

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER

ROČNÍK 40

1961-62

Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

O B S A H

Úvodníky:

Dekret presidenta republiky	385
Kahuda František: Sto let Jednoty československých matematiků a fyziků	193
Redakce: 40	1
Veselý František: Jak vznikl náš časopis Rozhledy matematicko- fyzikální	386
Veselý František: Vznik a vývoj Jednoty československých matematiků a fyziků	289, 337

Matematika:

Brejcha Josef: Konstrukce čtyřúhelníka, jehož vrcholy jsou patami kolmic spuštěných z bodu v rovině na čtyři její různoběžky	340
Burýšek Slavomír: O sumaci aritmeticko-geometrických řad	241
Cihlár Rudolf: Použití analytické geometrie při řešení planimetrických úloh	198
Čapla Vasil: Vznik a vývoj reléových a elektronických samočinných počítačů	390, 442
Černoch Ctibor: Objem komolého jehlanu	245
Hejný Milan: Příklad na postupnost	2, 54
Horák Stanislav: Racionální čtyřstěny	97
Jokl Evžen: Jak se graficky znázorňují funkce	153
Karpe Robert: Iracionální číslo není rovno podílu dvou čísel celých	397
Krbíla Jaroslav: Řešitelnost a geometrická interpretácia sústavy dvoch lineárnych rovníc	145, 201
Kraemer Emil: Geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných	9
Kriegelstein Eduard: Úvod do integrálního počtu	393, 437
Kriegelstein Eduard: Užití diferenciálního počtu	195, 247, 350
Lamparter Vilém: Z geometrie trojúhelníka	349
Leminger Otakar: Užití věty Cavalieriho k určení objemu těles	299
Mída Jiří: O jedné vlastnosti celých čísel	305
Mikulík Zdeněk: Řešení diofantské rovnice $ax + by = cz^2$	296
Palát Jindřich: Archimedova metoda výpočtu objemů rotačních těles	401, 433
Straka Josef: Největší a nejmenší hodnota kvadratické celistvé funkce	345, 398
Šedivý Jaroslav: Mocnost bodu ke kružnici	207
Šedivý Jaroslav: Polární souřadnicový systém v rovině	49, 103
Špaček Karel: Pappovy úlohy	293
Trávníček Stanislav: Grafické znázorňování periodických funkcí v po- lární soustavě souřadnic	98, 148

Deskriptivní geometrie:

Drábek Karel: Sdružené průměry kuželosečky o daném úhlu φ	13
Drábek Karel: Sestrojení elipsy a hyperboly pomocí dvou pevných kružnic	212
Drábek Karel: Sestrojení paraboly pomocí pevné kružnice a přímky	156
Drs Ladislav: Společná konstrukce oskulační kružnice pro všechny druhy kuželoseček	313
Horák Stanislav: Rovinné úlohy řešené užitím deskriptivní geometrie	456
Kateřínák Josef: Rovnoběžné osvětlení	252, 308
Novák Josef: Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly	404, 449
Šaloun Josef: Užití stejnolehlosti v praxi	256
Urban Alois: Prostorová konstrukce hyperoskulačních kružnic kuželo- seček	65, 110

Fyzika:

Dibelka Josef: Elektronová vodivost	411
Kraus Kamil: Ferromagnetismus z hlediska moderní fyziky	364, 419
Machalický Jiří: O kapilárních jevech	255
Miler Miroslav: Zobrazování tenkou čočkou	460
Pospíšil Jaroslav: Elektronová optika	57, 118, 167
Pospíšil Jaroslav: Elektronový mikroskop	324, 368, 413
Říman Evžen: Pokus a teorie jako prostředky fyzikálního poznání	274
Santholzer Vilém: Radioizotopy v atmosférickém spadu	17
Santholzer Vilém: Určování data pokusného nukleárního výbuchu geometrickou konstrukcí	217, 268
Schürer Přemysl: Porézní látky ve vakuové technice	115, 163, 262
Smrž Ladislav: Galvanometr jako indikátor měřicích zařízení	317
Šindelář Václav: Co je měřicí a měrová technika?	260
Šindelář Václav: Kapalinové tlakoměry	159, 219
Šindelář Václav: Mezinárodní praktická teplotní stupnice	23, 61
Šindelář Václav: Mikromanometr	458
Šindelář Václav: Prstenový tlakoměr	407
Šindelář Václav: Zvonový tlakoměr	223
Šoler Kliment: Stavba atomového jádra	362, 422

Astronomie:

Fritzová Ludmila: Výzkum Slunce, odměněný státní cenou Klementa Gottwalda	227
Sehnal Ladislav: Umělé družice a kosmické rakety	25

Různé:

Bartůněk Josef: Výstava „Matematika, fyzika, učební pomůcky“	384
Bílková Marie: Správné výsledky cvičení z učebnice „Geometrie pro 12. ročník dvanáctiletých středních škol“	287, 332
Brauner Bohuslav: Uranová ruda	432
Jeništa Oldřich: Čs. matematici a fyzici na nových poštovních známkách	374
Jozífek Vítězslav: Geometrie z roku 1734	133, 177
Kodym Adolf: Starořecký počítač	238
Komurka František: Vysokotlaká pára základem energetiky	136
Košťál Rostislav: Osmdesátiny prof. Zahradníčka	132
Kotyk Josef: Hermann Helmholtz	174, 284, 329
Redakce: Sto let JČMF	obálka č. 7
Santholzer Vilém: K prohlášení sovětské vlády o obnovení nukleárních pokusných výbuchů	75
Szebényi Tibor: M. O. Dolivo-Dobrovolskij	430
Szebényi Tibor: P. N. Lebedev	470
Tichý Zdeněk: Slovensko-český a česko-slovenský slovníček matematických a fyzikálních termínů	obálka č. 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Vachek Jaroslav: Konference o vyučování fyzice	383
Vicovský Karel: Technické příklady na kvadratické rovnice	182

Matematické zábavy:

Koman Milan: Dobře nebo špatně?	131
Koman Milan: Matematika na šachovnici	231
Sedláček Jiří: Úloha o druhé odmocnině	328
Sedláček Jiří: Zamyšlení nad kalendářem	234
Setzer Ota: Jediné vážení	465
Vyšín Jan: Kdo měl pravdu?	36
Vyšín Jan: Úloha o šachovnici	465

Fyzikálne zaujímavosti:

Brauner Bohuslav: Dvě první atomové pumpy	71
Říman Evžen: Kto skôr?	38
Smrž Ladislav: Curieův bod	280
Smrž Ladislav: Jak vznikla elektronka	73
Smrž Ladislav: Je sklo tekutina?	37
Smrž Ladislav: Prvý kondenzátor	469
Smrž Ladislav: Termo-dielektrický efekt, který nebyl dosud objasněn	468
Vanovič Ján: Oko a ucho, ako prijímače vlnových popudov	235
Vanovič Ján: O niektorých vlastnostiach kvapiek.	427
Vanovič Ján: Poznámka k stavu feromagnetizmu	466

Matematická olympiáda:

Sedláček Jiří: Jak probíhal desátý ročník MO	39
Jech Tomáš: Třetí mezinárodní MO	335, 376
Moravčík Jozef: Sústreďenie riešiteľov MO v Západoslovenskom kraji	. obálka č. 7
Přípravné úlohy - soutěžní úlohy MO	82, 137
Sedláček Jiří: Matematické školení v Klánovicích	obálka č. 10
Soutěžní úlohy MO	obálka č. 1
Vítězové X. ročníku MO.	40

Fyzikální olympiáda:

Druhý ročník FO v Západoslovenskom kraji	. obálka č. 3
Košťál Rostislav: Měření kalorimetrem	141
Košťál Rostislav: Pohyb jednoduché soustavy těles spojených vláknem	187
Košťál Rostislav: Zákony Kirchhoffovy a jejich důsledky	87, 140
Pospíšil Jaroslav, Rudolf Vladimír: Průběh II. ročníku FO ve školním roku 1960/61	333
ÚVFO: Poděkování pracovníkům FO	191
ÚVFO: Žákům SVVŠ a odborných škol - soutěžní úlohy	41
Vítězové 3. kola II. ročníku FO ve šk. r. 1960/61	. obálka č. 4

Recenze:

Drábek Karel: K. Havlíček, Diferenciální počet pro začátečníky	476
Drábek Karel: K. Hruša, J. Sedláček, Řešené úlohy z matematiky	475
Dubský Jaromír: Devátý ročník matematické olympiády	380
Grygar Jiří: J. Kleczek, Astronomický slovník	474
Jokl Evžen: J. Klír, Matematické stroje	382
Šoler Kliment: J. Korecký, Praktické rady pro dílny	. obálka č. 8
Šoler Kliment: J. Lukeš, Tranzistorová elektronka	obálka č. 6
Šoler Kliment: M. Novák, Exkurze do parní elektrárny	. 47

Úlohy k řešení . 26, 78, 125, 172, 239, 282

Redakční sdělení 48, 144, 192

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba, předplatné přijímá každý poštovní úřad a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad, Jindřišská ul. 14, Praha 1. A-16*21097. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1962.

40

*Zahajujeme čtyřicátý ročník *Rozhledů matematicko-fyzikálních*, které jsou nejstarším československým časopisem pro mládež.*

*Z původní přílohy vědeckého Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky se vyvinul samostatný časopis *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, které po desetiletí vydávala *Jednota československých matematiků a fyziků* a pečuje dosud o jejich odbornou náplň.*

Časopis vychází desetkrát do roka a je určen studující mládeži i všem, kteří mají zájem o matematiku, deskriptivní geometrii, fyziku a astronomii. V době fantastického rozvoje techniky - jejíž základy tvoří právě tyto přírodní vědy potřebuje naše pokroková společnost dobře připravenou mládež pro tvůrčí práci v tomto oboru lidské činnosti.

*Rozhledy pomáhají svým čtenářům prohlubováním znalostí srozumitelnou, někdy i zábavnou formou a informují je o nejnovějších časových problémech matematiky a technicky užití fyziky, a tak podporují snahu naší školy spjaté se životem a technickým pokrokem. Celostátní soutěže *Matematická olympiáda* a *Fyzikální olympiáda* užívají tohoto časopisu k svému úřednímu zpravodajství.*

*Redakce se těší, že jako každoročně dostane od čtenářů jak řadu připomínek a přání k obsahu *Rozhledů*, tak i odborných příspěvků. Rádi mladým autorům poradíme. V novém školním roce jim přejeme mnoho úspěchů.*

Redakce

Matematika

M i l a n H e j n ý, ČVUT, Praha:

Príklad na postupnosť

V elementárnej matematike sa bežne stretávame s príkladmi typu: zostrojte trojuholník daných vlastností; alebo: dokážte, že daný výraz je deliteľný šiestimi; alebo: riešte danú rovnicu; alebo: zistite, za akých podmienok platí daný vzťah ap. Príklad, ktorému je nasledovný článok venovaný, má trochu odlišný charakter od uvedených úloh. Požaduje sa dôkaz neexistencie (resp. existencie) istého útvaru. Takéto požiadavky sú vo vyššej matematike veľmi bežné a hovoríme im *e x i s t e n č n é*. Uvidíme, ako sa pri takejto úlohe postupuje z logického hľadiska a navyše sa zoznámime i s niekoľkými „trikmi“, ktoré v stredoškolskej matematike nestretneme. Bez týchto obrátov by riešenie bolo skoro nemožné.

P r í k l a d. Buď $A_1A_2\dots A_n$ taký vypuklý n -uholník ($n > 2$), ktorému možno vpísať kružnicu k . To značí: existuje kružnica k dotýkajúca sa každej zo strán daného n -uholníka. Body dotyku kružnice k so stranami n -uholníka označme $B_1, B_2, \dots, B_n$ a to tak, aby bod B_i ležal na strane A_iA_{i+1} (pre $i = 1, 2, \dots, n-1$) a B_n ležal na strane A_nA_1 . Obdržali sme n -uholník $B_1B_2\dots B_n$, ktorý je zrejme tiež vypuklý (obr. 1.) Vnútorný uhol n -uholníka $A_1A_2\dots A_n$ pri vrchole A_i označme α_i ; vnútorný uhol n -uholníka $B_1B_2\dots B_n$ pri vrchole B_j označme β_j . Nech čísla

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \tag{1}$$

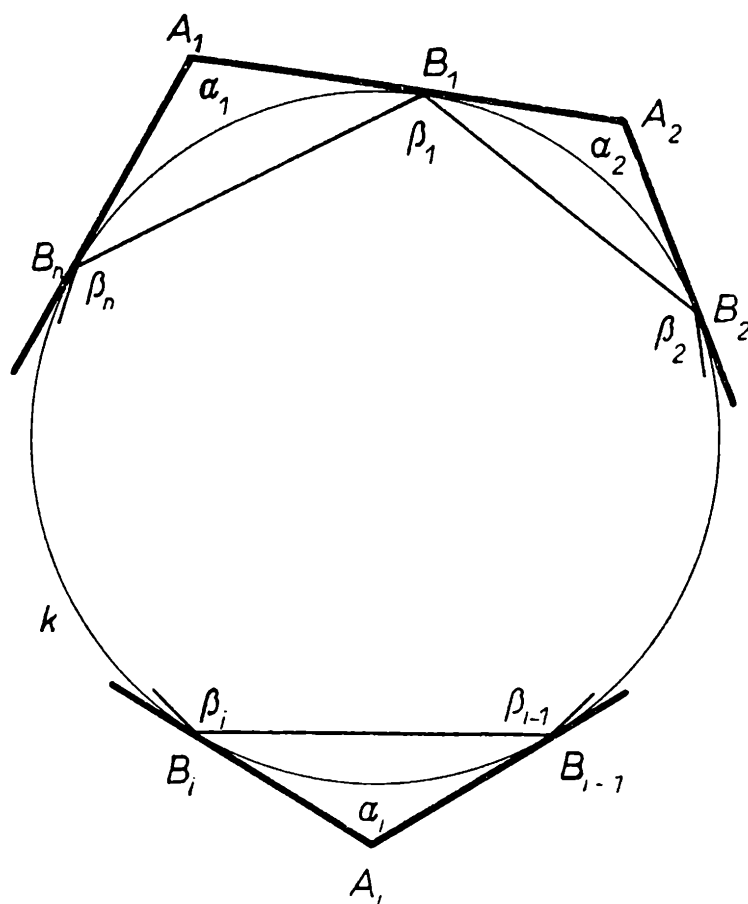
tvoria po usporiadaní prvých n členov rastúcej aritmetickej postupnosti a nech rovnako i čísla

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{2}$$

tvoria po usporiadaní prvých n členov (inej) rastúcej aritmetickej postupnosti. Dokážte: n -uholník $A_1\dots A_n$ uvedených vlastností existuje práve keď je n číslo nepárne (samozrejme $n > 2$).

Riešenie : Máme dokázať dve veci: 1. pre n párne n -uholník uvedených vlastností neexistuje ani jediný a 2. pre n nepárne (väčšie ako 2) hľadaný n -uholník vždy existuje aspoň jeden. Ako budeme pri riešení postupovať? Doporučujeme čitateľovi, aby sám skúsil príklad riešiť. Riešeniu ďalej uvedenému potom už ľahšie a lepšie porozumie.

Spočiatku predpokladáme, že požadovaný n -uholník existuje. Budeme hľadať také súvislosti, ktoré by pre párne n viedli ku sporu. Akonáhle spor nájdeme (tj. akonáhle dokážeme dve odporujúce si tvrdenia) bude dôkaz prevedený. Myslíme samozrejme iba na dôkaz časti 1. Druhú časť príkladu dokážeme tak, že požadovaný n -uholník priamo zostrojíme, skonštruujeme. Takýto druh dôkazu nazývame konštruktívny.



Obr. 1

1. Medzi číslami (1) a (2) platia vzťahy, ktoré plynú z ich geometrickej interpretácie. Všimnime si trojuholníka $B_n A_1 B_1$. Dĺžky dotyčníc vedených z bodu A_1 ku kružnici k sú rovnako dlhé. Preto je uvedený trojuholník rovnoramenný a teda

$$\sphericalangle A_1 B_n B_1 = \sphericalangle A_1 B_1 B_n .$$

Z vety o súčte uhlov v trojuholníku plynie

$$2 \sphericalangle A_1 B_1 B_n = \pi - \alpha_1$$

analogicky

$$2 \sphericalangle A_2 B_1 B_2 = \pi - \alpha_2 .$$

Zo súčtu oboch rovníc dostaneme okamžite

$$2(\pi - \beta_1) = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) ;$$

odkiaľ

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Obdobným postupom by sme dostali vzťahy:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \text{ pre } i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (3)$$

a

$$\beta_n = \frac{\alpha_n + \alpha_1}{2}$$

Ku týmto n rovniciam odvodeným pomocou geometrických vlastností čísiel (1) a (2) pridáme ďalšie dva vzťahy, ktoré plynú z vety o súčte uhlov vo vypuklom n -uholníku (súčet vnútorných uhlov vypuklého n -uholníka je rovný uhlu $(n - 2)\pi$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= (n - 2) \pi , \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n &= (n - 2) \pi . \end{aligned} \quad (4)$$

Tým sme vyčerpali všetky závislosti ktoré plynú z geometrických vlastností čísiel (1) a (2) a ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Prejdime k aritmetickým vlastnostiam čísiel (1) a (2). Dostaneme ich z vlastností aritmetickej postupnosti po „patričnom usporiadaní“ čísiel (1) či (2). Avšak nájsť „patričné usporiadanie“ iba pomocou rovníc (3) a (4) nemôžeme. Nutne potrebujeme užiť vzťahov, ktoré plynú z toho, že po usporiadaní budú čísla (1) a (2) tvoriť aritmetické postupnosti. Aby sme odstránili ťažkosti vzniklé s usporiadaním, je výhodné previesť nasledovný obrat. Najmenšie z čísiel (1) - tj. prvý člen aritmetickej postupnosti vytvorenej číslami (1) - označme znakom φ_1 . Druhý člen tejto postupnosti označme φ_2 , tretí označme φ_3 , ... n -tý označme φ_n . Tak sme pre tie isté veličiny zaviedli dvojité označenie. Každé z čísiel (1) má teraz dve „mená“. Prvé označenie („meno“) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ atď. bolo užité pre geometrické vzťahy, druhé označenie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ atď. použijeme pre vzťahy aritmetické. Nakoniec pôjde o to, nájsť, ktoré označenia prislúchajú tej istej hodnote, tj. ktoré „mená“ označujú to isté číslo. Podobne označíme i čísla (2): najmenšie z nich označíme znakom ψ_1 , druhé zas $\psi_2, \dots$ n -té (nejväčšie) znakom ψ_n . Diferenciu postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ budeme značiť δ , diferenciu postupnosti $\psi_1, \psi_2, \dots$ znakom Δ . Nakoľko sú obe postupnosti rastúce, je $\delta > 0$ i $\Delta > 0$. Teraz už môžeme napísať,

nám dobre známe, vzťahy platné v aritmetických postupnostiach. Budeme potrebovať iba dva:

$$\varphi_j = \varphi_i + (j - i) \delta; \quad \psi_j + \psi_i + (j - i) \Delta \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{a} \quad \varphi_1 + \quad + \varphi_n &= n \left(\varphi_1 + \frac{n-1}{2} \delta \right); \quad \psi_1 + \quad \psi_n = \\ &= n \left(\psi_1 + \frac{n-1}{2} \Delta \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovníc (3) vidíme, že ľubovoľné z čísiel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (napr. číslo φ_k) sa dá písať ako aritmetický priemer sitých dvoch z čísiel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (napr. čísiel φ_i, φ_j). Poznamenajme, že čísla φ_i a φ_j sú rôzne a sú už číslom ψ_k jednoznačne určené, ak predpokládame, že je jednoznačne určené vzájomné priradenie čísiel $\varphi_i \longleftrightarrow \alpha_r$ a $\psi_k \longleftrightarrow \beta_s$ (ktoré zatiaľ nepoznáme). Môžeme preto písať

$$\psi_k = \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}$$

odkiaľ po dosazení $\varphi_i = \varphi_1 + (i-1) \delta$, $\varphi_j = \varphi_1 + (j-1) \delta$ — podľa (5) — bude

$$\psi_k + \frac{2 \varphi_1 + (i+j-2) \delta}{2} = \varphi_1 + c \frac{\delta}{2}, \quad (7)$$

kde $c = i + j - 2$ je celé kladné číslo. Skutočne $i > 0, j > 0$ sú celé a nemôže byť $i = j = 1$. ($i \neq j$).

Nakoľko i číslo $\frac{\delta}{2} > 0$, je aj

$$\psi_k > \varphi_1 \text{ a špeciálne } \psi_1 > \varphi_1. \quad (8)$$

V súčte nezáleží na poradí sčítancov. Podľa (4) je preto

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \quad + \varphi_n &= \alpha_1 + \quad + \alpha_n = (n-2) \pi \\ \text{a} \quad \psi_1 + \quad + \psi_n &= \beta_1 + \quad + \beta_n = (n-2) \pi, \end{aligned}$$

z čoho podľa rovníc (6) obdržíme

$$n \left(\varphi_1 + \frac{n-1}{2} \delta \right) = (n-2) \pi \quad (9)$$

$$\text{a} \quad n \left(\psi_1 + \frac{n-1}{2} \Delta \right) = (n-2) \pi$$

Porovnaním posledných dvoch rovníc dostaneme rovnicu

$$\varphi_1 + \frac{n-1}{2} \delta = \psi_1 + \frac{n-1}{2} \Delta \quad (10)$$

ktorá v prípade, že n je nepárne, dá podľa (5)

$$\frac{\varphi_{n+1}}{2} = \frac{\psi_{n+1}}{2} \quad (11)$$

Ak je n párne potom $\frac{n+1}{2}$ je číslo lomené a znak $\varphi_{\frac{n+1}{2}}$ nemá zmysel.

Z (8) a (10) plynie nerovnosť medzi diferenciami vyšetřovaných postupností:

$$\Delta < \delta. \quad (12)$$

Vyšetřime diferencie Δ a δ bližšie. Podľa (7) je

$$\Delta = \psi_2 - \psi_1 = \left(\varphi_1 + c \frac{\delta}{2} \right) - \left(\varphi_1 + d \frac{\delta}{2} \right) = (c - d) \frac{\delta}{2}$$

teda

$$2\Delta = (c - d) \delta, \quad (13)$$

pričom c aj d sú celé kladné čísla. Vzhľadom na to, že $0 < \Delta$ i $0 < \delta$, je i číslo $(c - d)$ celé a kladné. Všimnime si poslednej rovnosti (13) a nerovnosti (12). Ani jeden z týchto vzťahov nám presnú závislosť medzi číslami Δ a δ nestanoví. Avšak pomocou oboch týchto „neurčitých vzťahov“ dostaneme presné vyjadrenie vzájomného pomeru diferencií Δ a δ . Podľa (13) sú možné tieto prípady:

$$2\Delta = \delta; 2\Delta = 2\delta; 2\Delta = 3\delta;$$

Z nich, nerovnosť (12), splňuje jedine prípad

$$2\Delta = \delta. \quad (14)$$

Poslednú veľmi dôležitú rovnicu sa nám podarilo získať „trikom“ z dvoch „neurčitých“ vzťahov. Po jej dosadení do (10) bude

$$\psi_1 = \varphi_1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\delta}{2},$$

z čoho po porovnaní s rovnicou (7) špecializovanou pre $k = 1$ plynie

$$c = \frac{n-1}{2},$$

Ako vieme, je číslo c celé. Preto musí byť číslo $(n-1)$ deliteľné dvoma, t.j. číslo n musí byť nepárne. To sme ale práve potrebovali ukázať! Ak n -uholník požadovaných vlastností existuje, potom nutne je n číslo nepárne. Inak povedané, neexistuje n -uholník požadovaných vlastností pre ktorý by bolo číslo n párne. Tým je prvá časť dôkazu prevedená.

Obráťme sa teraz ku tvrdeniu 2. Ako sme už na začiatku naznačili, prevedieme dôkaz konštruktívny, t.j. priamo udáme postup, ktorým by sa

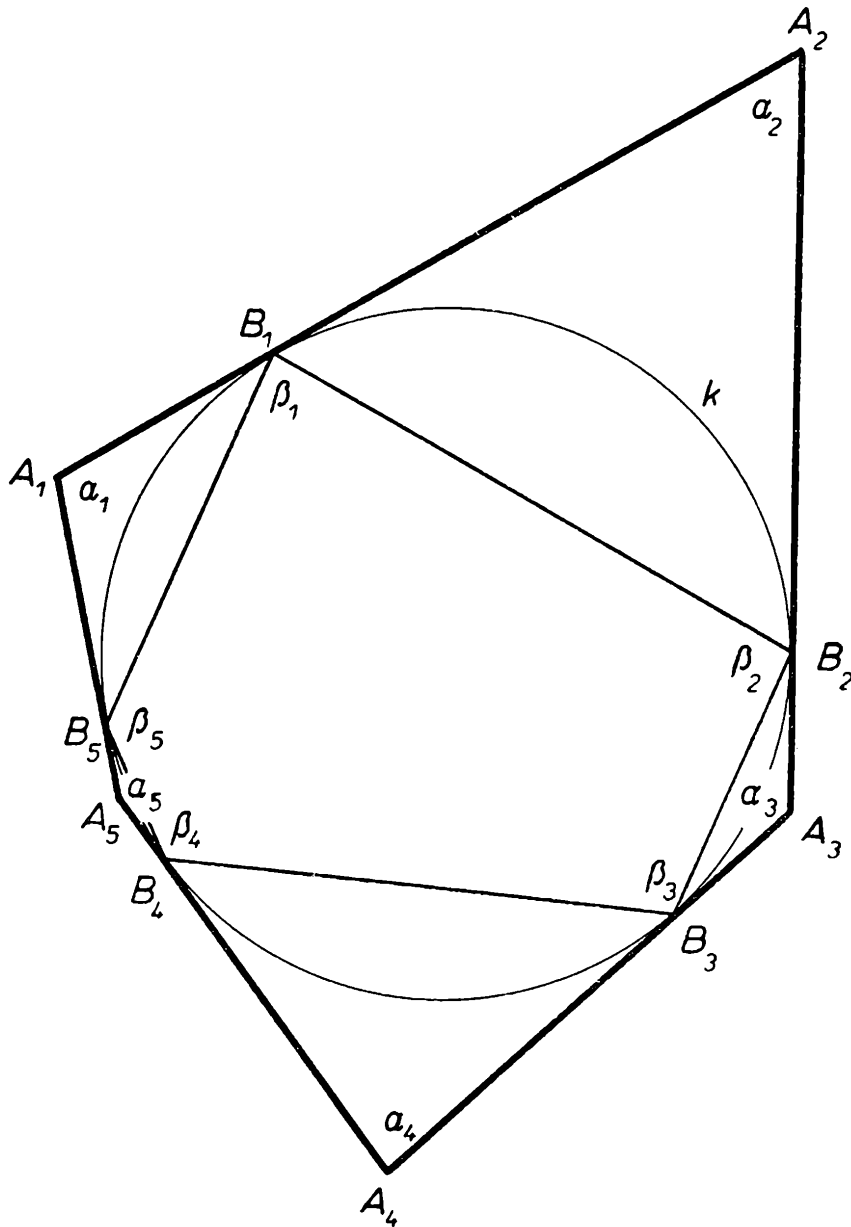
hľadaný n -uholník pre nepárne $n \geq 3$ zostrojil. Hlavnou úlohou je nájsť vzájomné priradenie čísiel $\alpha_i \longleftrightarrow \varphi_r$ a $\beta_j \longleftrightarrow \psi_s$.

Obečný prípad je neprehľadný. Začnime teda tak, že si rozeberieme prípad pre $n = 5$ (prípad $n = 3$ je príliš jednoduchý a neposkytol by dostatok materiálu na zobecnenie) (obr. 2).

Podľa (11) a (9) je

$$\varphi_3 = \psi_3 = \frac{3}{5} \pi .$$

Stačí zvoliť diferenciu Δ a všetky ďalšie čísla sú potom už pomocou (5)



Obr. 2

a (14) jednoznačne určené. Pre názornosť vypíšeme ich menovite:

$$\varphi_1 = \frac{3}{5}\pi - 4\Delta; \varphi_2 = \frac{3}{5}\pi - 2\Delta; \varphi_3 = \frac{3}{5}\pi; \varphi_4 = \frac{3}{5}\pi + 2\Delta; \varphi_5 = \frac{3}{5}\pi + 4\Delta \quad (15)$$

$$\psi_1 = \frac{3}{5}\pi - 2\Delta; \psi_2 = \frac{3}{5}\pi - \Delta; \psi_3 = \frac{3}{5}\pi; \psi_4 = \frac{3}{5}\pi + \Delta; \psi_5 = \frac{3}{5}\pi + 2\Delta.$$

Voľba čísla Δ je obmedzená podmienkami

$$\frac{3}{5}\pi - 4\Delta > 0 \text{ a } \Delta > 0,$$

$$\text{t.j.} \quad \frac{3}{20}\pi > \Delta > 0, \quad (16)$$

Podľa rovníc (3) je ψ_1 aritmetickým priemerom istých dvoch z čísiel $\varphi_1, \dots, \varphi_5$. Pretože tieto dve čísla sú rôzne, musí jedno z nich byť menšie ako ψ_1 , t.j. menšie ako $\frac{3}{5}\pi - 2\Delta$. Ako vidíme z (15), existuje jediné také číslo a to φ_1 . Preto $\psi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}$ a podobne $\psi_5 = \frac{\varphi_3 + \varphi_5}{2}$

Porovnaním uvedených rovníc s rovnicami (3) vysvitá, že $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ sú hodnoty troch uhlov pri troch susedných vrchoch päťuholníka $A_1 \dots A_5$. Ďalej budeme priamo hovoriť o susedných uhloch. Keby boli φ_4 a φ_5 uhly susedné, potom by podľa rovníc (3) existovalo i akési ψ_i rovné ich algebraickému priemeru. Z (15) vidno, že také ψ_i neexistuje. Nemôžu byť teda φ_4 a φ_5 uhly susedné. Teraz už usporiadanie prevedieme ľahko.

Je možné jedine toto usporiadanie:

$$\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_2, \varphi_4, \quad (17)$$

prípadne ešte opačné

$$\varphi_4, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_3, \varphi_1$$

Samozrejme nezáleží od toho, pri ktorom vrchole začneme označovať. T.j. nezáleží od prvého „pomenovania“ čísla α_1 niektorým z „mien“ $\varphi_1, \dots, \varphi_5$. Táto voľnosť je iba v označení, geometricky cyklickou zámenou „mien“ nedostaneme nič nové. Pri zmene označenia v zmysle obiehania, keby sme miesto poradia (17) vzali opačné, dostali by sme zrkadlový obraz 5-uholníka pôvodného. Kvôli pohodlnému rozpracovaniu a zobereniu našich úvah voľme toto označenie:

$$\alpha_1 = \varphi_3; \alpha_2 = \varphi_1; \alpha_3 = \varphi_4; \alpha_4 = \varphi_2; \alpha_5 = \varphi_5; \quad (18)$$

$$\text{potom} \quad \beta_1 = \psi_1; \beta_2 = \psi_2; \beta_3 = \psi_3; \beta_4 = \psi_4; \beta_5 = \psi_5 \quad (19)$$

Dôkaz ešte však stále neni hotový. Treba ukázať, že takto „navrhnutý“ 5-uholník je realizovateľný. To už prevedieme zostrojením. Zvolíme kružnicu k a vedieme k nej dotyčnicu t . Dotykový bod označíme B_1 a vedieme ďalšiu dotyčnicu p tak, aby $\sphericalangle B_1 A_2 B_2 = \alpha_2$, kde B_2 je dotykový bod dotyčnice p a A_2 priesečík priamok t, p . Zbytok konštrukcie prenecháme čitateľovi. V podstate je nutné vyšetriť iba situáciu pri vrchole A_1 , ktorý zostrojíme ako posledný. Jeden taký päťuholník je na obrázku

$$2. \text{ Preň je } \Delta = \frac{\pi}{15}$$

(Pokračovanie)

Geometrický význam kvadratické rovnice ve dvou proměnných

V řadě článků „O analytické geometrii v rovině“ otištěných v Rozhledech matematicko-fyzikálních jsem odvodil rovnici kružnice a pak rovnici paraboly, elipsy a hyperboly pro případ, kdy jedna jejich osa leží v některé souřadnicové ose nebo je s ní rovnoběžná. Přitom jsem se omezil jenom na tzv. *kartézskou soustavu souřadnic*, tj. takovou, jejíž osy x , y jsou vzájemně kolmé a mají stejnou jednotku délky. Všechny čtyři uvedené křivky (parabolu, kružnici, elipsu a hyperbolu) označujeme společným názvem *kuželosečky*, a to proto, že každá z nich se dá také vytvořit jako řez její roviny s nějakou rotační kuželovou plochou.

Shrňme a doplňme výsledky uvedených článků.

a) Má-li parabola vrchol $V(m; n)$ parametr $2p > 0$ a osu rovnoběžnou s osou x , pak má rovnici

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \text{ nebo } (y - n)^2 = -2p(x - m),$$

podle toho, je-li (při obvyklé orientaci osy x) její ohnisko F napravo nebo nalevo od vrcholu V . Provedeme-li početní výkony naznačené v obou rovnicích, dostaneme v obou případech rovnici tvaru

$$y^2 + Mx + Ny + L = 0, \text{ v níž je } M \neq 0 \quad (1)$$

Má-li parabola vrchol $V(m; n)$, parametr $2p > 0$ a osu rovnoběžnou s osou y , má rovnici

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \text{ nebo } (x - m)^2 = -2p(y - n)$$

Její úpravou dostaneme (v obou případech) rovnici tvaru

$$x^2 + Mx + Ny + L = 0, \text{ v níž je } N \neq 0. \quad (2)$$

b) Má-li kružnice střed $S(m; n)$ a poloměr $r > 0$, má rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

jejíž úpravou dospějeme k rovnici tvaru

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0; \quad (3)$$

z úpravy je patrné, že nemůže být zároveň $M = N = L = 0$.

c) Má-li elipsa střed $S(m; n)$, poloosy a , b ($a > b > 0$) a hlavní osu rovnoběžnou s osou x , má rovnici

$$b^2(x - m)^2 + a^2(y - n)^2 = a^2b^2.$$

Je-li při stejném označení hlavní osa elipsy rovnoběžná s osou y , pak má elipsa rovnici

$$a^2(x - m)^2 + b^2(y - n)^2 = a^2b^2$$

V obou případech dostaneme po úpravě rovnici tvaru

$$Hx^2 + Ky^2 + Mx + Ny + L = 0, H \neq K, H > 0, K > 0; \quad (4)$$

z úpravy také plyne, že nemůže být zároveň $M = N = L = 0$.

d) Má-li hyperbola střed $S(m; n)$, poloosy a, b (a je reálná poloosa) a hlavní osu rovnoběžnou s osou x , má rovnici

$$b^2(x - m)^2 - a^2(y - n)^2 = a^2b^2$$

Je-li při stejném označení hlavní osa hyperboly rovnoběžná s osou y , pak má hyperbola rovnici

$$-a^2(x - m)^2 + b^2(y - n)^2 = a^2b^2$$

V obou případech dostaneme po úpravě rovnici tvaru

$$Hx^2 + Ky^2 + Mx + Ny + L = 0, H > 0, K < 0; \quad (5)$$

z úpravy také plyne, že nemůže být zároveň $M = N = L = 0$.

Protože každý průměr kružnice je její osou souměrnosti, můžeme vždy kružnici brát jako kuželosečku, jejíž osa je rovnoběžná s některou souřadnicovou osou. Z případů a) až d) vidíme, že každá kuželosečka, jejíž některá osa je rovnoběžná s některou souřadnicovou osou, má rovnici, která se dá napsat některým z tvarů (1) až (5). Přitom rovnici kružnice můžeme psát ve tvaru (4), jestliže připustíme ve (4) případ $H = K > 0$. Avšak i rovnici paraboly můžeme psát ve tvaru (4), jestliže připustíme v této rovnici i případ $H = 0$, nebo $K = 0$. Konečně si ještě všimněme, že v každé z rovnic (1) až (5) se vždy vyskytují obě proměnné (tj. není zároveň $H = M = 0$, nebo $K = N = 0$) a v žádném případě nemůže být $M = N = L = 0$. Tak dospíváme k tomuto výsledku.

V ě t a I. *Je-li osa kuželosečky rovnoběžná s některou osou dané kartézské soustavy souřadnic, pak má kuželosečka v této soustavě rovnici*

$$Hx^2 + Ky^2 + Mx + Ny + L = 0, \quad (I)$$

v níž aspoň jedno z čísel H, K není rovno nule, kromě toho není $H = M = 0$, nebo $K = N = 0$, nebo $M = N = L = 0$. Pro parabolu je buď H nebo K rovno nule, pro elipsu a kružnici je $H > 0, K > 0$ (pro kružnici je $H = K > 0$) a pro hyperbolu je $H > 0, K < 0$.

V sedmém čísle loňského ročníku Rozhledů jsem také odvodil rovnici hyperboly, jejíž asymptoty leží v souřadnicových osách. Taková hyperbola (jejíž žádná osa není rovnoběžná se souřadnicovou osou x nebo y) má rovnici $xy = c, c \neq 0$, čili

$$xy + L = 0, L \neq 0$$

Je možno dokázat, že v rovnici kuželosečky, jejíž žádná osa není rovnoběžná s některou souřadnicovou osou (takovou kuželosečkou není ovšem nikdy kružnice), se vždy vyskytuje člen Bxy , kde $B \neq 0$. Platí totiž věta, kterou uvedu bez důkazu:

V ě t a I I. *Není-li osa kuželosečky rovnoběžná s některou osou dané kartézské soustavy souřadnic, má kuželosečka v této soustavě rovnici*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (\text{II})$$

ve které je vždy $B \neq 0$.

Každou rovnici (II), ve které je aspoň jedno z čísel A, B, C nenuťové, nazýváme *kvadratickou rovnicí ve dvou proměnných x, y* . Je-li $B = 0$ a zároveň aspoň jedno z čísel A, C není rovno nule, vznikne z rovnice (II) kvadratická rovnice (I) napsaná ve větě I. Je tedy rovnice (I) jenom zvláštním případem rovnice (II). Musíme si ovšem uvědomit, že podle vyslovené definice je kvadratickou rovnicí ve dvou proměnných také např. rovnice $3x^2 + 2x - 1 = 0$, neboť má tvar (II), ve které je $A \neq 0, B = C = E = 0$. Z vět I a II však plyne, že rovnice kuželosečky obsahuje vždy skutečně obě proměnné x, y (neboť podle věty II je $B \neq 0$ a podle věty I není zároveň $H = M = 0$, ani $K = N = 0$). Z toho a z věty I, II tedy plyne důležitý výsledek, který můžeme vyslovit takto:

V ě t a I I I. *Každá kuželosečka je v dané kartézské soustavě souřadnic vyjádřena kvadratickou rovnicí ve dvou proměnných, jež se obě v rovnici skutečně vyskytují.*

To znamená, že v rovnici (II) je buď $B \neq 0$, nebo je $B = 0$ (a aspoň jedno z čísel A, C není nula), ale pak není $A = D = 0$, nebo $C = E = 0$.

Přirozeně nás napadá otázka, zda také obráceně každá kvadratická rovnice ve dvou proměnných je v dané kartézské soustavě souřadnic rovnicí nějaké kuželosečky. Odpověď je záporná, neboť např. rovnice $x^2 + 2x + 4 = 0$ nemůže být (podle věty III) rovnicí kuželosečky proto, že neobsahuje vůbec proměnnou y . Na příkladech však uvidíme, že ani kvadratická rovnice ve dvou proměnných, které se v rovnici skutečně vyskytují, nemusí být rovnicí kuželosečky. Příklady zvolíme tak, abychom ukázali všechny možnosti geometrického výkladu dané kvadratické rovnice.

1. *Vyložte geometrický význam rovnice $x^2 + 2x + 4 = 0$.* Tuto rovnici můžeme upravit na tvar $(x + 1)^2 + 3 = 0$, čili $(x + 1)^2 = -3$. Protože však pro každé reálné číslo x je výraz $(x + 1)^2$ nezáporný, nemůže být nikdy rovný číslu (-3) . Daná kvadratická rovnice nemá tedy žádný geometrický význam.

2. *Vyložte geometrický význam rovnice $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$.* Tato rovnice obsahuje skutečně obě proměnné x, y a může tedy (podle věty III) být rovnicí kuželosečky. Je-li tomu tak, pak z věty (II) plyne,

že její osa nesmí být různoběžná s osou x nebo s osou y (jinak by musela rovnice obsahovat člen Bxy , $B \neq 0$). Představuje-li tedy rovnice kuželosečku s osou rovnoběžnou s osou x nebo s osou y , pak je to podle věty I jediné kružnice ($H = K = 1$). Proto se rovnici snažíme upravit na tvar $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, který představuje kružnici o středu $S(m; n)$ a poloměru $r > 0$. Rovnici upravíme takto

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0 ,$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Avšak $a^2 + b^2 = 0$ jediné tehdy, je-li $a = b = 0$. To znamená, že naše rovnice platí jediné pro $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$, čili jediné pro $x = 1$, $y = 2$. Daná kvadratická rovnice představuje jenom jediný bod a není tedy rovnicí kuželosečky.

3. *Vyložte geometrický význam rovnice $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$.* Rovnice obsahuje obě proměnné x , y a mohla by být tedy (podle věty III) rovnicí kuželosečky. Protože je to rovnice (II), ve které je $B \neq 0$, mohla by to být jediné kuželosečka, jejíž osa není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou. Avšak je patrné, že rovnici lze psát takto

$$(2x - 3y)^2 = 0$$

Tato rovnice je splněna jediné tehdy, je-li $2x - 3y = 0$. To však je rovnice přímky, která prochází počátkem a bodem $(3, 2)$. Daná kvadratická rovnice je tedy rovnicí jediné přímky.

4. *Vyložte geometrický význam rovnice $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y = 0$.* Rovnice obsahuje obě proměnné x , y a mohla by být tedy (podle věty III) rovnicí kuželosečky. Zároveň je patrné, že její osa nemůže být rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou. Avšak rovnici je možno upravit takto

$$(x - 3y)^2 + (x - 3y) = 0 ,$$

$$(x - 3y) (x - 3y + 1) = 0$$

Tato rovnice však platí jenom tehdy, je-li buď $x - 3y = 0$, nebo $x - 3y + 1 = 0$. První rovnice však představuje přímku procházející počátkem a bodem $(3; 1)$, druhá přímku s ní rovnoběžnou a procházející bodem $(2; 1)$. Daná kvadratická rovnice je tedy rovnicí dvou různých rovnoběžek.

5. *Vyložte geometrický význam rovnice $x^2 - y^2 = 0$.* Rovnice obsahuje obě proměnné x , y a mohla by být tedy (podle věty III) rovnicí kuželosečky. Protože neobsahuje člen Bxy ($B \neq 0$), nemůže mít osu různoběžnou se souřadnicovými osami (viz větu II). Je-li to tedy kuželosečka, pak má osu rovnoběžnou s osou x , nebo s osou y . Taková kuželosečka má podle věty I rovnici (I), ve které však není $M = N = L = 0$. Avšak naše rovnice má tvar $x^2 - y^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 =$

$= 0$; není to tedy kuželosečka. To poznáme ihned, upravíme-li rovnici takto

$$(x + y)(x - y) = 0.$$

Tato rovnice platí jenom tehdy, je-li buď $x + y = 0$, nebo $x - y = 0$. To jsou však rovnice dvou různoběžek, které procházejí počátkem. Dané kvadratické rovnice je tedy rovnicí dvou různoběžek.

V uvedených pěti příkladech nebyla kvadratická rovnice ve dvou proměnných rovnicí žádné kuželosečky a měla přitom pokaždé jiný geometrický význam. Lze dokázat, že kromě těchto pěti geometrických významů musí daná kvadratická rovnice představovat vždy některou z kuželoseček, neboť platí:

V ě t a I V. *Každá kvadratická rovnice ve dvou proměnných se dá vždy geometricky vyložit jedním z těchto devíti případů:*

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. Nemá vůbec geometrický význam. | 2. Představuje jediný bod. |
| 3. Představuje jedinou přímku. | 4. Představuje dvě různé rovnoběžky. |
| 5. Představuje dvě různoběžky. | 6. Představuje kružnici. |
| 7. Představuje elipsu. | 8. Představuje hyperbolu. |
| 9. Představuje parabolu. | |

Čtenáře by pravděpodobně zajímalo, zda se dá z koeficientů dané kvadratické rovnice poznat, kdy nastane který z devíti možných případů. To je skutečně možné, avšak odvození příslušných podmínek vyžaduje podstatně hlubších znalostí, než obsahují mé články v Rozhledech. Mohu proto čtenáře jenom odkázat na vysokoškolské učebnice, např. knihu doc. dr. Mastného „Úvod do analytické geometrie lineárních útvarů a kuželoseček“, kterou vydalo nakladatelství ČSAV v roce 1953.

Deskriptivní geometrie

Karel Drábek, ČVUT, Praha:

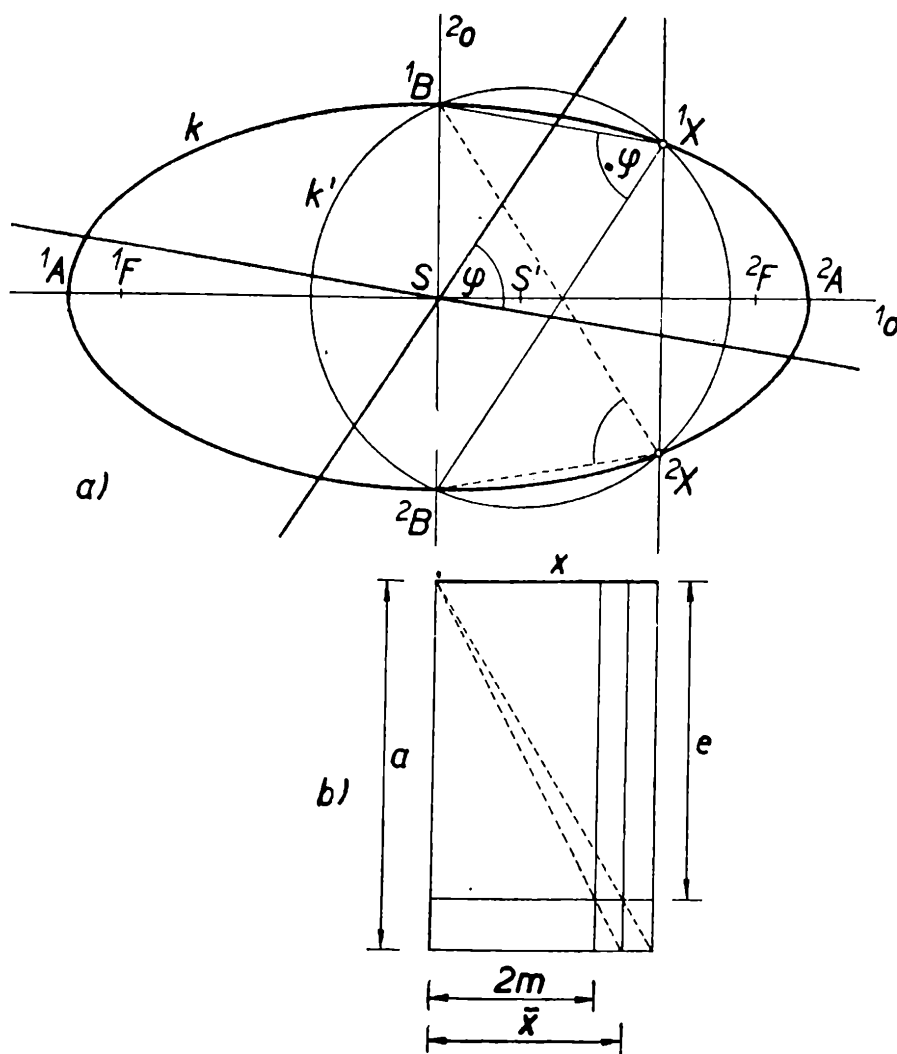
Sdružené průměry kuželosečky o daném úhlu φ

Sestrojení sdružených průměrů o daném úhlu φ provedeme nejdříve podrobně pro elipsu a získané výsledky budeme aplikovat pak na hyperbolu. Abychom si zjednodušili prováděné úvahy, budeme předpokládat, že úhel φ daných sdružených průměrů je jejich ostrý úhel, tj. že $0 < \varphi < 90^\circ$.

a) Kuželosečka k je elipsa (obr. 1a) určená osami $^1A^2A$, $^1B^2B$:

Sestrojme kružnici k' procházející vedlejšími vrcholy 1B , 2B elipsy k a mající střed S' ve vzdálenosti $m \neq 0$ od středu S této elipsy. Kružnice k' a elipsa k mají vedle bodů 1B , 2B případně další průsečíky 1X , 2X , které jsou souměrně sdružené podle hlavní osy $^1o \equiv ^1A^2A$ elipsy. Potom platí:

Spojnice jednoho z průsečíků s oběma vedlejšími vrcholy jsou přímky rovnoběžné se sdruženými průměry elipsy.



Obr. 1

Důkaz tvrzení je zřejmý, neboť stanovené průměry jsou středními příčkami v trojúhelníku $^1B^2B^1X$, které procházejí středem S strany $^1B^2B$ trojúhelníka.

Spojnice druhého průsečíku s vrcholy 1B , 2B dávají druhou dvojici sdružených průměrů. Obě dvojice určují stejně velký úhel φ a jsou navzájem souměrné podle obou os elipsy.

Sestrojení průsečíků 1X , 2X kružnice k' a elipsy k provedeme pomocí věty:

Průsečíky $^1X, ^2X$ kružnice k' s elipsou k (které jsou různé od společných bodů $^1B, ^2B$) leží na přímce rovnoběžné s vedlejší osou 2o a položené v polorovině $^2oS'$ ve vzdálenosti

$$x = \frac{2 a^2 m}{e^2}$$

D ů k a z provedeme pomocí analytické geometrie¹⁾. Elipsa k budiž v základní (osové) poloze

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Kružnice k' má pak rovnici

$$x^2 - 2mx + y^2 = b^2.$$

Vyloučením y^2 z rovnic elipsy k a kružnice k' dostaneme

$$x [x (a^2 - b^2) - 2a^2m] = 0.$$

Pro $x = 0$ obdržíme průsečíky $^1B, ^2B$, v případě $x \neq 0$ je

$$x(a^2 - b^2) - 2a^2m = 0, \text{ tj. } x = \frac{2 a^2 m}{e^2}$$

a získáme zbývající dva průsečíky $^1X, ^2X$.

Konstrukci úsečky x lze snadno provést, neboť je možno psát

$$x = \frac{\bar{ax}}{e}, \quad \text{kde } \bar{x} = \frac{2am}{e}$$

Jedná se proto o přeměňování obdélníků (což je provedeno v obr. 1b). Průsečíky sestrojené přímky s kružnicí k' jsou hledanými průsečíky $^1X, ^2X$ elipsy k a kružnice k' .

Z provedené úvahy je patrné, že použitá kružnice k' dává dva různé průsečíky $^1X, ^2X$ pouze tehdy, je-li

$$m < \frac{e^2}{2a},$$

tj. tehdy, jsou-li oba průsečíky kružnice k' s hlavní osou 1o elipsy uvnitř úsečky $^1A^2A$.

P o z n á m k a 1. Zřejmě bychom mohli úvahu provádět obdobně pro kružnici k'' procházející hlavními vrcholy $^1A, ^2A$ elipsy k a mající střed S'' ve vzdálenosti $n \neq 0$ od středu S dané elipsy. Průsečíky $^1Y, ^2Y$ kružnice k'' a elipsy k jsou v tomto případě na rovnoběžce s hlavní osou 1o a položené v opačné polorovině k polorovině $^1oS''$ ve vzdálenosti

$$y = \frac{2 b^2 n}{e^2}.$$

¹⁾ Viz články doc. E. Kraemera o analytické geometrii v minulých číslech Rozhledů.

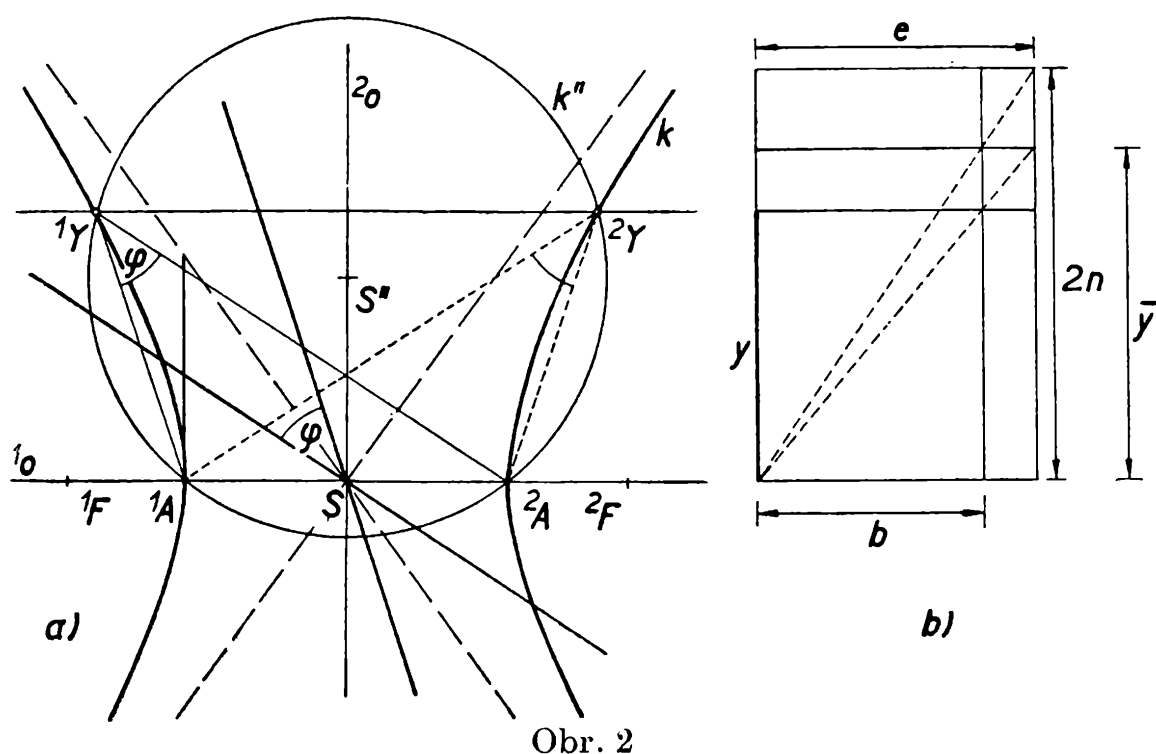
Všimněme si nyní velikosti obvodového úhlu ξ v případě, že kružnice k' prochází body 2A , 1B , 2B , kdy tedy

$$m = \frac{e^2}{2a}.$$

V nyní uvažovaném případě je

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{b}{a}, \quad \text{tedy} \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{2ab}{e^2}$$

Tento úhel ξ je nejmenší možný úhel sdružených průměrů elipsy. Takto určené sdružené průměry jsou navzájem souměrné podle obou os elipsy. Všechny ostatní sdružené průměry svírají úhly φ větší než výše určený úhel ξ^2).



Obr. 2

Obrácenou konstrukcí najdeme v elipse k snadno sdružené průměry, které svírají předepsaný úhel φ . To si za cvičení proveďte sami.

Za cvičení si sestrojte též elipsu, jestliže znáte velikost její hlavní a vedlejší poloosy, která má sdružené průměry na dvou daných různoběžných přímkách (svírajících úhel φ , který splňuje podmínku $\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{2ab}{e^2}$).

b) Kuželosečka k je hyperbola (obr. 2) určená hlavní osou $^1A^2A$ a ohnisky 1F , 2F .

²⁾ Vztah $\operatorname{tg} \xi = \frac{2ab}{e^2}$ byl odvozen jiným způsobem v článku K. Drábka, Sestrojení sdružených průměrů elipsy s daným úhlem φ . Rozhledy 39 (1960–61), str. 65 – 68; viz tam rovnici (7b).

Kružnice k'' o středu S'' na vedlejší ose 2o hyperboly k (ve vzdálenosti $n \neq 0$ od středu S hyperboly) a procházející oběma vrcholy 1A , 2A hyperboly, protíná ji *vždy* v dalších dvou bodech 1Y , 2Y . Platí pak obdobně jako v případě elipsy:

Spojnice jednoho z průsečíků s oběma hlavními vrcholy jsou přímky rovnoběžné se sdruženými průměry hyperboly.

A dále:

Průsečíky 1Y , 2Y kružnice k'' s hyperbolou k (různé od hlavních vrcholů 1A , 2A) leží na přímce rovnoběžné s hlavní osou 1o a položené v polorovině $^1oS''$ ve vzdálenosti

$$y = \frac{2b^2n}{e^2},$$

kde $b^2 = e^2 - a^2$. Ukázka konstrukce úsečky y je v obr. 2b.

Dostáváme tedy vždy dvě dvojice sdružených průměrů, které svírají stejný ostrý úhel φ .

Jak se najdou v dané hyperbole obráceně sdružené průměry, které určují předem stanovený úhel φ , to si proveďte opět sami jako cvičení.

P o z n á m k a 2. V případě rovnoosé hyperboly jsou hledané průsečíky 1Y , 2Y kružnice k'' (o středu S'' a poloměru S''^1A) na přímce rovnoběžné s hlavní osou 1o (v polorovině $^1oS''$) ve vzdálenosti $y = n$, tj. na přímce jdoucí zvoleným středem S'' (a pak $^1YS'' = ^2YS'' = ^1AS'' = ^2AS''$).

Za cvičení sestojte hyperbolu, jestliže znáte velikost její hlavní poloosy a velikost excentricity, která má mít sdružené průměry na dvou daných (různoběžných) přímkách.

P o z n á m k a 3. Provedené úvahy lze snadno rozšířit i na případ úhlu $\varphi = 90^\circ$, kdy pomocná kružnice k' nebo k'' je soustředná s danou kuželosečkou.

Fyzika

Prof. dr. Vilém S a n t h o l z e r, KU, Hradec Králové:

Radioizotopy v atmosférickém spadu

Atmosférický spad vzniká následkem výbuchů jaderných zbraní. Radioizotopy vzniklé stěpením jaderné nálože se po výbuchu vyskytují ve formě volných atomů, avšak ihned se okysličují a začnou se adsor-

bovat na prašné částice nejrůznějších velikostí¹⁾. Tak vzniká *umělý radioaktivní aerosol*, tj. „roztok“ radioaktivních částic v ovzduší. *Aerosol* obecně jsou jemné, pevné nebo kapalné částice rovnoměrně rozptýlené v plynu.

Po dočasném zastavení nukleárních zkoušek dnem 1. 11. 1958 se množství atmosférického spadu za několik měsíců podstatně snížilo, takže koncem r. 1959 a začátkem r. 1960 dopadalo u nás jen asi 1 milicurie na 1 km² za měsíc. (*Milicurie* je tisíciná jednotka *curie* pro množství radioaktivního prvku. 1 curie je takové množství, v němž se za jednu vteřinu radioaktivně přeměňuje $3,7 \times 10^{10}$ atomů. Stejné množství atomů se přeměňuje v jednom gramu prvku radia a v radonu, který je s jedním gramem Ra v rovnováze. Na tomto základě byla vytvořena jednotka curie.)

V l. 1960 a 1961, po francouzských jaderných zkouškách, nastalo přechodné zvýšení radioaktivity spadu, zvláště nápadné v březnu 1960 po prvním francouzském jaderném výbuchu na Sahaře²⁾. Množství spadu potom opět pokleslo na pouhé desetiny milicurie/km²/ měsíc. Kdyby byly jaderné zkoušky opět obnoveny ve velkém měřítku, podobně jako v r. 1958, množství spadu by opět začalo stoupat a bylo by ohroženo zdraví celého lidstva.

Které radioizotopy v atmosférickém spadu jsou zvláště nebezpečné? Za nejvíce nebezpečnou zplodinu štěpení uranu a plutonia je považováno radioaktivní stroncium Sr 90, tj. stroncium hmotového čísla 90. Stroncium 90 se na Zemi nevyskytovalo až do doby, kdy se začalo tvořit jako následek výbuchů jaderných pum. Kdekoliv je tedy nacházíme, jeho přítomnost vždycky dokazuje provedené jaderné výbuchy. Také *h a v á r i e r e a k t o r ů*, které jsou však řídké, působí znečištění radioaktivními látkami v malé oblasti kolem reaktoru, která se dá snadno zabezpečit. Poločas Sr 90 je 28 let, tj. libovolné množství Sr 90 se rozpadne na polovičku teprve za 28 let, takže Sr 90 napadené na zemský povrch má dlouhý život. Poločas 28 let nazýváme *poločasem fyzikálním*. Pro člověka je důležitý *poločas biologický*. Je to doba, za kterou se z organismu vyloučí polovička z množství radioizotopu, který se dostal do organismu. Ve skutečnosti se uplatňuje *poločas efektivní* (skutečný), neboť radioaktivity vstřebaného radioizotopu ubývá jednak podle fyzikálního poločasu T , jednak podle biologického poločasu T_b . Uplatňuje se současně radioaktivní přeměna i vylučování z organismu, takže efektivní poločas T_{ef} je dán vzorcem

$$T_{ef} = \frac{T \times T_b}{T + T_b},$$

¹⁾ František Běhouněk: *Lidé a radioaktivita*, ČSAV 1960.

²⁾ *Rozhledy matematicko-fyzikální* 1960—61, č. 1, str. 17.

jak se dá snadno odvodit z rozpadové teorie. Úbytek prvku radioaktivní přeměnou v závislosti na čase se děje podle křivky *e x p o n e n c i á l y* a podobně také úbytek vylučováním z organismu. Časový pokles podle exponenciály se vyznačuje tím, že za jeden poločas klesne množství prvku na polovinu, za dva poločasy na čtvrtinu, za tři poločasy na osminu, atd. Na obr. 1 je pro srovnání také exponenciála *e*.

Různé orgány v těle mají pro daný radioizotop různé biologické poločasy. Tzv. *kritický orgán* je ten, který má pro daný radioizotop nejdelší biologický poločas. Předpisy pro ochranu při práci s radioaktivními látkami mají to na zřeteli při *s t a n o v e n í n a n e j v ý š e p ř í p u s t n ý c h k o n c e n t r a c í r a d i o i z o t o p ů*, které se mohou dostat do lidského organismu. Koncentrace může být nanejvýše taková, aby kritický orgán nebyl poškozen.

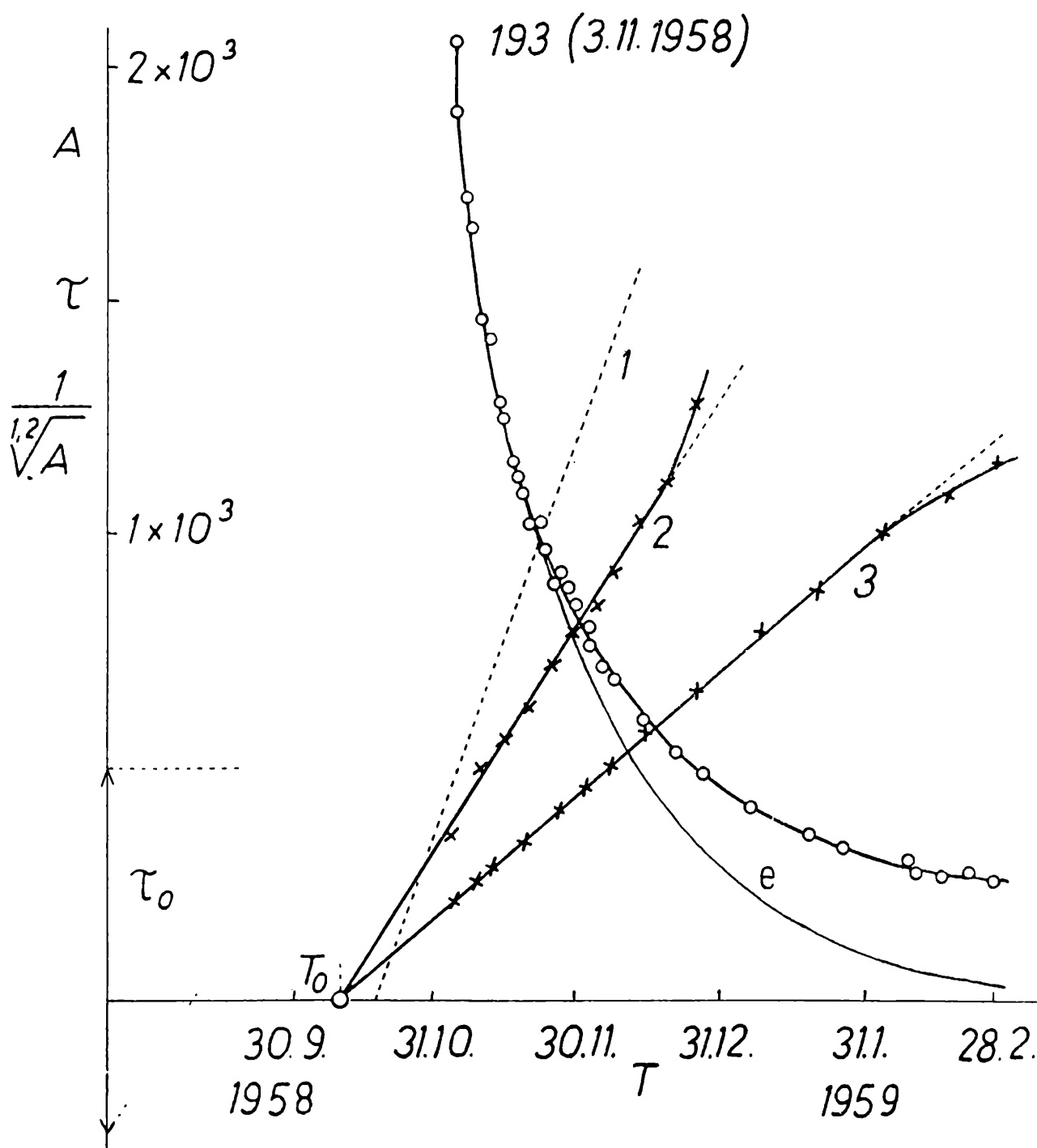
Pro stroncium 90 jsou kritickým orgánem kosti. Biologický poločas pro kosti je 4000 dnů, efektivní poločas 2900 dnů³⁾). Množství stroncia 90 v kostech poklesne tudíž na polovinu teprve asi za 8 let. Vyplývá to také z uvedeného vzorce pro $T = 28$ let, $T_b = 11$ let. Naproti tomu pro radioizotop césium 137, který je rovněž produktem štěpení uranu a plutonia a má poměrně dlouhý poločas 33 let, jsou kritickým orgánem svaly a efektivní poločas je pouze 17 dnů. To se jeví i v nejvyšších přípustných hodnotách, které se ještě mohou v těle vyskytovat. Československá státní norma ČSN 34 1730 z června 1956 stanoví pro celé lidské tělo nejvyšší přípustné množství 1 mikrocurie Sr 90, kdežto pro Cs 137 skoro 100krát více, 98 mikrocurie. (*M i k r o c u r i e* je miliontina jednotky curie.)

Nejvyšší přípustná koncentrace stroncia 90 ve vodě je 8×10^{-4} mikrocurie v litru vody. Ve vzduchu 2×10^{-7} mikrocurie v litru vzduchu. Césia 137 může být ve vzduchu 1000krát více.

Stroncium má velmi podobné vlastnosti s vápníkem, doprovází vápník a může jej také zastupovat. Množství obyčejného stroncia v kostech v poměru k vápníku je asi 1 : 500. Dostane-li se tedy jakékoliv stroncium a tedy i radioaktivní Sr 90 do vody nebo do potravin, dostává se stejnou cestou jako vápník také do kostí. To bylo dokázáno pokusy na zvířatech a snadno to může být demonstrováno *autoradiografií* destičky z kostí zvířat, která s potravou dostávala Sr 90. Autoradiografická metoda využívá účinku záření na fotografickou desku. Vlivem záření deska zčerná na místě, kde byl přiložen radioaktivní biologický preparát.

Úzký vztah prvků stroncia a vápníku byl příčinou, že v radiobiologii byla zavedena *stronciová jednotka*. Je to 1 mikromikrocurie stroncia 90 na 1 gram vápníku. Např. začátkem roku 1959 mléko u nás obsahovalo

³⁾ Vlastimil Slouka: Biologické účinky záření, Orbis 1959.



Obr. 1. Časový pokles aktivity vzorku atmosférického spadu nabraného 3. 11. 1958 (vzorek č. 193). Jednotlivá měření jsou označena kroužky. Časový pokles radiokativy se děje podle křivky hyperbolického typu, $A = kt^{-1,2}$, kde A je aktivita, t je čas, který uplynul od data jaderného výbuchu, k konstanta. Pro srovnání je nakreslena křivka e , která je exponenciálou. Časový pokles aktivity podle exponenciály by byl rychlejší. Aktivity štěpných produktů ubývá pomaleji, neboť na konec zůstávají radioizotopy dlouhého poločasu, jejichž úbytek s časem je velmi pomalý. Na obr. jsou ještě také pomocné přímky 1, 2 a 3, kterých bylo použito ke geometrickému určení přibližného data výbuchu $T_0 = 10. 10. 1958$. Čas $t = T - T_0$. Poločasy jsou označeny τ .

6 až 8 stronciových jednotek a po zastavení jaderných zkoušek začal se také snižovat obsah Sr 90 v našem mléce.

Sr 90 - i jiné radioizotopy vznikající štěpením - dostávají se do lidského těla *biologickými (potravinovými) řetězy*. Atmosférický spad je vymýván dešťovou vodou. Sr 90 v něm obsažené se dostává z dešťové vody do půdy, z půdy s vápníkem do rostlin, kde se převážně hromadí v kořenech (kořenový efekt), avšak přece jen část Sr 90 se tak dostává do mléka. Sr 90 dopadá ovšem také přímo jako radioaktivní prach na vegetaci. Např. v Anglii, v době intenzivního provádění nukleárních zkoušek v l. 1954—56, byl zjištěn nápadný vzrůst obsahu Sr 90 v ovčích kostech. Kostí se užívá také k výrobě polévkových výtažků, takže odborníci správně upozornili na nebezpečí touto cestou požívaného Sr 90, i když jeho množství v mase bylo poměrně malé. Je pozoruhodné, že ovce, pocházející z horských oblastí, měly větší množství Sr 90 v kostech než ovce z nížin - jako následek mnohem vydatnějších dešťů v horách. Dešťové srážky důkladně vymývají radioaktivní částice z ovzduší, kdežto volným pádem a prouděním vzduchu se dostává na zemi jen malá část spadu. Někteří autoři odhadují, že 97 % radioaktivity spadu je vymýváno dešťovými srážkami.

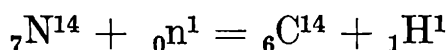
Radiologové dokázali přítomnost Sr 90 i v lidských kostech, a to u lidí ze všech končin světa. Jsou to zlomky stronciové jednotky; avšak asi u 10 % lidí bylo dokázáno množství 10krát větší a v jednom případě asi 60krát větší.

Z toho je jasně patrné, že je třeba již neprovádět další nukleární pokusy a dohodnout se o zákazu jaderných zbraní, jak o to důsledně usiluje Sovětský svaz. I na Západě většina odborníků považuje zákaz jaderných zbraní za nutný v zájmu zdraví celého lidstva, a to právě na základě soustavného měření atmosférického spadu a vědeckého zjišťování obsahu štěpných produktů v biologickém materiálu. Je např. pochmurnou skutečností, že obsah Sr 90 v lidských kostech je u nejmenších dětí vyšší než u dospělých. I když zatím jde o množství zcela nepatrná, je nutno tvrdě odmítat některé neodpovědné fyziky a generály na Západě, kteří stále ještě podceňují toto děsivé nebezpečí. Boj za zákaz nukleárních zbraní je dnes součástí mezinárodního třídního boje, v němž Sovětský svaz má spojence po celém světě. Vždyť např. není vyloučeno, že obnovení jaderných zkoušek mohlo by způsobit v dohledné době zvětšení počtu sarkomů (zhoubných nádorů) z kostní tkáně (sarcoma osteogenesises). Dramatický případ kostní rakoviny, vyvolané stronciem 90, byl zjištěn v USA, zatím sice jen u ondatry, která však žila v okolí atomové stanice Oak Ridge v Tennessee a živila se také vodními rostlinami kontaminovanými stronciem 90 z odpadu atomové továrny. Měla kostní nádor na jedné noze, v kosti bylo deponováno Sr 90, které působilo místní ozařování místní tkáně. Uvádí se také, že v oblastech blízko jaderných pokusných střelnic v USA byl každý gram vápníku v mléce doprovázen takovým množstvím stroncia 90, že při předpokládaném zadržení asi

dvou procent vstřebaného stroncia, dostávalo by se do lidských kostí nadtoleranční množství Sr 90 (tj. nad přípustnou dávku) po vypití asi 1300 litrů mléka. Odhad se vztahuje na dospělého člověka. U rostoucího organismu je retence (zadržování) vápníku a tudíž i stroncia větší, neboť vápníku je třeba pro stavbu kostí.

Také v zemích, kde se hodně požívá rýže, která obsahuje větší množství Sr 90 než jiné rostliny, je nebezpečí hromadění Sr 90 v kostech. Taková vědecká fakta burcují veřejné mínění i na Západě. Necháváme stranou také účinky genetické⁴⁾, které by se mohly vyskytovat jako následek jaderných zkoušek a na něž důsledně poukazuje v USA prof. L i n u s P a u l i n g, laureát Nobelovy ceny. Účinkem záření je možno vyvolat *mutace*, tj. náhlé a nepředvídané dědičné změny, které jsou trvalé a uplatňují se neustále v dalším potomstvu. Mutace obecně mohou být prospěšné i škodlivé, avšak mutace vlivem záření jsou pravděpodobně škodlivé a mohly by vést snad i ke zrudám. Do těchto speciálních otázek nemůžeme zde zabíhat. Nebezpečné je, že záření z atmosférického spadu postihuje celé lidstvo a postihuje především kosti v období vývoje, kdy na záření nejvíce reaguje kostní tkáň.

V posledních letech bylo poukázáno také na nebezpečí z radioaktivního uhlíku C 14, který vzniká účinkem neutronů na dusík v ovzduší. Veliká množství neutronů vznikají zejména při explozích vodíkových pum. Neutrony reagují s jádry dusíku podle rovnice



kde n značí neutron (má atomové číslo nulové a hmotové číslo 1).

Poločas radiouhlíku C 14 je 5700 let. Uhlík je v přírodě všudypřítomný, takže právem je poukazováno na to, že C 14 by mohl být nejvíce nebezpečným zdrojem trvalého zvyšování radioaktivity v biosféře, tj. v oblasti života kolem nás. Poukázal na to např. akademik S a c h a r o v a u nás F. H e r č í k. Poměrně značná část radiouhlíku C 14 se dostává do kostí (asi 4 %; poločas vylučování je 180 dní). Právě selektivní (výběrové) zachycování radiouhlíku v kostech mohlo by se stát vážným nebezpečím pro celé lidstvo, kdyby znovu byly prováděny výbuchy megatonových (tj. vodíkových) pum. Radiouhlík tvoří s kyslíkem radioaktivní kysličník uhličitý, který je vdechován rostlinami i živočichy. A tak by se celá biosféra mohla postupně kontaminovat (znečistit) nejen radioaktivním stronciem, ale také radioaktivním uhlíkem.

Jedině trvalý zákaz jaderných zkoušek může odstranit toto nebezpečí pro celé lidstvo.

⁴⁾ Genetika je nauka o dědičnosti a proměnlivosti organismů.

Mezinárodní praktická teplotní stupnice

Úvod

Již v roce 1927 byla mezinárodně přijata teplotní stupnice, jejíž definice byla založena tehdy na nejvyspělejších poznatcích v oboru termiky. Jejím přijetím a zavedením byla odstraněna neshoda v teplotních údajích podle rozdílných teplotních stupnic. Od té doby ovšem rychle pokračoval i vývoj měřicí techniky, byly získány a shromažďovány různé nové poznatky. Podle nich musela i teplotní stupnice ve svých zásadách doznat různé změny. Dnešní *Mezinárodní praktická teplotní stupnice* je založena na definici revidované v roce 1948. V minulém roce (1960) bylo znění této definice doplněno, viz např. Zprávy z XI. generální konference pro míry a váhy, konané v říjnu 1960 v Paříži. V dalších odstavcích se krátce seznámíme s hlavními zásadami této stupnice.

Hlavní teplotní body

Mezinárodní praktická teplotní stupnice spočívá na šesti teplotách, jež jsou po její délce „umístěny“ nerovnoměrně. Jde o teploty určitých termodynamických rovnovážných stavů, jež lze za předepsaných podmínek kdykoliv a kdekoliv reprodukovat. Dobrá a spolehlivá reprodukce těchto teplot je velmi důležitá, protože tvoří vlastně etalonový základ *termometrie*. Těchto šest teplot nazýváme *hlavními teplotními body*. Teploty na této mezinárodní stupnici vyjadřujeme ve stupních Celsia, jež značíme °C. Chceme-li značkou připojenou u teplotních hodnot jednoznačně vyjádřit, že jde o údaje právě v této mezinárodní (internacionální) stupnici (tj. revidované v roce 1948), pak píšeme °C (Int. 1948).

Hlavní teplotní body jsou definovány jednak rovnovážnými stavy při fázových (skupenských) přeměnách vhodných látek při varu, resp. kondenzaci, při tání, resp. tuhnutí, jednak rovnovážným stavem při koexistenci (společné, současné existenci) tří fází téže látky. Takový stav nazýváme také *trojným bodem* nebo *trojbodem*. Zatím co teplota fázových přeměn je závislá na okamžitém působícím tlaku, netřeba tuto závislost uvažovat u trojného bodu, protože trojný bod nemůže existovat než pouze při jedné teplotě a jediném tlaku. Aby mohly být k hlavním teplotním bodům, které vyjadřují rovnovážný stav při fázové přeměně, připojeny přesné údaje jim příslušejících teplot, musí být sou-

časné udán tlak, při kterém platí. U pěti z těchto hlavních bodů u trojného bodu jsme si řekli, že to není třeba - je v definici stupnice předepsán tlak 1 fyzikální atmosféry (760 torů), jež je rovna $1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ (newtonů na čtvereční metr). Hlavní teplotní body jsou:

bod varu kyslíku	—182,97° C (Int. 1948)
trojný bod vody	+ 0,01
bod varu vody	100
bod varu síry	444,6
bod tuhnutí stříbra	960,8
bod tuhnutí zlata	1063

K výčtu hlavních teplotních bodů doplňujeme ještě několik poznámek. Především teplota $-182,97^\circ \text{C}$ je nejnižší teplotou stupnice. Pro nižší teploty mezinárodní stupnice není definována. Teplotní oblast $-273,15^\circ \text{C}$ až $-182,97^\circ \text{C}$ není tedy do mezinárodní stupnice zahrnuta.

Trojný bod vody nahradil dříve používaný *bod tání ledu* (H_2O), jako lépe a přesněji reprodukovatelný. Bod u tání ledu, který je definován jako rovnovážný stav mezi čistým ledem H_2O a vodou nasycenou vzduchem (při 0°C) při tlaku 1 fyzikální atmosféry, může být však používáno pro běžné účely i nadále, protože jej lze reprodukovat s přesností až na $\pm 0,001 \text{ deg}$. Značky *deg* zde užíváme pro označování teplotních diferencí. Přitom rozdíl 1°C - kdekoliv podél stupnice - je roven 1 *deg* (z francouzského *degré* = stupeň). Označovat teplotní difference ve $^\circ \text{C}$ není totiž dosti výstižné, pokud není difference vztahována k nulovému bodu stupnice, tj. k 0°C . Bod tání lze realizovat směsí jemně roztlučeného ledu a vody nasycené vzduchem (při 0°C) uloženou v dobře tepelně izolované nádobě, např. Dewarově. Přitom je ovšem teplota směsi v různých hloubkách pod její hladinou různá. K výpočtu rovnovážné teploty t v hloubce h (v milimetrech) a při tlaku b odchylném od normálního barometrického tlaku $b_0 = 760 \text{ torů}$ můžeme použít vzorce

$$t = \left[0,01 \left(1 - \frac{b}{b_0} \right) - 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot h \right] ^\circ \text{C} . \quad (1)$$

Podle nové definice není *nulovým bodem* mezinárodní stupnice bod tání ledu, nýbrž teplota o 0,01 *deg* nižší, než je trojný bod vody. Trojný bod vody je možno reprodukovat s přesností až na $\pm 0,0001 \text{ deg}$. Realizace trojného bodu vody provádí se ve skleněných baňkách táhlého válcového tvaru, do nichž je zatavena souose skleněná jímka, do které se pak vkládá teploměr zkoušený na tomto teplotním bodě. Baňka se z větší části naplní velmi čistou, vícekrát destilovanou vodou, když z ní byl předtím vyčerpán vzduch. Po naplnění se baňka zataví. Tlak, při

němž mohou tři fáze vody koexistovat, je totiž nízký - i zde mají vodní páry svoji tensi - a činí asi 4,6 toru. Nehledě k přesnosti je zařízení pro trojný bod spolehlivější a praktičtější než zařízení pro bod tání ledu. I zde se ovšem bez ledu neobejdeme. „Namrazené“ baňky se totiž uchovávají v ledových lázních, z nichž se vyjímají jen při měření. Tak se uchovávají baňky bez nového namrazování i po několik měsíců. Namrazování baňky se provádí tak, že se vodní náplň v baňce zevnitř otevřené jímky ochladí, např. suchým ledem CO_2 , až se kolem jímky vytvoří silná vrstva ledu. Pak se opět z vnitřku jímky ohrátím část ledového prstence odtaví - takže kolem jímky bude vrstva vody, kolem ní vrstva ledu a dále až k plášti baňky opět voda. Tak se vytvoří dostatečně velká styčná plocha mezi ledem a vodou. Správná teplota trojného bodu je ovšem jen v místě styku všech tří fází (skupenství) na hladině. Teplotu t rovnovážného stavu mezi ledem a vodou v hloubce h (v milimetrech) pod hladinou (tj. pod rozhraním kapalina - pára) můžeme vypočítat ze vztahu

$$t = (0,01 - 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot h) \text{ } ^\circ\text{C} . \quad (2)$$

(Pokračování)

Astronomie

L a d i s l a v S e h n a l, CSc, Ondřejov:

Umělé družice a kosmické rakety

Po prvním přehledu umělých družic a kosmických raket, který jsme uveřejnili v 6. čísle minulého ročníku, přinášíme nyní doplněk, který zachycuje umělá tělesa, vypuštěná do 1. června 1961. Většinou jsou to typy známé, popsane již v minulém přehledu. U sovětských umělých družic můžeme pozorovat pečlivou přípravu na let člověka do vesmíru, který se uskutečnil 12. dubna t. r. Tomuto úspěšnému letu předcházelo celkem pět těžkých umělých družic, tzv. kosmických lodí. Ty nesly kabinu, která se vždy po prvním oběhu kolem Země od družice oddělila.

Rovněž sovětská kosmická raketa, vypuštěná 12. února, se dostala na předem vypočtenou oběžnou dráhu a proletěla v polovině května kolem Venuše ve vzdálenosti menší než 100 000 km.

Z amerických družic se objevuje nový typ Samos, který má špionážní poslání. Zajímavá je družice Explorer X, která zkoumá magnetické pole Země. Její perigeum je ve vzdálenosti jen 145 km od Země, ale družice se dostává pak až do vzdálenosti 192 000 km. Její oběžná doba je 111 hodin.

Umělé družice

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu min.	Výška perigea km	Sklon dráhy °
8. XII. 1960	Discoverer XVIII	950	93,6	230	81,5
31. I. 1961	Samos	?	95	482	90
16. II. 1961	Explorer IX	7	118,4	636	38,9
17. II. 1961	Discoverer XX	1100	95,4	298	80,9
18. II. 1961	Discoverer XXI	952	93,8	252	80,7
22. II. 1961	Transit III	137	96,3	170	28,4
9. III. 1961	Kosm. loď IV	4700	88,5	183,5	64,9
25. III. 1961	Kosm. loď V	4695	88,4	178,1	64,9
25. III. 1961	Explorer X	35	111 hod.	142	?
8. IV. 1961	Discoverer XIII	193	94	298	90
12. IV. 1961	Vostok (Kosmická loď VI)	4725	90	181	64,9

Kosmické rakety

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu dnů	Vzdálenost v perihelu mil. km
12. II. 1961	Automatická meziplanetární stanice	643,5	291	128,5

Úlohy k řešení

Řešitelům

Vypisujeme opět tradiční soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie i fyziky.

Tato soutěž trvá již několik desetiletí. Bývala vypisována nejprve v příloze k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, která byla předchůdkyní dnešních Rozhledů matematicko-fyzikálních. Probíráme-li se starými ročníky těchto příloh a Rozhledů, setkáváme se v seznamech úspěšných řešitelů úloh se jmény pozdějších slavných představitelů české i slovenské matematiky a fyziky, s akademiky i vynikajícími jedinci technické praxe. Mnohý řešitel se stal autorem příkladů v dalších ročnících.

Soutěž nekonkuruje ani s matematickou ani s fyzikální olympiádou, naopak jest jejich vhodným doplňkem. Vítězové MO i FO bývají i našimi úspěšnými řešiteli.

Řešení úloh provádějte samostatně, každý příklad na zvláštním papíru formátu A4, pište jen po jedné straně papíru, každý list čitelně označte dole celým svým jménem, druhem a místem školy, úplnou adresou bydliště.

Příklady zasílejte v daném termínu na adresu:

D o c. O t a S e t z e r, Praha 2, Trojanova ul. 13.

Příklady budou otištěny po částech. Řešení příkladů z tohoto čísla zašlete nejpozději do *konce prosince 1961*.

Matematika:

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník vepsaný do dané kružnice, je-li dán součet základny a příslušné výšky trojúhelníka. Určete podmínky řešitelnosti!

Josef Glivický

2. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ protněte rovinou jdoucí hranou BC tak, aby obě vzniklá tělesa měla stejný objem.

Josef Glivický

3. Jak musíme v trojčlenu $x^4 + bx^2 + c$ zvolit koeficienty b, c , aby tento trojčlen byl dělitelný výrazem $x^2 + cx + b$ za předpokladu, že b, c jsou reálná čísla různá od nuly?

Stanislav Horák

4. Jestliže v trojúhelníku při obvyklém značení je $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ pak o výškách tohoto trojúhelníka platí

$$v_a v_c + v_b v_c \sqrt{2} = 2 v_a v_b.$$

Dokažte!

Stanislav Horák

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhel při základně je α . Na rameni AC sestrojme vnitřní bod D tak, aby $BD =$

$= BA$, na rameni BC sestrojíme vnitřní bod E tak, aby $DE = BA$. Jak velký musí být úhel α , aby $CE = AB$?

Stanislav Horák

6. Matematickou indukcí dokažte, že pro reálná čísla $a > -1$, $a \neq 0$ a pro celá $n > 1$ platí tzv. *Bernoulliho nerovnost*

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Josef Kotyk

7. Průměrná výška kosmické lodi „Vostok“ byla $h = 254$ km. Předpokládáme-li, že oko rozliší ještě dva body od sebe, je-li zorný úhel aspoň $\alpha = 2'$, určete, jak dlouhé předměty mohl major Gagarin na povrchu Země pozorovat: 1. pouhým okem, 2. kdyby byl měl dalekohled s 500násobným zvětšením.

Evžen Říman

8. V rovině ρ je dán rovnostranný trojúhelník ABC , jehož strana má velikost $a = 1$. Ukažte, že je možno v rovině ρ najít nekonečně mnoho bodů X takových, že všechny tři vzdálenosti AX , BX , CX jsou racionální čísla.

Jiří Sedláček

Deskriptivní geometrie:

1. Jsou dány různoběžné roviny α , β , v rovině α je dán bod A neležící na průsečnici daných dvou rovin a úsečka délky a . Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož strana má délku a tak, aby strana AB ležela v rovině α a strana CD v rovině β . Prostorové řešení proveďte obecně, graficky rozřešte úlohu pro případ, že rovina α je půdorysna, rovina β je nárysna, $A(0; 6; 0)$, $a = 4,5$.

Stanislav Horák

2. Body A , B , C tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka a leží na hlavní kružnici kulové plochy, jejíž poloměr r je dán. Sestrojte průměty této kulové plochy, je-li dán bod A , nárys bodu B a souřadnice x_a bodu C .

Stanislav Horák

3. Jsou dány dvě rovnoběžné roviny ρ , σ a úsečky AB , jejíž krajní bod A leží v rovině ρ a bod B v rovině σ . Úsečka AB není kolmá k daným rovinám. Sestrojte rotační komolý kužel, jemuž lze vepsat kulovou plochu a jenž má jednu podstavu v rovině ρ a druhou v rovině σ , přičemž body A , B leží na obvodech podstav a úsečka AB protíná střednou kužele v jeho vnitřním bodě.

Karel Příkrý

4. Jsou dány mimoběžky a , b a mimo ně bod O . Sestrojte rotační komolý kužel, jehož jedna kruhová hrana se dotýká přímky a , druhá kruhová hrana přímky b a jehož osa o jde bodem O .

Ota Setzer
(Pokračování)

Řešení úloh z minulého ročníku

Uveřejňujeme řešení prvních úloh z minulého ročníku. Autoři jednotlivých úloh prohlédli všechna zaslaná řešení, ocenili je a navrhli redakci vhodná řešení k otištění, třeba i po menší úpravě. Řešení dalších příkladů budou otištěna v příštích číslech.

Matematika:

1. Jsou-li a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) libovolná reálná čísla, pak platí

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Josef Brejcha

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, 11. A, DSŠ Nymburk:

Při důkazu dané nerovnosti vyjdeme ze známé věty: Jsou-li a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) kladná reálná čísla, je jejich geometrický průměr g menší nebo nejvýše roven jejich průměru aritmetickému a ;

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a. \quad (1)$$

Přitom znaménko rovnosti platí jen pro $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$. Podle této věty pro kladná reálná čísla $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ platí

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

čili (protože na obou stranách nerovnosti jsou kladná čísla)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}. \quad (2)$$

Ale podle uvedené věty také

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad (3)$$

Z tranzitivnosti nerovností (2) a (3) dále plyne

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

a odtud již ihned

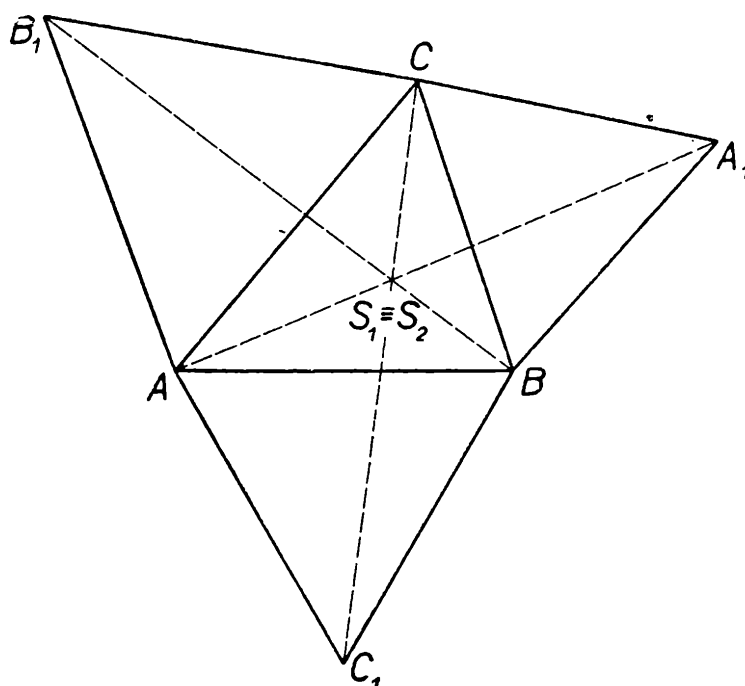
$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Přitom znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, protože i v nerovnostech (2) a (3) platí znaménko rovnosti podle výše uvedené věty právě v tomto případě.

2. Nad stranami obecného trojúhelníka ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 . Jakou vlastnost mají úsečky AA_1 , BB_1 , CC_1 ?

(Došlo 11 řešení.)

Josef Brejcha



Obr. 1

Řešil Jindřich Šilhán, 11. B, JŠŠ Svitavy:

Podle 2. věty o shodnosti trojúhelníků platí

$$\triangle ABB_1 \cong \triangle AC_1C,$$

přičemž $\triangle ABB_1$ vznikne z $\triangle AC_1C$ otočením o 60° . Proto jsou úsečky

BB_1 a CC_1 shodné a přímky, v nichž leží, svírají úhel 60° . Stejnou délku jako předešlé dvě má i úsečka AA_1 , protože $\triangle ABA_1$ je shodný s $\triangle C_1BC$, a také tato úsečka svírá s předešlými úhly 60° . Označme S_1 průsečík přímek CC_1 a AA_1 , S_2 průsečík přímek CC_1 s BB_1 (obr. 1). V $\triangle CS_2B$ je $\sphericalangle CS_2B = 120^\circ$, $CB = a$; dále pro zjednodušení položíme $\sphericalangle S_2BC = \alpha'$. Podobně v trojúhelníku CS_1A_1 je $\sphericalangle CS_1A_1 = 60^\circ$, $CA_1 = CB = a$. Ze shodnosti trojúhelníka BCB_1 s trojúhelníkem A_1CA plyne $\sphericalangle CA_1S_1 = \alpha$. Z trojúhelníka CS_2B vypočteme pomocí sinové věty:

$$CS_2 = \frac{\sin \alpha'}{\sin 60^\circ} \cdot a.$$

Sinovou větou určíme z $\triangle CA_1S_1$

$$CS_1 = \frac{\sin \alpha'}{\sin 120^\circ} \cdot a.$$

Ježto $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, je $CS_2 = CS_1$; body S_1 a S_2 nemohou ale ležet každý na opačné straně bodu C , musí tedy tyto body S_1 , S_2 splynout. Proto přímky AA_1 , BB_1 i CC_1 procházejí týmž bodem, který leží uvnitř $\triangle ABC$, jsou-li všechny jeho úhly menší než 120° , nebo vně $\triangle ABC$, je-li jeden z jeho úhlů větší než 120° , nebo splývá s vrcholem, při němž leží vnitřní úhel 120° .

3. Nad stranami pravoúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny čtverce $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$, nad vzniklými úsečkami DG , FI , HE opět čtverce $DGKL$, $HEOP$, $FIMN$ a nad úsečkami KN , MP , OL čtverce $KNQR$, $MPST$, $OLUV$. Jakou větu lze vyslovit o obsazích tří posledně jmenovaných čtverců?

O. Cochsmeyer

v něm. časopise *Archimedes*

(Došlo 13 řešení.)

Řešil Jiří Jedlička, učeň radiomechan., Praha:

Označme $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Ze shodnosti trojúhelníků $ABC \cong \triangle IFC$ vyplývá, že $\sphericalangle FIC = \alpha$, a proto $\sphericalangle HIM = \sphericalangle HAE$. Z konstrukce bodů M , E plyne potom $\triangle IMH \cong \triangle AEH$ a odtud $HM = HP$, tj. trojúhelník MHP je rovnoramenný.

Označíme-li $\sphericalangle IHM = \sphericalangle AHE = \varepsilon$, je $\sphericalangle MHP = 180^\circ - 2\varepsilon$ a $\sphericalangle HMP = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle MHP) = \varepsilon$, tzn. $IH \parallel MP$. Jsou-li I_1 , H_1 průměty bodů I , H do úsečky MP , je

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle IMI_1 = \alpha \Rightarrow MI_1 = b \\ I_1H_1 = b \\ H_1P = 2b \end{array} \right\} \Rightarrow MP = 4b.$$

Úplně analogicky se dokáže: $KN = 4a$.

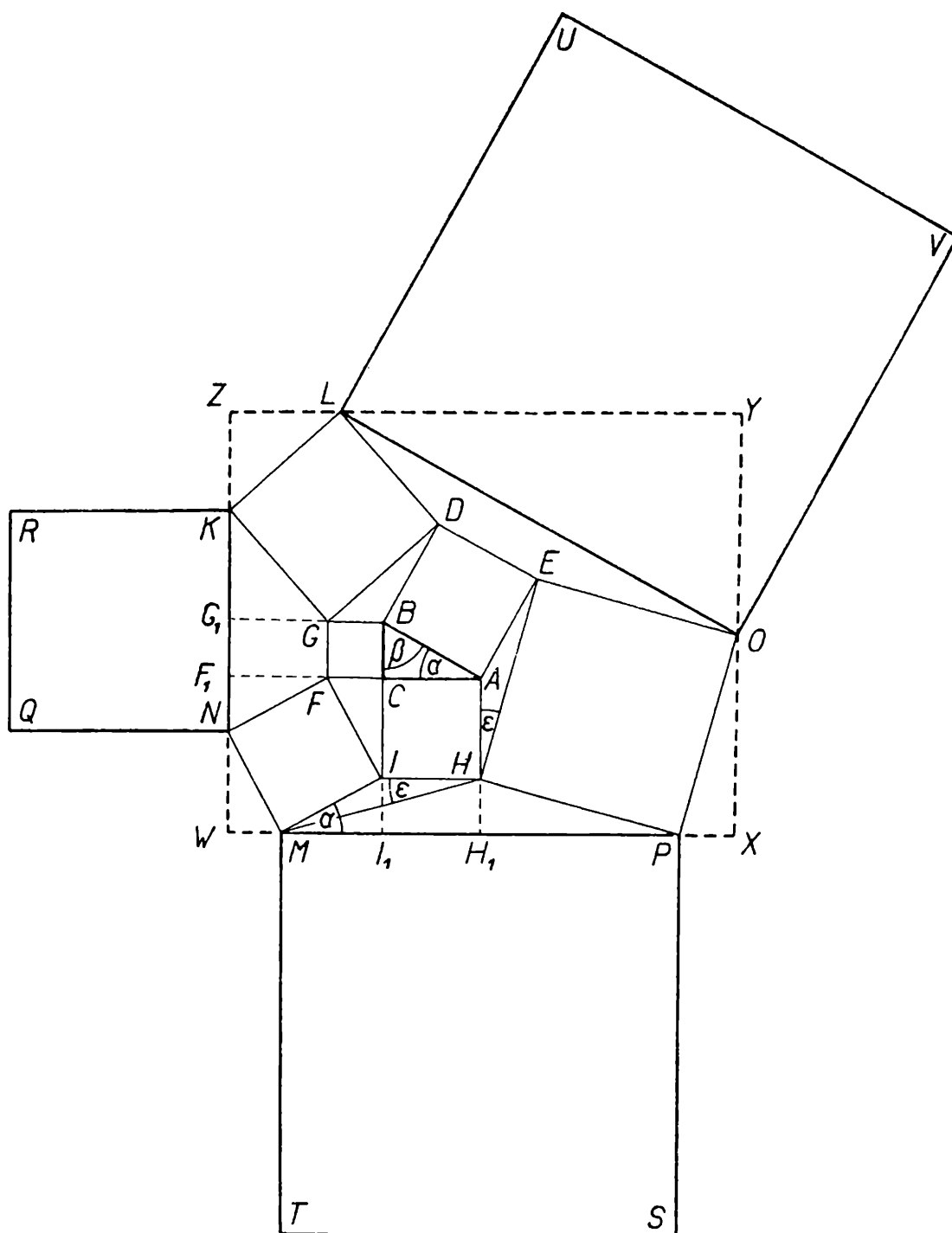
Sestrojíme-li (viz obr. 2) obdélník $WXYZ$, platí

$$\sphericalangle WMN = 90^\circ - \alpha = \beta \Rightarrow WM = b,$$

$$\triangle PXO \cong \triangle HH_1P \Rightarrow PX = HH_1 = a, \quad XO = H_1P = 2b.$$

Podobně $ZK = b, ZL = 2a$. Je tedy

$$\left. \begin{array}{l} WX = 2a + 4b \Rightarrow LY = 4b \\ WZ = 4a + 2b \Rightarrow OY = 4a \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{LO}^2 = 16a^2 + 16b^2$$



Obr. 2

Lze tudíž vyslovit větu:

Obsahy uvažovaných čtverců jsou šestnáctinásobky čtverců nad „přilehlými“ stranami pravoúhlého trojúhelníka.

Odtud vyplývá i rozšíření Pythagorovy věty pro uvažované čtverce.

Poznámka redakce: Řešitelé používali buď jen podobnosti trojúhelníků nebo vlastností z trigonometrie a v jednom případě i komplexních čísel.

4. Různá přirozená čísla v počtu $n \cdot p$ rozepíšeme do n řádek a p sloupců. V každém řádku určíme největší číslo, nejmenší z těchto maxim označíme a ; v každém sloupci určíme nejmenší číslo a největší z těchto minim označíme b . Které z čísel a a b je menší, které větší?

F. Gattier

ve francouzském časopise *Le facteur X*

(Došlo 10 řešení.)

Řešil Emil Kraemer, 11. B, 27. JSS Praha 6:

Ř e š e n í. Uvažujme čtyři možnosti vzájemných poloh čísel a a b :

1. Čísla a , b jsou v různých sloupcích a v různých řádcích. Označme x číslo ležící v témže řádku jako číslo a a v témže sloupci jako číslo b .

Z textu plynou podmínky

$b < x$, $a > x$ a z nich $a > b$.

V uvažovaném případě tedy platí vztah $a > b$.

2. Čísla a , b leží ve stejném řádku, ale v různých sloupcích.

Potom opět z textu plyne podmínka $a > b$.

3. Čísla a , b leží v různých řádkách, ale ve stejném sloupci.

Z textu zase vyplývá $b < a$.

4. Čísla a , b leží ve stejném řádku i ve stejném sloupci, tedy splývají.

Potom zřejmě platí vztah $a = b$.

O d p o v ě ě. Vždy platí $a \geq b$.

P o z n á m k a r e d a k c e. Úvahy, s kterými jsme se seznámili ve 4. úloze, nejsou jenom samoučelným problémem. Vyšetřování řádkových maxim a sloupcových minim v obdélníkovém schématu má totiž konkrétní význam v tzv. *teorii her*. V posledních desetiletích se zabývá teorií her řada matematiků zahraničních i československých; ukazuje se, že má tato nová matematická disciplína velký význam nejen v rekreační matematice, ale i v ekonomii, ve vojenství apod. Zájemce o teorii her můžeme odkázat na populárně psanou knížku J. D. Williamsa „*The Compleat Strategyst*“; knížka vyšla r. 1960 též v ruském překladu (*Šoveršennyj strateg*) a tento překlad je k dostání také u nás.

5. Jsou-li a , k přirozená čísla ($k \neq 1$), sečtěte n členů řady

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+k)(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+k+1)(a+3)(a+4)} + \dots$$

Josef Kotyk

(Došlo 10 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, XI. A, DSŠ Nymburk:

Obecný člen dané řady

$$u_m = \frac{1}{(a+m)(a+m+1) \dots (a+k+m-1)}$$

lze psát v tvaru

$$u_m = \frac{1}{k-1} \cdot \left[\frac{1}{(a+m)(a+m+1) \dots (a+k+m-2)} - \frac{1}{(a+m+1)(a+m+2) \dots (a+k+m-1)} \right]$$

Dosazujeme-li postupně $m = 1, 2, 3, \dots, n$ a sčítáme, vychází

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{1}{k-1} \cdot \left[\frac{1}{(a+1)(a+2) \dots (a+k-1)} - \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2) \dots (a+k+n-1)} \right]$$

Poznámka autora. Výraz je v uvedeném tvaru způsobilý, abychom připustili také $n \rightarrow \infty$. Řada se pak stane nekonečnou a má součet $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2) \dots (a+k+n-1)} = 0$,¹⁾

$$\text{jest } S = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(a+1)(a+2) \dots (a+k-1)}$$

6. Dálkoměrem byly v osmivteřinových intervalech změřeny vzdálenosti od pozorovatele $l_1 = 2600$ m, $l_2 = 3200$, $l_3 = 4200$ m letadla, letícího rovnoměrně přímočaře. Určete jeho rychlost a) obecně, b) početně pro daný případ, c) graficky.

Miroslav Menšík

(Došlo 15 řešení.)

Řešil Emil Kraemer, 11. B, 27. JŠŠ Praha 6:

a) Jak je patrné z obr. 1, v $\triangle XAC$ známe dvě strany a těžnici ke třetí straně, kterou máme určit výpočtem ($\triangle XAC$ doplněn na rovnoběžník $XADC$). V $\triangle XCD$ známe všechny tři strany, vypočteme si tedy $\cos \sphericalangle DXC = \cos \varphi$ kosinovou větou:

$$l_1^2 = 4l_2^2 + l_3^2 - 4l_2l_3 \cos \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{l_2^2 + 4l_2^2 - l_1^2}{4l_2l_3}.$$

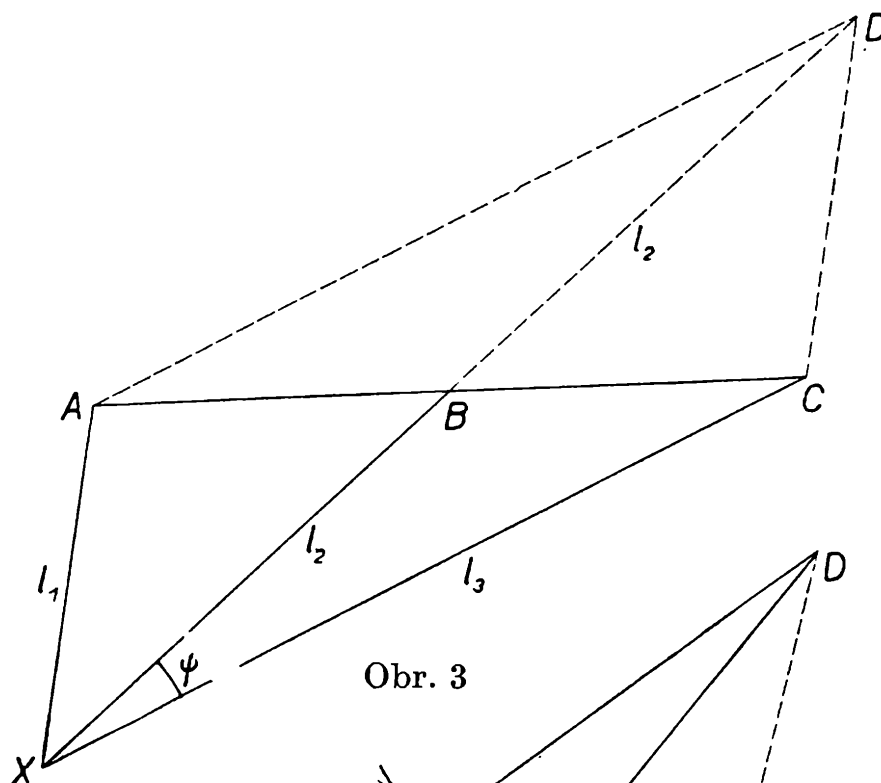
¹⁾ O pojmu limity mohou čtenáři nalézt přístupné poučení v článku inž. E. Krieglsteina „Úvod do diferenciálního počtu“ v Rozhledech, roč. 39, čís. 8, str. 345 až 355.

Dále je

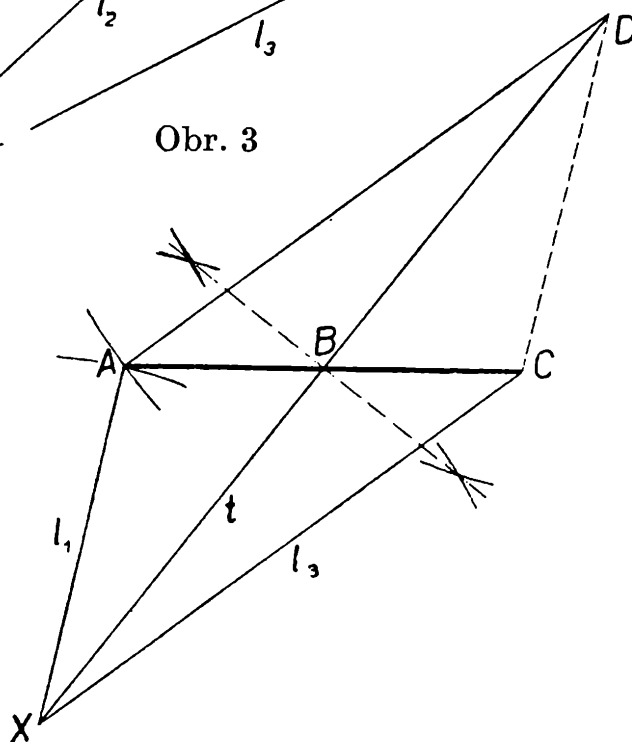
$$s = AB = BC = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2 l_2 l_3 \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{l_3^2 - 2 l_2^2 + l_1^2}$$

kde ovšem je

$$l_1^2 + l_3^2 > 2 l_2^2$$



Obr. 3



Obr. 4

Označíme-li t čas, za který urazí letadlo dráhu s , je rychlost $v = \frac{s}{t}$.

Tedy

$$v = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{l_3^2 - 2 l_2^2 + l_1^2}}{t} = \frac{1}{t} \cdot \sqrt{\frac{l_3^2 - 2 l_2^2 + l_1^2}{2}}$$

b) Nyní dosadíme $l_1 = 2600$ m, $l_2 = 3200$ m, $l_3 = 4200$ m, $t = 8$ s.

$$v = \sqrt{\frac{4200^2 - 2 \cdot 3200^2 + 2600^2}{2}} \cdot \frac{1}{8} \text{ ms}^{-1} = 175 \text{ m/s} = 620 \text{ km/hod.}$$

c) Grafické řešení spočívá v sestrojení trojúhelníka ACX , známe-li dvě strany $XA = l_1$, $XC = l_3$ a těžnici ke třetí straně $XB = t = l_2$ (obr. 2). Pak polovinu sestrojené strany AC rozdělíme na 8 shodných úseček. Jestliže jsme rýsovali v určitém měřítku v příslušných jednotkách, je velikost této úsečky číselně rovna rychlosti letadla.

7. Bez tabulek určete hodnotu výrazu

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

Attila Meskó, Budapešť

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Jindřich Šilhán, 11. B, JSŠ Svitavy:

Označme daný výraz V a upravme jej:

$$V = \operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{cotg} 9^\circ - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{cotg} 27^\circ)$$

Pro další úpravu odvodme vzorec:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

Potom:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2 \frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = \\ &= 4 \frac{\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ} = 4 \end{aligned}$$

(Pokračování)

Matematické zábavy

Kdo měl pravdu?

Učitel matematiky dal žákům za úkol sestrojit a vystříhnout síť krychle o hraně délky 5 cm. „Je velmi mnoho různých sítí krychle,“ pravil, „přemýšlejte o svém úkolu, ať přinesete pokud možno každý jinou síť.“

Příští hodinu dal učitel sebrat vystřižené sítě. Žák, který je sbíral, kladl na sebe ty sítě, které se kryly; nakonec leželo na stole 11 hromádek. „Všechno?“ ptal se učitel. „Ano,“ odpověděl žák, „všichni odevzdali.“ „No, to jste se příliš nenamáhali,“ bručel učitel nespokojeně, „je vás tu 35 a sestrojili jste jen 11 různých druhů sítě.“ Žáci se však bránili, že žádnou další síť už nemohli objevit.

Rozhodněte sami: byla oprávněná učitelova nespokojenost, nebo měli pravdu žáci?

D o c. J a n V y š í n

Fysikální zajímavosti

I n ž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN, SMS, Praha:

Je sklo tekutina?

Z fyzikálně chemického hlediska pokládáme sklo za pevný, přechlazený roztok dvou nebo více křemičitanů s nadbytečným kyslíčným křemičitým. Je to tedy kapalina s velmi vysokým vnitřním třením. Důkazem je tu okolnost, že sklo nemá jako jiné pevné látky přesně definovaný bod tání. Zahříváním nejprve měkne, jako např. vosk, a potom zvolna taje. Jeho vnitřní tření kontinuálně klesá se stoupající teplotou.

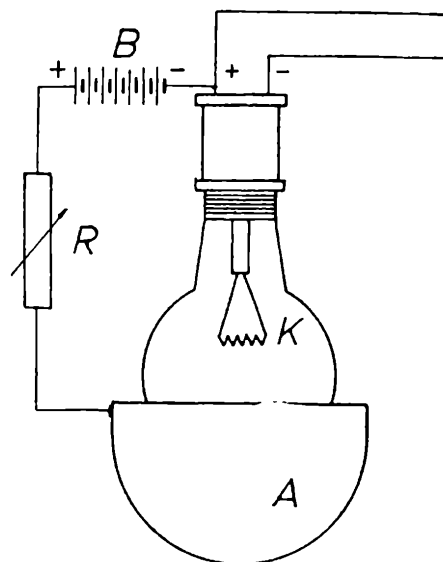
Podle toho musí tedy pro sklo platit elektrolytické vedení elektrického proudu jako u jiných kapalin, kde jsou nosiči elektrických nábojů kladné a záporné ionty. Bylo to dokázáno zajímavým pokusem, při němž je použito skleněné baňky obyčejné žárovky s wolframovým vláknem, bez jakékoli plynové náplně.

Uspořádání pokusu znázorňuje obr. 1. Spodní část baňky žárovky je ponořena do tekutého čílského ledku (NaNO_3) roztaveného při teplotě asi 310° v železné nádobce *A* plamenem plynového kahanu. Žárovka je normálně žhavena stejnosměrným proudem. Železná miska je přes ochranný odpor *R* připojena ke kladnému pólu pomocného zdroje napětí *B* (např. k akumulátorové baterii). Tohoto zdroje není třeba, je-li napětí použité pro žhavení vlákna žárovky samo dostatečně vysoké,

např. 220 voltů. Pak je nádobka *A* spojena přes odpor *R* přímo ke kladnému pólu žhavicího napětí.

Podívejme se na mechanismus vedení elektrického proudu v této části obvodu. Z wolframové spirálky žárovky, která zde tvoří katodu *K*, prochází elektrický proud jako proud elektronů až k vnitřní stěně skleněné baňky. Její stěnou prochází již však jako proud elektrolytický. Pozitivně nabitě ionty sodíku putují směrem od železné nádoby, která je zde anodou *A*, sklem baňky až na její vnitřní plochu, kde se slučují s elektrony a tím ztrácejí svůj kladný náboj. Stávají se z nich neutrální atomy, které se již mohou zúčastnit chemických reakcí, vytvářet usazeniny anebo se měnit v plyn. V žárovce se usazují neutrální atomy sodíku na vnitřních stěnách její baňky jako kovový sodík, který se vzápětí vypařuje a sráží se na chladnějších místech žárovky, např. na hrdle její baňky v podobě lesklého zrcadlového povlaku.

Je to jednak důkazem iontového vedení elektrického proudu sklem, jednak i toho, že ionty mohou za příznivých okolností, např. při dostatečně silném elektrickém poli, procházet i velmi tuhými tekutinami, mezi které patří též sklo.



Obr. 1

E v ž e n Ě í m a n CSc, Praha:

Kto skôr?

Matka doniesla synom raňajky. Každý dostal šálku do troch štvrtín naplnenú horúcim čajom a jeden deciliter studeného mlieka vo zvlášťnej nádobke. „Chlapci, dolejte si mlieko do čaju, ale piť smiete začať až vtedy, až bude nápoj dostatočne ochladený,“ hovorila a odišla.

J o ť o, ktorý sa ponáhlal za kamarátmi, vliat mlieko ihneď do šálky a miešal nápoj lyžičkou. P e ť o miešal niekoľko minút len horúci čaj a len potom vliat mlieko do šálky. Ktorý z nich mohol začať raňajkovať s k ô r ? (Ináč povedané: Čí nápoj sa skôr ochladil na teplotu povedzme 50° C?)

Matematická olympiáda

Jak probíhal desátý ročník MO

V devátém čísle minulého ročníku přinesly Rozhledy vzpomínkový článek k desátému výročí Matematické olympiády¹⁾. Dnes si chceme podrobněji všimnout průběhu desátého ročníku MO, který byl ročníkem jubilejním a probíhal na našich středních všeobecně vzdělávacích a odborných školách v uplynulém školním roce.

Jako v předcházejících ročnících byla i tentokrát soutěž rozdělena do tří kol, přičemž nejvyšší kolo se týkalo jen studentů nejvyšších tříd středních a odborných škol. Kolo první mělo charakter přípravný a probíhalo v podstatě přímo na školách. Kolo druhé má vždy podobu písemné školní práce, při které účastníci řeší čtyři zadané úlohy. V desátém ročníku se druhé kolo konalo po celé republice v neděli dne 9. dubna 1961 pro kategorie A, B, C a v neděli dne 16. dubna 1961 pro kategorii D.

Na závěrečné třetí kolo bylo do Prahy pozváno 80 nejlepších řešitelů z celé republiky, kteří byli vybráni z úspěšných účastníků druhého kola kategorie A. Třetí kolo se konalo v sobotu dne 20. května 1961 dopoledne na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university a uzavřelo jubilejní ročník této celostátní matematické soutěže. Sobotní odpoledne bylo pak věnováno tradiční besedě s řešiteli MO i s širší veřejností školskou i mimoškolskou. Beseda se konala jako obvykle na matematicko-fyzikální fakultě, řídil ji akademik J o s e f N o v á k a měla tentokrát zvlášť slavnostní ráz. K mladým olympionikům promluvil ministr školství a kultury dr. F r a n t i š e k K a h u d a, jménem Jednoty čs. matematiků a fyziků je oslovil akademik V l a d i m í r K o ř í n e k, profesor Karlovy university, a o studiu na technice je informoval kandidát technických věd prof. dr. inž. B o h u m í l K v a s í l, prorektor Českého vysokého učení technického. Úspěšnou práci řešitelů MO ocenila v závěru též zástupkyně ČSM. Při diskusi, která byla součástí besedy, se přítomní studenti zajímali o otázky sou-

¹⁾ Je to článek „Deset let Matematické olympiády“, který vyšel na str 429 až 431 v 9. čísle našeho časopisu, roč. 39.

visící s MO i o možnosti dalšího vysokoškolského studia. V sobotu večer navštívili všichni řešitelé třetího kola divadelní představení v Tylově divadle v Praze.

Jména vítězů třetího kola přináší náš časopis na jiném místě. Srdečně jim blahopřejeme a doufáme, že o nich v budoucnu ještě častěji uslyšíme v souvislosti s matematikou.

Pro informaci čtenářů uvádíme závěrem texty čtyř úloh, které byly zadány ve třetím kole uplynulého ročníku MO:

1. Je dána posloupnost

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, .

Vypočítejte její tisící člen.

2. Je dán pravoúhlý trojúhelník APQ s přeponou AP . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby přímky BC , CD procházely po řadě body P Q . Vyjádřete délku strany čtverce $ABCD$ pomocí délky odvěsny daného trojúhelníka.

3. Dva cyklisté vyjedou současně z téhož místa kruhové dráhy a jezdí po této dráze v opačných směrech, první stálou rychlostí c_1 m/s, druhý stálou rychlostí c_2 m/s. Kolikrát se potkají v době, v které první cyklista objede kruhovou dráhu n -krát? Proveďte výpočet pro $c_1 = 10$, $c_2 = 7$, $n = 11$.

