obsahuje 8 dvojmocných iontů v 8 polohách *A* a 16 trojmocných iontů Fe^{++} v 16 polohách *B*. Ze schematického znázornění obr. 5 plyne, že tyto ferrity jsou nemagnetické. Patří sem

Fe_2O_3ZnO ferrit zinečnatý,

Fe_2O_3CdO - ferrit kademnatý.

c) Špinelové ferrity směsové. Zajímavou skupinu tvoří ferrity se zinkem. Jsou to tuhé roztoky dvou základních ferritů: spinelového ferritu inverzního a spinelového ferritu normálního, tedy ferritu magnetického a nemagnetickým. Poněvadž jednou jejich složkou je vždy ferrit zinečnatý $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{ZnO}$, platí pro směsové ferrity obecný výraz $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot x \text{ZnO} (1 - x) \text{MO}$. M je dvojmocný kov, význam x poznáme z další úvahy. Druhou složkou ferritu směsového bývá ferrit manganatý $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{MnO}$, nebo ferrit nikelnatý $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{NiO}$, takže pak dostáváme:



Uvažme ferrit nikelnatý, do něhož přidáváme Zn^{++} místo Ni^{++} podle uvedeného obecného vztahu. Jak jsme poznali u spinelových ferritů normálních, zaujímá Zn^{++} vždy polohy A. Jeho afinita pro tyto polohy je větší než afinita trojmocných iontů Fe^{+++} , které však dosud byly v polohách A (výchozí ferrit je spinelový inverzní). Poměry budou tudíž tyto: polohu A zaujme x iontů Zn^{++} ($x < 1$) a x iontů Fe^{+++} tuto polohu opustí a přejde do polohy B, které předtím opustilo x iontů Ni^{++} .

Výsledné uspořádání je zobrazeno na obr. 6. Pro velké hodnoty x jsou trojmocné ionty Fe^{+++} v polohách A příliš rozptýleny a poněvadž ionty Zn^{++} jsou bez magnetického momentu, jsou A — B interakce podstatně zeslabeny, pročež v těchto případech převáží interakce B — B. Se vzrůstem obsahu Zn^{++} dochází současně ke snížení Curieova bodu. Optimální (nejvýhodnější) poměry jsou zhruba při $x = 0,5$. Ferrity manganato-zinečnatý s tímto obsahem Zn^{++} jsou známy pod obchodním názvem *f e r r o x c u b e*.

2. Ferrity s hexagonální strukturou. Do této skupiny patří dva ferrity baria:



a) ferrit barnatý $\text{BaO}6\text{Fe}_2\text{O}_3$ - mřížka ferritu tohoto typu je hexagonální mřížková konstanta $a = 5,89 \text{ \AA}$. Obsahuje 24 atomů, které jsou opět rozděleny ve dvě podmřížky. Struktura tohoto typu je značně složitá a mohli bychom ji znázornit souborem spinelových skupin, které jsou mezi sebou spojeny vrstvami obsahujícími iont Ba^{++} . Směr snadné magnetizace u tohoto ferritu je silně vázán na hexagonální osu, čímž lze vysvětlit vysoké hodnoty koercitivní síly, které byly zjištěny u tohoto ferritu. Proto je ferrit $\text{BaO}6\text{Fe}_2\text{O}_3$ magneticky tvrdý a je uváděn pod obchodním názvem *f e r r o x d u r*. Ze základního ferritu barnatého možno dostat celou řadu dalších ferritů podobných vlastností, avšak odlišného složení. Iont Ba^{++} možno úplně nahradit ionty Sr^{++} , La^{++} , Pb^{++} a rovněž za trojmocné ionty Fe^{+++} mohou být dosaženy trojmocně ionty jiných kovů, např. Al^{+++} , Ga^{+++} .

b) Ferrit $\text{BaO}_2\text{FeO}_8\text{Fe}_2\text{O}_3$. Liší se od předešlé skupiny ferritů s bariem jak vlastnostmi, tak i strukturou. Jeho struktura může být rovněž znázorněna spinelovými skupinami, které jsou však tvořeny dvěma molekulami $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{FeO}$. Nahrazením dvojmocného iontu Fe^{++} jiným dvojmocným iontem $M/M = \text{Fe}, \text{Co}, \text{Ni}, \text{Mn}, \text{Mg}, \text{Zn}$ (dostaneme ferrity trojího typu:



z nichž velmi důležitou skupinu tvoří ferrity, v kterých za M^{++} byl dosazen Co^{++} . U těchto ferritů vektor spontánní magnetizace rovnoběžný s bazální (základní) rovinou je velmi slabě vázán na osy krystalu; takže stačí jen slabá energie k tomu, aby se v této rovině obrátil směr snadné magnetizace. Jsou známy pod obchodním názvem *f e r o x p l a n*.

3. Ferrity s granátovou strukturou. Tuto skupinu ferritů můžeme vyjádřit obecným vztahem $5\text{Fe}_2\text{O}_3\text{3M}_2\text{O}_3$. Byly vyvinuty ze silikátů daných obecným výrazem $\text{A}_3\text{B}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$ (např. $\text{Ca}_3\text{Fe}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$), v nichž byla provedena dvojitá substituce: za Ca^{++} byl dosazen M^{+++} , za Si^{++++} , pak Fe^{+++} , takže elektrostatická rovnováha nebyla porušena. Jejich krystalová struktura je složitý typ kubické struktury, zv. granátová⁴⁾, mřížková konstanta $a = 12,4 \text{ \AA}$. Krystal obsahuje 8 molekul. Ve shodě s Neélovou teorií může být krystalová mřížka rozdělena ve tři podmřížky *A, D, C*. Polohy *A, D* jsou obsazeny trojmocnými ionty Fe^{+++} , a to tak, že v polohách *A* je 6 iontů Fe^{+++} , v polohách *D* jsou 4 ionty Fe^{+++} . Podmřížka *C* obsahuje 6 trojmocných iontů M^{+++} . Silné negativní interakce mezi podmřížkami *A — D* orientují soubor trojmocných iontů Fe^{+++} antiparalelně. Poněvadž pak interakce *C — D* jsou mnohem slabší, orientuje výsledná magnetizace podmřížek *A — D* magnetické momenty iontů M^{+++} podmřížky *C* antiparalelně. Schematicky jsou poměry znázorněny na obr. 7.

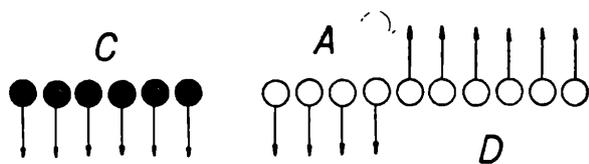
Za trojmocné ionty M^{+++} možno dosadit ionty yttria Y^{+++} , nebo luteria Lu^{+++} , jejichž magnetický moment je roven nule (například $5\text{Fe}_2\text{O}_3\text{3Y}_2\text{O}_3$). Tyto ferrity se sytí velmi snadno při každé teplotě. Závislost jejich spontánní magnetizace na absolutní teplotě *T* je poněkud odlišná. S rostoucí teplotou spontánní magnetizace klesá a je nulová až při Curieově teplotě; teplota kompenzační není vyjádřena.

Dále je možné dosadit za M^{+++} ionty vzácných zemin: gadolinia Ga, terbia Tb, dysprosia Dy, holmia Ho nebo erbia Er, které jsou magnetické.

⁴⁾ Viz J. Holubář, Některé vlastnosti granátotvaru, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1962/63, č. 6, str. 255.

Teplotní závislosti jejich spontánní magnetizace je toho typu, který jsme probrali v předešlé kapitole.

IV Doménové struktury ferritů.¹⁾ Výchozími surovinami pro výrobu ferritů jsou kysličníky kovů, někdy též uhličitany. Velmi čisté kysličníky jsou rozdrčeny na jemný prášek a smíšeny v přesném poměru. Někdy je též přidáváno organické pojidlo. Předepsaný tvar dostane vzorek vytlisováním, tlakem několika tun na cm^2 . Vzorky jsou pak vyhrátý na teplotu 1200 až 1400 °C po dobu 2 až 4 hod. v řízené oxidační atmosféře, nebo v inertní atmosféře. Organické pojidlo je vypáleno a vzorek vypálením nabude pevný tvar.



Obr. 7. Ferrity - granáty.

Pro vypálení je celková magnetizace ferritů většinou rovna nule. Podobně jako ferromagnetické látky jsou také ferrity složeny z elementárních domén, z nichž každá je magnetována do nasycení, i za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole. Elementární domény¹⁾

jsou od sebe odděleny přechodovými stěnami zvanými Blochovy stěny¹⁾, v nichž se po stupních mění směr spontánní magnetizace mezi dvěma sousedními doménami. Magnetování vzorku ferritu probíhá poněkud odlišné než magnetování vzorku ferromagnetické látky, což je způsobeno porézní strukturou ferritů. Magnetizační proces ferromagnetického vzorku nastal nejprve posunem Blochových stěn domén nejvhodněji orientovaných vzhledem k vnějšímu poli a v konečné své fázi natáčením spontánní magnetizace do směru pole.

Ferrit je pórovitý a v důsledku toho je rovnovážná poloha Blochovy stěny za nepřítomnosti vnějšího pole taková, jako by stěna chtěla přejít přes dutinu. Abychom stěnu dostali z vlivu této dutiny, je třeba, aby na vzorek bylo aplikováno vnější pole určité velikosti. Z toho pak vyplývá, že magnetizace ferritového vzorku probíhá z počátku natáčením spontánních magnetizací jednotlivých domén a nikoli posunem Blochových stěn, jak tomu bylo u ferromagnetických látek.

Zjišťováním doménových struktur na vzorcích ferritů není zdaleka tak jednoduché jako je tomu u látek ferromagnetických. Pro indikaci užíváme i zde koloidního roztoku magnetovce Fe_3O_4 , ale s tím rozdílem, že koloidní roztok necháváme uschnout na vzorku. S tímto souvisí určitá změna v jeho přípravě (místo ochranného roztoku mýdla užíváme 1% roztoku „Lovosy“ - karboxy-methyl-celulosa). Další obtíž spočívá v samotné přípravě vzorku, tj. v jeho leštění, poněvadž zde nemůže být použit obvyklý leštění elektrolytického. To má za následek, že v mnohých případech není odstraněno povrchové pnutí, které značně ovlivňuje skutečnou doménovou strukturu sledovaného vzorku.

Doménové struktury byly zatím vysvětleny jen u několika základních typů ferritů spinelových a hexagonálních. Obecně možno říci, že inverzní a směšové spinelové ferrity mají malou zápornou a n i z o t r o p i i, (viz odst. VII. tohoto článku) a proto směry snadné magnetizace leží ve směrech (111). Doménová struktura odpovídá negativní anizotropii, což znamená (s výjimkou ferritu manganato-zinečnatého, který má vlivem neodstraněného povrchového pnutí anomální strukturu), že zjištěné doménové struktury jsou složeny ze 180°, 109°, 71° stupňových stěn, Néelových dýk, „jehličnatého stromu“, tedy ze struktur zjištěných na ferromagnetických látkách, hlavně Ni. Struktury zjištěné na ferritech barya, které jsou hexagonální, mohou mít dva směry snadné magnetizace rovnoběžné s hexagonální osou, jsou srovnatelné se strukturami zjištěnými na krystalu Co, který je rovněž hexagonální. Doménové struktury na ostatních ferritech nebyly zatím vysvětleny.

V. U ž i t í f e r r i t ů. Jak již bylo řečeno v úvodu, jsou ferrity magnetické materiály, které mají velmi nízké hysterese ztráty a v důsledku vysokého specifického odporu, zanedbatelné ztráty vířivými proudy. Z tohoto důvodu možno ferritů používat v elektrických obvodech s proměnnou frekvencí. Ferritů manganato-zinečnatých upotřebíme pro frekvence do 50 kHz, tedy v nízkofrekvenční technice, zatím co ferritů nikeltato-zinečnatých lze užít ve vysokofrekvenční telefonii a v pásmu radiotechnických kmitočtů, a to až do frekvence 100 MHz; ferroxplanu lze užít pro frekvence až do 1000 MHz. Pro výrobu magnetů je vhodný „ferroxdur“, který je použitelný pro hyperfrekvence kolem 50 000 MHz.

Ferritů lze využít v elektrotechnice a impulzové technice jako jádra pro vysokofrekvenční cívky a transformátory, dále jako materiálů pro magnetické zesilovače, v konstrukci „paměťových prvků“ rychlostních počítačích strojů a pod. U ferritů je možno využít tzv. Faradayova jevu (Faradayův jev je známý v magnetooptice a spočívá v natáčení polarizační roviny lineárně polarizovaného světla v některých látkách v magnetickém poli.) Zařízení využívající Faradayův jev propouští světlo jen jedním směrem. Některé ferrity jsou v jednom směru průhledné pro vlny v pásmu radiotechnických kmitočtů. Takového zařízení, nazvaného izolátor, užívá se v radarové technice k oddělení vysílače od přijímače. Poněvadž některé ferrity s granátovou strukturou jsou průhledné pro světlo, lze jich upotřebit ke konstrukci modulátorů světla, které jsou běžné ve zvukovém filmu, v automatizaci a podobně.

VI. Z á v ě r. V článku jsme stručně vysvětlili fyzikální vlastnosti ferritů bez použití kvantové mechaniky a bez předpokladu hlubších znalostí krystalografie.

V první kapitole byl vymezen základní rozdíl mezi ferromagnetismem a ferrimagnetismem, spočívající v tom, že mřížka ferrimagnetické látky se skládá ze dvou podmřížek obsazených atomy různého typu a Weissův

předpoklad existence silného vnitřního molekulárního pole byl rozšířen na tento případ.

V druhé části práce bylo podáno rozdělení ferritů do tří základních skupin podle jejich struktury a magnetické vlastnosti jednotlivých skupin byly vysvětleny z hledisky interakcí mezi mřížkami.

Ve třetí části byl zdůvodněn rozdíl v magnetizačním procesu u ferromagnetických a ferrimagnetických látek a bylo konstatováno, že druhý Weissův předpoklad, tj. předpoklad existence elementárních domén zůstává v platnosti i pro ferrity.

Ve čtvrté části bylo stručně vyloženo užití ferritů, při čemž bylo nutno vynechat některé aplikace, jejichž vysvětlení je vázáno na hlubší znalosti fyziky pevných látek.

Probraná látka má podat na základě fyzikálních vlastností ferritů ucelený přehled jejich druhů, uvést možnosti jejich technické aplikace a doplnit tak látku o polovodičích probíranou na středních školách.

VII. Dodatek 1. Poněvadž nelze oddělit magnetismus kladný od magnetismu záporného, je v magnetismu jediným možným zdrojem dipól. Dipólem rozumíme systém dvou stejných magnetických množství opačného znaménka v limitním uspořádání, jehož magnetický moment, daný součinem jednoho magnetického množství a vzdálenosti mezi oběma, má konečnou hodnotu. Stupeň zmagnetování tělesa posuzujeme pak podle tzv. *i n t e n z i t y m a g n e t i z a c e*, kterou definujeme jako *m a g n e t i c k ý m o m e n t* objemové jednotky dipólů.

2. Jak známo obíhá elektron kolem jádra po určité dráze a kromě toho se ještě otáčí kolem své vlastní osy (tzv. spin). Dráhový pohyb elektronu je příčinou dráhového magnetického momentu, spin je příčinou spinového magnetického momentu. Vektorovým součtem všech dráhových i spinových magnetických momentů je dán výsledný *m a g n e t i c k ý m o m e n t a t o m u*. Tento může být nulový či může nabýt hodnotu různou od nuly.

3. Základem teorie ferromagnetismu se staly dva předpoklady P. Weisse

a) existence tzv. molekulárního pole,

b) vznik oblastí magnetovaných spontánně do nasycení, nazvaných obvykle elementární domény.

Nasycenou magnetizaci v jednotlivých doménách vyvolává Weissovo molekulární pole bez přispění vnějšího pole tím, že v těchto oblastech orientuje magnetické momenty jednotlivých atomů paralelně. Tato *n a s y c e n á m a g n e t i z a c e* bývá pak označována jako *s p o n t á n n í m a g n e t i z a c e*.

4. Železo krystaluje v soustavě kubické. Pravíme, že krystaluje v soustavě kubické s prostorově centrovanou mřížkou. Krychlová mřížka

je charakterizována 8 atomy ve vrcholech elementární krychle a jedním atomem ve středu krychle. Délka hrany elementární krychle se nazývá *mřížková konstanta* a je za normální teploty $a = 2,861 \cdot 10^{-8}$ cm. Stěny elementární krychle představují základní krystalografické roviny.

Naproti tomu kobalt krystaluje v soustavě hexagonální, v níž základní krystalová mřížka má tvar pravidelného šestibokého hranolu.

Krystalová mřížka ferritů je tvořena dvěma různými typy atomů a lze ji tudíž považovat za složenou ze dvou krystalograficky odlišných podmřížek, z nichž každá je charakterizována určitým počtem atomů jednoho nebo i druhého typu, jejichž magnetické momenty jsou obecně různé. Pravíme pak, že atomy mohou zaujímat dvě krystalograficky odlišné polohy.

Experimentálně bylo potvrzeno, že fyzikální i magnetické vlastnosti krystalů ferromagnetických i ferrimagnetických látek jsou v různých krystalografických směrech různé. Zjev, že magnetické vlastnosti závisí na krystalografickém směru, nazýváme *magnetickou anizotropií*.

Jednotlivé domény ve ferromagnetickém krystalu jsou pak orientovány do směrů, které mají určitý vztah k poloze os krystalu. Tento směr označujeme jako *směr snadné magnetizace*. U železa leží např. směry snadné magnetizace v hranách elementární krychle, u kobaltu existuje pouze jeden směr snadné magnetizace totožný s hexagonální osou, tzn. úsečkou spojující středy obou podstav šestibokého hranolu.

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

Fyzikální základy jaderných zbraní

Jaderné neboli nukleární zbraně rozdělujeme na zbraně výbušné a bojové radioaktivní látky.¹⁾

Jaderné zbraně výbušné jsou atomové a termonukleární pumy letec-

¹⁾ Zpracováno podle knih *Soudobá vojenská technika*, 1961, a *Spišiak-Nejedlý, Zbraně hromadného ničení*, 1957. Podrobné poučení o účincích jaderných zbraní je obsahem spisu A. M. Kuzina, *Čem ugrožajut čelověčestvu jadernyje vzryvy*, Moskva 1959. O účincích jaderných zbraní termonukleárních pojednává kniha *Termonukleární zbraň. Její účinky a ochrana proti nim*, 1959. České publikace vyšly v *Našem vojsku*. Zdravotnickými otázkami uvolnění jaderné energie se zabývá 7. sv. vědecko-populární knižnice ČSAV *Lidé a radioaktivita*, od Františka Běhounka.

ké, dělostřelecké granáty, torpéda a reaktivní střely s nukleární náplní. Bojové radioaktivní látky byly by také jedním z prostředků hromadného ničení, neboť by využívaly škodlivého účinku záření, jehož zdrojem by byly rozptýlované radioaktivní prvky. Všechny nukleární zbraně řadíme mezi *zbraně hromadného ničení*, které se vyznačují několika účinky projevujícími se ve velkém měřítku. Nukleární výbuchy působí tlakovou vlnou, světelným a tepelným zářením, pronikavou radiací (tj. paprsky gama a neutrony) a radioaktivním zamořením, neboli k o n t a m i n a c í. Převážná většina lidí i ve státech imperialistických si přeje pouze mírového využití jaderné energie a žádá zákaz zbraní hromadného ničení, zvláště zbraní jaderných. V čele tohoto úsilí stojí tábor míru a socialismu vedený Sovětským svazem. Sovětští vědci a technické dovedli velmi rychle vyrobit nejmohutnější termonukleární zbraně. Vedení sovětskou vládou učinili tak jen z důvodů obrany, aby útočníka přivítali v plné zbroji, neboť mnozí imperialističtí generálové vyhrožují atomovou smrtí. Ráže jaderných zbraní se vyjadřuje *tritolovým ekvivalentem*. Je to váha třaskaviny tritolu (trinitrotoluenu TNT), jehož výbuchová energie je rovna energii jaderné zbraně. Např. tzv. *nominální puma*, která byla roku 1945 svržena na Hirošimu, měla tritolový ekvivalent 20 kilotun, puma odpálená roku 1960 na Sahaře asi 100 kilotun. Ráže atomového střeliva se obvykle vyjadřuje v kilotunách, v tisících tun TNT, kdežto střeliva termonukleárního v miliónech tun TNT, v megatunách. Podle toho se atomové pumy nazývají někdy *kilotunové*, kdežto pumy vodíkové *megatunové*. Je nutno si však uvědomit, že tritolový ekvivalent odpovídá výbuchu tritolu v kompaktní formě. Např. účinek jedné atomové pumy ráže 10 tisíc tun TNT, tj. ekvivalent 10 kilotun tritolu, se nerovná účinku deseti tisíc tun obyčejných dělostřeleckých granátů, vystřelených při dělostřeleckém přepadu na plochu rovnou ploše rozsahu účinku jednoho atomového granátu ráže 10 kilotun TNT. Stejného účinku je možno dosáhnout pouze s jedním tisícem tun tritolu, rozděleným na dávky na stejnou plochu. Vysvětlujeme to na základě zkušeností, že silný úder v jednom místě nemá tak ničivý účinek jako tisíc slabších úderů, rozdělených rovnoměrně na celé ploše. U jaderných zbraní přistupují navíc ještě účinky pronikavé radiace, které jsou specifickou jejich vlastností. Před pronikavým zářením je možno se dobře chránit v pevných úkrytech. Chrání-li úkryt proti účinkům tlakové vlny, chrání do značné míry i před paprsky gama a neutrony.

Fyzikální podstata atomové pumy

V atomové pumě se využívá rychlé štěpné reakce v náplni nukleární třaskaviny, jejíž množství je nadkritické. Nukleární třaskavinou je uran 235 (uran hmotového čísla 235) nebo plutonium 239. Uvádí se, že také uran 233, který se vyrábí z thoria, je nukleární třaskavinou.

Nukleární třaskavina se zásadně liší od běžných třaskavin, které vybuchují v libovolném množství. Vybuchuje pouze tehdy, dosáhne-li kritického množství, nebo je překročí (množství nadkritické). V množství pod kritickým mohou neutrony, které se vytvoří při štěpení vylétnout povrchem ven mimo látku, a tak jsou ztraceny pro další štěpení. V kritickém a nadkritickém množství vzniká lavinovitá, řetězová jaderná reakce, kdy neutrony vznikající při štěpení štěpí další jádra, takže počet neutronů a rozštěpených jader rychle vzrůstá. Řetězová reakce nabývá charakteru výbuchu.

Potřebnou velikost kritického množství štěpné látky snižuje tzv. reflektor neutronů, neboli odražeč. Vrací neutrony, které by jinak bez využití unikly z pumy na venek zpátky do štěpné látky; může být např. z berylia. Reflektor tedy zvyšuje koeficient využití jaderné třaskaviny.

V pumě se uplatňují neutrony velkých rychlostí, v reaktoru obyčejně neutrony malých rychlostí, neutrony brzděné. Jsou však i reaktory, v nichž se uplatňují neutrony středních rychlostí a reaktory rychlé, které využívají rychlých neutronů, a přesto se dají dobře regulovat, takže štěpná reakce není výbušná. Množství štěpné náplně v rychlém reaktoru nesmí příliš překročit kritickou velikost.

V atomové pumě je štěpná látka rozdělena na několik částí, z nichž každá má hmotu menší než kritickou. Uvádí se, že tyto části se rychle spojí výbuchem obyčejné výbušniny, takže se vytvoří hmota nadkritická, v níž štěpná reakce proběhne ve zlomku sekundy. Je třeba si uvědomit, že počet neutronů, které se ve štěpitelné látce znovu mohou uplatňovat, závisí od jejího tvaru a povrchu. Čím je povrch látky menší v poměru k objemu, tím menší množství neutronů z celkového množství uniká na venek. Ideálním tvarem nálože by byl tedy tvar kulový; nálož kulového tvaru má nejmenší kritickou hmotu. Spojením dvou částí štěpné nálože tvaru dvou stejných polokoulí zvětší se hmota dvakrát, avšak povrch jen o jednu třetinu, čímž je dána možnost docílit minimální kritické hmoty ze dvou podkritických. Spojením dvou stejných náložek krychlových tvarů vzrostl by povrch o dvě třetiny, spojením dvou válců o v : $(r + v)$ apod. Složitější výpočty jsou pro skládání ze tří nebo čtyř částí apod. Výsledný tvar kulový je vždy teoreticky ideální.

Začátek řetězové reakce může vyvolat pouhé spojení podkritických částí, neboť neutrony se ve štěpné látce ustavičně tvoří sice v poměrně nepatrném množství, avšak dostačujícím k tomu, aby štěpná reakce mohla kdykoliv začít. K zahájení řetězové reakce vlastně by stačil jediný neutron. Koeficient využití jaderné třaskaviny se však zvyšuje zvláštním, silným zdrojem neutronů, který se do ní zasune před výbuchem.

Koeficient využití a sílu výbuchu zvyšuje též pouzdro z těžko tavitelného materiálu, do něhož je vložena výbušnina obyčejná i jaderná. Pevné

pouzdro - než se roztaví a rozpráší - poněkud zdržuje předčasné rozmetání náplně, a tím zvyšuje stupeň jejího využití.

Základní součástí atomové pumy tedy jsou: náplň jaderné traskaviny (štěpné látky), odražeč neutronů, náplň obyčejné výbušniny, vnitřní pouzdro pro náplň, rozněcovací zařízení a vnější pouzdro pumy.

První atomové pumy byly velká zařízení o váze několika tun. Postupně byly rozměry i váha atomového střeliva značně zmenšeny a dnes se vyrábí ve velkém rozsahu tritolových ekvivalentů od sta do stovek tisíců tun. Sovětští autoři uvádějí, že rozměry a vnější vzhled dnešního atomového střeliva se jen málo liší od střeliva obyčejného a že dosažené výsledky umožnily i výrobu malých atomových nábojů pro dělostřelectvo a řízené střely. Je však pochopitelné, že ráži atomového střeliva není možno libovolně zmenšovat, neboť podkritická hmota nevybuchuje. Nálož štěpné látky není však možno také libovolně zvětšovat, i když by konstrukce atomové pumy byla velmi dokonalá. Počet náloží, které se v ní před výbuchem musí spojit do jedné nadkritické nálože, je technicky omezen. Jednotlivé nálože musí být nutně podkritické, čímž jejich velikost již je omezena. Z toho vyplývá, že možnosti uvolnění jaderné energie výbuchem atomové pumy jsou omezeny. Západní odborníci uvádějí, že tritolový ekvivalent uranových a plutoniových pum může dosáhnout hodnoty asi 500 kilotun (nominální puma je 20 kilotun).

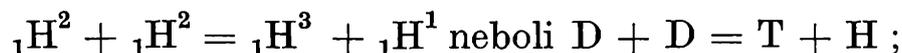
Uvádí se, že při výbuchu atomové pumy vzniká v ní teplota několika desítek miliónů stupňů a tlak několik desítek miliard atmosfér, podle jiných odhadů jen milióny atmosfér. Obyčejné výbušniny docilují několika tisíc stupňů a několika set tisíc atmosfér.

Fyzikální podstata termonukleární pumy

Termonukleární puma se často nazývá pumou *vodíkovou*, neboť se v ní využívá izotopů vodíku. Největší množství jaderné energie z lehkých prvků se totiž uvolňuje slučováním izotopů vodíku na helium. Termonukleární reakce obecně jsou jaderné reakce, při nichž se za vysoké teploty slučují jádra lehkých prvků na jádra těžší. Termonukleární reakce používané v pumách jsou tedy založeny na syntéze lehkých jader, které probíhají výbušně v nepatrném zlomku sekundy. Potřebné teploty k tomu se uvádějí hodnotami desítek miliónů stupňů, a není je možno zatím získat jinak než štěpnou reakcí, tj. atomovým výbuchem. V termonukleární pumě je proto *termonukleární náplň* umístěna mezi náplně atomové; rozněcovacím zařízením vodíkové pumy je tedy „klasická“ puma atomová, která za několik milióntin sekundy zahřeje termonukleární náplň na teplotu potřebnou k okamžité reakci,

při níž se tvoří obrovské množství rychlých neutronů a uvolňuje se jaderná energie.

Rozeznávají se *mokr*é a *such*é termonukleární pumy. První pumy byly mokré, neboť jejich termonukleární náplní byly kapalné izotopy deuterium (těžký vodík) a tritium H_2 a H_3 , tj. izotopy vodíku hmotových čísel 2 a 3. Místo H_2 se stručně píše D, místo H_3 se často používá značky T. V podstatě jde o tyto reakce



První reakce poskytuje sloučením dvou deutronů (jader deuteria) jeden triton (jádro tritia) a jeden proton a uvolňuje se při tom energie. Podle druhé rovnice reaguje další deutron s tritonem, který byl vytvořen první reakcí. Vzniká h e l i o n (jádro helia) a neutron a opět se uvolňuje energie. Podle třetí rovnice reagují spolu dva tritony. Výsledek je helion, dva neutrony a uvolněná energie. V pumě se tedy slučuje deuterium a tritium na helium, přičemž se tvoří neutrony a uvolňuje jaderná energie. Tritolové ekvivalenty odpovídající jednomu kg látek vstupujících do reakcí jsou sice stejného řádu jako pro štěpení jednoho kg uranu nebo plutonia, avšak nejsou omezeny kritickými hodnotami. Proto může být účinek vodíkových pum třeba i tisíckrát větší než atomových.

Kapalná termonukleární náplň vyžadovala však veliké a složité aparatury, aby mohla být udržována v kapalném skupenství. Proto např. první americká termonukleární puma vážila asi 65 tun a měla rozměry jako velký nákladní automobil. Takových nemotorných zařízení nebylo by možno bojově využít.

Pumy byly postupně zdokonalovány a vznikla *suchá termonukleární puma* obsahující tvrdou, krystalickou látku deuterid lithia, sloučeninu těžkého vodíku s lithiem. Suchá puma má podstatně menší rozměry i váhu, neboť nevyžaduje chladičího zařízení. Uvádí se také, že tyto pumy jsou mnohem levnější než pumy s deuteriem a tritiem, neboť tritium je velmi drahé. Náklady na výrobu jednoho kg tritia jsou stejné jako na 80 kg plutonia. Mimoto tritium je radioizotop vodíku s poločasem 12 let, takže se rozpadá a pumy s ním se nedají vyrábět do zásoby. Je pravděpodobné, že velmi vzácného tritia se používá jen jako iniciátoru (zapalovače, roznětky), neboť reakce deuteria s lithiem a také reakce deutronů mezi sebou vyžadují teploty několika desítek miliónů stupňů. Protože vlastně jen části energie atomového štěpného iniciátoru se dá využít jako energie tepelné, nezaručuje štěpná roznětka dosažení potřebné teploty. Termonukleární suchá puma využívá tedy štěpné roznětky jen k „zapálení“ další roznětky z deuteria a tritia, která na základě již

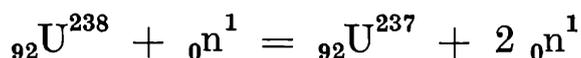
uvedených tří reakcí zvýší teplotu na potřebnou výši. Pak mohou proběhnout reakce mezi lithiem a deuteriem, a dokonce mezi lithiem a vodíkem v obyčejném hydridu lithia LiH, laciné látce, kterou je možno vyrobit ve velkém množství. V takové pumě probíhají tyto reakce



Mezi deuterony uplatňuje se pak i reakce $\text{D} + \text{D} = {}_2\text{He}^3 + {}_0\text{n}^1$, kdy vzniká izotop helia hmotového čísla 3.

Zdokonalená termonukleární puma má vnější plášť z poměrně levného uranu 238, nebo z thoria 232, které se účinkem rychlých neutronů štěpí, a tím uvolňují energii. Uranovým obalem se docílí o 70 % vyšší energie.

Japonští fyzikové provedli již v roce 1954 důkaz, že termonukleární puma explodovaná v té době v Pacifiku byla „super H - pumou“, tj. vodíkovou pumou s pláštěm z přírodního uranu, vodíkovou superpumou. Důkaz byl proveden rozbořením nukleárního spadu, tj. radioaktivního prachu zachyceného v Japonsku po nukleárních zkouškách. Ve spadu byl dokázán uran hmotového čísla 237, který v plášti vzniká reakcí



a s pláštěm je po výbuchu rozmetán do velkých vzdáleností. Ostřelováním přírodního U 238 neutrony tvoří se tedy U 237 a dva neutrony. Umělý izotop uran 237 má poločas asi 7 dnů, a proto se dá rychle fyzikálně zjišťovat. Vysílá paprsky beta a mění se tím na prvek č. 93, neptunium 237.

Obyčejná atomová puma se nazývá také j e d n o f á z o v á, neboť nukleární reakce v ní probíhá v jedné fázi. Termonukleární puma je d v o j f á z o v á, neboť nejprve začne probíhat reakce v jedné fázi, ve štěpné náplni, a potom ve druhé fázi, v náplni termonukleární. T r o j f á z o v o u p u m o u je termonukleární puma s uranovým obalem.

Účinek pronikavé radiace (radioaktivního záření) termonukleárního výbuchu se vyznačuje tím, že v něm podíl neutronové složky záření může být poněkud větší než při atomovém výbuchu, kdy dávka záření gama obvykle se udává hodnotou 70 až 80 % z celkové dávky záření.

Kdyby puma byla zapouzdřena do kobaltu nebo zinku tvořily by se účinkem neutronů radioizotopy, které by působily silnou a dlouhotrvající kontaminaci (zamoření) terénu, zvláště při pozemním a podzemním výbuchu termonukleární pumy. Puma kobaltová nebo zinková byla by již převážně zbraní radiologickou.

Otázka „čistě“ termonukleární pumy

„Čistá“ puma (podle zpráv) tisku na Západě byla by puma termonukleární, jejíž výbuch je doprovázen pouze vlnou tlakovou, světelným a tepelným zářením a výšlehem neutronů. Výbuch čisté pumy neměl by tedy za

následek vznik radioizotopů, které působí radioaktivní zamoření. Při výbuchu atomové a běžné termonukleární pumy vznikají radioaktivní štěpné zplodiny, např. nominální atomová puma ráže 20 kilotun vytvoří asi 1 kg štěpných produktů, z nichž některé mají poločasy desítky let.

Prý se zdařilo vyrobit pumu, která při stejné ráži působí o 90 % menší kontaminaci, tj. při jejím výbuchu vzniká jen desetina původního množství radioaktivních zplodin. Toho bylo docíleno snížením množství štěpné nálože (jaderné třaskaviny) nutné k roznětu termonukleární pumy. U této pumy 96 % energie připadá na reakci termonukleární, a jen 4 % na pomocnou štěpnou reakci.

Takový typ pumy je na Západě vyhlašován za „dobrodiní“ pro lidstvo a za zbraň humánního typu. Americká vodíková puma odpálená roku 1954 vytvořila totiž asi 30 kg radioaktivních zplodin, které způsobily značné zamoření.¹⁾ Nebezpečí zamoření radioaktivitou zůstalo by však i při výbuchu čisté pumy, i kdyby vybuchla v dostatečné výšce, aby neutrony nedosáhly zemského povrchu a samy nemohly vyvolat umělou radioaktivitu. Neutrony totiž reagují s dusíkem ve vzduchu a mění jej na radioaktivní uhlík, radiouhlík C 14, který má poločas 5700 let. Z něho se tvoří radioaktivní CO₂, který se rozšiřuje do celé biosféry, tj. do celé oblasti rozšíření života na Zemi. Velké množství megatunových výbuchů mohlo by nebezpečně zamořit biosféru radiouhlikem, právem nazývaným „genetickým jedem“, (genetika je nauka o dědičnosti a proměnlivosti organismů), neboť by mohl ohrozit vývoj lidstva na tisíce let do budoucna.

„Absolutně čistá“ termonukleární puma musela by mít místo štěpné nálože nějakou nálož, která při roznětu nepůsobí vůbec žádnou radioaktivitu. Uvádí se, že termonukleární výbušnou reakci je možno uskutečnit použitím kumulativních (hromadných, vícenásobných) náloží běžné výbušniny, obklopující náplň vodíkových izotopů. Vhodnými výbušninami, podle uvedených pramenů, jsou výbušniny s bohatým obsahem vodíku, např. metylaminitrát nebo perchlorát, etylendiamindinitrát a etylendiaminperchlorát aj., v kombinaci s hexogenem a pentritem. K nim se přidávají sloučeniny bóru, popř. litia nebo berylia, čímž se zvyšuje energetický obsah výbušnin. Na tomto principu byly prý vyrobeny náboje pro dělostřelectvo a řízené střely. I termonukleární pumy bez roznětky ze štěpné náplně způsobily by však zamoření umělou radioaktivitou, vzniklou účinkem neutronů a v každém případě zamoření ovzduší radiouhlikem.

Otázka neutronové pumy

Zvláště „humánní“ zbraní podle zpráv západního tisku má být tzv.

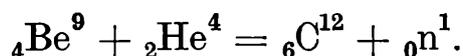
¹⁾ Na loď *F u k u r y u M a r u* vzdálenou 160 km dopadl aktivní prach. Jeden člen posádky zemřel za 7 měsíců, ostatní dlouho churavěli.

neutronová puma, která se vyznačuje menší tlakovou vlnou a působí hlavně mohutným výšlehem neutronů. Ničí tedy pouze vše živé, jak se ve vojenství říká „živou sílu“ a ponechává celkem nepoškozené domy, závody apod.

Dosavadní zprávy o neutronové pumě byly však jen teoretického rázu a puma tohoto typu nebyla dosud pokusně vyzkoušena. Všechny zprávy o jejím účinku musíme přijímat velmi kriticky, neboť jsou to jen teoretické dohady.

Neutrony z atomových a běžných termonukleárních pum nemají příliš veliký dosah účinku. Např. nominální atomová puma svými neutrony působí těžké poškození organismu do vzdálenosti asi 700 metrů. A právě neutronová puma má podstatně zvětšit dosah účinku neutronů, aby pronikly i do krytů, a přitom neničily budovy a zařízení. Zamoření terénu radioaktivitou má být asi tisíckrát slabší než po výbuchu atomové pumy stejné ráže.

O zdroji neutronů v neutronové pumě jsou jen různé dohady. Hlavní její náplň mohla by být náplň termonukleární, která má roznětku ze štěpné náplně uranové nebo plutoniové. Částice alfa, tj. heliová jádra, která vznikají jako výsledek syntézy při termonukleární reakci, bombardují beryliový plášť pumy, čímž vzniká velké množství neutronů. Jadernou reakcí heliových jader s beryliovými jádry vznikají neutrony podle rovnice



Při reakci se však uvolňuje i teplo, takže tlaková vlna by byla ještě silnější než u termonukleární pumy stejné ráže bez beryliového pláště.

Jiné schéma neutronové pumy předpokládá štěpnou náplň v plášti z látky, která účinkem paprsků gama, vznikajících při štěpení, se stává zdrojem neutronů. Takovou látkou je např. deuterium, berylium aj. Tento druh jaderné reakce se vyznačuje tím, že energie se při něm zčásti spotřebuje. Celková energie uvolněná při štěpné reakci se tím snižuje, a tudíž i tlaková vlna se zmenšuje.

Jsou možné i jiné návrhy neutronové pumy. Překážkou jejich uskutečňování a praktického zkoušení je boj mírumilovných národů, především Sovětského svazu, za naprostý zákaz nukleárních zkoušek všech typů, a za všeobecné a úplné odzbrojení.

Podle nového názvosloví nahraďte v celém článku slovo *váha* slovem *hmotnost*.

Redakce.

Deformační tlakoměry

V několika minulých člancích jsme se zcela stručně seznámili s kapalinovými tlakoměry. Jejich absolutní měřicí rozsahy jsou malé, což je dáno přímo jejich měřicím principem. Pro měření vyšších tlaků, s nimiž se setkáváme např. v energetice, v průmyslové výrobě (zvláště chemické a potravinářské), i ve zdravotnictví a v jiných odvětvích národního hospodářství, používá se jiných tlakoměrných zařízení, nejčastěji *tlakoměrů deformačních*.

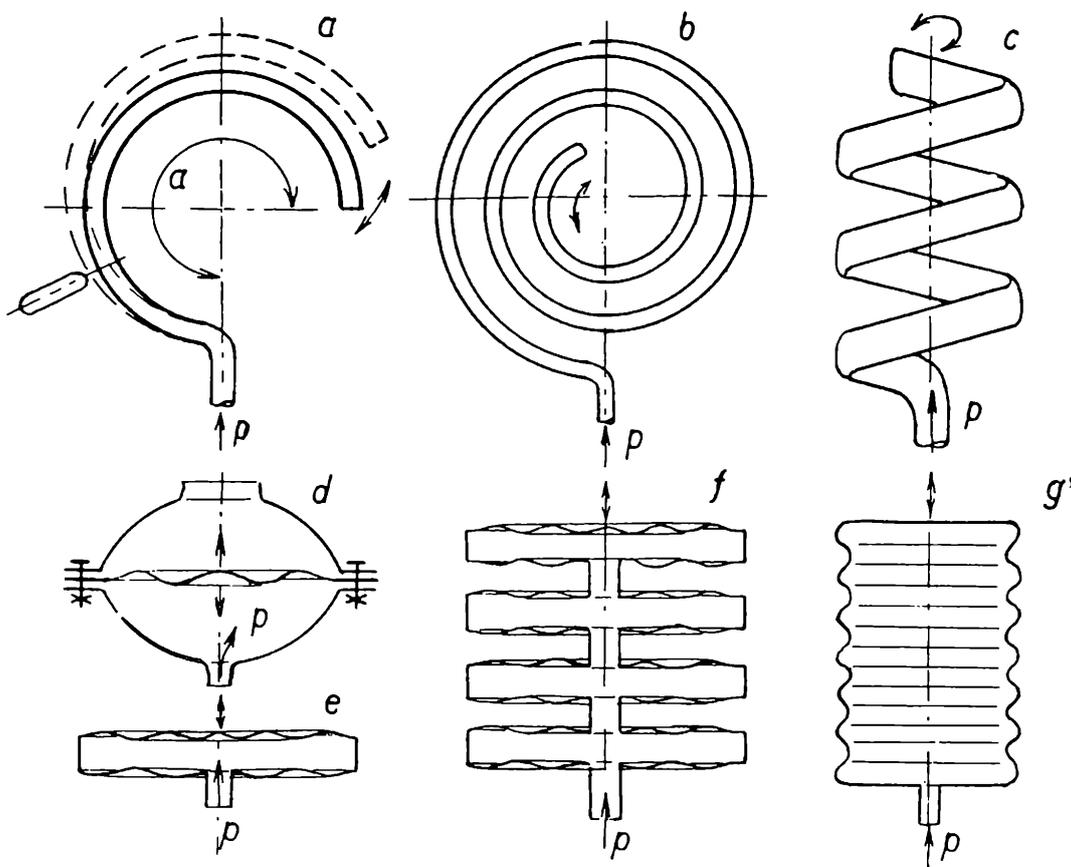
U těchto přístrojů je přiváděn měřený tlak do dutého tělesa vhodného tvaru, které se působením tlaku deformuje. Známe-li vzájemnou závislost působícího tlaku a průvodní deformace, můžeme určit z deformace velikost tlaku. Tvary těchto deformačních těles, jež mají v podstatě funkci *tlakových snímačů (čidel)*, jsou rozmanité. S hlavními z nich se dále seznámíme. Než však přijdeme k jejich stručnému popisu, musíme si něco říci o mechanických deformacích.

Víme, že žádné reálné (skutečné) těleso pevného skupenství není dokonale tuhé, protože působením sil mění své rozměry a tvar. Říkáme, že se těleso *d e f o r m u j e*. Podle toho, jak síla na těleso působí, vznikají v různých jeho místech různá napětí, a t o n o r m á l o v á (kolmá), t a n g e n c i á l n í (tečná) nebo kombinovaná z obou těchto druhů. Pokud v materiálu, z něhož je těleso vyrobeno, nepřesáhne napětí určitou hodnotu, vrací se těleso do původních rozměrů a tvaru, když vnější síly přestaly působit. Takovou mezní hodnotu napětí nazýváme *mezí pružnosti* materiálu. Přestanou-li tedy vnější síly působit, vzniklé deformace se ztrácejí (rychle nebo zvolna). Takové deformace nazýváme *pružnými (elastickými)*. Je-li však mez pružnosti překročena, těleso již nenabude po odlehčení od působících sil zcela původních rozměrů a tvaru.

Protože je v tomto případě těleso již *t r v a l e* deformováno, nazýváme jeho *deformace trvalými (nepružnými, plastickými)*.

Vraťme se nyní opět k deformačnímu principu tlakoměrů. Chceme-li, aby tlakoměru založeného na tomto principu mohlo být trvale používáno k měření, je zřejmě nutné, aby jeho deformace, způsobené měřeným tlakem, byly *p r u ž n é*. V opačném případě, který např. nastane, když byl tlakoměr vystaven značně vyššímu tlaku, než na který byl určen, tedy v *p ř í p a d ě p ř e t í ž e n í*, jsou již jeho deformace plastické. Takový přístroj je ovšem znehodnocen.

Hlavní tvary deformačních těles (elementů) tlakoměrů jsou na obr. 1. U prvních tří (obr. 1a, b, c) má deformační těleso tvar trubice, stočené do kruhového oblouku, spirály nebo šroubovice. Přístroje, s takovými snímači nazýváme *deformačními trubicovými tlakoměry*, nebo méně často tlaké *tlakoměry zpruhovými*. Na dalším obrázku (1d) je pružným snímačem membrána, tedy vlastně pružná deska, upnutá na obvodě v přírubách komory přístroje. Takové snímací elementy jsou u *membránových (čili deskových) tlakoměrů*. U dalšího typu tlakoměrných přístrojů deformuje se krabice (obr. 1e), nejčastěji kovová, jejíž dna tvoří dvě tenké zvlněné membrány. V tom případě jde o *tlakoměry krabicové*. Pro zvýšení citlivosti může být též několik krabic spojeno za sebou (obr. 1f).



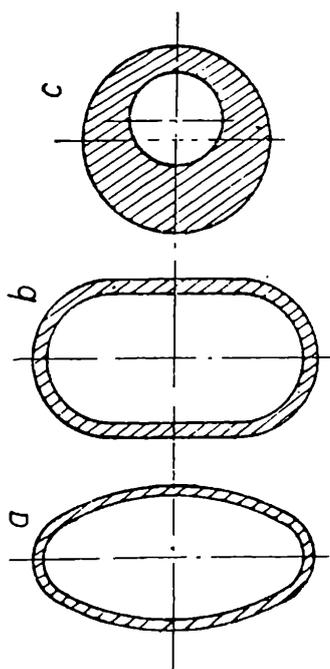
Obr. 1. Schéma hlavních snímačů deformačních tlakoměrů.

a) Bourdonova trubice. b) Trubicová spirála. c) Trubicová šroubovice. d) Membrána. e) Krabice. f) Série krabic (krabicový měch). g) Vlnovec.

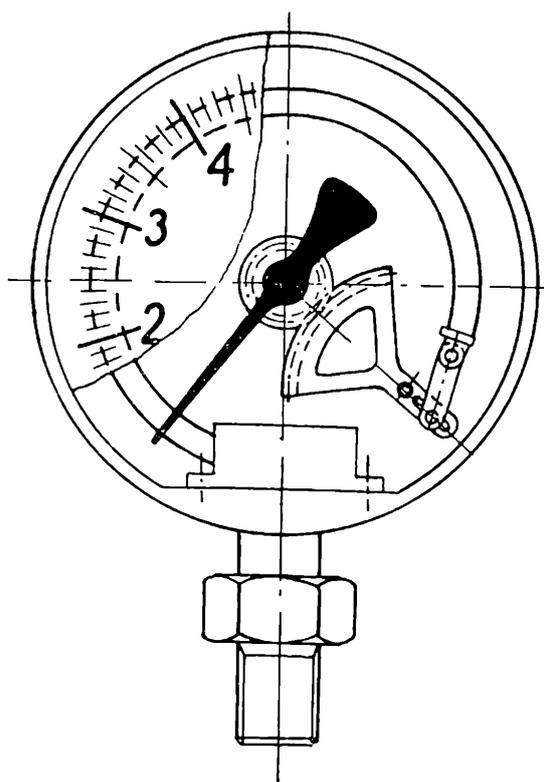
Konečně může mít deformační těleso tvar uzavřené tenkostěnné trubky s vyválnými vlnami na válcovém povrchu. Protože má takové těleso tvar měchu (vlnovce), nazývají se přístroje s takovými snímači *měchovými* čili *vlnovcovými tlakoměry* (obr. 1g). Každé z uvedených deformačních těles má své přednosti, zvláště pokud se jedná o odolnost vůči působícím tlakům. Měřicí rozsah je také jedním z hlavních kritérií, podle něhož volíme ten, který typ přístroje.

Deformační trubicové tlakoměry se používají nejběžněji. Z různých jejich typů se opět nejčastěji používají ty tlakoměry, jejichž deformační

trubice je stočena do kruhového oblouku s různým středovým úhlem α . Nejčastěji je $\alpha = 270^\circ$ (obr. 1a). Známe je pod názvem *Bourdonových tlakoměrů*. Krabice může mít rozmanitý průřez ; tři příklady jsou v obr. 2. Průřez však nesmí být středově souměrný, protože by se v takovém případě trubice žádoucím způsobem nedeformovala. Jak je totiž patrné z obr. 1a, chceme, aby tlak způsoboval malé napřímení trubice (zvětší se tím přechodně poloměr křivosti oblouku). To je možné však jen tehdy, když průřez trubice není středově souměrný. Kdyby tomu tak bylo, tru-



Obr. 2. Příklady průřezů deformačních tlakoměrných trubice.



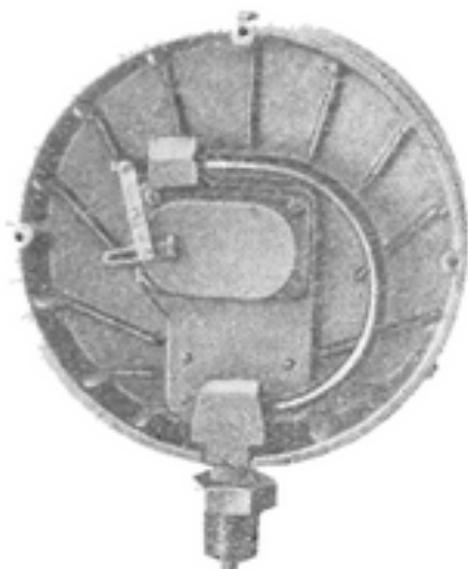
Obr. 3. Schéma převodu deformace Bourdonovy trubice na indikační ručičku.

bice by se sice tlakem roztahovala, ale nenapřimovala by se. U trubice tvaru podle obr. 1b a 1c dochází působením tlaku k patrnějšímu rozkručování.

Trubice se vyrábějí pro menší tlaky z barevných kovů (mosazi, bronzu, nového stříbra aj.), pro vysoké tlaky (až do $10\,000 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, případně i výše) z kalené oceli. Pro menší tlaky volí se průřez trubice zploštělý (obr. 2a, b), pro vysoké tlaky blíží se průřez kruhovému mezikruží, (obr. 2c), aby deformace způsobené tlakem nebyly příliš velké (z důvodů pružnosti). Vychýlení volného konce trubice přenáší se pákovým a ozubeným převodem na ručičku, která ukazuje měřený tlak na stupnici (obr. 3). Skutečné provedení tlakoměrné trubice pro nejvyšší měřené tlaky je dobře patrné z obr. 4, kde je pohled na zadní stranu otevřeného přístroje. Jak již bylo naznačeno, jsou trubcové tlakoměry vhodné i pro velmi vysoké tlaky (přetlaky), lze jich však použít i pro tlaky

nižší, než je okamžitý tlak barometrický, tedy pro podtlaky. Musí se ovšem zvolit vhodná trubice, citlivá k deformacím.

Protože název tlakoměru volíme zpravidla pro obecné tlakoměrné účely (v libovolném rozsahu), nazýváme přístroje, kterými měříme přetlak - *trubicovými manometry*, pro měření podtlaků *trubicovými vakuometry*. Je-li přístroj určen pro měření tlaků v okolí barometrického tlaku (nad i pod ním), měří-li se jím jak přetlaky, tak i podtlaky, používáme názvu *trubicové manovakuometry*.



Obr. 4. Vysokotlakový tubicový měřicí systém.

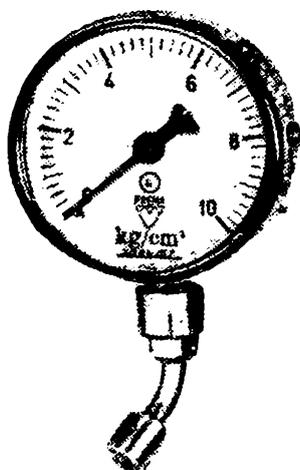


Obr. 5. Kontrolní (Bourdonův) manometr.

Abychom se mohli kdykoliv přesvědčit, zda náhodným přetížením (nebo časovou změnou pružných vlastností) nebyla snímací trubice plasticky deformována, má stupnice přístroje vždy vyznačenu nulovou hodnotu přetlaku, odpovídající tedy okamžité hodnotě barometrického tlaku. Po odlehčení přístroje musí se totiž ručička sama vrátit na nulu, což je jedna z hlavních průkazných zkoušek stálosti jeho údajů.

U přístrojů pro měření velmi vysokých tlaků musí být pouzdro, ve kterém je celý tlakoměrný systém uložen, dostatečně pevné a odolné vůči případnému samovolnému porušení (prasknutí) trubice (říká se někdy vůči havárii manometru). Výztužná žebra jsou patrna v obr. 4. Kromě toho mívají z téhož důvodu pouzdra na zadní stěně lehce zakryté otvory zvané *explozní*, jimiž by tlaková vlna mohla uniknout při náhlém prasknutí trubice. Při zkoušení vysokotlakových přístrojů musí být pečlivě dodržovány speciální bezpečnostní předpisy, protože prasknutí trubice může být životu nebezpečné, zvláště při měření tlaku kapalin. Kapalinový paprsek, vycházející z vysokotlakového prostoru, může lehce „prostřelit“ pozorovatele. Naštěstí jsou případy takových havárií poměrně řídké.

Několik trubicových manometrů, používaných pro různé účely, je v dalších obrázcích. Jde vesměs o československé výrobky národního podniku Presná mechanika (Prema) ve Staré Turé na Slovensku. První z nich (obr. 5) je přesný kontrolní tlakoměr (pro kontrolní měření např. na parních kotlech), který může být proveden jako manometr, vakuumetr, i jako manovakuometr. Manometry tohoto provedení stavějí se s maximálním rozsahem do $1600 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$. Na obr. 6 je vyobrazen manometr, určený k měření tlaku v automobilních pneumatikách. Dalším přístrojem je speciální manometr pro záchranné kyslíkové přístroje (obr. 7). U tohoto přístroje si všimněme bílých číslic a značek na černém podkladě stupnice, zatím co u ostatních přístrojů je tomu naopak. Přístroj je totiž



Obr. 6. Manometr pro měření tlaku v pneumatikách.



Obr. 7. Speciální manometr pro kyslík.

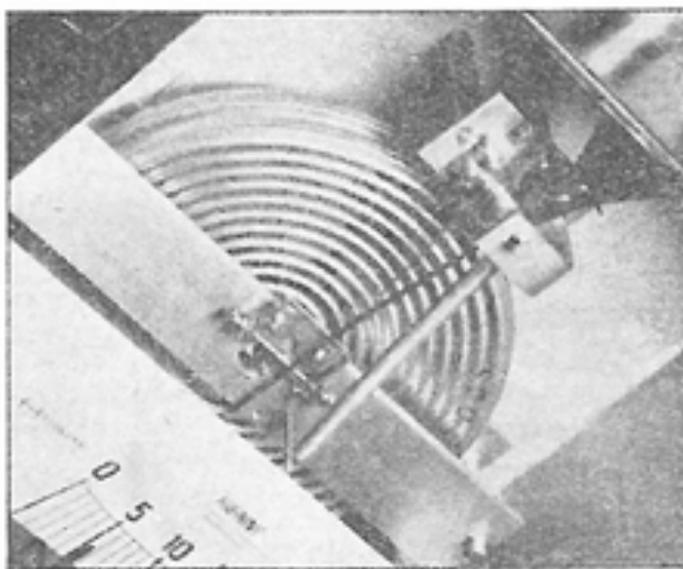
určen pro měření tlaku kyslíku. Úpravou stupnice se dosahuje, že se na první pohled pozná speciální určení přístroje a přístroj se zkouší jiným způsobem než jiné přístroje. Trubicové tlakoměry se totiž zkoušejí zpravidla tlakovým olejem, který při zkoušce vnikne i do snímací trubice. U tlakoměrů na kyslík se něco takového stát nesmí, protože zbytky oleje, zbylé v trubici po vyzkoušení, reagovaly by při vlastním měření s kyslíkem a mohlo by dojít lehce k explozi systému. Proto se tlakoměry na kyslík zkoušejí výjimečně vodou.

Mohli bychom uvést ještě řadu příkladů i jiných tlakoměrů. Kdybychom však chtěli podrobně pojednat o tomto měřicím oboru a příslušných přístrojích, potřebovali bychom k tomu dosti obsáhlou knížku.

Rozmanité jsou nejen průřezy trubic, o nichž jsme hovořili, ale i vnější provedení, protože oboje se řídí rozsahy, účelem, použitím aj. Nejčastější jsou přístroje s jednou ukazovací ručičkou. Mohli bychom se však setkat i s přístroji, kde jsou ručky dvě (výjimečně i více) a každá ukazuje,

nezávisle na druhé, tlak v jiném prostoru (např. ve dvou místech pneumatického brzdného uspořádání motorových vozidel, v tlakové nádrži a v brzdícím válci). Tak lze ušetřit místo na panelech, palubních deskách apod. Dvojitý tlakoměrný systém se volí také u některých kontrolních tlakoměrů.

☞ Schéma *membránového tlakoměru*, který je druhým význačným typem deformačních tlakoměrných přístrojů, bylo již uvedeno v obr. 1d. Kovová pružná membrána, jež je zde deformačním snímačem, je upnuta mezi přírubami dvou těles komory, kterou rozděluje na dvě části. Také těchto přístrojů lze použít jak pro malé, tak i velké tlaky (i přes $1000 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$).



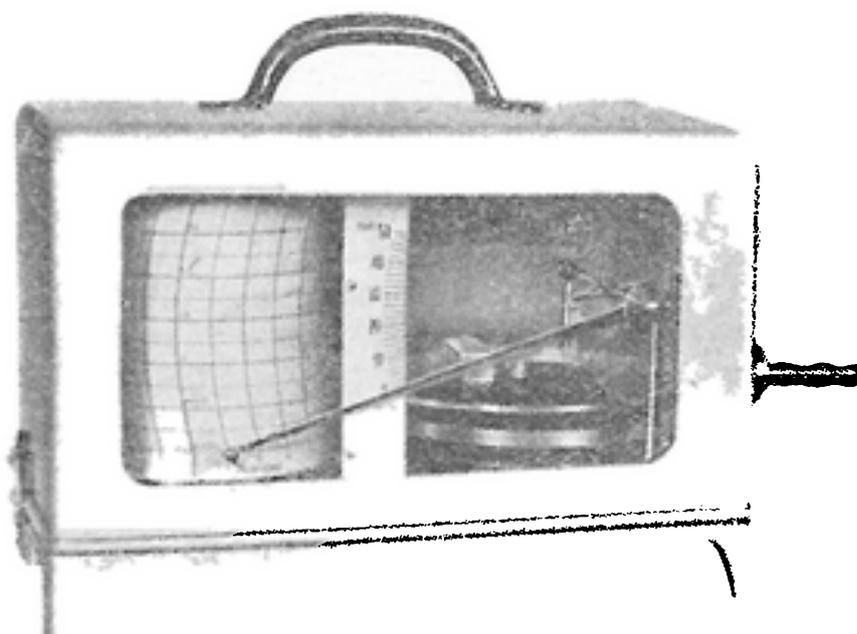
Obr. 8. Membránový manometr. Obr. 9. Měřicí ústrojí krabicového manometru.

Pro menší tlakové rozsahy bývá membrána z barevných kovů, pro vyšší pak z niklové nebo chromniklové oceli. Deformace membrány přenáší se tyčkou a ozubeným převodem na ručičku. Vnější provedením je přístroj podobný přístrojům trubicovým, na membránový systém však ukazuje na první pohled přírubový kus pod skříní se stupnicí (obr. 8). Přístroj znázorněný na obrázku je dokonce vybaven elektrickým zařízením, které umožňuje přenášení měřených hodnot do větších vzdáleností, případně i současnou registraci, je-li takový dálkový vysílač měřených hodnot dvojitý.

Tlakoměry krabicové a vlnovcové jsou vhodné pro svou vysokou citlivost¹⁾ zvláště k měření malých přetlaků a podtlaků, i malých tlakových

¹⁾ I trubicové tlakoměry by bylo možno zhotovit velmi citlivé, ovšem trubice by musela být velmi tenkostěnná; tím by se však přístroj v provozu stal příliš choulostivý.

diferencí. Tlakoměrným deformačním snímačem je plochá krabice, nebo pro zvýšení citlivosti více krabic, spojených za sebou (obr. 1f). Každou krabici tvoří dvě tenké zvlněné membrány. Krabice se hotoví podobně jako membrány z barevných kovů. Krabice je dvojdílná a oba kusy jsou po složení na obvodě spájeny nebo svařeny. Jedno dno krabice je vždy pevně spojeno s tělesem přístroje, druhé se deformuje tlakem, který se přivádí dovnitř krabice. Deformace se přenáší pákovým a ozubeným převodem na indikační ručku podobně jako u membránových tlakoměrů. Na obr. 9 je přístroj s dvoukrabicovým snímačem, vhodný pro měření malých tlaků do $0,3 \text{ kp.cm}^{-2}$. Rovněž malé změny barometrického tlaku lze měřit a registrovat podobným systémem (viz obr. 10 představující barograf).



Obr. 10. Barograf.

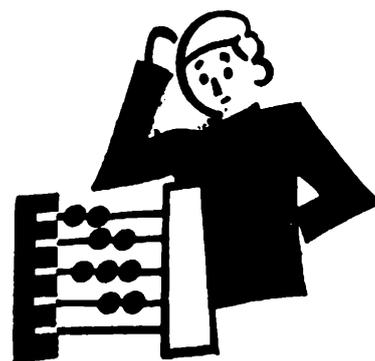
Deformačním snímačem *vlnovcového tlakoměru* je *vlnovec* čili měch; odtud též někdy název *měchových tlakoměrů*. Je to bezešvá tenkostěnná trubka s vyválnými vlnami na cylindrickém povrchu (obr. 1g). Vlnovec bývá z tombaku nebo bronzi. Měřený tlak se přivádí dovnitř vlnovce. Ten mění svoji délku (deformuje se) působením přetlaku, stejně jako několik tlakoměrných krabic spojených za sebou. Vlnovcových tlakoměrů lze použít pro měření malých a středních tlaků až asi do 250 kp.cm^{-2} .

Tímto článkem jsme přehledně probrali hlavní typy tlakoměrů. Zbývají tlakoměry pístové, používané k základní etalonové práci, nebo k ověřování (cejkování) provozních přístrojů. O těch si můžeme říci později, podobně jako o barometrech, případně o nových elektrických metodách měření tlaku.

Matematika

Tomáš Jech, studující KU, Praha:

Apolloniova kružnice



Hledejme geometrické místo bodů v rovině, jejichž vzdálenosti od dvou daných různých bodů A, B jsou v daném poměru λ .

Pro $\lambda = 1$ je hledanou množinou osa úsečky AB . Nechtť tedy je $\lambda \neq 1$ reálné kladné číslo. Na přímce AB leží právě dva takové body U, V , pro něž platí $UA \cdot UB = VA \cdot VB = \lambda$. Kromě nich obsahuje hledaná množina všechny vrcholy C trojúhelníku ABC , pro jejichž strany $AC = b$, $BC = a$ platí $b : a = \lambda$. Budiž ABC jeden takový trojúhelník (obr. 1). Sestrojme osy o_1, o_2 úhlů sevřených přímkami AC, BC . Jak známo, jsou osy o_1, o_2 navzájem kolmé. Osa o_1 protne přímku AB v bodě U' , osa o_2 v bodě V' .

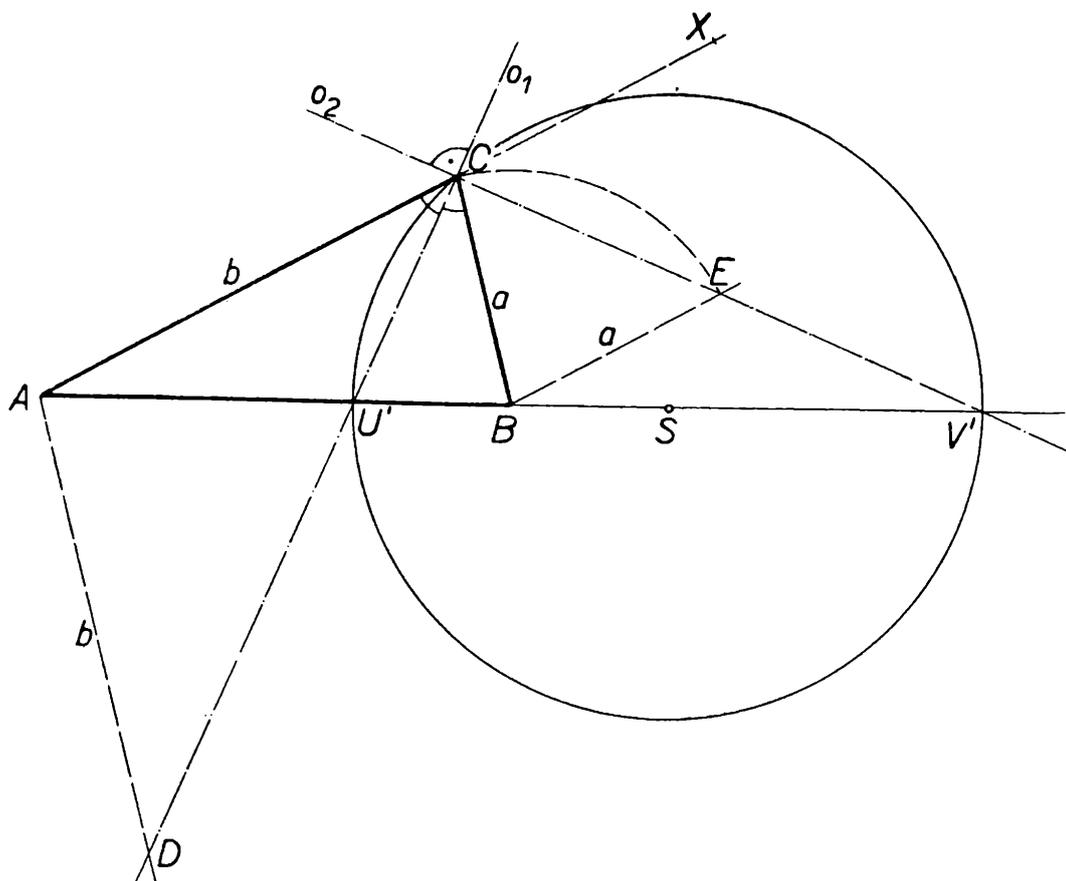
Přímka vedená bodem A rovnoběžně s přímkou BC protne osu o_1 v bodě D . Úhly $\sphericalangle ADC$ a $\sphericalangle BCD$ jsou střídavé, a proto shodné. Poněvadž platí $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$, je trojúhelník DCA rovnoramenný a platí $AD = b$. Trojúhelníky ADU' a BCU' jsou stejnohlelé a platí tedy

$$\frac{AU'}{BU'} = \frac{b}{a} = \lambda.$$

Přímka vedená bodem B rovnoběžně s AC protne osu o_2 v bodě E . Úhly $\sphericalangle BEC$ a $\sphericalangle ECX$ jsou střídavé, a tedy shodné. Protože $\sphericalangle ECX = \sphericalangle ECB$, je trojúhelník ECB rovnoramenný a platí $BE = a$. Trojúhelníky $AV'C, BV'E$ jsou stejnohlelé, proto platí

$$\frac{AV'}{BV'} = \frac{b}{a} = \lambda.$$

Vidíme tedy, že body U' , V' jsou totožné s body U , V a že každý bod C je vrcholem nějakého pravoúhlého trojúhelníka UVC s přeponou UV . Je zřejmé, že naopak každý vrchol pravoúhlého trojúhelníka s přeponou UV patří do hledané množiny. Avšak všechny tyto vrcholy spolu s body U , V tvoří kružnici, sestrojenou nad průměrem UV . Hledaným geometrickým místem je tedy kružnice, sestrojená nad průměrem $U'V'$ a nazývá se Apolloniouva kružnice.¹⁾



Obr. 1

Jsou-li dány body A , B a poměr λ (např. jako poměr dvou úseček u , v), sestrojíme body U , V takto (obr. 2): Body A , B vedeme dvě libovolné rovnoběžky p , q . Na přímce p určíme bod A_1 , pro který platí $AA_1 = u$. a na přímce q body B_1, B_2 , pro které platí $BB_1 = BB_2 = v$. Potom přímky A_1B_2 a A_1B_1 protnou přímku AB pořadě v bodech U , V . Trojúhelníky AA_1U , BB_2U , resp. AA_1V , BB_1V , jsou podobné s poměrem podobnosti $\frac{u}{v}$; jsou tedy U , V hledané body.