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku 1. Vrchol X proměnného rovnostranného trojúhelníka XYZ leží na polopřímce AB , vrchol Y na úsečce AD , vrchol Z na polopřímce DC .

Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka XYZ na vzdálenosti AX . Odtud vypočtete, který z trojúhelníků XYZ má nejmenší a který má největší obsah.

S e d l á č e k, CSc, Praha

Vítězové X. ročníku Matematické olympiády

(šk. r. 1960/61)

- | | | |
|---------|-------------------|--|
| 1. | *Karel Příkrý | XI. a, svvš, Vyškov; |
| 2. | Tomáš Jech | III. b, svvš, Praha 1, Hellichova ul.; |
| 3.—4. | Alexandr Groda | XI. b, jsš, Praha 8, Kollárova ul.; |
| | Jan Lusk | XI. d, svvš, České Budějovice; |
| 5.—6. | Michal Kretschmer | XI. b, svvš, Praha 13, Vršovice; |
| | Přemysl Svoboda | III. b, svvš, Roudnice n. L.; |
| 7. | Pavel Obložinský | XI. a, vsš, Bratislava, Palisády; |
| 8.—9. | *Karel Hrbáček | III. a, svvš, Nymburk; |
| | *Emil Kraemer | XI. b, jsš, Praha 6, Žukovova; |
| 10.—13. | Jiří Lauda | XI., a, svvš, Havlíčkův Brod; |
| | Bolemír Lonek | 4. a, p. š. jaderné techn., Praha 2, Ječná ul. |
| | Miroslav Šmuk | XI. c, svvš, Ostrava 5, Hladnov; |
| | Zdeněk Výborný | XI., svvš, Praha 6, ul. Pionýrů; |
| 14.—15. | Bohumil Král | XI. a, svš, Bratislava, Novohradská; |
| | Ladislav Lukšan | XI. a, svvš, Ústí n. L., Na skřivánku; |
| 16.—19. | Jan Dobeš | XI. a, jsš, Český Těšín; |
| | Pavel Krbec | III. b, svvš, Beroun; |
| | Karol Macák | XI. c, svš, Bratislava, Novohradská; |
| | Dušan Mikloš | XI. c, svš, Bratislava, Novohradská; |
| 20. | Josef Daneš | X. d, svvš, Praha 9. |

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních blahopřeje vítězům, z nichž většina jsou čtenáři našeho časopisu a označení hvězdičkou jsou úspěšní řešitelé naší soutěže.

Fyzikální olympiáda

Žákům středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol

Ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a Československým svazem mládeže pořádá ve školním roce 1961/62 třetí ročník soutěže Fyzikální olympiáda (FO).

Touto soutěží chceme vás získat k hlubšímu studiu fyziky a technických oborů a zároveň vám dát příležitost k tomu, abyste ukázali, co dovedete. Pro naši socialistickou společnost chceme přitom vyhledávat budoucí odborníky ve fyzice a v technických vědách.

Předcházející dva ročníky této soutěže byly velmi úspěšné. Těšíme se, že i letos budete s nadšením pracovat v třetím ročníku této soutěže.

V této práci Vám přejeme hodně úspěchu.

Ústřední výbor Fyzikální olympiády

Organizace soutěže

Soutěž FO je řízena celostátně Ústředním výborem Fyzikální olympiády (ÚVFC) se sídlem Praha 1 - Malá Strana, Maltézské nám. 1 (Jednota československých matematiků a fyziků). V každém kraji je řízena Krajským výborem Fyzikální olympiády (KVFO).

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky výběrových škol 2. cyklu. Bude probíhat ve třech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky 3. ročníku středních všeobecně vzdělávacích škol a 3. a 4. ročníku středních odborných škol. Kategorie B je určena pro žáky 2. ročníku a kategorie C pro žáky 1. ročníku všech středních výběrových škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu může žáku z nižší třídy povolit vyučující učitel s referentem pro FO na škole. Tyto mimořádné případy ohlásí referent KVFO.

Soutěž v kategorii B a C probíhá ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

V *prvém kole* mají soutěžící za úkol do 17. února 1962 řešit 9 úloh a prostudovat samostatně fyzikální téma. Řešené úlohy odevzdají soutěžící svému učiteli fyziky v těchto termínech:

úlohu prvou až třetí nejpozději do 30. listopadu 1961,
úlohu čtvrtou až šestou nejpozději do 6. ledna 1962, a
úlohu sedmou až devátou nejpozději do 17. února 1962.

Za úspěšného řešitele *p r v é h o k o l a* bude považován ten žák, který úspěšně rozřeší aspoň 6 úloh. Experimentální úlohu, která je v každé kategorii uvedena pod číslem 9, musí každý soutěžící řešit.

Pozvání na *d r u h é k o l o* dostane každý řešitel od KVFO prostřednictvím ředitelství své školy.

Druhé kolo proběhne ve dvou půldnech za učitelského dozoru. V jednom půldni bude úkolem rozřešit tři teoretické úlohy v době tří hodin. V druhém půldni bude úloha experimentální. Jedna z úloh - teoretická nebo experimentální - bude z fyzikálního tématu zadaného k prostudování.

Účastník druhého kola, který rozřeší úspěšně aspoň dva příklady, bude úspěšným řešitelem. Nejúspěšnější řešitelé ve všech kategoriích budou odměněni věcnými cenami.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A vybere ÚVFO na návrh KVFO nejvýš 80 soutěžících ze všech krajů k účasti na *třetím kole soutěže*.

Řešení úloh piště čitelně a v úhledné úpravě na listy formátu A4. Každou úlohu vypracujte na samostatném listu papíru, pomocné obrázky nebo náčrtky schémat k řešení úloze proveďte tužkou.

Řešení úloh doprovodte vždy slovním výkladem tak, aby každý porozuměl vašemu myšlenkovému postupu. Úloha bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

V obecném řešení provádějte rozměrové zkoušky; při numerickém řešení uvádějte jednotky (viz vzorová řešení v brožuře Fyzikální olympiáda roč. I.).

Při řešení úloh se opírejte především o učebnice fyziky. Váš učitel fyziky nebo referent FO vám poradí i jiné vhodné studijní pomůcky. Jednota československých matematiků a fyziků vydává pro vás časopis *Rozhledy matematicko-fyzikální*, v němž najdete také další zprávy o soutěži.

Úlohy pro první kolo FO

Kategorie A

1. Železná koule plave na rtuti. O kolik procent svého objemu se vynoří ze rtuti, nalijeme-li na ni tolik vody, aby byla celá ponořena?

2. Kulové duté zrcadlo má středový úhel 2α ; krajní paprsek rovnoběžný s optickou osou se odráží do bodu A (obr. 1). AF se jmenuje *p o d é l n á a b e r a c e*, FB *p ř í č n á a b e r a c e*. Vypočtěte AF a FB pomocí r a úhlu α . Dále určete, kdy jsou obě uvedené vady rovny nule.

3. Otevřená nádoba se zahřeje na teplotu 727°C . Kolik procent hmoty vzduchu zůstane v nádobě ve srovnání s množstvím, které tam bylo při 0°C ? Roztažnost nádoby zanedbáváme.

4. Z bodu A nakloněné roviny (úhel sklonu β) je vrženo těleso rychlostí v pod výškovým úhlem α (obr. 2) v rovině nákresné. Určete

- vzdálenost místa dopadu od bodu A (měřeno po nakloněné rovině);
- pro jaký úhel α bude tato vzdálenost největší.

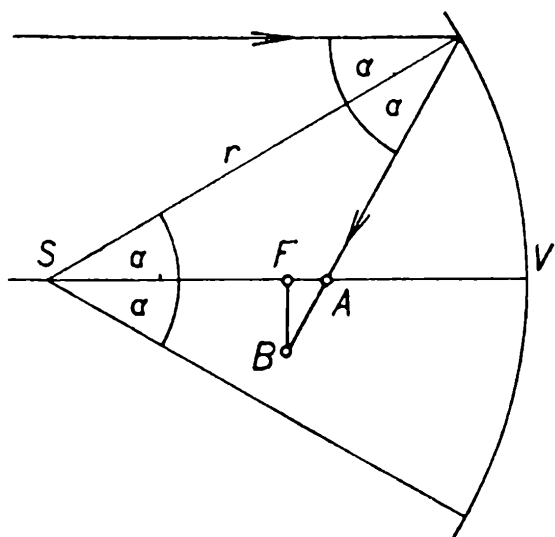
5. Dvě kuličky stejného poloměru a stejné váhy jsou zavěšeny na nitích tak, že se vzájemně dotýkají. Předá-li se této soustavě náboj $4 \cdot 10^{-7}\text{C}$, vzdálí se kuličky od sebe tak, že nitě svírají úhel 60° . Jsou-li kuličky po-

nořeny v petroleji ($\epsilon_r = 2$), úhel nití se zmenší na 54° . Určete hustotu materiálu kuliček! Hustota petroleje je 800 kg/m^3 a vzdálenost bodu závěsu od těžiště každé kuličky je $0,2 \text{ m}$. Řešte nejprve obecně.

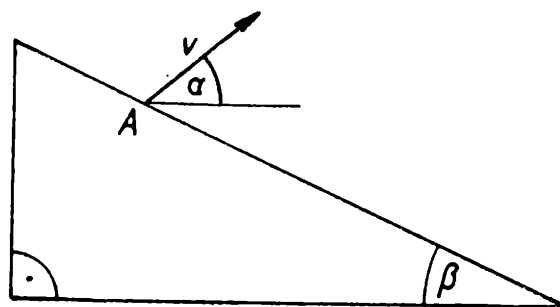
6. Šest článků akumulátoru, z nichž každý má EMS 2 V a vnitřní odpor $0,04 \Omega$, je spojeno sériově po třech ve dvě skupiny, které jsou spojeny paralelně. Do obvodu je zapojena žárovka o odporu 11Ω pomocí železného vodiče o délce 470 cm a o průřezu $0,5 \text{ mm}^2$. Určete množství tepla, které vznikne za 1 minutu a) v celém obvodu; b) v žárovce; c) v železném vodiči; d) v baterii; e) v jednom článku akumulátoru. (Měrný odpor železa $\rho = 0,1 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$.)

7. Do obvodu sestávajícího z měděného vedení o průřezu $S_1 = 3 \text{ mm}^2$, je zapojena olověná pojistka s průřezem drátu $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. O kolik se zvýší teplota měděného drátu při přepálení pojistky? Předpokládáme, že děj trvá tak krátkou dobu, že všechno teplo přejde na zahřívání obvodu. Potřebné konstanty vezměte z tabulek.

8. Pružný míček se odráží od vodorovné pevné plochy tak, že nabude p % výšky, ze které spadl. Určete



Obr. 1



Obr. 2

a) číslo p , jestliže míček byl volně spuštěn z výšky h a doba jeho pohybu až do úplného zastavení na vodorovné rovině byla t ;

b) rychlost, kterou musí být míček mrštěn, aby se odrazil do původní výšky h .

Odpor prostředí zanedbáváme.

9. Zjistěte charakteristiku dvou různých žárovek. Charakteristika vodiče je křivka závislosti proudu na napětí, tj. závislosti $I = f(U)$. Nakreslete schéma zapojení, kterého použijete ke změření charakteristiky. Měření sestavte do tabulek a sestrojte graf.

Literatura: Z. H o r á k, P r a k t i c k á f y z i k a, SNTL, Praha 1958.

Kategória B

1. Vzdialenosť stredy Zeme od stredy Mesiaca je r . Hmota Zeme je p -krát väčšia, ako je hmota Mesiaca. Zistite, kde sú príťažlivé sily Zeme a Mesiaca v rovnováhe a udajte polohu tohto miesta vzdialenosťou x od stredy Zeme. Za aký čas a s akou rýchlosťou by obletela družica našu Zem po kruhovej dráhe s polomerom x , ak Mesiac by neexistoval. Riešte najprv

obecne, potom použite číselné hodnoty: $r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$, $p = 81,5$; $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, kde R je polomer Zeme a g je ťarchové zrýchlenie na povrchu Zeme.

2. Plný oceľový valec (kruhový a priamy) má priemer d a dĺžku l . Máme ho dostať z vodorovnej roviny, po ktorej sa môže valiť na inú o $h \leq \frac{d}{2}$ vyššie ležiacu vodorovnú rovinu cez hranu jednostupňového schodu tak, aby určitá povrchová priamka valca splývala s hranou schodu počas celej manipulácie a sila, ktorou pritom pôsobíme, bola vždy v priamke pretínajúcej geometrickú os valca a bola na ňu kolmá.

V akom smere máme tlačiť (prípadne ťahať) valec, aby sila, ktorou počiatočne pôsobíme, bola a) rovná váhe valca, b) najmenšia možná?

Aká je veľkosť sily v prípade b)? Mení sa sila počas procesu dvíhania a či nie, keď A) zachováme jej pôvodný smer, B) v každej polohe valca má najmenšiu možnú veľkosť? (Opíšte a odôvodnite!) Aká práca sa vykoná pri prevádzaní úlohy v prípadoch A a B?

Udajte príklady z vlastnej skúsenosti, keď išlo v podstate o konanie, ktoré je predmetom tejto úlohy.

Nech $d = 50 \text{ cm}$, $l = 1,26 \text{ m}$, $h = 15 \text{ cm}$. Neudané, ale pre výpočet potrebné číselné hodnoty materiálových a iných konštánt nájdite vo vhodných tabuľkách. Pri počítaní všetky numerické hodnoty veličín nech už od začiatku sú vyjadrené v jednotkách sústavy MKSA.

3. Naklonená rovina o dĺžke l má dve časti: horná je pokrytá kovom a dolná drevom (dubom). Povrchy sú suché. Vo vertikálnom reze s najväčším spádom pripadá na vodorovne meranú vzdialenosť $z = 9,20 \text{ m}$, stúpanie $h = 4,09 \text{ m}$. Prepona príslušného pravouhlého trojuholníka je práve dĺžka l . Keď u horného okraja hornej časti položíme kľudne (bez počiatočného nárazu) na naklonenú rovinu kovový kváder (napr. o rozmeroch 2, 3 a 4 cm), nastane pohyb. Prečo nastane a aký je to pohyb? Pri akom pomere dĺžok jednotlivých častí možno dosiahnuť, že kváder samočinne sa zastaví práve na konci dráhy l ? Aký čas je potrebný na vykonanie celej tejto dráhy? Aká bola najväčšia rýchlosť počas celého pohybu? Pre koeficienty vlečného trenia najdeme v literatúre: kombinácia kov-kov $f_1 = 0,20$, kombinácia kov-dub $f_2 = 0,60$.

4. Na hadici požární stříkačky je nasazen kovový nástavec dĺžky 800 mm; průměr kruhového otvoru se podél nástavce zúží ze 75 mm na 20 mm. Stříkačka dává za 5 min. $3,3 \text{ m}^3$ vody. Jakou rychlostí proudí voda krajními průřezy nástavce ve vodorovném směru? S jakým přetlakem (vzhledem k atmosférickému tlaku) proudí voda z hadice do nástavce? Vyjádřete jej v technických atmosférách. Ve vhodném měřítku znázorněte graficky průběh rychlosti proudění a přetlaku vody podél nástavce (narýsujte graf na milimetrový papír).

5. K sklenenej banke o objeme $1,000 \text{ cm}^3$ je pritavena kapilára o priemeru $0,43 \text{ mm}$ a o dĺžke 20 cm . Banka a časť kapiláry v dĺžke 30 mm je vyplnená pri teplote 15° C a) ortuťou, b) vodou.

A. Pri akej teplote jednotlivých kvapalín bude nimi vyplnená celá kapilára? Rozťažnosť skla zanedbejte. Posúďte podmienky.

B. Navrhните vhodný objem banky pre kapiláru o dĺžke 30 cm , aby pri naplnení ortuťou sme získali teplomer v rozsahu -15° C až $+150^\circ \text{ C}$. (Stupnica nech sa začína i končí 2 cm ďaleko od koncov kapiláry.)

6. Ocelová obruč byla naražena na kolo železničního vozu při teplotě $t_1 = 300^\circ \text{ C}$. Vypočtete namáhání obruče v tahu při teplotě $t_0 = 20^\circ \text{ C}$, při průřezu obruče 20 cm^2 . Modul pružnosti oceli v tahu je $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, délková roztažnost oceli $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$. Řešte nejprve obecně, pak numericky.

7. Sklenená nádoba je pri teplote $t = 10^\circ \text{C}$ úplne naplnená ortuťou a majú spolu hmotu $M_1 = 14,500 \text{ kg}$. Po zahriatí na $t_0 = 30^\circ \text{C}$ má ortuť s nádobou hmotu $M_2 = 14,437 \text{ kg}$. Aký je objem nádoby pri 0°C , ak súčiniteľ objemovej rozťažnosti skla je $\alpha = 0,000\,024\,55 \text{ deg}^{-1}$, ortuti je $\beta = 0,000\,180\,18 \text{ deg}^{-1}$, a hustota ortuti pri 0°C je $\rho_0 = 13,598 \text{ gcm}^{-3}$?

8. Kúsok medi o teplote 100°C se ponorí do 200 g vody v kalorimetre o tepelnej kapacite $0,015 \text{ kcal/deg}$; pôvodná teplota vody a kalorimetru je $15,0^\circ \text{C}$, konečná teplota je $17,5^\circ \text{C}$. Opakujeme pokus tak, že nahradíme vodu inou kvapalinou rovnakej hmoty a počiatočnej teploty $16,5^\circ \text{C}$; výsledná teplota je potom $19,0^\circ \text{C}$. Určite merné teplo kvapaliny.

9. Určite merné teplo telieska neznámeho zloženia, prizerajúc na tepelnú kapacitu kalorimetra.

K dispozícii máte: kalorimeter, merané teliesko, teplomer, váhy, destilovanú vodu, zdroj tepla (varič).

Tvar meraného telieska možno upraviť.

Kategorie C

1. Posuďte a vysvetľte, jsou-li správné závěry v úlohách:

a) Motocyklista jede z místa A do B průměrnou rychlostí 40 km/h a vrací se z místa B do A průměrnou rychlostí 60 km/h . Jeho celková průměrná rychlost je 50 km/h .

b) Míč je vržen počáteční rychlostí v_0 svisle vzhůru a dosáhne za dobu t výšky h .

Bude-li vržen počáteční rychlostí $2v_0$, dosáhne za dobu $2t$ výšky $2h$.

2. Motorista jede rychlostí 80 km/h . Ve vzdálenosti 50 m uvidí před sebou překážku. Dovede vůz včas zabrzdit, jestliže jeho reakce na vnější popud trvá $0,5 \text{ s}$ a při dané rychlosti může vůz zabrzdit za 3 s ? (Řešte nejprve obecně.)

3. Raketa je odpálena svisle vzhůru se zrychlením 40 m/s^2 ; palivo vyhoří za 2 minuty. a) Jak vysoko raketa vyletí? b) Za jak dlouho po vypálení se vrátí na zem? Řešte nejprve obecně. Odpor vzduchu zanedbejte ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

4. a) Na rovnoramenných vahách je vyvážena nádoba s vodou. Poruší se rovnováha, když do vody ponoříme prst? Vysvětlete.

b) Na jedné misce rovnoramenných vah je stojan s dlouhým vodorovným ramenem, na jehož konci je na tenké niti zavěšen kovový válec nad druhou miskou vah. Na druhé misce vah je nádoba s vodou; váhy jsou v rovnováze. Prodloužíme-li závěsnou nit tak, aby celý válec byl ponořen ve vodě, rovnováha se poruší. Vysvětlete, α) proč se rovnováha poruší, β) jakým závažím a na kterou misku položeným ji obnovíte.

c) Stojan s válcem a nádobka s vodou jsou nyní umístěny na téže misce vah; na druhé misce jsou vyváženy závažím. Poruší se rovnováha, když se válec zavěšený na niti α) částečně ponoří do vody?, β) postaví až na dno nádoby (a nit se uvolní)?

5. Na hladkém stole leží dvě krychle o hmotách m_1, m_2 , spojené navzájem tenkým vláknem. Krychle m_1 je spojena dalším vláknem, vedeným přes kladku na okraji stolu, s volně visícím závažím o hmotě M . Určete: a) zrychlení, se kterým se tělesa pohybují; b) sílu, kterou jsou namáhána vlákna mezi tělesy M a m_1, m_1 a m_2 . Tření a hmoty vláken a kladky zanedbejte. Řešte nejprve obecně a pak pro $m_1 = 0,20 \text{ kg}$, $m_2 = 0,30 \text{ kg}$, $M = 0,10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

6. Brzdící síla brzd automobilu se rovná poloviční váze vozu. Určete, na jak dlouhé dráze s se automobil zabrzdí, je-li jeho počáteční rychlost v . Sestrojte tabulku a graf závislosti dráhy s na rychlosti v automobilu. Postupujte při tom po 10 km/h až do rychlosti 120 km/h ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Graf narýsujte na milimetrový papír.

7. Kulička o hmotě 20 g je vržena svisle dolů z výšky $\beta_1 = 70$ cm nad deskou stolu počáteční rychlostí $v_0 = 2,0$ m/s.

a) Do jaké výše by vyskočila po odrazu, kdyby kulička i deska stolu byly dokonale pružné?

b) Ve skutečnosti se kulička odrazila do výšky $h_2 = 40$ cm nad desku stolu. Určete úbytek hybnosti a mechanické energie kuličky po nárazu. Vysvětlete tento úbytek podle zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie. Řešte nejprve obecně, odpor vzduchu zanedbejte ($g = 10$ m/s²).

8. Kosmická loď Východ s prvním astronautem J. A. Gagarinem obletěla Zemi za 89,1 min; na své oběžné dráze měla největší vzdálenost od povrchu Země (apogeum) 327 km, nejmenší (perigeum) 175 km. Její hmota byla 4725 kg.

a) Jak se mění na oběžné dráze kinetická a potenciální energie lodi vzhledem k Zemi? Vysvětlete podle zákona zachování mechanické energie.

b) Předpokládejme, že místo skutečného pohybu koná loď rovnoměrný pohyb po kruhové dráze o poloměru rovném aritmetickému průměru největší a nejmenší vzdálenosti lodi od středu Země. Určete rychlost pohybu, kinetickou energii lodi vzhledem k Zemi, dostředivé zrychlení v jednotkách g_n .

c) Jakou přitažlivou silou by v tomto případě působila Země na loď? Porovnejte s vahou lodi na povrchu Země.

d) Sestrojte ve vhodném měřítku průřez Země a kruhovou dráhu lodi. Jaký by byl poloměr dráhy Měsíce ve zvoleném měřítku?

(Potřebné číselné hodnoty vyhledejte v Matematicko-fyzikálních tabulkách.)

9. Určete tíhové zrychlení g z měření na nakloněné rovině.

Návod:

a) Sledujte pohyb kuličky po hladké nakloněné rovině asi $s = 180$ cm dlouhé při vhodné výšce h (např. 5 cm). K měření si opatřte kuličku z kuličkového ložiska o hmotě menší než 30 g. Změřte stopkami dobu pohybu kuličky po dráze, např. 10 cm, 40 cm, 90 cm, 160 cm při stálé výšce nakloněné roviny. Pro každé měření vypočítejte zrychlení pohybu a ; určete jeho aritmetický průměr z vypočtených hodnot a . Z této hodnoty a z rozměrů nakloněné roviny vypočítejte tíhové zrychlení $g = \frac{h}{s} \cdot a$. Měření sestavte do tabulky:

$h =$ cm

Poř. číslo	s_k (cm)	t_k (s)	a_k (cm/s ²)
1			
2			
3			

$a =$ cm/s², $g =$ cm/s².

b) Opakujte měření pro jinou výšku h nakloněné roviny. Určete g opět z aritmetického průměru hodnot a .

c) Určete g jako aritmetický průměr obou výsledků.

Popište přesně zařízení pokusu a postup měření.

K řešení úlohy si prostudujte úlohu 3 z knihy Laboratorní práce II. (SPN Praha 1956), str. 62—66.

M. Novák: Exkurze do parní elektrárny

Kniha vyšla jako 10. svazek I. řady Polytechnické knihnice, vydávané Čs. společností pro šíření politických a vědeckých znalostí, nákladem SPN v Praze, v roce 1960. Obsahuje 144 stran malého formátu a 74 obrázků. Cena 10 Kčs za brožovaný výtisk.

Základními dodavateli elektrické energie dnes jsou a ještě dlouho budou v první řadě parní elektrárny, které přeměňují energii získanou spalováním uhlí, rašeliny, plynu nebo oleje; budují se převážně v blízkosti zdrojů těchto paliv. Je zajímavé poznat, jak taková továrna na elektřinu vypadá a jak pracuje. Mohlo by se tak stát na exkurzi, ale k té není vždy příležitost. I když se do takové elektrárny dostaneme, nemůžeme vidět všechna její zařízení, protože jsou nepřístupná. Uvedená kniha chce takovou exkurzi nahradit a ukázat činnost parní elektrárny a všech jejích pomocných zařízení.

V první kapitole autor přehledně popisuje nejprve celou elektrárnu a podává informaci o jejích jednotlivých částech. Pak popisuje uskladnění uhlí jako základní suroviny našich elektráren, manipulaci s uhlím a různá zařízení, která zjednodušují jeho skládání a mechanizují jeho dopravu až na topeniště. Autor pojednává pak o různých typech mlýnů na uhlí, cyklonech a zásobnících uhelného prachu. Další nezbytnou důležitou surovinou pro provoz parní elektrárny je voda, jejíž potřeba je značná. Proto jsou všechny parní elektrárny postaveny blízko řeky nebo jiného vydatného zdroje vody. Voda slouží jako základní surovina pro výrobu páry, ale velmi mnoho vody se spotřebuje také v kondenzátorech vodní páry a v jiných chladičích. Voda určená k napájení parních kotlů musí být chemicky zvlášť upravována, aby nedošlo k poškození kotle.

Vlastní pochod spalování paliva v topeništi není tak jednoduchý, jak by se na první pohled zdálo. Vyžaduje velmi mnoho technických zařízení, zejména u moderních parních elektráren, které se kontrolují a řídí z jediného místa od ovládacího a kontrolního panelu. Při pohledu na obrázky bude většina čtenářů překvapena, jak se moderní kotel liší od představy, kterou o něm většina lidí dosud má. Také odstraňování škváry a popela z topeniště vyžaduje zvláštních strojních zařízení. Odpad se přitom dnes stává cennou surovinou pro výrobu tvárnic. V parním kotli

se vyrobí pára vysoké teploty a velkého tlaku. Ta se pak dále předeheřívá. Před svedením do turbin se však často ještě ve zvláštní redukční stanici upraví na vhodný tlak. Pak teprve přichází do parních turbin ohromného výkonu, které mění energii obsaženou v páře v otáčivý pohyb. Aby se při tom plně využilo energie páry, užívá se dnes obvykle dvoutělesových turbin, které spojují turbinu na vysoký a na střední nebo nízký tlak. Z turbíny pára přichází do kondenzátorů, které umožňují další využití v ní obsaženého tepla.

Energie otáčivého pohybu se mění v energii elektrickou a v elektrických generátorech, jejichž princip a dnešní technické provedení jsou v knize podrobně popsány. Vyrobená elektrická energie přichází pak do rozvodny a odtud do elektrické sítě. Kniha obsahuje ukázky moderních transformátorů a transformačních stanic i rozvoden našich velkých tepelných elektráren, v nichž jeden, nebo několik pracovníků, řídí z jediného místa provoz celé elektrárny. Kniha ještě uvádí náčrt plánovaného rozvodného zařízení elektrické energie v ČSSR. Ukazuje, jak je možné při vhodné úpravě využít i těch částí tepelné energie, která by jinak přišla nazmar.

V závěru dává kniha nahlédnout do budoucnosti. Upozorňuje zejména na možnost využití sluneční energie, na vliv, který bude mít pro provoz elektráren stále rostoucí automatizace, na přímé spalování uhlí v dolech a na možnost využití atomové (jaderné) energie k výrobě elektrické energie. Uvádí základní údaje o první velké sovětské jaderné elektrárně s výkonem 420 000 KW.

Kniha je psána jasně a populárně. Řada obrázků názorně ukazuje i to, co bychom v takové elektrárně nemohli při skutečné exkurzi tak dobře vidět a v přehledu pochopit. Obsahuje řadu schemat i fotografií z našich závodů a je dokladem vyspělosti našeho strojírenského průmyslu, na který můžeme být skutečně hrdi.

K. Šoler

Redakční sdělení

Žádáme ředitelství škol všeobecně vzdělávacích i odborných a učitele vyučující matematice, deskriptivní geometrii a fyzice, aby podle doporučení ministerstva školství a kultury laskavě provedli na počátku školního roku nábor předplatitelů Rozhledů matematicko-fyzikálních. Objednávky provádějte pouze prostřednictvím Poštovní novinové služby nebo u svého poštovního doručovatele.

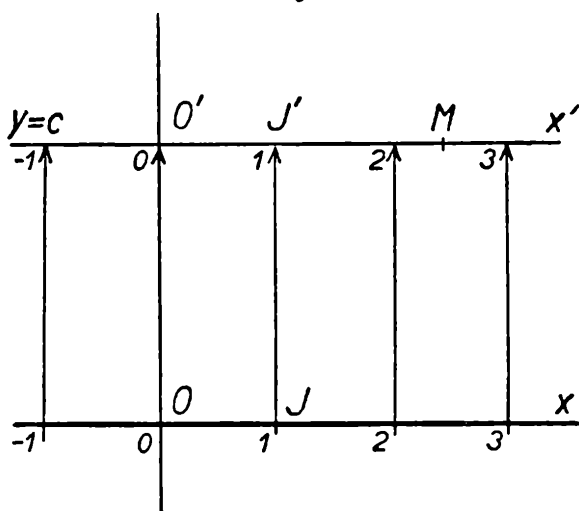
Čtenář plk. J. K. z Obrubce upozorňuje na omyl ve výsledcích příkladů 3. a 4. v č. 9 loňského ročníku na str. 406, které správně jsou „1 625 625 $a^3 qg$ “ a „4816 kusů“.

Matematika

J a r o s l a v Š e d i v ý, VŠP, Praha:

Polární souřadnicový systém v rovině

Ve středoškolském učivu je věnována značná pozornost kartézskému souřadnicovému systému v rovině. Předpokládám proto, že čtenáři je znám ten způsob vzájemně jednoznačného přiřazování uspořádaných dvojic reálných čísel a bodů roviny, který je základem uvedeného souřadnicového systému. Bodům roviny můžeme ovšem přiřazovat uspořádané dvojice reálných čísel i jiným způsobem. Jeden takový způsob si ukážeme v tomto článku. Místo slov „souřadnicový systém“ použijeme často zkratky s. s.



Obr. 1.

Výkladu o kartézském s. s. v rovině předchází zpravidla výklad o s. s. na přímce. Čtenář si jistě pamatuje, že souřadnicový systém na přímce je jednoznačně určen, přiřadíme-li některému bodu O uvažované přímky nulovou souřadnici a některému bodu $J \neq O$ souřadnici rovnou jedné. Souřadnicový systém na přímce určený uvedeným způsobem označíme $[O; J]$. Vyznačíme-li na přímce body, jejichž souřadnice v $[O; J]$ jsou celá čísla, dostaneme tzv. stupnici na přímce.

Kartézský s. s. v rovině má tu vlastnost, že množinou bodů roviny, kterým přiřazuje touž druhou souřadnici, je přímka rovnoběžná s osou x . Na obr. 1 je zobrazen graf funkce $y = c$ a vyznačena stupnice v $[O'; J']$, přímka sama je označena x' . Je zřejmé, že uvedená stupnice na přímce x' je shodná se stupnicí na ose x . Stupnici na x můžeme

ztotožnit se stupnicí na x' vhodným posunutím ve směru osy y , při němž přejde počátek O v bod O' , bod J v bod J' . Toto posunutí lze jednoznačně charakterizovat jeho velikostí. *Velikost posunutí* ve směru osy y je reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna velikosti úsečky OO' a jehož znamení je kladné, náleží-li bod O' kladné poloose y a záporné, náleží-li bod O' záporné poloose y . Z toho je patrné, že velikost posunutí ve směru osy y je rovna souřadnici c bodu O' na ose y a tím současně druhé souřadnici všech bodů přímky x' .

Souřadnice bodu M v kartézském s. s. s osami x, y lze určit takto

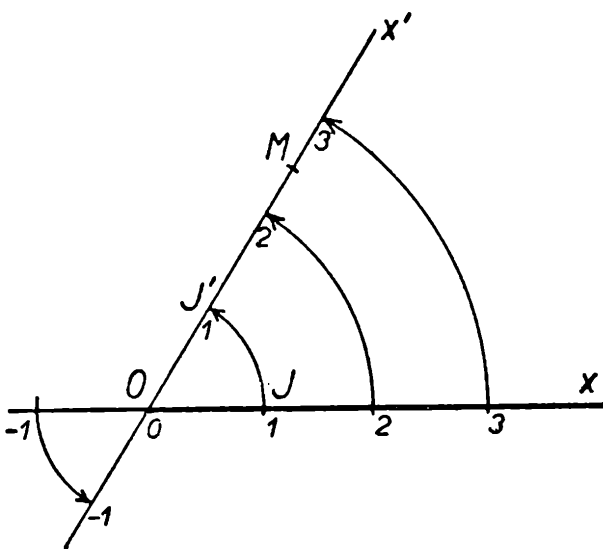
1. *Posuneme osu x ve směru osy y tak, aby procházela bodem M ;*
2. *první souřadnice bodu M je rovna jeho souřadnici v s. s. $[O'; J']$ na posunuté ose x ;*
3. *druhá souřadnice bodu M je rovna velikosti posunutí osy x .*

Čtenář si jistě snadno určí popsáním způsobem souřadnice libovolných bodů. Uvedený způsob je v kartézském s. s. poněkud nezvyklý, je však obdobný postupu, kterým výhodně určujeme souřadnice bodu v polárním s. s. Roli posunutí ve směru osy y však hraje otáčení kolem počátku.

Zvolme opět přímku x (obr. 2) a s. s. $[O; J]$ na této přímce. Polopřímku OJ můžeme otočit kolem O do polohy OJ' buď v kladném, nebo v záporném smyslu. K charakteristice uvedeného otočení stačí udát *velikost otočení*, tj. reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna délce dráhy bodu J (délce oblouku JJ' a libovolného celistvého násobku délky kružnice $k \equiv (O, OJ)$ a jehož znamení je kladné, máme-li na mysli otáčení v kladném smyslu, a záporné, máme-li na mysli otáčení v záporném smyslu. Pokud čtenář zná pojem orientovaného úhlu, poznává jistě, že velikost uvažovaného otočení je rovna velikosti orientovaného úhlu JOJ' . Důležité je to, že každé reálné číslo je velikostí právě jednoho otočení.

Nechť je zvolen s. s. $[O; J]$ na přímce $OJ \equiv x$. Libovolnému bodu M roviny přiřadíme uspořádanou dvojici reálných čísel ϱ, φ (tzv. polární souřadnice) takto

1. *Otočíme přímku OJ kolem bodu O do polohy OJ' tak, aby po otočení procházela bodem M ;*



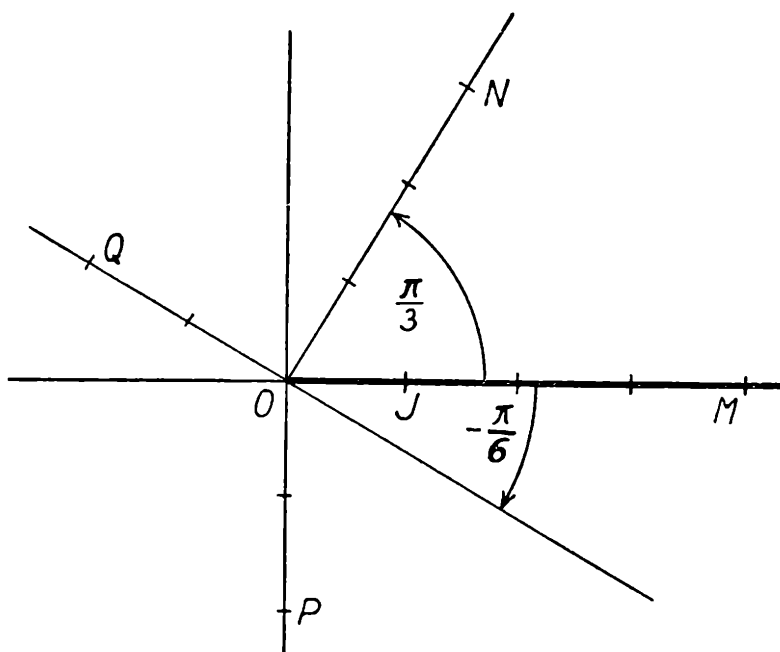
Obr. 2.

2. za první souřadnici bodu M považujeme jeho souřadnici ρ v s. s. $[O; J']$ na přímce x' ;

3. za druhou souřadnici bodu M považujeme velikost φ provedeného otočení.

Bod O nazýváme pólem s. s. v rovině, polopřímku OJ základní polopřímkou tohoto s. s.

Čtenáři je jistě zřejmá nápadně zdůrazněná analogie s postupem popsaným v odstavci o kartézském s. s. v rovině. Určení polárních souřadnic bodu způsobem, který jsme uvedli, je velmi názorné. Snadno stanovíme souřadnice bodů M, N, Q na obr. 3, dostaneme postupně výsledky $M(4; 0)$, $N\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$, $Q\left(-2; -\frac{\pi}{6}\right)$. Je otázka, zda jsme tím stanovili všechny možné dvojice polárních souřadnic uvedených bodů.



Obr. 3.

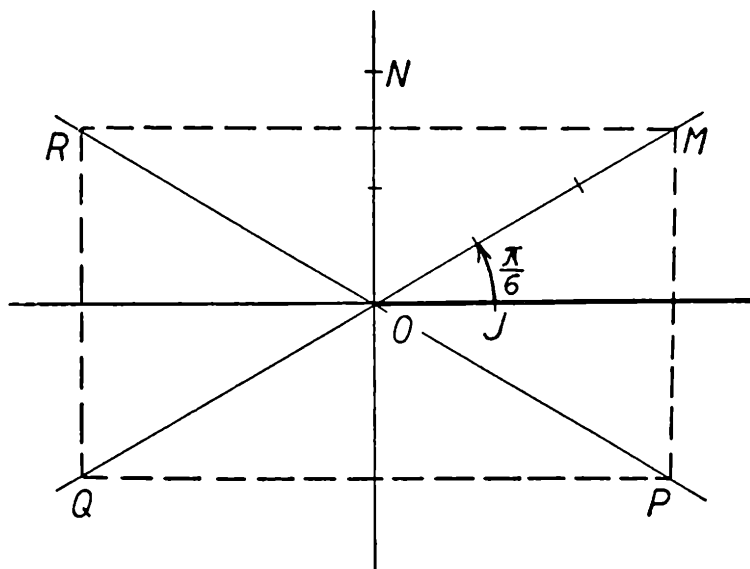
Ukážeme, že v témž polárním s. s. každému bodu M lze přiřadit nekonečně mnoho navzájem různých dvojic polárních souřadnic.

Je-li $M \equiv O$, je jeho první souřadnice vždy nulová, protože při každé poloze přímky x' je bod O počátkem s. s. $[O; J']$ na této přímce. Druhou souřadnicí bodu O je však libovolné reálné číslo, protože každé reálné číslo je velikostí otočení, ve kterém bod O přejde sám v sebe.

Je-li $M \neq O$, má dvě různé první souřadnice¹⁾, které jsou navzájem

¹⁾ V některých učebnicích se při definici polárního s. s. považuje první souřadnice bodu za vzdálenost bodu od pólu a je proto nezáporným číslem. V takto zavedeném s. s. nelze zobrazovat funkce $\varphi = f(\rho)$, které nabývají záporné hodnoty ρ , je třeba doplnit s. s. další úmluvou. Při našem postupu to nebude zapotřebí.

opačnými čísly. Tato skutečnost vyplývá z toho, že bod M může být „zachycen“ při postupném otáčení přímky x kolem O buď polopřímkou OJ , nebo opačnou. Podle toho je buď $\varrho > 0$, nebo $\varrho < 0$. Každý bod $M \neq O$ má nekonečně mnoho navzájem různých druhých souřadnic; je-li φ_0 jedna z nich, je také $\varphi_0 + k\pi$ jeho souřadnicí (k je libovolné celé číslo). Čtenář se o tom může názorně přesvědčit: začne-li otáčet přímku x v kladném smyslu, zachytí bod M po prvé při velikosti otočení rovné číslu φ_0 , $0 \leq \varphi_0 < \pi$ (obr. 2). Při dalším otáčení (v kterémkoliv smyslu) zachytí přímka x bod M po každé polovině otáčky a to střídavě polopřímkou OJ a polopřímkou opačnou. Polovině otáčky přísluší velikost otočení rovná číslu π , je tedy $\varphi \equiv \varphi_0 + k\pi$.



Obr. 4.

Bod M zobrazený na obr. 3 má dvojice souřadnic $(4; 0)$, $(-4; \pi)$, $(4; 2\pi)$, $(-4; 3\pi)$, $(4; 4\pi)$, a také $(-4; -\pi)$, $(4; -2\pi)$, $(-4; -3\pi)$, $(4; -4\pi)$. Bod P má souřadnice $\left(-2; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-2; -\frac{3\pi}{2}\right)$. Různé dvojice souřadnic zbývajících bodů zakreslených na obr. 3 určí čtenář snadno sám na základě pohybové představy.

Platí tedy:

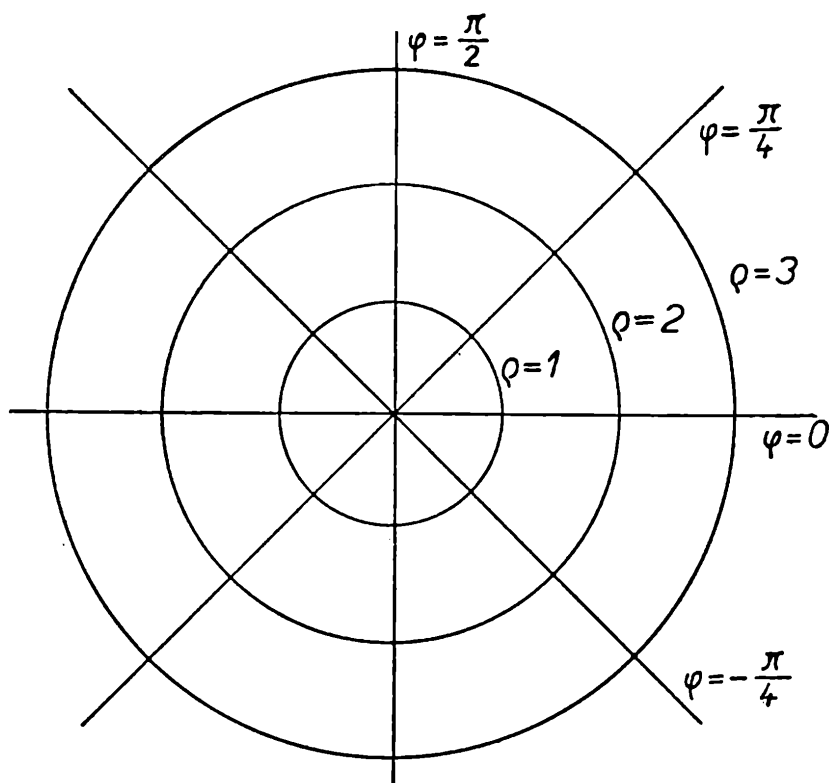
Má-li bod $M \neq O$ polární souřadnice $(\varrho_0; \varphi_0)$, má v témž polárním s. s. souřadnice $(\varrho_0; \varphi_0 + 2k\pi)$, $(-\varrho_0; \varphi_0 + (2k + 1)\pi)$, kde k je libovolné celé číslo²⁾.

Naučili jsme se přiřazovat bodům roviny souřadnice ve zvoleném polárním s. s. Při konstrukci grafů funkcí však potřebujeme znalost

²⁾ V polárním s. s. není tedy přiřazení bodů roviny a uspořádaných dvojic reálných čísel vzájemně jednoznačné. Tato zvláštnost polárního s. s. je výhodná při sestavování grafů goniometrických funkcí.

obráceného postupu, tj. sestrojít bod, známe-li jeho polární souřadnice a máme-li zvolen polární s. s. v rovině.

Je-li dána dvojice souřadnic ρ, φ bodu M , otočíme nejprve přímku $OJ \equiv x$ kolem pólu O o úhel φ^3 (podle znamení čísla φ buď v kladném, nebo záporném smyslu) do polohy $OJ' \equiv x'$. Hledaný bod M je tím bodem přímky x' , který má v s. s. $[O; J']$ na přímce x' souřadnici ρ .



Obr. 5.

Čtenáři, který se po prvé seznamuje s polárním s. s., bude užitečné, sestrojí-li si obrazy bodů, jejichž souřadnice zvolí zcela libovolně. Je vhodné volit druhé souřadnice bodů jako celistvé násobky čísel $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$.

Zobrazí-li čtenář bod o souřadnicích $\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ v polárním s. s. na obr. 4,

dostane bod M . Zobrazí-li body dané souřadnicemi $\left(-2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$; $(0; 7\pi)$, $\left(2; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-3; -\frac{\pi}{6}\right)$, $(-1; -3\pi)$, $\left(-3; \frac{\pi}{6}\right)$,

³⁾ Dané číslo φ můžeme zmenšit nebo zvětšit o libovolný celistvý násobek čísla 2π .

$\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, dostane vždy některý z bodů vyznačených na obr. 4.

Víme, že některé jednoduché křivky jsou grafy formálně jednoduchých funkcí v kartézském s. s., např. přímka je grafem lineární funkce $y = kx + q$, nebo $x = c$. Funkci proměnné x zapisujeme zpravidla ve tvaru $y = f(x)$. V polárním s. s. volíme za nezávisle proměnnou raději φ , funkce pak zapisujeme ve tvaru $\varrho = f(\varphi)$.

Snadno zobrazíme grafy funkcí $\varrho = c$, $\varphi = c$, je-li c konstanta. Grafem funkce $\varrho = 0$ je jediný bod pól s. s. Je-li $c \neq 0$, leží všechny body roviny, jejichž první polární souřadnice je rovna c , na kružnici se středem v pólu. Každý bod této kružnice má první souřadnici rovnou c nebo číslu opačnému. Je tedy grafem funkce $\varrho = c \neq 0$ kružnice se středem v pólu a poloměrem rovným $|c|$.

Množinou bodů, jejichž druhá souřadnice je rovna c , je zřejmě přímka, která je obrazem přímky $OJ \equiv x$ v otočení o velikosti c . Tato přímka je současně grafem funkcí $\varphi = c + k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Na obr. 5 je zobrazeno několik funkcí typu $\varrho = c$, $\varphi = c$, které tvoří tzv. souřadnicovou síť polárního s. s. v rovině.

Umíme zobrazit bod, který má dané souřadnice; můžeme proto zakreslit libovolný počet bodů grafu funkce $\varrho = f(\varphi)$, vypočítáme-li hodnoty $f(\varphi)$ příslušné zvoleným hodnotám φ . Získaná čísla lze zapsat do stejného schématu jako zapisujeme hodnoty x , $y = f(x)$ (viz např. učebnici algebry pro 9. ročník). Rozdíl je v tom, že místo proměnné x píšeme φ a volíme především $\varphi = k \cdot \frac{\pi}{6}$, $\varphi = k \frac{\pi}{4}$, k celé.

(Pokračování)

Milan Hejný, ČVUT, Praha:

Príklad na postupnosť

(Dokončenie)

Na špeciálnom prípade, $n = 5$ sme sa naučili metódu postupu. Pokúsime sa o zobecnenie tejto na obecný prípad. Budeme sledovať špeciálny prípad krok za krokom.

Podľa (11) a (9) je

$$\varphi_{\frac{n+1}{2}} = \psi_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-2}{n} \pi.$$

Vzorce obdobné vzťahom (15) môžeme zapísať najvýhodnejšie v obecnej forme

$$\varphi_i = \frac{n-2}{n} \pi + (2_i - n - 1) \Delta$$

$$\psi_i = \frac{n-2}{n} \pi + (2_i - n - 1) \frac{\Delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Voľba čísla Δ je obmedzená podmienkami

$$\frac{n-2}{n} \pi - (n-1) \Delta > 0 \quad \text{a} \quad \Delta > 0$$

t.j.

$$\frac{n-2}{n(n-1)} \pi > \Delta > 0, \quad (21)$$

ktorých špeciálnym prípadom, pre $n = 5$ sú podmienky (16).

Nebudeme sa snažiť zobecňovať postup, ktorým sme dospeli ku poradíu (17), resp. k definitívnemu označeniu danému v (18) a (19). Jednoduchšia bude cesta priameho zobecnenia rovníc (18) a (19). Zvlášť rovnice (19) vyzerajú veľmi jednoducho. Ich zobecnenie tvorí n rovníc

$$\beta_i = \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Z rovnicami (18) je to už komplikovanejšie. Nakoľko φ_i a ψ_i sú pevne dané rovnicami (20) a platí pre ne n vzťahov daných v (3), stačí určiť jediné φ_i , teda stačí zobecniť jedinú z rovníc (18) a ostatné budú rovnicami (22), (20) a (3) určené. Ktorú z rovníc (18) sa rozhodneme zobecňovať? „Rozumne“ vyzerá prvá i posledná. Zobecnenie poslednej by asi vyzeralo $\alpha_n = \varphi_n$. My však vyjdeme z prvej. Skúsime ju zobeniť takto:

$$\alpha_1 = \varphi_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-2}{n} \pi.$$

Podľa (3) je

$$\alpha_2 = 2\beta_1 - \alpha_1 = 2\psi_1 - \varphi_{\frac{n+1}{2}} = 2 \frac{n-1}{n} \pi + (2 - n - 1) \Delta -$$

$$- \frac{n-1}{n} \pi = \varphi_1$$

Je zaujímavé, že druhá z rovníc (18) je už priamo v obecnom tvare — ako sme teraz zistili. Čitateľ sám si výpočtom overí ešte, že

$$\alpha_3 = \varphi_{\frac{n+3}{2}}; \quad \alpha_4 = \varphi_2; \quad \alpha_5 = \varphi_{\frac{n+5}{2}}.$$

Oobecne sa ukazuje, že by mohlo platiť

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \varphi_{\frac{n+i}{2}} \quad \text{pre } i = 1, 3, 5, \dots, n \quad (i \text{ je nepárne}) \\ \alpha_i &= \varphi_{\frac{i}{2}} \quad \text{pre } i = 2, 4, \dots, n-1 \quad (i \text{ je párne}).\end{aligned}\quad (2)$$

Presný dôkaz dohadu prevedieme matematickou indukciou:

I. pre $i = 1$ sme vzťah definitoricky zaviedli a je platný. Pre $i = 2$ sme ho dokázali, pre $i = 3, 4, 5$ si ho čitateľ overil. Prvý krok indukcie je bohato splnený.

II. Budeme rozlišovať dva prípady :

A. Číslo i je nepárne a príslušná rovnica (23) preň platí. Dokážeme platnosť rovnice (23) pre $i + 1$. Toto číslo je párne, preto chceme dokázať

$$\begin{aligned}\text{spodný vzťah. Je } \alpha_{i+1} &= 2\beta_i - \alpha_i = 2\psi_i - \varphi_{\frac{n+i}{2}} = 2 \frac{n-2}{n} \pi + \\ &+ (2i-n-1) \Delta - \frac{n-2}{n} \pi - \left(2 \frac{n+i}{2} - n - 1 \right) \Delta = \frac{n-2}{n} \pi + \\ &+ (2i-n-i) \Delta = \frac{n-2}{n} \pi + \left(2 \frac{i+1}{2} - n - 1 \right) \Delta = \varphi_{\frac{i+1}{2}}. \text{ To sme ma-} \\ &\text{li dokázať.}\end{aligned}$$

B. Číslo i je párne a opäť platí príslušná z rovníc (23). Potom $i + 1$ je nepárne a platí podobne:

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= 2\beta_i - \alpha_i = 2\psi_i - \varphi_{\frac{i}{2}} = 2 \frac{n-2}{n} \pi + (2i-n-1) \Delta - \\ &- \frac{n-2}{n} \pi - (i-n-1) \Delta = \frac{n-2}{n} \pi + i \Delta = \frac{n-2}{n} \pi + \\ &+ \left(2 \frac{n+i+1}{2} - n - 1 \right) \Delta = \varphi_{\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

Tým je druhá časť dôkazu a zároveň i celý dôkaz prevedený.

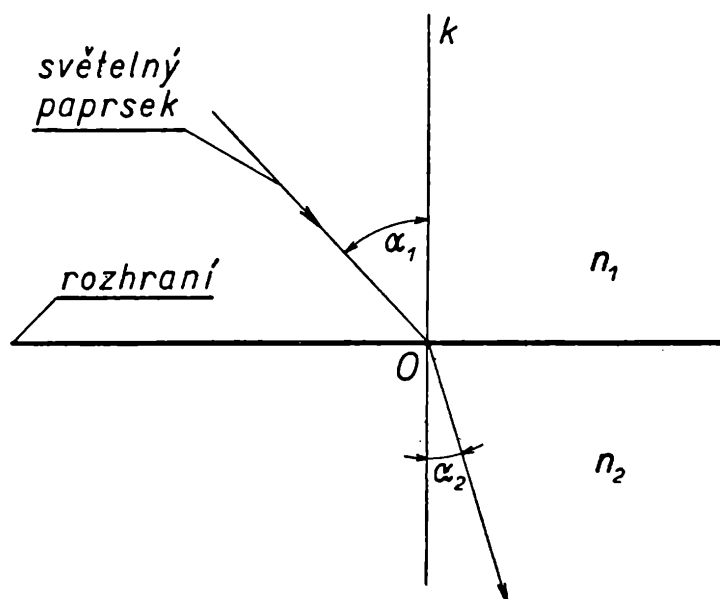
Vlastná konštrukcia n -uholníka je už ľahká a prevedie sa spôsobom, ktorý sme pre $n = 5$ naznačili. Jej prevedením (dokázaním, že sa previesť dá) je existencia požadovaného n -uholníka pre n nepárne už zaistená. Tak sme previedli úplné riešenie príkladu. Mohli by sme si položiť otázku najšť v š e t k y n -uholníky požadovaných vlastností. V špeciálnom prípade $n = 5$ sme i túto riešili. Pre obecný prípad dochádza ku komplikáciám, ktoré prenecháme ako hlavolam pre čitateľa.

J a r o s l a v P o s p í š i l, UP Olomouc:

Elektronová optika

V řadě technických odvětví jako je elektrotechnika, radiotechnika, zvuková technika nebo televize, hrají důležitou roli zvláštní disciplíny, mezi které patří m a g n e t o o p t i k a, e l e k t r o o p t i k a, p i e z o - e l e k t ř i n a, e l e k t r o a k u s t i k a a t a k é e l e k t r o n o v á o p t i k a.

Elektronová optika je disciplína využívající částeczkové (korpuskulární) a zároveň vlnové povahy elektronů. Je založena na skutečnosti, že se pohyb elektronů v elektrickém a magnetickém poli řídí v určitých případech obdobnými zákony jakými se řídí šíření světla v optických prostředcích (např. skleněných čočkách, hranolech, destičkách). Všimněme si některých zákonitostí.



Obr. 1.

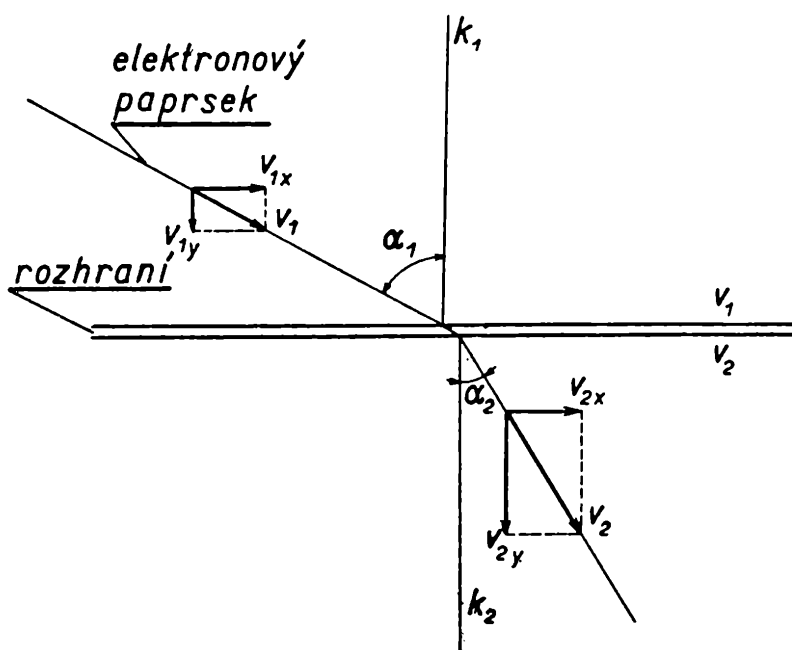
Základním zákonem světelné optiky je S n e l l ů v z á k o n l o m u, který má tvar

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

kde α_1 a α_2 jsou úhly dopadu a lomu světelného paprsku, n_1 a n_2 jsou indexy lomu prvního a druhého prostředí (obr. 1).

Obdobný zákon platí za určitých podmínek i pro elektronový paprsek v elektrickém poli. Pod pojmem elektronový paprsek rozumíme sled elektronů vycházejících z katody a pohybujících se ve vakuu k anodě.

Odvodíme si nyní zákon lomu pro elektronový paprsek procházející rozhraním dvou prostředí s různými elektrickými potenciály V_1 a V_2 . Předpokládejme, že svazek elektronů dopadá rychlostí v_1 na toto rozhraní, a to pod úhlem α_1 vzhledem k normále k_1 (obr. 2). Rychlost v_1 můžeme rozložit na dvě složky, a to na rychlost v_{1y} ve směru normály a na rychlost v_{1x} kolmou k normále. Při průchodu elektronu uvedeným



Obr. 2.

rozhraním se změní pouze složka v_{1y} , složka v_{1x} zůstane nezměněna, neboť podél této složky se potenciál elektrického pole nemění. Protože se změnila složka v_{1y} rychlosti, budou mít elektrony po průchodu rozhraním dvou potenciálů jinou rychlost v_2 . Z obr. 2 je vidět, že

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_{1x}}{v_1}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{v_{2x}}{v_2}.$$

Protože $v_{1x} = v_{2x}$, platí

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (2a)$$

Vzorec (2a) můžeme upravit zavedením elektrických potenciálů V_1 , V_2 obou oblastí. Protože pro kinetickou energii elektronu, který proběhl v elektrickém poli mezi dvěma místy s potenciálním rozdílem ($V_1 - 0$)

platí

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = e V_1,$$

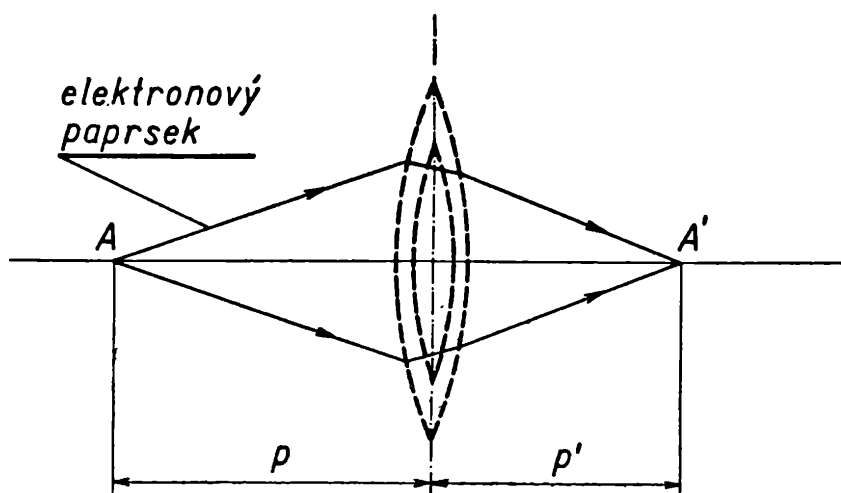
vychází pro poměr rychlostí

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

a vztah (2a) nabude tvaru

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}. \quad (2b)$$

Vztahy (2a) a (2b) jsou obdobou Snellova zákona lomu (1) pro světelný paprsek, z níž také plyne obdobnost celé elektronové optiky s optikou světelnou, pokud uijeme obdobných zařízení.



Obr. 3.

Vytvoříme-li elektrické pole, jehož ekvipotenciální plochy (plochy stejného potenciálu) budou podobné plochám optické čočky (skleněné čočky), bude takové pole působit na svazek elektronů jako čočka. Takovou elektrickou čočku bychom mohli vytvořit ze dvou jemných drátěných sítěk ve tvaru spojné čočky (obr. 3).

Bude-li mít vnitřní síťka proti vnější síťce kladný náboj, budou se elektrony, vycházející z bodu A se stejnou rychlostí různými směry, pohybovat po průchodu čočkovitou dvojvrstvou tak, jako světlo po průchodu spojnou optickou čočkou. To znamená, že budou směřovat do bodu A' . Zobrazovací rovnice

$$\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1 \quad (3a)$$

platná pro optické čočky, bude platit i v tomto případě. Písmena p a p' značí vzdálenosti předmětu a obrazu od středu čočky; f a f' jsou vzdálenosti předmětového a obrazového ohniska od středu čočky. Bude-li

předmětové a obrazové prostředí stejné a budeme-li vzdálenosti měřené od středu čočky a směřující zleva doprava pokládat za kladné, pak pro ohniskové vzdálenosti platí

$$f' = -f \text{ nebo } f = -f'$$

a výraz (3a) vyloučením f nabude tvaru

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}. \quad (3b)$$

Pro ohniskovou dálku f' optické čočky platí vztah

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (4a)$$

kde r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti obou čočkových ploch. Pro elektrickou čočku platí vzorec obdobný vzorci (4a), když ve vztahu (4a) nahradíme poměr indexů $\frac{n_2}{n_1}$ poměrem rychlostí $\frac{v_2}{v_1}$

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4b)$$

Předpokládejme, že uvnitř čočky je potenciál vyšší než vně. Čím vyšší bude napětí mezi vnitřní a vnější sítkou elektrické čočky, tím větší bude hodnota poměru rychlostí $\frac{v_2}{v_1}$ a jak ze vztahu (4b) vyplývá, bude také větší optická mohutnost čočky $\frac{1}{f'}$.

Bude-li vnitřní síťka elektrické čočky proti vnější síťce záporná, bude poměr rychlostí $\frac{v_2}{v_1}$ menší než jedna. Ze vztahu (4b) plyne, že optická mohutnost čočky $\frac{1}{f'}$ bude záporná, takže elektrická čočka bude působit jako rozptylka.

Kdybychom zvolili rozdíl potenciálů mezi sítkami tak, aby původní rychlost elektronů v_1 klesla mezi sítkami na nulu, budou se elektrony vracet zpět podle zákona odrazu a elektrická dvojvrstva bude působit jako vypuklé zrcadlo ve světelné optice.

V elektronové optice se používá elektrických čoček jiného uspořádání. Využívá se přitom okolnosti, že každé středově souměrné elektrické pole působí na svazek elektronů jako čočka, i když ekvipotenciální plochy elektrického pole nejsou geometricky podobné plochám optické čočky.

(Pokračování)

Mezinárodní praktická teplotní stupnice

(Dokončení)

Bod varu kyslíku se realizuje statickou metodou v jímce kovového bloku, jež je zčásti naplněna kapalným kyslíkem. Kovový blok musí být umístěn ve hodném k r y o s t a t u, tj. zařízení, v němž lze udržovat nízkou teplotu. V kryostatu je kovový blok zpravidla ponořen opět do lázně kapalného kyslíku, otevřeného okolní atmosféře. Prostor nad kyslíkem v jímce je obvykle uzavřen a je třeba určit tlak, který zde je. Není-li tento tlak b roven normálnímu barometrickému tlaku b_0 (tj. 1 fyzikální atmosféře rovné 760 torů) je třeba rovnovážnou teplotu t_b fázové přeměny vypočítat ze vztahu

$$t_b = \left[-182,97 + 9,530 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right) - 3,72 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^2 + 2,2 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^3 \right] ^\circ\text{C} . \quad (3)$$

Tento vztah však platí jen v tlakovém rozmezí $b = 660$ až 860 torů.

Bod varu vody se realizuje dynamickou metodou, při níž se zkoušený teploměr vkládá do nasycené vodní páry. Pro běžné účely je výparník otevřen okolní atmosféře, pro vyšší přesnosti se volí soustava zavřená. Výparník je pak spojen s m a n o s t a t e m - tj. zařízením udržujícím nějaký tlak na stálé hodnotě se vzduchovou, nebo častěji heliovou náplní. I zde je zapotřebí teplotu t_b rovnovážného stavu při nějakém tlaku $b \neq b_0$ vypočítat z opravného vzorce. Lze jej použít v tlakovém rozmezí $b = 660$ až 860 torů

$$t_b = \left[100 + 28,012 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right) - 11,64 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^2 + 7,1 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^3 \right] ^\circ\text{C} . \quad (4)$$

Voda musí být ovšem velmi čistá. Při tom není nutno brát ohled na různé odchylky izotopického složení přírodní vody, obdobně jako tomu je u trojného bodu vody.

Bod varu síry se realizuje podobně jako bod varu vody dynamickou metodou. Výparník je zde obvykle hliníkový, musí být ovšem větší než v předešlém případě, aby byla umožněna náležitá cirkulace sirných par. Použitá síra musí být velmi čistá, nesmí být patrně znečištěna arsenem

a selenem, ani organickými látkami, jež uvolňují za varu vody uhlík. Podobně jako v případech předešlých je možno rovnovážnou teplotu t_b vypočítat v tlakovém rozsahu $b = 660$ až 800 torů ze vzorce

$$t_b = \left[444,6 + 69,010 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right) - 27,48 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^2 + \right. \\ \left. + 19,14 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)^3 \right] ^\circ\text{C} . \quad (5)$$

U obou předešlých zařízení pro realizaci bodu varu vody a bodu varu síry musí být čidla teploměrů (jímky, odporové cívky, spoje termočlánků) chráněna proti tepelnému záření vhodnými radiačními kryty. Zvláště u síry je ochrana velmi důležitá. Podle posledního znění Mezinárodní stupnice se doporučuje používat na místě bodu varu síry *bod tuhnutí zinku*, jemuž přísluší hodnota $419,505^\circ\text{C}$ (Int. 1948). Tento bod je lépe reprodukovatelný nežli bod varu síry. Dobrou reprodukci mají vesměs teplotní body realizované pomocí fázových přeměn při sledování prodlev (na diagramu teplota čas) na křivkách chladnutí čistých kapalných kovů, případně i kovových slitin vhodného složení. V daném případě zinku musí být použitý kov velmi čistý (čistota 99,999 hmotových procent). Tavení i tuhnutí zinku probíhá v kelímku z nepřirodního grafitu vysoké čistoty. Do kelímku je souose vložena jímka pro vkládání kontrolovaných teploměrů. Kelímek lze ohřívat v jednoduché peci s kovovým blokem. Rovnovážného stavu je při ochlazování taveniny dosaženo, když se v ní počne vytvářet kolem předtím mírně ochlazené jímky tenká vrstva pevného zinku. Tuhnutí pak dále probíhá postupně od stěn kelímku k jeho středu. Body tuhnutí závisí rovněž na tlaku, ovšem v mnohem menší míře nežli u bodu varu. Tak např. u zinku vzroste teplota tuhnutí o $0,0043$ deg, zvýší-li se tlak o 1 fyzikální atmosféru. Malé tlakové změny nemusí být zde tedy ani uvažovány.

Body tuhnutí stříbra a zlata se realizují rovněž v kelímcích z nepřirodního čistého grafitu, keramiky, nebo z taveného kysličníku křemičitého. Při výpočtu rozměrů kelímku nesmí se zapomenout na vzrůst objemů kovů při jejich tuhnutí. Systém se zde volí obvykle uzavřený; zvláště stříbro je při tavení nutno chránit před oxydační atmosférou. Zkoušený teploměr, zpravidla termočlánek, se ponoří do roztaveného kovu v příslušné ochranné trubici z porcelánu nebo jiného vhodného žáruvzdorného materiálu.

Bod tuhnutí zlata je bod s nejvyšší teplotou ze šesti hlavních teplotních bodů. Existují ovšem jiné další teplotní body, tzv. *druhotné* (sekundární), u některých z nich jsou také teploty vyšší než je bod tuhnutí zlata. Kromě těchto zbývá probrat také druhy základních etalonových teploměrů, pomocí kterých interpolujeme hodnoty Mezinárodní prak-

tické teplotní stupnice mezi hlavními teplotními body a některé základní vztahy, které k této problematice náleží.

Interpolační prostředky

V minulé části jsme se zabývali hlavními teplotními body a způsoby jejich realizace. Nyní si v krátkosti probereme teploměrná zařízení, jichž se používá k *interpolaci* mezi teplotami příslušejícími hlavním bodům, případně ležícími vně nich. Jsou to teploměry založené na změně elektrického odporu s teplotou (teploměry odporové), na vzniku elektromotorické síly na spoji dvou různých kovů vystaveném nějaké teplotě (teploměry termoelektrické, termoelektrické články, krátce termočlánky) a na radiačních zákonech (teploměry radiační). Protože se zde jedná o základní měření vysoké přesnosti, jde vesměs o *teploměry etalonové*. Podle prostředků vhodných k interpolaci můžeme celou teplotní stupnici rozdělit na čtyři oblasti:

a) od $-182,97^{\circ}\text{C}$ do 0°C , kde jsou předepsány etalonové platinové odporové teploměry;

b) od 0°C do $630,5^{\circ}\text{C}$ (což je bod tuhnutí antimonu) platinové odporové teploměry;

c) od $630,5^{\circ}\text{C}$ do 1063°C , etalonové termočlánky Pt-PtRh;

d) nad 1063°C , etalonové radiační teploměry.

O jednotlivých zmíněných teplotních oblastech pohovoříme podrobněji.

a) V rozsahu od bodu varu kyslíku ($-182,97^{\circ}\text{C}$) do 0°C lze teplotu t definovat vztahem

$$R_t = R_0 [1 + A \cdot t + B \cdot t^2 + C (t - t_{100}) \cdot t^3], \quad (6)$$

kde značí R_t odpor etalonového platinového teploměru při teplotě t , R_0 odpor etalonového platinového teploměru při teplotě 0°C , $t_{100} = 100^{\circ}\text{C}$, A , B a C konstanty.

Konstanty R_0 , A a B musí být stanoveny experimentálně z hodnot R_t změřených při trojném bodě vody, bodu varu vody a bodu varu síry, nebo bodu tuhnutí zinku. Konstanta C se stanoví rovněž z hodnot R_t , a to změřených při bodu varu kyslíku. Platinový drát čidla teploměru, tj. ta část měřicího přístroje, jejíž citlivosti na změně teploty využíváme k jejímu měření, má být vyžíhán a čistota jeho materiálu má být taková, aby poměr odporu teploměru při teplotě 100°C , resp. 0°C , činil

$$R_{100}/R_0 > 1,3920.$$

b) V rozsahu od 0°C do bodu tuhnutí antimonu ($630,5^{\circ}\text{C}$) lze teplotu t definovat vztahem

$$R_t = R_0 (1 + A \cdot t + B \cdot t^2), \quad (7)$$

v němž vystupují kromě R_t konstanty R_0 , A a B uvedené již v předešlém odstavci a). Jejich hodnoty se stanoví obdobně jako v předešlém případě.

c) O d b o d u t u h n u t í a n t i m o n u ($630,5^\circ \text{C}$) d o b o d u t u h n u t í z l a t a (1063°C) používá se jako interpolačního prostředku termočlánu Pt-PtRh. Jedním jeho drátem je čistá platina (čistoty odpovídající nerovnosti uvedené v odstavci a), druhý drát je ze slitiny platiny (90 %) a rhodia (10 %). Dráty termočlánu musí být vyžihány. V této teplotní oblasti je teplota t definována vztahem

$$\mathcal{E} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \quad (8)$$

kde značí $\mathcal{E}$ elektromotorickou sílu etalonového termočlánu Pt-PtRh, jehož jeden tzv. srovnávací spoj je udržován na konstantní teplotě 0°C a druhý tzv. měřicí spoj je vystaven teplotě t . Při tom a , b a c jsou konstanty. Tyto konstanty je nutno stanovit z hodnot $\mathcal{E}$, změřených při bodech tuhnutí antimonu, stříbra a zlata.

d) N a d b o d e m t u h n u t í z l a t a (1063°C) je teplota t definována vztahem

$$\frac{(L_e)_t}{(L_e)_{t_{Au}}} = \frac{\frac{C_2}{e^{\lambda(t_{Au}-T_0)} - 1}}{\frac{C_2}{e^{\lambda(t-T_0)} - 1}}, \quad (9)$$

kde značí L_e monochromatické (spektrální) záře černého tělesa na vlnové délce λ při teplotě t , resp. při teplotě tuhnutí zlata t_{Au} , C_2 (druhou) radiační konstantu v Planckově zákoně rozdělení monochromatického vyzařování. Je-li λ v metrech, je $C_2 = 1,438 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{deg}$. $T_0 = 273,15 \text{ deg}$, e je základ přirozených logaritmů.

Etalonový platinový odporový teploměr má teploměrné čidlo zpravidla ve tvaru odporové cívky, na níž nemají být dráty vystaveny nežádoucímu a proměnnému mechanickému napětí (protože bez nějakého minimálního napětí se nelze dobře obejít). Dráty mají mít průměr v mezích 0,05 až 0,5 mm. Odporová cívka má být vyžihána, a to při minimální teplotě 450°C .

Průměr drátků etalonového termočlánu Pt-PtRh má být v mezích 0,35 až 0,65 mm. Také zde mají být dráty vyžihány (Pt při 1100°C a PtRh při 1450°C).

Druhotné teplotní body

Kromě hlavních teplotních bodů, o nichž jsme již dříve hovořili, je možno použít také *teplotních bodů druhotných čili sekundárních*. Některé z těchto bodů jsou dále uvedeny. Vyjma trojných bodů přísluší uvedené teploty rovnovážným termodynamickým stavům při tlaku 1 fyzikální atmosféry. Jsou to např.:

teplota rovnovážného stavu mezi pevným kysličníkem uhličitým a jeho párou	— 78,5° C (Int. 1948).
teplota rovnovážného stavu mezi pevnou a kapalnou rtutí	— 38,87
mezi ledem a vodou prosycenou vzduchem	0,000
teplota trojného bodu kyseliny benzoové	122,36
teplota rovnovážného stavu mezi pevným a kapalným indiem	156,61
	cínem 231,91
	kadmiem 321,03
	olovem 327,3
	hliníkem 660,1
teplota rovnovážného stavu mezi pevnou a kapalnou mědí	1083
teplota rovnovážného stavu mezi pevným a kapalným niklem	1453
	paladiem 1552
teplota rovnovážného stavu mezi pevnou a kapalnou platinou	1769
teplota rovnovážného stavu mezi pevným a kapalným rhodiem	1960
	iridiem 2443
teplota tání wolframu	3380

Deskriptivní geometrie

Prof. dr. Alois Urban, ČVUT, Praha:

Prostorová konstrukce hyperoskulačních kružnic kuželoseček

Při názorném prostorovém odvození známé konstrukce hyperoskulačních kružnic ve vrcholech elipsy stačí v podstatě užít toho, že elipsa je rovinným řezem kruhové válcové plochy. Hyperoskulační kružnice ve vrcholu elipsy je rovinný řez kulové plochy, která se dotýká kruhové válcové plochy a prochází její vhodně volenou kružnicí¹⁾.

Chceme-li užít téže názorné prostorové metody pro určení hyperoskulačních kružnic ve vrcholech libovolné kuželosečky²⁾, musíme místo

¹⁾ Podrobněji v článku Alois Urban, Hyperoskulační kružnice elipsy, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 39 (1960—61), str. 256, 306.

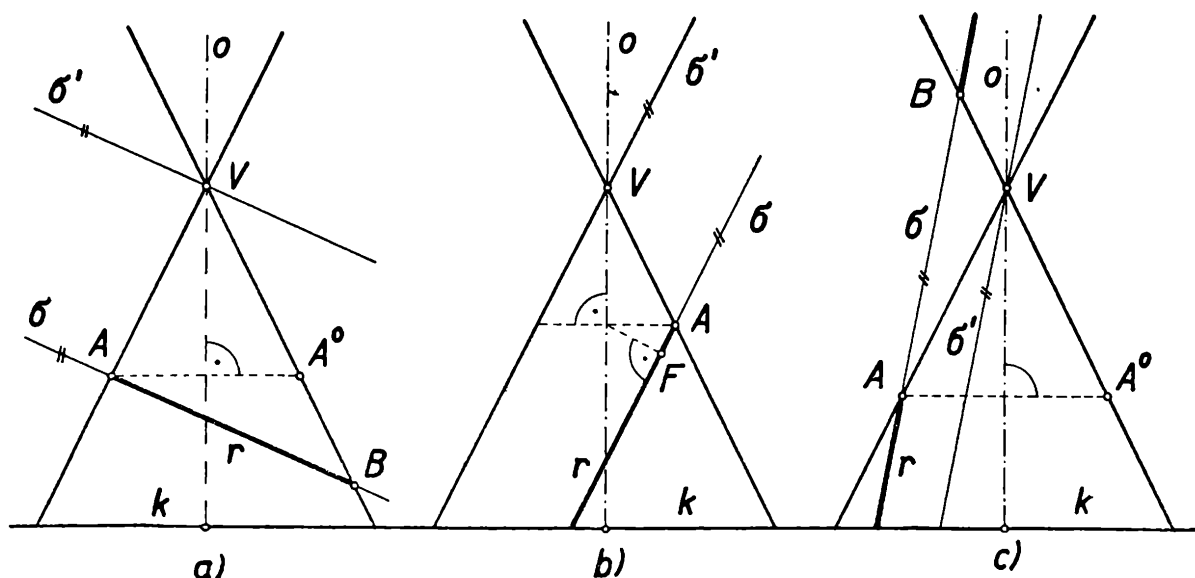
²⁾ Os k u l a č n í (h y p e r o s k u l a č n í) k r u ž n i c í kuželosečky rozumíme kružnici, která má s danou kuželosečkou trojbodový (čtyřbodový) styk. Pojem styku je v potřebném rozsahu blíže vysvětlen v článku citovaném v poznámce ¹⁾.

kruhové válcové plochy volit kruhovou kuželovou plochu. I když je přitom možno omezit se jen na rotační kuželovou plochu, budou zřejmě příslušné výpočty poněkud složitější než v případě, kdy jsme se zajímali jen o hyperoskulační kružnice elipsy. Samotné konstrukce zůstávají ovšem stejně jednoduché.

Základem dalších úvah bude věta, která se podrobně dokazuje ve středoškolských učebnicích:

Řez rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová, je kuželosečka.

O druhu průsečné kuželosečky rozhoduje vzájemná poloha vrcholové roviny, která je rovnoběžná s rovinou řezu a kuželové plochy (obr. 1; průmětna prochází osou plochy a je kolmá k rovině řezu σ).



Obr. 1.

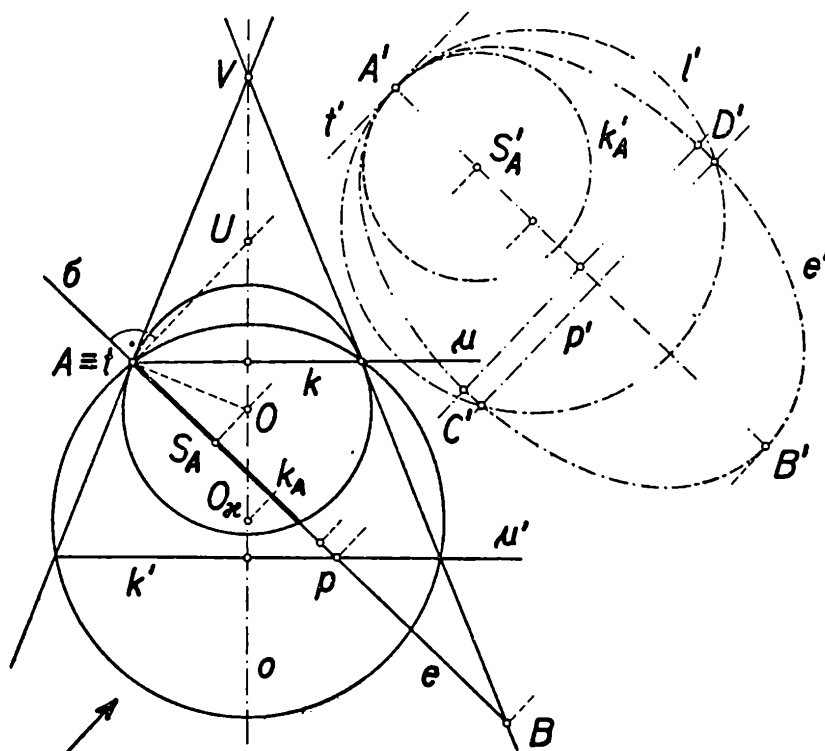
Má-li vrcholová rovina $\sigma' \parallel \sigma$ s rotační kuželovou plochou společný jen vrchol V , řezem je elipsa nebo kružnice (obr. 1a); má-li společnou právě jednu přímku (tj. je-li σ' tečnou rovinou), řezem je parabola (obr. 1b); má-li společné dvě různé přímky, řezem je hyperbola (obr. 1c).

Kružnice vznikne jenom v případě, kdy rovina řezu σ je kolmá na osu plochy. Je-li řezem elipsa (obr. 1a) nebo hyperbola (obr. 1c), pak $AB = 2a$ je hlavní osa a $A'B = 2e$ (e excentricita); je-li řezem parabola (obr. 1b), je $AF = p$ (parametr).

Nechť je dán řez rotační kuželové plochy λ rovinou σ , která není vrcholová; hledejme hyperoskulační kružnici ve vrcholu A , který leží ve společné rovině souměrnosti kuželové plochy a roviny řezu. V obr. 2 řezem je elipsa e ; průmětna prochází osou plochy a je kolmá k rovině řezu σ .

Povrchovou kružnicí k plochy, která prochází bodem A , proložme libovolnou kulovou plochu κ o středu $O_\kappa (\neq U)$. Plocha κ protíná rovinu řezu σ v kružnici l . Společné body elipsy řezu e a kružnice l určíme z podmínky, že e leží na kuželové ploše λ a l na kulové ploše κ . Jejich společné body tedy nutně leží na průniku obou ploch λ a κ .

Protože střed O_κ kulové plochy κ leží na ose o kuželové plochy λ , obě plochy se protínají jednak v kružnici k , jednak v další kružnici k' ³⁾. Rovina μ kružnice k protíná rovinu řezu σ v tečně t elipsy e ve vrcholu A ; kružnice l se tedy v něm dotýká elipsy e . Rovina μ' kružnice k' ⁴⁾ protíná rovinu řezu σ v přímce p ; na ní leží všechny další společné body elipsy e a kružnice l (v obr. 2 je čerchovaně vyznačen průmět ve směru kolmém na rovinu řezu σ , sklopený do nárysny).



Obr. 2.

Je zřejmé, že nutná a postačující podmínka pro to, aby elipsa e a kružnice l měly společný právě jen bod A , je, aby bylo $p \equiv t$. K tomu je nutné a stačí, aby kulová plocha κ se dotýkala kuželové plochy podél kružnice k . V tomto případě - a jen v tomto případě - je $\mu \equiv \mu'$ a tedy $k \equiv k'$.

Týž výsledek bychom našli také v případě parabolického a hyperbolického řezu. Tím jsme tedy dokázali větu:

Nechť je dán řez rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová. *Hyperoskulační kružnice*

³⁾ Výjimku činí kulová plocha, která prochází vrcholem V ; v tomto případě místo kružnice k' dostáváme jen bod V .

⁴⁾ Jestliže se k' redukuje na bod V , pak za rovinu μ' vezmeme rovinu, která prochází vrcholem V a je kolmá k ose o kuželové plochy.

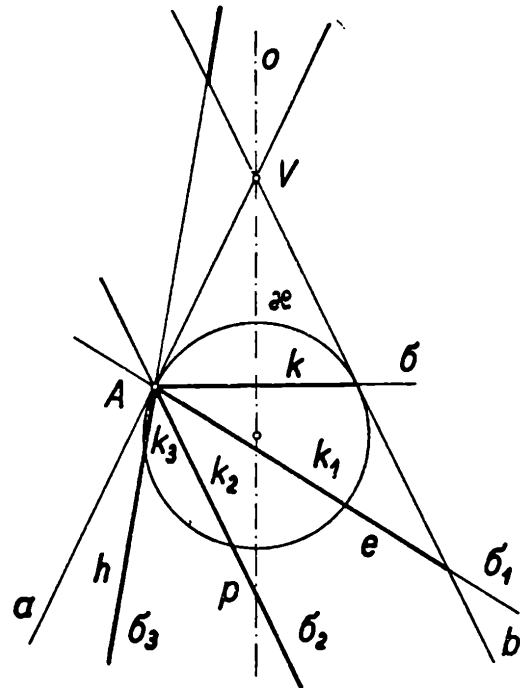
v jeho vrcholu⁵⁾ je řezem téže roviny s kulovou plochou, která se dotýká kuželové plochy podél kružnice, jež prochází daným vrcholem.

V obr. 3 jsou zobrazeny všechny tři případy řezu rotační kuželové plochy, jejíž osa o leží v průmětně; roviny řezu jsou k ní kolmé. Rovina σ_1 (σ_2 , σ_3) protíná plochu v elipse e (parabole p , hyperbole h); přitom k_1 (k_2 , k_3) je hyperoskulační kružnice příslušné kuželosečky ve vrcholu A .

Prostorové konstrukce hyperoskulačních kružnic rovinných řezů rotační kuželové plochy uijeme k určení velikosti poloměru hyperoskulačních kružnic postupně pro jednotlivé druhy kuželoseček.

1. Eliptický řez

Průmětny zvolme tak, aby průsečná elipsa ležela v půdorysně a aby osa rotační kuželové plochy byla rovnoběžná s nárysnou (obr. 4). Podle dokázané věty kulová plocha o středu O , jež se dotýká rotační kuželové plochy podél kružnice k ($AO \perp AV$), protíná půdorysnu v hyperoskulační kružnici k_A elipsy e ve vrcholu A . Jsou-li $a = AS = BS$, $b = CS = DS$ poloosy elipsy e , a je-li ϱ_A poloměr její hyperoskulační kružnice ve vrcholu A , pak musí platit $\varrho_A = \frac{b^2}{a}$ ⁶⁾



Obr. 3.

Přesvědčíme se analyticky, že skutečně $AS_A = \varrho_A$.

Nechť $\sphericalangle BAO = \alpha$, $\sphericalangle OAO' = \beta$. Pak pro úhly trojúhelníka $\triangle A_2B_2A^\circ$ (jehož strany jsou $A_2B_2 = 2a$, $A^\circ B_2 = 2e$, $A_2A^\circ = 2r$; r je poloměr dotykové kružnice k) postupně najdeme $\sphericalangle B_2A_2A^\circ = \alpha + \beta$, $\sphericalangle A_2A^\circ B_2 = R + \beta$, $\sphericalangle A^\circ B_2A_2 = R - \alpha - 2\beta$ ⁷⁾.

Užitím sinové věty pro $\triangle A_2B_2A^\circ$ dostáváme

$$a : e : r = \cos \beta : \sin (\alpha + \beta) : \cos (\alpha + 2\beta) \quad (1)$$

a tedy (jest $\alpha + 2\beta \neq R$)

$$a = \frac{r \cos \beta}{\cos (\alpha + 2\beta)}, \quad e = \frac{r \sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + 2\beta)}. \quad (2)$$

⁵⁾ V případě eliptického řezu je třeba doplnit takto: v jeho hlavním vrcholu.

⁶⁾ Viz např. článek citovaný v poznámce ¹⁾.

⁷⁾ Za předpokladu, že O není vnějším bodem $\triangle ABA^\circ$ (obr. 4). Případy, kdy O je vnějším bodem (jsou dva: buď $\alpha > \beta$, nebo $\alpha < \beta$), bylo by třeba diskutovat zvlášť. Protože metoda důkazu i konečný výsledek jsou tytéž jako v probíraném případě, nebudeme se oběma dalšími možnostmi zabývat.

Z podmínky

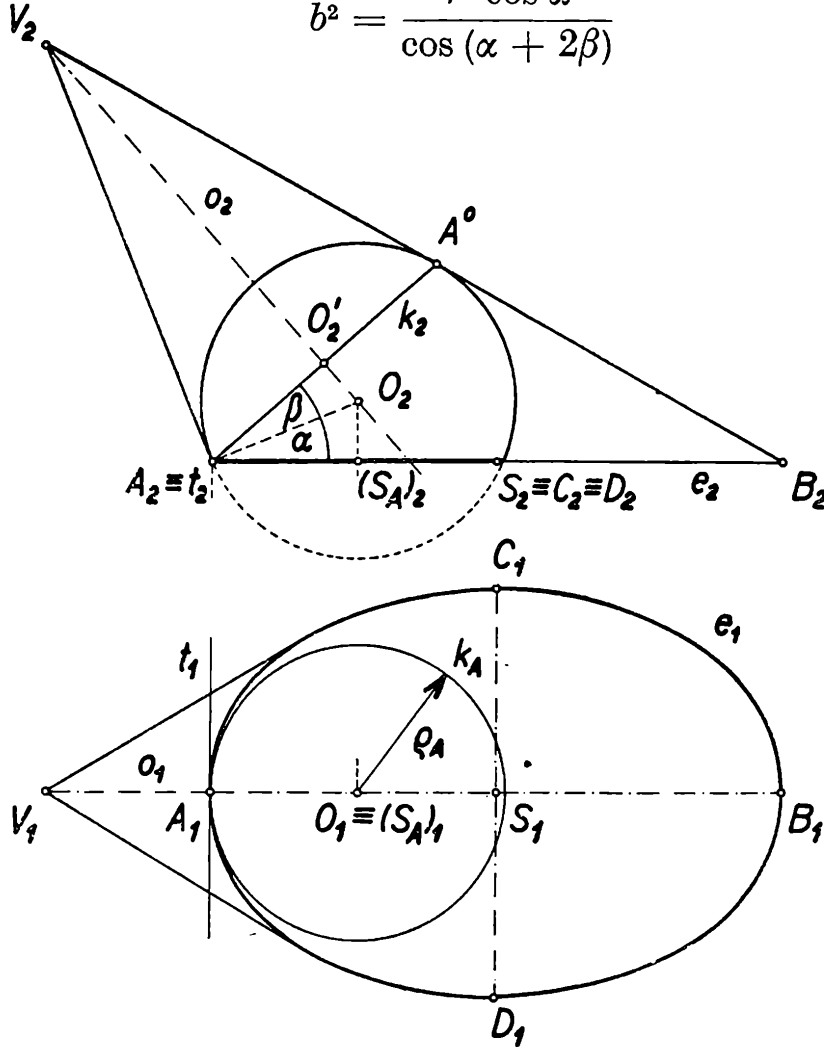
$$b^2 = a^2 - e^2 \quad (3)$$

a užitím identity

$$\cos^2 \beta - \sin^2 (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos (\alpha + 2\beta) \quad (4)$$

snadno najdeme

$$b^2 = \frac{r^2 \cos \alpha}{\cos (\alpha + 2\beta)} \quad (5)$$



Obr. 4.

Z relací (2) a (5) plyne pro poloměr ϱ_A hyperoskulační kružnice elipsy e v bodě A

$$\varrho_A = \frac{b^2}{a} = \frac{r \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (6)$$

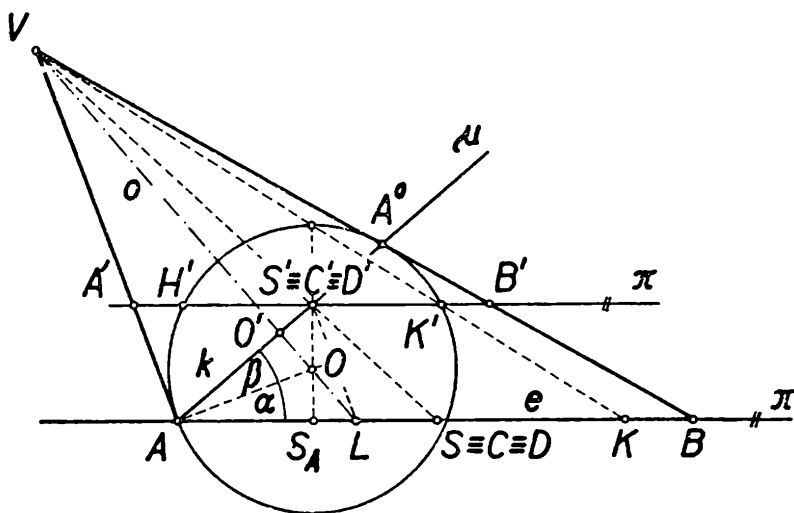
Avšak z trojúhelníků $\Delta A_2(S_A)_2O_2$ a $\Delta A_2O'_2O_2$ pro AS_A najdeme rovnici $A_2O_2 = \frac{A_2(S_A)_2}{\cos \alpha} = \frac{A_2O'_2}{\cos \beta}$ a tedy (vzhledem k tomu, že $A_2(S_A)_2 = AS_A$, $A_2O' = r$)

$$AS_A = \frac{r \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (7)$$

Rovnice (6) a (7) ukazují, že AS_A je skutečně poloměr ϱ_A hyperskulační kružnice elipsy v jejím vrcholu A .

K témuž výsledku můžeme dojít přímo metodou deskriptivní geometrie (obr. 5, kde je vyznačen jen nárys). Užijeme k tomu vlastnosti, že rovnoběžné roviny (které nejsou vrcholové) protínají danou kuželovou plochu v podobných kuželosečkách.

Střed S elipsy e promítneme z vrcholu V do roviny μ kružnice k do bodu S' . Rovina $\pi' \parallel \pi$, která prochází bodem S' , protíná kuželovou plochu v elipse e' podobné elipse e . Její hlavní osa je $2a' = A'B'$. Velikost b' vedlejší poloosy určíme z podmínky, že vedlejší vrcholy C', D' elipsy e' leží nutně na kružnici k a tedy také na kružnici, v níž rovina π' protíná kulovou plochu κ (proto S' leží na přímce OS_A). Je tedy $b' = S'K' = S'H'$. Bod K' promítneme z V na AB do bodu K . Pak je (jak plyne z podobnosti elips e' a e) $b = SK$.



Obr. 5.

V podstatě máme upravit vzorec (7). Dosadíme v něm za $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$. Z trojúhelníka $\Delta AS'L$, pro který AO je zřejmě výškou, plyne

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{AS'}{AL} = \frac{AS'}{a'}. \quad (8)$$

Rovnost $AL = a'$ vyplývá z toho, že čtyřúhelník $ALS'A'$ je rovnoběžník. Určíme dále AS' . Užijeme k tomu podobných trojúhelníků $\Delta AS'H' \sim \Delta S'K'A^\circ$; je

$$AS' : A^\circ S' = K'S' : H'S' = b'^2. \quad (9)$$

K nalezení rovnice (9) mohli jsme rovněž užít pravoúhlého trojúhelníka $\Delta AC'A^\circ$, pro který $S'C' = b'$ je výška a $AS', A^\circ S'$ úseky na přeponě. Zbývá určit ještě $A^\circ S'$. Z podobných trojúhelníků $\Delta A^\circ S'B' \sim \Delta A^\circ AB$ dostáváme

$$A^\circ S' : r = a' : a. \quad (10)$$

Z rovnic (7) až (10) najdeme vyloučením $A^\circ S'$ a AS' podmínku $AS_A = \frac{b'^2}{a'^2} a$, kterou vzhledem k relaci $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ můžeme hned přepsat na

$$AS_A = \frac{b^2}{a}, \quad (11)$$

z níž je porovnáním se (7) hned zřejmé, že AS_A je poloměr hyperoskulační kružnice elipsy ve vrcholu A .

(Pokračování)

Fyzikální zajímavosti

In ž. d r. B o h u s l a v B r a u n e r, Praha:

Dvě první atomové pumy

Velký rozvoj poznatků o vlastnostech atomového jádra, vedoucí nakonec k sestrojení atomové pumy, o kterém se v dalším zmiňujeme, navazuje již na znalost skladby atomů z jádra a elektronových obalů a dále na znalost složení jader z protonů a neutronů, tehdy známých teprve dva roky.

Jaký byl sled objevů vedoucí k tomuto vývoji?

Dne 15. ledna 1934 oznámili *Frederic Joliot a Irèn Curieová-Joliotová*, dcera Marie Curieové, slavné objevitelky radia, že se jim podařilo ozářením přirozeného neaktivního prvku paprsky alfa připravit prvek radioaktivní. Tento objev umělé radioaktivity vzbudil pozornost a vedl k dalším pokusům s ozařováním různých prvků. Tím nastala jedna z nejdramatičtějších situací ve vědě, protože výsledky, ke kterým se lidské poznání dostávalo, otevíralo dvě možné cesty: využít těchto výsledků pro dobro člověka, nebo vyvinout smrtící zbraně. V popředí vývoje stáli *Enrico Fermi* v Římě, *Otto Hahn* a *Lise Meitnerová* v Berlíně a teoretik *Niels Bohr* v Kodani.

Dne 10. dubna 1934 zjistil E. Fermi, že ozářením těžkých prvků periodické soustavy neutrony, vznikají nové radioaktivní prvky. Vyslovil domněnku, že tak lze vyrobit z uranu prvky, které by se měly zařadit v periodické tabulce za uran, tedy prvky, které lze nazvat *transurany*. Tak se přeneslo studium k těžkým prvkům a vyneslo poznatky vedoucí nakonec k atomové pumě.

Roku 1937 dokázali O. Hahn, L. Meitnerová a *F. Strassmann*, že mezi transurany jsou aspoň tři skupiny navazující na přirozeně radioaktivní prvky. V listopadu toho roku Hahn a Strassmann studovali domnělý izotop radia vzniklý ozářením radia pomalými neutrony. Chemicky byl však studovaný izotop bližší baryu. V referátu (6. ledna 1938) oba autoři napsali pro německý časopis „*Přírodní vědy*“: „Jako chemikové musíme doznat, že nová tělíska se nechovají jako radium, nýbrž spíše jako baryum. Jako jaderní fyzikové nemůžeme se k tomu rozhodnout, abychom zaujali kladné stanovisko k předpokladu, že se uranové jádro ostřelováním neutrony rozštěpí na jádra středně těžká.“

Zde se vlastně poprvé hlásí štěpná reakce těžkého jádra uranu. Toto její objevení bylo možno postřehnout jen proto, že Hahn byl chemikem a používal velmi citlivé metody indikátorů, kterou mohl produkty chemicky identifikovat.

Současně se politická situace vyvíjela k začátku druhé světové války. Další studium štěpných reakcí pokračuje již ve stínu válečných hrůz. V únoru 1939 zjistili L. Meitnerová ve Stockholmu a její synovec *O. Frisch* v Bohrově ústavu v Kodani, že energie uvolňovaná při reakci, vznikající ostřelováním uranu neutrony, je asi 40krát větší než energie uvolňovaná při rozpadu atomů ozařovaných alfa částicemi.

K stejnému výsledku docházejí manželé Joliotovi-Curieovi, a tak se ukazuje, že již při pokusech Hahna a Strassmanna se jednalo o reakci uranu, který se vlivem neutronů štěpí na středně těžká jádra, mezi která patří jimi pozorované baryum. Postupně se ukázalo, že mezi odštěpky jsou, kromě dříve uvedeného barya, konečné produkty ve formě jader lanthanu, stroncia, kryptonu a xenonu.

Zprávy O. Hahna a F. Strassmanna nebyly ničím jiným než prvním oznámením vědecky mimořádně zajímavého procesu přeměny prvků. Přitom se později ukázalo, že tato přeměna se děje za současného uvolňování velké energie. Byla to snad nešťastná shoda okolností, že k takovému objevu došlo právě za války.

Niels Bohr se prvý domníval, že nových štěpných reakcí se přednostně účastní izotop uranu s hmotou 235, co se později potvrdilo při nalezení způsobu izolace izotopů jak východními, tak západními badateli. Současně bylo potvrzeno, že transurany, které měl na mysli E. Fermi již roku 1934, skutečně vznikají ozařováním uranu neutrony. V roce 1940 bylo objeveno *neptunium*, následující v periodické soustavě hned za uranem a v roce 1941 *plutonium*, mající podobnou vlastnost s izotopem uranu hmoty 235.

Dnes je řada transuranů rozšířena a za plutoniem jsou známy prvky *americium*, *curium*, *berkelium*, *kalifornium*, *athenium*, *centurium*, *men-delevium*, *nobelium*. Transurany se často označují jako *aktinidy*.

Zpočátku jen vědecky zajímavé výsledky ukázaly perspektivu možného využití, neboť při štěpných reakcích uranu hmoty 235, nebo plutonia,

se současně uvolňují dva nebo tři neutrony, které umožňují reakci udržovat v chodu, a tak ji přeměnit na *reakci řetězovou*. K takovému názoru přicházejí již v roce 1939 *Joliot, Halban a Rus Kowarski*. Postup se musel napřed vyzkoušet, a tak Fermi uvádí v Americe již v roce 1941 do chodu první pokusný *reaktor*. V reaktoru je uvolňování atomové energie postupné. Teoreticky však vychází, že při použití čistého izotopu uranu 235 muselo by docházet k explozivnímu uvolnění energie, jemuž se nevyrovná žádná chemická výbušnina.

Ve stínu válečných hrůz v té době zachvacujících celý svět, šlo skutečně o záchranu lidství proti hrůzám nacismu. Teoretický příslib atomové exploze způsobuje, že ve Spojených státech vynakládají obrovské sumy na izolaci izotopu uranu 235 a později na výrobu transuranu plutonia, připravovaného z nejrozšířenějšího izotopu uranu hmoty 238.

Ukázalo se, že je potřebí jisté nejmenší množství štěpného izotopu, aby reakce začala a čas blíží se k dovršení dramatu vědeckého rozvoje poznatků vlastností štěpných izotopů, k realizaci atomové pumy.

Je smutnou shodou okolností, že popisované poznatky byly načasovány právě do období druhé světové války. Proto asi došlo k zneužití poznání a procesů, které by mohly být energetickou zásobárnou, používá se k nevybíravému ničení. Drama končí a vědci, kteří se zasloužili o vyvinutí pumy, jsou zdrceni při pohledu na výsledky své práce, jak se stalo O. Hahnovi, když se dověděl o pohromě v Hirošimě a Nagasaki.

Na poznání se musíme dívat s největší odpovědností. V budoucnu má proto právo na existenci jen ta společenská soustava, která se snaží o mírové soužití lidstva a propaguje používání vědeckého pokroku jen a jen pro zvýšení životní úrovně.

Tragédie vědeckých objevů vyúsťujících v atomové pumě je výstražným příkladem. V budoucnu již nikdy nesmí být zneužito poznání k ničení lidstva.

I n ž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN, SMS, Praha:

Jak vznikla elektronka

Je podivuhodné, jak celá řada vynikajících vynálezů a objevů vznikla pouhou náhodou. Tak italský lékař *Luigi Galvani* objevil nový zdroj elektrického napětí, když náhodou si povšimnul pohybů žabích nožiček, zavěšených měděným drátem na železném zábradlí. Německý fyzik *W. K. Roentgen* objevil nový, neznámý druh záření, když ho náhodně zaujalo

zelené záření, které se objevovalo při dopadu katodových paprsků na stěnu vysoce vyčerpané skleněné trubice.

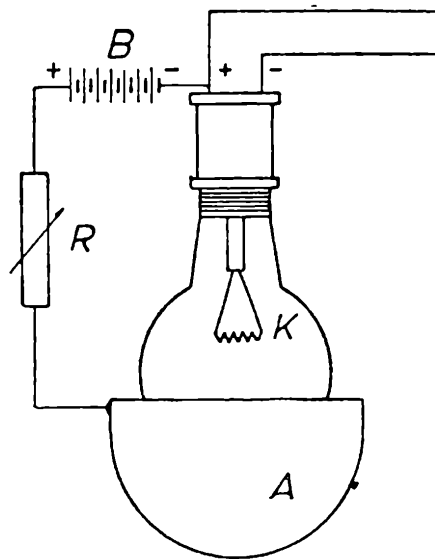
A stejně tak učinil velmi závažný objev v roce 1883 americký vynálezce *T. A. Edison* u svých uhlíkových žárovek, když jej napadlo vložit mezi ramena rozžhaveného podkovitého vlákna žárovky ještě jednu elektrodu. Mezi ní a kladným koncem vlákna naměřil slabý elektrický proud.

Tento zajímavý efekt se stane patrnějším v uspořádání, jaké je naznačeno v obrázku. Proti žhavenému vláknu *K* dobře evakuované žárovky je umístěna kovová destička *A*, spojená přes miliampérmetr *M* s kladným pólem baterie *B*. Okruhem protéká proud, jak dokazuje výchylka miliampérmetru, ačkoli je obvod mezi vláknem a kovovou destičkou přerušen. Připojí-li se destička k zápornému pólu baterie, proud neprotéká.

Tento zvláštní zjev nebyl dlouho uspokojivě rozřešen. Teprve později, kolem roku 1895, byla objevena schopnost rozžhaveného vlákna, vysílat do prostoru kolem sebe, z něhož byl vyčerpán vzduch, elektrony. Ve vlákně žárovky se pohybují volné elektrony různě rychle a různým směrem, některé z nich také kolmo k povrchu vlákna. Za bílého žáru vlákna dostoupí rychlost elektronů takové velikosti, že jejich energie překoná povrchové odpory a elektrony mohou vystupovat z vlákna. V žárovce, upravené podle obrázku, jsou vystupující elektrony přitahovány kovovou destičkou *A* (anodou), pokud má kladný potenciál.

Edisonův efekt studoval v letech 1889 až 1896 anglický fyzik *J. A. Fleming* a na základě poznatků, že takto vzniklý proud se může pohybovat pouze jedním směrem, sestrojil prvou elektronku se dvěma elektrodami, tak zvanou *diodu*, a použil ji k usměrňování střídavého proudu.

Největší zásluhu o vznik elektronek, které způsobily rozvoj radiotechniky, měl však *Lee de Forest*. V roce 1907 vytvořil z diody elektronku se třemi elektrodami, tak zvanou *triodu*, která se stala základem ke všem dnešním mnohem složitějším modifikacím. Byl to geniální a přitom prostý objev. *Lee de Forest* umístil mezi vlákno elektrony (katodu) a studenou anodu mřížku jako třetí elektrodu. Napětím k této mřížce připojeným dal se dokonale ovládat proud elektronů vystupujících z katody směrem k anodě. Teprve tím se dala elektronka později využít k nejrůznějším funkcím v radiotechnice a elektronice.



Obr. 1.

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

K prohlášení sovětské vlády o obnovení nukleárních pokusných výbuchů

Vláda Sovětského svazu oznámila dne 31. srpna t. r., že se rozhodla provést pokusné výbuchy jaderných zbraní.

Chtěl bych k tomu připomenout, že dohodou velmocí byly pokusné výbuchy zastaveny dnem 1. listopadu 1958, takže se veliké série výbuchů nekonaly bezmála 3 roky. Přes tuto dohodu provedla Francie loňského roku samostatně tři pokusné výbuchy na Sahaře, z nichž první byl poměrně silný a značně kontaminoval vzduch i u nás, tj. znečistil jej radioaktivním prachem. Další, slabší pokusný výbuch provedla Francie letos na jaře, opět bez ohledu na dohodu velmocí.

Vedoucí představitelé USA a jejich spojenci v poslední době ustavičně vyhrožují, že se chopí zbraní a rozpoutají válku třeba i v odpověď na uzavření mírové smlouvy s Německou demokratickou republikou. Vzhledem ke všem těmto znepokojivým skutečnostem pokládala sovětská vláda za svou povinnost učinit všechna nezbytná opatření, aby Sovětský svaz byl plně připraven zneškodnit každého agresora, jestliže se pokusí napadnout Sovětský svaz, popřípadě některý ze států našeho socialistického tábora.

Sovětští lidé mají v čerstvé paměti otřásající tragédii prvních měsíců Velké vlastenecké války, kdy Hitler měl převahu v bojové technice a pronikl hluboko do sovětského území. Sovětská vláda ve svém prohlášení o obnovení pokusných výbuchů jaderných zbraní proto připomíná, že v nynější době není možno něco podobného dovolit a že její rozhodnutí provést pokusné výbuchy je pouze jedním z celé řady závažných opatření, která byla provedena k zajištění bezpečnosti Sovětského svazu, a tudíž i celého tábora socialismu. Sovětský svaz má velikou převahu v bojové technice nad západními kapitalistickými státy a tuto převahu si prostě hodlá udržet i dále.

Proto také vláda naší Československé socialistické republiky učinila dne 2. září 1961 prohlášení, jímž plně podporuje závažné rozhodnutí Sovětského svazu. Všechnen náš pracující lid se staví za tato rozhodnutí, v našich závodech a továrnách jsou k této události uskutečňovány cenné pracovní závazky.

Sovětský svaz ve svém prohlášení také důrazně připomenul velmi škodlivé iluze o tom, že kdyby byla rozpoutána nová válka, obešla by se bez použití termonukleárních zbraní, tj. různých typů vodíkových pum. Zkušenosti z historie nás učí, že nikdy se nepodařilo udržet válečný požár v předem vymezených hranicích a že války mají své neúprosné a kruté zákony. Každý útočník si nakonec uvědomuje, že v případě porážky postihne jeho samotného osud, který připravoval pro svou oběť. Proto útočník nakonec vynaloží všechny prostředky, které má k vedení války k dispozici. Za nynějšího stavu vědy a bojové techniky prostě by každý ozbrojený konflikt - i kdyby byl zpočátku nepatrný - nevyhnutelně přerostl ve světovou raketovou a nukleární válku, neboť zcela určitě by byly do něho zavlečeny všechny nukleární mocnosti.

V prohlášení sovětské vlády se připomíná, že sovětské lidé v poslední válce zaplatili za obnovení míru cenu, kterou nelze k ničemu přirovnat. Oběti sovětských lidí byly nesmírné. Avšak všechno to, co lidé prožili v uplynulých válkách, bledne před hrůzami, které by lidstvu přineslo pouze několik výbuchů termonukleárních pum. Soudruh Chruščov v jednom ze svých loňských prohlášení připomenul, že atomová a vodíková válka by vyhubila stamilióny lidí a lidstvu by způsobila nesmírné útrapy.

Sovětský svaz se vyslovil první ze všech velmocí pro všeobecné a úplné odzbrojení a v několika posledních letech na konferenci v Ženevě marně usiloval o zastavení všech druhů pokusných výbuchů. Američané sami nedávno přiznali, že jednání o trvalém zastavení jaderných pokusů v Ženevě bylo jen jakousi hrou na schovávanou, prováděnou pro uklidnění veřejného mínění. Veřejné mínění i u nich je totiž pro zastavení pokusů.

Již 5. září roku 1961, pět dnů po sovětském prohlášení, americká vláda oznámila, že obnovuje podzemní nukleární pokusy. Takových pokusů připravili američtí vojáci celou sérii a je možno se oprávněně domnívat, že skrýváním pokusů pod zem chtějí utajit nějaký jejich zvláštní charakter. Pokus provedený v ovzduší zanechává totiž po sobě tzv. radioaktivní neboli nukleární spad, tj. radioaktivní prach rozmetaný do ovzduší. Radioaktivní spad se postupně rozšiřuje do ovzduší na celé zeměkouli. Z jeho složení je možno provádět některé domněnky o podstatě nukleární zbraně, která byla odpálena. Skrývání amerických pokusů pod zem zcela jistě nesleduje žádné cíle humanistické. Zcela právem Sovětský svaz označil tzv. neutronovou pumu, o níž horuje americký tisk, za zbraň ryze gangsterskou, neboť tato zbraň má zničit pouze vše živé a má zachovat nedotčené všechny hmotné statky lidí, všechny závody, továrny a všechn majetek. Je-li taková neutro nová puma vůbec možná, je-li ji možno sestrojít, o tom je možno diskutovat. Je těžké si představit vznik velikého proudu neutronů bez sou-

časného vzniku jiných paprsků, bez vzniku obrovského tepla a tlakové vlny. Můžeme se však oprávněně domnívat, že je-li možno takovou pumu sestavit, tedy by ji zcela jistě dovedli vyrobit i sovětští odborníci. Prohlášení sovětské vlády však ostře odsuzuje projekt neutronové pumy. Jedině agresori toužící po loupežích, okupování cizího území a zachvácení cizího majetku mohou mobilizovat úsilí vědců na vytvoření zbraně tohoto druhu. Chtějí zničit lidi a přivlastnit si plody práce obětí, které by usmrtili. Je to morální zvrhlost. Plány na vytvoření neutronové pumy plně odhalují podstatu soudobého imperialismu, který nenávidí člověka a nechce se už spokojit pouze s nestoudným vykořisťováním pracujících. V zájmu zisku je schopen uchýlit se k zločinům, které by svou hrůzností zastínily vzpomínky na plynové komory a mučírny hitlerovských katanů. To bylo právem zdůrazněno v prohlášení sovětské vlády.

President Spojených států amerických a britský ministerský předseda vydali dne 4. září 1961 prohlášení, v němž navrhovali schůzku představitelů velmocí, která by měla dohodnout trvalé zastavení výbuchů v ovzduší, neboť takovými výbuchy vzniká škodlivý radioaktivní prach. Přitom však jejich prohlášení naprosto nic neříká o tom, že by měly být zastaveny také výbuchy pod zemí a výbuchy jak říkáme - za hranicí ovzduší, tj. ve větších výškách než 50 km. I takové výbuchy jsou škodlivé, hlavně jejich důsledky, které by znamenaly další závody v nukleárním zbrojení.

V Sovětském svazu jsou velmi dobře známy škodlivé důsledky pokusů s termonukleárními zbraněmi pro živé organismy. Proto se v prohlášení sovětské vlády praví, že se podnikají všechny kroky k tomu, aby důsledky pokusů pro živé organismy byly omezeny na nejmenší míru. Sovětská vláda se rozhodla obnovit pokusné výbuchy opravdu jen s těžkým srdcem. Byla nucena tak učinit s velkým sebezapřením a politováním a teprve po všestranném prozkoumání této otázky, včetně úvah o škodlivých následcích pokusů pro živé organismy. Jakožto odborník v otázkách měření radioaktivity, a zejména v otázce radioaktivního odpadu, který vzniká následkem pokusných výbuchů nukleárních zbraní, pevně věřím, že jestliže Sovětský svaz provede pokusné výbuchy, vzroste radioaktivita našeho životního prostředí jen zcela nepatrně. Připomněl bych v té souvislosti, že loni dne 1. března po únorovém výbuchu první francouzské atomové pumy na Sahaře, se vyskytovala u nás i jinde poměrně veliká radioaktivita vzduchu, která vzbudila značnou pozornost. Z chystaných sovětských pokusů nemám však jako odborník vůbec žádné obavy. Sovětská vláda zásadně vždy plní to, co slíbila. A sovětští vědci se zcela jistě postarají o to, aby zvýšení radioaktivity bylo jen nepatrné a lidskému organismu dobře snesitelné.

Úlohy k řešení

Soutěž Rozhledů

(Pokračování)

Fyzika:

1. Motorový vlak, jedoucí přesně podle jízdního řádu, projíždí daný úsek trati předepsanou rychlostí $v_0 = 21 \text{ m.s}^{-1}$. Ale v místě A upozoruje řidič návěstí, které žádá snížení rychlosti na hodnotu $v_2 = 18 \text{ km.hod}^{-1}$. Začne ihned brzdít s konstantním zpožděním $a_1 = 0,25 \text{ m.s}^{-2}$, takže v místě B již má vlak žádanou sníženou rychlost v_2 , se kterou jede až do místa C , kde další návěstí povoluje zvýšit rychlost na původní hodnotu v_0 . Od místa C jede proto vlak rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a_3 = 0,2 \text{ m.s}^{-2}$, takže v místě D nabude opět předepsanou rychlost v_0 , se kterou jede dále. Vzdálenost $AD = s = 3612 \text{ m}$. Tření a odpor vzduchu zanedbáme.

a) Dokažte, že doba jízdy se tímto nepředvídaným snížením rychlosti prodlužuje oproti jízdnímu řádu o hodnotu

$$t_4 = \frac{2 a_1 s - (a_1 + a_3) v_0 (v_0 - v_2)}{2 a_1 a_3 v_0 v_2} (v_0 - v_2)$$

a určete tuto dobu opoždění číselně!

b) Označte úsek brzdění $AB = s_1$ a potřebnou dobu t_1 ; úsek snížené rychlosti označte $BC = s_2$ a potřebnou dobu t_2 ; Úsek zrychlování budiž označen $CD = s_3$ a doba k jeho projetí potřebná budiž t_3 . Doba, za kterou by byl vlak projel úsek $AD = s$ původní rychlostí v_0 , označte t_0 .

Nyní vyjádřete všechny hledané veličiny (tj. $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3, t_4, t_0$) o b e c n ý m i výrazy obsahujícími jen dané veličiny (totiž s, v_0, v_2, a_1, a_3) a potom je vypočtete numericky z daných číselných hodnot!

(Návod: pohyb rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpožděný).

Evžen Říman

2. Určete oběžnou dráhu T prvního Sputniku, jehož vzdálenost od povrchu Země byla v perigeu (přízemí) $h_1 = 227 \text{ km}$ a v apogeu (odzemí) $h_2 = 947 \text{ km}$. Předpokládejte rovníkový poloměr Země $R = 6378 \text{ km}$.

Řešte dvěma způsoby:

a) Pomocí gravitačního zákona: Síla, kterou se Sputnik a Země přitahují, je stejně veliká jako odstředivá síla při kruhovém pohybu Sputniku. Dána hmota Země $m_0 = 6 \cdot 10^{24}$ kg a hodnota gravitační konstanty

$$\kappa = \frac{20}{3} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2.$$

b) Pomocí třetího Keplerova zákona, víte-li, že oběžná doba Měsíce je $T_1 = 27\frac{1}{3}$ dne $= 2,36 \cdot 10^6$ s a jeho střední vzdálenost od středu Země je $r_1 = 384\,000$ km.

(V obou případech řešte pro kruhový pohyb Sputniku, při čemž za poloměr kladete aritmetický průměr hodnot h_1 a h_2 .)

Evžen Říman

3. Největší dalekohled světa má ohniskovou dálku $f_1 = 16,7$ m.

a) Určete jeho zvětšení Z , použije-li se jako okuláru spojná čočka, která dá pro dálku zřetelného vidění ($l = 25$ cm) zvětšení $Z_2 = 32$.

b) Do jaké vzdálenosti h by bylo lze pozorovat odlet Sputniku I (odstartoval 4. 10. 1957), který měl tvar koule a průměru $2r = 58,3$ cm, aby se jeho obraz jevil v tomto dalekohledu stejně veliký, jako se jeví Měsíc prostému oku, tj. v zorném úhlu $\alpha = 31'$?

(Návod: Zvětšení lupy $Z = \frac{l}{f}$; zvětšení dalekohledu se rovná poměru ohniskových dálek objektivu a okuláru. Pro malé úhly platí $\text{tg} \alpha \approx \text{arc} \alpha$.)

Evžen Říman

Řešení úloh z minulého ročníku

(Pokračování)

8. Daný rovnostranný trojúhelník ABC rozdělte úsečkou MN na dvě části obsahem si rovné: na rovnostranný trojúhelník MNC a rovnoramenný lichoběžník $ABNM$. Která z těchto dvou částí má větší obvod?

(Došlo 18 řešení.)

Jiří Sedláček

Řešil Jindřich Šilhán, 11. B, JSŠ, Svitavy:

Ř e š e n í. Je zřejmé, že obsah trojúhelníka ABC je dvojnásobkem obsahu trojúhelníka MNC .

Položíme-li $AB = a$, $MN = b$, platí

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Odtud

$$b = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obvod trojúhelníka MNC je potom

$$o_1 = a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

a obvod lichoběžníka

$$o_2 = 3a - 2b + b = a \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = a \cdot \frac{6 - \sqrt{2}}{2}$$

Zbývá tedy porovnat čísla $3\sqrt{2}$ a $6 - \sqrt{2}$. Nechceme-li pracně počítat odmocniny nebo použít tabulek, můžeme obě čísla porovnat také tak, že si první uvedeme na tvar $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{32} - \sqrt{2}$ a druhé na tvar $\sqrt{36} - \sqrt{2}$. Je tedy

$$3\sqrt{2} < 6 - \sqrt{2}$$

a větší obvod má lichoběžník.

9. Určete všechna celá čísla x, y , pro která platí

$$2(x^2 - x) + y^2 < 20.$$

Jiří Sedláček

(Došlo 15 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, 11. A, DSŠ Nymburk:

Ř e š e n í. Z dané nerovnosti plyne

$$2(x^2 - x) < 20 - y^2 \leq 20, \quad (1)$$

poněvadž $y^2 \geq 0$ pro každé reálné číslo y . Mohou tedy dané nerovnosti vyhovovat jen ta celá čísla x , která splňují nerovnost

$$2(x^2 - x) < 20$$

čili

$$x^2 - x - 10 < 0 \quad (2)$$

Nerovnost (2) lze psát ve tvaru

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{41}}{2} \right) < 0,$$

a odtud plyne

$$\frac{1 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{41}}{2}.$$

Protože x je celé, lze uvažovat pouze

$$-2 \leq x \leq 3. \quad (3)$$

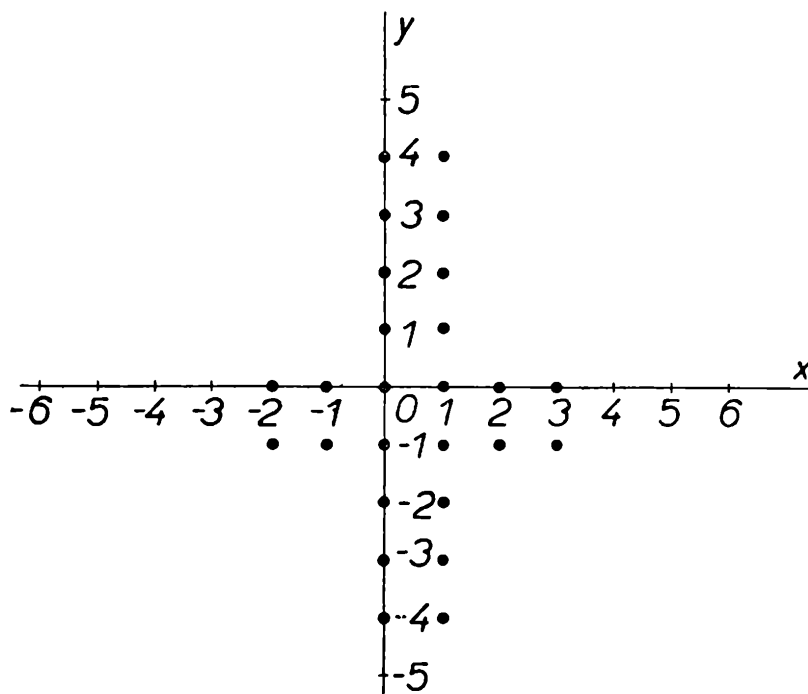
Nyní budeme uvažovat danou nerovnost $2(x^2 - x) + y^2 > 20$ pro každé celé číslo x z intervalu (3) odděleně.

Pro $x = -2$ máme $2(4 + 2) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 8$ a $|y| \leq 2$.
 Pro $x = -1$ máme $2(1 + 1) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 16$ a $|y| < 4$.
 Pro $x = 0$ máme $2(0 - 0) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 20$ a $|y| \leq 4$.
 Pro $x = 1$ máme $2(1 - 1) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 20$ a $|y| \leq 4$.
 Pro $x = 2$ máme $2(4 - 2) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 16$ a $|y| < 4$.
 Pro $x = 3$ máme $2(9 - 3) + y^2 < 20$. Odtud $y^2 < 8$ a $|y| \leq 2$.

Tímto postupem jsme našli tyto dvojice celých čísel:

$(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2);$
 $(-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3);$
 $(0, -4), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4);$
 $(1, -4), (1, -3), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4);$
 $(2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3);$
 $(3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2).$

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že všech těchto 42 dvojic vyhovuje dané nerovnosti.



Obr. 1.

Poznámka redakce. Řešitel Jan Žofka z Písku znázornil výsledek 9. úlohy přehledně takto: Zvolil v rovině dvě navzájem kolmé osy x, y a každou z výsledných 42 dvojic zobrazil jedním bodem tak, jak je to známé např. z partie o znázorňování funkcí. Narýsujeme-li toto zobrazení, dostáváme v rovině 42 bodů, kterým se někdy v matematice říká „mřížové“ (viz obr. 1). Z obrázku je patrné, že se všechny nalezené body „kupí“ kolem počátku; pokročilejší čtenář, který zná základy analytické geometrie si snadno uvědomí, že nalezené mřížové body vyplňují vnitřek elipsy s rovnicí $2(x^2 - x) + y^2 = 20$ (tato elipsa není v našem obrázku narýsována).

(Pokračování)

Matematická olympiáda

Přípravné úlohy

(Pokračování)

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a na ní bod A ; ve vzdálenosti d od bodu A je vedena sečna p kružnice k , při čemž je $p \perp SA$.

Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na přímce p a vrchol D na kružnici k .

Proveďte diskusi úlohy vzhledem k číslům r, d . (Pokyn. Uvažujte otočení o středu A .)

6. Do rotačního kužele je vepsána krychle, jejíž jedna stěna leží v rovině podstavy kužele a zbývající 4 vrcholy leží na jeho plášti. Délka hrany krychle je rovna třetině výšky kužele.

Vypočtěte velikost úhlu, který svírá osa kužele se stranou kužele.

3. Kategorie C

1. Do kruhové úseče o poloměru r a středovém úhlu 120° jsme vepsali kružnici tak, že se tětivy omezující úseč dotýká právě v jejím středu.

Dokažte, že délka této kružnice je rovna $\frac{3}{4}$ délky oblouku, který omezuje danou úseč.

2. Narýsujte trojúhelník SMN , kde $SM = 9$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 10$ cm.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ o středu S , aby platilo:

(1) Úhel $\sphericalangle DAB$ kosočtverec má velikost $67\frac{1}{2}^\circ$

(2) Přímka AB prochází bodem M .

(3) Přímka CD prochází bodem N .

Dokažte, že úloha má dvě řešení.

(Pokyn. Užijte souměrnosti o středu S .)

3. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{b-z}{x} = \frac{b}{c}, \quad \frac{c-x}{y} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a-y}{z} = \frac{a}{b},$$

kde x, y, z jsou neznámé a a, b, c jsou daná čísla.

Rozhodněte o řešitelnosti soustavy.

4. Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{1}{2} (|x + 1| - |x - 1|)$$

(Pokyn. Rozeznávejte možnosti: $x \leq -1$; $-1 \leq x \leq 1$; $x \geq 1$.)

5. Je-li p celé číslo, potom je číslo $p^4 - p^2 - 24$ dělitelné číslem 12; dokažte.

6. Je dána kružnice k a na ní dva různé body A, B . Uvažujme trojúhelník ABX , kde X je bod kružnice k . Na prodloužení úsečky AX sestrojme bod Y tak, aby platilo $XY = BX$.

Vyšetřte geometrické místo bodů Y , když bod X probíhá kružnici k (s výjimkou bodů A, B).

4. Kategorie D

1. Národní podnik měl zvýšit výrobu o 40 %. Vhodnou organizací práce se mu podařilo zvýšit výrobu o 50 %.

Na kolik procent tím splnil plán?

2. Udejte všechny dělitele (tj. přirozená čísla) čísla 270. Uvedte postup, kterým jste úlohu řešili.

3. Narýsujte dvě různoběžky p, q o průsečíku M tak, aby svíraly úhel 60° . Na přímce p zvolte bod P tak, aby $MP = 7,4$ cm.

Kolem bodu P opište kružnici k takovou, aby na přímce q vytínala tětivu délky 7,2 cm.

Rozhodněte, zda bod M padne na kružnici k nebo leží vně nebo uvnitř kružnice k . Odůvodněte.

4. Je dán výraz

$$V = \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

a) Výraz V zjednodušte a udejte, pro která čísla a, b nemá smysl.

b) Vypočtete všechny dvojice přirozených čísel a, b , pro která je $V = 10$.

5. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ o větší základně $AB = 8,3$ cm, výšce $v = 3,5$ cm, a to takový, že z obou bodů C, D je úsečka AB vidět pod pravými úhly.

6. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby platilo:
 $AB = 4,9$ cm, $AC = 7$ cm, výška příslušná ke straně AB je $v_c = 5$ cm.
 Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky v_c vedené ke straně AB leží uvnitř této strany či nikoli. (Třeba rozlišovat dvě možnosti: úhel $\sphericalangle CAB$ je ostrý nebo tupý.)

II. Soutěžní úlohy MO

1. Kategorie A

1. Jsou dány dvě kolmé roviny ϱ_1, ϱ_2 o průsečnici O_1, O_2 . V rovině ϱ_1 je sestrojena polokružnice k_1 se středem C_1 a krajním bodem O_2 . V rovině ϱ_2 je sestrojena polokružnice k_2 se středem O_2 a krajním bodem O_1 .

Po polokružnici k_1 se pohybuje bod X_1 a po polokružnici k_2 se pohybuje bod X_2 tak, že pro vzdálenosti platí vztah $O_2 X_1 = O_1 X_2$.

Vyšetřte geometrické místo středů úseček $X_1 X_2$.

2. Jsou dány velikosti a, b sousedních stran rovnoběžníka a velikost ω úhlu sevřeného jeho úhlopříčkami.

Sestrojte tento rovnoběžník a stanovte podmínky řešitelnosti vzhledem k daným číslům a, b, ω .

3. Je dána funkce $y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1}$, kde p je reálný parametr. Dokažte, že tato funkce nabývá jen těch hodnot y , pro něž platí $|y| < \frac{1}{2}$.

Zvolte parametr p , tak aby funkce měla největší hodnotu $\frac{1}{4}$; v tomto případě vyšetřte její průběh a načrtněte její graf.

4. Jsou-li α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, potom platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4};$$

dokažte.

Najděte všechny trojúhelníky, pro které v předchozím vztahu platí rovnost.

5. Dvě místa A, B leží na témž zeměpisném poledníku p ; místo A má severní zeměpisnou šířku φ_1 a místo B má jižní zeměpisnou šířku φ_2 . Kosmická loď při přeletu nad poledníkem p byla z místa A pozorována na jižní straně ve výšce α stupňů nad obzorem; v témže okamžiku byla z mís-

ta B pozorována na severní straně ve výšce β stupňů nad obzorem. Jak daleko byla loď od povrchu Země?

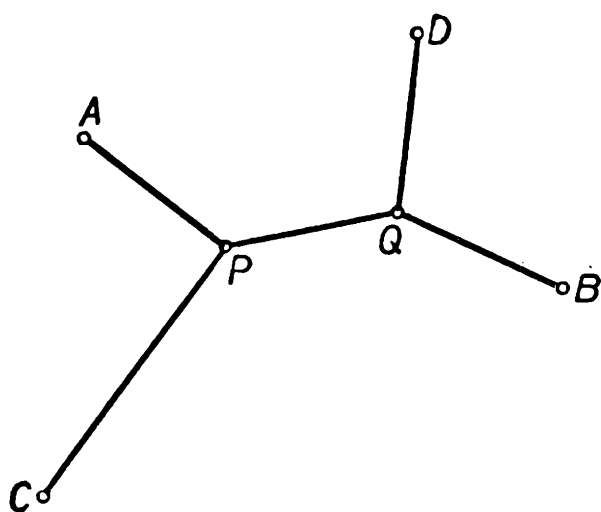
6. Náčrtek znázorňuje dvě trati pouliční dráhy $APQB$ a $CPQD$, které mají společný úsek PQ (viz obr. 1).

Kterýkoli vůz projede (nehledě na směr) každý z úseků AP , BQ , DQ , PQ za 20 minut, ale úsek CP za 40 minut; přitom nebereme zřetel na dobu strávenou čekáním na zastávkách a konečných stanicích.

Určité dva vozy vyjedou z konečných stanic A , C v 10. hod.

a) V kolik hodin se tyto vozy potkají poprvé mezi místy P , Q ?

b) V kolik hodin se tyto vozy potkají mezi místy P , Q v době od 12 do 14 hodin?



Obr. 1.

2. Kategorie B

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p , q a bod A ležící na p ; dále je dán bod M ležící uvnitř pásu s hranicemi p , q .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB takový, aby vrcholy B , C ležely po řadě na přímkách q , p a bod M na rameni BC .

Proveďte diskusi vzhledem k vzdálenosti v rovnoběžek p , q a vzdálenosti d bodů A , M .

2. Druhá mocnina přirozeného čísla n má v dekadickém zápise poslední dvojčíslí 56. Jaké je poslední dvojčíslí čísla n ? (Jsou 4 možnosti.)

3. Je dáno kladné číslo p . Množina všech bodů v rovině, jejichž pravouhlé souřadnice x , y vyhovují rovnici

$$p|x| + |x + y| = 4,$$

je obvod jistého rovnoběžníka; dokažte.

Potom zjistěte, pro které číslo p je tento rovnoběžník obdélník.

4. Buďte a , b , c , délky stran trojúhelníka a P jeho obsah.

Potom platí

$$a^2 + b^2 - c^2 = 4P\sqrt{3};$$

dokažte.

Rozhodněte, ve kterém případě nastává rovnost.

5. Je dána soustava rovnic

$$x + y + z = 1$$

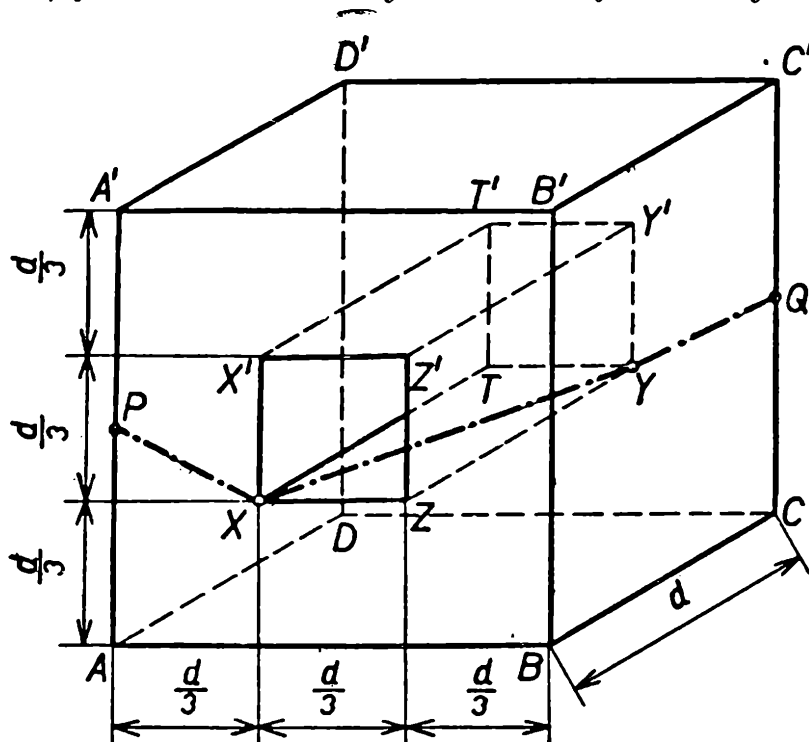
$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

$$xy = z^2$$

kde c je dané kladné číslo.

a) Udejte podmínky pro číslo c , aby soustava měla reálné řešení x, y, z .

b) Udejte všechna čísla c , pro něž alespoň jedna trojice čísel x, y, z (řešících soustavu) je složena z kladných a navzájem různých čísel.



Obr. 2.

6. Z krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky d je vyříznut podle obrázku pravidelný čtyřboký hranol $XZYT X'Z'Y'T'$; tím vznikne duté těleso K , jehož povrch se skládá z deseti rovinných obrázců. Označme po řadě P, Q středy úseček AA', CC' (obr. 2).

Vypočítejte délku lomené čáry $PKYQ$ a najděte kratší lomenou čáru spojující body P, Q a jdoucí po povrchu tělesa K .

(Pokračování)

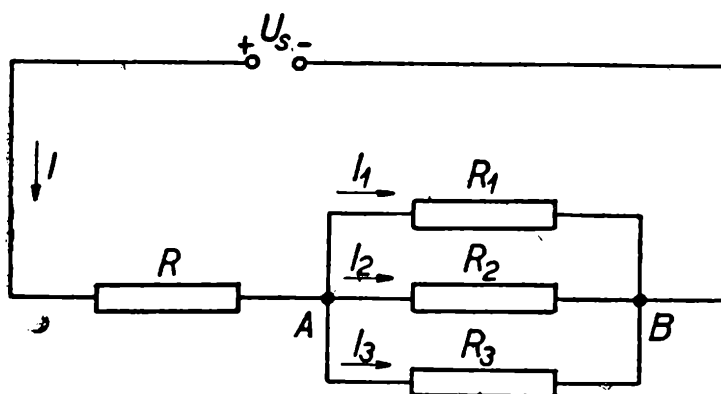
Fyzikální olympiáda

Prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků, Brno:

Zákony Kirchhoffovy a jejich důsledky

A

Při odvozování Kirchhoffových zákonů pro rozvětvené obvody vyjde-me z analogického případu u kapaliny. Prochází-li potrubím ustálený proud kapaliny, musí každým průřezem - i různě velkým - protéci ve stejných dobách stejné množství kapaliny. Proto také, když se potrubí rozvětví, musí být množství kapaliny proteklé všemi větvemi potrubí



Obr. 1.

totéž jako množství kapaliny proteklé v téže době nerozvětveným potrubím. Kdyby totiž protékalo průřezem bližším k začátku trvale větší množství než průřezem vzdálenějším, musela by se kapalina někde v potrubí hromadit; kdyby protékalo blíže k počátku menší množství a dále větší, musel by někde v potrubí vzniknout prázdný prostor.

Obdobně je tomu u elektrického proudu. Vodičem připojeným k elektrickému zdroji konstantního napětí musí procházet ve všech místech stejně velký proud. Jestliže se vodič rozvětvuje, pak bod, v němž se stýkají aspoň tři vodiče, nazýváme *uzel*. V uzlu se proudy spojují nebo rozdělují. Analogicky k rozvětvenému proudu kapaliny vyplývá pro elektrický proud I , že musí být v nerozvětvené části roven součtu proudů ve všech větvích (obr. 1); musí tedy platit

$$I = \sum I_k, \quad (1)$$

kde I je proud v části nerozvětvené a I_k proud jdoucí k -tou větví. Součet se vztahuje na všechny větve. Kdyby nebyl splněn tento vztah, tj. kdyby např. přitékající proud byl větší než součet proudů odtékajících, musel by se v uzlu hromadit kladný náboj, v opačném případě by se v něm hromadil náboj záporný. Tím by se měnil stále potenciál uzlů a nenastal by ustálený stav, což odporuje skutečnosti.

Označíme-li proudy vstupující do uzlu kladně, proudy z uzlu vystupující záporně, pak můžeme říci, že součet proudů v každém uzlu se zřetelkem ke směru proudu je roven nule; tedy

$$\sum I_j = 0, \quad (2)$$

kde I_j značí jednotlivé proudy vcházející do uzlu nebo z něj vycházející s příslušným znaménkem. Tento poznatek nazýváme *prvý zákon Kirchhoffův*.

Všimneme si nyní případu, když se proud rozdělí na tři větve (obr. 1). Označme odpory v jednotlivých větvích R_1 , R_2 a R_3 . Bod, ve kterém se vodič větví, má určitý potenciál V_1 , bod, ve kterém se vodiče spojují, má jiný potenciál V_2 . Pak musí pro napětí $U = V_1 - V_2$ mezi těmito body platit podle Ohmova zákona

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3, \quad (3)$$

tzp.

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \quad R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0, \quad R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (3')$$

Co vyjadřují tyto rovnice? Každý člen vyjadřuje napětí podle zákona Ohmova - nebo jak říkáme *Ohmovo napětí*. Tyto rovnice dostaneme též tak, že si vybereme uzavřený obvod, v prvním případě z první a druhé větve, v druhém případě z první a třetí větve a v třetím případě z druhé a třetí větve. Proběhneme jej libovolně zvoleným směrem - v prvním případě ve směru proudu I_1 , a tedy proti směru proudu I_2 , v druhém případě ve směru proudu I_1 , a tedy proti směru proudu I_3 a v třetím případě ve směru proudu I_2 , a tedy proti směru proudu I_3 . Pak součet Ohmových napětí s přihlédnutím ke směru proudu je roven nule, což vyjadřují rovnice (3'). Zvolíme-li směry oběhu opačně, dostaneme tytéž rovnice (3'). Jsou to však obvody, v nichž není elektrický zdroj.

Podle Ohmova zákona rovná se svorkové napětí zdroje součtu napětí na všech jednotlivých vodičích zařazených sériově do obvodu. Poněvadž napětí na všech paralelních větvích je stejné, lze psát, že součet napětí na vodiči o odporu R a napětí na kterékoli větvi (obr. 3) musí být roven svorkovému napětí U_s ; tedy

$$RI + R_1 I_1 = U_s, \quad RI + R_2 I_2 = U_s, \quad RI + R_3 I_3 = U_s \quad (4)$$

Proto dřívější poznatek pro obvod bez zdroje lze upravit (užitím poznatku o sčítání elektromotorických sil při spojení zdrojů za sebou) pro obvod se zdroji takto: V uzavřeném obvodu je součet Ohmových napětí na vnějších odporech, s přihlédnutím ke směru proudu, roven součtu svor-

kových napětí v obvodu zapjatých se zřetelem na polaritu zdroje. Tento poznatek nazýváme *druhý zákon Kirchhoffův*.

Přihlížíme-li i k vnitřním odporům zdrojů, počítáme místo se svorkovými napětími s elektromotorickými silami (ems) zdrojů a s Ohmovými napětími i na vnitřních odporech zdrojů.

Z obrázku 1 a rovnic (4) je vidět, že Ohmovo napětí počítáme kladně, když zvolený směr proudu bude souhlasit se směrem našeho oběhu v uzavřeném obvodu. V opačném případě počítáme Ohmovo napětí záporně. Z obrázku je dále vidět, že svorkové napětí (příp. ems) bereme kladně, když zdroj je ve větvi zapojen tak, že se od záporného pólu dostáváme vnitřním odporem zdroje ke kladnému pólu ve směru oběhu; v opačném případě bereme svorkové napětí záporně.

Když chceme řešit spojení složitějšího obvodu (např. určit v daném spojení velikosti elektrických proudů), vyznačíme si nejdříve směry proudů v jednotlivých větvích. Směry proudů můžeme zvolit libovolně v každé větvi. Vyjde-li řešením napsaných rovnic proud v některé větvi záporný, znamená to, že jde touto větví opačným směrem, než jsme zvolili. Pak můžeme napsat pro každý uzel první Kirchhoffův zákon. Tyto rovnice nebudou na sobě nezávislé (např. v obr. 1 máme dva uzly A, B a rovnice pro proudy jsou v nich totožné). Pak si zvolíme ve spojení určitý bod a zvolíme směr, kterým jej proběhneme. Napíšeme, že součet Ohmových napětí se rovná součtu zapjatých svorkových napětí (příp. ems, když přihlížíme i k vnitřním odporům). Pak rovnice řešíme.

B

Ze vztahu (3') plyne pro n větví

$$I_1 : I_2 : I_3 \quad : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : G_3 \quad G_n, \quad (5)$$

kde I_k je proud, R_k odpor, G_k vodivost k -té větve. Tento vztah říká, že se proudy v jednotlivých větvích rozdělí v nepřímém poměru k jejich odporům, čili v přímém poměru k jejich vodivostem.

Když chceme odpor n větví nahradit jediným odporem R , kterým by procházel stejný proud jako všemi větvemi dohromady, pak pro proudy $I_k = \frac{U}{R_k}$ ve větvích (podle vztahu (3)) a pro výsledný proud $I = \frac{U}{R}$ plyne ze vztahu (1)

$$\frac{U}{R} = \sum \frac{U}{R_k} \quad \text{čili} \quad UG = \sum UG_k ;$$

z toho

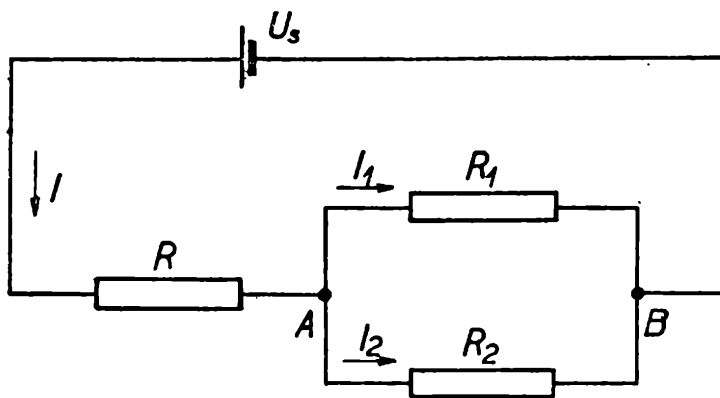
$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k} \quad \text{čili} \quad G = \sum G_k ,$$

kde G je výsledná vodivost. Tento výsledek znamená, že při spojení odporů vedle sebe se součet převrácených hodnot odporů rovná převrácené hodnotě výsledného odporu čili výsledná vodivost se rovná součtu vodivostí jednotlivých větví.

C

Nyní vyřešíme několik příkladů. Prvé dva příklady se zabývají výpočtem proudů, druhé dva výpočtem odporů a pátý odvozením vztahů pro elektromotorickou sílu měřenou kompenzační metodou.

Příklad 1. Vypočtete proudy I , I_1 , I_2 ve spojení vyznačeném na obr. 2. Přitom je dáno: $R = 1000 \, \Omega$, $R_1 = 50,0 \, \Omega$, $R_2 = 150,0 \, \Omega$ a $U_s = 2,00 \, \text{V}$.



Obr. 2.

Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel A

$$I = I_1 + I_2 \quad (6)$$

(pro uzel B plyne táž rovnice). Podle druhého Kirchhoffova zákona platí pro obvod tvořený odporem R_1 a odporem R_2

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 , \quad (7)$$

pro obvod tvořený odporem R a odporem R_1

$$RI + R_1 I_1 = U_s \quad (8)$$

Pro obvod tvořený odporem R a odporem R_2 dostáváme rovnici

$$RI + R_2 I_2 = U_s ,$$

která však již plyne z rovnic (7) a (8).

Ze (7) plyne

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1, \quad (9)$$

pak z (6)

$$I = I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} I_1 \quad (10)$$

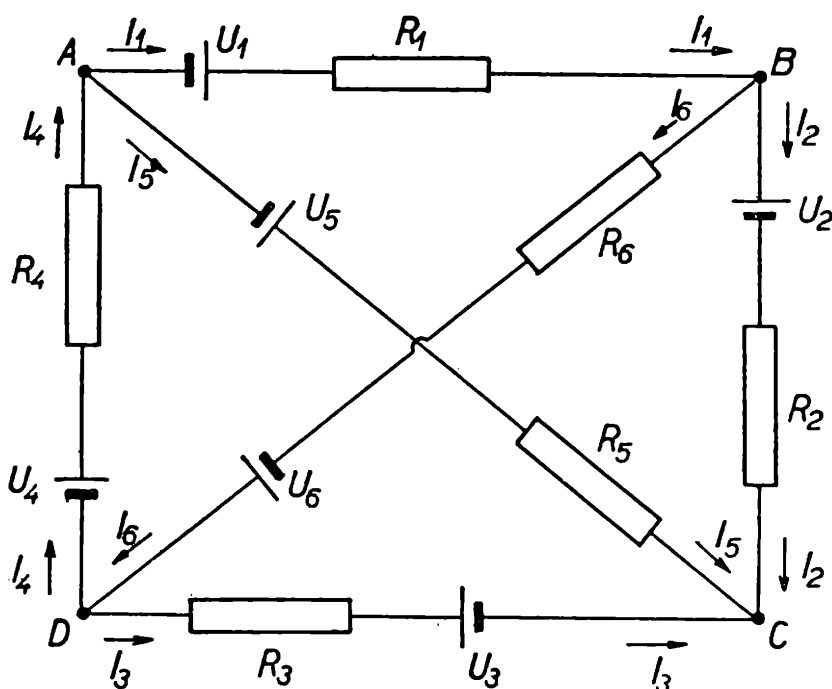
a dosazením do (8) dostáváme

$$\left(R \frac{R_1 + R_2}{R_2} + R_1 \right) I_1 = U_s,$$

$$I_1 = \frac{U_s R_2}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2};$$

z (9) plyne

$$I_2 = \frac{U_s R_1}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}$$



Obr. 3.

a z (10)

$$I = \frac{U_s (R_1 + R_2)}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}.$$

Po dosazení vychází

$$I_1 = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad I_2 = 0,48 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad I = 1,93 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Příklad 2. Vypočtete proudy v jednotlivých větvích sítě vyznačené na obr. 3. Je dáno:

$$R_1 = 1,00 \, \Omega, \quad R_2 = 2,00 \, \Omega, \quad R_3 = 3,00 \, \Omega, \quad R_4 = 4,00 \, \Omega,$$

$$R_5 = 5,00 \, \Omega, \quad R_6 = 6,00 \, \Omega, \quad U_1 = 4,00 \text{ V}, \quad U_2 = 8,00 \text{ V},$$

$$U_3 = 12,00 \text{ V}, \quad U_4 = 16,00 \text{ V}, \quad U_5 = 20,00 \text{ V}, \quad U_6 = 24,00 \text{ V}.$$

V každé větvi zvolíme libovolně směr proudu a potom v každém vybraném uzavřeném obvodu zvolíme libovolně směr oběhu. Ohmovo napě-

tí počítáme kladně, když směr souhlasí se zvoleným směrem proudu, záporně v opačném případě. Elektromotorickou sílu zdroje počítáme kladně směrem od záporného pólu vnitřním odporem ke kladnému pólu, záporně v opačném případě.

Z obrázku je vidět, že jde o určení šesti proudů I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 a I_6 ; proto potřebujeme šest na sobě nezávislých rovnic. Rovnice získáme vyjádřením I. zákona Kirchhoffova pro vybrané uzly a II. zákona Kirchhoffova pro vybrané obvody. Rovnice musí být na sobě nezávislé.

Pro uzly platí:

pro uzel A

$$-I_1 + I_4 - I_5 = 0,$$

pro uzel B

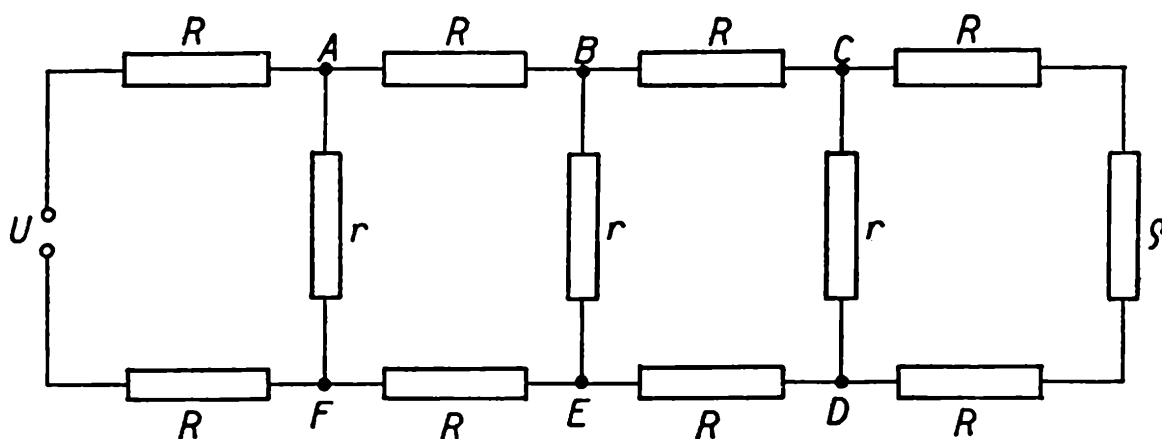
$$I_1 - I_2 - I_6 = 0$$

pro uzel C

$$I_2 + I_3 + I_5 = 0,$$

pro uzel D vychází již z dřívějších rovnic i přímo

$$-I_3 - I_4 + I_6 = 0$$



Obr. 4.

Z II. Kirchhoffova zákona plyne

pro obvod ABC

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_5 I_5 = U_1 - U_2 - U_5$$

pro obvod ABD

$$R_1 I_1 + R_6 I_6 + R_4 I_4 = U_1 + U_6 + U_4,$$

pro obvod BCD

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_6 I_6 = -U_2 + U_3 - U_6$$

Vztahy pro další obvody není třeba psát, poněvadž už máme 6 rovnic na sobě nezávislých; z nich lze určit všechny proudy I_k . Vychází

$$I_1 = 1,26 \text{ A}, I_2 = -2,26 \text{ A}, I_3 = -1,89 \text{ A}, I_4 = 5,41 \text{ A}, I_5 = 4,15 \text{ A}, \\ I_6 = 3,52 \text{ A}.$$

Příklad 3. Vypočtete výsledný odpor sítě, jejíž schéma je v obr. 4; přitom $R = 5,00 \Omega$, $r = 60,0 \Omega$ a $\rho = 20,0 \Omega$.

Nejdříve nahradíme odpory mezi body C a D jediným odporem R_1 (obr. 5); platí

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + \varrho},$$

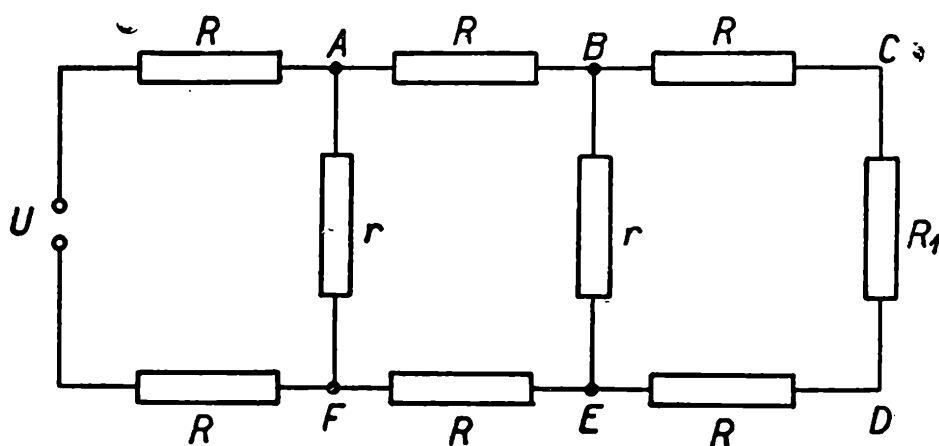
a tedy v našem případě

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{60} \Omega^{-1} + \frac{1}{30} \Omega^{-1},$$

$$R_1 = 20,0 \Omega.$$

Nyní nahradíme odpory mezi body B a E , které se skládají z větvi r a $2R + R_1$, odporem R_2 (schéma by bylo obdobné)

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + R_1}$$



Obr. 5.

Protože v našem případě $R_1 = \varrho$, je $R_2 = 20,0 \Omega$. Nyní nahradíme odpory mezi body A a F . Skládají se z větvi o odporu r a $2R + R_2$. Proto

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + R_2}.$$

Poněvadž v našem případě $R_2 = \varrho$, je opět $R_3 = 20,0 \Omega$. Je tedy ke zdroji připojen odpor

$$R_4 = 2R + R_3 = 10,0 \Omega + 20,0 \Omega = 30,0 \Omega.$$

Výsledný odpor sítě je $30,0 \Omega$.

Příklad 4. Určete odpor vodiče z homogenního materiálu tvaru obdélníka o stranách a , b , s úhlopříčkou AC , do něhož vstupuje proud v bodě A a vystupuje v bodě B (obr. 6).

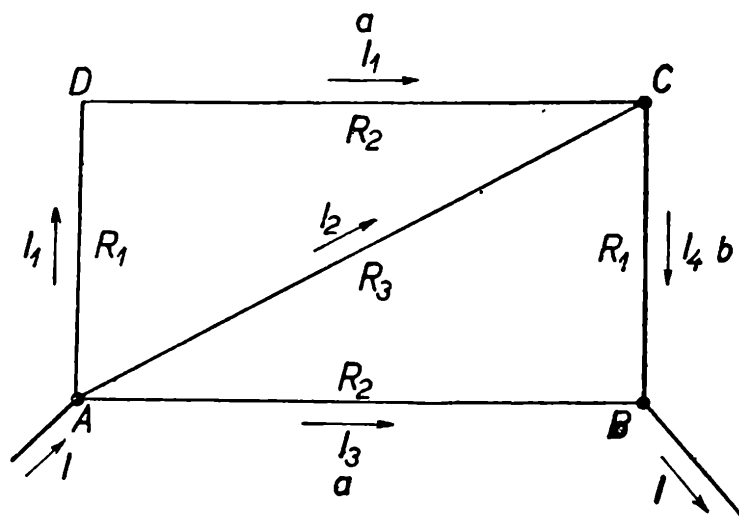
Označme nejdříve odpory a proudy. Protilehlé strany mají též odpor. Odpor stran AD a DC a odpor úhlopříčky nahradíme odporem R'

(obr. 7); pro něj platí

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3};$$

z toho

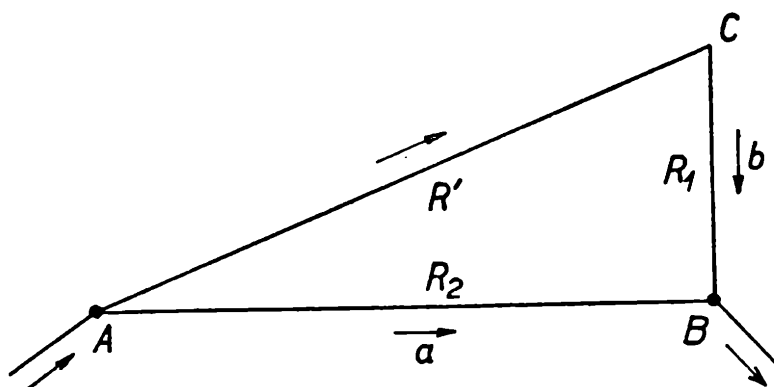
$$R' = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$



Obr. 6.

Pro výsledný odpor R pak platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R' + R_1} + \frac{1}{R_2};$$



Obr. 7.

z toho

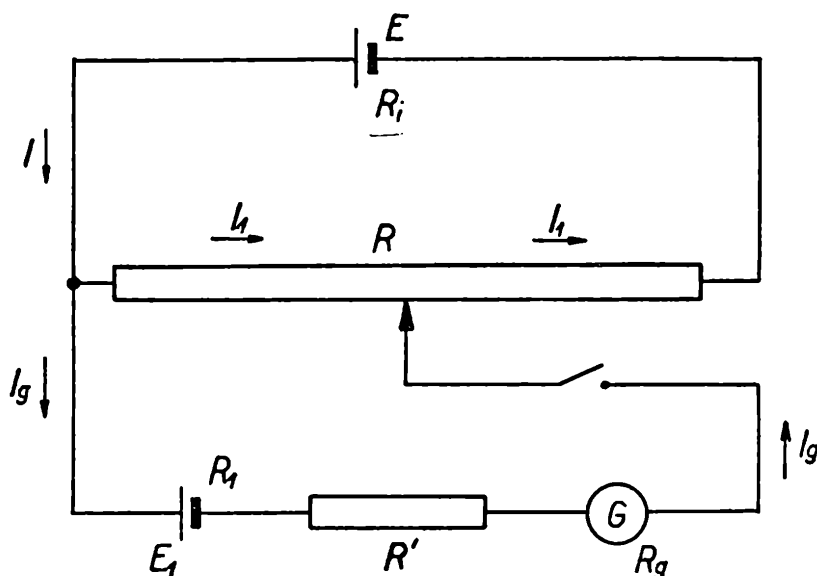
$$\begin{aligned} R &= \frac{R_2 (R' + R_1)}{R' + R_1 + R_2} = \frac{R_2 \left(\frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_1 \right)}{\frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_1 + R_2} = \\ &= \frac{R_2 (2R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1^2 + R_1 R_2)}{2R_1 R_3 + 2R_2 R_3 + R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2}. \end{aligned}$$

Poněvadž $R_1 = \varrho \frac{b}{S}$, $R_2 = \varrho \frac{a}{S}$, $R_3 = \varrho \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{S} = \varrho \frac{c}{S}$, kde ϱ je měrný odpor a S průřez vodiče, dostáváme pro výsledný odpor

$$R = \frac{\varrho}{S} \cdot \frac{a(b^2 + ab + ac + 2bc)}{a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc} = \frac{\varrho}{S} \cdot \frac{a(b^2 + ab + ac + 2bc)}{(a+b+2c)(a+b)}.$$

Příklad 5. Odvoďte vztah pro určení elektromotorické síly článku kompenzační metodou.

Elektromotorickou sílu článku měříme obvykle tak, že k jeho pólům prostě připojíme voltmetr. Každým voltmetrem (kromě elektrostatického voltmetru, o kterém zde neuvažujeme) však prochází vždy proud, třeba jen nepatrný. Proto se elektromotorická síla rozdělí na vnější odpor a vnitřní odpor a voltmetrem nenaměříme elektromotorickou sílu článku, nýbrž jen svorkové napětí. Když je vnitřní odpor článku malý vzhledem k odporu voltmetru, je rozdíl mezi naměřeným svorkovým



Obr. 8.

napětím a elektromotorickou silou nepatrný, a proto k němu v laboratorní praxi obvykle nepřihlížíme. Někdy je však třeba naměřit přesně elektromotorickou sílu. Máme k tomu několik metod. Popíšeme si tzv. *metodu kompenzační* neboli *vyrovnávací*.

Kompenzační metoda patří mezi tzv. *nulové metody*. Užijeme při ní pomocného článku o ems E (větší než je měřená ems E_1), normálního Westonova článku, odporu R a galvanometru G s předřazeným odporem R' (obr. 8). Myšlenka metody spočívá v tom, že pomocným napětím E vykompenzujeme napětí v obvodu měřeného napětí E_1 tak, že obvodem nebude procházet proud (proto nulová metoda).

Do obvodu pomocného článku o ems E zapojíme odpor R . Na něm lze najít dva body, které mají potenciální rozdíl rovný ems E_1 ; označme odpor mezi těmito body R_1 . Jestliže k těmto bodům připojíme para-

lehně měřený článek tak, že k místu vyššího potenciálu je připojen kladný pól článku, nemůže touto připojenou větví procházet proud. Označíme-li vnitřní odpor článku o ems E písmenem R_i , jde odporem R pokud není připojen paralelní obvod proud $I = \frac{E}{R + R_i}$. Pak na odporu R_1 je napětí

$$E_1 = \frac{E}{R + R_i} \cdot R_1. \quad (11)$$

Jestliže při tomto odporu R_1 neprochází obvodem s galvanometrem proud, pak je napětí na R_1 rovno ems měřeného článku. Podle vztahu (11) však nelze ještě určit ems E_1 , poněvadž neznáme E a R_i . Proto provedeme druhé měření, při němž místo článku o ems E_1 použijeme normálního Westonova článku, jehož ems při 20°C je 1,018 64 V. Mění-li se teplota, mění se jeho ems podle vztahu

$$E_n = [1,018\ 64 - 0,000\ 040\ 6 (t - 20) - 0,000\ 000\ 95 (t - 20)^2 + 0,000\ 000\ 01 (t - 20)^3] \text{ V}$$

Proto lze pro teplotu, při níž měříme, určit přesně ems Westonova článku.

Jestliže nyní místo měřeného článku o ems E_1 zapojíme Westonův článek o ems E_n , nebude galvanometrem procházet proud při odvětvení z jiného odporu R_2 . Proto bude platit

$$E_n = \frac{E}{R + R_i} \cdot R_2. \quad (12)$$

Vydělením rovnic (11) a (12) dostaneme

$$E_1 = E_n \frac{R_1}{R_2} \quad (13)$$

Podle vztahu (13) určíme pak ems E_1 jen z E_n a naměřených odporů R_1 a R_2 .

Aby před nalezením správného odporu R_1 , popř. R_2 , neprocházel galvanometrem silný proud, příp. se silný proud neodebíral z Westonova článku, předradí se galvanometru velký odpor R' , který se pak po přibližném vyrovnání vypne.

(Pokračování)

Změna adresy redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních:

Praha 2, Trojanova 13, tel. 244529.

Matematika

Stanislav Horák, ČVUT Praha:

Racionální čtyřstěny

Mnozí čtenáři jistě znají pythagorejské trojúhelníky. Jsou to pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly. Tak např. trojúhelníky, jejichž strany mají délky

$$3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17$$

jsou trojúhelníky pythagorské. Snadno se přesvědčíme, že obsah pythagorského trojúhelníku, poloměr opsané kružnice a poloměry vepsaných kružnic jsou vyjádřeny racionálními čísly.

Heronův trojúhelník je takový trojúhelník, jehož strany i obsah jsou vyjádřeny celými čísly (a nemyslí se tím zpravidla pravoúhlé trojúhelníky). Je to např. trojúhelník o délce stran 13, 14, 15. Heronovy trojúhelníky můžeme dostat skládáním pythagorejských trojúhelníků. To si ukážeme na příkladě.

Z pythagorejského trojúhelníka (3, 4, 5) dostaneme pythagorejský trojúhelník (9, 12, 15), znásobíme-li délky stran třemi. K němu přiložíme pythagorejský trojúhelník (5, 12, 13) tak, aby stejně dlouhé odvěsny splynuly a vrcholy úhlů se ztotožnily. Dostaneme tak trojúhelník

$$\begin{aligned} &\text{buď o stranách } 13, 14, 15, \\ &\text{nebo o stranách } 4, 13, 15. \end{aligned}$$

První trojúhelník můžeme nazývat *součtový* (kratší odvěsny se sečetly), druhý *rozdílový*.

V prostoru byla podobně vyslovena definice pro *racionální čtyřstěn*. Racionální čtyřstěn je ten, jehož délky hran, obsahy i objem všech stěn jsou vyjádřeny racionálními čísly. Takový čtyřstěn je např. (pod sebou jsou délky mimoběžných hran)

$$\begin{aligned} &4200, \quad 2793, \quad 2015, \\ &2260, \quad 2465, \quad 2583. \end{aligned}$$

Tyto hodnoty byly získány ze vzorců, které jsou velmi složité. Jednodušší čísla poskytuje šestice

$$\begin{array}{ccc} 333, & 2067, & 725 \\ 1732, & 644, & 2040 \end{array} .$$

V tomto čtyřstěnu jsou však dvě stěny pravoúhlé trojúhelníky o společné odvěsně.

A ještě se zmíníme o jedné skupině racionálních čtyřstěnů. Jsou to, ty, jejichž mimoběžné hrany mají tutéž délku, tj.

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'.$$

Stěny takového čtyřstěnu jsou pak vesměs shodné trojúhelníky. Je několik typů těchto čtyřstěnů. Uvedu zde hodně jednoduché vzorce pro délky stran:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 5 (q + 1) (q - 1) (q^2 + 3q + 1) \\ b &= (2q + 3) (4q + 1) (q^2 + 2q + 2) \\ c &= (q + 4) (3q + 2) (2q^2 + 2q + 1) \end{aligned}$$

přičemž q je dvojmoc libovolného racionálního čísla.

Upozorňuji však čtenáře, že uvedené vzorce neposkytují obecné řešení, tj. existují racionální čtyřstěny se stejně dlouhými mimoběžnými hranami, které z těchto vzorců nedostaneme.

S t a n i s l a v T r á v n í č e k, P. U., Olomouc:

Grafické znázorňování periodických funkcí v polární soustavě souřadnic

Ve škole jste se seznámili s pojmem funkce a se způsoby jejího určení. Funkci zpravidla vyjadřujeme rovnicí tvaru

$$y = f(x),$$

kde x je nezávisle proměnná, y závisle proměnná a f je označení pro naši funkci. Máme-li třeba rovnici

$$y = 2x + 1,$$

je f pravidlo, které každému číslu x přiřazuje jeho dvojnásobek zvětšený o 1. Funkce f daná rovnicí

$$y = \sin x$$

přiřazuje každému číslu x (velikosti úhlu) hodnotu jeho sinu.

Zvláštní třídu funkcí tvoří *funkce periodické*. Jsou to ty, k nimž existuje takové kladné číslo p , že platí základní rovnost

$$f(x) = f(x + p) = f(x - p)$$

pro každou hodnotu nezávisle proměnné. Každé číslo p , pro něž je splněna uvedená základní rovnost, se nazývá *perioda funkce* f . Základní vlastností periodických funkcí tedy je, že se jejich hodnota nezmění, zvětšíme-li nebo zmenšíme-li nezávisle proměnnou o periodu funkce.

Ze základní rovnosti plyne:

$$f(x) = f(x + np) = f(x - np),$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Každá funkce, která má periodu p , má tedy též periody $2p, 3p, 4p, \dots$, tj. má i periodu np , kde n je libovolné přirozené číslo.

Úloha. Dokažte matematickou indukcí předchozí tvrzení.

Nejdůležitější je nejmenší perioda, z níž ostatní dostaneme násobením přirozenými čísly.

Příklad 1. Ukážeme, že funkce g definovaná rovnicemi

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } kp < x \leq (2k + 1) \frac{p}{2} \\ 2 & \text{pro } (2k + 1) \frac{p}{2} < x \leq (k + 1)p, \end{cases}$$

kde k je libovolné celé číslo, je periodická s periodou p .

Řešení: Je-li

$$kp < x \leq (2k + 1) \frac{p}{2},$$

je

$$k'p < x + p \leq (2k' + 1) \frac{p}{2}$$

a

$$k''p < x - p \leq (2k'' + 1) \frac{p}{2},$$

kde $k' = k + 1$ a $k'' = k - 1$. Odtud pro x z intervalu $kp < x \leq (2k + 1) \frac{p}{2}$ platí

$$g(x) = g(x + p) = g(x - p) = 1.$$

Podobnou úvahu provedeme pro

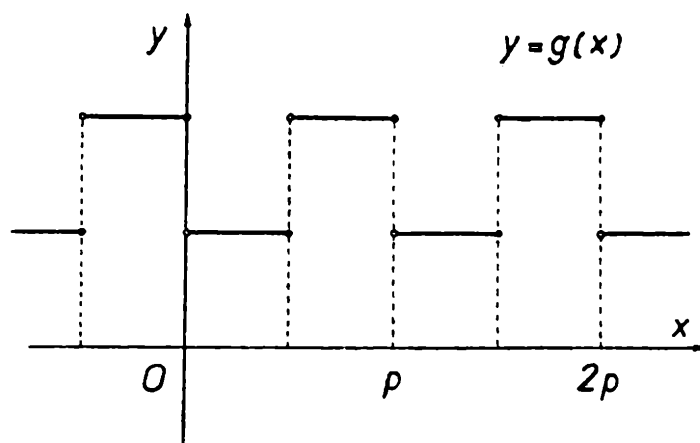
$$(2k + 1) \frac{p}{2} < x \leq (k + 1)p$$

a dostaneme

$$g(x) = g(x + p) = g(x - p) = 2$$

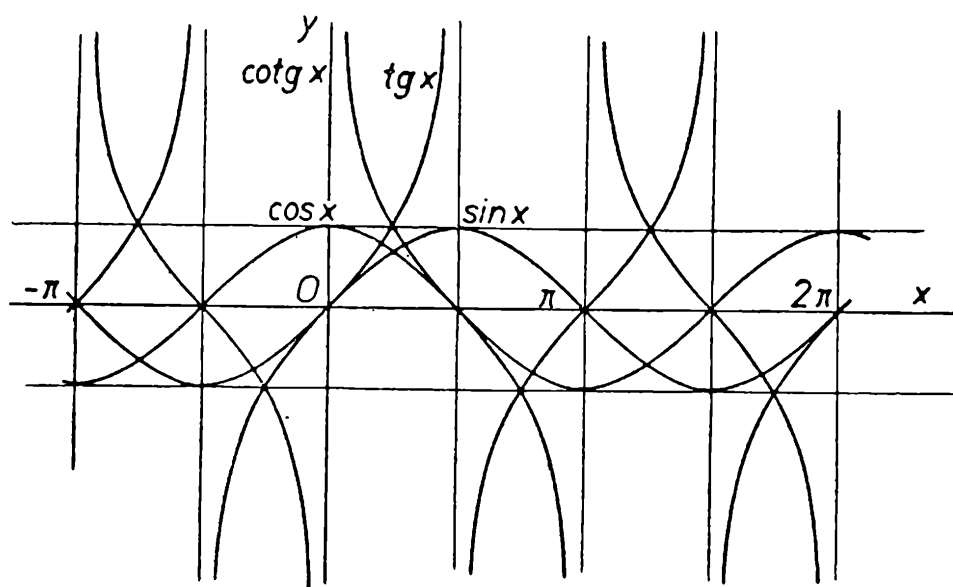
Základní rovnost tedy platí pro všechna x a g je periodická funkce s periodou p . Graf funkce g v pravouhlé soustavě souřadnic je na obr. 1.

Nejznámější periodické funkce jsou goniometrický sinus, kosinus, tangens a kotangens a další funkce z nich složené, jako např. $y = \sin 2x + 3 \cos x$ a podobně. Víme, že nejmenší perioda sinu a kosinu je 2π , tangenty a kotangenty π . Grafem goniometrických funkcí v pravoúhlé soustavě souřadnic jsou známé křivky sinusoida, kosinusoida, tangentoida a kotangentoida (obr. 2).



Obr. 1.

Není-li periodická funkce s periodou p definována pro číslo x_0 , pak není definována, jak plyne ze základní rovnosti, ani pro čísla $x_0 + kp$, kde k je libovolné celé číslo. Tak je tomu třeba u funkce tangens, která není definována pro $\frac{\pi}{2}$ a tedy ani pro $\frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$, a u funkce ko-



Obr. 2.

tangens, která není definována pro 0 a tedy ani pro $0 + k\pi$, tj. $k\pi$.

Základních rovností u periodických funkcí můžeme použít s výhodou k zjednodušení jejich grafického znázorňování. Ukážeme si, jak je možno

znázornit periodické funkce s periodou 2π v *polární soustavě souřadnic*.¹⁾

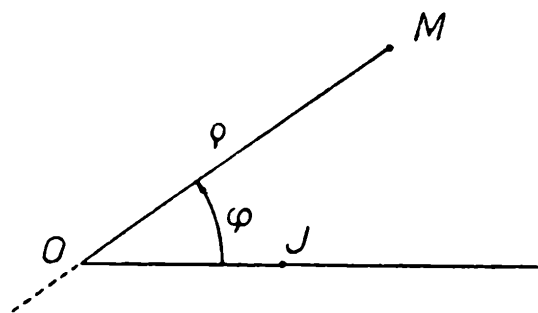
V rovině zvolíme bod O (tzv. pól) a polopřímku OJ , přičemž velikost úsečky OJ pokládáme za jednotku (obr. 3). Poloha libovolného bodu $M \neq O$ je nyní dána dvěma čísly: velikostí ρ úsečky OM a velikostí φ orientovaného úhlu JOM . Čísla ρ, φ jsou *polární souřadnice* bodu M . Bod M o souřadnicích ρ, φ zapisujeme $M(\rho; \varphi)$, nebo jen $(\rho; \varphi)$.

Rovnici funkce nyní formálně změníme: nezávisle proměnnou budeme značit φ a závisle proměnnou ρ , takže budeme psát

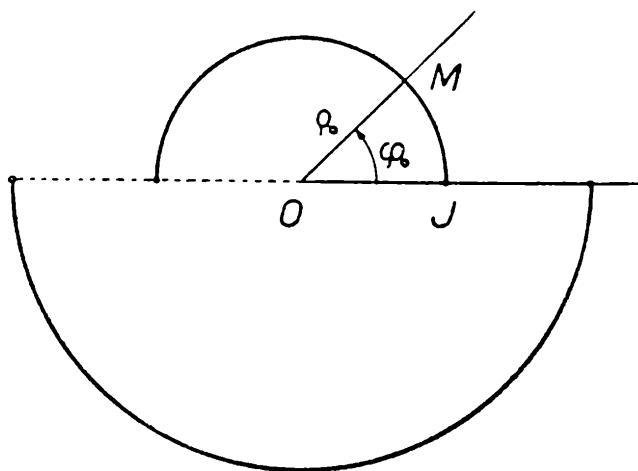
$$\rho = f(\varphi)$$

V polární soustavě souřadnic platí

$$M(\rho; \varphi) \equiv M'(\rho; \varphi + 2k\pi)$$



Obr. 3.



Obr. 4.

kde k je libovolné celé číslo a proto nejvhodnější k zobrazování v této soustavě jsou periodické funkce s periodou 2π (2π nemusí být pro danou funkci nejmenší perioda).

Příklad 2. Sestrojíme v polární soustavě souřadnic graf funkce g z příkladu 1, je-li její perioda $p = 2\pi$.

Řešení: Podle definice této funkce je

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \quad \text{pro } 2k\pi < \varphi \leq (2k+1)\pi, \\ \rho &= 2 \quad \text{pro } (2k+1)\pi < \varphi \leq 2(k+1)\pi \end{aligned}$$

kde k je libovolné celé číslo.

Jejím grafem (obr. 4) jsou dvě polokružnice: jedna má poloměr 1 (pro $2k\pi < \varphi \leq \pi + 2k\pi$) a druhá 2 (pro $\pi + 2k\pi < \varphi \leq 2\pi + 2k\pi$).

Sestrojený graf nám naopak dovoluje ke zcela libovolné hodnotě nezávisle proměnné φ určit graficky příslušnou hodnotu funkce.

Příklad 3. Ukážeme, že hodnota ρ_0 funkce g pro $\rho_0 = \frac{49}{4}\pi$ je rovna jedné.

¹⁾ Viz J. Šedivý, Polární souřadnicový systém v rovině. Rozhledy matematicko-fyzikální č. 2, str. 49.

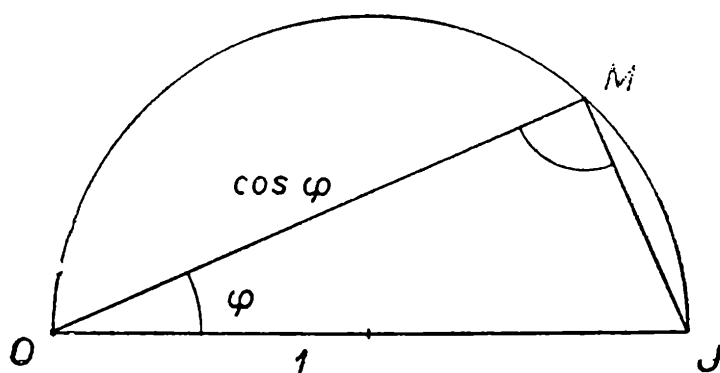
Ř e š e n í: V obr. 4 sestrojíme orientovaný úhel v základní poloze o velikosti φ_0 , vyšetříme průsečík M koncového ramene orientovaného úhlu s grafem funkce g a snadno nahlédneme, že velikost úsečky OM určuje hodnotu funkce; tedy $\rho_0 = 1$.

Nyní si všimneme grafů goniometrických funkcí v polární soustavě souřadnic.

Příklad 4. Najdeme graf funkce $\pi = \cos \varphi$.

Ř e š e n í: Víme, že pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ je $\cos \varphi$ roven velikosti odvěsny přilehlé k úhlu φ pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1 (obr. 5). Měníme-li nyní velikost úhlu φ od nuly do $\frac{\pi}{2}$, pak při pevné přeponě OJ probíhá bod M podle Thaletovy věty po polokružnici nad průměrem OJ , k níž nepatří body O, J . Pripustíme-li však $\varphi = 0$, pak máme $M \equiv J$.

Platí-li tedy $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, je množinou bodů M , pro něž $OM = \cos \varphi$, polokružnice s průměrem OJ bez bodu O .



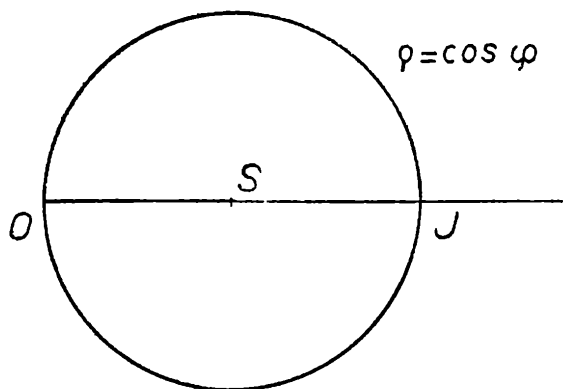
Obr. 5.

Sestrojme kružnici s průměrem OJ (obr. 6). Jak plyne z předchozích úvah, je grafem funkce $\rho = \cos \varphi$ pro $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ horní polokružnice bez bodu O ; vzhledem k tomu, že $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, je grafem téže funkce pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$, tj. též pro $\frac{3}{2}\pi < \varphi \leq 2\pi$, dolní polokružnice bez bodu O . Grafem funkce $\rho = \cos \varphi$ pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ je tedy kružnice s průměrem OJ bez bodu O .

Pro φ , pro něž je $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, je $\cos \varphi < 0$ a grafem dané funkce je táž kružnice. To již plyne z dříve uvedeného vztahu $M(\rho; \varphi) \equiv M'(-\rho; \varphi + \pi)$. Nanášíme tedy $\cos \varphi < 0$ na polopřímky opačné ke koncovým ramenům orientovaného úhlu v základní poloze a dostáváme skutečně tutéž kružnici.

Bod O má poněkud zvláštní postavení, protože při $\rho = 0$ nezáleží na hodnotě φ . Chceme-li tedy pojat pól do našeho grafu, musíme zvlášť stanovit, ke kterým hodnotám φ přísluší. U funkce $\rho = \cos \varphi$ je $\rho = 0$ pro $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, a proto se dohodneme, že grafem této funkce pro $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde k je libovolné celé číslo, je bod O a naopak bod O grafu přiřazuje jen těmto hodnotám φ .

Tak jsme dokázali, že grafem funkce $\rho = \cos \varphi$ pro $0 < \varphi \leq 2\pi$ je dvakrát počítaná kružnice o středu s polárními souřadnicemi $\frac{1}{2}, 0$ a o poloměru $\frac{1}{2}$.



Obr. 6.

Vzhledem k tomu, že funkce kosinus je periodická s periodou 2π , je jejím grafem pro $2k\pi < \varphi \leq 2(k+1)\pi$, kde k je libovolné celé číslo, táž dvakrát počítaná kružnice o středu $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ a poloměru $\frac{1}{2}$; stejný vý-

sledek dostaneme i pro $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$, kde φ_1 je nějaké konstantní číslo. Jestliže totiž polopřímka OM svírající s polopřímkou OJ úhel o velikosti φ_1 se otočí kolem pólu o 2π , proběhne bod M dvakrát danou kružnicí nezávisle na velikosti úhlu φ_1 .

(Pokračování)

Jaroslav Šedivý, VŠP, Praha:

Polární souřadnicový systém v rovině

(Dokončení)

Sestrojování grafů funkcí v polárním s. s. budou věnovány další články. V druhé části tohoto úvodního článku se však zabývejme vztahem mezi kartézskými a polárními souřadnicemi bodu. Odvodíme vzorce pro výpočet jedněch z uvedených souřadnic, jsou-li dány druhé. Na základě nalezených vztahů budeme moci najít funkce proměnné φ , jejichž grafy v polárním s. s. jsou běžně známé křivky.

Zvolme kartézský s. s. v rovině tak, aby základní polopřímka OJ polárního s. s. byla kladnou poloosou x kartézského s. s. Takové dva souřadné systémy nazveme sdružené.

Nechť má bod M v polárním s. s. souřadnice ϱ , φ ; označme jeho souřadnice ve sdruženém kartézském s. s. x , y . Platí

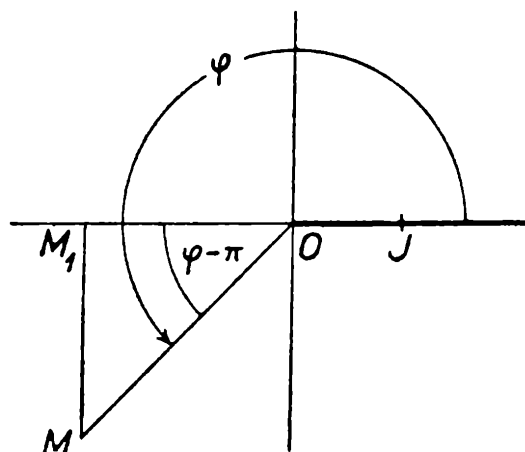
$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \varphi, \\y &= \varrho \sin \varphi.\end{aligned}\quad (1)$$

Naznačíme základní myšlenky důkazu, čtenář si sám podle daného návodu důkaz doplní. Pro $\varrho = 0$ a libovolné φ dostáváme $x = 0$, $y = 0$, což znamená, že pól polárního s. s. je počátkem sdruženého kartézského s. s. Podle definice sdružených s. s. tomu tak je, vztah (1) je tedy v tomto případě správný.

Předpokládejme dále, že je $\varrho > 0$ a že φ je velikost orientovaného úhlu JOM (obr. 6). Snadno ověříme správnost vztahů (1) pro $\varphi = 2k\pi$,

$$\varphi = (2k + 1)\pi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{tj. body kladných}$$

a záporných poloos x , y . Pro ostatní hodnoty φ z intervalu $(0; 2\pi)$ uijeme trigonometrických vztahů v pravoúhlém trojúhelníku OM_1M . O velikostech stran tohoto trojúhelníka platí: $OM_1 = |x|$, $M_1M = |y|$, $OM = |\varrho| = \varrho$. Velikost vnitřního (neorientovaného) úhlu M_1OM v trojúhelníku OM_1M závisí na tom, uvnitř kterého kvadrantu leží bod M . Je rovna po řadě φ , $\pi - \varphi$, $\varphi - \pi$, $2\pi - \varphi$, leží-li M uvnitř prvního, druhého, třetího, čtvrtého kvadrantu.



Obr. 6.

Čtenář si sám snadno nakreslí příslušné obrázky podle obr. 6, kde je zachycen třetí případ. Zapiše-li závislost $|x|$, resp. $|y|$ na ϱ pomocí kosinu, resp. sinu úhlu M_1OM , dostane úpravami podle známých vzorců vždy vztah (1). Zapišme postup v případě, že M náleží III. kvadrantu:

$$\begin{aligned}\overline{OM_1} &= |x| = -x, & \sphericalangle M_1OM &= \varphi - \pi, & \sin(\varphi - \pi) &= -\sin \varphi, \\ \overline{M_1M} &= |y| = -y, & & & \cos(\varphi - \pi) &= -\cos \varphi, \\ \overline{OM_1} &= \varrho \cos(\varphi - \pi), & -x &= -\varrho \cos \varphi, \\ \overline{M_1M} &= \varrho \sin(\varphi - \pi), & -y &= -\varrho \sin \varphi\end{aligned}$$

Vztah (1) zůstane zřejmě správný i v tom případě, že místo φ uijeme čísla $\varphi + 2k\pi$ pro libovolné k celé. Víme, že první souřadnice bodu v polárním s. s. může být záporná. Ukážeme, že vztah (1) je splněn

vždy současně pro dvojice $(\varrho; \varphi + 2k\pi)$, $[-\varrho; \varphi + (2k+1)\pi]$ polárních souřadnic bodu. Platí:

$$\begin{aligned} -\varrho \cos [\varphi + (2k+1)\pi] &= -\varrho \cos (\varphi + \pi) = \\ &= -\varrho (-\cos \varphi) = \varrho \cos \varphi = \varrho [\cos (\varphi + 2k\pi)], \\ -\varrho \sin [\varphi + (2k+1)\pi] &= -\varrho \sin (\varphi + \pi) = \\ &= -\varrho (-\sin \varphi) = \varrho \sin \varphi = \varrho [\sin (\varphi + 2k\pi)]. \end{aligned}$$

Tím je dokázána platnost vztahů (1) i pro $\varrho < 0$.

Uvedli jsme, že bod M na obr. 4 má polární souřadnice $\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$. Jeho souřadnice ve sdruženém kartézském s. s. vypočteme dosazením do vztahů (1):

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \quad y = 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

Obdobným postupem může čtenář snadno vypočítat kartézské souřadnice ostatních bodů na obr. 4.

Zabývejme se nyní obrácenou úlohou, tj. výpočtem polárních souřadnic bodu, jsou-li známy jeho kartézské souřadnice ve sdruženém s. s.

Jsou-li x, y souřadnice bodu v kartézském s. s. a označíme-li ϱ, φ jeho souřadnice ve sdruženém polárním s. s., je

$$|\varrho| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Je-li $\varrho = 0$, je φ libovolné. Je-li $\varrho \neq 0$, vyhovují vztahu (2) dvě navzájem různá čísla $\varrho, -\varrho$. Zvolíme-li $\varrho > 0$, je

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3a)$$

Zvolíme-li $\varrho < 0$, je

$$\cos \varphi = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3b)$$

Platnost rovnosti (2) je okamžitě patrna z dokázaných vztahů (1), protože

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \varrho^2, \quad |\varrho| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Souřadnice ϱ je rovna nule právě tehdy, když $x = 0, y = 0$, tj. uvažovaný bod je počátkem kartézského s. s. a pólem sdruženého polárního s. s. Je-li $\varrho \neq 0$, je $\cos \varphi = \frac{x}{\varrho}, \sin \varphi = \frac{y}{\varrho}$; na zvoleném znamení čísla ϱ závisí, zda $|\varrho| = \varrho$, nebo $|\varrho| = -\varrho$. Ve všech případech platí tedy prostrkaně vytištěná věta.

Tato věta umožňuje však jen výpočet $\sin \varphi$, $\cos \varphi$; teprve pomocí tabulek funkčních hodnot sinu a kosinu (ve zvláštních případech zpa-měti) stanovíme číslo φ , jehož sinus a kosinus vyhovuje vztahům (3a) nebo (3b).

Jsou-li dány, např. kartézské souřadnice $(\sqrt{3}; 1)$ bodu M , vypočítáme jeho souřadnice ve sdruženém polárním s. s. takto:

$|\varrho| = \sqrt{3 + 1} = 2$, zvolíme třeba $\varrho = 2$ a dosazujeme pak do (3a).
Rovnost $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je splněna právě tehdy, je-li $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo

$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ⁴). Rovnost $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ je splněna právě tehdy, je-li

$\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Protože hledáme φ vyhovující jak

rovnosti pro $\cos \varphi$, tak rovnosti pro $\sin \varphi$, je $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Souřadni-

cemi bodu M ve sdruženém polárním s. s. jsou tedy dvojice $\left(2; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ pro libovolné celé k . Kdybychom zvolili $\varrho = -2$, dosazovali bychom do (3b) a došli obdobným postupem k výsledku $\left(-2; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$.

Je zřejmé, že přechod od polárních souřadnic bodu k jeho kartézským souřadnicím pomocí vztahu (1) je snazší než přechod od jeho kartézských souřadnic k polárním pomocí vztahů (2) a (3). Rovnosti (1) a (2) platí pro všechny dvojice x, y, ϱ, φ kartézských, resp. polárních souřadnic libovolného bodu ve sdružených s. s. Můžeme jich proto výhodně užít, chceme-li vyjádřit funkční závislost proměnných x, y jako závislost proměnných ϱ, φ . Je-li dána např. funkce $y = \sqrt{3}x + 2$ definovaná pro všechna x , můžeme ji pomocí vztahů (1) vyjádřit jako závislost mezi ϱ, φ :

$$\varrho \sin \varphi = \sqrt{3} \varrho \cos \varphi + 2,$$

$$\varrho (\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi) = 2.$$

Čtenář by patrně očekával, že také tento vztah musí platit pro všechny hodnoty nezávisle proměnné φ . Není tomu tak, protože pro

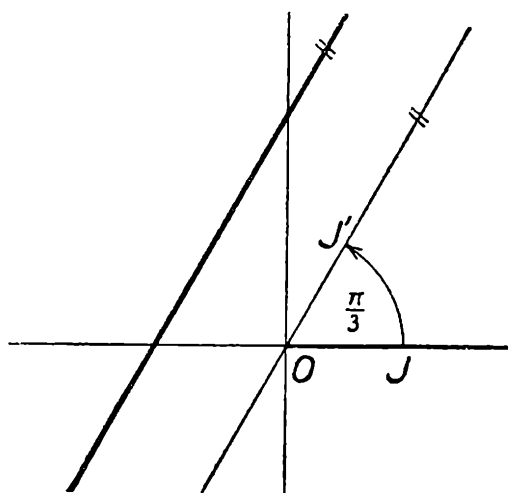
$\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k celé, je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \sqrt{3}$, tedy $\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi = 0$

a levá strana je rovna nule, nikoliv dvěma. Funkci $y = \sqrt{3}x + 2$ definovanou pro všechna x lze vyjádřit v polárních souřadnicích jako funkci

$\varrho = \frac{2}{\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi}$ definovanou pro $\varphi \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$, k celé.

⁴) V celém odstavci označuje k libovolné celé číslo.

Všimneme-li si pozorně vět uvádějících vztahy (1), (2), (3), vidíme, že čísla x , y , ρ , φ vystupující v těchto vztazích jsou dvojicemi souřadnic téhož bodu ve sdružených s. s. To znamená, že graf funkce $y = \sqrt{3}x + 2$ v kartézském s. s. je totožný s grafem funkce $\rho = \frac{2}{\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi}$ ve sdruženém polárním s. s. Na obr. 7 je narysována přímka, která je grafem obou uvedených funkcí ve sdružených s. s. Na obrázku je současně názorně vidět, že funkce $\rho = \frac{2}{\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi}$ nemůže být definována pro $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi$, protože polopřímky OJ' , které vzniknou otočením polopřímky OJ o úhel $\frac{\pi}{3} + k\pi$ jsou rovnoběžné s grafem a neobsahují žádný jeho bod.



Obr. 7.

Víme, že každá lineární rovnice $ax + by + c = 0$, v níž je aspoň jedno z čísel a , b různé od nuly, je rovnicí přímky v kartézském s. s. Úpravou uvedené rovnice pomocí vztahů (1) dostaneme rovnici přímky v polárním s. s.: $a\rho \cos \varphi + b\rho \sin \varphi + c = 0$. Chceme-li z ní vypočítat závislost proměnné ρ na φ , musíme rozlišit dva případy:

a) Je-li $c = 0$, pak $\rho(a \cos \varphi + b \sin \varphi) = 0$ a je buď $\rho = 0$ nebo

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b} \text{ pro } b \neq 0, \quad \cos \varphi = 0 \text{ pro } b = 0.$$

V každém případě je $\varphi = \varphi_0 + k\pi$, kde k je celé, $\varphi_0 \in (-\pi; \pi)$. Grafy těchto funkcí jsme již sestavovali (obr. 5).

b) Je-li $c \neq 0$, pak $\rho = \frac{-c}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}$ pro všechna φ mající tu vlastnost, že $\operatorname{tg} \varphi \neq -\frac{a}{b}$ při $b \neq 0$, $\cos \varphi \neq 0$ při $b = 0$.

Obráceným postupem lze také každou funkci tvaru $\varphi = \varphi_0 + k\pi$ nebo $\rho = \frac{-c}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}$ ⁵⁾ vyjádřit jako lineární rovnici proměnných x , y . Nalezli jsme tedy všechny funkce proměnné φ , jejichž grafy v polárním s. s. jsou přímky.

⁵⁾ Předpokládáme, že konstanta c a aspoň jedna z konstant a , b je různá od nuly.

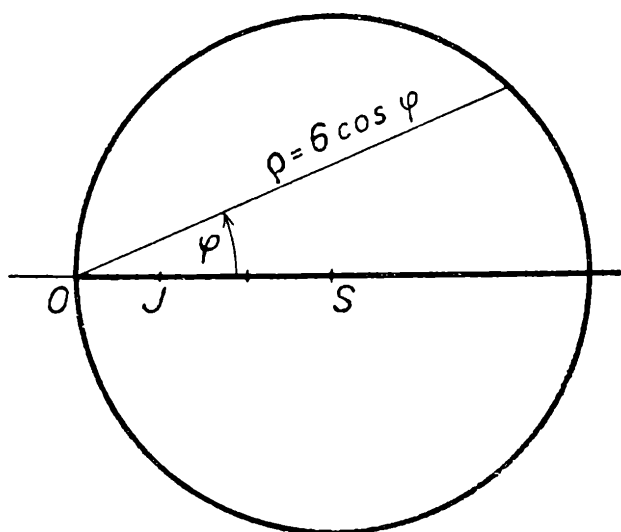
Polární s. s. má v některých případech tu přednost, že v něm jsou grafy jednoduchých funkcí i takové křivky, jejichž rovnici v kartézském s. s. nelze vyjádřit jako jednu funkci proměnné x . Vezměme např. kružnici na obr. 8, jejímž středem je bod S (3; 0), $r = 3$. Její rovnici $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ v kartézském s. s. nelze vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, je totiž

$$y^2 = 9 - (x - 3)^2$$

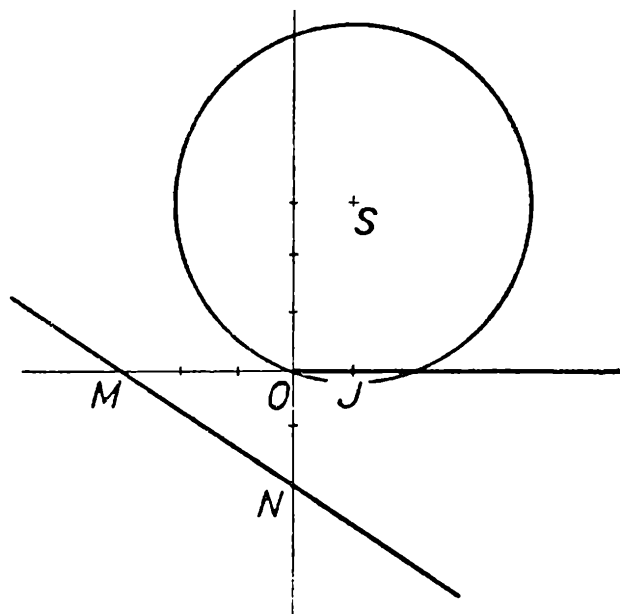
$$|y| = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$$

a tedy buď $y = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$ nebo $y = -\sqrt{9 - (x - 3)^2}$.

Narýsovaná kružnice je sjednocením grafů dvou uvedených funkcí.



Obr. 8.



Obr. 9.

Dosadíme-li do rovnice kružnice vztahy (1) a umocníme, dostaneme:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi - 6 \rho \cos \varphi + 9 + \rho^2 \sin^2 \varphi &= 9, \\ \rho^2 - 6 \rho \cos \varphi &= 0, \\ \rho (\rho - 6 \cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Body kružnice jsou zřejmě právě ty body, jejichž souřadnice vyhovují aspoň jednomu ze vztahů $\rho = 0$, $\rho = 6 \cos \varphi$. Zvolíme-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, je $\cos \varphi = 0$, rovnost $\rho = 0$ vyjde i ve druhém vztahu. Můžeme tedy považovat kružnici na obr. 8 za graf funkce $\rho = 6 \cos \varphi$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že grafem každé funkce $\rho = 2m \cos \varphi + 2n \sin \varphi$ v polárním s. s. je kružnice, která prochází pólem s. s. N á v o d Vyjděte z rovnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = m^2 + n^2$ uvedené kružnice v kartézském s. s. a užíjte vztahu (1) k její úpravě na tvar $\rho = 2m \cos \varphi + 2n \sin \varphi$. Zdůvodněte, že lze obráceným postupem dojít od této funkce proměnné φ k uvedené rovnici s proměnnými x, y .

Závěrem si ještě ukažme nejúspornější konstrukci grafů jmenovaných typů funkcí. Je-li dána funkce $\varrho = a \cos \varphi + b \sin \varphi$, sestrojíme ve sdruženém kartézském s. s. bod $S\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Kružnice, která má střed S a prochází počátkem kartézského s. s., je ve sdruženém polárním s. s. grafem uvedené funkce. Konstrukce je správná pro všechny dvojice hodnot a, b s výjimkou $a = b = 0$.

Je-li dána funkce $\varrho = \frac{c}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}$ a je-li $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, je výhodné spočítat hodnoty ϱ pro $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, vyjde zřejmě $\varrho_1 = \frac{c}{a}, \varrho_2 = \frac{c}{b}$. Vyznačíme-li v polárním s. s. body o souřadnicích $M\left(\frac{c}{a}; 0\right), N\left(\frac{c}{b}; \frac{\pi}{2}\right)$, je přímka MN grafem uvedené lomené funkce.

Na obr. 9 jsou popsáním způsobem sestrojeny grafy funkcí $\varrho = 2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi$ a $\varrho = \frac{-6}{2 \cos \varphi + 3 \sin \varphi}$.

V tomto článku nemůžeme již probírat grafy ostatních funkcí v polárním s. s. v rovině. S některými zajímavými grafy se čtenář seznámí v dalších číslech časopisu. Velmi přístupný výklad o polárním s. s. v rovině je obsažen v poslední kapitole knihy N. P. T a r a s o v a, Z á k l a d y v y š š í m a t e m a t i k y, která vyšla v českém překladu ve Státním pedagogickém nakladatelství r. 1954.

Cvičení.

1. Určete polární souřadnice vrcholů čtverce s úhlopříčkou OJ .
2. Určete polární souřadnice vrcholů pravidelného šestiúhelníka, jehož dva protější vrcholy mají souřadnice $(-4; -3\pi)$ a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. V jakém vztahu vzhledem k pólu jsou obrazy bodů se souřadnicemi $(\varrho_0; \varphi_0), (-\varrho_0; \varphi_0)$?
4. Dokažte, že body $X(\varrho_0; \varphi_0), Y(\varrho_0; -\varphi_0)$ jsou souměrné podle přímky OJ .
5. Která přímka je osou souměrnosti bodů se souřadnicemi $(\varrho_0; \varphi_0), (-\varrho_0; -\varphi_0)$? Sestrojte několik dvojic takových bodů a všimněme si znovu obr. 4.
6. Sestrojte grafy funkcí $\varrho = -2; \varrho = \pi, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{8}, \varphi = -\frac{2}{3}\pi$.
7. Sestrojte grafy funkcí $\varrho = \frac{1}{\cos \varphi}, \varrho = -\frac{1}{\sin \varphi}, \varrho = \frac{1}{\sin \varphi + 2 \cos \varphi}, \varrho = \frac{5}{\sin \varphi - 3 \cos \varphi}$.
8. První dvě z uvedených funkcí upravte nejprve pomocí vztahů (1).
8. Sestrojte grafy funkcí $\varrho = \cos \varphi, \varrho = -\sin \varphi, \varrho = \sin \varphi + 2 \cos \varphi$.

Deskriptivní geometrie

Prof. dr. Alois Urban, ČVUT, Praha:

Prostorová konstrukce hyperoskulačních kružnic kuželoseček

(Dokončení)

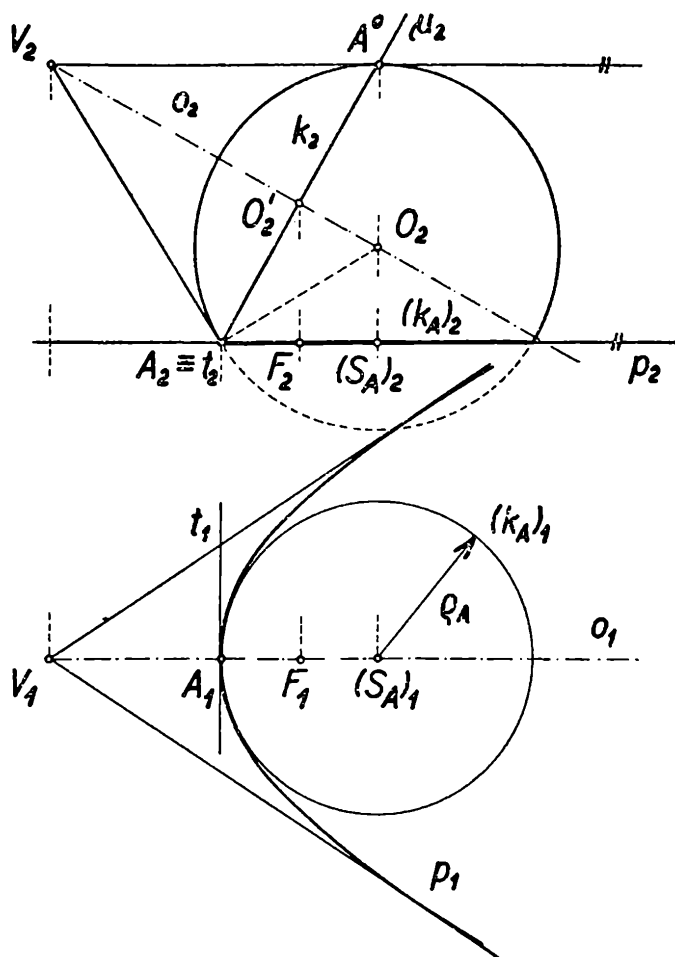
2. Parabolický řez

Průmětny zvolme opět tak, aby parabolický řez ležel v půdorysně a aby byla osa o rotační kuželové plochy rovnoběžná s nárysou (obr. 6).

Podle dokázané věty kulová plocha κ , která se dotýká dané rotační kuželové plochy podél kružnice k , protíná půdorysnu v hyperoskulační kružnici k_A paraboly v jejím vrcholu A .

Poloměr ρ_A kružnice k_A určíme velmi snadno. Podle známé *Quételetovy-Dandelinovy* věty pro parabolický řez rotační kuželové plochy střed O' kružnice k je současně středem kulové plochy, která se dotýká roviny řezu (tj. půdorysny) v ohnisku F průsečné paraboly. U parabolického řezu bod A° leží na průměru OS_A kulové plochy, neboť tečná rovina kuželové plochy podél VA° musí být rovnoběžná s půdorysnou. Označíme-li p parametr paraboly, je tedy $AS_A = 2AF = p$.

Tím jsme užitím prostorové konstrukce hyperoskulační kružnice ve vrcholu paraboly dokázali větu, která se ve středoškolských učebnicích uvádí bez důkazu:



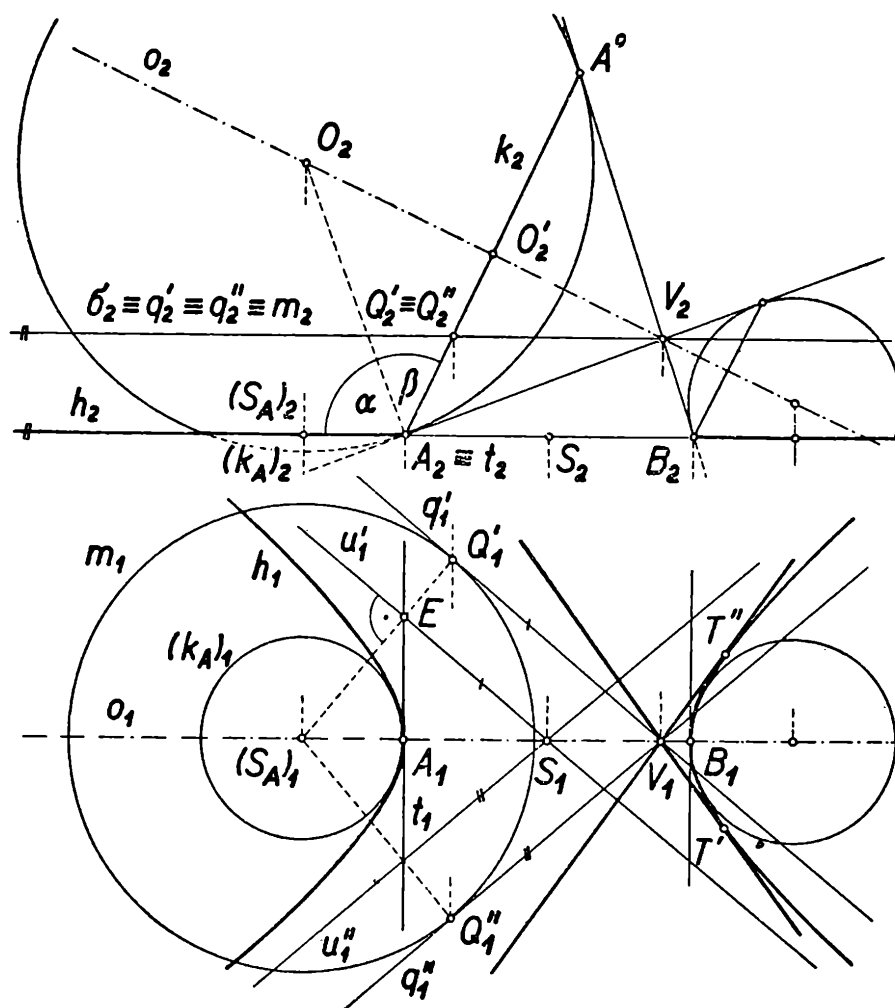
Obr. 6.

Poloměr hyperoskulační kružnice paraboly v jejím vrcholu se rovná parametru paraboly.

3. Hyperbolický řez

Daný hyperbolický řez h rotační kuželové plochy zobrazíme v promítání na dvě k sobě kolmé průmětny tak, aby řez ležel v půdorysně a osa o plochy byla rovnoběžná s nárysnou (obr. 7).

Podle dokázané věty kulová plocha κ , která se dotýká rotační kuželové plochy podél její kružnice k (procházející vrcholem A průsečné hyperboly) protíná půdorysnu v hyperoskulační kružnici k_A ve vrcholu A hyperboly h .



Obr. 7.

Naším cílem bude pomocí této prostorové konstrukce odvodit velmi často užívanou rovinnou konstrukci. Sestrojíme proto ještě půdorys h_1 řezu h .

Nejprve ze známých nárysů A_2, B_2 najdeme vrcholy A_1, B_1 půdorysu a jeho střed S_1 . Dále určíme asymptoty u'_1, u''_1 . Vrcholová rovina $\sigma' \parallel \sigma (\equiv \pi)$ protíná kuželovou plochu v přímkách q', q'' , které jsou rovnoběžné s asymptotami průsečné hyperboly. Přímký q', q'' protínají

kružnici k kuželové plochy v bodech Q', Q'' ; pro jejich nárys platí $Q'_2 \equiv Q''_2 \equiv \sigma'_2 \cdot k_2$. K sestrojení půdorysu užijeme toho, že kružnice k a tedy i body Q', Q'' leží také na kulové ploše κ . Půdorysy bodů Q', Q'' sestrojíme užitím kružnice m , v níž σ' protíná κ ; body Q'_1, Q''_1 leží na m_1 a na kolmici k základnici procházející bodem $Q'_2 \equiv Q''_2$. Půdorysy q'_1, q''_1 přímek q', q'' jsou přímky $q'_1 \equiv V_1Q'_1, q''_1 \equiv V_1Q''_1$ (tj. tečny kružnice m_1 z bodu V_1). Asymptoty u'_1, u''_1 hyperboly h_1 procházejí jejím středem S_1 ; kromě toho je $u'_1 \parallel q'_1, u''_1 \parallel q''_1$. Tím je určena hyperbola h_1 .

V obr. 7 je ještě sestrojen půdorysný obrys dané kuželové plochy. Je tvořen tečnami z V_1 k hyperbole β_1 ; jejich dotykové body T', T'' jsou sestrojeny známým způsobem.

Vypočteme nyní poloměr ϱ_A hyperoskulační kružnice k_A hyperboly h_1 ve vrcholu A . Podobně jako v případě eliptického řezu položíme $\sphericalangle S_AAO = \alpha$ a $\sphericalangle OAO' = \beta$. Vyjdeme z trojúhelníka $\Delta A_2B_2A^\circ$. Jeho strany jsou $A_2B_2 = 2a, A^\circ B_2 = 2e$ a $A_2A^\circ = 2r$, kde r značí poloměr kružnice k ; jeho úhly jsou $\sphericalangle A^\circ A_2B_2 = 2R - \alpha - \beta, \sphericalangle A_2A^\circ B_2 = R - \beta$ a $\sphericalangle A_2B_2A^\circ = \alpha + 2\beta - R$ ⁸⁾. Na trojúhelník $\Delta A_2B_2A^\circ$ užijeme sinové věty; dostaneme

$$a : e : r = \cos \beta : \sin (\alpha + \beta) - \cos (\alpha + 2\beta), \quad (12)$$

tj. ($R < \alpha + 2\beta < 3R$)

$$a = -\frac{r \cos \beta}{\cos (\alpha + 2\beta)}, e = -\frac{r \sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + 2\beta)} \quad (13)$$

Definujeme-li velikost b vedlejší osy hyperboly vztahem

$$b^2 = e^2 - a^2, \quad (14)$$

pak vzhledem k identitě (4) najdeme po dosazení (13) do (14)

$$b^2 = -\frac{r^2 \cos \alpha}{\cos (\alpha + 2\beta)} \quad (15)$$

Z trojúhelníků $\Delta A_2(S_A)_2O_2$ a $\Delta A_2O'_2O_2$ vyjádříme dvojím způsobem velikost přepony A_2O_2 . Je $A_2O_2 = \frac{\varrho_A}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \beta}$ a tedy

$$\varrho_A = \frac{r \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (16)$$

Dosadíme-li sem ze (13) a (15), obdržíme konečný výsledek ve tvaru

$$\varrho_A = \frac{b^2}{a}, \quad (17)$$

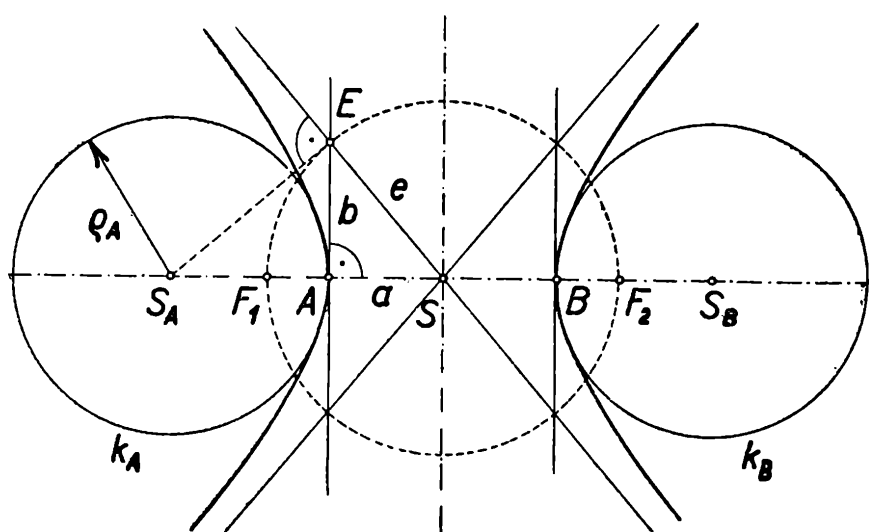
⁸⁾ Předpokládáme přitom, že O není vnějším bodem úhlu $\sphericalangle S_AAO'$ (obr. 7). Opačný případ bychom měli diskutovat zvlášť; metoda i výsledek jsou však tytéž jako v případě uvedeném v textu.

stejně jako v případě eliptického řezu. Užitím nalezeného výsledku můžeme již snadno řešit úlohu.

Úloha. Sestrojte střed hyperoskulační kružnice ve vrcholu hyperboly.

Řešení (obr. 8). V průsečíku E vrcholové tečny hyperboly v bodě A s asymptotou vztyčíme kolmici k asymptotě. Její průsečík s hlavní osou je střed S_A hyperoskulační kružnice hyperboly ve vrcholu A .

Především je totiž zřejmé, že kružnice k_A o středu S_A a poloměru $\rho_A = S_A A$ a větev hyperboly procházející vrcholem A leží v téže polo-rovině určené vrcholovou tečnou AE hyperboly. Dále z pravoúhlého trojúhelníka $\Delta SS_A E$ dostaneme užitím Eukleidovy věty $EA^2 = SA \cdot S_A A$, tj. $b^2 = a \cdot \rho_A$ v soulase se vzorcem (17).



Obr. 8.

Poznámka. Příslušné konstrukce jsme vlastně odvodili jen pro rovinné řezy na rotační kuželové ploše. Konstrukce platí však pro každou kuželosečku. Platí totiž věta, že každou kuželosečku je možno proložit rotační kuželovou plochou, jinými slovy, každou kuželosečku lze pokládat za rovinný řez nějaké rotační kuželové plochy.

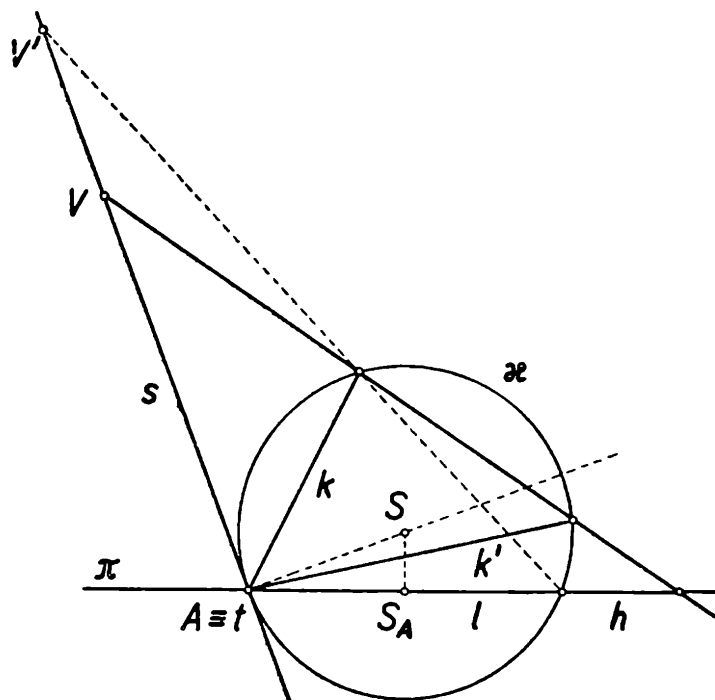
Závěr. Také v případě obecné kruhové kuželové plochy⁹⁾ je možno dokázat větu, která podává prostorovou konstrukci hyperoskulační kružnice ve vrcholu kuželosečky (již tentokrát lze užít i pro vedlejší vrcholy elipsy). K formulaci základního výsledku užijeme středového promítání (obr. 9).

Nechť na kulové ploše κ jsou dány dvě různé kružnice k, l , které se dotýkají ve společném bodě A přímkou t . Nechť s je průsečnice tečné

⁹⁾ Kruhová kuželová plocha je množina přímek, které procházejí daným bodem (vrcholem) a protínají danou kružnici (řídící kružnici); přitom daný bod neleží v rovině dané kružnice.

roviny kulové plochy κ v bodě A s rovinou ν , která prochází bodem A kolmo na t (v obr. 9 je ν zvolena za nákresnu). Nechť $V \neq A$ je libovolný bod přímky s . Potom platí věta:

Středový průmět kružnice k z bodu V do roviny π kružnice l je kuželosečka h , která má kružnici l za svou hyperoskulační kružnici ve vrcholu A (nebo s ní splyne).



Obr. 9.

D ů k a z (obr. 9). Kružnice l leží na kulové ploše κ , kuželosečka h na promítací kuželové ploše λ o vrcholu V a řídicí kružnici k . Společné body kružnice l a kuželosečky h leží tedy na průniku ploch κ a λ . Průnikem obou ploch je jednak kružnice k , jednak další kružnice k' , která se nutně dotýká t v bodě A . Buď je $k' \equiv l$ (to nastane právě v případě $V \equiv V'$ - konstrukce bodu V' je patrná z obr. 9) nebo $k' \neq l$. V tomto druhém případě kružnice k, k' mají s rovinou π společný právě jen bod A . Kružnice l je tedy hyperoskulační kružnicí kuželosečky h ve vrcholu A .

P o z n á m k a. Úvahy zde uvedené je možno ještě rozšířit na prostоровou konstrukci oskulační kružnice v libovolném bodě kuželosečky; příslušné konstrukce jsou však již složitější a nebudeme se jimi proto zabývat.

P ř e m y s l S c h ü r e r , Praha:

Porézní látky ve vakuové technice

1. Adsorpce a absorpce

Odčerpáváme-li vzduch z nádoby, do níž jsme vložili nějaké tuhé těleso, jež bylo ve styku s určitým plynem, pozorujeme, že těleso uvolňuje onen plyn, s nímž bylo ve styku. V některých případech se ukázalo, že těleso připoutá tím více plynu, čím větší je jeho povrch - že tedy totéž množství rozmělněné látky váže k sobě více plynu, než je-li v kompaktní formě. Jindy nastává mohutné pohlcování plynu celou hmotou tělesa a plyn se rozpouští v pevné látce, jak to známe u kapalin. Mluvíme tedy jednak o *adsorpci*, což je poutání plynu na povrchu tělesa, a jednak o *absorpci* (pohlcování a vstřebávání), o poutání uvnitř, pod povrchem tělesa. Adsorpci ještě rozlišujeme podle povahy poutajících sil na fyzikální a chemickou.

Při fyzikální adsorpci přilne plyn v tenké monomolekulární vrstvě k povrchu tuhého tělesa. Mezi molekulami plynu a tělesa existují totiž velké přitažlivé síly, působící však pouze na malé vzdálenosti. Tyto síly již nestačí k tomu, aby udržely vzdálenější molekuly a další vrstvy se nevytvoří. Se vzrůstající teplotou¹⁾ dochází k opačnému procesu - molekuly se odpoutávají od povrchu zahřívaného tělesa, nastává *desorpce*.

Při chemické adsorpci je tomu naopak. Zde vzniká užší vazba mezi molekulami plynu a povrchovými ionty tělesa obvykle až při vyšších teplotách.

Této schopnosti některých látek poutat k sobě molekuly plynů se nyní běžně používá ve vakuové technice a látky s těmito vlastnostmi a ještě dalšími potřebnými vlastnostmi nazýváme *getry*. Používá se jich ke zkrácení čerpací doby, zlepšení a udržení vysokého vakua, nebo čistoty v atmosféře vzácných plynů, např. přerušíme-li čerpací potrubí mezi vývěvou a evakuovaným systémem elektronkou, obrazovkou, žárov-

¹⁾ Nejen teplota, ale i ostatní činitelé, jako např. tlak plynu nad povrchem zkoumaného tělesa hrají důležitou úlohu v otázkách sorpce molekul. Při zachování ostatních podmínek beze změny bude tak počet adsorbovaných molekul na téže ploše nižší při malém tlaku, než při vyšším tlaku nad zkoumaným povrchem.

kou atd. Zde getr zabrání tomu, aby po odtavení stoupl tlak a zhoršil nebo znemožnil funkci systému, jež je podmíněna nízkým tlakem plynů.

První praktické užití getru v odtaveném vakuovém systému sahá do roku 1894, kdy M a l i g n a n i použil červeného fosforu v žárovce s uhlíkovým vláknem. Dnes již máme po ruce řadu vhodných látek a getrovacích způsobů. Jistě nezůstalo bez povšimnutí lesklé tmavé zrcátko v elektronkách přijímačů - vypařený baryový getr. Ohromné nukleární urychlovače elektronů a iontů, jako je betatron, synchrotron, cyklotron a další, v nichž je třeba vyčerpát do velmi nízkých tlaků prostory desítek krychlových metrů, jsou čerpány pomocí titanových vývěv, které pracují na základě getrovacích účinků vypařovaného kovu titanu, jak o tom bylo také pojednáno ve třetím čísle předminulého ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních²⁾.

2. Aktivní uhlí a silikagel

Nechme tentokrát stranou zajímavé kapitoly o kovových getrech a věnujme pozornost p o r é z n í m l á t k á m, které se vyznačují schopností pojmout velké množství plynů, nako např. a k t i v n í u h l í nebo s i l i k a g e l³⁾). Povrch těchto látek, na němž dochází k adsorpci, je obrovský vzhledem k velkému množství otvorů, dutin, pórů a kanálků, jimiž jsou zcela prostoupeny. Abychom si o velikosti jejich povrchu udělali názornou představu, provedme toto porovnání:

Skleněná kulička o hmotě 1 g má povrch asi 1,25 cm², pokud je ovšem hladká, nepoškrábaná, nerozpraskaná. 1 g silikagelu má povrch asi 500 m², tj. 5 · 10⁶ cm² a adsorpční povrch uhlí, které se prohřívá v uzavřené nádobě při teplotě kol 400° C za střídavého vpouštění a odsávání vzduchu za tím účelem, aby se zbavilo uhlovodíků a aby se vytvořil co největší pórovitý povrch, dosahuje 10⁷ cm² na jeden gram, tedy asi 8 · 10⁶krát větší než je povrch pro příklad uvedeného hladkého skla.

Zatím co třeba platina pohlcuje vodík v objemech, které vztaženy na normální tlak, tisíckrát převyšují její vlastní objem, když je rozžhavená, u dřevěného uhlí se docílí zvýšené adsorpce při silném ochlazení - obvykle na teplotu kolem -190° C, čehož dosahujeme ponořením nádoby s uhlím do kapalného vzduchu nebo dusíku. Tehdy pohltí 1 cm³ uhlí následující množství plynů, vztaženo na normální podmínky, tj. při teplotě 0° C a tlaku 760 tor:

Helium	15 cm ³
Vodík	135 "
Dusík	155
Argon	175
Kyslík	230

²⁾ Viz článek P. S c h ü r e r: J a k z í s k á m e n í z k é t l a k y.

³⁾ Vyrábí se z vodního skla pomocí kyseliny solné. Vzniklý gel kyseliny křemičité se promývá a vysuší na prášek, zvaný silikagel.

3. Nové sorbenty - molekulová síta

V poslední době se objevily zprávy o sorbentech⁴⁾ s vyšší sorpční účinností. Co je podstatou nových sorbentů - *molekulových sít*, kterých se používá nejen v chemii, ale nyní i pro účely techniky vysokého a ultrazvukového vakua? Jaké jsou to výhodné vlastnosti molekulových sít, že jich můžeme využít k oddělování a čištění vzácných plynů, v atomových reaktorech, k získání a udržení ultrazvukového vakua v prostoru za difúzní olejovou vývěvou, k důkladnému sušení plynů, par, kapalin, i pevných látek, v plynové chromatografii, pro účinné dělení uhlovodíků a jiných organických látek, k oddělování nenasycených uhlovodíků ze směsí a k řadě dalších úkolů, jež jsou nesmírně důležité v mnoha oborech našeho výzkumu a výroby? Podívejme se na tyto sorbenty podrobněji.

Již sám název *molekulová síta* je velmi názorný a vystihuje vlastnosti látek, o nichž je dále pojednáno. Pravidelná seskupení krystalků tak, že vytvoří velmi rozsáhlé dutiny s pravidelnými otvory - okénky a kanálky, vedoucími do těchto dutin - to jsou molekulová síta. A jako obyčejné síto propustí pouze zrnka, jež jsou menší než oka síta, tak také molekulová síť propustí jen ty molekuly, které jsou dostatečně malé, aby mohly projít vstupními okénky. Zde však již analogie naše končí. Molekulové síto totiž netvoří síť, kudy by procházely menší molekuly a větší aby zůstaly před ní. Molekuly, které projdou vstupními okénky, budou pohlceny uvnitř objemu molekulového síta. Okénka určité velikosti dovolí proniknout menší molekule, větší molekula nebude pohlcena.

Byla získána různá síta, látky s různými velikostmi vstupních okének, a tak můžeme oddělovat plyny podle různé velikosti jejich molekul. V objemu krystalků molekulových sít je po vypuzení krystalové vody ponecháno mnoho volného prostoru, kam se natěsnají sorbované molekuly v hustotě, jaká odpovídá kapalinám. Tak dokáže jeden krychlový centimetr krystalků molekulového síta pojmout všechny molekuly, které za normálních podmínek, tj. za tlaku 760 tor a při teplotě 0° C zaplňují objem téměř jednoho litru! Abychom alespoň zhruba porozuměli mechanismu činnosti těchto skvělých sorbentů, podívejme se na krystalickou strukturu molekulových sít.

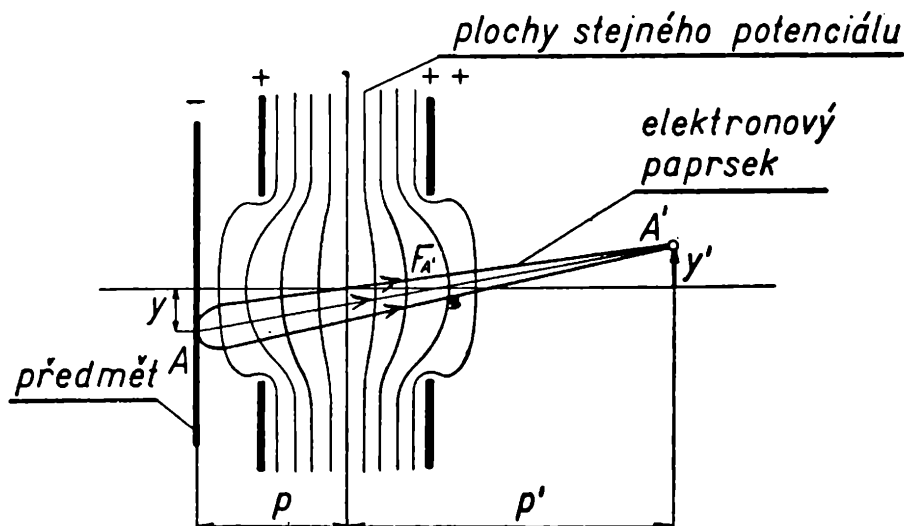
(Pokračování)

⁴⁾ S o r b e n t (lat.), hmota mající schopnost pohlcovat jinou hmotu.

Elektronová optika

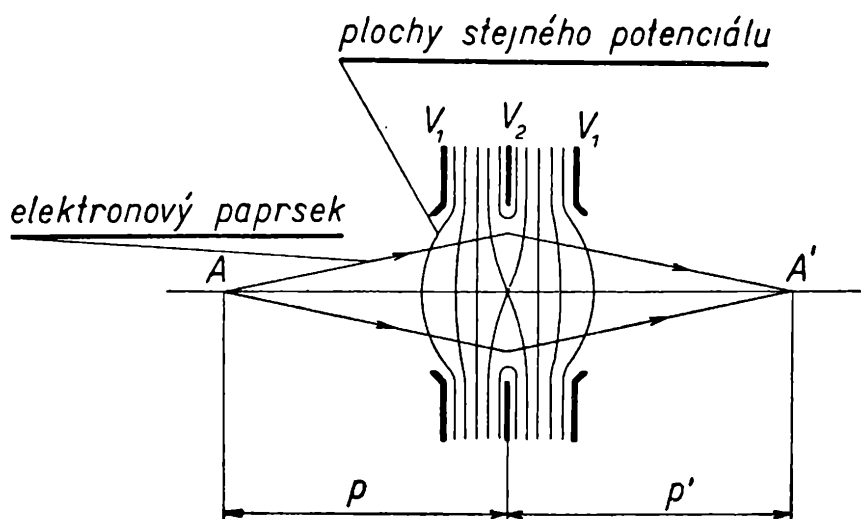
(Pokračování)

V elektronové optice rozeznáváme tyto typy elektrických (elektrostatických) čoček:



Obr. 4.

a) *Immersní čočka*, tvořená jednou nebo několika clonami rozmístěnými tak, že se potenciál elektrického pole mění spojitě od první clony (obr. 4).

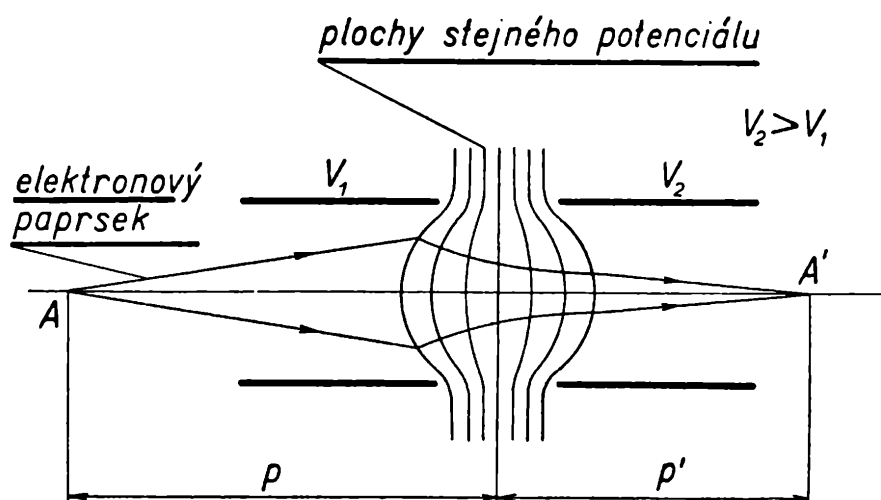


Obr. 5.

b) *Unipotenciálová čočka*, skládající se zpravidla ze tří clonek, z nichž dvě vnější clonky mají stejný potenciál, odlišný od potenciálu vnitřní clonky (obr. 5).

c) *Bipotenciálová čočka*, která je složena ze dvou souosých válců stejného nebo různého průměru. Potenciál druhého válce je vyšší než potenciál válce prvního (obr. 6).

Abychom si dovedli vysvětlit chování elektronového paprsku v elektrickém poli vytvořeném některou z uvedených elektrických čoček, je třeba se seznámit alespoň s nejjednoduššími zákonitostmi pohybu elektronu v elektrickém poli. Předpokládejme, že elektrické pole je vytvořeno ve vakuu a že je homogenní, to znamená, že jeho intenzita E má ve všech místech stejný směr a stejnou velikost. Záporný náboj elektronu označíme písmenem e ($e \doteq -1,602 \cdot 10^{-19}$ C) a hmotu elektronu písmenem m ($m \doteq 9,106 \cdot 10^{-31}$ kg).



Obr. 6.

Nejdříve si vypočítáme okamžitou rychlost elektronu pohybujícího se v elektrickém poli. Na elektron, který vletí do elektrického pole působí síla

$$F = eE, \quad (5)$$

která mu udílí zrychlení

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (6)$$

Protože rychlost elektronu se v elektrickém poli mění, mění se také jeho kinetická energie W

Nechť je V_0 potenciál ekvipotenciální plochy, kterou elektron protíná rychlostí v_0 . Protne-li pak při svém pohybu jinou ekvipotenciální plochu s potenciálem V_1 , bude mít jinou rychlost v_1 a jeho kinetická energie W se změní o hodnotu

$$\Delta W = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

Změna kinetické energie elektronu se děje na újmu práce A , kterou vykoná intenzita elektrického pole a která se rovná

$$A = e (V_1 - V_0) .$$

Lze tedy psát

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = e (V_1 - V_0) . \quad (7)$$

$V_1 - V_0$ je napětí mezi uvažovanými ekvipotenciálními plochami a označujeme ho písmenem U . Jestliže počáteční rychlost elektronu $v_0 = 0$, vztah (7) nabude tvaru

$$\frac{m v_1^2}{2} = e U$$

Pro okamžitou rychlost elektronu $v = v_1$ pak platí:

$$v = \sqrt{\frac{2e U}{m}} . \quad (8)$$

Průletovou dobu t pohybu elektronu, to je dobu, za kterou elektron uletí v elektrickém poli dráhu délky s , lze vypočítat ze vzorce pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 ,$$

když za zrychlení a dosadíme vztah (6) a využijeme vzorce

$$E = \frac{U}{s} ,$$

dostaneme po úpravě

$$t = s \sqrt{\frac{2 m}{e U}} .$$

Při našich úvahách předpokládáme, že se hmota elektronu m zrychlením v elektrickém poli nemění.

Ukážeme si nyní na jednotlivých příkladech, jak elektrické pole ovlivňuje pohyb elektronů.

Bude-li se elektron pohybovat podél siločáry elektrického pole, bude síla F daná vtahem (5) rovnoměrně zrychlovat jeho pohyb. Pohyb elektronu bude přímočarý rovnoměrně zrychlený a bude se dít proti směru intenzity elektrického pole E . Pro pohyb elektronu v tomto případě budou platit vzorce

$$v = at$$

a

$$s = \frac{1}{2} at^2 ,$$

kde v je okamžitá rychlost elektronu, s je přímočará dráha, kterou urazil elektron za dobu t a a je příslušné zrychlení pohybu elektronu.

Vletí-li elektron rychlostí $v = v_x$ do elektrického pole kolmo k siločarám (obr. 7), bude konat složený pohyb, skládající se z rovnoměrného pohybu přímočarého ve směru osy x a z pohybu rovnoměrně zrychleného ve směru osy y .

Pro složky x , y jeho dráhy platí

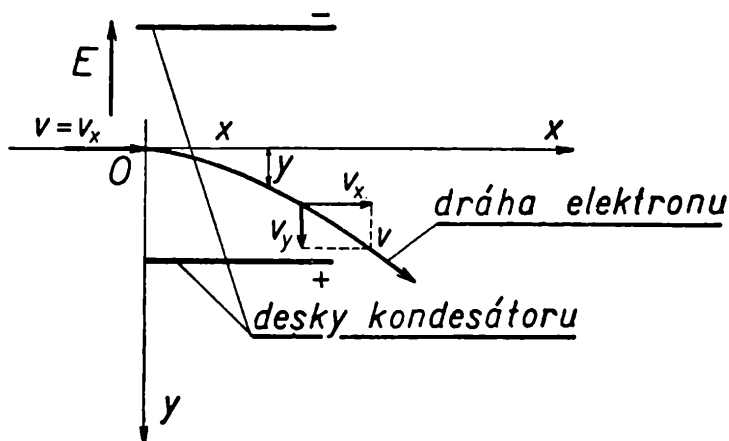
$$x = v \cdot t \quad (9)$$

a

$$y = \frac{1}{2} at^2. \quad (10)$$

Chceme-li zjistit, po jaké dráze se bude elektron v tomto případě pohybovat, dosadíme do vztahu (10) vztah (6) a dobu pohybu elektronu t vyloučíme použitím vzorce (9). Dostaneme výsledný výraz

$$y = \frac{1}{2} \frac{e E}{m v^2} x^2. \quad (11)$$



Obr. 7.

Vztah (11) je rovnice paraboly. Dráha elektronu je tedy v tomto případě parabolická. Jev je obdobný vodorovnému vrhu tělesa v gravitačním poli.

Ze vztahu (11) plyne pro elektronovou optiku důležitý závěr:

Vyletují-li z nějakého bodu A jedné z elektrod, mezi nimiž je homogenní elektrické pole elektrony podél elektrody (obr. 8), budou po průchodu rozdílem potenciálů U_x uvnitř kužele, jehož vrcholový úhel α je určen výrazem

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x},$$

kde v_x a v_y jsou složky okamžité rychlosti v elektronu.