K Apolloniouvě kružnici můžeme dojít i analytickou cestou. Připomeň-

¹⁾ Apollonios z Pergy (asi 260 až 200 př. n. l.) proslul hlavně zavedením soustavného přehledu kuželoseček. Od něho také pocházejí názvy elipsa, hyperbola, parabola.

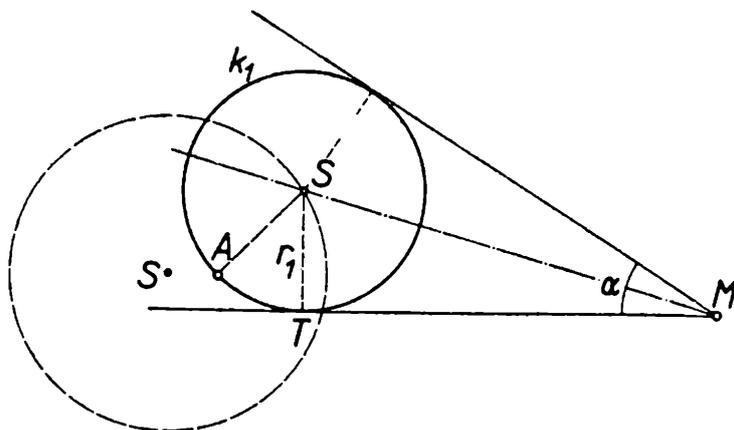
$$\left(x - \frac{a_1 - \lambda^2 b_1}{1 - \lambda^2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2 - \lambda^2 b_2}{1 - \lambda^2}\right)^2 = \frac{\lambda^2 [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{(1 - \lambda^2)^2}.$$

Hledanou množinou je tedy kružnice o středu $S \left(\frac{a_1 - \lambda^2 b_1}{1 - \lambda^2}, \frac{a_2 - \lambda^2 b_2}{1 - \lambda^2}\right)$ a poloměru

$$r = \left|\frac{\lambda}{1 - \lambda^2}\right| \cdot \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|} \cdot AB.$$

Čtenář se může přesvědčit, že tato kružnice je skutečně táž, ke které jsme dospěli syntetickou cestou.

Jak známo, pro $\lambda = 1$ je hledanou množinou osa úsečky AB . Skutečně, jestliže se λ blíží k jedné, roste $r = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|} AB$ nade všechny meze, přičemž bod S se vzdaluje do nekonečna ve směru přímky AB . V krajním



Obr. 3

případě přejde kružnice v přímku, která prochází středem úsečky AB kolmo k přímce AB .

P o z n á m k a 1. Vyšetřujeme nyní, co je množinou všech bodů v prostoru, které mají tu vlastnost, že poměr jejich vzdáleností od dvou daných různých bodů A, B je konstantní. Je zřejmé, že tuto vlastnost mají právě všechny body kulové plochy, vzniklé rotací Apolloniovy kružnice kolem osy AB .

P o z n á m k a 2. Hledejme množinu středů kružnic, které procházejí daným bodem A a které jsou z daného bodu M vidět pod daným úhlem α .

Nechť $k_1 = (S_1, r_1)$ má žádané vlastnosti (obr. 3). Tečna vedená bodem M se dotýká kružnice v bodě T_1 a svírá s přímkou MS_1 úhel $\frac{\alpha}{2}$. Platí

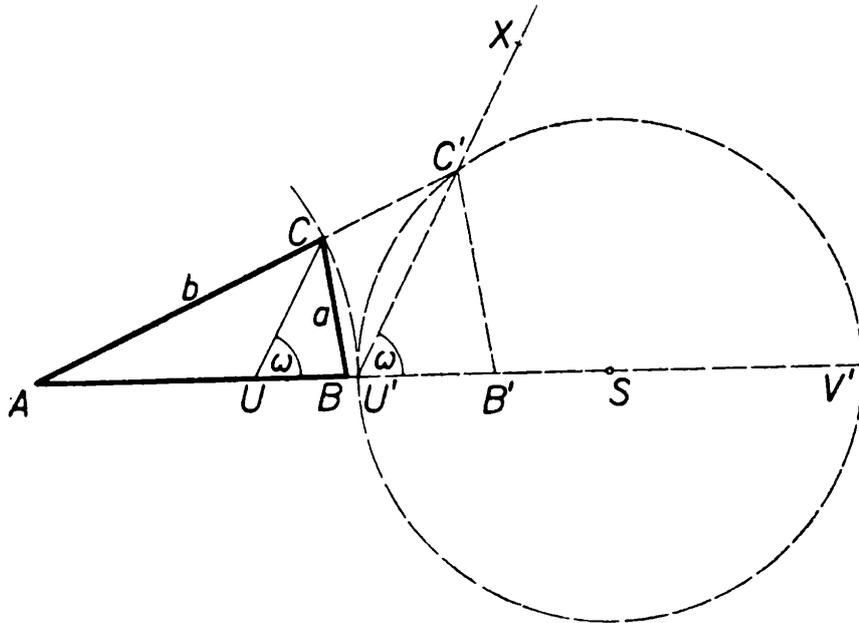
$$\frac{S_1 T_1}{S_1 M} = \sin \frac{\alpha}{2};$$

poněvadž $S_1T_1 = S_1A = r_1$, platí

$$\frac{AS_1}{MS_1} = \sin \frac{\alpha}{2} = \text{konst} \neq 0.$$

Je tedy hledanou množinou Apolloniova kružnice pro body A, M ;

$$\lambda = \sin \frac{\alpha}{2}.$$



Obr. 4

Příklady. 1. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže jsou dány velikosti stran $BC = a$, $AC = b$ a úhel $\sphericalangle BUC = \omega$, kde U je průsečík osy úhlu γ s přímkou AB .

Ř e š e n í. Velikosti stran AC, BC trojúhelníka ABC jsou v poměru $\lambda = \frac{b}{a}$.

Leží tedy bod C buď na ose úsečky AB , nebo na Apolloniově kružnici pro A, B, λ . V prvním případě ($a = b$) je zřejmé, že řešení existuje jen v případě, že $\omega = 90^\circ$ a řešením je potom každý rovnoramenný trojúhelník s rameny délky a . Budiž tedy $a \neq b$ (obr. 4). Potom řešíme úlohu tak, že nejprve sestrojíme trojúhelník $AB'C'$ stejnohlý s trojúhelníkem ABC ; např. tak, že volíme $AB' = a + b$ a na úsečce AB' bod U' tak, že $AU' = b$, $B'U' = a$. Potom bod C' je průsečík Apolloniové kružnice, sestavené nad průměrem $U'V'$ (bod V' je ovšem jednoznačně určen body A, B, U') a rameno $U'X'$ úhlu $\sphericalangle XU'B' = \omega$ (ve zvolené polorovině). Hledaný trojúhelník ABC je s trojúhelníkem $AB'C'$ stejnohlý podle bodu A tak, že $AC = b$. Je zřejmé, že úloha má nejvýš jedno řešení, a to právě tehdy, když buď $a > b$, $\omega > 90^\circ$ nebo $a < b$, $\omega < 90^\circ$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže je dáno $b - a$, $u = UC$, $m = OC$, kde U je průsečík osy úhlu γ s přímkou AB a O střed kružnice vepsané.

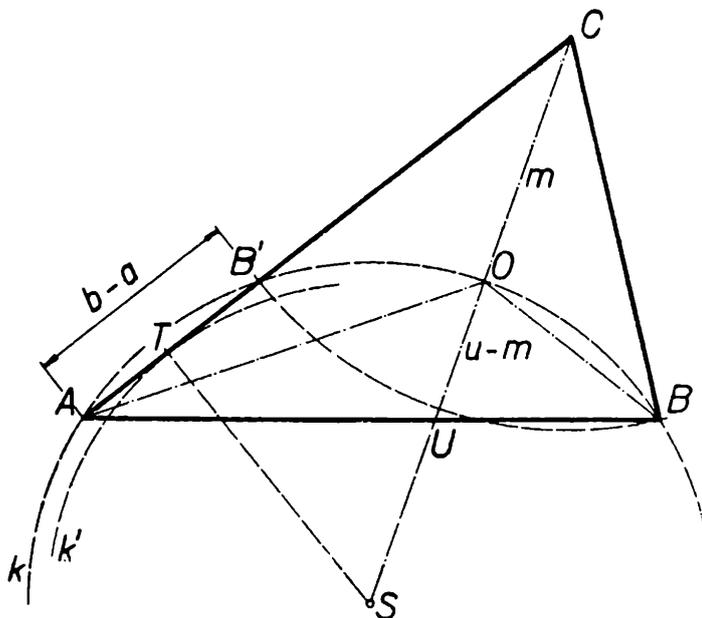
Řešení (obr. 5). Uvažujme jen případ $b > a$, neboť případ $b < a$ je obdobný a případ $b = a$ je triviální. Bod O je průsečíkem os úhlů α, β, γ , platí tedy

$$\frac{CO}{OU} = \frac{CA}{AU} = \frac{CB}{BU}$$

Body A, B proto leží na Apolloniově kružnici k pro $C, U, \lambda = \frac{m}{u-m}$

Leží na ní však i bod B' , souměrný s bodem B podle CU , při čemž $AB' = b - a$. Stačí tedy vést z bodu C sečnu ke kružnici k tak, aby vyřezala tětivu délky $b - a$, což znamená vést tečnu k soustředné kružnici k' , jež je množinou středů všech tětiv délky $b - a$ kružnice k . Krajní bod tětivy vzdálenější od C je bod A ; bod B je průsečík kružnice k a přímky AU . Aby úloha měla řešení, musí být zřejmě splněny tyto podmínky:

- Bod O musí ležet uvnitř úsečky CU , tedy $m < u$.
- Bod C musí ležet vně kružnice k , čili $m > \frac{1}{2}u$; pochopitelně nemůže být ani $m = \frac{1}{2}u$.



Obr. 5

c) Průměr kružnice k musí být větší než $b - a$, tedy

$$\frac{2\lambda}{|1 - \lambda^2|} \cdot CU > b - a, \text{ tj. } \frac{2m(u - m)}{2m - u} > b - a.$$

Připustíme-li i případ $b \leq a$, potom má úloha řešení (a to jediné) právě tehdy, když

$$\frac{2m(u - m)}{2m - u} > |b - a|$$

Cvičení.

- Sestrojte trojúhelník, je-li dáno $a, \frac{b}{c}, \alpha$.
- Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, b, u_c .

3. Jsou dány tři různé body A, B, M . Sestrojte kružnici, která prochází body A, B tak, aby tečny k ní vedené bodem M svíraly daný úhel α .

4. Nalezněte bod, jehož vzdálenosti od tří daných různých bodů A, B, C jsou v daném poměru $a : b : c$.

5. Sestrojte kružnici, která je ze tří daných bodů A, B, C vidět pod danými úhly α, β, γ .

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ, σ a bod M ležící mimo ně. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník MPQ s přeponou MQ takový, že body P, Q leží na průsečnici rovin ρ, σ a že platí $\frac{MQ}{PQ} = \lambda$, kde $\lambda > 1$ je dané číslo.

J a n H a v e l k a, SVVŠ, Pacov

Pravítko reálných kořenů kvadratických rovnic

Každou kvadratickou rovnicí můžeme upravit na normovaný tvar. Tyto normované kvadratické rovnice s reálnými čísly p a q rozdělme do dvou skupin.

Do první skupiny zařadíme rovnice

$$x^2 + px + q = 0 ; \text{ kde } q \geq 0 ,$$

do druhé skupiny rovnice

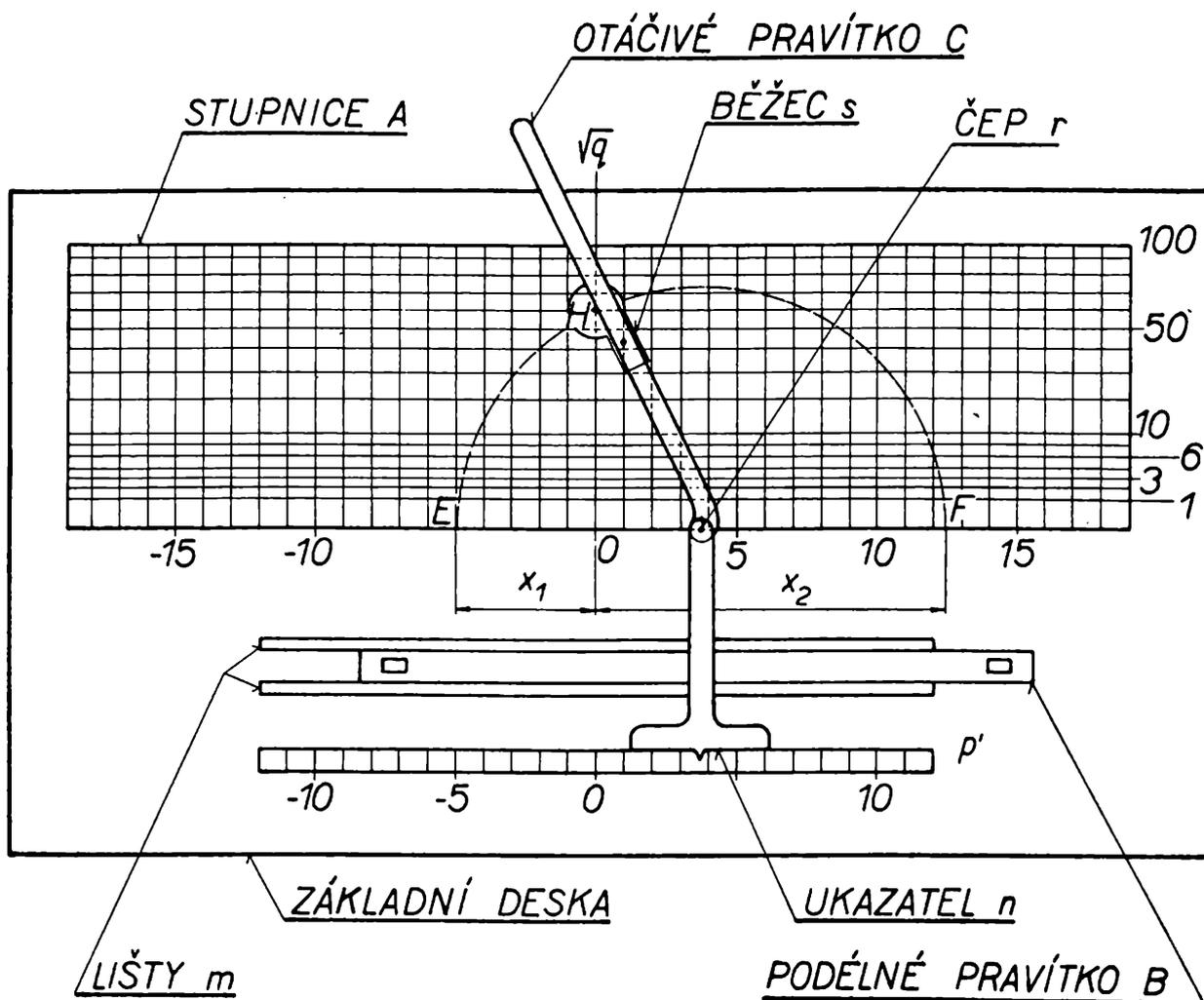
$$x^2 + px + q = 0 ; \text{ kde } q < 0 .$$

Uvádím schematický náčrt pravítka, kterým je možno určovat reálné kořeny výše uvedených rovnic.

Pravítko sestává

1. z *narysované stupnice* A na základní desce. Stupnice A má hlavní číselnou osu p , hlavní poloosu \sqrt{q} , kolmou na hlavní číselnou osu a pomocnou číselnou osu p' . Na hlavní číselné ose p jsou vyznačeny hodnoty celých čísel od 0 do ± 25 s desetinným dělením a tyto hodnoty jsou svisle prorýsovány po celé výšce stupnice A jako vedlejší poloosy \sqrt{q} . Pro přehlednost náčrtu není desetinné dělení v náčrtu narýsováno. Na hlavní poloose \sqrt{q} jsou od počátku nula vyznačeny hodnoty odmocnin celých čísel od 0 do 100 a jsou vodorovně prorýsovány po celé délce stupnice A jako vedlejší číselné osy, např. bod 6 značí tedy $\sqrt{6}$. Pro přehlednost náčrtu nejsou rovněž všechny vedlejší číselné osy narýsovány. Pomocná číselná osa p' je rovnoběžná s hlavní číselnou osou p , je to stupnice p promítnutá rovnoběžně ve směru poloosy \sqrt{q} a má s ní shodné dělení. Jejich vzdálenost je závislá na zvolené šíři podélného pravítka B , šíři lišt n a obou mezerách nad horní a pod dolní lištou;

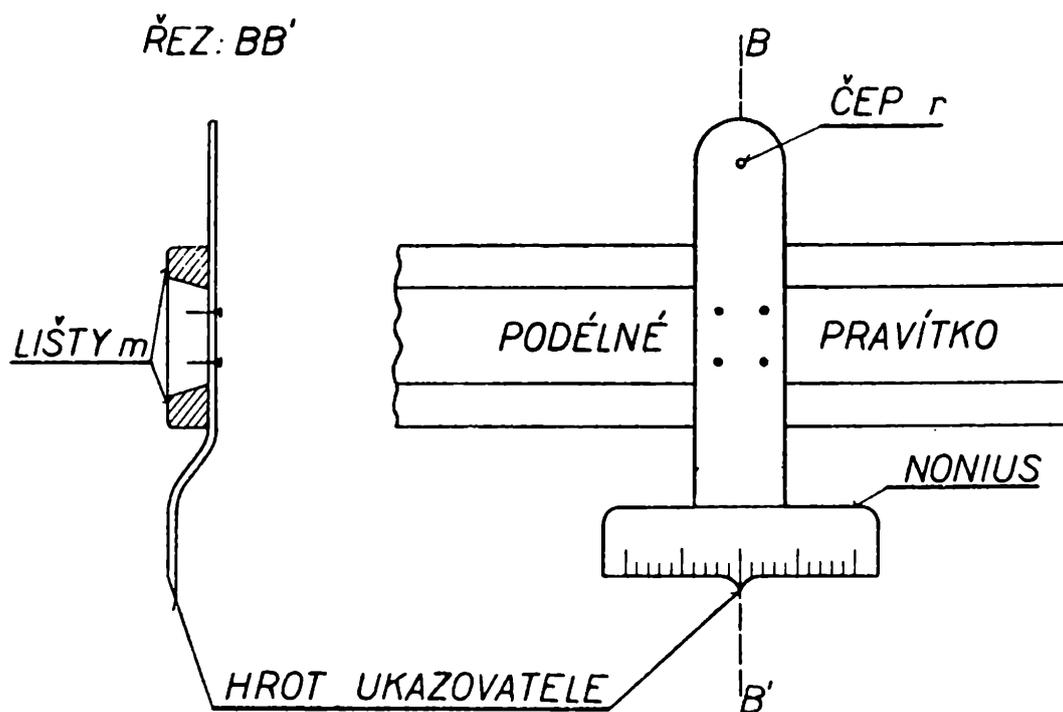
2. z podélného pravítka B , jehož pohyb vpravo i vlevo umožňují vodící lišty m pevně připevněné k základní desce. K podélnému pravítku B je pevně připevněn plechový ukazovatel n s čepem r . Ukazovatel n s noniem se pohybuje při pohybu podélného pravítka B po pomocné stupnici p' a čep r přesně po číselné ose p ;



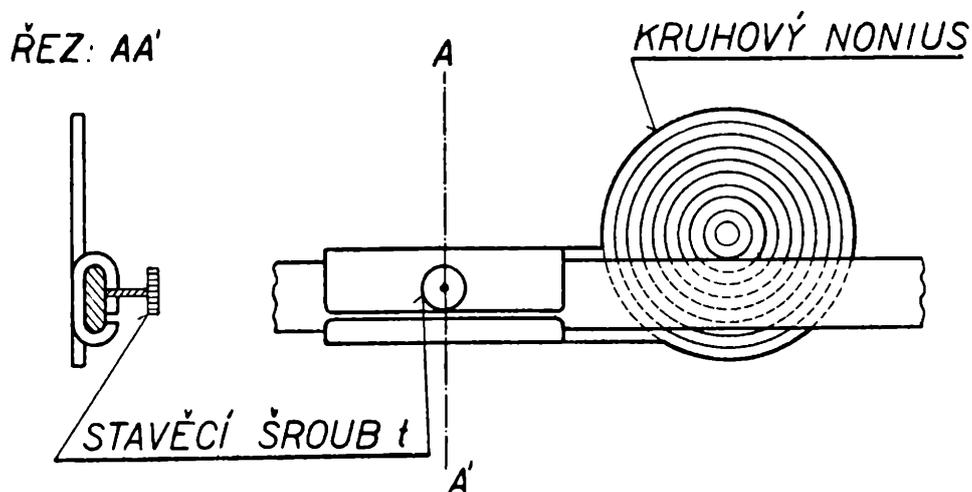
Obr. 1

3. z otáčivého pravítka C , které je upevněno v čepu r . Má pohyblivý běžec s s kruhovým noniem. Spojnice čepu r a středu kruhového nonia je rovnoběžná s hranami otáčivého pravítka C , leží mimo pravítko C ve zvolené vzdálenosti, a to proto, aby stupnice pod kruhovým noniem byla lépe viditelná. Běžec s lze stavěcím šroubem t pevně spojit s otáčivým pravítkem C . Otáčivé pravítko C i běžec s s kruhovým noniem je nutno zhotovit z průhledného materiálu (org. skla, plexiskla). Kruhový nonius umožňuje přesnější čtení kořenů rovnic. Obě pravítka B i C lze nahradit kružítkem, jehož jeden hrot je vždy nastaven na hlavní číselné ose. Čtení kořenů rovnic je však méně přesné.

Postup při určování reálných kořenů pravítkem u rovnic prvé skupiny. Podélné pravítko B posuneme tak, aby ukazovatel n svým hrotem na pomocné číselné ose p' ukazoval $-\frac{p}{2}$ dané rovnice. Tím je přesně nastaven čep r na hlavní číselné ose p rovněž na $-\frac{p}{2}$ (obr. 4). Poté oto-



Obr. 2. Detail ukazovatele n .



Obr. 3. Detail běžce s .

číme otáčivé pravítko C směrem k nule na hlavní číselné ose tak, aby polopřímka jdoucí čepem r a středem kruhového nonia splynula s hlavní číselnou osou p . Uvolníme stavěcí šroub t , běžce s posuneme po otáčivém pravítku, aby střed kruhového nonia splynul s nulou na hlavní číselné ose p a opět stavěcí šroub utáhneme. Otáčíme-li nyní otáčivým pravítkem C , opisuje střed kruhového nonia běžce s půlkružnici (její poloměr se rovná $\left|\frac{p}{2}\right|$). Tato půlkružnice může mít s přímkou, která je

rovnoběžná s přímkou p ve vzdálenosti \sqrt{q} trojí různou polohu:

a) Má s ní společné dva různé body a pak daná rovnice má dva různé kořeny reálné. Jejich hodnoty jsou dány vzdálenostmi průsečíků od poloosy \sqrt{q} .

b) Má s ní společný právě jeden bod a daná rovnice má jediný (dvojnásobný) kořen.

c) Nemá s ní společný žádný bod a kořeny dané rovnice jsou imaginární.

Vzdálenost těchto průsečíků od hlavní poloosy \sqrt{q} určuje oba reálné kořeny dané rovnice $x_1; x_2$.

Na obr. 4 jsou určeny kořeny rovnice $x^2 + 14,2x + 20 = 0$. Ukazovatel i čep je nastaven na hodnotu $-7,1$. Kruhový nonius je posunut na nulu na hlavní číselné ose. Vedlejší číselná osa má hodnotu $\sqrt{20}$. Při otáčení otáčivého pravítka střed nonia opsal půlkružnici, která protíná příslušnou vedlejší číselnou osu v bodech P a R . Jejich vzdálenost od hlavní poloosy \sqrt{q} , tj. bodu M , jsou kořeny výše uvedené rovnice.

$$\begin{aligned} x_1 &= MP = -1,6 & x_2 &= MR = -12,6 \\ MP &= NL, & MR &= ON, \\ RN &= \sqrt{q} = \sqrt{20}. \end{aligned}$$

Podle Euklidovy věty o výšce

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= NL + NO = -p, \\ x_1 x_2 &= (RN)^2 = q \end{aligned}$$

Užijeme-li hodnot na číselné ose 10, 100, ...krát větších (menších), pak hodnoty odmocnin na poloose jsou z hodnot 100, 10 000, ...krát větších (menších).

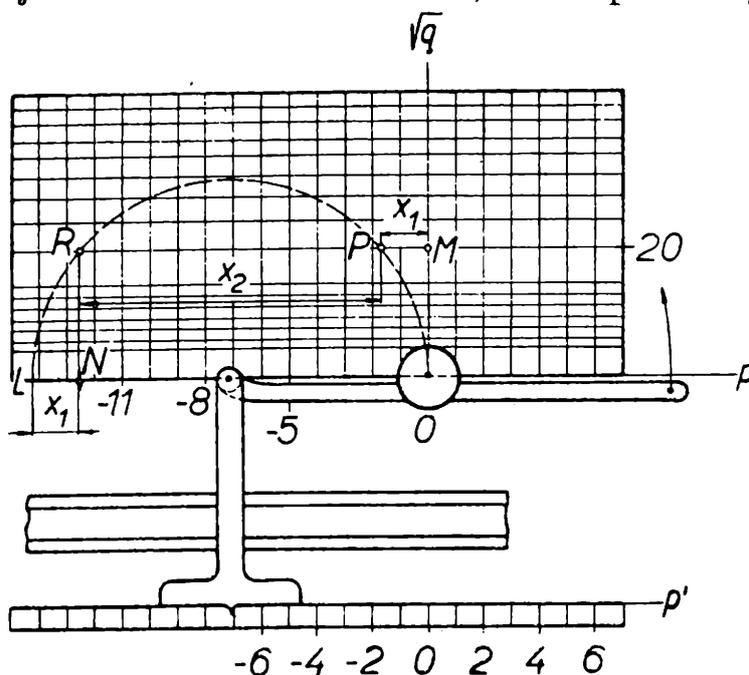
Nastavení pravítek v obr. 4 určuje kořeny i těchto rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 142x + 2000 &= 0 & x_1 &= -16 & ; & x_2 &= -126 \\ x^2 + 1,42x + 0,2 &= 0 & x_1 &= -0,16 & ; & x_2 &= -1,26 \end{aligned}$$

Postup při určování reálných kořenů pravítkem u rovnic druhé skupiny. Podélné pravítko B posuneme tak, aby ukazovatel n svým hrotem na pomocné číselné ose p' ukazoval $-\frac{p}{2}$ dané rovnice. Tím je přesně na-

staven čep r na hlavní číselné ose rovněž na $-\frac{p}{2}$ (obr. 1). Poté otočíme otáčivé pravítko C tak, aby polopřímka jdoucí čepem r a středem kruhového nonia procházela průsečíkem hlavní poloosy \sqrt{q} s vedlejší číselnou osou, vzdálenou od hlavní číselné osy o hodnotu příslušné \sqrt{q} dané rovnice. V této poloze otáčivého pravítka uvolníme stavěcí šroub t a běžec s posuneme, aby střed kruhového nonia splynul s průsečíkem hlavní poloosy s vedlejší číselnou osou a opět stavěcí šroub utáhneme. Otáčíme-li nyní otáčivým pravítkem C , opisuje střed kruhového nonia běžec s půlkružnici. Tato půlkružnice protne hlavní číselnou osu p ve dvou bodech, jejichž vzdálenost od nuly jsou kořeny rovnice, a to vždy kořeny reálné.

Na obr. 1 jsou určeny kořeny rovnice $x^2 - 7,2x - 60 = 0$. Ukazovatel n i čep r je nastaven na hodnotu 3,6. Polopřímka jdoucí čepem r



Obr. 4

a středem kruhového nonia prochází průsečíkem H hlavní poloosy \sqrt{q} s vedlejší číselnou osou hodnoty $\sqrt{60}$. Střed kruhového nonia je posunut na průsečík H . Při otáčení otáčivého pravítka střed kruhového nonia opsá půlkružnici, která protíná hlavní číselnou osu p v bodech E a F . Jejich vzdálenost od nuly jsou kořeny výše uvedené rovnice.

$$x_1 = OE = -4,94 \qquad x_2 = OF = 12,14$$

$$x_1 + x_2 = 7,2 = -p; \quad x_1 x_2 = -60 = q$$

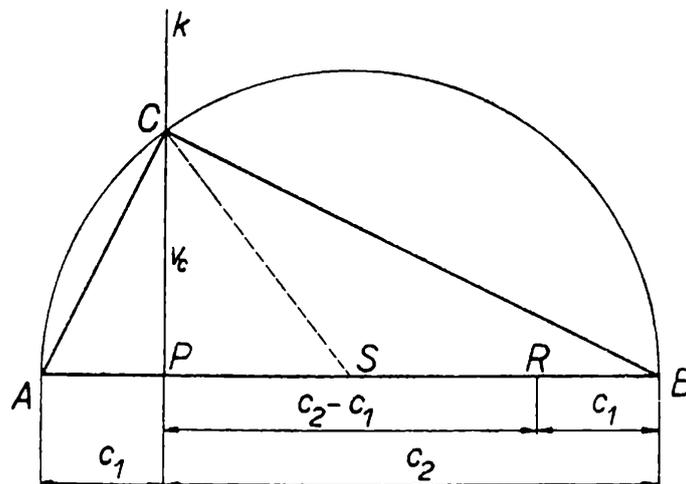
Podle Euklidovy věty o výšce $OE + OF = EF$; $OE \cdot OF = (OH)^2$. Nastavením pravítek v obr. 1 jsou řešeny kořeny i těchto rovnic

$$x^2 - 72x - 6000 = 0 \qquad x_1 = -49,4; \quad x_2 = 121,4$$

$$x^2 - 0,72x - 0,6 = 0 \qquad x_1 = -0,494; \quad x_2 = 1,214.$$

V postupu, kterým určíme reálné kořeny rovnic druhé skupiny na pravítku, užil jsem konstrukce sestavení pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána jeho výška na přeponu a rozdíl obou úseků přepony. Sestrojení je zřejmé z obr. 5.

Z Thaletovy věty $AS = SB$
 Z konstrukce $SP = SR \Rightarrow AF = RB$



Obr. 5

Domnívám se, že pro žáky škol (třeba jen ke kontrole správnosti výpočtů) by bylo vhodné vytisknout stupnici A na rubu milimetrového papíru, na které by žáci přímo kružítkem mohli určovat reálné kořeny kvadratických rovnic.

E v ž e n J o k l, ČVUT, Praha:

Grafická metoda umocňování a odmocňování

(Dokončení)

Nyní popíšeme postup, jak se užívá metody při výpočtech. Metoda je výhodná zvláště v případě, kdy máme umocňovat značný počet čísel na tentýž exponent:

1. Určíme čísla m, n v (1) podle předpokladů u (3).
2. Na logaritmický papír s dělením na obou osách od 1 do 10 zakreslíme úsečky grafu podle výkladu na str. 296. Dolní a horní okraj papíru rozdělíme na $|m|$ stejných dílů, levý a pravý okraj na n stejných dílů a tak-

to sestrojené body spojujeme po dvou úsečkami o směrnici $\frac{m}{n}$. Tyto úsečky očíslováme čísla i podle výkladu na str. 299: Úsečka, jdoucí počátkem, dostane číslo 0, úsečky, ležící nad touto, mají čísla $-1, -2, \dots$. Úsečky ležící pod ní, mají čísla $1, 2, \dots$. Je-li tedy $m > 0$, má levý horní roh papíru číslo $-n$, dále pak jsou úsečky s čísly $-n+1, -n+2, \dots, m-1$, pravý dolní roh má číslo m . Je-li $m < 0$, má počátek číslo 0, úsečky pak mají čísla $-1, -2, \dots, m-n+1$, pravý horní roh má číslo $m-n$.

3. K danému číslu x zjistíme řád j a vyneseme na dolním okraji papíru číslo \bar{x} . K číslu \bar{x} určíme příslušné k , tj. číslo té úsečky grafu, která protíná osu (ξ) nejbližše vlevo, je-li $m > 0$, nebo nejbližše vpravo, je-li $m < 0$.

4. Vypočteme p podle (7) a i podle (5).

5. Pořadnici v bodě x protneme s i -tou úsečkou grafu a přečteme příslušné \bar{y} . Hledaný výsledek pak je $y = \bar{y} \cdot 10^p$.

V následujících příkladech není třeba zvlášť počítat všechna čísla k, p, i , jestliže postupujeme systematicky od menších x k větším. Je třeba jen pamatovat, že řád x se zvětší o jednu při přechodu na další úsečku grafu zprava doleva (např. na obr. 2, z úsečky 5 na úsečku -2) a při přechodu na další úsečku shora dolů (např. na obr. 2 z -1 na 3) se zvětší řád y o jednu. Pokud nepřekračujeme pravý ani horní okraj papíru, zůstává v platnosti číslo úsečky, pomocí níž se hledá výsledek. Podle těchto poznámek je tedy možno pro většinu argumentů určit výsledek bezprostředně.

x	\bar{x}	j	k	p	i	\bar{y}	y
0,03	3	-2	3	-3	2	2,16	0,00216
0,05	5	-2	4	-3	2	5,29	0,00529
0,085	8,5	-2	6	-2	6	1,34	0,0134
0,12	1,2	-1	0	-2	-1	2,44	0,0244
0,45	4,5	-1	4	-1	3	2,48	0,248
3,2	3,2	0	3	0	0	7,65	7,65
55	5,5	1	5	3	5	1,11	1110
59	5,9	1	5	3	5	1,25	1250
82	8,2	1	6	3	5	2,23	2230
90	9	1	6	3	5	2,58	2580
308	3,08	2	3	4	2	2,26	22600

1. P ř í k l a d. Vypočítejte graficky hodnoty $y = \sqrt[4]{x^7}$ pro dané argumenty x ! Graf má směrnici $\frac{7}{4}$, protože je $m = 7$, $n = 4$ (obr. 2). Postup výpočtu je uspořádán v tabulce na předchozí stránce.

2. P ř í k l a d. Vypočítejte graficky hodnoty $y = 1 \sqrt[5]{x^9}$ pro dané hodnoty argumentu x ! Úsečky grafu mají směrnici $-9 : 5$, protože je $m = -9$, $n = 5$. (Obr. 3).

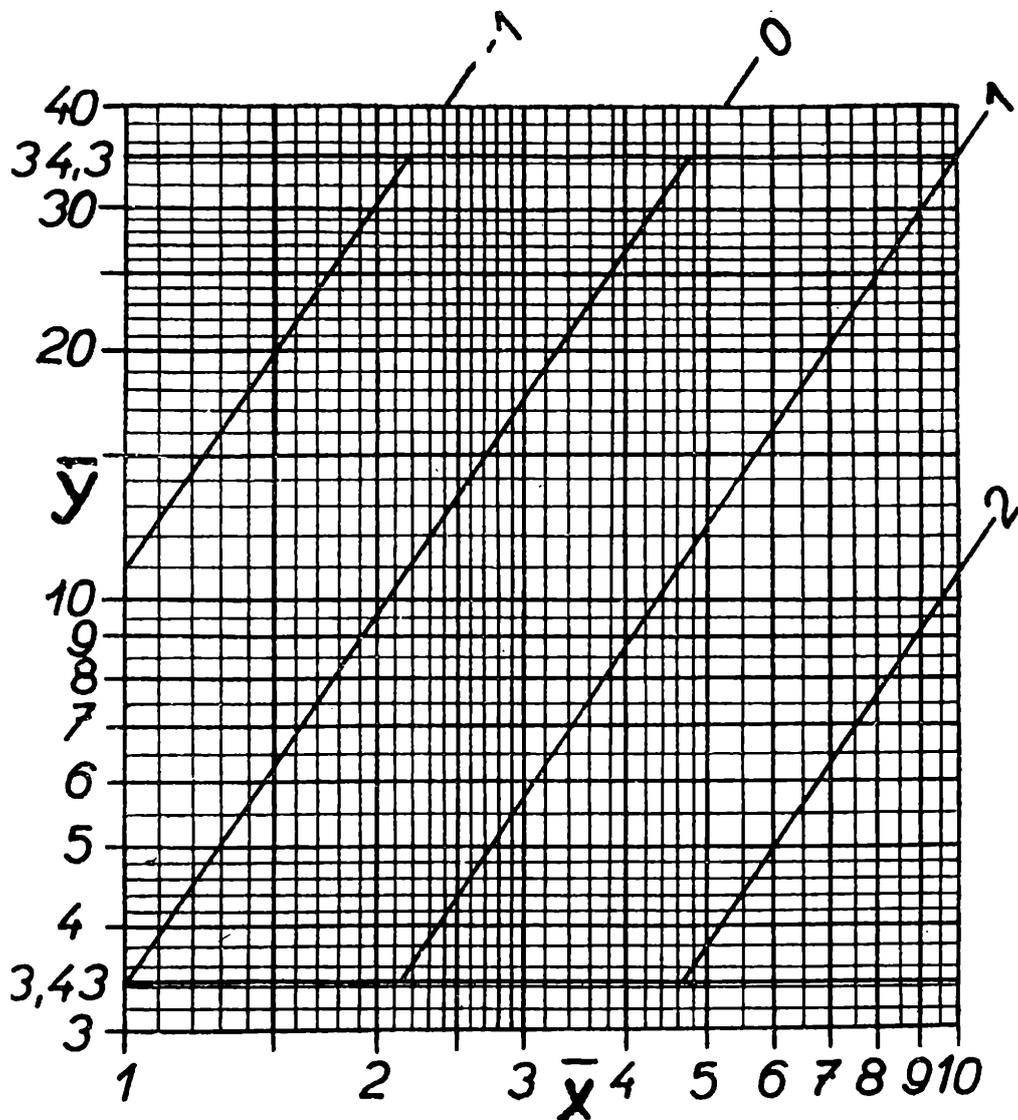
x	\bar{x}	j	k	p	i	\bar{y}	y
0,07	7	-2	-8	2	-8	1,2	120
0,08	8	-2	-9	1	-13	9,4	94,0
0,3	3	-1	-5	0	-9	8,70	8,1
0,45	4,5	-1	-6	0	-9	4,2	4,2
0,6	6	-1	-8	0	-9	2,5	2,5
1,3	1,3	0	-2	-1	-5	6,2	0,62
200	2	2	-3	-5	-7	7,2	0,000 072
250	2,5	2	-4	-5	-7	4,8	0,000 048
350	3,5	2	-5	-5	-7	2,6	0,000 026

Vyložené metody lze užít také k složitějším výpočtům, kdy se má mocnina ještě násobit dalším číslem, tedy $y = c \cdot x^{m:n}$, je-li c kladné. Za tím účelem je nutno mít k dispozici logaritmický papír se stupnicí od 1 do 100 na ose (η), a soustavu úseček grafu je nutno posunout vzhůru tak, aby nultá úsečka, původně jdoucí počátkem, nyní protínala osu (η) v bodě s kótou \bar{c} , kde \bar{c} je číslo c , dělené 10^q a q je řád čísla c . Číslo \bar{y} se pak vyhledá jako prve, ale násobí se 10^{p+q} . Máme-li počítat pro několik různých c , ale při stejném $m : n$, vyplatí se narýsovat soustavu úseček na průsvitný papír a posouvat jej.

x	\bar{x}	j	k	p	i	\bar{y}	y
0,8	8	-1	2	-1	1	24,5	2 450
8	8	0	2	1	2	7,7	77 000
10	1	1	0	1	-1	11,0	110 000
15	1,5	1	0	1	-1	20,0	200 000

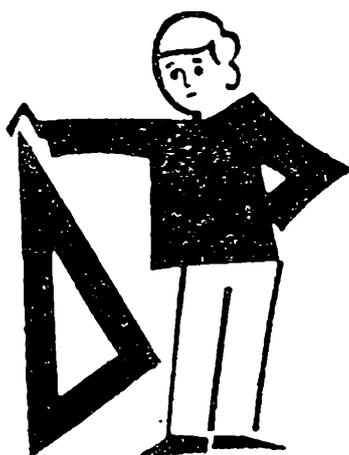
3. Příklad, Vypočítejte graficky hodnoty $y = 3430\sqrt{x^3}$ pro dané argumenty x ! $m = 3, n = 2, \bar{c} = 3,43, q = 3$, (obr. 4).

Příslušná tabulka je otištěna na předchozí stránce dole.



Obr. 4

Deskriptivní geometrie

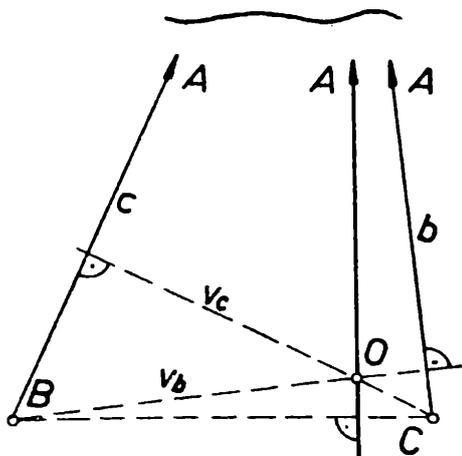


Inž. Ladislav Drs, CSc; Praha:

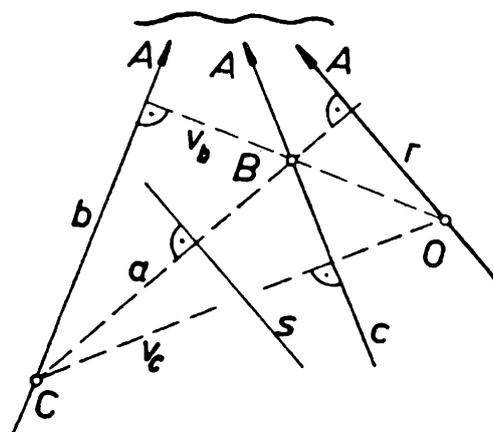
Užití průsečíku výšek trojúhelníka k řešení některých úloh deskriptivní geometrie

Je známo, že spojnice přístupného bodu O s nepřístupným bodem A (ležícím mimo nákresnu), určeným jako průsečík přímek b, c , které se v nákresně neprotínají, sestrojíme takto:

Bodem O vedeme kolmice v_b, v_c k přímek b, c . Označíme $B = v_b \times c$, $C = v_c \times b$. V trojúhelníku ABC je bod O průsečíkem výšek, hledaná spojnice AO je výškou ke straně BC , tj. OA je kolmice bodem O k přímce



Obr. 1



Obr. 2

BC (obr. 1). Při provádění konstrukce vyznačujeme jen silně vytažené krátké čárky, určující body B, C . Stranu BC nerýsujeme, pomocí dvou trojúhelníků narýsujeme přímo hledanou spojnicí AO .

Na základě této konstrukce vyřešíme následující úlohu:

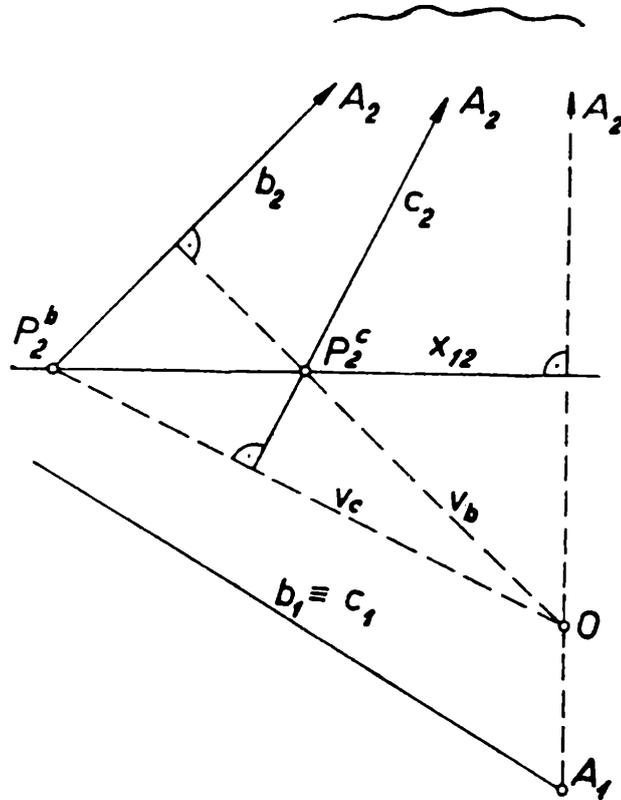
Nepřístupným bodem $A = b \times c$ vést rovnoběžku r s danou přímkou s !

Řešení. (Obr. 2.) Sestrojíme kolmici a k přímce s a označíme $C = a \times b$, $B = a \times c$. V trojúhelníku ABC sestrojíme průsečík výšek $O = v_b \times v_c$, kde v_b a v_c jsou sestrojeny podle předchozí konstrukce.

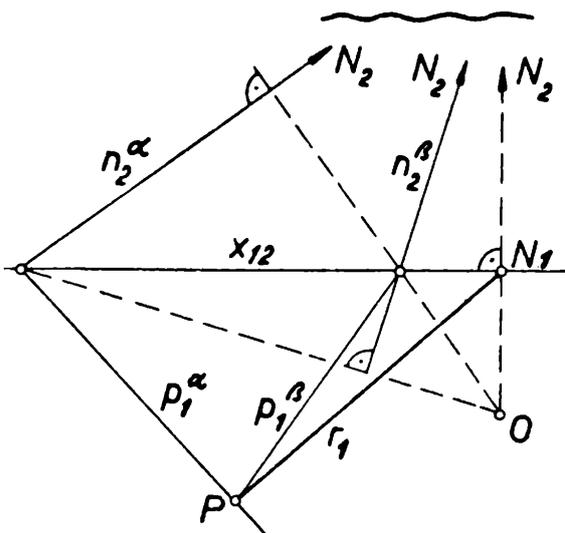
Bodem O vedená kolmice k přímce a je hledaná přímka r .

Těchto konstrukcí lze použít v různých úlohách deskriptivní geometrie.

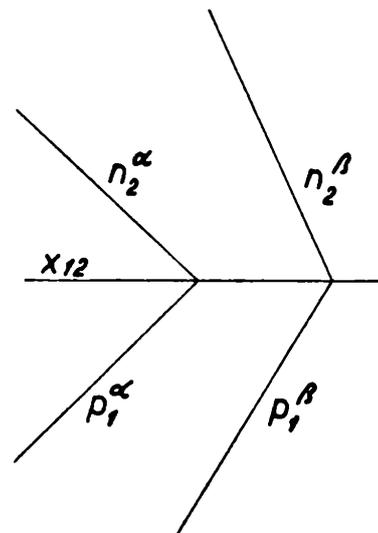
Úloha I. Sestrojte průměty bodu $A = b \times c$. Přímky b, c jsou dány v Mongeově promítání svými průměty podle obr. 3.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Ř e š e n í. Průměty A_1, A_2 leží na ordinále, tj. máme nepřístupným bodem A_2 vést přímku svislého směru. Podle předchozí úvahy sestrojíme stopníkem P_2^b kolmici v_b k přímce b_2 a bodem P_2^c kolmici v_c k přímce c_2 . Jejich průsečíkem O vedená ordinála určí průmět A_1 .

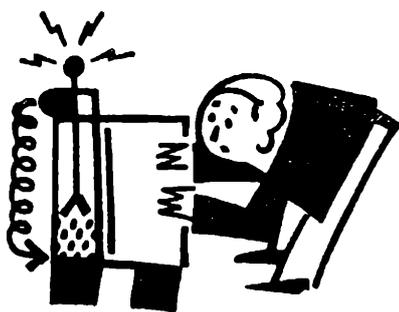
Úloha II. Sestrojte průměty průsečnice r rovin α, β , které jsou v Mongeově promítání dány průměty stop podle obr. 4!

Řešení. Podle úlohy I. sestrojíme ordinálu bodu $N = n^\alpha \times n^\beta$, jejíž průsečík se základnicí x_{12} je N_1 . Označíme-li $P = p^\alpha \times p^\beta$, je $r_1 = P_1 N_1$; $r_2 = P_2 N_2$ sestrojte sami podle obr. 1!

Úloha III. Sestrojte průměty průsečnice r dvou rovin α, β , které jsou v Mongeově promítání dány stopami podle obr. 5! Konstrukci proveďte sami podle předchozích úvah.

N á v o d. Bod $P_2 (N_1)$ je průsečík ordinály vedené nepřístupným průsečíkem $P_1 = p_1^\alpha \times p_1^\beta$ ($N_2 = n_2^\alpha \times n_2^\beta$).

Fyzika



Jiří Marek, UDSU KU:

Energetická bilance raketového pohonu

V době, kdy začíná dobývání vesmíru, obrací se zájem veřejnosti k raketovým motorům, které zatím jedině umožňují pohon kosmických lodí v meziplanetárním prostoru. Funkce motoru je celkem známa, je založena na principu akce a reakce. Z tělesa rakety tryská prudce plyn, k jehož uvedení do výtokové rychlosti je třeba určité síly. Síla stejně velká opačného směru pak působí na těleso rakety a uvádí je do zrychleného pohybu. Tato myšlenka je formulována v C i o l k o v s k é h o r o v n i c i

$$c \cdot dm = - m \cdot dv ,$$

kde c je rychlost tryskajících plynů z rakety o okamžité hmotě m . Za nepatrný časový okamžik dt^1) unikne plyn hmoty dm a změna jeho

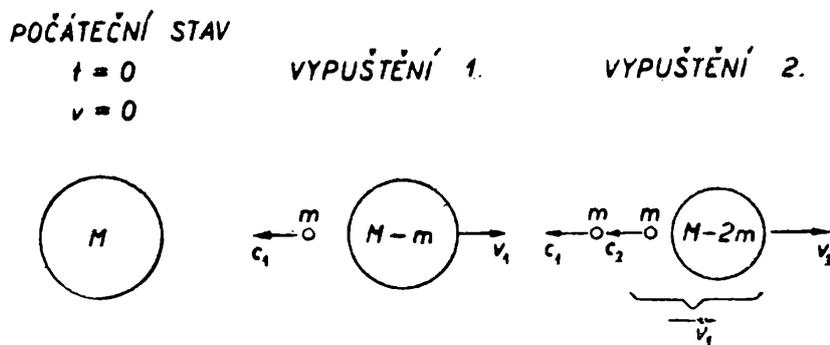
¹⁾ Čti diferenciál t , viz Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1960/61 (39), str. 391.

hybnosti je proto $c \cdot dm = F \cdot dt$. Opačná síla $-F$ působí stejně dlouho na hmotu rakety m a změna její hybnosti je tedy $-F \cdot dt = m \cdot dv$, značí-li dv přírůstek její rychlosti za dobu dt .

Obrátme pozornost k poměru spotřebované energie dodané palivem a kinetické energie rakety.

Zjednodušíme si problém. Představme si, že daleko v prostoru, kde je neznatelné gravitační pole, je raketa s vypnutým motorem a pozorovatel, který je mimo ni a vůči ní v klidu (obr. 1). Motor rakety počne pracovat stálým výkonem; na raketu působí stále stejná síla, která jí udílí stálé zrychlení (za předpokladu, že celková hmota rakety se v krátké době pozorování podstatně nezmění). Znamená to, že se raketa pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným. Získá-li na konci první sekundy rychlost v , má na konci druhé rychlost $2v$, na konci třetí sekundy $3v$ atd.

Kinetická energie rakety se ovšem zvyšuje se čtvercem rychlosti. Ra-



Obr. 1

keta hmoty m má na konci první sekundy vůči klidnému pozorovateli kinetickou energii $\frac{1}{2} m v^2$, na konci druhé sekundy $4 \cdot \frac{1}{2} m v^2$, na konci

třetí $9 \cdot \frac{1}{2} m v^2$ atd. *Kinetická energie vůči pozorovateli roste se čtvercem času.*

Síla F vykoná za 2 sekundy po dráze 4krát delší 4krát větší práci než za jednu sekundu, za 3 sekundy 9krát větší atd.; tato práce se projeví zvýšením kinetické energie.

Potud je vše zřejmé. Přihlédneme-li však ke spotřebě paliva a k energii z něho uvolněné, zjistíme, že při stálém výtoku plynů se za každou sekundu spotřebuje stejné množství paliva, čímž se uvolní stejně velká energie.

Zdá se pak být paradoxní, že při stejné spotřebě paliva a při stále stejné dodávce energie uvolněné vždy za jednotku času, roste kinetická energie se čtvercem doby.

Vezmeme-li v úvahu, že raketa ztrácí postupně na hmotě, roste její rychlost ovšem rychleji.

Tato zdánlivá nesrovnalost se však vysvětlí tím, že se všechna uvolněná energie nepředá pouze raketě. Energie dodávaná rovnoměrně palivem, nepřihlížíme-li k tepelným ztrátám, se rozdělí na dvě části: jedna část se předá unikajícím plynům, kdežto teprve druhá část se změní v kinetickou energii rakety. Je třeba si uvědomit, že má-li raketa ve směru pohybu vůči pozorovateli již rychlost v , potom plyny unikají z rakety relativní rychlostí vzhledem k pozorovateli $c - v$. Plyny pak mají vůči pozorovateli menší kinetickou energii, než jakou měly ty, které unikaly na počátku pohybu a o to více tedy vzroste kinetická energie rakety, neboť součet přírůstků kinetické energie plynu a rakety musí být za stejnou dobu stálý.

Přesnou bilanci uvedeme na konci článku; nejprve ji rozebereme pro schematizovaný případ nejen z důvodu, aby odvození mohli sledovat i čtenáři, kteří se zatím nezabývali diferenciálním počtem, ale i proto, že zde můžeme názorně sledovat rozdělení energie mezi těleso rakety a uniklé plyny.

Představme si pohyb, při němž z rakety o počáteční hmotě M je vymršťován plyn po oddělených dávkách o hmotě m ($m \ll M$)¹⁾ v pravidelných časových intervalech. Relativní rychlost c plynu vůči raketě bude proměnná: s klesající hmotou rakety se bude zmenšovat i při stálé velikosti energie uvolňované při jednotlivých dějích.

Zavedeme soustavu souřadnic, v jejímž počátku O je raketa i pozorovatel, který je se soustavou pevně spojen. Uvolněná energie $W = \text{konst}$ je předána beze ztrát jednak hmotě plynu m , který je vymrštěn v záporném směru osy x rychlostí c_1 , jednak raketě o hmotě $M - m$, která se tím uvede do pohybu v kladném směru osy x rychlostí v_1 (obr. 1). Platí vztahy

$$m c_1 = (M - m) v_1 \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} m c_1^2 + \frac{1}{2} (M - m) v_1^2 = \text{konst.} \quad (2)$$

Pro jednoduchost nebudeme rozlišovat znaménkem směry rychlostí; pro výpočet kinetické energie stačí znát jejich absolutní hodnotu.

Předem zopakujeme známý fakt: roztrhne-li se působením vnitřní síly nějaká hmota, např. μ , na dvě části μ_1, μ_2 ($\mu_1 + \mu_2 = \mu$), které se počnou pohybovat opačnými směry rychlostmi v_1, v_2 , platí

$$\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2 \quad \text{čili} \quad \frac{1}{2} \mu_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \mu_2 v_2^2 \cdot \frac{v_1}{v_2},$$

tj.

$$W_1 = W_2 \cdot \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{nebo} \quad W_1 : W_2 = \mu_2 : \mu_1,$$

¹⁾ Symbol $m \ll M$ znamená „ m je mnohem menší než M “.

přičem platí

$$W_1 + W_2 = W$$

Celková energie je rozdělena tak, že kinetické energie obou částí jsou nepřímo úměrné jejich hmotám.

Vrátíme-li se k původnímu označení, platí:

$$\frac{1}{2} m c_1^2 : \frac{1}{2} (M - m) v_1^2 = (M - m) : m .$$

Z rovnice (1) nebo z poslední úměry plyne vztah mezi rychlostmi:

$$v_1 = c_1 \frac{m}{M - m} . \quad (3)$$

Celková energie W uvolněná spotřebou paliva k vymrštění hmoty plynu m rychlostí c_1 a rakety rychlostí v_1 je pak

$$W = \frac{1}{2} m c_1^2 + \frac{1}{2} (M - m) v_1^2 = \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{M}{M - m} = \text{konst} . \quad (4)$$

Při druhém vypuštění plynů (m) za stejného uvolnění energie se raketa již pohybuje vůči pozorovateli rychlostí v_1 . Plyn vytryskne z rakety rychlostí c_2 , přírůstek rychlosti rakety je v_2 . Platí tedy:

$$m c_2 = (M - 2m) v_2 ,$$

to jest

$$v_2 = c_2 \cdot \frac{m}{M - 2m} \quad (5)$$

Změna kinetické energie vůči pozorovateli při tomto ději je

$$\frac{1}{2} m (c_2 - v_1)^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} (M - 2m) \cdot (v_1 + v_2)^2 - \frac{1}{2} (M - 2m) v_1^2 ,$$

což upravíme za použití rovnice (5) podle níž je

$$- m c_2 v_1 + (M - 2m) v_1 v_2 = 0$$

na tvar

$$\frac{1}{2} m c_2^2 + \frac{1}{2} (M - 2m) v_2^2 . \quad (6)$$

Po dosazení za v_2 upravíme výraz (6) na tvar

$$\frac{1}{2} m c_2^2 \cdot \frac{M - m}{M - 2m}$$

Je-li přírůstek energie konstantní, (2), (4), musí být:

$$\frac{1}{2} m c_2^2 \cdot \frac{M - m}{M - 2m} = \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{M}{M - m}$$

a odtud

$$c_2 = c_1 \frac{\sqrt{M \cdot (M - 2m)}}{M - m} \quad (7)$$

P o z n á m k a. Ze vzorce pro přírůstek energie, který lze upravit na tvar (6), je zřejmo, že přírůstek energie můžeme stejným právem vztahovat k pozorovateli pohybujícímu se vzhledem k první soustavě rychlostí v_1 , čili vůči pozorovateli, který by byl v klidu vzhledem k soustavě pevně spojené s raketou před druhým vypuštěním plynu. Dostaneme pak přímo $\frac{1}{2} mc_2^2 + \frac{1}{2} (M - 2m)v_2^2$.

Po dosazení vztahu (7) do (5) najdeme přírůstek rychlosti rakety

$$v_2 = c_1 \frac{m}{M - m} \cdot \sqrt{\frac{M}{M - 2m}}. \quad (8)$$

Protože pak platí

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{M}{M - 2m}}$$

je zřejmo, že $c_2 < c_1$, kdežto $v_2 > v_1$.

Překontrolujeme nyní celkovou kinetickou energii soustavy hmot po druhém vypuštění plynu hmoty m vzhledem k pozorovateli klidnému vůči první soustavě. Prvá dávka plynu se vůči němu pohybuje stále rychlostí c_1 , druhá rychlostí $c_2 - v_1$, těleso rakety rychlostí $v_1 + v_2$. Součet kinetických energií těchto hmot je:

$$\begin{aligned} \sum_1^3 W_k &= \frac{1}{2} mc_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot (c_2 - v_1)^2 + \frac{1}{2} (M - 2m) (v_1 + v_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} mc_1^2 + \frac{1}{2} mc_2^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} (M - 2m)v_1^2 + \frac{1}{2} (M - 2m) v_2^2. \end{aligned}$$

Opět zde jest $-mc_2v_1 + (M - 2m)v_1v_2 = 0$.

Rychlosti c_2 , v_1 , v_2 vyjádříme rychlostí c_1 podle vztahů (7), (3), (8); dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_1^3 W_k &= \frac{1}{2} mc_1^2 \cdot \frac{2M^2 - 2Mm}{(M - m)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} m c_1^2 \cdot \frac{M}{M - m} = 2W = 2 \text{ konst.} \end{aligned}$$

Soustava všech hmot obsahuje právě tak velkou energii, jež je rovna energii uvolněné z paliva po dvou akcích; při každé byla uvolněna energie W .

Těleso rakety nabývá kinetickou energii zrychleně proto, že:

1. Raketa získává poměrně malou část celkové energie.
2. Dávka plynu hmoty m při druhém vypuštění má vůči pevnému pozorovateli menší kinetickou energii, než jakou měla dávka první. Na těleso rakety připadne proto větší podíl energie, který zvýší její, poměrně malou hodnotu, na více než čtyřnásobek.

Rychlost rakety po druhé akci je $v_1 + v_2 > 2v_1$. Zhruba, nehledíme-li na zmenšenou hmotu rakety, je energie úměrná čtverci rychlosti, a protože je $(v_1 + v_2)^2 > 4v_1^2$, je kinetická energie rakety po druhé akci větší než čtyřnásobek po akci první.

Zanedbáme-li ve vzorci pro c_1, c_2 nepatrnou hmotu m , jest $c_1 = c_2 = c$. Zvýšení rychlosti rakety je ovšem velmi malé ($v_1 \ll c_1$ atd.), a $v_1 = v_2 = v$. Po prvním výtoku plynu je rychlost rakety v , po druhém $2v$ atd.

Úvahu lze nyní rozříšit na libovolný počet výtoků plynu. Pokládejme např. stav po první akci za základní, pozorovatel je vůči raketě v klidu. Po dalším vypuštění plynu má raketa, jak již víme, vůči pozorovateli rychlost v , při následujícím $2v$. Vraťme se nyní k původní soustavě, vůči níž se základní soustava pohybuje rychlostí v . Po třetím vypuštění má tedy raketa vzhledem k původní soustavě rychlost $3v$. Rychlosti jsou v poměru $1 : 2 : 3$, energie v poměru $1^2 : 2^2 : 3^2$. Celková energie soustavy všech hmot však narůstá řadou aritmetickou. Tak lze pokračovat i pro další akce.

Použitím tohoto obratu dospějeme i při přesném výpočtu k výsledku. Stačí, položíme-li výchozí hmotu rakety rovnou $M' = M - m$ a počítáme-li jako původně s použitím odvozených vzorců.

Platí

$$c'_1 = c_2, c'_2 = c_3, v'_1 = v_2 \text{ atd.}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} c_3 = c'_2 = c'_1 & \sqrt{\frac{M' (M' - 2m)}{M' - m}} = c_1 \sqrt{\frac{M (M - 3m)}{(M - m) (M - 2m)}} \\ v_3 = v'_2 = c'_1 & \frac{m}{M' - m} \sqrt{\frac{M'}{M' - 2m}} = \\ = m c_1 & \cdot \sqrt{\frac{M}{(M - m) (M - 2m) (M - 3m)}} \end{aligned}$$

Celková energie soustavy všech hmot po třetí akci je

$$\begin{aligned} \sum_1^4 W_k &= \frac{1}{2} m c_1^2 + \frac{1}{2} m (c_2 - v_1)^2 + \frac{1}{2} m (c_3 - v_2 - v_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (M - 3m) (v_1 + v_2 + v_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m c_1^2 + \frac{1}{2} m c_2^2 + \frac{1}{2} m c_3^2 + m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (M - 3m) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2). \end{aligned}$$

Jak se snadno přesvědčíme, ostatní členy opět vypadnou.

Po dosazení příslušných vzorců za c_2, c_3, v_1, v_2, v_3 dospějeme po jednoduché úpravě k výsledku:

$$\sum_1^4 W_k = \frac{1}{2} m c_1^2 \frac{3M^3 - 9M^2m + 6Mm^2}{(M - m)^2 \cdot (M - 2m)}$$

Protože jest $3M^3 - 9M^2m + 6Mm^2 = 3M(M - m)(M - 2m)$, vyplývá odtud

$$\sum_1^4 W_k = 3 \frac{1}{2} m c_1^2 \frac{M}{M - m} = 3 W = 3 \text{ konst.}$$

Podle zákona zachování energie se všechna energie uvolněná spálením trojnásobného množství paliva proměnila v energii kinetickou soustavy všech čtyř hmot. Rychlost rakety je

$$v_1 + v_2 + v_3 > 3 v_1$$

Konečně ukážeme, že přírůstek kinetické energie je v libovolném ději stálý, rovný energii dodané palivem $W = \text{konst.}$ Nechť probíhá k -tý děj. Podle předchozích vztahů platí

$$c_2 = c_1 \frac{\sqrt{M(M - 2m)}}{M - m},$$

$$c_3 = c_2 \cdot \frac{\sqrt{(M - m)(M - 3m)}}{M - 2m},$$

$$c_4 = c_3 \cdot \frac{\sqrt{(M - 2m)(M - 4m)}}{M - 3m} \text{ atd.}$$

Proto je

$$c_k = c_1 \cdot \frac{\sqrt{M(M - 2m)}}{M - m} \cdot \frac{\sqrt{(M - m)(M - 3m)}}{M - 2m} \cdot \frac{\sqrt{(M - 2m)(M - 4m)}}{M - 3m} \cdots$$

$$\frac{\sqrt{[M - (k - 2)m](M - km)}}{M - (k - 1)m},$$

čili

$$c_k = c_1 \sqrt{\frac{M(M - km)}{(M - m)[M - (k - 1)m]}}$$

Z rovnosti změny hybností $mc_k = (M - km)v_k$ plyne:

$$v_k = m c_1 \cdot \sqrt{\frac{M}{(M - m)[M - (k - 1)m](M - km)}}$$

Přírůstek kinetické energie vůči pozorovateli v původní soustavě je podle (6) a podle poznámky ke vztahu (6)

$$\Delta W = \frac{1}{2} m c_k^2 + \frac{1}{2} (M - km) v_k^2$$

Po dosazení příslušných hodnot a po úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} mc_1^2 \cdot \frac{M^2 - kMm + Mm}{(M - m) [M - (k - 1)m]} = \\ &= \frac{1}{2} mc_1^2 \frac{M [M - (k - 1)m]}{(M - m) [M - (k - 1)m]} = \\ &= \frac{1}{2} mc_1^2 \frac{M}{M - m} = W = \text{konst} , \end{aligned}$$

což bylo dokázat.

Ve skutečnosti je výtok plynů rakety nepřetržitý, plynulý. Výpočet je v tomto případě jednodušší, není však tak názorně zachyceno rozdělení kinetické energie v soustavě hmot rakety a uniklých plynů.

Spálením určitého množství paliva se uvolní teplo Q úměrné tomuto množství paliva. Přepočtením na mechanickou energii dostáváme $W = J Q$, kde J je mechanický ekvivalent tepla. Pracuje-li raketa rovnoměrně se stálým tahem, je spotřeba paliva (a tím i množství uvolněné energie) úměrná pracovní době t . Můžeme tedy místo závislosti energie uvolněné na délce doby chodu motoru uvést tuto energii v závislost na množství spotřebovaného paliva.

Má-li raketa počáteční hmotu m_0 a spotřebuje-li za dobu t palivo hmoty m_p , je hmota m_z rakety v době t rovná $m_0 - m_p$. Za nepatrný okamžik dt vytryskne hmota plynu dm rychlostí c . Pro $dm \rightarrow 0$ je $\lim c_k = c_1$; můžeme rychlost výtoku plynů pokládat za konstantní.