Odtud vyplývá, že elektrony vyletující z bodu na všechny strany,

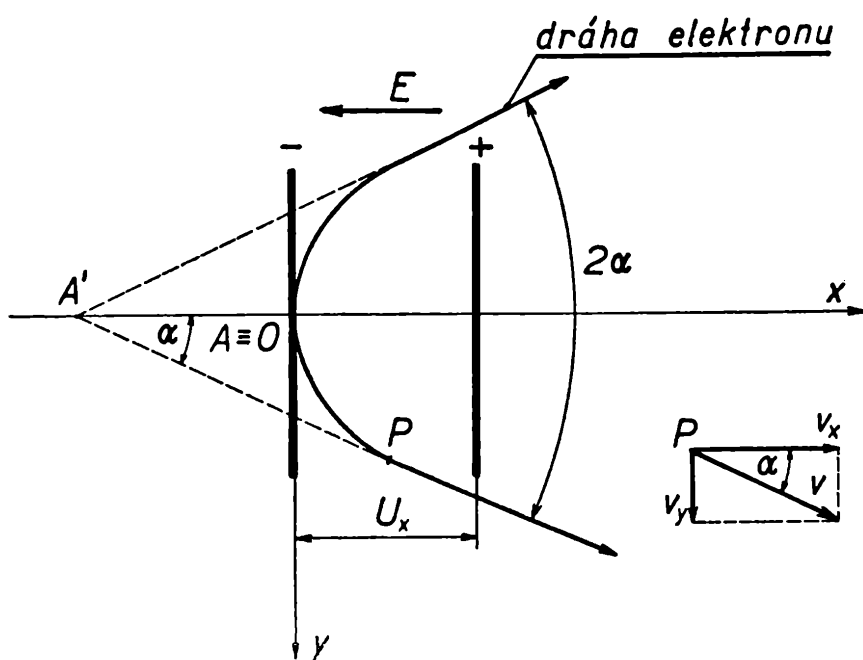
nelze znovu soustředit do jednoho bodu jediným homogenním elektrickým polem, ať je jeho velikost jakákoliv. V obr. 8 je A' zdánlivý obraz bodu A .

Obyčejně rychlost elektronu svírá v prostoru se siločarami elektrického pole obecně úhel α . Výsledná dráha pohybu elektronu bude v tomto případě prostorově parabolická.

V nehomogenním elektrickém poli je dráha elektronu obecně prostorová křivka a výpočet této dráhy je jedním z úkolů elektronové optiky.

K ovlivnění pohybu elektronů lze také využít magnetického pole. Zkoumejme nyní, jak bude působit na elektron homogenní magnetické pole, vytvořené ve vakuu.

Působení magnetického pole na pohybující se elektron je analogické působení magnetického pole na elektrický proud. Je známý jev, že



Obr. 8.

vodič, kterým protéká elektrický proud, je v magnetickém poli vychýlován podle pravidla levé ruky, které zavedl Fleming :

Položíme-li levou ruku na vodič tak, aby prsty mířily po proudu a siločáry magnetického pole vstupovaly do dlaně, pohybuje se vodič na stranu palce. Toto pravidlo platí pro technický směr proudu (to znamená pro směr opačný pohybu elektronů).

Síla, kterou magnetické pole působí na přímý vodič, je dána vztahem

$$F = B I l \sin \alpha , \quad (12)$$

kde B je magnetická indukce magnetického pole, l je účinná délka přímého vodiče (tj. délka vodiče zasahující do magnetického pole), I protékající proud a α je úhel, který svírá technický směr proudu ve vodiči se směrem magnetických siločar. Označíme-li nyní počet vol-

ných elektronů v cm^3 písmenem n , rychlost elektronů písmenem v a průřez vodiče písmenem S , pak proud I , který teče vodičem, je

$$I = n e v S, \quad (13)$$

přičemž e značí elementární náboj elektronu.

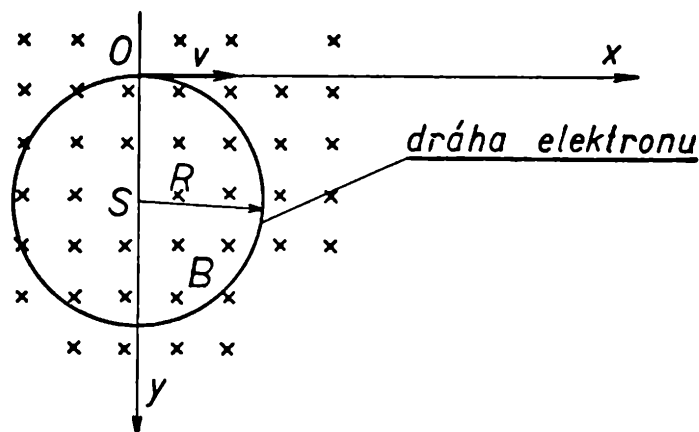
Vodič je v magnetickém poli tažen silou, vyjádřenou vztahem (12). Po dosazení vztahu (13) do (12), nabude vzorec pro sílu F tvaru

$$F = B n e v S l \sin \alpha.$$

Ve vodiči účinné délky l a průřezu S je $n S l$ elektronů, proto síla působící na jeden elektron je

$$F_1 = B e v \sin \alpha, \quad (14)$$

což je Lorentzův vzorec pro sílu, která působí na elektron pohybující se rychlostí v v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci B , svírá-li směr pohybu elektronů s opačným směrem magnetických siločar úhel α .



Obr. 9.

Z Lorentzova vzorce (14) je patrné, že na elektron v klidu ($v = 0$) magnetické pole nepůsobí.

Magnetické pole nebude také působit na elektron, bude-li se pohybovat po některé ze siločar magnetického pole, neboť v tomto případě bude $\sin \alpha = 0$ a tedy, jak ze vztahu (14) vyplývá, bude také síla $F_1 = 0$. Elektron se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře jen setrvačností.

Působení magnetického pole na pohybující se elektron bude maximální, bude-li směr pohybu elektronu kolmý na směr magnetických siločar, které na obr. 9 směřují od pozorovatele kolmo k rovině nákresu. V tomto případě je $\alpha = 90^\circ$ a síla bude mít nyní velikost

$$F_1 = B e v. \quad (15)$$

Síla F_1 nemění velikost rychlosti elektronu v , neboť je neustále kolmá ke směru pohybu a způsobuje jen zakřivení jeho dráhy. Elektron se

bude pohybovat po kružnici. Odstředivá síla F' , která současně působí na elektron hmoty m , je

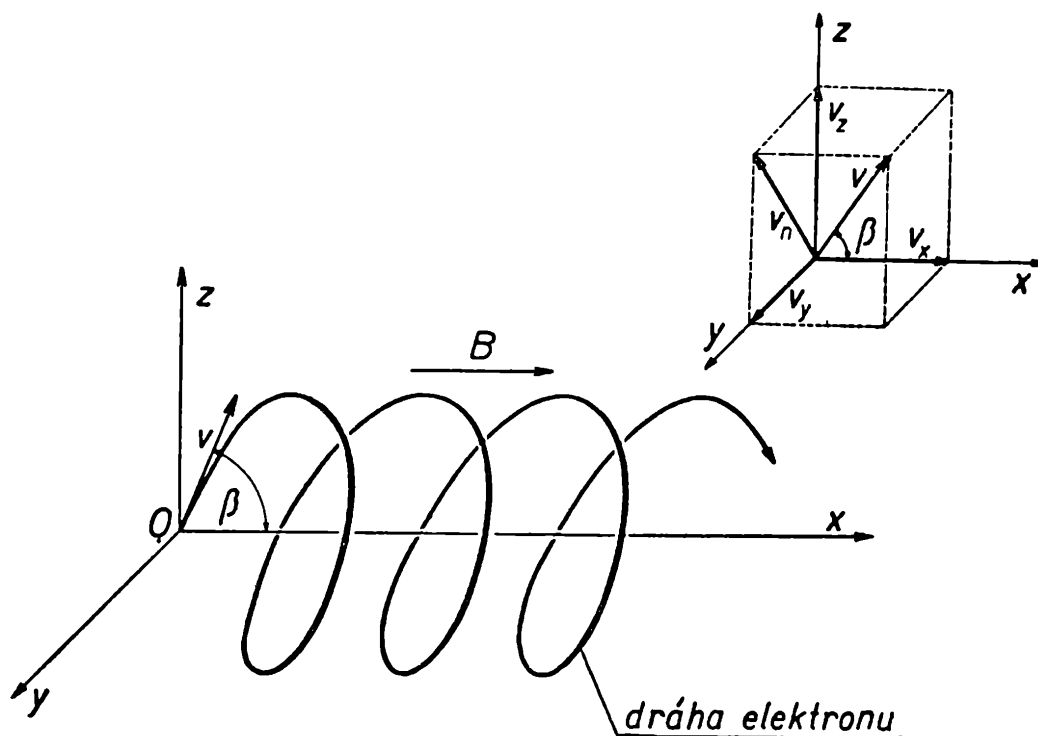
$$F' = m \frac{v^2}{R} \quad (16)$$

a je v rovnováze se silou (15). Platí tedy

$$B e v = \frac{m v^2}{R}$$

a z toho poloměr křivosti R dráhy elektronu je

$$R = \frac{m v}{e B}. \quad (17)$$



Obr. 10.

Příslušnou dobu oběhu

$$T = \frac{2 \pi R}{v} \quad (18)$$

dostaneme dosazením vztahu (17) do (18)

$$T = 2 \pi \frac{m}{e} \frac{1}{B} \quad (19)$$

Ze vztahu (19) je vidět, že doba oběhu nezávisí na rychlosti elektronu.

Předpokládejme nyní, že elektron vletí do magnetického pole tak, že jeho rychlost v svírá v prostoru se směrem magnetických siločar pole úhel β (obr. 10). Rychlost v rozložíme na tři složky: v_x , v_y , v_z . Účinkem výslednice v_n složek v_y a v_z , kolmých na směr siločar magnetického

pole, bude elektron konat pohyb po kružnici a účinkem složky v_x se bude rovnoměrně přímočaře posouvat ve směru siločar. Složením obou pohybů vznikne pohyb po šroubovici.

V případě nehomogenního magnetického pole se budou elektrony pohybovat po obecné spirále.

(Dokončení)

Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

(Pokračování)

10. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC ($AB = 10$). Sestrojte kružnici k tak, aby tečny, vedené k ní z bodu A měly délku $a = 4$, tečny z bodu B délku $b = 5$ a tečny z bodu C délku $c = 6$.

Ota Setzer

(Došlo 11 řešení)

Řešil Jan Žofka, 12. B DSŠ Písek:

1. R o z b o r . Hledaná kružnice je $k(S; r)$, přičemž $A1, A2, B3, B4, C5, C6$, jsou její tečny z bodů A, B, C . $S1, S2, \dots, S6$ jsou normály příslušné k těmto tečnám.

$A1 = A2, S1 \perp A1, S2 \perp A2$, proto $S1, S2$ jsou tečny kružnice k_1 ($S_1 \equiv A; r_1 = A1 = a$) z bodu S .

$B3 = B4, S3 \perp B3, S4 \perp B4$, proto $S3, S4$ jsou tečny kružnice k_2 ($S_2 \equiv B; r_2 = B3 = b$) z bodu S .

$C5 = C6, S5 \perp C5, S6 \perp C6$, proto $S5, S6$ jsou tečny kružnice k_3 ($S_3 \equiv C; r_3 = C5 = c$) z bodu S .

$S1 = S2 = \dots = S6$, bod S je tedy bod, z něhož lze vésti ke kružnicím k_1, k_2, k_3 stejně dlouhé tečny, to je tzv. *potenční bod* kružnic k_1, k_2, k_3 .

2. K o n s t r u k c e . Nad vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC opíšeme kružnice $k_1(A; a), k_2(B; b), k_3(C; c)$ a sestrojíme jejich potenční bod jako průsečík chordál všech tří kružnic.

Protože $b + c > BC$, protínají se kružnice k_2, k_3 ve dvou bodech M, N chordály MN kružnic k_2, k_3 ; $a + c = AC$, proto kružnice k_1 a k_3 se dotýkají v bodě $I \equiv 6$ na AC ; bodem I prochází chordála kružnic k_1, k_3 kolmo k AC . V průsečíku obou chordál je střed S hledané kružnice k .

Její poloměr $r = S1$. Konstrukci tečen $A1, A2, \dots, C6$ provedeme užitím Thaletovy věty.

3. D ů k a z. Že střed hledané kružnice je potenčním bodem kružnic k_1, k_2, k_3 plyne z rozboru. Správnost jeho sestrojení je zřejmá (viz Přehled elementární matematiky, str. 249).

4. D i s k u s e. Úloha má vždy řešení.

11. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je výraz $n^3 + 5n$ dělitelný šesti.

Ota Setzer

(Došlo 16 řešení)

Řešil Vladimír Väter, pom. dělník, Blovice:

Výraz V si můžeme vhodně upravit:

$$V = n^3 + 5n = n(n^2 + 5) = n(n^2 - 1 + 6) = n[(n - 1)(n + 1) + 6] = (n - 1)n(n + 1) + 6n.$$

Z této úpravy je zřejmo, že V je skutečně dělitelný šesti, neboť výraz $s_2 = 6n$ je dělitelný šesti zřejmě, $s_1 = (n - 1)n(n + 1)$ je též dělitelný šesti, jelikož jedno z čísel $(n - 1), n, (n + 1)$ je celým násobkem tří a kromě toho alespoň jedno z čísel $(n - 1), n, (n + 1)$ je sudé.

12. Je dán pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník a odvěsnách a, b ($a > b > 0$) a úhlu α . Osa souměrnosti přepony a osy vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C určují pravoúhlý trojúhelník. Vyjádřete jeho odvěsny a, b a jeho úhly pomocí α .

Alois Urban

(Došlo 12 řešení)

Řešila Pavla Hlaváčková, 11. tř. JSS Modřany:

Průsečík osy vnějšího (vnitřního) úhlu při vrcholu C s osou strany c označme A' (B'); střed strany c nechť je S ; průsečík osy strany c se stranou a nechť je bod K (obr. 1). Potom platí:

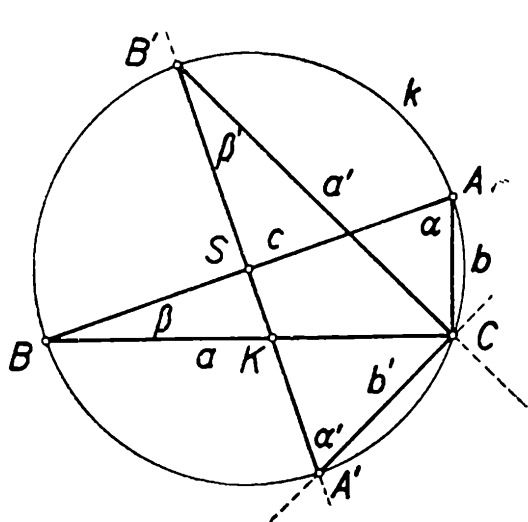
$$\begin{aligned} \sphericalangle BKS &= \sphericalangle CKA' = \alpha. \text{ Z trojúhelníka } KCA' \text{ najdeme } \alpha' = \sphericalangle CA'B' = \\ &= 2R - \frac{1}{2}R - \alpha = \frac{3}{2}R - \alpha, \beta' = \sphericalangle A'B'C = R - \left(\frac{3}{2}R - \alpha\right) = \\ &= \alpha - \frac{1}{2}R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Z trojúhelníku } A'B'C \text{ najdeme } b' &= A'C = A'B' \sin \beta' = \\ &= AB \sin \left(\alpha - \frac{1}{2}R\right) = c \left(\sin \alpha \cos \frac{1}{2}R - \cos \alpha \sin \frac{1}{2}R\right) \\ &= c \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a - b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b). \end{aligned}$$

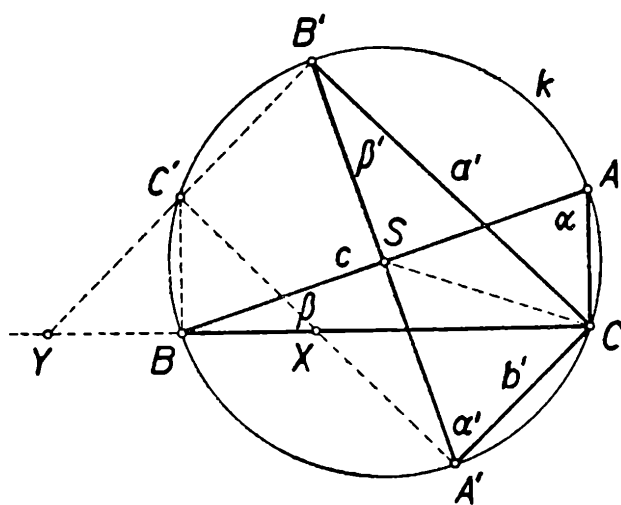
$$\text{Podobně najdeme } a' = B'C = \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b)$$

P o z n á m k a a u t o r a. Většina řešitelů užila nejrůznějším způsobem trigonometrie, jeden užil analytické geometrie a jen jeden řešil úlohu elementárním způsobem (ale velmi nepřehledně a zdouhavě). Úlohu je však možno řešit jednoduše takto:

Vrcholy A' , B' sestrojeného pravoúhlého trojúhelníka $A'B'C$ leží na kružnici k o středu S a poloměru $\frac{1}{2}c$ (obr. 2). Vedeme-li vrcholy A' , B' rovnoběžky se stranami $B'C$ a $A'C$, dostaneme obdélník $A'CB'C'$, jehož vrchol C' leží také na k . Přímka $A'C'$ ($B'C'$) protíná přímku BC v bodě X (Y). Z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků $A'CX$ a



Obr. 1.



Obr. 2.

$B'CY$ plyne $A'C = \frac{\sqrt{2}}{2} CX$ a $B'C = \frac{\sqrt{2}}{2} CY$. Jelikož $BX = BY = B'C = AC = b$, je $CX = a - b$, $CY = a + b$, a tedy $A'C = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)$, $B'C = \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b)$.

Ve čtyřúhelníku $SACA'$ úhel při vrcholu C lze vyjádřit dvojím způsobem: Jednak se rovná $\frac{3}{2} R$ (podle konstrukce), jednak $\alpha + \alpha'$ ($\sphericalangle A'CS = \alpha'$, $\sphericalangle ACS = \alpha$), tedy $\alpha + \alpha' = \frac{3}{2} R$. Odtud $\alpha' = \frac{3}{2} R - \alpha$, $\beta' = R - \alpha' = \alpha - \frac{1}{2} R$.

Deskriptivní geometrie.

1. Sestrojte kulovou plochu, která má střed na přímce p a protíná dané rovnoběžné roviny ρ a δ v kružnicích poloměru a a b .

Ota Setzer

(Došlo 10 řešení)

Řešil Karel Hrbáček, 11. A DSŠ Nymburk:

R o z b o r: Nechť kulová plocha $\kappa \equiv (S; r)$ řeší danou úlohu a tedy protíná roviny ρ, δ po řadě v kružnici $k_1 \equiv (S_1; a)$, $k_2 \equiv (S_2; b)$. Protože $\rho \parallel \delta$, leží body S_1, S_2, S v jedné přímce kolmé na ρ a δ . Přímkami S_1SS_2 a p proložme rovinu τ , kolmou na roviny ρ a δ , jež je protíná po řadě v přímkách q, s ; $q \parallel s$. Kulovou plochu κ protíná rovina τ v hlavní kružnici k . Tato kružnice vytíná na přímkách q, s tětiny délek $2a, 2b$. Odtud plyne konstrukce: Rovinu τ vedeme přímkou p kolmo na ρ a δ . Dále sestrojíme libovolnou kružnici k' , která vytíná na přímkách q, s tětiny $2a, 2b$ a tuto kružnici rovnoběžně posuneme ve směru, daném přímkami q, s tak, aby střed S' kružnice k' přešel na přímku p . Tím získáme kružnici $k \equiv (S; r)$ a její rotací, např. kolem přímky p , hledanou kulovou plochu κ .

D i s k u s e. Jsou-li roviny ρ, σ rovnoběžné totožné, protíná je kulová plocha κ v téže kružnici a řešení existuje jen v případě $a = b$. Jsou-li roviny ρ, σ rovnoběžné různé, existuje vždy jediná kružnice k' . Přímku vedenou bodem S' rovnoběžně s q a s oznčme v . V obou případech musíme dále rozlišovat:

je-li $\rho \not\equiv \sigma$, rozlišujeme (1) $v \nparallel p$: jediné řešení,

(2) $v \parallel p, v \not\equiv p$: není řešení, $\square$

(3) $v \equiv p$: nekonečně mnoho řešení;

je-li $\rho \equiv \sigma$, existuje vždy nekonečně mnoho řešení, buď různých ($p \nparallel \rho$) nebo shodných ($p \parallel \rho$).

2. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká roviny τ v bodě T a která na přímce p různoběžné s rovinou τ vytíná úsečku délky $2d$.

Ota Setzer

(Došlo 7 řešení)

Řešil Jindřich Šilhán, 11. B SVVŠ Svitavy:

Kolmici vedenou bodem T k rovině τ označme k a průsečík přímky p s rovinou τ písmenem P .

Jestliže $T \equiv P$, má úsečka a , kterou hledaná kulová plocha vytíná na přímce p , jeden krajní bod v bodě P . Druhý najdeme tak, že z bodu P nanese na přímku p vzdálenost $2d$. Protože můžeme nanášet na obě strany, existují dvě řešení. Střed hledané kulové plochy musí ležet v průsečíku přímky k s rovinou souměrnosti úsečky a .

Jestliže $T \not\equiv P$ a $p \perp \tau$, je vzdálenost b rovnoběžných přímek p a k

všude stejná, proto musí mít hledaná kulová plocha poloměr $r = \sqrt{d^2 + b^2}$ (z Pythagorovy věty). Poloměr r lze snadno nalézt konstrukcí z pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách d, b . I nyní existují dvě řešení.

V obecném případě $P \neq T$, p není kolmo k τ . Označme ρ rovinu určenou bodem T a přímkou p a A, B krajní body úsečky vyřezané hledanou kulovou plochou na přímce p . Průsečnice rovin ρ a τ je c a řezem roviny ρ hledanou kulovou plochou je kružnice m . Kružnice m se dotýká zřejmě přímky c v bodě T a prochází body A, B . Mocnost bodu P ke kružnici m je

$$(PT)^2 = PA \cdot (PA + AB) = PA \cdot (PA + 2d)$$

Když označíme $PT = t$, $PA = x$, můžeme rovnici uvést na tvar

$$x^2 + 2dx - t^2 = 0$$

s kořeny

$$x_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 + t^2} \quad x_1 = -d - \sqrt{d^2 + t^2}, \\ x_2 = \sqrt{d^2 + t^2} - d$$

Kořen x_1 je sice záporný, ale má smysl a budeme jej nanášet od bodu P v opačném směru než kořen x_2 . Přitom $PA = |x_1| = d + \sqrt{d^2 + t^2}$.

Při další konstrukci volíme tento postup: Z Pythagorovy věty určíme konstruktivně velikost $\sqrt{d^2 + t^2}$, sestrojíme úsečky $d + \sqrt{d^2 + t^2}$ a $-d + \sqrt{d^2 + t^2}$ a nanese je na přímku p od bodu P oběma směry, čímž vzniknou body A_1, B_1 a A_2, B_2 . Středů S_1 , resp. S_2 dvou hledaných kulových ploch leží v průsečíku kolmice k s rovinou souměrnosti σ_1 , resp. σ_2 úsečky A_1B_1 , resp. A_2B_2 . Úlohy má vždy 2 řešení.

3. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány různoběžné tečny t_1, t_2 jeho podstavy a bod A na obvodě druhé podstavy.

Ota Setzer

(Došlo 10 řešení)

Řešil Karel Příkrý, 11. A JSS Vyškov:

Kolmice sestrojená v bodě A k rovině různoběžek t_1, t_2 protne tuto rovinu v bodě A' , který leží na obvodě druhé podstavy. Jde tedy o sestrojení kružnice k_1 , která leží v rovině $\rho \equiv t_1 \cdot t_2$, prochází bodem A' a dotýká se různoběžek t_1, t_2 . Ta je hranou jedné podstavy. Kružnici k_1 sestrojíme na základě stejnolehlosti: Sestrojíme libovolnou kružnici k'_1 o středu S' , která se dotýká různoběžek t_1, t_2 a leží v tom jejich úhlu, ve kterém se nachází bod A' . Body A_1, A_2 stejnohlé k bodu A' leží na spojnici PA' ($P \equiv t_1 \cdot t_2$ je střed stejnolehlosti) a na kružnici k'_1 . Rovnoběžky $S_1A' \parallel S'A_1, S_2A' \parallel S'A_2$ určují na symetrále o úhlu t_1, t_2 středy S_1 a S_2 hledaných kruhových hran k_1, k_2 v rovině ρ .

Druhé jeho podstavy dostaneme rovnoběžným posunutím prvních podstav ve směru $A'A$ (i co do smyslu). Přitom bod A' přejde do bodu A . Tím jsme obdrželi dvě řešení úlohy.

D i s k u s e. Jestliže padne bod A' dovnitř některého úhlu různoběžek t_1, t_2 , existují dvě kružnice stejnohlé s kružnicí k'_1 podle průsečíku P a úloha má dvě řešení. Dvě řešení má také tehdy, padne-li bod A' na některou z přímek t_1, t_2 , nikoli však do jejich průsečíku. Přitom podstavy obou válců leží ve výplňkových úhlech různoběžek t_1, t_2 . Padne-li bod A' do průsečíku P , nemá úloha řešení.

4. Sestrojte rovnostranný kužel o daném vrcholu V , normále n , je-li dán bod A v rovině jeho podstavy.

Ota Setzer

(Došlo 7 řešení)

Řešil Karel Hrbáček, 11. A DSŠ Nymburk:

R o z b o r. Necht rovnostranný kužel α vyhovuje podmínkám úlohy; jeho osu označme VS , kde S je střed podstavy. Normála n protíná povrch kužele v bodě N a jeho osu VS v bodě O . Rovina $\rho \equiv SVN$ protíná rovnostranný kužel α v rovnostranném trojúhelníku $A'VB'$; je tedy $\sphericalangle A'VB' = 60^\circ$. Rovina podstavy kužele α prochází bodem A a je kolmá k ose kužele VS . Na základě toho můžeme provést konstrukci.

Bodem V a přímkou n proložíme rovinu ρ . V této rovině vedeme bodem V přímkou VK kolmo na n a sestrojíme $\sphericalangle KVL = 60^\circ$ a jeho osu VS' . Rotací dutého úhlu KVS' kolem osy VS' dostáváme kuželový prostor, z něhož rovina vedená bodem A kolmo na VS' oddělí hledaný kužel.

D ů k a z je zřejmý z rozboru a provedené konstrukce.

D i s k u s e. Předpokládejme, že přímkou n neprochází bodem V a že $V \neq A$. Pak lze bodem V vést v rovině ρ k přímkě n jedinou kolmici VK a lze sestrojit dva duté úhly KVL a KVL' tak, že $\sphericalangle KVL = \sphericalangle KVL' = 60^\circ$ (body L, L' leží v opačných polorovinách vytatých přímkou VK). Ke každému z obou úhlů $\sphericalangle KVL$ a $\sphericalangle KVL'$ lze sestrojit jediný kuželový prostor. Označme τ_1 (resp. τ_2) rovinu vedenou přímkou VL (resp. VL') kolmo k ose úhlu $\sphericalangle KVL'$ (resp. k ose $\sphericalangle KVL$). Neleží-li bod A v žádné z rovin τ_1, τ_2 , lze oddělit kužel z obou kuželových prostorů; úloha má dvě řešení. Leží-li bod A právě v jedné z rovin τ_1, τ_2 , lze oddělit kužel jen z jednoho z obou kuželových prostorů (z toho, k jehož ose rovina τ , v níž leží bod A , není kolmá); úloha má jediné řešení. Leží-li bod A v průsečnici rovin τ_1 a τ_2 úloha nemá řešení.

Změna adresy redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních:

Praha 2, Trojanova 13, tel. 244529.

M i l a n K o m a n, Praha:

Dobře nebo špatně?

Sedmá C dostala na příští hodinu opakování na slučování zlomků. K procvičení měli všichni žáci vypočítat pět daných příkladů. Úkol vypracoval i malý Zdeněk. Protože však Zdeněk nepatří v matematice mezi nejlepší žáky, má nad ním patronát jeho kamarád Pavel. Oba spolužáci si však tentokrát překontrolovali své výsledky a když zjistili, že mají stejné výsledky, nevěnovali už uloženému opakování další pozornost. Přesto dostal Zdeněk druhý den od soudruha učitele za domácí úkol vyhubováno. Měl sice správné výsledky, ale počítal úplně špatným postupem. Zde je jeho domácí svičení:

$$1. \quad \frac{16}{18} - \frac{18}{27} = \frac{16 - 18}{18 - 27} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}$$

$$2. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1 + 2 - 1}{2 + 4 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$3. \quad \frac{3a}{3(b+c)} - \frac{4a}{2b+2c} = \frac{3a-4a}{3(b+c)-(2b+2c)} = \frac{-a}{b+c};$$

$$4. \quad \frac{4a+2b+1}{6c} - \frac{5a+5}{5c} + \frac{a+2b-2}{3c} = \\ = \frac{(4a+2b+1) - (5a+5) + (a+2b-2)}{6c-5c+3c} = \frac{4b-6}{4c} = \frac{2b-3}{2c}$$

$$5. \quad \frac{28p-12q-16}{8(r^2-t)} - \frac{p-q}{2r^2-2t} + \frac{1-q}{3(r^2-t)} = \\ = \frac{(28p-12q-16) - (p-q) + (1-q)}{8(r^2-t) - (2r^2-2t) + 3(r^2-t)} = \frac{27p-12q-15}{9r^2-9t} = \\ = \frac{9p-4q-5}{3(r^2-t)}$$

Přesvědčte se, že měl opravdu Zdeněk všechny výsledky správné. Po-

kuste se sestavit podobné příklady sami. Ukažte, že nelze sestavit podobný příklad pro sčítání pouze kladných zlomků, tj., že
 p r o ž á d n á k l a d n á č í s l a a, b, c, d n e m ů ž e p l a t i t
 r o v n o s t

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Různé

P r o f. d r. R o s t i s l a v K o š t á l, Brno:

Osmdesátiny prof. Zahradníčka

V Brně dožil se dne 9. srpna 1961 osmdesáti let universitní profesor dr. J o s e f Z a h r a d n í č e k.

Více než třicet let věnoval se výchově učitelů škol 3. stupně a výchově vědeckého dorostu na přírodovědecké fakultě v Brně. Na vysokou školu přišel ve svých čtyřicátých letech již jako zkušený pedagog, který se na dřívějších působištích věnoval s nevšední láskou svému předmětu a výchově žáků. Způsobem výkladu, četnými experimenty a laboratorními cvičeními získával žáky pro svůj předmět.

Ani při působení na vysoké škole nezapomněl prof. Zahradníček na konání pokusů na střední škole a na praktická cvičení na těchto školách. V přednáškách vždy zdůrazňoval nutnost pokusů a sám vždy pečlivě připravenými pokusy doplňoval své přednášky. V praktiku fyzikálních pokusů seznamoval posluchače s pokusy, které je třeba konat na gymnasiích, v kursech pro učitele měšťanských škol seznamoval posluchače s pokusy pro dřívější školu měšťanskou. Svou praxi demonstrátora a zkušenosti z praktik demonstračních i měřicích, které získal za působení na gymnasiích i na vysoké škole, ukládal do sdělení a metodických článků publikovaných nejčastěji v didakticko-metodické příloze Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky.

Vědeckou a pedagogickou činností navázal na dílo našich předních průkopníků fyzikální vědy, profesora Čenka S t r o u h a l a a profesora Františka K o l á č k a.

O jeho životě a díle byl publikován článek v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie (2, 1957, 303).

Geometrie z roku 1734

V roce 1734 vyšla v knihtiskárně impresora Adama Högra v Praze kniha Václava Josefa Veselého s názvem *Gruntovní počátek matematického umění, Geometria practica, Trigonometria plana, Stereometria, Užívání Tabellarum Sinum a Logarithmorum, skrze což výšky (hloubky), délky (šířky), pole (lesy), rybníky (louky), zahrady, města, kraje a corpora se mohou vyměřit*¹).

Je formátu 8°, obsahuje 625 stran, rejstřík a Errata, tj. opravy tiskových chyb. Kniha je psána švabachem, názvy latinské a popisy bodů jsou psány latinkou (body písmeny malé abecedy).

Autor byl mlynářem a geometrem, tj. měřičem. Byl svobodníkem, tzn., že byl osvobozen od roboty. Cítil se velkým vlastencem a v úvodu uvádí, že první knihu geometrie v českém jazyku píše proto, „aby vlastenci, kteří ovládají jen český jazyk, ale jsou k pochopení velkého umění dost ostrovtipní, mohli přijít k umění geometrickému. Aby každý mohl dospět k určitému stupni dokonalosti“.

Již podle názvu je kniha zaměřena k aplikacím geometrie v geodézii. První díl obsahuje teoretické úvahy, tj. definice některých elementů a dále 23 kapitoly, které se zabývají grafickými konstrukcemi: prodloužením úsečky, dělením úsečky v daném poměru, rektifikací kruhového oblouku, rýsováním pravidelných mnohoúhelníků z dané strany, z poloměru kružnice opsané, úlohami z úměrnosti úseček, proměnami obrazců rovinných i prostorových a výpočty z aritmetiky (čtyři základní početní výkony, umocňování a odmocňování), dále úvahami a úlohami z rovinné trigonometrie a početními úlohami z planimetrie a stereometrie.

Druhý díl jsou praktické návody k měření v přírodě.

Tím byl vymezen rozsah práce. Autor v knize ukázal teoretickou znalost elementární geometrie tehdejší doby, cituje v práci Euklida.

Autor nemá ještě odvahu zčešťovat latinské názvy, pokud nejsou již užívány v češtině (linie, plocha, tělo, kout apod.). Také výklad je nepřesný, velmi primitivní, vzhledem k dnešnímu matematickému slohu. Podobá se vyjadřování začátečníků v osmileté střední škole.

Všimněme si úvah z trigonometrie. V textu budeme slova, která jsou v originále tištěna švabachem psát latinkou a slova psaná v originále latinkou, jsou vytištěna *ležatým písmem* (kurzívou).

Nejprve definice. Užívá se jen funkcí *sinus*, *tangens* a *secans*.

¹) Text je upraven podle dnešní mluvy a podle dnešního pravopisu.

Sinus jest ta linie, která od jednoho konce oblouku na *semidiameter perpendicular* padá zde, někteří to jmenujou rohová míra.

Tangens jest jedna linie, která od jednoho rohu toho koutečného

Gruntovní Počátek
Mathematického Umění
GEOMETRIA
PRACTICA,
TRIGONOMETRIA
PLANA
 STEREOMETRIA
 Vývody
 TABELLARUM, SIN
 A
 LOGARITHMORUM.

Skrze což:
 Věsity / Hlaubity / Důlity / Šhřity /
 Pole / Lesy / Rybníky / Lauky / Zahrady /
 Města / Krage / a Corpora, vyměřit se mohou.
 S přípojeným Nivelirováním /
 Neb
 Vodním Měřeníem /
 S některými novými Problematy rozumnos-
 tená / a ponepru to Ešestém Časťku vydána /
 Od
 Wacslawa Jozeffa Wefelyho / Při-
 sezného Zemského Mlýnáře / a Geometra.

Vydáno to Waga na Sedláckém Dvůře / v Ma-
 čce Adama Hegera Mlýnského 30. Impressora 1734.



oblouku s tím *sinem* nebo rohovou mírou *parallel* (a tak *perpendicular*) běží a potom od druhého rohu toho oblouku skrze *kontinuuirování semi-diametru* odřezává a terminirovaná. Česky: Jest tejkající linie (poněvadž ten oblouk *tangiruje* aneb tejká).

Zajímavé je odvození sinové věty. Přečteme si text, který je u trojúhelníka pravoúhlého (obr. 1).

Předně tuto jeden rovnokoutečný *triangl* před sebe vezmem: ($a\ b\ c$) ten jest (A), pak řeknu: jak se drží ten *sinus* toho kouta při (c) té naproti stojící straně ($a\ b$), tak také drží se ten *sinus* toho kouta při (a) té naproti stojící straně ($c\ b$). To dokázat, tak se vezme strana ($b\ c$) za *semidiameter* cyrkle, s kterým ty kouty měřit chceme a rýsují se

o Trigonometri.

379

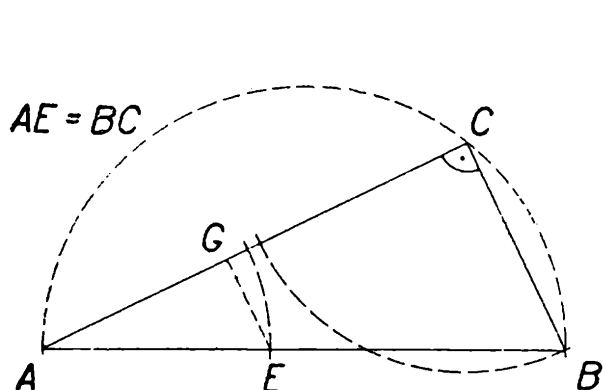
3j t ty naproti stogicý ($a\ b$) tať taťy
držj se ten sinus toho koutu (a) t ty
naproti stogicý straně ($c\ b$) to dokázat/
tať se vezme zde ta strana ($b\ c$) za se-
mi-diameter cyrkle / s kterým ty kauty
měřit chceme / a regfugau se s nj ty ob-
lauky z (c) ($b\ e\ g$) a z (a) ($e\ f$) (Čte-
nár ať dobře pozoruge / že zde ta linie
($a\ e$) tať velká bude / gaťo ($c\ b$) po-
něwadž gednoho cyrkle semi-diametri
gsau /) tať gest ten oblauk toho koutu
(c) a druhý toho koutu (a) oba z ge-
dnoho cyrkle : kterýchžto sinus gsau
($c\ b$) a ($e\ g$). Tať tehdy widěti gest
z toho / co giž swrchu kolikrát podot-
čnuto / poněwadž ($c\ b$) a ($e\ g$) paral-
lel gsau / tať sluge ($c\ b$) sinus toho kau-
tu (c) - $b\ c\ e\ g$. sinus toho koutu (a) po-
něwadž ($a\ e$) to gest > ($c\ b$) spolu steg-
ný gsau / gať swrchu t pozorowánj při-
pamatowáno. A to gest o tom koutu
při (a) demonstritowáno : a když se
s tim obogjm pokračuge zase taťto /
tať wygde od toho rovně tať wen t
totiž / gať ($c\ b$) ten sinus toho koutu
(c).

s ním ty oblouky z (c) a z (a). Čtenář ať dobře pozoruje, že zde ta linie (ae) tak velká bude, jako (cb), poněvadž jednoho cyrkle *semidiametrii* jsou. Tak jest ten oblouk toho koutu (c) a druhý toho koutu (a), oba z jednoho cyrkle, kterýchžto *sinus* jsou (cb) a (eg).

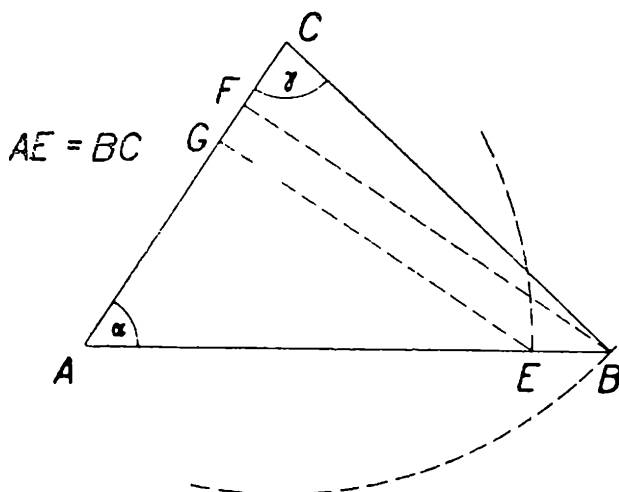
Tak tedy viděti jest z toho, co již svrchu kolikrát podotknuto, poněvadž (cb) a (eg) parallel jsou, tak sluje (cb) *sinus* toho koutu (c) , (eg) *sinus* toho koutu (a) , poněvadž (ae) to jest (cb) spolu stejný jsou, jak svrchu k pozorování připamatováno. A to jest o tom koutu při (a) demonstrováno. A když se s tím obojím pokračuje zase takto, tak vyjde od toho rovně tak ven. Totiž jak (cb) , ten *sinus* toho koutu (c) proti (ba) k té protistojící straně, tak také (eg) ten *sinus* toho koutu (a) proti (ae) , aneb což rovně tak jest proti (cb) a zase, jak (ag) proti (ae) , tak (ac) proti (ab) .

Těž nápodobně drží se to také tak se všemi rovnokoutečnými triangly.

To se opakuje se špičatokoutečným *trianglem* a s tupokoutečným *trianglem*.



Obr. 1.



Obr. 2.

Pro ostroúhlý trojúhelník můžeme větu sinovou odvodit (v dnešní frazeologii) takto (obr. 2):

V ostroúhlém trojúhelníku ABC opíšeme kružnici kolem vrcholu C poloměrem CB . Potom pro délkovou jednotku CB je *sinus* vnitřního úhlu γ velikost úsečky BF kolmé ke straně AC . Na to opíšeme kružnici kolem vrcholu A poloměrem $AE = CB$. *Sinus* vnitřního úhlu pro tutéž délkovou jednotku CB je velikost úsečky EG kolmé ke straně AC .

Trojúhelníky AEG a ABF jsou podobné (*u u*) a proto platí: $AE : AB = EG : BF$, což se dá zapsat také: $CB : AB = \sin \alpha : \sin \gamma$, neboli $CB : \sin \alpha = AB \sin \gamma$. (Pokračování)

Vysokotlaková pára základem energetiky

Před 75 roky obdržel W. Schmidt patent na vysokotlakový trubkový kotel o tlaku max. 100 atmosfér. V roce 1890 sestrojil přehříváč páry na teplotu 350°C , čímž se mu podařilo značně snížit spotřebu paliva. O 20 let později zvýšil přehřátí páry o vysokém tlaku na 490°C a rozdělil kotel na odpařovač, přehříváč a předeříváč. Tehdejší vysoko-

tlakové kotle se silnostěnnými trubkami činily potíže, spočívající v efektu Leidenfrostově. Parní bubliny oddalovaly vodu od horké trubky, což kromě neklidného odpařování snižovalo i efekt kotle. Tato nesnáz byla řešena na kotli Atmos, sestrojeném v roce 1922. Skládal se z vodorovné otáčející se roury 330 ot./min., v níž byla voda odstředivou silou tlačena na stěnu kotle a jeho středem pak byla odváděna vytvořená pára. Potíže s utěsněním za vysokého tlaku znemožnily rozšíření těchto kotlů. Dokonalé řešení vysokotlakového kotle uskutečnil r. 1924 Benson sestrojením kotle o nadkritickém tlaku páry 225 atmosfér a 375° C přehřátí, za nichž voda a pára vykazují stejný objem, takže voda přechází v páru bez vření. V téže době vznikl Löfflerův kotel o tlaku 101 atmosféry. Obcházel problém přechodu vody v páru bez mezistadií tím, že nasycenou páru oběhovým čerpadlem vháněl do vytápěného přehříváče a po její přeměně v přehřátou ji z třetiny spotřeboval v turbosoustrojí a ze dvou třetin pak v odpařovači k výrobě nasycené páry. Nepřekonal však Bensona a v praxi se neujal. Ani kotel La Mont s bubny sestrojený v r. 1929 nedoznal většího rozšíření, takže prakticky Bensonův jedno-trubkový kotel a jemu podobné Sulzerův a Ramzinův ovládají dnes moderní energetiku, jež se vyvíjí jednoznačně směrem k nadkritickým tlakům a vysokému přehřátí páry, jakož i velkým jednotkám - blokům: kotel-turboalternátor.

Pomineme-li éru nízkotlakových parních strojů na nasycenou páru, přecházející v dobu strojů s přesnými rozvody na přehřátou páru, jakož i akčních turbin De Laval a aj., jež kromě speciálních případů nedoznaly většího uplatnění, těžištěm moderní energetiky se stala reakční turbina Parsonsova, sestrojená v roce 1889, vyznačující se krajním využitím přetlakového principu. Největší turbíny tohoto druhu o nadkritickém tlaku páry 245 at. a přehřátí 565° C v elektrárně Breed o výkonu 500 000 kW a o tlaku 275 at. a přehřátí 593° C v Drakelow o výkonu 375 000 kW svědčí o mohutnosti těchto zdrojů energie, jejichž účinnost je 40 %.

K rozšíření poznání těchto zdrojů energie přispělo značně i dílo dr. inž. A. Stodoly: Dampf und Gas-Turbinen.

F. Komurka

Matematická olympiáda

Soutěžní úlohy MO

3. Kategorie C

1. Je-li x celé číslo, potom číslo $x^3 + 2x$ je dělitelné třemi; dokažte.
2. Je dána úsečka MN a uvnitř této úsečky je dán bod A ; dále je dán ostrý úhel ω .

Sestrojte obdélník $ABCD$ těchto vlastností:

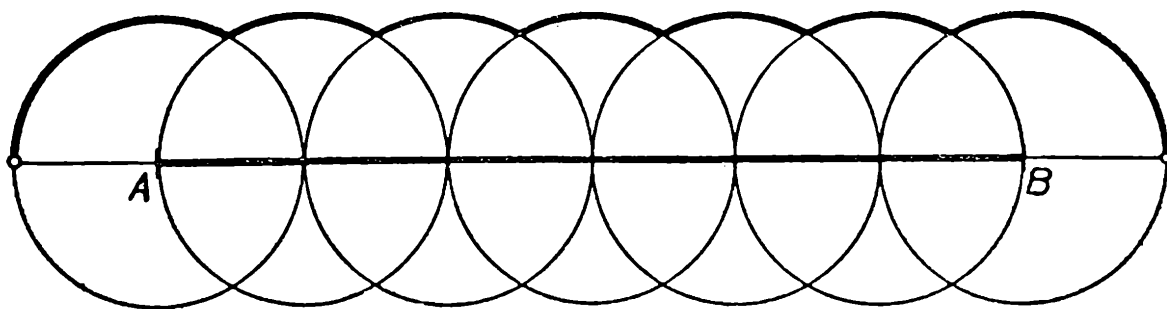
- 1) Přímkou CB , CD po řadě procházejí body M , N ;
- 2) je $AB > AD$;
- 3) úhel úhlopříček obdélníka je shodný s daným úhlem ω .

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme D střed přepony a E průsečík osy úhlu $\sphericalangle DCB$ s přeponou AB .

Sestrojte tento trojúhelník, je-li dána délka úsečky CE a velikost úhlu $\sphericalangle DCE$. Stanovte podmínky řešitelnosti.

4. Určete všechna přirozená čísla, která není možno vyjádřit jako součet dvou složených čísel.

5. Je dána železná krychle o hraně délky h . Z ní byly vyříznuty stejné otvory tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu o podstavné hraně délky x ; pobočné hrany všech otvorů jsou rovnoběžné s určitou hranou krychle. Tím vzniklo těleso s dutinami, jehož povrch je dvakrát větší než povrch



Obr. 3.

původní krychle a jehož váha je přibližně rovna $\frac{3}{4}$ váhy původní krychle.

Určete počet otvorů a délku x .

6. Na šachovnici se 64 polí byly sestrojeny všechny kružnice, jejichž průměr není menší než délka jednoho pole a které neprocházejí vnitřkem žádného černého pole. Určete počet těchto kružnic.

4. Kategorie D

1. Dílna splnila v 1. týdnu plán, tj. vyrobila n kusů výrobků. Ve 2. týdnu poklesla výroba oproti 1. týdnu o p %.

O kolik procent musila dílna ve třetím týdnu zvýšit svůj výkon z druhého týdne, aby na konci týdne byl splněn třítýdenní plán?

Na závěr proveďte výpočet pro $p = 10$.

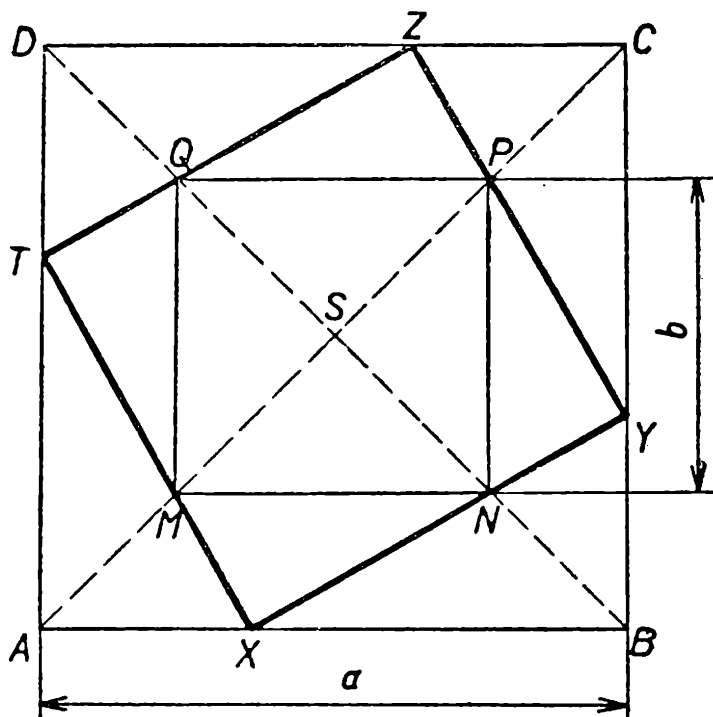
2. Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $AB > BC$ a úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý.

Na přímce AB sestrojte takový bod X , z něhož je vidět úsečky AD , CD pod shodnými úhly.

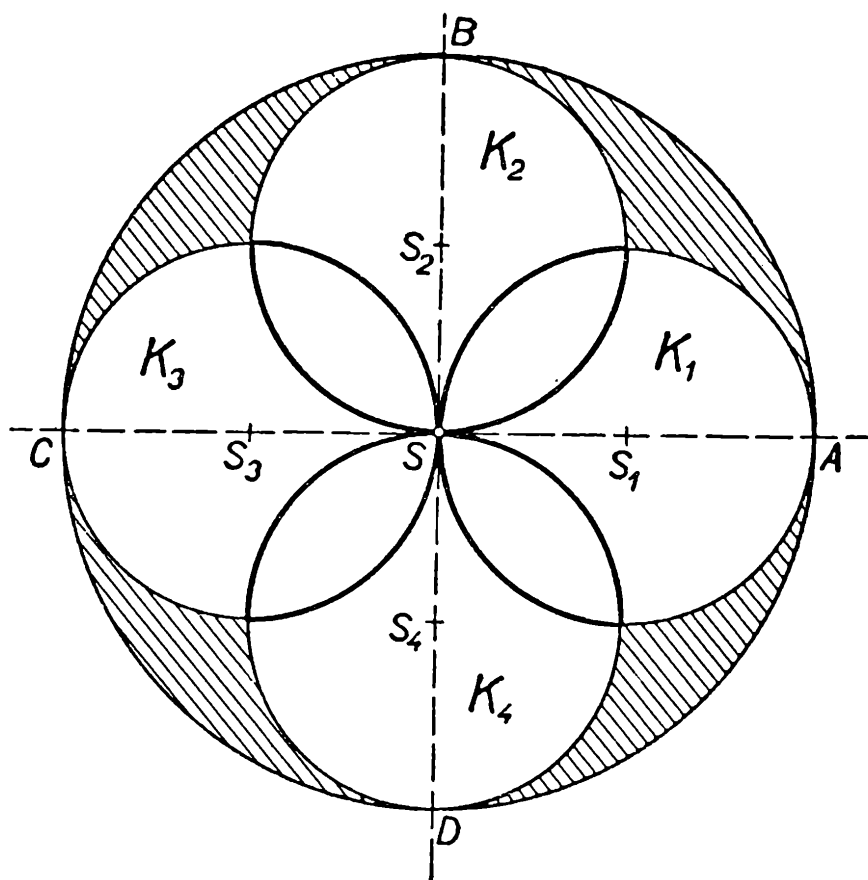
Vyšetřete polohu bodu X vzhledem k úsečce AB .

3. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y , která vyhovují rovnici

$$5x + 7y^2 = 1600.$$



Obr. 4.



Obr. 5.

4. Úsečka AB délky d je rozdělena na n shodných úseček; kolem kraj-

ních bodů těchto úseček jsou opsány kružnice o poloměru $\frac{d}{n}$

Vypočtete délku čáry, která se skládá z tlustě vytažených oblouků kružnic a dokažte, že pro jakkoli velké číslo n je délka této čáry větší než d (viz obr. 3).

5. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany a a čtverec $MNPQ$ o délce strany b , přičemž je $a > b$; vrcholy M, N, P, Q leží na úhlopříčkách AC, BD (viz obr. 4).

Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům a, b .

6. Je dán kruh K o středu S a poloměru r ; bodem S vedeme dva kolmé průměry AC, BD tohoto kruhu. Nad úsečkami SA, SB, SC, SD jako průměry sestrojíme kruhy K_1, K_2, K_3, K_4 (viz obr. 5).

Vypočtete obsah P čtyřlístku, jehož každý lístek je společnou částí některých dvou kruhů K_1, K_2, K_3, K_4 .

Dále vypočtete obsah Q vyšrafované části roviny, která vznikne oddělením kruhů K_1, K_2, K_3, K_4 od kruhu K .

Fyzikální olympiáda

Prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků, Brno:

Zákony Kirchhoffovy a jejich důsledky

(Dokončení)

Vztah (11) pro výpočet ems kompenzační metodou můžeme určit též užitím Kirchhoffových zákonů.

Podle I. zákona Kirchhoffova platí

$$I = I_1 + I_g \quad (14)$$

a podle II. zákona Kirchhoffova platí

$$E = R_1 I_1 + (R - R_1) I + R_i I, \quad (15)$$

$$E_1 = R_1 I_1 - (R_g + R' + R_{i1}) I_g, \quad (16)$$

kde R_g je odpor galvanometru, R' předřazený odpor galvanometru

a R_{i1} vnitřní odpor měřeného článku. Do rovnice (15) dosadíme za I z rovnice (14)

$$\begin{aligned} E &= R_1 I_1 + (R - R_1 + R_i) (I_1 + I_g), \\ E &= (R + R_i) I_1 + (R - R_1 + R_i) I_g \end{aligned} \quad (17)$$

Vyloučíme nyní I_1 z rovnic (17) a (16) a dostaneme

$$I_1 = \frac{E - (R - R_1 + R_i) I_g}{R + R_i},$$

$$E_1 = R_1 \frac{E - (R - R_1 + R_i) I_g}{R + R_i} - (R_g + R' + R_{i1}) I_g.$$

Jestliže zvolíme R_1 tak, aby bylo $I_g = 0$, pak dostáváme $E_1 = R_1 \frac{E}{R + R_i}$, jak dává vztah (11).

Další poučení o Kirchhoffových zákonech najdete v článku CSc. E. Římana v Rozhledech matematicko-fyzikálních, roč. 39 (1960–61), čís. 9, str. 425.

V článku *Zákony Kirchhoffovy a jejich důsledky* v č. 2 na obr. 3 uprostřed odpadá v místě křížení vodičů oblouček; na obr. 6 je $AB = a$, $BC = b$; na obr. 7 je $AB = a$, $BC = b$; na obr. 8 má být v pravé části odporu I místo I_1 , dále R_{11} místo R_1 a levá část odporu R má být označena R_1 .

Prof. dr. Rostislav Košťál, Brno,
s kolektivem spolupracovníků:

Měření kalorimetrem

V první části článku pojednáme o základních veličinách kalorimetrických a o tepelné kapacitě kalorimetru, v druhé části o určování měrného tepla pevných látek a v třetí části o určování skupenského tepla tání.

a) Základní veličiny kalorimetrické a tepelná kapacita kalorimetru

Teplo je druh energie. Proto jednotkou pro teplo je jednotka pro energii, tedy v soustavě MKSA joule (J). Místo této jednotky používá se v praxi ještě jednotka kilokalorie (kcal), jejíž souvislost s joulem je dána vztahem

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}.$$

Měrné teplo (c) je množství tepla, kterého je třeba k zvýšení teploty 1 kg látky o 1°C ; závisí poněkud na teplotě. Každá látka má obecně jiné měrné teplo, takže měrné teplo je charakteristickou veličinou dané látky. Aby se teplota látky hmoty m zvýšila o Δt , musíme jí dodat teplo

$$Q = mc \cdot \Delta t,$$

a tedy

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} \quad (1)$$

Jednotku měrného tepla dostaneme, když do vztahu (1) dosadíme jednotky uvedených veličin; je tedy jednotkou měrného tepla $J \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$. Toto měrné teplo by měla látka, jejíž 1 kg by se ohřál teplem 1 J o $1^\circ C$. Když uijeme jako jednotky pro teplo kcal, pak je jednotka měrného tepla $kcal \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$. To je měrné teplo vody. Měrná tepla jsou uvedena v Matematicko-fyzikálních tabulkách.

Látka může být ve fázi (skupenství) pevné, kapalně nebo plynné. Pro přeměnu z jedné fáze do druhé je třeba látce dodat nebo ubrat teplo. Množství tepla, které je třeba dodat (ubrat) 1 kg látky při teplotě tání (tuhnutí) k přechodu z jedné fáze do druhé, se nazývá skupenské teplo tání (tuhnutí).

Jednotkou pro skupenské teplo je tedy $J \cdot kg^{-1}$ a v praxi $kcal \cdot kg^{-1}$.

K určení měrného tepla i skupenského tepla používáme kalorimetru. Je to kovová nádoba od okolí tepelně izolovaná, opatřená míchačkou a teploměrem. Jako kalorimetru lze použít též Dewarovy nádoby. Jsou-li látky dané do kalorimetru dokonale od okolí izolovány a chemicky na sebe nepůsobí, ustálí se jejich teplota a teplota kalorimetru na určité hodnotě. Teplejší látky vydají teplo a chladnější látky přijmou teplo. Teplo chladnějšími látkami přijaté musí se rovnat teplu vydanému teplejšími látkami. Vložíme-li do kalorimetru s kapalinou teplejší látku, zahřeje se od ní netoliko kapalina, nýbrž i kalorimetr s míchačkou a s teploměrem. K této skutečnosti musíme přihlídnout. Proto zavádíme pojem *tepelné kapacity* (K) *kalorimetru*. Je to množství tepla, které potřebuje kalorimetr s míchačkou i teploměrem k zahřátí o $1^\circ C$. Zvýší-li se dodaným teplem teplota látky i kalorimetru o Δt , přijal kalorimetr teplo

$$Q' = K \cdot \Delta t.$$

Tepelnou kapacitu kalorimetru můžeme vypočítat podle její definice ze známých hmot a měrných tepel kalorimetru s příslušenstvím, nebo určit měřením. U Dewarových nádob musíme ji vždy určovat měřením.

1. Z definice určíme tepelnou kapacitu takto: Označme měrné teplo kalorimetrické nádoby c' , míchačky c'' a jejich hmoty m' a m'' . Pak teplo potřebné k zahřátí kalorimetru a míchačky o $1^\circ C$ je

$$K_1 = m'c' + m''c''.$$

Tepelná kapacita teploměru je velmi malá proti tepelné kapacitě kalorimetrické nádoby s míchačkou. Proto ji někdy zanedbáváme. Přihlídneme k ní jen při přesnějších měřeních. Pro její výpočet uvážíme toto: Teploměr je ze skla a rtuti. Měrné teplo skla je $0,19 kcal \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$ a měrné teplo rtuti $0,033 kcal \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$. Určíme teplo, které potřebuje k zahřátí o $1^\circ C$ 1 cm³ skla, tj. $2,5 \cdot 10^{-3} kg \cdot cm^{-3}$ skla, a 1 cm³ rtuti, tj. $13,6 \cdot 10^{-3} kg \cdot cm^{-3}$ rtuti. Pro 1 cm³ skla vychází $0,475 \cdot 10^{-3} kcal \cdot cm^{-3} \cdot \deg^{-1}$ a pro 1 cm³ rtuti $0,449 \cdot 10^{-3} kcal \cdot cm^{-3} \cdot \deg^{-1}$. Poněvadž obě hodnoty jsou přibližně stejné, bereme tepelnou kapacitu teploměru vztaženou na 1 cm³ $0,46 \cdot 10^{-3} kcal \cdot cm^{-3} \cdot \deg^{-1}$. Je-li V objem ponořené části teploměru (určíme jej kalibrovanou nádobou), je tepelná kapacita kalorimetru s příslušenstvím

$$K = m'c' + m''c'' + 0,46 \cdot 10^{-3} V. \quad (2)$$

Poněvadž ve vztahu (2) je číselný koeficient, musí být přesně stanoveno, v jakých jednotkách musí být uvedené veličiny měřeny; m' a m'' v kg, V v cm³, c' a c'' v $kcal \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$. Kalorimetr a míchačka bývají obvykle zhotoveny z mosazi, jejíž $c' = c'' = 0,093 kcal \cdot kg^{-1} \cdot \deg^{-1}$.

2. Měřením určujeme tepelnou kapacitu kalorimetru takto:

Do kalorimetru dáme odvážené množství vody m_1 a po vyrovnání její teploty s teplotou kalorimetru změříme její teplotu t_1 . Potom přidáme do kalorimetru množství m_2 vody o teplotě t_2 a po vyrovnání teplot změříme výslednou teplotu t . Pak z kalorimetrické rovnice

$$m_1 c (t - t_1) + K (t - t_1) = m_2 c (t_2 - t)$$

vychází

$$K = m_2 c \frac{t_2 - t}{t - t_1} - m_1 c,$$

kde c je měrné teplo vody ($c = 1,00 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$).

b) Určování měrného tepla pevných látek

Měrné teplo pevných látek určujeme takto:

Do kalorimetru o tepelné kapacitě K dáme kapalinu, v níž se zkoumaná látka nerozpouští, s níž chemicky nereaguje a jejíž měrné teplo c_1 známe její hmotu označme m_1 a teplotu t_1 . Pak do kapaliny vložíme těleso, jehož měrné teplo určujeme, zahřáté na vhodnou teplotu; jeho hmotu označme m_2 , měrné teplo c_2 a teplotu t_2 . Když se výsledná teplota ustálí na hodnotě t , odevzdala vložená látka teplo $m_2 c_2 (t_2 - t)$, které přijala jednak kapalina - $m_1 c_1 (t - t_1)$, jednak kalorimetr - $K (t - t_1)$. Proto platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 (t - t_1) + K (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t).$$

Odtud

$$c_2 = \frac{(m_1 c_1 + K) \cdot (t - t_1)}{m_2 (t_2 - t)}.$$

Těleso, jehož měrné teplo určujeme, zahřejeme v lázni na teplotu t_2 (blízko 100°C). Potom těleso přeneseme do kalorimetru. Přenášení musíme provést velmi rychle, aby se jeho teplota nezměnila. Přitom musíme dát pozor, abychom do kalorimetru nepřenesli i kapalinu z lázně.

c) Určování skupenského tepla tání

Budeme určovat skupenské teplo tání l látky, jejíž teplotu tání t_0 , měrné teplo v pevném skupenství c_2 a měrné teplo v kapalném skupenství c_3 známe.

Do kalorimetru o tepelné kapacitě K dáme nejprve kapalinu, v níž se zkoumaná látka nerozpouští, s níž chemicky nereaguje a jejíž měrné teplo známe (obvykle vodu). Její hmotu označme m_1 , měrné teplo c_1 a teplotu t_1 . Teplota t_1 musí být dostatečně vyšší než teplota tání t_0 zkoumané látky. Pak do kapaliny vhodíme kousek zkoumané látky v pevném skupenství, teploty t_2 . Hmotu m_2 zkoumané látky určíme dodatečně z přírůstku hmoty kalorimetru s kapalinou. Pevná látka se nejdříve zahřeje na teplotu tání t_0 , pak se její skupenství změní v kapalně téže teploty. Nyní se teploty obou kapalin vyrovnají a ustálí na výsledné teplotě t . Teplo potřebné k přeměně skupenství a k ohřátí pevné látky a vzniklé kapaliny se odebere kapalině, kterou jsme dali do kalorimetru a kalorimetru s příslušenstvím.

K zahřátí látky hmoty m_2 o měrném teple c_2 z teploty t_2 na teplotu t_0 je zapotřebí $m_2 c_2 (t_0 - t_2)$ tepla. Na proměnu skupenství této látky je zapotřebí $m_2 l$ tepla. Na zahřátí kapaliny o hmotě m_2 a měrném teple c_3 z teploty t_0 na teplotu t je pak zapotřebí $m_2 c_3 (t - t_0)$ tepla. Toto teplo se odebere jednak kapalině v kalorimetru - $m_1 c_1 (t_1 - t)$, jednak kalorimetru s příslušenstvím - $K (t_1 - t)$. Proto platí rovnice

$$m_1 c_1 (t_1 - t) + K (t_1 - t) = m_2 c_2 (t_0 - t_2) + m_2 l + m_2 c_3 (t - t_0)$$

a z ní pak určíme neznámé skupenské teplo tání l .

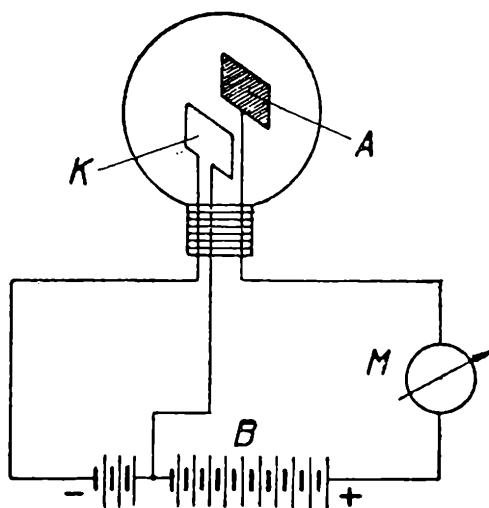
Redakční sdělení

* Čtenář nám píše: Ačkoliv jsem již starý vojenský důchodce, uchoval jsem si zálibu v řešení různých matematických a fyzikálních problémů. Pročítám proto s pozorností i Vaše Rozhledy. Mám radost z toho, že věnujete ve svém časopise více místa takovým článkům, z nichž může čerpat poučení hlavně mladší generace - žáci vyšších ročníků škol - aby byla u nich vzbuzena záliba pro tento vědní obor. Je to velké plus, které my staří jsme kdysi velmi postrádali. Přeji Vám proto k dalšímu vydávání Rozhledů matematicko-fyzikálních mnoho zdaru.

F. K. Obrubce-Všeborsko.

* Vedení fyzikální olympiády nás žádá o tuto opravu: Na str. 41 prvního čísla Rozhledů má být na 13. řádce zdola ÚV FO místo ÚV FC; na str. 46 v 1. řádce budiž h_1 = místo β_1 =. Na str. 78 ve fyzikálním příkladě 1. v čitateli zlomku vyplňte prázdné místo činitelem a_3 . Na str. 79 v příkladě 2. má znít hodnota gravitační konstanty $\kappa = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$.

* Obr. 1. náleží k článku in ž. L. S m r ž e J a k v z n i k l a e l e k t r o n k a v minulém čísle na str. 73.



Matematika

Jaroslav Krbiša, VŠLD, Zvolen:

Riešiteľnosť a geometrická interpretácia sústavy dvoch lineárnych rovníc

V 37. ročníku RMF č. 2 bol uverejnený článok: *D e t e r m i n a n t y*, od Jaroslava Chudého. Okrem iného v ňom autor píše, že determinanty hrajú dôležitú rolu v teórii riešenia lineárnych rovníc a že sa používajú aj v analytickej geometrii. V tomto článku poukážeme na použitie determinantov pri skúmaní riešiteľnosti sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Výsledky budeme geometricky interpretovať (vysvetľovať). Budeme sa pritom odvolávať na článok doc. Emila Kraemera: *O analytickej geometrii v rovine* (ďalej AG), ktorý bol uverejnený na pokračovanie v 37. a 38. ročníku RMF.

Pre úplnosť uvedieme najprv niečo o determinantoch druhého stupňa. Hodnota determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ je } a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

$$\text{Napríklad: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot -3 = 10.$$

Lahko si každý dokáže nasledujúce vety.

V e t a 1. Hodnota determinantu sa nezmení, ak vymeníme riadky za stĺpce.

Preveríme tvrdenie tejto vety na predchádzajúcom príklade. Ak vymeníme v ňom riadky za stĺpce, máme

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 10.$$

P o z n á m k a : Veta 1. hovorí o „rovnocennosti“ riadkov a stĺpcov

determinantu. Keď niečo dokážeme, že platí pre riadky, platí to podľa vety 1. aj pre stĺpce.

V e t a 2. Ak vymeníme v determinante riadky, resp. stĺpce, zmení hodnota determinantu znamienko.

Nasledujúcu vetu, ktorú budeme často potrebovať dokážeme.

V e t a 3. Ak je hodnota determinantu rovná nule, tak prvky jeho riadkov, resp. stĺpcov sú úmerné.

D ô k a z prevedieme pre riadky. Nech

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0 \quad (1)$$

a nech aspoň jeden prvok determinantu je nie nula. Pretože označenie prvkov je v našej moci, použitím vety 1. a 2. môžeme doceliť, že $a_1 \neq 0$.

Označme $\frac{a_2}{a_1} = k$, alebo $a_2 = k a_1$. Keď toto dosadíme do (1) dostaneme

$b_2 = k b_1$, tj. prvky riadkov sú úmerné.

V prípade, že všetky prvky determinantu sú nuly, je tvrdenie zrejmé.

K vete 3. je obrátenou vetou veta 4.

V e t a 4. Ak v determinante prvky jeho riadkov, resp. stĺpcov sú úmerné, tak je hodnota determinantu rovná nule.

D ô k a z je jednoduchý:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ k a_1 & k b_1 \end{vmatrix} = a_1 k b_1 - b_1 k a_1 = 0$$

Majme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{aligned} \quad (2)$$

kde x, y sú neznáme a a_1, b_1, c_1 a a_2, b_2, c_2 sú dané reálne čísla.

R i e š e n í m s ú s t a v y (2) budeme nazývať dvojicu čísel (x_0, y_0) pre ktorú platia rovnosti

$$\begin{aligned} a_1 x_0 + b_1 y_0 &= c_1, \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 &= c_2. \end{aligned}$$

Riešiť sústavu (2) znamená udať množinu všetkých jej riešení.

V ďalšom budeme vždy predpokladať, že aspoň jeden z koeficientov a_1, b_1 a aspoň jeden z koeficientov a_2, b_2 je od nuly rôzny.

Z AG 37. roč., č. 5, veta 7. vieme, že rovnica $ax + by = c$, za predpokladu, že aspoň jeden z koeficientov a, b je rôzny od nuly, je rovnicou priamky.

Rovnice sústavy (2) sú preto z geometrického hľadiska rovnicami dvoch priamok a riešenie predstavuje množinu priesečníkov tých priamok.

Zaoberajme sa existenciou riešenia sústavy (2) a predpokladajme, že sústava má aspoň jedno riešenie. Vynásobme prvú rovnicu v (2) číslom

b_2 , druhú číslom $-b_1$ a sčítajme ich. Podobne urobíme po vynásobení prvej rovnice číslom $-a_2$ a druhej číslom a_1 . Dostaneme

$$\begin{aligned}(a_1b_2 - b_1a_2)x &= c_1b_2 - b_1c_2, \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y &= a_1c_2 - c_1a_2.\end{aligned}\tag{3}$$

Označme $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

D budeme nazývať **determinantom** sústavy rovníc (2). Označenie D_x nám má pripomenúť, že sme tento determinant dostali z D zámenou koeficientov pri x v sústave (2) absolútnymi členmi c_1, c_2 . Podobne D_y . Z vety 2. vyplýva, že toto poradie je treba zachovať. Rovnice (3) môžeme prepísať nasledovne

$$\begin{aligned}D \cdot x &= D_x, \\ D \cdot y &= D_y.\end{aligned}\tag{4}$$

P o z n á m k a Pretože sme s rovnicami sústavy (2) robili len také úpravy (násobenie rovnice číslom, sčítanie rovníc), pri ktorých sa nemôže riešenie stratiť, tak všetky riešenia sústavy (2) sa musia nachádzať medzi riešeniami sústavy (4).

Predpokladajme ďalej:

A) **D e t e r m i n a n t** sústavy je *rôznyi od nuly*, tj. $D \neq 0$.

Potom z rovníc (4) máme tzv. **C r a m e r o v e v z o r c e**

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},\tag{5}$$

z ktorých dostávame **jediné riešenie** sústavy (4)

$$\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right),\tag{6}$$

ktoré podľa poznámky môže, ale nemusí byť riešením sústavy (2). Dosadením do sústavy (2) zistíme, že dvojica (6) je jej riešením.

Z geometrického zreteľa sústava (2) v prípade, že $D \neq 0$ znamená dvojicu priamok, ktoré majú spoločný jediný bod - priesečník.

P r í k l a d 1. Riešme sústavu rovníc

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\ -2x + y &= -3\end{aligned}\tag{7}$$

Riešenie:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

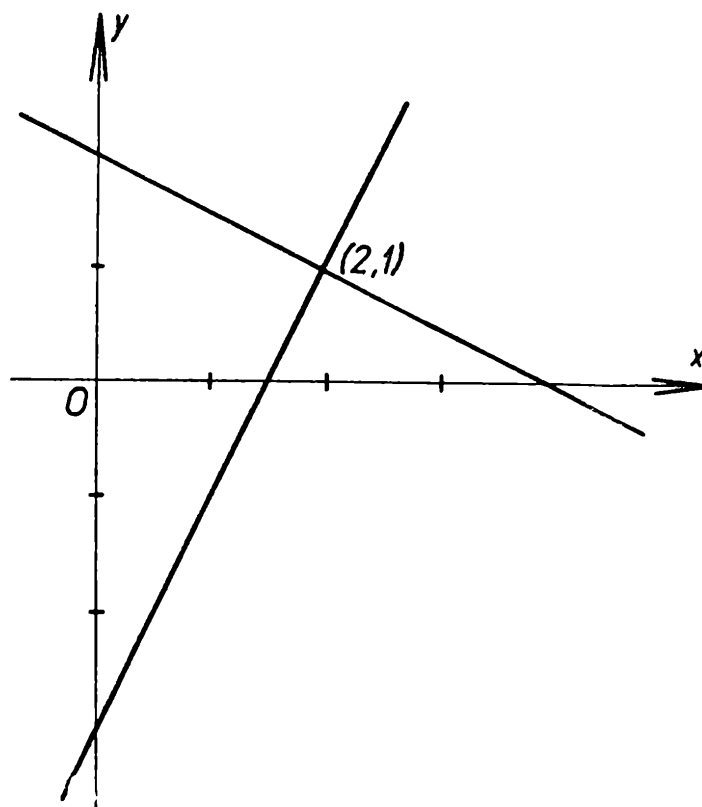
preto sústava (7) má **jediné riešenie**.

Ďalej je

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5,$$

preto podľa (5) dostávame

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{5} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5}{5} = 1.$$



Obr. 1

Jediné riešenie sústavy (7) je (2, 1).

Na obr. 1. sú zobrazené priamky dané sústavou v príklade 1. Súradnice ich priesečníku udávajú riešenie sústavy (7).

(Pokračovanie)

Stanislav Trávníček, P. U., Olomouc:

Grafické znázorňování periodických funkcí v polární soustavě souřadnic

(Pokračování)

Příklad 5. Najdeme graf funkce $\rho = \cos(\varphi + \varphi_0)$, kde φ_0 je konstantní číslo.

Řešení: Tuto funkci porovnáme s funkcí $\rho' = \cos \varphi'$, jejíž graf

už známe. Pro body $M(\rho; \varphi)$ hledaného grafu při $\rho = \rho'$ platí

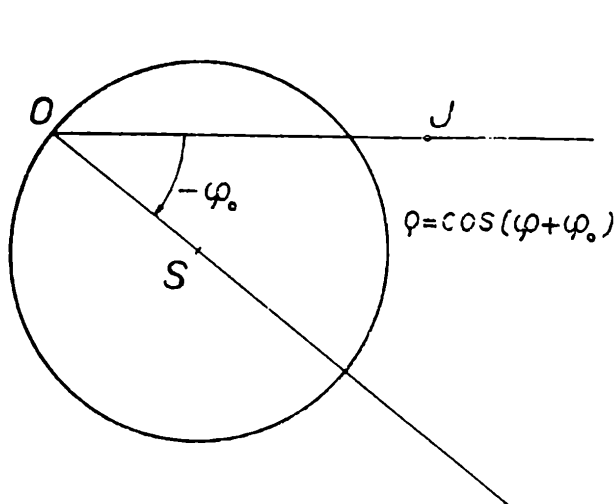
$$M(\rho; \varphi) \equiv M'(\rho; \varphi' - \varphi_0)$$

Graf naší funkce dostaneme tudíž z grafu funkce $\rho = \cos \varphi$ jeho otočením kolem pólu o úhel $-\varphi_0$. Máme výsledek:

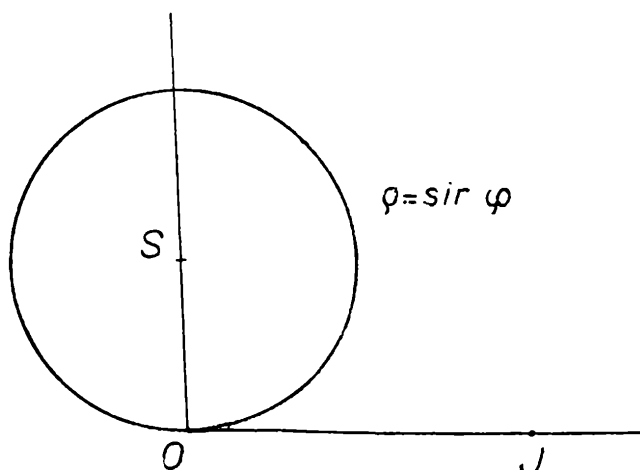
Grafem funkce $\rho = \cos(\varphi + \varphi_0)$ pro $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$, kde φ_0, φ_1 , jsou libovolná čísla, v polární soustavě souřadnic je dvakrát počítaná kružnice o středu $\left(\frac{1}{2}; -\varphi_0\right)$ a o poloměru $\frac{1}{2}$. Pól O je přiřazen hodnotám $\varphi = -\varphi_0 + (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde k je libovolné celé číslo. Na obr. 7 máme graf

této funkce; zvolili jsme $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Příklad 6. Na základě předchozího příkladu najdeme graf funkce $\rho = \sin \varphi$.



Obr. 7



Obr. 8

Ř e š e n í: Podle goniometrických vzorců je

$$\sin \varphi = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right).$$

Podle příkladu 6. je tedy grafem funkce $\rho = \sin \varphi$ v polární soustavě souřadnic pro $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$, kde φ_1 je libovolné číslo, dvakrát počítané kružnice o středu $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a o poloměru $\frac{1}{2}$ (obr. 8). Pól je přiřazen k hodnotám $\varphi = k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Příklad 7. Najdeme graf funkce $\rho = 2 \cos \varphi$.

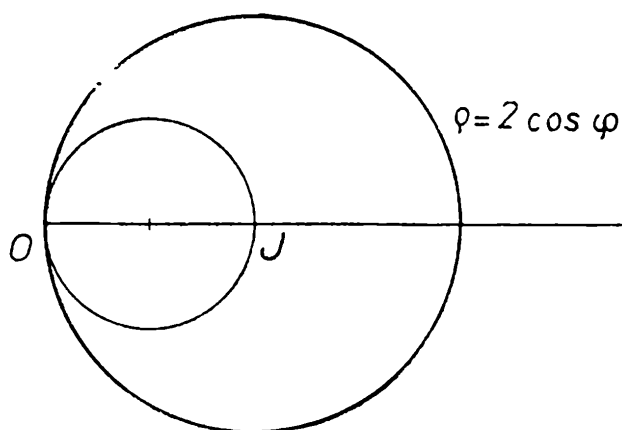
Ř e š e n í: Porovnáme-li rovnici této funkce s rovnicí $\rho' = \cos \varphi'$, vidíme, že pro totéž φ je $\rho = 2\rho'$, tj. graf funkce $\rho = 2 \cos \varphi$ je útvar stejnohlý ke grafu funkce $\rho = \cos \varphi$ se středem stejnohllosti O a koeficientem 2. Útvar stejnohlý ke kružnici procházející počátkem v dané stej-

nolehlosti je opět kružnice, procházející počátkem a její poloměr je dvojnásobný (obr. 9).

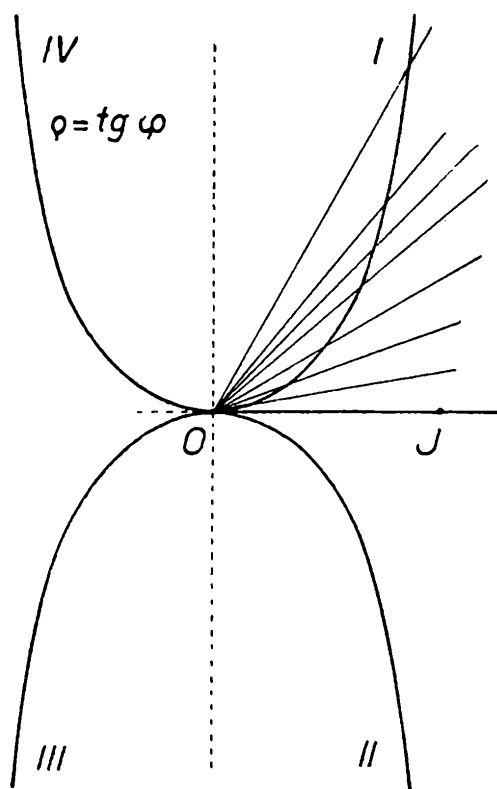
Grafem funkce $\rho = 2 \cos \varphi$ pro $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$, kde φ_1 je libovolné číslo, je tedy dvakrát počítaná kružnice se středem $(1; 0)$ a poloměrem 1.

Podle příkladu 8. dovedeme nyní sestavit graf každé funkce, jejíž rovnice je tvaru $\rho = a \cos \varphi$, kde a je libovolné číslo různé od nuly a od jedné, a tedy podle příkladu 6. každé funkce s rovnicí tvaru $\rho = a \cos(\varphi + \varphi_0)$, kde φ_0 je libovolné konstantní číslo.

Úloha. Najděte graf funkce, která je dána rovnicí $\rho = 3 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.
Jde tu podobně jako v příkladech 6. a 8. o otočení a stejnoolehlost.



Obr. 9



Obr. 10

V předchozích příkladech jsme našli grafy daných funkcí na základě určitých geometrických úvah, které však někdy bývají i dosti složité. Ukážeme si nyní způsob, jak je vždy možno sestavit poměrně jednoduše graf libovolné periodické funkce s periodou 2π .

Příklad 8. Sestavíme graf funkce $\rho = \operatorname{tg} \varphi$.

Ř e š e n í: Nejprve sestavíme tabulku, v níž hodnoty funkce zaokrouhluje, např. na dvě desetinná místa (podle toho, jakou si volíme jednotku). Velikost úhlů φ je pro přehlednost daná v míře stupňové (tab. I).

Dále sestavíme (třeba pomocí úhloměru) polopřímky s počátkem v bodě O , svírající s polopřímkou OJ úhly o velikosti φ z tabulky a nanese na ně od bodu O příslušné hodnoty $\operatorname{tg} \varphi$. Body, které takto dostaneme, spojíme plynulou čarou (obr. 10).

U funkce tangens považujeme pól O za graf funkce pro $\varphi = k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Podobně sestrojíme graf pro $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$, $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \varphi \leq 2\pi$ a využíváme přitom toho, že $\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg} \varphi$ a $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg} \varphi$.

Tabulka I.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$\operatorname{tg} \varphi$	0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,00	1,19	1,73	2,75	5,67	není defin.

Nakonec ke každé části grafu připíšeme, ke kterým hodnotám φ patří. Označíme-li množinu hodnot φ , pro něž

$$2k\pi < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{číslem I,}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi < \pi + 2k\pi \quad \text{číslem II,}$$

$$\pi + 2k\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{číslem III,}$$

$$\text{a} \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \varphi < 2\pi + 2k\pi \quad \text{číslem IV,}$$

kde k je libovolné celé číslo, pak stačí k jednotlivým částem grafu připsat číslo množiny, z níž bereme φ . Tak jsme jednotlivé části grafu očíslovali na obr. 10.

Zajímavý výsledek dá grafické znázornění funkcí $\rho = \sin n\varphi$ a $\rho = \cos n\varphi$, kde n je přirozené číslo, jež obě mají též periodu 2π . Víme, že jejich nejmenší perioda je $\frac{2\pi}{n}$.

Příklad 9. Sestrojíme graf funkce $\rho = \sin 5\varphi$.

Řešení: Nejmenší perioda této funkce je $\frac{2\pi}{5}$ (72°). Sestrojíme-li graf pro $0 < \varphi < \frac{2}{5}\pi$ způsobem popsáním v předchozím příkladě, pak graf pro $\frac{2}{5}\pi < \varphi < \frac{4}{5}\pi$ vznikne z prvního grafu otočením o $\frac{2}{5}\pi$ v kladném smyslu a podobně dále. Znamená to, že graf funkce $\sin 5\varphi$ pro φ od nuly do 2π se skládá z pěti shodných částí. Nakonec ještě přidáme podmínku, že pól považujeme za graf funkce pro $\varphi = k\frac{\pi}{5}$, kde k je libovolné celé číslo. Výsledek máme na obr. 11., kde je u každé části grafu naznačeno

číslem, v jakém pořádku dostáváme jednotlivé části, roste-li φ od nuly do 2π .

Úloha. Sestrojte grafy funkcí $\rho = \sin n\varphi$ pro $n = 2, 3, 4$.

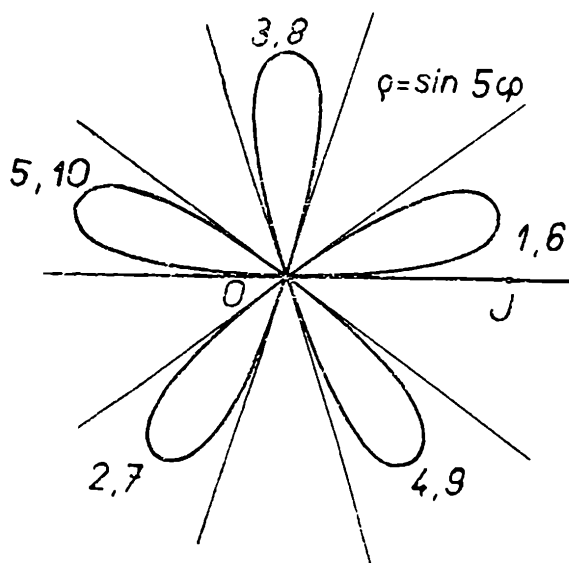
Nakonec si uvedeme, jak lze sestavit graf funkce, která je dána jako součet, nebo rozdíl jiných funkcí (např. $\rho = \sin 2\varphi + 3 \cos \varphi$). Nabízí se nám tento postup: sestrojíme grafy sčítanců (tj. funkcí $\rho = \sin 2\varphi$ a $\rho = 3 \cos \varphi$), pak si zvolíme dostatečný počet polopřímek s počátkem O a na nich provedeme grafické sčítání (případně odčítání) příslušných hodnot jednotlivých funkcí.

Je možno také postupovat způsobem popsaným v příkladě 9. pro funkci tangens, nebo hledat graf na základě geometrických úvah.

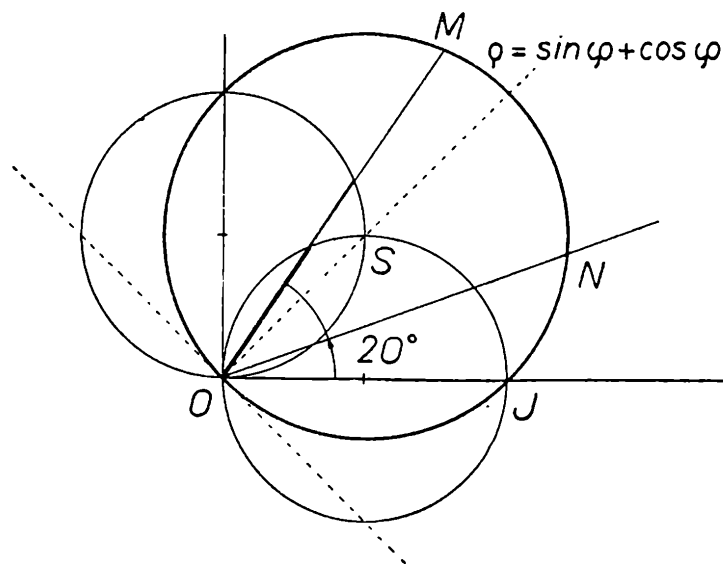
Všechny tyto způsoby si ověříme v následujícím příkladě.

Příklad 10. Sestrojíme graf funkce $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi$.

Řešení: Podle toho, co bylo řečeno výše, sestrojíme grafy funkcí $\rho = \sin \varphi$ a $\rho = \cos \varphi$, volíme polopřímky s počátkem O a na nich provádíme grafické sčítání; na obr. 12 je tak zobrazen bod M .



Obr. 11



Obr. 12

Stejný výsledek jistě dostaneme, sestavíme-li tabulku II a graficky znázorníme jednotlivé body tabulky, které pak spojíme plynulou čarou; tak je třeba sestrojen na obr. 12. bod N .

Jistě vidíte, že oba tyto způsoby nejsou naprosto přesné, neboť graf funkce sestavujeme pomocí několika bodů grafu.

Pokusme se dospět k výsledku na základě rozboru rovnice funkce.

Tabulka II.

φ	0°	10°	20°		350°
$\sin \varphi + \cos \varphi$	1,00	1,16	1,28		0,83

Platí

$$\rho = \sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \right).$$

Víme, že

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

takže

$$\rho = \sqrt{2} \left(\sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi \right),$$

tj.

$$\rho = \sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right).$$

Máme tedy výsledek:

Grafem funkce $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi$ pro $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$, kde φ_1 je libovolné číslo, je dvakrát počítaná kružnice o středu $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right)$ a o poloměru $\sqrt{2}$.

Takto jsme tedy našli graf dané funkce, aniž jsme prováděli nějaké konstrukce.

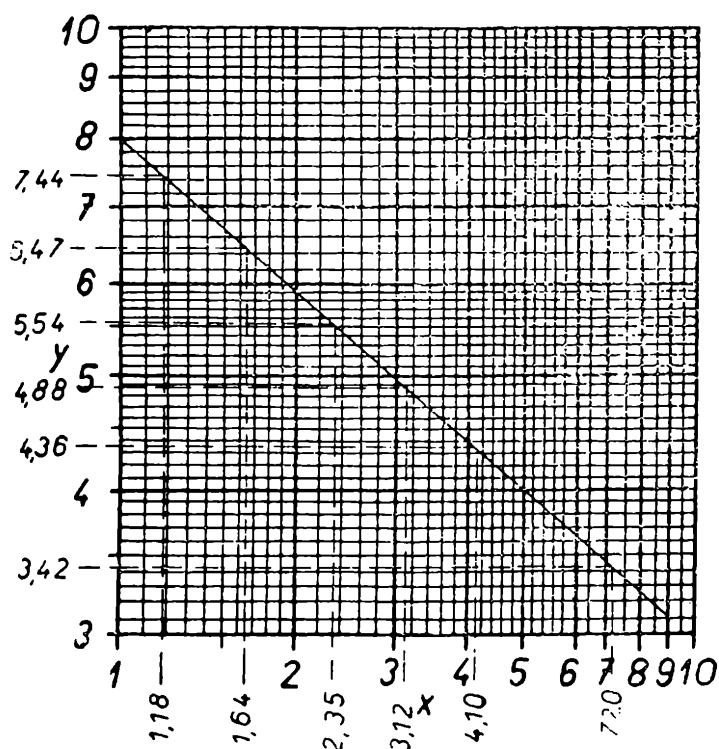
E v ž e n J o k l, ČVUT, Praha:

Jak se graficky znázorňují funkce

Často se funkce $y = f(x)$ znázorňují tak, že se zvolí *osový kříž*, tj. osy (x) a (y) a vynáší se na osu (x) několik hodnot proměnných $x: x_1, x_2, \dots, x_n$, na osu (y) jim odpovídající hodnoty $y: y_1, y_2, \dots, y_n$. Přitom všechny délky se vynášejí ve stejných jednotkách, např. v centimetrech. Pak se známým způsobem sestojí body grafu pomocí dvou trojúhelníkových

pravítek, neboť je třeba vést rovnoběžky s osami. Všechny body grafu se nakonec spojí plynulou čarou křivítkem. Existují i takové funkce, jejichž grafem není souvislá plynulá čára, těmi se však zabývat nebudeme. Graf funkce slouží nejen k ilustraci o průběhu funkce, ale může ho být užito i ke „čtení“ funkčních hodnot, ovšem s omezenou přesností.

Postup je zřejmý. Daná hodnota x se vynese na ose (x), vede se rovnoběžka s osou (y), až protne graf, tímto průsečíkem se vede rovnoběžka s osou (x), jež protíná osu (y) v bodě, jehož vzdálenost od počátku je hledané číslo y . Pro usnadnění a urychlení tohoto postupu se na osy (x) a (y) rýsují stupnice (x), resp. (y), to je: vyznačí se dostatečné množství bodů s jejich kótami tak, aby se mezi nimi mohlo interpolovat od oka. Pak není třeba užívat měřítka k vynášení a čtení kót.



Obr. 1. Graf funkce $y = 8 \cdot x^{-0,43}$ na logaritmickém papíru.

Všemi dělicími body obou stupnic se vedou rovnoběžky s osami (y), resp. (x), takže pak není třeba ani dvou pravítek pro sestrojování bodů grafu. Tato síť, skládající se ze dvou soustav kótovaných přímek, rovnoběžných s osami souřadnicovými, se nazývá grafický papír.

Může se však vyskytnout takováto nesnáz: Potřebujeme-li graf dané funkce pro hodně veliký interval (x), musili bychom mít velikou ná-kresnu, aby se na ni graf vešel. V takovém případě se volí na ose (x) menší „měřítko“, například poloviční, takže vzdálenost bodu s kótou x od počátku je nyní jen $\frac{x}{2}$. Budeme proto v dalším užívat pro vzdálenosti od počátku na ose (x) písmene ξ , na ose (y) písmene η .

Jsou tedy ξ, η známé kartézské souřadnice. V dalším se budou rozumět v centimetrech. Souřadnicové osy budeme označovat

symboly (ξ) a (η) . Vztah mezi kótami x , resp. y a příslušnými souřadnicemi ξ , resp. η , je dán rovnicemi (nazývají se z o b r a z o v a c í)

$$\xi = \alpha \cdot x, \quad \eta = \beta \cdot y, \quad (1)$$

kde α, β jsou kladné konstanty (α cm, β cm jsou m o d u l y příslušných stupnic). V našem prvním příkladě bylo $\alpha = 1$, v druhém $\alpha = \frac{1}{2}$. Někdy

naopak je vhodné volit $\alpha > 1$, jestliže by totiž byla stupnice (x) příliš krátká. Každý g r a f i c k ý p a p í r, definovaný zobrazovacími rovnicemi (1), se nazývá r o v n o m ě r n ý p a p í r, nebo častěji m i l i m e t r o v ý p a p í r. Pod názvem milimetrový papír je k dostání v papírnictví, avšak jen při $\alpha = \beta = 0,1$ (dělení po milimetrech). Na rovnoměrném papíru se znázorní lineární funkce $y = ax + b$ jako přímky, kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ jako parabola atd. Rovnice $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ se zobrazí jako elipsa¹⁾, ale vhodnou volbou konstant α, β se může dosáhnout, že grafem bude kružnice. Rovnici grafu totiž dostaneme dosazením $\frac{\xi}{\alpha}$ za x , $\frac{\eta}{\beta}$ za y , tedy $a^2\frac{\xi^2}{\alpha^2} + b^2\frac{\eta^2}{\beta^2} = c^2$. Volíme-li α, β tak, aby platilo $\frac{a^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{\beta^2}$, pak je grafem kružnice.

Formu grafu je možno ovlivnit i podstatněji, a to tím, že na osách (ξ) a (η) budou stupnice nikoli rovnoměrné jako dosud, ale složitější, nerovnoměrné. Budeme se zabývat případem, že obě jsou l o g a r i t m i c k é, takže jejich zobrazovací rovnice jsou

$$\xi = \alpha \cdot \log x, \quad \eta = \beta \cdot \log y \quad (2)$$

Tento grafický papír se nazývá *logaritmický papír*; je na obr. 1 při $\alpha = 10, \beta = 20$. Prodává se i v papírnictví při rozmanitých konstantách α, β .

Mějme nyní funkci $y = x^2$, která se na milimetrovém papíru zobrazí parabolou. Vyneseme-li však na logaritmický papír několik bodů části grafu pro $x > 0$, zjišťujeme, že všechny leží na jedné přímce. Vskutku grafem funkce $y = x^2$ je přímka. Její rovnice se může odvodit tak, že do rovnice $y = x^2$ dosadíme $x = 10^{\xi/\alpha}, y = 10^{\eta/\beta}$, jak plyne ze zobrazovacích rovnic. Máme pak $10^{2\xi/\alpha} = 10^{\eta/\beta}$, neboli $\frac{2\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta}$, což je rovnice přímky. Obecně platí, že každá mocninná funkce tvaru

$$y = a \cdot x^r \quad x > 0, a > 0, r \text{ reálné} \quad (3)$$

se zobrazí na logaritmickém papíru přímkou. Je totiž $10^{\eta/\beta} = 10^{\log a + r \xi/\alpha}$ a z toho plyne rovnice grafu $\eta = \frac{\beta}{\alpha} r \xi + \beta \log a$. Graf je tedy přím-

¹⁾ Viz články D o c. E. K r a e m e r a: O a n a l y t i c k é g e o m e t r i i v r o v i n ě v loňském ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních.

ka o směrnici $\frac{\beta}{\alpha} r$ a protíná osu (η) v bodě s kótou a (neboť při $\xi = 0$ je $\eta = \beta \log a$). Význam logaritmického papíru spočívá nejen v tom, že se snadno sestrojí graf funkce $y = a \cdot x^r$ (stačí sestrojit dva body grafu a spojit je přímkou), ale graf bude narýsován s velikou přesností, takže funkční hodnoty je možno číst dosti přesně, zpravidla na tři místa.

Dosud jsme se nezabývali otázkou, jak je nutno volit α, β , aby se náčrt vešel na danou nákresnu a přitom aby bylo nákresny co nejúčelněji využito pro dané rozsahy proměnných. Budiž tedy proměnná x v rozmezí x_1, x_n , proměnná y v rozmezí y_1, y_n . Délka logaritmické stupnice (x) je pak rovna $L_x = |\alpha \log x_n - \alpha \log x_1|$, podobně délka logaritmické stupnice (y) je $L_y = |\beta \log y_n - \beta \log y_1|$. Z toho plynou vzorce pro výpočet α, β .

$$\alpha = \frac{L_x}{|\log x_n - \log x_1|}, \quad \beta = \frac{L_y}{|\log y_n - \log y_1|} \quad (4)$$

Mějme například zobrazit funkci $y = 8 \cdot x^{-0,43}$ pro x v rozmezí 1 až 9, aby obrázek měl rozměry asi 10×10 cm. Je tedy $x_1 = 1, x_n = 9, y_1 = 8, y_n = 3,11$. Podle vzorců (4) bude

$$\alpha = \frac{10}{|\log 9 - \log 1|} = 10,5, \quad \beta = \frac{10}{|\log 3,11 - \log 8|} = 21,8.$$

Vypočtené hodnoty ovšem zaokrouhlíme, takže volíme $\alpha = 10, \beta = 20$. Na obr. 1 je celý náčrt ve zmenšeném měřítku 1 : 2. Je tam také zakresleno jak se čtou funkční hodnoty y k daným hodnotám proměnné x . Pokuste se na tentýž obrázek zakreslit grafy jiných funkcí typu (3), např. $y = x^2, y = 4\sqrt{x}, y = \frac{1}{x}$, atd. a srovnejte funkční hodnoty čtené pomocí grafu s přesně vypočtenými!

Deskriptivní geometrie

K a r e l D r á b e k, ČVUT, Praha:

Sestrojení paraboly pomocí pevné kružnice a přímky

Při sestrování jednotlivých bodů paraboly pomocí její ohniskové definice užíváme řady soustředných kružnic, které protínáme rovnoběžkami s přímkou řídící ve vzdálenosti poloměrů zvolených kružnic.

D ů k a z (obr. 1). Užijeme nejdříve bodu $\bar{O}$. Je třeba ukázat, že získaný bod M má stejnou vzdálenost od bodu F jako od jiné pevné přímky d rovnoběžné s danou přímkou g .

K tomu vedme bodem F rovnoběžku se zvolenou sečnou bodem O , která protne přímkou v v bodě Q . Potom $QV = FO = UF = r$ a dále z podobných rovnoramenných trojúhelníků MUV , FUO plyne, že $MU = MV$ a protože $MQ = MV + VQ$, $MF = MU + UF$, je

$$MQ = MF.$$

Body M leží tedy na parabole s ohniskem F . Z konstrukce je patrné, že přímka řídící d musí procházet bodem Q a být rovnoběžná s danou přímkou g . Pro určení parametru p paraboly, je-li F_o průsečík řídící přímky d s osou o , pak platí

$$p = FF_0 = FG_0 + F_0G_0 = FG_0 + VQ = FG_0 + OF = q + r$$

V případě, že použijeme bod O' je postup důkazu obdobný. Rovnoběžka bodem F se zvolenou sečnou bodem O' protne přímkou v' v bodě Q' . Opět platí $V'Q' = O'F = U'F = r$ a z podobných rovnoramenných trojúhelníků $M'U'V'$, $FU'O'$ plyne, že $M'U' = M'V'$ a tedy

$$M'Q' = M'F.$$

Body M' leží na parabole s ohniskem F a parametrem $p = q - r$.

Tím je proveden důkaz celé věty.

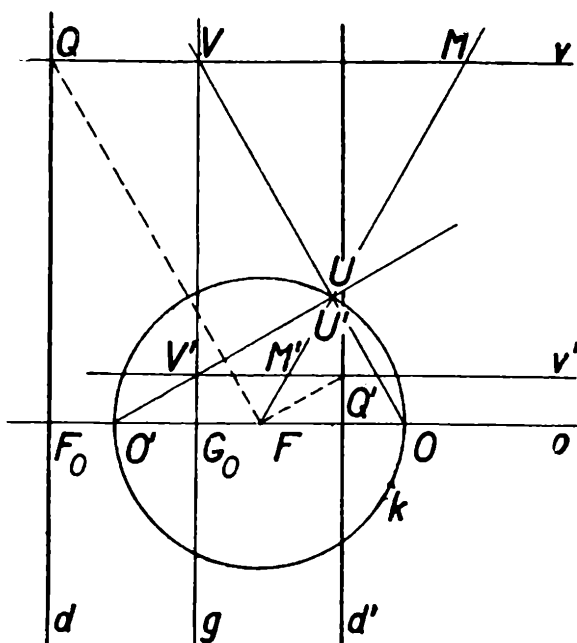
P o z n á m k a 1. Osa souměrnosti úsečky UV (které jsme použili při konstrukci bodu M naší paraboly) je tečnou paraboly v sestrojeném bodě M , neboť pŕl jeho ŕhel pŕvodičŕ. To je zŕejmo pŕvŕ z toho, ŕe $\triangle UVM$ je rovnoramennŕ se základnou UV

Za cvičení ukažte sami:

Ú l o h a 1. Je-li přímka g tečnou kružnice k (obr. 2), pak popsanou konstrukcí získáme pouze jednu parabolu s ohniskem F a parametrem $p = 2r$. Daná přímka g je vrcholovou tečnou sestrojené paraboly a bod dotyku přímky g a kružnice k je jejím vrcholem.

Pro zbývající polohu přímky g a kružnice k platí:

V ě t a 2. *Je-li přímka g sečnou kružnice k , pak uvedenou konstrukcí získané body leží na parabole s ohniskem ve středu dané kružnice a s para-*



Obr. 3

metrem $p = r + q$ (při volbě bodu O) nebo $p = r - q$ (při volbě bodu O').

D ů k a z (obr. 3) probíhá stejně jako v případě nesečny. Při použití bodu O dostaneme pro určení velikosti parametru p , že

$$p = FF_o = FG_o + G F = r + q.$$

V případě bodu O' leží bod F mezi přímkami g a d a pro parametr p stanovené paraboly platí

$$p = r - q$$

P o z n á m k a 2. Oba body P_1, P_2 , ve kterých přímka g protíná kružnici k patří sestrojovaným parabolám.

Uvedenými konstrukcemi lze sestřiovat body paraboly určené ohniskem, osou a parametrem po zvolení pevné kružnice a určení pevné přímky již jen jedním pravítkem, jestliže si předem vytkneme soustavu rovnoběžek s osou paraboly. Konstrukce je nevýhodná v okolí vrcholu paraboly.

Za cvičení proveďte:

Ú l o h a 2. V případě, že přímka g prochází středem kružnice $k(F; r)$, jsou obě sestrojené paraboly shodné s opačnými osami a parametrem $p = r$.

Fyzika

In ž. d r. V á c l a v Š i n d e l á ř, ÚN, Praha:

Kapalinové tlakoměry

Pro nepříliš velké tlakové rozsahy se běžně používá různých typů *tlakoměrů kapalinových*. U těchto tlakoměrných přístrojů je měřený tlak (resp. přetlak nebo obecná tlaková difference) kompenzován hydrostatickým tlakem vhodné tlakoměrné kapaliny. Odtud je též pojmenování těchto přístrojů. Touto kapalinou jsou buď naplněny (zčásti) přímé *t r u b i c e*, svislé nebo šikmé, skleněné nebo kovové apod., stálého kruhového průřezu, případně také průřezů plynule nebo přetržitě proměnlivých, dále pak *n á d o b y* a *n á d o b k y* různých tvarů. Podle toho hovoříme také o *kapalinových tlakoměrech trubicových, nádobkových* apod. Kromě toho existuje řada přístrojů speciální konstrukce, u nichž hraje tlakoměrná kapalina rovněž důležitou úlohu. U nich však tlakový údaj se nezískává přímým nebo nepřímým sledováním změn její volné hladiny, nýbrž jinými způsoby. Tak je tomu např. u *tlakoměrů zvono- vých, tlakoměrů prstenových* apod. O jednotlivých zmíněných typech bu-

deme hovořit podrobněji dále. Je jen třeba v tomto úvodním terminologickém odstavci se zmínit ještě o tom, že se setkáme i s dalšími názvy některých typů kapalinových tlakoměrů, které vystihují buď zvláštní konstrukci, nebo funkční uspořádání přístroje. Setkáme se např. s *tlakoměry plovákovými, kompresními, s tlakoměry U otevřenými* nebo *zavřenými* aj.

Tlakoměrná kapalina nemá být těkavá. Má ve skleněných trubicích umožňovat dobrou čitelnost stavu její volné hladiny, nesmí však na stěnách zanechávat nečistotu, nesmí znatelně chemicky reagovat se stěnami trubic a nádobek apod. Používá-li se u některých přístrojů současně dvou různých kapalin, jež se vzájemně stýkají, nesmí se takové kapaliny vzájemně mísit. Všechny kapaliny měly by rovněž vytvářet rovinný povrch.

Tabulka I. Hustota některých tlakoměrných kapalin.

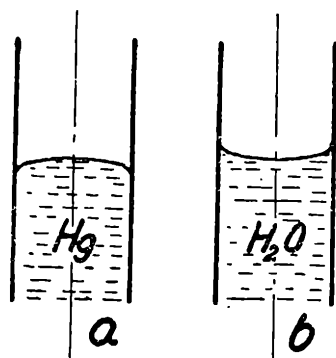
Teplota	Hustota vody	Hustota rtuti
0° C	0,999 840 · 10 ³ kg · m ⁻³	13,595 1 · 10 ⁻³ kg · m ⁻³
5	0,999 964	13,582 7
10	0,999 700	13,570 4
15	0,999 098	13,558 0
20	0,998 204	13,545 7
25	0,997 046	13,533 5
30	0,995 648	13,521 2

Látka	Hustota při 18° C
brom Br	3,14 · 10 ³ kg · m ⁻³
bromoform CHBr ₃	2,89
tetrachlor CCl ₄	1,590
etylalkohol C ₂ H ₅ OH	0,790

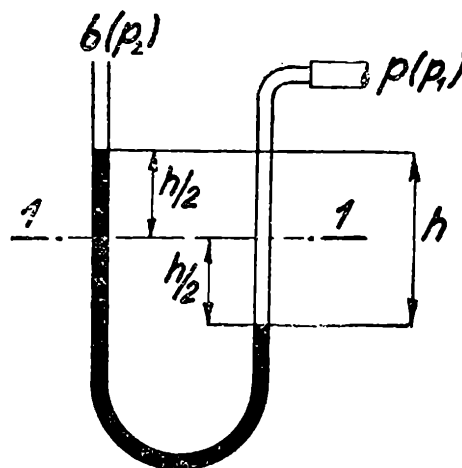
Za tlakoměrnou kapalinu je nejčastěji používána rtuť a voda, méně běžněji etylalkohol, tetrachlor, nebo některé další speciální kapaliny. V trubicích menších průřezů se nežádoucím způsobem uplatňuje povrchové napětí kapaliny. Rtuť při tom jeví kapilární depresi a vytváří *vypouklý meniskus* namísto rovinné volné hladiny (obr. 1a); voda naproti tomu projevuje *kapilární elevaci*. Na jejím povrchu se v úzkých trubicích vytváří meniskus vydutý (obr. 1b). Hustoty některých tlakoměrných kapalin jsou uvedeny v tabulce I. Jak je z tabulky patrné, jsme odkázáni na značně úzkou volbu tlakoměrných kapalin, s ohledem na hustotu, jež při omezených délkách trubic ovlivňuje

měřicí rozsah. Je patrna citelná mezera v hustotním rozmezí mezi vodou a rtutí, a to zvláště nad hustotou zhruba $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$. Tento nedostatek lze do jisté míry odstranit použitím dvou vzájemně se nemísících kapalin, jak bude dále naznačeno u *dvounádobkového tlakoměru*. Na konci tohoto odstavce nutno ještě dodat, že všechny požadované vlastnosti nemá žádná z používaných tlakoměrných kapalin. Tento ideál je jen jakýmsi vodítkem pro volbu optimální tj. nejvíce vyhovující.

Nejjednodušším kapalinovým trubicovým tlakoměrným přístrojem je *tlakoměr U* (obr. 2), jehož dvě svislá ramena tvoří trubice stejného, obvykle kruhového průřezu. Je-li možno tlakové přívody připojit na obě ramena, jde o *tlakoměr U otevřený*, na rozdíl od *tlakoměru U uzavřeného* (obr. 3), jehož jedno rameno je uzavřeno např. zatavením. Tlakový přívod je možno u něho připojit jen na rameno druhé.



Obr. 1



Obr. 2

Měříme-li otevřeným tlakoměrem U přetlaky $|p - b| > 0$ či podtlaky $|b - p| > 0$, tj. tlakové rozdíly od okamžitého barometrického tlaku b , postačí ponechat jedno z ramen otevřené okolní atmosféře. Při určování tlakových diferencí $|p_2 - p_1| > 0$ použijeme ovšem připojení na ramena obě.

Mají-li obě ramena stejný průřez, což je nejčastější případ, neuplatňuje se vliv kapilární aktivity tlakoměrné kapaliny. Byla-li hladina kapaliny před měřením v obou ramenech ve stejné výši (v úrovni 1—1 na obr. 2) a vychýlí-li se působením tlaku (tlakové difference) v obou ramenech o $\frac{h}{2}$ (v jednom rameni kapaliny stoupne a ve druhém klesne), bude celková výška kapalinového sloupce, kompenzujícího svým hydrostatickým tlakem tlak měřený, rovna h . Měřený přetlak $|p - b|$ je pak roven

$$p - b = h \cdot \rho \cdot g, \quad (1)$$

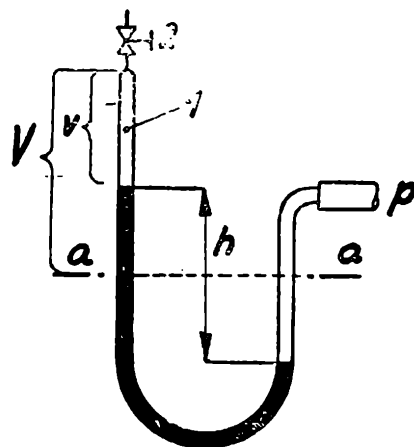
kde značí ρ hustotu kapaliny (hustota závisí na teplotě viz též ta-

bulku; ke změně hustoty s tlakem není třeba přihlížet) a g místní tíhové zrychlení. Na levé straně rovnice (1) bude ovšem v případě měření podtlaku výraz $b - p$ a v případě obecné tlakové difference $p_2 - p_1$ (je-li p_2 větší než p_1). Na přístrojích čteme buď celkovou výšku h z rozdílu výšek hladin v obou ramenech, nebo známe-li počáteční úroveň hladin 1—1, postačí čtení výšky $\frac{h}{2}$ v rameni jediném.

U zavřeného tlakoměru U, o němž jsme se již zmínili a který je znázorněn na obr. 3, využíváme důsledků plynoucích z Boylova zákona. Ten říká, že tlak p neměníciho se množství plynu je při stálé teplotě - tj. při izotermickém ději nepřímo úměrný jeho objemu V , čili vyjádřeno rovnicí

$$p = \frac{\text{const}}{V} \text{ nebo } p \cdot V = \text{const} . \quad (2)$$

V trubici tvaru U (obr. 3) je v jednom rameni (v prostoru 1) uzavřen tlakoměrnou kapalinou plyn, zpravidla vzduch. Jeho tlak budiž při počáteční úrovni hladin v rovině $a - a$ roven barometrickému tlaku b . Toho lze docílit tím, že se před měřením - při vyrovnaných hladinách kapaliny v obou ramenech na krátkou dobu otevře dobře těsnící kohout 2. Naplnění prostoru 1 vzduchem musí se dít při známé a



Obr. 3

ustálené teplotě, při níž pak provádíme vlastní měření. Je-li objem vzduchu před měřením v uzavřeném rameni roven V a po připojení na měření tlak $p > b$, kdy v uzavřeném rameni stoupne tlakoměrná kapalina o $\frac{h}{2}$ (a současně ve druhém rameni, je-li stejného průřezu, klesne rovněž o $\frac{h}{2}$) zmenšený objem vzduchu roven v , zvětší se tlak takto stlačeného vzduchu na hodnotu p' rovnou

$$p' = b \cdot \frac{V}{v} . \quad (3)$$

Což plyne ze vztahu

$$b \cdot V = p' \cdot v \quad (4)$$

daného Boylovým zákonem. Protože se stlačením vzduch mírně zahřeje, musíme před čtením měřeného údaje vyčkat, až se teplota opět ustálí na původní hodnotě. To je možné jen tehdy, když měřený tlak

se v časovém intervalu celého měření nemění. Měřený přetlak není však kompenzován jen zvětšeným tlakem stlačeného vzduchu, nýbrž také zčásti hydrostatickým tlakem vychýleného sloupce tlakoměrné kapaliny, podobně jako u předešlého otevřeného tlakoměru U. Zvětšení tlaku stlačeného vzduchu - proti barometrickému tlaku b , při němž byl tlakoměr plněn - je vzhledem ke (3) rovno

$$p' - b = b \cdot \frac{V}{v} - b = b \left(\frac{V}{v} - 1 \right) \quad (5)$$

Je-li část měřeného přetlaku kompenzována výchylkou sloupce tlakoměrné kapaliny dané vztahem (1), bude měřený přetlak dán výsledným vztahem

$$p - b = p' - b + h \cdot \rho \cdot g = b \left(\frac{V}{v} - 1 \right) + h \cdot \rho \cdot g \quad (6)$$

Proti tlakoměru otevřenému má zavřený tlakoměr větší měřicí rozsah. Nevýhodou je však nerovnoměrná stupnice, vynesená přímo v hodnotách měřeného přetlaku, kterou bychom připojili k zavřenému rameni přístroje. Svou funkcí je zavřený tlakoměr U vlastně *tlakoměrem kompresním*.

(Pokračování)

P ř e m y s l S c h ü r e r, Praha:

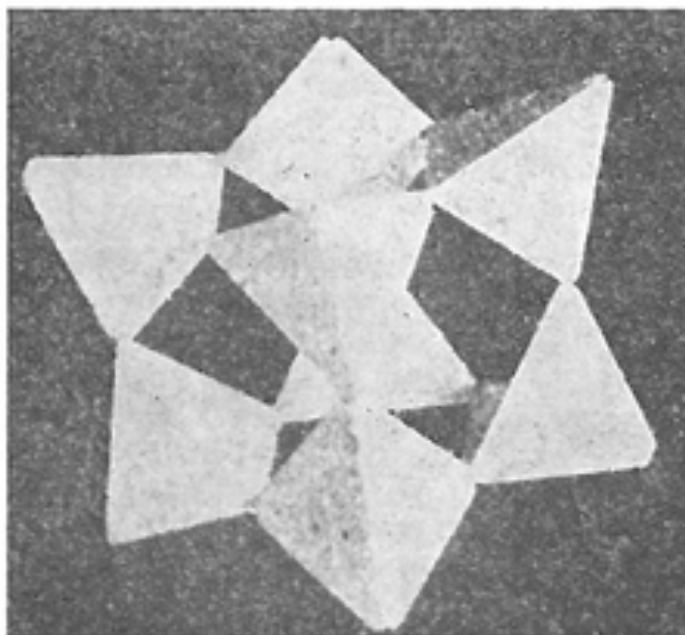
Porézní látky ve vakuové technice

(Pokračování)

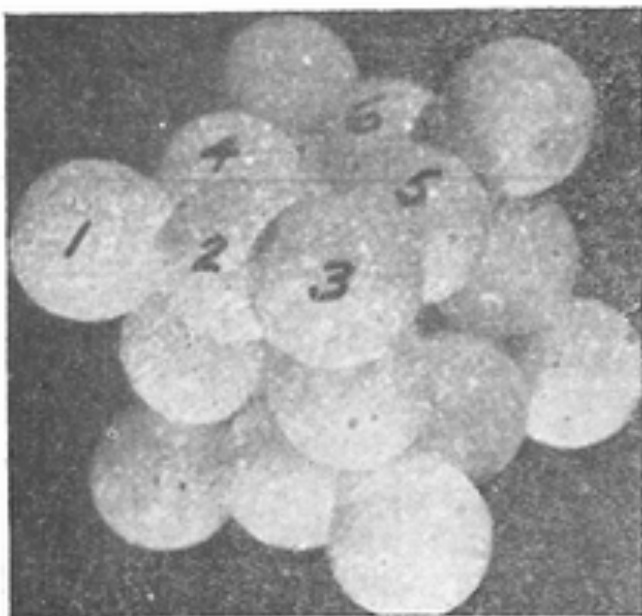
4. Struktura molekulových sít

Na pohled bílý, jemný prášek je složen z krystalků velikosti 0,5 až 5 μ ($1\mu = 0,001 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ mm}$). Jsou to krystalky z e o l i t ů - hlinitokřemičitanů. Hustota je $1,98 \text{ g cm}^{-3}$, tedy asi jako u síry (jednoklonná síra má hustotu $1,96 \text{ g cm}^{-3}$). Krystalová mřížka těchto zeolitů je tvořena seskupením čtyřstěnných iontů SiO_4 a AlO_4 . Obr. 1 znázorňuje takovéto seskupení, kdy osm čtyřstěnnů t e t r a e d r ů AlO_4 a SiO_4 se spojí svými vrcholy. Ve stýkajících se vrcholech zůstane vždy jeden kyslíkový atom, společný pro oba sousední čtyřstěny (obr. 2). Dalším seskupením těchto pseudokrychlových jednotek vznikne spojka krychle s osmistěnem k u b o o k t a e d r (obr. 3). Zde jsou pro názornost označeny

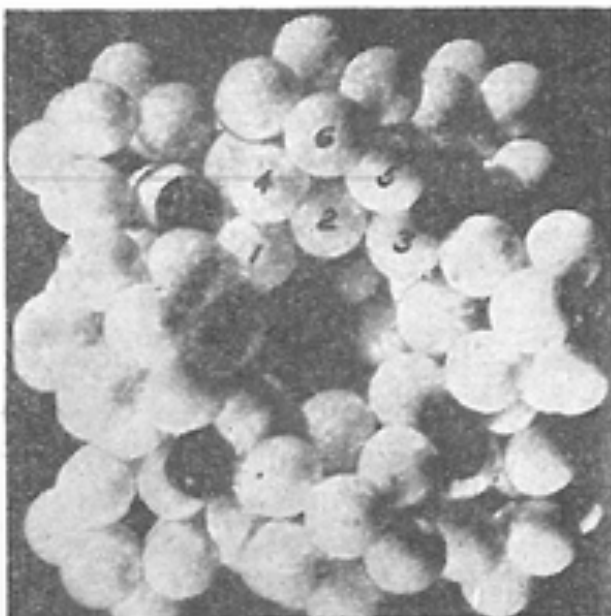
Obr. 1. Seskupení osmi čtyřstěnných iontů SiO_4 a AlO_4 do pseudokrychlových jednotek. Základní jednotkou ve stavbě pevných křemičitanů je čtyřstěnný anion SiO_4 , jehož střed je tvořen křemíkem a vrcholy jsou obsazeny kyslíky.



Křemík však může být zastoupen hliníkem, který má blízký iontový poloměr: $\text{Si} = 0,50 \text{ \AA}$, $\text{Al} = 0,55 \text{ \AA}$. Nižší náboj hlinitého iontu ponechává volný jeden záporný náboj kyslíku, takže vznikají anionty hlinítokřemičitanové (aluminosilikátové), ve kterých je část skupin SiO_4 nahrazena skupinami AlO_4^- .



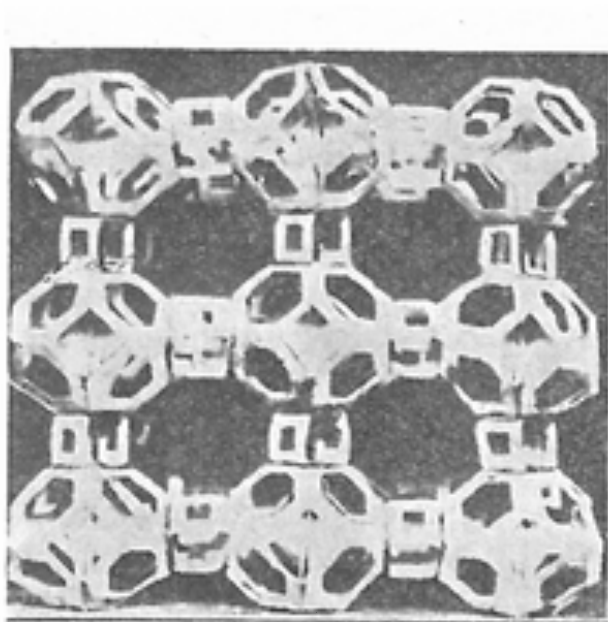
Obr. 2. Znázornění poloh atomů kyslíku v seskupení, uvedeném na obr. 1. Ve stýkajících se vrcholech zůstane vždy jeden kyslíkový atom, společný pro oba sousední čtyřstěny.



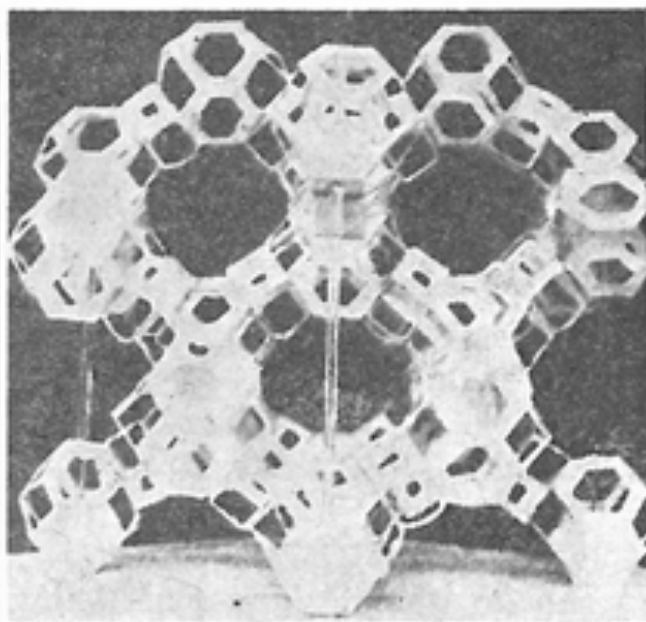
Obr. 3. Seskupení osmičlenných čtyřstěnnů v spojení krychle s osmistěnným kubo-oktaedrem. Pro názornost jsou číslicemi označeny stejné polohy kyslíkových atomů v mřížkové struktuře jako na obr. 2.

stejné polohy kyslíkových atomů v mřížkové struktuře jako na obr. 2. Již takovýto kubooktaedr má uvnitř svého objemu poměrně velké prázdné prostory. Jednotlivé kubooktaedry jsou pak mezi sebou vázány pomocí čtyřnásobných kyslíkových můstků. Na obr. 4 je znázorněna mřížková struktura zeolitu typu A, na obr. 5 struktura zeolitu X. Z těchto dvou základních se mohou připravit další typy.

Na obr. 4 a 5 je patrné vytvoření pravidelných okének, vedoucích do vnitrokrystalových dutin. U typu A jsou okénka tvořena osmičlennými prstenci, u typu X dvanáctičlennými. Okénka můžeme považovat téměř za kruhová. Jednotlivé dutiny, k nimž vedou z okének kanálky, pojmu 12 až 32 molekul vody, opět podle druhu síta. Molekulová síta



Obr. 4. Krystalografická struktura zeolitu A. Každý kubooktaedr je vázán s dalšími šesti kubooktaedry prostřednictvím čtyř kyslíkových můstků. Okénko, vzniklé osmičlenným prstencem, tvoří vstup do vnitřních dutin krystalu.



Obr. 5. Krystalografická struktura zeolitu X. Uspořádání kubooktaedrů je poněkud odlišné od typu A. Vytvoří se větší vstupní okénka z dvanáctičlenných prstenců.

se dělí podle sorpční schopnosti, nebo naopak neschopnosti sorbovat od jisté velikosti v řadě molekul s rostoucími jejich rozměry. Toto rozdělení do pěti hlavních tříd molekulových sít je provedeno podle velikosti kritických průměrů okének, jež jsou v rozmezí 3,8 až 10 Å ($1 \text{ Å} = 0,000\,000\,1 \text{ mm} = 10^{-7} \text{ mm}$). Již z tohoto stručného popisu si lze učinit představu o výhodách molekulových sít proti starším sorbentům, např. aktivnímu uhlí, a to nejen v sorpční mohutnosti, ale v selektivnosti.

5. Získávání molekulových sít

Již je tomu více než dvacet let, kdy byly pozorovány výborné sorpční vlastnosti mezi minerály zeolitů. Zeolity jsou aluminosilikáty chemické

formule $(\text{Me}^{+1}, \text{Me}^{+2}) \text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot n \text{SiO}_2 \cdot m \text{H}_2\text{O}$, kde Me^{+1} je Na^{+1} , K^{+1} , Li^{+1} atd., Me^{+2} je Ca^{+2} , Sr^{+2} , atd., n se pohybuje kolem 2 a m kolem 5.

Krystalická struktura zeolitů může být vláknitá, vrstevnatá, nebo prostorově trojrozměrná. Dutiny v mřížce jsou za normálních podmínek vyplněny vodou. Zahříváním lze tuto vodu vypudit, ovšem záleží na tom, aby v mřížce nedošlo k ireversibilním⁵⁾ strukturálním změnám, vedoucím k jejímu zhroucení. To se podaří u některých zeolitů s prostorově trojdimenzionální mřížkou, kdy dojde ke ztrátě veškeré mřížkově vázané vody a přitom se neporuší stabilita mřížky, ani při teplotách kolem 700° C. Uvnitř krystalu pak zůstanou rozlehlé dutiny, spojené kanálky, kterými vedou zvětší otvory - okénka s určitou pravidelnou velikostí, kudy pronikají molekuly plynu. Prázdné prostory uvnitř krystalu, jež po vypuzení vody mohou být zaplněny sorbovanými molekulami plynů a par, tvoří 30 až 60 % objemu krystalu.

Podařilo se získat účinná molekulová síta i ze zeolitů, u nichž byly dutiny zaplněny méně těkavými látkami jako jsou soli. V takovém případě je získání molekulového síta méně snadné. Některé zeolity mají uvnitř svého objemu současně jak vodu, tak i netěkavé látky. Očekávané vlastnosti molekulových sít vykazují až tehdy, když se podaří vypudit vodu a soli tak, aby nedošlo ke zhroucení mřížkové struktury.

Specifické sorbenty lze získat nejen vhodným opracováním některých přírodních zeolitů (chabazit, mordenit atd.), což je cesta poměrně obtížná, ale i přímou syntézou látek na bázi zeolitů s vlastnostmi molekulových sít. V současné době se stále hledají nové způsoby této syntézy. Na západě jsou již komerčně dodávány čtyři druhy molekulových sít s různou velikostí pórů a označením 4 A, 5 A, 10 X a 13 X. Výroba je však kryta prakticky nedostupnými patenty a literární údaje o přípravě molekulových sít jsou psány mlhavě a nejednoznačně. V ČSSR, ani ve spřátelených zemích, se dosud molekulová síta provozně nevyráběla. V minulém roce se však v Ústavu fyzikální chemie ČSAV v Praze podařilo dokončit přípravu k poloprovozní výrobě. Zároveň z rozboru experimentálních dat vyplývá, že se zde vyrobená síta se svými vlastnostmi plně vyrovnají zahraničním.

(Pokračování)

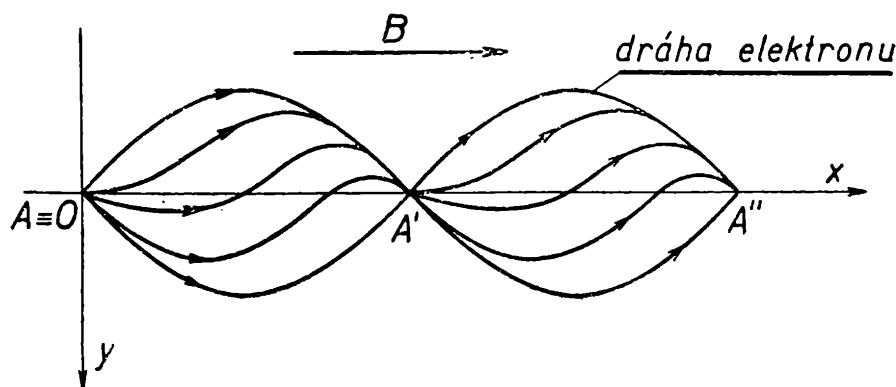
⁵⁾ I r r e v e r s i b i l n í (lat.), co nelze uvést v předešlý stav.

Elektronová optika

(Dokončení)

Všimněme si nyní, jak je využito uvedených zákonitostí pohybu elektronu v magnetickém poli v elektronové optice. U magnetických polí je obtížnější provést analogii mezi světelnou a elektronovou optikou.

Předpokládejme, že z bodu A vyletují elektrony pod různými úhly k ose x (obr. 11), kterou položíme do směru indukčních čar B magnetického pole. Všechny tyto elektrony se budou v homogenním magnetickém poli pohybovat po šroubovicích. Na obr. 11 jsou vyznačeny zjednodušené průměty drah elektronů ve směru osy x . Jejich průměty

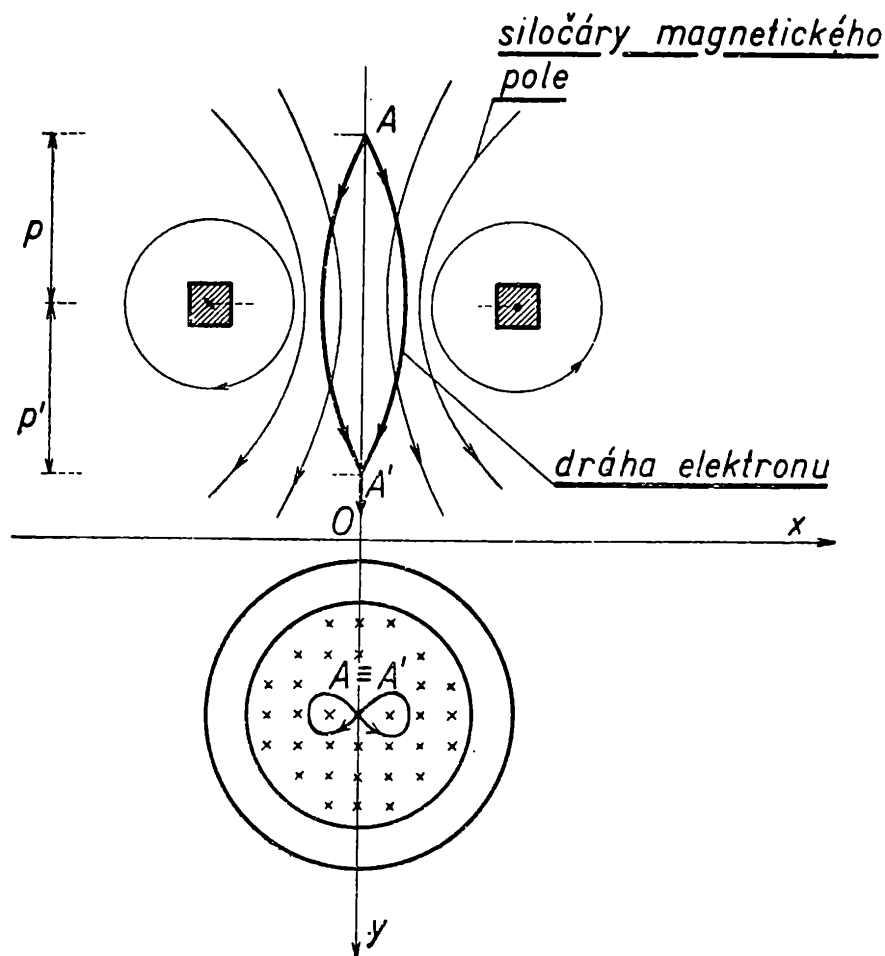


Obr. 11

do roviny kolmé k ose x budou kružnice. Poloměr těchto kružnic bude záviset na složce rychlosti kolmé k siločarám a je určen vztahem (17). Ze vztahu (19) plyne, že elektrony různých rychlostí opisují kružnice s různými poloměry za stejnou dobu. Bude-li tedy podélná složka rychlosti všech elektronů stejná, opíší všechny elektrony šroubovici a protnou osu opět v témže bodě a v témže čase. Tomuto úkazu říkáme *fokusace elektronů* (je podobná fokusaci světelného svazku). Vychází-li tedy z nějakého bodu předmětu rozbíhavý svazek elektronů, protnou se vlivem magnetického pole paprsky vycházející z jednoho bodu v jisté vzdálenosti opět v jednom bodu, pokud ovšem mají stejnou podélnou složku rychlosti. Každému bodu předmětu bude opět odpovídat v rovině obrazu bod, čili vznikne *e l e k t r o n o v ý o b r a z*. Ten bude skutečný, přímý a v přirozené velikosti, to znamená, že všechny rozměry předmětu i obrazu budou stejné. Po průchodu rovinou obrazu se elektrony budou opět rozbíhat a v určité vzdálenosti od této roviny se budou zase sbíhat a vytvoří druhý obraz. Tak vzniká *d v o j n á*

s o b n á f o k u s a c e. Podobně může nastat několikrát o p a k o v a n á f o k u s a c e.

Magnetické pole lze vytvořit uvnitř dutiny cívky, protéká-li jí stejnosměrný elektrický proud. Toto pole však není přesně homogenní. Aby elektrony vyletující z bodu byly tímto polem znovu fokusovány do jednoho bodu, je třeba, aby nehomogenní magnetické pole splňovalo stejnou podmínku jako pole elektrické, tj. aby bylo středově souměrné. Cívka, ve které se vytváří středově souměrné nehomogenní magnetické pole, představuje magnetickou čočku.



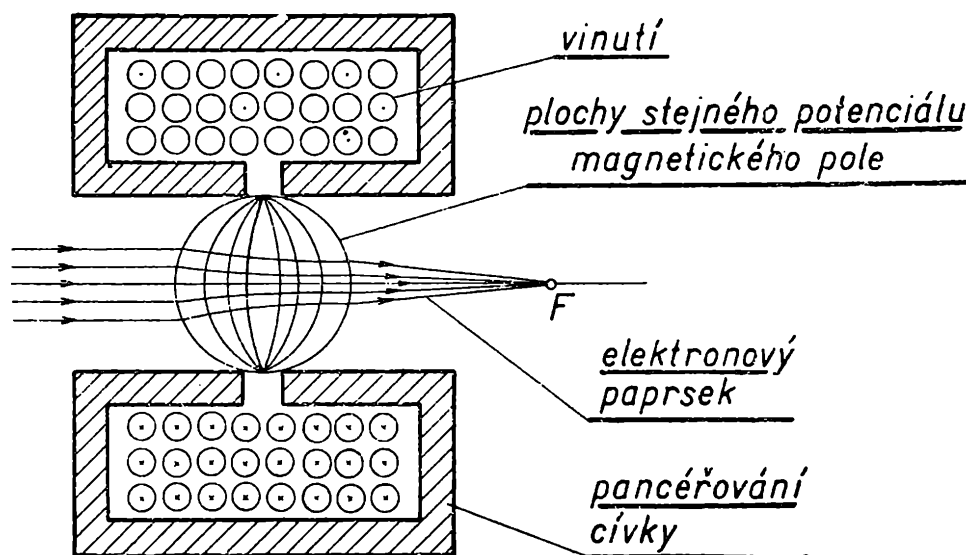
Obr. 12

Dráha elektronů v středově souměrném magnetickém poli, vytvořeném cívkou, je vyznačena na obr. 12. Na něm je v nárysu zobrazena cívka v osovému řezu a v půdorysu celá cívka. Tenké čáry jsou siločáry magnetického pole cívky, tlustší čáry jsou zjednodušené průměty drah elektronů.

Vlétnou-li elektrony do tohoto pole, které není přesně homogenní, ale je středově symetrické, budou se pohybovat po spirálových prostorových křivkách. Jestliže úhly, které svírají směry původního pohybu elektronů se směrem magnetických siločar nebudou příliš velké, a bu-

dou-li rychlosti elektronů stejné, budou se také v tomto případě elektrony magnetickým polem fokusovat do jednoho bodu (obr. 12). Označíme-li písmenem p vzdálenost bodu A od středu cívky, písmenem p' vzdálenost obrazu A' od středu cívky, pak platí ve stejnorodém prostředí s dostatečnou přesností zobrazovací rovnice (3b), pomocí níž lze přibližně určit ohniskovou dálku magnetické čočky.

Obraz, který se vytvoří v takovém nehomogenním magnetickém poli je skutečný, zvětšený a potočený vzhledem k předmětu o určitý úhel. Ten se vlivem šroubového pohybu elektronu nebude rovnat 180° jako u světelných čoček, nýbrž bude záviset na rychlosti elektronů a na indukci magnetického pole. Zvětšení lze počítat ze stejného vzorce jako ve světelné optice, to znamená poměrem $\frac{p'}{p}$



Obr. 13

Aby elektronový obraz vytvořený středově souměrným magnetickým polem byl kvalitní a zvětšený, musí magnetická čočka mít malou ohniskovou dálku. K vytvoření magnetické čočky s malou ohniskovou dálkou je nezbytné, aby v malém prostoru vzniklo dostatečně silné středově souměrné magnetické pole.

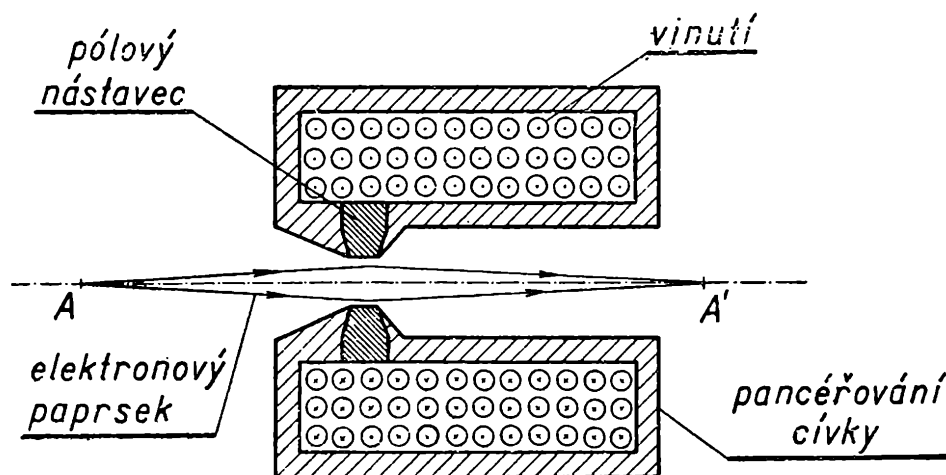
Ze vztahu pro intenzitu magnetického pole v určitém bodě uvnitř dutiny cívky

$$H = \frac{N I}{2 l} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (20)$$

vyplývá, že intenzita pole při stejném geometrickém tvaru cívky závisí na počtu *ampérzávitů*, tj. na součinu proudu I protékajícího cívku délkou l a počtu závitů cívky N . Úhly α_1 a α_2 jsou úhly, které svírají průvodiče

uvažovaného bodu s osou cívký. Průvodiče jsou spojnice onoho bodu na ose cívký s jejími okrajovými body. Intenzitu magnetického pole lze tedy při určitých rozměrech cívký a při určitém počtu závitů zvětšit jen zvětšením proudu. Zvětšením proudu vzroste však intenzita magnetického pole nejen uvnitř cívký, ale i na jejích okrajích, čímž se zvětší ohnisková dálka magnetické čočky. Kromě toho se zahřívá vinutí cívký. Oba tyto jevy jsou nežádoucí.

Abychom dostali středově souměrné magnetické pole velké intenzity, avšak malé ohniskové dálky, použijeme *pancéřované cívký* (obr. 13). Je to cívký uzavřená do železného pancéře, v němž je ponechána vzduchová štěrbina. Pancéřováním cívký se stlačí magnetické pole do malého prostoru a tím se zmenší ohnisková dálka magnetické čočky. V oblasti blízko u štěrby pancéře bude intenzita magnetického pole značně větší než u nepancéřované cívký, protože magnetický odpor železa je mnohem menší než odpor vzduchu.



Obr. 14

Dalšího zmenšení ohniskové dálky magnetické čočky lze dosáhnout zmenšováním jejího vnitřního průměru. Proto se cívký opatřují pólovými nástavci (obr. 14). Při správně voleném vinutí a pancíři bude určen tvar magnetického pole a tedy také všechny vlastnosti magnetické čočky budou určeny pólovými nástavci, jejich materiálem a tvarem.

Pólové nástavce mezi nimiž je vzduchová mezera, fungují jako dva opačné póly mocného elektromagnetu. Magnetické pole v mezeře mezi nástavci působí jako čočka. Podle dohody se nazývá čočkou celé zařízení, které toto pole způsobuje, totiž souhrn vinutí, pancíře a pólových nástavců. Tvar pólových nástavců se volí zpravidla pokusně a je určován jednak elektronově optickými požadavky, to znamená nutností vytvořit kvalitní středově souměrné magnetické pole, jednak požadavky konstrukčního rázu.

Jak již bylo zdůrazněno, je k fokusování elektronů třeba středově sou-

měrného magnetického pole. Stává se však, že i při přesném zhotovení pólových nástavců je vytvořené magnetické pole nesouměrné. Nesouměrnost pole může být způsobena nehomogeností magnetického materiálu. Jde buď o vlastní nehomogenitu materiálu pólových nástavců, nebo o nehomogenitu způsobenou tepelným či mechanickým zpracováním.

Při výrobě nástavců, jimiž se má vytvořit silné pole a které mají dát nejkratší ohniskovou dálku, musí se vybrat nejlépe vyhovující materiál. Materiálem na pólové nástavce jsou ferromagnetické slitiny, které mají nejvyšší magnetické sycení. Nejlepší v tom směru je železo „*armco*“ a speciální magnetická slitina „*permendur*“. Armco je čisté železo s velmi malým obsahem hliníku a jiných příměsí. Permendur je slitina železa, kobaltu a vanadia.

Elektrické a magnetické čočky mají mnoho vad. Vedle vad známých ze světelné optiky (vada chromatická, sférická, koma, astigmatismus, zklenutí, zkreslení), se u elektronových čoček vyskytují ještě jiné vady. Jsou to *anizotropní koma*, *anizotropní astigmatismus* a *anizotropní zkreslení*. Všechny tyto vady jsou způsobeny anizotropií magnetického a elektrického pole. Kromě těchto vad zde hraje důležitou úlohu tzv. *difrakční vada*, jež se projevuje při malých otvorech clonek, kterými elektrony procházejí.

Popsané vady čoček způsobují zmenšení rozlišovací schopnosti přístrojů s magnetickými a elektrickými čočkami (např. elektronových mikroskopů a dalekohledů). Zmenšování vad se děje stálým zdokonalováním elektronových čoček.

Ukázali jsme si, že je možno užitím elektrických a magnetických polí ovlivňovat pohyb elektronů a využívat jich k zobrazování. Poznáním zákonitostí pohybu elektronů v elektrickém a magnetickém poli umožnila elektronová optika vytvořit některé důležité přístroje s vynikajícími vlastnostmi. Mezi tyto přístroje patří kromě již zmíněného *elektronového mikroskopu* a *elektronového dalekohledu* také *oscilograf*, *ikonoskop* aj.

Literatura.

- J. Fuka, B. Havelka: Elektromagnetické pole (SPN Praha, 1958).
G. P. Harnwell, J. J. Livingood: Experimental Atomic Physics (New York and London, 1933).
Z. Horák: Úvod do molekulové a atomové fyziky (SNTL Praha, 1955).
S. E. Friš, A. V. Timoreva: Kurs fyziky II (NČSAV Praha, 1953).
E. A. Wainrib, W. I. Miljutin: Elektronenoptik (VEB Verlag Technik Berlin, 1954).

Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

(Dokončení)

1. Čtyři žárovky pro napětí $U_1 = 120$ [V] a výkon $P = 60$ [W] jsou spojeny paralelně. Jak velký nutno předřadit odpor R , aby žárovky měly předepsaný výkon (nepřepálily se), jsou-li zapojeny paralelně na síť o napětí $U = 220$ [V]. Jak veliký proud prochází a) každou žárovkou (I_1), b) nerozvětvenou částí obvodu (I). Jak velký je celkový odpor všech žárovek?

Evžen Říman

(Došlo 15 řešení)

Řešil Karel Hrbáček, 3. A SVVŠ, Nymburk:

Nechť jsou splněny podmínky úlohy, tj. žárovky mají předepsaný výkon $P = 60$ [W] a na každé z nich je napětí $U_1 = 120$ [V]. Každou žárovkou pak prochází proud

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{60 \text{ [W]}}{120 \text{ [V]}} = 0,5 \text{ [A]}$$

Nerozvětvenou částí obvodu prochází proud

$$I = 4 I_1 = 4 \cdot 0,5 \text{ [A]} = 2 \text{ [A]},$$

jak plyne z I. zákona Kirchhoffova. Odpor R bude vzhledem ke čtveřici žárovek zapojen sériově, a tedy všemi vodiči nerozvětvené části prochází též proud I .

Pro odpor R_1 jedné žárovky plyne z Ohmova zákona

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{120 \text{ [V]}}{0,5 \text{ [A]}} = 240 \text{ [\Omega]}$$

Celkový odpor R_c všech žárovek se zjistí z rovnice

$$\frac{1}{R_c} = \frac{4}{R_1},$$

$$\text{odkud } R_c = \frac{1}{4} R_1 = \frac{1}{4} \cdot 240 \text{ [\Omega]} = 60 \text{ [\Omega]}.$$

Protože žárovky jsou zapojeny paralelně, je na nich stejné napětí U_1 . Celkové napětí je pak $U = U_R + U_1$, kde U_R je napětí na odporu R . Protože odporem R prochází proud I , bude

$$R = \frac{\dot{U}_R - \dot{U}_1}{I} = \frac{220 - 120}{2} \left[\frac{\text{V}}{\text{A}} \right] = 50 [\Omega]$$

Předřazený odpor má velikost 50 ohmů.

2. Nádrž objemu $V = 4,5$ hl má být naplněna vodou teploty $t_1 = 25^\circ \text{C}$. K dispozici je voda z ohřívače o teplotě $t_2 = 90^\circ \text{C}$ a voda z vodovodu, jejíž teplota je $t_3 = 10^\circ \text{C}$. Jak velké množství (hmotu) vody 90°C teplé a 10°C teplé je nutno smíchat? (Dáno měrné teplo vody $c = 1 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.)

Evžen Říman

(Došlo 16 řešení)

Řešil Lubor Košťál, 11. D DSŠ Brno, Křenová:

Při výpočtu předpokládejme, že nejsou ztráty. Označme m_1 hmotu vody v nádrži, m_2 hmotu vody $t_2 = 90^\circ \text{C}$ teplé a m_3 hmotu vody $t_3 = 10^\circ \text{C}$ teplé. Platí tedy vztah

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (1)$$

Z kalorimetrické rovnice, vyjadřující, že teplo uvolněné vodou teplejší musí být rovno teplu přijatému vodou chladnější, plyne

$$m_2 c (t_2 - t_1) = m_3 c (t_1 - t_3), \quad (2)$$

kde c značí měrné teplo vody. Dosadíme-li z (1) $m_3 = m_1 - m_2$ do (2), obdržíme rovnici

$$m_2 c (t_2 - t_1) = (m_1 - m_2) c (t_1 - t_3),$$

z níž řešením podle m_2 dostaneme

$$m_2 = \frac{m_1 (t_1 - t_3)}{t_2 - t_3}. \quad (3)$$

Dosazením $m_1 = V \cdot \rho = 4,5 \cdot 100 [\text{dm}^3] \cdot 1 [\text{kg dm}^{-3}] = 450 [\text{kg}]$ a daných hodnot za t_1, t_2, t_3 do vztahu (3) dostaneme

$$m_2 = 84,375 [\text{kg}] \doteq 84,4 [\text{kg}]$$

Ze vztahu (1) plyne pro m_3 hodnota $m_3 = (450 - 84,4) [\text{kg}] = 365,6 [\text{kg}]$.

Na naplnění nádrže je třeba 84,4 litru vody 90°C teplé a 365,6 litru vody 10°C teplé.

3. Přes kladku s vodorovnou osou je vedena nit, jejíž konce jsou zatíženy závažími o hmotách $m_1 = 96 [\text{g}]$ a $m_2 = 104 [\text{g}]$. Obě hmoty jsou udržovány v klidu můstkem. Určete, kterým směrem se budou závaží pohybovat a jakou dráhu urazí za 10 sekund. Jaká bude rychlost obou závaží koncem desáté sekundy?

Evžen Říman

(Došlo 17 řešení)

Řešil Jaroslav Vilímek, 37. JSŠ Praha 10:
Soustava se bude pohybovat působením síly

$$F = G_2 - G_1 = (m_2 - m_1) g$$

a to tak, že závaží o hmotě m_2 se bude pohybovat dolů a závaží hmoty m_1 vzhůru. Přitom G_1 značí váhu (tíhovou sílu) závaží o hmotě m_1 , G_2 je váha závaží o hmotě m_2 ; g značí tíhové zrychlení.

Ze druhého Newtonova zákona plyne $F = m a$, kde m je pohybovaná hmota. V našem případě platí $m = m_1 + m_2$.

Proto

$$F = (m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a,$$

z čehož

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]}}{200 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]}} \cdot 9,81 \text{ [m s}^{-2}] = 0,3924 \text{ [m s}^{-2}].$$

Vzniklý pohyb je rovnoměrně zrychlený, neboť je způsoben stálou silou. Dráha v době 10 sekund bude

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3924 \text{ [m s}^{-2}] \cdot 100 \text{ [s}^2] = 19,62 \text{ [m]}$$

Rychlost koncem desáté sekundy bude

$$v = a t = 0,3924 \text{ [m s}^{-2}] \cdot 10 \text{ [s]} = 3,924 \text{ [m s}^{-1}]$$

Při výpočtu jsme zanedbali tření a odpor prostředí.

Výsledek. Dráha v době 10 sekund je 19,62 [m]; rychlost koncem desáté sekundy je 3,924 [m s⁻¹]

Různé

J o s e f K o t y k, Pardubice:

Hermann Helmholtz

Letošní 140. výročí narození jednoho z největších fyziků 19. století **H e r m a n n a H e l m h o l t z e** je nám podnětem k tomu, abychom připomněli čtenářům jeho zásluhy o rozvoj vědy a význam jeho všestranné vědecké činnosti.

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, kníže přírodních věd, jak jej Němci často nazývají¹⁾, se narodil dne 31. srpna 1821 v Postupimi. Vystudoval lékařství a stal se vojenským lékařem. Od roku 1849 působil již jako profesor fyziologie na universitách v Královci, v Bonnu a v Heidelbergu, od roku 1871 jako profesor fyziky v Berlíně. Se Siemensem²⁾ založil říšský fyzikálně technický ústav pro jemná měření, zkoušení přístrojů a výzkum látek v Berlíně-Charlottenburku a stal se za zásluhy roku 1888 jeho presidentem. Zemřel v Berlíně dne 8. září 1894.

O Helmholtzově rozsáhlé badatelské činnosti pojednám v jednotlivých statích.

I. *Princip zachování energie*



Vstup Helmholtzův do dějin vědy spadá do období charakterizovaného úsilím fyziků prokázat rovnocnost práce a tepla. K této myšlence byl přiveden jiný německý badatel, rovněž lékař, Julius Robert von Mayer (1814—1878). Přispěla k tomu pozoruhodným způsobem také náhoda. Když Mayer plul jako lodní lékař na Jávě, uslyšel od kormidelníka, že voda rozbouřeného moře je vždy teplejší než v klidném moři. Dalším bádáním, opřeným zejména o pozorování fyziologická, dospěl k jasné souvislosti práce a tepla. Od objevu ekvi-

valence tepla a mechanické práce, kterou roku 1842 skoro současně a nezávisle na sobě vyslovili Mayer a Joule³⁾, vede již přímá cesta k Helmholtzovi, k principu přeměny a zachování (konzervaci) energie.

¹⁾ Také v dějinách matematiky se setkáváme s podobným označením. Knížetem matematiků (*princeps mathematicorum*) bývá zván věhlasný Karl Friedrich Gauss (1777—1855).

²⁾ Werner Siemens (1816—1892) přispěl k velkolepému rozvoji elektrotechniky zvláště objevem dynamoelektrického principu roku 1866. Na založení říšského fyzikálně-technického ústavu věnoval roku 1886 půl miliónu marek.

³⁾ O Jouleovi a jeho rozsáhlé badatelské činnosti viz článek J. Kotyka, James Prescott Joule, v Rozhledech roč. 38, čís. 2, 3 a 4, zejména stať I. *Ekvivalence práce a tepla* (str. 89 až 91), v níž jsem popsal klasická měření Jouleova, jež poskytla důkazu ekvivalence tepla a mechanické práce potřebný a spolehlivý experimentální základ.

Také Helmholtz dospěl k týmž výsledkům, ač z počátku Mayerovy práce neznal⁴). Svědčí proto o jeho vědeckosti, že se tak stalo záhy a zcela samostatně. Je možno říci, že to byl právě teprve 25letý Helmholtz, jenž první správně zhodnotil Mayerovy výsledky a zákonitost zachování energie. Učinil tak v přednášce dne 23. července 1847 ve Fyzikální společnosti v Berlíně, podrobněji v klasickém díle exaktních věd *Über die Erhaltung der Kraft* (= *Energie*), jež bylo uveřejněno téhož roku. V něm Helmholtz formuluje přesně zákon zachování energie, rozvíjí plně jeho univerzální význam jako principu, podává přehled jeho důsledků v různých oblastech fyziky a jeho užití na zjevy mechanické, tepelné, elektrické, magnetické i elektromagnetické.

Helmholtzovy závěry nedošly ovšem ihned souhlasu a přijetí. Obecného uznání dosáhl princip zachování energie teprve kolem roku 1860 a stal se pak velmi brzy úhelným kamenem přírodních věd. *Max Planck* (1858—1947), autor teorie kvant⁵), ve své autobiografii napsal, že zákon zachování energie byl první absolutní přírodní zákon, s nímž se setkal a že jej přijal jako evangelium. Další vývoj zároveň ukazuje, že zvláště ve fyzice byla každá nová teorie pečlivě zkoumána a posuzována podle toho, zdali souhlasí s principem zachování energie. Záslužnost Helmholtzova badatelského úsilí zřejmějše vynikne, uvědomíme-li si, že dosud neznáme fyzikální jev, o němž bychom museli říci, že tento princip porušuje.

S objevem principu přeměny a zachování energie vyvstala však otázka zřídla energie, jež je ustavičně vyzařována Sluncem a hvězdami. Také Mayer a Helmholtz se zabývali tímto problémem. Mayer shledával její původ v kinetické energii meteoritů, které dopadají na tato tělesa, Helmholtz však výstižněji v gravitační energii velké mlhoviny, z níž se podle výkladů *Kantových* a *Laplaceových*⁶) vytvořila naše sluneční soustava. Helmholtzova hypotéza hrála ve vývoji vědy velkou úlohu⁷), neboť byla opuštěna až v tomto století fyzikou atomového jádra, která nás teprve poučila o jiném vydatnějším zdroji energie.

⁴) *Max von Laue*: *Dějiny fyziky* (Malá moderní encyklopedie, sv. 11, str. 87).

⁵) O něm a jeho revolučních názorech o zrnitém charakteru zářivé energie najdou čtenáři poučení v mém článku *Max Planck* v *Rozhledech*, roč. 36, čís. 5, str. 230 až 234 a čís. 6, str. 284 až 287.

⁶) Viz učebnice astronomie (1954), čl. 139, v podrobnostech pak můj článek *Laplace - Newton Francie* v *Rozhledech*, roč. 29, čís. 2 a 3, zvláště Část II., str. 72 a 73.

⁷) *Hypotézy* (vědecké domněnky) jsou podle Engelse formou vývoje poznání skutečnosti. Viz *Engels, Dialektika přírody* (Svoboda, Praha 1950).

Poznámka.

K historii zákona zachování energie dodávám, že jeho platnost byla předvídána dříve, než jej formuloval Helmholtz. Připomínám např. slova, jež sto let před ním (v roce 1748) napsal Lomonosov⁸⁾: Všechny přeměny které v přírodě nastávají, jsou takového druhu, že kolik se něčeho⁹⁾ jednomu tělesu odnímá, tolik se jinému přidává. To je obecný přírodní zákon.

Klasickými slovy formuluje obecný charakter zákona přeměny a zachování energie Engels: Každá forma pohybu prokázala schopnost i nutnost měnit se v jakoukoli jinou formu pohybu. Touto formou nabyl zákon přeměny a zachování energie svého posledního vyjádření. Můžeme jej sice doložit novými objevy, můžeme mu také dát nový, bohatší obsah, avšak k samému zákonu takto formulovanému nemůžeme již dodat nic.

(Pokračování)

Vítězslav Jozífek, ČVUT, Praha:

Geometrie z roku 1734

(Dokončení)

Trojúhelník určený dvěma stranami a jimi sevřeným úhlem řeší autor dvěma způsoby. Buď spustí kolnici s jednoho vrcholu známé strany na druhou danou stranu, určí úsek vzniklý patou kolmice, zbylý úsek téže strany, délku výšky a odtud třetí stranu, nebo použije tzv. tangentové věty.

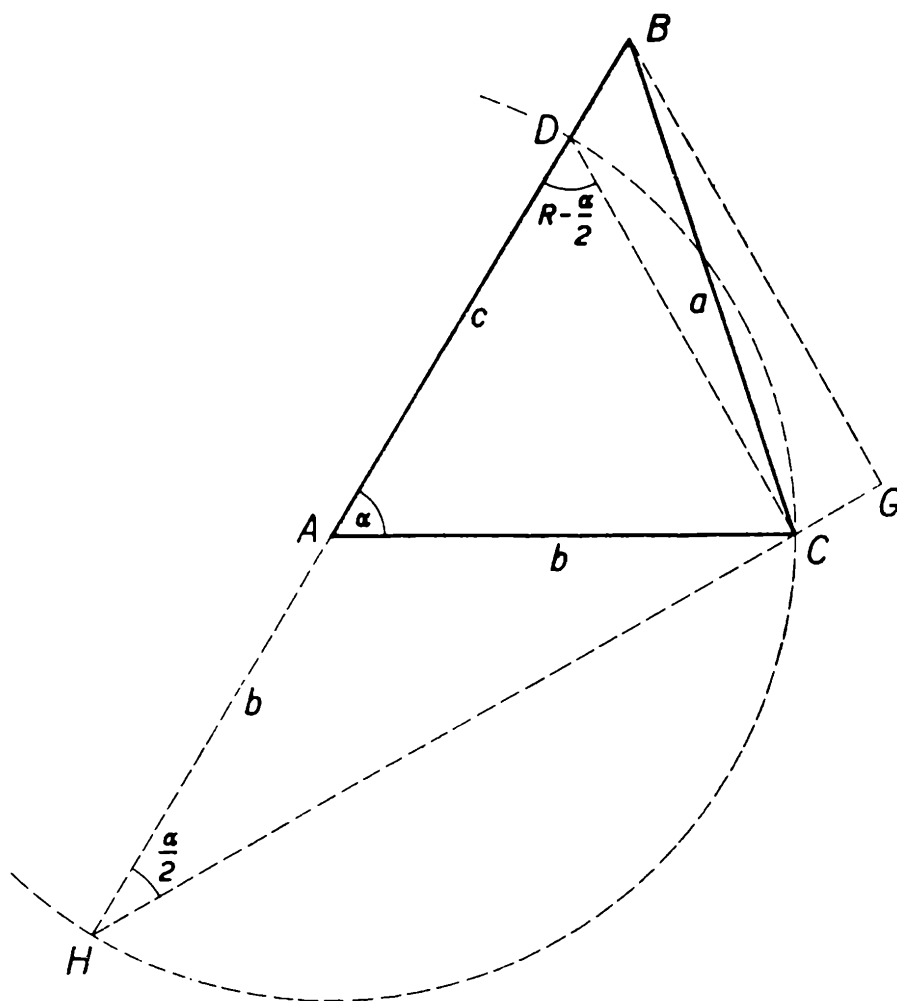
Poněvadž její odvození je poněkud odlišné od obvyklého postupu uváděného v učebnicích, uvedme nejprve text výkladu z knihy a připojme úpravu v dnešním způsobu vyjadřování.

„K té druhé cestě (jak již svrchu podotknuto) také přikročit může se větším dílem *compendiofer* udělat následujícím způsobem: *Addirují* se ty dvě známé strany a znamená se jejich summa. Pak *subtrahiruje* se také

⁸⁾ Michail Vasiljevič Lomonosov (1711–1765), geniální ruský fyzik a chemik, byl přiveden k úvahám o přeměně a zachování energie pochybnostmi o správnosti dřívější fluidové teorie tepla.

⁹⁾ Čtenáři pociťují, že zde chybí jen výraz. Výrazu *energie* (z řec. *energia* = schopnost činnosti) použil ve fyzice poprvé roku 1807 - nikoli ovšem ihned v dnešním přesném významu - anglický badatel, rovněž lékař, Thomas Young (čti Jang; 1773–1829).

jedna od druhé (a znamená se ten rest), to jest jejich differenti, o jak moc jedna větší jest než druhá. Dále se také summa těch dvou ostatních neznámých koutů (to jest *subtrahiruje* se ten daný kout od 180°). Tak zůstanou v restu ty oba ostatní kouty v jedné summě. Ta summa se dělí ve dvě. Posledně řekne se podle *Regule Detri*: Jak se drží ta summa těch obou daných stran proti jejich *differenti*, tak se také drží ten *tangens* té polovice summy těch ostatních dvou koutů proti (*facit*) tomu *tangentu* jejich *differenti*, to jest *tangentu* jednoho koutu (oč ten větší kout mezi oběma neznámými větší a ten druhý menší nežli oznámená poloviční summa).“



Obr. 3

Důkaz potom je zapsán takto:

„Ku příkladu jest ten špičatokoutečný triangel (A), na něm známe ty dvě strany (ab) a (ac) a ten kout mezi nimi při (a). Pak se prodlouží s jednou slepou linií ta strana (ba) a udělá se taková od (a) tak dlouhá, jako ta kratší strana (ac): totiž (ac) obrýsuje se z (a) s délkou (ab). Nebo s (ac) toho půl cyrkle (hcd) tak odřezává při (d) tu stranu (ab) tak velkou pryč, jako (ac) a zůstane (bd) *differenti*, aneb zbytek, jak o mnoho (ab) větší jest nežli (ac) (hb) jest ale ta summa obou stran dohromady, totiž (ab) a (ah), tj. (ac) spolu.

Dále táhnou se slepé linie (cd) a (hc). S tím bude (hcd) rovný kout. Ty kouty při (d) a (c), totiž (acd) oba dohromady počítané jsou tak velké jako ty při (b) a (c), totiž (acb) oba dohromady počítané, a ty, totiž ten při (d) a ten při (c) s tím při (a) dělají v tom *trianglu* (adc) dva rovné kouty (jak svrchu ukázáno bylo); ty při (b) a (c) spolu s tím při (a) v tom *trianglu* (abc) rovněž dva rovné, odkudž když ten při (a) od těch obou a tak jednostejný pryč vezmu, tak musí také ten rest jednostejný zůstat. Dále prodloužím tu slepou linii (hc) a táhnu z (b) jednu parallel s (dc), totiž (bg), tak bude to s tou prodlouženou (bc) do (g) takový kout od 90 grad. a zpředu při (b) rovně tak na (hb) připadne [jako (cd)], tj. ty kouty (hdc) a (hbg) jednostejné budou. Dále také jsou ty kouty při (d) a (c) spolustejné, aneb ty strany (ad) a (ac) jsou jednoho cyrkle *semi-diametry*, a tak spolu stejné jsou. A dělají stejnohánatový triangl. Poněvadž ty kouty (d) a (c) také spolu ty dva ostatní kouty dělají, tak jest každý z nich, ten při (d) neb (c) jejich polovice. Ten kout (abg) jak oznámeno jest, také tak velký, jako ta polovice při (d). Ten kout (abc) jest ale o ten kout (cbg) (f) menší, než ta polovice (abg) aneb (adc). Item ten kout (acb) jest o ten kout (dcb) větší nežli (acd). Ta druhá polovice (dcb) a (cbg) jsou ale stejné kouty (jako *anguli alterni* mezi dvěma parallelmi (dc) a (bg), tak jest (hg) *tangens* toho kouta (abg) aneb toho při (d) té polovice (cg) aneb *tangens* toho kouta při (f) aneb (cbg). Sluje takto: jak (bh) (ty dvě strany spolu) neb v jedné summě proti (db) jejich *differenti*, tak také (gh) *tangens* koutu (hbg) (aneb toho při (d) té polovice těch dvou ostatních koutů) proti (cg) *tangentu* toho koutu (cbg) aneb (f), který na tom daném *trianglu* (abc) jeho kout při (b) (abc) na ty polovice schází, a na druhém při (c) a (abc) tu oznámenou polovici převyšuje, odkudž, když ten kout (cbg), aneb (dcb) k té polovici při (c) a (acd) přidám, tak přijde ten kout (acb). A když od té druhé polovice při (d) aneb (b) a (cbg) vzat bude, zůstane ten kout (abc), což k dokázání bylo.“

Dnes bychom popsali odvození takto (obr. 3):

V trojúhelníku ABC je $AB > AC$.

Kolem vrcholu A opíšeme kružnici poloměrem AC a určíme její průsečíky H a D se stranou AB . Je $AH = AC = AD = b$, $HB = b + c$, $BD = c - b$. Trojúhelník HCD je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C podle věty o obvodovém úhlu nad průměrem. Z vět o vztazích vnitřních úhlů při základně rovnoramenného trojúhelníku platí:

$$\sphericalangle DHC = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle HDC = R - \frac{\alpha}{2}.$$

Strana BG je rovnoběžná se stranou CD . Potom $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = \gamma - \left(R - \frac{\alpha}{2}\right) = \gamma + \frac{\alpha}{2} - R = \frac{\gamma - \beta}{2}$. Úhly DCB a GBC

jsou úhly střídavé, a proto shodné. Je tedy $\sphericalangle GBC = \frac{\gamma - \beta}{2}$.

Z pravoúhlých trojúhelníků HCD a CGB platí: $HG = BG \cotg \frac{\alpha}{2} =$
 $= BG \tg \frac{\beta + \gamma}{2}$, $CG = BG \tg \frac{\gamma - \beta}{2}$

Z podobnosti trojúhelníků HCD a HGB ($u u$) plyne:

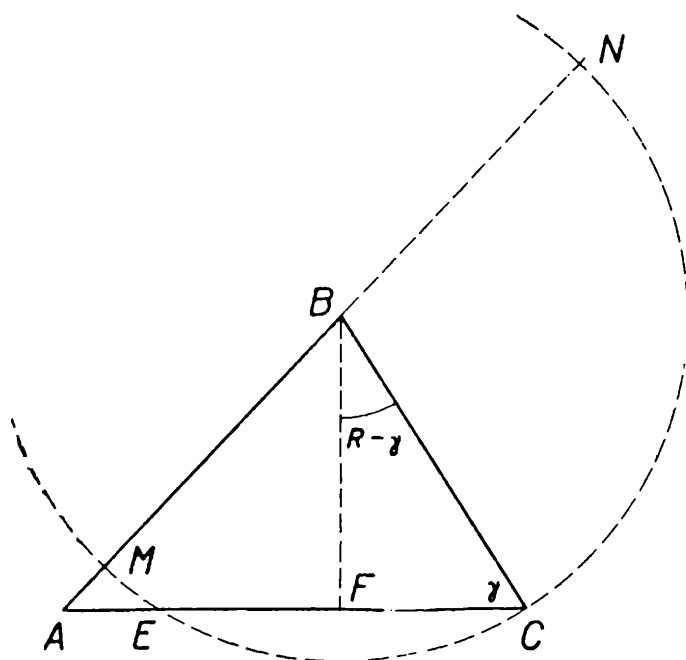
$$\frac{HB}{HD} = \frac{HG}{HC},$$

$$\frac{HB}{HB - HD} = \frac{HG}{HG - HC},$$

$$\frac{HB}{BD} = \frac{HG}{CG},$$

$$(b + c) (c - b) = BG \tg \frac{\gamma + \beta}{2} \cdot BG \tg \frac{\gamma - \beta}{2},$$

$$(b + c) (c - b) = \tg \frac{\gamma + \beta}{2} : \tg \frac{\gamma - \beta}{2}$$



Obr. 4

Výpočet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka určeného třemi stranami, které splňují trojúhelníkovou nerovnost (v textu je pravděpodobně předpokládána) je vysloven takto:

Ještě jest ukázání, když v jednom trianglu všechny tři strany (a žádný kout) dány jsou. Kterak z toho ty tři kouty naleznouti se mají, to jest v stejnostranném *trianglu* velmi lehké.

Při druhých ale - jsou-li špičaté nebo tupé - nechá se buďto v mysli, nebo skutečně vždycky na tu větší stranu z toho naproti stojícímu koutu jedna *perpendicularie* padnout. To místo *accurat* najít (kde taková na *basi* padne) a v jaké kusy ta *basis* skrze to dělená bude, tak řekne se skrze *Reguli Detri*: „Jak ta větší strana se drží proti té summě těch

dvou druhých stran, tak se také drží ta *differenti* těch dvou kratších stran proti (*facit*) jednomu kusu té větší strany (jako *basi*), a ten kus *subtrahiruje* se od té jmenované *basi*. (Tak ten rest dá jako *basi* k jednomu stejnohánatovému *trianglu*) a s tím se pokračuje jako prve, aneb ještě lépe: dělí se ten rest ve dví (tak jest ta polovice ten kus té *basi* z druhé strany ta *perpendicular*). A ta druhá polovice se *addiruje* k předešle nalezenému kusu té *basi* (aneb se *subtrahiruje* od té celé *basi*). Vyjde (na oba způsoby) ten kus *basi* z této strany ty *perpendicularie* ven: skrze to hledají se ty kouty (poněvadž s tím dva rovnokoutečné *triangle* máme a na každém dvě strany známy jsou).“

V dnešní frazeologii bychom vysvětlili odvození naznačeného postupu takto:

V trojúhelníku ABC , v němž $AC > AB$, sestrojíme výšku z vrcholu B . Její pata je bod F . Kolem vrcholu B opíšeme kružnici poloměrem BC a určíme její průsečíky M , N se stranou AB . Je $AM = AB - BC$, $AN = AB + BC$.

Z věty o úsecích na sečnách vedených z bodu A ke kružnici o středu B a o poloměru BC plyne:

$$AM \cdot AN = AE \cdot AC, \text{ neboli}$$

$$(AB - BC) \cdot (AB + BC) = AE \cdot AC \text{ a odtud}$$

$$AC : (AB + BC) = (AB - BC) : AE. \text{ (Ve výkladu Veselého neuváděno.)}$$

Trojúhelník BEC je rovnoramenný s rameny BC a BE , kde $EF = FC$. Potom je $AF = AC - FC$.

V trojúhelníku pravoúhlém BFC je vnitřní úhel při vrcholu C úhel γ , při vrcholu B úhel $R - \gamma$.

$$\text{Platí } \sin(R - \gamma) = FC : BC, \text{ kde } FC = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} (AC - AE).$$

Řešení Veselého je grafické a tak je také nejzajímavější. Početně by znamenalo určit stranu AE , rozdíl $AC - AE$ a odtud $\sin(R - \gamma)$.

Další úhly vypočteme větou sinovou. Učebnice Veselého ukazuje, že již v tehdejší době dovedli řešit trojúhelníky ze tří prvků podle vět o určenosti trojúhelníků a že některé výpočty i konstrukce byly odlišné od výpočtů a konstrukcí dnes všeobecně užívaných.

Sloh učebnice je kostrbatý. Vidíme, jak tehdy byla česká řeč chudá na odborné výrazy a jak těžko vyjadřovala konstrukce a popisovala její postup. Autor se neodvážil zčešťovat názvy a výrazy, které ponechával latinské a skloňoval je podle českých vzorů s českými koncovkami.

Za 90 let na to jiný autor zčeštil důsledně odborné názvy. O tom však napíšeme zase v jiném článku.

Technické příklady na kvadratické rovnice

Víte, že se máte učit uplatňovat své poznatky při řešení úloh praktického života. Protože ve svých učebnicích nemáte dostatek cvičného materiálu tohoto druhu, uvádím řadu příkladů na užití kvadratických rovnic, které je v technické praxi velmi časté. Článek je rozdělen na dvě části. Část I. obsahuje příklady ze strojnictví, část II. z elektrotechniky. Příklady v každé části jsou uspořádány od lehčích k obtížnějším a vedou jednak k rovnicím ryze kvadratickým, jednak k obecným, nebo i k soustavě rovnic. K řešení musíte někdy použít i poznatků z jiných částí matematického učiva, třeba různých geometrických vzorců pro obsahy, povrchy a objemy, nebo i poznatků z jiných oborů, zejména z fyziky. Jde ovšem většinou o základní pojmy a zákony. Ostatně u obtížnějších úloh uvádím nutné pokyny k řešení a pro kontrolu během výpočtu zapisuji výrazy, k nimž při správném postupu musíte dojít. Jako jeden z důležitých pokynů pamatujte, že koeficienty v technických příkladech bývají pro numerické počítání daleko méně příznivé než ve školních učebnicích. Proto se u obecných kvadratických rovnic doporučuje normování, abychom mohli počítat s menšími čísly. Numerické výpočty provádějte pokud možno na logaritmickém pravítku. Neumíte-li log. pravítka užívat, užívejte aspoň tabulek nebo logaritmických výpočtů pomocí tabulek. Výsledky, které u jednotlivých příkladů uvádím, jsou vypočítány na pravítku, a proto jsou možné menší odchylky od vašich výsledků a nesmějí vás mýlit. Pokud výsledky uvedené v části I. značí délky, rozumí se v milimetrech, jak je ve strojnictví obvyklé. Tečka nad rovnítkem značí přibližný výsledek přečtený na pravítku, rovnítko bez tečky značí přesný výsledek.

I. Úlohy ze strojnictví

1. Váha železné tyče ($\gamma = 7,8 \text{ kp/dm}^3$) je $G = 29,4 \text{ kp}$, délka $l = 3 \text{ m}$. Určete průměr d !
($d \doteq 40$)
2. Váha dutého litinového sloupce ($\gamma = 7,25 \text{ kp/dm}^3$) je $G = 956 \text{ kp}$, délka $l = 2,4 \text{ m}$, vnější průměr $D = 40 \text{ cm}$. Určete vnitřní průměr d !
($d \doteq 284$)
3. Tyč čtvercového průřezu má snést tahovou sílu $F = 1200 \text{ kp}$ při dovoleném napětí $\sigma_{\text{dov}} = 720 \text{ kp/cm}^2$. Určete stranu průřezu!
($a \doteq 12,9$)

4. Těč kruhového průřezu má snést takovou sílu $F = 6400$ kp při dovoleném napětí $\sigma_{\text{dov}} = 7$ kp/mm². Určete průměr průřezu!

$$(d \doteq 34)$$

5. Jednočinná pumpa má zdvih $l = 250$ mm a dává jedním zdvihem $0,706$ dm³ vody. Určete průměr pístu!

$$(d \doteq 60)$$

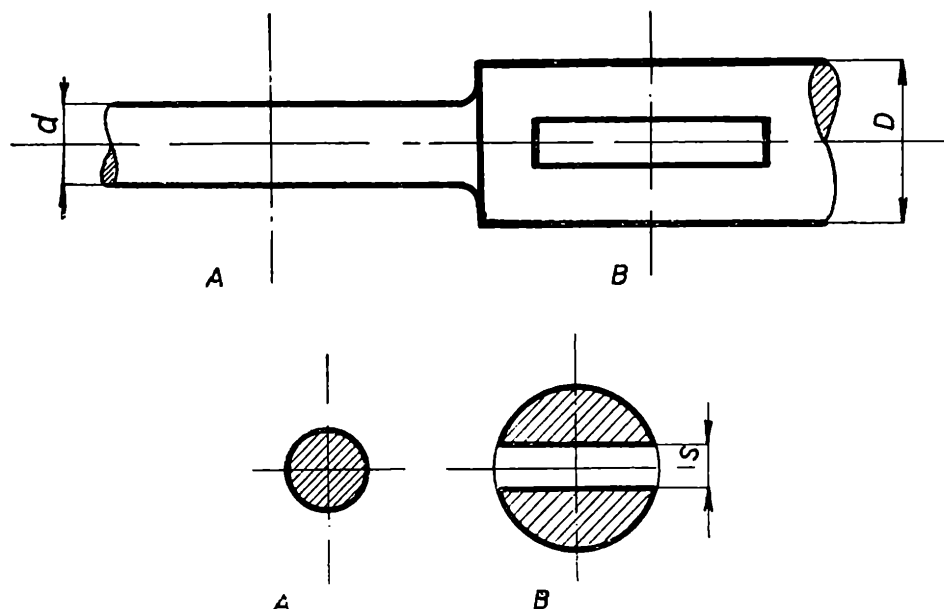
6. Pára působí na píst silou $F = 1298$ kp při dovoleném tlaku $p = 7,5$ kp/cm². Určete průměr pístu!

$$(d \doteq 148)$$

7. Pára o napětí $p = 4$ at působí na píst tlakovou silou $F = 6580$ kp. Určete průměr pístu. (Nepřihlížíme k průměru pístní tyče.)

$$(d \doteq 450)$$

8. Ocelové lano je složeno ze sedmi drátů stejného průměru. Šest z nich



Obr. 1

je rozloženo pravidelně kolem sedmého středního. Lano má snést zatížení $F = 750$ kp. Určete průměr d drátů a průměr lana D , je-li dovolené napětí $\sigma_{\text{dov}} = 12$ kp/mm².

$$(d \doteq 3,36, D = 3 d)$$

9. Určete průměr D hlavy tyče opatřené otvorem pro klín, je-li průměr těla d a má-li otvor šířku $s = 0,25 d$ (obr. 1).

Pokyn: Aby tyč snesla určitý tah, musí být obsah průřezu zeslabené hlavy přinejmenším týž jako obsah průřezu tyče. Vyjádřete tedy rovnost rozsahů řezů A, B . V řezu B považujte nešrafovanou plošku za obdélník rozměrů D, s .

$$\left(D = d \sqrt{\frac{\pi}{\pi - 1}} \doteq 1,21 d \right)$$

10. Železná tyč je namáhána v tahu silou $F = 850$ kp při dovoleném napětí $\sigma_{\text{dov}} = 7$ kp/mm². Určete průměry d , D těla a hlavy, je-li šířka otvoru hlavy $s = D/3$, (viz obr. 1 a pokyn u př. 9).

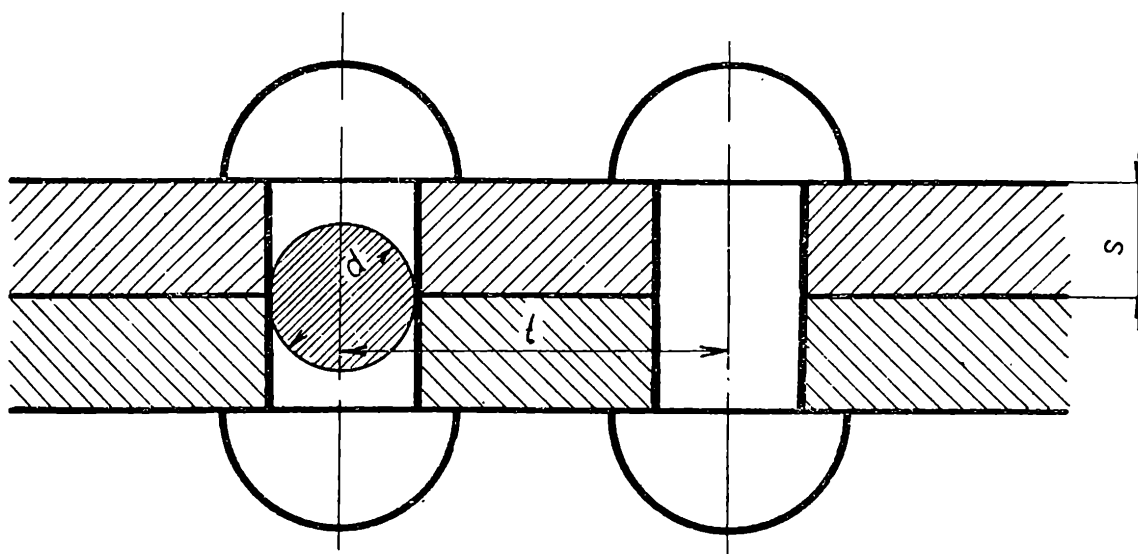
$$(d \doteq 12,4, D \doteq 16,4)$$

11. Určete průměr D hlavy tyče, je-li $d = 35$, $s = 0,3 d$ (viz obr. 1 a pokyn u př. 9).

$$(D \doteq 42,3)$$

Řešení: Pro D dostanete obecnou kvadratickou rovnici, která po dosažení a normování má tvar $D^2 - 13,35 D - 1225 = 0$.

12. Určete závislost ceny c běžného metru vytočeného hřídele na průměru d , stojí-li 1 kg hřídele a Kčs a 1 dm² opracované plochy b Kčs. Z této závislosti vypočtete průměr d , je-li:



Obr. 2

a) $a = 4$ Kčs, $b = 5$ Kčs, $c = 240$ Kčs, $s = 7,85$ kp/dm³;

b) $a = 4,5$ Kčs, $b = 4$ Kčs, $c = 225$ Kčs, $s = 7,85$ kp/dm³.

Řešení: Cena se skládá z ceny za hmotu běžného metru a z ceny za jeho opracování. Upravená rovnice pro průměr d a jeho velikost bude v případě

$$\text{a) } d^2 + 0,638 d - 0,974 = 0, \quad d \doteq 72;$$

$$\text{b) } d^2 + 0,453 d - 0,812 = 0, \quad d \doteq 80.$$

13. Při nýtování plechů se klade požadavek, aby průřez zeslabeného plechu mezi dvěma nýty byl roven průřezu nýtu. Určete podle toho průměr nýtu, je-li síla plechu $s = 10$ a rozteč nýtů $t = 45$ (obr. 2).

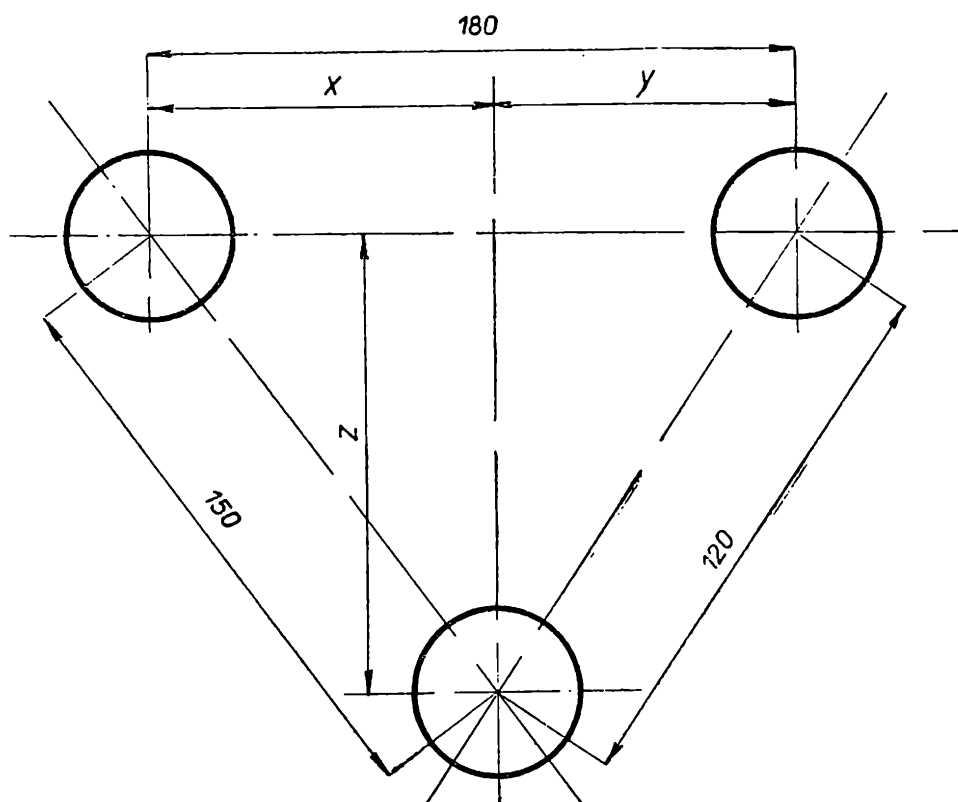
$$(d \doteq 18,4)$$

14. Z kovového válce ($d = 28$ cm, $v = 40$ cm) má být vysoustruhován komolý kužel téže podstavy a výšky, ale polovičního objemu. Jaký bude průměr menší podstavy?

Řešení: Označte poloměr větší podstavy r , menší x . Po úpravě dostanete rovnici $x^2 + 14x - 98 = 0$, z níž $x \doteq 5,1$ cm.

15. Nádobu ve tvaru komolého kužele má horní průměr 3 dm, výšku též 3 dm a má mít objem 15 dm^3 . Jaký bude průměr dna? Sestrojte síť pro výrobu pláště.

Řešení: Označte jako v př. 14. Dostanete rovnici $x^2 + 1,5x - 2,52 = 0$, z níž plyne $x \doteq 1$ dm. K sestavení sítě musíte znát středový úhel α rozvinutého pláště a poloměry s, s' , kde s značí stranu komolého kužele a s' stranu doplňkového kužele. Pro neznámé s', α dostanete dvě rovnice, vyjádříte-li oba oblouky rozvinutého pláště podle vzorce $L = R \text{ arc } \alpha$. Z nich plyne: $\text{arc } \alpha \doteq 1,032$, $\alpha = 58^\circ 12'$, $s' = 5,38$ dm.



Obr. 3

16. Kloubové spojení lze zatížit silou F , která podle rovnice pevnosti v tahu je $F = (a - d) b \sigma_{\text{dov},t}$ a podle rovnice pevnosti ve střihu je $F = 1,5 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sigma_{\text{dov},s}$.

Vypočítejte průměr čepu d , je-li šířka pásu $a = 80$, tloušťka $b = 30$, dovolené napětí v tahu $\sigma_{\text{dov},t} = 6 \text{ kp/mm}^2$ a ve střihu $\sigma_{\text{dov},s} = 4 \text{ kp/mm}^2$.

Řešení: Z daných podmínek dostanete po úpravě rovnici $d^2 + 38,2d - 3060 = 0$, z níž $d \doteq 39,4$.

17. Tři hřídele mají polohu podle obr. 3. Doplňte kótami x, y, z .

Pokyn: Pro kóty x, y, z sestavte podle obr. 3 tři rovnice.

Řešení: $x = 112,5$, $y = 67,5$, $z = 99,2$.

II. Úlohy z elektrotechniky

18. Lano k vytahování obloukovek se skládá z 30 drátků a má snést tah $F = 38$ kp. Určete průměr drátku, je-li dovolené napětí $\sigma_{\text{dov}} = 10$ pk/mm².

$$(d \doteq 0,4 \text{ mm})$$

19. Určete průměr měděného drátu délky $l = 1,25$ m o odporu $R = 0,012 \Omega$, je-li specifický odpor mědi $\rho = 0,017 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$.

Pokyn: Užijte vzorce $R = \rho \frac{l}{S}$ pro odpor, kde ρ je měrný odpor, l délka drátu v metrech, S průřez drátu v mm².

$$(d \doteq 1,5 \text{ mm})$$

20. Měděným drátem délky 80 m prochází proud 110 A. Jak nutno volit průměr drátu, aby ztráta napětí činila pouze 2 V?

Pokyn: Užijte vzorce $E = \frac{I \cdot l}{c \cdot S}$ kde I je proud v ampérech, l délka v metrech, $c = 28,7$ konstanta pro měď, S průřez v mm², E ztráta napětí.

$$(d \doteq 14 \text{ mm})$$

21. Zmenšíme-li u měděného drátu dlouhého 1 m průřez o 1 mm², zvětší se jeho odpor o 0,000 85 Ω . Určete průměr drátu, je-li $\rho = 0,017 \text{ mm}^2/\text{m}$.

Pokyn: Ze vzorce jako v př. 19 a z podmínek úlohy dostanete dvě rovnice pro R a S , z nichž plyne pro S rovnice $S^2 - S - 20 = 0$ a z ní $S = 5$, $d \doteq 2,52$ mm. Kořen $S = -4$ nemá fyzikální význam.

22. Jaké odpory jsou v obvodu a jaký proud jím protéká, když při zvětšení odporu o 10 Ω se zmenší proud o 1 A při nezměněném napětí $U = 120$ V?

Pokyn: Z Ohmova zákona a z podmínek úlohy dostanete soustavu rovnic pro neznámé I , R , z níž plyne $I = 4$ A, $R = 30 \Omega$.

23. Tři odpory, dva stejné a jeden o 10 Ω menší, dávají při paralelním spojení výsledný odpor 5 Ω . Určete ony odpory.

Pokyn: Použijte rovnici pro paralelní spojení odporů. Vyjde $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$.

24. V elektrickém obvodu je spotřebič a ohmický odpor spojen v sérii podle vztahu $RI^2 + EI = 600$, kde $R = 2 \Omega$, $E = 110$ V. Určete I .

$$(I = 5 \text{ A})$$

25. Dva kondensátory spojené paralelně dávají kapacitu 16 cm, spojené v sérii kapacitu 1,75 cm. Určete kapacity x , y obou kondenzátorů a vyjádřete je v pikofaradech.

Pokyn: Při paralelním a sériovém spojení kondenzátorů platí opačné rovnice než při obdobném spojení odporů. Dostanete symetrickou soustavu typu $x + y = a$, $x \cdot y = b$, z níž vyjde $x = 14$ cm, $y = 2$ cm, Pro převod na pikofarady platí; 1 cm = 1 9 10¹¹F = 1/9 10 pF,

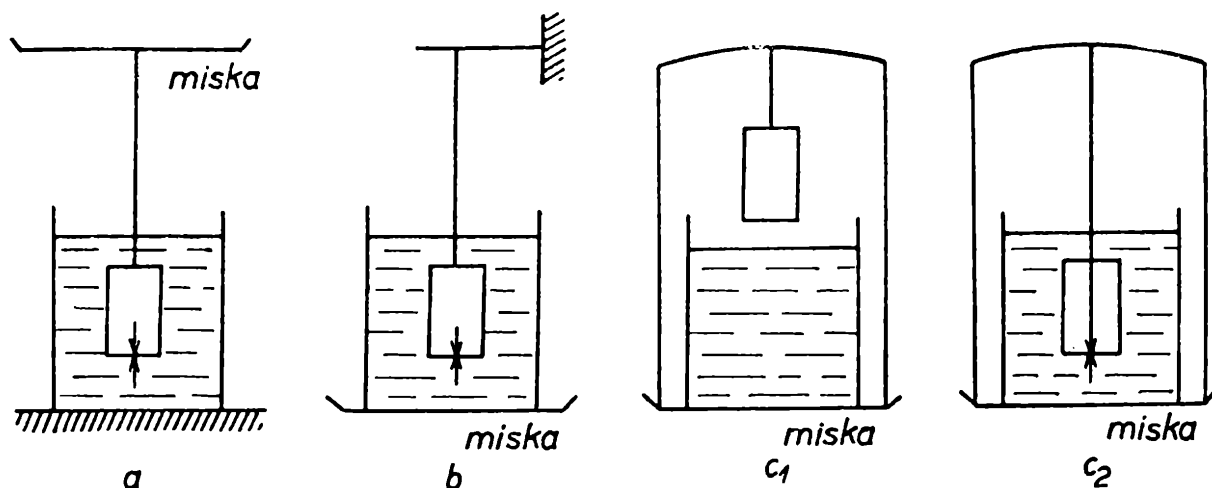
Fyzikální olympiáda

Prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků:

Pohyb jednoduché soustavy těles spojených vláknem

Téma k prostudování pro první kolo soutěže

Působí-li síla na tuhé těleso, které se může pohybovat, udílí mu zrychlení. Chceme-li zjistit, jak se těleso pohybuje, určíme nejdříve všechny síly na těleso působící. Tyto síly se dají obecně nahradit výslednicí a výsledným otáčivým momentem. Všimněme si jen případu, kdy výsledný moment je roven nule.



Obr. 2

Je třeba vždy dobře uvážit, která síla působí na dané těleso, abychom ji nezaměnili s její reakcí. Ukážeme si to na následujících příkladech.

Podle Archimédova zákona je těleso nadlehčováno v kapalině silou, která se rovná váze vytlačené kapaliny. Proto na těleso ponořené v kapalině působí dvě síly: váha tělesa směrem dolů a vztlaková síla kapaliny na těleso směrem vzhůru. Zavěsíme-li těleso na miskou vah a po vyvážení je ponoříme úplně do nádoby s vodou, která je na pevné podložce pod vahami (obr. 1a), rovnováha se poruší - miska s tělesem bude nadlehčena. Zde jsme si všímali síly, kterou působí kapalina na těleso.

Jestliže si budeme všímat sil, které působí na kapalinu (k nádobě nepřihlížejme), pak směrem dolů působí váha kapaliny a kromě toho

tlaková síla, kterou působí těleso na kapalinu, jako reakce tlakové síly, kterou působí kapalina na těleso. Vyvážíme-li tedy nádobu s vodou a pak do ní ponoříme těleso, které je zavěšeno na stojánku mimo váhy (obr. 1b), miska s kapalinou klesne.

Jestliže na vahách vyvážíme nádobku s vodou a nad ní zavěšeným tělesem (obr. 1c₁), pak při ponoření tělesa do kapaliny (obr. 1c₂) rovnováha na vahách se neporuší.

Ve všech případech působila tlaková síla kapaliny na těleso a tlaková síla tělesa na kapalinu. Obě síly jsou stejně velké rovnají se váze kapaliny vytlačené tělesem - ale opačného směru. V prvním případě se tlaková síla tělesa na kapalinu zruší pevností podložky pod nádobou a zbývá tlaková síla kapaliny na těleso směrem vzhůru. Proto je miska s tělesem nadlehčována. V druhém případě se zruší tlaková síla kapaliny na těleso upevněním závěsného bodu a zbývá tlaková síla tělesa na kapalinu směrem dolů. Proto miska s kapalinou klesne. V třetím případě se nemůže ani prvá, ani druhá síla zrušit pevností podložky (kapalina i těleso jsou na vahách), obě síly se přenášejí (závěsem a dnem nádoby) na misku v opačných směrech, a proto se jejich účinky na misku zruší a rovnováha se neporuší.

Aby těleso upevněné na vlákně neproměnné délky konalo rovnoměrný pohyb po kružnici ve vodorovné rovině, musí je vlákno táhnout silou, která míří do středu kružnice, tzv. silou dostředivou. Těleso zase napíná vlákno silou stejně velikou, ale opačného směru, které říkáme síla odstředivá. V prvním případě jde o sílu, kterou bod upevnění působí prostřednictvím vlákna na těleso, ve druhém případě jde o sílu, kterou těleso působí prostřednictvím vlákna na bod upevnění.

Výsledná síla se podle 2. pohybového zákona rovná součinu setrvačné hmoty tělesa nebo setrvačných hmot soustavy těles, na niž síla působí, a zrychlení. Proto sečteme setrvačné hmoty soustavy pohybujících se těles a pak ze známé setrvačné hmoty a známé síly vypočítáme zrychlení pohybu.

V dalším si všimneme pohybu těles spojených vláknem a určíme, jaké je zrychlení jednotlivých těles a jakou silou je při pohybu vlákno napjato. Pro zjednodušení úvah předpokládáme, že při pohybu nevzniká tření, že vlákno je dokonale ohebné, neproměnné délky a že jeho hmota je zanedbatelně malá vzhledem k hmotám těles. Omezíme se jen na takové soustavy, v nichž všechna tělesa se pohybují se stejným zrychlením. V těchto případech vystačíme s následujícím způsobem řešení.

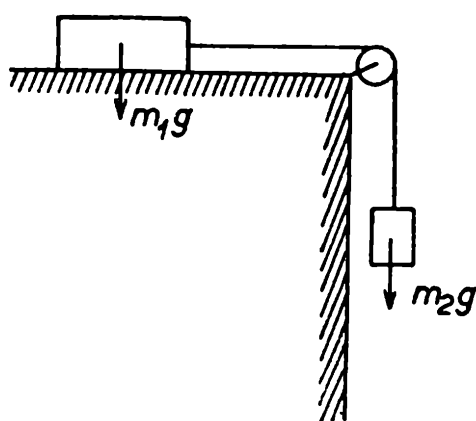
Jestliže těleso hmoty m visí na vlákně a závěsný bod je v klidu, táhne těleso závěsný bod prostřednictvím vlákna silou $F_1 = mg$ směrem dolů; závěsný bod působí na těleso prostřednictvím vlákna reakcí stejně velkou směrem vzhůru. Protože obě síly jsou v jedné přímce a opačného

směru, napínají jen vlákno a těleso - které bylo v klidu v klidu zůstává.

Jestliže je těleso taženo vláknem směrem vzhůru se zrychlením a , musí na ně působit směrem vzhůru kromě reakce vlákna ještě další síla $F_1 = ma$, která mu uděluje žádané zrychlení. Proto na těleso působí směrem vzhůru síla:

$$F_2 = m(g + a) . \quad (1)$$

Tato síla působí na těleso prostřednictvím vlákna, a tedy podle principu akce a reakce je síla, kterou těleso napíná vlákno, stejně velká, ale směruje dolů.



Obr. 1

Pohybuje-li se závěsný bod rovnoměrně ať již směrem tíhového zrychlení, nebo opačným směrem - pak tělesu o hmotě m se neuděluje žádné zrychlení, a vlákno je tedy napínáno zase jen silou $F_1 = mg$.

Jestliže se závěsný bod pohybuje směrem zrychlení g , avšak se zrychlením $a \neq g$, pak z celkové síly $F_1 = mg$ působící na těleso směrem dolů složka $F_3 = ma$ způsobuje pohyb a zbývající složka

$$F_4 = mg - ma = m(g - a) \quad (2)$$

napíná vlákno.

Když síla působící na těleso je způsobována váhou jiného tělesa, pak jeho tlaková síla na uvažované těleso odpovídá dříve uvedené tažné síle.

Příklad 1

Těleso o hmotě m_1 je uváděno do pohybu po vodorovné rovině tělesem o hmotě m_2 , které je k němu připojeno vláknem vedeným přes kladku (obr. 2). Vypočtete zrychlení soustavy těles a sílu napínající vlákno.

Síla způsobující pohyb je $F = m_2g$. Hmota uváděná do pohybu skládá se z hmoty m_1 a hmoty m_2 , které se pohybují se stejným zrychlením a (k otáčivému pohybu kladky nepřihlížíme). Proto podle 2. pohybového zákona platí:

$$m_2g = (m_1 + m_2) a$$

a z toho

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Na vlákno působí těleso o hmotě m_2 , které se pohybuje se zrychlením a směrem tíhového zrychlení; proto je vlákno napjato jen silou:

$$F_1 = m_2 (g - a) = m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) g = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Příklad 2

Na koncích vlákna vedené přes pevnou kladku jsou zavěšena stejná tělesa o hmotě M a na jednom z nich leží ještě přívažek o hmotě m (obr. 3). Určete zrychlení pohybu, tlakovou sílu přívažku na hmotu M , sílu napínající vlákno a tlakovou sílu na osu kladky.

Sílu způsobující pohyb je váha přívažku mg ; hmota uvedená do pohybu je $2M + m$. (K otáčivému pohybu kladky nepřihlížíme.) Proto platí:

$$mg = (2M + m) a$$

a z toho

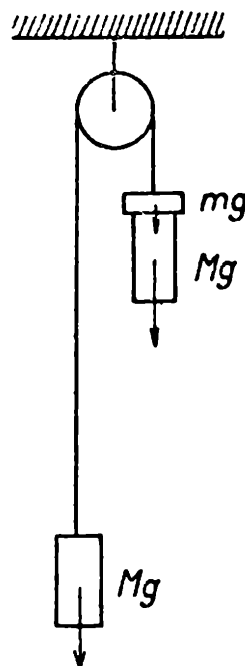
$$a = \frac{m}{2M + m} g$$

Poněvadž přívažek by se sám pohyboval se zrychlením g a poněvadž podložka se pohybuje jen se zrychlením a , působí přívažek o hmotě m na závaží o hmotě M směrem dolů silou

$$F_1 = m (g - a) = m \left(1 - \frac{m}{2M + m} \right) g = \frac{2mM}{2M + m} g$$

Poněvadž se soustava těles pohybuje směrem, jímž působí síla $Mg + mg$, je na pravé straně podle (2) vlákno napjato silou souvisící jen s rozdílem zrychlení, kterého by tělesa nabyla při volném pádu, a zrychlení, kterého skutečně nabývají, tedy silou:

$$\begin{aligned} F_2 &= (M + m) (g - a) = (M + m) \left(1 - \frac{m}{2M + m} \right) g = \\ &= \frac{2M(M + m)}{2M + m} g. \end{aligned}$$



Obr. 3

Na levé straně nese vlákno jen hmotu M , která by v klidu napínala vlákno silou Mg . Toto těleso se však pohybuje směrem opačným ke zrychlení g , a to se zrychlením a . Proto podle (1) je síla, která napíná vlákno,

$$F_3 = M(g + a) = M \left(1 + \frac{m}{2M + m} \right) g = \frac{2M(M + m)}{2M + m} g$$

Vlákno je tedy na obou stranách napínáno stejnou silou, což je samozřejmé.

Poněvadž F_2 a F_3 jsou síly stejně velké, rovnoběžné, stejnosměrné a působí ve stejných vzdálenostech od osy kladky, působí jejich výslednice v ose kladky a rovná se součtu obou sil. Proto osa kladky podléhá síle:

$$F_4 = F_2 + F_3 = 2F_2 = \frac{4M(M + m)}{2M + m} g$$

Poznámka. Na člancích: Z á k o n y K i r c h h o f f o v y a j e j i c h d ů s l e d k y (I), M ě ř e n í k a l o r i m e t r e m (II), P o h y b j e d n o d u c h é s o u s t a v y t ě l e s s p o j e n ý c h v l á k n e m (III) spolupracovali s autorem prof. dr. R o s t i s l a v e m K o š t á l e m členové Krajského výboru Fyzikální olympiády v Brně Dagmar K o š t á l o v á (I, II, III), František Š u r á ň (III) a dr. Bohumil V l a c h (I, II). Svými připomínkami k úpravě textu přispěli členové Krajského výboru Fyzikální olympiády v Brně Josef K o n r á d (I, II, III), František Š u r á ň (I, II), dr. Bohumil V l a c h (III) a členové Ústředního výboru Fyzikální olympiády prof. dr. Bedřich H a v e l k a (I), dr. Marta C h y t i l o v á (I, II, III), Vladimír R u d o l f (I, II, III) a Jan T e s a ř (I, II, III).

Poděkování pracovníkům FO

Ve školním roku 1960/61 proběhl II. ročník soutěže Fyzikální olympiády, který byl úspěšný. O úspěšný průběh soutěže se zasloužili učitelé fyziky, referenti FO a mnozí ředitelé škol a inspektoři, kteří propagovali, organizovali a řídili soutěž na školách. Velkou práci vykonali členové KV FO a členové ÚV FO.

JČMF spolu s ÚV FO děkuje prof. dr. B. Havelkovi, prof. dr. R. Košťálovi, dr. J. Náterovi, Vlad. Rudolfovi, J. Pospíšilovi, dr. B. Vlachovi, D. Košťálové, J. Konrádovi, Fr. Šuránovi, Fr. Fišerovi, J. Sušankovi, doc. dr. J. Feiferovi, K. Hofmanovi, Z. Ungermanovi, E. Chráskovi, Fr. Živnému, E. Sokolovi, J. Chrapanovi, dr. M. Chytilové, J. Louvarovi, Fr. Púchovskému, E. Římanovi, J. Stránskému, J. Tesařovi, doc. dr. L. Thermovi, J. Janovičovi, Z. Šimkovicové, A. Hudecovi, I. Turkovi, Zb. Fukalovi, St. Ondřejkovi, M. Bažátovi, M. Jančovičovi, Fr. Kubovi, Z. Kubíčkoví, Fr. Ledabylovi, dr. Fr. Smutnému, dr. M. Bajerovi, O. Tomešovi, St. Fröhlichovi, doc. dr. J. Tichému, J. Mikuleckému, V. Technikovi, M. Horákovi, J. Honnerovi, L. Hájkovi, Fr. Vejsadovi, M. Eclerové, Fr. Bočkovi a všem ostatním pracovníkům FO za obětavou a iniciativní práci při řízení a organizování soutěže.

Tito pracovníci se bez odměny podíleli na vypracování úloh a vzorových řešení, na opravování řešených úloh pro jednotlivé ročníky a kategorie FO. Obětavě propagovali tuto soutěž a ve své práci dosahovali velmi pěkných výsledků. Jejich práce je oceňována jako velmi důležitá politicko výchovná funkce.

ÚV JČMF a ÚV FO.

Redakční sdělení

Soutěž o nejlepší rys

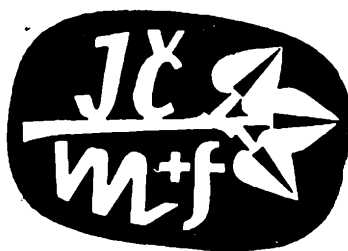
Každý technik musí si osvojit k svému povolání zručnost a úhlednost grafického projevu. I nejlepší plán nebo projekt v mysli konstruktéra nemá prakticky cenu, nedostane-li dělník, který má dílo zhotovit, do ruky spolehlivý a jasný nákres. Minula již doba, kdy se podceňoval význam rýsování. Jeho praktická potřeba je nutná zvláště nyní při přibližování školy požadavkům života.

Abychom podpořili mezi studující mládeží zájem o rýsování a abychom zvýšili jeho jakost, vypisujeme pro žáky škol všeobecně vzdělávacích a odborných soutěž o nejlepší rys. Soutěž připadne do rámce oslav stého výročí založení JČMF.

Soutěžní rysy, tematicky vyhovující osnovám deskriptivní geometrie (rýsování), nebo na odborných školách technickému kreslení, musí být provedeny v době od 1. září 1959. Rysy zasílá ředitelství školy, ve výjimečných případech žák, na adresu: R e d a k c e R o z h l e d ů m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í c h, Praha 2, Trojanova 13. Počet rysů od každého soutěžícího není omezen. Příпустné rozměry jsou A2, A3, A4, provedení tužkou nebo tuší. Každý rys musí obsahovat jméno autora, datum a třídu. V příloze budiž uvedena adresa školy a jméno vyučujícího.

Nejlepší rysy v jednotlivých kategoriích (podle tříd) budou otištěny v našem časopise a jejich autoři obdrží knižní odměny. Lhůta k odvedení končí 20. června 1962. Rysy zaslané do redakce během roku 1960 a 1961 převádíme do této soutěže, jestliže vyhovují výše uvedeným podmínkám. Projeví-li soutěžící v průvodním dopise přání, budou jim rysy vráceny po ukončení soutěže. Ocenění provede komise, jejímiž členy jsou: J. Bejsta, prof. inž. J. Kochman, doc. E. Kraemer a oba redaktoři Rozhledů. Výsledek bude publikován příštího roku v říjnovém čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Redakce



Sto let Jednoty československých matematiků a fyziků

V tomto roce vzpomenou českoslovenští matematici a fyzici dvou historických výročí, úzce svázaných s jejich vědeckou a pedagogickou prací. Vzpomenou stého výročí vzniku Jednoty československých matematiků a fyziků a čtyřicátého výročí založení časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální.

Při této příležitosti nemůže být na škodu ohlédnout se zpět na dobu vzniku Jednoty a ukázat zejména dorůstající generaci matematiků a fyziků počátky její činnosti, tak úzce svázané s iniciativou a obětavostí studující mládeže. Jednota vznikla jako svépomocný spolek posluchačů matematiky a fyziky na pražské vysoké škole a její první činnost byla spojena s pořádáním volných přednášek pro studující dorost. V průběhu let se její činnost znásobila a zahrnula i činnost vědeckou a vydavatelskou, avšak její pomoc studující mládeži a pedagogickým pracovníkům zůstala i potom na prvním místě v celé její rozsáhlé práci.

Se jménem Jednoty je po celých sto let úzce spojen jak vývoj naší matematiky a fyziky, tak vývoj české a slovenské školy, o jejíž přiblížení životu a praxi bylo nutno vést v minulosti složitý boj. Ne vždy se přikládal matematice a fyzice na školách takový význam, jako dnes. Jednota stála v těch dobách v čele všech snah o jejich důstojné a náležité uplatnění a starala se o odborný růst přednášejících, jež vedla i k samostatné vědecké a popularizačorské práci. Jednota československých matematiků a fyziků byla založena na ochotě a obětavosti svých členů; často zápasila s nedostatkem finančních prostředků a musela čas od času přerušovat svou publikační činnost, zaměřenou na rozvoj vědy a na zdokonalení práce pedagogů. Přes tyto dnes už nepředstavitelné obtíže zůstala svému hlavnímu poslání věrna. Zasloužila se velmi o to, že matematika a fyzika nejsou dnes těmi nezáživnými před-

měty na našich školách, které vzbuzují hrůzu žactva. Soutěže a zábavná forma řešení úloh, jež zahrnula Jednota do své činnosti již na konci minulého století, byly obdobou nynějšího pořádání našich matematických olympiád, které se každoročně těší velké popularitě.

Tak jako byla celá činnost Jednoty prospěšna žactvu a pedagogům, tak byla prospěšná i vědcům. V Jednotě si vědečtí pracovníci uvědomovali cenu a sílu kolektivní práce a od počátku tu proto vyrůstaly největší postavy naší moderní matematiky a fyziky. Tito lidé se většinou osvědčili zároveň jako výborní organizátoři, neboť vědomí síly kolektivní práce jim od počátku ukazovalo směr a formovalo styl jejich přístupu k vědeckému výzkumu a k praktické činnosti.

Připomínajíce si tuto rozsáhlou a bohatou činnost Jednoty, připomeneme si v den jejího založení, který připadá na 28. března, i tu významnou skutečnost, že všechny velké snahy a myšlenky, které se zrodily na půdě Jednoty, došly svého uplatnění nebo uskutečnění až po zlomu v dějinách našich národů, který teprve umožnil pokrokové a nebývale rozsáhlé uplatnění vědy v životě společností a při výchově mládeže. Tímto zlomem bylo historické vítězství dělnické třídy nad buržoazní reakcí v únoru roku 1948. Všechno cenné a pokrokové, co činnost Jednoty vždy provázelo a o co Jednota prostřednictvím svých nejprogresivnějších členů vždy usilovala, došlo teprve zásluhou vítězství pracujícího lidu svého uznání a naplnění.

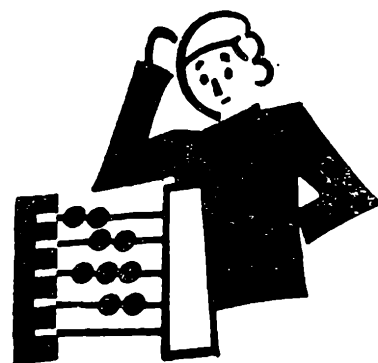
Proto je sté výročí založení Jednoty československých matematiků a fyziků tak slavnostní příležitostí, při níž se zamýšlíme nejen nad její minulostí, z níž se rádi poučujeme, ale při níž se zamýšlíme i nad budoucností, která otevřela před matematiky a fyziky řadu nejnáročnějších úkolů v celých dosavadních dějinách vědy. Rychlé pronikání do vesmíru a úplná automatizace výroby, to jsou dva hlavní směry uplatnění matematiky a fyziky v různých fázích jejich uskutečňování. Před Jednotou stojí dnes závažný úkol, účinněji než dosud napomáhat přípravě odborníků pro ta odvětví, která s uvedenými směry vývoje úzce souvisí. Na této přípravě se bude podílet i časopis Rozhledy, který má dlouholeté zkušenosti s popularizací matematicko-fyzikálních věd na našich školách. Proto jak Jednotě, tak i časopisu je třeba přát k jejich jubileu nový hojný počet příznivců a zájemců a čtenářům tohoto časopisu zvláště pak připomenout naši světlou budoucnost, která uskuteční všechny fantastické sny lidstva a k jejímuž uskutečnění přispěje již jejich dnešní zájem a naše společná budovatelská práce.

*Dr. František Kahuda
ministr školství a kultury*

Inž. Eduard Kriegelstein, PŠZ, Praha:

Užití diferenciálního počtu

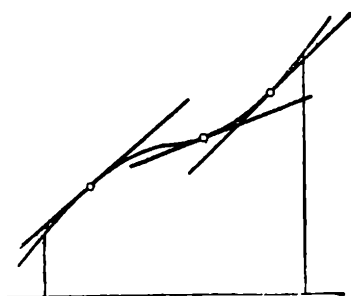
(Pokračování)



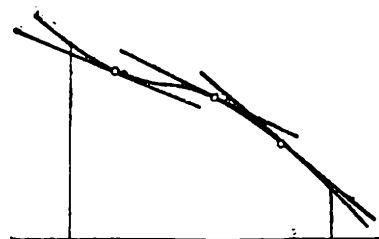
V předcházejících kapitolách jsme poznali, co je to derivace funkce a jak se počítá. Nyní si ukážeme některé příklady užití derivace.

a) Průběh a graf funkce. Lokální extrémy

Dříve než budeme zkoumat průběh funkce a sestavovat její graf, definujme funkci rostoucí, resp. klesající, v určitém intervalu.



Obr. 22



Obr. 23

Definice 9. Funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalu $(a; b)$, jestliže pro $x_1 < x_2$ z tohoto intervalu je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce $f(x)$ je klesající v intervalu $(a; b)$, jestliže pro $x_1 < x_2$ z tohoto intervalu je $f(x_1) > f(x_2)$.

Můžeme prostě říci, že u rostoucí funkce odpovídá většímu x větší $f(x)$ a u funkce klesající odpovídá většímu x menší $f(x)$ (obr. 22 a 23).

Hovoříme-li o funkci rostoucí nebo klesající v určitém bodě c , máme na mysli chování funkce v nějakém velmi malém okolí bodu c . Připomeňme si ještě, že derivace $f'(c)$ v bodě c udává směrnici tečny v bodě c . Z obrázku vidíme, je-li funkce $f(x)$ rostoucí v nějakém bodě, že pak tečna jejího grafu svírá s osou x ostrý úhel. Je-li naopak funkce $f(x)$

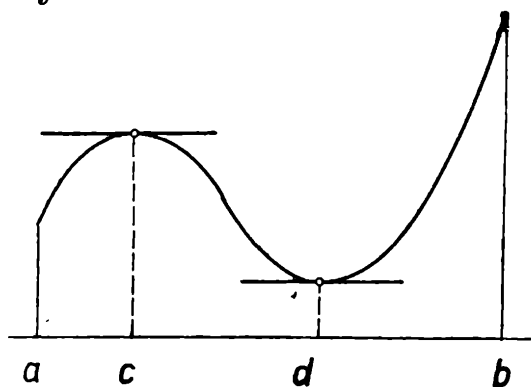
v nějakém bodě klesající, pak tečna jejího grafu v tom bodě svírá s osou x tupý úhel. Můžeme tedy říci, že má-li funkce $f(x)$ v bodě c kladnou derivaci, tj. $f'(x) > 0$, je v bodě c rostoucí a má-li v bodě c derivaci zápornou, tj. $f'(x) < 0$, je v bodě c klesající.

Příklad 41. Funkce $y = \frac{1}{2}x^2$ má $y' = x$. To znamená, že pro kladná x je daná funkce rostoucí, pro záporná x je klesající.

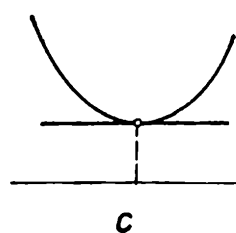
Příklad 42. Funkce $y = e^x$ má derivaci $y' = e^x$. Pro všechna x je zřejmě derivace $y' = e^x$ stále kladné číslo. Je tedy funkce $y = e^x$ stále rostoucí funkce.

Nyní si objasníme pojem **a b s o l u t n í h o m a x i m a** a **a b s o l u t n í h o m i n i m a** v intervalu a **l o k á l n í h o m a x i m a** a **m i n i m a** funkce v bodě. Podívejme se na obr. 24.

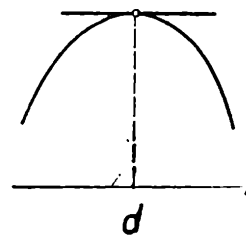
V bodě b má daná funkce svou největší hodnotu, čili maximum a v bodě d má svou hodnotu nejmenší, čili minimum. Můžeme tedy oba pojmy definovat takto:



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

Definice 10. Funkce $f(x)$ má v bodě x_1 **absolutní maximum** v intervalu $\langle a; b \rangle$, jestliže pro všechna x z tohoto intervalu $\langle a; b \rangle$ je $f(x_1) \geq f(x)$.

Funkce $f(x)$ má v bodě x_2 **absolutní minimum** v intervalu $\langle a; b \rangle$, jestliže pro všechna x z tohoto intervalu $\langle a; b \rangle$ je $f(x_2) \leq f(x)$.

P o z n á m k a. V definici 10. připouštíme také rovnost, protože se může stát, že funkce $f(x)$ nabývá funkční hodnoty $f(x_1)$ ve více bodech; např. funkce $y = \sin x$ v intervalu $\langle 0; 4\pi \rangle$.

Podíváme-li se na graf funkce $y = f(x)$ v obr. 24, upoutají naši pozornost body c , resp. d , v nichž má graf funkce jakési vrcholy. Oba body mají jednu společnou vlastnost, a to: tečny sestavené v nich ke křivce jsou rovnoběžné s osou x . Bodům těchto vlastností říkáme **r e l a t i v n í** nebo **l o k á l n í e x t r é m y**. V bodě c je pak **l o k á l n í m a x i m u m**; v bodě d **l o k á l n í m i n i m u m**. Lokální extrémy jsou určeny definicí:

Definice 11. Funkce $f(x)$ má v bodě c **lokální maximum**, existuje-li takové okolí bodu c , že pro všechna x z tohoto okolí je $f(x) \leq f(c)$.

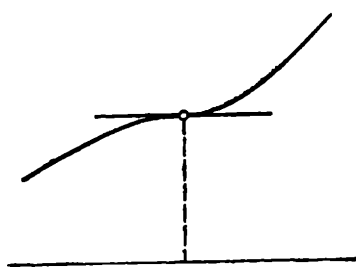
Funkce $f(x)$ má v bodě d lokální minimum, existuje-li takové okolí bodu d , že pro všechna x z tohoto okolí je $f(x) \geq f(d)$.

Řekli jsme již, že v bodech, v nichž nastává lokální extrém, je tečna rovnoběžná s osou x . A protože směrnice tečny je určena derivací funkce, musí být derivace rovna nule v takových bodech, v nichž má být lokální extrém.

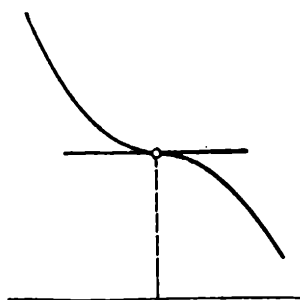
Věta 20. *Má-li funkce $f(x)$ v bodě c lokální extrém, pak existuje-li $f'(c)$, je $f'(c) = 0$.*

Uvedená věta 20 se však nedá obrátit. Je-li $f'(c) = 0$, může v bodě c nastat lokální extrém, nebo také nemusí.

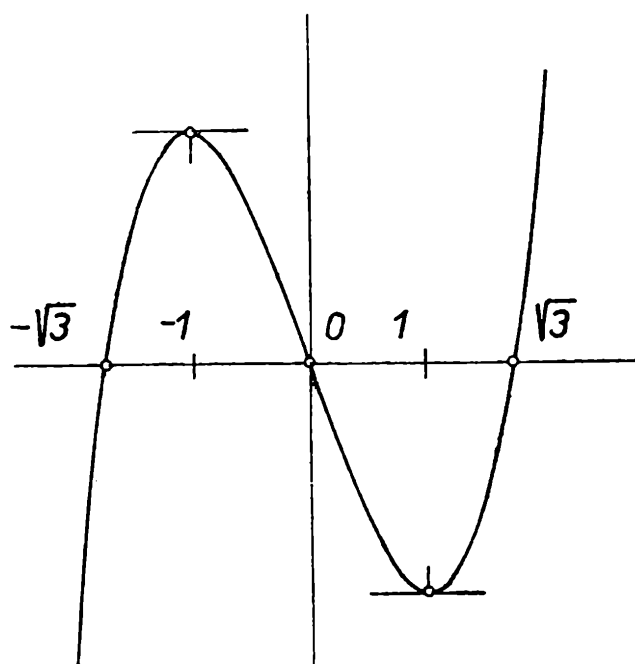
Abychom zjistili, zdali v bodě c je skutečně lokální extrém, musíme vyšetřit okolí bodu c .



Obr. 27



Obr. 28



Obr. 29

Jestliže v nějakém okolí bodu c je pro $x < c$ derivace $f'(x) < 0$, tj. funkce je klesající a pro $x > c$ je $f'(x) > 0$, tj. funkce je rostoucí, nastává v bodě c lokální minimum (obr. 25).

Je-li v nějakém okolí bodu c pro $x < c$ derivace $f'(x) > 0$, tj. funkce je rostoucí a pro $x > c$ je $f'(x) < 0$, tj. funkce je klesající, nastává v bodě c lokální maximum (obr. 26).

Jestliže však je funkce v celém okolí bodu c rostoucí (obr. 27) nebo klesající (obr. 28), nenastává v bodě c lokální extrém, i když je $f'(c) = 0$.

Příklad 43. Vyšetřeme průběh funkce $y = x^3 - 3x$ a zakresleme její graf.

Položíme-li derivaci $y' = 3x^2 - 3$ rovnou nule, dostaneme body,

v nichž mohou být lokální extrémy

$$3x^2 - 3 = 0, \\ x_1 = 1; x_2 = -1.$$

Vyšetříme-li okolí bodu $x_1 = 1$, zjistíme, že např. $y'(0,5) = 3 \cdot 0,5^2 - 3 = -2,25$; $y'(1,5) = 3 \cdot 1,5^2 - 3 = 3,75$. Je tedy v bodě $x_1 = 1$ lokální minimum. Zkoumáním okolí bodu $x_2 = -1$ se přesvědčíme, že $y'(-1,5) = 3 \cdot (-1,5)^2 - 3 = 3,75$ a $y'(-0,5) = 3 \cdot (-0,5)^2 - 3 = -2,25$. V bodě $x_2 = -1$ je tedy lokální maximum.

Protože první derivace funkce udává směrnici tečny, můžeme podle definice 9. určit intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající. Pro x , která vyhovují nerovnosti

$$y' = 3(x^2 - 1) > 0$$

bude funkce rostoucí.

$$x^2 - 1 > 0, \\ |x| > 1,$$

tj.

$$x < -1 \text{ nebo } x > 1.$$

(Dokončení)

R u d o l f C i h l á ř, České Budějovice:

Použití analytické geometrie při řešení planimetrických úloh

V kategorii A IX. ročníku MO byl tento příklad:

V rovině je dána úsečka AB a uvnitř úsečky je dán pohyblivý bod M . Nad úsečkami AM, BM jako stranami sestrojíme čtverce $AMCD$ a $BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině vyřazené přímkou AB .

a) Zjistěte, jaké je geometrické místo středů úseček, které spojují středy obou uvažovaných čtverců.

b) Přímký AE, BC se protínají v bodě N . Ukažte, že přímký MN procházejí jediným bodem.¹⁾

a) Nejprve si vhodně zvolíme souřadnicovou soustavu, a to tak, že počátek O soustavy bude v bodě A a osa x bude procházet bodem B . Zvolme vnitřní bod M úsečky AB a sestrojme čtverce $AMCD, BMEF$. Jednotlivé vrcholy mají souřadnice:

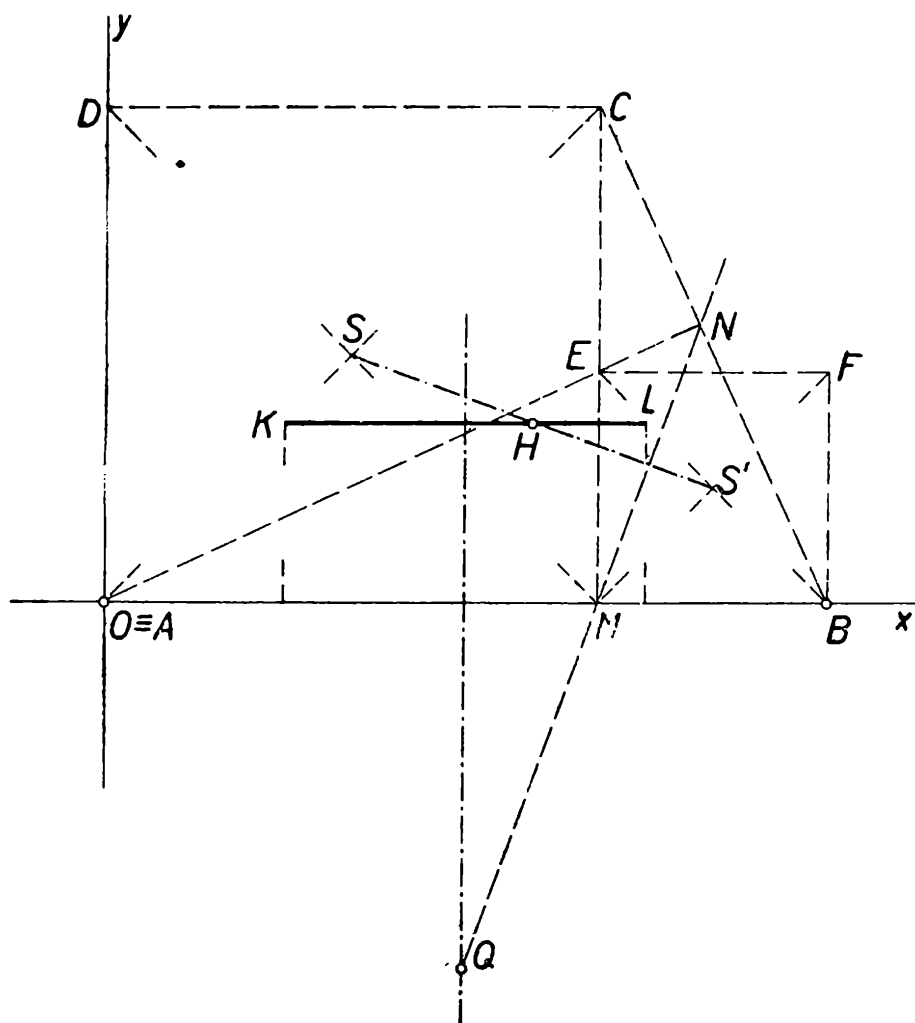
$A(0; 0)$ $B(a; 0)$, $M(u; 0)$, $C(u; u)$, $D(0; u)$, $E(u; v)$, $F(a; v)$, přičemž $u = AM$, $v = MB$, $u + v = a$, $0 < u < a$, $0 < v < a$. Středy S, S' čtverců jsou

¹⁾ Zmíněná úloha v MO byla poněkud jiná.

$$S\left(\frac{1}{2}u; \frac{1}{2}u\right), S'\left(u + \frac{1}{2}v; \frac{1}{2}v\right).$$

Střed H úsečky SS' je podle toho

$$H\left(\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}v; \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v\right);$$



Obr. 1

poněvadž $u + v = a$, můžeme psát

$$H\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}u; \frac{1}{4}a\right).$$

Odtud je patrné, že ať je u jakékoli, souřadnice y bodu H je stále rovna $\frac{1}{4}a$, tj. je konstantní. Geometricky to znamená, že bod H leží vždy na rovnoběžce s osou x , čili s danou úsečkou AB . Ke geometrickému místu však nenáleží celá přímka, nýbrž jen úsečka. Její krajní body dostaneme tak, že v souřadnici x bodu H za u položíme jednak $u = 0$, jednak $u = a$

(tj. meze pro u). Obdržíme tak body

$$K\left(\frac{1}{4}a; \frac{1}{4}a\right), \quad L\left(\frac{3}{4}a; \frac{1}{4}a\right)$$

Vidíme, že geometrickým místem bodů O je úsečka KL .

P o z n á m k a. Pro úplnost důkazu by bylo potřebí ještě ukázat, že každý bod úsečky KL je středem úsečky spojující středy čtverců $AMCD$, $BMEF$.

b) Abychom provedli důkaz druhého tvrzení, zjistíme nejprve souřadnice průsečíků N přímk AE , BC . Rovnice těchto dvou přímek jsou

$$AE \equiv y = \frac{v}{u} x,$$

$$BC \equiv y = \frac{u}{u-a} (x-a),$$

tj.

$$BC \equiv y = -\frac{u}{v} (x-a).$$

Vidíme, že součin směrnic těchto dvou přímek je roven -1 , a tudíž $AE \perp BC$. Průsečík N přímk AE , BC je

$$N\left(\frac{au^2}{u^2+v^2}; \frac{auv}{u^2+v^2}\right)$$

Přímka MN má rovnici, které lze dát po kratší úpravě tvar

$$y(au - u^2 - v^2) = av(x - u). \quad (2)$$

Tato rovnice při proměnném u představuje soustavu přímek. Pro každé pevně zvolené u dostaneme jednu přímku soustavy. Jestliže tato soustava obsahuje vesměs přímky procházející pevným bodem, dostaneme tento pevný bod tak, že zvolíme dvě zvláštní přímky a jejich průsečík je žádaný bod. První takovou přímku dostaneme, položíme-li v rovnici (2)

$$u = \frac{1}{3}a \text{ a potom } v = \frac{2}{3}a.$$

Tato přímka má po kratší úpravě rovnici

$$3x + y = a. \quad (3)$$

Druhou zvláštní přímku dostaneme pro

$$u = \frac{2}{3}a, \text{ a tedy } v = \frac{1}{3}a \quad (3')$$

Tato druhá přímka má rovnici

$$3x - y = 2a. \quad (3'')$$

Řešením soustavy rovnic (3) a (3') obdržíme

$$x = \frac{1}{2} a, \quad y = -\frac{1}{2} a,$$

a to jsou souřadnice bodu, jímž procházejí všechny přímky dané rovnicí (2).

(Redakci provedl S. Horák)

Cvičení 1. Přesvědčte se přímým dosazením, že bod $\left(\frac{1}{2} a; -\frac{1}{2} a\right)$ vyhovuje rovnici (2).

2. Do rovnice (2) dosadte za u jiné hodnoty a ze získaných rovnic znovu vypočtete souřadnice bodu, jimiž procházejí všechny přímky určené rovnicí (2).

J a r o s l a v K r b i l a, VŠLD, Zvolen:

Riešiteľnosť a geometrická interpretácia sústavy dvoch lineárnych rovníc

(Dokončenie)

B) D e t e r m i n a n t s ú s t a v y j e r o v n ý n u l e, tj. $D = 0$.
V tomto prípade podľa vety 3. platí

$$a_2 = k a_1, \quad b_2 = k b_1 \quad (8)$$

Rozlišujeme tieto prípady:

a) Predpokladajme, že

$$D_x \neq 0, \quad D_y \neq 0. \quad (9)$$

Sústava (4) vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= D_x, \\ 0 \cdot y &= D_y. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že táto sústava nemá riešenie a preto ani s ú s t a v a (2) j e n i e r i e š i t e ľ n á.

Z predpokladov (8) vyplýva, že sústava (2) má tvar

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ k a_1 x + k b_1 y &= c_2, \end{aligned} \quad (10)$$

kde $c_2 \neq k c_1$ a $k \neq 0$. Lebo keby $c_2 = k c_1$, tak by podľa vety 4. $D_x = D_y = 0$, čo je proti predpokladu (9). Keby $k = 0$, tak by $a_2 = b_2 = 0$ a to sme predpokladom vylúčili. Sústavu (10) môžeme nahradiť ekvivalentnou sústavou

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_1x + b_1y &= c_2', \end{aligned} \quad (11)$$

kde

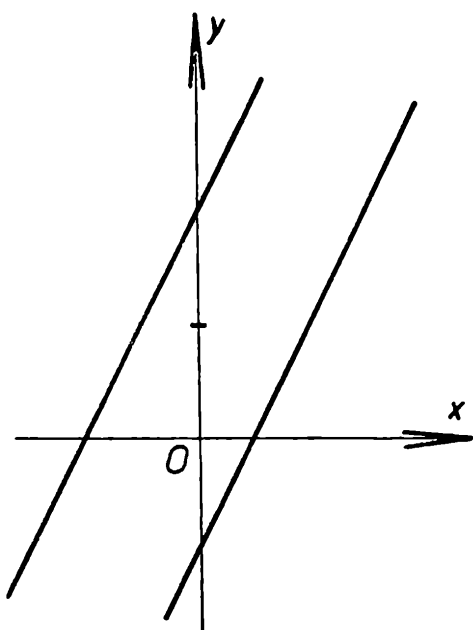
$$c_2' = \frac{c_2}{k}.$$

V sústave (2) a teda aj (11) za uvedených predpokladov je $b_1 \neq 0$, pretože keby $b_1 = 0$, tak by determinant

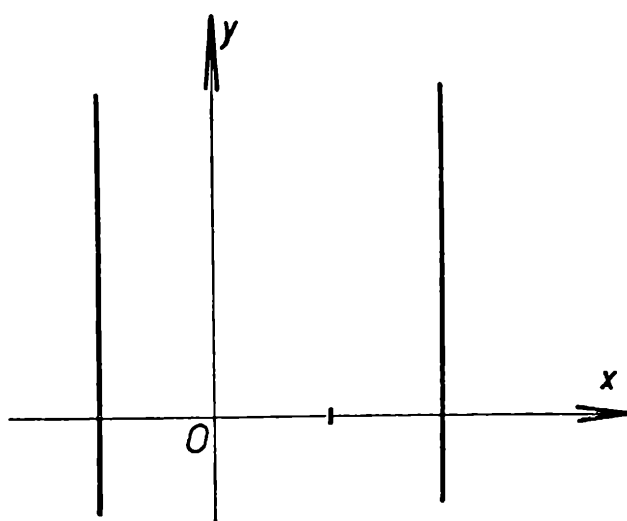
$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & kb_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

čo je spor s predpokladom (9).

Podobne sa ukáže, že pri podmienkách (8) a (9) musí byť aj $a_1 \neq 0$.



Obr. 2



Obr. 3

Rovnice sústavy (11) aj (2) sú rovnicami dvoch rovnobežných priamok, ktoré nie sú rovnobežné so súradnicovými osami a vytínajú na ose y odlišné úseky (viď AG roč. 37, č. 3., veta 3).

P r í k l a d 2. Riešme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} -2x + y &= 2, \\ 2x - y &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Výpočtom dostaneme $D = 0$, $D_x = -3$, $D_y = -6$, preto sústava je neriešiteľná. Priamky dané sústavou (12) sú narysované na obr. 2.

b) Ak $D_x = 0$, $D_y \neq 0$, sústava (4) a teda aj sústava (2) je nie riešiteľná.