Vyjádríme nejprve celkové množství energie W uvolněné za dobu t , tj. spálením paliva hmoty m_p , takto: Kdyby těleso rakety bylo upevněno (tj. totéž, jakoby hmota rakety se blížila nekonečně velké hodnotě), unikaly by plyny vůči pevnému pozorovateli stále relativní rychlostí c , raketa by zůstala v klidu. Hmota m_p se pak pohybuje vůči pozorovateli rychlostí c ; celková kinetická energie je obsažena pouze v energii unikajícího plynu a je proto:

$$W = \frac{1}{2} m_p c^2 . \quad (9)$$

Podle očekávání je energie W přímo úměrná hmotě spáleného paliva m_p .

Je-li však raketa volná, pak v libovolném časovém okamžiku má určitou rychlost v vůči pozorovateli. Za nepatrnou dobu dt je přírůstek

kinetické energie soustavy hmot raketa-plyn vzhledem k pozorovateli

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} (c - v)^2 dm - \frac{1}{2} v^2 dm + \frac{1}{2} m (v + dv)^2 - \frac{1}{2} mv^2 = \\ &= \frac{c^2}{2} dm - c v \cdot dm + m \cdot v \cdot dv, \end{aligned}$$

kde m je okamžitá hmota rakety, člen $s (dv)^2$ je zanedbatelný. Protože je v absolutních hodnotách $c \cdot dm = m \cdot dv$, dostaneme po dosazení do posledního členu rovnice

$$dW = \frac{c^2}{2} dm.$$

Za dobu t počítanou od počátku pohybu získá tedy soustava hmot vzhledem k pozorovateli celkovou kinetickou energii

$$W = \frac{c^2}{2} \int_0^{m_p} dm = \frac{1}{2} m_p c^2, \quad ^3)$$

Výsledek souhlasí s celkovou energií (9). Kinetická energie všech hmot roste podle požadavku zákona o zachování energie úměrně s časem, i když těleso rakety se pohybuje urychleně a tím jeho kinetická energie stoupá přibližně se čtvercem času.

Poznámka red. V článku je používán dosavadní název *hmota*. Podle nových zásad bude opraven na *hmotnost*.

Inž. dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Výpočet výsledné chyby měřených fyzikálních veličin, určených známými vztahy

Než přikročíme k vlastnímu obsahu našeho článku, bylo by vhodné říci si stručně něco o teorii chyb.

K a ž d é m ě ř e n í j e z a t í ž e n o *chybou*. Chybou rozumíme rozdíl hodnoty správné a hodnoty naměřené. Je-li naměřená hodnota menší nežli správná, je chyba kladná, je-li naměřená hodnota větší, je chyby záporná. *Korekce*, tzn. hodnota, kterou musíme k naměřené hodnotě přičíst, abychom dostali správnou hodnotu, má tedy i co do znaménka stejnou velikost jako příslušná chyba.

³⁾ Viz E. Kriegelstein, Úvod do počtu integrálního, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1961/62 (40), str. 393.

Chyby dělíme do dvou hlavních skupin, a to na *chyby soustavné* (*systematické*) a na *chyby nahodilé*. Soustavné chyby, jejichž původ je buď v měřicím zařízení, nebo v použité metodě, nebo konečně ve způsobu čtení na stupnici (ty jsou ovlivněny osobou, která měření provádí), dovedeme zpravidla stanovit. Nahodilé chyby, jak již naznačuje jejich název, jež jsou způsobeny různými nahodilými vlivy při měření, nedovedeme přesně stanovit. Můžeme pouze přibližně vypočítat jejich velikost, a to na základě statistických zákonů. To ovšem předpokládá každé měření vícekrát opakovat, ovšem za srovnatelných podmínek. Čím více měření téže veličiny provedeme, tím spolehlivější bude vypočtená nahodilá chyba; jak již bylo řečeno, přesnou hodnotu však stanovit nemůžeme.

Provedeme-li n opakovaných měření nějaké veličiny, dostáváme n různých hodnot čtení, jež se vzájemně budou lišit, ovšem za předpokladu, že citlivost použitého měřicího zařízení bude taková, aby se patrně uplatňovaly nahodilé vlivy. Je samozřejmé, že budeme-li měřit, např. nějakou přesně vyrobenou součást posuvným měřítkem s dělením nonia na 0,1 mm, budou jednotlivá čtení opakovaných měření prakticky stejná. Budeme-li měřit tentýž rozměr mikrometrem, který má stupnici s dělením po 0,01 mm, mohou se již jednotlivá čtení trochu lišit. A zvolíme-li měřicí zařízení s ještě jemnějším dělením, budou se jednotlivá čtení vzájemně více odlišovat. Je to ovšem dáno skutečností, že ve většině případů jsou nahodilé chyby poměrně malé, takže jejich rozmanité hodnoty dané okamžitými nahodilými vlivy se uplatní až na vyšších desetinných místech. Tak např. nahodilé chyby velikosti řádu 10^{-4} mm se jistě patrněji neuplatní u přístroje, který umožňuje čtení jen na 0,1 mm.

Vraťme se nyní k řadě n opakovaných měření. Řekli jsme, že dostaneme n různých hodnot čtení, které si označme $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Absolutně správnou výslednou hodnotu z těchto jednotlivých dílčích hodnot vypočítat nedovedeme. Můžeme však určit *nejpravděpodobnější hodnotu výsledku všech opakovaných měření*, za kterou nejčastěji pokládáme *aritmetický průměr* \bar{x} , vypočtený ze všech jednotlivých dílčích hodnot

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1)$$

Když jsme vypočetli \bar{x} , určíme si rozdíly $\bar{x} - x_i$ pro jednotlivá čtení. Tyto rozdíly měly by být chybami, kdybychom je určovali od správné hodnoty. Tu však neznáme; vypočetli jsme jen nejpravděpodobnější hodnotu výsledku, aritmetický průměr \bar{x} . Pro rozlišení nazýváme tyto rozdíly *odchylkami*

$$\Delta_i = \bar{x} - x_i. \quad (2)$$

Označíme-li si správnou hodnotu x , byla by podle předešlého chyba ε_i nějakého dílčího čtení dána rozdílem

$$\varepsilon_i = x - x_i . \quad (3)$$

Podle statistických zákonů platí mezi součtem kvadrátů všech odchylek $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ a součtem kvadrátů všech chyb $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ tento vztah

$$n \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = (n - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (4)$$

Rozdíl bude zřejmě patrnější při malém počtu n opakovaných měření. Známe-li tento vztah, dovedeme nyní určit, jak se asi liší aritmetický průměr \bar{x} od skutečné hodnoty x , čili dovedeme určit *chybu výsledku měření*. Tuto chybu dovedeme tedy vypočítat, i když správnou hodnotu x neznáme, a to z jednotlivých odchylek Δ_i . Dovedeme také vypočítat z odchylek chybu jednoho měření.

Naznačme si krátce důkaz platnosti rovnice (4). Protože *aritmetický průměr* jako nejpravděpodobnější hodnotu výsledku měření nějaké veličiny určujeme z jednotlivých naměřených hodnot x_i (viz rovnici (1)), jejichž počet je roven n , platí, že

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0 , \quad (4a)$$

protože podle (1) a (2) je zřejmé

$$\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

Porovnáním rovnic (2) a (3) dostáváme (substitucí za x_i)

$$\Delta_i - \varepsilon_i = \bar{x} - x , \quad (4b)$$

kde \bar{x} je aritmetický průměr a x (skutečně) správná hodnota výsledku. Sečteme si nyní všechny rozdíly $\Delta_i - \varepsilon_i$ a dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \Delta_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n\bar{x} - nx = n(\bar{x} - x) ,$$

a tedy vzhledem k (4a) je

$$- \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n(\bar{x} - x) ,$$

z čehož

$$\bar{x} - x = - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (4c)$$

Nyní by nás zajímala odchylka nějakého k -tého členu řady naměřených hodnot. Dostaneme ji z rovnice (4b), do níž dosadíme ze (4c)

$$\Delta_k = \varepsilon_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (4d)$$

Druhá mocnina této odchylky je

$$\Delta_k^2 = \varepsilon_k^2 - \frac{2}{n} \varepsilon_k \sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 \quad (4e)$$

a pro součet čtverců všech těchto odchylek (tedy v mezích $k = 1$ až $k = n$) dostáváme

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + n \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right), \quad (4f)$$

kde jsme proti (4e) zaměnili pořadí posledních dvou členů.

Dvojití indexování je zde proto, že se zajímáme o odchylky dvou libovolných členů řady měření, jednou i -tého, podruhé k -tého. Je ovšem samozřejmé, že

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$$

Podle toho můžeme rovnici (4f) upravit na tvar

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2, \quad (4g)$$

kde

$$\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^n (\varepsilon_i \varepsilon_k)_{k \neq i} \quad (4h)$$

Poslední člen předchozí rovnice je sumou všech součinů $(\varepsilon_i \varepsilon_k)$ chyb se vzájemně různými indexy ($k \neq i$). Součiny se stejnými indexy ($k = i$) jsou zahrnuty v prvním členu pravé strany této rovnice.

Při normálním rozložení chyb je součet $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ blízký nule. Protože však připouštíme, že aritmetický průměr x není totožný se správnou hodnotou x , nemůžeme jej položit rovný nule. Při tom při větším počtu n členů naměřených hodnot je zhruba stejný počet chyb kladných jako záporných, takže v členu

$$\sigma = \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^n (\varepsilon_i \varepsilon_k)_{k \neq i} \quad (4i)$$

který jsme si označili σ , lze očekávat (v celkové sumě) dokonalejší zrušení

jednotlivých kladných a záporných dílčích součinů ($\varepsilon_i \varepsilon_k$). A tak můžeme tento člen σ zanedbat jako velmi malý, zvláště dělíme-li jej ještě n , což plyne dosazením ze (4k) do rovnice (4g). Je jistě zřejmé, že počet jednotlivých dílčích součinů, jež jsou ve (4i) sečítány, je roven $\binom{n}{2}$, tedy $\frac{n-1}{2}$ -krát větší, nežli počet n členů řady.

Za uvedeného předpokladu můžeme psát rovnici (4g) po dosazení ze (4b) a po zanedbání σ takto

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2,$$

z čehož

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2,$$

neboli

$$n \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = (n-1) \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \quad (4k)$$

Z této rovnice záměnou indexů ($k = i$) dostáváme již rovnici (4).

Pokračujme nyní dále v pojednání o základních druzích chyb.

Střední kvadratickou chybou (jednoho měření), kterou značíme δ , rozumíme chybu definovanou takto

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}} \quad (5)$$

Protože výsledek n měření má chybu \sqrt{n} -krát menší než je chyba jednoho z řady stejně přesných měření, bude vztah, kterým je definována *střední kvadratická chyba výsledku* $\bar{\delta}$, znít

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}} \quad (6)$$

Hodnota střední kvadratické chyby je ovšem zaručována pouze s určitou pravděpodobností, tedy nikoliv absolutně. Pravděpodobnost, že skutečná chyba leží v mezích udávaných střední kvadratickou chybou, je pouze asi 68 %.

Místo této chyby se při fyzikálních měřeních udává často *chyba pravděpodobná* ϑ pro jedno měření a $\bar{\vartheta}$ pro výsledek. Pravděpodobnost, že skutečná chyba leží v mezích udaných touto chybou, je rovna právě 50 %. Při velkém počtu měření je tedy přibližně polovina odchylek jednotli-

vých dílčích měření větší než je pravděpodobná chyba a druhá polovina menší. Pravděpodobné chyby ϑ a $\bar{\vartheta}$ můžeme vypočítat ze vztahů

$$\vartheta = 0,6745 \delta = \frac{2}{3} \delta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}, \quad (7)$$

$$\bar{\vartheta} = 0,6745 \bar{\delta} = \frac{2}{3} \bar{\delta} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

Pro praxi je vhodnější třetí typ chyby, tzv. *chyba krajní*, u níž je velká pravděpodobnost (99,73 %) že skutečná chyba bude ležet v mezích určených krajní chybou. Krajní chybu jednoho měření značíme κ , krajní chybu výsledku $\bar{\kappa}$. Přitom platí tyto vztahy

$$\kappa = 3\delta = 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}, \quad (9)$$

$$\bar{\kappa} = 3\bar{\delta} = 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}}. \quad (10)$$

Výhodou krajní chyby je právě vysoká pravděpodobnost, s jakou je její hodnota zaručována. V praxi ji tedy můžeme často pokládat za skutečnou mezní hodnotu, s kterou je měřena veličina (vypočítaná ovšem z n opakovaných měření) zaručována.

Teorii chyb se budeme obšírněji zabývat v některém dalším pojednání. Zde jsme se seznámili pouze s některými základními pojmy a uvedli jsme pro přehled některé vztahy.

Je třeba ještě zdůraznit, že kterákoliv z uvedených chyb může být právě tak kladná jako záporná, takže k vypočtenému aritmetickému průměru \bar{x} je připsujeme zpravidla takto

$$X = (\bar{x} \pm \delta), \quad (11a)$$

nebo

$$X = (\bar{x} \pm \vartheta), \quad (11b)$$

případně

$$X = (\bar{x} \pm \kappa). \quad (11c)$$

Ve všech třech případech značí X měřenou veličinu. Tak např. určíme délku l nějaké tyče. Aritmetický průměr jsme vypočetli z $n = 10$ měření a dostali jsme hodnotu $\bar{x} = 253,153$ mm. Vypočetli jsme si také krajní chybu $\bar{\kappa} = 0,015$ mm. Celkový výsledek píšeme pak takto

$$l = (253,153 \pm 0,015) \text{ mm.}$$

Protože se jednalo o chybu krajní, mohli bychom se značnou pravděpodobností předpokládat, že skutečná délka l leží mezi krajními hodnotami

$$l = < 253,153 - 0,015, \quad 253,153 + 0,015 > \text{ mm,}$$

$$l = < 253,138, \quad 253,168 > \text{ mm.}$$

Není-li zřejmé z textu, který doprovází zpracování výsledku měření, jaká z uvedených typů chyb byla vypočítána a připojena k výsledku, je třeba to poznamenat u konečného znění výsledku.

Chyby bývají uváděny (a z vypočtených hodnot předtím zaokrouhlovány) na dvě platná místa. Uvádět chybu na větší počet míst nemá smysl. Výsledek neuvádíme zpravidla na další místa nižších řádů, do nichž již chyba nezasahuje.

P ř í k l a d. Měříme velikost plochy S polárním planimetrem. Měření jsme provedli 5krát ($n = 5$) a dostali jsme tyto dílčí hodnoty 585,2, 585,1, 584,8, 585,0, 585,1. Výsledek a jeho chybu si nejnázorněji určíme z takto upravené tabulky

Poř. č. měření	Jednotlivá čtení x_i cm ²	Rozdíly $\Delta_i = \bar{x} - x_i$ cm ²	Kvadráty rozdílů $\Delta_i^2 = (\bar{x} - x_i)^2$ cm ⁴
1	585,2	- 0,16	+ 0,0256
2	585,1	- 0,06	+ 0,0036
3	584,8	+ 0,24	+ 0,0576
4	585,0	+ 0,04	+ 0,0016
5	585,1	- 0,06	+ 0,0036
Součet	$\sum_1^5 x_i = 2925,2$	$\sum_1^5 \Delta_i = \emptyset$	$\sum_1^5 \Delta_i^2 = 0,0920$

Aritmetický průměr je roven $\bar{x} = \frac{\sum_1^5 x_i}{n} = \frac{2925,2}{5} = 585,040 \text{ cm}^2$.

Střední kvadratická chyba výsledku

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_1^5 \Delta_i^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0920}{5 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{0,0920}{20}} = \sqrt{0,0046} = 0,068 \text{ cm}^2$$

Kdybychom počítali pravděpodobnou chybu výsledku dostali bychom její hodnotu

$$\bar{\vartheta} = \frac{2}{3} \bar{\delta} = \frac{2}{3} 0,068 = 0,045 \text{ cm}^2$$

Nejvhodnější pro praktické účely by byla krajní chyba výsledku $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\kappa} = 3\bar{\delta} = 3 \cdot 0,068 = 0,204 \doteq 0,20 \text{ cm}^2.$$

Spolu s krajní chybou $\bar{\kappa}$ psali bychom konečnou hodnotu výsledku takto

$$S = (585,04 \pm 0,20) \text{ cm}^2.$$

Přikročíme nyní k další části našeho pojednání, a to k určování chyby funkce dvou proměnných. Nejprve si probereme chybu s o u č t u dvou veličin (dvou proměnných) x, y . Ta je rovna (použijeme-li krajních chyb)

$$\kappa(x + y) = |\kappa(x)| + |\kappa(y)|, \quad (12)$$

tedy součtu absolutních chyb obou proměnných. Stejně bychom postupovali i při určování chyby součtu více proměnných.

Podobně pro r o z d í l bychom psali

$$\kappa(x - y) = |\kappa(x)| + |\kappa(y)| \quad (13)$$

Vidíme, že výsledná chyba součtu i rozdílu je stejná. Vztah (12) a (13) je ovšem pouze přibližný a platí tím přesněji, čím jsou jednotlivé chyby menší.

Tyto vzorce (12 a 13) plynou z obecné rovnice pro chybu nějaké veličiny X , jež je vázána známým vztahem na nezávislé veličiny x, y, z tedy v případě, že je dáno $X = f(x, y, z \dots)$. Tato rovnice zní

$$\begin{aligned} \kappa(X) = \kappa[f(x, y, z \dots)] = & \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \kappa(x) \right| + \left| \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} \cdot \kappa(y) \right| + \\ & + \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \cdot \kappa(z) \right| + \end{aligned} \quad (13a)$$

Podle vztahu (13a) vyšla by nám chyba aritmetického průměru takto

$$\begin{aligned} \kappa(x) = \kappa\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \frac{x_3}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) = & \left| \frac{1}{n} \kappa(x_1) \right| + \left| \frac{1}{n} \kappa(x_2) \right| + \\ & + \left| \frac{1}{n} \kappa(x_n) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa(x_i) \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n \kappa(x_i)}{n} \right|; \end{aligned}$$

tedy větší, než jak by tomu mělo být podle vztahu (5) a (6). Je tomu skutečně tak, když je n malé a nejedná se o chyby vyloženě nahodilého charakteru, např. tehdy, když musíme počítat s možným případem, že chyby všech dílčích hodnot, z nichž se aritmetický průměr určuje, mohou mít maximální hodnotu vesměs kladnou, nebo naopak vesměs zápornou. U čistě nahodilých chyb je ovšem stejná pravděpodobnost výskytu chyb kladných jako záporných, čímž se jejich vliv na výsledek natolik kompenzuje, že lze počítat s menší chybou u výsledku nežli u jednotlivých měření. Pak počítáme chyby podle vztahů (5 až 10).

Přesnější kritérium pro způsob vyhodnocování výsledků měření je ovšem někdy těžko stanovit.

Vraťme se nyní k určování chyb u jiných funkčních závislostí. Je-li dána závislost $X = f(x, y)$, kde $f(x, y) = x \cdot y$, plyne ze vzorce (13a)

$$\kappa(X) = \kappa(x \cdot y) = |y \cdot \kappa(x)| + |x \cdot \kappa(y)|$$

dělíme-li tuto rovnici funkčním vztahem $X = x \cdot y$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(X)}{X} = \frac{\kappa(x \cdot y)}{x \cdot y} &= \left| \frac{y \cdot \kappa(x)}{x \cdot y} \right| + \left| \frac{x \cdot \kappa(y)}{x \cdot y} \right| = \left| \frac{\kappa(x)}{x} \right| + \left| \frac{\kappa(y)}{y} \right| = \\ &= \kappa_r(x) + \kappa_r(y) \end{aligned}$$

Podobně postupujeme i při určování chyby podílu.

Chyba součinu a podílu je tedy dána vztahem

$$\kappa_r(x \cdot y) = \kappa_r\left(\frac{x}{y}\right) = |\kappa_r(x)| + |\kappa_r(y)|, \quad (14)$$

je tedy rovna součtu relativních chyb obou proměnných. Podobně bychom postupovali i u součinu nebo podílu více proměnných. Při tom relativní chybou κ_r nějaké veličiny x rozumíme poměr

$$\kappa_r(x) = \frac{\kappa(x)}{x}, \quad (15)$$

tedy chybu nějaké veličiny dělenou touto veličinou. Např. je-li chyba nějaké délky $l = 100$ mm, rovná se $\kappa(l) = 0,1$ mm, je relativní chyba $\kappa_r(l)$ dána vztahem

$$\kappa_r(l) = \frac{0,1}{100} = 0,001 = 0,1 \%$$

Příklad. Podle uvedeného vztahu můžeme také stanovit kritérium ekonomické přesnosti, kterou máme požadovat u měření jednotlivých veličin, jejichž součinem je dána nějaká výsledná veličina. Zvolme si takovýto příklad. Máme určit objem dlouhé tenké tyče čtvercového průřezu. Hrubým předběžným měřením stanovíme, že délka (l) je asi 2000 mm a hrana (a) čtvercového průřezu je 10 mm. S jakou přesností máme oba rozměry určit? Měříme-li délku hrany a posuvným měřítkem s noniem umožňujícím čtení na 0,1 mm, bude relativní chyba délky hrany (je-li její velikost skutečně $a = 10$ mm) rovna

$$\kappa_r(a) = \frac{\kappa(a)}{a} = \frac{0,1}{10} = 0,01 = 1 \%$$

Máme stanovit délku l se stejnou absolutní přesností? Kdyby tomu tak bylo, byla by relativní chyba $\kappa_r(l)$ při $l = 2000$ mm rovna

$$\kappa_r(l) = \frac{\kappa(l)}{l} = \frac{0,1}{2000} = 0,00005 = 0,005 \%$$

tedy značně menší než $\kappa_r(a)$. Pokračujme však dále. Jaká bude chyba plošného obsahu průřezu. Podle vztahu (14) bude relativní chyba obsahu rovna

$$\kappa_r(S) = \kappa_r(a \cdot a) = |\kappa_r(a)| + |\kappa_r(a)| = 2 |\kappa_r(a)| = 2 \cdot 0,01 = 0,02 = 2 \%$$

Chyba objemu $V = S \cdot l$ je rovna

$$\begin{aligned} \kappa_r(V) = \kappa_r(S \cdot l) &= |\kappa_r(S)| + |\kappa_r(l)| = 0,02 + 0,000\ 05 = 0,02005 = \\ &\doteq 0,02 = 2 \%, \end{aligned}$$

tedy zhruba stejná jako relativní chyba průřezu S . Na chybě výsledku se mnohem podstatněji uplatňuje chyba větší než menší (z chyb dvou veličin). Vidíme, že přesnost měření délky byla zbytečná a že by bylo postačilo, kdybychom délku l byli určili s přesností např. na 2 mm (a ne na 0,1 mm), protože potom by byla

$$\kappa_r(l) = \frac{\kappa(l)}{l} = \frac{2}{2000} = 0,001 = 0,1 \%$$

a chyba objemu $V = S \cdot l$ by byla přesto stále rovna

$$\kappa_r(V) = \kappa_r(S \cdot l) = 0,02 + 0,001 = 0,021 \doteq 0,02 = 2 \%$$

Je patrné, že můžeme volit přesnost měření délky dokonce ještě menší. Nyní určíme chybu $\kappa(V)$ z relativní chyby $\kappa_r(V)$. Protože $V = S \cdot l = 100 \cdot 2000 = 200.000 \text{ mm}^3 = 2 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$, bude $\kappa(V)$ rovna

$$\kappa_r(V) = \kappa_r(V) \quad V = 0,02 \cdot 200.000 = 4000 \text{ mm}^3 \text{ a}$$

celkový výsledek píšeme

$$V = (200.000 \pm 4000) \text{ mm}^3.$$

Chyba výsledku je zřejmě dosti velká.

Vypočteme ještě v našem případě, s jakou přesností bychom museli určit délku hrany průřezu a délku tyče, aby relativní chyba objemu $\kappa_r(V)$ byla rovna asi 0,1 %.

Podle toho musí být

$$|\kappa_r(S)| + |\kappa_r(l)| = 0,001,$$

a budeme-li volit $\kappa_r(S) = \kappa_r(l) = \kappa_r$, dostaneme

$$2 \kappa_r = 0,001,$$

$$\kappa_r = \frac{0,001}{2} = 0,0005 = 0,05 \%$$

Známe $S = 100 \text{ mm}^2$ a $l = 2000 \text{ mm}$. Vypočteme

$$\kappa(S) = \kappa_r(S) \cdot S = 0,0005 \cdot 100 = 0,05 \text{ mm}^2,$$

$$\kappa(l) = \kappa_r(l) \cdot l = 0,0005 \cdot 2000 = 1,0 \text{ mm}.$$

Vypočteme dále přípustnou chybu při měření délky hrany a , známe-li $\kappa(S)$.

Víme, že

$$\kappa_r(S) = \kappa_r(a \cdot a) = 2 \kappa_r(a)$$

tedy

$$\kappa_r(a) = \frac{\kappa_r(S)}{2} = \frac{0,0005}{2} = 0,00025 = 0,025 \%$$

a tedy $\kappa(a) = \kappa_r(a) \cdot a = 0,00025 \cdot 10 = 0,0025 \text{ mm}$.

Abychom dosáhli předepsanou přesnost objemu $\kappa_r(V) = 0,1$ vidíme, že je nutné měřit délku tyče na 1 mm, ale délku hrany s přesností na 2,5 desetitisíciny milimetru.

P a v e l C h m e l a, Universita Palackého v Olomouci:

Ohybové jevy v mikroskopickém zobrazení

Úvod. Optickým mikroskopem můžeme pozorovat buňky živé tkáně, mikroorganismy, kolodiální částice v roztocích a jiné malé předměty, které pouhým okem nevidíme. Není jím však možno vidět například molekuly nebo dokonce atomy.

V tomto článku uvidíme, že existují určité meze, které jsou dány přímo vlnovým charakterem světla a není je proto možno ovlivnit dokonalostí technického provedení mikroskopu.

1. Zobrazení mikroskopem z hlediska geometrické optiky.

Každý mikroskop je v podstatě optická soustava, která má tři základní části: osvětlovací soustavu, objektiv a okulár.

Osvětlovací soustava soustřeďuje světlo na zkoumaný preparát. Objektiv pak ve své obrazové rovině vytvoří obraz preparátu, který pozorujeme okulárem, fungujícím v tomto případě jako lupa.

Zobrazení malé úsečky MN je schematicky znázorněno na obr. 1.

Zvětšení mikroskopu je pak dáno známým vztahem

$$\Gamma = \frac{\Delta}{f'} \frac{l}{f_o}, \quad (1)$$

kde Δ je optický interval mikroskopu (tj. vzdálenost obrazové roviny objektivu od jeho obrazového ohniska), f' ohnisková vzdálenost objekti-

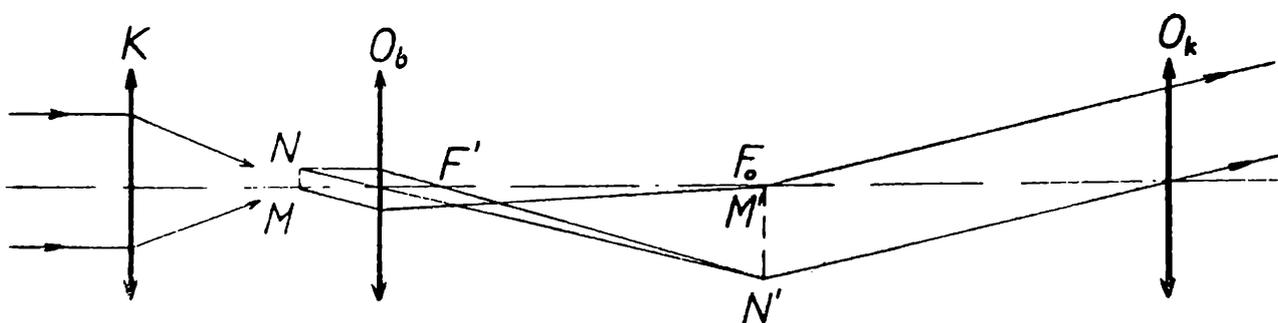
vu, f'_o ohnisková vzdálenost okuláru a l normální zraková vzdálenost (u normálního oka $l = 250$ mm).

Vzorec (1) bývá často uváděn ve tvaru

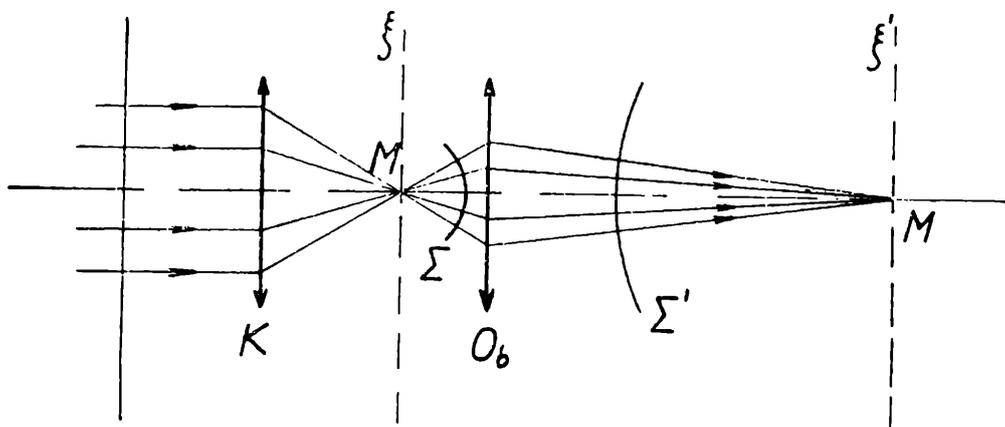
$$\Gamma = \beta \frac{l}{f'_o} \quad (2)$$

Zvětšení Γ je tedy rovno součinu příčného zvětšení objektivu β a zvětšení okuláru

$$\frac{l}{f'_o}$$



Obr. 1



Obr. 2

2. Zobrazení z hlediska vlnové optiky.

Je známo, že světlo je vlastně elektromagnetické vlnění, jehož vlnová délka se pohybuje v intervalu od 4000 Å do 7600 Å. Šíření světla se děje podle Huygensova principu tak, že každý bod světelné vlnoplochy představuje zdroj nového vlnění, při čemž zpětná vlnění se interferencí ruší. Geometrický paprsek, představující normálu na vlnoplochu, je pouze jakési přiblížení skutečnosti.

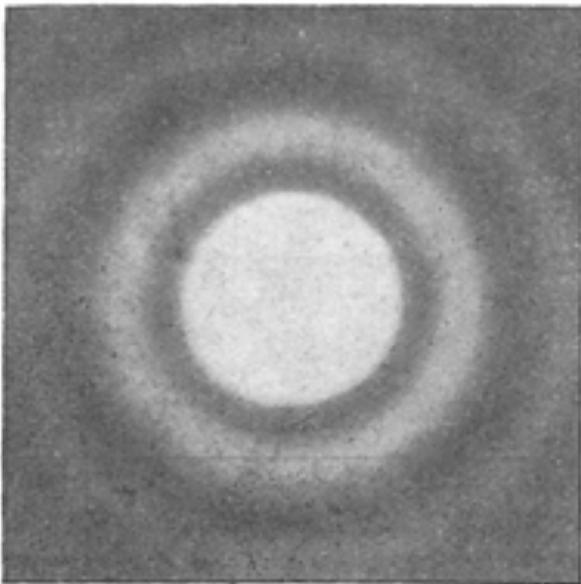
Všimněme si nyní zobrazení osového bodu M . Obraz M' vzniká v místě koncentrace světelné energie tj. ve středu křivosti světelné vlnoplochy Σ'

Z hlediska *g e o m e t r i c k é o p t i k y* byl obrazem bodu M opět bod M' . Z hlediska *f y z i k á l n í o p t i k y*, tak tomu však není. Světlo se totiž nešíří pouze ve směru geometrických paprsků, ale podle Huygensova principu i v jiných směrech, interferuje a v obrazové rovině ξ' vzniká ohybový obraz bodu M , který je znázorněn na obr. 3.

Světlý kruh uprostřed představuje tzv. *c e n t r á l n í m a x i m u m*. Je obklopen tmavými a světlými mezikružšími, jejichž intenzita prudce klesá. Vzniká nám vlastně ohybový jev, podobný ohybovému jevu na kruhovém otvoru. Názorněji vidíme rozdělení intenzity světla na obr. 4, kde na vertikální osu je nanášena intenzita světla a na horizontální osu vzdálenost od geometrického obrazu M' .

Poloměr centrální plošky je pak dán vztahem

$$\varrho = 0,61 \lambda \frac{\beta}{A}, \quad (3)$$



Obr. 3.

kde λ je vlnová délka použitého světla, β je příčné zvětšení objektivu a A je číselná apertura, která je rovna součinu indexu lomu n prostředí, v němž se zobrazovaný předmět nachází a $\sin \sigma$ úhlu σ (obr. 5), který svírá paprskový svazek, vycházející z preparátu, s optickou osou,

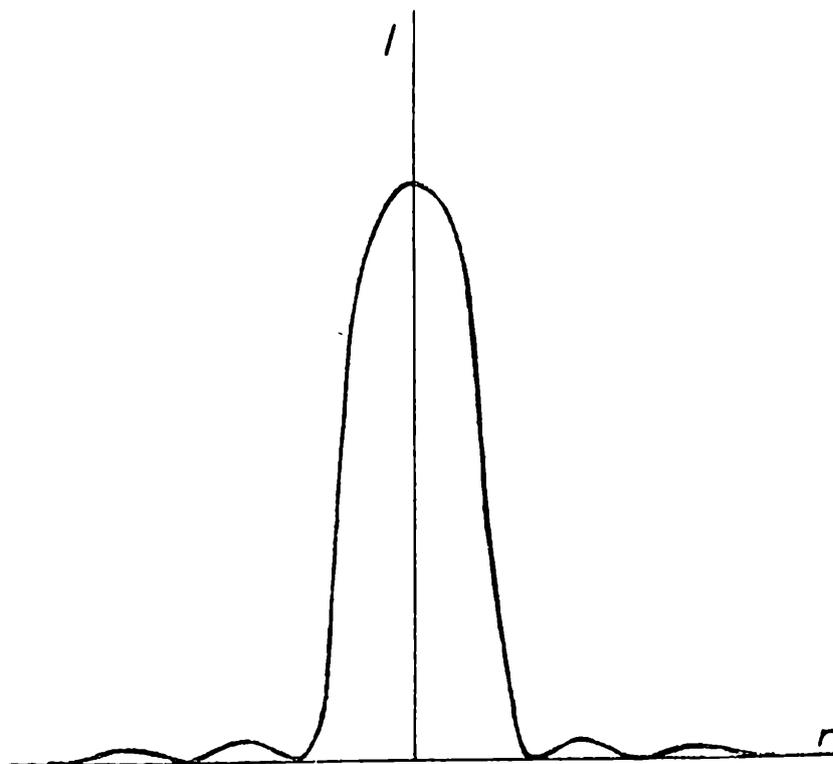
$$A = n \sin \sigma. \quad (4)$$

Například u mikroskopu, jehož ohnisková vzdálenost objektivu f' je 4 mm, číselná apertura $A = 0,8$ a vzdálenost obrazu od ohniska objektivu $l = 160$ mm vychází pro poloměr centrálního maxima, při použití světla o vlnové délce $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, $\varrho = 1,5 \mu$.

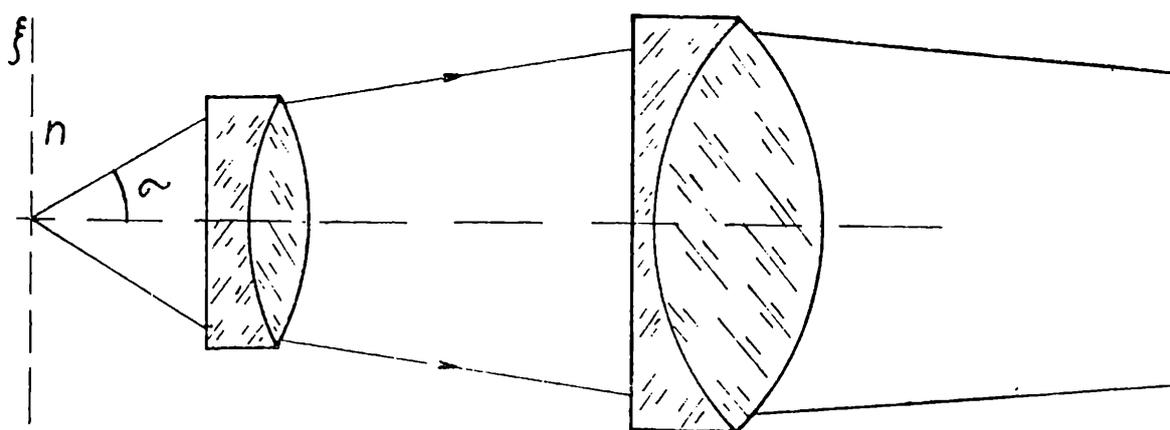
3. *Rozlišovací schopnost mikroskopu.* Znázorníme si nyní rozdělení intenzit při zobrazení dvou blízkých bodů (obr. 6). Vidíme, že se obě křivky z části překrývají a při určité malé vzdálenosti obrazy obou bodů splynou. Nejmenší vzdálenost bodů MN , při které je možno obrazy obou bodů ještě rozlišit, je

$$MN_{\min} = 0,61 \frac{\lambda}{A} \quad (5)$$

Možnosti mikroskopického zobrazení běžným světlem jsou tedy omezeny vlnovou délkou světla. Z toho důvodu se ke zobrazení velmi malých objektů používá mikroskopů, pracujících s kratšími vlnovými délkami, než je vlnová délka světla. Jsou to mikroskopy fluorescenční, mikroskopy elektronové¹⁾ a mikroskopy neutronové.



Obr. 4



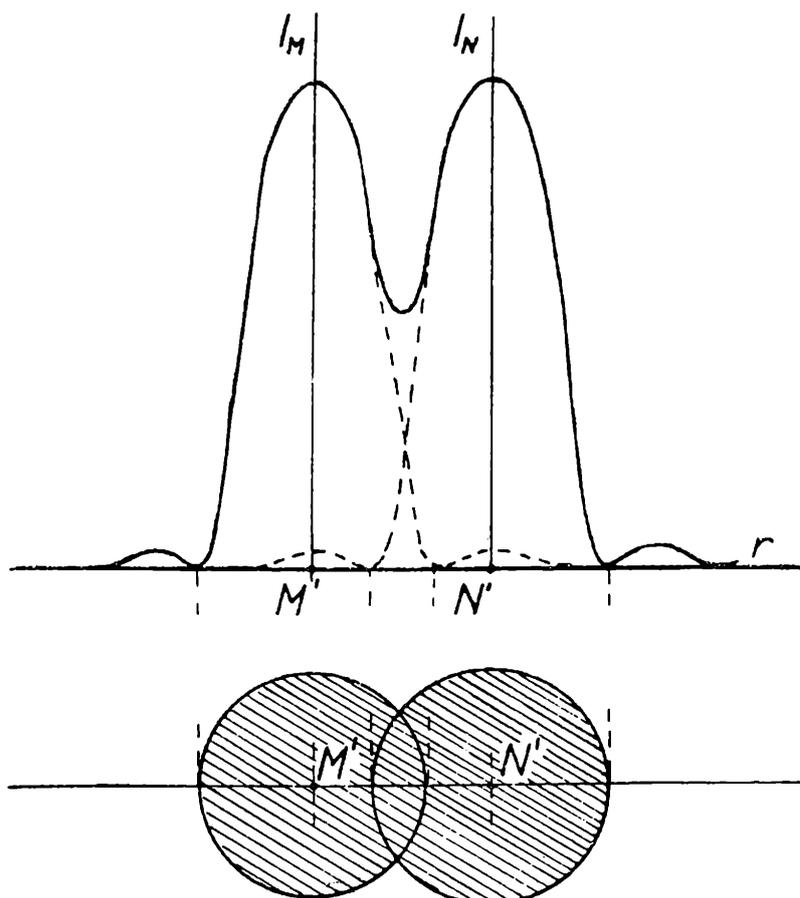
Obr. 5

¹⁾ S nimiž se naši čtenáři seznámili v loňských Rozhledech matematicko-fyzikálních (str. 57, 118, 167, 324, 368, 413).

Vzmemme-li dále ještě v úvahu, že lidské oko není schopno rozlišit úhel menší než asi $1'$, docházíme k podmínce pro zvětšení mikroskopu

$$250 A \leq \Gamma \leq 1000 A. \quad (6)$$

Zvětšení Γ je omezeno jak shora tak, zdola. Dolní ani horní hranici není možno překročit, aniž bychom podstatně nezhoršili kvalitu obrazu.

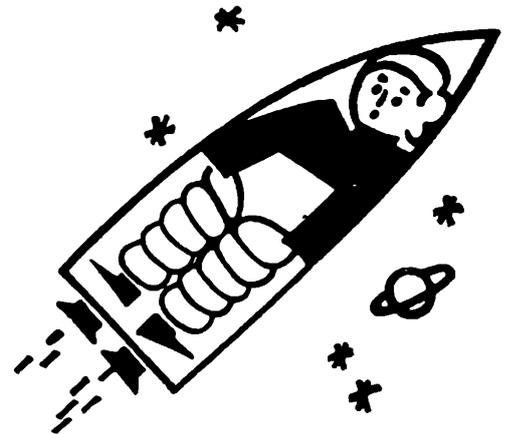


Obr. 6

V tomto pojednání jsme pominuli vady optické soustavy mikroskopu. I při nejdokonalejší korekci není možno všechny vady úplně vyloučit. U reálného mikroskopu, kde se projevují některé vady, se ohybové jevy stávají ještě výraznějšími a více zhoršují kvalitu optického zobrazení.

Ladislav Sehnal, CSc., Ondřejov:

Umělé družice a kosmické rakety



Přehledy umělých kosmických těles, které v našem časopise uveřejňujeme, doplňujeme nyní seznamem umělých družic a kosmických raket, vypuštěných od začátku června 1962 do konce minulého roku (viz tabulku). Od vypuštění první umělé družice 4. října 1957 uplynulo již více než pět let, a tak je zajímavé zjistit počet všech vypuštěných umělých družic Země v jednotlivých letech. I tento malý a pouze kvantitativní přehled nám může dát obraz o rychlém rozvoji astronautiky. V r. 1957 byly vypuštěny pouze dvě družice; v r. 1958 to bylo již osm, r. 1959 - 14, r. 1960 - 19, r. 1961 - 35, r. 1962 - 72. Zatím se tedy počet vypuštěných umělých družic každým rokem přibližně zdvojnásoboval proti roku minulému.

V r. 1962 byly také provedeny dva pokusy o dosažení blízkých planet: americký *Mariner 2* doletěl k Venuši a sovětská sonda *Mars 1* byla vypuštěna na dlouhou cestu k planetě Mars.

Z vypuštěných umělých družic je jistě nejdůležitější skupinový let kosmonautů *A. G. Nikolajeva* a *P. R. Popoviče* na sovětských kosmických lodích *Vostok 3* a *Vostok 4*. Byli vypuštěni v jednodenním intervalu 11. a 12. srpna a oba přistáli téměř současně 15. srpna. Američané vypustili také dalšího kosmonauta; 3. října obletěl *W. Schirra* na kosmické lodi *Mercury 8* šestkrát Zemi.

Sovětský svaz pokračoval v umělých družicích sérií sondážních družic *Kosmos*; poslední družicí vypuštěnou v loňském roce byla právě družice *Kosmos 12* z 22. prosince.

Z amerických družic jsou nové družice *Telstar* a *Relay 1*, sloužící k rádiovému spojení mezi kontinenty. Družice *Telstar* umožnila přenos televizního vysílání z Ameriky do Evropy; její vysílání bylo zachyceno i u nás. Družice *Anna 1* byla vypuštěna za účelem přesného zjištění parametrů tvaru zemského tělesa; k tomu je ovšem nutné mít velmi přesná pozorování, což mělo být usnadněno světelnými

záblesky, vysílanými družicí. Toto zařízení však se nepodařilo uvést v činnost. Družice *Oscar* a *Injun 3* byly určeny k slunečnímu výzkumu.

Ve Spojených státech byla též vypuštěna společně s Kanadou družice *Alouette*, která nese různé přístroje k sondáži vysoké atmosféry.

V druhé polovině roku byly úspěšně provedeny pokusy s vypuštěním meziplanetárních sond. 22. července musela být zničena sonda *Mariner 1*, která měla letět k Venuši, ale odchýlila se brzy po startu z původně určené dráhy. Teprve druhý pokus 27. srpna byl úspěšný a sonda *Mariner 2* prolétla 14. prosince ve vzdálenosti 34 000 km od Venuše. K Marsu byla 1. listopadu vypuštěna v Sovětském svazu sonda *Mars 1*, která poletí k Marsu déle než sedm měsíců.

Kromě družic, uvedených v tabulce, bylo v USA vypuštěno ještě 27 družic se špionážním posláním, o nichž se neuvádějí žádné podrobnosti a mnohdy nejsou ani známy jejich dráhy. Patří zřejmě k prvnímu typu družic *Midas* nebo *Samos* a také i *Discoverer*. Pro neúplné údaje a jejich nevědecké účely je v tabulce neuvádíme.

Umělé družice

Datum vypuštění 1962	Název	Váha kg	Doba oběhu min	Výška perigea km	Sklon dráhy
2. VI.	Oscar 2, USA		90,6	207	74,3
19. VI.	Tiros 5, USA	129	100,4	588	58,1
30. VI.	Kosmos 6, SSSR		90,5	264	49,0
10. VII.	Telstar, USA	80	165	952	44,8
28. VII.	Kosmos 7, SSSR		90,1	197	64,9
11. VIII.	Vostok 3, SSSR		87,5	151	64,8
12. VIII.	Vostok 4, SSSR		88,4	169	64,9
18. VIII.	Kosmos 8, SSSR		92,3	244	49,0
18. IX.	Tiros 6, USA	127	98,7	684	58,3
27. IX.	Kosmos 9, SSSR		90,9	292	65,0
29. IX.	Alouette, USA, C	144,7	105,5	996	80,5
2. X.	Explorer 14, USA	40	218,5	281	32,9
3. X.	Mercury 8, USA	1370	88,8	153	32,6
17. X.	Kosmos 10, SSSR		90,2	197	65,0
20. X.	Kosmos 11, SSSR		95,9	234	48,9
27. X.	Explorer 15, USA	45,2	315,2	313	18,0
31. X.	Anna 1, USA	161	107,8	1077	50,1
13. XII.	Injun 3, USA	48	116,3	235	70,4
13. XII.	Relay 1, USA	78	185,0	1322	47,5
16. XII.	Explorer 16, USA		104,3	1181	52,0
19. XII.	Transit 5, USA		109,1	698	90,6
22. XII.	Kosmos 12, SSSR		90,5	198	65,0

Prof. dr. Anton Kotzig, Bratislava:

Zaujímavosti okolo jednej hry



Igor a Milan si dohovorili jednu hru s dvadsaťjeden guľčkami. Pri hre odoberali striedavo z nádoby určitý počet guľčiek a vyhral ten, ktorý hral naposledy. Aby bola hra zaujímavejšia, sťažili si pravidlá hry ešte ďalšími podmienkami. Na tri lístky si napísali skupiny čísel:¹⁾

A	B	C
1, 2, 6	1, 3, 5	2, 3, 4

Igor začína hru tým, že si vybral jeden z lístkov. Čísla napísané na lístku vyjadrovali počty guľčiek, ktoré smel v priebehu hry v jednotlivých ťahoch z nádoby odobrať. Potom si podobne Milan zvolil pomocou jedného z dvoch lístkov, ktoré ešte ostali, svoje ťahy.

Potom už Igor urobil v rámci svojich možností prvý ťah. Nato odpovedal Milan odobraním guľčiek zo zvyšku. Počet ním odobraných guľčiek opäť súhlasil s niektorým číslom na jeho lístku. Potom ťahal zase Igor a tak sa striedali, pokiaľ ten, ktorý bol na ťahu mal vôbec ešte možnosť urobiť ťah. Ako sme už povedali na začiatku, vyhral ten, ktorý ťahal posledný.

Keď oba kamaráti niekoľkokrát opakovali opísanú hru, povšimli si, že ten kto začínal skoro vždy prehral. Zamysleli sa nad vecou a zistili, že skutočne druhý hráč má možnosť zaistiť si víťazstvo, a to vždy, keď sa v hre riadi podľa určitých strategických pravidiel.

Z toho vyplývajú pre našich čitateľov dve úlohy:

1. (Jednoduchšia). Opíšte strategické pravidlá, ktorých sa musí druhý hráč pridržať, aby si vynútil víťazstvo.

2. (Zložitejšia, pre náročnejších čitateľov). Zistite, aký bude výsledok

¹⁾ Všimnite si, že súčet čísel na každom lístku sa rovná deviatim a že deväť na troch rôznych sčítancov iným spôsobom už rozložiť nemožno.

hry, ak stav guľičiek v nádobe po prvom ťahu môže začínajúci hráč voliť ľubovoľne a to až po volbe skupiny ťahov svojho súpera.

Jména řešitelů uvedeme v některém dalším čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Redakce

M i l a n K o m a n, Praha:

Dvě zajímavé skládanky

Při jedné matematické besedě přinesl učitel svým žákům dvě zajímavé „stavebnice“. Položil na stůl z tenké překližky vyříznuté skládanky, které vidíte na obr. 1 a 2.¹⁾ Potom vyzval účastníky besedy k tomu, aby se pokusili pouhým posunutím jednotlivých dílů skládanek po stolní desce složené útvary rozebrat.

Chlapci brzy zjistili, že první skládanka má jednu, nebo chcete-li dvě, zajímavé vlastnosti.

Držíme-li pevně její libovolné dva díly, nepodaří se nám zbývajícím dílu žádným pohybem v rovině stolní desky vysunout. Začneme-li však pohybovat současně alespoň dvěma díly ve směru šipek vyznačených na obr. 1, celá „stavebnice“ se lehce rozpadne na tři samostatné díly.

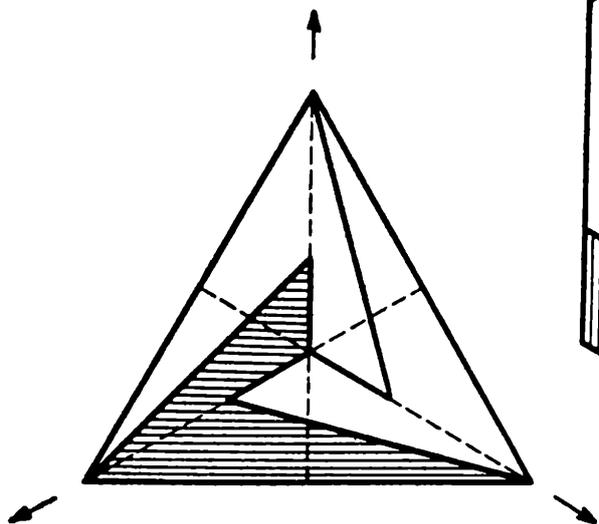
Vzápětí se ukázalo, že stejnou vlastnost má i druhá skládanka. Všem se to velmi líbilo a obě hračky putovaly z ruky do ruky. Mirek si je dokonce hned obkresloval a prohlásil, že si podobné zhotoví sám.

„Víš co, Mirku,“ zarazil ho však učitel, „pokus se sám o něco více!“ I ostatní chlapci se se zájmem otočili k svému učiteli a čekali, co tentokrát z toho vyjde. Dozvěděli se asi toto: Jestliže si zhotovíme např. první skládanku z nějakého silnějšího prkénka, dostaneme vlastně prostorový model. Ze vzniklé skupiny těles můžeme však libovolný díl vysunout, aniž bychom pohnuli zbývajícím částmi. Vystačíme zřejmě s posunutím ve „svislém“ směru (obr. 3). Mirek i ostatní chlapci dostali za úkol vymyslet, jak by se daly obě původně rovinné skládanky uzpůsobit pro prostor tak, abychom dostali skupinu těles, pro které platí podobné vlastnosti jako pro uvedené rovinné modely. To jest, dostali za úkol sestrojít skupinu těles, pro kterou by platilo:

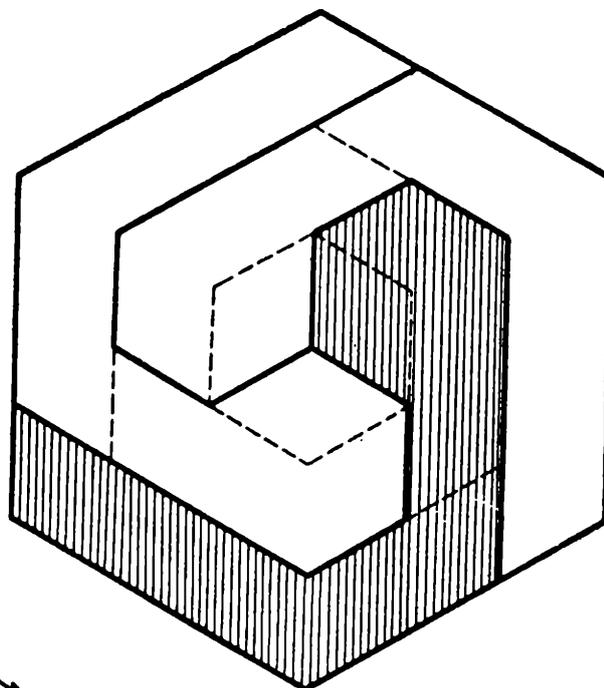
Ž á d n é t ě l e s o n e l z e z u v e d e n é s k u p i n y v y j m o u t

¹⁾ První z nich pochází od maďarského matematika L. Fejese-Totha a druhá od českého matematika V. Poláka.

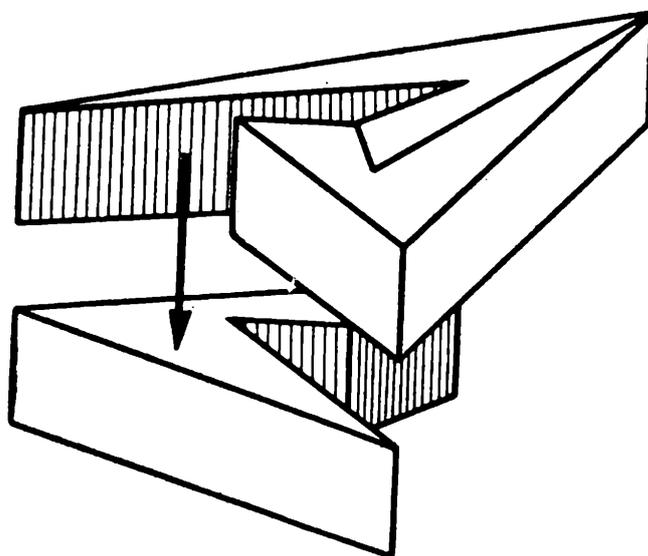
samostatně, ale přitom lze vhodným pohybem alespoň dvou těles celou skupinu rozebrat.



Obr. 1



Obr. 2

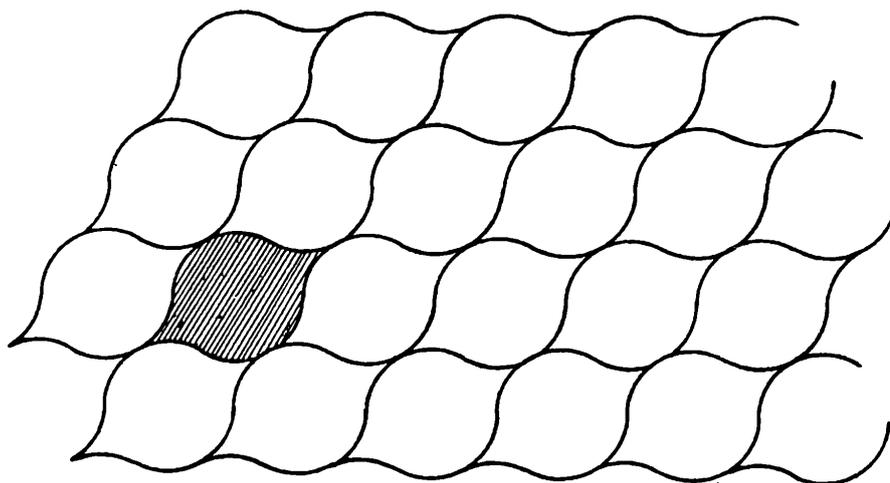


Obr. 3

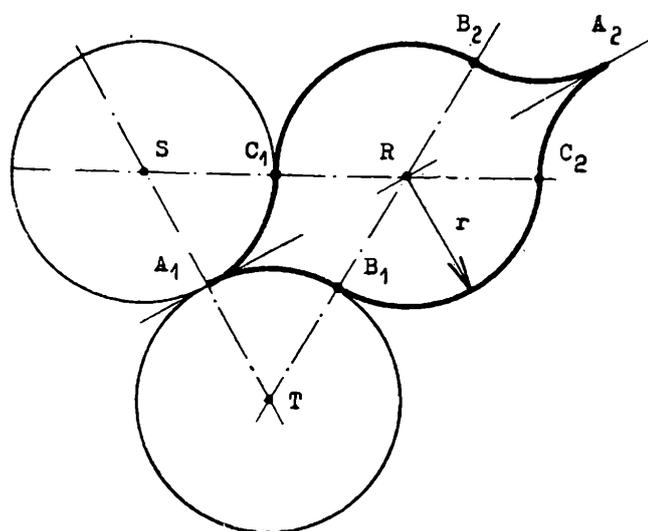
Pokuste se sami také o řešení této úlohy a napište nám, jak se vám to vydařilo. Jména řešitelů uveřejníme v některém z příštích čísel Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Úloha o ornamentu

Na obr. 1 je znázorněn ornament, který pokrývá celou rovinu. Ornament je složen z navzájem shodných útvarů, přičemž jeden z těchto útvarů je v obrázku vyčárkovaný. Vypočtete obvod a obsah tohoto útvaru, je-li dán poloměr r . (Obr. 2 popisuje přesněji konstrukci uvažovaného útvaru a je z něho také patrný význam písmene r .)



Obr. 1



Obr. 2

Řešení této úlohy zašlete na adresu redakce našeho časopisu. Nejlepší z došlých příspěvků otiskneme.

J. S.

Desátý ročník matematické olympiády



Na podzim roku 1962 vyšel desátý, jubilejní ročník matematické olympiády s podrobnou zprávou o řešení úloh ze soutěže ve školním roce 1960—1961.

Na autorství brožury se tentokrát podílí s Rudolfem Zelinkou, vědeckým pracovníkem Matematického ústavu ČSAV v Praze, Jan Vyšín, docent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze. Dalšími spolupracovníky na textu brožurky jsou členové ústředního výboru matematické olympiády.

Publikace je určena především žákům základních a středních všeobecně vzdělávacích i odborných škol. Její cíle jsou jednak instrukční, jednak propagační. Text oživuje a prohlubuje zájem žactva o celostátní matematickou soutěž a podává i návod, jak si má soutěžící počínat, aby mohl počítat s úspěchem.

V části věnované mezinárodní olympiádě je mimo jiné uvedeno i celkové zhodnocení třetího ročníku. Z výsledku našeho mezinárodního umístění je jasné, že přes povšechné zvýšení úrovně ve školské matematice nemůžeme být se současným stavem spokojeni. Naše slabé umístění jen dokazuje, že se prozatím nevěnujeme dost intenzívně matematicky talentovaným žákům.

Podpora a rozvoj zájmu o studium matematiky je prvním cílem brožury o matematické olympiádě. Knížečka je rozdělena celkem do šesti kapitol.

První je inspirována jubilejním významem 10. výročí založení soutěže. V úvodních poznámkách shrnul doc. Vyšín stručnou, ale přesvědčivou formou historii vzniku, vývoj i perspektivy naší celostátní matematické soutěže. Informuje o některých novinkách v desátém ročníku olympiády a změnách proti dosavadnímu tradičnímu uspořádání soutěže. Autor se zde zmiňuje i o mezinárodních matematických olympiádách, zvláště o jejich mimořádném společenském a politickém dosahu a o našem současném neuspokojivém mezinárodním umístění. Dále se tu mluví o perspektivě vysokoškolských olympiád, jichž se mají zúčastnit posluchači prvních ročníků vysokých škol technických. Na konci kapitoly jsou uvedena jména slavnostně vyznamenaných dobrovolných pra-

covníků olympiády, kteří za prvních deset let věnovali soutěži desítky tisíců hodin mimo své vlastní zaměstnání.

D r u h á kapitola informuje o průběhu jubilejního ročníku MO ve všech kategoriích, o účasti jednotlivých krajů a typů škol. Je tu stručně zachycen současně platný řád soutěže, jsou zde vyjmenována vybraná témata učiva, jejichž rozvíjení si X. ročník MO vzal za úkol, je uvedena i literatura, která má olympionikům pomáhat při řešení úloh.

T ř e t í část brožury shrnuje zprávu o výsledcích všech kol a kategorií soutěže. Všecky statistické údaje jsou doplněny přehlednými tabulkami. Je zde zařazen seznam vítězů jednotlivých kategorií podle krajů, na konci pak je uvedeno dvacet nejlepších řešitelů jubilejního ročníku soutěže.

Č t v r t á kapitola přináší texty šesti přípravných úloh I. kola ve všech čtyřech kategoriích soutěže.

Těžiště celé knížky spočívá v ústřední p á t é části. Zde jsou vzorně vyřešeny jednotlivé příklady všech tří soutěžních kol, kategorií A počínaje a D konče. Některé z příkladů jsou ve slovenském znění. Tyto části přeložil Jozef Moravčík. Řešení všech úloh, které toho vyžadují, jsou doplněna názornými obrázky, které provedl Vlastimil Macháček, vedoucí katedry matematiky Pedagogického institutu v Praze.

V závěrečné š e s t é kapitole je souhrnná zpráva o III. ročníku mezinárodní matematické olympiády. Jejím pořadatelem byla v r. 1961 maďarská Matematická společnost Jánose Bolyaie, kterou v tomto úkolu podporovalo maďarské ministerstvo osvěty. Soutěž se uskutečnila v krajském městě Veszprému u Blatenského jezera. Olympiády se vedle Maďarska a nás zúčastnilo i Polsko, Rumunsko, Německá demokratická republika a Bulharsko. Československo tentokrát nedosáhlo v mezinárodní konkurenci výraznějšího úspěchu, neboť obsadilo až čtvrté místo po Maďarsku, Polsku a Rumunsku. Hůře než my se umístila NDR a Bulharsko. Nakonec jsou tu též uvedeny texty všech šesti úloh obou soutěžních písemných prací.

Pro rok 1962 bylo v rámci 100. výročí oslav založení Jednoty čs. matematiků a fyziků naplánováno uspořádat tuto mezinárodní soutěž v Československu. Dnes již víme, že ani tento IV. ročník nedopadl pro naše družstvo úspěšně. Máme sice stejný celkový počet bodů s Poláky, ti však mají výše oceněného jednotlivce. Vítězi jsou opět Maďaři, druhé je družstvo Sovětského Svazu, po něm následuje družstvo Rumunska, čtvrté je Polsko a po něm ČSSR. Šesté je Bulharsko a poslední Německá demokratická republika.

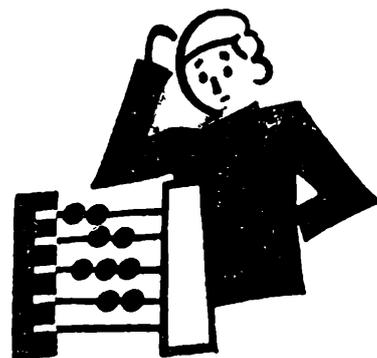
Poznámky ke IV. MO jsme připojili jen jako aktualitu mimo rámeček recenze X. ročníku MO.

Brožurku najdete v prodejnách n. p. Kniha. Knižka má vkusnou modročernou obálku, kterou navrhl grafik Jaromír Jarkovský, má tradiční praktický kapesní formát B6, 186 stran a stojí pouze 3,80 Kčs, vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha. Jaromír Dubský

Matematika

Mojmír Nohel, SVVŠ Olomouc-Hejčín:

Jak poznáme geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných?



V prvním čísle 40. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních v článku Geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných dospěl doc. Emil Kraemer k těmto větám:

I. Je-li osa kuželosečky rovnoběžná s některou osou dané kartézské soustavy souřadnic, pak má kuželosečka v této soustavě rovnici

$$Hx^2 + Ky^2 + Mx + Ny + L = 0,$$

v níž aspoň jedno z čísel H , K není rovno nule, kromě toho není $H = M = 0$, nebo $K = N = 0$, nebo $M = N = L = 0$. Pro parabolu je buď H nebo K rovno nule, pro elipsu a kružnici je $H > 0$, $K > 0$ (pro kružnici je $H = K > 0$) a pro hyperbolu je $H > 0$, $K < 0$.

II. Není-li osa kuželosečky rovnoběžná s některou osou dané kartézské soustavy souřadnic, má kuželosečka v této soustavě rovnici

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ve které je vždy $B \neq 0$.

III. Každá kuželosečka je v dané kartézské soustavě souřadnic vyjádřena kvadratickou rovnicí ve dvou proměnných, jež se obě v rovnici skutečně vyskytují.

IV. Každá kvadratická rovnice ve dvou proměnných se dá vždy geometricky vyložit jedním z těchto devíti případů:

1. Nemá vůbec geometrický význam.
2. Představuje jediný bod.
3. Představuje jedinou přímku.
4. Představuje dvě různé rovnoběžky.

5. Představuje dvě různoběžky.
6. Představuje kružnici.
7. Představuje elipsu.
8. Představuje hyperbolu.
9. Představuje parabolu.

Čtenáři, kteří chtějí poznat podle koeficientů dané kvadratické rovnice, jaké bude její zobrazení, byli odkázáni na vysokoškolské učebnice.

Jde-li nám však jen o rozeznání jednotlivých případů, nikoliv o přesné určení ohnisek, os a vrcholů u kuželoseček, můžeme vystačit i se znalostmi matematiky v rozsahu desáté třídy bývalé JSS, nebo nynějšího I. ročníku SVVŠ. Je jen třeba rozumět dobře diskriminantu kvadratické rovnice, přímé a nepřímé úměrnosti, lineární funkci, nerovnostem, funkci kvadratické a jejich grafům.

Připomeňme si: kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

upravíme na tvar $ax^2 + (by + d)x + cy^2 + ey + f = 0$ a při $a \neq 0$ řešíme podle x vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-(by + d) \pm \sqrt{(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)}}{2a}, \quad (1)$$

případně rovnici upravíme na tvar

$$cy^2 + (bx + e)y + ax^2 + dx + f = 0$$

a při $c \neq 0$ řešíme podle y vzorcem

$$y_{1,2} = \frac{-(bx + e) \pm \sqrt{(bx + e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}. \quad (2)$$

Je-li $a \neq 0$, $c \neq 0$, lze užít (1) i (2).

Zobrazujeme jen reálné řešení, tj. při diskriminantu nezáporném. Při záporném diskriminantu nemá daná rovnice geometrický význam.

1a) Uvažujme rovnici

$$ax^2 + cy^2 = 0, \quad a > 0 \quad (3)$$

Zde je

$$x_{1,2} = \pm y \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Je-li $c > 0$, může být x reálné jen pro $y = 0$; potom $x = 0$ a rovnice představuje jediný bod, počátek.

Je-li $c < 0$, představuje rovnice dvě různoběžky

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a}{c}} x.$$

Je-li $c = 0$, představuje rovnice jedinou přímku $x = 0$.

b) Rovnice

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \quad (4)$$

má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2 + 16y - 20}}{2},$$

$$\text{tj. } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-(y^2 - 4y + 4)},$$

což upravíme na tvar $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(y-2)^2 \cdot (-1)}$.

Protože $(y-2)^2 \geq 0$, je jediná možnost $y = 2$, takže $x = 1$; grafem rovnice (4) je bod (1; 2).

2. Kořeny rovnice

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0 \quad (5)$$

jsou

$$x_{1,2} = \frac{12y \pm \sqrt{144y^2 - 144y^2}}{8},$$

$x = \frac{3y}{2}$, z čehož $y = \frac{2x}{3}$. Je to tedy rovnice jediné přímky.

3. Rovnice

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0 \quad (6)$$

má při řešení podle x diskriminant $D = 20$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{5}$, takže

$$x_1 = -y - 1 + \sqrt{5}, \quad x_2 = -y - 1 - \sqrt{5},$$

z čehož $y = -x - 1 + \sqrt{5}$ a $y = -x - 1 - \sqrt{5}$.

Zobrazením jsou dvě rovnoběžky o směrnici $k = -1$.

4. Rovnice

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0 \quad (7)$$

má diskriminant $D = 25y^2$, takže

$$x_1 = \frac{-y + 5y}{2} = 2y, \text{ tj. } y = \frac{x}{2},$$

$$x_2 = \frac{-y - 5y}{2} = -3y, \text{ tj. } y = -\frac{x}{3}$$

Jde o rovnice dvou různoběžek.

5a) Rovnice $ax^2 + f = 0$ při $a > 0$, $f > 0$ nemá zobrazení, při $a > 0$, $f < 0$ nebo při $a < 0$, $f > 0$ má kořeny $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{f}{a}}$; zobrazíme je dvěma rovnoběžkami s osou y . Podobně rovnice $cy^2 + f = 0$ buď zobrazení nemá nebo představuje dvě rovnoběžky s osou x .

b) Rovnice $ax^2 + dx = 0$ se upraví na tvar $x(ax + d) = 0$ a plyne z ní jednak $x = 0$, což je osa y , jednak při $a \neq 0$ je $x = -\frac{d}{a}$, představující rovnoběžku s osou y , není-li $d = 0$. Je-li ovšem $d = 0$, potom je zde obrazem jen osa y .

Podobně rovnice $cy^2 + ey = 0$ se při $c \neq 0$, $e \neq 0$ zobrazí osou x a rovnoběžkou s ní.

c) Rovnice $ax^2 + ey = 0$ při $a \neq 0$, $e \neq 0$ dává $y = -\frac{ax^2}{e}$, čili parabolu s vrcholem v počátku a s osou v ose y . Otevřena je buď nahoru při $\frac{a}{e} < 0$, nebo dolů při $\frac{a}{e} > 0$.

Podobně rovnice $cy^2 + dx = 0$ dává $x = -\frac{cy^2}{d}$ při $c \neq 0$, $d \neq 0$; zobrazíme ji parabolou s vrcholem v počátku a s osou v ose x .

d) Rovnice $ax^2 + bxy = 0$ dá při $a \neq 0$, $b \neq 0$ po vytknutí $x(ax + by) = 0$ a zobrazí se přímkou $x = 0$ a jinou přímkou, různoběžkou $y = -\frac{a}{b}x$. Podobně rovnici $bxy + cy^2 = 0$ při $b \neq 0$, $c \neq 0$ po vytknutí $y(bx + cy) = 0$ zobrazíme osou x a s ní různoběžnou přímkou $y = \frac{b}{c} \cdot x$.

e) Rovnice $bxy + dx = 0$ při $b \neq 0$, $d \neq 0$ se po rozkladu levé strany zobrazí kolmicemi $x = 0$ a $y = -\frac{d}{b}$. Podobně rovnice $bxy + ey = 0$ dává kolmice $y = 0$, $x = -\frac{e}{b}$ při $b \neq 0$, $e \neq 0$.

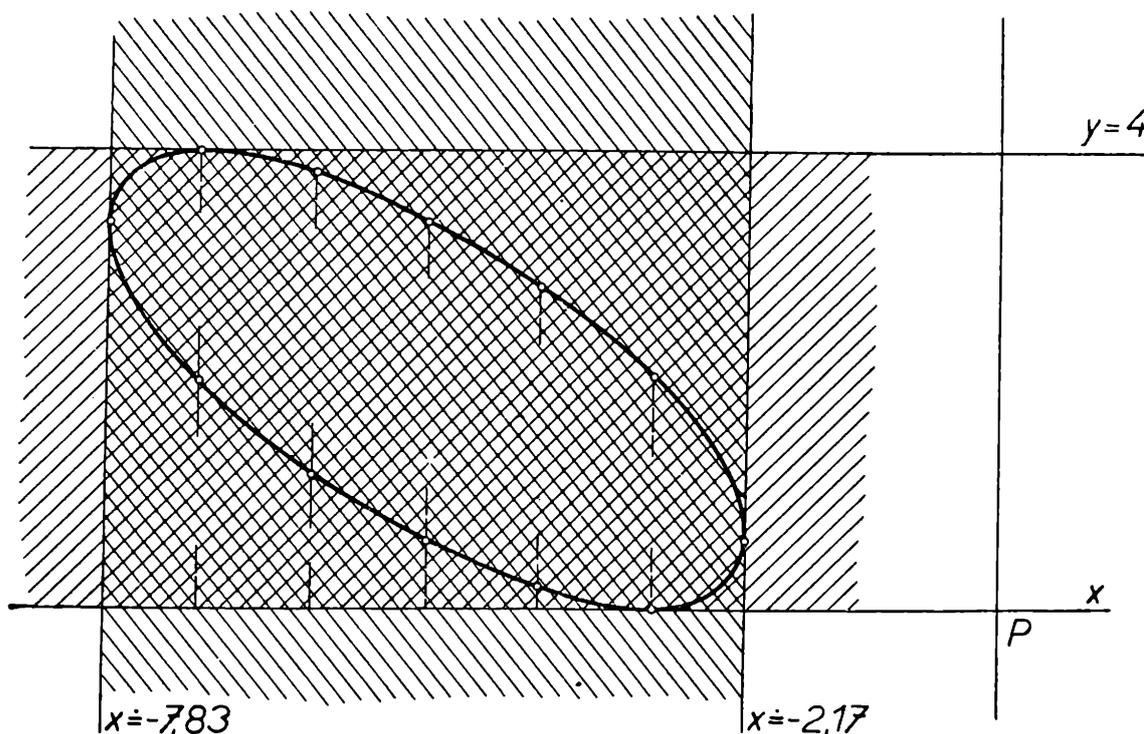
f) Rovnici $bxy + f = 0$ při $b \neq 0$, $f \neq 0$ převedeme na tvar $y = \frac{-f}{bx}$, to je známá nepřímá úměrnost, která se zobrazí rovnoosou hyperbolou; jejími asymptotami jsou osy x , y a větve jsou při $\frac{f}{b} < 0$ v I. a III. kvadrantu, při $\frac{f}{b} > 0$ v II. a IV. kvadrantu.

g) Je-li na pravé straně rovnice $y = -\frac{f}{bx}$ ještě nějaká konstanta, např. $-\frac{d}{b}$ při $d \neq 0$, $b \neq 0$, posunou se všechny body hyperboly ve směru osy y o toto $-\frac{d}{b}$, takže původní asymptota $y = 0$ přejde do nové asymptoty $y = -\frac{d}{b}$. Na takový tvar upravíme rovnici $bxy + dx + f =$

$= 0$, např. rovnice $xy + 2x - 1 = 0$ dává $y = \frac{1 - 2x}{x}$, po úpravě je $y = \frac{1}{x} - 2$, takže asymptoty mají rovnice $x = 0$, $y = -2$, střed hyperboly je v bodě $(0; -2)$.

h) Rovnice $bxy + ey + f = 0$ při $b \neq 0$, $e \neq 0$, $f \neq 0$ se upraví na tvar $y = \frac{-f}{bx + e}$, který má význam při $bx + e \neq 0$, takže přímka $x = -\frac{e}{b}$ je jednou asymptotou a druhou zůstává osa x , hyperbelu potom snadno sestrojíme.

i) Rovnice $bxy + dx + ey + f = 0$ se při $b \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$, $f \neq 0$



Obr. 1

upraví na $y(bx + e) = -dx - f$ a při $bx + e \neq 0$ na tvar $y = \frac{-dx - f}{bx + e}$, takže její zobrazení, opět rovnoosá hyperbola, má obě asymptoty sice posunuté, ale rovnoběžné s osami souřadnic. Např. rovnice $xy + 2y - 3x + 1 = 0$ se upraví na $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$ nedefinováno pro $x = -2$; máme tedy již jednu asymptotu. Pro vyšetření druhé asymptoty upravíme zlomek na pravé straně rovnice na tvar $\frac{3x + 6 - 7}{x + 2}$, v jiném zápise $\frac{3(x + 2) - 7}{x + 2} - \frac{7}{x + 2}$, takže po krácení má rovnice tvar $y = 3 - \frac{7}{x + 2}$. Odtud vidíme, že přímka $y = 3$ je hledanou druhou asymptotou a střed hyperboly je v bodě $(-2; 3)$.

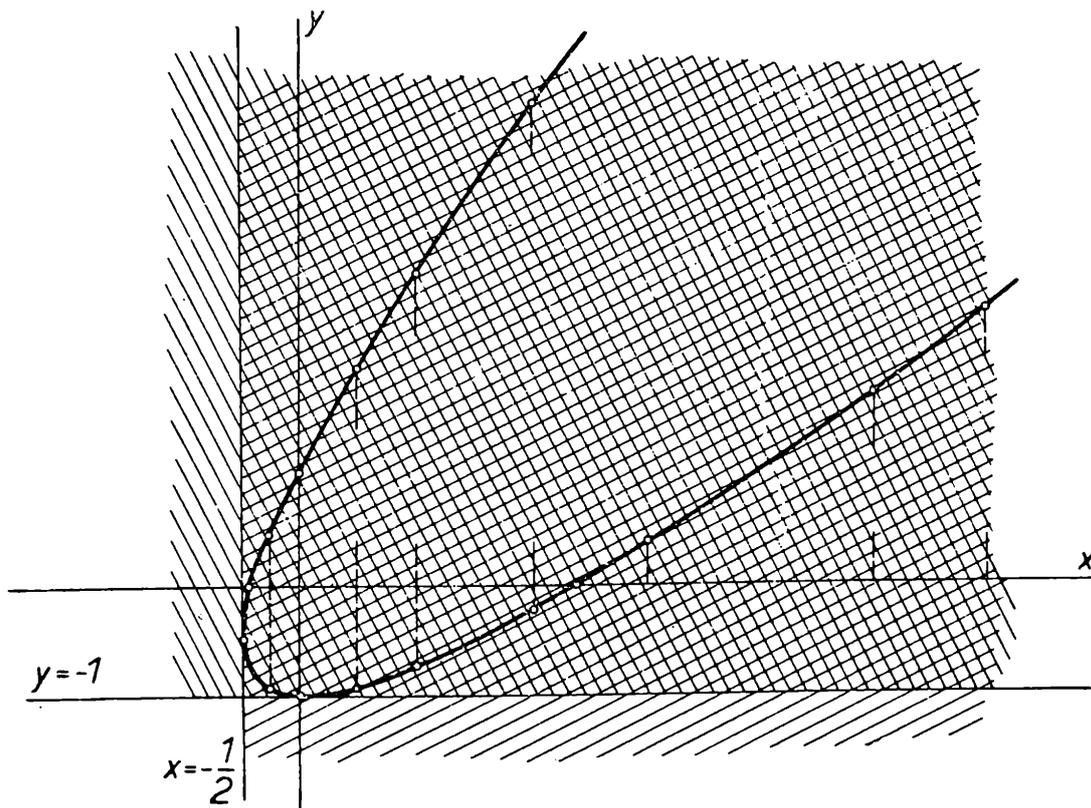
6. Rovnice

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 6x + 2y + 9 = 0 \quad (8)$$

dává při řešení podle x

$$x_{1,2} = -y - 3 \pm \sqrt{-y^2 + 4y} \quad (9)$$

Diskriminant $D = -y^2 + 4y \geq 0$. Z této nerovnosti plyne $y^2 - 4y \leq 0$; po rozkladu levé strany je $y(y - 4) \leq 0$, to platí jen při $0 \leq y \leq 4$. Geometrickým zobrazením těchto nerovností je vodorovný pás od osy x po přímku $y = 4$ (viz obr. 1). Diskriminant je nulový při $y = 0$ nebo při



Obr. 2

$y = 4$. Tyto poslední dvě rovnice představují dvě rovnoběžky a vně pásu jimi omezeného nemůže být žádný bod geometrického zobrazení rovnice (8). Bude proto naše kuželosečka uzavřená, omezená, může to být jen elipsa nebo kružnice a uvedené rovnoběžky obsahují krajní možnosti body dotyku. Jejich souřadnici x lehce určíme, dosadíme-li $y = 0$ nebo $y = 4$ do (9). Jsou tedy body dotyku $T_1(-3; 0)$, $T_2(-7; 4)$. Řešíme-li rovnici podle y , dostáváme

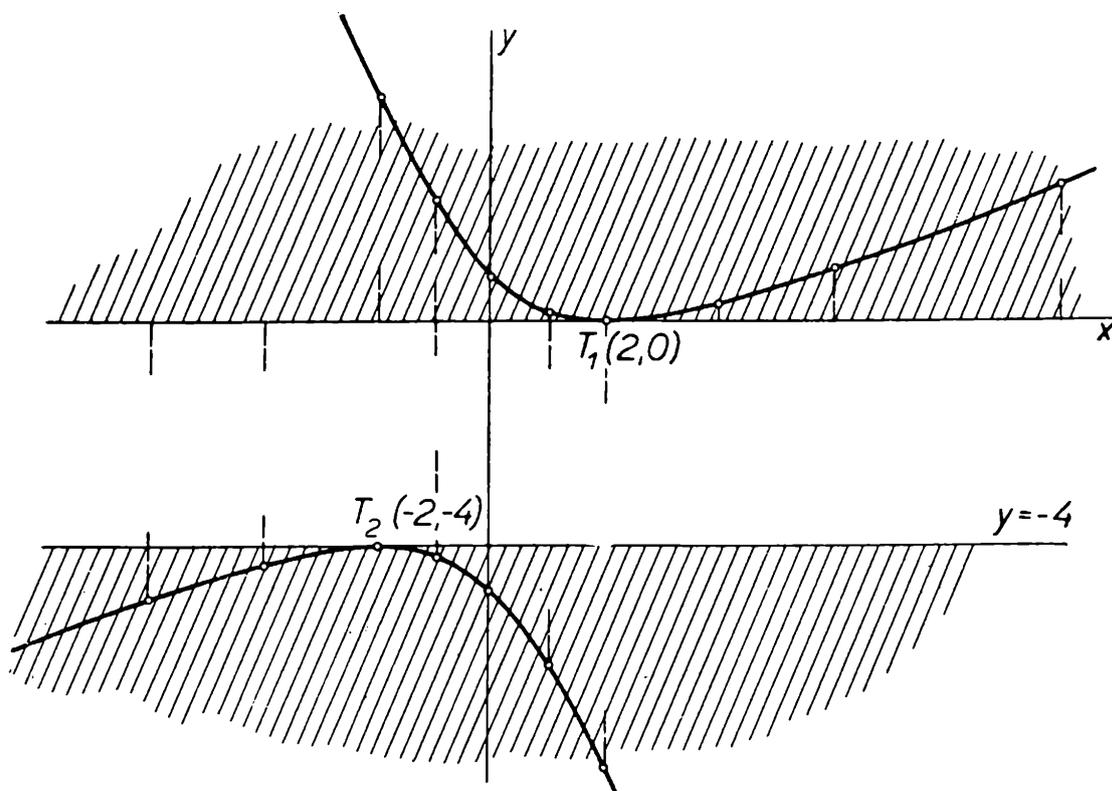
$$y_{1,2} = \frac{-x - 1 \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

$$D = -x^2 - 10x - 17 \geq 0, \text{ tj.}$$

$$x^2 + 10x + 17 \leq 0.$$

Levou stranu nerovnosti rozložíme na $(x + 5 - 2\sqrt{2})(x + 5 + 2\sqrt{2})$ a po vyřešení dostaneme uzavřený interval $-5 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -5 + 2\sqrt{2}$. Zobrazení je svislý pás. Krajiní případy budou opět tečny, body dotyku určíme podobně jako u tečen vodorovných, dosadíme-li souřadnice x tečen do vzorce pro $y_{1,2}$. Protože obrazec z tečen je obdélník, může být kuželosečkou jedině elipsa. V případě, že by obrazcem z tečen byl čtverec, přesvědčíme se výpočtem souřadnic bodů dotyku, nejde-li o kružnici, která by měla dotyky ve středech stran. Toto vyšetřování odpadá, víme-li, že nakloněná elipsa musí mít rovnici s členem xy a že tento člen není nikdy v rovnici kružnice. Další body elipsy vyšetřujeme výpočtem. Z určeného intervalu zvolíme jednu proměnnou a dosadíme do vzorce pro výpočet druhé proměnné. Střed rovnoběžníka je středem elipsy.



Obr. 3

7. Rovnice

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0 \quad (10)$$

řešená podle x má diskriminant $D = y + 1 \geq 0$, což platí pro $y \geq -1$. Může tedy kuželosečkou být jenom křivka neuzavřená, parabola s jednou tečnou o rovnici $y = -1$ a bodem dotyku $T_1(0; -1)$. Rovnice (10) ře-

šená podle y má diskriminant $D = 2x + 1 \geq 0$ při $x \geq -\frac{1}{2}$, máme tedy

další tečnu s rovnicí $x = -\frac{1}{2}$ a bodem dotyku $T_2\left(-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)$

(Viz obr. 2.)

8. Rovnice

$$x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad (11)$$

řešená podle x má diskriminant

$$D = y^2 + 4y \geq 0, \text{ tj.}$$

$$y(y + 4) \geq 0,$$

což platí jednak pro $y \geq 0$, jednak pro $y \leq -4$. Tyto nerovnosti představují dvě poloroviny, různé a nepřekrývající se. Jejich hranice jsou v přímkách $y = 0$, $y = -4$. Viz obr. 3. Jde zde proto o kuželosečku s dvěma větvemi hyperbolu. Pro ni jsou hranice polorovin tečnami s body dotyku $T_1(2; 0)$, $T_2(-2; -4)$. Řešíme-li rovnici (11) podle y , vychází diskriminant $D = x^2 + 4$ kladný pro všechna x . Bude tedy hyperbola otočena tak, že nebude mít žádnou tečnu rovnoběžnou s osou y .

Při vyšetřování jednotlivých bodů kuželoseček je vhodné využít jejich průsečíků s osami souřadnic, pokud ovšem existují. S osou x se potom kuželosečka protíná při $y = 0$, s osou y při $x = 0$.

K a r e l V i c o v s k ý, SPŠ, Kutná Hora:

Technické příklady na racionální funkce

Osnovy pro odborné i všeobecně vzdělávací školy předepisují probírání funkcí ve větším či menším rozsahu, vždy však důležitých funkcí racionálních, zejména lineární, kvadratické a lineární lomené. Příklady se často omezují jen na konstrukce grafů těchto funkcí ať již s použitím poznatků z analytické geometrie (na průmyslových školách), či nikoliv. Jako další příspěvek k aktuálnímu požadavku spojování teorie s praxí uvádím v tomto článku příklady s výhradně technickou aplikační tematikou. Příklady nejsou obtížné, někdy však dost pracné. Jejich cílem je naučit se vhodně sestrojovat grafy tak, abyste z nich mohli číst různé údaje. Proto vždy kromě příkladů označených hvězdičkou sestrojíte graf a čtete z něj odpovědi na různé otázky, které si můžete ve smyslu úlohy sami klást. Přesnost čtení můžete kontrolovat výpočtem z odvozené funkční rovnice.

V praxi se málokdy sestrojují grafy při stejném měřítku na obou osách. Podle povahy případu a rozsahu proměnnosti veličin volí se obvykle různé jednotky pro obě osy. Tyto jednotky nazýváme moduly a udáváme je vždy v cm. Protože ve volbě modulů asi nemáte dost zkušeností, jsou u každého příkladu moduly uvedeny. V tomto článku užívám důsledně tohoto označení: modul pro vodorovnou osu (hodnota

nezávisle proměnné veličiny neboli argumentu) je označen m , pro svislou osu (hodnota závisle proměnné veličiny neboli funkce) n . Jsou tištěny antikvou.

Např. pro graf závislosti tlakové síly F na průměru pístu d volíme moduly: m (1 cm) = 0,5, n (1 kp) = 0,01. To značí, že 1 cm průměru je vyneseno úsečkou 0,5 cm a síla 1 kp úsečkou 0,01 cm.

Poznamenávám ještě, že u příkladů jsou uvedeny výsledky, popřípadě i návody.

Příklady na pojem funkce

1*. Vyjádřete délku l železné tyče jako funkci teploty t , prodlužuje-li se tyč dlouhá 1 m při 15 °C vždy o 0,012 mm při zahřátí o 1 °C.

(Délka tyče v metrech bude $l = 0,000\ 012\ t + 0,999\ 82$.)

2*. Pro vylisování nádoby o průměru d a výšce h z kruhového plechu o průměru D platí vztah $D = \sqrt{d^2 + 4\ d\ h}$. Vyjádřete výšku h jako funkci průměru d při daném průměru plechu D .

$$\left(h = \frac{D^2 - d^2}{4\ d} \right)$$

3*. Při lisování nádoby jako v př. 2 vyjádřete závislost průměru d na výšce h .

$$(d = -2\ h + \sqrt{4\ h^2 + D^2}).$$

4*. Při paralelním spojení n článků platí

$$I = \frac{E}{R_e + R_i/n}.$$

Vyjádřete počet článků n jako funkci proudu I .

$$\left(n = \frac{I\ R_i}{E - I\ R_e} \right).$$

Příklady na lineární funkci

5. Odvoďte rovnici a graf závislosti počtu (n) vyrobených součástek na výkonu (P) v procentech, je-li norma 80 součástek za směnu. Podle grafu určete výkon dělníka, který vyrábí 110 (70) součástek za směnu. Moduly volte m (1 %) = 0,2, n (1 kus) = 0,1.

($n = 0,8\ P$. Na ose pro P označte počátek číslem 100 (%), na ose pro n číslem 80 (ks). Grafem je přímka jdoucí počátkem a čteme, že při $n = 110$ (70) je $P = 137,5\ \%$ (77,5 %).

6. Na jeden šroub se potřebuje 25 mm tyče, která měla původní délku 3 m. Jak závisí počet (n) zhotovených šroubů na délce (l) tyče? Odvoďte rovnici a sestrojte graf při modulech m (1 cm) = 0,05, n (1 kus) = 0,05.

(Závislost je zřejmě lineární, tvaru $n = a l + b$. Je třeba určit konstanty a , b . Potřebné dvě rovnice snadno sestavíte ze dvou dvojic sobě příslušných hodnot, např. pro $n = 0$ a $n = 20$, při čemž délku l vyjadřujte v cm. Vyjde $n = -0,4 l + 120$.)

7. Výkon (ve wattech) je dán vzorcem $P = U I$. Sestrojte graf závislosti výkonu P na proudu I při konstantním napětí $U = 220$ V. Proud uvažujte v rozsahu 0,5 A — 5 A. Z grafu určete a) výkon při $I = 2,5$ A, b) proud při $P = 880$ W. Moduly: m (1 A) = 1, n (1 W) = 0,01.

(a) 550 W, b) 4 A.)

8. Vyjádřete graficky závislost proudu na průřezu S pro průřezy od 1 mm² do 10 mm². Dovolené proudové zatížení je 25 A · mm⁻². Z grafu určete průřez pro proud 225 A. Moduly: m (1 mm²) = 1, n (1 A) = 0,02.

($S = 9$ mm².)

9. Sestrojte (v jednom obrázku) grafy závislosti proudu na napětí podle Ohmova zákona při odporech $R = 10, 25, 50$ ohmů. Moduly: m (1 V) = 0,1, n (1 A) = 1.

10. Prodloužení l lana dlouhého 1 m je při zatížení $F = 100$ kp až 500 kp přibližně lineární funkcí zatížení. Při $F = 300$ kp je $l = 1$ mm, při $F = 450$ kp je $l = 1,75$ mm. Určete rovnici závislosti a sestrojte graf při modulech m (1 kp) = 0,01, n (1 mm) = 5.

($l = 0,005 F - 0,5$.)

11. Trvá-li cementování oceli při teplotě 850° až 900 °C t hodin, vnikne uhlík do hloubky h mm. Při časovém rozpětí od 10 do 60 hodin je hloubka h přibližně lineární funkcí času t . Vyjádřete tuto závislost víte-li, že za 12 hodin vnikne uhlík do hloubky 1,8 mm, za 48 hodin do hloubky 4,5 mm. Sestrojte graf při modulech m (12 hodin) = 1,5, n (1 mm) = 1.

($h = 0,075 t + 0,9$.)

12. Závod má dodat za 6 měsíců 480 výrobků. Po dvou měsících výroby byl uplatněn zlepšovací návrh, který umožnil dokončit výrobu za další dva měsíce. Sestrojte graf závislosti počtu a) hotových, b) nehotových výrobků na čase. Řešte jen graficky (v jednom obr.). Moduly: m (1 měs.) = 1,5, n (100 ks) = 2,5. Z grafu čtete průběh výroby.

Příklady na kvadratické funkce

13. Odvoďte rovnici závislosti vodivosti G měděného drátu délky $l = 1,25$ m na jeho průměru d . Specifický odpor mědi je $\rho = 0,017$ Ω cm. Sestrojte graf při modulech m (1 mm) = 1, n (1 siemens) = 0,01.

(Vodivost je převrácená hodnota odporu. Ze vzorce pro odpor vyjde $G = 37 d^2$. Graf sestrojte podle tabulky sobě příslušných hodnot veličin d , G , přičemž pro d volte hodnoty 0 až 5.)

14. Při nýtování plechů se žádá, aby průřez zeslabeného plechu mezi dvěma nýty byl roven průřezu nýtu, tedy $(t - d) s = \frac{\pi d^2}{4}$, kde t je rozteč nýtů, d průměr nýtu a $s = 10$ tloušťka plechu. Stanovte závislost rozteče t na průměru d a znázorněte graficky pro d do 25 mm při modulech m (1 mm) = 0,2, n (1 mm) = 0,1.

(Z daného vztahu plyne $t = 0,0785 d^2 + d$. Graf sestrojte podle tabulky hodnot d , t a za d volte hodnoty 10, 20, 25.)

15. Lano k vytahování obloukovek se skládá ze 30 drátků o průměru d a je zatíženo silou F . Určete závislost síly F na průměru d , je-li dovolené napětí $\sigma_{\text{dov}} = 10 \text{ kp} \cdot \text{mm}^{-2}$ a znázorněte graf při modulech m (1 mm) = 10, n (1 kp) = 0,1.

($F = 235,5 d^2$. Průměr d volte od 0,1 do 0,5.)

16. Určete graficky závislost obsahu S kruhu na průměru d (voleném od 1 do 5 mm) při modulech m (1 mm) = 1, n (1 mm²) = 0,5. Jaké průřezy vodiče čtete z grafu pro $d = 2,5$ (3,8)?

(Přesné hodnoty jsou 4,9 [11,4].)

17. Určete závislost výkonu P na proudu I při stálém odporu $R = 4$. Graf sestrojte při modulech m (1 A) = 1, n (1 W) = 0,1. ($P = 4 I^2$.)

18. Určete závislost ceny běžného metru vytočeného hřídele na průměru d , stojí-li 1 kg hřídele ($\rho = 7,85 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$) 4 Kčs a 1 dm² opracované plochy 5 Kčs. Graf sestrojte pro $d = 1$ až 10 cm při modulech m (1 cm) = 1, n (1 Kčs) = 0,02.

(Cena se skládá z ceny za hmotu běžného metru a z ceny za jeho opracování. $C = 246 d^2 + 157 d$, kde d nutno dosazovat v dm.)

19*. Svěrák o šířce čelistí 6, 10, 20 cm stojí 25, 45, 120 Kčs. Určete početně závislost ceny na šířce čelistí a vypočítejte, co bude stát svěrák s šířkou čelistí 15 cm?

(Vynesete-li graficky dané hodnoty, lze z polohy tří sestrojených bodů soudit na parabolický průběh, takže závislost bude vyjádřena, aspoň v určitém rozsahu, kvadratickou funkcí tvaru $C = a s^2 + b s + c$. Je třeba určit konstanty a , b , c . Ze třech dvojic daných hodnot dostaneme pro a , b , c soustavu tří lineárních rovnic. Řešením vyjde $a = \frac{5}{28} = 0,1785$, $b = \frac{15}{7} = 2,145$, $c = 5,7$. Pro $s = 15$ je $C = 78$ Kčs.)

20. 10 kusů vrtáků o průměrech $d = 3/32''$, $1/4''$, $1/2''$ ¹⁾ stojí 1,90, 4,80, 14 Kčs. Určete závislost ceny na průměru a vypočítejte, co stojí 10 kusů vrtáků o průměru $3/8''$?

(Návod jako u př. 19. $C = a d^2 + b d + c$, kde $a = 0,0389$, $b = 0,153$, $c = 1,1$. Pro $d = 3/8''$ je $C = 7,50$ Kčs.)

¹⁾ 1'' je značka pro anglický palec čili „inch“ (čti inč), 1'' = 25,399 mm. Jeho části se vyznačují zlomky (obvykle nikoliv desetinnými). Pozn. redakce.

Příklady na lineární lomené funkce

21. Zobraďte graf závislosti tlaku p na objemu V podle Boyleova zákona pro izotermické stlačování, víte-li, že při objemu $V = 8$ litrů je tlak $p = 1,5$ at. Moduly: m (1 litr) = 1, n (1 at) = 1.

$$(p = 12/V.)$$

22. Sestrojte graf závislosti odporu R měděného drátu 1 km dlouhého na průřezu S pro normalizované průřezy cd 1 mm² do 10 mm² při měrném odporu $\rho = 0,0175$. Moduly: m (1 mm²) = 1, n (1 Ω) = 0,5.

$$(R = 17,5/S \text{ podle vzorce pro odpor.})$$

23. Určete rovnici a graf závislosti napětí U na proudu I při stálém výkonu žárovky 100 W. Proud uvažujte od 0,5 A do 5 A. Moduly: m (1 A) = 2, n (1 V) = 0,05.

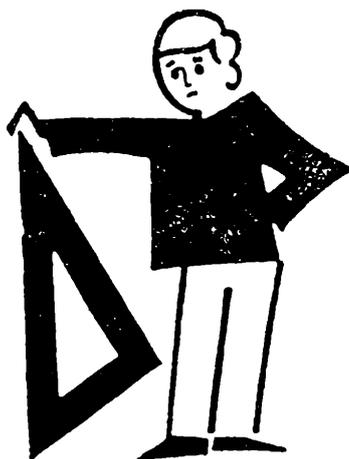
24. Ozubené kolo o průměru d koná n otáček za minutu a zabírá do jiného ozubeného kola o průměru 400 mm, které koná 10 otáček za minutu. Určete rovnici a sestrojte graf závislosti počtu otáček na průměru d . Moduly: m (1 mm) = 0,01, n (1 ot) = 0,1.

(Vyjděte ze vztahu $n = \frac{4000}{d}$, který plyne z rovnosti obvodových rychlostí.)

V některých příkladech uvedené vztahy mají empirický charakter, což si je třeba uvědomit, kdybychom chtěli sestavovat příslušné rozměrové rovnice.

Poznámka red.

Deskriptivní geometrie

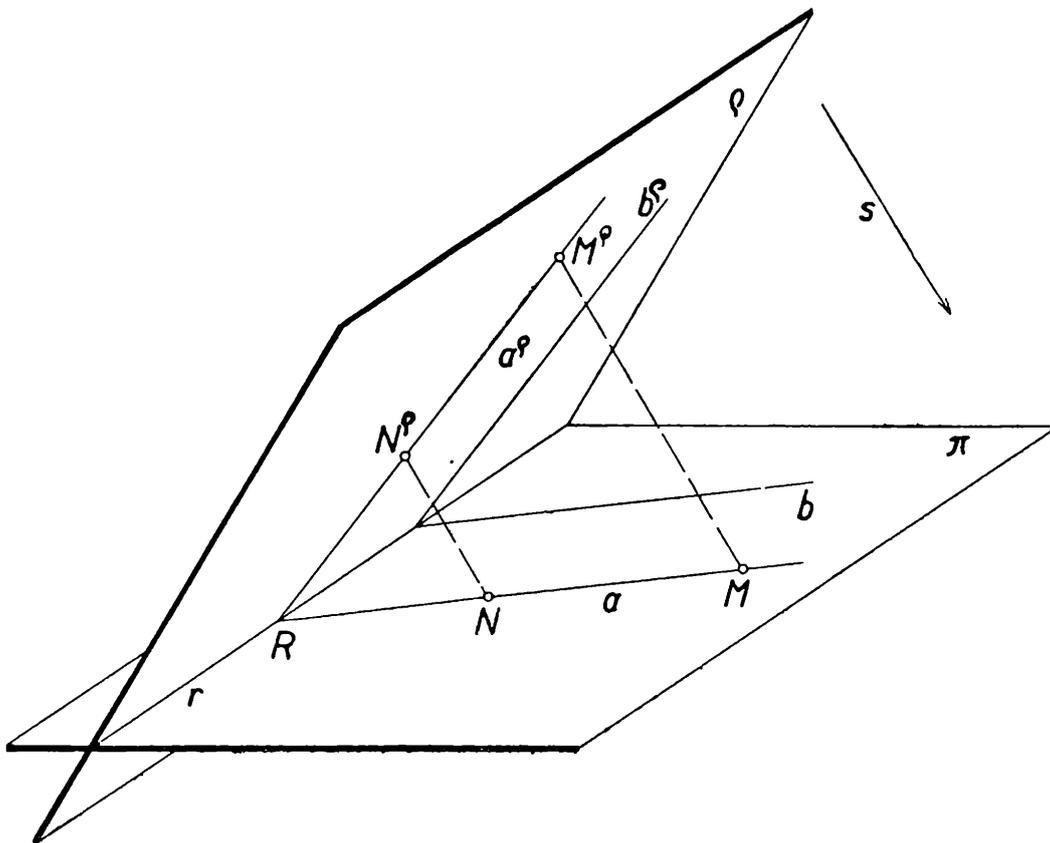


Josef Klimčík, Košice -
František Machala, Olomouc:

Osová afinita

I. V prostoru jsou dány dvě různoběžné roviny ρ , π a směr s , který není rovnoběžný se žádnou z daných rovin (obr. 1). Každému bodu M^e v rovině ρ přiřadíme v rovině π jeho průmět M ve směru s . Můžeme říci i obráceně, že každému bodu N v rovině π je v rovině ρ přiřazen jediný bod N^e , který je průmětem bodu N ve směru s . Mezi body roviny ρ a body roviny π máme tím stanoven určitý vztah, **g e o m e t r i c k o u** p ř í-

buznost (říká se též zobrazení či transformace), kterou nazýváme *osová afinita* mezi dvěma různými rovinami, dále budeme říkat jen *afinita*. Body rovin ρ , π si jsou přiřazeny vzájemně jednoznačně, tj. zvolenému bodu roviny ρ odpovídá jediný bod roviny π a obráceně. Přímka r , jež je průsečnicí rovin ρ , π , se nazývá *osou afinity*. Na ní leží tzv. *samodružné body*, tj. body, pro něž platí $X^e \equiv X$.



Obr. 1

P o z n á m k a. Bodům a přímkám ležícím v rovině ρ říkáme *vzory*, bodům a přímkám roviny π *obrazy*. Rozumí se, že můžeme bodům a přímkám roviny ρ říkat obrazy, a pak bodům a přímkám roviny π vzory.

Poněvadž jsme afinitu dostali promítnutím roviny ρ do roviny π , plyne z toho, že přímkám roviny ρ odpovídají přímky roviny π a obráceně. Stručně řečeno, obrazem přímky jedné roviny je přímka roviny druhé.

Afinita má tyto důležité vlastnosti:

1. Bodu jedné roviny odpovídá bod druhé roviny, a to tak, že jejich spojnice je rovnoběžná s pevnou přímkou (jinak jejich spojnice náleží pevnému směru - *směru afinity*).

2. Přímce jedné roviny odpovídá přímka druhé roviny tak, že se obě protínají na pevné přímce r (tzv. *osa afinity*).

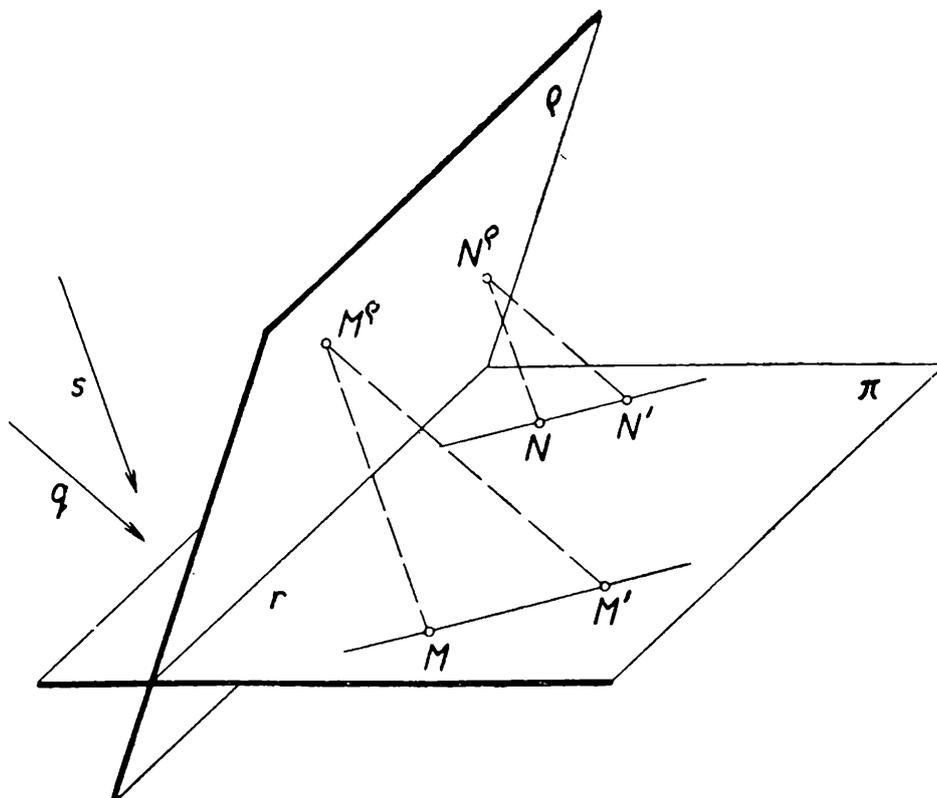
3. Jestliže přímka a^e je rovnoběžná s osou r , pak její obraz a je také rovnoběžný s osou r .

4. Jestliže bod M^e leží na přímce a^e , pak jeho obraz M leží na obrazu a (a obráceně).

5. Jestliže S^e je střed úsečky $A^e B^e$, pak také S je středem úsečky AB .

6. Dvěma různým rovnoběžkám v rovině ρ odpovídají dvě různé rovnoběžky v rovině π .

Důkazy vět 2 až 6 vyplývají z vlastností rovnoběžného promítání, a proto je zde nebudeme dokazovat. Za zmínku stojí, že uvedené vlastnosti nejsou nezávislé.



Obr. 2

Afinita mezi dvěma různými rovinami se vyskytuje při řezech na hranolových nebo válcových plochách. Tam je afinní vztah mezi rovinou podstavy a rovinou řezu.

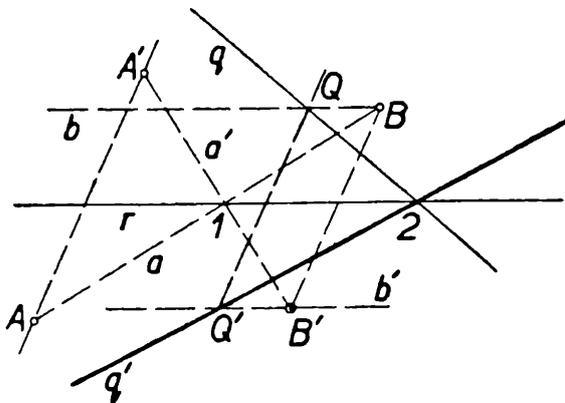
II. Pro nás je důležitější afinita mezi dvěma rovinami splývajícími, které říkáme *afinita v rovině*. K té dojdeme tak, že rovinu ρ se všemi jejími body a přímkami promítneme ve směru q do roviny π . Směr q není přitom totožný se směrem s , ani není rovnoběžný s rovinou ρ nebo π (obr. 2).

Bod M^e se promítne do bodu M' , přímka a^e do přímky a' atd. Přiřadíme-li sobě body M, M' ; a přímky a, a' ; ., dostaneme v rovině π geometrickou příbuznost, zvanou *osová afinita v rovině*, která má vlastnosti 1 až 6 vyjmenované při probírání afinity mezi dvěma různými rovinami. Jejich důkazy vyplývají opět z vlastností rovnoběžného promítání.

Ještě si řekneme, že afinita je určena osou afinity a párem sobě odpovídajících bodů. V obr. 3 je afinita dána právě uvedeným způsobem, tj. osou r a dvojicí A, A' , a je sestrojen obraz daného bodu B . Zároveň je sestrojen obraz q' dané přímky q . Popisovat konstrukci je zbytečné, neboť čtenář, který pozorně přečetl tento článek, snadno ji vyčte z obrázku.

Na závěr článku několik příkladů, jejichž rozřešení může být prověrkou pochopení článku.

1. Afinita v rovině je dána osou r a dvojicí A, A' bodů sobě v afinitě odpovídajících. a) K libovolně zvolenému bodu B určete jeho obraz B' (použijte vlastností 1, 2, 4). b) K bodu $C' \equiv B$ určete vzor C (tento příklad jasně ukazuje, že v afinitě v rovině je nutné přísně rozlišovat mezi vzorem a obrazem bodu).



Obr. 3

2. Je dána osa afinity r , směr afinity q a různoběžky a, b . Najděte afinitu tak, aby obrazy a', b' byly k sobě kolmé.

(Upraveno redakcí)

František Machala, Olomouc:

Elipsa jako afinní obraz kružnice

V předchozím článku jste se seznámili s afinitou mezi dvěma různými rovinami a s afinitou v rovině. Uvedli jsme šest vlastností afinity. V tomto článku si ukážeme, jak můžeme afinity použít k tomu, abychom některé vlastnosti elipsy získali z vlastností kružnice.

Víme, že afinním obrazem bodu je bod, afinním obrazem přímky je přímka. Bez důkazu, který je velmi dlouhý, vyslovíme větu:

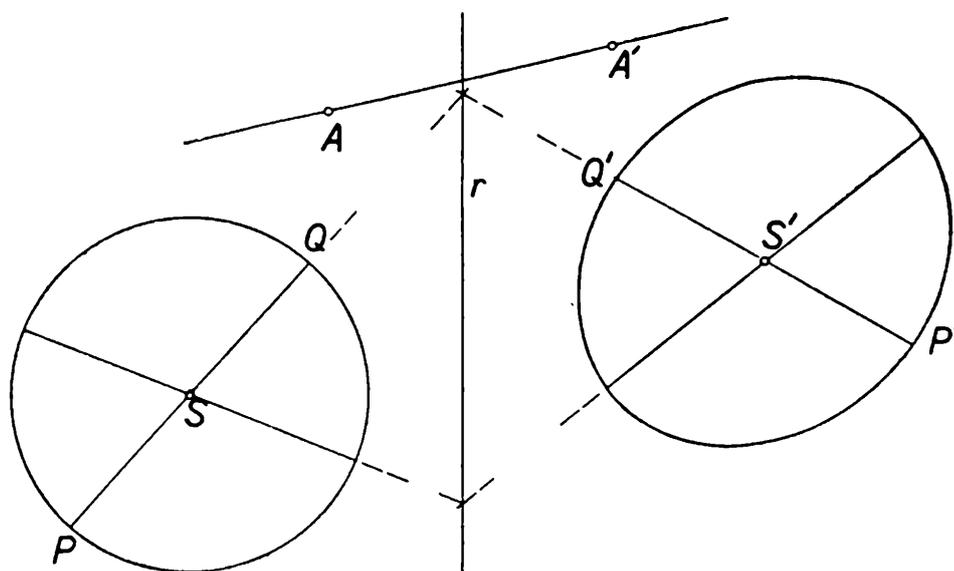
Afinním obrazem kružnice je elipsa, která ve zvláštním případě může přejít v kružnici. (Tento speciální případ však nebudeme uvažovat.)

Nyní si dokážeme větu:

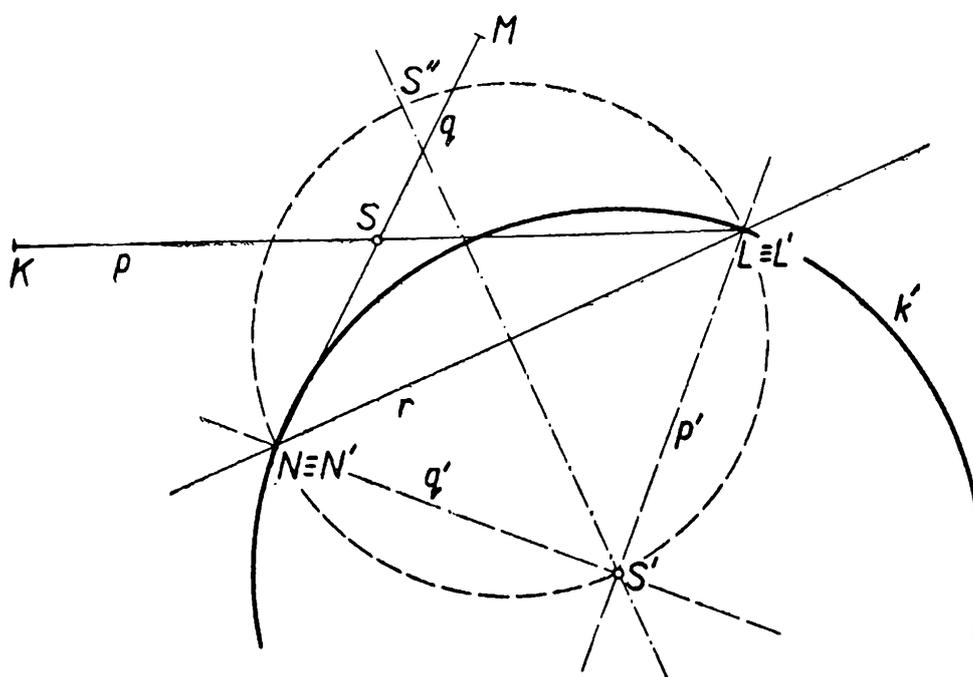
Elipsa je křivka středově souměrná.

Důkaz (obr. 1). Mějme danu kružnici k o středu S . Zvolme nějakou afinitu v rovině, tj. zvolíme osu r afinity a pár sobě odpovídajících bodů A, A' . Střed S přejde v bod S' (vlastnost 1). Každý průměr PQ kružnice k je půlen středem S , a tudíž také jeho obraz $P'Q'$ je půlen bodem S'

(vlastnost 2 a 5). Poněvadž toto je vlastnost každé tětiny elipsy jdoucí bodem S' , je proto bod S' středem souměrnosti elipsy a tedy středem elipsy, jak jsme měli dokázat.



Obr. 1



Obr. 2

Pro další bude nutné, abychom věděli, co to jsou *sdrúžené průměry* kružnice a elipsy. Pro kružnici platí, že každé dva průměry k sobě kolmé jsou sdrúžené. Mají pěknou vlastnost, a to, že tečny sestružené v krajních

bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s průměrem druhým. Poněvadž tečně kružnice v afinitě odpovídá tečna elipsy (to je další vlastnost afinity), a poněvadž přímkám rovnoběžným odpovídají v afinitě opět přímky rovnoběžné (vlastnost 6), přejdou afinitou sdružené průměry kružnice v průměry elipsy, které mají tutéž vlastnost, tj. tečny sestrojené v krajních bodech jednoho průměru elipsy jsou rovnoběžné s druhým průměrem. A takové dvojici průměrů elipsy říkáme *sdružené průměry* (elipsy).

Tím jsme zároveň dokázali větu, že afinním obrazem sdružených průměrů kružnice jsou sdružené průměry elipsy. Sami si již snadno dokážete, že osy elipsy jsou též sdružené průměry.

Dá se dokázat (důkaz je sice elementární, ale příliš dlouhý), že elipsa je určena svými dvěma sdruženými průměry. Když toto víme, můžeme pak rozřešit tento příklad:

Elipsa je dána svými sdruženými průměry $p \equiv KL$, $q \equiv MN$. Sestrojte kružnici k' , jejímž afinním obrazem je dána elipsa.

Ř e š e n í (obr. 2). Zvolme osu afinity r tak, aby $r = NL$. Tím jsou body N , L samodružné, tedy $N \equiv N'$, $L \equiv L'$. Kružnice k' musí nutně procházet body N' , L' a její střed bude na ose úsečky $N'L'$. Dále víme, že sdruženým průměrům p , q elipsy odpovídají sdružené průměry p' , q' kružnice, což znamená, že přímky p' , q' jsou k sobě kolmé. Jejich průsečík S' je střed hledané kružnice a leží podle toho na kružnici opsané nad průměrem $N'L'$. Kružnice k' pak prochází body N' , L' .

P o z n á m k a. Jiná kružnice, která vyhovuje naší úloze, je kružnice S'' ; $S''L'$.

(Upraveno redakcí)

František Machala, UP, Olomouc:

Přibližná konstrukce elipsy

Vyrýsování elipsy je úkol, s kterým se při praktickém rýsování často setkáváme. Proto se snažíme vybrat si ze známých přibližných konstrukcí elipsy nejjednodušší, a přesto dostatečně přesnou, popřípadě můžeme různé konstrukce vhodně kombinovat.

Jestliže definujeme elipsu jako geometrické místo bodů určité vlastnosti, nabízí se nám ihned její bodová konstrukce. Tato konstrukce spočívá v tom, že podle definice sestrojíme takový počet bodů elipsy, z něhož je zřejmý její průběh. Větší množství sestrojených bodů zaručuje větší přesnost v odhadu průběhu elipsy. Jestliže chceme narýsovat elipsu dostatečně přesně, pak je tato metoda pracná a v okolí vrcholů je přesto nepřesná.

je Φ zobrazena v Mongeově promítání, při čemž její osa o leží v nárysně ν . Dále je dána rovina $\omega \perp \nu$. Odchylku osy o od roviny ω označme α . Je tedy $0 \leq \alpha \leq 90$. V obr. 1 jsou nárysy útvarů, ležících v nárysně ν značeny bez indexů.

Rovina ω protíná Φ podle tvrzení I. v elipse k . Označme A, B vrcholy hlavní osy, C, D vrcholy vedlejší osy elipsy k a její střed S . Hlavní poloosa $a = AS$, vedlejší $b = CS$.

Platí $b = r$

$$\sin \alpha = \frac{r}{a}, \text{ čili } a = \frac{r}{\sin \alpha} \quad (1)$$

V obr. 1 je rovina ω sklopena kolem nárysné stopy do náryсны do polohy ω° . Provedme konstrukci středů hyperoskulačních kružnic elipsy k ve vrcholech A, C . Čtenář může tuto konstrukci a následující výpočet sledovat ve sklopení roviny ω .

Sestrojíme obdélník $ASCM$. Bodem M vedeme kolmici k úhlopříčce AC . Průsečík těchto přímek označme N . Přímka MN protíná hlavní a vedlejší osu elipsy ve středech hyperoskulačních kružnic v příslušných vrcholech.

Vypočítejme velikosti úseček $x = CN$, $y = NA$, které budeme v dalším potřebovat. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ACM platí $CA = x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$

Podle Euklidovy věty pro týž trojúhelník platí $\overline{MC}^2 = CN \cdot CA$

$$a^2 = x \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

Pak

$$y = AC - x$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

Nyní dokážeme konstrukci bodů a tečen elipsy pomocí úseček x, y . Označme ξ hlavní osu elipsy k . Jestliže nanese na ξ od bodu S úsečku velikosti x , obdržíme bod U . Kolmice vedená k ξ v bodě U protíná elipsu k v bodech $T, {}^1T$. Platí $TU = {}^1TU = y$. Když sestrojíme v bodě T (1T) tečnu t k elipse k , protne tato ξ v bodě V . Platí $SV = x + y$.

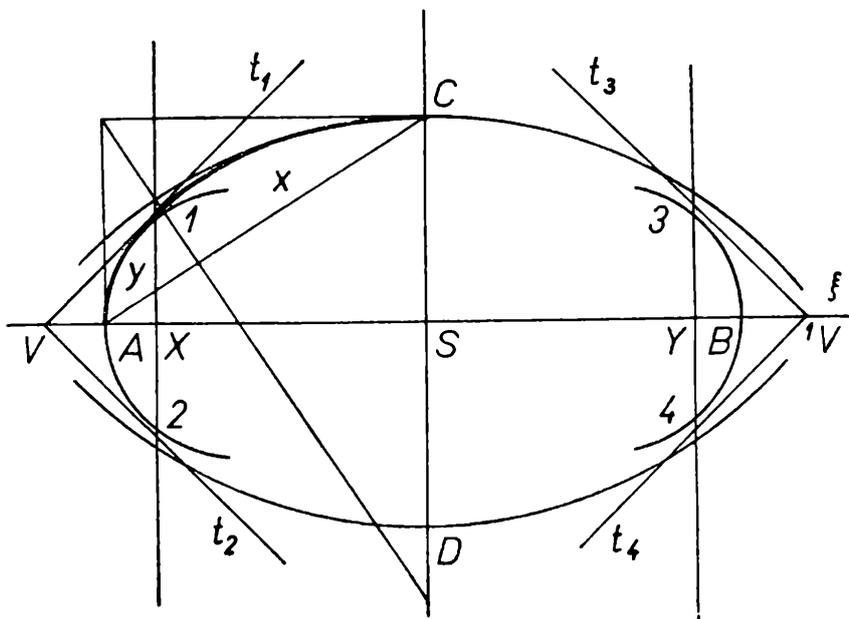
Důkaz. Protože bod T leží na elipse k , jeho první průmět T_1 leží na k_1 . Úsečka $UT \perp \nu$, proto se v prvním průmětu jeví ve skutečné velikosti. Stačí tedy dokázat, že $y = U_1T_1$.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník $S_1U_1T_1$. Jeho odvěsna, jak plyne z prvního promítacího trojúhelníka úsečky US , je $U_1S_1 = US \cdot \sin \alpha$.

Podle (1), (2) je $U_1S_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Podle Pythagorovy věty platí $\overline{U_1T_1^2} =$
 $= b^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^4}{a^2 + b^2} = y^2$. Pak $U_1T_1 = y$.

První průmět t_1 tečny t v bodě T k elipse k se dotýká kružnice k_1 . Proto je trojúhelník $V_1T_1S_1$ pravoúhlý. Pak $\overline{S_1T_1^2} = S_1U_1 \cdot S_1V_1$,
 $S_1V_1 = \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Přitom $S_1V_1 = SV \cdot \sin \alpha$, čili $SV = \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
 $\cdot \frac{a}{b} = \sqrt{a^2 + b^2} = x + y$

Nechť je dána elipsa k velikostmi poloos a, b . Provedme její přibližnou konstrukci. Podle tvrzení II. můžeme použít poznatků, které jsme odvodili v tomto článku.



Obr. 2

Nahradíme elipsu k nejdříve v okolí jejích vrcholů oblouky hyperoskulačních kružnic (obr. 2). Dále sestrojíme body 1, 2, 3, 4 elipsy k . Na ξ sestrojíme body X, Y tak, aby platilo $SX = SY = x$. Body X, Y vedeme rovnoběžky a, b s vedlejší osou, na kterých sestrojíme body 1, 2, 3, 4 tak, aby platilo $1X = 2X = 3Y = 4Y = y$. V bodech 1, 2, 3, 4 sestrojíme tečny k elipse k . Naneseme za bod X (Y) úsečku velikosti y , jejíž krajní bod označíme V (V'). Spojnice tohoto bodu s body 1, 2, (3, 4) jsou tečny elipsy k . Konstrukci dokončíme křivítkem.

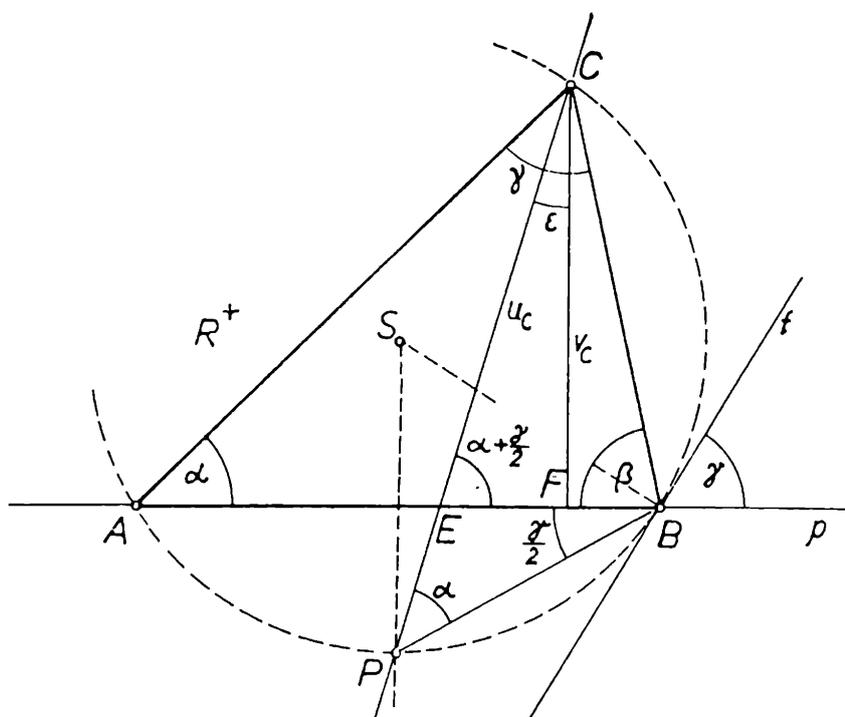
Vraťme se ještě ke vztahu (2). Platí $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Označení je voleno tak, že $0 < b < a$. Pak je zřejmé $x < a$. Z toho vyplývá, že body X, Y jsou vždy vnitřními body elipsy k a body 1, 2, 3, 4 je možno vždy sestrojít. Dokázané konstrukce můžeme tedy použít pro každou elipsu.

Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly

Tento příspěvek navazuje na stejnojmenný článek s. J. Nováka, který byl uveřejněn v 9. a 10. čísle 40. ročníku Rozhledů. Ve svém článku uvedl řadu zajímavých vlastností rovnoosé hyperboly, z nichž některé mají platnost poněkud obecnější, jak dále ukážeme.

Výchozím bodem pro tento článek bude úvaha:

Co je množinou všech vrcholů C trojúhelníků ABC v polorovině ABR , je-li dána strana $AB = c$ a konstantní rozdíl $\beta - \alpha$ velikostí úhlů $\beta = \sphericalangle ABC$ a $\alpha = \sphericalangle BAC$.



Obr. 1

Jak poznáme, je touto množinou oblouk rovnoosé hyperboly.

Než přikročíme k důkazu tohoto tvrzení, připomeňme si, že

množinou všech vrcholů C trojúhelníků ABC o straně $AB = c$ a konstantním součtu $\alpha + \beta < 180^\circ$ velikostí vnitřních úhlů v polorovině ABR je oblouk kružnice k , který je množinou vrcholů C obvodových úhlů $\sphericalangle ACB = \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; zbývající oblouk kružnice v opačné polorovině je množinou vrcholů obvodových úhlů $\sphericalangle ADB$ velikostí $180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$.

S podobnou vlastností setkáme se u některých bodů rovnoosé hyperboly.

Nejprve uvedeme některé pomocné věty, které budeme v dalším výkladu potřebovat:

P_1 . Osa úhlu v trojúhelníku svírá s výškou z téhož vrcholu úhel, jehož velikost je rovna polovičnímu rozdílu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.

Důkaz provedeme pro osu úhlu jdoucí vrcholem C (obr. 1). Osa úhlu $\sphericalangle ACB$ prochází bodem P , který je středem oblouku AB v opačné polorovině k polorovině ABR ($\sphericalangle PSB = \gamma$ a tudíž $\sphericalangle PCB = \frac{1}{2} \gamma$).

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle BPC + \sphericalangle PBA = \alpha + \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle PCF = 90^\circ - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 90^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = \varepsilon.$$

Z této věty plyne:

P_2 . Všechny trojúhelníky ABC , pro něž je rozdíl $\beta - \alpha$ konstantní, mají osy svých úhlů $\sphericalangle ACB$ navzájem rovnoběžné.

Snadno dokážete i platnost věty obrácené.

P'_2 . Jsou-li osy úhlů $\sphericalangle ACB$ v trojúhelnících ABC rovnoběžné s touž přímkou m , která není rovnoběžná s přímkou AB , pak rozdíl velikosti vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech je konstantní.

Nyní přikročíme k důkazu věty.

V_1 . Vrcholy C trojúhelníků ABC o základně $AB = c$, pro něž je rozdíl velikostí úhlů $\beta - \alpha$ konstantní, leží na oblouku rovnoosé hyperboly; její střed S je středem úsečky AB a její asymptoty svírají s AB úhel ε , resp. $90^\circ - \varepsilon$, kde $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$

(obr. 2).

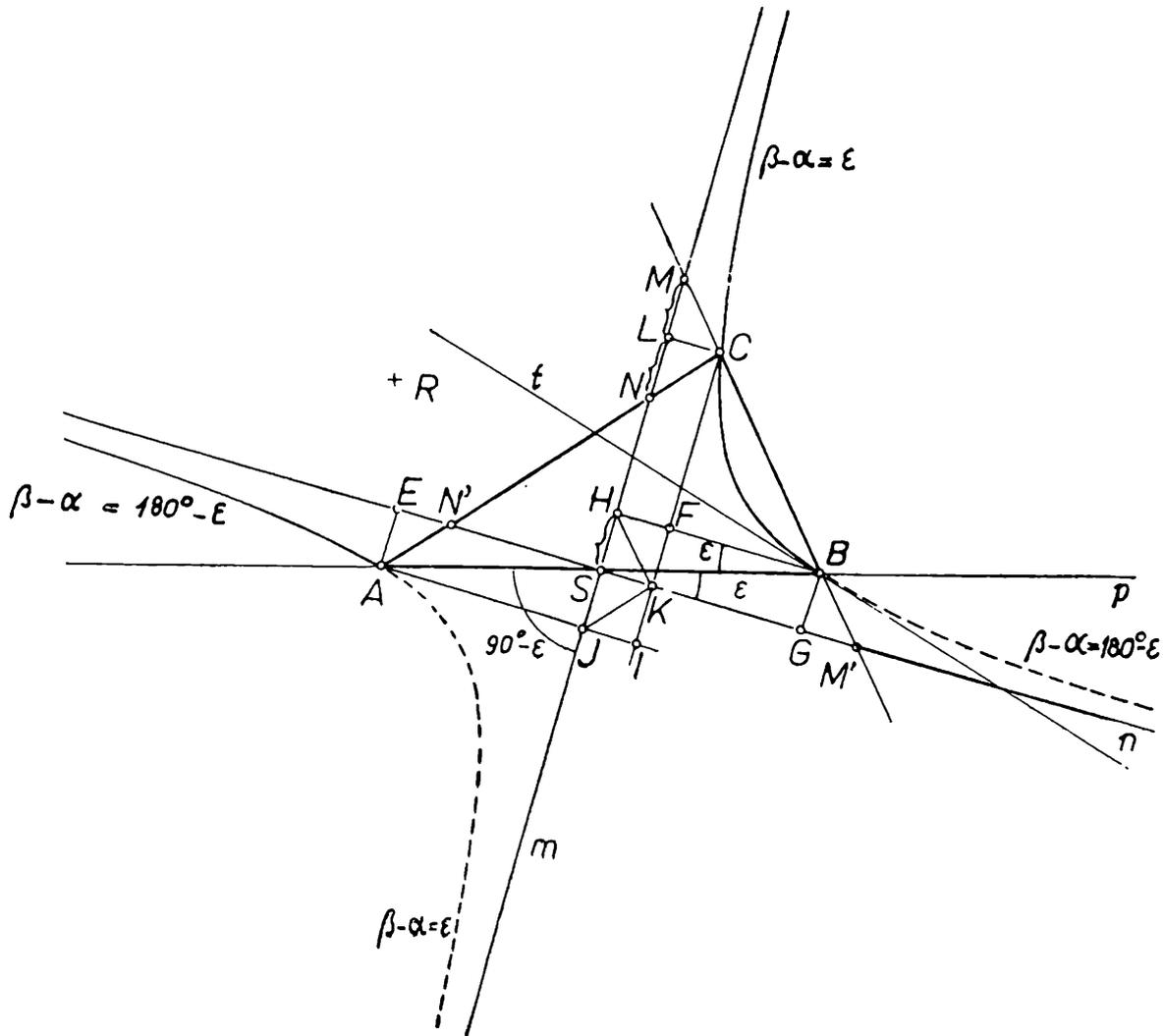
Podle P_2 jsou osy úhlů $\sphericalangle ACB$ rovnoběžné s přímkou m , procházející středem S úsečky AB a svírající s ní úhel $90^\circ - \varepsilon$. Vedme bodem S přímkou $n \perp m$; n svírá s AB úhel ε .

Bodem C sestrojme rovnoběžky s přímkami m a n . Tím dostaneme obdélník $SKCL$, o němž dokážeme, že má konstantní obsah pro každou polohu bodu C , což je charakteristická vlastnost hyperboly.

Stanovme průsečíky M, N přímek BC a AC s přímkou m a průsečíky M', N' s přímkou n . Trojúhelník MCN je zřejmě rovnoramenný, neboť

$\sphericalangle MNC = \sphericalangle NMC = \frac{\gamma}{2}$. Z trojúhelníků SBM a ASN plyne podle sinové věty

$$SM = \frac{c \sin \beta}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}; \quad SN = \frac{c \sin \alpha}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \quad (1)$$



Obr. 2

$$\begin{aligned} MN = SM - SN &= \frac{c(\sin \beta - \sin \alpha)}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{c \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\ &= c \sin \epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

$$SL = \frac{SM + SN}{2} = \frac{c(\sin \alpha + \sin \beta)}{4 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{c \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{c}{2} \cos \varepsilon \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

$$LC = \frac{MN}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c \sin \varepsilon}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Obsah obdélníku $SKCL$ je

$$P = SL \cdot LC = \frac{c^2}{8} \sin 2\varepsilon \quad (3)$$

Dále je

$$M'N' = 2CK \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 2 \cdot SL \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = c \cdot \cos \varepsilon \quad (4)$$

Ze vztahu (3) je zřejmé, že body C leží na hyperbole, která má přímky m, n za své asymptoty a která prochází body A, B . Z této hyperboly přicházejí v úvahu jen ty oblouky (bez bodů A, B), které leží v polovině ABR .

Kdybychom danou větu formulovali obecněji, dostaneme celou hyperbolu. Věta pak zní:

V_1 . V rovině nechť jsou dány dva různé body A a B . Přímka $p \equiv AC$ nechť svírá s AB úhel α a přímka $q \equiv BC$ úhel $\beta = \alpha + 2\varepsilon + k \cdot \pi$, kde k je celé číslo a ε konstantní úhel. Sdružené přímky (tj. takové, které dostaneme pro totéž ε) vytvoří svými průsečíky C rovnoosou hyperbolu procházející body A, B ; její asymptoty procházejí středem S úsečky AB a určují s ní odchylky ε a $90^\circ - \varepsilon$ (α a β jsou orientované úhly).

Čtenář nechť si sám prověří správnost této věty pro jednotlivé body všech čtyř oblouků, na něž rozdělí rovnoosou hyperbolu přímka AB .

Ze vztahu (2) a (4) plyne:

V_2 . Spojíme-li libovolný bod C rovnoosé hyperboly s krajními body průměru AB , který tímto bodem neprochází, pak tyto přímky vytínají na jejich asymptotách úsečky konstantní délky. Velikosti těchto úseček se rovnají délce pravoúhlého průmětu průměru AB do příslušné asymptoty.

Dále platí

V_3 : Spojíme-li libovolný bod C rovnoosé hyperboly s krajními body A, B libovolného jejího průměru, který neprochází bodem C , pak je rozdíl

velikostí úhlů $\beta - \alpha$ konstantní a osy úhlů přímk AC , BC jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly.