Zistíme, aké sú koeficienty takejto sústavy. Z podmienky $D = 0$ vyplýva $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ a z podmienky $D_x = 0$ vyplýva $c_2 = hc_1$, $b_2 = hb_1$. Ak $k = h$ potom platí $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ ale potom aj

$D_y = 0$, čo je však spor s predpokladom. Preto môže byť len $k \neq h$. Z toho a z rovností $b_2 = kb_1$, $b_2 = hb_1$ vyplýva, že musí byť $b_2 = b_1 = 0$. Sústava (2) má teda tvar

$$\begin{aligned} a_1x &= c_1, \\ a_2x &= c_2, \end{aligned} \quad (13)$$

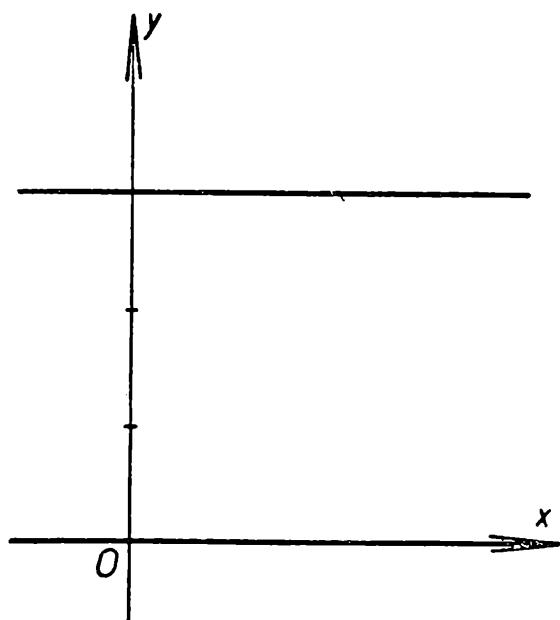
kde koeficienty a_1 a a_2 sú rôzne od nuly. Sústavu (13) môžeme ešte napísať takto

$$\begin{aligned} a_1x &= c_1, \\ ka_1x &= hc_1, \end{aligned}$$

kde

$$k \neq h \text{ a } k \neq 0.$$

Preto geometricky (viď AG, roč. 37, č. 3, veta 4.) sú rovnice sústavy (13) rovnice dvoch rôznych rovnobežiek s osou y .



Obr. 4

P r í k l a d 3. Na obr. 3 sú na-
rysované priamky sústavy

$$2x = 4,$$

$$3x = -3.$$

c) Prípád, keď $D_x \neq 0$ a $D_y = 0$ sa preverí analogicky. Geometricky predstavuje dve rôzne priamky rovnobežné s osou x .

P r í k l a d 4. Na obr. 4 sú na-
rysované priamky sústavy

$$y = 3,$$

$$-2y = 0.$$

d) Ak $D_x = 0$, $D_y = 0$, tak podľa vety 3. platí

$$a_1 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1$$

Sústava (2) má tvar

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ ka_1x + kb_1y &= kc_1, \end{aligned} \quad (14)$$

kde

$$k \neq 0.$$

Vidíme, že druhá rovnica je násobkom prvej. Podľa AG, roč. 37, č. 4, veta 6., rovnice sústavy (14) sú rovnicami tej istej priamky. My budeme hovoriť, že sú to rovnice dvoch splývajúcich priamok. Tie však majú nekonečne mnoho spoločných bodov. Sú nimi všetky body priamky. V zhode s tým hovoríme, že sústava (14) má nekonečne mnoho riešení.

V tomto prípade môžeme jednu rovnicu pri riešení vynechať a riešime len jednu

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (15)$$

Dvojicu (x_0, y_0) , pre ktorú platí rovnosť

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1,$$

budeme nazývať partikulárnym riešením rovnice (15) a tiež partikulárnym riešením sústavy (14).

Všeoecným riešením rovnice (15) a tiež sústavy (14) nazveme množinu všetkých jej partikulárných riešení.

Ak v rovnici (15)

1. $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ tak všeobecné riešenie je množina dvojíc

$$\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}, y \right),$$

kde y je ľubovoľné reálne číslo, ktorú môžeme zapísať tiež vo tvare

$$\left(x, \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \right),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

2. $a_1 = 0, b_1 \neq 0$. Rovnica (15) má tvar:

$$0x + b_1y = c_1$$

Jej všeobecné riešenie je

$$\left(x, \frac{c_1}{b_1} \right),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

3. $a_1 \neq 0, b_1 = 0$ vtedy všeobecné riešenie je

$$\left(\frac{c_1}{a_1}, y \right),$$

kde y je ľubovoľné reálne číslo.

Z geometrického hľadiska partikulárne riešenie rovnice (15) predstavuje bod priamky (jeho súradnice) a všeobecné riešenie je množina všetkých bodov priamky, ktorá je daná rovnicou (15). V prípade 2. je to rovnobežka s osou y , resp. pri $c_1 = 0$ os y a v prípade 3. rovnobežka s osou x , resp. pri $c_1 = 0$ os x .

P r í k l a d 5. Riešte sústavu:

$$\begin{aligned} -6x + 2y &= 1, \\ 12x - 4y &= -2. \end{aligned} \quad (16)$$

V tomto prípade $D = D_x = D_y = 0$, preto existuje nekonečne mnoho riešení. Z predchádzajúceho vieme, že druhá rovnica je násobkom prvej.

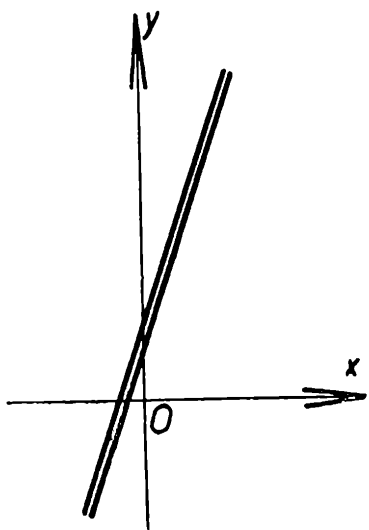
Pozorný čitateľ hneď zbadá, že druhá rovnica je prvá rovnica vynásobená číslom -2 . Preto riešime rovnicu:

$$-6x + 2y = 1.$$

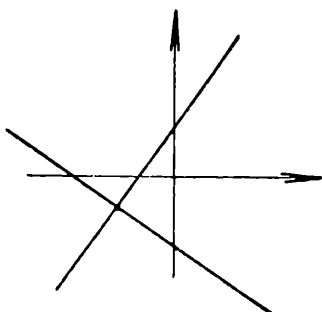
Všeobecné riešenie tejto rovnice a teda aj sústavy (16) je

$$\left(x, \frac{1 + 6x}{2}\right),$$

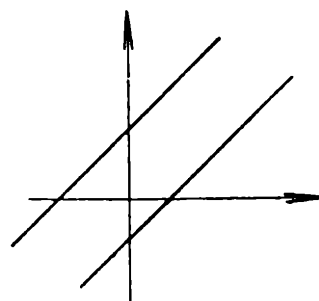
kde x je ľubovoľné reálne číslo.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Partikulárne riešenie je napr. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Na obr. 5 sú kvôli názornosti naznačené dve splývajúce priamky dané sústavou (16), dvoma blízкими rovnobežkami.

Získané výsledky za predpokladu, že aspoň jeden z koeficientov a_1, b_1 a aspoň jeden z koeficientov a_2, b_2 v sústave (2) je rôzny od nuly, zhrnieme do prehľadnej tabuľky:

Predpoklady		Riešiteľnosť sústavy	Geometrická interpretácia rovníc	
$D \neq 0$		Existuje jediné riešenie	Rôznobežky	Obr. 6
$D=0$	$D_x \neq 0, D_y \neq 0$	Riešenie neexistuje	nerovnoběžné s osami	Obr. 7
	$D_x = 0, D_y \neq 0$		rovnoběžné s osou y	Obr. 8
	$D_x \neq 0, D_y = 0$		rovnoběžné s osou x	Obr. 9

Kvôli úplnosti vyšetříme aj prípad sústavy (2), keď nie sú splnené vyššie uvedené obmedzenia, aby aspoň jeden z koeficientov a_1 , b_1 a aspoň jeden z koeficientov a_2 , b_2 bol rôzny od nuly.

Sú to typy:

a)

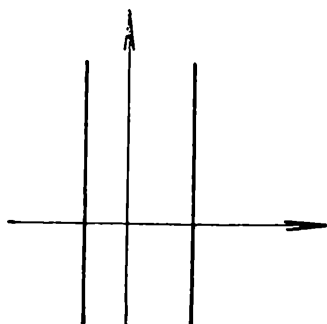
$$\begin{aligned} a_1x + 0y &= c_1, \\ 0x + 0y &= c_2, \end{aligned} \quad (17)$$

kde $a_1 \neq 0$. Ak $c_2 \neq 0$ sústava je neriešiteľná. Ak $c_2 = 0$ je riešiteľná a má nekonečne mnoho riešení. Všeobecné riešenie je

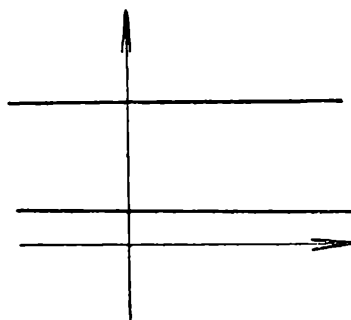
$$\left(\frac{c_1}{a_1}, y \right),$$

kde y je ľubovoľné reálne číslo.

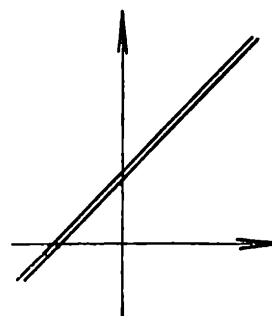
Riešiteľná sústava (17) geometricky predstavuje rovnobežku s osou y , resp. os y a všeobecné riešenie dávajú dvojice súradníc všetkých jej bodov.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

b) Sústava

$$\begin{aligned} 0x + b_1y &= c_1, \\ 0x + 0y &= c_2, \end{aligned}$$

kde $b_1 \neq 0$ sa vyšetří analogicky ako sústava (17). Ak je riešiteľná, predstavuje rovnobežku s osou x , resp. os x .

c) Sústava

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= c_1, \\ 0x + 0y &= c_2, \end{aligned} \quad (18)$$

v prípade, že aspoň jedno z čísel c_1 , c_2 je rôzne od nuly je neriešiteľná. Ak $c_1 = c_2 = 0$, je riešiteľná a riešením je každá dvojica (x, y) , kde x , y sú ľubovoľné reálne čísla. Geometricky toto riešenie predstavuje celú rovinu, danú súradnicovými osami.

Záverom chceme upozorniť na to, že pri používaní uvedenej tabuľky treba mať na zreteli predpoklady, za ktorých platí, pretože napr. v sústave (18) je $D = D_x = D_y = 0$ a predsa nemusí byť riešiteľná.

Mocnost bodu ke kružnici

Pojem mocnosti bodu ke kružnici je velmi užitečný pro studium vlastností kružnic. Starší odběratelé časopisu jej jistě znají¹⁾. V článku probereme stručně základní vlastnosti tohoto pojmu; jeho použití si ukážeme později, především na svazcích kružnic. Látka je většinou velmi jednoduchá a názorná. Podrobně provedeme jen důkazy, které by mohly činit potíže, ostatní věty si dokáže čtenář snadno sám podle daného návodu.

Přesvědčíme se později, že svazek kružnic obsahuje kružnice různého poloměru a že je vhodné považovat za kružnice svazku i jisté body. Budeme je nazývat kružnicemi s nulovým poloměrem, krátce *nulové kružnice*, označíme je velkými písmeny, např. S_0, S'_0 . Nulová kružnice obsahuje jediný bod, který je současně jejím středem. Říkáme, že každá přímka, která prochází bodem S , je tečnou nulové kružnice S , žádná přímka není její sečnou. Budeme říkat, že nulová kružnice S se dotýká nenulové kružnice k , leží-li bod S na kružnici k . Dvě nulové kružnice jsou buď totožné, nebo nemají společný bod. V dalším textu budeme rozumět kružnicí jak kružnici nenulovou, tak kružnici nulovou.

Definice 1. *Mocností bodu X ke kružnici $k \equiv (S, r)$, $r \geq 0$, nazveme číslo $SX^2 - r^2$, jež označíme $M(X, k)$ nebo krátce $M(X)$.*

Poučka 1. *Budiž dána kružnice $k \equiv (S, r)$, $r \geq 0$. Pak platí:*

- a) *každý bod X má k dané kružnici jedinou mocnost,*
- b) *nejmenší mocnost k dané kružnici má její střed $M(S, k) = -r^2$,*
- c) *vnější body kružnice k mají ke k mocnost kladnou,*
- d) *body kružnice k mají ke k mocnost nulovou,*
- e) *vnitřní body kružnice k mají ke k mocnost zápornou,*
- f) *tvrzení c) až e) lze obrátit: je-li $M(X, k) \geq 0$, je bod X po řadě vnějším bodem kružnice k , bodem kružnice k , vnitřním bodem kružnice k ,*
- g) *je-li X vnějším bodem k a je-li T bod dotyku tečny vedené z X ke k , je $M(X, k) = \overline{XT}^2$,*
- h) *množinou bodů, jež mají ke k danou mocnost $M \geq -r^2$, je kružnice k' se středem S a poloměrem $r' = \sqrt{M + r^2}$.*

Důkaz. Každému X přísluší jediné číslo SX a tedy též jediné $M(X)$, které je nejmenší při $SX = 0$. Tvrzení c) až e) plynou ze zná-

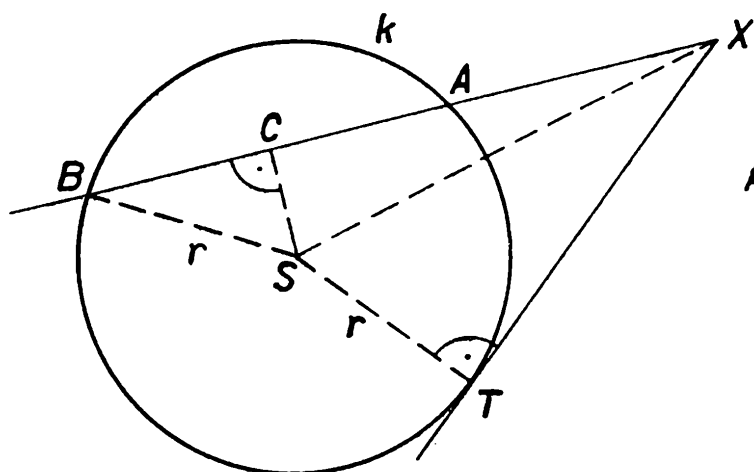
¹⁾ O mocnosti bodu ke kružnici byl již uveřejněn v časopise článek S t. H o r á k a: Mocnost bodu ke kružnici, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 35, čís. 1 a 2, 1957.

mých vztahů $SX > r$, $SX = r$, $SX < r$. Tvzení f) dokažte nepřímou. Tvzení g) plyne pro nulovou kružnici okamžitě, protože je $S \equiv T$, pro nenulovou kružnici je dokážete snadno z trojúhelníka SXT (obr. 1). Poslední tvrzení dokažte výpočtem čísla $SX = r'$. Přesvědčte se, že je pro každý bod X kružnice k' číslo $M(X, k) = M$.

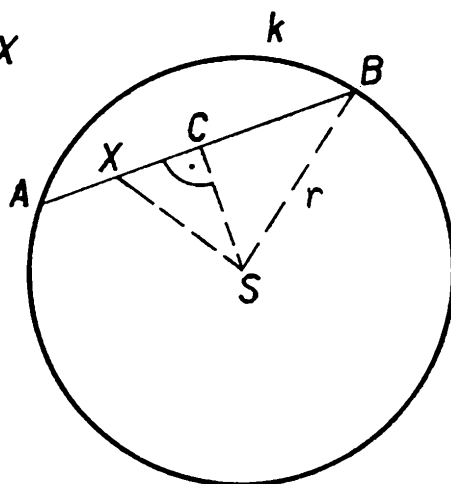
P o u č k a 2. Budiž dána nenulová kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod X ; veďme jím libovolnou sečnu protínající k v bodech A, B . Pak platí $|M(X, k)| = XA \cdot XB$.

D ů k a z. Nechť je X vnějším bodem k , označme střed úsečky AB písmenem C (obr. 1). Pak platí

$$\begin{aligned} |M(X)| = M(X) &= \overline{SX}^2 - r^2 = \overline{XC}^2 + \overline{CS}^2 - (\overline{CB}^2 + \overline{CS}^2) = \\ &= \overline{XC}^2 - \overline{CB}^2 = (XC - CB)(XC + CB) = XA \cdot XB. \end{aligned}$$



Obr. 1



Obr. 2

Je-li X bodem kružnice k , je $M(X) = 0$, jeden z bodů A, B splyne s X a součin $XA \cdot XB = 0$.

Je-li X vnitřním bodem kružnice k , (obr. 2), platí

$$\begin{aligned} |M(X)| = -M(X) &= r^2 - \overline{SX}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CS}^2 - (\overline{CS}^2 + \overline{CX}^2) = \\ &= \overline{CB}^2 - \overline{CX}^2 = (CB - CX)(CB + CX) = XA \cdot XB \end{aligned}$$

Důkaz je správný i pro $C \equiv S$, pak je ovšem $\overline{CS} = 0$.

P o u č k a 3. Mějme dány dvě dvojice bodů A, B a C, D na dvou různoběžkách s průsečíkem P , který je různý od A, B, C, D . Nechť leží P buď současně uvnitř nebo současně vně úseček AB, CD a nechť je $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Platí:

a) jsou-li obě úsečky AB, CD nenulové, leží body A, B, C, D na kružnici,

b) je-li AB nulová, CD nenulová úsečka, leží body C, D na kružnici, která se dotýká přímky PA v bodě A .

D ů k a z. Při důkazu tvrzení a) sestrojte kružnici procházející body A, B, C a označte její další průsečík s přímkou PC jako D' . Dokažte, že je $D' \equiv D$. V případě b) sestrojte kružnici, která prochází bodem C a dotýká se přímky PA v bodě A , dále postupujte obdobně jako při důkazu tvrzení a).

Hledejme nyní body, které mají stejnou mocnost ke dvěma kružnicím. Mocnost bodu X ke kružnici k_n budeme značit $M_n(X)$.

P o u č k a 4. Jsou-li dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, existuje na přímce S_1S_2 jediný bod P takový, že $M_1(P) = M_2(P)$.

D ů k a z. Sestrojíme bod P nejprve v případě, že k_1, k_2 jsou nenulové. Provedeme stručně rozbor podle obrázku 3. Platí-li pro bod P vztah $M_1(P) = M_2(P)$, pak $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Bod P leží buď sou-

časně uvnitř k_1, k_2 , nebo současně na k_1, k_2 , nebo současně vně k_1, k_2 . Body A, B, C, D prochází vždy jediná kružnice (podle poučky 3.).

Z rozboru plyne následující konstrukce: Zvolíme body A, B kružnice k_1 na přímce S_1S_2 a bod C na k_2 tak, že přímka CS_2 je kolmá k S_1S_2 . Sestrojíme kružnici k_3 procházející body A, B, C a její další průsečík s k_2 - bod D . Průsečík přímek AB, CD je hledaný bod P .

Správnost konstrukce lze dokázat takto: Podle poučky 2 platí, že je $|M_1(P)| = PA \cdot PB$,

$|M_2(P)| = PC \cdot PD$, $|M_3(P)| = PA \cdot PB = PC \cdot PD$; dostáváme rovnost $|M_1(P)| = |M_2(P)|$. Čísla $M_1(P), M_2(P)$ jsou však buď současně rovná nule, nebo mají stejné znamení²⁾, platí tedy i rovnost $M_1(P) = M_2(P)$.

Počet řešení je pro nás velmi důležitý. Ukážeme, že všechny kroky konstrukce lze provést jednoznačně. Body A, B, C neleží v přímce, existuje jediná k_3 . Tečna t_c kružnice k_2 je rovnoběžná s AB , ale tečna kružnice k_3 v bodě C nemůže být táž (bylo by $C \equiv C', S_1 \equiv S_2$). Kružnice k_2, k_3 nemají v bodě C společnou tečnu a protínají se v dalším bodě $D \neq C$. Přímka $CD \neq t_c$ protne AB v bodě P . Úloha má vždy jediné řešení.

²⁾ Leží-li P vně k_3 , leží vně úseček AB, CD a tedy vně kružnic k_1, k_2 , je pak $M_1(P) > 0, M_2(P) > 0$ (poučka 1f)). Je-li P bodem k_3 , je $M_3(P) = 0, M_1(P) = M_2(P) = 0$. Leží-li P uvnitř k_3 , leží uvnitř úseček AB, CD a tedy uvnitř kružnic k_1, k_2 , je $M_1(P) < 0, M_2(P) < 0$.

Obr. 3

Je-li jedna z kružnic k_1, k_2 nulová (např. k_1), sestrojíme bod P podobným způsobem. Pomocnou kružnici k_3 sestrojíme tak, aby se dotýkala přímky S_1S_2 v bodě $S_1 \equiv k_1$ (obr. 4). Řešení provede čtenář snadno sám podle daného vzoru. Jsou-li obě kružnice nulové, je hledaným bodem střed úsečky S_1S_2 . Podmínka $M_1(P) = M_2(P)$ je totiž ekvivalentní se vztahem $S_1P = S_2P$.

P o u č k a 5. *Množinou bodů, jež mají k daným dvěma nesoustředným kružnicím stejnou mocnost, je přímka kolmá ke středné daných kružnic.*

D ů k a z. Bod P z předešlé poučky leží zřejmě na této přímce; označme ji c (obr. 3 a 4) a její libovolný bod Y . Ze vztahu $M_1(P) = M_2(P)$ dostanete po přičtení čísla $\overline{PY}^2$ k oběma stranám rovnost $M_1(Y) = M_2(Y)$. Je-li obráceně Z libovolný bod, pro který platí $M_1(Z) = M_2(Z)$, označte písmenem Q patu kolmice vedené jím ke středné. Odečtením čísla $\overline{ZQ}^2$ od obou stran rovnosti $M_1(Z) = M_2(Z)$ dostanete $M_1(Q) = M_2(Q)$. Podle poučky 4 je $P \equiv Q$, bod Z leží na přímce c .

Definice 2. *Přímku, jež je množinou bodů, které mají stejnou mocnost k dvěma různým kružnicím, nazveme chordálou těchto kružnic. Chordálu kružnic k_i, k_n budeme značit c_{in} nebo c_{in} .*

P o u č k a 6. *Mějme dány dvě různé kružnice k_1, k_2 , pak platí:*

a) *jsou-li k_1, k_2 soustředné, neexistuje bod, který by měl k oběma stejnou mocnost,*

b) *jsou-li k_1, k_2 nesoustředné a protínají se v bodech A, B , je $c_{12} \equiv AB$,*

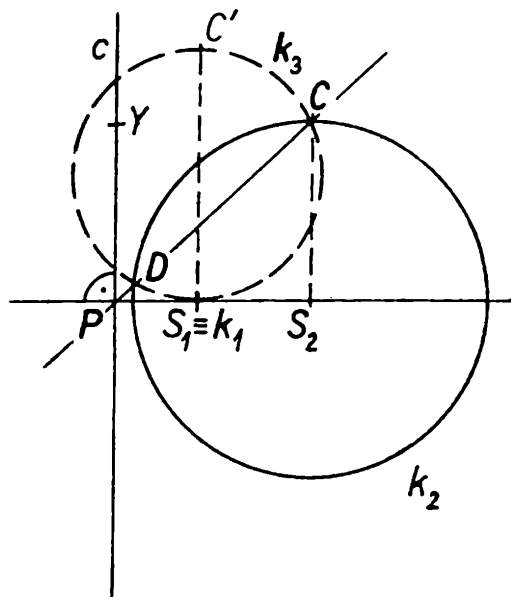
c) *jsou-li k_1, k_2 nesoustředné a dotýkají se v bodě T , je jejich společná tečna v tomto bodě jejich chordálou,*

d) *ze všech bodů chordály má k oběma kružnicím nejmenší mocnost bod na středné.*

D ů k a z. Tvrzení a) dokažte nepřímou, z rovnosti $M_1(X) = M_2(X)$ plyne $r_1 = r_2$, což je vyloučeno. Druhé tvrzení je zřejmé z toho, že A i B leží na c_{12} . Třetí tvrzení dokážete, uvědomíte-li si, že bod T leží na c_{12} . Poslední tvrzení plyne z toho, že $M(Y)$ je nejmenší při nejmenším SY .

P o u č k a 7. *Mějme dány tři různé kružnice k_1, k_2, k_3 , z nichž žádné dvě nejsou soustředné. Pak platí:*

a) *leží-li středy S_1, S_2, S_3 daných kružnic v přímce, jsou chordály c_{12}, c_{23}, c_{31} navzájem rovnoběžné,*



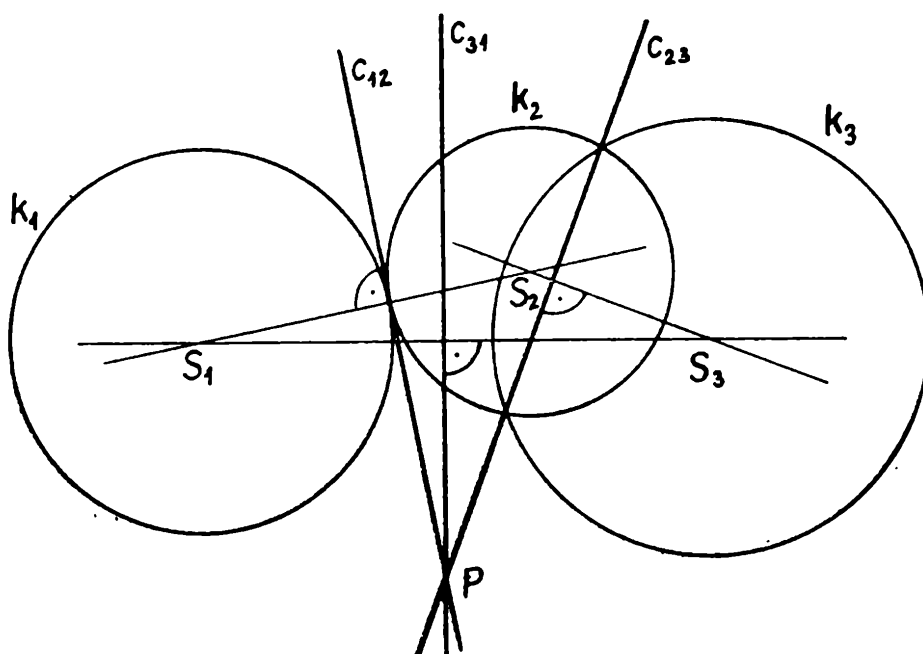
Obr. 4

b) *neleží-li středy S_1, S_2, S_3 v přímce, jsou chordály c_{12}, c_{23}, c_{31} různoběžné a procházejí jedním bodem.*

D ů k a z. V případě a) jsou přímky c_{12}, c_{23}, c_{31} kolmé k téže přímce a tedy rovnoběžné. V případě b) jsou přímky S_1S_2, S_2S_3 různoběžné, přímky c_{12}, c_{23} k nim kolmé jsou také různoběžné a protínají se v bodě P (obr. 5). Platí $M_1(P) = M_2(P), M_2(P) = M_3(P)$, tedy též $M_3(P) = M_1(P)$ a bod P leží na chordále c_{31} .

Definice 3. *Bod, který má stejnou mocnost ke třem navzájem různým kružnicím, nazveme potenčním středem těchto kružnic.*

Neleží-li středy tří kružnic v přímce, existuje právě jeden potenční střed těchto kružnic. Leží-li středy tří navzájem různých kružnic v přímce, pak buď nemají dané kružnice žádný potenční střed, nebo mají nekonečně mnoho potenčních středů. První případ nastane, jsou-li některé dvě chordály c_{12}, c_{23}, c_{31} různé rovnoběžky, druhý případ nastane při $c_{12} \equiv c_{23} \equiv c_{31}$. Obrázky si nakreslí čtenář snadno sám; po-



Obr. 5

slední případ nastává např. tehdy, mají-li všechny tři kružnice společné dva různé body A, B .

Je patrné, že jsme při důkazu poučky 4 použili zvláštní polohy potenčního středu kružnic k_1, k_2, k_3 .

Na konci článku jsou zařazena cvičení s dostatečnými návody k řešení. Na některá z nich se budeme později odvolávat.

Cvičení.

1. Zvolte kružnici $k \equiv (S, r)$ a přímku p . Vypočítejte mocnost bodu X přímky p ke kružnici k a naneste úsečku XY velikosti $|M(X, k)|$ na kolmici vedenou bodem X k přímce p . Je-li $M(X)$ kladné číslo, naneste úsečku XY do jedné poloroviny vyřezané přímkou p , je-li $M(X)$ záporné, naneste ji do opačné poloroviny. Přesvědčte se, že množinou bodů Y je parabola.

2. Zvolte dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$. Sestrojte bod X , pro který platí $M_1(X) = 5r_1^2$, $M_2(X) = 2r_2^2$. (Užijte věty 1h, poloměr r' sestrojte graficky.)

3. Je dána přímka t a dva různé body A, B , jež neleží na t . Sestrojte kružnici, jež prochází body A, B a dotýká se přímky t . (Sestrojte bod dotyku tečny t s hledanou kružnicí. Je-li přímka AB rovnoběžná s t , leží bod T na ose úsečky AB . Protíná-li přímka AB tečnu t v bodě P , který leží vně úsečky AB , je $\overline{PT}^2 = PA \cdot PB$.)

4. Dokažte větu obrácenou k větě 6b): je-li chordálou dvou kružnic k_1, k_2 přímka AB , kde A, B jsou dva různé body kružnice k_1 , prochází též kružnice k_2 body A, B . (Určete čísla $M_2(A)$, $M_2(B)$ a užijte věty 1f.)

5. Dokažte větu obrácenou k větě 6c): je-li chordálou dvou kružnic k_1, k_2 přímka c , která se dotýká kružnice k_1 v bodě C , dotýká se také kružnice k_2 přímky c v bodě C . (Určete polohu bodu C ke k_2 pomocí čísla $M_2(C)$ a vyvoďte spor z předpokladu, že by kružnice k_1, k_2 měly společný bod různý od C .)

6. Sestrojte pomocí poučky 7b) chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 , jež nemají společný bod. (Zvolte k_3 , která protíná k_1 i k_2 a nemá střed na S_1S_2 . Průsečíkem chordál c_{13}, c_{23} prochází chordála c_{12} .)

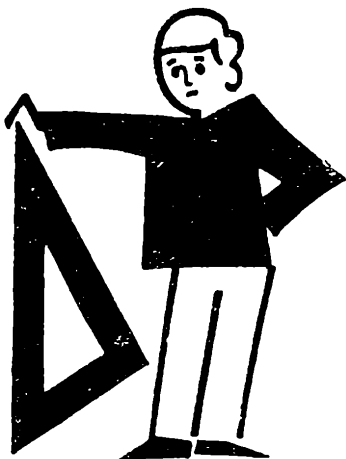
7. Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic, z nichž aspoň jedna je nulová. Co je chordálou dvou různých nulových kružnic?

8. Jakou polohu vzhledem ke středné S_1S_2 kružnic k_1, k_2 mají ty body X, Y chordály c_{12} , pro které platí $M_1(X) = M_1(Y) = M_2(Y) = M_2(X)$?

9. Sestrojte potenční střed tří kružnic, jejichž středy neleží v přímce, je-li aspoň jedna z těchto kružnic nulová. Co je potenčním středem tří nulových kružnic?

10. Nechtě mají kružnice k_1, k_2 dva různé společné body A, B . Zvolte kružnici k_3 tak, aby právě jeden z bodů A, B ležel uvnitř k_3 . Dokažte, že pak je potenční střed kružnic k_1, k_2, k_3 vnitřním bodem každé z nich.

Deskriptivní geometrie



Karel Drábek, ČVUT, Praha:

Sestrojení elipsy a hyperboly pomocí dvou pevných kružnic

Při sestrovování jednotlivých bodů elipsy nebo hyperboly pomocí jejich ohniskových vlastností hledáme průsečíky dvou kružnic, které splňují předepsané podmínky. Pro každé dva body potřebujeme dvě takové kružnice, což není výhodné při větším počtu bodů. Umožní nám to proto konstrukce, při které použijeme jen dvou pevných kružnic,

které nazveme *řídícími kružnicemi*. Uvidíme, že pro elipsu, příp. pro hyperbolu, musí být kružnice zvoleny ve zcela určitých vzájemných polohách.

Před samotnou konstrukcí zavedeme označení a úmluvy, které zjednoduší vyjadřování.

Pevné řídící kružnice označíme k_1, k_2 , jejich středy F_1, F_2 a poloměry r_1, r_2 . Předpokládejme, že je $F_1 \neq F_2, r_1 > r_2$. Kružnice k_1, k_2 nejsou tedy ani soustředné, ani shodné.

Víme, že takové dvě kružnice mají vždy dva různé středy stejnolehlosti. Jestliže ze středu stejnolehlosti O lze sestrojit k oběma daným kružnicím dvě různé společné tečny, nazveme jej *hyperbolickým středem stejnolehlosti* a označíme indexem h vpravo dole. Jestliže z něj nelze sestrojit žádnou společnou tečnu, pak jej nazveme *eliptickým středem stejnolehlosti* a označíme indexem e vpravo dole.

Oba středy stejnolehlosti rozlišíme ještě jiným způsobem, což bude užitečné zejména v případech, kdy tyto středy jsou téhož druhu, tj. buď oba eliptické, nebo oba hyperbolické. K tomu využijeme způsobu jejich sestrojení. Střed stejnolehlosti O získaný pomocí souhlasných (příp. nesouhlasných) rovnoběžných poloměrů v kružnicích k_1, k_2 , obvykle zvaný vnější (příp. vnitřní), nazveme *souhlasným* (příp. *nesouhlasným*) *středem stejnolehlosti* a označíme jej indexem s (příp. n) vpravo nahoře.

Obě kružnice k_1, k_2 mohou být celkem v pěti různých vzájemných polohách. Podrobně se budeme zabývat případem, kdy jsou oba středy stejnolehlosti eliptické (věta 1, obr. 1) a případem, kdy oba tyto středy jsou hyperbolické (věta 2, obr. 3). Jestliže se obě kružnice dotýkají, pak vyloučíme z úvah střed stejnolehlosti, který je ve společném bodě dotyku (obr. 2 a 4). Tyto dva případy jsou uvedeny jako úlohy 1 a 2, které proveďte již sami jako cvičení. Rovněž případ dvou protínajících se kružnic (obr. 5), uvedený v úloze 3 je cvičením.

Provedeme nyní tuto k o n s t r u k c i

Středem stejnolehlosti vedme sečnu k jedné (a tedy i k druhé) kružnici. Odpovídající si průsečíky ve stejnolehlosti označíme U_1, U_2 , příp. V_1, V_2 ; odpovídající si přímky jsou pak F_1U_1, F_2U_2 , příp. F_1V_1, F_2V_2 . Dvě různoběžné (tj. ve stejnolehlosti si neodpovídající) dvojice F_1U_1, F_2V_2 , příp. F_1V_1, F_2U_2 , se protínají v bodě M , příp. N .

Pro eliptické středy stejnolehlosti platí:

V ě t a 1. *Průsečíky $M, N, \dots$ různoběžných přímek neodpovídajících si ve stejnolehlosti podle popsané konstrukce leží na elipse s ohnisky ve středech F_1, F_2 řídících kružnic k_1, k_2 , která má hlavní osu pro souhlasný střed rovnou rozdílu poloměrů $r_1 - r_2$, pro nesouhlasný střed rovnou součtu $r_1 + r_2$ těchto poloměrů.*

D ů k a z (obr. 1). Zvolme řídící kružnici k_2 uvnitř kružnice k_1 . Je třeba ukázat, že bod M , který dostaneme při užití souhlasného středu

stejnolehlosti O_e^s , leží na elipse s vlastnostmi uvedenými v dokazované větě.

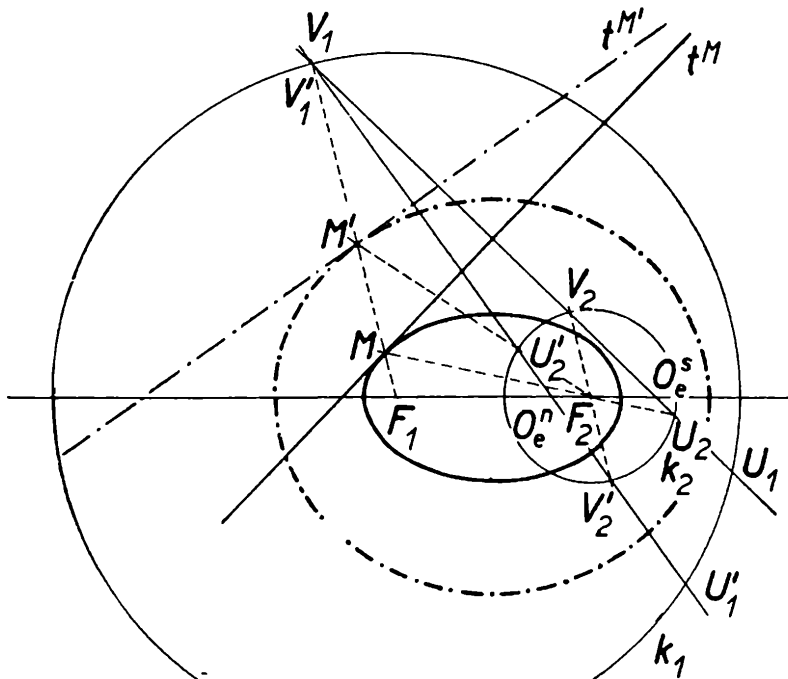
K tomu vyjádříme součet průvodičů

$$\begin{aligned} F_1M + F_2M &= F_1V_1 - V_1M + U_2M - F_2U_2 = \\ &= r_1 - r_2 + U_2M - V_1M \end{aligned}$$

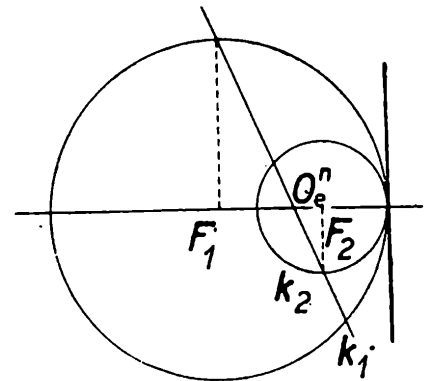
Protože rovnoramenné trojúhelníky MV_1U_2 a $F_2V_2U_2$ jsou podobné, plyne $V_1M = U_2M$, tudíž

$$F_1M + F_2M = r_1 - r_2 = \text{konst.},$$

což jsme chtěli dokázat jako první část tvrzení.



Obr. 1



Obr. 2

Uvažujme nyní nesouhlasný eliptický střed stejnolehlosti O_e^n ; body rozlišíme čárkou vpravo nahoře. Pro sestrojený bod M' dostaneme, že součet jeho průvodičů je

$$\begin{aligned} F_1M' + F_2M' &= F_1V_1' - V_1'M' + F_2U_2' + U_2'M' = \\ &= r_1 + r_2 - V_1'M' + U_2'M' \end{aligned}$$

Z podobných rovnoramenných trojúhelníků $M'V_1'U_2'$, $F_2V_2'U_2'$ opět plyne, že $V_1'M' = U_2'M'$ a tedy

$$F_1M' + F_2M' = r_1 + r_2 = \text{konst.},$$

čímž je proveden důkaz celého tvrzení.

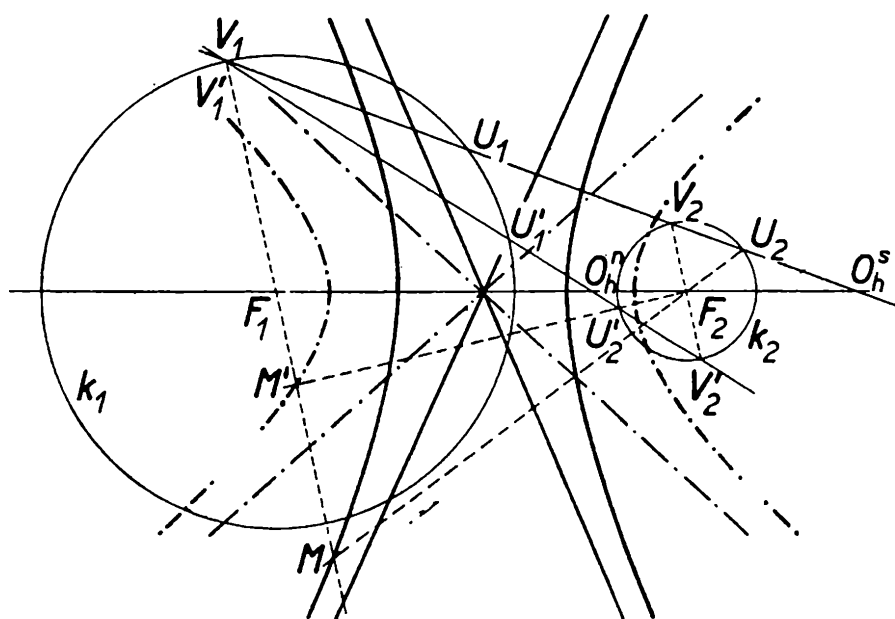
Úloha 1. Ukažte, že v případě, kdy se kružnice k_2 dotýká uvnitř kružnice k_1 (obr. 2), je střed stejnolehlosti eliptický a nesouhlasný.

Konstrukcí vytvořená elipsa má ohniska ve středech F_1, F_2 řídících kružnic k_1, k_2 a její hlavní osa má délku $2a = r_1 + r_2$. Tato elipsa má jeden hlavní vrchol v bodě dotyku obou daných kružnic.

Obrátme se nyní k hyperbolickým středům stejnolehlosti, pro které platí obdobně:

V ě t a 2. *Různoběžné ve stejnolehlosti si neodpovídající přímky uvedené konstrukce se protínají v bodech hyperboly, která má ohniska ve středech F_1, F_2 řídících kružnic k_1, k_2 a hlavní osu rovnou rozdílu poloměrů $r_1 - r_2$ jejich poloměrů (pro souhlasný střed), nebo rovnou součtu $r_1 + r_2$ těchto poloměrů (pro nesouhlasný střed).*

D ů k a z (obr. 3). Musíme ukázat, že bod M získaný pomocí souhlasného hyperbolického středu stejnolehlosti O_h^s leží na hyperbole, vy-



Obr. 3

hovující příslušné části z věty 2. Pro rozdíl průvodičů vzhledem k bodům F_1, F_2 dostaneme

$$\begin{aligned} |F_1M - F_2M| &= |V_1M - V_1F_1 - (U_2M - U_2F_2)| = \\ &= |V_1M - U_2M - r_1 + r_2| = |r_2 - r_1| = r_1 - r_2 = \text{konst.}, \end{aligned}$$

protože z podobných rovnoramenných trojúhelníků $M V_1 U_2, F_2 V_2 U_2$ zase plyne, že $V_1M = U_2M$.

Podobně pro nesouhlasný hyperbolický střed stejnolehlosti O_h^n dostaneme pro sestrojený bod M' , že

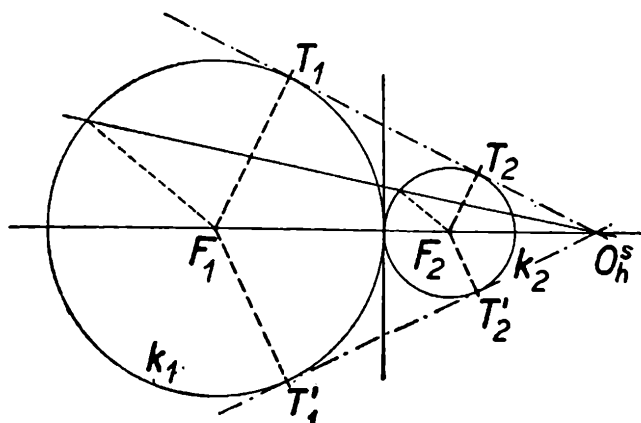
$$|F_1M' - F_2M'| = r_1 + r_2 = \text{konst.},$$

neboť trojúhelníky $M' V_1' U_2', F_2 V_2' U_2'$ jsou zase rovnoramenné a podobné.

P o z n á m k a 1. Podle způsobu vytvoření leží body M' na téže větvi hyperboly. Druhou větev bychom získali třeba tak, že bychom

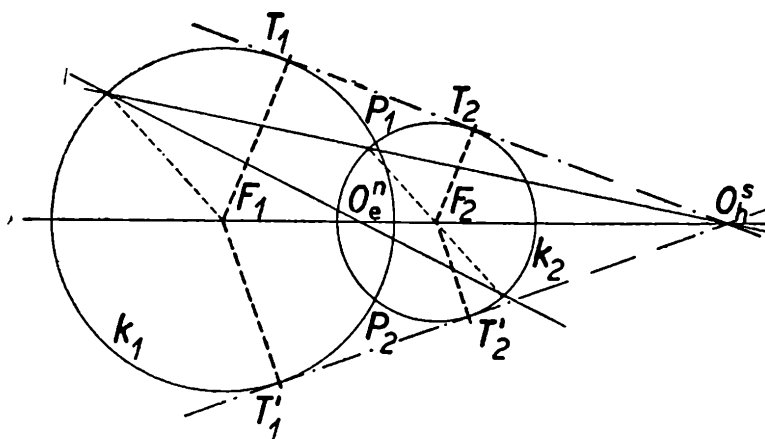
u kružnic k_1, k_2 změní poloměry tak, že by bylo $r_2 > r_1$ při splnění podmínky $2a = r_2 - r_1$.

Ú l o h a 2. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk (obr. 4), ukažte, že střed stejnolehlosti je hyperbolický a souhlasný, takže vytvořená hyperbola má pak ohniska ve středech F_1, F_2 řídících kružnic a hlavní osu délky $2a = r_1 - r_2$. Tato hyperbola má jeden hlavní vrchol v bodě dotyku obou kružnic k_1, k_2 .



Obr. 4

P o z n á m k a 2. V případě vytvoření hyperboly plyne z konstrukce, že její asymptoty jsou rovnoběžné se spojnicemi bodu F_1 , příp. F_2 s body dotyku (společných) tečen ke kružnici k_1 , příp. k_2 , sestrojených z příslušného středu stejnolehlosti.



Obr. 5

Ú l o h a 3. Ukažte, že když se obě řídící kružnice k_1, k_2 protínají v (různých) bodech P_1, P_2 (obr. 5), pak pomocí hyperbolického středu stejnolehlosti (který je souhlasným středem) dostaneme hyperbolu s ohnisky F_1, F_2 a hlavní osou $2a = r_1 - r_2$, užitím eliptického středu (který je nesouhlasným středem) stejnolehlosti určíme elipsu s týmiž ohnisky a hlavní osou $2a = r_1 + r_2$. Oba společné body P_1, P_2 kružnic k_1, k_2 patří sestrojené kuželosečce.

P o z n á m k a 3. Kružnice k_1 , k_2 mohou být ve dvou případech dokonce shodné a to v poloze uvedené na obr. 3, kdy existuje řešení pro nesouhlasný hyperbolický střed a pro polohu na obr. 5, kdy existuje řešení pro nesouhlasný eliptický střed stejnohlosti.

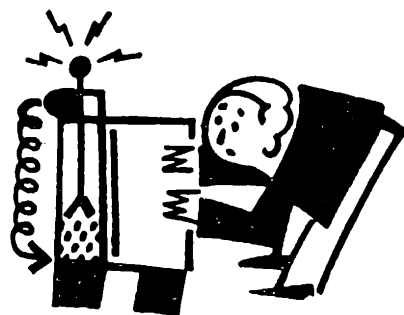
Výsledku věty 1 nebo 2 lze využít při sestrojování bodů elipsy, příp. hyperboly, která je dána ohnisky a velikostí hlavní osy. Stačí totiž zvolit řídicí kružnice k_1 , k_2 tak, aby byla splněna potřebná podmínka, stanovit střed stejnohlosti vedoucí k řešení a pak již zřejmě vystačíme při konstrukci s jediným pravítkem. Je třeba upozornit na to, že tato konstrukce (stejně jako ohnisková) je nepřesná v blízkosti hlavních vrcholů.

P o z n á m k a 4. Osa souměrnosti úsečky omezené bodem kružnice k_1 a bodem kružnice k_2 , pomocí nichž byl sestrojen bod kuželosečky, je osou úhlu průvodičů tohoto bodu a tedy tečnou v určeném bodě (viz např. v obr. 1 osa úsečky U_2V_1 , která je tečnou t^M v bodě M , nebo osa úsečky $U'_2V'_1$, která je tečnou $t^{M'}$ v bodě M').

Fyzika

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU,
Hradec Králové:

Určování data pokusného nukleárního výbuchu geometrickou konstrukcí



O tom, jak se u nás projeví pokusné nukleární výbuchy na Sahaře v roce 1960, bylo již pojednáno¹⁾. Naše katedra fyziky se již pátý rok zabývá soustavným sběrem *nukleárního* neboli *atmosférického* spadu, který je v podstatě rozprášenými štěpnými produkty. Štěpné produkty, neboli zplodiny štěpení, jsou radioizotopy, vznikající štěpením uranové nebo plutoniové nálože nukleárních pum. Od roku 1945 až do 1. 11. 1958, kdy byly zásluhou Sovětského svazu, po dohodě tzv. atomových velmocí, pokusné výbuchy dočasně zastaveny, bylo provedeno alespoň 200 nu-

¹⁾ Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 39 (1960—61), č. 1, str. 1.

kleárních výbuchů. Avšak v roce 1960 provedla Francie, která se chce rovněž stát „atomovou velmocí“, tři pokusné výbuchy na Sahaře, a to dne 13. února, 1. dubna a 27. prosince. První výbuch byl nejsilnější, energetický ekvivalent odpálené plutoniové pumy byl 60–80 kilotun TNT (60–80 tisíc tun trinitrotoluenu). Druhý a třetí výbuch byl podstatně slabší. Třetí výbuch se u nás projevil jen zvýšením průměrné měsíční aktivity nukleárního spadu začátkem roku 1961, která již byla velmi nízká, a to asi 0,2 milicurie na 1 km² za měsíc. (1 milicurie je tisícina jednotky radioaktivity *c u r i e*; 1 mc = 10⁻³ c.)

Velmi výhodné poměry pro sběr a měření aktivity nastaly u nás začátkem března 1960, kdy nad naším územím přešel *radioaktivní mrak* z poměrně silného prvního výbuchu na Sahaře. Radioaktivní mrak je mrak neviditelný, je to obrovský „oblak“ zamořených vzduchových mas, tj. veliké množství pohybujícího se vzduchu, který obsahuje radioaktivní štěpné zplodiny. Radioaktivní mrak z prvního saharského výbuchu dospěl k nám až 17. den po provedení výbuchu, dne 1. března 1960. Šťastnou náhodou u nás právě přšelo a srážky byly poměrně slabé, napršelo pouze 1,2 litru na 1 m², avšak to již stačilo na důkladné „vymytí“ ovzduší, na stržení radioaktivních částic ze vzduchu. Naše sběrná nádoba, i kontrolní nádoba na střeše fakulty, obsahovala dne 1. 3. 1960 značně radioaktivní vodu, takže z odparku jsme získali poměrně silný radioaktivní preparát. Jeho počáteční aktivita beta byla asi $2,5 \times 10^{-8}$ curie a ještě dnes, po uplynutí šestnácti měsíců, je 7×10^{-10} curie, takže se dá ještě nyní dobře měřit a sledovat.

Podle několika dosud uveřejněných prací o zvýšení radioaktivity ovzduší následkem prvního saharského výbuchu, i podle našich pozorování, je možno odhadnout, kudy probíhala trajektorie (dráha) radioaktivního „oblaku“. Probíhala ze Sahary přes Egypt, Israel, Írán, sev. Indii, Vietnam, Tajvan, Tichý oceán, Panamu, Floridu, jižní Anglii a Francii do střední Evropy. K nám radioaktivní oblak dospěl vlastně až na začátku svého druhého oběhu kolem zeměkoule. Je možno odhadnout, že se šířil průměrnou rychlostí asi 100 km za hodinu a při přechodu přes americký kontinent měl šířku asi 4000 km. I z toho je patrné, že názvu „oblak“ používáme jen obrazně.

Březnové a dubnové zvýšení radioaktivity v r. 1960 následkem saharských výbuchů, prokázal také dr. Vratislav Havlovic se spolupracovníky v Plzni, který nyní pracuje na katedře fyziky lékařské fakulty KU v Hradci Králové. Podařilo se mu dokázat v tomto spadu i přítomnost tzv. *horkých částic*. Horké částice vznikají *aglomerací* (shlukováním) radioaktivních částic v ovzduší. Název je obrazný, „horká“ částice znamená částici s poměrně vysokou aktivitou, kterou je možno dokázat *autoradiograficky*, tj. účinkem vlastního záření na fotografickou emulsi, kde působí tmavou skvrnu. K zachycování horkých částic použil dr. Havlovic lepkavých skleněných desek, které vystavoval 14–21 dnů.

Pak byly desky potaženy ochrannou celonovou fólií a těsně přiloženy k rentgenovému filmu, na němž se zobrazily horké částice svým zářením.

Začátkem března 1960 jsme nasbírali ještě tři další, poměrně silně radioaktivní vzorky nukleárního spadu z prvního saharského výbuchu. Začátkem dubna jsme získali jeden slabý vzorek spadu z druhého výbuchu, který bylo možno měřit jen asi měsíc. Potom jeho aktivita příliš již zeslábla.

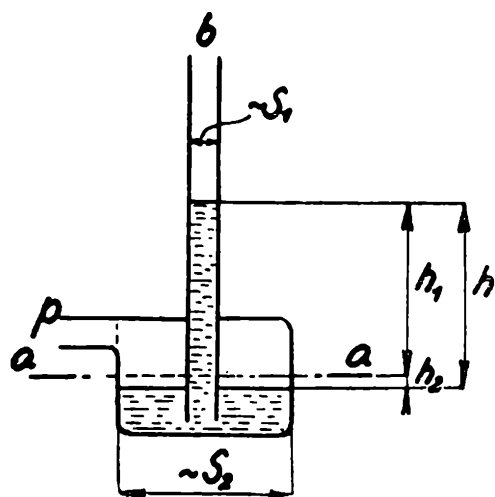
(Dokončení)

Inž. dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha:

Kapalinové tlakoměry

(Dokončení)

Jiným typem kapalinových tlakoměrů je *tlakoměr nádobkový*, schematicky zobrazený v obr. 4. Sestává z nádoby naplněné zčásti tlakoměrnou kapalinou, pod jejíž hladinu zasahuje trubice zatavená do nádoby, nebo do ní vložená a utěsněná. Je-li trubice na horním konci otevřená, je funkce nádobkového tlakoměru obdobná jako u otevřeného tlakoměru U. Je-li trubice na horním konci uzavřená, lze nádobkového tlakoměru použít jako barometru. Tlakoměrnou kapalinou je v takovém případě rtuť a prostor nad rtutí v trubici musí být vzduchoprázdný. Podrobněji se s barometry seznámíme později v samostatném článku. Vraťme se nyní k obr. 4. Byla-li počáteční úroveň hladiny kapaliny v rovině $a - a$, je-li vnitřní průřez trubice S_1 a v o l n ý vnitřní průřez nádoby S_2 (tj. plošný obsah vnitřního průřezu nádoby



Obr. 4

zmenšený o vnější průřez trubice), vystoupí kapalina v trubici o h_1 a klesne kapalina v nádobce o h_2 , jestliže připojíme na nádobku nějaký tlak $p > b$. Přitom zřejmě platí pro nestlačitelné kapaliny

$$S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2. \quad (7)$$

Protože celkový rozdíl hladin v trubici a v nádobce, který označme h , je roven

$$h = h_1 + h_2, \quad (8)$$

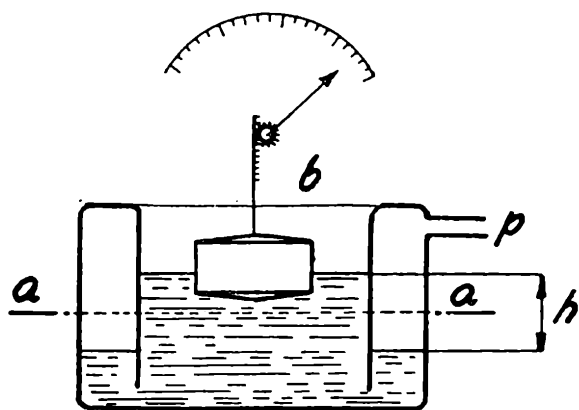
dostaneme, dosadíme-li za h_2 z rovnice (7), výraz

$$h = h_1 + \frac{S_1}{S_2} \cdot h_1 = h_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (9)$$

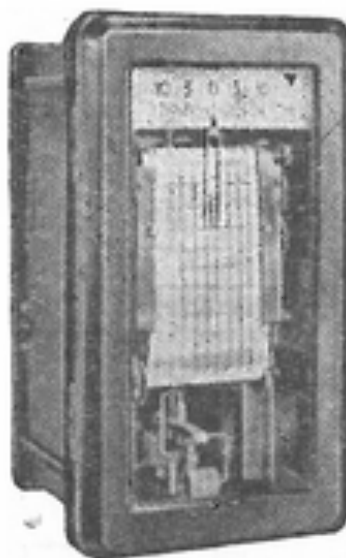
Z toho je patrné, že bychom nemuseli provádět dvoje čtení, tj. výšek h_1 a h_2 . Postačí určit h_1 a tuto hodnotu buď násobit faktorem $\left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right)$, nebo abychom po každém čtení nemuseli takový matematický úkon zvlášť provádět, číst h_1 na stupnici, jejíž nejmenší dílky nebudou rovny milimetrům, nýbrž budou v poměru

$$1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (10)$$

menší. Potom postačí číst na takové stupnici pouze výšku h_1 a známe



Obr. 5



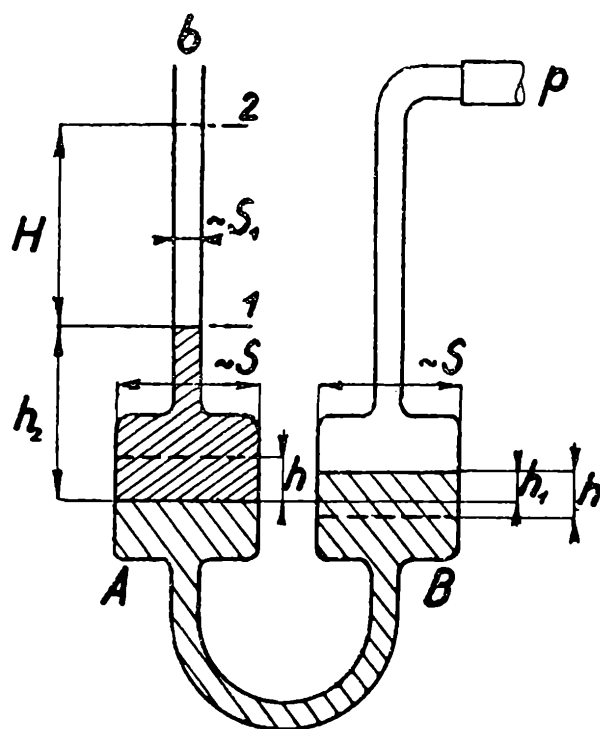
Obr. 6

přímo celkovou hodnotu h . Takové stupnici říkáme *st u p n i c e r e d u k o v a n á*. Je-li poměr $\frac{S_1}{S_2}$ dostatečně malý např. 0,001 není v běžných případech ani nutno stupnici redukovat, protože chyba, jíž se dopouštíme, může být zanedbatelná, neprovedeme-li redukcí. Známe-li h , vypočteme pak příslušný měřený tlak ze vztahu (1).

Řekli jsme si, že kapalinovými tlakoměry můžeme měřit malé tlaky, nebo malé tlakové difference. Pro takové účely bývají trubice skleněné, umožňující dobrou čitelnost výšky tlakoměrné kapaliny. Jedná-li se o difference malé, např. tlakové difference několika desítek milimetrů sloupce rtuti, ale při vysokých absolutních tlacích, v okolí absolutního tlaku 100 at, nemůžeme již použít pro materiál trubic sklo, a to z pevnostních a ovšem i z bezpečnostních důvodů. Lze použít trubic z různých ne-magnetických kovů nebo slitin, jež jsou ovšem **neprůhledné**. Čtení

umožníme např. tak, že na hladině rtuti uvnitř trubice umístíme magnetický plovák, jehož polohu určíme třeba indukční cívkou navlečenou na trubici.

Plováku lze použít i u tzv. *plovákových tlakoměrů*. Schematický řez takovým přístrojem je na obr. 5. Je-li plovák dostatečně velký, umožňuje jeho poměrně velká přestavující síla při změně výšky hladiny nejen indikaci (ozubeným převodem ručičkou na stupnici), ale i plynulý zápis, čili registraci. Princip v obr. 5 naznačeného přístroje je shodný s tlakoměrem U. Místo trubice je zde však nádoba s dvojitým koncentrickým pláštěm. Do prostoru mezi vnějším a vnitřním pláštěm je přiváděn měřený přetlak. Plovák je v prostoru vnitřním. Pro větší tlakové rozsahy je místo vodní náplně nebo jiné vhodné



Obr. 7

tlakoměrné kapaliny - možno použít rtuti. Na obr. 6 je celkový pohled na registrační přístroj, jehož měřicí systém je plovákový. Posuv registračního papíru obstarává synchronní elektromotorek.

Řekli jsme si již v úvodu, že volba tlakoměrných kapalin s ohledem na jejich hustotu je dosti úzká. V některých případech je žádoucí použít kapalinového tlakoměru s náplní kapaliny hustoty, jež by byla mezi hustotou vody a rtuti, např. s hustotou $\rho = 6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ apod. Protože nemáme takovou kapalinu, jež by splňovala i ostatní hlavní požadavky, je možno použít *dvounádobkového tlakoměru U* s náplní dvou kapalin vzájemně se nemísících. Jeden takový přístroj v schematickém řezu je na obr. 7. Trubice U vnitřního průřezu S_1 se v obou ramenech rozšiřuje ve válcové nádobky vnitřních průřezů S . Přístroj je naplněn dvěma kapalinami o hustotách ρ_1 (např. rtuť) a ρ_2 (např. voda). Půso-

bí-li na hladiny kapalin v obou ramenech stejný tlak, např. barometrický b , ustaví se hladina kapaliny s menší hustotou ρ_2 do výšky l . Kdybychom nepřihlíželi ke kapilární aktivitě tlakoměrných kapalin, byla by výška l dána vztahem

$$h_1 \rho_1 = h_2 \rho_2 \quad (11)$$

Spojíme-li pravé rameno s prostorem, jehož tlak měříme, sníží se hladina kapaliny v pravé nádobce B a stoupne rozhraní obou kapalin v levé nádobce o stejnou délku h a hladina v levém rameni stoupne o H z polohy 1 do polohy 2 . Pro dosažení rovnováhy musí platit

$$p - b = g (2 \rho_1 h + H \rho_2 - h \rho_2) \quad (12)$$

Ze stálosti objemů kapalin plyne

$$h \cdot S = H \cdot S_1, \quad (13)$$

Dosadíme-li do rovnice (12) za $h = \frac{S_1}{S} \cdot H$ z rovnice (13), dostáváme

$$p - b = H \cdot g \left(2 \rho_1 \frac{S_1}{S} + \rho_2 - \rho_2 \frac{S_1}{S} \right) \quad (14)$$

Označíme-li poměr průřezů $\frac{S_1}{S} = k$, dostáváme dále

$$p - b = H \rho_2 g \left(1 + 2 k \frac{\rho_1}{\rho_2} - k \right), \quad (15)$$

čili

$$p - b = H \rho_2 g \left[1 + k \left(2 \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \right] = H \rho_2 g K, \quad (16)$$

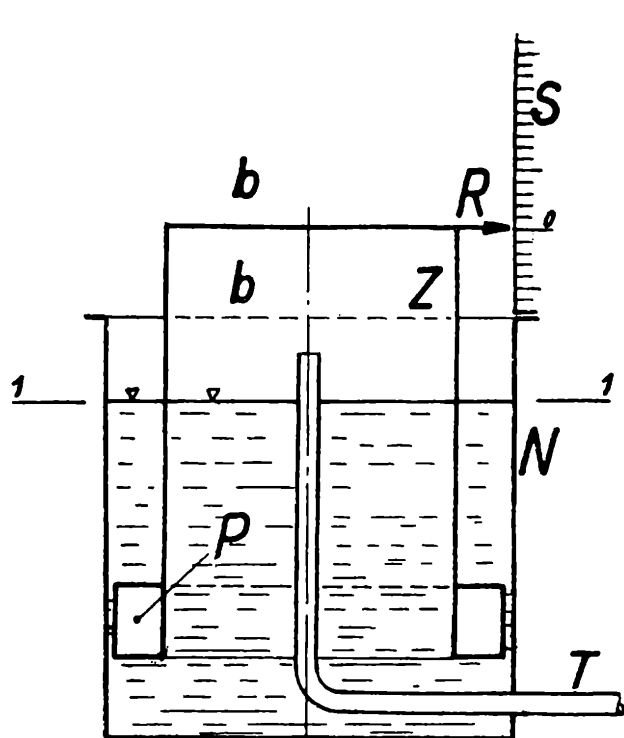
kde jsme výraz v lomené závorce označili K .

Jestliže volíme např. poměr průřezů $k = \frac{1}{6,5}$ a použijeme-li za tlakoměrné kapaliny rtuť a vodu (poměr $\frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 13,5$), bude stoupnutí hladiny kapaliny v levém rameni (hladiny A) takové, jako by byl rozdíl hladin u normálního otevřeného tlakoměru U s náplní kapaliny hustoty $\rho_{zd} = = K \cdot \rho_2 \approx 5 \cdot 1 = 5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

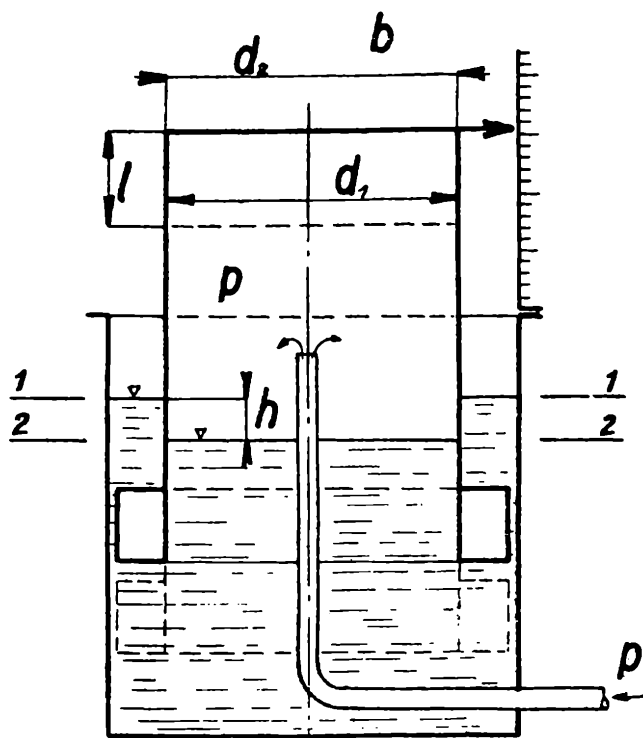
Tím jsme si přehledně probrali principy kapalinových tlakoměrů trubicových a nádobkových, z nichž některé lze zhotovit celkem jednoduše. Ve zvláštních člancích pohovoříme postupně ještě o *tlakoměrech zvono- vých a prstencových*, o *mikromanometrech* a o *kapalinových barometrech a vakuometrech*.

Zvonový tlakoměr

Zvonový tlakoměr, nejčastěji používaný pro měření malých přetlaků (pak mu přísluší pojmenování *zvonový manometr*), je zvláštním provedením kapalinového tlakoměrného systému. Jeho schematický řez je v obr. 1. Ve válcové otevřené nádobě N je souose umístěn zvon Z , který je rovněž válcovou nádobou, obrácenou však dnem vzhůru, na které je



Obr. 1. Zvonový tlakoměr v počátečním rovnovážném stavu. Uvnitř i vně zvonu je stejný tlak (barometrický tlak b).



Obr. 2. Zvonový manometr. Měřený přetlak je roven $\Delta p = p - b$.

připojen plovák P . Plovák je tak dimenzován, aby zvon po naplnění nádoby N vhodnou kapalinou (nejčastěji čistou vodou) do určité výšky 1—1, na této kapalině plaval. Při tom musí ukazovací ručka R , spojená se zvonem, stát proti nulové ryse stupnice S , připojené k nádobě N . Tlak pod zvonem je v tomto výchozím stavu roven tlaku okolního ovzduší b . V tomto výchozím stavu, když je pod zvonem nulový přetlak ($\Delta p = 0$), je zvonový tlakoměr nakreslen v obr. 1.

Přivedeme-li nyní do prostoru pod zvonek trubici T měřený tlak p , vystoupí zvonek působením přetlaku

$$\Delta p = p - b \quad (1)$$

do jisté výšky, v níž zaujme novou rovnovážnou polohu.

Při vynoření o výšku l (obr. 2) zůstává hladina vody ve vnější nádobě N v nezměněné úrovni 1—1, hladina pod zvonek klesne o výšku h na úroveň 2—2. Pro pokles h vnitřní hladiny přitom platí

$$\Delta p = h \cdot \rho \cdot g, \quad (2)$$

kde ρ je hustota tlakoměrné kapaliny (jak bylo již řečeno zpravidla vody) a g místní tíhové zrychlení.

Označíme-li d_1 vnitřní průměr válcového zvonu a d_2 jeho průměr vnější, platí pro dosažení rovnováhy při vynoření zvonu o výšku l působením přetlaku Δp rovnice

$$\frac{\pi d_1^2}{4} \Delta p = \frac{\pi (d_2 + d_1)}{2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{2} l \cdot \rho \cdot g = \frac{\pi (d_2^2 - d_1^2)}{4} l \cdot \rho \cdot g \quad (3)$$

Levá strana rovnice zde představuje celkovou tlakovou sílu F , kterou přetlak Δp působí svisle vzhůru na vnitřní dno zvonu. Přitom je dále

$$d_s = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

střední průměr válcové stěny zvonu a

$$s = \frac{d_2 - d_1}{2}$$

tloušťka stěny zvonu. Vidíme, že tlaková síla při dosažení rovnováhy je rovna ploše mezikruží stěny zvonu násobené hydrostatickým tlakem $l \cdot \rho \cdot g$, příslušejícím vynoření zvonu o výšku l , jež je dále rovna váze kapaliny o objemu rovném vynořené části pláště zvonu délky l . Z toho je dáno již prostým názorem, že při nepřiliš velké tloušťce stěny zvonu (stěny ovšem nesmí být zase tak slabé, aby vlivem přetlaku nenastala snad jejich deformace) bude výška vynoření zvonu l mnohem větší nežli pokles h hladiny, který by se působením stejného přetlaku objevil např. u běžného tlakoměru U s náplní stejné tlakoměrné kapaliny (vody). Umožňuje nám tedy zvonový tlakoměr mnohem přesnější měření nežli běžné trubico-
vé kapalinové tlakoměry. Hodnotu, která vyjadřuje kolikrát se nám zvětší u zvonového tlakoměru dráha indikační ručičky, nazýváme jeho převodem e . Je zřejmý dán vztahem

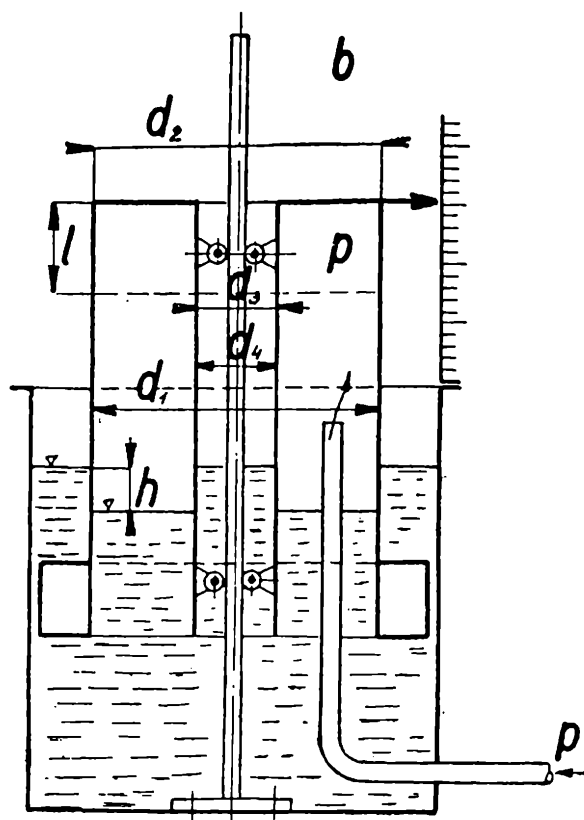
$$e = \frac{l}{h} = \frac{S_1}{S_2 - S_1}, \quad (4)$$

kde $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ a $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ je vnitřní, respektive vnější, průřez zvonu.

Přitom zřejmě $S_2 - S_1$ představuje průřez válcové stěny zvonu (plochu mezikruží).

Převod e tedy nezávisí na kapalině, na které zvon plave. Protože však výška h kapalinového sloupce vyvolujícího stejný hydrostatický tlak (způsobený vlastní vahou kapaliny) jako je měřený přetlak, je s tímto přetlakem vázána vztahem

$$h = \frac{\Delta p}{\varrho \cdot g}, \quad (5)$$



Obr. 3. Zvonový manometr s odlehčeným zvonem. Měřený přetlak je roven $\Delta p = p - b$.

kde ϱ je hustota kapaliny a g místní tíhové zrychlení, závisí tato výška h nepřímo na hustotě tlakoměrné kapaliny. Podle vztahu (4) bude pak na kapalinové náplni tlakoměru (totiž na její hustotě) záviset i délka l pohybu ukazovací ručičky, způsobeného přetlakem Δp

$$l = e \quad h = e \frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = \text{konst.} \frac{\Delta p}{\varrho}, \quad (6)$$

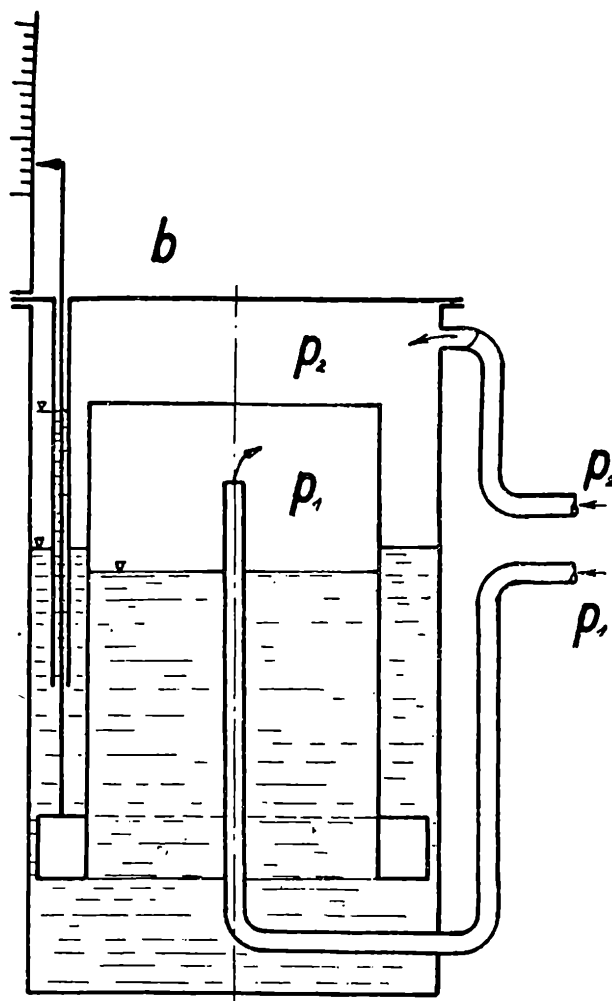
kde konstanta je rovna poměru e/g .

Zvon bývá zhotoven nejčastěji z plechu, tloušťka stěny je pak zpravidla malá a převod e vychází podle (4) zbytečně velký. Velký převod by ovšem sám o sobě neškodil; jsou s tím však současně spojeny konstrukční obtíže, kterých se zpravidla chceme vyvarovat. Zvětšováním převodu

by se při daném tlakovém rozsahu zvětšovala příliš délka zvonu, i spodní nádoby. Aby převod e měl požadovanou hodnotu při dané tloušťce plechového pláště a vnějším průměru zvonu d_2 , opatřuje se zvon druhou souosou válcovou stěnou, průměrů d_3 a d_4 (viz obr. 3). Vnitřní dutiny je možno výhodně použít pro vedení zvonu.

Označíme-li $S_3 = \frac{\pi d_3^2}{4}$ a $S_4 = \frac{\pi d_4^2}{4}$, bude v tomto případě převod e dán vztahem

$$e = \frac{S_1 - S_3}{S_2 - S_1 + S_3 - S_4}, \quad (7)$$



Obr. 4. Diferenční zvonový tlakoměr (manometr). Měřený tlakový rozdíl (difference) $\Delta p = p_1 - p_2$.

což plyne z rovnice obdobné rovnici (3)

$$\frac{\pi (d_1^2 - d_3^2)}{4} \Delta p = \left[\frac{\pi (d_2^2 - d_1^2)}{4} + \frac{\pi (d_2^2 - d_4^2)}{4} \right] \cdot l \cdot \rho \cdot g, \quad (8)$$

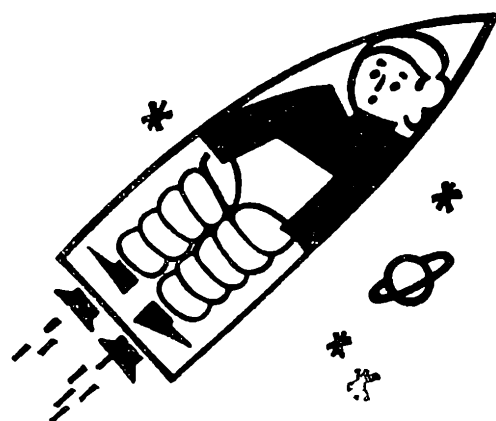
Dosud popsané přístroje měří rozdíly tlaku od okamžitého barometrického tlaku. Kdyby se místo přetlaků měřily malé p o d t l a k y, zvon by se do nádoby N naopak ponořoval. V obou případech je vnějšek

zvonu vystaven okolní atmosféře. Kdybychom chtěli zvonovým tlakoměrem určovat tlakové difference (v oblasti nepříliš velikých absolutních tlaků), museli bychom zvon zakrýt. Pod zvonem a nad ním byly by pak dva rozdílné tlaky, jejichž diferencí bychom určili z příslušné polohy zvonu indikované ručičkou na stupnici. Schéma takového uzavřeného diferenčního zvonového tlakoměru (manometru) je na obr. 4.

Astronomie

Ludmila Fritzová,
Astronomický ústav ČSAV, Ondřejov:

Výzkum Slunce, odměněný státní cenou Klementa Gottwalda

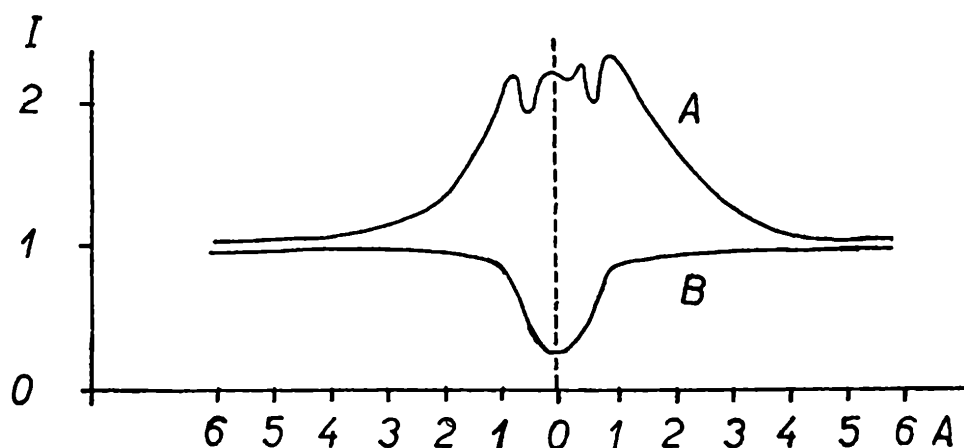


Slunce, nám nejbližší hvězda, kterému se podobají tisíce vzdálených hvězd, je pro svou blízkost neustále středem zájmu všech astronomů. Z dlouhodobého soustavného pozorování se poznalo, že na povrchu Slunce se objevují drobné úkazy, které vznikají, mění se a zanikají v intervalech několika minut až dnů a jejichž početnost výskytu se mění v přibližně 11-tiletých cyklech. Všem těmto úkazům říkáme souhrnně *sluneční činnost*.

Jejími nejvýraznějšími projevy jsou *skvrny*, obklopené jasnými *fakulovými poli*. Kromě toho se objevují na okraji slunečního kotouče jasné výběžky plynů, zvané *protuberance*, které se při přechodu přes sluneční kotouč promítají na jasný povrch Slunce jako temná vlákna, zvaná *filamenty*. V blízkosti větších skvrn se objevují často úkazy krátkodobé, rychle se měnící. Nejdůležitější z nich jsou prudká zjasnění polí, které nazýváme *erupce* a které bývají často doprovázeny rychle se měnícími, tzv. *eruptivními filamenti* a protuberancemi.

Všechny tyto rychle se měnící úkazy, především erupce, vysílají zvýšenou měrou určité druhy záření, které působí náhlé změny v zemské atmosféře a ovlivňují i život na Zemi. Není náhodou, že se vědecký výzkum v oboru fyziky Slunce v moderní době - tj. v době prvního pronikání člověka do vesmíru - soustředil především právě na výzkum erupcí a ostatních rychle se měnících útvarů na slunečním povrchu. Značná

část záření, které tyto útvary vysílají, působí totiž zhoubně na živé organismy. Na zemském povrchu se tyto zhoubné účinky neprojevují, poněvadž záření prochází na cestě k nám hustou vrstvou zemského ovzduší, které působí jako ochranný obal kolem Země. Převážná část škodlivého záření, kterým je např. záření rentgenové o velmi krátkých vlnových délkách, nebo kosmické záření, složené z velmi rychlých hmot-

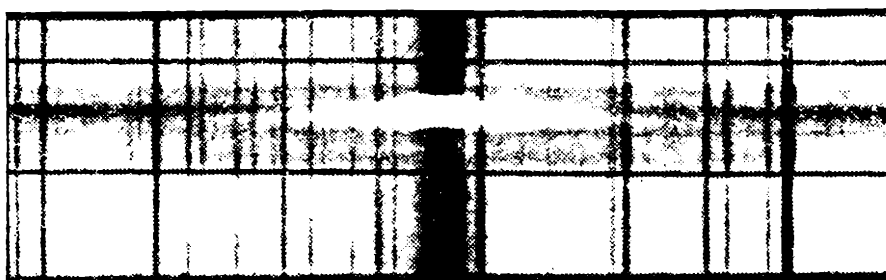


1. Profil spektrální čáry H_α pořízený ze snímku spektra, vyfotografovaného slunečním spektrografem v Ondřejově.

B. Profil čáry H_α v klidné oblasti slunečního povrchu.

A. Profil čáry H_α v oblasti erupce.

ných částic, nepronikne vůbec ovzduším a nejvýše vyvolá v ovzduší jen druhotné, méně energetické záření, které je již na povrchu Země zbaveno škodlivých účinků. Pro člověka v kosmickém prostoru bude třeba tyto ochranné obaly uměle vytvořit. Je tedy velmi aktuální otázkou poznat, které úkazy na Slunci vyzařují zhoubné druhy záření, a je



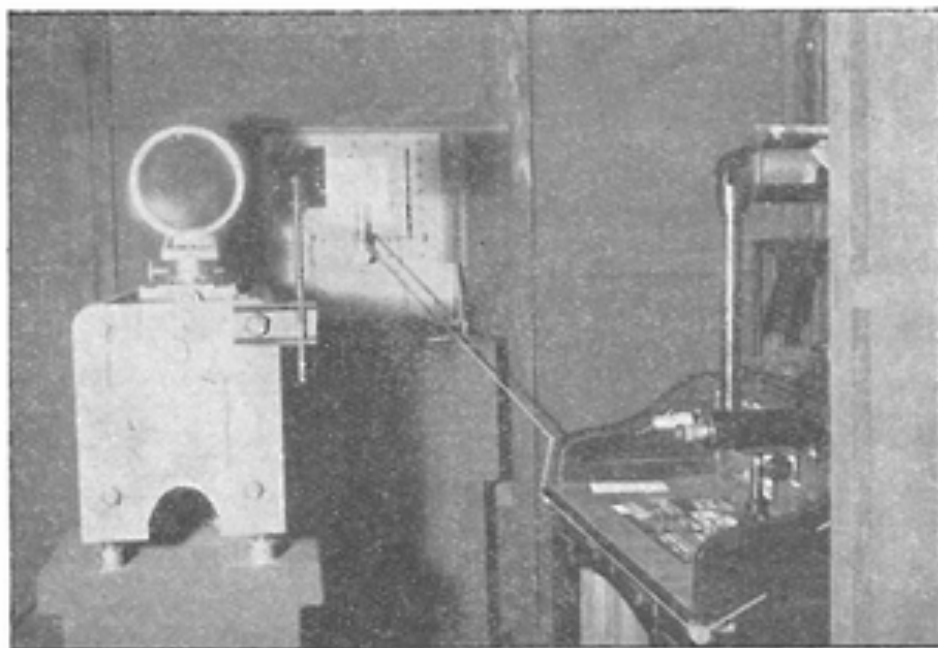
2. Snímek erupce v čáře H_α , získaný ondřejovským spektrografem.

třeba naučit se i předvídat vznik takovýchto úkazů na slunečním povrchu.

Výzkum erupcí a částečně i ostatních rychlých jevů na Slunci se v Ondřejově provádí systematicky již od roku 1948. Prvých deset let byl však pro tuto práci na observatoři k dispozici jen jediný přístroj, tzv. s p e k t r o h e l i o s k o p, kterým se konala pozorování vizuálně ve vodíkové čáře H_α . Tato pozorování přinesla velmi mnoho cenného ma-

teriiálu, avšak k vysvětlení příčin, fyzikálních procesů a všech vlastností pozorovaných jevů nemohla naprosto dostačovat.

Proto byla na observatoři postupně vybudována celá řada přístrojů, které sledují různým způsobem a na různých vlnových délkách sluneční povrch. Dnes kromě vizuálního sledování v čáře H_{α} měříme radioteleskopy vysílání rádiového záření na vlnách 3, 37, 56 a 130 cm, fotografujeme fotosféru f o t o s f é r i c k o u k o m o r o u a chromosféru úzkopásmovým m o n o c h r o m a t i c k ý m f i l t r e m, sledujeme speciálním přístrojem atmosférické poruchy, které vznikají během erupcí, k o r o n o g r a f e m eruptivní protuberance na okraji slunečního disku a konečně zachycujeme fotograficky spektra všech zajímavých úkazů velkým s l u n e č n í m s p e k t r o g r a f e m, který je naším nejpotřebnějším přístrojem.



3. Objektiv, okolí štěrby a manipulační stůl spektrografu.

V posledních letech se totiž ukázalo, že daleko nejspolehlivější informace o fyzikálních procesech rychlých jevů na Slunci lze získat z fotografických profilů spektrálních čar. Proto se pracovníci ondřejovské observatoře rozhodli postavit přístroj, kterým by se daly získat vhodné spektrální snímky. Na přístroj bylo přitom kladeno několik požadavků, a to získat současně snímky všech takových spektrálních oborů, ve kterých se vyskytují nejdůležitější emisní čáry zkoumaných jevů, dosáhnout velké disperze spekter - přibližně 1 angström na 1 mm a získat série snímků, které za sebou budou následovat ve velmi krátkých časových intervalech, aby bylo možno zachytit celé vývoje rychle se měnících úkazů.

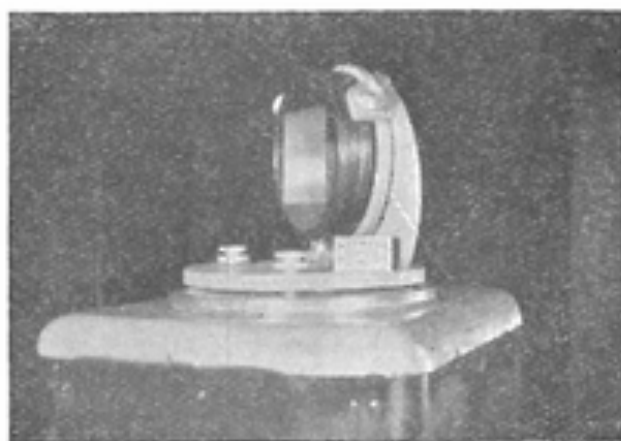
Ondřejovský spektrograf, jehož stavba byla dokončena během Mezinárodního geofyzikálního roku v polovině roku 1958, odpovídá všem těmto požadavkům a je některými svými vlastnostmi unikátním pří-

strojem na světě. Přístrojem bylo získáno již mnoho snímků spekter erupcí, eruptivních protuberancí a dalších zajímavých úkazů, které daly podnět k celé řadě vědeckých poznatků a objevů.

Z emisních čar spekter erupcí bylo nalezeno, že existují nejméně dva základní typy erupcí, které se od sebe podstatně liší svými fyzikálními vlastnostmi. Z rozštěpu emisních čar erupcí nad velkými slunečními skvrnami bylo objeveno silné magnetické pole v oblasti erupcí a určena jeho intenzita. Při systematickém sledování eruptivních protuberancí bylo nalezeno, že protuberance tvaru smyčky vyzařují podobné druhy záření, tedy i zhoubné záření kosmické jako erupce. Je pravděpodobné, že se tyto smyčkové protuberance při přechodu přes sluneční disk jeví jako erupce jednoho z uvedených typů. Byl objeven též druh protuberancí, zvaných *surges*, které silně vyzařují rentgenové paprsky. Vedle těchto základních poznatků byla publikována ještě řada drobnějších prací, které všechny vycházejí z fotografických snímků ondřejovského spektrografu. Přesto, že všechny tyto práce teprve otvírají cestu k novým poznatkům o fyzikálních procesech rychlých jevů na Slunci, jsou cenné především tím, že jsou spojeny dnes s nejmodernější metodou výzkumu Slunce a jsou získávány z velmi spolehlivého a kvalitního pozorovacího materiálu.

Vědeckým pracovníkům slunečního oddělení v Ondřejově dostalo se též za tyto vědecké výsledky, které souvisejí s novým slunečním spektrografem, jedno z nejvyšších uznání, kterého lze v našem státě dosáhnout.

Kolektiv pracovníků slunečního oddělení byl v letošním roce vyznamenán státní cenou Klementa Gottwalda za významná pozorování a nové vědecké výsledky, dosažené slunečním spektrografem v Ondřejově. Členy tohoto vyznamenaného kolektivu jsou dr. Z. Švestka, vedoucí kolektivu, dr. M. Bláha, dr. V. Bumba, prom. fyz. L. Fritzová, dr. J. Kleczek, dr. M. Kopecký, dr. L. Krivský, dr. V. Letfus, prom. fyz. B. Růžicková a dr. B. Valníček. Toto veliké uznání nepatří však jen jmenovaným deseti členům kolektivu, ale je zároveň uznáním všem spolupracovníkům ondřejovského pracoviště, bez jejichž vydatné pomoci by těchto výsledků nemohlo být dosaženo. Státní cena je tedy pro celý Astronomický ústav nejen velkou odměnou, ale i velkým povzbuzením pro všechno další úsilí při odhalování dosud nepoznaných procesů, které se odehrávají ve vesmíru.



4. Mřížka spektrografu, na které se rozkládá sluneční světlo ve spektrum.

M i l a n K o m a n, Praha:

Matematika na šachovnici



Každý šachista ví, že šachové figury mají na šachovnici různou působnost neboli sílu. Síla šachových figur se vyjadřuje jejich tzv. šachovou hodnotou, která zhruba vyjadřuje, kolikrát je ta nebo ona figura silnější než nejslabší figura pěšák, tj. kolik pěšáků asi nahradí určitou figuru. Jak známo, dáma (*D*) má hodnotu 10, věž (*V*) má hodnotu 5, střelec (*S*) a jezdec (*J*) hodnotu 3 a pěšák (*P*)

1	2	3	4	4	3	2	1
2	5	6	7	7	6	5	2
3	6	8	9	9	8	6	3
4	7	9	10	10	9	7	4
4	7	9	10	10	9	7	4
3	6	8	9	9	8	8	3
2	5	6	7	7	6	5	2
1	2	3	4	4	3	2	1

Obr. 1

hodnotu 1. Každý šachista však také ví, že toto ocenění figur odpovídá jen velmi přibližně, protože působnost (a tedy i hodnota) figur může být v různých pozicích různá. Jsou známá dokonce postavení, kde i pěšák je silnější než dáma. Uvedené hodnoty totiž jen zhruba odpovídají síle figur na prázdné šachovnici. Uvedené ocenění figur bylo získáno dlouholetou šachovou praxí. V tomto článku si ukážeme, jak by se dalo provést ocenění figur čistě matematicky.

Sílu (hodnotu) jednotlivých šachových figur i skupiny několika figur najednou budeme určovat průměrným počtem tahů, které lze těmito figurami provést ze všech možných pozic na prázdné šachovnici (čtvercové šachovnici o 64 polích).

Jestliže naše úvahy budou platit současně pro všechny figury, budeme prostě mluvit o figurě *X*. Hodnotu (sílu) figury *X*, určenou podle naší úmluvy, budeme značit $\|X\|$. Tak např. hodnotu dámy značíme $\|D\|$.

Podobně budeme značit hodnotu několika figur, např. hodnotu dvojice figur věže a jezdce budeme značit $\|V + J$ atd.

Pro snazší orientaci si očíslováme všechna pole šachovnice přirozenými čísly 1, 2, ... 10, jak je naznačeno na obr. 1. Tedy všechna pole označená čísly 1, 5, 8, 10 se vyskytují na šachovnici čtyřikrát a všechna ostatní pole se vyskytují na šachovnici osmkrát.

Počet tahů figury X z n -tého pole ($n = 1, 2, \dots, 10$) šachovnice budeme značit $X(n)$. Přehled všech hodnot $X(n)$ pro všechny figury a pro všechna pole šachovnice je uveden v následující tabulce 1. Správnost tabulky si čtenář sám snadno ověří.

Tab. 1

n	$J(n)$	$S(n)$	$V(n)$	$D(n)$
1	2	7	14	21
2	3	7	14	21
3	4	7	14	21
4	4	7	14	21
5	4	9	14	23
6	6	9	14	23
7	6	9	14	23
8	8	11	14	25
9	8	11	14	25
10	8	13	14	27

P1. Hodnota libovolné figury X je dána vzorcem:

$$\|X\| = \frac{1}{16} [X(1) + 2X(2) + 2X(3) + 2X(4) + X(5) + 2X(6) + 2X(7) + \\ + X(8) + 2X(9) + X(10)] . \quad (1)$$

Počet všech možných tahů figury X ve všech možných postaveních je dán číslem $64 \|X\|$.

D ů k a z. Snadno se ihned ověří, že počet všech možných tahů libovolné figury X ze všech postavení je dán součtem

$$4X(1) + 8X(2) + 8X(3) + 8X(4) + 4X(5) + \\ + 8X(6) + 8X(7) + 4X(8) + 8X(9) + 4X(10) .$$

Odtud dostaneme výraz (1) dělením 64, tj. počtem všech možných postavení figury X na dané šachovnici.

Snadným výpočtem můžeme nyní zjistit

$$\begin{aligned} \|J\| &= 5,25 , & \|V\| &= 14, - , \\ \|S\| &= 8,75 , & \|D\| &= 22,75 . \end{aligned}$$

Nyní postoupíme k další otázce. Budeme zkoumat hodnotu několika figur, které působí současně na šachovnici. V běžné šachové praxi se

užívané hodnoty šachových figur prostě sčítají. Avšak při naší definici hodnoty figur nelze aritmeticky sčítat hodnoty jednotlivých figur, neboť stojí-li na šachovnici více figur, mohou si v pohybu navzájem překážet. Tím se pochopitelně sníží průměrný počet tahů figur, které s nimi můžeme vykonat.

Jestliže figura X brání figuru Y v provedení určitého tahu, nazveme jej *neuskutečnitelným* tahem. Označme $F_{xy}(n)$ ($n = 1, 2, \dots, 10$) počet neuskutečnitelných tahů dvojice figur $X + Y$ ve všech postaveních, při nichž stojí figura X na poli n . Dále definujme $\|F_{xy}\|$ výrazem (1).

Tab. 2

n	$F_{jj}(n)$	$F_{js}(n)$	$F_{jv}(n)$	$F_{jd}(n)$	$F_{ss}(n)$	$F_{sv}(n)$	$F_{sd}(n)$	$F_{vv}(n)$
1	4	9	16	23	0	42	49	70
2	6	10	29	36	0	48	55	76
3	8	11	38	45	0	51	58	80
4	8	11	42	49	0	51	51	82
5	8	27	42	65	0	62	85	82
6	12	29	52	75	0	68	91	86
7	12	29	56	79	0	68	91	88
8	16	47	62	101	0	78	117	90
9	16	47	66	105	0	80	119	92
10	16	63	70	125	0	90	129	94

P2. Hodnota dvojice figur $X + Y$ je dána vzorcem

$$\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\| - \frac{1}{63} \|F_{xy}\|. \quad (2)$$

D ů k a z. Z definice čísla $\|F_{xy}\|$ ihned plyne, že počet všech neuskutečnitelných tahů dvojice figur $X + Y$ ve všech možných pozicích je dán číslem $64 \|F_{xy}\|$. Dále snadno ověříme, že počet všech postavení dvou figur X, Y na šachovnici je $V_2(64)^1$, tj. $64 \cdot 63$. Tedy průměrný počet neuskutečnitelných tahů na jedno postavení je $\frac{1}{63} \|F_{xy}\|$. Odtud již snadno dostaneme vzorec (2).

Než přistoupíme ke konkrétnímu výpočtu, musíme uvést tuto úmluvu:

Dvojicí střelců $S + S$ rozumíme dvojici střelců působících po polích různých barev, tj. dvojici střelců v obvyklém slova smyslu užívaném v běžné šachové praxi.

Nyní uvedeme tabulku 2 hodnot $F_{xy}(n)$ pro dvojice figur nejčastěji se vyskytující v praxi, zejména v koncovkách. Správnost tabulky si může ověřit opět čtenář sám.

¹⁾ Symbol $v_k(n)$ značí počet variací k -té třídy z n prvků.

Odtud již jednoduchým výpočtem dostaneme čísla $\|F_{xy}\|$, resp. $\frac{1}{63} \|F_{xy}\|$:

	$J + J$	$J + S$	$J + V$	$J + D$	$S + S$	$S + V$	$S + D$	$V + V$
$\ F_{xy}\ $	10,312	26,25	47,5	67,—	0	62,75	82,75	84,—
$\frac{1}{63} \ F_{xy}\ $	0,164	0,416	0,754	1,063	0	0,996	1,313	1,333

Konečně odtud dostaneme

$$\begin{aligned}
 \|J + J\| &= 9,336 & \|S + S\| &= 17,5 \\
 \|J + S\| &= 13,584 & \|S + V\| &= 21,754 \\
 \|J + V\| &= 18,496 & \|S + D\| &= 30,187 \\
 \|J + D\| &= 26,937 & \|V + V\| &= 26,667
 \end{aligned}$$

Výpočet hodnoty trojic figur je již značně komplikovaný a nebudem jej proto zde uvádět.

Z á v ě r. Vypočtené hodnoty figur velmi dobře odpovídají síle šachových figurek zejména v koncovkách. Tak např. je známo, že dvojicí jezdců mat vynutit nelze a že střelcem a jezdce se matí obtížněji než věží. To souhlasí s našimi výpočty ($\|J + J\| = 10,336 < \|J + S\|$; $\|J + K\| = 13,584 < \|V\| = 14,0$). Dále se také v praxi často považuje dvojice věží za silnější než dáma (naše výpočty: $\|D\| = 22,75 < \|+ V\| = 26,667$).

Přesto je třeba k těmto výpočtům poznamenat, že také přesně nevyjadřují hodnotu figur, neboť vždy vedle uvažovaných figur na šachovnici působí ještě nejméně dvě další figury - dva králové.

Zamyšlení nad kalendářem

Ještě skoro čtyři desetiletí nás dělí od roku 2000, a přece tento rok poutá stále více pozornost spisovatelů, novinářů, techniků i vědeckých pracovníků. Mnozí odhadují, jak bude v r. 2000 vypadat mezinárodní situace, jaké nové vynálezy přinese do té doby technika, věda apod.

Také my se zamýšlíme nad rokem 2000, ale nebudeme si zde klást tak dalekosáhlé úkoly. Předložíme čtenářům jen jednu malou úlohu, která je dobrým cvičením v matematickém uvažování.

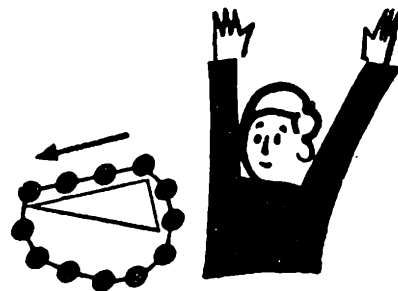
Na který den v týdnu připadne Nový rok v roce 2000? (Uvažte, že v roce 1961 připadl 1. leden na neděli.)

Řešení zašlete na adresu redakce. Z došlých příspěvků vybereme nejlepší a uveřejníme jej v některém z příštích čísel.

Jiří Sedláček C Sc

Prof. dr. Ján Vanovič, Bratislava:

Oko a ucho, ako prijímače vlnových popudov



Človek má dva zmyslové orgány, ktoré prijímajú vlnové popudy. U oka je to viditeľné elektromagnetické žiarenie a u ucha zas mechanické pozdĺžne vlnenie, postupujúce len hmotnými prostrediami. Postup, ktorým sa vytvára zrakový, alebo sluchový vnem sú zásadne odlišné. Rôznia sa už i spôsobom postupu vln svetelných, alebo mechanických.

Vidíme len predmety, ktoré sa nachádzajú na priamej spojnici s okom (na tom sa konečne zakladá i kontrola priamosti: zákryt). Cez nepriehľadné predmety, alebo za roh nevidíme. Tento spôsob šírenia vlnenia nemusí ovšem platiť všeobecne. V protiklade k uvedenému za rohom počujeme, i za prekážkou, ktorá je zlým zvukovodičom. Teda spôsob šírenia akustických vln musí byť iný, ako u vln svetelných.

Všimnime si bližšie tejto odlišnosti!

V našom časopise sme si už povšimli, že frekvencie viditeľného elektromagnetického žiarenia - teda svetla - nemôžu byť ľubovoľné, ak má byť zpravodajstvo svetla a zraku spoľahlivé. Interakcia (vzájomné pôsobenie) elektromagnetického vlnenia s hmotným prostredím frekvencie svetla obmedzuje na interval od $3,93 \cdot 10^{14}$ do $7,7 \cdot 10^{14}$ Hz (pozri Rozhľedy č. 1, ročník 39). V tomto intervale frekvencií sú hmotné prostredia alebo prechodné, alebo neprechodné pre elektromagnetické vlny, nechovajú sa obojetne, alebo nepravidelne (pozri Rozhľedy č. 4, ročník 39). Uvedeným frekvenciám svetla zodpovedajú vlnové dĺžky mnohonásobne (10^3) väčšie, než sú vzdialenosti častíc hmotného prostredia (rádove 10^{-8} cm), ale na druhej strane sú zas veľmi malé proti veľkosti telies (svetelná vlna je rádove 10^{-5} cm).

Keď je vlnová dĺžka žiarenia v uvedenom vzťahu k hmotnému prostrediu, na pole vlny uplatňuje sa len priemerný vplyv častíc prostredia

a v izotropickom prostredí sa preto vlnenie šíri priamočiare. Keď sa stýkajú rôzne prostredia, je po oboch stranách rozhrania rôznych prostredí pole vlny pod odlišným vplyvom inak usporiadaných častíc. Na takom rozhraní sa preto vlnenie alebo len odráža, keď nemôže do druhého prostredia postupovať, alebo sa láme do druhého prostredia, keď má v ňom inú rýchlosť šírenia a pritom sa i čiastočne odráža, v dôsledku zmeneného účinku častíc za rozhraním. Lom a odraz sú však dôležité úkazy pre vznik obrazu, a vôbec optického zobrazovania.

Keď sú v priestore rôzne izotropické prostredia, oddelené rozhraniami (rovinnými, i zakrivenými), môžeme dráhu svetelného lúča určiť, lúč má definovanú dráhu, ktorá nebude v dôsledku lomov a odrazov na rozhraniach priama. Ten fakt dovoľuje lúče, vychádzajúce z jedného bodu (predmetového) sústrediť v inom bode priestoru po rôznych lomoch a odrazoch. Ten bod sa označuje ako obraz (predmetového bodu).

Pri zobrazovaní sa preto určuje vzťah medzi predmetovým bodom a jeho obrazom. Keď vezmeme do úvahy jednoduché pravidlá, podľa ktorých sa chovajú lúče odrazený, alebo lomený, môžeme si vlnovú povahu lúčov celkom odmyslieť. Zobrazovanie sa tak stáva viac menej len geometrickým problémom.

Pokiaľ ide o vzťah predmetu a jeho obrazu podľa geometrickej optiky, či ide o zobrazovanie odrazom (zrkadlami), alebo lomom (šošovkami), budeme pokladať za známy. Upozorníme však na niektoré zaujímavosti, ktorých si geometrická optika nevšíma.

Máme právo hovoriť o predmetovom bode ako o bode v geometrickom zmysle? Nie - Pretože tá najmenšia oblasť, ktorá sa vôbec môže zobraziť, musí mať rozlohu svetelnej polvlny, počiatkovej to hodnoty vlnového rozruchu. Miesto predmetového bodu teda máme určitú veľmi malú - ale konečnú oblasť (alebo odrážajúcu časť povrchu, alebo svetlo emitujúcu časť povrchu).

Zobrazenie bodu nie je možné, lebo optické obrazy sprostredkuje vlnenie a geometrický bod by ho nijako neovplyvnil, preto naopak vlnenie o bode nemôže podať do zraku žiadnu zprávu.

Aký bude obraz tej oblasti (počiatkovej hodnoty rozruchu)?

Bude to zas ploška v príslušnej polohe podľa vzťahu predmetu a obrazu. Prečo sa tá ploška javí ako bod, ako to čo podľa Archimeda nemá rozmer? Pretože sa tá ploška premieta na jeden prijímač svetla, umiestnený na citlivej časti zrakovej siete, zvanej žltou škvrnou. Prijímače svetla na žltej škvrne sú čapíky (rozlišujú i farby) a tyčinky, ktoré nevedú ku barevnému vnímaniu.

Oko sprostredkuje zrakový popud do vyššej nervovej sústavy dosť komplikovane. Na žltej škvrne sa nachádza 10^7 čapíkov a každý z nich je počiatkom nervového vlákna, vedúceho do mozgu. Čapíky majú rez pravidelných šesťuholníkov s vpísanou kružnicou priemeru 0,0004 cm,

a sú pravidelne usporiadané, ako včelie bunky. Z každého vedie nervové vlákno, ktorých zväzok sa obyčajne označuje ako zrakový nerv.

Keby obrazy počiatočných hodnôt boli bodové, ako by od nich postupovala zpráva ďalej do vyššej nervovej sústavy? Nebolo by to proste možné. Bod sa nám tu preto javí len ako geometrická abstrakcia.

Keď je svetelným rozruchom zasiahnuté viac čapíkov, a každý prijíma iné kvantum energie, sú odlišné i signály, postupujúce do vyššej nervovej sústavy. Zrak má tak možnosť rozlišovať detaily a tieto detaily ako autotypické body (spôsob reprodukcie obrazov) vytvárajú zrakový vnem.

Že obrazy počiatočných hodnôt nie sú bodové má i tú výhodu, že málo rozbiehavý zväzok lúčov, ktorý padá na jeden čapík, stále vytvára bodový vnem. Len tak je možné, že môžeme vidieť ostro rôzne vzdialené predmety (vytvára sa hĺbka videnia). Podľa geometrickej optiky mal by sa ostro zobrazíť naproti tomu len predmet celkom určitej vzdialenosti; všetky predmety bližšie, alebo vzdialenejšie nesmeli by byť ostré. Ideálne bodové geometrické zobrazovanie viedlo by preto k nepríjemným obrazom, v ktorých boli by len predmety rovnako vzdialené ostré a všetko ostatné v hmlách.

Čapíky sú pravidelne usporiadané ako polia šachovnice. Ako šachisti určujú pole dvoma údajmi, napr. c7 (tretie pole smerom vpravo a siedme smerom nahor), rovnako je i určitý čapík určený dvoma údajmi. Zasiahnutie určitého čapíka vedie preto k uvedomovaniu si smeru, odkiaľ svetelný rozruch prichádza. Smer v priestore sa skutočne určuje dvoma údajmi! Pretože pri zaoštrovaní oka na rôzne vzdialené predmety, musí akomodovať očná šošovka, svaly, ktoré ju splošťujú, alebo smršťujú, sú tretím parametrom pri poznávaní trojrozmerného priestoru zrakom.

Tak sa môže stať zrak výborným orientačným zmyslom po priestore, po opakovaných skúsenostiach. Obrazy, ktoré prenáša do vedomia, odrážajú skutočné pomery na základe jednoznačného vzťahu medzi predmetom a obrazom. Pretože vidíme len počiatočné hodnoty, teda miesta, z ktorých sa svetelná vlna odráža, alebo na ktorých vzniká, všetko, čo je menšie od rozlohy počiatočnej hodnoty svetelného rozruchu, stáva sa zrakom nepoznatelné. Nemôžeme vidieť rej atómov, elektróny. Spôsob, ktorým sa tvoria obrazy v oku to vylučuje. Na to treba použiť iné prostriedky!

Celkom inak je to u sluchu, prípadne u akustických vln a z nich vznikajúceho sluchového vnemu.

Frekvencie zvukových vln sú od tisícok do desiatok kmitov za sekundu. Preto sa ich vlnové dĺžky (pri rýchlosti 330 m/s) nachádzajú v intervale od niekoľkých metrov do niekoľkých centimetrov. Tieto vlny sú teda porovnateľné s veľkosťami predmetov na zemskom povrchu. V prípade, keď má vlnenie v ceste prekážky porovnateľné s vlnovou

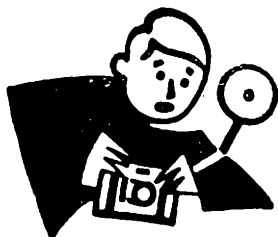
délkou, šíří se jinak, ako sme poznali u svetla. Tu nemožno hovoriť o definovanom smere šírenia vlnenia. Za prekážkami, porovnateľnými s vlnovou dĺžkou vlnenia, nevzniká úplný „tieň“. Vlnenie sa ohýba, vniká za prekážku; možno preto počuť za dverami, alebo za rohom.

Interval akustických frekvencií, resp. vlnových dĺžok, je obmedzený jednak ich vzťahom k veľkosti telies (aby vznikol ohyb!) a na druhej strane prijímačom vln. Prijímačom akustických vln je ušný bubník, ktorého vlastná frekvencia musí ležať veľmi vysoko nad prijímanými kmitočtami zvukových vln. Keby tomu tak nebolo, dochádzalo by k rezonanciám a niektoré kmitočty boli by prednostne a zosilnene prijímané.

Sluchový vnem je potom výsledkom všetkých kmitočtov, ktorými sa vynucujú kmity bubníka. Rozruch sa prenáša sluchovými kôstkami do stredného ucha, kde sú ladené analyzátory, umožňujúce vnímať vynucujúce frekvencie.

Dva vlnové prijímače, ktoré človek má, líšia sa preto podstatne.

Různé



A d o l f K o d y m, Praha:

Starořecký počítač

Roku 1900 našli potápěči nedaleko řeckého ostrůvku Antikythera asi 2000 let starý vrak, ve kterém byl též objeven důmyslný strojek.

Ze zlomků přístroje si můžeme učinit představu, že to byla skříňka se třemi ciferníky a uvnitř se složitou soustavou ozubených kol, asi jako je v hodinách z osmnáctého století. Vše je popsáno řeckými pokyny o použití strojku. Je zachováno přibližně 20 ozubených kol z velice důmyslného soukolí, pravděpodobně epicykloidálního či diferenciálního.

Jiný podobný stroj není zachován a ani literatura se o něm nezmiňuje. Naopak, mnozí dějepisci soudí, že Řekové neměli zájem o mechanizaci a lidskou práci nijak necenili, neboť ji vykonávali otroci.

Ačkoliv staří Řekové již znali některé části abstraktní matematiky, byly jejich technické znalosti minimální. Měli jen nejjednodušší přístroje, k nimž patřil např. počítač obrátek kol vozu pro měření silnic.

Pro starověký původ zbytků uvedeného přístroje svědčí historie tohoto objevu. Roku 1900 byla skupina lovců mořských hub zahrnána

bouří k ostrůvku Antikythera, kde v hloubce asi 60 m našli vrak potopené lodi. Později bylo z tohoto vraku vyneseno několik krásných bronzových a mramorových soch. Pro nedokonalé potápěcí zařízení byl průzkum r. 1901 zastaven. Když archeologové prozkoumali některé vápnem potažené a rezavé slepeniny, rozpoznali v nich části stroje. Podle nápisů bylo zjištěno, že je to astronomický přístroj. Nejdříve se soudilo, že sloužil k astronomickým účelům při námořní plavbě. Někteří znalci se domnívali, že to bylo malé planetárium, sestavené prý samotným Archimedeem.

Dnes je přístroj rekonstruován a podle stop po opravách můžeme soudit, že byl také v provozu. Na skřínce jsou tři ciferníky, chráněné dvířky. Přední ciferník má dvě stupnice, zodiakální znaky a měsíce roku. Podle pokynů bylo zde možno sledovat roční pohyb slunce, vycházení jasnějších hvězd a konstelace. Zadní ciferník ukazoval fáze měsíce i dobu jeho vycházení a zapadání. Je také pamatováno na přestupný rok. Dá se soudit, že strojek byl vyroben roku 82 před n. l., po dvou letech opraven a za 30 roků naloděn. Zdá se, že je předchůdcem počítačích strojů.

(Upraveno podle *Scientific American*, 1959)

Úlohy k řešení

Seznam řešitelů úloh z ročníku 1960—1961



Nejdříve jsou uvedena čísla příkladů správně vyřešených, v závorce jsou příklady s menšími nedostatky; nesprávná řešení neuveřejňujeme vůbec. Seznam je abecední.

Dagmar Bydžovská, 11a, DSŠ v Praze 7: M 11; *Josef Daneš*, 10, DSŠ v Praze 9: M 1, 9, F 1, 3, (2); *Jiří Durdil*, 11b, JSŠ v Praze-Karlíně: M 1, 3—9, 11, 12, Dg 1,3, F 1—3; *Svatopluk Fučík*, 11e, DSŠ v Hradci Králové: M 1,3, 6—8, 11, 12, (2,4,9,10), Dg 1,2,4, (3), F (3); *Pavla Hlaváčová*, 11, JSŠ v Modřanech: M 3, 6—8, 11, 12, (2,4,9,10), Dg 3, (1,4), F 2, (1,3); *Karel Hrbáček*, 11a, DSŠ v Nymburce: M 1—12, Dg 1—4, F 1—3; *Jiří Jedlička*, učeň radiomech. v Praze: M 3, 8, 11, 12, (2); *Mojmír Klímek*, 11, JSŠ ve Frýdlantě n. Ostravici: M 8, (10), Dg (3, 4), F (1, 2); *Vladimír Kos*, 11, DSŠ v Nové Pace: M 6—8, 10, 12, (9, 11); *Jana Kosňovská*, 11b, JSŠ v Hranici na Moravě: M 7; *Lubor Košťál*, 11d, DSŠ v Brně: M 1—12, Dg 1, 3, 4, (2), F 1—3; *Emil Kraemer*, 11b, JSŠ v Praze 6: M 1, 4—9, 11, 12, (2), F 1—3; *Vladimír Krupka*, 11b, JSŠ v Praze 6: M 7; *Karel Příkrý*, 11a, JSŠ ve Vyškově: M 1, 3—9, 11,

12, Dg 1—3, F 2, 3, (1); *Ulrike Schippová*, 11, JSŠ ve Varnsdorfu: M 3, 8—10, 12, (2, 7), Dg 1, 3, (2), F (1—3); *Jindřich Šilhán*, 11b, JSŠ ve Svitavách: M 1—4, 6—12, Dg 1—4, F 2, 3; *Vladimír Väter*, pom. dělník v Blovicích: M 1, 3, 4, 6—9, 11, 12, (2, 10), F 3, (2); *Jaroslav Vilímek*, 11b, JSŠ v Praze 10: M 1, 3, 6—8, 11, (5, 9), F 1—3; *Zdeněk Votápek*, 3a, PSS v Praze 8: M 8; *Jiří Zatloukal*, 11b, JSŠ v Hranicích: M 6, 8, 11; *Jan Žofka*, 12b, DSS v Písku: M 3, 5—12, (2), Dg 1—4, F 2, 3, (1).

Mimo soutěží: *Jan Havlíček*, učitel vv. v Chebu: M 1, 3. 5—8, 10—12, (2, 9); *Ing. Jan Rataj* z Plzně: F 1, (2, 3); *Ivan Vagera* ze Staré Vsi n. Ondřejnicí: M 4, F (1—3).

Pořadí vítězných řešitelů:

- I. Karel Hrbáček a Lubor Košťál;
- II. Jindřich Šilhán a Jan Žofka;
- III. Karel Příkrý, Jiří Durdil a Svatopluk Fučík.

Rozhovor s loňským i letošním vítězem K. Hrbáčkem byl i s jeho fotografií uveřejněn v loňském ročníku; nyní otiskujeme dopis dalšího vítěze.

Vítěz L. Košťál nám píše

již na obecné škole měl jsem rád numerické počítání a snažil jsem se v rychlosti předstihnout doma svého o rok staršího bratra a ve škole pak spolužáky i učitelku, což se mi často podařilo.

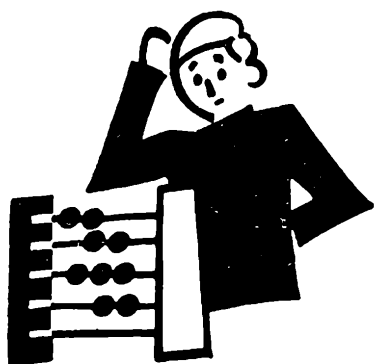
Prohlížel jsem si rád učebnice matematiky a měl jsem možnost již jako žák obecné školy naučit se permutace a kombinace a některé jiné partie z matematiky. Těšilo mne to. A tak, když se můj bratr v 7. třídě zúčastnil MO, zúčastnil jsem se jí též, i když jsem byl teprve v 6. tř.; umístil jsem se tehdy

v kategorii D ze 180 soutěžících na 28. místě. Úspěchy ve škole i v soutěži způsobily, že jsem si tento předmět ještě víc oblíbil. V 7. třídě byl můj výsledek obdobný. Po oba roky jsem udělal chybu v opisování textu z tabule u jednoho příkladu, který jsem pak nevypočítal. Teprve v 8. třídě jsem se umístil v 2. kole na čtvrtém místě z 322 soutěžících.

Když jsem nastoupil na JSŠ v Brně na Křenové, zúčastnil jsem se každý rok matematické i fyzikální olympiády a umísťoval se vždy v 2. kole na některém z předních míst (několikrát na prvním, v nejhorším případě na devátém místě). V minulém roce jsem soutěžil v matematice v kategorii A a dostal se jako žák 11. tř. i do 3. kola, ve kterém jsem se úspěšně umístil.