Z rovnosti obsahů obdélníků $SKCL$ a $SGBH$ (obr. 2) plyne také rovnost obsahů obdélníků $HFCL$ a $KGBF$ a odtud vztahy $FC \cdot HF = KF \cdot FB$, tj. $\frac{FB}{FC} = \frac{FK}{HF}$, takže je $HK \parallel BC$.

Z rovnoběžníků $HKCM$ a $HKM'B$ plyne

$$MC = BM'. \quad (5)$$

Z rovnosti obsahů rovnoběžníků $AIKE$ a $JICL$ vzniknou vztahy

$$AI \cdot IK = JI \cdot IC \text{ a } \frac{AI}{CI} = \frac{JI}{IK}, \text{ takže je } JK \parallel AC.$$

Protože $AE = BG$, je $JK = HK$, a tudíž

$$MC = NC \text{ a dále } AN' = NC. \quad (5')$$

Trojúhelníky MCN a $M'CN'$ jsou proto rovnoramenné a přímky AC a BC svírají s asymptotami m , resp. n shodné úhly. Tím je znovu potvrzena správnost věty V_2 .

Podle předcházející úvahy je přímka CK osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Podle pomocné věty P_1 má úhel osy úhlu ACB a výšky z bodu C na stranu AB trojúhelníku ABC velikost $\frac{\beta - \alpha}{2} = \varepsilon$. Poněvadž však osy úhlů $\sphericalangle ACB$,

když bod C probíhá rovnoosou hyperbolu, jsou stále rovnoběžné s asymptotou m , resp. n , plyne z věty P'_2 , že pro všechny trojúhelníky je rozdíl $\beta - \alpha$ konstantní.

Je-li osa úhlu $\sphericalangle ACB$ rovnoběžná s asymptotou m , je $\beta - \alpha = 2\varepsilon$, je-li rovnoběžná s asymptotou n , je $\beta - \alpha = 180^\circ - 2\varepsilon$.

Ze vztahů (5) a (5') dostaneme:

V_4 . Na libovolné sečně rovnoosé hyperboly, která není rovnoběžná s asymptotou, jsou úsečky mezi body hyperboly a jejími asymptotami shodné. (Přesněji: Střed úsečky, jejíž krajní body leží na asymptotách a která leží na uvedené sečně, je totožný se středem úsečky, jejíž krajní body leží na rovnoosé hyperbole.)

Je-li přímka tečnou rovnoosé hyperboly, následuje z věty V_4 i věta:

V'_4 . Dotykový bod tečny rovnoosé hyperboly je středem úsečky, kterou na této tečně vytínají její asymptoty,

a) Pro úhly $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, které svírají polopřímky AP, BP, AQ, BQ s průměrem AB , platí podle věty V_3 $\beta_1 - \alpha_1 = 2\varepsilon, \beta_2 - \alpha_2 = 2\varepsilon$; odtud dostaneme $\beta = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$, tj. $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PBQ$.

b) Označíme-li $\sphericalangle^1 Q AB = \alpha_3, \sphericalangle^1 Q BA = \beta_3$, pak platí

$$\beta_1 - \alpha_1 = 2\varepsilon,$$

ale $\beta_3 - \alpha_3 = 2 \cdot (90^\circ - \varepsilon)$; sečtením těchto rovností máme

$$\beta_1 + \beta_3 - (\alpha_1 + \alpha_3) = 180^\circ.$$

Poněvadž $\beta_3 + \beta_1 = 360^\circ - \sphericalangle^1 Q BP$, je

$$360^\circ - \sphericalangle^1 Q BP - \sphericalangle^1 Q AP = 180^\circ, \text{ tj.}$$

$$\sphericalangle^1 Q BP + \sphericalangle^1 Q AP = 180^\circ.$$

c) Podobně se dokáže, že

$$\sphericalangle^1 PA^1 Q + \sphericalangle^1 PB^1 Q = 180^\circ;$$

d)

$$^1 PAP = \sphericalangle^1 PBP, \text{ resp. } \sphericalangle^1 PAQ = \sphericalangle^1 PBQ,$$

to přenechávám čtenáři.

Tohoto výsledku užitíme při důkazu věty

V_6 . Kružnice opsaná trojúhelníku ABC , jehož vrcholy leží na rovnosé hyperbole, protíná tuto hyperbolu v bodě, který je souměrně sdružen s průsečíkem O výšek trojúhelníka ABC podle středu hyperboly.

Důkaz. Kružnice k opsaná trojúhelníku ABC protíná hyperbolu ještě v dalším bodě D (obr. 4). Sestrojíme k tomuto bodu bod O souměrně sdružený podle středu S . Dokážeme, že bod O , který leží na hyperbole, je průsečíkem výšek (ortocentrem) trojúhelníka ABC . Důkaz provedeme pro případ, kdy trojúhelník ABC je ostroúhlý. V případě, že trojúhelník je tupoúhlý, vymění si body O a C , resp. O a B atd. svou úlohu.

Přímka CO protíná kružnici k v bodě O' a přímka BO v bodě O'' . Podle věty V_5 je $\sphericalangle ADB + \sphericalangle AOB = 180^\circ$ a ježto $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \gamma$ (obvodové úhly nad obloukem AB), je $\sphericalangle AO'B = 180^\circ - \gamma = \sphericalangle AOB$.

Je tedy vedlejší úhel k úhlu $\sphericalangle OAB$ úhel $\sphericalangle O''OA = \gamma$; ale $\sphericalangle AO''B = \sphericalangle ACB = \gamma$. Trojúhelník OAO'' je tedy rovnoramenný a přímka $OO'' = OB \perp AC$ je výškou trojúhelníka ABC .

Podobně platí

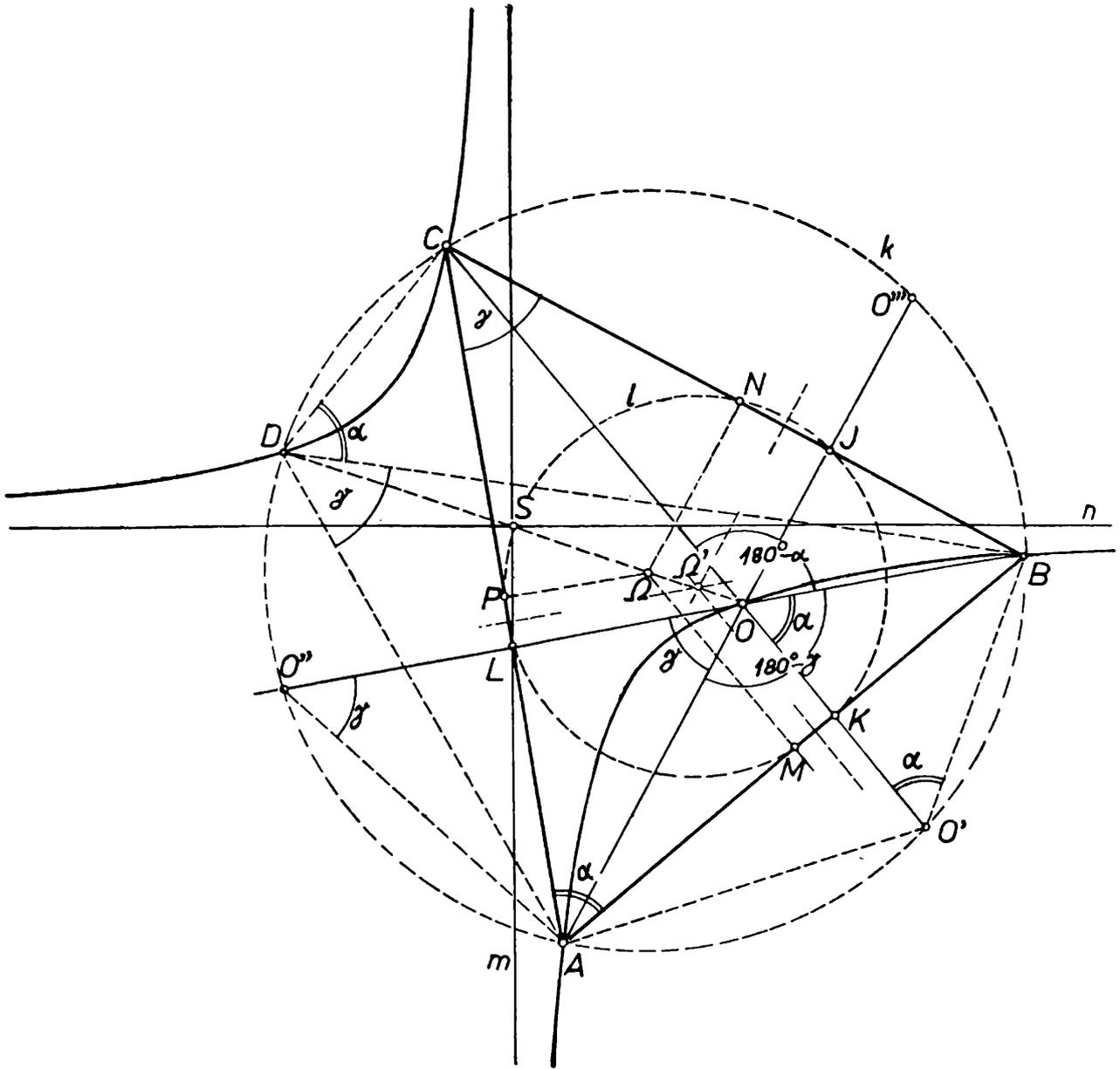
$\sphericalangle CDB = \alpha, \sphericalangle COB = 180^\circ - \alpha, \sphericalangle O'OB = \alpha$ (vedlejší úhel k úhlu $\sphericalangle COB$), $\sphericalangle CO'B = \alpha$, takže trojúhelník $OO'B$ je rovnoramenný a $CO \perp AB$.

Důkaz jsme provedli pro případ, kdy vrcholy trojúhelníka ABC leží na různých větvích a trojúhelník je ostroúhlý. Věta V_6 však platí pro kteroukoliv polohu bodů ABC na hyperbole. Nechť si čtenář sám provede

úplně stejným způsobem důkaz pro případ, že body ABC leží na téže větvi hyperboly a pro případ, kde body leží na různých větvích a trojúhelník ABC je tupohlý.

Z věty předcházející následují další věty:

V_6' : Leží-li vrcholy trojúhelníka na rovnoosé hyperbole, pak průsečík výšek leží také na této hyperbole.



Obr. 4

V_6'' . Leží-li vrcholy trojúhelníka na rovnoosé hyperbole a sestrojíme-li k průsečíku jeho výšek bod souměrně sdružený podle středu hyperboly, dostaneme bod, který leží na kružnici trojúhelníku opsané.

Uvedeme ještě další větu, které můžeme výhodně užít při konstrukci rovnoosé hyperboly, která prochází body A, B, C, D (viz dále příklad 4).

V_7 . Střed y všech rovnoosých hyperbol, které procházejí body A, B, C , leží na kružnici l stejno-
lehlé s kružnicí k , která je opsaná trojúhelníku ABC , pro střed stejnolehlosti v průsečíku O vý-
šek trojúhelníka a pro koeficient stejnolehlosti $q = \frac{1}{2}$; tato kružnice prochází středy úseček OA, OB, OC , patami výšek (K, L, J) a středy M, N, P stran trojúhelníka ABC (obr. 4).

D ů k a z. Rovnoosé hyperboly procházející body A, B, C protínají kružnici k , která je opsaná trojúhelníku ABC ještě v dalším bodě D . Tímto bodem mohou být kromě několika vyloučených bodů všechny body kružnice k . Střed y hledaných hyperbol jsou střed y S úseček OD (viz větu V_6). Proběhne-li bod D kružnici k , proběhne bod S kružnici stejnolehlou ke kružnici k podle střed u stejnolehlosti v bodě O a koefi-
cientu stejnolehlosti $q = \frac{1}{2}$. Odtud plyne přímo, že kružnice l prochází

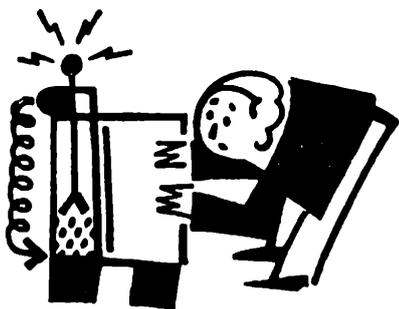
střed y úseček OA, OB, OC , střed y úseček OO', OO'', OO''' , tj. patami K, L, J výšek trojúhelníka ABC . Kružnice l prochází dále body M, N, P , které jsou souměrně sdružené k patám K, J, L výšek podle kolmic vedených středem Ω' kružnice l ke stranám trojúhelníka ABC .

Je ovšem otázka; zdali všechny body kružnice l mohou být střed y rovnoosých hyperbol. Snadno nahlédneme, že musíme z této kružnice vyloučit body K, J, L , které jsou patami výšek trojúhelníka, neboť pro střed y v uvedených bodech by se rovnoosé hyperboly rozpadly ve dvojice k sobě kolmých přímek.

P o z n á m k a. Kružnice l prochází ještě jinými význačnými body trojúhelníka ABC , ale vzhledem k vlastnosti zde dokázané se nazývá kružnicí devíti bodů nebo kružnicí Feuerbachovou.

Kružnice devíti bodů se týká pomocná věta P_3 , kterou budeme potřebovat v příkladě 3.

(Pokračování)



Zlatěk Maršák, Ivo Kraus,
Fakulta technické a jaderné fyziky ČVUT:

Základy fotoelasticimetrie

1. Úvod

Fotoelasticimetrie je experimentální metoda k určování napětí v modelech různých konstrukcí. Je založena na schopnosti dočasného dvojlomu světla některých látek (sklo, plexisklo a řada umělých pryskyřic), který je vyvolán napětím uvnitř materiálu. To znamená, že tyto látky jsou v nenapjatém stavu opticky izotropní¹⁾, kdežto v napjatém stavu se stávají opticky anizotropní¹⁾, mají optický charakter látek krystalických čili anizotropních. Fotoelasticimetrie je vybudována na zákonitostech fyzikální optiky a teorie pružnosti.

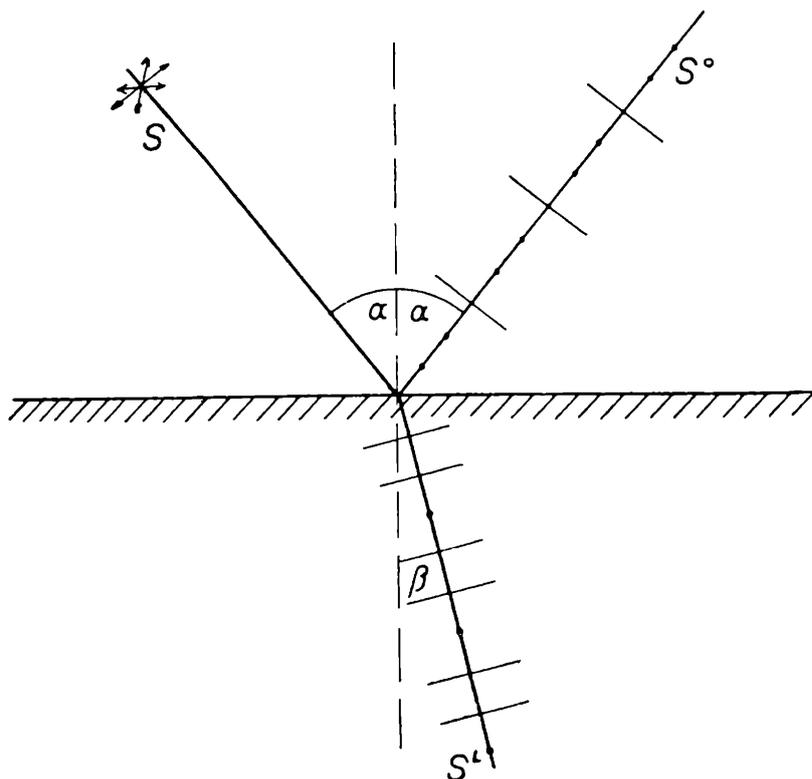
2. Optické základy fotoelasticimetrie

Viditelné světlo má povahu příčného postupného elektromagnetického vlnění o vlnové délce $\lambda_{\min} = 4000 \text{ \AA}$ (fialová barva) až $\lambda_{\max} = 7500 \text{ \AA}$ (červená barva), které se šíří rychlostí $c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ve vakuu.

Světlo si tedy můžeme představit jako šíření elektrického vektoru \vec{E} a současně magnetického vektoru \vec{H} , které jsou navzájem na sebe kolmé a kmitají v téže fázi. Pro případ homogenního izotropního prostředí platí, že rovina, určená vektory \vec{E} a \vec{H} je kolmá na směr šíření paprsku světla. Nikterak však z toho nevyplývá, že směr vektoru \vec{E} , resp. \vec{H} , by byl v prostoru stále týž. Naopak koncový bod elektrického vektoru \vec{E} , a tedy i koncový bod magnetického vektoru \vec{H} obecně opisují v rovině kolmé na směr šíření světla spojitou křivku, jinak však libovolně složitou.

¹⁾ V látkách opticky *izotropních* se světlo šíří všemi směry stejnou rychlostí. U *anizotropních* látek je rychlost šíření závislá na směru šíření. Tyto látky jsou dvojlomé, světelný paprsek se v nich štěpí na dva paprsky.

Mějme monochromatické světlo, tj. jednoduché světlo o jedné vlnové délce λ . Pak vektory \vec{E} a \vec{H} jsou harmonickou funkcí času²⁾ tvaru $x = a \sin \omega t$. Nechť koncový bod výsledného elektrického vektoru \vec{E} (a tedy i \vec{H}) opisuje v rovině kolmé na směr šíření elipsu, kružnici nebo úsečku, pak mluvíme o světle elipticky, kruhově nebo přímkově polarizovaném.



Obr. 1. Lom a odraz světelného paprsku na rovinném rozhraní dvou izotropních prostředí.

3. Základní druhy polarizace

a) **Polarizace lomem a odrazem.** Mějme nepolarizovaný světelný paprsek S . Nechť tento paprsek dopadá na nějaké optické rozhraní pod úhlem α (obr. 1).

Z fyzikální optiky víme, že se paprsek S jednak odráží jako paprsek S° , jednak láme S^L . Snadno se přesvědčíme, např. pomocí soustavy dvou rovnoběžných zrcadel, že oba paprsky S° a S^L jsou lineárně (přím-

²⁾ Obecně výsledný elektrický vektor \vec{E} (resp. \vec{H}) nemusí být harmonickou funkcí času, ale nějakou složenou funkcí času (světlo složené), kterou můžeme rozložit na řadu harmonických funkcí, což v praxi odpovídá rozkladu světla ve spektrum.

kově) polarizovány. Vektor \bar{E} ve směru S° kmitá v rovině kolmé na rovinu dopadu. Říkáme, že paprsek S° je polarizován kolmo na rovinu dopadu, nebo též, že rovina polarizace paprsku S° leží v rovině dopadu. Ve směru S^L je elektrický vektor \bar{E} tohoto paprsku polarizován rovnoběžně s rovinou dopadu. Rovina polarizace paprsku S^L je kolmá k rovině dopadu.

To, že oba paprsky S° i S^L jsou polarizovány, vyplývá z této úvahy: Rozložme vektor \bar{E} v místě dopadu na rozhraní do dvou na sebe kolmých složek \bar{E}'' a \bar{E}^\perp (obr. 2), z nichž složka \bar{E}'' bude rovnoběžná s rovinou dopadu. Pro poměr velikostí vektoru \bar{E} paprsku odraženého a dopadajícího platí Fresnelovy vzorce pro odraz a lom

$$\frac{E'' \text{ odražený}}{E'' \text{ dopadající}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad (1)$$

$$\frac{E^\perp \text{ odražený}}{E^\perp \text{ dopadající}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (2)$$

Obdobně pro poměr velikostí vektoru \bar{E} paprsku lomeného a dopadajícího

$$\frac{E'' \text{ lomený}}{E'' \text{ dopadající}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}, \quad (3)$$

$$\frac{E^\perp \text{ lomený}}{E^\perp \text{ dopadající}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (4)$$

Pravé strany rovnic (1) až (4) nazýváme *Fresnelovými koeficienty* a označíme je po řadě k_1'' , k_1^\perp , k_2'' , k_2^\perp . Po rozepsání koeficientu k_1'' vidíme, že

$$k_1'' = -k_1^\perp \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

a tedy

$$|k_1''| < |k_1^\perp|$$

a dále

$$k_2'' = k_2^\perp \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)},$$

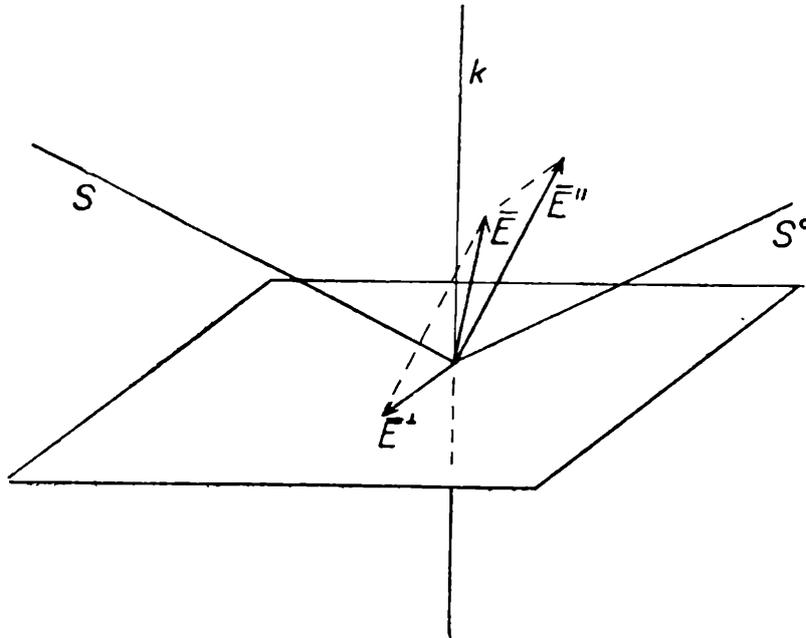
odkud plyne

$$|k_2''| > |k_2^\perp|.$$

To znamená, že se světlo vždy při odrazu nebo lomu alespoň částečně polarizuje. Úplná polarizace odrazem nastane, když $\bar{E}'' = 0$, to je pro případ $k_1'' = 0$. Pak však je $\alpha + \beta = 90^\circ$, takže $\sin \beta = \cos \alpha$ a ze Snellova zákona pro relativní index lomu, $n_{12} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, vyplývá

pro náš případ, že $n_{12} = \operatorname{tg} \alpha$. Tento vztah se nazývá *zákon Brewsterův*. Udává takový úhel dopadu, při němž nastává úplná polarizace odraženého paprsku.

b) *Polarizace dvojlomem*. Některé látky, např. islandský vápenec a jiné, mají tu vlastnost, že na ně dopadající světelné paprsky se štěpí na dva, které postupují obecně různými směry a které jsou



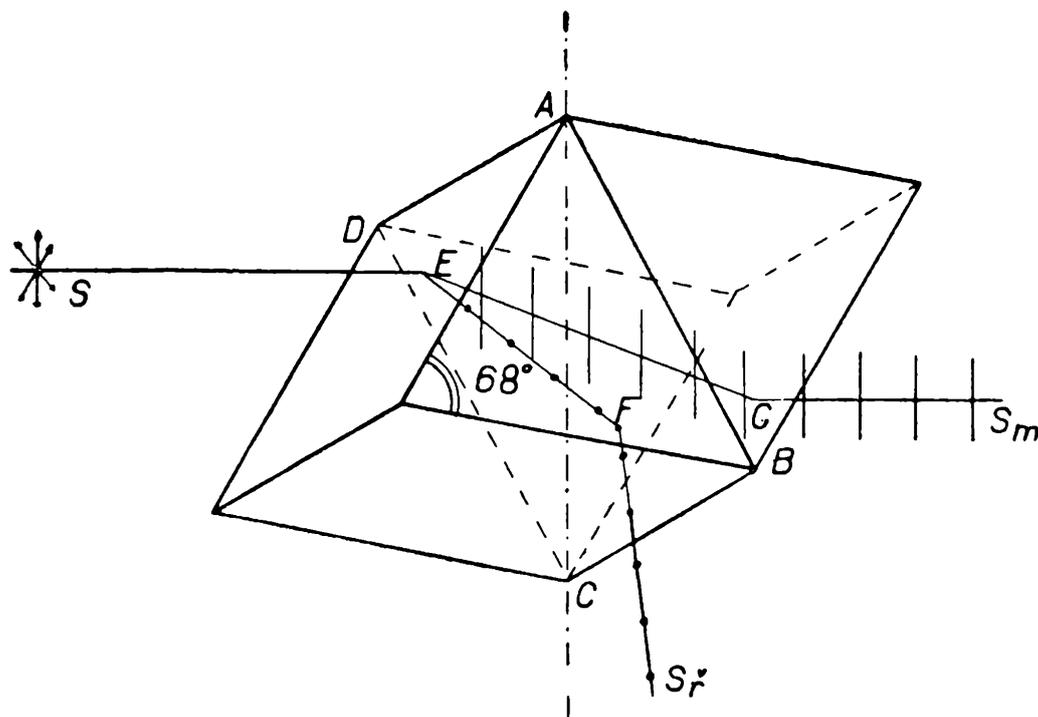
Obr. 2. Rozklad elektrického vektoru \vec{E} světelného paprsku S do složky rovnoběžné s rovinou dopadu E'' a do složky E' v rovině kolmé na rovinu dopadu.

polarizovány navzájem kolmo. Jeden z paprsků, řádný, je polarizován v hlavním řezu krystalu. Hlavním řezem rozumíme rovinu proloženou optickou osou krystalu. Optická osa je rovnoběžka s krystalografickou osou krystalu.

Druhý paprsek, mimořádný, je polarizován v rovině kolmé na rovinu hlavního řezu. Jestliže látky mají trvale schopnost polarizovat světlo dvojlomem, pak mluvíme o látkách *trvale dvojlomných*. Nejznámějším dvojlomým polarizátorem je *nikol*. Je vyroben z přirozeného krystalu islandského vápence zbroušením boční stěny krystalu z úhlu 71° na úhel 68° a rozříznutím v úhlopříčném řezu. Na řez je nanesena slabá vrstva kanadského balzámu. Řádný paprsek, který se na přední stěně krystalu více lomí než mimořádný, dopadá na kanadský balzám pod větším úhlem než je úhel mezní, a proto se plně odráží a je pohlcován v tubusu přístroje. Mimořádný paprsek má stejný index lomu pro islandský vápenec i pro kanadský balzám, a proto nikolem prochází. Krystalografická osa islandského vápence, který krystaluje v soustavě šesterečné, prochází těmi vrcholy krystalu, kde se všechny hrany krystalu stýkají pod tupými úhly.

Mimořádný paprsek, jak již bylo dříve řečeno, má polarizační rovinu kolmou k rovině hlavního řezu, a tedy kmitá se konají v rovině hlavního řezu.

Krystaly islandského vápence jsou ve velkých rozměrech velmi drahé a vzácné, a proto se ve fotoelasticimetrii používá tzv. *polarizačních filtrů*. Výroba polarizačních filtrů je založena na schopnosti některých krystalů nestejně pohlcovat řádný a mimořádný paprsek. Této vlastnosti krystalů říkáme *dichroismus*. Například 2 mm silná destička turmalinu, vybroušená rovnoběžně s optickou osou, úplně pohlcuje pa-



Obr. 3. Dvojlom světla na nikolu.

$ABCD$ vrstva kanadského balzámu

AC krystalografická osa krystalu islandského vápence

E bod lomu světelného paprsku S na přední stěně nikolu

F bod odrazu řádného paprsku S_r na vrstvě kanadského balzámu

G bod lomu mimořádného paprsku S_m na zadní stěně nikolu.

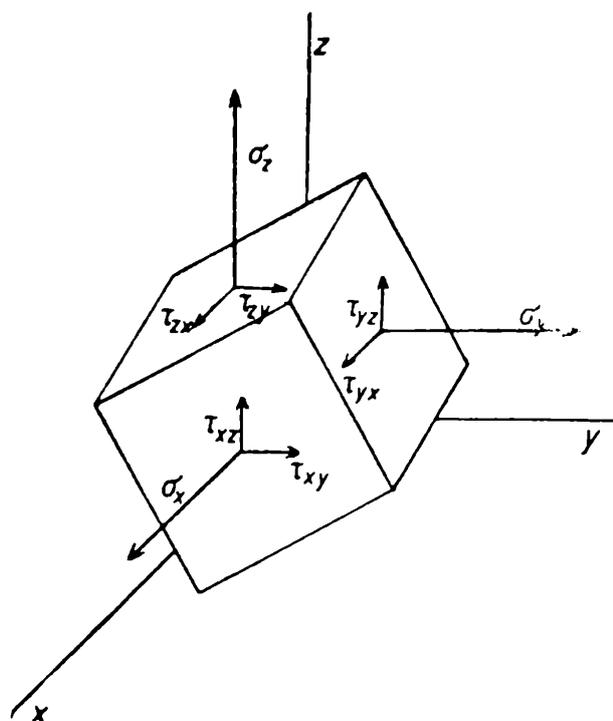
prsek řádný a mimořádný propouští. Pro fotoelasticimetrické filtry se používá polarizačních filtrů o průměru 25 až 30 cm, které jsou vytvořeny z tenké vrstvy krystalů, např. perjodidu síranu chininu, které jsou krystalicky usměrněny a zality želatinou, nebo je jimi potřeno ve slabé vrstvě sklo. Tyto filtry dávají světlo lineárně polarizované. K r u h o v ě p o l a r i z o v a n ě s v ě t l o d o s t a n e m e t z v. č t v r t v l n o v ý m i d e s k a m i.

Kruhovou polarizaci vždy dostaneme, když složíme dva přímkově polarizované paprsky kmitající v rovinách na sebe kolmých s toutéž kruhovou frekvencí ω a o stejných amplitudách, ale fázově posunutých

$\frac{\pi}{2}$, což odpovídá dráhovému rozdílu $\frac{\lambda}{4}$. Je-li amplituda elektrického vektoru jednoho paprsku E_x ve směru x a druhého paprsku E_y ve směru y (přičemž $E_x = E_y = E$), pak platí

$$x = E \sin \omega t; \quad y = E \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Umocněním a sečtením obou rovnic dostaneme, že výsledný pohyb je v rovině x, y a je dán funkcí $x^2 + y^2 = E^2$. Z toho tedy vyplývá, že koncový bod výsledného vektoru \bar{E} opisuje v rovině xy kružnici o poloměru E . Paprsek je kruhově polarizován. Uvážíme-li, že se paprsek v izotropním prostředí šíří kolmo na rovinu x, y rychlostí c , dostáváme, že výsledný pohyb konce vektoru \bar{E} se děje po šroubovici.



Obr. 4. Hlavní napětí a smyková napětí působící na element objemu.

n a p ě t í s m y k o v á $\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}$, kde $\bar{\tau}_{xy}$ je smykové napětí v rovině kolmé na osu x rovnoběžné s osou y , atd.

Jestliže napětí σ padnou do normál ploch, pak jejich hodnota bude maximální a smyková napětí vymizí vůbec. V tomto případě říkáme napětím σ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) h l a v n í n a p ě t í. Roviny procházející těmito napětími kolmo k povrchu jsou hlavní roviny. Odtud vyplývá, že hlavní roviny jsou vzájemně na sebe kolmé.

Napětím ve vzorku vzniká dočasný dvojlom procházejících paprsků. Tyto kmitají právě v rovinách rovnoběžných s dvěma rovinami hlav-

Polarizační přístroje se skládají ze soustavy alespoň dvou takových nikolů či filtrů (polarizátoru a analyzátoru), mezi které se vkládají zkoumané vzorky. Vzorky můžeme pozorovat buď v lineárně nebo kruhově polarizovaném světle. Jsou-li polarizační roviny polarizátoru a analyzátoru zkřížené, pak vidíme zorné pole tmavé. Jak jsme se již zmínili, zkoumané vzorky jsou vyrobeny z látek schopných dočasného dvojlomu. Tento dočasný dvojlom je způsobován napětím ve vzorku.

K úplnému popsání napjatosti izotropního vzorku je obecně třeba znát šest údajů: tři napětí ve směrech os souřadných $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ a tři

ních napětí. Protože oba paprsky mají různou rychlost, vznikne mezi nimi fázový posun. Změřením fázového posunu můžeme určit vložena napětí na vzorek.

Zdeněk Kupka, Jaroslav Pospíšil,
Olomouc:

Jednotka svítivosti

Při fotometrických měřeních je třeba určovat velikost svítivosti světelných zdrojů. Základní jednotkou svítivosti v soustavě SI¹⁾ je kandela [cd].

Kandela je kolmá svítivost $\frac{1}{600\,000}$ dílu m^2 povrchu absolutně černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny (tj. při teplotě $2042^\circ K$) a za tlaku 760 torrů.

Před stanovením a mezinárodním schválením kandely, jako mezinárodní jednotky svítivosti, byly dříve používány různé jednotky a etalony svítivosti. Původní jednotky svítivosti byly určeny vhodně volenými světelnými zdroji realizovanými různými svítilny, zvanými *lampami*, v nichž se spalovala různá paliva. Příslušné jednotky svítivosti se nazývají *svíčky* s různými přívlastky: *anglická svíčka* (lampa s velrybím tukem), *německá svíčka* (lampa s parafinem), *francouzská Carcelová svíčka* (lampa s řepkovým olejem), *Harcourtova svíčka* (lampa s pentanem), *Hefnerova svíčka* (lampa s octanem amylnatým) a jiné. Z těchto svíček se dosud používá Hefnerovy svíčky [HK] a také tzv. *mezinárodní svíčky* [SI], která se rovná desetina svítivosti lampy Harcourtovy.

V ČSSR základní etalon svítivosti není realizovaný a různé laboratoře používají etalonů rozmanitého původu a cejchování. V praxi se dosud často používá žárovek cejchovaných pomocí Hefnerovy lampy.

Hefnerova lampa je v řezu nakreslena na obr. 1. Mosazná nádobka lampy je naplněna čistým octanem amylnatým ($CH_3 \cdot COO \cdot C_5H_{11}$). Do argentanové trubičky vnitřního průměru 8 mm, délky 25 mm a tloušťky stěny 0,15 mm je vtěsnán bavlněný knot, jehož posouváním se reguluje plamen přesně na výšku 40 mm tak, aby hořely jen páry paliva a nikoliv knot sám. Svítivost plamene ve vodorovném směru dává jednu Hefnerovu svíčku. Poněvadž změnou výšky plamene o 1 mm se svítivost mění o celá 3 %, je k lampě připojena čočka, která promítá

¹⁾ Soustava jednotek SI byla v ČSSR vyhlášena zákonem č. 35/1962 Sb. ze dne 29. března 1962 *O měrové službě* a je jedinou uzákoněnou měrovou soustavou u nás.

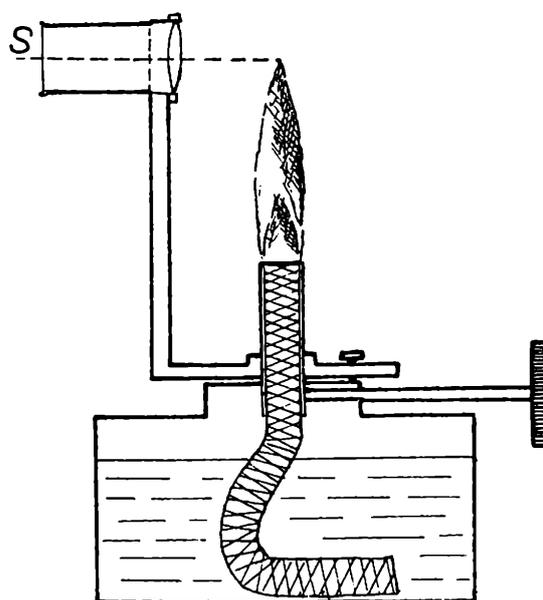
konec plamene na stupnici S s jemným dělením. Tak je možno dosti přesně nastavit výšku plamene. Tato lampa má mnoho nevýhod. Na příklad plamének není zcela bílý a vyžaduje klidný a čistý vzduch. Kromě toho závisí svítivost lampy na barometrickém tlaku a na vlhkosti vzduchu.

Vývoj světelného technického průmyslu, hlavně světelných zdrojů, si vynutil zdokonalení měření světelných veličin a stanovení mezinárodní jednotky, aby také byla zaručena jednotnost v mezinárodním srovnání. Tak již na nové myšlenky je založena *svíčka Violetova* (r. 1881), definovaná jako kolmá svítivost 1 cm^2 tuhnoucí platiny. Její dvacetina se nazývá *desetinná svíčka* (*Bougie décimale*) a je přibližně rovna Hefnerově a mezinárodní svíčce.

Realizaci této svíčky se kladly vážné technické obtíže, ale na stejném principu byla mezinárodně přijata s platností od r. 1948 nová svíčka, zvaná *kandela* [cd]. Ke kandele, jakožto základní jednotce svítivosti, se došlo ze snahy definovat jednotku svítivosti, která by co nejméně závisela na specifických vlastnostech použitého materiálu etalonového zdroje. Světelný zdroj, který tento požadavek splňuje, to jest jehož svítivost (jas) nezávisí vůbec na materiálu a je závislý jen na teplotě, lze získat tímto způsobem: zhotovíme si dutinu, jejíž stěny jsou z libovolného materiálu a jsou zahřáty na určitou teplotu. Uvnitř se ustálí určité záření, které nezávisí na materiálu, z něhož jsou zhotoveny stěny dutiny, nýbrž jen na teplotě. Je-li dutina opatřena malým otvorem, pak jím vystupuje záření do vnějšího prostoru. Jasu tohoto záření se použilo ke stanovení mezinárodní jednotky svítivosti, zvané kandela, a to takto:

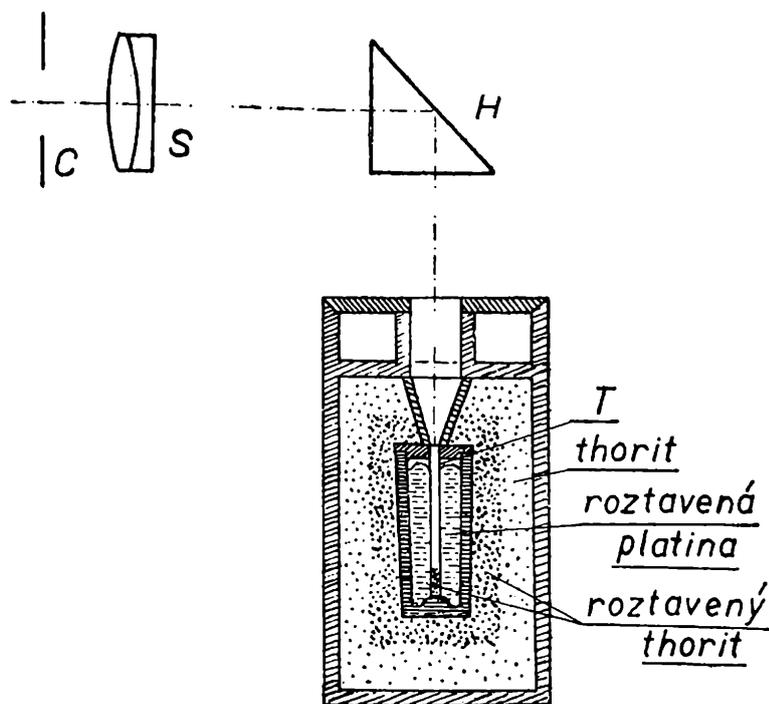
Je-li teplota dutiny $2042 \text{ }^\circ\text{K}$, to jest teplota tuhnoucí platiny, pak je jas záření dutiny $60 \text{ cd} \cdot \text{cm}^{-2}$. Jinak řečeno $60 \text{ cd} \cdot \text{cm}^{-2}$ je jas záření dutiny při uvedené teplotě, nebo svítivosti jedné kandely se rovná $\frac{1}{60}$ jasu záření dutiny při teplotě tuhnoucí platiny.

Definice kandely založená na přesně definovaném záření absolutně černého tělesa vyhovuje všem moderním požadavkům a byla realizována *světelným etalonem*, jehož konstrukce je znázorněna na obr. 2.



Obr. 1

V úzké trubici T je roztavený thorit ThSiO_4 udržován roztavenou platinou na stálé teplotě tuhnutí platiny 2042°K (tj. 1769°C). Platinová lázeň je tepelně izolována taveným a surovým thoriem, zařízení je vytápěno v elektrické indukční peci. Záření vystupující svisle vzhůru z vnitřní trubice T mění se úplným odrazem v hranolu H ve vodorovné záření, které pro průchodu spojnou čočkou S a clonkou C přichází do fotometru. Tento základní etalon svítivosti je možno realizovat s přesností na $0,5\%$.



Obr. 2

Se svítivostí základního světelného etalonu se srovnávají podružné světelné etalony, což jsou *uhlíkové* nebo *wolframové žárovky*. Srovnání uhlíkových žárovek je zvláště přesné vzhledem k tomu, že jejich vlákno má takřka stejnou teplotu jako základní etalon, kdežto vlákno wolframové má teplotu vyšší (2300°K ve vzduchoprázdnu, 2800°K v žárovkách plněných inertním plynem). Při srovnávání zdrojů stejné teploty lze dosáhnout relativní přesnosti několika tisícin procent, při rozdílu teploty několika set stupňů však jen asi přesnosti 1% .

Pro praktické účely neuzívá se tedy již různých druhů lamp, nýbrž žárovek, které mají při předepsaném napětí ve vodorovném směru známou svítivost.

Na závěr uvádíme číselné převodní vztahy mezi nejpoužívanějšími jednotkami svítivosti, tj. mezi kandelou [cd], mezinárodní svíčkou [SI] a Hefnerovou svíčkou [HK]:

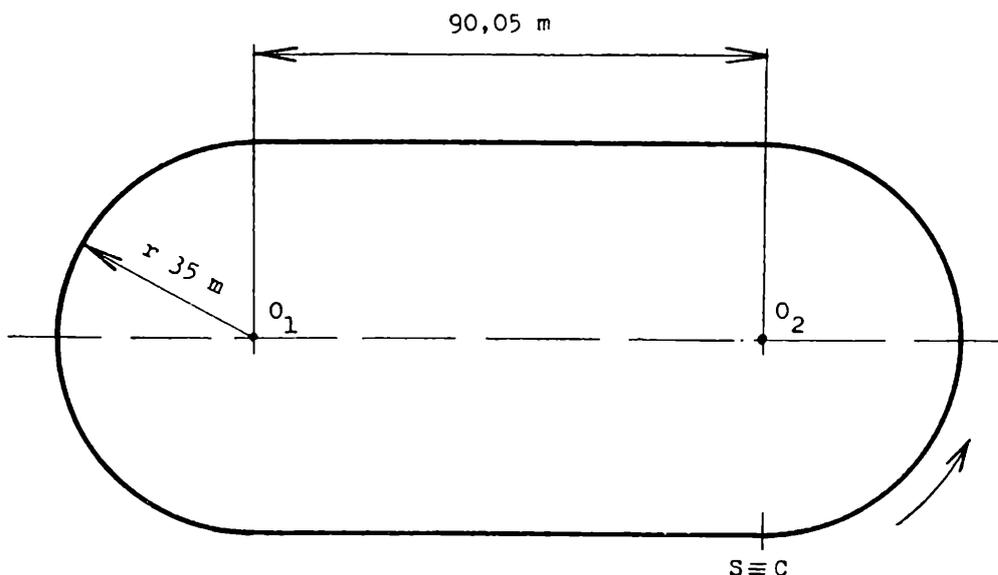
$$\begin{aligned} 1 \text{ cd} &= 0,9813 \text{ SI} = 1,09 \text{ HK}, \\ 1 \text{ HK} &= 0,90 \text{ SI} = 1,11 \text{ HK}. \end{aligned}$$

Milan Koman, Praha:

Záhada běžeckého závodu



Představme si, že by se při sportovním utkání uskutečnil takovýto závod. Na běžecké dráze (obr. 1), která bývá běžně 400 m dlouhá, soutěží sportovci v běhu na 10 000 metrů. Start i cíl jsou ve stejném místě, v bodě $S \equiv C$. Vítěz, který dělal kroky dlouhé 220 cm,¹⁾ běžel celou dobu stálou rychlostí, která byla přesně $20\,000\text{ m h}^{-1}$. Kdyby mohly být



Obr. 1

¹⁾ Průměrná délka kroku při závodech na delší vzdálenosti se pohybuje mezi 180 až 220 cm, při sprintech dosahuje až 240 cm.

splněny ideálně všechny tyto podmínky, k velkému překvapení bychom zjistili, že čas vítěze není rovných 30 minut, ale kratší. Dosažený čas by byl v tomto případě totiž 29 minut 59,8 sekundy. Rozdíl je sice nepatrný, ale z čistě sportovního hlediska nikoli zanedbatelný. Přitom nepřipouštíme, že by si snad závodník nějak nadběhl po „vnitřní“ dráze. Také žádný fyzikální jev jako např. protivítr, chybně jdoucí stopky nebo sklon dráhy neovlivňuje dosažený čas závodníků.

Dovedete tento zdánlivě paradoxní výsledek matematicky odůvodnit?

Recenze



Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Ze zahraničních časopisů

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních si vyměňuje výtisky svého časopisu za zahraniční matematické časopisy s obdobnou tematikou. O některých zajímavostech z nich podáváme svým čtenářům stručnou zprávu.

Archimedes. Tento západoněmecký časopis má podtitul „Podněty a úlohy pro učitele, žáky a přátele matematiky se zvláštním zřetelem na filosofii a techniku“. Každý ročník obsahuje v 8 číslech (některé sešity jsou dvojčísla) celkem 128 stran, roční předplatné je 10,80 M, pro žáky jen 8,80 M. Redaktorem je osvědčený pedagog F r a n z D e n k, profesor v. v., Erlangen. Loni slavil časopis své jubileum, vyšel 100. sešit.

Velkou část každého čísla tvoří úlohy. Jsou dvojího druhu. První jsou vzaty ze školské matematiky a obsahují vyzkoušené příklady z různých partií, probíraných ve škole. Jsou tu obsaženy: algebra, planimetrie, rovinná trigonometrie, komplexní čísla, lineární funkce, základy teorie čísel, vektorový počet atd. Příklady druhého typu jsou roztrženy podle obtížnosti, která je u každého příkladu vyjádřena v závorce číslem třídy, ve které má žák potřebné učivo již ovládat. Kromě toho jsou zavedeny i stupně obtížnosti: I. Obyčejné cvičné úlohy, navazující bezprostředně na školní učivo. II. Aplikace na ně-

kteřou kapitolu, při nichž žák musí volit nejvhodnější z několika pravidel, vět, metod apod. III. Smíšené úlohy, při nichž žák musí zvolit a užit výhodnou větu z většího oboru. IV. Problémy, jež přináší život nebo jež se vyskytnou v oboru vědeckého výzkumu, které však nena- vazují přímo na určitý obor matematiky.

Namátkově uvádím na ukázkou některé příklady druhého typu:

1. Pro prvočíslo $p > 3$ jest výraz $D = (2p)! - 2p! p!$ dělitelný číslem p^5 . (IV)

Archimedes

*Anregungen und Aufgaben für Lehrer,
Schüler und Freunde der Mathematik*

mit besonderer Pflege der Randbeziehungen zur Philosophie und zur Technik

Heft 7 · September 1960 · 12. Jahrgang

Obálka německého časopisu Archimedes

2. Jaké musí být n , aby podíl čísel $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ a $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ byl celé číslo? (II., 10. šk. rok)

3. Hodiny tlukou „osm“. Od prvního úderu do posledního uběhlo 8 vteřin (úder trvá okamžik, jeho trvání neuvažujte). Kolik vteřin uplyne od počátečního do konečného úderu, tlukou-li „čtyři“?

4. Různá písmena v součtu

$$\begin{array}{r} \text{V A T E R} \\ + \text{M U T T E R} \\ \hline = \text{E L T E R N} \end{array} \quad \begin{array}{l} (= \text{otec}) \\ (= \text{matka}) \\ (= \text{rodiče}) \end{array}$$

značí různé číslice. Určete je, víte-li, že $U = 9$. Kolik řešení existuje, není-li toto omezení?

5. Znázorněte graficky funkci:

$$y = |x - |x - 1|| \quad (\text{III., 9.} - 10. \text{ šk. rok})$$

6. Vozidlo může s plným tankem 500 l pohonných látek ujet 500 km. Má-li dojet dále, musí zříditi pomocná depa. Kolik pohonných látek

minimálně spotřebuje, chce-li dojet do vzdálenosti 1000 km a k dopravě je k dispozici jen toto jediné vozidlo?

7. Na straně $AB = a$ narysovaného rovnostranného trojúhelníka ABC je dán bod D tak, že $AD = \frac{a}{3}$. Pouhým použitím kružítka určete těžiště trojúhelníka! (III., 9. šk. rok)

8. Dokažte tuto konstrukci tečny kružnice k v bodě P : Na obvodě kružnice k zvolíme libovolný bod R , sestrojíme kružnici k' (R ; RP), Q je druhý průsečík kružnic k a k' , kruhový oblouk k'' (P ; PQ) protne k' v bodě T ; PT je hledaná tečna.

9. V prostoru jsou dány: rovina ρ a mimo ni dvě libovolné úsečky AB a CD . V rovině ρ určete body X a Y tak, aby $XA \parallel YC$ a $XB \parallel YD$.

Zajímavá je i ostatní náplň časopisu. Velká pozornost je věnována moderním částem matematiky (důsledně je používáno množinových znaků). Čtenáři jsou seznamováni s matematickou logikou, programováním, grafickými metodami; nejsou opomíjeny ani klasické části matematiky. Redakce si všímá též problémů vyučování matematice, řešených na různých světových kongresech. Potěšující jsou zprávy o matematické olympiádě v ČSSR s otištěnými texty úloh, o jubileu JČMF v článku „Českoslovenští matematici na poštovních známkách“, rozsáhlý referát o našich Rozhledech, dále články a úlohy českých autorů (Skotnický, Setzer) i pochvalná recenze Borůvkovy knihy apod.

Matematika. Loni začal vycházet v Bulharsku časopis *Matematika*, jehož hlavním redaktorem je profesor *Alipi Mateev* z university v Sofii. Každé číslo obsahuje 48 stran, předplatné na 6 čísel je 1,10 leva. Vyšla dosud tři čísla; úvodní články mají tuto tematiku: Co jsou informace, Osmý kongres KSB, 4. mezinárodní matematická olympiáda s fotografiemi zámku Hluboká, účastníků olympiády i jejích vítězů. Další rubrika je věnována jubileím ze života slavných matematiků, jako jsou např. *M. V. Ostrogradskij* (1801—1862), *Blaise Pascal* (1623 až 1662), *David Hilbert* (1862—1913). Následují matematické články, např. O Pascalově trojúhelníku, Pythagorova věta (s četnými odvozeními), Obrazce s nepřístupnými prvky, Pascalova věta, Zlatý řez, Historie číselných soustav, Cardanova formule pro řešení rovnic 3. stupně, Nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem několika čísel apod. Ve 3. čísle je trigonometricky dokazována věta, převzatá z rumunského časopisu *Gazeta matematică și fizică*: Příčky, dělicí vnitřní úhly obecného trojúhelníka na tři stejné díly, určují svými průsečíky vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Zvláštní kapitola je věnována křivkám technické praxe: sinusoidě, Archimedově spirále i kardioidě (srdecovce).

Úlohy zabírají velkou část každého čísla. Je vypsána soutěž s hodnotnými cenami: 1. tranzistor, 2. fotoaparát, 3. hodinky. Na ukázkou uvádím několik soutěžních úloh:

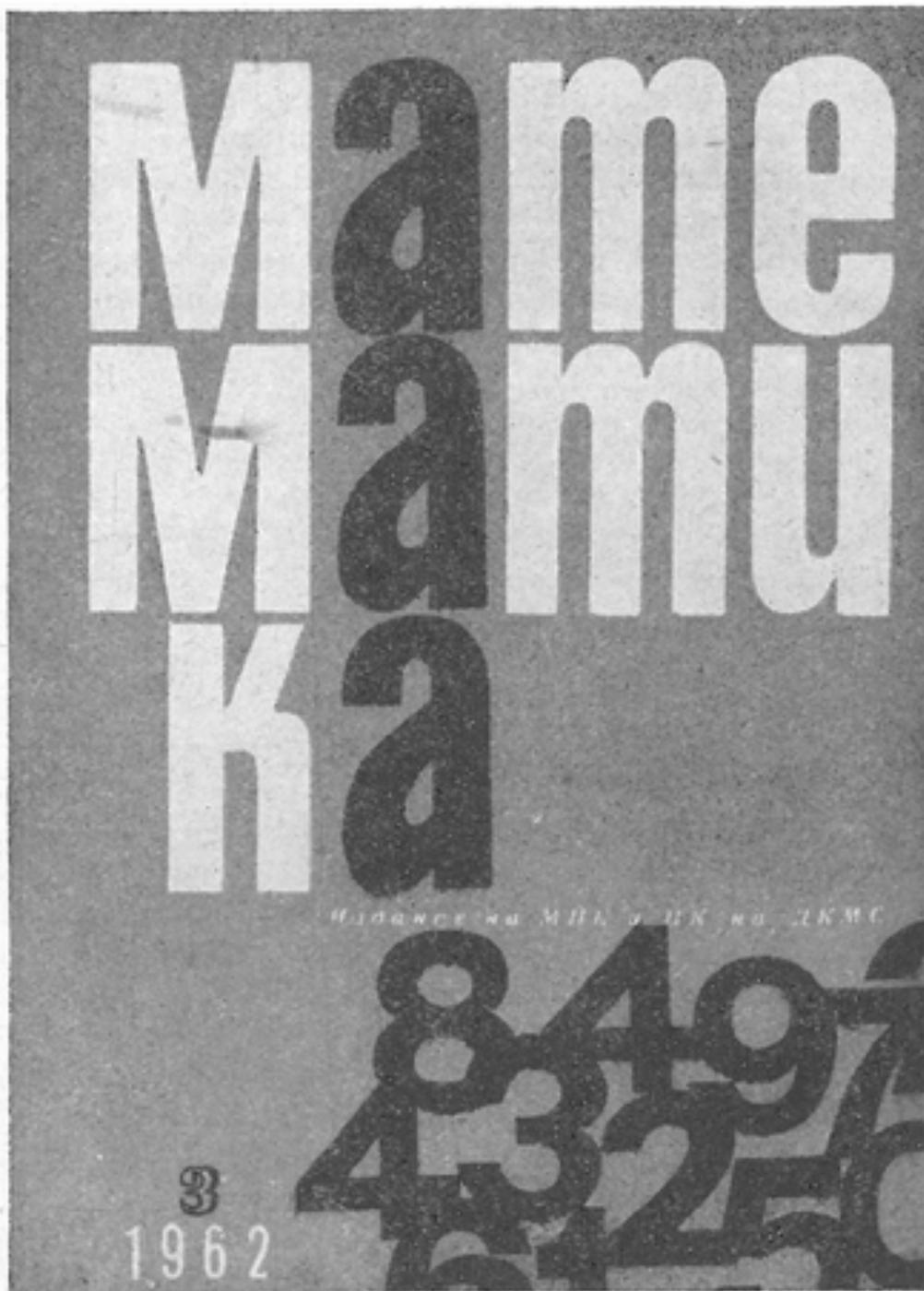
1. Napište poslední dvě cifry rozdílu $7^{126} - 2^{386}$.

2. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + 2^{-2^0}) \cdot (1 + 2^{-2^1}) \cdot (1 + 2^{-2^2}) \cdot \dots \cdot (1 + 2^{-2^n})] = 2.$$

3. Určete x z rovnice:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}}.$$



Obálka bulharského časopisu Matematika

4. V aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ platí:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

5. V rovnoramenném trojúhelníku ABC ($AB = AC$) je bod D středem strany BC , E je pata kolmice z bodu D na stranu AC , F je střed úsečky DE . Dokažte, že úsečka AF je kolmá na spojnici BE .

Vedle soutěžních úloh obsahuje časopis v každém čísle větší počet řešených úloh z nejrůznějších oborů, např.

1. Dokažte, že $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$

2. Dokažte, že v rovnostranném trojúhelníku je součet vzdáleností kteréhokoli vnitřního bodu od jeho stran roven výšce trojúhelníka.

3. Určete součet: $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$

Řešení úloh jsou otištěna buď hned za textem úlohy nebo v příštím čísle.

K pestrosti jednotlivých čísel přispívají vtipné kresby, pečlivě provedené obrázky normální nebo bílé na černém podkladě i ukázky ze zábavné matematiky. Novému časopisu přejeme mnoho úspěchů!

(Pokračování)

sh 270

Různé



R u d o l f K o l o m ý, Moravská Třebová:

Zavedení metrické soustavy

Snahou vědců a hospodářských činitelů bylo zavést jakousi „věčnou“ míru, při čemž by se jednotka délky stanovila z přírody. Již na konci 17. století navrhoval holandský fyzik Ch. H u y g e n s za jednotku délkové míry délku sekundového kyvadla. Jiný návrh z druhé poloviny 18. stol. uvažuje za délkovou jednotku dráhu, kterou proběhne volně padající těleso ve vzduchoprázdnu za jednu sekundu. Někteří učenci navrhovali zase vzít za základ délky průměr Slunce, jak jej vidíme, nebo délku buňky ve včelí plástvi a podobně.

Ale již v r. 1585 navrhoval holandský fyzik Simon Stevin, aby se státy dohodly na decimálním dělení pro míry, váhy, mince a kruh. Ale trvalo ještě přes 200 let, než byla uznána metrická soustava.

Metrická soustava vznikla ve Francii koncem 18. století v době Velké francouzské revoluce. Zákonodárné národní shromáždění se usneslo vzít za délkovou jednotku délku vteřinového kyvadla pařížské hvězdárny. Pařížská akademie věd však tuto míru nedoporučila a přijala *T a l l e y r a n d ů* v návrh vzít za délkovou jednotku 10milióntou část zemského čtvrtpoledníku. Návrh byl schválen 26. března 1791 a byl vydán jako zákon. Jednotka byla pojmenována *m e t r e m*, podle řeckého slova *metrein*, jež znamená měřiti. Desetinné dělení a pojmenování nižších jednotek bylo uzákoněno r. 1795.

S potřebnými měřeními se začalo ihned. Práce se ujali dva vynikající pracovníci francouzské akademie věd *J. B. Delambre* (1747 až 1822) a *A. Méchain* (čti mešén, 1744—1805), kteří změřili v letech 1792—1798 část pařížského poledníku na sever od města Dunkerque a na jih až k Barceloně. Úkolem bylo stanovit délku jednoho stupně v určité zeměpisné šířce a z výsledků měření určit délkovou jednotku a tvar průřezové elipsy zemského tělesa. Obě uvedená města, vzdálená $9^{\circ}40'24,75''$, byla spojena triangulační sítí o 120 trojúhelnících, v celkové délce 551 584,72 toise-francouzských sáhů (1 toise, čti toáz je 1,949 m). Z těchto měření byla určena délka zemského kvadrantu v toisech ($Q = 5\,130\,739,8$ toisů) a desetimilióntá část byl metr. Dne 10. prosince 1799 byla ve Francii zavedena tato nová zákonná délková míra a tím alespoň v této zemi odstraněn zmatek starých sáhových měř. Podle pomyslného metru, stanoveného jako část toisu (asi 0,513), byl zhotoven platinový metr ve tvaru pravítka obdélníkového průřezu $25\text{ mm} \times 4\text{ mm}$ a uložen ve státním archivu Francouzské republiky; odtud název *a r c h i v n í m e t r* (*mètre des Archive*, čti dézaršív). Vzdálenost mezi oběma konci tohoto měřítka (zvaného též *k o n c o v é m ě ř í t k o*) udávala při 0°C správnou délku jednotky.

Metr se postupně vžíval. Roku 1803 byla metrická soustava zavedena v Itálii, r. 1821 v Holandsku a v Belgii, r. 1836 v Řecku, ale ve Francii byly staré míry definitivně zrušeny až r. 1840. Roku 1871 a s platností od r. 1876 byla metrická soustava také zavedena v Rakousko-Uhersku, do jehož soustátí patřily naše země. Od r. 1806 až do té doby se užívalo *s á h o v é s o u s t a v y* (sáh se dělil na 6 stop a 72 palců v označení: $1^{\circ} = 6' = 72'' = \text{asi } 1,9\text{ m}$). V r. 1875 přistoupilo dalších 18 států celého světa na metrickou soustavu. Anglie, která používala yardové míry, nepřijala metr jako zákonnou délkovou míru, neboť by prý náhlé jeho zavedení nepříznivě zasáhlo do rozvíjejícího se hospodářského života. Podobně Spojené státy a země ve sféře Velké Británie (Indie, Austrálie, Kanada, Irsko a kolonie) si ponechaly yardové míry. Také Rusko si ponechalo vlastní míry.

Státy, které přistoupily na metrickou soustavu, podepsaly *m e t r i c k o u k o n v e n c i*, jíž se zřizoval Mezinárodní úřad pro míry a váhy.

Postupem doby se však ukázalo, že původní definice metru se nedá trvale udržet, neboť další stupňová měření a výpočty rozměrů Země vedly k malým rozdílům, které však nebylo možno zanedbat. Německý geodet *Bessel* vypočetl délku kvadrantu $Q = 10\,000\,856$ m počátkem 19. stol. a např. americký vědec *Hayford* $Q = 10\,002\,293$ m počátkem 20. stol. Těsně před druhou světovou válkou sovětský geodet *Krasovský* určil délku kvadrantu $Q = 10\,002\,138$ m. Jeho údaj se považuje dosud za nejpřesnější.

Bylo proto rozhodnuto, že *mètre d'Archive*, prohlášený za mezinárodní jednotku délkové míry, jí zůstane. Původní archivní metr, jakožto koncová míra, byl nahrazen dokonalejší čárkovou mírou ve tvaru tyče z platiny a iridia (poměr 9 : 1), o kolmém průřezu tvaru písmene velké X a v r. 1889 bylo toto měřítko prohlášeno *mezinárodním prototypem* metrické soustavy. Na základě toho je mezinárodní metr definován takto: Je to délka obsažená při teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ mezi dvěma středními ryskami, které jsou vyryty na neutrální ploše kolmo k její ose.

Profil tvaru písmene X (dá se vepsat do čtverce o straně 20 mm) byl zvolen proto, aby tyč měla co největší odolnost proti ohybu a aby se získala velká povrchová plocha, umožňující rychlé vyrovnání teploty s okolím. Slitina platiny s iridiem má vysoké antikorozi vlastnosti, dostatečnou tuhost a časovou stálost rozměrů. Součinitel lineární roztažnosti pro výpočet oprav při změnách teploty je $8,8 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$. Mezinárodní prototyp metru spolu s ostatními jednotkami je uložen v Mezinárodním úřadě pro míry a váhy v Sèvres u Paříže.

Státy, které přistoupily na metrickou soustavu dostaly kopii mezinárodního metru s přesně vyjádřenými koeficienty délkové roztažnosti. Odchytky od správné délky mezinárodního metru jsou ovšem velmi nepatrné a mají význam pouze ve vědeckém bádání.

Československá republika přistoupila k mezinárodní metrické úmluvě z r. 1875 v r. 1922 a opatřila si náhradní invarový metr o průřezu písmene H jako hlavní délkový etalon. R. 1929 se podařilo získat prototyp platinoiridiový č. 7, vyrobený r. 1874. Stálo asi čtvrt miliónu tehdejších korun a bylo r. 1930 odevzdáno Úřadu pro míry a váhy v Praze, jenž provádí komparaci měřítek. Pro zajímavost uvádíme, že náš národní metr je při teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ o $\frac{1}{10\,000}$ mm delší než přesný 1 m.

Snaha vytvořit základní měřítko přímo podle přírody, aby kdokoliv, kdykoliv a kdekoliv si je mohl sám určit, nebo jeho správnost ověřit, vedla k vyjádření metru v délkách světelných vln. Přispěl k tomu rozvoj optického interferenčního způsobu měření délek.

Podle usnesení 7. generální konference pro míry a váhy z 30. září 1927 byla k tomuto měření zvolena za základ červená čára ve spektru kadmia, jejíž vlnová délka $\lambda = 0,643\,846\,96$ mikrometrů (μm), takže 1 metr = $1\,553\,164\ \lambda_{cd}$.

11. konference Mezinárodní organizace pro míry a váhy v Paříži v říjnu roku 1960 přijala novou definici metru. 1 metr = 1 650 763,73 délek vln světla červené čáry izotopu kryptonu 86. Izotop Kr 86 je radioaktivní, poločas 9,4 roku, snadno se získá čistý, jeho červená čára je dostatečně úzká. Získání spektrálního izotopu kadmia je obtížnější. Tato definice nic nemění na běžném užívání metru, znamená však přechod od umělého platinoiridiového normálu k přirozenému délkovému normálu, jímž se stává uvedená vlnová délka.

R u d o l f K o l o m ý, Moravská Třebová:

Některé staré české míry

V tomto článku se seznámíme se starými mírami, užívanými v našich zemích, s jejich stručným vývojem a se zavedením metrické soustavy.

Již za Přemysla Otakara II. byl dán určitý základ délkovým a plošným mírám. O několik století později popisuje kronikář Václav Hájek z Libočan ve své *Kronice české*, jak k tomu došlo. Základem délky bylo ječné zrnko (4,93 mm), čtyři ječná zrna tvořila prst (19,71 mm), 5 ječných zrn palec (24,65 mm), 4 prsty dlaň (78,85 mm), 10 prstů pídě (197,14 mm), 3 pídě byl tzv. pražský loket (0,591 m). Později nastala v těchto jednotkách nejednotnost a za panování Karla IV. musely být míry stanoveny znovu. Byly vloženy do zemských desk; neměly však dlouhého trvání, neboť v r. 1541 při velkém požáru v Praze shořely spolu se zemskými deskami.

Podrobný záznam o starých českých mírách učinil „císařův služebník v umění geometrickém a zemský měřič v Království českém“ Šimon Podolský z Podolí (asi 1562—1617) v česky psaném spise *Knížka o měřácích zemských*. Obsahem knížky je poučení o správných zemských mírách a o správném postupu při vyměřování, protože „ne každý jest geometr a měřič, kdož maje šňůru aneb provazec v ruce, okolo lesů neb dědin s ní chodí“, zdůrazňuje Podolský. Píše o neodborném vyměřování pozemků, luk, lesů, gruntů, vesnic nezkušenými laiky, kteří změřili provazcem mnohdy nesprávným obvod pozemku, dělili jej čtyřmi a podíl povýšili na druhou, aniž brali zřetel na nepravidelnosti pozemku.

Délkovou jednotkou byl tzv. pražský loket. Jeho prototyp, železná tyč se dvěma výstupky vymezující délku jednoho lokte (0,591 m), je zazděn v Novoměstské věži v Praze a byl volně přístupný, aby si kupci při trzích mohli porovnávat své míry; později po odkopání ulice se octl příliš vysoko. Z ostatních jednotek se pro delší měření užívalo tzv. zemského provazce, který původně měřil 42 lokte, po

r. 1541, kdy shořely zemské desky, byla stanovena jeho délka na 52 lokte (tj. necelých 31 m). Důvod ke změně délky provazce není přesně znám. Jsou však dohady, že délka měla být uvedena v soulad s rozměry Země, neboť délka obloučku 1'' na rovníku je asi 30,9 m.

Pražský loket byl r. 1708 zaveden v Čechách jako závazná míra a nazván loket český. Roku 1764 nařídila Marie Terezie všem rakouským zemím, aby užívaly vídeňského lokte (0,778 m). V Čechách se však mohlo měřit i loktem českým. Vedle českého a vídeňského lokte se však užívalo u nás v řadě měst ještě mnoha jiných loktů, volně přístupných na veřejných budovách, nejčastěji na radnicích, jako např. brněnského, mělnického, litomyšlského, buďjovického, moravského a jiných. Jejich délky byly mohdy odlišné. Kromě toho se užívalo dalších jednotek, většinou odvozených z rozměrů lidského těla, jako např. palec, dlaň, stopa, sáh aj., jejichž délky byly v různých zemích, mnohdy i krajích a v městech různé. Základní délková jednotka sáh pochází od slovesa „sáhnouti“ a označuje délku mezi špičkami prstů rozpjatých paží. Proto také byly sáhy v jednotlivých zemích přibližně stejně dlouhé. Vídeňským sáhem (asi 1,9 m) se měřilo od r. 1771 také u nás.