Od 10. třídy jsem měl dobré učitele na matematiku, fyziku i deskriptivní geometrii, od nichž jsem hodně získal. Proto jsem se mohl dát i do řešení příkladů v Rozhledech.



Matematika

Slavomír Burýšek, ČVUT, Praha:

O sumaci aritmeticko-geometrických řad

Ze střední školy známe pojem aritmetické a geometrické posloupnosti nebo řady. Každý jistě dovede odvodit vzorec pro součet prvních n členů těchto jednoduchých řad

$$\left[S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n), \text{ resp. } S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \right], \quad (1)$$

popřípadě pro součet nekonečné konvergentní geometrické řady.

$$\left(s = a_1 \frac{1}{1 - q} \right) \quad (2)$$

Naskýtá se však otázka, jak se sčítají řady, které nejsou ani aritmetické, ani geometrické. O jednom takovém typu řad zde nyní pojednáme.

1. Všimněme si například řady:

$$s_n = 1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \dots + n \cdot q^n, \quad (1.1)$$

kde q je reálné číslo, $|q| \neq 1$.

Tato řada není na první pohled aritmetická, ani geometrická, avšak obě řady trochu připomíná, neboť každý její člen je součinem jednoho členu posloupnosti přirozených čísel $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ se členem geometrické posloupnosti $q, q^2, q^3, \dots, q^n$.

Určíme součet s_n prvních n členů řady (1.1). Za tím účelem vynáso-

bíme rovnici (1.1) číslem q . Dostaneme:

$$s_n q = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + (n-1)q^n + n \cdot q^{n+1}. \quad (1.2)$$

Nyní odečteme rovnici (1.2) od (1.1):

$$s_n - qs_n = q + (2q^2 - q^2) + (3q^3 - 2q^3) + \dots + [nq^n - (n-1)q^n] - nq^{n+1} = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1}. \quad (1.3)$$

Řada (1.3) je však - až na poslední člen - geometrickou řadou s kvocientem q a prvním členem rovněž q . Její součet stanovíme podle známého vzorce. Potom součet řady (1.3) bude

$$s_n (1 - q) = q \frac{q^n - 1}{q - 1} - nq^{n+1},$$

odkud

$$s_n = nq^{n+1} - q \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2} \quad (1.4)$$

je vzorec pro součet prvních n členů řady (1.1).

Příklad 1. Určete s_n pro řadu $2 + 8 + 24 + \dots + n \cdot 2^n$.

Zde je zřejmé $q = 2$ a dosazením do (1.4) dostaneme

$$s_n = n \cdot 2^{n+1} - 2(2^n - 1) = 2^{n+1}(n - 1) + 2.$$

Podobně vyšetřujeme pro $|q| < 1$ nekonečnou řadu

$$s = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n + \dots \quad (1.5)$$

Stejným postupem jako v předcházejícím případě dostaneme

$$s(1 - q) = q + (2q^2 - q^2) + (3q^3 - 2q^3) + \dots + [nq^n - (n-1)q^n] + \dots = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \quad (1.6)$$

Avšak (1.6) je nekonečná geometrická řada konvergentní a má tedy součet, který určíme opět podle známého vzorce. Je tedy

$$s(1 - q) = \frac{q}{1 - q},$$

odkud

$$s = \frac{q}{(1 - q)^2} \quad (1.7)$$

je součet nekonečné konvergentní řady (1.5).

Příklad 2. Sečtěte nekonečnou řadu

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots$$

Podle (1.7) máme $s = \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

2. Předcházející výsledky můžeme snadno zobecnit. Nejprve však zavedeme definici.

D e f i n i c e. Budťe

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \quad (2.1')$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \quad (2.1'')$$

dvě posloupnosti reálných čísel takové, že platí

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q ;$$

potom posloupnost

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_n b_n \quad (2.2)$$

nazveme *aritmeticko-geometrickou posloupností* a řadu

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (2.3)$$

aritmeticko-geometrickou řadou.

Odvodíme nyní obecnou formuli pro s o u č e t prvních n členů aritmeticko-geometrické řady. Ze vzorce pro n -tý člen aritmetické a geometrické posloupnosti máme pro n -tý člen řady (2.3)

$$a_n b_n = [a_1 + (n - 1)d] b_1 q^{n-1}. \quad (2.4)$$

Je tedy

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 b_1 + (a_1 + d)b_1 q + (a_1 + 2d)b_1 q^2 + \dots + \\ &+ [a_1 + (n - 1)d]b_1 q^{n-1} = a_1 b_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + \\ &+ db_1 [q + 2q^2 + \dots + (n - 1)q^{n-1}]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podle formule (1.4) pak dostaneme

$$s_n = a_1 b_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} + db_1 \left[(n - 1)q^n - q \frac{q^{n-1} - 1}{(q - 1)^2} \right]. \quad (2.6)$$

Je-li $|q| < 1$, můžeme vyšetřovat též nekonečnou řadu

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots$$

Podobně jako ve (2.4), (2.5) použitím vzorce pro součet nekonečné konvergentní geometrické řady a formule (1.7) obdržíme

$$s = \frac{a_1 b_1}{1 - q} + \frac{db_1 q}{(1 - q)^2}. \quad (2.7)$$

Tyto výsledky můžeme shrnout v následující větě:

V ě t a. Součet prvních n členů aritmeticko-geometrické řady (2.3) je dán formulí (2.6). Je-li řada (2.3) nekonečná, potom je konvergentní tehdy a jen tehdy, když $|q| < 1$ a její součet je dán formulí (2.7).

3. Výše uvedeného postupu je možno použít i pro tak zvané *potenční aritmeticko-geometrické řady*, například

$$q + 2^k q^2 + 3^k q^3 + \dots + n^k q^n, \quad (3.1)$$

kde $k > 1$ je přirozené číslo.

Odvodíme zde součet řady (3.1) pro $k = 2$:

$$s_n = q + 2^2 q^2 + 3^2 q^3 + \dots + n^2 q^n. \quad (3.1')$$

Vynásobením q a odečtením dostaneme

$$s_n - s_n q = q + q^2(2^2 - 1) + q^3(3^2 - 2^2) + \dots + q^n[n^2 - (n-1)^2] - n^2 q^{n+1}, \quad (3.2)$$

čili

$$s_n(1 - q) = q + 3q^2 + 5q^3 + \dots + (2n-1)q^n - q^{n+1}n^2.$$

Vpravo tak dostáváme aritmeticko-geometrickou řadu, takže užitím formule (2.6) pro $a_1 = 1$, $b_1 = q$, $d = 2$ obdržíme vzorec pro součet prvních n členů řady (3.1')

$$s_n = \frac{q^{n+1}n^2}{q-1} - q \frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{2q}{q-1} \left[(n-1)q^n - q \frac{q^{n-1} - 1}{(q-1)^2} \right]. \quad (3.3)$$

P o z n á m k a. Nekonečné potenční aritmeticko-geometrické řady jsou opět konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$ a jejich součet se odvodí podobně jako v předcházejícím případě. Pro $k = 2$ máme použitím formule (2.7)

$$s = q \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

C v i č e n í.

1. Určete s_n aritmeticko-geometrické řady, je-li $a_1 = 2$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $d = 3$,

$$q = \frac{3}{2} \cdot \left[s_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n (3n - 11) + 7 \right].$$

2. Jaký musí být kvocient nekonečné aritmeticko-geometrické řady, je-li $a_1 = 3$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $d = 3$, aby její součet byl $s = \frac{1}{3} \cdot \left(q = \frac{-1}{2} \right)$.

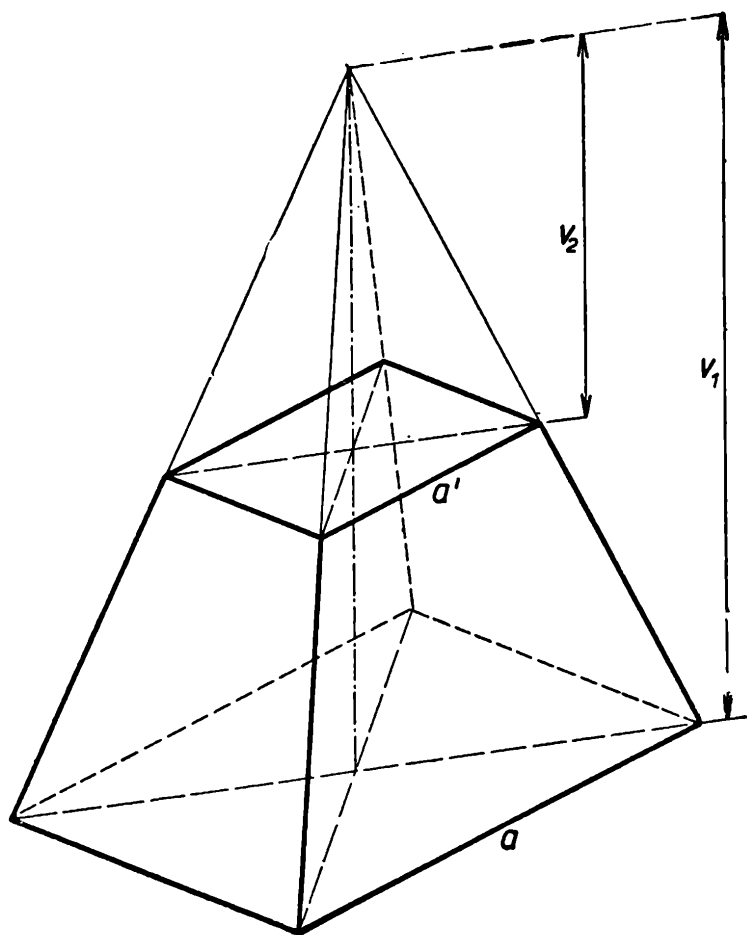
3. Určete součet nekonečné potenční aritmeticko-geometrické řady $\frac{2}{3} + 4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 9 \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \dots$ ($s = 30$).

4. Určete součet řady $q + 2^3 q^2 + 3^3 q^3 + 4^3 q^4 + \dots + n^3 q^n + \dots$ pro $|q| < 1$. [$s = q(q+2)^2 : (1-q)^4$].

Objem komolého jehlanu

Vzorec pro objem komolého jehlanu můžeme upravit různým způsobem a tím nabude různých tvarů. Některé z nich zde uvedeme i s odůvodněním.

V daném komolém jehlanu (na obr. 1 je narysován čtyřboký komolý jehlan, může však být i o jiném počtu podstavních hran) zavedeme toto označení: Z, z jsou obsahy obou podstav, v je výška jehlanu, v_1 je výška plného jehlanu $VABC\dots$ a $v_2 = v_1 - v$ je výška doplňkového jehlanu $VA'B'C'$



Obr. 1

Obě podstavy jsou stejnolehle, a proto platí

$$Z : z = a^2 : a'^2.$$

Odtud dostaneme

$$\sqrt{\frac{Z}{z}} = \frac{a}{a'} = k,$$

kde $k \neq 0$ je koeficient stejnolehlosti a můžeme tudíž psát

$$a = ka', \quad Z = k^2 z.$$

Platí však také

$$Z : z = v_1^2 : v_2^2$$

a z toho

$$\sqrt{\frac{Z}{z}} = \frac{v_1}{v_2} = k,$$

a proto

$$v_1 = kv_2.$$

Potom

$$v = v_1 - v_2 = v_2 (k - 1).$$

Do vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{v}{3} (Z + z + \sqrt{Zz}) \quad (1)$$

dosadíme vypočítané hodnoty za v a Z . Obdržíme

$$V = \frac{1}{3} v_2 (k - 1) z (k^2 + k + 1) = \frac{1}{3} v_2 z (k^3 - 1).$$

Jiný vzorec dostaneme, jestliže ve vzorci (1) vytkneme před závorku z . Obdržíme tak

$$V = \frac{1}{3} zv \left(\frac{Z}{z} + \sqrt{\frac{Z}{z}} + 1 \right) = \frac{1}{3} zv (k^2 + k + 1).$$

Kdybychom byli vytkli Z , dospěli bychom k jinému tvaru vzorce

$$V = \frac{1}{3} Zv \left(\frac{z}{Z} + \sqrt{\frac{z}{Z}} + 1 \right) = \frac{1}{3} Zv \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + 1 \right).$$

A ještě jedna drobnost. Počítejme geometrický průměr obou podstav pro případ, že jde o komolý jehlan s pravidelnými podstavami. Jsou-li to čtvercové podstavy, platí

$$Z = a^2, \quad z = a'^2$$

a

$$Zz = a^2 a'^2,$$

z čehož

$$\sqrt{Zz} = aa'$$

Tento výsledek bychom dostali i v případě, že by podstava byla libovolný pravidelný mnohoúhelník.

(Upravil S. Horák)

Užití diferenciálního počtu

(Pokračování)

Pro x , která budou vyhovovat nerovnosti

$$y' = 3(x^2 - 1) < 0$$

bude funkce klesající.

$$x^2 - 1 < 0,$$

$$x^2 < 1,$$

$$|x| < 1,$$

tj.

$$-1 < x < 1.$$

Daná funkce je tedy v intervalu $(-\infty; -1)$ rostoucí; v bodě $M(-1; 2)$ má lokální maximum. V intervalu $(-1; 1)$ je funkce klesající; v bodě $N(1; -2)$ má lokální minimum a v intervalu $(1; \infty)$ je opět rostoucí.

Abychom mohli snadněji zakreslit graf funkce $y = x^3 - 3x$, určíme ještě tzv. nulové body, tj. body, jejichž souřadnice $y = 0$, čili body, v nichž graf funkce protne osu x . Vypočteme je z rovnice

$$x^3 - 3x = 0,$$

$$x(x^2 - 3) = 0,$$

$$x_2 = 0; x_4 = \sqrt{3}; x_5 = -\sqrt{3}.$$

Pro přehlednost si sestavme tabulku vypočtených hodnot

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
y	-2	0	2	0	-2	0	2

P o z n á m k a 1. Budiž $y = f(x)$ funkce, která má v určitém intervalu derivaci $y' = f'(x)$. Označme tuto derivaci jako novou funkci $z = f'(x)$. Tímto předpisem je dána funkce, kterou můžeme opět derivovat a dostaneme $z' = [f'(x)]'$. Derivaci $[f'(x)]'$ označujeme $f''(x)$ a říkáme jí *druhá derivace*. Pro rozlišení říkáme derivaci $f'(x)$ *první derivace*. Užijeme-li uvedeného postupu n -krát, dostaneme postupně třetí, čtvrtou atd. až n -tou derivaci funkce.

P o z n á m k a 2. K snadnému rozhodnutí, zdali v určitém bodě je lokální extrém a jakého je druhu, může nám posloužit věta, kterou si uvedeme bez důkazu.

V ě t a 2 1. Má-li funkce $f(x)$ v určitém bodě c první derivaci $f'(c) = 0$ a druhou derivaci $f''(c) \neq 0$, pak pro $f''(c) > 0$ nastává v bodě c lokální minimum; pro $f''(c) < 0$ nastává v bodě c lokální maximum.

Vrátíme-li se ještě k našemu příkladu, vidíme, že pro $y = x^3 - 3x$ je $y'' = 6x$. Pro $x_1 = 1$ je $y''(1) = 6 > 0$, a proto je v bodě $x_1 = 1$ lokální minimum. Pro $x_2 = -1$ je $y''(-1) = -6 < 0$ a v bodě $x_1 = -1$ je tedy lokální maximum.

Příklad 44. Navrhněme rozměry plechovky válcového tvaru, na kterou by se při daném objemu spotřebovalo nejméně materiálu.

Označme poloměr podstavy plechovky r a její výšku v . Má-li se k výrobě plechovky spotřebovat nejméně materiálu, znamená to, že bude muset mít nejmenší povrch

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v.$$

Avšak uvedeným vzorcem je dán povrch jako funkce dvou proměnných r a v . S takovými funkcemi neumíme počítat, a proto musíme jednu z proměnných r , v nahradit pomocí druhé proměnné. Vztah, který umožní náhradu, je podmíněn tím, že plechovka má určitý daný objem

$$V = \pi r^2 v.$$

Odtud je

$$v = \frac{V}{\pi r^2}$$

a dosazeno do S dává

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Tím jsme dostali povrch S jako funkci jedné proměnné r , tj. $S = f(r)$. Tato funkce $f(r)$ může mít lokální minimum jen pro takovou hodnotu r , pro niž bude

$$f'(r) = 0 \text{ a } f''(r) < 0.$$

První derivace je

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Druhá derivace je

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Položíme-li první derivaci $S'(r)$ rovnou nule, dostaneme

$$4\pi r^3 - 2V = 0$$

a odtud poloměr

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Dosazeno do druhé derivace je

$$S''(r) = 4\pi + 4V \cdot \frac{2\pi}{V} = 12\pi.$$

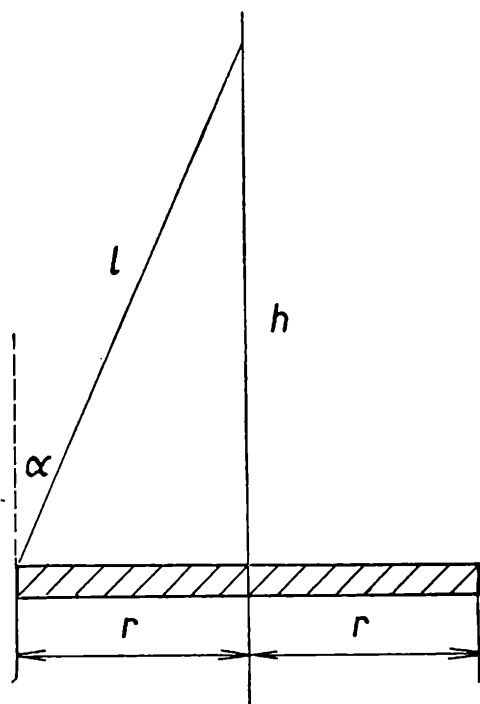
Protože pro $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ je druhá derivace kladná, je vypočtené r tou hodnotou, pro níž nastává lokální minimum.

Vypočteme ještě výšku v

$$v = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Vidíme, že výška je rovna průměru podstavy. Plechovka vyhovující dané podmínce má tedy tvar rovnostranného válce, jehož povrch je $S = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Např. pro $V = 1 \text{ l}$ je $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ dm} \doteq 0,542 \text{ dm}$, $v \doteq 1,084 \text{ dm}$ a $S \doteq 5,536 \text{ dm}^2$.



Obr. 30

Příklad 45. Nad středem kruhového stolu o poloměru r , ve vzdálenosti h od jeho středu visí lampa. Máme vypočítat tuto výšku tak, aby na okraji stolu byla čo největší intenzita osvětlení. Víme, že intenzita osvětlení je přímo úměrná kosinu úhlu dopadu světelného paprsku a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti zdroje světla od osvětleného bodu (obr. 30). Můžeme tedy intenzitu osvětlení zapsat rovnicí

$$I = k \cdot \frac{\cos \alpha}{l^2},$$

kde $k > 0$ je konstanta nezávislá na úhlu α a vzdálenosti l .

Z obrázku je patrné, že

$$\frac{h}{l} = \cos \alpha \text{ a } r^2 + h^2 = l^2.$$

Dosadíme-li do rovnice pro I , dostaneme

$$I = k \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \frac{1}{r^2 + h^2},$$

$$I = k \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tím jsme vyjádřili intenzitu osvětlení I jako funkci hledané vzdálenosti h . Je tedy $I = f(h)$. Tato funkce bude mít lokální maximum pro takové h , pro něž bude $f'(h) = 0$ a $f''(h) < 0$.

Vypočteme první a druhou derivaci

$$I' = k \cdot \frac{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2} \cdot (r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(r^2 + h^2)^3},$$

$$I' = k \cdot \frac{(r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (r^2 + h^2 - 3h^2)}{(r^2 + h^2)^3},$$

$$I' = k \cdot \frac{r^2 - 2h^2}{(r^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$I'' = k \cdot \frac{-4h(r^2 + h^2)^{\frac{5}{2}} - (r^2 - 2h^2) \cdot \frac{5}{2} \cdot (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2h}{(r^2 + h^2)^5},$$

$$I'' = \frac{-h \cdot (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} \cdot [4 \cdot (r^2 + h^2) + 5 \cdot (r^2 - 2h^2)]}{(r^2 + h^2)^5},$$

$$I'' = \frac{-h(9r^2 - 6h^2)}{(r^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Položíme-li první derivaci rovnou nule, dostaneme

$$r^2 - 2h^2 = 0,$$

$$h^2 = \frac{r^2}{2},$$

$$h = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Po dosazení do druhé derivace je

$$I''(h) = - \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2} \left(9r^2 - 6 \cdot \frac{r^2}{2} \right)}{\left(r^2 + \frac{r^2}{2} \right)^{\frac{7}{2}}} = - \frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{6r^2}{(1,5r^2)^{\frac{7}{2}}}$$

a to je zřejmě záporné číslo. Předpoklady jsou tedy splněny a hledaná vzdálenost světelného zdroje od středu stolu o poloměru r je

$$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Ukážeme si ještě jeden příklad, kde můžeme využít lokálních extrémů.

Příklad 46. Vypočtete rozměry sloupku transformátoru tvaru kříže (obr. 31) tak, aby jím byl otvor cívky o poloměru r co nejvíce zaplněn.

Obsah průřezu sloupku je

$$P = a^2 + 4ab.$$

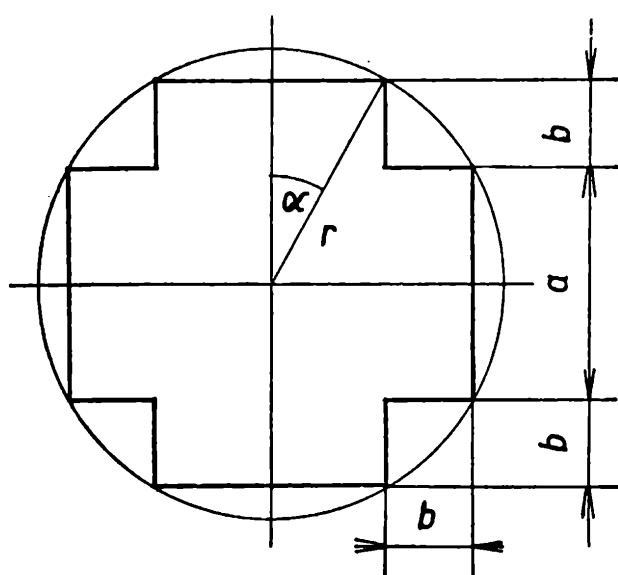
Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} a &= 2r \sin \alpha, \\ b &= r \cos \alpha - r \sin \alpha = r(\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

Po dosazení je

$$\begin{aligned} P &= 4r^2 \sin^2 \alpha + 8r \sin \alpha \cdot r(\cos \alpha - \sin \alpha), \\ P &= 4r^2(\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha), \\ P &= 4r^2(\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Funkce $P = f(\alpha)$ je definována pro α z intervalu $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.



Obr. 31

Abychom zjistili lokální maximum, vypočteme první a druhou derivaci.

$$\begin{aligned} P' &= 4r^2(2 \cos 2\alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha), \\ P' &= 4r^2(2 \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha), \\ P'' &= 4r^2(-4 \cdot \sin 2\alpha - 2 \cdot \cos 2\alpha), \\ P'' &= -8r^2(2 \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Položíme-li první derivaci rovnou nule, dostaneme

$$\begin{aligned} P' &= 4r^2(2 \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = 0, \\ \sin 2\alpha &= 2 \cdot \cos 2\alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= 2, \\ 2\alpha &\doteq 63^\circ 26', \\ \alpha &\doteq 31^\circ 43' \end{aligned}$$

Po dosazení α do P'' vyjde zřejmě číslo záporné, protože $\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ jsou čísla kladná. Je tedy splněna podmínka, aby pro $\alpha \doteq 31^\circ 43'$ byl obsah průřezu sloupku největší.

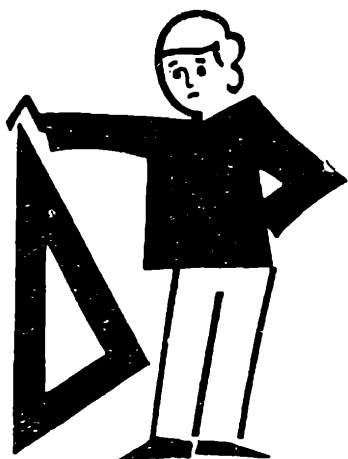
Uřčíme ještě rozměry a a b

$$a \doteq 2r \cdot \sin 31^\circ 43' \doteq 2r \cdot 0,52572 \doteq 1,051 \cdot r,$$

$$b \doteq r(\cos 31^\circ 43' - \sin 31^\circ 43') = r(0,85066 - 0,52572) = 0,325 \cdot r.$$

(Pokračování)

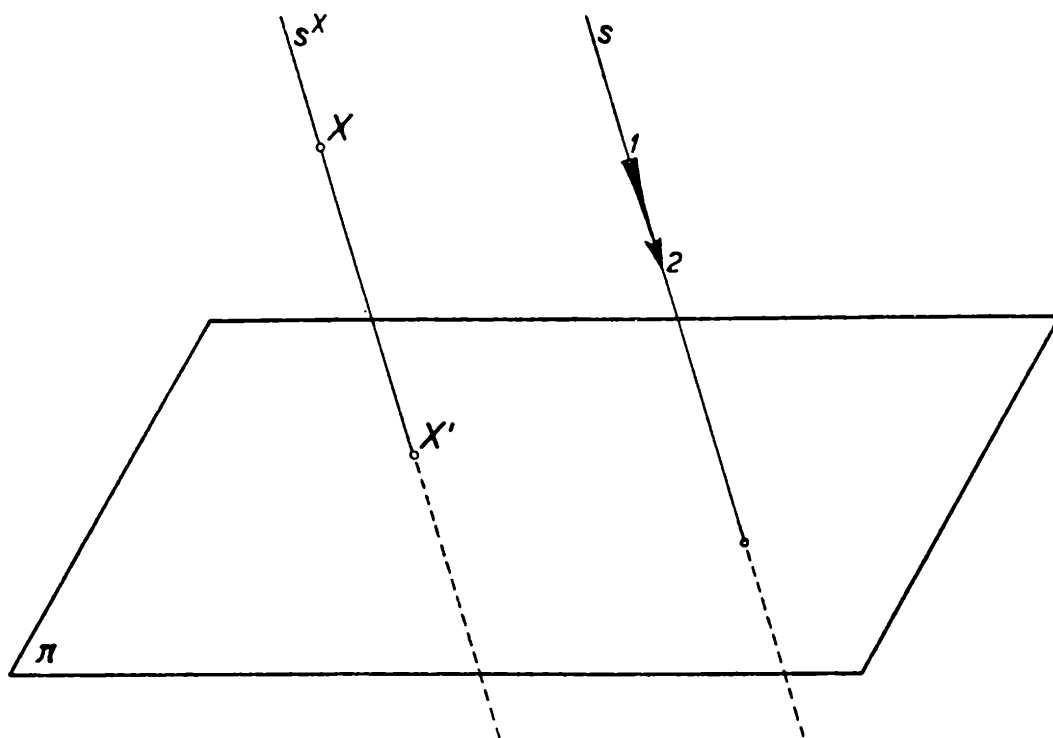
Deskriptivní geometrie



Josef Kateřina, VŠD, Žilina:

Rovnoběžné osvětlení

Zobrazujeme-li prostorový útvar U do roviny, např. pravouhlým promítáním, vyznačujeme při grafickém znázorňování tzv. viditelnost, aby narysovaný obraz útvaru U u nás vyvolal představu skutečného útvaru U .¹⁾



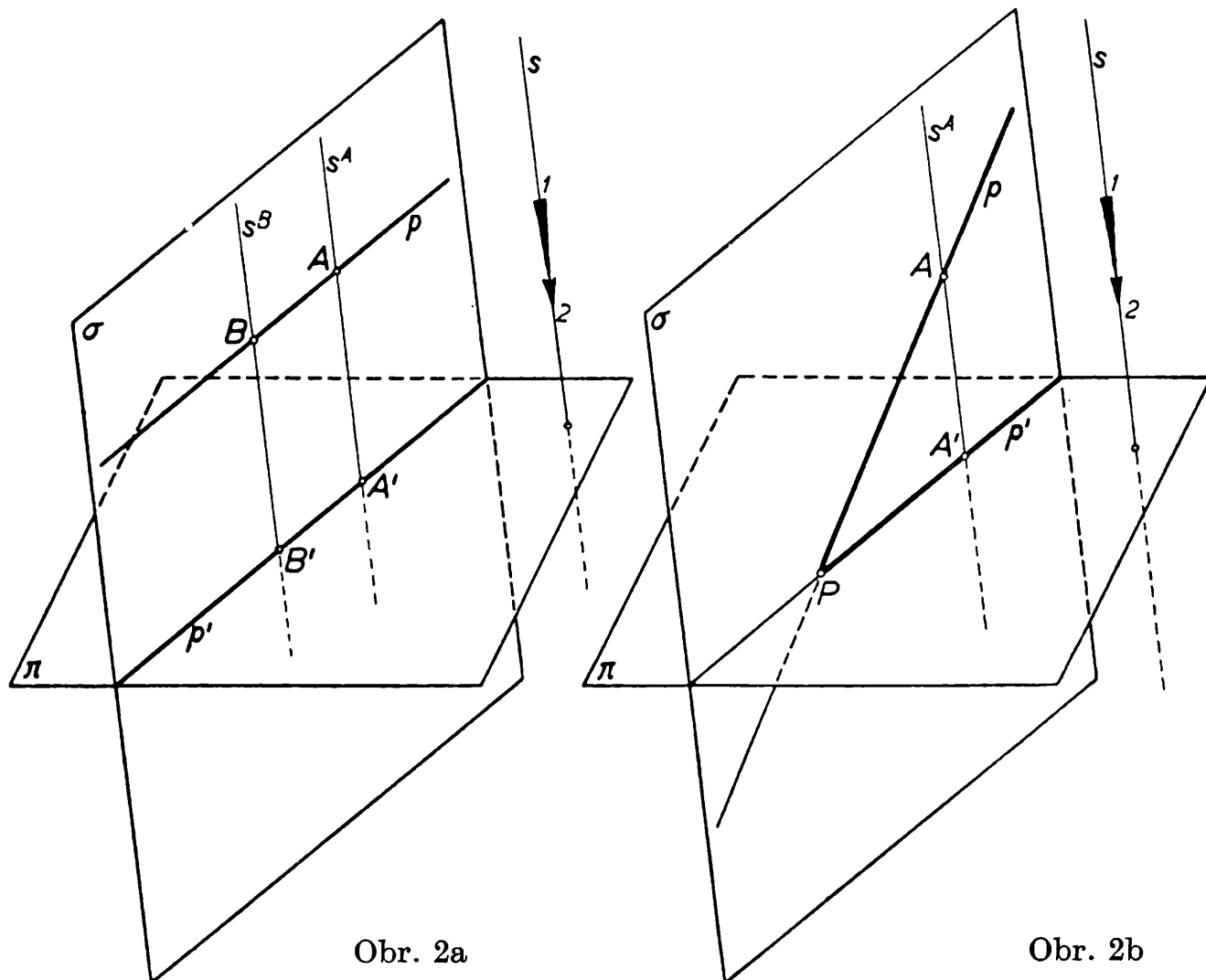
Obr. 1

Dalším prostředkem k docílení názornosti je rovnoběžné osvětlení, jehož praktické uplatnění je zejména v malířství a v architektuře.

¹⁾ Viz článek J. Kateřina, Vyznačování viditelnosti při rovnoběžném promítání, Rozhledy č. 5, str. 222, 1959.

Představme si rovinu π , na níž dopadají sluneční paprsky tak, že jsou s ní různoběžné. Poloprostor s hraniční rovinou π , ve kterém je zdroj světla - slunce, nazveme k l a d n ý a poloprostor k němu opačný nazveme záporný. Na obr. 1 je kladný poloprostor nad π a záporný pod π .

Sluneční paprsky tvoří směr osvětlení s , tj. množinu navzájem rovnoběžných přímek, který je určen jednou svou přímkou s , různoběžnou s π . Šipkou na této přímce s vyznačujeme polohu světelného zdroje slunce. Šipka totiž určuje na přímce s uspořádanou dvojici bodů 1, 2, z nichž první bod 1 je světelnému zdroji - slunci - blíže než druhý bod 2.



Obr. 2a

Obr. 2b

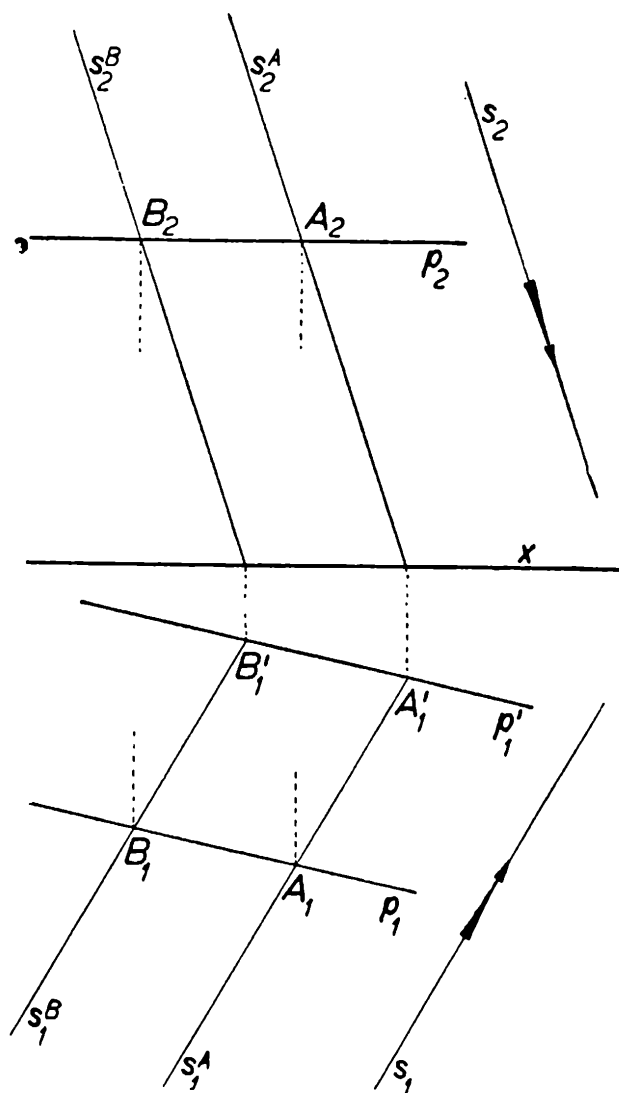
Každým bodem X kladného poloprostoru prochází jediná přímka s^X směru s nazýváme ji *světelná přímka* bodu X , jejichž průsečík X' s rovinou π nazýváme *vrženým stínem* bodu X na rovinu π . Body záporného poloprostoru nemají vržené stíny na rovinu π .

Uvažujme nyní přímku p . Vrženým stínem p' přímky p na rovinu π rozumíme množinu vržených stínů všech jejích bodů na rovinu π .

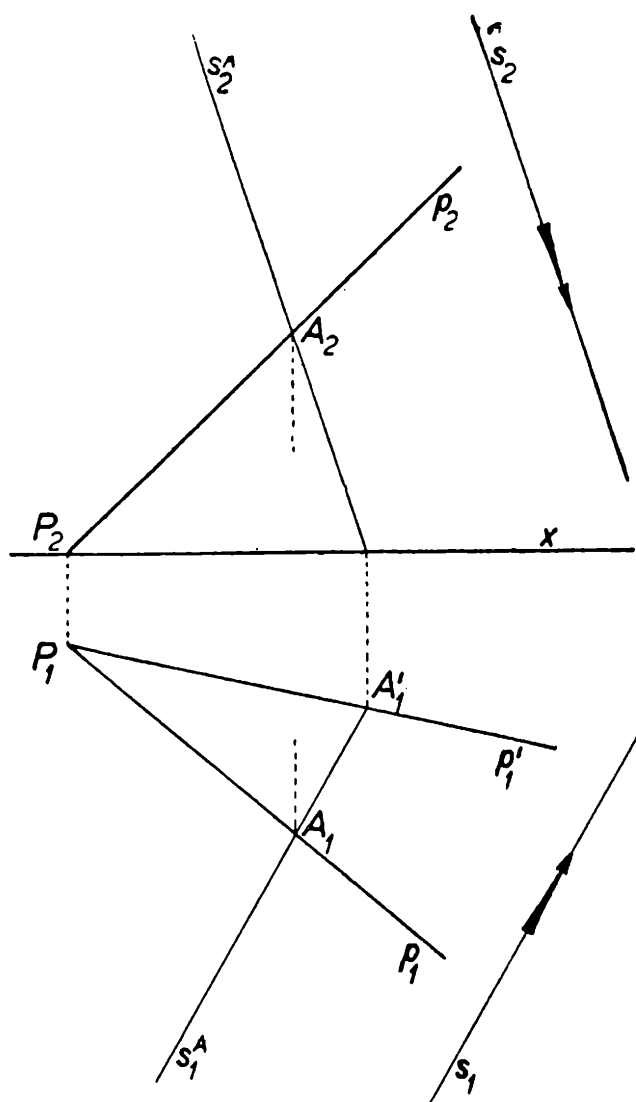
Je-li přímka p rovnoběžná se směrem osvětlení s , potom zřejmě jejím vrženým stínem na rovinu π je jediný bod - průsečík $p' \equiv p \cdot \pi$.

Jestliže není přímka p rovnoběžná se směrem osvětlení s , potom světelné přímky s^X jejich bodů X leží v jedné rovině σ , která prochází přímkou p a je rovnoběžná se směrem osvětlení s - nazýváme ji *světelná rovina* přímky p - takže vržené stíny X' těchto bodů X na rovinu π leží na průsečnici $\sigma \cdot \pi$. Musíme však rozlišovat dva případy:

a) přímka p je rovnoběžná s rovinou π a leží celá v kladném poloprostoru (obr. 2a).²⁾ Potom světelné přímky s^X jejich bodů X vy-



Obr. 3a



Obr. 3b

plňují celou rovinu σ , takže vrženým stínem přímky p na rovinu π je přímka $p' \equiv \sigma \cdot \pi$, kterou určíme vrženými stíny A' , B' dvou různých bodů A , B přímky p na rovinu π .

b) přímka p je různoběžná s rovinou π (obr. 2b). Potom body X přímky p , které leží v kladném poloprostoru, vyplňují polopřímku s počátkem $P \equiv p \cdot \pi$, takže vrženým stínem přímky p

²⁾ Jestliže je p rovnoběžná s rovinou π a leží celá v záporném poloprostoru, pak ovšem nemá vržený stín na rovinu π .

na rovinu π je polopřímka na průsečnici $\sigma . \pi$ s počátkem P , kterou určíme počátkem $P \equiv p . \pi$ a vrženým stínem A' jednoho bodu A přímky p ležícího v kladném poloprostoru.

Doporučuji čtenáři, aby si vše vymodeloval: rovinu π bílým listem papíru, přímku p kouskem drátu; místo slunečních paprsků lze použít i světla elektrické žárovky umístěné dosti daleko od papíru.

Praktický postup vysvětlíme na příkladě. Na obr. 3a je v pravouhlém promítání na dvě průmětny zobrazena přímka p rovnoběžná s rovinou π a ležící celá v kladném poloprostoru. Směr osvětlení s je určen přímkou s , na níž je šipkou vyznačena poloha světelného zdroje - slunce.

Zvolíme si na přímce p dva různé body A a B a určíme jejich vržené stíny A' a B' na rovinu π . Jsou to průsečíky světelných přímek s^A a s^B s rovinou π , tj. půdorysné stopníky těchto světelných přímek. Vrženým stínem přímky p na rovinu π je pak přímka $p' \equiv A'B'$, která je rovnoběžná s přímkou p .

Na obr. 3b je v pravouhlém promítání na dvě průmětny zobrazena přímka p různoběžná s rovinou π .

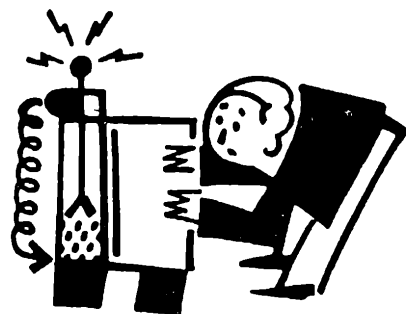
V tomto případě určíme nejdříve průsečík $P \equiv p . \pi$ a potom si zvolíme na přímce p v kladném poloprostoru bod A a určíme jeho vržený stín A' na rovinu π . Vrženým stínem přímky p na rovinu π je pak polopřímka $P'A'$.

(Pokračování)

Fyzika

Inž. Jiří Machalický, ČVUT, Praha:

O kapilárních jevech



Nalijeme-li například do skleněné nádoby vodu, vidíme, že hladina vody při stěně nádoby není vodorovná, nýbrž je zakřivená tak, jak je to schematicky znázorněno na obr. 1.

Ještě lépe je toto zakřivení patrné v tenkých skleněných trubicích ponořených do vody. Kromě zakřivení pozorujeme, že voda v kapiláře stojí výše než v nádobě. Tomu říkáme kapilární elevace (vzestup).

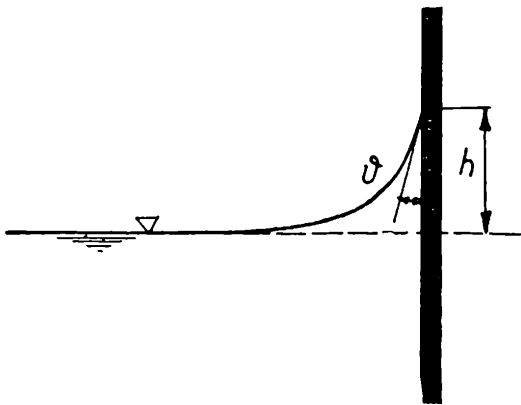
První pozorování tohoto jevu pocházejí od Leonarda da Vinci (1490).

U některých kapalin se hladina ustaví níže než hladina v nádobě (kapilární deprese) a má obrácený meniskus. Oba případy jsou schematicky znázorněny v obr. 2.

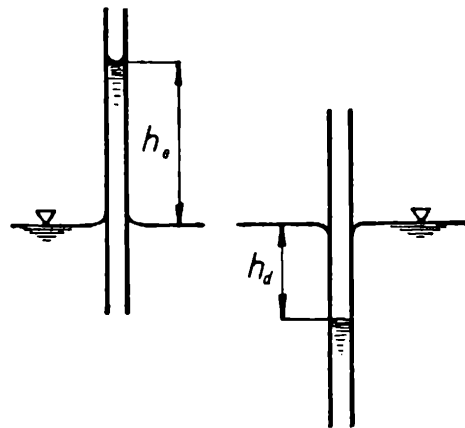
Promítneme-li meniskus na stěnu, poznáme, že má přibližně tvar kulového vrchlíku (poloměr R ; obr. 3). Tento poznatek nám dovolí odvodit jednoduchým způsobem vztah pro tzv. kapilární tlak, jehož působením nastává kapilární elevace.

Připomeneme ještě, že v hladině vody působí povrchové napětí σ , které svírá se stěnou kapiláry úhel ϑ (tzv. krajní úhel - pro vodu a skleněnou stěnu je $\vartheta \doteq 8^\circ$). Ve směru osy se uplatní svislá složka $\sigma \cos \vartheta$. Celkovou sílu F , působící elevaci kapalinového sloupce vypočítáme, znásobíme-li toto napětí obvodem kružnice o poloměru r

$$F = 2\pi r \sigma \cos \vartheta .$$



Obr. 1



Obr. 2

Dělíme-li tuto sílu průřezem πr^2 , dostaneme hledaný kapilární tlak

$$p_k = \frac{2\pi r \sigma \cos \vartheta}{\pi r^2} . \quad (1)$$

Samozřejmě je tento tlak rovný hydrostatickému tlaku $h\rho g$, způsobenému vahou sloupce výšky h kapaliny (jejíž hustota je ρ). Z této rovnice dostáváme vztah

$$h = \left(\frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g} \right) \frac{1}{r} . \quad (2)$$

Je tedy elevace h tím větší, čím menší je poloměr kapiláry.

Z obr. 3 vyplývá, že $\cos \vartheta = \frac{r}{R}$. Dosadíme-li odtud do rov. (1), dostaneme pro kapilární tlak vztah

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} \quad (3)$$

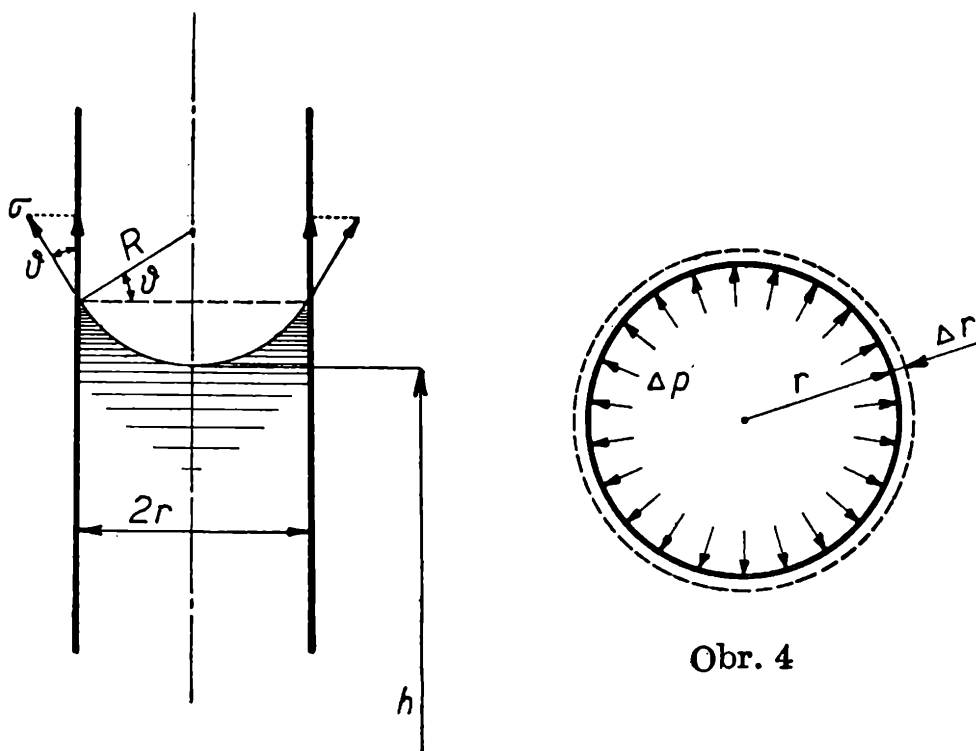
Jak patrně, je v tomto jednoduchém případě kapilární tlak úměrný povrchovému napětí σ^1) a nepřímo závisí na poloměru křivosti R vrchlíku.

Tento vztah můžeme snadno zobecnit. Svůj jednoduchý výpočet založíme na známých pokusech s mydlinkovými bublinami. K vyfouknutí takové bubliny poloměru r je třeba, aby uvnitř bubliny byl tlak o Δp větší, než je tlak p okolního vzduchu. Povrch obou stran blány je $S = 8\pi r^2$. Zvětší-li se poloměr bubliny na $r + \Delta r$ (obr. 4), zvětší se tento povrch o

$$\Delta S = S_{r+\Delta r} - S_r = 8\pi (r + \Delta r)^2 - 8\pi r^2 \doteq 16\pi r \Delta r$$

V bláně se tedy při zvětšení poloměru bubliny o Δr akumuluje energie

$$\Delta E = \sigma \cdot 16\pi r \Delta r. \quad (4)$$



Obr. 3

Tato energie je stejně velká jako práce

$$\Delta A = F \Delta r = S \Delta p \Delta r = 4\pi r^2 \Delta p \Delta r \quad (5)$$

Srovnáním vztahů (4) a (5) dostáváme pro přetlak vzduchu v bublině vztah

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r},$$

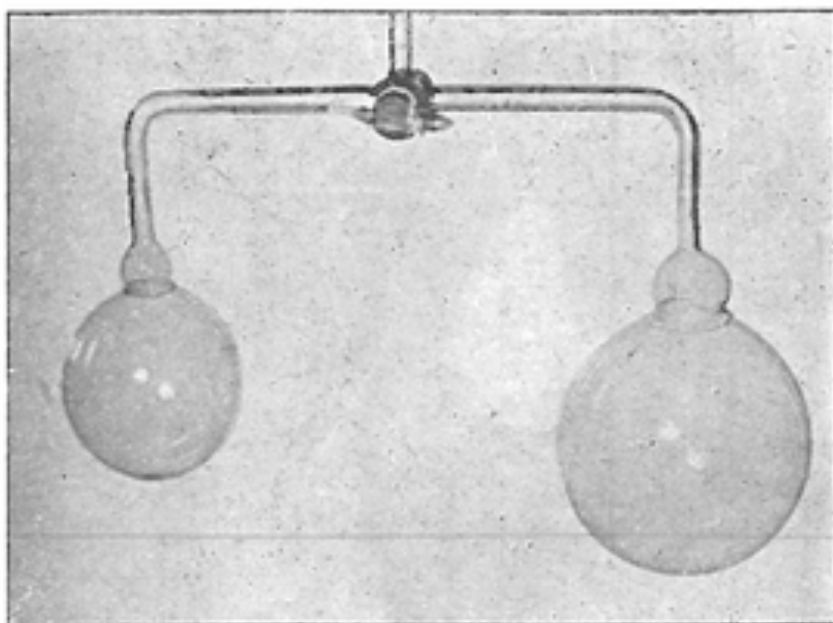
¹⁾ Povrchové napětí je číselně rovno plošné hustotě energie, má tedy např. v soustavě MKS rozměr $[\sigma] = \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, resp. $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$. Zvětší-li se tedy účinkem vnějších sil povrch kapaliny o ΔS , spotřebuje se na to energie $\sigma \Delta S$.

který můžeme psát také ve tvaru

$$\Delta p = 2\sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = p_k . \quad (6)$$

Přetlak Δp vzduchu uvnitř bubliny je co do velikosti stejný s kapilárním tlakem p_k , který má však opačný směr (míří vždy na tu stranu plochy, s níž se jeví povrch dutý).

Nepřímou závislost kapilárního tlaku na poloměru křivosti si můžeme demonstrovat jednoduchým pokusem. Vytvořme na rozšířených koncích trubice v obr. 5 mýdlové bubliny. Účinkem kapilárního tlaku by bublina zmenšovala svoji velikost. Nemá-li se zmenšovat, musí mít vzduch uvnitř jistý přetlak. Spojíme-li vnitřní prostory obou bublin, vyrovnají se tlaky. Při tom menší z bublinek se dále zmenšuje (až úplně zmizí), zatím co větší se zvětšuje; je tedy kapilární tlak větší v bláně menší bubliny.



Obr. 5

Pro kapilární tlak v libovolném bodě B obecně zakřivené blány (obr. 6) odvodil Pierre Simon Laplace (francouzský matematik a astronom 1749—1827) vztah

$$p_k = 2\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \quad (7)$$

v němž R_1 , R_2 jsou poloměry křivosti dvou libovolných k sobě kolmých řezů k_1 , k_2 blány s rovinami proloženými normálou. Výraz $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ se nazývá křivost v geometrii se dokazuje, že tento výraz má v každém bodu B pro libovolnou dvojici k sobě kolmých normálových řezů stálou hodnotu.

Najdeme-li takový řez, v němž má poloměr křivosti největší velikost, pak v řezu k němu kolmém musí poloměr křivosti být nejmenší.

Kdybychom vytvořili blánu mající tvar části válcové plochy, pak bude mít kapilární tlak ve všech bodech této plochy stejnou hodnotu

$$p_k = 2\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{2\sigma}{R}, \quad (8)$$

kde R je poloměr křivosti válcové plochy.

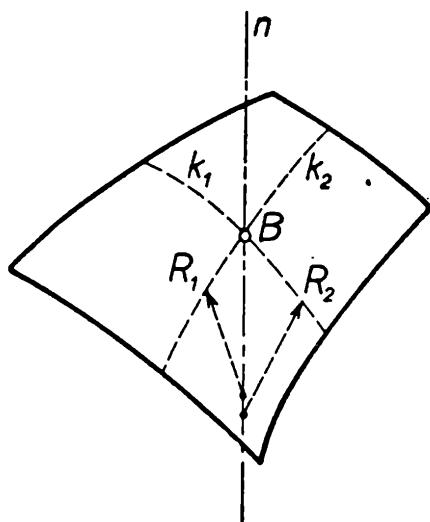
Zajímavé jsou plochy, které mají v každém svém bodu křivost

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \quad (9)$$

To znamená, že řez s maximálním a minimálním poloměrem křivosti leží na opačných stranách této plochy. Plocha může být buď *rovinná* ($R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty$), nebo má *sedlovitý tvar* (obr. 7). Říkáme jim *minimální plochy*, protože plošný obsah takové plochy omezené ně-



Obr. 7



Obr. 6



Obr. 8

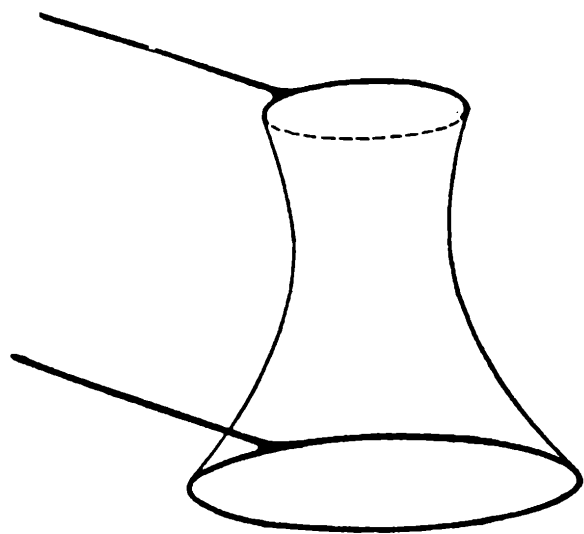
jakou uzavřenou křivkou je nejmenší ze všech nekonečně blízkých ploch.

Minimální plochy lze velmi pěkně demonstrovat na drátěných modelech s mydlinovou blánou.

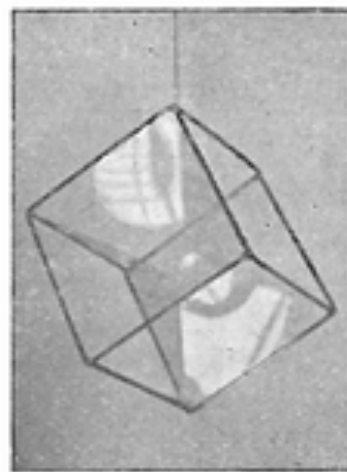
Nejjednodušší takovou plochou je, jak jsme již řekli, rovina. Nejlépe to lze ukázat na tzv. Maxwellově rámečku s lehce pohyblivou příčkou (obr. 8). Na tomto jednoduchém zařízení lze také provést přibližné měření povrchového napětí.

Jiná jednoduchá minimální plocha je tzv. *katenoid*. Vytvoříme ji tak, že do mydlinové vody ponoříme dva nestejně drátěné kroužky - držíme-li při vytahování oba kroužky v rovnoběžných rovinách, a spojíme-li (např. protržením blány v jednom kroužku) vnitřní prostor blány s okolím, bude $\Delta p = 0$. Podmínice (9) vyhovuje v tomto případě rotační plocha vytvořená řetězovkou - *katenu* (obr. 9).

Na složitějších drátěných modelech (např. čtyřstěn, krychle...) smočených v mýdlové vodě se vytvoří plochy, jichž povrch je za daných poměrů nejmenší. Blány se stýkají v hranách, takže k jedné hraně se vždy připojují tři blány a do jednoho rohu se sbíhají čtyři hrany. Úhly,



Obr. 9



Obr. 10

které svírají hrany v jednom rohu, jsou rovněž stejné. Na obr. 10 je snímek minimální plochy na pravoúhlém osmistěnu.

LITERATURA

- [1] *Grimsehl*, Lehrbuch der Physik. Band I, Leipzig 1954.
- [2] Handbuch der Experimentalphysik VI.
- [3] *Novák Vladimír*, Fysika. Díl I, Praha 1929.

Inž. Dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Co je měřicí a měrová technika?

Měření tvoří základ technického rozvoje všech oborů, avšak zasahuje mnohem širěji i do běžného života kolem nás. Bez měření není vůbec možno si představit předvoj techniky technický výzkum, ani vlastní výrobu při sledování nejrůznějších technologických procesů. S měřením se setkáme v dopravě, ve zdravotnictví, v obchodě, prakticky téměř všude. Měřením určujeme kvantitativní charakter nejrůznějších veličin. Při tom podle známé definice rozumíme měřením stanovení velikosti příslušné veličiny v nějakých zvolených jednotkách. Podle této definice zdánlivě nezáleží na tom, jaké jednotky zvolíme. Volba je teoreticky libovolná, předpokladem ovšem je, aby zvolené jednotky byly jedno-

značně definovány (buď prototypem nebo experimentálním předpisem) a byly neproměnné.

Měření provádíme měřidly nebo měřicími přístroji, obecně nějakými měřicími zařízeními, jejichž údaje čteme zpravidla na stupnicích, vynesných ve zvolených jednotkách. Přitom volíme pro měření vhodný postup měřicí metodu. Vše co se týká měřících zařízení (jejich výzkumu, konstrukce, vlastností apod.) a měřících metod, patří do oboru *měřicí techniky*.

Nyní si vysvětlíme pojem druhý, *měrové techniky* a jeho náplně. Již jsme si řekli, že jednotky měřených veličin bychom si mohli zvolit libovolně. Tak tomu skutečně bylo v minulých dobách, kdy pak pro nějakou veličinu existovalo velké množství různých jednotek, jejichž definice byly namnoze dosti nepřesné. Je samozřejmé, že velký počet jednotek vnášel zmatek do posuzování výsledků měření, nebylo-li těchto výsledků používáno pouze lokálně, tj. v místě, kde příslušná jednotka byla zavedena. I když byly stanovovány různé převodní vztahy mezi různými jednotkami téže veličiny, nebyl zmatek zásadně odstraněn. Tak např. hodnota nějaké délky (např. látky; ve starých dobách se měření omezovalo na otázky směny, obchodu: na vážení a určování délek, ploch a objemů), stanovená v jednom městě (podle místních jednotek), převáděla se na hodnotu v jednotkách platných v jiném městě (kraji, oblasti nebo státě) jen s obtížemi a velmi nepřesně. Přestože jednotky dříve nejčastěji užívaných veličin (hmoty, délky, plochy a objemu) byly obvykle zpodobňovány prototypy, tj. etalonovým měřicím zařízením pro něž se používalo (a dodnes v širším slova smyslu používá) názvu míry, můžeme říci, že panoval měrový nepořádek, způsobený měrovou nejednotností. Aby bylo měrové dorozumění zjednodušeno a zpřesněno, což diktoval rozvoj obchodu a průmyslu, docházelo k postupnému nahrazování lokálně platných jednotek jednotkami stanovenými různými nařízeními pro větší územní celky. To nakonec vedlo v novější době ke snaze zavést jednotky platné pro celý svět (např. zavedení metru, tzv. metrickou konvencí koncem minulého století). Stanovování jednotek různých veličin, jejich co nejpřesnější a nejjednoznačnější definování, jejich realizace, to vše patří do oboru *měrové techniky*. Úkoly měrové techniky jsou ovšem ještě širší. Patří sem jednak navazování všech měřících zařízení na základní etalony prototypy nebo etalonová zařízení, a to u všech fyzikálních a technických veličin, jejichž výčet je dnes velmi rozsáhlý (kromě klasických oborů, např. síla, hustota, tvrdost, tlak, teplota, vlhkost, nejrůznější elektrické, magnetické, akustické a optické veličiny apod.), jednak dohled nad správností měřících zařízení a nad dodržováním měrových předpisů, jež nejen stanoví, jakých jednotek se má používat, ale také jaká měřicí zařízení jsou vhodná a jakým způsobem se má kontrolovat jejich správnost. Měrová technika, velmi důležitý základ správné a jed-

notné měřicí techniky, je dnes intenzívně rozvíjena i v ČSSR podle zásad vládního usnesení č. 833 z r. 1960. Měrové úkoly zajišťuje a dále rozvíjí v ČSSR Úřad pro normalizaci, do jehož pracovní náplně patří obor měrové techniky (v otázkách zásadního charakteru). Měrová technika je ovšem i náplní měrových středisek, zřízených a v budoucnu doplňovaných na všech význačnějších pracovištích našeho socialistického průmyslu a vědy.

P ř e m y s l S c h ü r e r , Praha:

Porézní látky ve vakuové technice

(Dokončení)

6. Využití molekulových sít

Rozsáhlé možnosti uplatnění a využití molekulových sít v našem průmyslu i výzkumných laboratořích je dáno jednak jejich sorpčními vlastnostmi, jimiž značně převyšují dosavadní obvyklé sorbenty, např. aktivní uhlí a silikagel a dále řadou nových vlastností, hlavně vysokou sorpční selektivitou. Výroba - výhradně z domácích surovin je poměrně levná a jejich využití hospodárné. Po nasycení se totiž síto odplyní, obvykle při teplotě 350 až 450° C buď v proudu suchého vzduchu, či jiného plynu, nebo ve vakuu a znovu se zapojí do sorpčního procesu. Tak bylo naměřeno přes 5000 cyklů, než síto ztratilo asi 30 % své sorpční kapacity. Po 30 000 cyklech je nutno síto vyměnit.

Na tomto místě si všimneme pouze tří směrů využití molekulových sít, a to pro sorpci permanentních plynů a dělení směsí, pro pohlcování uhlovodíků a jako vysušovacího prostředku (desiccans).

A. S o r p c e p l y n ů a d ě l e n í s m ě s í. Při dostatečně nízkých teplotách jsou síty pohlčovány ve velkých objemech permanentní plyny. Některé z poznatků, získaných v tomto směru, jsou zvláště zajímavé. Porézní krystaly mohou působit jako selektivní sorbenty v těchto třech možnostech:

a) Jako výsledek rozdílné slučivosti pro různé plyny a páry bez typické činnosti molekulového síta.

b) Jako výsledek částečné činnosti molekulového síta, kdy sice všechny molekuly směsí pronikají do krystalů, ale vzhledem k rozdílné velikosti a tvaru molekul nastanou rozdíly v rychlostech sorpce. Při zajištění vhodné doby kontaktu mezi sorbentem a směsí lze pak těchto rozdílů použít pro separaci.

c) Celkovým využitím činnosti molekulového síta, kdy molekuly určitého plynu jsou sorbovány, zatím co ostatní vlivem svého nepatřičného

tvaru a velikosti jsou zcela zbaveny možnosti průniku vstupními okénky krystalu.

Tato třetí funkce se uplatňuje hlavně v procesech s uhlovodíky, jelikož kritické rozměry molekul, rozhodující v otázce způsobilosti průniku vstupními okénky, jsou u permanentních plynů menší než volné průměry okének molekulových sít, je třeba využít pro separaci první a druhé z uvedených třech možností. Kritické průměry v angströmech pro vzácné plyny jsou

He - 2,0	Kr - 3,9
Ne - 3,2	Xe - 4,3
A - 3,8	

V případě dvouatomových molekul je kritickým rozměrem průměr kružnice, opsané molekule kolmo k její délce. Délka molekuly je uvedena v závorce

H ₂ - 2,4 (3,1)
O ₂ - 2,8 (3,9)
N ₂ - 3,0 (4,1)

Jelikož jsou molekuly do jisté míry pružné, je třeba pojímat tyto rozměry spíše jako poměrné než absolutní. Uvedené kritické rozměry se mezi sebou liší natolik, aby se mohla projevit během sorpce dovnitř krystalu rozdílná rychlost průniku při protlačování molekul vstupními okénky, která jsou stejně velká, nebo jen o málo větší, než molekuly samotné. Tímto způsobem bylo dosaženo požadovaného oddělení jednotlivých plynů ze směsi, která proudila určitou rychlostí sloupcem molekulového síta.

V některých případech bylo úspěšně použito pro separaci takového postupu, kdy molekulové síto bylo po odplynění modifikováno přidáním velmi malého množství vody. Tehdy dochází vlivem krystalové vody ještě k většímu zpomalení sorpce pomalu difundujících molekul oproti rychlejším. Dvojice směsí, oddělené při tomto způsobu použití molekulového síta jsou A - N₂, A - O₂, N₂ - H₂, A - Ne, A - H₂, přičemž jedna složka - pomalu difundující molekuly - zůstane v plynné fázi, druhá se sorbuje v sítu. Plynná fáze obsahuje 100 % první složky, v sorbované části, složené převážně z rychleji difundujících částic, se však naleznou i stopy první složky. Toto množství je velmi malé v důsledku zmíněné modifikace vodou.

Důležitou aplikaci při oddělování vodíku, kyslíku, dusíku, metanu a kysličníku uhelnatého našla molekulová síta v plynové chromatografii, kde mimo jiné pomohla vyřešit otázku spotřeby kyslíku a produkce svítíplynu během exydace uhlovodíků, pro automatické aparáty ke kontrole složení ovzduší, nebo pro automatickou analýzu stopových látek.

Mohutnou sorpční účinnost molekulových sít posoudíme nejlépe ze skutečnosti, že jeden krychlový centimetr pojme zhruba 10^{22} molekul sorbované látky. Víme, že grammolekula - množství látky, jejíž hmota udaná v gramech se číselně rovná molekulové hmotě látky - obsahuje vždy též počet molekul, a to $N = 6,023 \cdot 10^{23}$, což je Avogadrovo číslo. Tak např. 1 cm³ vody, tedy 1 g (grammolekula H₂O $2 + 16 = 18$) obsahuje $\frac{6,02}{18} \cdot 10^{23} = 3,34 \cdot 10^{22}$ molekul. Vidíme tedy, že molekuly, sorbované molekulovým sítem, jsou natěsnány v jeho objemu v hustotě, jaká odpovídá kapalinám.

Pro účely vakuové techniky nás zajímají objemy plynů, které je schopno molekulové síto pojmout. Musíme tedy zjistit, jaký objem za normálních podmínek, tj. při teplotě 0° C a tlaku 760 tor zaujme množství 10^{22} molekul, které jsou sorbovány jedním krychlovým centimetrem molekulového síta. Podle Avogadrova zákona zaujímají grammolekuly různých plynů stejné objemy při stejném tlaku a teplotě. Za normálních podmínek je tento objem roven 22,41 litru. Na jeden litr připadá tedy $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4} = 2,7 \cdot 10^{22}$ molekul, tedy objem téměř jednoho litru plynu je pohlčen jediným centimetrem sorbentu! Bližší údaje sorpční mohutnosti molekulových sít jsou uvedeny v následující tabulce:

Sorpce molekulovým sítem.

A	B	C	D
H ₂ O	53	1,67	32
N ₂	54	0,88	16
O ₂	46	0,97	18
Argon	47	0,98	18

Sloupec A: druh sorbovaných molekul,

B: procenta sorpčního objemu z celkového objemu krystalu,

C: počet molekul, pohlčených krychlovým centimetrem krystalu v jednotkách 10^{22} ,

D: počet molekul, pohlčených jednou dutinou.

B. P o h l c o v á n í u h l o v o d í k ů. Dělení uhlovodíků je jednou z velmi důležitých funkcí, které mohou molekulová síta úspěšně zastat. Tak se dají výběrem vhodných sít oddělit iso-parafiny od normálních, monocyklické aromatické uhlovodíky a nafteny od dvoj- a troj- cyklických apod., podle širě rozvětveného řetězce.

Pro techniku vysokého a ultravysokého vakua (ultravysokým vakuem

nazýváme zhruba takové vakuum, kde je tlak 10^{-9} tor a nižší) je podstatné pohlcování uhlovodíků všeobecně pomocí molekulového síta 13X, případně 10X s největšími póry, kdy tyto sorbenty pohltnou molekuly zpětného proudu z olejových vývěv až do velmi nízkých tlaků. Víme totiž, že při odčerpání aparatury do mezního tlaku, tj. do nejnižšího tlaku, jaký lze na uvedenou aparaturu s danou vývěvou dosáhnout, proudí molekuly v plynu v obou směrech stejně, tedy počet molekul, které projdou průřezem potrubí ve směru od pracovního prostoru k vývěvám je stejný jako počet molekul, procházejících od vývěv do pracovního prostoru. Na prvním místě nás zajímá proud molekul ve směru do pracovního prostoru. Sestává jednak z molekul čerpaného plynu, které se vrací po zpětných odrazech, nebo difuzi z čerpaného prostoru a jednak z molekul, uvolněných čerpacími látkami - z olejů difúzní a rotační vývěvy. K zadržení tohoto zpětného proudu toku do ultravysokovakuového systému se dosud používaly pouze vymrazovačky chlazené kapalným dusíkem, případně vymrazovačky s vloženou vlnitou fólií z mědi nebo niklu. Jejich účinnost je třeba udržovat stálým doplňováním odpařující se chladicí látky, měď nebo nikl musíme čas od času zregenerovat vyžhavením. Užití molekulových sít je i zde mnohem pohodlnější a dosažené výsledky jsou lepší.

Při syntézách vzniká síto ve formě mikrokystalického prášku, který pro řadu aplikací není vhodný, např. kvůli vylétávání prášku z lože. Proto se prášek smísí s vhodnou plastifikační a granulační přísadou a molekulová síta se pak vyrábějí ve formě granulí. Tyto se umístí do potrubí tak, aby sice nebyl zvyšován vakuový odpor, ale současně aby se molekuly zpětného proudu setkaly s povrchem molekulového síta. Takto upravená nádoba s molekulovým sítem se nalézá na aparatuře v té části, na kterou se pro odplynění vkládá pec. Molekulové síto bez poškození vydrží odplynovací teplotu, obvyklou pro vysokovakuové a ultravysokovakuové systémy, tj. 450 až 500° C. Byly provedeny zkoušky, které ukázaly, že se v ultravysokovakuovém systému, odplyněním a odčerpáním olejovými vývěvami a ionizačním manometrem, udržel tlak 10^{-10} tor pod dobu desítek dní, když byla ultravysokovakuová část aparatury oddělena od olejové difúzní vývěvy pouze nádobkou s molekulovým sítem. Ukazuje se dále, že lapače s molekulovými síty, hlinitokřemičitany, nebo s aktivovaným hliníkem, jsou nejen pohodlnější pro provoz proti obvyklým vymrazovačkám s kapalným dusíkem, ale též vzhledem k intenzivnímu pohlcování uhlovodíků značně zmenšují únavu kyslíčkových katod. Byl proveden pokus, při kterém za stejných počátečních podmínek tlaku asi 10^{-7} tor byly na zkušební diodě měřeny změny emisního proudu s časem, a to jednak při vymrazování kapalným dusíkem, jednak pouze s aktivovaným hliníkem vloženým do potrubí mezi olejovou difúzní vývěvou a pracovní prostor. V prvním případě poklesl proud během 20 hodin z 8 na 2 mA, při druhém

pokusu bez jakéhokoli vymrazování stoupl za stejnou dobu ze 7 na 11 mA a za 40 hodin na dvojnásobek své původní hodnoty.

Dobré výsledky s použitím molekulových sít jako mohutných sorbentů zpětného proudu uhlovodíků z olejových vývív mají již i některá naše pracoviště, kde se zavádí tento nový druh lapačů na místo dosavadních vymrazovaček.

C. V y s u š o v a c í p r o s t ř e d e k. Proces sorpce vody je silně exotermní¹⁾ v různých vysušovacích látkách a molekulová síta netvoří v tomto ohledu žádnou výjimku. Při sorpci vody můžeme tedy pozorovat značný vzestup teploty. Takové zahřátí u méně účinných sorbentů může značně oslabit jejich kapacitu, stoupne-li teplota vlivem exotermního sorpčního procesu až k bodu, kde již dochází k podstatné desorpci. Při podobných okolnostech je třeba vysušovací látku chladit.

Avšak zeolity vzhledem ke své vysoké jímavosti molekul vody mohou podstoupit podstatné zahřátí bez znatelného úbytku sorpční kapacity nebo účinnosti. V důsledku toho lze vysoušet plyn i při vyšších teplotách, a to i nad 100° C, což je v mnoha případech zvláště výhodné. Mimo to lze plyn důkladně zbavit stop vodní páry, i při poměrně velké rychlosti proudění. Musíme ovšem vybrat takové síto, které nebude čerpat vlastní plyn, aby tak nedošlo ke změnám v jeho složení. Může být však vybráno tak, aby kromě vody odstranilo i jiné nežádoucí příměsi.

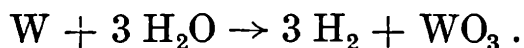
Důležité pole působnosti molekulového síta jako vysušovadla se vyskytuje např. v mrazírenském průmyslu. Ačkoliv třeba freon, převážně používaný jako pracovní náplň v chladničkách, se nemísí s vodou, může obsahovat malé množství vlhkosti. Tato vlhkost při zamrznutí způsobuje poruchy ventilů nebo korozi. Obsah vody nemá být vyšší než 10 až 15 p. p. m. (= parts per million, tj. miliontiny), což se dá zajistit užitím zeolitů. Také stopy kyselin lze odstranit z chladicí látky pomocí molekulových sít.

O účinnosti vysoušení molekulovými síty se můžeme přesvědčit z uchování čistého povrchu roztaveného sodíku nebo vizmutu. Kapalných alkalických kovů se používá v nukleárních reaktorech jako chladicího media. Jejich lesklý povrch je náchylný k zamžení při styku i jen nepatrných stop vlhkosti. Byly činěny srovnávací pokusy s argonem jednak vysušeným doposud obvyklými způsoby, jednak vysušeným pomocí molekulového síta. Zatím co v prvním případě došlo zanedlouho k zamžení, při použití molekulového síta nebylo pozorovat žádné zakalení lesklého povrchu ani po kolika hodinách, kdy argon proudil nad hladinou kovu.

Neméně důležitá je rovněž otázka odstranění vodních par z vakuového

¹⁾ Proces, při kterém se energie vybavuje a přechází z reagující soustavy na okolí, nazýváme e x o t e r m n í. Tehdy dochází k zahřívání reagující látky i okolí. Proces, při němž se energie pohlcuje, při kterém tedy dochází k ochlazení, nazýváme se e n d o t e r m n í.

systému, zvláště za přítomnosti žhavého wolframu, což je případ, který se vyskytuje velmi často ve vakuové technice. Žhavý wolfram reaguje s vodou, při čemž se vytváří vodík a kysličník wolframový:



Kysličník kondenzuje na chladných stěnách baňky, kde je vodíkem redukován na wolfram a vzniklá vodní pára se vrací do reakce se žhavým vláknem. Při tomto koloběhu stěny baňky černají, vlákna rychle ubývá a brzy se přepálí.

Kromě sušení žárovkárenského dusíku a plynů, používaných k plnění výbojek, naleznou molekulová síta uplatnění při sušení svářečského argonu, vodíku pro výrobu wolframu, molybdenu a v neposlední míře při výrobě polovodičů. Účinné vysušování lze provádět za normálních i zvýšených teplot. Současně i zmíněné pohlcování uhlovodíků molekulovými síty najde důležitou aplikaci při výrobě wolframu a jeho užití v provozu, protože se zabrání nežádoucímu vzniku karbidů wolframu.

7. Závěr

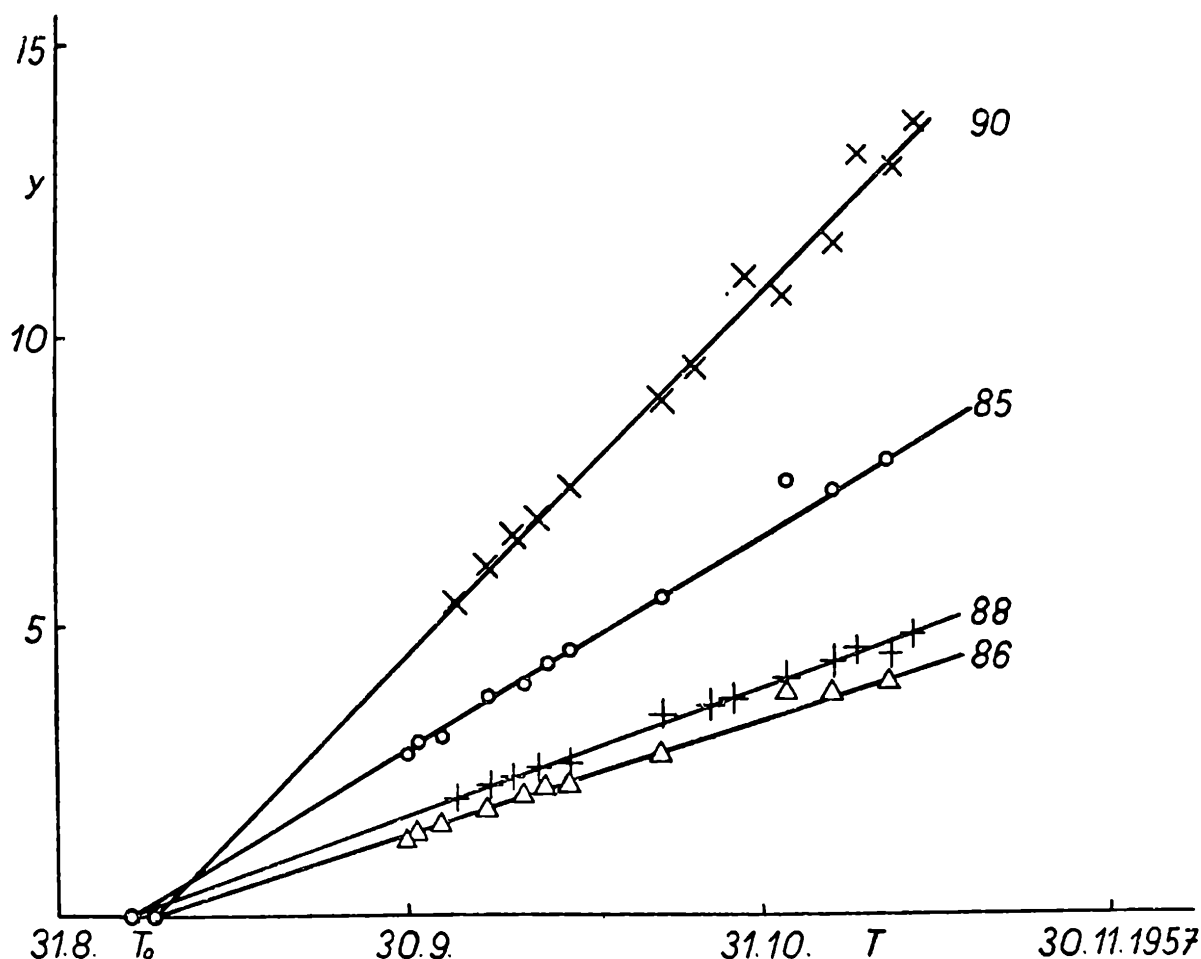
Vidíme tedy velké výhody molekulových sít proti ostatním sorbentům. Jsou velkým přínosem v mnoha odvětvích naší výroby stejně jako ve vědecko-výzkumné práci našich laboratorí. Molekulových sít se již běžně používá k plnění různých úkolů v řadě pracovních postupů. Nelze však říci, že se jedná o uzavřený, vyřešený problém. Zůstává stále nezodpověděno mnoho otázek kolem těchto skvělých sorbentů. Nejsou dosud známy všechny možnosti jejich využití, není proměřena sorpční kapacita pro některé látky. Také se vyvíjí snaha o získání nových druhů molekulových sít s dalšími velikostmi vstupních okének apod., které by ještě výhodněji plnily požadované úkoly.

Je tedy otevřen další obzor pro výzkum molekulových sít na poli fyziky, fyzikální chemie a chemie vůbec, který je nejen po všech stránkách důležitý, ale i neobyčejně zajímavý.

Určování data pokusného nukleárního výbuchu geometrickou konstrukcí

(Dokončení)

Vzorky spadu z prvního saharského výbuchu byly poměrně silné a zbytková radioaktivita od dřívějších nukleárních zkoušek byla nepatrná. Za jeden den napadala tenkrát do sběrné nádoby jen asi jedna tisícina z hodnoty $2,5 \times 10^{-8}$ curie, kterou jsme získali ve vzorku z 1. 3. 1960. Zbytková aktivita byla tudíž zanedbatelně malá. Je to pochopitelné,



Obr. 1. Přibližné určení data nukleární zkoušky, provedené v září 1957 v Nevadě. Použité vzorky nukleárního spadu, které jsme u nás nasbírali, jsou označeny čísla 85, 86, 88, 90. Na ose x jsou data měření aktivit, na ose y převrátané hodnoty jednotlivých aktivit. V průsečíku tak vzniklých přímk s datovou osou je přibližné datum nukleární zkoušky: okolo 7. září 1957. Podle zpráv denního tisku byly v té době prováděny pokusné výbuchy v Nevadě.

neboť po dobu celých 15 měsíců předtím nukleární zkoušky nebyly prováděny. Ovzduší bylo tedy poměrně čisté, takže na velmi slabém „pozadí“ zbytkové radioaktivity se objevila poměrně silná aktivita čerstvého radioaktivního mraku, tj. čerstvých štěpných produktů. Důkazem toho jsou obr. 1 až 5, na nichž je grafické znázornění časového poklesu radioaktivity beta získaných vzorků. U nich jsme předem věděli, kdy vznikly, neboť data saharských výbuchů byla oznámena. Bylo možno tudíž přezkoušet, zdali se pro časový pokles aktivity nukleárního spadu osvědčuje vzorec

$$A = kt^{-n}, \quad (1)$$

kde A je aktivita beta, k konstanta (vlastně aktivita vzorku pro $t = 1$) a t čas počítaný od data výbuchu. Mocnitel n mívá hodnoty od 1,0 do 1,7, nejčastěji 1,2.

Případ, kdy bylo $n = 1$, se vyskytl koncem září 1957, kdy během několika dnů bylo získáno 6 vzorků nukleárního spadu pocházejícího z Nevady, pravděpodobně z nukleárních zkoušek okolo 7. září. Na obr. 1 bylo k určení data výbuchu použito čtyř vzorků, č. 85, 86, 88 a 80. Rovnice (1) můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{k} t, \quad (2)$$

z něhož je patrné, že pro velmi velké A , tj. pro velkou aktivitu v okamžiku výbuchu, je levá strany rovnice prakticky nulová. Proto také byly na obr. 1 na osu y nanášeny převratné hodnoty aktivit. Datum výbuchu musí být tam, kde vzniklé přímky protínají datovou osu. Z rovnice (2) vznikne totiž rovnice přímky, dosadíme-li $y = 1/A$ a $t = T - T_0$, kde T je datum měření, a T_0 datum nukleárních zkoušky. Je tudíž

$$y = \frac{1}{k} (T - T_0), \quad (3)$$

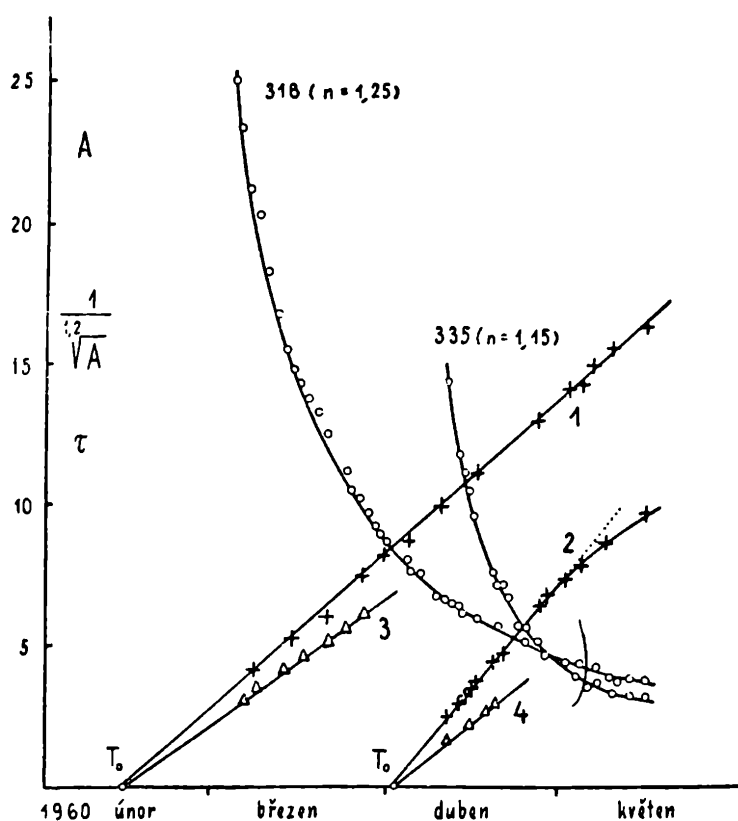
což je rovnice přímky, která časovou osu protíná v bodě T_0 , neboť pro $T = T_0$ je $y = 0$.

Je-li mocnitel $n = 1,2$, je třeba na osu y nanášet hodnoty $1 \sqrt[1,2]{A}$ a opět dostaneme přímku (3). To je provedeno na obr. 2, kde na rozdíl od obr. 1 jsou nakresleny také křivky časového poklesu aktivit vzorků č. 318 a č. 335. Pro vzorek č. 318, připravený z dešťové vody dne 1. 3. 1960 a kontaminovaný spadem z prvního francouzského výbuchu na Sahaře, je vhodné $n = 1,25$. Pro vzorek č. 335 získaný z dešťové vody dne 9. 4. 1960 je vhodné $n = 1,15$. Pro oba vzorky tedy je přibližně $n = 1,2$.

Na osu y byly tudíž nanášeny hodnoty $1 \sqrt[1,2]{A}$. Tak vznikly přímky 1 a 2, které časovou osu protínají v datech 13. února a 1. dubna, což vskutku jsou data nukleárních výbuchů na Sahaře.

U vzorku č. 335 se přímka 2 po uplynutí asi jednoho měsíce mění v křivku, nebo u tohoto slabého preparátu se brzy začala uplatňovat značná zbytková aktivita z prvního výbuchu na Sahaře. Původní směr přímky 2 je naznačen v dalším průběhu tečkovaně.

Na obr. 2 jsou ještě dvě další kontrolní přímky 3 a 4, které časovou osu protínají rovněž v datech nukleárních zkoušek. Tyto přímky jsou tzv. *přímky poločasů*. Jejich konstrukce vyplývá z rovnice (1). Uvažujeme dvě naměřené aktivity, z nichž druhá je právě polovičkou první;



Obr. 2. Časový pokles aktivity vzorků nukleárního spadu po prvním a druhém výbuchu francouzských atomových pum na Sahaře. Vzorek č. 318 jsme získali dne 1. 3. 1960, vzorek č. 335 dne 8. 4. 1960. Na obr. je provedeno určení dat nukleárních zkoušek s pomocí geometrických konstrukcí. Výbuchy byly provedeny ve dnech 13. 2. a 1. 4. 1960, což také na obr. 2 vychází v průsečících přímek 1,3 a 2,4 s datovou osou.

čas, který uplynul než aktivita A poklesla na $A : 2$, budiž τ a nazveme jej *poločasem*. Na rozdíl od jediného radioaktivního prvku, kdy poločas je stálý a je charakteristickou konstantou prvku, je „poločas“ směsi štěpných produktů veličina proměnná. V této směsi radioaktivních prvků se nejprve rozpadají prvky krátkých poločasů, pak delších a nakonec nejdelších. Ve směsi štěpných produktů nakonec zůstávají jen dlouhožijící radioizotopy. Ze zářičů beta je to zvláště Sr 90.

Platí-li vzorec (1), musí být poločas směsi zplodin lineární funkcí času T , který se vztahuje k první aktivitě A :

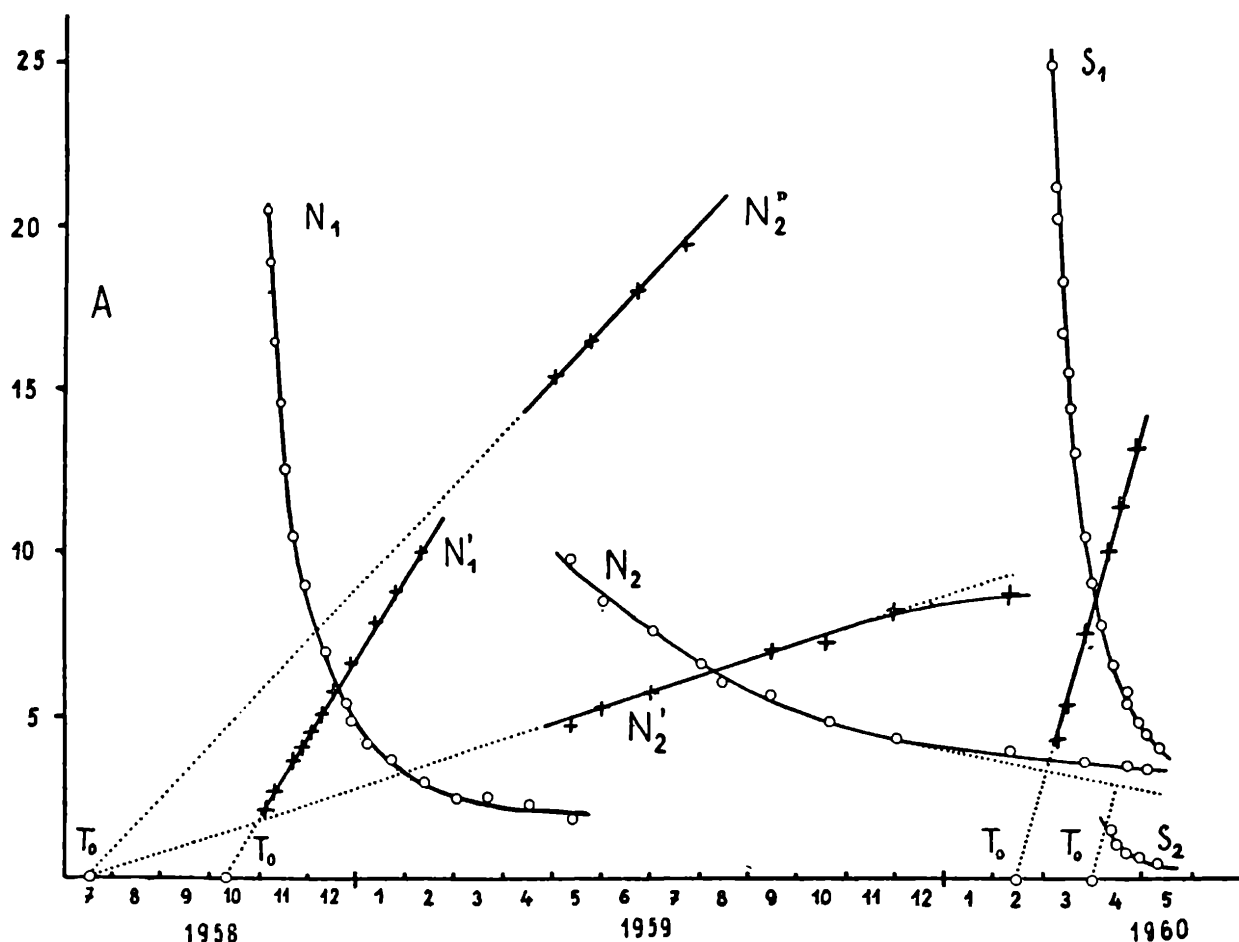
$$\tau = c (T - T_0), \quad (4)$$

kde $c = \sqrt[n]{2} - 1$ a tudíž pro daný vzorek konstanta. T_0 je datum nukleárního výbuchu. Je tudíž

$$A = k (T_1 - T_0)^{-n}, \quad \frac{A}{2} = k (T_2 - T_0)^{-n};$$

poločas τ je dán rozdílem dat měření,

$$\tau = T_2 - T_1 = (\sqrt[n]{2} - 1) (T_1 - T_0) = c (T - T_0),$$

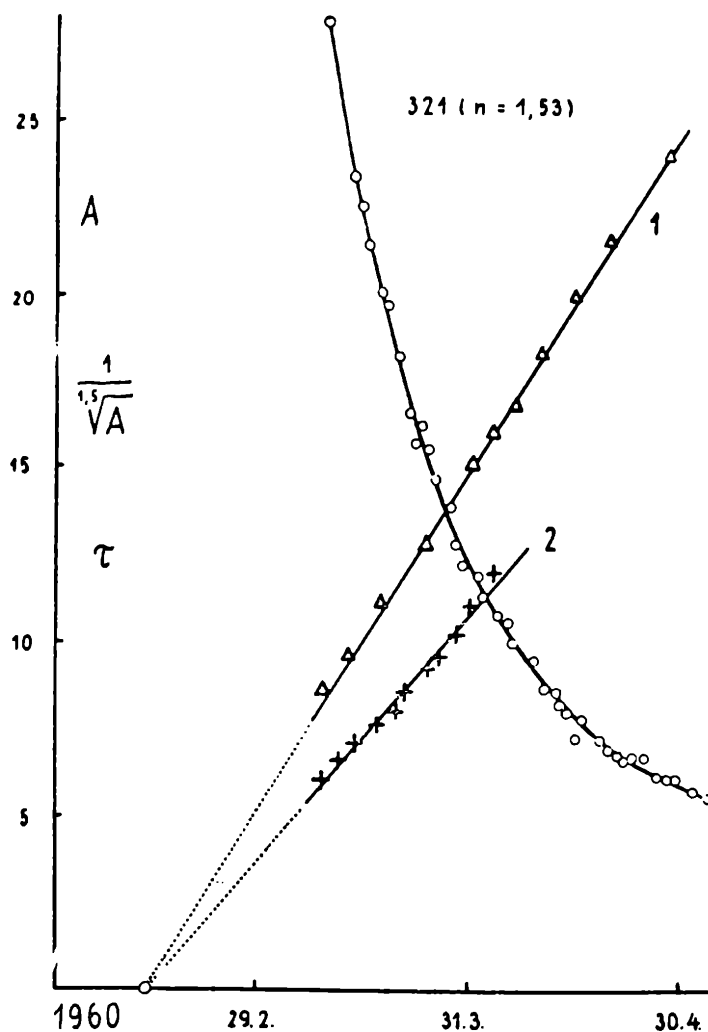


Obr. 3. Časový pokles aktivity čtyř vzorků nukleárního spadu. Vzorek N_1 získán 3. 11. 1958. (Nukleární zkoušky byly dočasně zastaveny dnem 1. 11. 1958.) Vzorek N_2 získán 4. 5. 1959. Body T_0 jsou přibližná data nukleárních výbuchů graficky určená. Vpravo je časový pokles aktivity vzorků spadu ze saharských výbuchů (S_1 , S_2).

označíme-li datum prvního měření jednoduše T místo T_1 . Tak jsme odvodili rovnici (4), která je rovnicí přímky. Mezi τ a T je lineární závislost.

Na obr. 2 byly přímky 3 a 4 získány právě touto metodou. Jsou to geometrická místa bodů, jejichž pořadnice jsou určité poločasy τ a úsečky vždy datum příslušící k poloviční hodnotě aktivity. Anebo: zvolí se určité datum, které je úsečkou; pořadnicí je poločas τ , za nějž aktivita příslušící zvolenému datu poklesne na polovičku.

Tato grafická metoda určuje nejen datum výbuchu (T_0), avšak také mocnitele n , který podle (4) vyplývá ze směrnice vzniklé přímky. Z obr. 2 je patrné, že směrnice přímek 3 a 4 jsou přibližně stejné a tudíž mocnitel n je pro oba vzorky přibližně stejný, $n = 1,2$. Na základě úhloměrného měření můžeme tedy snadno určit i mocnitele n pro vzorec (1), který vystihuje pokles aktivity nukleárního spadu v prvních měsících po výbuchu, kdy aktivita vzorku silně převyšuje zbytkovou aktivitu (neboli „pozadí“) od dříve provedených výbuchů.



Obr. 4. Časový pokles suchého atmosférického spadu (radioaktivního prachu) po první nukleární zkoušce na Sahaře. Datum zkoušky určené graficky je 13. 2. 1960.

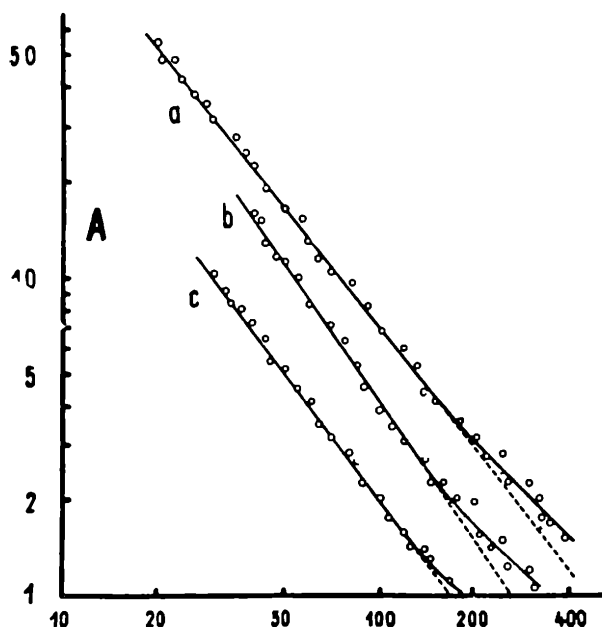
Na obr. 3 je pro srovnání narýsován časový pokles aktivity dvou starších a dvou čerstvých vzorků. Vzorek N_1 byl získán na začátku listopadu 1958, těsně po zastavení nukleárních zkoušek dnem 1. 11. 1958. Vzorek N_2 byl získán až půl roku po zastavení zkoušek, na jaře 1959. Pokles jeho aktivity je zřetelně pomalejší, neboť krátkožijící radioizotopy se již rozpadly a uplatňují se jen izotopy s delším poločasem. Po delší přestávce, kdy se výbuchy neprováděly, byl proveden první sahar- ský výbuch (S_1) a později podstatně slabší druhý (S_2). Čerstvé štěpné

produkty se projevily v rychlém poklesu aktivity (křivka S_1). Křivka S_2 klesá poměrně zvolna, neboť ve vzorku byly přimíchány starší zbytky z prvního výbuchu, které se již rozpadaly pomaleji.

Na obr. 4 je časový pokles aktivity vzorku č. 321, získaného začátkem března. Byl to suchý atmosférický spad, jehož aktivita klesala podle vzorce (1) s mocnitelem $n = 1,53$. Na osu pořadnic byly nanášeny hodnoty $1/\sqrt[1,5]{A}$. Datum výbuchu (13. 2. 1960) bylo určeno oběma uvedenými způsoby (přímky 1, 2).

Na obr. 5 je časový pokles tří vzorků spadu. Vzorky označené a , c přísluší spadu deštovému, b spadu suchému. Znázornění je bilogarithmické, tj. čas t i aktivita A jsou nanášeny v logaritmech. Logaritmováním rovnice (1) obdržíme vztah

$$\log A = \log k - n \log t.$$



Obr. 5. Časový pokles tří vzorků spadu z pokusného výbuchu na Sahaře. Na osu x je nanášen logaritmus počtu dnů, které uplynuly od data výbuchu (od 13. 2. 1960). Na ose y jsou logaritmy aktivity. V tomto bilogarithmickém znázornění (tj. na obou osách jsou nanášeny logaritmy), je časový pokles aktivity dán přímkou. Teprve za několik měsíců, po zeslábnutí aktivity, se začíná uplatňovat „pozadí“, tj. zbytková aktivita od dřívějších nukleárních zkoušek, která narušuje původní přímkový průběh.

Nanášíme-li na osu pořadnic $\log A$, na osu úseček $\log t$, obdržíme přímkou o směrnici $-n$. Čas t je počítán od data výbuchu, který v případě nukleární zkoušky na Sahaře byl přesně znám (13. 2. 1960). Vzorky spadu a , c byly deštovým spadem a pokles jejich aktivity je v rovnici (1) přibližně určen mocnitelem $n = 1,28$. Úhel, který přímky a , c svírají s časovou osou, je tudíž přibližně 128° . Pokles vzorku b který byl suchým atmosférickým spadem, je určen mocnitelem $n = 1,48$, takže přímka b svírá s časovou osou úhel asi 124° . Po uplynutí 120 až 150 dnů se časový pokles aktivity začíná odchylovat od původního přímočarého směru vlivem malé zbytkové aktivity od dřívějších nukleárních výbuchů z roku 1958. Zbytková aktivita je zanedbatelná, pokud je vzorek čerstvý a má podstatně velikou, vlastní aktivitu. Po zeslábnutí aktivity zbytková

aktivita již zanedbatelná není a projevuje se ohýbáním křivky aktivity směrem nahoru, neboť

měřená aktivita = skutečná aktivita vzorku + zbytková aktivita od dřívějších výbuchů.

To je na obr. 5 zřetelně patrné. Hodnota zbytkové aktivity má takovou velikost, jakou asi bylo nutno očekávat na základě soustavného měření nukleárního spadu začátkem roku 1960, kdy na 1 m² dopadalo přibližně 3×10^{-11} curie štěpných produktů za 1 den.

E v ž e n Ř í m a n, ČVUT, Praha:

Pokus a teorie jako prostředky fyzikálního poznání

Fyzika je nejstarší přírodní vědou lidstva a kolébkou všech ostatních věd, jež se od ní postupně oddělovaly. Rozvoj fyziky i ostatních přírodních věd hrál rozhodující úlohu ve vývoji materialistického světového názoru. Fyzika souvisí s filosofií a spolupracuje s ní velmi těsně. Již odedávna dvě příznačné vlastnosti fyziky sbližovaly obě vědy, a to jednak o b e c n o s t fyzikálních zákonů, jednak bezprostřední a nevyhnutelná s o u v i s l o s t f y z i k y s t e c h n i k o u, s praxí. Svou obecností spolupracuje fyzika s filosofií hlavně v teorii poznání. Již ve starověku byl téměř každý fyzik filosofem a naopak každý filosof fyzikem. Rovněž novověcí učenci jako Galileo, Kepler, Koperník, Newton, Descartes, Laplace, Lomonosov, Mendělejev, Planck, Bohr, Joliot-Curie, Einstein a všichni fyzikové světového významu ukazují ve svých pracích, jak značně fyzikální a filosofické problémy spolu souvisí.

Lenin a jiní filosofové se zajímali o tuto přímou souvislost fyziky s technikou. Tato souvislost se stala výhodnou oběma. Fyzika brala od technické praxe podněty a problémy k dalšímu bádání, a technika dosahovala spoluprací s fyzikou (i ostatními vědami) stále překvapivějších objevů a vynálezů od parního stroje, přes rozhlas a televizi, až k atomovým reaktorům a kosmickým korábům. Cílevědomé užití fyzikálních zákonů a teorií umožňuje inženýru, konstruktérovi, deduktivně najít nejlepší řešení daného technického problému a volit pro hledaný účel z mnoha možných kombinací tu nejvýhodnější. Dnes již nikdo nepopírá, že uvědomělé použití fyziky a techniky je rozhodujícím činitelem historického vývoje společnosti.

Úkolem fyziky je objevovat, zkoumat a vykládat fyzikální děje. Cesty k provedení těchto cílů jsou tři: pozorování, pokus a teorie.

Pozorováním, v užším slova smyslu, je míněno vnímání a promyšlení přírodního děje, jenž se odehrává bez našeho zásahu. Již prehistorický člověk měl možnost pozorovat. Různé přírodní úkazy, např. duha, déšť, sníh, blesk, burácení hromu, hvězdnatá obloha atd., poutaly jistě jeho pozornost, podobně jako dnes vzbuzují náš zájem. Ale výklad těchto dějů - pokud vůbec tehdy byl - je dnes zcela jiný.

Pokus (= experiment) je uměle připravený děj, který obvykle zjednodušujeme tak, aby jen několik málo fyzikálních příčin mělo vliv na jeho průběh a který provádíme proto, abychom poznali zákonitost zkoumaného jevu.

Ovšem i provádění pokusu nutno „pozorovat“ (v širším slova smyslu) a myšlenkově zpracovat zjištěné výsledky. Pozorování i pokus lze shrnout v jediný pojem: fyzikální zkušenost¹⁾. Fyzika je tedy vědou empirickou, čili vědou opírající se o zkušenost.

Pozorování a pokus nemají podávat pouze kvalitativní představu o uvažovaném ději, nýbrž také kvantitativní vztahy mezi veličinami, které při pokuse spolupůsobí. Nestačí tedy zjistit, že led zahříváním taje, nýbrž také, kolik ledu roztaje, dodáme-li určité množství tepla. Úlohou experimentátora pak je vyjádřit výsledky číselnou tabulkou nebo graficky, popřípadě najít též empirický vzorec pro hledanou souvislost, čili najít matematické vyjádření určitého fyzikálního zákona.

Celý tento postup fyzikálního poznávání je pěkným příkladem materialistického učení o aktivní úloze člověka při poznávání objektivní skutečnosti, o poznání jakožto procesu, kde relativními pravdami se přibližujeme objektivní absolutní pravdě. Počítky, myšlení a praktická činnost člověka jsou jednotlivé kroky jediného procesu: zobrazování (odrážení) přírody ve vědomí člověka.

Avšak nalezením i značného počtu takových speciálních zákonů není ještě vybudována vědecká nauka. K pozorování a pokusu musí přistoupit ještě další cesta fyziky, totiž teorie²⁾, jejímž úkolem je najít příčinnou nebo podmíněčnou souvislost onoho velkého počtu poznatků (z určitého oboru) pomocí obecného soustavného výkladu.

¹⁾ Řecké *empeiriá* značí znalost, zkušenost.

²⁾ Slova „teorie“ se někdy užívá jako protikladu pojmu „praxe“, tj. slovem „teorie“ se rozumí souhrn poznatků nalezených pouhým rozumováním, proti poznatkům získaným ze zkušeností. Toto pojetí je ovšem nesprávné, jak uvidíme v dalším.

Přípravným krokem k stanovení obecného zákona, zasahujícího do několika oborů fyziky, čili k stanovení teorie, bývá vytvoření tzv. *pracovní hypotézy* (domněnky), kterou rozumíme nějaký vědecký předpoklad, mající logicky vysvětlit výsledky vykonaných pokusů nebo zjištěných faktů. Hypotéza se považuje za oprávněnou jediné tehdy, jestliže její důsledky neodporují zkušenosti.

Z dějin fyziky známe mnoho opuštěných hypotéz. Kdysi oblíbená fluidová hypotéza o teple, která vykládala ohřívání vody jako vstup jakési nevažitelné látky (čili tepelného fluida) z tělesa teplejšího na chladnější, byla po prvé otřesena úvahami ruského fyzika M. V. Lomonosova. Jakmile pak Davy dosáhl třením dvou kusů ledu ve vzduchoprázdnu toho, že led roztál, stala se fluidová hypotéza neudržitelnou. Dnešní výklad tepla je založen na tzv. kinetické teorii hmoty: teplem obsaženým v daném tělese rozumíme součet pohybových energií molekul onoho tělesa.

Jakmile pracovní hypotéza nejen umožní vyložit výsledky pokusů, k vůli nimž byla vytvořena, nýbrž osvědčí se v širším oboru, stává se obecným zákonem, z něhož lze deduktivní cestou odvodit četné speciální zákony jiné, čili stává se *principem*. Tak se např. z principu o zachování energie vyvozuje řada zvláštních zákonů ve všech oborech fyziky.

Jestliže nějaká obecná hypotéza může podat pravděpodobné vysvětlení všech zjevů určitého oboru fyziky a umožní shrnutí všech speciálních zákonů onoho oboru v několik málo principů, stává se *teorií*. Tak např. Lorentzova elektronová teorie podává shrnutí všech zákonů elektromagnetického pole, vyjádřených již dříve v několika Maxwellových principech, včetně výkladu elektrolýzy i jiných jevů, při nichž samostatně účinkují elektrony. Jinými příklady fyzikálních teorií jsou kinetická teorie plynů, Einsteinova teorie relativity, Planckova kvantová teorie aj.

Teorie, jako protiva pouhé empirie, tj. znalosti ojedinelých faktů, je myšlenkový vědecký útvar, jenž spojuje fakta a domněnky v obecný zákon. Následkem podmíněnosti každé teorie, je teorie vždy jen pravděpodobná; je jen přibližným snímkem skutečného světa. (Lenin: „Uznávat teorii za snímek, za přibližnou kopii objektivné skutečnosti, v tom právě spočívá materialismus!“)

Každý souhlas se skutečností zvyšuje pravděpodobnost a každý nesouhlas snižuje tuto pravděpodobnost každé teorie. Proto žádná teorie nemá „absolutní“ platnost.

Typický příklad ryze materialistického nazírání na vznik teorie podal německý básník J. W. Goethe ve spise *Nauka o barvách* před více než 130 lety: „Každý pohled na věc přechází v pozorování, každé pozorování vede k přemýšlení, každé přemýšlení nutí ke spojování představ a tak možno říci, že teoretizujeme již při každém pozor-

ném pohlednutí na svět. Abychom mohli toto teoretizování provádět s plným sebevědomím, jasným sebepoznáním, svobodně a odvážně řečeno s určitou ironií, musíme si počínat s jistou obratností, aby abstrakce, které se obáváme, byla neškodná a výsledek našeho pozorování byl opravdu živý a užitečný.“ Jak krásně zde Goethe zdůraznil význam lidské aktivity, teoretické i praktické, která je nezbytnou podmínkou ustavičného přibližování se objektivní pravdě.

V každé fyzikální teorii jsou implicitně obsaženy tři možnosti:

1. Schopnost vyložit dodatečně výsledky všech vykonaných pokusů.
2. Shrnutí všech speciálních fyzikálních zákonů příslušného oboru, které z ní deduktivní cestou mohou být odvozeny a potom pokusem ověřeny.
2. Teorie, vedle pozorování a pokusu, je dalším samostatným zdrojem fyzikálního poznání.

Uvažování o důsledcích a možnostech vytvořené teorie bývá začasť podnětem k navržení nových, dosud nezamýšlených, pokusů. Vede mnohdy k novým vynálezům, které byly nejdříve teoreticky promyšleny a teprve potom laboratorně ověřeny. Tím se stalo vedle zkušenosti teoretické uvažování, čili rozumová spekulace, dalším pramenem našeho poznání, ovšem závislým na zkušenosti. Neboť jen ty poznatky získané abstraktními úvahami mají pro vědu nějaký význam, které *n e o d p o r u j í z k u š e n o s t i*. Jediným znakem (kritériem) správnosti vědeckých teorií je totiž vždy a jedině jejich souhlas se skutečností, ověřený pozorováním nebo pokusem. Tak např. Einsteinova teorie obecné relativity byla ověřena zkušeností teprve při pozorování slunečního zatmění v roce 1919. Z dějin vědy naopak víme, jak málo z učení antických přírodovědců je uznáváno moderní vědou. Hlavní příčinou tohoto selhání je jejich opovrhování experimentem. Jen v astronomii a mechanice, kde se opírali o pozorování přírody, dovedli antičtí učenci vytvořit trvalé hodnoty. Všude jinde se vyčerpávali v neplodných a bezcenných spekulacích.

Tím, že fyzika ověřovala své teorie vždy bezprostředním kritériem pokusu a praxe, mohla objevovat objektivní vlastnosti světa, a proto také ohromná většina fyziků jsou živelní materialisté i v době před objevem dialektického materialismu.

Podle užité pracovní metody lze fyziku rozdělit (ovšem jen přibližně) na dvě části: *pokusnou* (čili *experimentální*) a *teoretickou*. Obě samozřejmě spolu stále spolupracují a vzájemně se kontrolují.

Pokusná fyzika se zabývá oněmi vědeckými poznatky, jichž lze dosáhnout pokusem. Používá metody *i n d u k t i v n í* (lat. *inductio* = = návod, uvedení), tj. postupuje od jednotlivých zvláštních případů k obecným zákonům.

Metoda induktivní je vlastně zvláštní schopnost myšlenkového usuzování, vytvořená v člověku mnohokrát opakovanou zkušeností. Např.

provedením celé řady pokusů, kdy k těmž kovovému vodiči byly zapojovány zdroje různého napětí a měřen procházející proud, přišlo se k obecné domněnce, že intenzita proudu je přímo úměrná napětí. Tím byl objeven Ohmův zákon.

S hlediska filosofického je tato ve fyzice užívaná induktivní metoda ovšem pouze tzv. neúplnou indukcí. To znamená, že poučky získané touto cestou - zcela ve smyslu dialekticko-materialistického chápání - jsou pouze relativně pravdivé, čili pravděpodobné; jejich platnost není absolutní.

Nelze tedy metodu induktivní, jak ji užívá fyzika, zaměňovat s metodou „úplné indukce“³⁾, které se užívá v matematických oborech k provádění přesných důkazů, která však ve fyzice není použitelná.

Tato induktivní metoda, užívaná ve fyzice, je nejpochopitelnější a nejprístupnější. Byla na počátku lidských dějin jediným zdrojem, jak prvotní člověk mohl získávat své poznatky, nejen o přírodních dějích, nýbrž i z matematiky a geometrie: induktivní metodou na základě provedených pokusů.

Fyzika teoretická se obírá oněmi poznatky, jichž lze dosáhnout deduktivní metodou. Všímá si tedy obecné souvislosti jevů a postupuje opačnou cestou než pokusná. Vychází z obecných zákonů a vyvozuje z nich důsledky, jež se týkají zvláštních případů. Metoda deduktivní (lat. deductio = odvozování) je táž, jaká se vyskytuje ve velké většině matematických úvah. Postupuje od obecného k zvláštnímu, od obecné poučky k větám speciálním.

Je-li tedy obecná poučka vždy a nepochybně správná, musí být správný také každý z ní deduktivně odvozený důsledek. Je-li však platnost obecné poučky pouze podmíněná, nebo zakládá-li se jako větší na našich poznatků jen na neúplné indukci, pak ovšem také z ní deduktivně odvozené důsledky jsou pouze pravděpodobné a musí být vždy zkušeností ověřeny. A naopak, odporuje-li dedukovaná věta zkušenosti, pak též obecná teorie se stává pochybnou, ne-li zcela neplatnou. V každém případě má pak obecná teorie jen omezenou platnost.

Z dějin fyziky byla oficiálně uznávána víc než století známá emanační teorie světla, díky své větší propracovanosti a věhlasu Newtonovu. Jakmile však Foucaltovo měření rychlosti světla v dlouhé trubici s vodou ukázalo, že rychlost světla ve vodě je menší než ve vzduchu, což odporuje Newtonově teorii, bylo to definitivním argumentem o neplatnosti emanační teorie, aspoň v tehdejší znění.

Teoretická fyzika zdůrazňuje tudíž nevyhnutelnou souvislost pozorování

³⁾ M a t e m a t i c k á i n d u k c e (úplná) užívá axiomu: Jestliže z předpokládané správnosti uvažovaného vzorce pro libovolné přirozené číslo n lze dokázat správnost také pro přirozené číslo $n + 1$, pak vzorec platí pro všechna přirozená čísla, bylo-li ověřeno, že platí pro určité dané přirozené číslo.

vaných jevů a deduktivní metodou odpovídá na otázku, jak bude probíhat děj za jiných podmínek, než kterých dosud bylo užito, čili vlastně předpovídá určité děje a umožňuje tak najít pokusy, jimiž se dá ověřit větší nebo menší pravděpodobnost předpokládaných hypotéz.

Při tom ovšem stále nutno zdůrazňovat hledisko, že vždy třeba poznatky získané empiricky (zkušeností) spojovat v teorii a naopak důsledky teorií a hypotéz ověřovat praxí (experimentem). Pokus i teorie musí ruku v ruce postupovat ke společnému cíli, a to přiblížit se objektivní pravdě odhalováním stále přesnějších formulací fyzikálních zákonů.

Každé poznání začíná vždy smyslovým nazíráním, tj. bezprostředním stykem objektu a subjektu (přírody a člověka). Tím nabýváme sice názorných obrazů věcí, ale naše znalosti o nich zůstávají pouze povrchní.

Smyslové formy zobrazování skutečnosti jsou dvě:

1. P o č í t k y, což jsou odrazy jednotlivých vlastností.
 2. V j e m y, tj. odrazy celého souboru vlastností v lidském vědomí.
- Tyto dvě formy zprostředkují veškeré naše vědění.

Na tento smyslový stupeň poznání navazuje pak logický (= rozumový) stupeň, čili abstraktní myšlení, které zpracovává a zobecňuje výsledky živého nazírání. Přílehavě to vykládá Lenin: „Abychom něco pochopili, musíme své chápání a své studium začít empiricky; od empirie pak postupujeme k obecnému. Abychom se naučili plavat, musíme vlézt do vody.“

A tak je jasně potvrzeno dialekticko-materialistické pojetí procesu lidského poznávání: jsou zde rovnoprávně účastny všechny tři poznávací stupně, totiž smyslový (experiment), rozumový (teoretická abstraktní úvaha) a stupeň praxe (praktické ověření). Žádný z nich, ač jsou kvalitativně odlišné, n e l z e považovat za samostatný pramen vědění o vnějším světě.

Závěrem citujeme slova Leninova: „Lidský rozum odhalil mnoho podivuhodného v přírodě a ještě více odhalí, čímž zvětší nad ní svoji vládu. Ale to neznamena, že příroda je výtvozem našeho rozumu nebo abstraktního ducha.“

* *

*

V mládeži je třeba pěstovat lásku k vědě a rozvíjet její záliby a schopnosti ve studiu přírodních věd.

Z usnesení ÚV KSČ o práci mezi
mládeží, listopad 1961



Inž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN, SMS, Praha:

Curieův bod

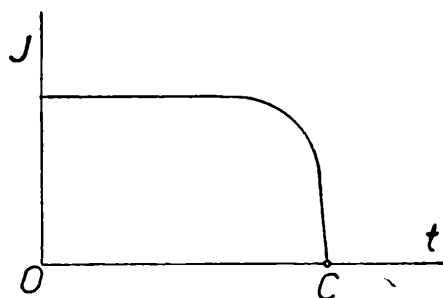
Magnetické vlastnosti látek jsou velmi zajímavé, i když nejsou všechny jevy uspokojivě vyloženy. Každá látka, která je působením magnetického pole zmagnetována, dává vznik novému magnetickému poli, jež se skládá s původním polem. Jsou-li intenzity obou polí souhlasného smyslu, mluvíme o l á t k á c h p a r a m a g n e t i c k ý c h, mají-li smysl opačný, jedná se o l á t k y d i a m a g n e t i c k é. Zvláštní skupinou paramagnetických látek jsou látky f e r r o m a g n e t i c k é, např. železo, kobalt a nikl, u nichž se dosáhne vysoké magnetizace již v poměrně slabých magnetických polích.

Francouzský fyzik A. M. Ampère první vyslovil hypotézu, že v molekulách paramagnetických látek existují kruhové molekulární proudy, které se v magnetickém poli orientují jednotně v určitém směru a tím dávají vznik novému magnetickému poli. Tato hypotéza není v rozporu s dnešní elektronovou teorií. Elektron obíhající na uzavřené dráze kolem jádra atomu vyvolává magnetické pole. Rovněž jeho rotace kolem vlastní osy, takzvaný s p i n, je pohyb náboje na uzavřené dráze a vzbuzuje tudíž rovněž ve svém okolí magnetické pole. Celkový magnetický moment atomu je pak dán složením obou těchto momentů. Magnetické momenty jsou normálně vzájemně vykompenzovány, jak je tomu např. u látek diamagnetických. U látek ferromagnetických nejsou však plně vykompenzovány momenty vznikající spinem. Na atomy působí vnitřní orientační síly vznikající podle kvantové teorie vzájemným působením elektronů a sousedních atomů. Můžeme tedy říci, že ferromagnetismus je vlastnost krystalů a nikoli vlastnost jednotlivých molekul nebo atomů. Potvrzením toho je ztráta magnetického momentu u těchto látek v plynném stavu, např. u atomů železa v plynném skupenství. Jiným potvrzením je z j e v m a g n e t o s t r i k c e.