Plošné jednotky byly původně odvozovány nejpřirozenější cestou ze zemědělské práce. Tak byl plošnou jednotkou záhon, brázda, a pak jitro, značící plochu, kterou mohl rolník za den obdělat. Ale i tyto plošné jednotky byly různé. Tato nejednotnost v mírách délkových, plošných, objemových a váhových způsobovala velké potíže nejen při srovnávání výsledků vědeckých prací, ale zejména těžce se pocítovala v hospodářském životě, ve styku obchodním a později průmyslovém.

Redakční sdělení



**Našim čtenářům - maturantům přeje redakce
mnoho úspěchů při zkouškách.**

* V č. 1. Rozhledů na str. 14 v článku O. Lepil, Hranice aerodynamického letu v řádce 6. budiž $1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a řádce 7. pak $0,09 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

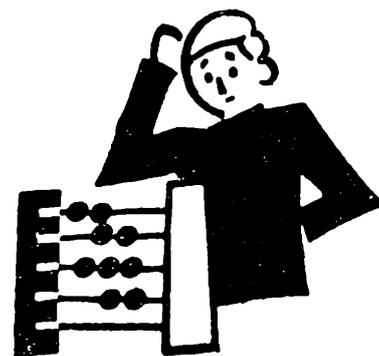
Oldřich Lepil

Matematika

Lev Lopovok, Chmelnickij, SSSR:

Útvary s nepřístupnými prvky

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)



1. V geometrii musíme často provádět některé konstrukce, při nichž na základě známých prvků daného útvaru sestrojujeme další prvky tohoto útvaru (např. sestrojení středu dané kružnice, nalezení středu souměrnosti rovnoběžníka, těžiště trojúhelníka atd.). Při tom bývá útvar zcela zadán, tj. na obrázku jsou všechny vrcholy, strany, a někdy ještě některé jiné prvky.

Řešíme-li takovouto úlohu, obvyčejně se nezamýšlíme nad tím, jsou-li všechny prvky daného útvaru pro řešitele nezbytné, není-li možné se bez některých z nich obejít. Přitom však je tato otázka nejenom zajímavá, ale i důležitá z hlediska praxe. To proto, že někdy se vyskytují případy, kdy útvar není umístěn zcela na obrázku a obvyčejné metody sestrojování jsou nevhodné.

Uvedeme příklad. Mějme vést bodem M pomocí pravítka a kružítka kolmici k dané přímce. Tato konstrukce je známa z učebnic. Jak to však bude, je-li hledaný bod blízko k okraji obrázku? V tomto případě přetnutí nevede k cíli; oblouk se středem v bodě M buď protne přímku ve dvou mimořádně blízkých bodech, nebo v jednom bodě. Znamená to, že nelze provádět sestrojování podle učebnice.

Opišme tedy kolem bodu M jako středu dva oblouky, z nichž jeden má dvakrát větší poloměr než druhý. Větší oblouk nechť protne danou přímku p v bodě D ; potom vedeme přímku MD a z bodu C , ve kterém tato přímka protne menší z obou oblouků, přetneme obloukem o poloměru CD přímku p ještě v jednom bodě O (obr. 1). Nalezený bod O je patou kolmice vedené z bodu M na přímku p .

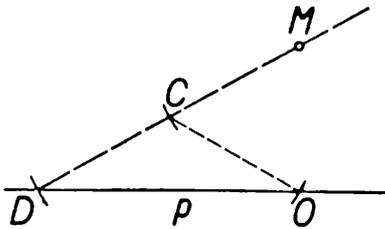
Vskutku, bod O leží na kružnici, která má průměr MD . Proto je vepsaný obvodový úhel $\sphericalangle MOD$ pravý (podle Thaletovy věty).

Jak je vidět, úloha je řešitelná, metoda řešení se však podstatně liší od obvyklé.

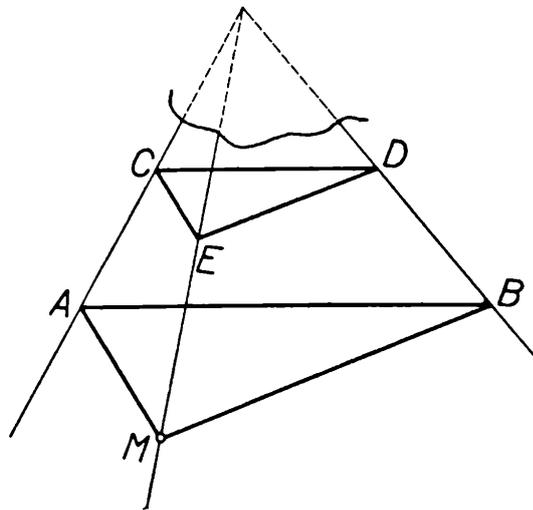
Při řešení podobných úloh je třeba vyvinovat vynalézavost a vtip. Právě proto jsou s úspěchem řešeny v *Chmelnické matematické škole*, která je vedena autorem tohoto článku.

Nyní se seznámíme s některými z těchto úloh.

2. **Křižovatka silnic.** Dvě přímé silnice l_1 a l_2 se křížují vně mapy. Máme určit vzdálenost od místa označeného na mapě bodem M ke křižovatce silnic a směr z tohoto bodu ke křižovatce¹⁾.



Obr. 1



Obr. 2

Úlohu je možno řešit na základě stejnolehlosti útvarů. Podle předpokladu se tři přímky (silnice a určený směr) protínají v jednom bodě. Tento bod je možno zvolit za střed stejnolehlosti trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na zmíněných přímkách.

Nechť AMB je jeden z těchto trojúhelníků. Vedme $CD \parallel AB$, pak bodem C rovnoběžku s AM a bodem D rovnoběžku se stranou MB až se protnou v bodě E (obr. 2). Hledaná přímka prochází body M a E ²⁾.

¹⁾ Podmínky úlohy odpovídají reálné situaci. Autor řešil tuto úlohu ve frontových podmínkách v době Velké vlastenecké války Sovětského svazu.

²⁾ Pro ty, kteří jsou obeznámeni se základy projektivní geometrie, poznamenáváme, že směr je možné najít pomocí jediného pravítka. Vedeme bodem M přímky AB a CD (A a C na l_1 , B a D na l_2); nechť P je průsečík AD a BC . Nyní vedeme bodem P přímku, která protíná l_1 a l_2 v bodech E a F . Přímky ED a AF se protnou v bodě T , který s bodem M udává hledaný směr.

Označíme-li vzdálenost od bodu M k průsečíku O písmenem x , můžeme na základě podobnosti trojúhelníků OAM a OCE sestavit úměru

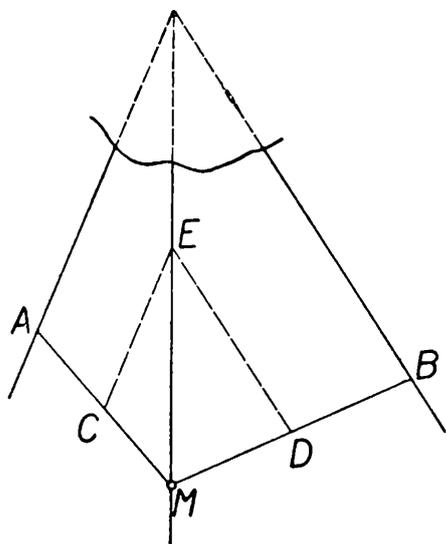
$$x(x - ME) = AM : CE.$$

Odtud

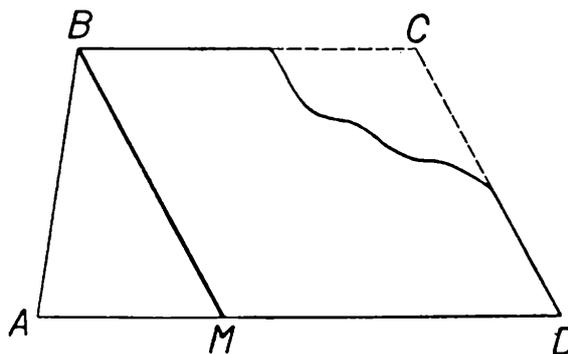
$$x = \frac{AM \cdot ME}{AM - CE}.$$

Úlohu je ovšem možné řešit jednodušeji užitím podobnosti útvarů bez sestavování rovnic.

Zvolíme na přímkách l_1 a l_2 libovolné body A a B a vedeme v trojúhelnících AOM a BOM střední příčky rovnoběžné s příslušnými stranami na přímkách l_1 a l_2 . Obě střední příčky dělí úsečku MO na polovinu, tj. protínají se na přímce, která prochází bodem M a křižovatkou silnic.



Obr. 3



Obr. 4

Nyní je sestrojení jasné. Středů úseček MA a MB vedeme přímky rovnoběžné s danými silnicemi. Přímky se protnou v bodě E (obr. 3), hledaný směr je ME a hledaná vzdálenost je dvakrát větší než ME .

Je-li bod E nepřístupný, konstrukce se opakuje: středů úseček MC a MD vedeme přímky rovnoběžné s přímkami CE a DE , atd.

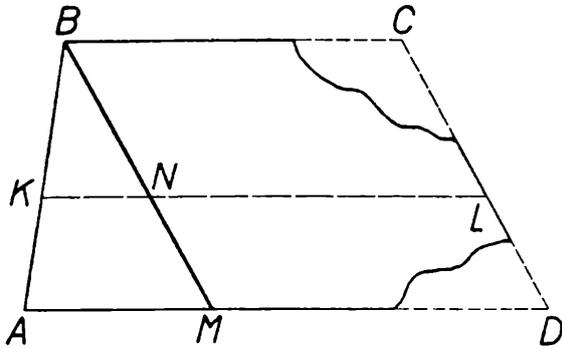
3. K r y t i n o v á d e s k a. Krytinová deska má tvar lichoběžníka. Máme určit rozměry jejích stran, je-li jeden nebo několik rohů ulomeno.

a) J e d e n r o h. Neznáme rozměry stran BC a CD (obr. 4). Vedeme $BM \parallel CD$; to je možné provést, protože část strany CD je zachována. Protože $BCDM$ je rovnoběžník, je $CD = BM$ a $BC = MD$.

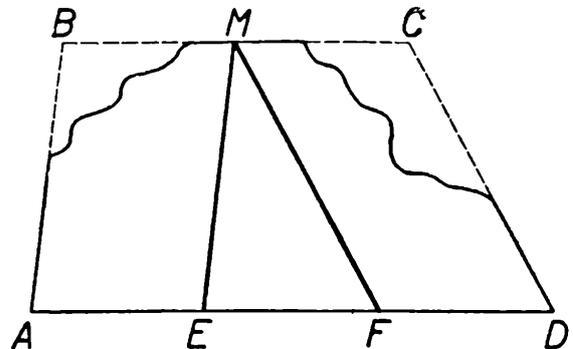
b) D v a r o h y. Při tom mohou nastat tři případy: mohou být ulomeny kousky obsahující krajní body jednoho ramene lichoběžníka, nebo kousky obsahující krajní body jedné základny, anebo konečně části obsahující dva protilehlé vrcholy.

Prvnímu případu odpovídá obr. 5. Vedeme $BM \parallel CD$. Zřejmě $BM = CD$. Pak vedeme $KL \parallel BC$. Označíme N průsečík KL s BM ; pak je $NL = BC = MD$. Proto $AD = AM + NL$.

Druhý případ je ukázán na obr. 6. Z libovolného přístupného bodu M základny BC vedeme přímky $ME \parallel AB$ a $MF \parallel CD$. Pak $AB = ME$, $CD = MF$, $BC = BM + MC = AE + FD$.



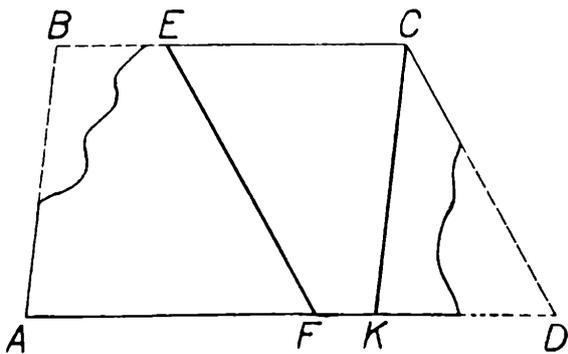
Obr. 5



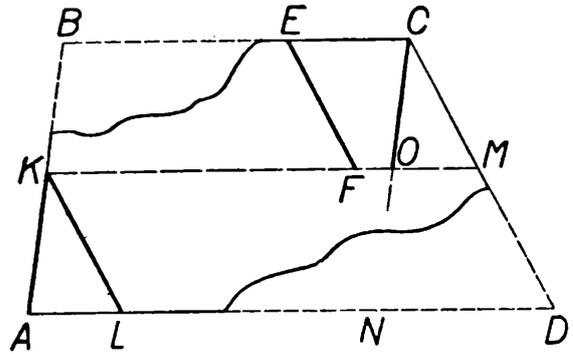
Obr. 6

V třetím případě (obr. 7) vedeme $CK \parallel AB$ a $EF \parallel CD$. Tyto úsečky udávají délky ramen lichoběžníka ($AB = CK$, $CD = EF$) a základny: $BC = AK$, $AD = AF + FD = AF + EC$.

Odlomené kousky mohou být ovšem tak veliké, že konce úseček EF a CK budou nepřístupné (obr. 8). V takovém případě musíme sestrojit ještě $KM \parallel AD$ a $KL \parallel CD$. Pak $AB = AK + KB = AK + OC$; $CD = CM + MD = CM + KL$; $BC = KO$; $AD = AL + LD = AL + KM$.



Obr. 7



Obr. 8

Nejobtížnější případ je na obr. 9. Zde není možné sestrojít přímku KM . Proto vedeme dvě přímky rovnoběžné se základnami lichoběžníka (KN a MO). Potom $AB = AK + KB = AK + EN$; $CD = CM + PN + KL$; $BC = BE + EC = KN + EC$, $AD = AL + KN + PM$.

c) Tři rohy. Jeden z možných případů je proveden na obr. 10.

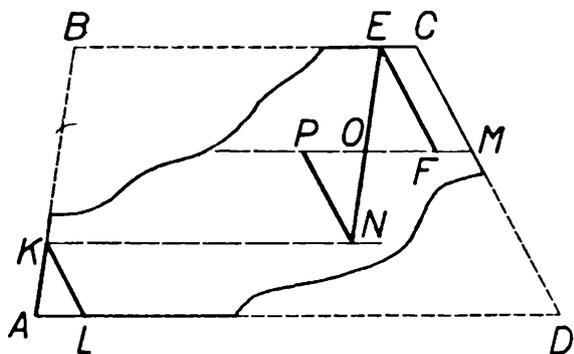
Vedeme pomocné přímky $KM \parallel AD$ a $EF \parallel AB$, $EL \parallel CD$, $MN \parallel AB$. Z obrázku je vidět, že $AB = MN + EF$, $CD = EL$, $BC = KF + OM$, $AD = KM + ND$.

Nelze-li při tom sestrojiti některou z pomocných úseček, postupujeme jako v předcházejícím případě.

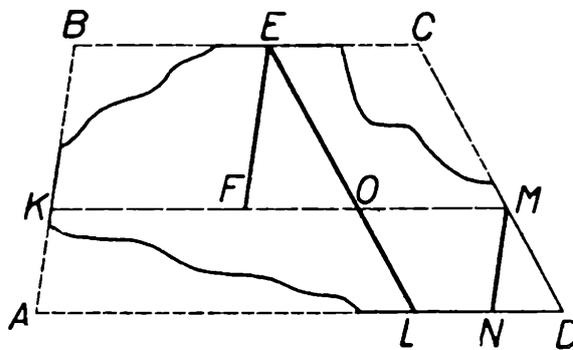
d) Čtyři rohy. Možná varianta je na obr. 11.

Sestrojíme $KM \parallel AD$, $EL \parallel AB$, $EO \parallel LN \parallel CD$.

Pak $AB = EL$; $CD = EO + NL$; $BC = KF + OM$; $AD = KF + NM$.



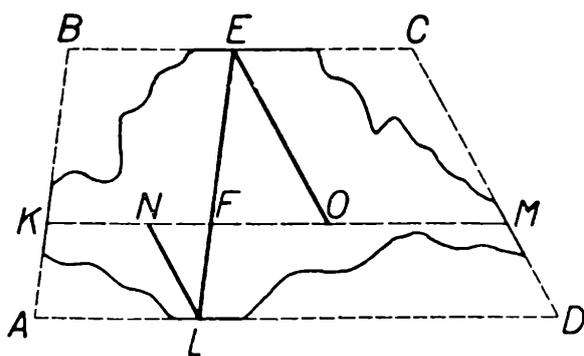
Obr. 9



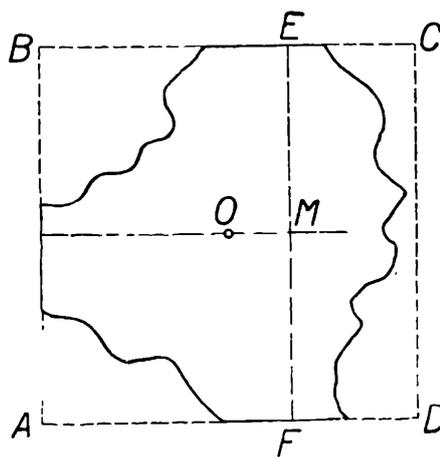
Obr. 10

Všimněme si, že v žádném z vyšetřovaných případů jsme neužívali střední příčky trojúhelníka nebo lichoběžníka. Sestrojení středních příček může být výhodné při řešení úloh ve složitějších případech, když jsou odlomeny příliš velké kousky.

Nakonec si připomeňme, že jsme nepředpokládali rovnoramennost lichoběžníka. Budeme-li předpokládat, že lichoběžník je rovnoramenný, řešení se zjednoduší. Přenecháváme rozbor čtyř případů pro rovnoramenný lichoběžník čtenáři.



Obr. 11



Obr. 12

4. Střed čtverce. Všechny vrcholy a jedna ze stran čtverce jsou nepřístupné. Máme sestrojiti střed čtverce.

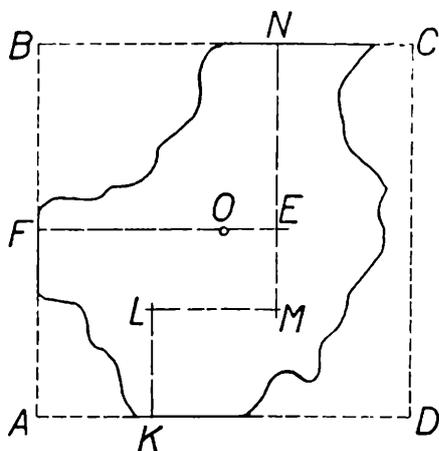
Vzdálenost od středu čtverce ke straně se rovná polovině strany. Proto sestrojíme společnou kolmici EF ke dvěma stranám čtverce, jejím středem M vedeme kolmici MK k třetí straně a nanese na tuto kolmici úsečku $KO = EM$ (obr. 12). Bod O je hledaný střed.

Nedá-li se takováto konstrukce provést (obr. 13), vedeme kolmice NM a KL k dvěma rovnoběžným stranám. Potom sestrojíme $LM \perp \perp NM$. Na úsečce NM najdeme takový bod E , aby $NE = \frac{1}{2} (KL + + NM)$, pak sestrojíme $EF \perp AB$ a nanese úsečku $FO = NE$.

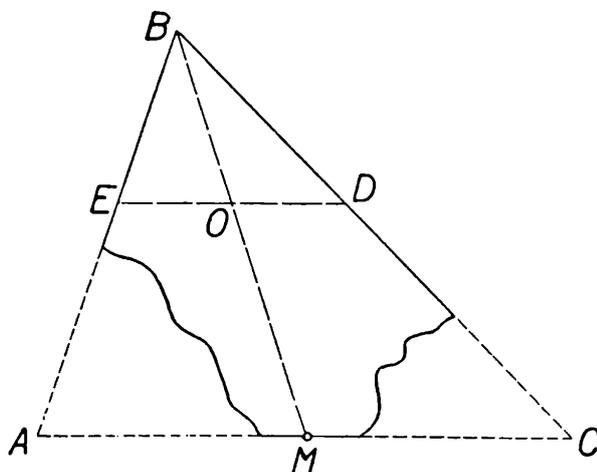
Pro čtenáře bude zajímavé vyšetřit případ, kdy střed strany AB je nepřístupný. V takovém případě je nutno sestrojít kolmici k AB v jednom z přístupných bodů, nanést na tuto kolmici úsečku rovnající se polovině strany čtverce a koncem této úsečky vést přímku rovnoběžnou s AB .

5. P ů l e n í. Krajní body strany AC trojúhelníka ABC jsou nepřístupné. Máme úsečku AC rozpůlit.

Je-li úsečka ED rovnoběžná se stranou AC a má krajní body na stranách AB a BC , dělí těžnice BM úsečku ED napolovic³⁾.



Obr. 13



Obr. 14

Na tom je založena konstrukce. Vedeme $ED \parallel AC$, najdeme střed úsečky ED (označme ho O) a vedeme přímku BO až do jejího průsečíku s AC (obr. 14).

Je-li i vrchol B nepřístupný, musíme sestrojít ještě jednu úsečku rovnoběžnou se stranou AC . Těžnice jde pak středy obou úseček.

Popsané konstrukce lze užít k nalezení obvodu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou nepřístupné. Podle výše uvedeného návodu najdeme střed strany AC a vedeme z tohoto středu přímky rovnoběžné se stranami AB a BC . Známe-li dvě střední příčky, snadno pak již určíme délky stran; třetí střední příčku můžeme též lehce sestrojít.

Nakonec lze pomocí popsané konstrukce sestrojít těžnice a určit polohu těžiště trojúhelníka, který má nepřístupné vrcholy.

³⁾ Vskutku, $\triangle BOE \sim \triangle BMA$ a $\triangle BOD \sim \triangle BMC$. Proto $EO : AM = = BO : BM$ a $OD : MC = BO : BM$. Odtud $EO : AM = OD : MC$. Protože $AM = MC$, je i $EO = OD$, což jsme měli dokázat.

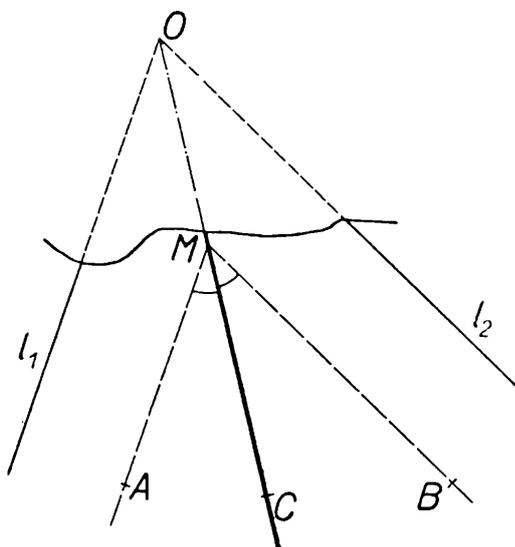
Máme-li rozpůlit úhel, jehož vrchol je nepřístupný, užijeme toho, že libovolný bod osy úhlu leží ve stejné vzdálenosti od ramen úhlu. Vedeme dvě přímky $MA \parallel l_1$ a $MB \parallel l_2$ vzdálené o délku a od ramen l_1 a l_2 úhlu (obr. 15). Osa pomocného úhlu AMB je zároveň osou daného úhlu s vrcholem O .

Popsanou konstrukcí je možné půlit úhly v trojúhelníku s nepřístupnými vrcholy a najít střed kružnice vepsané do trojúhelníka.

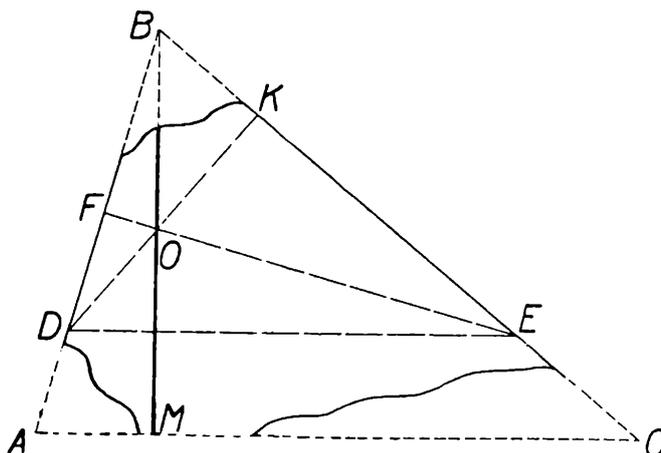
6. Výška trojúhelníka. Máme sestrojit výšku příslušnou k jedné straně trojúhelníka, jehož vrcholy jsou nepřístupné.

Vedeme $DE \parallel AC$ a dvě výšky (DK a EF) trojúhelníka DBE . Jejich průsečíkem O prochází i třetí výška trojúhelníka. Protože tato výška leží na výšce trojúhelníka ABC , dostaneme pouhým jejím prodloužením hledanou výšku (obr. 16).

Sestrojíme-li tímž způsobem ještě jednu výšku, určíme tak polohu ortocentra trojúhelníka ABC .



Obr. 15



Obr. 16

7. Úhlopříčky lichoběžníka. Máme určit délky úhlopříček lichoběžníka, jehož vrcholy jsou nepřístupné.

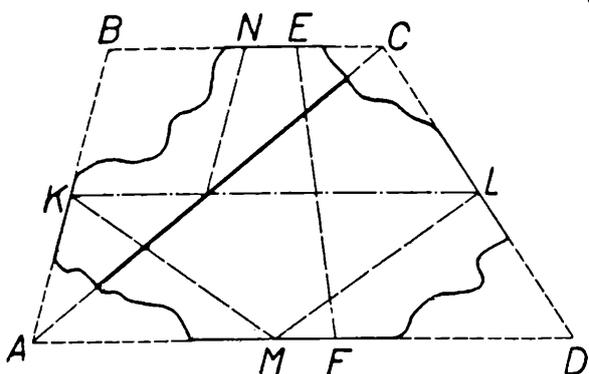
Spojíme dva základny E a F úsečkou a vedeme jejím středem přímku $KL \parallel BC$ (obr. 17). Úsečka KL je střední příčkou lichoběžníka. Středy základny lichoběžníka lze najít tímž způsobem, jako v úloze 5, tj. vedeme přímku středem střední příčky a středem ještě jedné úsečky, která je rovnoběžná se základnami a má krajní body na ramenech lichoběžníka. Označme M střed základny lichoběžníka; pak vzdálenost od bodu M ke krajním bodům střední příčky je dvakrát menší než úhlopříčky lichoběžníka.

Máme-li sestrojit též přístupné části úhlopříček, vedeme středem N strany BC rovnoběžku se stranou AB . Tato přímka protne střední příčku v bodě ležícím na úhlopříčce lichoběžníka AC . Další postup je zřejmý.

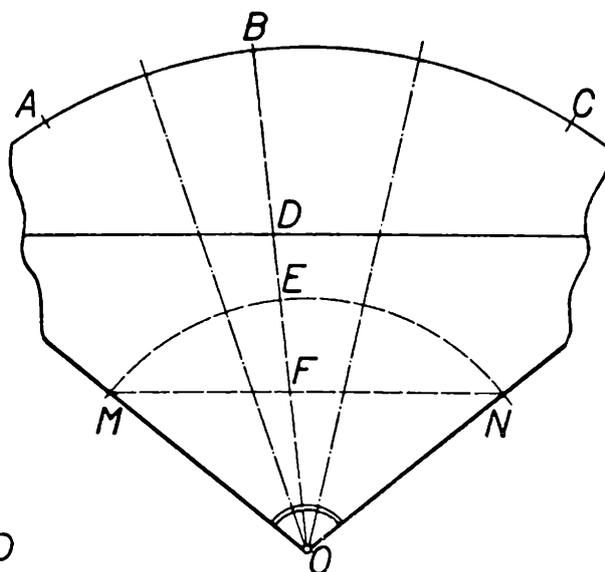
8. Velikost úhlu příslušného kruhového oblouku. Je dána část kruhového oblouku a k němu příslušné tětivy. Máme konstruktivně určit středový úhel celého oblouku.

Nejprve sestrojíme střed kružnice na níž leží daný oblouk. K tomu zvolíme na oblouku body A , B a C a sestrojíme osy úseček AB a BC . Průsečík O těchto os je středem kružnice (obr. 18).

Nyní opíšeme kolem tohoto středu oblouk s dvakrát menším poloměrem než je poloměr daného oblouku; tento oblouk protne BO v bodě E . Z podobnosti kruhových úsečí (dané a té, kterou sestrojujeme) vyplývá, že tětiva příslušející pomocnému oblouku vytíná na BO úsečku dvakrát menší než je BD . Naneseme ze středu úsečku této délky a dostaneme bod F ; vedeme jím rovnoběžku s tětivou daného oblouku. Tato rovnoběžka protne menší oblouk v bodech M a N . Hledaný úhel je pak $\sphericalangle MON$.



Obr. 17



Obr. 18

9. Poloměr koule. Z úlomku koule máme konstruktivně určit její poloměr.

S úlohou tohoto typu se nezdávka setkávají restaurátoři, archeologové a jiní specialisté.

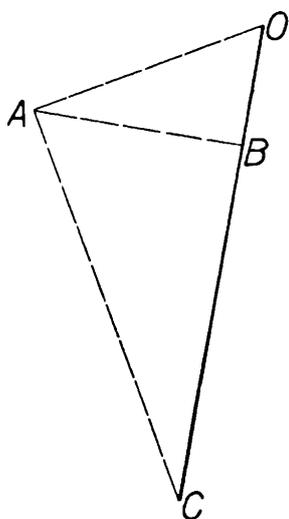
Umístíme hrot kružítko do jednoho bodu na povrchu úlomku koule a kolem tohoto bodu opíšeme na kulové ploše kružnici. Rozevření kružítko při tom nechť je a .

Abychom určili poloměr této kružnice (který je menší než rozevření kružítko), vyznačíme na kružnici tři body a kružítkem přeneseme vzdálenosti mezi nimi na papír. Z těchto vzdáleností pak sestrojíme trojúhelník. Potom najdeme střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku a tím zároveň i její poloměr b .

Nyní sestrojíme $\triangle AOB$, jehož přepona $AO = a$ a odvěsna $AB = b$.

Přímka $AC \perp AO$ protne prodloužení OB v bodě C (obr. 19). Úsečka OC se rovná průměru koule.

Důkaz je evidentní.



Obr. 19

Existuje zvláštní přístroj s f é r o - m e t r -, jehož použití umožňuje dojít k cíli bez takovýchto konstrukcí.

Jak je vidět, úlohy o útvarech s nepřístupnými prvky jsou velmi rozmanité. Pro čtenáře, kteří se chtějí pocvičit v řešení takovýchto úloh, uvádíme ještě několik cvičení.

1. Vrcholy obdélníka jsou nepřístupné. Určete jeho úhlopříčky.

2. Vrcholy trojúhelníka jsou nepřístupné; máme určit střed a poloměr kružnice opsané.

3. Vrcholy trojúhelníka jsou nepřístupné. Rozdělte jednu z jeho stran na n ($n = 3, 4, \dots$) stejných dílů.

4. Vrcholy a středy stran lichoběžníka jsou nepřístupné; máme sestavit průsečík úhlopříček.

5. Jedna ze stran lichoběžníka je nepřístupná, známe však směr jedné úhlopříčky. Sestrojte přístupnou část druhé úhlopříčky.

Přeložil Miloslav Zelenka

Inž. J a r o m í r H r o n í k, VUT, Brno:

Vybrané úlohy o minimech

Určování extrémních hodnot, ať minimálních nebo maximálních určité funkce, vyskytuje se často v technické praxi. Problém, s kterým se zpravidla setkáváme, je hledání optimálního řešení dané úlohy. Je to např. stanovení rozměrů vodního náhonu, který při daném průtočném profilu má nejmenší omočený obvod (tzv. hydraulicky nejvýhodnější profil), nebo výpočet maximálních ohybových momentů ve staticce apod.

Kdy a za jakých podmínek nabývá určitá funkce největší nebo nejmenší hodnoty, řeší obecně diferenciální počet. Avšak některé speciální úlohy se dají řešit i elementárními metodami, bez znalostí derivací.

Jak uvádí I. P. Natanson v knize *Jednoduché úkoly na maxima a minima*, stanovení nejmenší i největší hodnoty funkcí nám umožňuje vedle jiných také tato věta z algebry:

Aritmetický průměr konečného počtu n kladných čísel je vždy větší nebo nanejvýše roven jejich geometrickému průměru.

Pro následující příklady stačí uvažovat tuto větu jen pro $n = 2$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

Důkaz.

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

umocníme

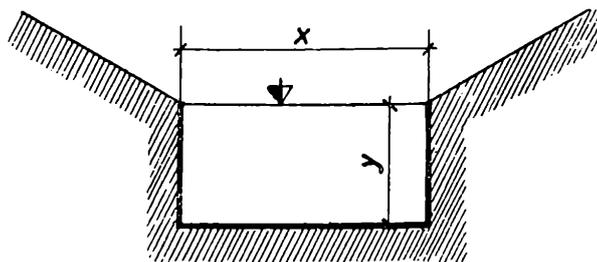
$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy,$$

anulujeme

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

čili

$$(x - y)^2 \geq 0$$



Obr. 1

Protože celý postup lze obrátit (jde o kladná čísla), vidíme, že v (1) může rovnost nastat tehdy a jen tehdy, když $x = y$. Aplikujme nyní tuto větu na některé příklady.

Příklad 1. Rozložte dané kladné číslo P na dva činitele $x > 0$, $y > 0$ tak, aby jejich součet byl minimální.

$$P = xy$$

Podle předcházející věty platí

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

čili

$$x + y \geq 2\sqrt{P}$$

Z nerovnosti je zřejmé, že při zcela libovolné volbě čísel x a y nemůže být nikdy součet činitelů x , y menší než $2\sqrt{P}$. Nejmenší součet v daném případě může tudíž nastat tehdy a jen tehdy, když nastane

rovnost. Znaménko rovnosti nabývá platnosti, jak již bylo dokázáno, jen při $x = y$. Tedy

$$2x = 2 \sqrt{P},$$

$$x = \sqrt{P}, \quad y = \sqrt{P}$$

Poněvadž $y = \frac{P}{x}$, vede úloha k poučce, že funkce

$$f(x) = x + \frac{P}{x},$$

kde $P > 0$ a $x > 0$ nabývá své nejmenší hodnoty jen pro

$$x = \sqrt{P} \quad (1,1)$$

Uvedme nyní další příklady vybrané z různých učebnic, které lze řešit touto metodou.

Příklad 2. Určete rozměry vodního náhonu (obr. 1), jehož průtočný profil je obdélník o daném obsahu P tak, aby jeho omočený obvod byl co nejmenší! Omočený obvod je taková část obvodu, kde dochází při plném naplnění náhonu ke styku vody se stěnami.

Obsah profilu náhonu je

$$P = xy;$$

omočený obvod

$$O = x + 2y.$$

Vyloučením y obdržíme pro omočený obvod

$$O = x + \frac{2P}{x}.$$

Podle předcházející poučky musí nastat pro funkci $f(x) = x + \frac{2P}{x}$ minimum, když $x = \sqrt{2P}$. Pro rozměr y vychází $y = \frac{1}{2} \sqrt{2P}$

Rozměry náhonu navrhne v poměru

$$x : y = 2 : 1;$$

minimální omočený obvod

$$O_{\min} = 2 \sqrt{2P}$$

Příklad 3. Vrcholem A daného obdélníka $ABCD$ (obr. 2) vedte polopřímku, která stranu CD seče v bodě E a prodlouženou stranu BC protíná v bodě F tak, aby součet úseček $DE + BF$ byl nejmenší.

Označíme-li

$$AB = CD = a, \quad AD = BC = b, \quad DE = x, \quad CF = y,$$

pak

$$DE + BF = x + b + y.$$

Snadno lze dokázat, že $\triangle AED$ a $\triangle FEC$ jsou si podobny. Platí tudíž vztah

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{x},$$

z toho

$$y = \frac{b(a-x)}{x},$$

$$DE + BF = x + b + \frac{b(a-x)}{x} = x + \frac{ab}{x}.$$

Podle předcházející poučky nabývá funkce $f(x) = x + \frac{ab}{x}$ nejmenší hodnoty, když

$$x = \sqrt{ab},$$

$$(DE + BF)_{\min} = 2\sqrt{ab}.$$

Jak je patrné z obrázku, provede se grafické řešení podle Euklidovy věty.

Příklad 4. Určete rozměry okenního profilu (obr. 3), který je složen z obdélníka a půlkružnice, a to tak, aby při daném obsahu P měl nejmenší obvod.

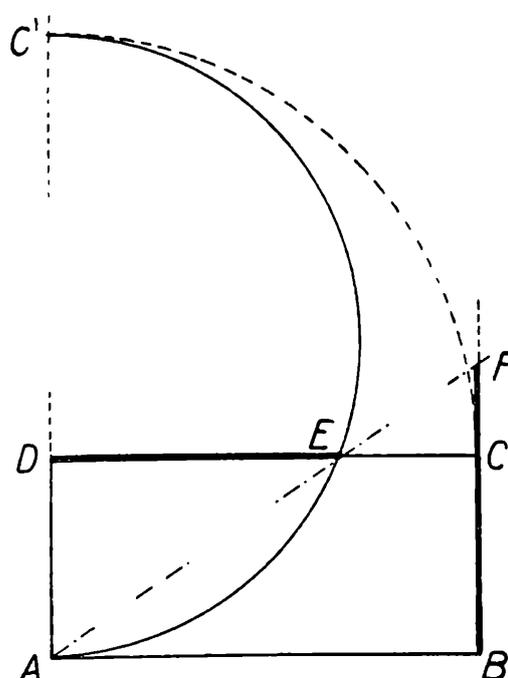
Rozbor této úlohy mě přivedl k rozšíření poučky (1,1). Vhodnou úpravou vede tento příklad i následující obecně na funkci

$$f(x) = A \left(x + \frac{B}{x} \right),$$

kde výrazy A a B jsou kladné konstanty. Potom pro $x > 0$ nastává jen jediné minimum funkce, a to v bodě

$$x = \sqrt{B}. \quad (1,2)$$

Důkaz této věty, který se dá snadno odvodit, přenechávám čtenářům.



Obr. 2

Obvod okenního profilu

$$O = 2x + 2y + \pi x ;$$

obsah okenního profilu

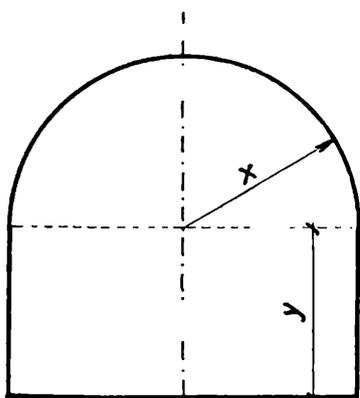
$$P = 2xy + \frac{1}{2} \pi x^2 .$$

Vyloučením hodnoty y z výrazu pro obvod, obdržíme

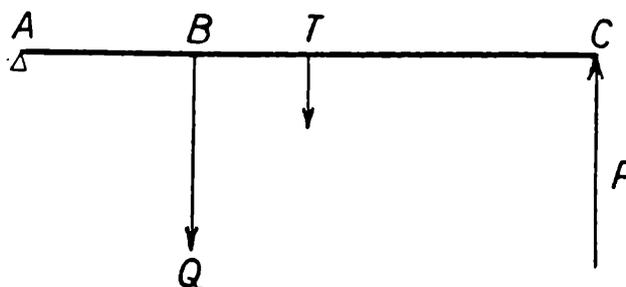
$$O = 2x + \frac{1}{2} \pi x + \frac{P}{x} ,$$

čili

$$f(x) = x \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{P}{x} .$$



Obr. 3



Obr. 4

Vytknutím dvojčlenu při x obdržíme

$$f(x) = \frac{4 + \pi}{2} \left(x + \frac{\frac{2P}{4 + \pi}}{x} \right)$$

Podle rozšířené poučky (1,2) nastává minimum pro

$$x = \sqrt{\frac{2P}{4 + \pi}} .$$

Pro druhý rozměr vychází $y = x$.

$$O_{\min} = \sqrt{2P(4 + \pi)} .$$

Příklad 5. Na vodorovné jednozvrtné páce (obr. 4) s proměnnou délkou $AC = x$ visí ve vzdálenosti $AB = a$ od osy páky břemeno Q . Hmotnost páky připadající na jednotku délky je q a páka se udržuje v rovnováze v bodě C kolmo vzhůru působící silou F . Určete délku páky x tak, aby síla F byla co nejmenší.

Podle momentové věty platí

$$F \cdot x = aQ + qx \cdot \frac{x}{2},$$

z toho

$$F = \frac{aQ}{x} + \frac{1}{2} qx.$$

Vytkněme $\frac{q}{2}$, pak

$$F = \frac{q}{2} \left(x + \frac{2aQ}{qx} \right)$$

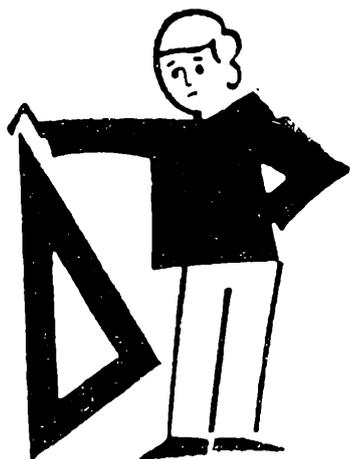
Podle věty (1,2) musí nastat minimum pro délku

$$x = \sqrt{\frac{2aQ}{q}}$$

minimální síla

$$F_{\min} = \sqrt{2aqQ}$$

Deskriptivní geometrie



Jozef Filip, Bratislava:

K úlohám o mimobežkách

V čís. 3, roč. 41 bol uverejnený článok O. Berku Úlohy o mimobežkách, v ktorom sa okrem iných úloh rieši aj úloha zostrojiť os dvoch mimobežiek. V tomto príspevku chceme naznačiť niektoré ďalšie spôsoby konštrukcie osi dvoch mimobežiek.

Grafické riešenie tejto úlohy v pravouhlom premietaní na dve prie-

metne je zvlášť jednoduché v dvoch prípadoch. Je to prípad a), kedy obe mimobežky a , b sú rovnobežné s priemetňou (obr. 3 v cit. čl.) a prípad b), kedy jedna z daných mimobežiek b je kolmá na priemetňu (obr. 4 v cit. čl.).

Keď máme zostrojiť os mimobežiek a , b , ktoré nemajú zvláštnu polohu k priemetniam, môžeme postupovať aj tak, že vhodnou transformáciou priemetne alebo daných priamok navodíme situáciu a) alebo situáciu b). V krátkosti naznačíme dva spôsoby, ako dosiahneme toho, aby vznikla situácia a) a dva spôsoby, aby vznikla situácia b).

V záujme stručnosti označíme rovinu rovnobežnú s oboma mimobežkami (v súhlase s označením v cit. čl.) znakom ρ a budeme sa na ňu v ďalšom texte jednoducho odvolávať ako na rovinu ρ .

1. Zvolíme pomocnú priemetňu (tretiu) κ kolmú na π (ν), na ktorej sa priamky a , b zobrazia do rovnobežiek. Rovina κ je kolmá na hlavnú priamku prvej (druhej) osnove roviny ρ . Potom zvolíme ďalšiu pomocnú priemetňu (štvrtú) λ rovnobežnú s rovinou ρ . Na priemetni λ sa zobrazia os o mimobežiek a , b do bodu [prípad a)].

2. Mimobežky a , b otočíme okolo hlavnej priamky prvej (druhej) osnove roviny ρ do priamok a° , b° , ktoré sú rovnobežné s priemetňou π (ν). Os o je potom kolmá na priemetňu π (ν) a zobrazí sa do priesečníku prvých (druhých) priemetov priamok a° , b° [prípad a)].

3. Zvolíme pomocnú priemetňu $\kappa \perp \pi$ (ν) a rovnobežnú s jednou z daných priamok, napr. s priamkou b . Potom zvolíme ďalšiu pomocnú priemetňu (štvrtú) λ kolmú na priamku b . Priamka b sa zobrazí na rovine λ do bodu a priamka a do priamky. Nastane prípad b).

4. Okolo osi rovnobežnej s priemetňou π (ν) a kolmej na jednu z daných priamok a , b , napr. na priamku b , otočíme obe mimobežky a , b o taký uhol, aby priamka b po otočení bola kolmá na priemetňu π (ν). Otočená priamka b° sa zobrazí na priemetni π (ν) do bodu a otočená priamka a° do priamky. Nastane prípad b).

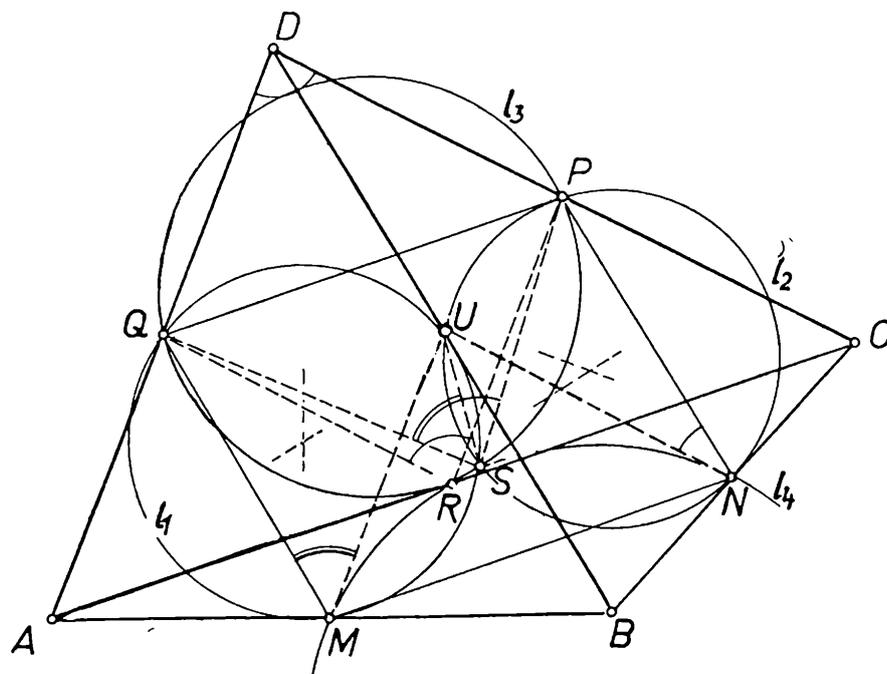
P o z n á m k a : Pri zostrojovaní osi o mimobežiek a , b obyčajne postupujeme tak, že mimobežky premietneme kolmo do roviny ρ (príklad 5 v cit. čl.). Úlohu však môžeme riešiť aj tak, že priamky a , b premietneme smerom kolmým na rovinu ρ do ľubovoľnej roviny (ktorá, pravda, nie je kolmá na rovinu ρ), teda napr. do priemetne π alebo do ν . Priesečníkom týchto (kosouhlých) priemetov už prechádza os o , ktorú sme chceli zostrojiť.

Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly

(Dokončení)

P_3 . Nechť je dán čtyřúhelník $ABCD$; všechny kružnice l_i ($i = 1, \dots, 4$), které procházejí středy stran trojúhelníků ABD , BCD , ACD , ABC , procházejí tímž bodem S (tj. kružnice „devíti bodů“ uvedených trojúhelníků procházejí tímž bodem).

Důkaz. Z vlastností středních příček trojúhelníků ABC , ACD (obr. 5) plyne $MN \parallel AC \parallel QP$ a z trojúhelníků ABD , BCD plyne podobně $MQ \parallel BD \parallel NP$. Je tedy obrazec $MNPQ$ rovnoběžník. Střed



Obr. 5

strany AC označme R , střed strany BD necht' je U . Dále označme S druhý průsečík kružnic l_1 a l_2 jdoucích body MUQ , resp. body UNP .

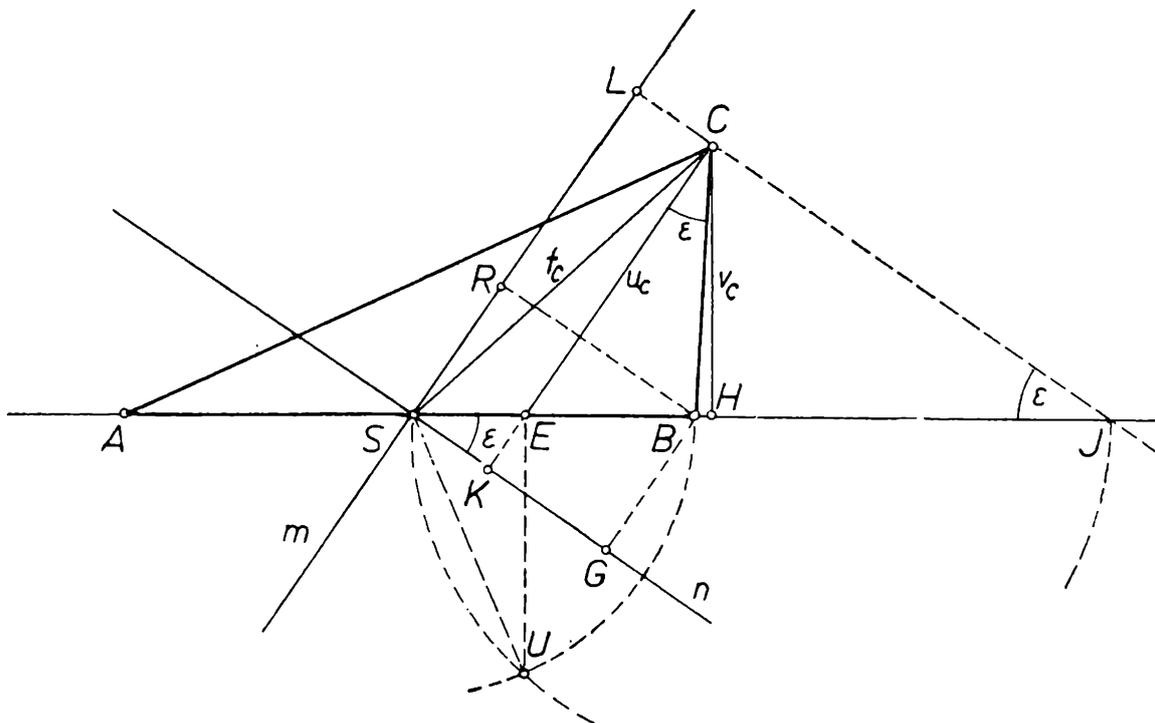
Zřejmě platí $\sphericalangle PNU = \sphericalangle PSU = \sphericalangle BDC$ a $\sphericalangle QMU = \sphericalangle QSU = \sphericalangle ADB$; avšak $\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle QDP = \sphericalangle QRP$ a $\sphericalangle PNU + \sphericalangle QMU = \sphericalangle QSP = \sphericalangle QRP$. Je-li $\sphericalangle QRP = \sphericalangle QSP$, pak také kružnice l_3 procházející body QRP prochází bodem S . Stejně se dokáže, že $\sphericalangle MRN = \sphericalangle MSN$, a proto i kružnice l_4 procházející body MNR jde bodem S . Bod S splyne s bodem U , resp. s bodem R , jedině když čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec. Není-li tomu tak, nesplyne se žádným středem stran uvedených trojúhelníků.

Příklady.

1. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno t_c , v_c , u_c ($v_c < u_c < t_c$) (obr. 6).

Řešení. Těžnice t_c , osa úhlu u_c a výška v_c necht' procházejí po řadě body S , E , H na přímce AB . Podle věty P_1 je $\sphericalangle ECH = \varepsilon = \frac{|\beta - \alpha|}{2}$. Můžeme tedy nejprve sestavit pravoúhlý trojúhelník EHC

a na přímce EH můžeme najít bod S , aby $SC = t_c$ a bod E ležel mezi body S , H , to lze podle zadání úlohy provést s jediným výsledkem. Podle věty P_2' má trojúhelník ABC tu vlastnost, že rozdíl velikostí



Obr. 6

úhlů $\beta - \alpha$, resp. $\alpha - \beta$, je konstantní. Množinou všech vrcholů C je rovnoosá hyperbola, která prochází body A , B . To budou hledané vrcholy trojúhelníka, který máme sestavit. Abychom konstrukci provedli euklidovskými, tj. pomocí přímého pravítka a kružítka (aniž bychom sestavovali zmíněnou rovnoosou hyperbolu), užijeme vlastností rovnoosé hyperboly. Z rovnosti obsahů obdélníků $SKCL$ a $SGBR$ dostaneme

$$SL \cdot SK = SB^2 \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon,$$

neboť $SG = SB \cdot \cos \varepsilon$ a $SR = SB \sin \varepsilon$.

Odtud plynou další vztahy

$$SB^2 = \frac{SK}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{SL}{\sin \varepsilon} = SE \cdot SJ$$

když

$$SE = \frac{SK}{\cos \varepsilon}, \quad SJ = \frac{SL}{\sin \varepsilon}.$$

Je tedy

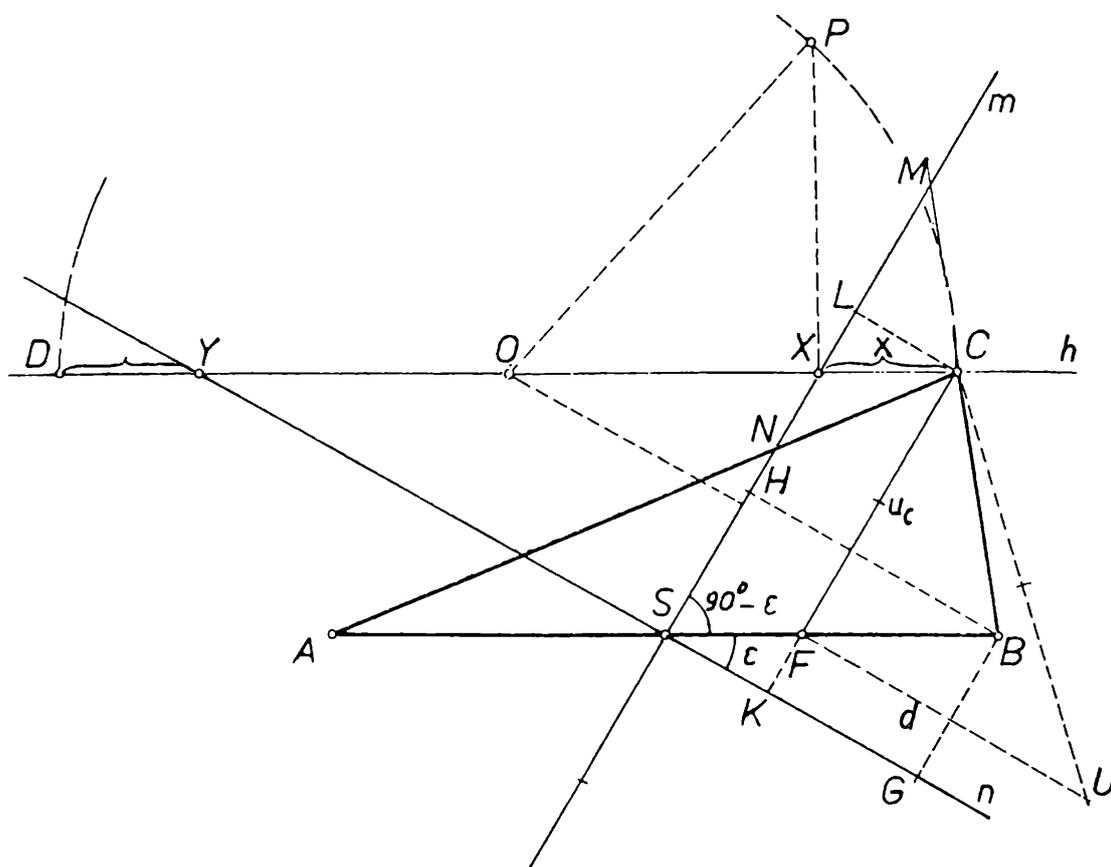
$$SB = \sqrt{SE \cdot SJ} \quad (1)$$

Poněvadž úsečky SE a SJ můžeme určit, můžeme užitím Euklidovy věty sestrojiti i úsečku SB . Tím je dána konstrukce trojúhelníka ABC .

Správnost konstrukce vyplývá z dříve uvedených vět. Body A, B, C prochází rovnoosá hyperbola o středu S , jejíž asymptota $m \parallel u_c$ a $n \perp \perp u_c$. Podle věty V_3 a P_1 přímka CE je osou úhlu ACB ; trojúhelník ABC má výšku v_c a těžnici t_c , jak je zaručeno provedenou konstrukcí.

Je-li splněna podmínka uvedená v textu, můžeme sestrojiti dva trojúhelníky, které vyhovují dané úloze. V obr. 6 je narysován jen jeden z těchto trojúhelníků (pro $\beta > \alpha$). Druhý trojúhelník $A'B'C$, který má $\alpha > \beta$, je vzhledem k trojúhelníku ABC souměrný podle přímky CH .

2. Sestrojte trojúhelník, je-li dána strana $AB = c$, rozdíl velikostí vnitřních úhlů $\beta - \alpha$ a délka u_c osy úhlu $\sphericalangle ACB$.



Obr. 7

Ř e š e n í. (Obr. 7.) Osa úhlu u_c je podle věty V_1 rovnoběžná s přímkou m procházející středem S úsečky AB a svírající s ní úhel $90^\circ - \epsilon$. Přímka m je jednou asymptotou rovnoosé hyperboly a úsečka AB jejím průměrem. Vedeme-li bodem C rovnoběžku h s přímkou AB , dostaneme rovnoběžník $SFCX$; tedy $SX = u_c$. Určíme ještě úsečku $XC = SF = = x$.

Plošné obsahy obdélníků $SGBH$ a $SKCL$ jsou si rovné, tudíž

$$SB \cdot \cos \varepsilon \cdot SB \sin \varepsilon = SF \cdot \cos \varepsilon (SF \cdot \sin \varepsilon + u_c),$$

tj.

$$\frac{c^2}{4} \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon = x \cdot \cos \varepsilon (u_c + x \cdot \sin \varepsilon).$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$x^2 + x \cdot \frac{u_c}{\sin \varepsilon} - \frac{c^2}{4} = 0. \quad (1)$$

Její kladným kořenem je číslo

$$x = -\frac{u_c}{2 \cdot \sin \varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{u_c}{2 \sin \varepsilon}\right)^2 + c^2}. \quad (2)$$

Asymptoty m, n rovnoosé hyperboly vytínají na přímce h úsečku XY , její střed je O ; zřejmě $OX = \frac{u_c}{2 \cdot \sin \varepsilon}$. Sestrojme nyní pravoúhlý troj-

úhelník OXP . V něm je $XP \perp OX$ a $XP = \frac{c}{2}$, učiňme $OC = OP$. Snadno nahlédneme, že úsečka XC má velikost danou výrazem (2). Tím je zároveň dána konstrukce trojúhelníka ABC .

Úloha má vždy jediné řešení.

P o z n á m k a. Je-li D druhý průsečík přímky h s rovnoosou hyperbolou, lze vzhledem k větě V_4 vztah (1) psát

$$XC \cdot XD = XP^2.$$

To můžeme vyslovit větou:

Je-li přímka h rovnoběžná s průměrem AB rovnoosé hyperboly a protíná tuto hyperbolu v bodech C, D a její asymptoty v bodech X, Y , pak platí

$$XC \cdot XD = YC \cdot YD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad (1')$$

Na základě tohoto vztahu můžeme sestavit průsečíky přímky h , rovnoběžné s průměrem hyperboly, s touto křivkou.

Vztah (1') platí i pro hyperbolu, která není rovnoosá.

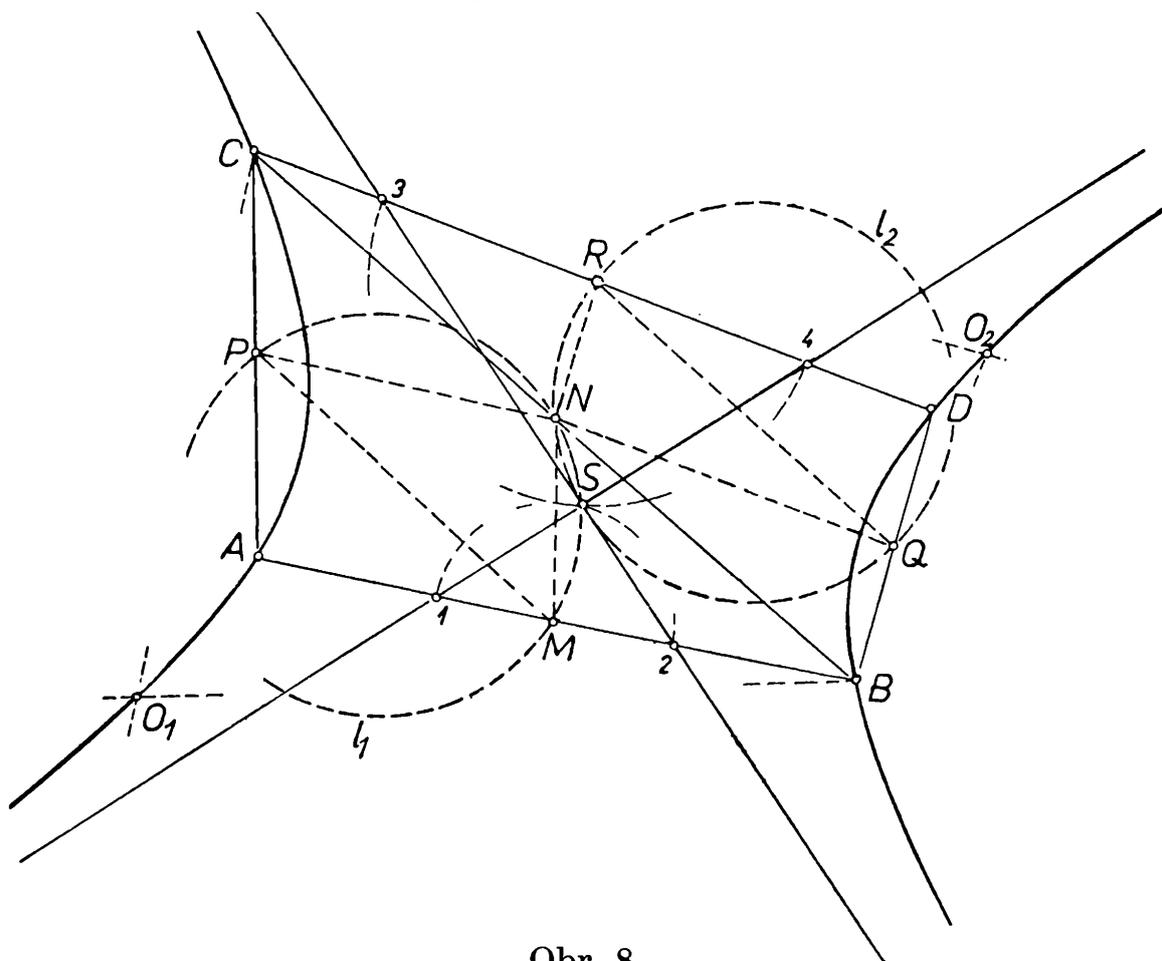
3. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, která prochází body A, B, C, D . (Obr. 8.)

Ř e š e n í. Podle věty V_7 vyplňují středy všech rovnoosých hyperbol, které procházejí body A, B, C , kružnici l_1 procházející středy stran trojúhelníka ABC . Středy všech rovnoosých hyperbol, které procházejí body B, C, D , leží z téhož důvodu na kružnici l_2 . Kružnice l_1 a l_2 se

protínají ve dvou bodech. Jeden z nich je středem strany BC , druhý průsečík S je vzhledem k větě P_3 bodem, jímž procházejí i kružnice l_3 a l_4 , o nichž pojednává tato věta. Bod S je středem naší rovnoosé hyperboly.

Opíšeme-li kolem středu M úsečky AB kružnici procházející bodem S , protíná tato kružnice přímku AB v bodech $1, 2$; jimi procházejí asymptoty rovnoosé hyperboly. Další konstrukci známe.

Správnost konstrukce vyplývá přímo z vět V_7 a P_3 . Jestliže některý z daných bodů je ortocentrem trojúhelníka (tj. průsečíkem výšek), jehož vrcholy jsou zbývající tři body, má úloha nekonečně mnoho řešení.



Obr. 8

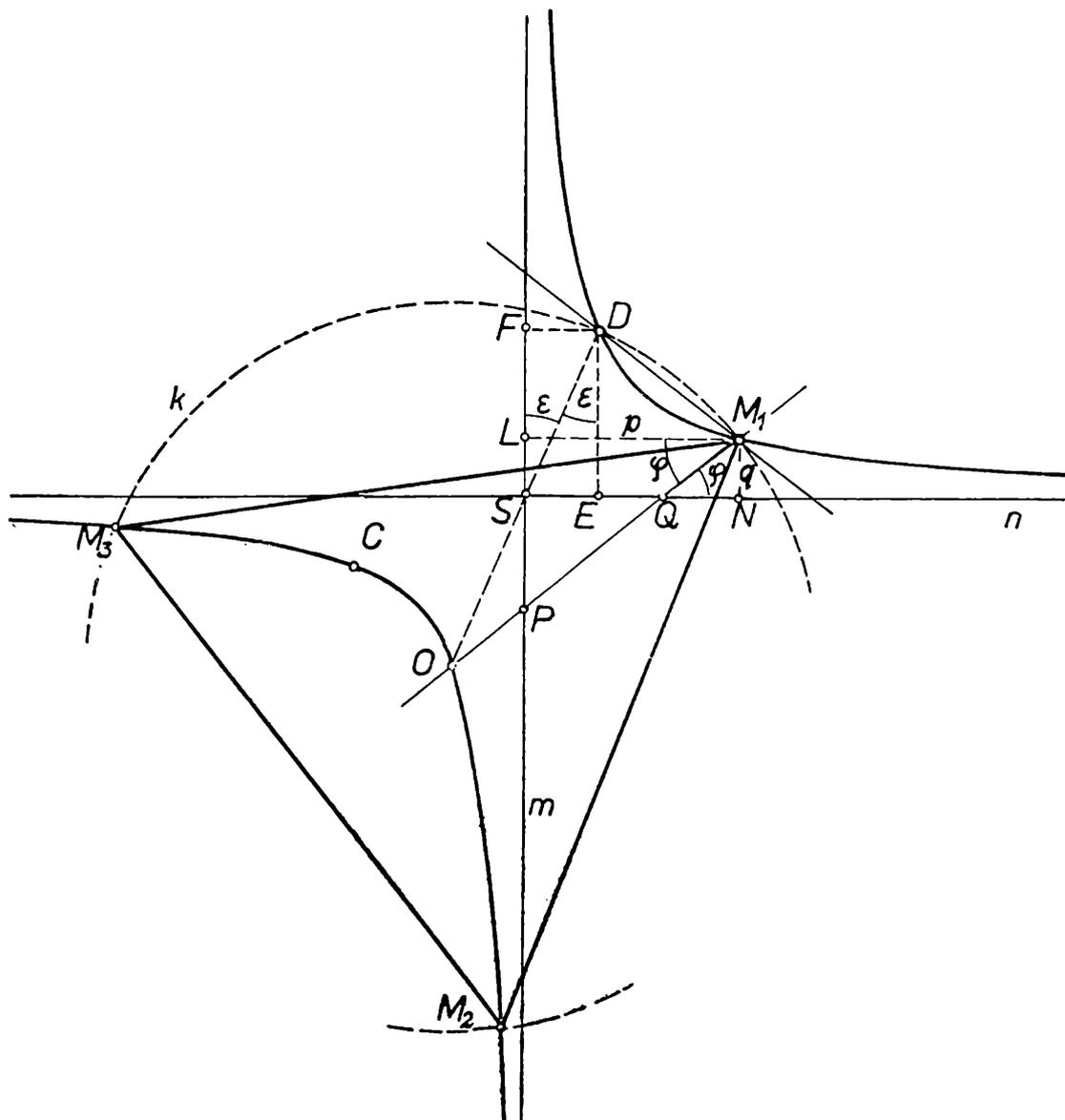
☞ Jestliže tři z daných bodů leží v přímce, nebo když některý z daných bodů leží na výškách (přímkách) trojúhelníka, jehož vrcholy jsou zbývající body, a není průsečíkem výšek, rozpadne se hyperbola na dvojici k sobě kolmých přímek a úloha nemá řešení.

Nenastane-li žádný z uvedených případů, má úloha vždy jediné řešení.

4. Sestrojte rovnostranný trojúhelník, který je vepsán dané rovnoosé hyperbole určené asymptotami m, n a bodem C , je-li dán jeho střed O . Je možno provést tuto konstrukci euklidovskými?

Ř e š e n í. Podle věty V'_6 musí bod O ležet na hyperbole. Sestrojme k bodu O bod souměrně sdružený D podle středu S hyperboly (obr. 9).

Podle věty V_6'' leží tento bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Kružnice $k \equiv (O; OD)$ protíná hyperbolu v dalších třech bodech M_1, M_2, M_3 , které jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Tento trojúhelník je rovnostranný, neboť jedině v rovnostranném trojúhelníku je průsečík výšek zároveň jeho středem kružnice opsané.



Obr. 9

Body M_1, M_2, M_3 , není-li O vrcholem hyperboly, nelze sestrojiti pravítkem a kružítkem, tj. bez narýsování hyperboly. To vyplývá z následujících vztahů.

Označíme-li p, q vzdálenosti bodu M_1 od asymptot m a n , $SD = d$, $\varphi = \sphericalangle M_1QN$, $\epsilon = \sphericalangle FSD$, pak podle věty V_4 je

$$QN = SE, LP = SF$$

tj.

$$q \cdot \cotg \varphi = d \cdot \sin \epsilon, p \cdot \tg \varphi = d \cdot \cos \epsilon. \quad (1)$$

Dále je

$$PM_1 = \frac{p}{\cos \varphi}, OP = QM = \frac{q}{\sin \varphi}, OD = 2d.$$

Poněvadž

$$OD = OM_1 = OP + PM_1,$$

dostaneme po dosazení

$$2d = \frac{q}{\sin \varphi} + \frac{p}{\cos \varphi}. \quad (2)$$

Dosadíme-li do (2) ze vztahů (1), máme

$$2d = \frac{d \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varphi} + \frac{d \cdot \cos \varepsilon}{\sin \varphi},$$

což po úpravě dává

$$\sin 2\varphi = \cos(\varphi - \varepsilon), \quad (3)$$

tj.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \cos(\varphi - \varepsilon).$$

Odtud plyne

a)

$$\frac{\pi}{2} - 2\varphi = \varphi - \varepsilon + 2k\pi,$$

tj.

$$\varphi_{M_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + \frac{2}{3}k\pi$$

b)

$$\frac{\pi}{2} - 2\varphi = \varepsilon - \varphi,$$

tj.

$$\varphi_D = \frac{\pi}{2} - \varepsilon + 2k\pi.$$

Případ b) značí velikost úhlu $\sphericalangle NSD$, který lze sestrojít, případ a) však ukazuje, že konstrukce úhlu φ_{M_i} vyžaduje trisekci úhlu (pokud je $\varepsilon \neq \frac{\pi}{4}$). Tuto úlohu však nelze provést pravítkem a kružítkem.

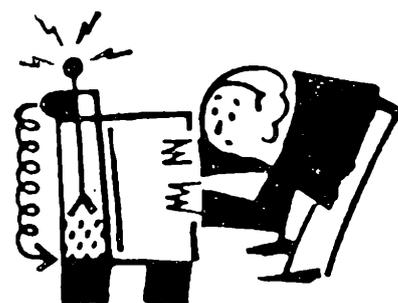
P o z n á m k a. Úloha: Sestrojit rovnostranný trojúhelník, který je vepsán dané rovnostranné hyperbole a má jeden vrchol v daném jejím bodě, který není vrcholem této hyperboly, není řešitelná pravítkem a kružítkem.

5. Vyšetřete množinu vrcholů C trojúhelníků ABC , pro které je dáno $AB = c$ a $|\alpha - \beta| = 2\varepsilon$, kde ε je konstantní úhel.
6. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a) u_c, v_c, α ; b) u_c, v_c, β ; c) $u_c, \beta - \alpha, \gamma$.
7. Sestrojte trojúhelník, když je dáno a) $c, \beta - \alpha, r$; b) $u_c, \beta - \alpha, \rho$; c) c, v_c, u_c ; d) v_c, u_c, ρ .
8. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a) $c, |\beta - \alpha|, \rho$; b) $c, |\beta - \alpha|, t_c$.
9. Sestrojte rovnoosou hyperbolu danou průměrem PQ a směrem jedné asymptoty.
10. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, o daném středu S a tečně t s bodem dotyku T .
11. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, která prochází body A, B, C a má střed na dané přímce p .
12. Rovnoosá hyperbola je dána asymptotou m a dvěma body M, N . Určete průsečíky přímky p , která prochází jejím středem, s touto křivkou (euklidovskými).
13. Rovnoosá hyperbola je určena asymptotami m a n hlavní poloosou a . Určete její průsečíky s kružnicí k , která je s ní soustředná a má poloměr $r > a$ (euklidovskými).
14. Větu V_7 dokažte přímo tak, že dokážete, že čtyřúhelník $MNPS$ je tětíkový. Body M, N, P jsou středy stran trojúhelníka ABC a S je střed hyperboly (obr. 4).
15. Příklad 2 uvedený v textu je možno řešit také, určíme-li napřed velikost úsečky SL . Z podobných trojúhelníků ASN a AFC určíme SN a z podobných trojúhelníků SMB a FCM určíme SM a pak uijeme věty V_3 . (Vyjde $SL = \frac{u_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{u_c^2 + d^2}$, kde $d = c \sin \varepsilon$.) Konstrukce je provedena v obr. 7.
16. Užitím otočení sestrojte rovnostranný trojúhelník, který má vrcholy na rovnoosé hyperbole. Jeden vrchol je M .

Fyzika

I v o K r a u s, Z l a t ě k M a r š á k, ČVUT, Praha.

Praktické užití fotoelasticimetrie



Objev fotoelasticimetrického jevu se připisuje anglickému fyzikovi D. B r e w s t e r o v i. Ten v roce 1816 uveřejnil zprávu, že sklo, které je v nenapjatém stavu izotropní, má při zatížení optické vlastnosti látek anizotropních. Po odlehčení se stává opět izotropním.

Tento jev se nazývá u m ě l ý d v o j l o m a lze jej dobře pozorovat v polarizovaném světle. V roce 1854 bylo zjištěno, že optické osy „kry-

stalů vzniklých zatížením“, se shodují s osami hlavních napětí a že tento dočasný dvojlom je úměrný rozdílu hlavních napětí. Na základě těchto poznatků byla vypracována optická metoda stanovení vnitřních napětí na modelech vyrobených z materiálů, schopných dočasného dvojlomu - f o t o e l a s t i c i m e t r i e¹).

Z vědeckých laboratoří přišla na pomoc technice fotoelasticimetrie teprve však v tomto století. Její rozvoj nastal po objevu nových makromolekulárních hmot, vhodných pro výrobu modelů a po vynálezu polarizačních filtrů.

Fotoelasticimetrie nachází široké uplatnění ve strojírenství, v architektuře a v poslední době pronikla i do lékařství.

Její využití je neocenitelné při navrhování těch strojních součástí, které mají nepravidelné obrysy. Zde tvoří spojení mezi matematickou teorií pružnosti a pevnosti a mezi elastickými napětími v nepravidelných tvarech. Matematického řešení můžeme použít v těch případech, kdy konstrukce nebo součásti nejsou tvarově příliš složité. Fotoelastickým měření můžeme dále velmi přesně zjistit průběh a velikosti hlavních napětí na modelech různých konstrukcí, jako jsou např. přehrady, stěny, klenby, opěrné zdi, mosty atd. Ve strojírenství to jsou kola, ojnice, závěsné háky a další komplikované součásti, jejichž výpočet bývá pracný a obtížný.

Cílem, který je sledován při fotoelasticimetrickém vyšetřování napjatosti, je navrhnout vyhovující tvar konstrukce a každého jejího detailu při dokonalém využití konstrukčního materiálu. Správně navržené konstrukce a vhodně volený materiál zaručuje jeho hospodárné využití. Konstrukční materiál nebude pak v žádném místě namáhán nad přípustnou mez při minimální váze konstrukce.

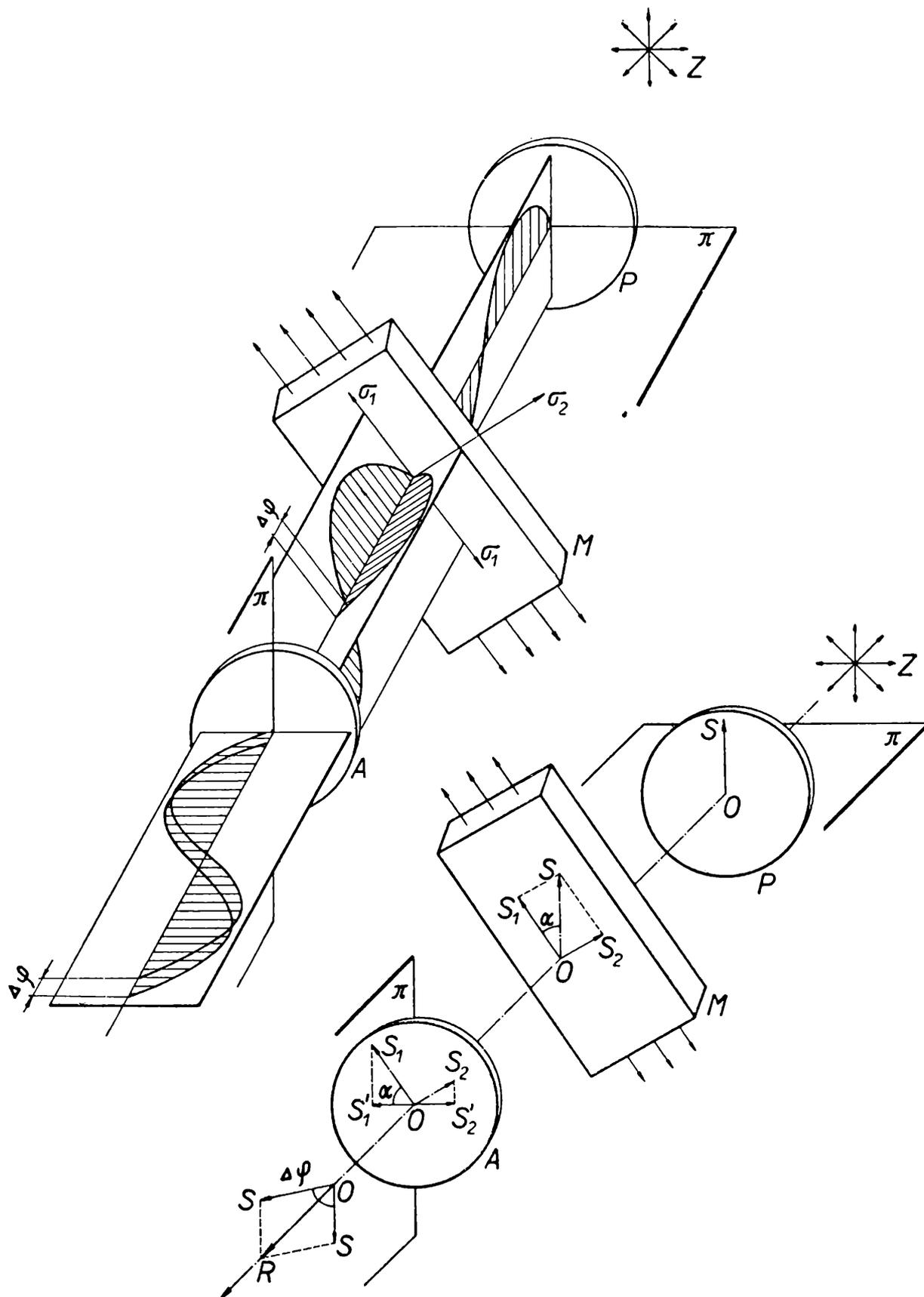
V současné době pronikla fotoelasticimetrie i do lékařství. Zde se jí používá hlavně k zjištění příčin poruchovosti akrylátových endoprotéz hlavice kyčelního kloubu²).

Další možností fotoelasticimetrie je její použití na řešení jiných fyzikálních problémů, např. vyšetřování proudění tekutin. Fotoelasticimetrie se osvědčila také při výrobě a kontrole velmi kvalitních výrobků ze skla při zjišťování a měření vnitřních napětí.

Princip fotoelasticimetrie spočívá na schopnosti určitých látek, jako je sklo, celuloid, plexisklo aj. vykazovat dočasný dvojlom. Chceme-li

¹) Tento článek navazuje na článek Z á k l a d y f o t o e l a s t i c i m e t r i e uveřejněný v 9. čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních.

²) Protéza hlavice kyčelního kloubu, zhotovená z fotoelasticimetrického materiálu nazvaného akrylát. Jádro protézy je vyrobeno z kovu. Akrylátová endoprotéza (e n d o znamená řecky vnitřní, p r o t é z a je umělá náhrada části lidského těla), se zavádí do lidského těla na místo porušeného kloubu operativně.



Obr. 1. Průchod světla polariskopem. a) světelné vektory při přímkové polarizaci, b) schéma přímkové polarizace.

Z - zdroj obyčejného světla, P - polarizátor, M - fotoelasticimetrický model v napjatém stavu (síla působí na hranolek ve směru šipek), A - analyzátor, π - polarizační rovina, σ_1 , σ_2 - hlavní napětí, $\Delta\varphi$ - fázové zpoždění.

vyšetřovat průběh a velikost napětí v určité rovinné součásti nebo konstrukci, musíme vyrobit její průhledný model (tzv. *f o t o e l a s t i c k ý m o d e l*) z pružného materiálu o tloušťce asi 6 mm. Tvar modelu musí být geometricky podobný skutečné konstrukci, v níž je třeba zjistit rozdělení napětí a zatížení modelu během proměřování musí být podobné zatížení skutečné konstrukce. Takto připravený model pak pozorujeme v polarizovaném světle.

Přístroj nebo optický systém, kterého nejčastěji používáme na získání polarizovaného světla a vytvoření fotoelasticimetrických obrazů pro stanovení napětí v modelu, nazýváme *p o l a r i s k o p e m*.

Polariskop obsahuje obecně zdroj světla, polarizační zařízení nazývané *p o l a r i z á t o r*, fotoelasticimetrický model a druhé polarizační zařízení *a n a l y z á t o r*. Kromě toho může obsahovat soustavu čoček, promítací plochu a jiné příslušenství na optické pozorování nebo fotografický záznam. Všimněme si nyní podrobněji průchodu světla polariskopem (obr. 1).

Světelný paprsek vycházející ze zdroje Z je polarizátorem P (což je Nikolův hranol nebo polarizační filtr) přímkově polarizován. V modelu M se polarizační světlo rozkládá do dvou složek ve směru hlavních napětí σ_1, σ_2 a prochází dále v hlavních rovinách.

Jestliže nejsou hlavní napětí stejně velká, budou optické vlastnosti ve dvou hlavních rovinách rozdílné a rychlost procházejícího světla v jedné rovině bude větší než v druhé. Po průchodu světla modelem vznikne proto mezi oběma složkami dráhový rozdíl, a tedy i fázový rozdíl $\Delta\varphi$. Tento rozdíl je úměrný, jak již bylo řečeno, rozdílu hlavních napětí

$$\Delta\varphi \sim \sigma_1 - \sigma_2 .$$

Vraťme se nyní k dopadu světla na napjatý model. Vyjádříme si složky světelného vektoru \vec{OS} , do nichž se polarizované světlo v modelu rozložilo

$$\vec{OS}_1 = \vec{OS} \cos \alpha ,$$

$$\vec{OS}_2 = \vec{OS} \sin \alpha .$$

Při průchodu těchto paprsků analyzátozem se oba usměrní do jedné roviny kolmé na polarizační rovinu analyzátoru. Přitom si však vzájemný rozdíl fází zachovávají. Z obr. 1 je zřejmé, že pro tyto usměrněné složky platí

$$\vec{OS}'_1 = \vec{OS} \sin \alpha \cos \alpha ,$$

$$\vec{OS}'_2 = - \vec{OS} \sin \alpha \cos \alpha .$$

Výsledný světelný vektor (vektor elektrické intenzity E) je po průchodu analyzátozem dán geometrickým součtem obou složek

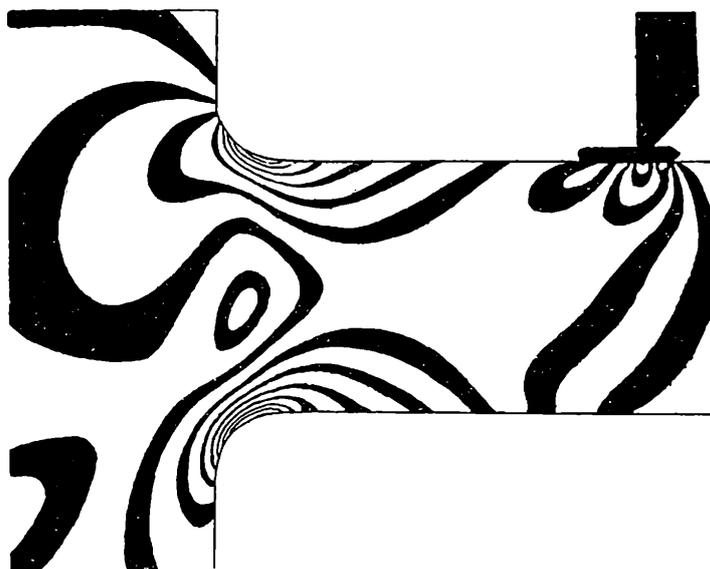
$$\overline{OR}^2 = \overline{OS}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \overline{OS}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2\overline{OS}^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos \Delta\varphi$$

Položíme-li $|\overrightarrow{OS}| = 1$ a označíme-li \overline{OR}^2 intenzitou výsledného světelného záření I , dostaneme

$$I = 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos \Delta\varphi$$

a po úpravě

$$I = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} .$$



Obr. 2. Fotografie izochromatických čar krátkého konzolového nosníku.

Nulová intenzita, tj. ztmavění některých míst pozorovaného modelu, nastává, když

$$I = \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 .$$

To může nastat, jestliže

$$\sin^2 2\alpha = 0, \text{ tj. } \alpha = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ (} n \text{ je celé číslo) ,}$$

nebo

$$\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 0, \text{ tj. } \Delta\varphi = 2n\pi \text{ (} n \text{ je celé číslo)}$$

V prvním případě vytvoří množina tmavých bodů izoklinné křivky izokliny, v druhém případě izochromatické křivky izochromy. (Připomeňme si nyní, že $\Delta\varphi \sim \sigma_1 - \sigma_2$.)

Speciálně pro $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ půjde o tzv. s i n g u l á r n í b o d y. Zatím co u monochromatického světla vznikají při fázovém rozdílu $\Delta\varphi = 2n\pi$ tmavé čáry, nastává při použití obyčejného světla, v němž jsou zastoupeny barevné složky, různé zbarvení čar podle toho, které vlnové délce odpovídají.

Izochromatické křivky jsou tedy geometrická místa bodů stejně zbarvených konstantním dvojlomem. Zároveň nám definují geometrická místa bodů stejných rozdílů hlavních napětí.

Vložíme-li mezi polarizátor a analyzátor nezatížený model vyrobený z fotoelastických materiálů, zůstává zorné pole tmavé (polarizační roviny polarizátoru a analyzátoru jsou zkřížené). Zatížením modelu se zorné pole zpočátku vyjasní a zároveň je v něm možné pozorovat vznik izokliny. Otáčíme-li polarizátorem a analyzátozem tak, že jejich polarizační roviny zůstávají vzájemně kolmé, odpovídá každé jejich poloze další izoklina.

Izokliny tedy definujeme jako geometrická místa bodů, v nichž jsou směry hlavních napětí σ_1 a σ_2 rovnoběžné nebo kolmé ke směru zkřížených polarizačních rovin polarizátoru a analyzátoru.

Izochromatické křivky se objevují teprve při dalším zvětšování zatížení.

Závěrem lze říci, že fotoelasticimetrie je typickým příkladem avantgardního vztahu vědy k technice. Její historický vývoj od prvních laboratorních pokusů s umělým dvojlomem až k dnešnímu mnohostrannému využití v technické praxi ukazuje na důležitou úlohu vědeckého výzkumu pro společnost.

I n ž. Z d e n ě k K o s, Praha:

Sedimentace

Jedním z velkých problémů vodního hospodářství je čistota toků. Nejen dnes, kdy z některých řek jsou stoky bez jakéhokoliv života zamořující své okolí zápachem, ale také proto, že čistota toků se neustále zhoršuje. Našemu hospodářství tak vznikají obrovské škody. Pro zásobení obyvatelstva a průmyslu vodou je třeba stále více vodních zdrojů. Zdroje podzemní vody nestačí, a proto je třeba nákladně čistit vodu z řek.

Jak se máme vypořádat s tímto problémem. Jedním z účinných prostředků boje proti znečišťování toků je budování čistících stanic. Nejjednodušší takovou stanicí a zároveň jedním z důležitých prvků i roz-

sáhlých čistících stanic jsou usazovací nádrže, kde se pohyb vody zpomalí a částice, obsažené ve vodě, které mají větší měrnou váhu než voda, sedimentují, čili usazují se na dně, odkud jsou dále stírány, čerpány a zpracovány.

Pro návrh těchto zařízení je základním údajem rychlost, jakou tyto částice klesají. Odvodíme si zákon pro tuto tzv. rychlost sedimentace.

Uvažujme určitou usazující se částičku, která nemění svou velikost ani tvar a hmotnost a která má větší hustotu než kapalina. Když se tato částička pohybuje v kapalině, bude se rychlost jejího pohybu zpočátku zrychlovat, až tření, které působí odpor prostředí, se bude rovnat zrychlující síle a částička se bude pohybovat stálou rychlostí, a to rychlostí sedimentace. Podmínkou rovnováhy tedy je, aby efektivní tíha G_e se rovnala tření T

$$G_e = T \quad [\text{N}] \quad (1)$$

Efektivní tíha je tíha částičky v kapalině, tj.

$$G_e = (s_1 - s_2) V g, \quad [\text{N}] \quad (2)$$

kde s_1 je hustota částičky a s_2 hustota kapaliny, V je objem částice a g je tíhové zrychlení. Velikost odporu T závisí na řadě činitelů.

Především je nutno posoudit, jaký druh proudění nastane při pohybu částice v kapalině. Buď jsou dráhy blízkých vodních částic navzájem rovnoběžné, pak mluvíme o pohybu laminárním, nebo vířili se kapalina při pohybu částice v jejím okolí, nastává pohyb turbulentní. O jaký druh pohybu jde, posuzujeme podle tzv. Reynoldsova čísla.

Je to bezrozměrné číslo, které je dáno výrazem

$$R_e = \frac{d v s_2}{\eta} \left[\frac{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}{\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}} \right], \quad (3)$$

kde d je průměr částice, v je rychlost jejího pohybu, s_2 je hustota kapaliny a η je její dynamická viskozita. Podle R_e se určuje druh proudění. Pro $R_e \leq 1$, čili pro $d v s_2 \eta^{-1} \leq 1$ nastává proudění laminární. Tento vztah je možno vyjádřit slovy takto:

Aby nenastalo v kapalině víření při pohybu částice, musí být průměr částice d , její rychlost v a hustota kapaliny s_2 dostatečně malá. Zároveň vzniku víření brání větší dynamická viskozita kapaliny η .

Velikost odporu pak charakterizujeme různými vzorci podle druhu proudění. Společný tvar pro tyto vzorce má závislost

$$T = k c d^2 v^2 s_2, \quad [\text{N}] \quad (4)$$

čili odpor je přímo úměrný konstantě, závislé na tvaru tělesa k , koeficientu odporu c , dvojmoci průměru d , dvojmoci rychlosti v , a hustotě

kapaliny s_2 . Koeficient odporu c pro laminární proudění je nepřímo úměrný Reynoldsovu číslu

$$c = \frac{a}{Re} \text{ pro } Re \leq 1. \quad (5)$$

Dosadíme-li (5) a (3) do (4), dostáváme pro laminární proudění

$$T = \frac{a \eta}{d v s_2} k d^2 v^2 s_2 = C d v \eta \quad [\text{N}] \quad (6)$$

pro kulové částice $C = a \cdot k = 3\pi$, jak odvodil Stokes. Pro kulovou částici tedy platí

$$T = 3\pi d v \eta \quad [\text{N}] \quad (7)$$

Hodnota součinitele $\eta d v n$ viskosity závisí pro danou kapalinu hlavně na teplotě. Pro vodu má tyto hodnoty

Teplota °C	0	5	10	15	20	30	40	60	80
$\eta [10^5 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}]$	180	153	130	114	101	80	65	47	36

Pro $1 < Re < 500$ má koeficient odporu následující závislost na Reynoldsově čísle, jak bylo pokusně dokázáno

$$c = \frac{18,5}{Re^{0,6}} \doteq \frac{18,5}{Re^{2/3}}. \quad (8)$$

Po této přechodné oblasti nastává plně turbulentní pohyb, kdy koeficient odporu je téměř konstantní a pro $500 < Re < 150\,000$ je

$$c = 0,44 \quad (9)$$

rovnice (4) pak má tvar

$$T = 0,44 k d^2 v^2 s_2 \quad [\text{N}] \quad (10)$$

Nyní můžeme stanovit podmínky rovnováhy částice při rovnoměrné rychlosti usazování. Dosadíme z rovnic (2), (7) či (10) do rovnice (1) pro případy laminárního a turbulentního proudění. Pro laminární proudění dostáváme

$$g (s_1 - s_2) V = C d v \eta \quad [\text{N}] \quad (11)$$

Dosadíme-li $V = B \cdot d^3$ čili závislost, že objem částice je úměrný trojnásobku jejího charakteristického rozměru d , dostáváme pro rychlost usazování po úpravě

$$v = \frac{B d^2 (s_1 - s_2) g}{C \eta}. \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (12)$$

Pro kulové částice je $B/C = 1/18$. (13)

Dostáváme pak Stokesův zákon pro kulové částice

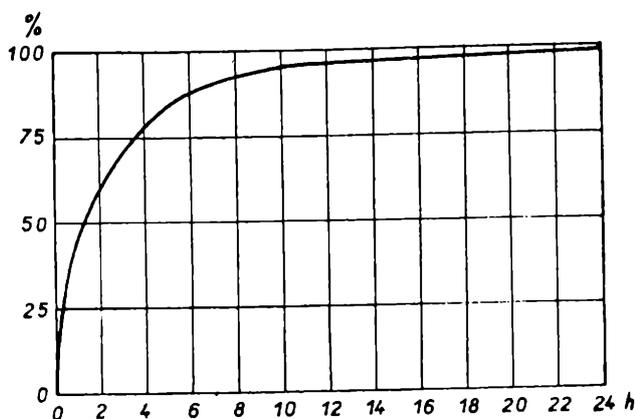
$$v = \frac{d^2 (s_1 - s_2) g}{18 \eta} \text{ pro } Re \leq 1 \quad [\text{ms}^{-1}] \quad (14)$$

Pro turbulentní pohyb $500 < Re < 150\,000$ dostáváme Newtonův zákon

$$(s_1 - s_2) g V = (s_1 - s_2) g B d^3 = 0,44 k d^2 v^2 s_2 \quad [\text{N}] \quad (15)$$

a úpravou

$$v = A \sqrt{\frac{d (s_1 - s_2) g}{s_2}}, \text{ kde } A = \sqrt{\frac{B}{0,44 k}}. \quad (16)$$



Obr. 1. Sedimentační křivka.

me do rovnice (14), protože předpokládáme laminární proudění

$$v = \frac{(2650 - 1000)}{18 \cdot 101 \cdot 10^{-5}} (10^{-4})^2 \cdot 9,81 = 9 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Přesvědčíme se, zda skutečně laminární proudění nastane výpočtem Reynoldsova čísla podle rovnice (3)

$$Re = \frac{10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{1,01 \cdot 10^{-3}} = 0,9 < 1$$

V praxi narážejí výpočty podle těchto vzorců na řadu obtíží. Předpoklady, za kterých byly odvozeny tyto vzorce, nejsou nikdy dokonale splněny. Těžko se zjišťuje také hustota, velikost a tvar částic. Při pohybu nemá jedna částice ovlivňovat druhou.

Jednodušeji docházíme k výsledkům, když zjistíme usazovací rychlost empirickou cestou. V kalibrovaných nádobách měříme objem kalu v určitých časových intervalech, např. za $1/2$, 1, 2 a 24 hod. a vyneseme % usazeného kalu v závislosti na čase. Dostáváme tzv. sedimentační křivky (obr. 1). Z nich je možno určit dobu, kdy se usadí největší část kalu.

Z této doby t , z výšky sloupce vody h zjistíme rychlost usazování v

$$v = \frac{h}{t} \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (17)$$

Na základě rychlosti usazování, zjištěné buď výpočtem nebo empiricky, navrhujeme pak usazovací nádrže tímto způsobem: Předpokládáme nádrž ve tvaru hranolu, dlouhou l metrů, širokou s metrů a hloubkou h metrů, kde h je výška hladiny nad kalovým prostorem. Částice, která je na začátku usazovacího prostoru, postupuje vpřed rychlostí v_p a klesá rychlostí v . Za čas t postoupí částice ve směru vodorovném o délku $l = v_p t$ a klesne o výšku $h = v t$. Z první rovnice vypočteme t a dosadíme do druhé rovnice

$$h = \frac{v l}{v_p} \quad [\text{m}] \quad (18)$$

Rychlost v_p však můžeme vyjádřit též z předpokladu, že kapalina protéká vodorovně rovnoměrně usazovací nádrží. Plocha řezu, kolmého na směr rychlosti je $h \cdot s$. Při rovnoměrném pohybu platí, že objemový průtok Q [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] se rovná součinu střední rychlosti v_p [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] a plochy příčného řezu, kolmého na směr rychlosti $h \cdot s$ [m^2], čili

$$Q = h \cdot s \cdot v_p \text{ a z toho rychlost } v_p = \frac{Q}{h \cdot s} \quad (19)$$

a dosazením do (18)

$$h = \frac{v \cdot h \cdot s}{Q} l \quad [\text{m}] \quad (20)$$

a úpravou

$$l \cdot s = \frac{Q}{v} \quad [\text{m}^2], \quad (21)$$

čili plocha usazovací nádrže se rovná poměru objemového průtoku a usazovací rychlosti. Na základě této rovnice navrhujeme usazovací nádrže.

Příklad 2. Máme navrhnout usazovací nádrž na čištění prací vody 20 °C teplé, která je znečištěna pískem, jehož zrna mají nejmenší velikost 0,1 mm a jsou zhruba kulového tvaru. Podle příkladu 1. je usazovací rychlost $v = 9 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Průtok vody je $Q = 18 \text{ l/s} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Potom velikost plochy usazovací nádrže bude

$$l \cdot s = \frac{1,8 \cdot 10^{-2}}{0,9 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m}^2$$

Zvolíme-li šířku $s = 1 \text{ m}$, dostáváme délku $l = 20 \text{ m}$.

Hokejové mistrovství světa a matematika



V závěru letošního mistrovství světa v ledním hokeji velmi naléhavě vyvstala do popředí otázka jak se rozhodne o pořadí v případě, že dvě nebo více národních mužstev získá týž počet bodů. Jistě ještě dnes vzpomínáte na situaci v tabulce před posledním dnem mistrovství. Sportovní rubriky všech denních listů přinášely výňatky z řádu mistrovství, v nichž se samozřejmě myslí i na tuto možnost. V případě rovnosti bodů o pořadí rozhodne rozdíl branek ve skóre. Je-li rozdíl branek u obou mužstev týž, pak rozhoduje podíl branek. Jestliže také podíl je týž, pořadí se určí podle počtu nastřílených branek. Ještě se uváděly další podmínky a kritéria, které však nás nyní nebudou zajímat.

Pokusme se podle řádu mistrovství rozhodnout o pořadí mužstev X a Y (přirozeně předpokládáme $X \neq Y$), které mají týž počet bodů a týž rozdíl i podíl branek. Nechť jejich skóre je $a : b$ a $c : d$; pro jednoduchost předpokládáme, že všechna čísla a, b, c, d jsou kladná (a ovšem celá). Pak platí

$$a - b = c - d \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Z druhé rovnice najdeme

$$c = ka \qquad d = kb \qquad (k > 0),$$

a tedy po dosazení do první

$$a - b = k(a - b)$$

Za předpokladu $a - b \neq 0$ dostaneme odtud $k = 1$. Nalezený výsledek však znamená: Při stejném rozdílu a podílu skóre (a při různém počtu nastřílených a obdržovaných branek) obě mužstva mají stejné skóre. Nelze tedy v tomto případě roz-

hodnout o poradí mužstev podle počtu nastřílených branek. K určení poradí je třeba připojit jinou vhodnou podmínku.

Za předpokladu $a - b = 0$, tj. $a = b$, je také $c = d$. Jestliže přitom $a = c$, pak opět obě mužstva mají stejné skóre.

Jenom v případě $a = b, c = d, a \neq c$, můžeme podle řádu rozhodnout o poradí. Za předpokladu $a > c$ ($a < c$), je mužstvo X před Y (Y před X).

↑

—an

Různé



Tibor Szébenyi, Bratislava:

Príspevok k dejinám matematických strojov

Takmer v každej knihe, v každom článku, pri rozoberaní histórie počítačích matematických strojov sa začína Blaise Pascalom (1623—1662). Tento francúzsky matematik, fyzik a filozof zostrojil v roku 1642 počítačací stroj, ktorý sa až donedávna pokladal za prvý počítačací stroj na svete.

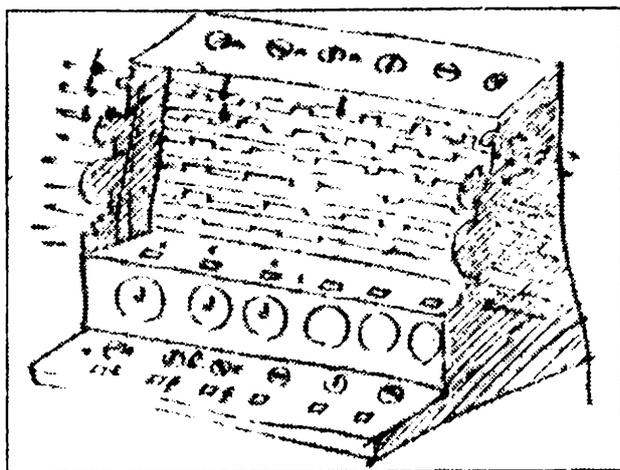
V roku 1958 predložil Dr. František Hammer Medzinárodnému kongresu prehistóriu matematiky v Matematickom výskumnom ústave v Oberwolfachu materiály, ktorými poukázal, že už v roku 1623, teda už pred Pascalom, bol zhotovený počítačací stroj geniálnym matematikom, geodetom, astronómom, profesorom na univerzite v Tübingene Wilhelmom Schickardtom (22. IV. 1592—23. X. 1635). Dr. Hammer, riaditeľ Keplerovho výskumného ústavu bavorskej akadémie vied, našiel totiž pri štúdiu Keplerových rukopisov korešpondenciu Schickardta s Keplerom. V liste z 20. IX. 1623 medzi iným píše Schickardt Keplerovi:

„To isté čo si previedol výpočtom, pokúšal som sa vypočítať v poslednej dobe mechanickou cestou strojom, ktorého počítačací mechanizmus som skonštruoval z jedenástich úplných a šiestich neúplných koliesok, ktoré okamžite automaticky otáčali nastavené číslice: sčítali, odčítali, násobili a delili.“

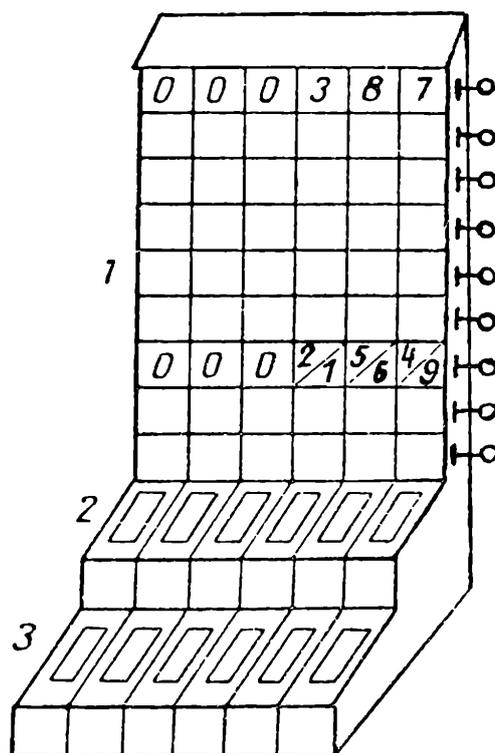
Schickardtov stroj je teda oproti Pascalovmu spočítavaciemu stroju o to dokonalejší, že je schopný násobiť a deliť. V archíve v Stuttgarte našiel Hammer dokonca perokresby Schickardtovho počítača s poznám-

kami, ktoré pripojil staviteľ tohto stroja, mechanik Wilhelm Pfister z Tübingenu. Na obrázku 1. je jedna z perokresieb tohto počítačieho stroja. Z perokresieb a spomínaných už poznámok sa previedla rekonštrukcia počítača, ktorý bol predvedený v máji roku 1960 na univerzitných prednáškach v Tübingene. Dnes je tento model uložený v radnici mesta Tübingen, kde sa nachádza aj druhý model zostrojený francúzskym profesorom Jean-Paul Fladom a belgickým inžinierom Paul Lefèbvróm.

Schickardtov počítačie stroj sa skladal z troch častí: zlučovacie zariadenie, násobiace zariadenie a mechanizmus pre zapisovanie čiastočných výsledkov. Schéma tohto stroja je znázornená na obr. 2.



Obr. 1



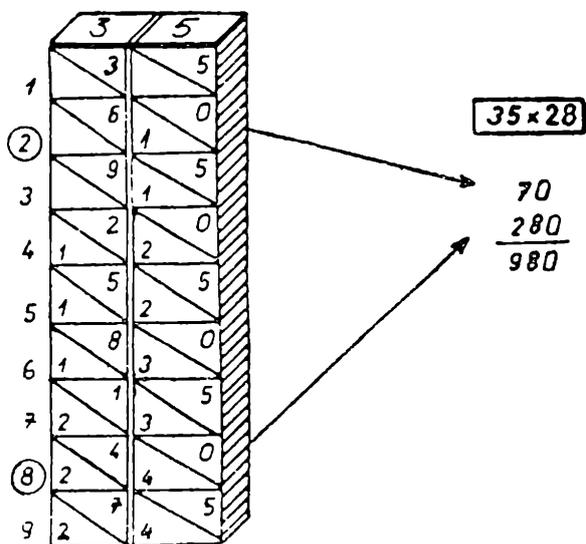
Obr. 2

Zlučovacie zariadenie (časť 2.) je zostrojené v podstate na tom istom princípe ako aj všetky ostatné mechanické sčítačky našej doby. Má ozubené kolieska, ktoré svojim otáčaním realizujú sčítanie na jednotlivých rádoch. Čísla, ktoré sa vkladajú do stroja sa pripočítajú k číslam už predtým vloženým do stroja. Prenos čísiel do vyšších rádoch sa prevádza taktiež pomocou ozubených koliesok, ktoré otáčajú kolieska nasledujúcich vyšších rádoch o 0,1 obrátky. Technická úprava stroja umožňuje vidieť v okienkach číslo prvého sčítanca (alebo menšenca) a nasledujúce súčty resp. rozdiely, až do konečného výsledku.

Zaujímavým spôsobom je v tomto stroji rozriešené násobenie čísiel (v časti 1.). V podstate je založené na Neperových kostičkách ktoré si stručne popíšeme. Tieto kostičky sa nazývajú podľa ich vynálezcu

škótskeho matematika **J o h n a N e p e r a** (1550—1617). Ich existencia bola už známa koncom XVI. storočia, no popísané boli až v roku 1617. Každému dekadickému číslu A prislúcha zvláštna Neperova kostička, ktorá je rozdelená do deviatich obdĺžnikových políčok. Do týchto políčok sú zaznamenané čísla zhora nadol v postupnosti $A, 2A, 3A, \dots, 9A$ spôsobom vyznačeným na obr. 3. Z tohto obrázku na príklade 35×28 je aj zrejmý spôsob, akým sa realizovalo násobenie čísiel. Číslo nachádzajúce sa v ľavej dolnej polovičke sa sčíta s číslom v pravej hornej polovičke, nachádzajúcim sa po jeho ľavej strane. Ak je tento súčet číslo väčšie ako 10 pripočíta sa jednička k číslu vľavo stojacemu na ľavej dolnej polovičke.

Vráťme sa však k násobiacemu zariadeniu Schickardtovho stroja. V tejto časti je šesť valcov, na ktorých plášti sa nachádza tabuľka násobenia (podobného obsahu ako u Neperových kostičiek), ktorá je zobrazená na obr. 4. Pred valcami je postavený panel s deviatimi radmi



Obr. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	4	6	8	10	12	14	16	18	0
3	6	9	12	15	18	21	24	27	0
4	8	12	16	20	24	28	32	36	0
5	10	15	20	25	30	35	40	45	0
6	12	18	24	30	36	42	48	54	0
7	14	21	28	35	42	49	56	63	0
8	16	24	32	40	48	56	64	72	0
9	18	27	36	45	54	63	72	81	0

Obr. 4

okienok. Každý rad sa odkrýva a zakrýva špeciálnym zariadením, nachádzajúcim sa na boku panela. Pre ľahšie pochopenie spôsobu, ako sa týmto zariadením násobilo si vypočítajme súčin 387×27 . Všetky valce sa otočením ustália do takej polohy, aby sa v hornom rade okienok objavil násobenec 0 0 0 3 8 7. Čiastočný súčin 387×7 dostaneme jednoduchým odkrytím okienok v siedmom riadku, v ktorom sa objaví číslo 0 0 0 2/1 5/6 4/9 čo po jednoduchom výpočte spamäti znamená 2709 (analogický výpočet ako u Neperových kostičiek). Druhý čiastočný súčin 387×20 dostaneme zase odkrytím okienok v druhom riadku tj. dostávame číslo 0 0 0 0/6 1/6 1/4 čo znamená 774; keďže sa jedná a násobenie desiatkami pripíšeme sprava 0. Oba čiastočné súčiny 2709 a 7740 sa sčítajú na zlučovacom zariadení a tak dostávame hľadané číslo 10 449.

Delenie sa na tomto stroji prevádza postupným odčítaním na zlučovacom zariadení. Tento postup je ten istý, ako u v súčasnosti používanej mechanickej kalkulačky NISA, lenže v primitívnejšej forme.

Tretia časť Schickardtovho stroja, mechanizmus pre zapisovanie čiastočných výsledkov, slúži na zaznamenanie si čísla potrebného pri výpočte.

Profesora Schickardta z Tübingenu musíme pokladať za prvého, ktorému sa podarilo zmechanizovať duševnú prácu človeka. Je však možné, že v budúcnosti historici prírodných vied nám z archívov zistia, že aj prof. Schickardt mal svojho predchodcu.

Recenze



Václav Medek: Deskriptívna geometria

Tato kniha seznamuje čtenáře s látkou požadovanou při studiu na stavebních fakultách vysokých technických škol. Podle obsahu je látka rozdělena do tří částí.

V první části jsou nejdříve probrány základy projektivní geometrie v rovině s použitím na konstrukce kuželoseček, dále ohniskové a některé metrické vlastnosti kuželoseček. Z příbuzností je věnována pozornost perspektivní kolineaci a afinitě, a to opět se zřetelem na konstrukce kuželoseček. V přehledu jsou uvedeny základní pojmy a konstrukce v promítacích způsobech rovnoběžného promítání, podrobněji jsou pak vyloženy ve středovém promítání. Tato část je ukončena nejdůležitějšími metodami pro konstrukce v lineární perspektivě.

Ve druhé části jsou podány především vlastnosti rovinných a prostorových křivek, zvláště šroubovice. Pak následují obecné vlastnosti ploch, kterých je potom užito na zvláštní typy ploch. Přitom je vždy uvedena definice probírané skupiny ploch a jejich nejdůležitější společné vlastnosti. Pro většinu ploch jsou prováděny základní konstrukce, tj. určení bodu na ploše, stanovení tečné roviny, rovinný řez plochy, průsečíky přímky s plochou, někdy i obrys plochy v rovnoběžném promítání. Zde je čtenář také seznámen s použitím těchto ploch ve stavební praxi (často jsou zde zařazeny fotografie staveb s takovými plochami). Závěr této části tvoří konstrukce na topografických plochách a použití těchto ploch při zemních pracích.

Velmi užitečná je třetí část knihy, ve které jsou výhradně aplikace deskriptivní geometrie, a to většinou ve stavební praxi. Je tu tzv.

teoretické řešení střech a dvorků, základy kamenořezu, použití deskriptivní geometrie v kartografii, geologii a krystalografii a základy fotogrammetrie. Autor nezapomněl ani na část důležitou pro architekty, kterou je technické osvětlení a končí zmínkou o perspektivním reliéfu.

Ačkoliv se podle určení jedná o vysokoškolskou učebnici, je prostudování této knihy užitečné pro učitele na středních a odborných školách, neboť je seznamuje s rozsahem učiva v deskriptivní geometrii na vysoké škole stavebního směru. Kniha však je zřejmě také vhodná pro ty žáky těchto škol, kteří chtějí pokračovat dále ve studiu na technikách, neboť pod vedením učitele (v zájmových kroužcích) mohou celkem snadno získat znalosti, které mohou později dobře využít. Výklad v knize je podán velmi srozumitelně a je znamenitě doložen pěkně provedenými obrázky, kde časté vyznačení pracovního postupu usnadňuje orientaci v konstrukcích.

Kniha vyšla společným nákladem Slovenského vydavatelstva technickej literatúry v Bratislavě a Státního nakladatelství technické literatury v Praze, 1962. Má 368 stran, 527 obrázků a stojí vázaná 30,50 Kčs.

Karel Drábek

Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Ze zahraničních časopisů

(Dokončení)

V minulém čísle jste se seznámili s dvěma zahraničními časopisy, které mají obdobné zaměření jako *Rozhledy matematicko-fyzikální*: s německým *Archimede* a bulharskou *Matematika*. Všimněme si dalších dvou.

Le facteur X (čti l faktér iks). V Paříži vychází francouzský časopis *Le facteur X* (tj. činitel X) s úvodním heslem *Pozorování má přednost před rozumem*. Tento „měsíčník vědeckých rozmanitostí“ vychází 9krát ročně; roční předplatné pro jednotlivce je 8 NF (nových franků), pro skupinu alespoň 5 předplatitelů 6 NF pro každého, jednotlivá čísla po 16 stranách jsou za 1 NF.

Časopis se zabývá nejrůznějšími problémy z matematiky, geometrie, fyziky, astronomie, historie přírodních věd i lingvistiky, jak se lze přesvědčit z titulů některých článků: *První spojení s umělým satelitem (Sputnikem)*, *Kvadratura kruhu*, *Zlatý řez*, *Rektifikace kružnice (s přesností $7 \cdot 10^{-7}$)*, *Dvojková soustava*, *O loterii*, *Ptolemaios a lom světla*,

O kometách, Kapilarita, Vzpomínka na Lavoisiera, Astronomická pozorování, O číslu deset, Od řeckých akademií k francouzské, Staré délkové míry, Sluneční hodiny apod. Všechny články jsou psány velmi srozumitelně, některé i ve formě dialogů a jsou doprovázeny vtipnými obrázky.

Velmi atraktivní je předkládání některých problémů. Problém je v jednom čísle populárně nadhozen, v dalších číslech se objevují odpovědi čtenářů z řad žáků a hlavně středoškolských učitelů, některá řešení jsou prováděna jen prostými úvahami, jiná zase vědecky přesně. Pěknou ukázkou tohoto typu je úloha: Sestrojte kosočtverec, znáte-li na každé z jeho stran (eventuálně prodloužených) jeden bod a dále směr jedné úhlopříčky. Čtenářům jsou však předkládány i problémy, jejichž řešení nejsou redakci známa, např.: Obchodní cestující má navštívit určitý počet zákazníků v různých místech A, B, C, \dots, N . V jakém pořadí musí vykonat tyto návštěvy, aby cesta trvala co nejkratěji?



LE FACTEUR X

« Observation prime raison »

N° 87

REVUE MENSUELLE
DE VARIÉTÉS SCIENTIFIQUES

MARS 1963

Obálka francouzského časopisu Le Facteur X.

Uveřejněn byl i Eulerův problém: 36 různých důstojníků šesti různých pluků a šesti různých hodnotí postavte do čtverce tak, aby v žádné ze šesti řad ani v žádném ze šesti zástupů nebyli dva důstojníci téže hodnoti ani téhož pluku. Samozřejmě ve všech plucích existují jen tytéž hodnoti.

V rubrice *P o s e l* je mnoho místa věnováno dotazům z řad čtenářů a odpovědím redakce.

V *k o u t k u m l a d ý c h* proběhla soutěž z elementární geometrie. Všimněme si jednoho ze soutěžních příkladů: Je narysována kružnice k o neznámém středu a v ní průměr AB . Pouhým pravítkem vedte z bodu P , který leží mimo kružnici, uvnitř kružnice nebo na ní, kolmici k průměru AB .

V *k o u t k u v e l k ý c h* je věnována pozornost moderní algebře. Originální je návrh studenta J. P. Casanova z Aix-en-Provence na přístroj k rýsování kuželoseček.

Nakonec uvedu texty několika otištěných příkladů, jež mají vždy vtipnou slovní formulaci i název a vedou k dobrému logickému myšlení.

a) **M a n ž e l s k é p á r y.** Za horkého letního dne vypily čtyři páry celkem 32 sklenic limonády. Jana vypila jednu, Julie dvě, Irena tři a Yveta čtyři sklenky. Pan Dupont jich vypil tolik co jeho žena, Dubois dvakrát, Durant třikrát a Dupuis čtyřikrát tolik co jeho žena. Určete jména žen každého manžela!

b) **K o l i k t r o j ú h e l n í k ů ?** Kolik trojúhelníků vytvoří všechny spojnice vrcholů pravidelného osmiúhelníka?

c) **K r á v y.** Dva bratři, Vít a Eduard, mají krávy téže rasy, stejně ustájené, stejně ošetřované a krmené. Deset Vítových krav dá za 30 dní 2160 l mléka. Z mléka svých 5 krav utluče Eduard týdně 12 kg másla. Jednoho dne bylo u nich objednáno 20 kg másla. Kolik litrů mléka k tomu spotřebují?

d) **Z l o m k y.** Dokažte, že součet všech pravých zlomků o témž ce-listvém jmenovateli n , jež nelze dále krátit, je vždy celé číslo!

e) **Ž e b ř í k y.** Určete vzdálenost dvou rovnoběžných svislých zdí A a B ! Žebřík 4 m dlouhý je podepřen u paty zdi A a opírá se o zeď B , žebřík třímetrový je podepřen u B a opírá se zdi A tak, že společný bod obou žebříků je 1 m nad zemí.

f) **N á p i s.** V jazyku IDO čteme tento součet

$$\begin{array}{r} \text{SAGO} \quad (\text{moudrost}) \\ + \text{SANO} \quad (\text{zdraví}) \\ \hline = \text{FELIC} \quad (\text{šťěstí}) \end{array}$$

Za různá písmena dosadte různé cifry, aby součet byl správný.

Középiskolai Matematikai Lapok (Fizika rovattal bővítve), tj. **S t ř e d o š k o l s k ý m a t e m a t i c k ý č a s o p i s** (rozšířený o fyzikální část). Tento maďarský časopis byl ve svých prvních ročnících věnován jen matematice, nyní má i fyzikální část, jak vidíte na podtitulku otištěné obálky. Za semestr vychází 5 čísel po 48 stranách; jedno číslo je za 3,60 Ft (forinty), semestrální předplatné činí 18 Ft.

Časopis je převážně problémářský. Jen málo místa je věnováno samostatným článkům. V posledních dvou ročnících se setkáváme v matematice s těmito tématy: pokrytí roviny podobnými vypuklými mnohoúhelníky; identita polynomů, dělitelnost sedmi, lineární programování. Příklady fyzikálních témat: elementární metody výpočtu polohy těžiště, momentu setrvačnosti, mechanika pevných látek, vlnění, měření krátkých intervalů, fyzikální zákony, vrhy apod.

Velké oblibě se těší soutěže v řešení matematických i fyzikálních úloh. Řešitelů je mnoho, nejlepší řešení jsou otiskována v různých variantách, geometrické příklady jsou doplňovány vzornými obrázky. Na konci soutěže jsou uveřejňována jména nejlepších řešitelů i s jejich fotografiemi.

Úlohy jsou buď původní, nebo jsou přejímány z obdobných časopisů zahraničních: rumunského, sovětského, francouzského, anglického, belgického, polského, amerického i z našich Rozhledů.

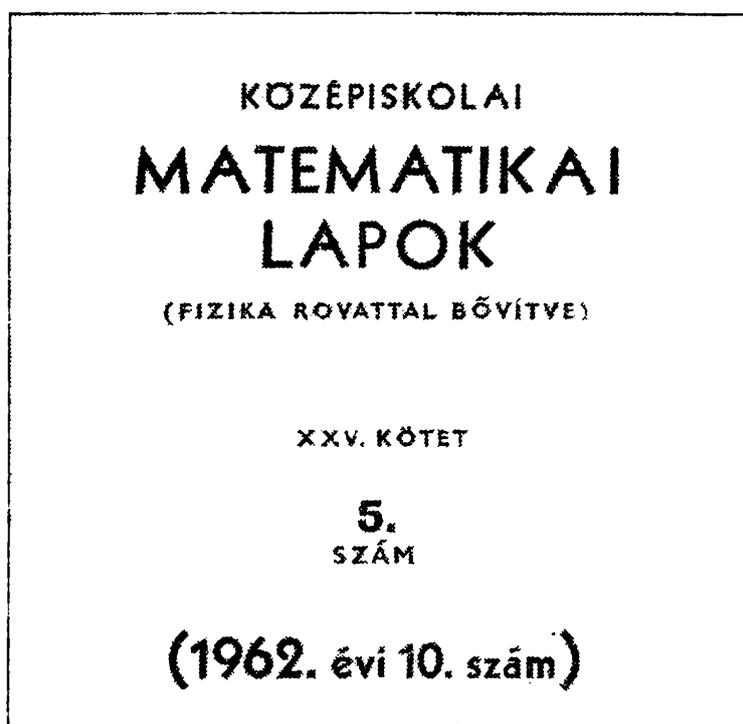
Vybral jsem na ukázkou několik soutěžních příkladů:

1. Je-li n celé kladné číslo, pak zbytek dělení $(10^n - 1) : 37$ je vždy čtverec.

2. Jsou-li p a $8p - 1$ prvočísla, je $8p + 1$ složené číslo.

3. Vložíme-li mezi jednotlivé cifry čísla 1331 stejný počet nul, vznikne úplná trojmoc.

4. Je číslo $\frac{3400!}{(1700!)^2}$ dělitelno 1599?



Obálka maďarského časopisu Matematikai Lapok

5. Určete geometrickou posloupnost, jejíž členy jsou: x , $x^{\log x}$, $y^{\log y}$, $(xy)^{\log xy}$!

6. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka jsou nesoudělná čísla. Poloměr kružnice vně vepsané pravému úhlu měří 420. Určete délky stran trojúhelníka!

7. Jsou-li strany trojúhelníka 8, 9, 11, jsou dvě těžnice vyjádřeny racionálními čísly.

8. Přirozená čísla od 100 do 999 jsou postupně napsána na čtverečkováný papír tak, že v každém čtverečku je právě jedna cifra. Řádka obsahuje 25 čtverečků. Nevejde-li se číslo na řádku, napíše se část na konec jedné řádky a zbytek na začátek další řádky.

- a) Kolik řádek neobsahuje nulu?
 b) Kolik řádek neobsahuje devítku?
 c) V kolika sloupcích chybí nula?
 d) Dokažte, že každá z cifer 1, 2, ..., 9 figuruje ve všech sloupcích!

9. Je-li celé $k > 7$, pak rovnice $5x + 3y = k$ připouští řešení celými nezápornými čísly. Jaké musí být k , aby daná rovnice měla kořeny celé kladné?

10. Na tanečním večírku bylo 31 tančících. Dívka A tančila se 7 hochy, B s osmi, C s devíti, každá další vždy s jedním tanečníkem navíc, až poslední se všemi chlapci kromě tří. Kolik bylo hochů?

11. Průsečíky os vnitřních úhlů trojúhelníka ABC s protilehlými stranami jsou A_1, B_1, C_1 . Dokažte, že obsah trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ nemůže být větší než $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC !

12. V trojúhelníku je $AB < AC$. Sestrojte přímku $a_1 \parallel BC$ tak, aby její průsečíky C_1 a B_1 se stranami AB a AC splňovaly podmínku $BC_1 + C_1 B_1 = CB_1$.

13. Kruhu o poloměru r jsou opsány pravidelné mnohoúhelníky o počtu stran n a $2n$ s obvodem K_n a K_{2n} a vepsány mnohoúhelníky s obvodem k_n a k_{2n} . Dokažte, že platí:

$$K_{2n} = \frac{2K_n \cdot k_n}{K_n + k_n} \qquad k_{2n} = \sqrt{k_n K_{2n}}$$

Podle toho určete ze známých veličin k_4, K_4, k_6, K_6 obvod K_8, k_8 , a K_{24} !

14. V naznačeném odmocňování doplňte hvězdičky vhodnými číslicemi:

$$\begin{array}{r} \sqrt{***8**} = *** \\ \underline{\quad **} \\ \quad *** \quad ** \quad * \\ \underline{\quad **} \\ \quad **** \quad *** \quad * \\ \underline{\quad ****} \\ \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$$

15. Je dán trojúhelník ABC a libovolný bod D na jeho straně AB . Sestrojíme postupně kruhové oblouky: k_A o středu A a poloměru AD až k průsečíku E se stranou AC , k_C (C, CE) až k F na BC , k_B (B, BF) až ke G , dále k'_A (A, AG) až k H , k'_C (C, CH) až k I , k'_B (B, BI) až k průsečíku K se stranou AB . Dokažte, že $K \equiv D$. Zjistěte, pro který výchozí bod D se křivka sestavená předešlým způsobem uzavře po třech obloucích.

Soutěž o nejlepší rys

a) Posudek rysů s geometrickými náměty.

Do soutěže, pořádané našim časopisem, došlo několik desítek rysů, z nichž je většina rýsována tužkou. Soutěže se zúčastnili žáci těchto škol:

Z D Š L o m u M o s t u. Tyto práce ukazují spíše dobrou vůli než skutečnou úroveň; slabý je zejména popis.

S V V Š Ú s t í n a d L a b e m - N a s k ř i v á n k u. Došla řada prací, avšak vesměs od čtyř žáků 3. A ročníku (učitel E. P a v l a t a). Rysy vykazují slušnou úroveň; nejlepší jsou práce J i ř í h o Č e c h u r y.

S V V Š Č e s k ý T ě š í n (učitelka A. H u s t á). Došly rysy od A. Ř e h u l y (9. tř.) a J a n y C h a s á k o v é (10. tř.). Tyto rysy jsou z celé soutěže nejlepší; vyznačují se mimo jiné vzorným popisem.

S V V Š H u s t o p e č e u B r n a (učitel Z h e j b a l). Rysy od A. S o b o t k y (2. roč.) jsou slušné úrovně, avšak popis je celkem nedostačující.

S V V Š P r a h a - B ř e v n o v, P o d M a r j á n k o u (učitelé P e e r, Z e m a n o v á, M a c h á ň). Rysy jsou slušné úrovně, ale opět s velmi slabým popisem.

S V V Š P o l i c e n a d M e t u j í (učitel F. J a n e č e k). Rysy jsou slušné, popis není ovšem nejlepší. Jako nejlepší se jeví J. F i e d l e r o v á.

Podepsaní, spolu s redaktory doc. dr. Menšíkem a doc. O. Setzerem, se rozhodli pro toto pořadí soutěžících:

1. A. Řehula, J. Chasáková z Českého Těšína,
2. Jiří Čechura z Ústí nad Labem.

Z á v ě r. Z předložených rysů vyplývá, že úroveň rýsování na našich školách je stále dost nízká; zarážející je zejména malá péče, věnovaná popisu rysů. Tento závěr vyplývá z toho, že učitelé zaslali patrně práce nejlepších žáků a jak se ukazuje, ani tyto práce - až na několik výjimek - nejsou skutečně vzorné.

Je proto třeba věnovat rýsování na školách mnohem větší pozornost než dosud, neboť nejen že rýsování je důležitou složkou polytechnické výchovy, nýbrž má i značný význam pro technické směry v povolání.

Doc. Emil Kraemer a Jaroslav Bejsta

b) Posudek rysů s technickými náměty ze strojnického oboru.

Z celkového počtu rysů, zaslanych do soutěže, obsahuje pouze 10 rysů technické náměty ze strojnického oboru. 9 rysů je nakresleno na rýsovacím papíře a vytaženo tuší, jeden rys je proveden jako tušový originál na průsvitném papíře. Tyto rysy zaslaly pouze tři všeobecně vzdělávací školy, a to jedna ZDŠ (dva rysy žáků 8. tř.) a dvě SVVŠ (8 rysů žáků z 10. a 11. tř.).

Nepatrný počet škol, které zaslaly rysy do soutěže, a malý počet zaslanych rysů s technickými náměty je projevem nepatrného zájmu škol a jejich učitelů o rýsování vůbec a zvláště o technické rýsování, což je v naprostém protikladu k zájmu naší společnosti o prohloubení polytechnického vzdělání mládeže a přiblížení školy praktickému životu.

Grafická a obsahová úroveň rysů ve srovnání s podobnými dřívějšími akcemi má tendenci klesající a není v ní nijak výrazně vidět vliv zavedení polytechnické výchovy na SVVŠ, takže se zdá, že rýsování není považováno za složku polytechnické výchovy. Je příznačné, že výkresy, zaslane do soutěže, nebyly učiteli vůbec opravovány, třebaže mnohé z nich obsahují nápadné a hrubé chyby.

Rysy ze ZDŠ svědčí o tom, že žáci dosud nezvládli užívání rýsovacích pomůcek ani základní znalosti technického kreslení a vlastně do soutěže nepatří.

Rysy ze SVVŠ ukazují, že žáci nedodržují základní ustanovení norem pro strojnické výkresy, ať z neznalosti, či nepozornosti; projevuje se to zejména v kótování a popisování.

Z předložených osmi rysů mají relativně nejlepší úroveň rysy, zaslane do soutěže S V V Š v P r a z e B ř e v n o v ě a z nich nejlepší žáci této školy

V. Koláček z 10. tř. a V. Čermáková z 11. tř.

Z á v ě r. Z předložených grafických prací vyplývá, že současný stav rýsování na SVVŠ je neuspokojivý a nepřispívá k přípravě mladých lidí pro praktická povolání, neboť téměř ve všech výrobních povoláních jsou dnes technické výkresy nepostradatelným sdělovacím prostředkem. Proto je třeba v polytechnické výchově věnovat více pozornosti rýsování a zejména vychovávat žáky k tomu, aby se zajímali o studium technických oborů již na SVVŠ.

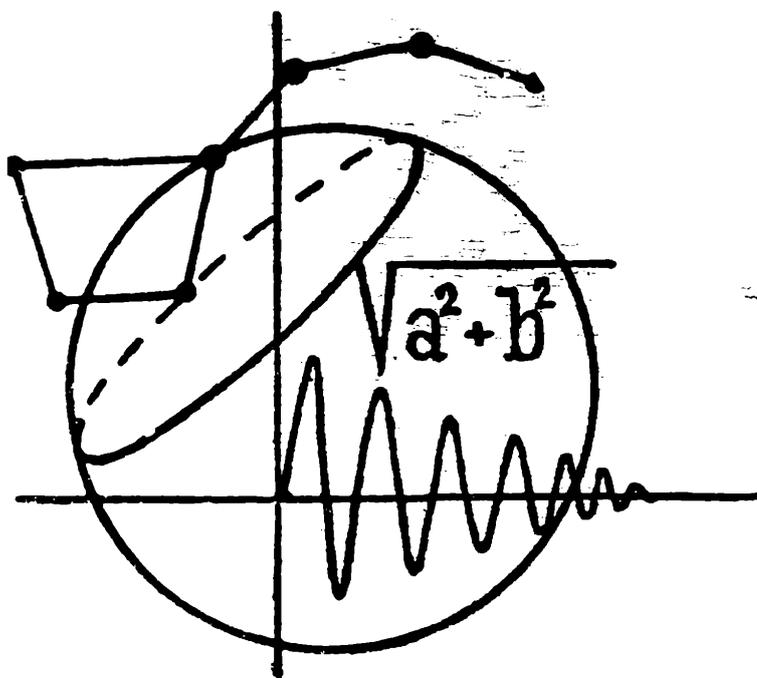
Prof. inž. Josef Kochman

Z technických důvodů byla původní lhůta k odvedení soutěžních rysů značně prodloužena, což však nemělo podstatného vlivu na zvýšení počtu soutěžících. Rysy budou školám vráceny.

Redakce

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJICI ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 1

Toto číslo vyšlo 15. září 1962

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

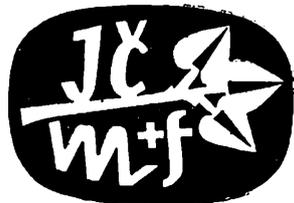
Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VŠT, Brno; *dr. Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; *doc. Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, MŠK, Praha; *prof. dr. Josef Korous*, VŠD, Žilina; *doc. Emil Kraemer*, KU, Praha; *doc. dr. Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; *CSc. Evžen Říman*, ČVUT, Praha; *CSc. Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *CSc. Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; *inž. dr. Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; *prof. dr. Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

P. Kršňák: Horónov vzorec a niektoré aplikácie	1
Inž. J. Klír: Logické obvody	6
O. Lepil: Hranice aerodynamického letu.	13
Inž. dr. V. Šindelář: Moment setrvačnosti	18
F. Rein: Horské observatoře a jejich význam v meteorologii	21
CSc L. Sehnal: Umělé družice a kosmické rakety	24
Úlohy k řešení.	26
Matematické zábavy - řešení.	29
Dr. B. Brauner: Fordovo kluzné auto.	31
Inž. L. Smrž: Kapilární voltmetr.	32
XII. ročník matematické olympiády	33
J. S.: Matematická olympiáda v Čs. televizi	35
IV. ročník soutěže fyzikální olympiády	35
J. Kotyk: Za prof. dr. Janem Sobotkou.	42
J. Kotyk: Rozhledy pomáhají škole.	44
Recenze	47
Redakční sdělení.	48
II. ročník FO v Západoslovenskom kraji.	3. str. obálky
Inž. Z. Tichý: Česko-slovenský slovníček matematických a fyzikálních termínů.	3. str. obálky

1 8 6 2



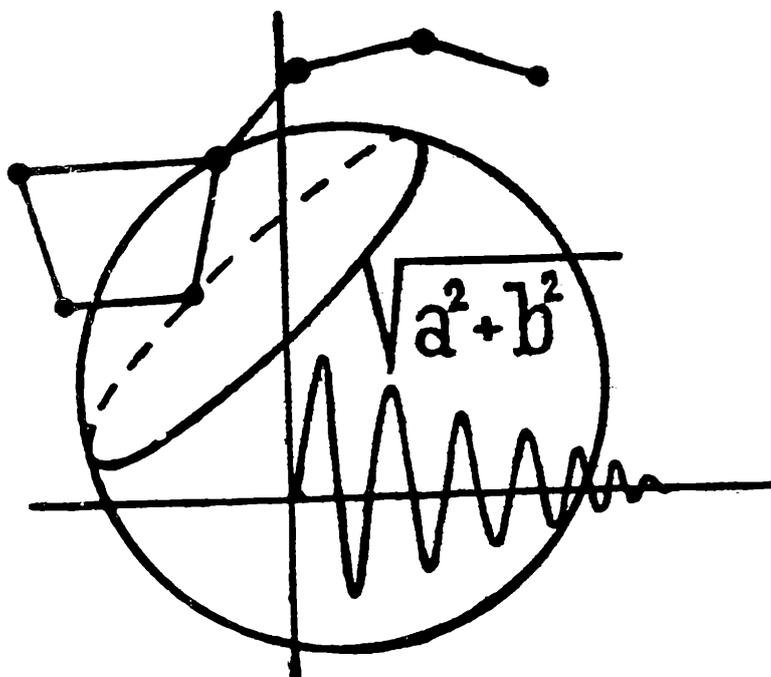
1 9 6 2

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1 A-19*22177. Jazyková úprava: dr. O. Höning. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1962.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



2

ROČ 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 2
Toto číslo vyšlo 15. října 1962

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

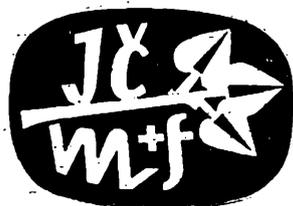
Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnál, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindlář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

R. Cihlář: Kružnice devíti bodů v trojúhelníku.	49
M. Koman: Dělení pravidelného čtyřstěnu.	53
Inž. dr. V. Šindlář: Nová měrová soustava	58
Inž. Z. Kos: Povodně.	61
J. Štefan: Dopplerův jev v raketové technice.	65
Inž. M. Šimek: Rádiový výzkum meteorů.	68
Úlohy k řešení.	73
Matematické zábavy - řešení.	79
Matematická olympiáda	80
Fyzikální olympiáda	83
Recenze	94
J. S.: Seznam vítězů XI. ročníku MO.	3. str. obálky
J. Janovič: Sústředění úspěšných řešitelov matematickej a fyzikálnej olympiády Západoslovenského kraja	3. str. obálky
Inž. Z. T.: Česko-slovenský slovníček matematických a fyzikálních termínů (Pokračování)	4. str. obálky

1 8 6 2



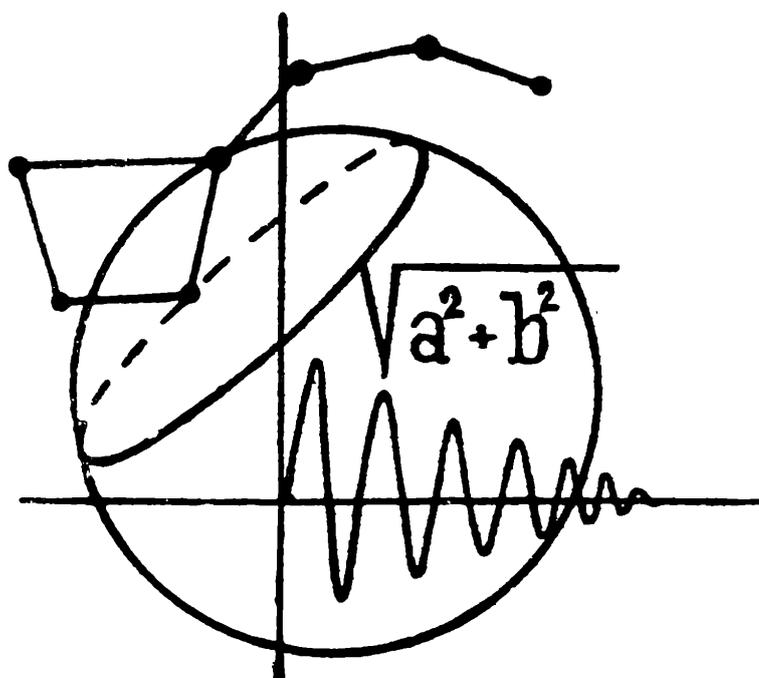
1 9 6 2

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*21433. Jazyková úprava: dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1962.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



3

ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 3

Toto číslo vyšlo 10. listopadu 1962

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VŠT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, MŠK, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, VŠD, Žilina; doc. *Emil Kraemer*, KU, Praha; doc. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

S. Trávníček: O jednom způsobu definice funkce	97
A. Tondl: Neurčité rovnice prvního stupně	101
K. Drábek, dr. J. Pavlíček: Řešení úlohy z konstrukcí trojúhelníka	104
O. Berka: Úlohy o mimoběžkách	107
Prof. dr. V. Santholzer: Fyzikální podstata měřicích zařízení pro ionizační metody	112
Inž. Z. Kos: Povodně (Dokončení)	115
Inž. dr. V. Šindelář: Nová měrová soustava (Pokračování)	118
J. Štefan: Dopplerův jev v raketové technice (Dokončení)	121
Úlohy k řešení	124
Matematické zábavy	132
Inž. dr. B. B.: Zachycený radiokrypton	133
Soutěžní úlohy MO	134
P. Hatala: Štvrtá mezinárodní MO	136
Fyzikální olympiáda	138
Recenze	143
Vysoké školy technického směru v Československu	3. str. obálky
Inž. Z. Tichý: Česko-slovenský slovníček matematických a fyzikálních termínů (Dokončení)	4. str. obálky

1 8 6 2



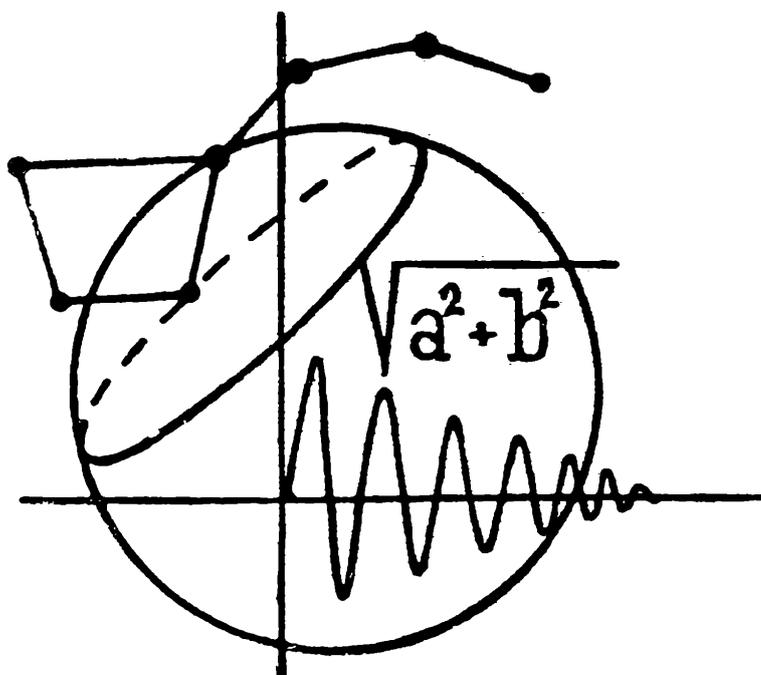
1 9 6 2

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*21479. Jazyková úprava: dr. O. Höning. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1962.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



4

ROČ. 41
1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 4

Toto číslo vyšlo 5. prosince 1962

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VŠT, Brno; *doc. dr. Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; *doc. Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, MŠK, Praha; *prof. dr. Josef Korous*, VŠD, Žilina; *doc. Emil Kraemer*, KU, Praha; *doc. dr. Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; *CSc. Evžen Říman*, ČVUT, Praha; *CSc. Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *CSc. Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; *inž. dr. Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; *prof. dr. Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

O. Lanta: Z geometrie trojúhelníka	145
S. Trávníček: O jednom způsobu definice funkce (Dokončení)	147
A. Tondl: Neurčité rovnice prvního stupně (Dokončení)	152
L. Granát: Použití geometrie v automatizaci obrábění	155
Prof. dr. V. Santholzer: Fyzikální podstata měřících zařízení pro ionizační metody (Dokončení)	161
Inž. dr. V. Šindelář: Nová měrová soustava (Pokračování)	163
Úlohy k řešení	167
Matematická olympiáda	174
Mezinárodní matematická olympiáda	176
Fyzikální olympiáda	178
Matematické zábavy	187
Recenze	191
Z. Ungerman: Třetí ročník FO ve Východočeském kraji	3. str. obálky
Fyzikální olympiáda	4. str. obálky

1 8 6 2



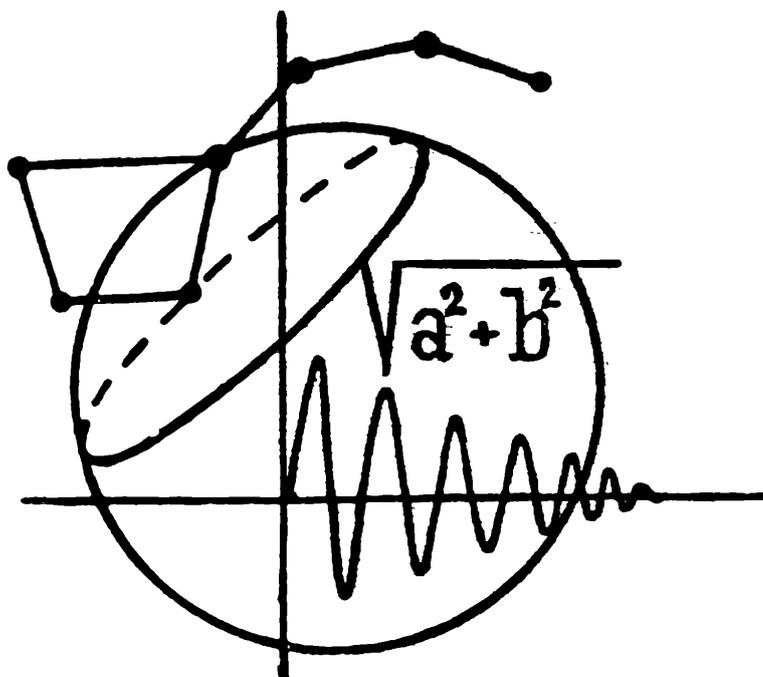
1 9 6 2

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*21545. Jazyková úprava: dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1962.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



5

ROČ. 41
1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 5

Toto číslo vyšlo 15. ledna 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VŠT, Brno; *doc. dr. Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; *doc. Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, MŠK, Praha; *prof. dr. Josef Korous*, VŠD, Žilina; *doc. Emil Kraemer*, KU, Praha; *doc. dr. Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; *CSc. Evžen Říman*, ČVUT, Praha; *CSc. Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *CSc. Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; *inž. dr. Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; *prof. dr. Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

O B S A H

Inž. V. Čapla: Vznik prvního počítačového stroje	193
J. Divíšek: Použití grafických papírů k znázornění některých funkcí	199
J. Weigel: Poznámka k jedné úloze IX. ročníku MO	203
L. Granát: Použití geometrie v automatizaci obrábění (Dokončení)	208
Doc. dr. K. Šoler: Vlastnosti a podstata sil působících v jádře atomů	214
Prof. dr. V. Santholzer: Fyzikální základy měřicích zařízení pro ionizační metody	223
K. Vavřina: Vlastnosti a použití elektretů v praxi	226
Inž. dr. V. Šindelář: Nová měrová soustava (Pokračování)	229
Doc. J. Schmidtmayer: Znalosti a návyky v matematice při vstupu na vysoké školy technického směru	233
J. S.: Československý šach o našich Rozhledech	240
M. M.: Příjímací pohovory na vysoké školy technického směru	240
Seznam vítězů třetího ročníku FO	3. str. obálky
Ukázky příkladů pro přijímací pohovory z matematiky na vysoké školy technického směru	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-05*31036. Jazyková úprava: dr. O. Hönlig. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

Seznam vítězů třetího ročníku FO

- * 1. Košťál Lubor SVVŠ Brno, Křenová 36,
- 2. Mešina Marián SVVŠ Prievidza,
- 3. Veselý Karel SVVŠ Praha 6, Žukovova 33,
- 4. Burian Ivo SVVŠ Prostějov, Kollárova 3,
- 5. Josífko Jaroslav SVVŠ Opava, Komenského 5,
- 6. Schierová Olga SVVŠ Hradec Králové,
- 7. Durman Petr SVVŠ Lipník nad Bečvou,
- 8. Rehák Pavel SPŠ jaderné techniky, Praha 2, Ječná 30,
- 9. Glatz Tomáš SVŠ Košice, Šrobárova 46,
- *10. Fučík Svatopluk SVVŠ Hradec Králové,
- *11. Durdil Jiří SVVŠ Praha 8-Libeň, U libeňského gymnasia 3,
- 12. Tomin Marian SPŠ Handlová,
- *13. Netuka Ivan SVVŠ Hradec Králové,
- 14. Voda Pavol SVŠ Bratislava, Palisády 20/b,
- 15. Berák Jaromír SVVŠ Praha 5-Smíchov, Na Zatlance 2,
- 16. Šmuk Miroslav SVVŠ Ostrava 5-Hladnov,
- *17. Daneš Josef SVVŠ Praha 9-Vysočany, nám. Lidových milicí 700,
- 18. Veselý Marián SVŠ Bratislava, ul. Čs. armády 16,
- 19. Starý Petr SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční 22,
- 20. Brychta Jaroslav SPŠ elektrotechn. Brno, Leninova 40.

Hvězdičkou označení se účastnili i soutěže Rozhledů. Redakce Rozhledů blahopřeje všem vítězům FO a přeje jim mnoho úspěchů v dalším studiu.

Dr. CH.

Cvičíme na přijímací pohovory

1. $\frac{5\frac{1}{4}}{2\frac{7}{8}} = ?$ 2. $\sqrt{0,4} = ?$

3. Řešte nerovnost $(x + 9)(x + 3) > 0$.

4. Upravte zlomek $\frac{1+i}{1-i}$ ($i = \sqrt{-1}$).

5. Z výrazu $a^2 - b^2 - a^3 + b^3$ vytkněte výraz $a - b$.

6. Upravte $\sqrt{\frac{3ab}{2xz}}$ $\sqrt{\frac{2xz^3}{3a^3b}}$

7. Řešte soustavu rovnic $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5.$$

8. Řešte soustavu rovnic $\frac{2x-1}{5} - \frac{3y+2}{7} = 2y-x$

$$\frac{3x-1}{4} + \frac{7y+2}{6} = 2x-y.$$

9. Řešte rovnici $\frac{2x - 5}{3x - 4} - \frac{4x - 5}{6x - 1} = 0$,

10. Řešte rovnici $\frac{\frac{x}{2} - \frac{2x - 1}{3}}{\frac{x}{3} + \frac{3x - 1}{2}} = \frac{2}{3}$.

11. Součet čtverců tří po sobě jdoucích celých čísel je 1202. Která jsou to čísla?

12. Jak se změní obsah obdélníka, když obě jeho strany zvětšíme o 4%?

13. Řešte soustavu rovnic $x^2 + y^2 = 2(xy + 2)$

$$x + y = 6$$

14. Řešte soustavu rovnic $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 7$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 25$$

15. Řešte rovnici $1 + \frac{x + x^2}{1 + 2x} = \frac{x}{2}$

16. Řešte rovnici $x^2 + (a - x)^2 = (a - 2x)^2$.

17. Pojednejte o funkci $y = ax^2$.

18. Užitím vzorce pro součet konvergentní nekonečné geometrické řady převedte ve zvoleném příkladě periodický desetinný zlomek na zlomek obyčejný.

19. Kolik členů aritmetické posloupnosti 2, 5, 8, ... je třeba sečíst, aby součet byl 950?

20. Obvod obecného trojúhelníka je $2s = 84$, obsah $P = 336$ a strany tvoří aritmetickou posloupnost. Určete je.

Třetí ročník FO ve Východočeském kraji

III. ročníku FO ve Východočeském kraji se zúčastnilo 71,4 % středních všeobecně vzdělávacích škol a 8 středních průmyslových škol. Do I. kola se zapojilo celkem 468 žáků. V kategorii A 115, v kategorii B 83 a v kategorii C 270 žáků. II. kolo se konalo pro kategorii A, B v Hradci Králové na SVVŠ a pro kategorii C v Pardubicích na PI.

V II. kole se na prvních místech umístili tito žáci:

Kategorie A

1. Fučík Svatopluk	SVVŠ Hradec Králové,
2. Schierová Olga	SVVŠ Hradec Králové,
3. Cupal Ivan	SVVŠ Česká Třebová,
4. Přidal Jaroslav	SVVŠ Hradec Králové,
5. Petr Karel	SVVŠ Broumov,
6. Ledínský Ladislav	SVVŠ Úpice,
7. Netuka Ivan	SVVŠ Hradec Králové,
8. Souček Radomír	SVVŠ Broumov,
9. Kapoun Karel	SVVŠ Česká Třebová,
10. Tryzna Bohumil	SVVŠ Broumov,
11. Nejezchleba Jan	SVVŠ Broumov,
12. Kupec Milan	SVVŠ Hradec Králové,
13. Benda Vítězslav	SVVŠ Dvůr Králové,
14. Kudrnovský Pavel	SVVŠ Dvůr Králové,
15. Suchánek Josef	SVVŠ Dobruška,
16. Procházková Helena	SVVŠ Hradec Králové.

Všech 16 postoupilo do celostátního kola v Brně.

Kategorie B

1. Jirák Zdeněk	SVVŠ Hradec Králové,
2. Sandler Karel	SVVŠ Česká Třebová,
3. Horáček Jiří	SVVŠ Nová Paka,
4. Matoulek Jiří	SVVŠ Nová Paka,
5. Vais Miloš	SPŠ papírenská Hostinné,
6. Havel Miloš	SVVŠ Nová Paka,
7. Literová Pavla	SVVŠ Semily,
8. Zedková Jitka	SVVŠ Hradec Králové,
9. Prchalová Milena	SVVŠ Vysoké Mýto,
10. Semerád Václav	SVVŠ Přelouč.

Kategorie C

1. Laštovka Jan	SVVŠ Pardubice Slovenského povstání,
2. Havel Miroslav	SVVŠ Pardubice - Slovenského povstání,
3. Skalický Vladimír	SVVŠ Hradec Králové,
4. Václavík Ivan	SVVŠ Hradec Králové,
5. Přeučil Stanislav	SVVŠ Hradec Králové,
6. Čihal Robert	SVVŠ Hradec Králové,

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 7. Vrabc Rudolf | SVVŠ Hradec Králové, |
| 8. Mizera Zdeněk | SVVŠ Turnov, |
| 9. Mašek Jiří | SVVŠ Semily, |
| 10. Opatřil Radomír | SVVŠ Moravská Třebová. |

Všichni úspěšní řešitelé z každé kategorie obdrželi pochvalná uznání a vítězové ještě knižní odměny.

Zdeněk Ungerman

Upozornění pro řešitele úloh FO

Řešitele úloh prvního kola FO upozorňujeme, aby si v l e t á k u „*IV ročník Fyzikální olympiády*“ opravili tyto tiskové chyby (netýká se tedy otisku v Rozhledech matematicko-fyzikálních):

Str. 13, řádek 11. shora má být $f'x$ (místo $f'x'$).

Str. 14, sloupec „Předmět“: ř. 5. zd. χ_k (místo χ_s).

Sloupec „Obraz“: ř. 7. sh. χ'_k (místo χ_k). ř. 9. sh. $-\chi'_k$ (místo χ_k); ř. 7. zd. χ'_k (místo χ_k); ř. 3. zd. $-\chi'_z$ (místo χ'_k).

Sloupec třetí: ř. 3. sh. stejně veliký (místo zmenšený); ř. 4. sh. zvětšený (místo stejně veliký); ř. 5. sh. vynechat; ř. 6. zd. stejně veliký (místo zmenšený); ř. 5. zd. skutečný, přímý, zvětšený (místo zdánlivý, přímý, stejně veliký); ř. 4. zd. vynechat.

Str. 19, obr. 11 χ'_k (vpravo) (místo χ_k); str. 26, ř. 2. sh. hmotu (místo hustotu); str. 30, ř. 6. sh. ρ a ρ_1 (místo ρ na ρ_1).

ÚVFO.

V č. 2. na str. 85 v obr. 5 budiž bod v rovině χ'_k označen K' (nikoliv K).

Redakce.

Vysoké školy technického směru v Československu

České vysoké učení technické v Praze:

- Fakulta stavební
- Fakulta strojní
- Fakulta elektrotechnická
- Fakulta technické a jaderné fyziky

Vysoká škola chemickotechnologická v Praze:

- Fakulta anorganické technologie
- Fakulta organické technologie
- Fakulta technologie paliv a vody
- Fakulta potravinářské technologie
- Fakulta automatizace a ekonomiky

Vysoká škola zemědělská v Praze:

- Fakulta provozně ekonomická v Praze a v Českých Budějovicích
- Fakulta agronomická
- Fakulta mechanizační

Vysoká škola strojní a textilní v Liberci:

- Fakulta strojní
- Fakulta textilní

Vysoká škola chemickotechnologická v Pardubicích

Vysoké učení technické v Brně:

- Fakulta stavební
- Fakulta strojní
- Fakulta elektrotechnická

Vysoká škola zemědělská v Brně:

- Fakulta provozně ekonomická
- Fakulta agronomická
- Fakulta veterinární
- Fakulta lesnická

Vysoká škola báňská v Ostravě:

- Fakulta hornickogeologická
- Fakulta hutnická
- Fakulta báňského strojnictví

Slovenská vysoká škola technická v Bratislavě:

- Fakulta stavební
- Fakulta strojní
- Fakulta elektrotechnická
- Fakulta chemická

Vysoká škola dopravní v Žilině:

- Fakulta provozu a ekonomiky
- Fakulta strojní a elektrotechnická

Vysoká škola technická v Košicích:

- Fakulta hornická
- Fakulta hutnická
- Fakulta strojní

Vysoká škola zemědělská v Nitře:

- Fakulta provozně ekonomická
- Fakulta agronomická
- Fakulta veterinární

Vysoká škola lesnická a dřevařská ve Zvoleni:

- Fakulta dřevařská
- Fakulta lesnická

Sestavil inž. Z. Tichý:

Česko-slovenský slovníček matematických a fyzikálních termínů

(Dokončení)

vynucené kmity — vynútené kmity	zesilovač napětí — zosilňovač napä-
výplňkový — výplnkový	tia
vypuklý úhel — prehnutý (vydutý)	zeslabení — zoslabenie
uhol	zkapalňování — zkvapalňovanie
výseč — výsek	zkrácený — skrácený
vytýkání činitele ze součtu — vyní-	zleva — zlava
manie činiteľa zo součtu	zlomek — zlomok
vyzařování — vyžarovanie	znaménko — znamienko
vzájemná indukčnost — vzájomná	zpoždění — oneskorenie
indukčnost	zprava — sprava
vzdálenost — vzdialenosť	zrcadlo — zrkadlo
vztah — vzťah (relácia)	zrychlení — zrýchlenie
Základna — základňa	zrychlení tečné — zrychlenie tangen-
základní věta — fundamentálna	ciálne
věta	zrychlení tíhové — zrýchlenie gravi-
zákon akce a reakce — zákon akcie	tačné
a reakcie	zřídlo — žriedlo
záření — žiarenie	zvětšení — zváčšenie
zářivý — žiarivý	zvětšení příčné — zváčšenie priečne
závěr matematické věty — záver	
(konklúzia) matematickej vety	Žhavení elektronky — žeravenie elek-
závorka — zátvorka	trónky
zbytek (při dělení) — zvyšok (pri	žhavý — žeravý
delení)	

Seznam 17 vítězů XI. ročníku MO

1. *Jaroslav Ježek, Křesomyslova 2, Praha 4;
2. *Josef Daneš, nám. Lid. milicí 19, Praha 9;
3. Pavol Voda, Palisády 20/b, Bratislava;
4. až 6. *Svatopluk Fučík, Tylovo nábř., Hradec Králové;
*Peter Hatala, Novohradská 2, Bratislava;
Jan Novotný, Staré Hodolany-Olomouc;
7. Mirian Mešina, Prievidza;
8. Karel Veselý, Velvarská 33, Praha 6;
9. *Jiří Čmelík, Liberec;
10. až 12. *Jiří Durdil, U libeňského gymnasia 3, Praha 8;
J. Kolouch, SPŠS, Gottwaldov;
*Lubor Košťál, Křenová 36, Brno;
13. až 14. Ivan Bartůněk, Pražačka 1700, Praha 3;
Josef Podbrdský, Koněvova 47, Brno;
15. až 17. Václav Černý, Moravské Budějovice;
*Ivan Netuka, Tylovo nábřeží, Hradec Králové;
Petr Starý, Ústí nad Labem.

Pokud není jinak uvedeno, jde vesměs o studenty SVVŠ. Adresa za jménem značí sídlo školy. Hvězdičkou označení se účastnili i soutěže Rozhledů.

Redakce Rozhledů srdečně blahopřeje všem vítězům MO a do dalšího studia jim přeje mnoho úspěchů.

J. S.

Sústředení úspěšných řešitel'ov matematickej a fyzikálnej olympiády Západoslvenského kraja

Krajský výbor MO a Krajský výbor FO usporiadali v dňoch 25. až 29. VI. 1962 5denné konzultačné sústredenie úspešných riešitel'ov MO a FO, kategória B, zo Západoslvenského kraja. Sústredenie sa konalo v Trnave.

Vybraných bolo 45 žiakov z 13 SVVŠ a 3 SPŠ Západoslvenského kraja. Sústredenia sa zúčastnilo 37 žiakov, 26 chlapcov a 11 dievčat.

Žiaci mali 6 hodín zamestnanie z matematiky alebo fyziky (prednášky a cvičenia). Na sústredení odzneli nasledujúce prednášky:

Teória čísel (doc. dr. M. Kolibiar). Geometrické miesta bodov (odb. as. P. Grešák). Kinematika (odb. as. dr. I. Náter). Trigonometria (odb. as. T. Neubrunn). Dynamika (odb. as. dr. I. Náter). Rovnice a nerovnosti (odb. as. J. Moravčík). Mechanika kvapalín a plynov (odb. as. J. Janovič). Molekulárna fyzika (odb. as. J. Janovič). Konštrukčné úlohy (odb. as. P. Grešák). Stereometria (odb. as. J. Čižmár). Funkcie (odb. as. J. Eliaš).

Obsahom prednášok boli buď základné poznatky alebo vybrané témy z daného odboru. Prevažná časť vyučovacieho času sa venovala riešeniu úloh.

Popoludnia a večery boli venované kultúrnej a športovorekreačnej činnosti. Žiaci sa zoznámili s históriou a pamätihodnosťami Trnavy. Premietali sa matematické, fyzikálne a zábavné filmy. Súčasťou sústredenia bol autobusový zájazd do Malých Karpát.

Jozef Janovič
vedúci sústredenia

Sestavil inž. Z. Tichý:

Slovensko-český slovníček matematických a fyzikálních termínů

(Pokračování)

Tabulková difference — tabulková diferencia (tabulkový rozdiel)	uspořádaný — usporiadaný
tah — ťah	útlum — útlm
tečka — bodka	uzavřený — uzavretý
tečkovaný — bodkovaný	uzel — uzol
tečna — dotyčnica (tangenta)	Válec — valec
tečnový — dotyčnicový	valit beze smyku — valit bez šmy- kania
tepelný — teplotný	vazební energie — väzbová energia
teplo tání, skupenské — teplo tope- nia, skupenské	vazkost — väzkosť
teplotní rozdíl — teplotný rozdiel	vážený průměr — zvážený priemer
tětiva — tetiva	veličiny nesouměřitelné — veličiny vzájomne nezmerateľné
těžiště — ťažisko	veličiny souměřitelné — veličiny vzájomne zmerateľné
těžnice — ťažnica	velikost — veľkosť
Thaletova věta — Talesova veta	vepsaný — vpísaný
tíže — tiaž (gravitácia)	věta o střední hodnotě — veta o stred- nej hodnote
tlumený — tlmený	větev hyperboly — vetva hyperboly
tlustá čočka — hrubá šošovka	vliv — vplyv
tření — trenie	vlnění — vlnenie
tření tekutin, vnitřní — trenie te- kutín, vnútorné	vlnočet — vlnopočet
tvorící přímka — tvoriaca priamka	vnější — vonkajší
Úbytek intenzity záření — úbytok intenzity žiarenia	vnitřek — vnútro
úhel — uhol	vnitřní — vnútorný
úhlopříčka — uhlopriečka (diagoná- la)	vnitřní tření — vnútorne trenie
úměrnost — úmernost	vodorovný — vodorovný (horizon- tálny)
úseč — odsek	vteřina — sekunda

III. ročník Fyzikální olympiády v Západoslovenskom kraji

V školskom roku 1961/62 sa Fyzikální olympiády v Západoslovenskom kraji zúčastnilo spolu 241 žiakov z 38 škôl. Do II. kola súťaže postúpilo v kategórii A 37 žiakov, v kategórii B 21 žiakov, v kategórii C 22 žiakov.

Úlohy II. kola úspešne vyriešilo v kategórii A 15 žiakov, v kategórii B 6 žiakov, v kategórii C 9 žiakov.

Na prvých miestach medzi úspešnými riešiteľmi II. kola sa umiestili:

Kategória A

- | | |
|------------------|---|
| 1. Hatala Peter | SVŠ Bratislava, Novohradská ul., |
| 2. Voda Pavel | SVŠ Bratislava, Palisády 20/b, |
| 3. Horný Juraj | SVŠ Bratislava, Palisády 20/b, |
| 4. Vojtko Jozef | SVŠ Skalica na Slovensku, |
| 5. Tarábek Pavol | SVŠ Bratislava, Metodova ul., |
| 6. Kučera Marek | SVŠ Trnava, |
| 7. Veselý Marián | SVŠ Bratislava, ul. Červenej armády 16. |

Kategória B

- | | |
|---------------------|---|
| 1. Pohánka Vladimír | SVŠ Bratislava, Novohradská ul., |
| 2. Kopál Otto | SVŠ Partizánske, |
| 3. Mucha Vojtech | SVŠ Bratislava, ul. Červenej armády 16. |

Kategória C

- | | |
|-------------------|---|
| 1. Zvalová Júlia | SVŠ Bratislava, Metodova ul., |
| 2. Cigánek Viktor | SVŠ Malacky, |
| 3. Mateová Eva | SVŠ Bratislava, ul. Červenej armády 16. |

Prvých 7 úspešných riešiteľov kategórie A sa zúčastnilo III. kola Fyzikální olympiády v Brne. Uvedení riešitelia vyriešili v II. kole aspoň 2 úlohy. Všetci úspešní riešitelia II. kola boli odmenení vecnými cenami v hodnote 1700,— Kčs.

Jozef Janovič

Sestavil inž. Z. Tichý:

Slovensko-český slovníček matematických a fyzikálních termínů

Ráz těles — zrás telies
reakce — reakcia
rotace — rotácia
rostoucí řada — stúpajúci (rastúci)
rad
rovina tečná — rovina dotyková

rovnice čočková — rovnica šošovková
vá
rozdíl — rozdiel (diferencia)
roztážnost teplotní — rozťažiteľnosť
teplotná
rtuťový — ortuťový

různoběžný — rôznobežný
rychlost — rýchlosť
ryska běhounu logaritmického pravitka — ukazovateľ (index) bežca logaritmického lineárového počítadla
ryze monotónní — rýdzo monotónny
ryze periodický desetinný zlomek —
— rýdzo periodický desetinný zlomek

Řád — rád
řada — rad
řešení — riešenie
řešitelnost — riešiteľnosť
řetězovka — řetazovka
řez Dedekindův — rez Dedekindov
řídící přímka (kuželosečky) — určující priamka (direktrix) (kuželosečky)

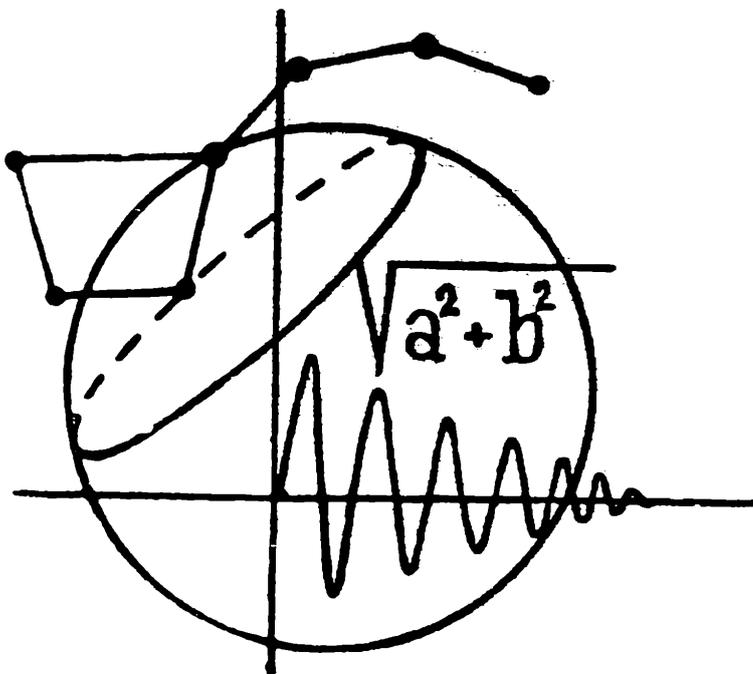
Sčítat — sčítovať
sečna — sečnica (sekanta)
setrvačnick — zotrvačnick
setrvačnost — zotrvačnost
shodnost — zhodnost (kongruencia)
síla direktivní — síla direkčná
siločára — siločiara
sklápění — sklápanie
skupenské teplo tání — skupenské teplo topenia
slitina — zliatina
sloupec — stlpec
složená závorka — vlnitá zátvorka
složený — zložený
složka — zložka, komponenta
slučování — zlučovanie
směr posunutí — smer posúvania
směrnice přímky — smernica priamky

smíšený — zmiešaný
smyk — šmyk
mysl — zmysel
solární konstanta — solárna konštantanta
součet — súčet
součin — súčin
součinitel — súčinitel
souměrnost — súmernost
souřadnice — súradnica (koordináta)
souřadnicová soustava — súradnicová sústava
soustava — sústava
soustředné kružnice — sústredné (koncentrické) kružnice
specifický — špecifický
spirála — špirála
spojení kondenzátorů — zapojenie kondenzátorov
společný — spoločný
stejnolehlost — rovnolahlost
stěny — steny
stlačení — stlačenie
střed — stred
střední — stredný
střídavý — striedavý
sudé číslo — párne číslo
svazek — zväzok
svítivost — svietivosť

Šíření — šírenie
šířka — šírka
šroub — skrutka
šroubová plocha — skrutková plocha
šroubovice — skrutkovica
šroubový — skrutkovitý
štěpení molekul — štepenie molekul

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



6

ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 6

Toto číslo vyšlo 25. února 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

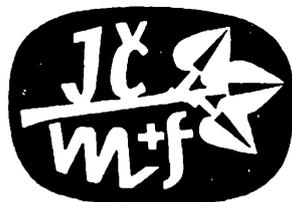
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VŠT, Brno; *doc. dr. Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; *doc. Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, MŠK, Praha; *prof. dr. Josef Korous*, VŠD, Žilina; *doc. Emil Kraemer*, KU, Praha; *doc. dr. Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; *CSc. Evžen Říman*, ČVUT, Praha; *CSc. Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *CSc. Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; *inž. dr. Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; *prof. dr. Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

O B S A H

E. Sýkorová-inž. J. Klír: Samočinné počítače	241
O. Jeništa: O určitém vztahu u obecného trojúhelníka	248
J. Divíšek: Použití grafických papírů k znázornění některých funkcí (Dokončení)	252
Doc. J. Holubář: Některé geometrické vlastnosti granátotvaru	255
Doc. dr. B. Hacar: Řeka, která teče do kopce	260
V. Burjan: Elektrostatické stroje ve vakuu	264
V. Juráš: O tlaku v kapalinách	267
Inž. dr. V. Šindelář: Nová měrová soustava (Dokončení)	269
Prof. dr. V. Santholzer: GM počítače	273
K. Kraus: Fyzikální vlastnosti ferritů a jejich užití	279
Úlohy k řešení	283
M. Koman: Pohádka o králi, jablkách a dvou koších	288
M.M.: Cvičíme na přijímací pohovory	3. a 4. str. obálky

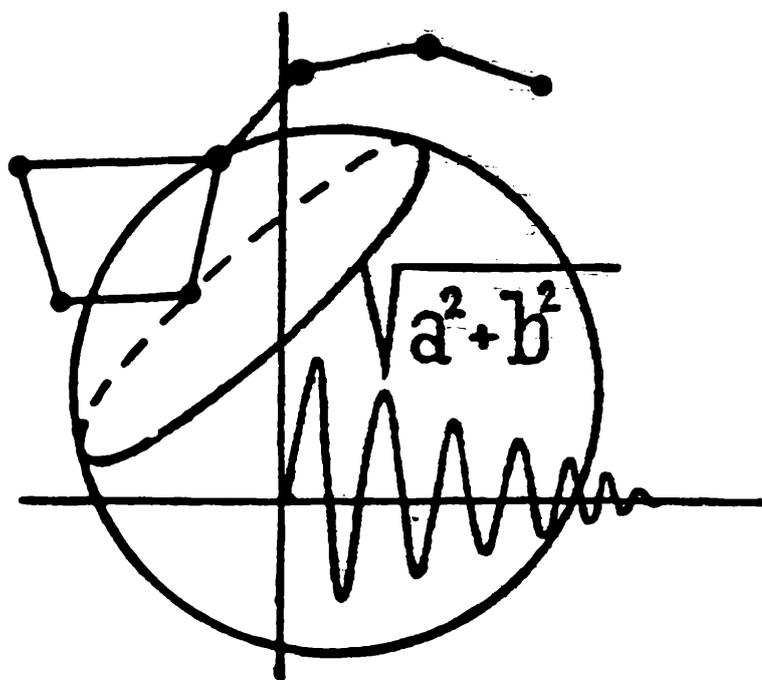


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*31070. Jazyková úprava: dr. O. Höning. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



7

ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 7

Toto číslo vyšlo 15. března 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

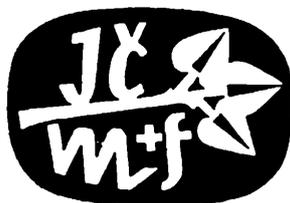
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Inž. E. Klier: Lagrangeův důkaz poučky Wilsonovy a Fermatovy	289
E. Jokl: Grafická metoda umocňování a odmocňování	296
S. Horák st.: Neurčitá rovnice $x^2 + y^2 = 2z^2$	294
J. Glivický: Poznámka k jedné úloze z konstrukcí trojúhelníka	302
Inž. dr. V. Šindelář: Značení tónů v hudební akustice	304
Prof. dr. V. Santholzer: Základní měřicí zařízení k počítačovým metodám	312
K. Kraus: Fyzikální vlastnosti ferritů a jejich užití (Dokončení)	316
Prof. dr. V. Santholzer: Fyzikální základy jaderných zbraní	322
Inž. dr. V. Šindelář: Deformační tlakoměry	330

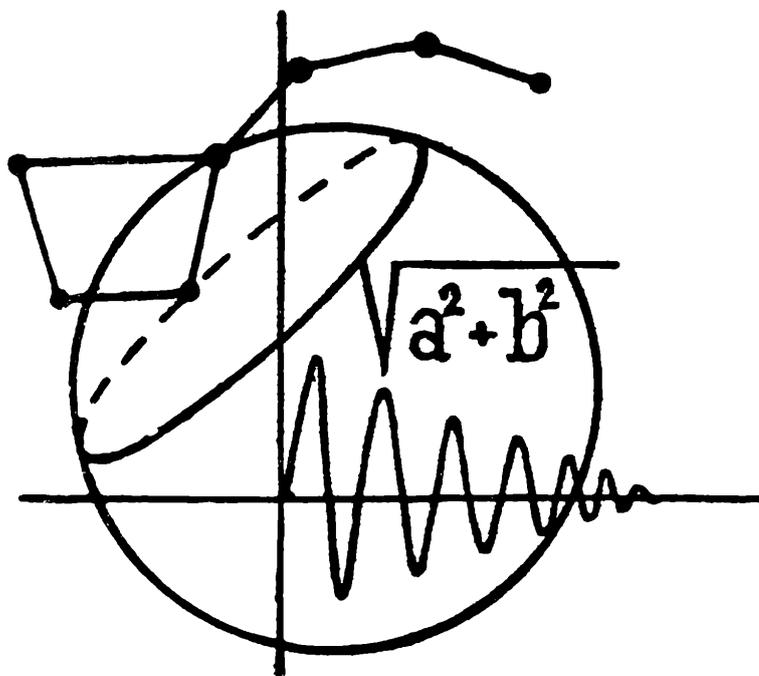


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-05*31109. Jazyková úprava: dr. O. Höning. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



8

ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 8

Toto číslo vyšlo 15. dubna 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

O B S A H

T. Jech: Apolloniova kružnice	337
J. Havelka: Právítka reálných kořenů kvadratických rovnic	343
E. Jokl: Grafická metoda umocňování a odmocňování (Dokončení)	348
Inž. L. Drs CSc: Užití průsečíku výšek trojúhelníka k řešení některých úloh deskriptivní geometrie	352
J. Marek: Energetická bilance raketového pohonu	354
Inž. dr. V. Šindelář: Výpočet výsledné chyby měřených fyzikálních veličin, určených známými vztahy	362
P. Chmela: Ohybové jevy v mikroskopickém zobrazení	372
L. Sehnal, CSc: Umělé družice a kosmické rakety	377
Prof. dr. A. Kotzig: Zaujímavosti okolo jednej hry	379
M. Koman: Dvě zajímavé skládanky	380
J. S.: Úloha o ornamentu	382
Recenze	383
J. Troják: Škola mladých matematiků	3. str. obálky
M. M.: Našim autorům	4. str. obálky

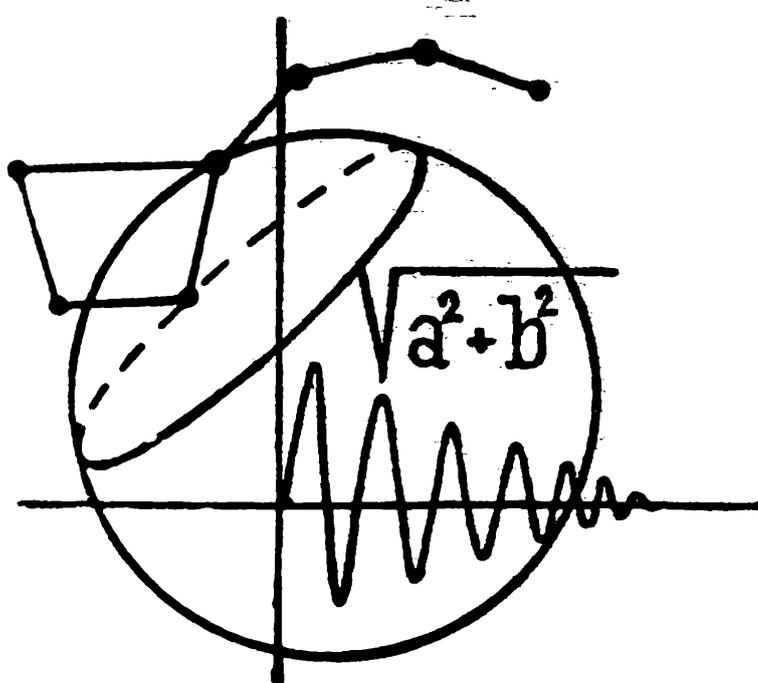


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-04*31322. Jazyková úprava: dr. O. Hönig. Titulní obrázky: V. Fencl, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



9

ROČ. 41
1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 9

Toto číslo vyšlo 15. května 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

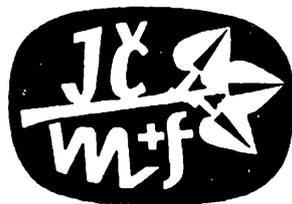
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

O B S A H

M. Nohel: Jak poznáme geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných?	385
K. Vicovský: Technické příklady na racionální funkce.	392
J. Klimčík - F. Machala: Osová afinita	396
F. Machala: Elipsa jako afinní obraz kružnice	399
F. Machala: Přibližná konstrukce elipsy	401
F. Hradecký: Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly	405
Z. Maršák - I. Kraus: Základy fotoelasticimetrie	414
Z. Kupka - J. Pospíšil: Jednotka svítivosti	420
M. Koman: Záhada běžeckého závodu	423
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	424
R. Kolomý: Zavedení metrické soustavy	428
R. Kolomý: Staré české míry	431
M. M.: Několik čísel o Jednotě československých matematiků a fyziků	3. str. obálky
K. Š.: Chcete studovat vysokou školu technickou při zaměstnání?	4. str. obálky

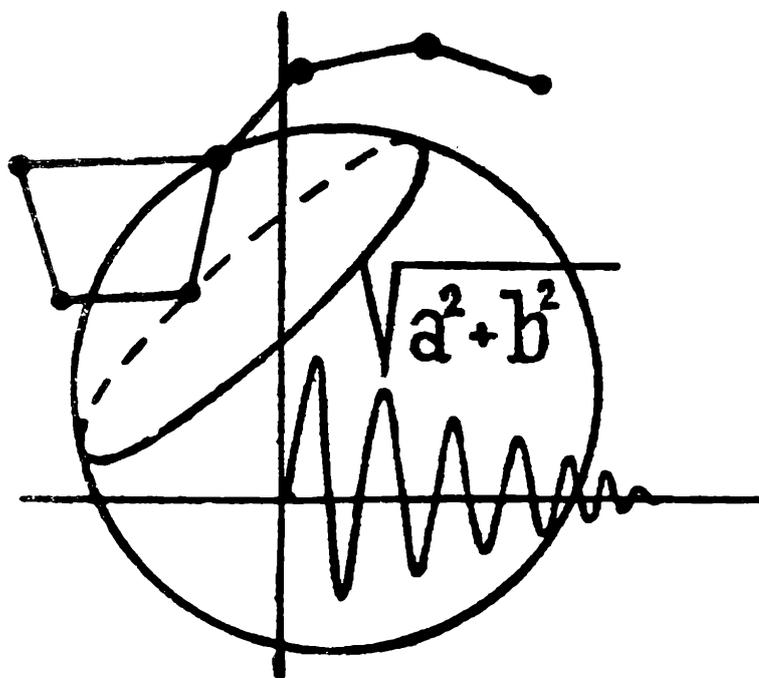


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*31194. Jazyková úprava: dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



10

ROČ. 41

1962-63

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Ročník 41 - 1962/63 - číslo 10
Toto číslo vyšlo 5. června 1963

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

O B S A H

L. Lopovok: Útvary s nepřístupnými prvky	433
Inž. J. Hroník: Vybrané úlohy o minimech	441
J. Filip: K úlohám o mimobežkách	446
F. Hradecký: Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly (Dokončení)	448
I. Kraus - Z. Maršák: Praktické užití fotoelasticimetrie	455
Inž. Z. Kos: Sedimentace.	460
Matematické zábavy	465
T. Szebényi: Príspevok k dejinám matematických strojov.	466
Recenze	469
Soutěž o nejlepší rys	475
M. Valešová: Hovořili jsme v Brně s našimi čtenáři.	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-04*31375. Jazyková úprava: dr. O. Hönic. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

Marie Valešová, Praha:

Hovořili jsme v Brně s našimi čtenáři

Již dlouho se snaží redakce zachytit hlas čtenářů a zjistit tak, jak o našem časopise smýšlejí zejména mladí. Dopisů přichází prozatím málo, a proto jsme se rozhodli provést několik besed se čtenáři.

První z nich se uskutečnila dne 24. dubna 1963 v Brně, kde v téže době probíhaly oslavy 50. výročí založení brněnské odbočky JČMF.

Besedy se zúčastnili oba redaktori Rozhledů, někteří členové redakční rady a 30 žáků brněnských středních škol, a to jak ze SVVŠ, tak i z průmyslovek. Bohužel mezi nimi nemohli být zastoupeni žáci nejvyšších ročníků, protože v týž den probíhaly maturitní písemné práce.

Přátelský rozhovor zahájili redaktori a než se mladí „besedníci“ odvážili sami promluvit, přečetl doc. Menšík dopis čtenáře z Jihlavy, kterému se zdá, že „časopis dělají páni ve fracích a cylindrech“. Vybídl přítomné, aby se nebáli vyslovit či později v dopisech napsat svá přání, o čem by se chtěli v časopise dovědět; aby se sami pokoušeli psát krátké články, které jistě redakce otiskne, budou-li vhodné a bez chyb.

Doc. Setzer hovořil o soutěži Rozhledů, která má stále poměrně málo řešitelů. (Řešitel z Brna, s. Spíšek, se besedy zúčastnil.) Přítomní si mohli prohlédnout i několik čísel cizích časopisů podobného zaměření, jako mají Rozhledy. Rovněž se seznámili s návrhy nových titulních obrázků do našeho časopisu.

Diskuse, která se pomalu rozbíhala, byla nakonec živá a bohatá. Studenti hovořili ke způsobu zadávání soutěžních příkladů. Bylo jim však vysvětleno, že z technických (výrobních) důvodů nelze zadání provést postupně. Je třeba, aby účastníci soutěže neodkládali řešení na poslední chvíli - spěchem pak trpí kvalita řešení.

Slyšeli jsme připomínku o potížích s geometrickými příklady, zejména při řešení úloh MO. Nyní se v našem časopise častěji objevují geometrické články pro doplnění školské geometrie. Upozornili jsme ty, kteří shánějí odbornou literaturu, mnohdy nedostupnou, na universitní a technickou knihovnu v Praze i v Brně. Redakce ráda poradí literaturu pro zájemce, nemůže ji však sama opatřovat.

Žák průmyslové školy strojnické přišel se zajímavým a užitečným nápadem: Až se poradí se spolužáky, pokusí se na škole uspořádat soutěž o příklady k řešení pro jiné průmyslové školy. (Z fyziky postrádají totiž čtenáři z průmyslovek obtížnější příklady z pružnosti a pevnosti.)

Přítomní posluchači projeví zájem o články, pojednávající o velkých matematicích, o automatizaci - z hlediska strojařského, o užití geometrie ve volné přírodě, o nejjednodušších počítačích strojích (- žák ze třídy s kybernetickým zaměřením). Dalším přáním byl článek, který by sezná-

mil čtenáře s tím, k čemu a v jakých oborech se užívá jednotlivých partií matematiky a geometrie.

Besedu jsme uzavřeli výzvou, aby nám čtenáři psali o svých přáních i kritice časopisu.

Pište nám i vy, kteří jste se besedy nemohli zúčastnit - o čem či o kom byste chtěli číst, o práci vašeho matematického nebo fyzikálního kroužku na škole, o prvních zkušenostech ze tříd SVVŠ se zaměřením kybernetickým a matematicko-fyzikálním. Pokuste se o malé vlastní příspěvky do časopisu!

Doufáme, že na podobných besedách v jiných městech republiky se setkáme s dalšími čtenáři a budeme tak moci podle vašich konkrétních přání stále zlepšovat obsah našeho časopisu, aby byl pro vás co nejzajímavější.

Ředitelstvím škol a učitelům matematiky a fyziky

Redakce žádá, aby nábor pro předplacení 42. ročníku našeho časopisu byl na školách proveden co nejdříve, tj. pro dosavadní žáky školy ještě před prázdninami a pro nastupující žáky během 1. týdne v září 1963. Předplacení se provádí u nejbližšího poštovního úřadu, nejlépe hromadně. Jedině tak lze zájemcům zajistit, že PNS jim bude dodávat Rozhledy již od 1. čísla.

Několik čísel o Jednotě československých matematiků a fyziků

Loňského roku slavila, jak víte, Jednota československých matematiků a fyziků sté výročí svého založení. Pro zajímavost vám uvedeme počet jejích členů v jednotlivých pobočkách:

Pobočka	Stav členů 20. 11. 1960	Stav členů 31. 12. 1962
Praha - město	475	646
Praha - Středočes. kraj	103	138
České Budějovice	99	123
Jihlava	23	45
Plzeň	75	97
Karlovy Vary	—	41
Ústí n. L.	74	141
Liberec	62	71
Hradec Králové	36	60
Pardubice	57	67
Brno	158	268
Gottwaldov	41	64
Olomouc	97	132
Ostrava	85	132
Bratislava	131	190
Žilina	72	185
Nitra	30	146
Trnava	—	125
Zvolen	49	118
Prešov	23	71
Košice	81	148
Celkem České země	1385	1995
Slovensko	386	883
Celkem	1771	2878

Jistě i vy se časem stanete jejím členem. Všechny potřebné informace podá sekretariát Jednoty čs. matematiků a fyziků, Praha 1, Malá Strana, Maltézské nám. 1., tel. 530 892.

M. M.

Chcete studovat vysokou školu technickou při zaměstnání?

Mnohý ze studentů středních škol vstoupí na vysokou školu technickou po předchozím krátkodobém zaměstnání, nebo po skončení vojenské služby. Tyto studenty bude zajímat, jaké možnosti studia na vysoké škole technické budou mít, jaké budou požadavky a jaké právní nároky.

Odpovědi na všechny tyto otázky najdou v **I n f o r m a c í c h o s t u d i u p ř i z a m ě s t n á n í n a v y s o k ý c h š k o l á c h t e c h n i c k ý c h v Č S S R**, sestavovaných každoročně Ústavem pro studium pracujících na vysokých školách technických při Českém vysokém učení technickém v Praze I, Na Florenci 25 a vydávaných Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze. Informace pro rok 1964/65 vyjdou v létě tohoto roku. Pohovory pro rok 1964/65 se totiž konají již v únoru 1964.

V **p r v n í k a p i t o l e** se dočtete o **p ř í p r a v n ý c h k u r s e c h** pro uchazeče o vysokoškolské studium technického směru, jako předstudijní přípravě ze středoškolské látky pro přijímací pohovory i samotné studium s ohledem na odstup ze školy, které organizuje Společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí a pořádají osvětová zařízení podle zájmů studentů z matematiky, fyziky, deskriptivní geometrie a biologie.

V **d r u h é k a p i t o l e** je uveden **s e z n a m v š e c h ě t r n á c t i v y s o k ý c h š k o l t e c h n i c k ý c h v Č S S R** a seznam fakult, směrů, oborů a zaměření na těchto fakultách.

V **t ř e t í č á s t i** jsou **d r u h y s t u d i a** pracujících při zaměstnání, tj. večerní, dálkové, speciální externí, mimořádné a postgraduální.

V **č t v r t é č á s t i** jsou uvedeny **m o ž n o s t i s t u d i a** na jednotlivých vysokých školách podle fakult a jejich sídel.

Obsahem **p á t é č á s t i** jsou **p o d m í n k y p ř i j í m á n í** uchazečů do večerního a dálkového studia, tj. podávání přihlášek, podmínky přijetí, přijímací pohovory a předpokládané znalosti.

Š e s t á č á s t dává **p o k y n y ú č a s t n í k ů m** studia při zaměstnání jak přistupovat ke studiu a jak studovat.

V **p ř e d p o s l e d n í s e d m é č á s t i** jsou uvedeny **p r á v n í o t á z k y**, tj. pracovní úlevy a hospodářské zabezpečení studujících.

V **p o s l e d n í o s m é č á s t i** je **s e z n a m k o n z u l t a č n í c h s t ř e d i s e k s** uvedením fakult v těchto střediscích.

Informační příručku koupíte v Knize, n. p.

K. Š.

Našim autorům

V minulém čísle *Rozhledů* matematicko-fyzikálních jsme otiskli zajímavý dopis žáků, na který redakce podrobně odpověděla. Dopisy i odpovědi se zabývaly tematikou zvláště důležitou pro autory našich článků.

Redakce uvítá s radostí i Váš příspěvek, pokud jeho náplň zapadá do našeho plánu a je podáván takovým způsobem, aby mu naši čtenáři rozuměli. Rukopis však musí vyhovovat i dalším požadavkům. Je nevyhnutelně nutno, aby byl psán strojem, černou páskou, po jedné straně papíru. Píše se vždy s řádkovou mezerou, takže na stránce formátu A4 je maximálně asi 30 řádek. Řádka obsahuje 60 až 70 úhozů. Vzorce a jiný algebraický text je nejlépe vpisovat ručně, a to přesně na místa, kde mají být vysazeny; nešetřete místem. Písmena algebraického textu, která mají být vysazena *kurzívou* (tj. ležatě), podtrhnou se tužkou vlnitě. *Prostrkávaný text* se podtrhne tužkou čárkovaně, žádné jiné podtrhávání se neprovádí. Jednotlivé listy rukopisu se pořadově čísují. Poznámky, které mají být otištěny pod čarou, čísují se a vpisují přímo do textu, nikoliv na konec článku. Je přirozené, že užíváme nového pravopisu a držíme se přesně předepsaného názvosloví v matematice i ve fyzice, kde zvláště dbáme na správné uvádění jednotek.

Obrázky se kreslí na zvláštní čtvrtku nebo na pauzovací papír, nikoliv do textu. U pérovek, tj. u obrázků provedených tuší, nutno počítat s jejich dvojnásobným zmenšením při reprodukci. Vyžadujeme dobrý popis, provedený 5mm šablonou normalizovaným písmem. Písmena nesmějí být přerušována čarami konstrukce. Nemůže-li autor obrázky tuší dokonale provést, nakreslí je bezvadně tužkou tak, abychom je mohli dát nakreslit pouhým jejich obtažením.

Budou-li autoři dodržovat tato pravidla, usnadní nám i recenzentům práci a urychlí otištění svého rukopisu. Otištění není nutno urgovat, nepoužité rukopisy vracíme. Ježto však každý rukopis jde k odbornému posudku, je někdy třeba delší doby k redakční práci. Dobrý, krátký, všem zmíněným požadavkům vyhovující rukopis může být uveřejněn i během dvou měsíců po dodání.

Nikdy nezapomeňte napsat plné jméno a správnou adresu.

M. M.

Škola mladých matematiků

Při přípravě k účasti na matematickou olympiádu je mnohdy třeba, aby si studenti doplnili své znalosti z matematiky prostudováním přístupně psané literatury. Tomuto cíli slouží též malá knižnice s názvem Škola mladých matematiků, na kterou chceme upozornit.

První z dosud vyšlých svazečků má název Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, druhý Co víme o přirozených číslech, třetí Shodné zobrazení v konstruktivních úlohách, a čtvrtý O funkcích.

Jde vesměs o malé sbírky řešených příkladů spojených textem, které mají pomoci získat ucelený pohled na příslušné partie matematiky a zejména ukázat jejich správné použití při řešení příkladů, zvláště úloh matematické olympiády. Kromě řešených příkladů obsahují tyto publikace i úlohy neřešené s kontrolními výsledky nebo návody i množství názorných náčrtků a vyobrazení. Jednotlivá témata využívají znalostí získaných v hodinách matematiky během školní docházky, případně tyto znalosti nepatrně rozšiřují. Zájemcům o hlubší poznání problémů je určen seznam vhodné literatury, kterým je každá z publikací doplněna.

Všechny dosud vyšlé svazečky knižnice ŠMM se vyznačují velmi pěknou úrovní, což je důsledkem velké péče, kterou jim věnovali autoři, většinou mnohaletí pracovníci na poli příprav matematických olympiád.

Edice chystá další publikace, které se budou týkat nejrůznějších partií středoškolské matematiky. Nejbližší budou o nerovnostech, matematické indukci, podobných zobrazení, o metodě souřadnic apod.

Knižnici vydává Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta. Publikace nejsou na knižním trhu, ale je možno si je objednat, nebo přímo zakoupit v sekretariátě JČMF — Praha 1, Maltézské nám., nebo na Krajských výborech matematických olympiád. Cena publikací se pohybuje kolem 2 Kčs.

Jan Troják

O čísle π

V lednovém čísle časopisu *Mathematics of Computation*, 1962, je číslo π vypočítáno na 100 000 desetinných míst. Na str. 78 se pak píše o možnosti jeho výpočtu na milión desetinných míst.

A. Kodym

Čtenáři nám píší

Redakce dostala dopis našich čtenářů, který rádi v plném znění otiskujeme:

Vloni jsme se rozhodli celá třída odebírat časopis „Rozhledy matematicko-fyzikální“. Mnohým článkům jsme však nerozuměli. Pišatelé článků užívali slovních i myšlenkových obrátů nám obtížných a my jsme v časopisu nacházeli jen tu a tam zbytky, kterým jsme rozuměli. Proto letos odebírá jen třetina třídy Váš časopis. Chtěli jsme Vám napsat, abyste se přiblížili více k nám, našim zájmům a nepsali tak učeně. Konečně se objevilo páté číslo letošního ročníku. Je tam to, co nás zajímá. Jsou to otázky k pohovorům na vysoké školy. Časopis si od nás půjčovali naši spolužáci z vyššího ročníku a i my jsme zjišťovali, co umíme, a divili jsme se těm hrozným chybám, které jsou tam uvedeny.

Děkujeme za první vlašťovku, která přinesla porozumění pro náš život.

Žáci druhé třídy střední všeobecně vzdělávací školy v Třebíči, referentka pro časopis RMF Ivana Wasserbauerová, žákyně 2. roč. SVVŠ, Třebíč.

(Následuje patnáct podpisů.)

A nyní vám odpovíme na jednotlivosti. Je pravdivé zjištění, že až teprve v poslední třídě budou přirozeně vaše znalosti takové, abyste pravděpodobně rozuměli všem článkům. Dále píšete, že letos náš časopis odebírá proti loňsku již jen část vaší třídy. I to je správné, neboť ne každý z vás má takový osobní zájem o matematiku a fyziku, aby časopis odebíral z vlastní iniciativy a nikoli pouze formálně.

Pak následuje věta, která nás vybízí, abychom se vám více přiblížili a nepsali tak učeně. To jsou již přání velmi závažná a základní důležitosti. Je naší opravdovou snahou, abychom se vám co nejvíce přiblížili a upravili vám podávanou látku tak, aby vám byla srozumitelná, pro vás zajímavá nebo i zábavná. Že se tak neděje zcela uspokojivě, je naším nedostatkem i chybou autorů, jsme si toho dobře vědomi. Z matematiky ani z fyziky se ovšem nikdy nepodaří udělat veselohru či dokonce frašku. Nelze také při jejich popularizaci překročit určité meze, aniž by tím utrpěla odbornost a samá podstata těchto věd, vyžadujících právě přesného a logicky správného myšlení.

Redakční rada stále zápasí s touto nesnází a vrací často autorům články, které jsou právě podle vašich slov „učené“, tj. které daleko přesahují rámec středoškolských osnov. Ještě častěji pak při recenzi rukopisů žádáme autory, aby psali „čtivější“ formou.

Máme nouzi o dobré, krátké a zajímavé články. Autoři mají z velké části spíše chuť psát vědecké články a k tomu ještě škrobeným slohem, nechápou poslání našeho časopisu. Žádáme pak na nich vždy zásadně, aby vše, co v jejich článku přesahuje úroveň středoškolských osnov, náležitě vysvětlili.

Zároveň ovšem čas od času uveřejňujeme články trochu vyšší úrovně, a to jak pro ty nadanější z vás, tak pro posluchače prvních ročníků vysokých škol, mezi nimiž máme též své čtenáře. Musíme totiž mít, abychom tak řekli, pro každého něco. Již od prvních ročníků se opakují dva názory: podle jednoho jsou Rozhledy psány „učeně“, podle druhého příliš populárně. Tato otázka zůstane asi stále živou.

Také redakce má však stížnosti na své mladé čtenáře. Vy ani nevíte, jak těžko se dovídáme vaše přání a stížnosti, vždyť nám nic nenapíšete! Na vaše dopisy, které by nám řekly, o čem byste rádi četli, čemu nerozumíte nebo který článek se vám zvláště líbí, rádi odpovíme a budeme se vašimi náměty i přáními opravdu a velmi pečlivě zabývat. Zatím známe však pouze případné kritiky a upozornění vašich učitelů, zkrátka lidí dospělých, kteří znají více než vy.

Proto by nás potěšilo, kdybychom dostávali více takových dopisů, jako byl tento, a tu první vlašťovku - o níž píšete - bychom pak s radostí mohli rozšířit na celé hejno.

M. M.

Cvičíme na přijímací pohovory

(Dokončení)

21. Řešte rovnici $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3-7x}$

22. Řešte rovnici $2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}$.

23. Řešte rovnici $\log(x+5) - \log(x-4) = \log(3x-5) - \log(x-3)$.

24. Řešte rovnici $\binom{x}{1} + \binom{x}{3} = \binom{x}{2} + \binom{x}{4}$

25. Kolikerym způsobem je možno rozdělit 9 karet mezi 3 osoby?

26. Pojednejte o binomické větě a jejím užití.

27. Určete $(1-x)^5 - (1-x)^4 = ?$

28. Sestrojte trojúhelník, je-li dána výška v_c , úhel α a poloměr kružnice opsané.

29. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka jsou 12 a 35. Vypočtete délku těžnice t_c .

30. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány dvě základny a obě úhlopříčky.

31. Na základě podobnosti dokažte Euklidovy věty.

32. Sestrojte úsečku $x = \frac{ab}{c}$, kde a , b , c jsou dané délky (úsečky).

33. Výška a rovnoběžné strany lichoběžníka jsou v poměru $2:3:5$, jeho obsah je 512 cm^2 . Určete jeho rovnoběžné strany a výšku.

34. Vypočítejte stranu rovnostranného trojúhelníka pomocí poloměru r kružnice opsané.

35. Dané mezikružní rozdělte soustřednou kružnicí na dvě části, jejichž obsahy jsou si rovny.

36. Definujte gonimetrické funkce.

37. Vypočtete $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, víte-li, že a) $\cos x = \frac{3}{5}$;

b) $\sin x = \frac{12}{13}$.

Fyzika.

Pohybové zákony Newtonovy. Váha těles. Soustavy jednotek užívaných ve fyzice. Hybnost a impuls.

Práce a výkon. Mechanická energie. Princip zachování energie. Moment síly vzhledem k bodu. Skládání a rozkládání sil. Těžiště; tření.

Jednoduché stroje.

Rovnoměrný pohyb kruhový, síla odstředivá. Gravitační zákon.

Gravitační pole země.

Svislý vrh a šikmý vrh. Stanovení dráhy tělesa vrženého vodorovně nebo šikmo pod daným úhlem.

Pružnost v tahu. Hookeův zákon a modul pružnosti v tahu.

Tekutiny. Šíření tlaku v tekutinách. Zákon Archimedův. Tlak plynu a jeho měření.

Výtok tekutiny otvorem v nádobě a výtok trubicí.

Čerpadlo a vývěvy.

Harmonický pohyb, pohyb kyvadla. Vznik a druhy vlnění.

Zvuk a jeho vlastnosti.

Rychlost zvuku. Měření teploty. Teplotní roztažnost látek pevných, kapalných a plynů (zákon Boyleův-Mariotteův, Gay-Lussacův, stavová rovnice plynů, absolutní stupnice teploty).

Definice tepla, množství tepla, kalorie, specifické teplo. Změny skupenství (nasycené páry, přehřáté páry).

První věta termodynamiky. Práce plynu. Teplo a práce.

Základní veličiny elektrického proudu: intenzita, napětí, odpor a jejich jednotky. Vztah mezi napětím a proudem. Měření odporu.

Magnetické účinky elektrického proudu. Vodič v magnetickém poli.

Elektrické měřící přístroje s otáčivou cívkou a elektromagnetické přístroje.

Železo v magnetickém poli. Základní úkazy elektromagnetické indukce.

Velikost indukovaného napětí. Samoindukce.

Faradayovy zákony, elektrolysa.

Střídavý proud. Proudový obvod se střídavým proudem.

Odpor střídavého proudu. Výkon střídavého proudu. Transformátory.

Rychlost světla. Odraz světla. Rovinná a kulová zrcadla. Základní úkazy a zákony lomu světla (index lomu, úplný odraz, lom rovinnou vrstvou).

Rozklad světla. Čočka a čočková rovnice. Fotografické a promítací přístroje.

Lupa.

Stavba hmoty.

Protony, neutrony. Radioaktivita.