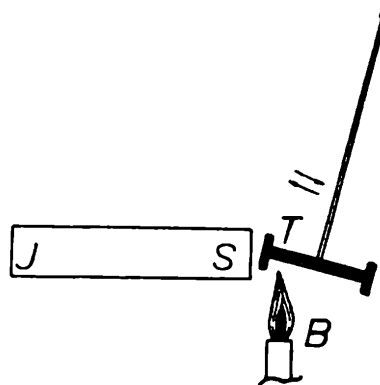
Tento vnitřní stav látky je silně závislý na teplotě. Když si vyne-
seme s p o n t á n n í m a g n e t i z a c i¹⁾ J ferromagnetické látky jako

¹⁾ Spontánní magnetizací rozumíme stav nasycení magnetované látky.

funkci teploty t , jak je provedeno v obr. 1, vidíme, že dostáváme nejprve přímkovou závislost a teprve od jisté výše teploty se mění přímka v křivku silně zakřivenou směrem k ose teploty. Protíná ji v určitém bodě C , který byl nazván *Curieův bod*. Jím je dána teplota, při níž mizí ferromagnetické vlastnosti látky, zaniká magnetizace a látka se při vyšších teplotách chová jako paramagnetická. Současně s tím se mění řada jiných vlastností, např. elektrická a tepelná vodivost, magnetostrikce ap.



Obr. 1



Obr. 2

Závislost magnetizace ferromagnetických látek na teplotě byla potvrzena řadou pokusů, z nichž nejjednodušší je naznačen na obr. 2. Poblíž magnetického pólu S je umístěna železná tyčinka T tak, že může volně kývat. Normálně je přitažena pólem magnetu. Zahřejeme-li však plamenem B Bunsenova kahanu tyčinku až na teplotu odpovídající Curieovu bodu (pro železo 775°C), odpadne tyčinka od magnetu, poněvadž její ferromagnetismus zmizel. Tím přestane být zahřívána a jakmile se dostatečně ochladí, je znovu přitažena magnetem. Tento střídavý pohyb tyčinky se může libovolně opakovat. Toho je možno použít také k měření teplot.

Curieův bod je různý pro rozličné látky, např. pro nikl je tato teplota asi 350°C . Jsou však některé slitiny, u nichž klesá Curieův bod až na 100°C , takže postačí k jeho předvedení ponoření magnetu s přitaženým kouskem této slitiny do vroucí vody. Slitina odpadne, jakmile se dostatečně prohřeje.

* *

*

Ideálem mladých lidí se stává nová technika, nové vědecké objevy.

J. Hendrych, zasedání ÚV KSČ,
17. listopadu 1961

Úlohy k řešení



Soutěž Rozhledů pokračuje

Matematika:

9. Nad stranami trojúhelníka ABC jsou sestrojeny vně čtverce o vrcholech ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 . Dokažte, že platí

- a) $AC_1 = BC_2$, $BA_1 = CA_2$, $CB_1 = AB_2$;
- b) $\overline{A_1B_1^2} + \overline{B_1C_1^2} + \overline{C_1A_1^2} = \overline{A_2B_2^2} + \overline{B_2C_2^2} + \overline{C_2A_2^2}$;
- c) $\overline{A_1A_2^2} + \overline{B_1B_2^2} + \overline{C_1C_2^2} = 3 \cdot (\overline{AB^2} + \overline{BC^2} + \overline{CA^2})$.

Josef Brejcha

10. Nech n je přirozené a p prvočíslo. Dokažte, že číslo $n^p + (p-1) \cdot n$ je dělitelné číslem p .

Milan Hejný

11. Graficky znázorněte průběh funkcí

- a) $y = (\sqrt{\sin x})^2$; b) $y = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + |\sin x|}$,

Jiří Sedláček

12. Jsou-li a a b přirozená čísla, pak lze výraz

$$(a+b)^2 + 2 \cdot (a+2b)^2 + 3 \cdot (a+3b)^2 + 4 \cdot (a+4b)^2$$

napsat jako součet čtverců dvou přirozených čísel a výraz

$$(a+b)^2 + 2 \cdot (a+2b)^2 + 3 \cdot (a+3b)^2 + 4 \cdot (a+4b)^2 + 5 \cdot (a+5b)^2 + 6 \cdot (a+6b)^2$$

napsat jako součet čtverců tří přirozených čísel. Dokažte!

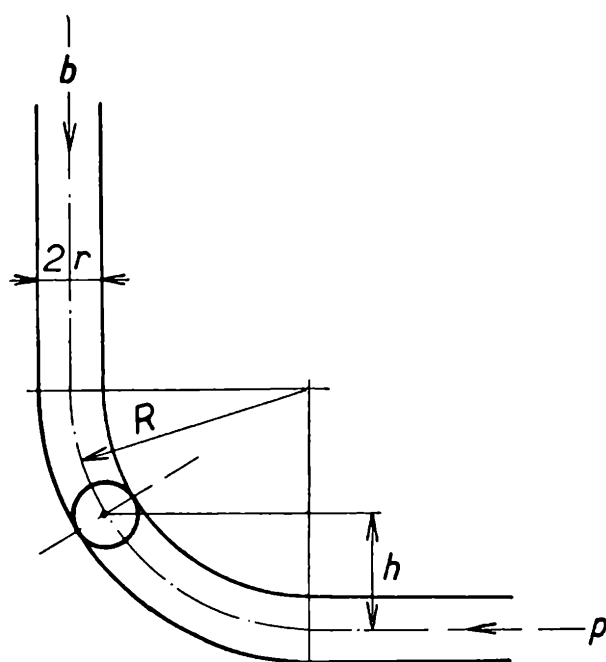
Ota Setzer

Fyzika:

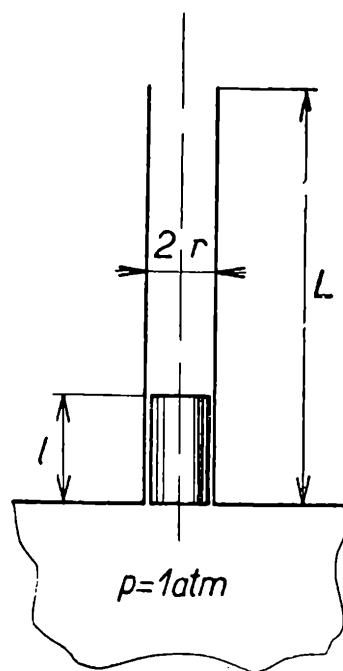
4. V trubici kruhového průřezu (vnitřní průměr $2r = 30$ mm) tvaru (obr. 1) je uložena ocelová koule (hustoty $\rho = 8,7 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m $^{-3}$), jež se

v trubici může volně pohybovat (třecí odpory při pohybu zanedbáváme). Přitom předpokládáme, že v místě styku koule s vnitřní stěnou trubice je mezi oběma tak malá mezera, že styk můžeme pokládat za vzduchotěsný. Ve svislé větvi trubice je normální barometrický tlak ($b = 760$ torů). Má se vypočítat, na jaký tlak p (v newtonech na čtvereční metr — $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$) musíme připojit vodorovnou větev trubice, aby se koule ustavila v obloukové části trubice do výšky $h = 100$ mm. Podle obrázku rozumíme touto výškou h svislou odlehlost těžiště koule od osy vodorovné větve trubice. Přitom je poloměr oblouku trubice $R = 200$ mm. Tíhové zrychlení volme rovné $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Václav Šindelář



Obr. 1



Obr. 2

5. Ve svislé trubici (délky $L = 1$ m) vnitřního průměru $2r = 10$ mm je válcový píst délky $l = 20$ mm z materiálu hustoty $\rho = 2,7 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ (hliník). Píst je těsný, jakékoliv odpory při jeho pohybu v trubici pomíjíme. Na pístem je stálý tlak $b = 760$ torů. Spodním koncem je trubice připojena na velkou nádobu, v níž je stálý tlak $p = 2$ atm. Je-li píst na začátku sledovaného děje na spodním konci svislé trubice (obr. 2) a je-li uvolněn, počne se pohybovat směrem vzhůru. Máme určit: a) jaký bude pohyb pístu v trubici a b) jakou rychlostí v opustí píst trubici.

Václav Šindelář

Uveřejňujeme další příklady k řešení. Správná řešení úloh otištěných v tomto čísle zašlete v předepsané úpravě nejpozději do konce dubna 1962. Lhůtu pro odevzdání řešení úloh uveřejněných v minulých číslech prodlužujeme do konce března 1962. Adresa: Doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

J o s e f K o t y k: Pardubice:



Hermann Helmholtz

(Pokračování)

II. *Mechanistická fyzika*

Fyzika procházela v době, o níž píši, obdobím, v němž se soudilo, že všechny fyzikální procesy (děje) jsou v podstatě mechanické. Tak vznikla *mechanistická fyzika*. K předním reprezentantům této epochy náleží také *Hermann Helmholtz*.

Studiu základů mechaniky věnoval se Helmholtz s příkladnou láskou. Sledoval přeměny energie a rozlišoval také již druhy mechanické energie. Názvosloví dnes užívané není však dílem Helmholtzovým. Název kinetická energie pro energii pohybující se hmoty zavedl Rankine¹⁾ roku 1852. Statická energie je podmíněna polohou hmoty. Rankine zavedl pro ni roku 1859 proto název energie potenciální (energie polohy), jenž se rovněž vžil. Lagrangeově funkci, užívané k vyjádření diferenciálních principů dynamiky, říkáme však podle Helmholtze kinetický potenciál, nebo (po příkladu termodynamiky) volná energie. Připomínám, že rovnice pro termodynamický potenciál při stálém objemu (tzv. první termodynamický potenciál), nazývaná dnes běžně *Helmholtzovou* nebo také *Gibbs-Helmholtzovou*, byla po prvé odvozena roku 1853 *W. Thomsonem*.²⁾ Helmholtz zpracoval však teorii vírů a podal správnou formulaci jednoho z nejobsažnějších přírodních zákonů, principu nejmenší akce, ve znění *Maupertuis-Euler-Lagrangeově*³⁾: Akce, které je třeba k ja-

¹⁾ William John Macquorn Rankine, anglický inženýr, žil v letech 1820 až 1872; po něm je zváno *rankinování diagramů*, tj. zakreslování tlakových diagramů parních strojů, pracujících s dvojitou nebo trojitou expanzí, v jediném obrazci.

²⁾ William Thomson (lord Kelvin; 1824—1907) odvodil roku 1885 známý vzorec pro periodu elektrických kmitů; ja také autorem absolutní teplotní stupnice K.

³⁾ Viz *Trkalovu Mechaniku hmotných bodů a tuhého tělesa*, čl. 123, kde je odvozena také matematická formulace principu ve znění M.-E.-L.

k é k o l i p ř í r o d n í z m ě n ě, j e n e j m e n š í. Poukázal také na zvláštní důležitost souřadnic zv. cyklických. Vyjadřujeme-li dnes energii gravitačního pole součinem hmot a potenciálů a energii elektrostatického pole obdobně součinem nábojů a potenciálů, opíráme se rovněž bezprostředně o Helmholtze.

Podle tehdejších představ je celá fyzika podrobena zákonům mechaniky. Také Helmholtz zastával toto stanovisko. Mechanika byla tehdy již tak pokročilá, že korunována objevem principu přeměny a zachování energie, předstihla všechny ostatní kapitoly fyziky. Stalo se zvykem spatřovat v metodách kterých užívala, přímo vzory pro jiné obory fyziky. I zákon zachování energie má v Helmholtzově podání výrazný mechanistický charakter. Také Helmholtz byl přesvědčen, že jen převedení fyzikálních jevů na pohyby hmotných bodů, které na sebe vzájemně působí přitažlivými nebo odpudivými centrálními silami, může uspokojit touhu člověka po tom, aby tyto jevy pochopil. Rozumět znamená hledat mechanické analogie. Jev je vysvětlen, jestliže byl pro něj nalezen mechanický model. Také potřebě názorného výkladu by tak bylo vyhověno⁴).

Jakýmsi standardním typem teorie se stala klasická mechanika Newtonova. Nejprůběhavěji to vyjádřil opět Helmholtz slovy: P o c h o p í t n ě j a k ý j e v n e z n a m e n á n í c j i n ě h o n e ž p ř e v é s t j e j n a z á k o n y N e w t o n o v y m e c h a n i k y. Fyzikům našeho století je mechanistické hledisko, právě Helmholtzem tak pádně vyjádřené, ovšem nepřijatelné. Což by velké dobrodružství poznání mohlo být u konce tak brzo? Cena vědy je pro mnohé v její nestálosti, napsal Picard⁵); věda, která by byla hotoová, by pro ně neměla žádný zájem.

Málo se připomíná, že k Helmholtzovu dílu *Über die Erhaltung der Kraft* (1847) sahá také - předhistorie Hertzova objevu elektromagnetického vlnění. Když v roce 1879, kdy zemřel Maxwell⁶), vypsal Akademie věd v Berlíně cenu na experimentální práci o vztahu mezi intenzitami nestacionárního elektromagnetického pole a dielektrickou polarizací izolátorů, začal Hertz na mocný popud Helmholtzův se svými klasickými pokusy. Bližší studium ukazuje, že se v počátcích dal při nich přímo vést také Helmholtzovými představami. Na listopadové schůzi (1887) Fyzikální společnosti v Berlíně učinil její předseda Helmholtz významný projev k referátu o experimentálním

⁴) William Thomson (viz pozn. ²)) přiznal otevřeně, že nemůže pochopit nic, co si nedovede znázornit - mechanickým modelem.

⁵) Emile Picard: *La science moderne et son état actuel*, 1905.

⁶) O Maxwellovi a jeho teoretické předpovědi, že elektromagnetické vlnění má všechny vlastnosti světelného vlnění, viz můj článek James Clerk Maxwell v *Rozhledech*, roč. 28, čís. 4, str. 65 až 67.

potvrzení Maxwellových výsledků Hertzovými pokusy. Zjištění, že vlastnosti elektromagnetického vlnění jsou úplně obdobné vlastnostem světelného vlnění, neváhal označit za největší a nejdůležitější objev 19. století.

A mechanistická fyzika? Naděje fyziků minulého století, že se podaří vytvořit mechanický model přírody a pevně stanovit nezvratný, byť jakkoliv nudný obraz vesmíru, se ovšem nesplnily. Při pohledu na vývoj názorů o světle jsme shledali⁷⁾, že jedna z nejdramatičtějších situací v dějinách fyziky vznikla tehdy, když v rodině fyzikálních substancí se zrodil éter, neboť se nepodařilo sestrojít takový jeho obraz, který by úplně vyhovoval zákonům mechaniky. Selhalo všechno úsilí fyziků, a to dát éteru skutečnost. Nezůstalo z něho nic než vlastnost, pro kterou byl vynalezen - schopnost přenášet elektromagnetické vlnění. Studium světelných dějů přispělo tak podstatně ke krizi mechanistické fyziky. Mechanistické představy Helmholtzovy měly přesto v dějinách fyziky svou důležitou úlohu. Důkladem toho je mj. kinetická teorie hmoty, která se vyvíjela pod jejich přímým vlivem.

Cvičení⁸⁾.

✱ Vzájemnou přeměnu obou mechanických energií demonstrujte na pohybu kyvadla. Vychýlíme-li je z polohy OA (viz obr. 1) do polohy OB a pustíme, můžeme učinit tato pozorování:

a) Kulička vystoupí na druhé straně do stejné výše h nad rovinou AA' nejen po dráze AB_1 , nýbrž i po dráze AC_1 nebo AC_2 , kterou jí vnutíme, přidržíme-li hřebík v bodě 1 nebo 2 na úsečce OA . Proč?

b) Je-li hřebík v bodě 3 úsečky OA , nemůže již kulička vystoupit do téže výše h nad rovinu AA' . V nejvyšším bodě své dráhy má proto ještě přebytek energie. Které? Co se proto stane?

c) V obr. vyznačte na tabuli další vodorovné přímky, jejichž vzdálenosti od přímky AA' jsou v poměru $1 : 4 : 9 : 16$. Jsou-li výšky kuličky kyvadla v tomto poměru, v jakém poměru jsou její rychlosti v bodě A ?

(Dokončení)

⁷⁾ Viz můj článek Huygensova teorie světla v Rozhledech roč. 38, čís. 7, str. 327 až 331.

⁸⁾ Cvičením doplňuji zároveň příklad, připojený v učebnici fyziky pro 9. ročník (1956) na str. 95 a 96 k čl. 74, kde k úlohám b), c) nebylo přihlédnuto.

Marie Bílková, Praha:

Správné výsledky cvičení z učebnice „Geometrie pro 12. ročník dvanáctiletých středních škol“

(Pokusná učebnice)

V uvedené učebnici se vyskytla v řešení úloh řada chybných výsledků, které znesnadňovaly práci žákům, rodičům i učitelům, jak bylo konstatováno v denním tisku, např. v Literárních novinách. Proto autorka provedla kontrolu výsledků, kterou rádi otiskujeme.

Redakce

I. Početní úlohy o tělesech

1

(Platí výsledky uvedené v učebnici)

3

1. 11,4 q. 2. 234 kg. 3. 160,76 cm. 4. 6 m, 10 m. 5. 151,3 kg.
6. 955 m³. 7. 161,5 m². 8. 28,41 kg. 9. $V = 135 \sqrt{15} \text{ cm}^3$,
 $P = 225 \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

4

1. 64,5 kg. 2. 261,3 g. 3. $d = 8,602 \text{ cm}$, $v = 17,2 \text{ cm}$. 4. $h = 2,7$,
vápenec. 5. $d = 0,9 \text{ cm}$, 6. 1,35 kg. 7. $V' : V = r : r' = 3 : 4$.
8. 15,25 l. 9. 31,4 m².

5

1. $P = 6a^2 \sqrt{2}$, $V = 2a^3$. 2. 1122 cm³. 3. $V = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{2}$, $P = a^2 \sqrt{3}$.
4. $P = \frac{1}{3} r^2 \sqrt{3}$, $V = \frac{1}{36} r^2 \sqrt{6}$, $\varphi = 70^\circ 28'$ 5. 30,1 m³. 6. $V = 291 \text{ m}^3$,
beton 23,6 m³. 7. 8,6 t. 8. 23,72 m³. 9. 102,5 m² nebo 103,5 m².

6

1. $V = 4337 \text{ cm}^3$ ($\frac{1}{3} \pi s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$). 2. 32,16 l. 3. 23. 4. 3. 5. 223 t.
6. $T = \pi R^2 v = 192 \pi$ nebo $T = \pi r^2 v = 108 \pi$. 7. 396 200 m³. 8. 3,5 m.

$$\begin{aligned}
1. \quad P &= \pi r (a + b) = 1876. \quad r = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P \cos \alpha}{2\pi}}. \quad 4. \quad a) \quad V_k \quad V_v = \\
&= M^3 : 3n (M - n)^2, \quad b) \quad P_k : P_v = \frac{M^2 (r + \sqrt{r^2 + v^2})}{2(M - n) [(M - n) r + nv]} \quad 5. \\
90,7 \text{ kg.} \quad 6. \quad 31,65 \text{ kg.} \quad 7. \quad 0,7546 \text{ m}^2. \quad 8. \quad P &= 8 \pi a^2 \cos \alpha, \quad V = \\
&= 2 \pi a^3 \sin 2 \alpha \cos \alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1. \quad 21,4 \text{ kg.} \quad 2. \quad P_v : P_k &= 1 : 8. \quad 3. \quad v = 12,76 \text{ km.} \quad 4. \quad P_1 : P_2 : P_3 = \\
&= 3 : 2 \quad 1. \quad 5. \quad P = 4 \pi r^2 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \doteq 132\,100\,000 \text{ km}^2. \\
6. \quad P &= 592,7 \text{ cm}^2. \quad 7. \quad \text{Poměr rovníků } x : y = 1 : 3,68, \quad P_1 : P_2 = 1 : 13,53.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1. \quad 18,8 \text{ t.} \quad 2. \quad r &\doteq 1732 \text{ km.} \quad 3. \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 = 18 \quad 3 \sqrt{2} \quad (26 + 15 \sqrt{3}). \\
4. \quad t &= r \left(1 - \sqrt{\frac{2h - 1}{2h}} \right) \doteq 0,345. \quad 5. \quad V_1 \quad V_2 = 2 : \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 6. \quad a) \\
V &\doteq 1003, \quad b) \quad V \doteq 3362. \quad 7. \quad V_1 \quad V_2 = 100 \quad 184 \text{ nebo } 100 : 54. \quad 8. \quad \text{Výška} \\
&\text{vyhovuje rovnici } v^3 - 12vr^2 + 8r^3 = 0. \quad 9. \quad 31,5 \text{ g.} \quad 10. \quad 46,8 \text{ g.}
\end{aligned}$$

II. Analytická geometrie

$$7. \quad a) \alpha = 53^\circ 08', \quad b) \alpha = 168^\circ 41'. \quad 8. \quad \text{Na přímce leží pouze bod } A.$$

$$7. \quad p = 11, \quad q = 18.$$

$$2. \quad \text{Úloha má čtyři řešení: } (x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2, (x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2, (x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2, (x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

(Dokončení)



František Veselý, Plzeň:

Vznik a vývoj Jednoty československých matematiků a fyziků

České národní obrození je doba některých změn hospodářského, politického a kulturního života, které probíhaly v českých zemích zhruba v posledních třech desetiletích 18. století a v první polovině 19. století. V té době byl feudální řád v rozkladu a byl zatlačován vznikajícím řádem kapitalistickým, jehož síla pramenila z rozvoje průmyslu podporovaného vývojem přírodních a technických věd. Boj české buržoazie i pracujícího lidu směřoval nejprve proti josefinskému centralismu a pak zpátečnickému absolutismu, jehož představitelem v Rakousku byl po 40 let až do svého pádu 1848 kancléř Metternich. I když pokrokové síly v revolučním roce 1848 utrpěly porážku, byly celkové úspěchy boje českého lidu tak velké, že doba českého národního obrození patří k nejvýznamnějším dobám českých dějin.

Školské reformy, které byly provedeny v rakouských zemích v době vlády Marie Terezie a Josefa II., přispěly ke zvýšení úrovně vyučování na všech školách, zejména na školách elementárních. Stinnou stránkou josefinských reforem vyučování na gymnasiích a universitách bylo však to, že vyučovací jazyk latinský byl nahrazován státním jazykem německým. Není proto divu, že vědecké práce našich učenců té doby byly psány jazykem německým. Teprve po roce 1848 začalo se v některých předmětech na gymnasiích a reálkách a v některých přednáškách na universitě užívat češtiny jako vyučovacího jazyka. V šedesátých letech minulého století dosáhli pak Čechové již toho, že se na některých gymnasiích a reálkách začalo vyučovat všem předmětům česky. Pražská vysoká škola technická byla od počátku školního roku 1869/70 rozdělena na ústav německý a ústav český. O dva roky později povolilo rakouské ministerstvo vyučování, aby František Josef Studnička (1836—1903) jako profesor matematiky a August Seydler (1849 až

1891) jako docent matematické fyziky mohli konat české přednášky na pražské universitě, která teprve roku 1882 byla rozdělena na českou a německou.

České národní obrození je velmi těsně spjato s vývojem umění i vědy v českých zemích. Cílem práce našich kulturních i vědeckých pracovníků této doby bylo zahladit především škody, které vznikly úpadkem českého jazyka v době pobělohorské a byly zvýšeny josefinskou germanizací škol a úřadů, a zajistit možnost, aby se český jazyk uplatňoval nejen v denním životě, ale i v oblasti umění a vědy. Konečným cílem těchto snah bylo povznést český národ na rovnocenného člena společenství kulturních národů a zajistit mu přitom i jeho politická práva. Bylo potřebí obohatit výrazové prostředky českého jazyka v mluvě básnické i v řeči vědecké. Je proto pochopitelné, že se české národní obrození projevovalo nejprve v umění slovesném a ve vědách jazykových i společenských. V přírodních vědách se projevil obrozenecké snahy později a ve vědách matematických a fyzikálních vyvrcholily teprve v šedesátých a sedmdesátých letech minulého století.

Největší zásluhu o obohacení českého jazyka básnického i vědeckého si získal J o s e f J u n g m a n n (1773—1847) s několika spolupracovníky, mezi nimiž byli i přírodovědci. Do roku 1823 spolupracoval s ním též J a n E v. P u r k y n ě (1787—1869), geniální biolog a tvůrce buněčné teorie, který však neplodnější část svého života v letech 1823—1849 strávil jako profesor na universitě ve Vratislavi, když pro něj v té době nebylo vhodného místa v Praze. Jungmann a jeho spolupracovníci obohacovali český jazyk tím, že do spisovného jazyka přejímali některá slova z nářečí (např. sklepení, značiti), nebo oživovali slova již zapomenutá (např. látka, tvar), nebo tvořili slova nová (např. ozvěna, oblíba, zápor, vloha), nebo konečně přejímali slova z jiných slovanských jazyků, a to zejména z ruštiny (např. příroda, vzduch, hlahol) nebo z polštiny (např. úvaha, věda). Je zajímavé sledovat vývoj některých termínů, kterých nyní běžně užíváme v přírodních vědách nebo v matematice a jejichž příklady uvedu.

Latinskému slovu *n a t u r a* odpovídají v cizích jazycích slova z něho vzniklá, jako např. *d i e N a t u r*, v němčině, nebo *n a t u r e* ve francouzštině a v angličtině ovšem s různou výslovností v těchto dvou jazycích. Toto slovo bylo ještě na počátku 19. století do češtiny předkládáno běžně jako *p ř i r o z e n í*. Teprve Jungmann a jeho spolupracovníci začali užívat pro slovo *n a t u r a* z ruštiny přejatého slova *p ř í r o d a*, které se ujalo nejprve v české mluvě básnické a teprve se značným zpožděním v řeči vědecké. Také označení *f y z i k a*, odvozené z řeckého slova *f y s i s* (příroda), se zdálo našim buditelům slovem pro lid obtížným a proto hledali vhodný jeho překlad do češtiny. Tak např. autor učebnic a jazykový novotář M a x m i l i á n Š i m e k užíval místo slova fyzika názvu *h i s t o r i e p ř i r o z e n ý c h v ě c í*, jehož původ

byl v německém slově *Naturgeschichte*. Jiné překlady slova fyzika najdete v názvech učebnic fyziky z první poloviny 19. století, z nichž některé tu uvedu. Roku 1819 vydal slovenský odborný pracovník *Pavel Michalko* učebnici s názvem *Fysika aneb učení o přirození*. Roku 1825 vydal *Karel Šádek* učebnici *Přírodoskum neb fysika čili učení o přirozených věcech*. Téhož roku vyšel první díl učebnice *Základové přírodnictví nebo fysiky a matematiky potažné neboli smíšené* od *Josefa Vojtěcha Sedláčka* (1785 až 1836), profesora na gymnasiu a filosofii*) v Plzni. Sedláčkův spolupracovník a pokračovatel v práci na gymnasiu a filosofii v Plzni *Josef František Smetana* (1801—1861) vydal roku 1842 spis s názvem *Silozpyt čili fysika*. Ze všech zmíněných názvů ujal se nejvíce název *silozpyt*, kterého se hojně užívalo ještě na počátku našeho století.

Vývoj české matematické terminologie v aritmetice ovlivnil spis *Počátkové arytmyky* od *Stanislava Vydry* (1741 až 1804), profesora elementární matematiky na pražské universitě, jehož vlastenecké působení vylíčil *Alois Jirásek* ve svém románu *F. L. Věk*. Silněji však působil na vývoj české matematické terminologie, zejména v geometrii, *J. V. Sedláček* svým spisem *Základové měřičství čili geometrie* (1822). Volbu jeho nových matematických termínů ovlivňoval též jeho starší přítel *Antonín Jaroslav Puchmajer* (1769—1820), který působil nedaleko Plzně v Radnicích, a učenci kruhu Jungmannova, jimž Sedláček posílal k posouzení své návrhy nových termínů. Z jeho spisu uvedu několik názvů, jichž se v matematice užívá dodnes, jako např. součinitel, rovnoběžný, rovnoběžník, čtverec, kruh, a několik termínů, které zanikly, přičemž v závorce udávám příslušné názvy nynější: stejnice (parabola), okolek (kružnice), plochoměřičství (planimetrie), tělesoměřičství (stereometrie) atd.

Když se *Jan Ev. Purkyně* vrátil z Vratislavi do Prahy, jako profesor fyziologie na Lékařské fakultě pražské university, začal opět silně ovlivňovat český vědecký život zejména v oboru věd přírodních. Z četných jeho zásluh z let padesátých a šedesátých minulého století připomenu tu jen ty výsledky jeho organizační práce, jejichž sté výročí připadá na letošní rok. Dne 15. I. 1862 vyšlo zásluhou *J. Ev. Purkyně* a skupiny lékařů I. číslo I. ročníku *Časopisu lékařů v českých pro lékaře, ranhojiče, a lékárníky*, který dosud vychází s názvem *Časopis českých lékařů* a téhož roku byl založen *Spolek českých lékařů*. Založení lékařského časopisu i spolku bylo dílem zkušených vědeckých pracovníků. Roku 1862

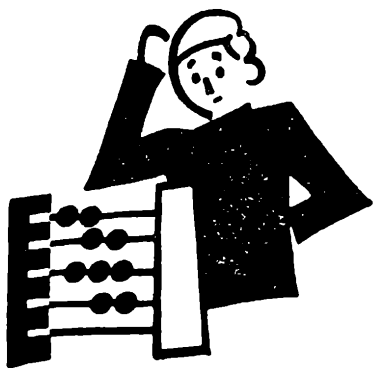
*) Názvem filosofie byly označovány samostatné filosofické fakulty, zřízené při některých gymnasiích, jako např. v Litomyšli, jak to jistě víte z *Jiráskovy povídky Filosofská historie*.

vznikl však také studentský spolek, z něhož se vyvinula nynější Jednota česko-slovenských matematiků a fyziků. O vznik této první naší matematicko-fyzikální společnosti se zasloužili mladí studenti ve věku 20—22 let a svým nadšením a vytrvalostí v práci pomohli vytvořit instituci, která v dalších třech desetiletích spolkovou činností a vydáváním časopisů, knih i školských učebnic, přispěla k dovršení obrozeneckého úsilí našich pracovníků ve vědách matematických a fyzikálních.

Dne 22. července 1861 sešli se čtyři posluchači filosofické fakulty pražské university J o s e f L a u n, J o s e f V a ň o u s, J o s e f F i n g e r a G a b r i e l B l a ž e k, aby vypracovali první návrh stanov studentského spolku, v němž si kolektivní práci chtěli studium matematiky a fyziky na universitě při své přípravě k učitelskému povolání usnadňovat. Jejich návrh se stal předmětem dlouhých jednání politických i školských úřadů, proto teprve dne 28. března 1862 se konala ustavující schůze studentského sdružení s českou a německou jednací řečí a s dvojjazyčným názvem S p o l e k p r o v o l n é p ř e d n á š k y z m a t h e m a t i k y a f y z i k y. Jak již název spolku částečně naznačoval, konali v něm jeho členové odborné přednášky, které ostatní posluchači kritizovali a hodnotili. Studenti si brzy založili i spolkovou knihovnu, k níž dal dobrý základ darem větší části své knihovny J a k u b F i l i p K u l i k (1793—1863), profesor vyšší matematiky na pražské universitě. Poněvadž členové i funkcionáři tohoto studentského spolku se každý rok hodně měnili, byla intenzita spolkové činnosti kolísavá. Přitom však čeští členové projevovali stále větší zájem o práci spolku než němečtí členové a proto již od počátku škol. roku 1863/64 byli všichni funkcionáři spolku Češi. Činnost spolku hodně oživila, když se na podzim roku 1868 jeho vedení ujal M í r u m i l N e u m a n n jako předseda a F r a n t i š e k H o u d e k jako jednatel, kteří připravili i reorganizaci spolku. Podle nových spolkových stanov přijatých roku 1862 dostal spolek nový název *Jednota českých matematiků*, ačkoli sdružoval k práci i fyziky. Od té doby členy spolku býti mohli i nestudenti. Poněvadž pak jimi byli ve velkém počtu učitelé matematiky a fyziky našich středních i vysokých škol, byla tím zajištěna větší stabilita členského kolektivu.

Po své reorganizaci rozvinula JČM velmi živou spolkovou činnost. Pořádala odborné přednášky a diskuse, pečovala o budování spolkové knihovny, navazovala styky se zahraničními vědeckými pracovníky a učenými společnostmi a zahájila publikační činnost. Od roku 1872 začala vydávat *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. Z něho se později vyvinulo specializací jeho úkolů několik jiných časopisů, k nimž patří i náš časopis. O jeho vzniku a vývoji bude v příštím čísle samostatný článek.

(Pokračování)

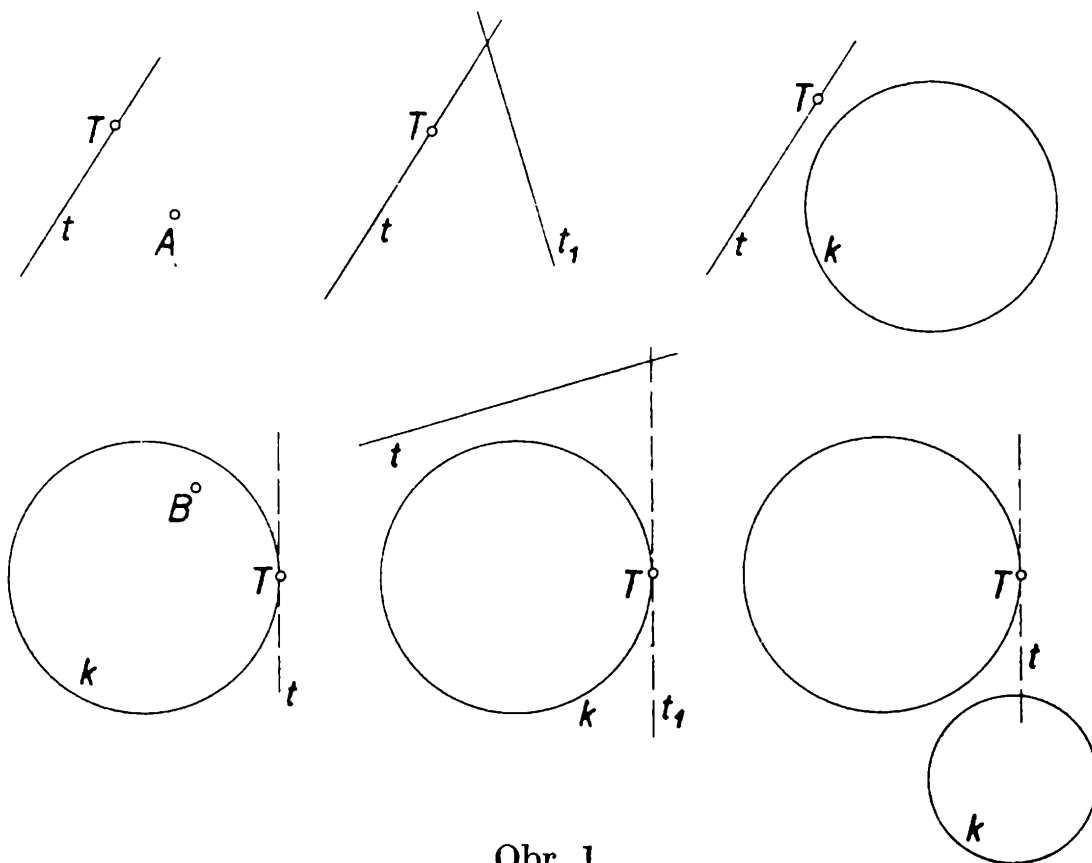


Karel Špaček, ČVUT, Praha:

Pappovy úlohy

Tímto názvem rozumíme šest úloh na sestrojení kružnice. Jsou to tyto úlohy:

1. Je sestrojiti kružnici, je-li dána tečna t s bodem dotyku T a k tomu



Obr. 1

a) další bod B , nebo b) další tečna t_1 nebo c) kružnice k_1 , které se má hledaná kružnice dotýkat.

2. Je sestrojiti kružnici, která se dotýká dané kružnice k v bodě T a přitom

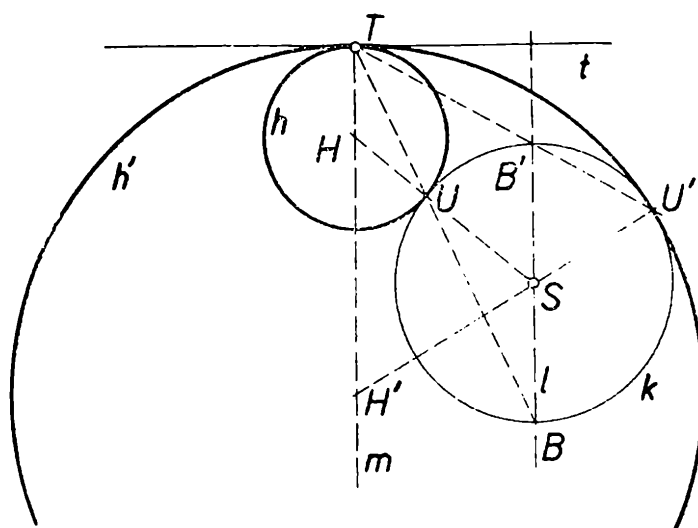
a) prochází daným bodem A nebo b) se dotýká dané přímky t_1 nebo c) se dotýká další dané kružnice k_1 .

Symbolicky budeme jednotlivé úlohy značit takto (obr. 1):

- | | | | |
|-----|-------------|-----|-------------|
| 1a) | $t(T) B,$ | 2a) | $k(T) B,$ |
| 1b) | $t(T) t_1,$ | 2b) | $k(T) t_1,$ |
| 1c) | $t(T) k,$ | 2c) | $k(T) k_1.$ |

Úlohy 1a, 1b jsou zcela elementární. Úlohy 2a se převádí na 1a tím, že v bodě T sestrojíme tečnu ke kružnici k . Úloha 2b se převede na 1b tím, že v bodě T sestrojíme tečnu ke kružnici k . Úlohu 2c převedeme na 1c tak, že v bodě T sestrojíme tečnu ke kružnici k . Nejzajímavější je tedy úloha 1c a tu v tomto článku rozřešíme třemi různými způsoby.

1. Řešení stejnolehlostí (obr. 2). Výsledná kružnice h se středem H je stejnolehlá s danou kružnicí k pro střed stejnolehlosti ve společném bodě dotyku U . V této stejnolehlosti si odpovídají středy



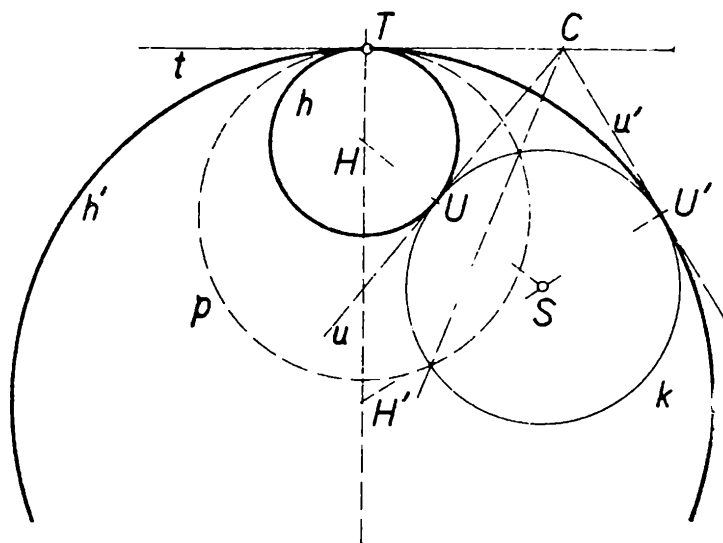
Obr. 2

H, S kružnic h, k , přímce $m \equiv TH$ ($m \perp t$) odpovídá přímka l s ní rovnoběžná a procházející bodem S . Bodu T odpovídá bod B - průsečík přímky l s kružnicí. Když si toto vše uvědomíme, sestrojíme kružnici h tak, že sestrojíme přímku $m \equiv TH$ a na ní musí ležet střed H hledané kružnice, neboť přímka m je geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají přímky t v bodě T . Přímka TB vytne na kružnici k bod U (střed stejnolehlosti), který je společným bodem dotyku kružnic k, h . Další je již jasné.

Poněvadž přímka l protíná kružnici k ve dvou různých bodech B, B' , dostaneme tak dva body U, U' a dvě různé kružnice h, h' . Úloha má tedy nejvýše dvě různá řešení. Jediné řešení bychom dostali, kdyby přímka t byla současně tečnou dané kružnice. Kdyby však kružnice k procházela bodem T , nedostali bychom žádné řešení.

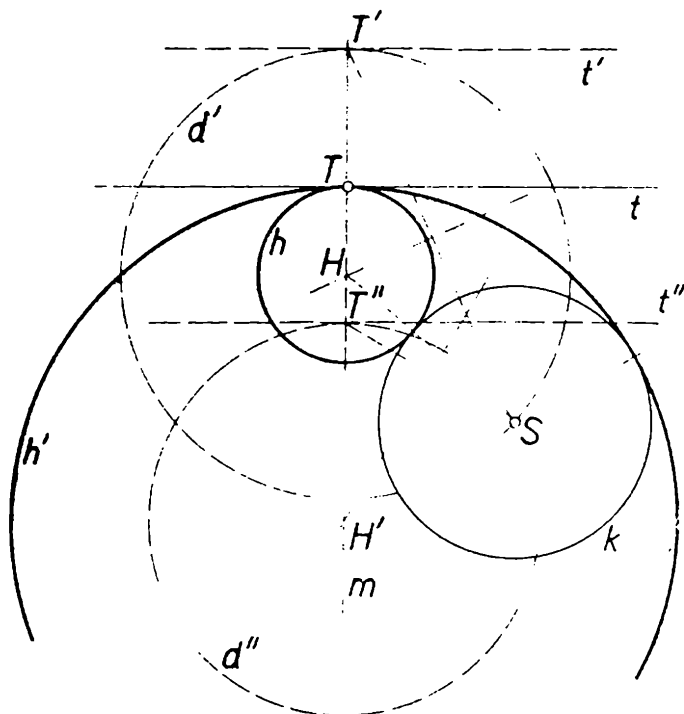
2. Řešení pomocí chordály. Pro ty, kteří nevědí, co je

to chordála dvou kružnic, chtěl bych tento pojem trochu vysvětlit. Jestliže se dvě kružnice protínají, je chordála spojnice jejich průsečíků. Jestliže se dotýkají, pak chordála je společná tečna ve společném bodě dotyku. Jsou-li dány tři kružnice, jejichž středy neleží v přím-



Obr. 3

ce, pak každé dvě z nich mají chordálu. Jsou tu tedy tři chordály, které procházejí jediným bodem. Tuto důležitou vlastnost uvádíme bez důkazu. Na základě této věty se dá sestavit chordála dvou kružnic, které



Obr. 4

nemají žádný společný bod. Tolik úvodem a nyní můžeme přistoupit k druhému řešení naší úlohy.

Zvolme libovolnou pomocnou kružnici p , která se přímkou t dotýká

v bodě T a protíná danou kružnici k (obr. 3). Máme nyní tři kružnice: danou k , hledanou h , pomocnou p . Podle toho, co jsme si dříve bez důkazu řekli, jsou tu tyto chordály: chordála kružnic h , p , a to tečna t , chordála kružnic k , p , a to je spojnice jejich průsečíků a posléze chordála kružnic k , h , a to je jejich společná tečna u . Tyto tři chordály procházejí jedním bodem C , který je průsečíkem prvních dvou chordál. Tím je dáno řešení úlohy.

Z bodu C můžeme sestrojit ke kružnici k dvě různé tečny u , u' , a to nás přivádí ke dvěma výsledkům.

3. Ř e š e n í d i l a t a c í (obr. 4). Kolem středu H opišme kružnici d' , jejíž poloměr je roven součtu poloměrů kružnice h a kružnice k . Kružnice d' prochází bodem S , tj. středem dané kružnice k . Při této změně (říkáme jí d i l a t a c e) přešel bod T v bod T' a tečna t v tečnu $t' || t$ kružnice d' v bodě T' . Kružnici d' můžeme snadno sestrojit, neboť se dotýká přímky t' (tato přímka je rovnoběžná s přímkou t ve vzdálenosti poloměru kružnice k) v bodě T' a prochází bodem S . Střed H této kružnice je středem hledané kružnice h .

Tečna t může přejít i v tečnu $t'' || t$ (která leží v opačné polorovině vyřezané tečnou t než přímkou t') a potom stejným způsobem obdržíme kružnici d' , jejíž střed H' je středem druhé výsledné kružnice h' .

Z d e n ě k M i k u l í k, Uničov:

Řešení diofantské rovnice $ax + by = cz^2$

Diofantskou rovnicí rozumíme rovnici s celočíselnými koeficienty, jež má být řešena celými čísly. (Diophantos z Alexandrie byl řecký matematik ve III. stol. n. l.).

Uvažovaná rovnice

$$ax + by = cz^2, \quad (1)$$

kde a , b , c jsou daná celá čísla a celá čísla x , y , z hledané neznámé, je diofantskou rovnicí nelineární, neboť neznámá z se vyskytuje v druhé mocnině.

Než přistoupíme k řešení rovnice (1), připomeňme si, co je známo o řešení lineární diofantské rovnice

$$Ax + By = C, \quad (2)$$

v níž písmena A , B , C a x , y značí celá čísla.

Nadále v celém článku bude slovo „číslo“ označovat vždy celé číslo a slovo „rovnice“ vždy diofantskou rovnicí.

Předběžný výklad použitých symbolů:

1. výraz d/C vyjadřuje, že číslo d je dělitelem čísla C , např. $3/6$, $2/2$, $1/7$ ap.;

2. je-li kladné číslo d největším společným dělitelem čísel A , B , značíme $(A, B) = d$. Jde-li o nesoudělná čísla, tj. taková čísla, jejichž největší společný dělitel je číslo 1, píšeme $(A, B) = 1$, např. $(4, 8) = 4$, $(5, 7) = 1$ ap.

O lineární rovnici (2) je známo, že je řešitelná, jestliže největší společný dělitel d čísel A , B je současně dělitelem čísla C [$(A, B) = d$, d/C], tedy při nesoudělných číslech A , B [$(A, B) = 1$] má vždy řešení, neboť $1/C$ (číslo 1 je dělitelem každého čísla C).

Je-li splněn uvedený předpoklad, a je-li dvojice x_0, y_0 jedno (libovolné) řešení rovnice (2), je její řešení dáno vztahy

$$x = x_0 + \frac{B}{d} t$$

$$y = y_0 - \frac{A}{d} t,$$

kde za t možno dosadit libovolné celé číslo. Jiných řešení rovnice (2) nemá.

D ů k a z: $Ax_0 + By_0 = C$, $A \left(x_0 + \frac{B}{d} t \right) + B \left(y_0 - \frac{A}{d} t \right) = Ax_0 + By_0 + \frac{AB}{d} t - \frac{AB}{d} t = C$. Další část důkazu, že uvedené obecné řešení rovnice (2) je jediné, najde čtenář v knize K. Rychlíka, Ú v o d d o e l e m e n t á r n í č í s e l n é t e o r i e, str. 42—43.

Znalosti řešení lineární rovnice (2) využijeme při řešení rovnice (1).

Vylučme však nejprve tyto případy:

1. všechny tři konstanty jsou rovny nule - libovolné řešení,
2. dvě z konstant jsou rovny nule (např. pro $a = b = 0$, $c \neq 0$ je $z = 0$ ap.),

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ - jde o lineární rovnici vždy řešitelnou.

Případy $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, nebo $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ není nutné zvlášť probírat. Viz dále 2a), b), c).

Přistupme nyní k řešení rovnice (1), jestliže všechna tři čísla a , b , c jsou různá od nuly, nebo jen jedno z čísel a , b je rovno nule.

Buď je $(a, b, c) = d$, $d > 1$, anebo je $(a, b, c) = 1$.

1. Je-li $d > 1$, je možno vydělit (1) tímto d , takže $(a', b', c') = 1$;

2. $(a, b, c) = 1$;

- a) $(a, b) = 1$.

Položme-li v (1) $|z| = k$ (k libovolné číslo), můžeme pokládat rovnici

$$ax + by = ck^2 \tag{3}$$

za lineární rovnici typu (2) s pravou stranou $C = ck^2$ a s nesoudělnými

a, b . Její obecné řešení je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 - at, \end{aligned} \quad (4)$$

kde t je libovolné číslo, dvojice x_0, y_0 jedno její řešení. Obecné řešení (1) je tedy dáno vztahy

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 - at \\ |z| &= k, \end{aligned} \quad (I)$$

kde t, k jsou libovolná čísla.

D ů k a z: $ax_0 + by_0 = ck^2$, $ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = (ax_0 + by_0) + abt - abt = ck^2 = cz^2$;

b) $(a, b) = d$, tedy $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, d se dá psát ve tvaru $d = d_1^2$. Položme v (1) $|z| = \sqrt{d} k = d_1 k$, k libovolné číslo a dosadíme do (1)

$$a_1 d_1^2 x + b_1 d_1^2 y = c d_1^2 k^2 \quad | \quad d_1^2 \quad (5)$$

$$a_1 x + b_1 y = ck^2, \quad (6)$$

kde $(a_1, b_1) = 1$. Je-li dvojice x_0, y_0 řešením (6), dostaneme obecné řešení (6)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b_1 t \\ y &= y_0 - a_1 t \end{aligned} \quad (7)$$

a obecné řešení (1)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b_1 t \\ y &= y_0 - a_1 t \\ |z| &= \sqrt{d} k = d_1 k, \end{aligned} \quad (II)$$

kde t, k jsou libovolná čísla.

D ů k a z. $a_1 x_0 + b_1 y_0 = ck^2$, $ax + by = a(x_0 + b_1 t) + b(y_0 - a_1 t) = a_1 d(x_0 + b_1 t) + b_1 d(y_0 - a_1 t) = d(a_1 x_0 + b_1 y_0) + d(a_1 b_1 t - a_1 b_1 t) = dck^2 = cz^2$;

c) $(a, b) = d$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, ale d není druhou mocninou žádného čísla. Položme v (1) $|z| = dk$, k libovolné číslo a dosadíme do (1)

$$a_1 dx + b_1 dy = cd^2 k^2 \quad | \quad d \quad (8)$$

$$a_1 x + b_1 y = cd k^2, \quad (9)$$

kde $(a_1, b_1) = 1$. Je-li dvojice x_0, y_0 řešením (9), dostaneme obecné řešení (9) ve tvaru (7) a obecné řešení (1)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b_1 t \\ y &= y_0 - a_1 t \\ |z| &= dk \end{aligned} \quad (III)$$

D ů k a z. $a_1 x_0 + b_1 y_0 = cd k^2$, $ax + by = a(x_0 + b_1 t) + b(y_0 - a_1 t) = a_1 d(x_0 + b_1 t) + b_1 d(y_0 - a_1 t) = d(a_1 x_0 + b_1 y_0) + d(a_1 b_1 t - a_1 b_1 t) = d \cdot cd k^2 = cz^2$.

Obecné řešení nelineární rovnice (1) ve všech třech případech 2a) b) c) je jediné, tj. není jiného řešení.

D ů k a z: Obecné řešení lineární rovnice je jediné (viz uvedená kniha).

1. Jelikož tedy (4) je jediným obecným řešením (3), je jediným obecným řešením i (1), bude-li $|z| = k$, takže i (I) je jediným obecným řešením (1) v případě 2a).

2. Jelikož (7) je jediným obecným řešením (6), resp. (9), kde dvojice x_0, y_0 je jedno z řešení (6), resp. (9), je i jediným obecným řešením (5), resp. (8), tj. rovnic $ax + by = cd k^2$, resp. $ax + by = cd^2 k^2$. Rovnice (7) je tedy též jediným obecným řešením (1), bude-li $|z| = \sqrt[3]{d} \cdot k$, resp. $|z| = dk$, takže (II), resp. (III), jsou jediná obecná řešení rovnice (1) v případech 2b), resp. 2c).

P ř í k l a d y.

$$\text{ad 1. } 3x + 6y = 12z^2 / 3 \\ x + 2y = 4z^2.$$

$$\text{ad 2. a) } x + 2y = 4z^2 \quad x = 2k^2 + 2t \\ (1,2) = 1 \quad |z| = k \quad y = k^2 - t \\ x + 2y = 4k^2 \quad z = \pm k \\ x_0 = 2k^2, y_0 = k^2 \quad (k, t \text{ libovolná čísla}).$$

$$\text{Zk.: } L = 2k^2 + 2t + 2k^2 - 2t = 4k^2, P = 4k^2, L = P.$$

$$\text{b) } 18x - 27y = 2z^2 \quad x = k^2 - 3t \\ (18, -27) = 9, |z| = \sqrt[3]{9} \quad k = 3k \quad y = -2t \\ 18x - 27y = 18k^2 / 9 \quad z = \pm 3k \\ 2x - 3y = 2k^2 \quad (k, t \text{ libovolná čísla}) \\ (2, -3) = 1, x_0 = k^2, y^2 = 0$$

$$\text{Zk.: } L = 18k^2 - 54t + 54t = 18k^2, P = 18k^2, L = P.$$

$$\text{c) } -5x + 20y = 7z^2 \quad x = -39k^2 + 4t \\ (-5, 20) = 5, |z| = 5k \quad y = -k^2 + t \\ -5x + 20y = 175k^2 / 5 \quad z = \pm 5k \\ -x + 4y = 35k^2 \quad (k, t \text{ libovolná čísla}) \\ (-1, 4) = 1, x_0 = -39k^2, y_0 = -k^2$$

$$\text{Zk.: } L = 195k^2 - 20t - 20k^2 + 20t = 175k^2, P = 175k^2, L = P.$$

$$\text{Příklady k procvičení. } 5x - 10y = -35z^2, 16x + 16y = -7z^2, \\ 7x - 21y = z^2.$$

I n ž. D r. O t a k a r L e m i n g e r, Ústí n. L.:

Užití věty Cavalieriho k určení objemu těles

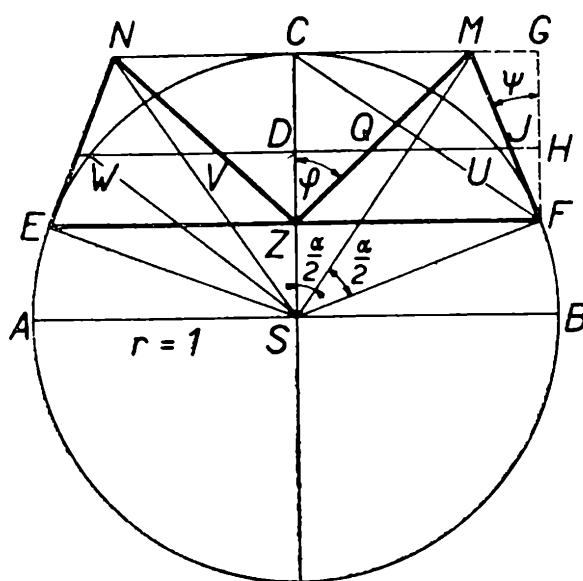
Italský matematik B o n a v e n t u r a C a v a l i e r i (nar. v Miláně 1598, zemřel v Boloni 1647) vytvořil při úvahách o křivých čarách a křivých plochách teorii, podle níž se skládají geometrické útvary z elementárních částic, dále již nedělitelných. Tím se stal jedním ze zakladatelů počtu diferenciálního a integrálního a předchůdcem Newtonovým. Tak podle Cavalieriho se skládají tělesa z extrémního počtu na sebe na-

skládaných a dále již nedělitelných destiček, rovnoběžných s jejich podstavou. Tělesa stejné výšky mají stejný počet těchto elementárních destiček (srovnejme se zákonem Avogadrovým v chemii). Objem tělesa je dán počtem a plochami, nikoli však tvarem těchto elementárních destiček. Důsledkem těchto předpokladů byla následující poučka, kterou Cavalieri vyslovil a která se nazývá podle něho větou Cavalieriho:

Tělesa o stejném obsahu podstav a o stejných výškách mají stejný objem, jestliže jsou protínána každou libovolnou rovinou, vedenou ve stejné vzdálenosti rovnoběžně s jejich podstavami, vždy v rovnoplochých útvarech.

Tuto větu znal s velkou pravděpodobností již Archimedes. Spis o tom se však nezachoval.

Jako příklad užití věty Cavalieriho podáme odvození málo známých vzorců obecného tvaru pro výpočet objemu kulové úseče a kulové vrstvy. K tomu cíli je třeba určit srovnávací těleso o snadno vypočítatelném objemu a o jednoduchém tvaru. Jelikož řez vedený kulovou úsečí rovnoběžně s podstavou představuje vždy kruh, bude zřejmě srovnávací těleso rotační. Má-li se nyní plocha kruhu vždy vyjádřit plochou jiného rovinného útvaru, bude nejjednodušší vyjádřit ji plochou mezikruží. Poněvadž plochu mezikruží o poloměrech r_1 a r_2 je možno opět



Obr. 1

vyjádřit plochou kruhu o poloměru $r = \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$, budeme hledat vhodný rozklad výrazu pro čtverec poloměru kruhového řezu kulové úseče, rovnoběžného se základnou, v rozdíl dvou čtverců. Archimedes použil při určování objemu koule známé rovnosti $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Ukážeme, že je možno nalézt ještě jiný, pro náš případ výhodnější rozklad, který vede k velmi obecnému vyjádření objemu kulové úseče jednoduše stanovitelným objemem srovnávacího tělesa.

Uvažovaná úseč kulová $\cap ECF$ (obr. 1) má podstavu o poloměru $\varrho = EZ = FZ$ a je příslušná jednotkové kouli o poloměru $r = 1$. Tedy $\varrho = \sin \alpha$ a $SZ = \cos \alpha$, neboť $CS = 1$, $\frac{SZ}{r} = \cos \alpha$, $r = 1$. Potom $CZ = CS - SZ = 1 - \cos \alpha$. Označme $CZ = v$, načež $v = 1 - \cos \alpha$. Veďme nyní v libovolné výši $w = kv = k(1 - \cos \alpha) = DZ$ řez UW rovnoběžný s podstavou úseče EF , přičemž je k libovolné číslo mezi 0 a 1, tedy $0 < k < 1$ ($UW \parallel EF$ jsou pravoúhlé průměty příslušných kruhů

na nákresnu). O poloměru $\varrho_k = DU = DW$ zvoleného kruhového řezu danou kulovou úsečí na základě Pythagorovy věty, aplikované na trojúhelník $\triangle DSW$, platí

$$\varrho_k^2 = r^2 - (SZ + ZD)^2 = 1 - [\cos \alpha + k(1 - \cos \alpha)]^2. \quad (1)$$

Naším úkolem bude nyní rozložit tento čtverec poloměru ϱ_k v rozdíl dvou čtverců ϱ_{k1} , ϱ_{k2} odlišných od vztahů (1). Proto budeme vztah (1) upravovat takto:

$$\varrho_k^2 = 1 - [\cos \alpha + k(1 - \cos \alpha)]^2 = 1 - [(1 - k) \cos \alpha + k]^2 = 1 - k^2 - (1 - k)^2 \cos^2 \alpha - 2k(1 - k) \cos \alpha.$$

Poněvadž $1 - k^2 = (1 - k)^2 + 2k(1 - k)$ a $1 - \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$\text{potom } \varrho_k^2 = (1 - k)^2 + 2k(1 - k) - \cos^2 \alpha (1 - k)^2 - 2k(1 - k) \cos \alpha =$$

$$= (1 - k)^2 \sin^2 \alpha + 2k(1 - k) \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (1 - k)^2 \sin^2 \alpha +$$

$$+ 2k(1 - k) \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \left[(1 - k) \sin \alpha + k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]^2 - \left(k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 =$$

$$= \left[\sin \alpha - k \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 - \left(k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad (2)$$

Naznačeným způsobem jsme rozložili čtverec poloměru $\varrho_k = DU = DW$ libovolného řezu danou kulovou úsečí, rovnoběžného s její podstavou EF v rozdíl čtverců dvou poloměrů ϱ_{k1} a ϱ_{k2} , kde

$$\varrho_{k1} = DH - HJ = \sin \alpha - k \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (3)$$

$$\varrho_{k2} = DQ = k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

Plochu libovolného řezu WU rovnoběžného s podstavou dané kulové úseče možno tedy vyjádřit obsahem mezikruží o poloměrech ϱ_{k1} , ϱ_{k2} a o tloušťce $JQ = (1 - k) \sin \alpha$. Potom těleso o stejném objemu jako daná úseč ve smyslu věty Cavalieriho bude tvořeno řadou na sebe naskládaných mezikruží, řídících se hořejšími vztahy (1), (2), (3), (4). Podstava tohoto tělesa bude totožná s podstavou uvažované úseče, neboť zde $k = 0$, a tedy $\varrho_{k1} = \sin \alpha$, $\varrho_{k2} = 0$, hořejší pak jeho zakončení bude

tvořit kružnice o poloměru $\varrho_{k1} = \varrho_{k2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \varrho' = CM$, poněvadž

zde $k = 1$. Vzhledem k tomu, že zmíněné těleso je tvořeno mezikružími se středy na ose CZ dané úseče, bude také souměrné podle této osy, bude rotační s rotační osou opět CZ . Profil hledaného tělesa, tj. jeho kolmý průmět do nákresny, představuje geometrické místo krajních bodů průmětů jednotlivých mezikruží, těleso skládajících, do nákresny. Abychom

jej určili, všimněme si nejprve úhlu $\varphi = \sphericalangle CZM$, sevřeného osou CZ a spojnicí středu Z s koncovým bodem M průmětu zmíněné kružnice MN těleso zakončující. O tomto úhlu platí

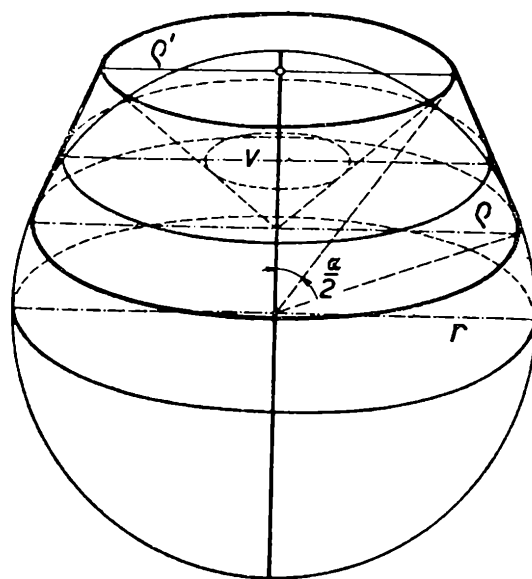
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{CM}{CZ} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha} = \frac{k_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{k_1 (1 - \cos \alpha)} = \\ &= \dots \frac{k_n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{k_n (1 - \cos \alpha)} = \frac{k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{k (1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

pročež vnitřní profil našeho tělesa je tvořen přeponou $MZ = NZ$ pravoúhlého trojúhelníka $\triangle CZM$. Podobně platí o úhlu ψ , sevřeném kolmicí FG , vedenou koncovým bodem F průmětu základny dané úseče na tuto a přímkovou spojnicí tohoto bodu F se zmíněným bodem M

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{GM}{FG} = \frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha} = \frac{k_1 \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{k_1 (1 - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{k_n \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{k_n (1 - \cos \alpha)} = \frac{k \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{k (1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

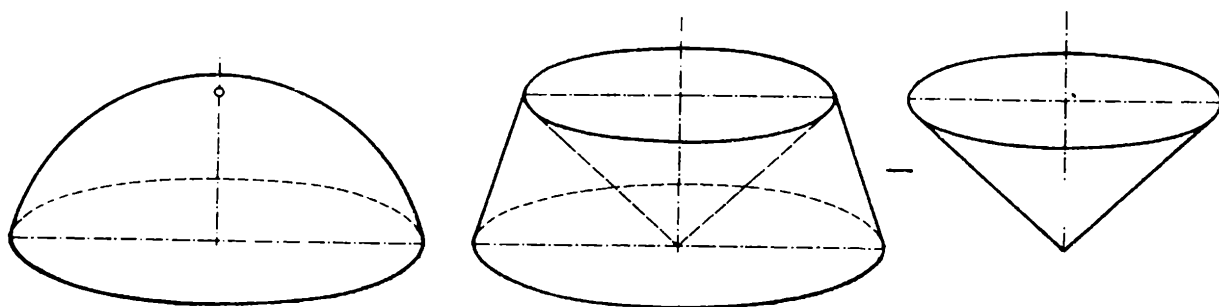
Vnější profilovou část hledaného tělesa představuje tedy přepona FM pravouhlého trojúhelníka $\triangle GFM$. Potom celkový profil určovaného tělesa, tj. jeho kolmý průmět do nákresny, je tvořen dvěma shodnými trojúhelníky $\triangle FMZ$ a $\triangle ENZ$, které mají společný vrchol Z ; jsou souměrné podle osy CZ a jejich podstavy EZ, FZ leží v jedné přímce. Hledané těleso pak vznikne rotací těchto trojúhelníků kolem osy CZ .

Na základě toho určované těleso stejného objemu, jako daná kulová úseč, představuje dutý komolý kužel, pozůstávající z komolého kužele se spodní podstavou totožnou s podstavou dané kulové úseče $\varrho = r \cdot \sin \alpha$, o poloměru horní podstavy $\varrho' = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = CM = CN$ a o výšce totožné s výškou úseče [tedy $v = r (1 - \cos \alpha)$], zmenšeného o kužel stejné výšky $v = r (1 - \cos \alpha)$ a o poloměru podstavy $\varrho' = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (obr. 2 a obr. 3).



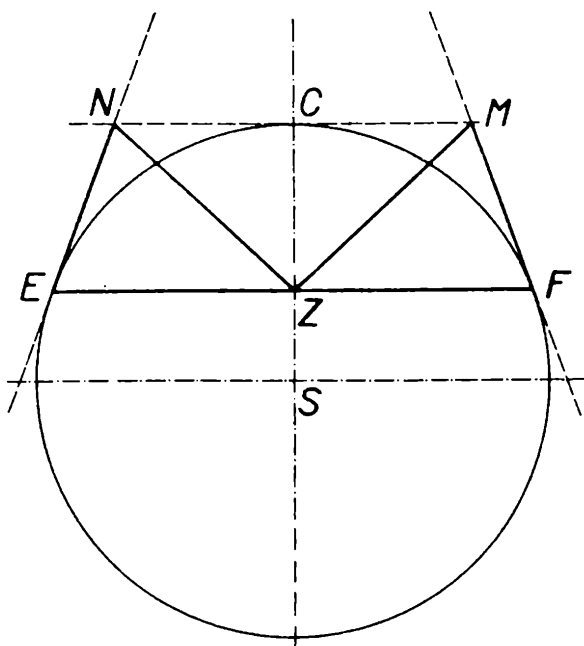
Obr. 2

Vnější plášť tohoto dutého komolého kužele se dotýká povrchu koule podél kružnice, která ohraničuje podstavu dané kulové úseče (obr. 4). Zmíněný úhel α je zorný úhel poloměru podstavy dané kulové úseče s vrcholem ve středu koule úseči příslušné.

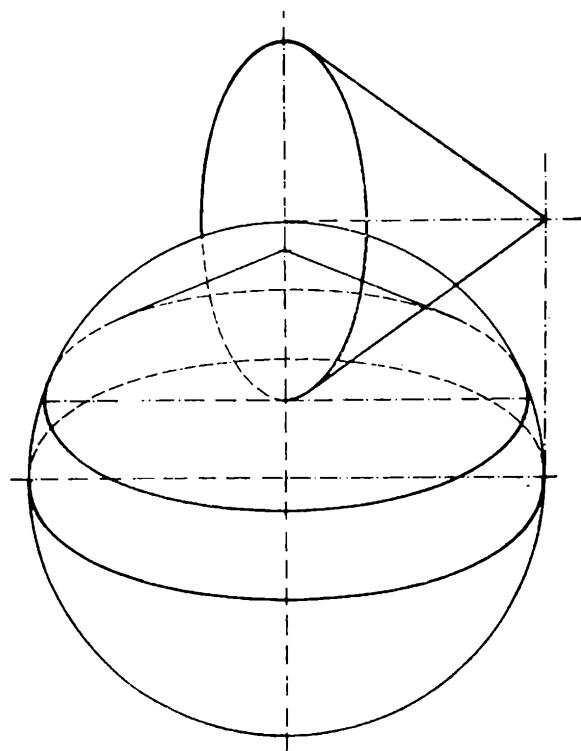


Obr. 3

Je-li tedy poloměr koule úseči příslušné r , poloměr podstavy úseče $\varrho = r \cdot \sin \alpha$, její výška $v = r (1 - \cos \alpha)$ a poloměr kružnice, zakončující dutý komolý kužel $\varrho' = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, pak o objemu V této kulové úseče platí



Obr. 4



Obr. 5

$$V = \frac{\pi v}{3} (\varrho^2 + \varrho \varrho' + \varrho'^2) - \frac{\pi v}{3} \varrho'^2 = \frac{\pi v}{3} (\varrho^2 + \varrho \varrho') = \frac{\pi r^2 v}{3} \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5)$$

Dosazením za $\varrho\varrho' = rv$ (plyne z podobnosti trojúhelníků ΔMCS a ΔCZF) dostáváme dále

$$V = \frac{\pi v}{3} (\varrho^2 + rv) = \frac{\pi \varrho^2 v}{3} + \frac{\pi v^2 r}{3}. \quad (6)$$

Podle tohoto vzorce (6) objem kulové úseče je roven součtu objemů dvou kuželů, z nichž první má podstavu i výšku totožnou s podstavou i výškou kuželové úseče, druhý má poloměr podstavy rovný výšce úseče a výšku rovnou poloměru úseči příslušné. Uvedený druhý kužel představuje zároveň objem „slupky“ uvažované kulové úseče (obr. 5).

Dosazením $r = \frac{v^2 + \varrho^2}{2v}$ (plyne ze vztahu $(r - v)^2 + \varrho^2 = r^2$) do (6) dostaneme známý vzorec pro objem kulové úseče

$$V = \frac{\pi v}{3} \left(\varrho^2 + v \frac{v^2 + \varrho^2}{2v} \right) = \frac{\pi v}{6} (3\varrho^2 + v^2), \quad (7)$$

používaný v případě, je-li dáno pouze ϱ, v .

Podobně dosazení $\varrho^2 = 2rv - v^2$ do (6) poskytne druhý známý vzorec pro objem kulové úseče

$$V = \frac{\pi v}{3} (3rv - v^2) = \frac{\pi v^2}{3} (3r - v) \quad (8)$$

používaný v případě daného r a v .

Tohoto rozkladu čtverce poloměru ϱ_k libovolného kruhového řezu kulovou úsečí, rovnoběžného s její podstavou, v rozdíl dvou čtverců možno také použít k určení objemu V' kulové vrstvy. Uvažujme kulovou vrstvu $EWUF$ (obr. 1 a obr. 2) o poloměru větší podstavy $\varrho = EZ = FZ = r \sin \alpha$, o poloměru menší podstavy $\varrho_k = DU$, o výšce $w = kv = DZ$, kde $v = CZ$ je výška původní kulové úseče, ze které vznikla uvažovaná kulová vrstva řezem, vedeným rovnoběžně s podstavou této úseče ve vzdálenosti w . Na základě věty Cavalieriho a co bylo již řečeno, rovná se objem V' této kulové vrstvy objemu dutého komolého kužele, tvořeného plným komolým kuželem o větší podstavě s poloměrem ϱ , o menší podstavě s poloměrem $DJ = \varrho - k\varrho + k\varrho'$ a o výšce $w = kv$, zmenšeným o objem kužele s poloměrem podstavy $DQ = k\varrho'$ a opět o výšce $w = kv$.

Tedy

$$V' = \frac{\pi w}{3} [\varrho^2 + \varrho^2 - k\varrho^2 + k\varrho\varrho' + \varrho^2 - 2k\varrho^2 + 2k\varrho\varrho' + k^2\varrho^2 - 2k^2\varrho\varrho' + (k\varrho')^2] - \frac{\pi w}{3} (k\varrho')^2 = \frac{\pi w}{3} [\varrho^2 (3 - 3k + k^2) + \varrho\varrho' (3k - 2k^2)]. \quad (9)$$

Dosazením za $k = \frac{w}{v}$, $\varrho\varrho' = vr = \frac{1}{2} (v^2 + \varrho^2)$ a úpravou obdržíme

$$V' = \frac{\pi w}{3} \left[3\rho^2 \left(1 - \frac{w}{2v} \right) + w \left(\frac{3}{2} v - w \right) \right] =$$

$$= \frac{\pi w}{3} \left[3\rho^2 - \frac{3}{2} w \left(\frac{\rho^2}{v} - v \right) - w^2 \right]. \quad (10)$$

To je málo známý vzorec pro výpočet objemu kulové vrstvy, použitelný v případě, že je dáno ρ , w a v , které značí výšku původní kulové úseče, ze které vznikla uvažovaná kulová vrstva řezem, vedeným rovnoběžně s podstavou této úseče ve vzdálenosti w .

Dosazením za $\frac{\rho^2}{v} - v = \frac{\rho^2 - \rho_k^2 - w^2}{w}$, což plyne z výrazu $(r - v + w)^2 + \rho_k^2 = r^2$ v hořejším vzorci (10), získáme známý vzorec pro objem kulové vrstvy

$$V' = \frac{\pi w}{6} (3\rho^2 + 3\rho_k^2 + w^2) \quad (11)$$

používaný v případě, že je dáno ρ , w a ρ_k , kde ρ_k je poloměr menší podstavy vrstvy.

J i ř í M í d a, studující VŠP, Praha:

O jedné vlastnosti celých čísel

Množinu všech celých čísel lze napsat tak, že číslo menší vždy předchází před číslem větším. Vodítkem nám při tom může být číselná osa. Říkáme, že jsme množinu všech celých čísel *uspořádali*. V tomto případě se jedná o přirozené uspořádání množiny všech celých čísel. Mějme celé číslo m . Je zřejmé, že předchází před celým číslem $m + 1$. Neexistuje pak celé číslo větší než m a současně menší než $m + 1$. O celém čísle $m + 1$ říkáme, že je *následovníkem* celého čísla m . Dále se dohodneme, že o skupině celých čísel $m, m + 1, \dots, m + n$, kde n je číslo přirozené, řekneme, že se skládá z celých čísel *po sobě bezprostředně následujících* (jdoucích).

V ě t a 1. *Buď každému celému číslu l přiřazeno právě jedno reálné číslo a_l . Necht pro každé l platí $a_{l+1} - a_l = c$. Potom $a_l = a_0 + l \cdot c$, kde a_0 je číslo přiřazené číslu 0.*

D ů k a z. Věta zřejmě platí pro $l = 0$. Dále rozlišme dva případy:

1. Buď $l \geq 0$. Položme $l + 1 = n$ a $a_l = p_n$. Dostáváme posloupnost $\{p_n\}$, která je aritmetická s diferencí c . Tedy

$$p_n = p_1 + (n - 1) \cdot c,$$

z čehož plyne

$$a_l = a_0 + l \cdot c.$$

2. Necht' $l \leq 0$. Položme $-l + 1 = n$ a $a_l = q_n$. Posloupnost $\{q_n\}$ je aritmetická s diferencí $-c$. Tedy

$$q_n = q_1 + (n - 1) (-c)$$

z čehož plyne

$$a_l = a_0 + l \cdot c$$

Tím je věta plně dokázána.

V ě t a 2. *Mějme dvě množiny celých po sobě bezprostředně následujících čísel. Necht' obě množiny mají stejný počet prvků a necht' nejmenší číslo druhé z nich je následovníkem největšího čísla první množiny. Potom součet všech čísel z druhé množiny je větší než součet všech čísel patřících do první množiny o čtverec počtu čísel v každé množině.*

D ů k a z. Použijeme vzorce pro součet n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$

$$s_n = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n)$$

Počet čísel v každé množině necht' je k , nejmenší celé číslo první množiny necht' je r . Označme součet všech čísel první množiny S_1 , druhé S_2 . Potom

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \frac{1}{2} k [(r + k) + ((r + k) + (k - 1))] - \\ &\quad - \frac{1}{2} k [r + (k - 1)] = k^2, \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

V ě t a 3. *Budiž k kladné liché číslo. Potom součet k po sobě bezprostředně následujících celých čísel, z nichž nejmenší je $\frac{1}{2}(1 - k)$, je roven nule.*

D ů k a z přenechávám čtenáři.

Nyní přejdeme k vlastnímu obsahu článku. Jednotlivé poznatky již nebudeme dále formulovat v podobě vět.

Zvolme si liché kladné číslo k . Vytvořme systém $M(k)$ všech množin k po sobě bezprostředně následujících celých čísel. Tento systém má tu vlastnost, že zvolíme-li libovolné celé číslo, existuje pak jediná množina z $M(k)$, pro kterou je toto číslo nejmenším prvkem. Kdyby byly totiž takové množiny dvě, pak by byly totožné.

Budiž dán předpis, který:

1. Číslu 0 přiřazuje tu množinu ze systému $M(k)$, jejíž nejmenší číslo je $\frac{1}{2}(1 - k)$.

2. Celému číslu $l + 1$ přiřazuje tu množinu ze systému $M(k)$, jejíž nejmenší číslo je následovníkem největšího čísla množiny ze systému $M(k)$, která je přiřazena číslu l .

Tímto předpisem je přiřazena každému celému číslu právě jedna množina ze systému $M(k)$. Pomocí stejného obratu, jakého bylo použito v důkaze věty 1., dostaneme totiž dvě posloupnosti množin, definované rekurentně. Dohodneme se, že každou množinu ze systému $M(k)$, kterou lze přiřadit daným předpisem nějakému celému číslu, nazveme *skupinou*. Je-li skupina přiřazena celému číslu l , pak o ní budeme mluvit jako o l -té skupině.

Označíme-li s_l součet všech čísel patřících do l -té skupiny, pak podle vět 1., 2., 3. platí

$$s_l = l \cdot k^2$$

Nechť je r_l nejmenší prvek skupiny l -té. Potom největší prvek téže skupiny je $r_l + (k - 1)$, jeho následovník, čili nejmenší prvek skupiny $(l + 1)$ -ní, je $r_{l+1} = r_l + k$. Podle věty 1. tedy platí:

$$r_l = \frac{1}{2} (1 - k) + l \cdot k$$

Buď dáno libovolné celé číslo m . Existuje jediné celé číslo l takové, že pro ně platí nerovnosti

$$l \leq \frac{1}{k} \left(m - \frac{1}{2} (1 - k) \right) < l + 1$$

Číslo k nechť je opět liché kladné. Takové číslo l se nazývá celá část čísla $\frac{1}{k} \left(m - \frac{1}{2} (1 - k) \right)$. Napišme nerovnosti ekvivalentní

$$\frac{1}{2} (1 - k) + l \cdot k \leq m < \frac{1}{2} (1 - k) + (l + 1) \cdot k.$$

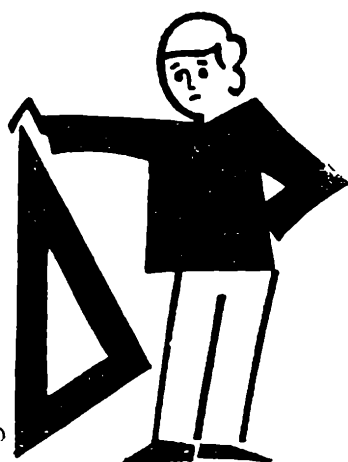
Označení skupiny	Skupina	Součet
$-n$	$-5n-2, -5n-1, -5n, -5n+1, -5n+2$	$-25n = (-n) \cdot 5^2$
-2	-12	$-50 = (-2) \cdot 5^2$
-1	-7	$-25 = (-1) \cdot 5^2$
0	-2	$0 = 0 \cdot 5^2$
1	3	$25 = 1 \cdot 5^2$
2	8	$50 = 2 \cdot 5^2$
n	$5n-2, 5n-1, 5n, 5n+1, 5n+2$	$25n = n \cdot 5^2$

Z posledních nerovností plyne, že celé číslo m patří do l -té skupiny. Odtud je zřejmé, že neexistuje takové celé číslo, které by patřilo do dvou skupin a že množina všech čísel patřících do všech skupin, je množina všech celých čísel.

Závěrů, které jsme obdrželi, použijeme k sestavení všech celých čísel do tabulky. Zvolme si $k = 5$. Číslo n je přirozené.

Totéž lze provést pro každé kladné liché k . Příklad $k = 1$ je jednoduchý.

Deskriptivní geometrie



Josef Kateřínák, VŠD, Žilina:

Rovnoběžné osvětlení

(Dokončení)

Představme si nyní v kladném poloprostoru nějaký útvar U , tj. množinu bodů, např. kvádr $ABCDEFGH$. Vymodelujte si jej krabičkou od zápalek podle obr. 4.

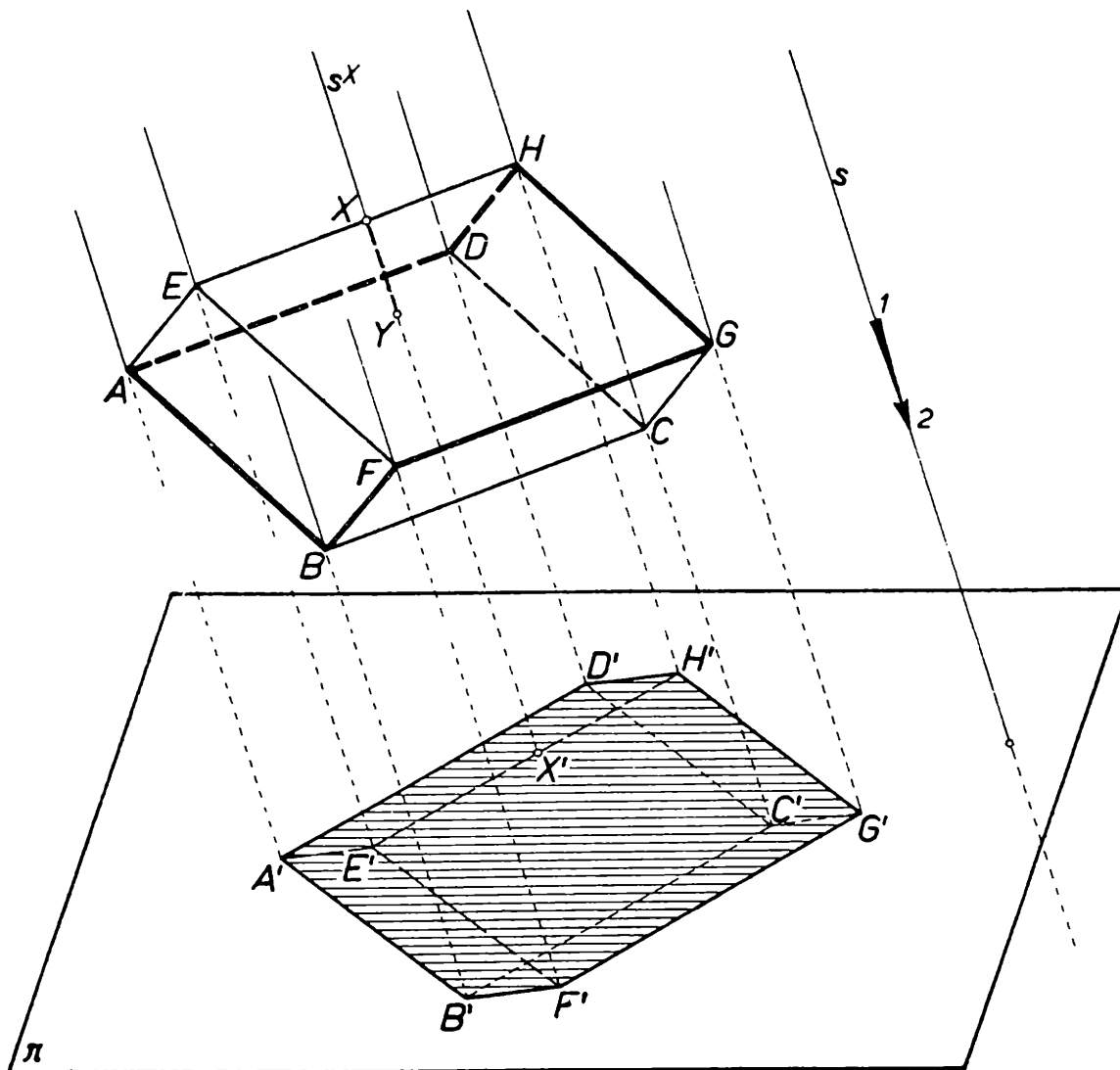
Každým bodem X útvaru U prochází jediná světelná přímka s^X , která může mít s útvarem U společné ještě další body, jež spolu s bodem X tvoří jistý útvar r ; na obr. 4 je r úsečka XY . Jestliže bod X je světelnému zdroji - slunci - blíže než všechny ostatní body tohoto útvaru r , jako je tomu na obr. 4, považujeme bod X za *osvětlený*. Není-li tomu tak, považujeme bod X za *neosvětlený*. Bod X považujeme za *osvětlený* také v tom případě, kdy světelná přímka s^X má s útvarem U společný pouze bod X .

Osvětlené body jsou vždy body povrchu útvaru U . Jestliže bod Y povrchu útvaru U je neosvětlený, jako je tomu na obr. 4, nazýváme tento bod Y bodem ve *vlastním stínu*.

Celý povrch útvaru U se tedy skládá z části O všech osvětlených bodů - nazýváme ji *osvětlená část* - a z části V všech bodů ve vlastním stínu - nazýváme ji *vlastním stínem*. Útvar m složený z bodů na hranici

osvětlené části O nazýváme *mez vlastního stínu*. Na obr. 4 osvětlenou část O tvoří stěny $EFGH$, $EHDA$, $EABF$ a vlastní stín V tvoří stěny $CDAB$, $CGFB$, $CGHD$. Mez m vlastního stínu je lomená čára tvořená úsečkami AB , BF , FG , GH , HD , DA .

Vrženým stínem útvaru U na rovinu π rozumíme množinu $\overline{U'}$ vržených stínů všech bodů útvaru U . Útvar m' složený z bodů na hranici U' nazýváme *mez vrženého stínu U'* . Na obr. 4 je U' šestiúhelník $A'B'F'G'H'D'$ a m' je obvod tohoto šestiúhelníka.

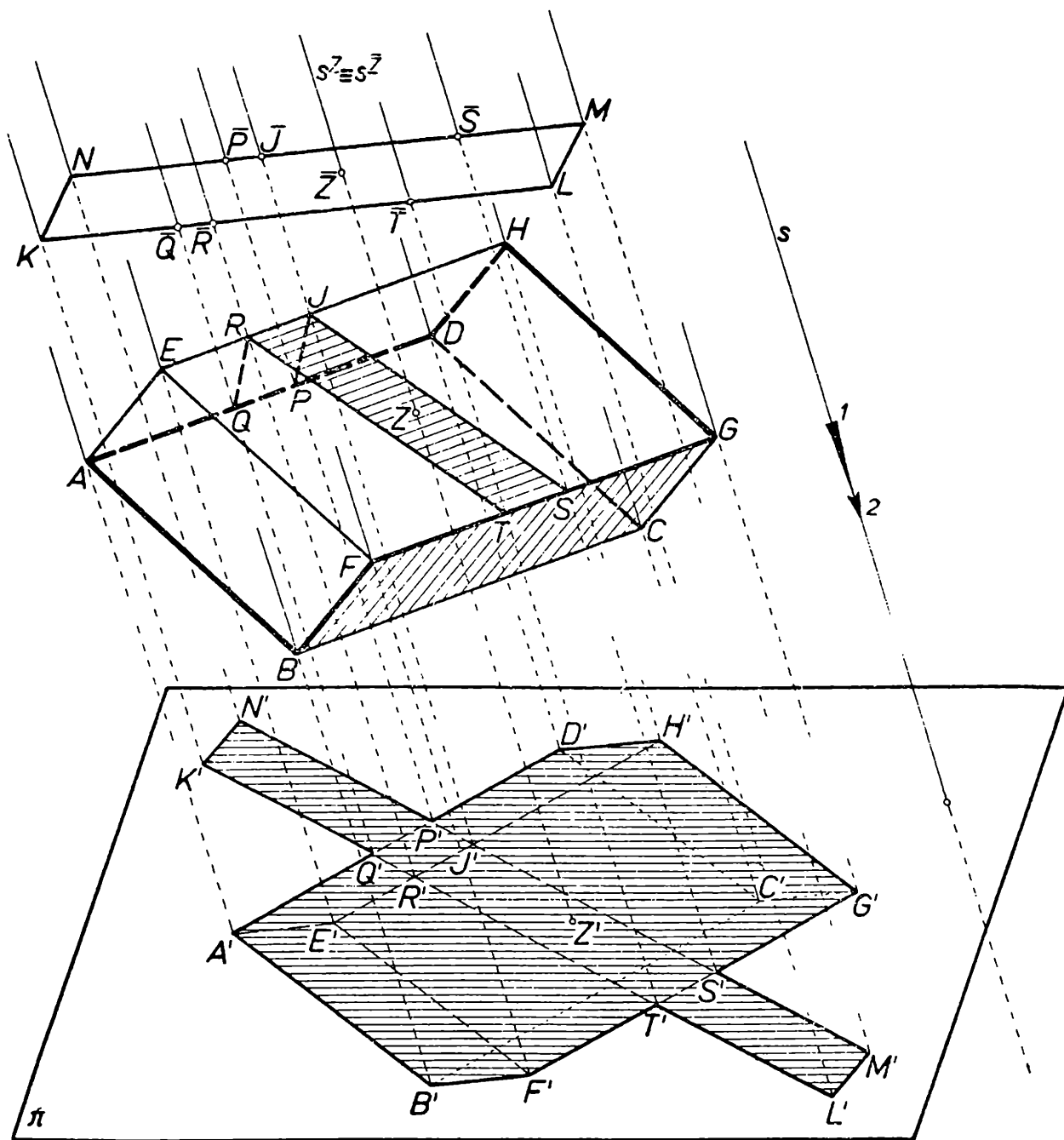


Obr. 4

Snadno nahlédneme, že $U' = O'$, tj. vržený stín celého útvaru U je tentýž jako vržený stín jeho osvětlené části O , neboli jinými slovy: z celého útvaru U vrhá stín pouze jeho osvětlená část O . Přitom vrženým stínem meze m vlastního stínu je mez m' vrženého stínu U' .

Většinou však nezobrazujeme jen jeden útvar U , ale více útvarů najednou. Uvažujme tedy v k l a d n é m poloprostoru ještě další útvar $\overline{U}$, např. obdélník $KLMN$. Vymodelujte si jej úzkým proužkem papíru podle obr. 5.

Každým bodem $\bar{X}$ útvaru $\bar{U}$ prochází jediná světelná přímka $s\bar{X}$, jež s útvarem $\bar{U}$ již nemá další společné body, tj. všechny body útvaru $\bar{U}$ jsou osvětlené a tedy osvětlená část $\bar{O}$ útvaru $\bar{U}$ je celý útvar $\bar{U}$. Nemá proto útvar $\bar{U}$ žádný vlastní stín, má však mez $\bar{m}$ vlastního



Obr. 5

stínu, tj. útvar složený z bodů na hranici osvětlené části $\bar{O} = \bar{U}$. Na obr. 5 je $\bar{m}$ obvod obdélníka $KLMN$.

Vrženým stínem $\bar{U}'$ útvaru $\bar{U}$ na rovinu π je rovnoběžník $K'L'M'N'$ a obvod tohoto rovnoběžníka je mez $\bar{m}'$ vrženého stínu $\bar{U}'$.

Všimněme si nyní blíže osvětlených částí O a $\bar{O}$ útvarů U a $\bar{U}$. Některé body Z na O a $\bar{Z}$ na $\bar{O}$ mají společnou světelnou přímku $s^Z \equiv s^{\bar{Z}}$, takže jejich vržené stíny Z' a $\bar{Z}'$ na rovinu π jsou totožné, tj. $Z' \equiv \bar{Z}'$ je společným bodem vržených stínů U' a $\bar{U}'$. Jestliže bod $\bar{Z}$ je světelnému zdroji - slunci - blíže než bod Z , jako je tomu na obr. 5, nazýváme bod Z *vrženým stínem* bodu $\bar{Z}$ na osvětlenou část O útvaru U . Množinu W všech takových bodů Z pak nazýváme *vrženým stínem* útvaru $\bar{U}$ na osvětlenou část O útvaru U . Na obr. 5 je W složen z rovnoběžníků $STRJ$ a $RJPQ$.

Zřejmě vrženým stínem útvaru W na rovinu π je společná část W' vržených stínů U' a $\bar{U}'$. Na obr. 5 je W' rovnoběžník $S'T'Q'P'$.

Při grafickém znázorňování narýsované obrazy vlastních a vržených stínů zpravidla vyznačujeme šrafováním, pokud jsou ovšem viditelné.

Praktický postup vysvětlíme opět na příkladě. Na obr. 6 je v pravohléhém promítání na dvě průmětny zobrazen kvádr $ABCDEFGH$ a obdélník $KLMN$. Směr osvětlení s je určen přímkou s , na níž je šipkou vyznačena poloha světelného zdroje - slunce.

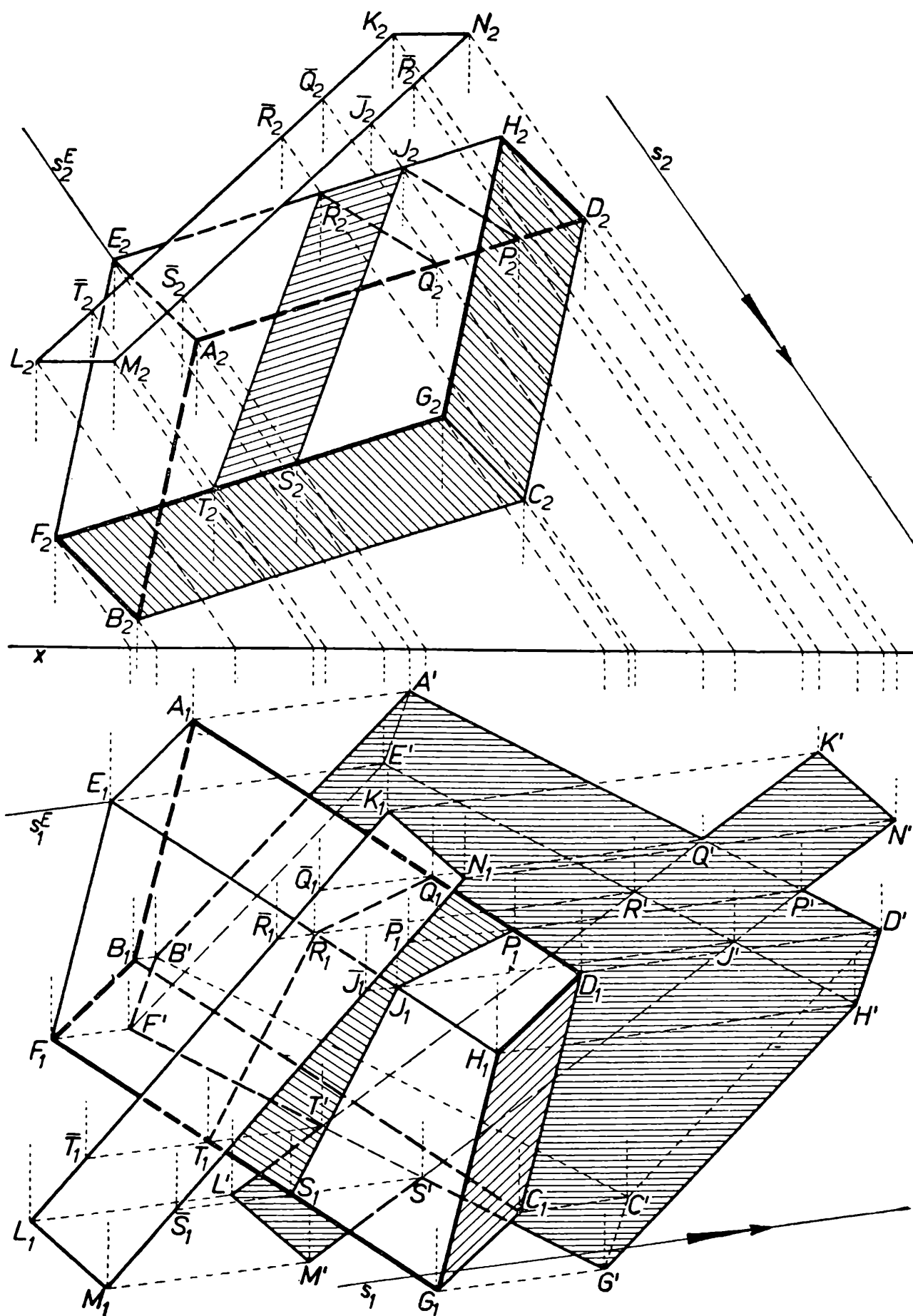
Nejdříve určíme vržený stín U' kváдру $ABCDEFGH$ na půdorysnu π a mez m' vrženého stínu U' . V našem případě je U' šestiúhelník $A'B'F'G'H'D'$ a mez m' je obvod tohoto šestiúhelníka. Body A' , B' atd. jsou průsečíky příslušných světelných přímek s půdorysnou π , tj. půdorysné stopníky těchto světelných přímek.

Pomocí meze m' vrženého stínu U' pak určíme mez m vlastního stínu kváдру $ABCDEFGH$ a jeho osvětlenou část O i vlastní stín V . Protože m' je složená z úseček $A'B'$, $B'F'$, $F'G'$, $G'H'$, $H'D'$, $D'A'$, je m lomená čára složená z úseček AB , BF , FG , GH , HD , DA . Mez m rozděluje povrch kváдру $ABCDEFGH$ na dvě části, z nichž jedna je osvětlená a druhá je vlastní stín. Z nárysu vidíme, že ze všech společných bodů světelné přímky s^E a kváдру $ABCDEFGH$ je bod E nejbližší světelnému zdroji - slunci. Je tedy bod E osvětlený. Z toho soudíme, že osvětlená část O je tvořená stěnami $EFGH$, $EHDA$, $EABF$ a vlastní stín V je tvořen stěnami $CDAB$, $CGFB$, $CGHD$.

Vržený stín $\bar{U}'$ obdélníka $KLMN$ na půdorysnu π je rovnoběžník $K'L'M'N'$ a obvod tohoto rovnoběžníka je mez $\bar{m}'$ vrženého stínu $\bar{U}'$.

Mez $\bar{m}$ vlastního stínu obdélníka $KLMN$ je jeho obvod. Představíme-li si obdélník $KLMN$ jako proužek papíru, pak jeho osvětlenou částí je ta strana papíru, na niž dopadají sluneční paprsky; druhá strana papíru je pak jeho vlastním stínem. V našem případě tato druhá strana není viditelná ani v půdoryse, ani v náryse.

Nakonec určíme vržený stín W obdélníka $KLMN$ na osvětlenou část O kváдру $ABCDEFGH$ pomocí společné části W' jejich vržených stínů



Obr. 6

$\overline{U}'$ a U' na půdorysnu π . V našem případě je W' rovnoběžník $S'T'Q'P'$.

Vržený stín $E'F'G'H'$ osvětlené stěny $EFGH$ má s W' společný rovnoběžník $S'T'R'J'$. Bod S' , ležící na $F'G'$ a $M'N'$, je vrženým stínem bodu S na FG i bodu $\overline{S}$ na MN . Leží tedy S_1 a $\overline{S}_1$ na F_1G_1 a M_1N_1 a na půdoryse společné světelné přímky bodů S a $\overline{S}$, jež prochází bodem S' . S_2 a $\overline{S}_2$ pak leží na F_2G_2 a M_2N_2 a na ordinálách. Podobně každý z bodů T', R', J' , je vrženým stínem dvou bodů: T na FG a $\overline{T}$ na KL , R na EH a $\overline{R}$ na KL , J na EH a $\overline{J}$ na MN . Protože body $\overline{S}, \overline{T}, \overline{R}, \overline{J}$ jsou světelnému zdroji - slunci - blíže než body S, T, R, J (viz nárys-), jsou S, T, R, J vržené stíny bodů $\overline{S}, \overline{T}, \overline{R}, \overline{J}$ na osvětlenou stěnu $EFGH$ a tedy rovnoběžník $STRJ$ je vrženým stínem obdélníka $KLMN$ na osvětlenou stěnu $EFGH$.

Stejným způsobem dostaneme vržený stín $RJPQ$ obdélníka $KLMN$ na osvětlenou stěnu $EHDA$.

Na osvětlenou stěnu $EABF$ obdélník $KLMN$ žádný stín nevrhá, neboť $E'A'B'F'$ a W' nemají žádný společný bod.

Je tedy vrženým stínem W obdélníka $KLMN$ na celou osvětlenou část O kváдру $ABCDEFGH$ útvar složený z rovnoběžníků $STRJ$ a $RJPQ$.

P o z n á m k a. Pro úplnost bychom měli ještě určit i vržené stíny U^+ kváдру $ABCDEFGH$ a $\overline{U}^+$ obdélníka $KLMN$ na nárysnu ν . Při grafickém znázorňování pak šrafuje z vržených stínů $U, \overline{U}'$ na půdorysnu π jen části p ř e d osou x a z vržených stínů $U^+, \overline{U}^+$ na nárysnu ν jen části n a d osou x . Tyto vyšrafované části pak dohromady tvoří tzv. *skutečný vržený stín* kváдру $ABCDEFGH$ a obdélníka $KLMN$ na obě průmětny π a ν .

I n ž. L a d i s l a v D r s C S c, Č V U T, Praha:

Společná konstrukce oskulační kružnice pro všechny druhy kuželoseček

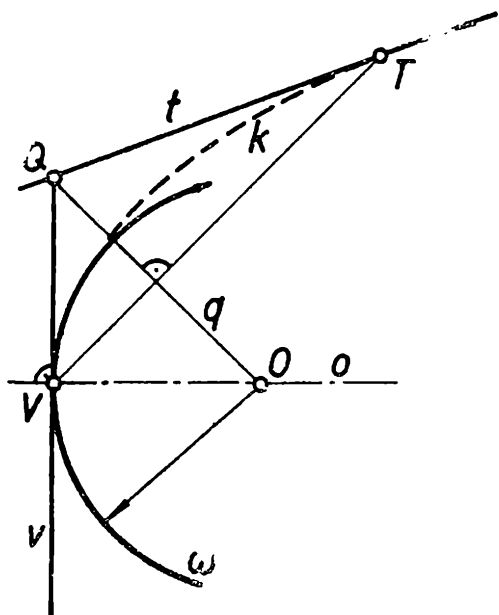
Jsou známé konstrukce oskulační kružnice elipsy, hyperboly a paraboly. Je též známo, že oskulační kružnice ve vrcholu hlavní osy elipsy a ve vrcholu hyperboly má poloměr $\frac{b^2}{a}$, kde a, b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy, že oskulační kružnice ve vrcholu vedlejší osy elipsy má poloměr $\frac{a^2}{b}$ a konečně, že oskulační kružnice paraboly má poloměr

$p = F - |d|$, kde F je ohnisko a d řídicí přímka paraboly.

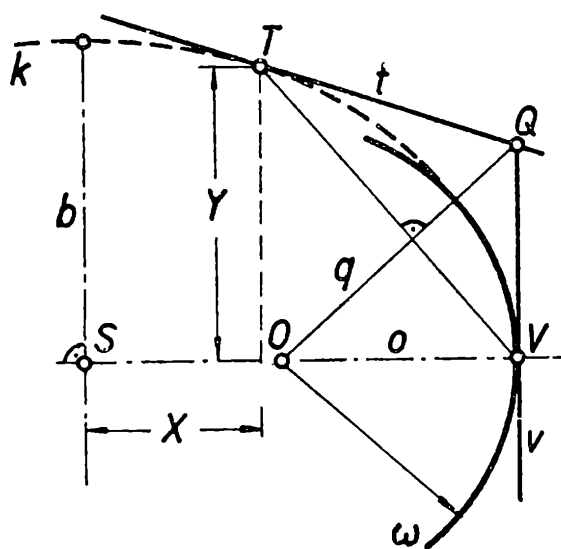
Tyto konstrukce nemají na první pohled mnoho společného. Dále však poznáme, že to jsou jen zvláštní případy konstrukce osculační kružnice ve vrcholu libovolné kuželosečky.

Mějme v libovolné kuželosečce k osu o , vrchol V s vrcholovou tečnou v a další tečnu t s dotykovým bodem T (obr. 1). Pak střed O osculační kružnice ω kuželosečky k leží na kolmici q k přímce VT , vedené průsečíkem Q tečen V a T . Tedy symbolicky

$$Q = v \times t, Q \in q, q \perp VT, q \times o = O$$



Obr. 1



Obr. 2

Důkaz provedeme zvlášť pro každý druh kuželosečky.

1. Budiž k elipsa, V její vrchol hlavní osy, S její střed, $VS = a$, b vedlejší poloosa (obr. 2). Zvolíme-li hlavní a vedlejší osu za osu x a y , je rovnice této elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Rovnice její tečny t v libovolném pevném bodě $T (X, Y)$ je

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

V této rovnici jsou X, Y konstanty, x, y proměnné veličiny. Průsečík Q této tečny s tečnou v dostaneme pro $x_Q = a$. Jeho souřadnice y_Q je tedy

$$y_Q = \frac{\left(1 - \frac{X}{a}\right) b^2}{Y}$$

Směrnice přímky VT je

$$\frac{Y}{X - a},$$

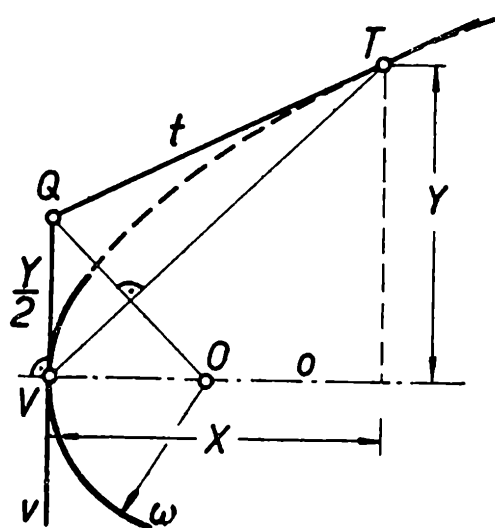
směrnice přímky q k ní kolmé je proto

$$-\frac{X - a}{Y} = \frac{a - X}{Y}$$

a rovnice přímky q je

$$q \equiv y - y_Q = \frac{a - X}{Y} (x - x_Q),$$

což po dosazení dává



Obr. 3

$$y - \left(1 - \frac{X}{a}\right) b^2 = \frac{a - X}{Y} (x - a)$$

Průsečík O přímky q s osou x dostaneme pro $y_o = 0$

$$-\frac{\left(1 - \frac{X}{a}\right) b^2}{Y} = \frac{a - X}{Y} (x_o - a),$$

což po úpravě dává

$$x_o = a - \frac{b^2}{a}$$

$$OV = SV - SO = a - x_o,$$

takže skutečně je $OV = \frac{b^2}{a}$, což jsme měli dokázat.

Podobně se dokáže naše tvrzení pro hyperbolu. Také výpočet středu oskulační kružnice pro vrchol vedlejší osy elipsy proveďte sami.

2. Budiž k parabola, V její vrchol, o osa, T její libovolný bod a t tečna v něm. Zvolme osu o za osu x , vrcholovou tečnu v za osu y . Parabola má pak rovnici

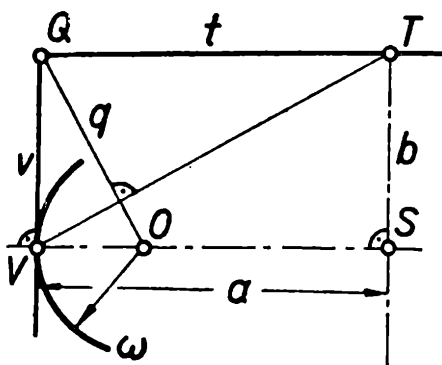
$$y^2 = 2 p x$$

Souřadnice libovolného jejího bodu T označme opět X, Y (obr. 3).

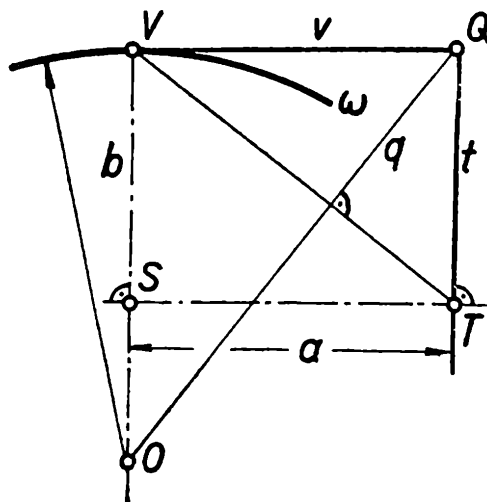
Průsečík Q tečen t, v má souřadnice $0, \frac{Y}{2}$ (proč?), směrnice přímky TV

je $\frac{Y}{X}$ a směrnice kolmé přímky $-\frac{X}{Y}$. Rovnice přímky q je proto

$$y - \frac{Y}{2} = -\frac{X}{Y}x.$$



Obr. 4a



Obr. 4b

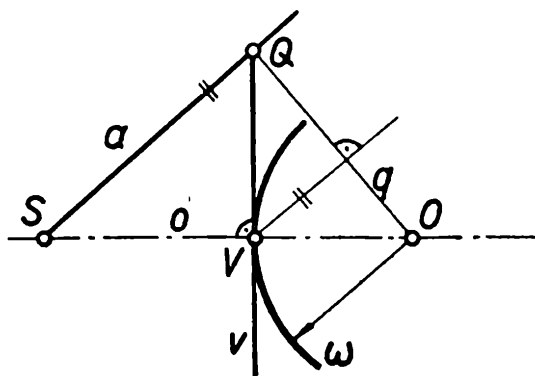
Průsečík O přímky q s osou o dostaneme pro $y_o = 0$

$$\frac{Y}{2} = \frac{X}{Y}x_o,$$

což po úpravě dává

$$x_o = p,$$

jak jsme měli dokázat.

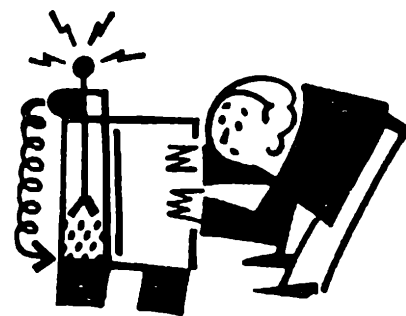


Obr. 5

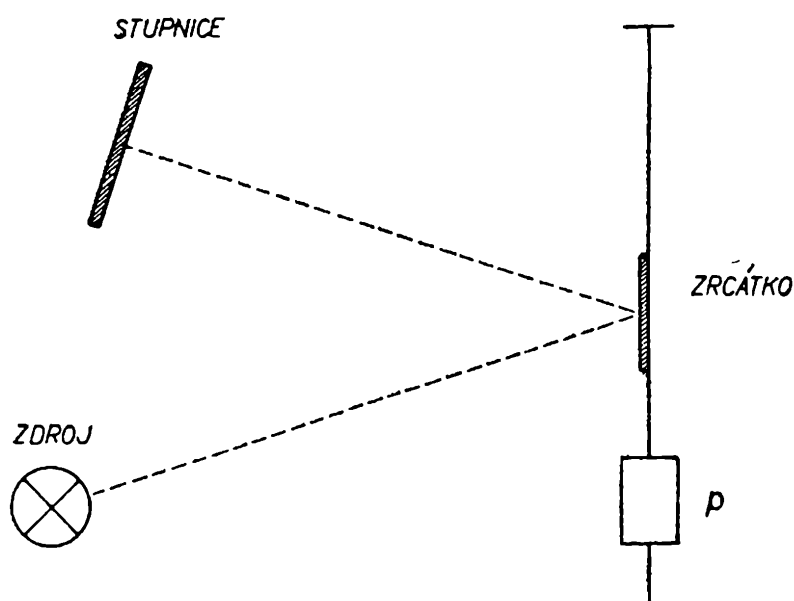
Zvolíme-li speciálně na elipse za V , T vrchol hlavní a vedlejší osy, získáme z obecné konstrukce známou konstrukci oskulačních kružnic (obr. 4a, b). Zvolíme-li speciálně na hyperbole za t asymptotu a , je VT rovnoběžka s asymptotou a ; tak opět získáváme známou konstrukci oskulační kružnice hyperboly (obr. 5).

Inž. Ladislav Smrž, Praha:

Galvanometr jako indikátor měřicích zařízení



U měřicích zařízení pro stejnosměrný proud, jakými jsou např. kompenzátory a stejnosměrné odporové můstky, potřebujeme citlivé indikátory pro určení okamžiku, kdy je měřicí zařízení vyrovnáno a měření ukončeno. Nejvhodnějšími jsou magnetoelektrické přístroje (s otočnou cívkou), jejichž základem je princip Déprez d'Arsonvalův. Nazýváme je **galvanometry**.



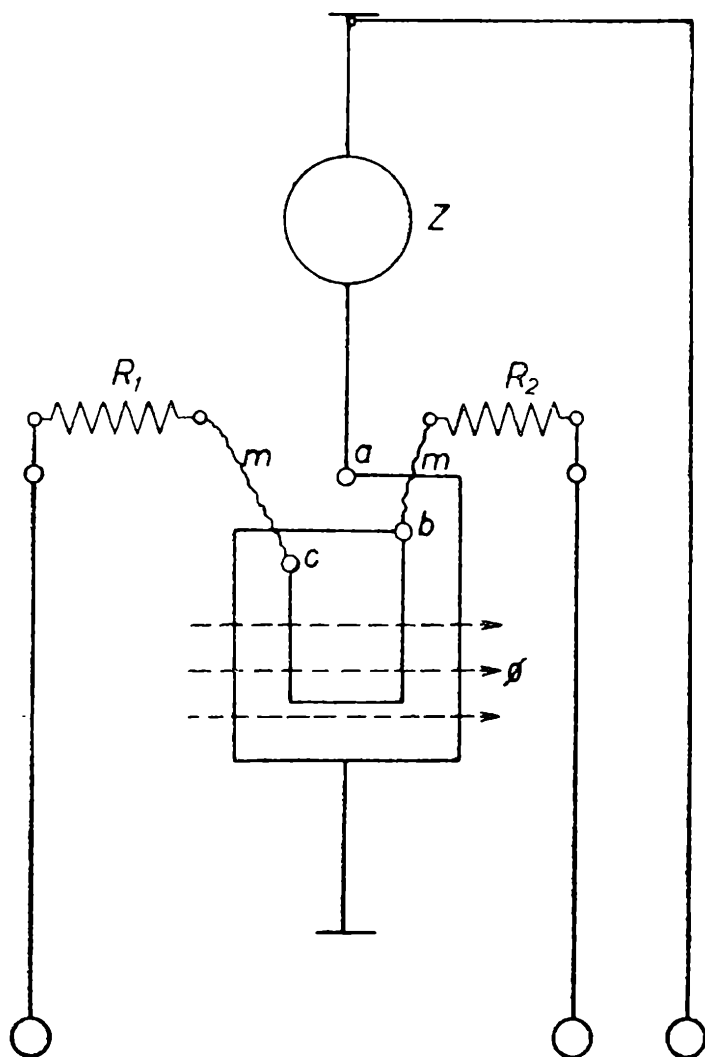
Obr. 1

Mohou mít různé provedení podle toho, jaké citlivosti se má u nich dosáhnout. Vesměs mají rovnoměrně dělenou stupnici, jejíž kontrola je nutná pouze tehdy, používají-li se jako výchylkové přístroje a nikoli jako nulové indikátory. Podle způsobu provedení jsou tyto nejužívanější druhy galvanometrů:

a) **ručkové galvanometry**, vhodné pro měření nižší přesnosti. Od jiných magnetoelektrických přístrojů se liší pouze nižší vahou

pohyblivého systému a jeho jemnějším uložením v ložiskách s kameny anebo zavěšením na vlákne,

b) *galvanometry se světelnou stopou*, u nichž je užitím světelného paprsku (obr. 1) dosaženo velkého zvýšení citlivosti, aniž by se zvětšila váha pohyblivého systému p . Paprsek zdroje dopadá na zrcátko galvanometru a odráží se na stupnici, kde vytvoří světelnou stopu (index). Několikerým odrazem paprsku se výchylka mnohonásobně zvětší a tím i roste citlivost přístroje,

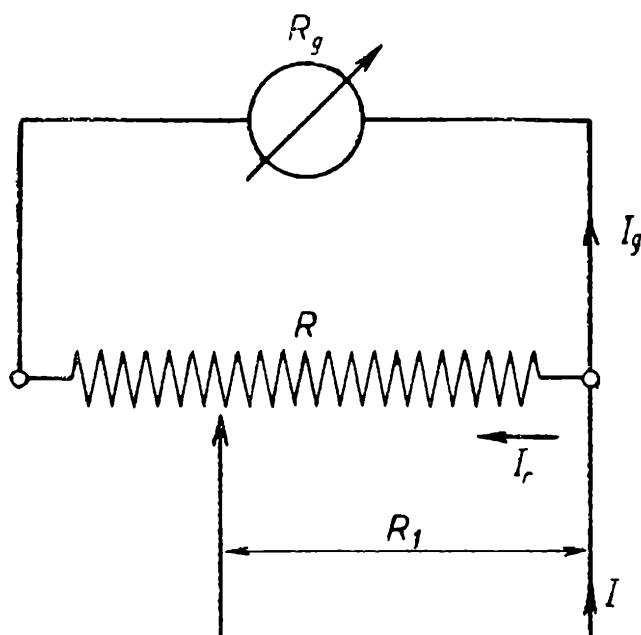


Obr. 2

c) *zrcátkové galvanometry*, které jsou nejdůležitější, poněvadž jsou nejcitlivější elektrické indikátory. Také zde je použito k záznamu výchylky světelného paprsku, který má však délku i několika metrů. Pohyblivý systém se zrcátkem z (obr. 2) je zavěšen na jemném vlákne, obvykle fosforbronzovém nebo postříbřeném křemenném. Vlákno je současně zdrojem direktivní síly, působící proti síle vychylující pohyblivý systém. Tlumení pohybu systému nastává buď proudem indukovaným v kovovém rámečku, na němž bývá navinuta cívka systému anebo zvláštním tlumicím vinutím. V tomto případě má systém galva-

nometru dvojí vinutí. Jedno z více závitů tenkého drátu (vinutí $a - b$), druhé z několika závitů silnějšího drátu (vinutí $b - c$). Obě tato vinutí jsou spojena v sérii s odpory R_1 a R_2 , které doplňují odpor obou vinutí cívky na potřebnou hodnotu.

Závěs zatížený vahou systému nesl by otřesy při přenášení. Proto je galvanometr opatřen aretací, kterou se může systém podepřít. Jako u všech magnetoelektrických přístrojů pohybuje se systém galvanometru v úzké vzduchové mezeře silného permanentního magnetu. Proud se k němu přivádí nepružnými kovovými (obvykle zlatými) pásky m . Vzhledem k silnému vlastnímu magnetickému poli je galvanometr jen velmi málo citlivý na vlivy cizích polí.



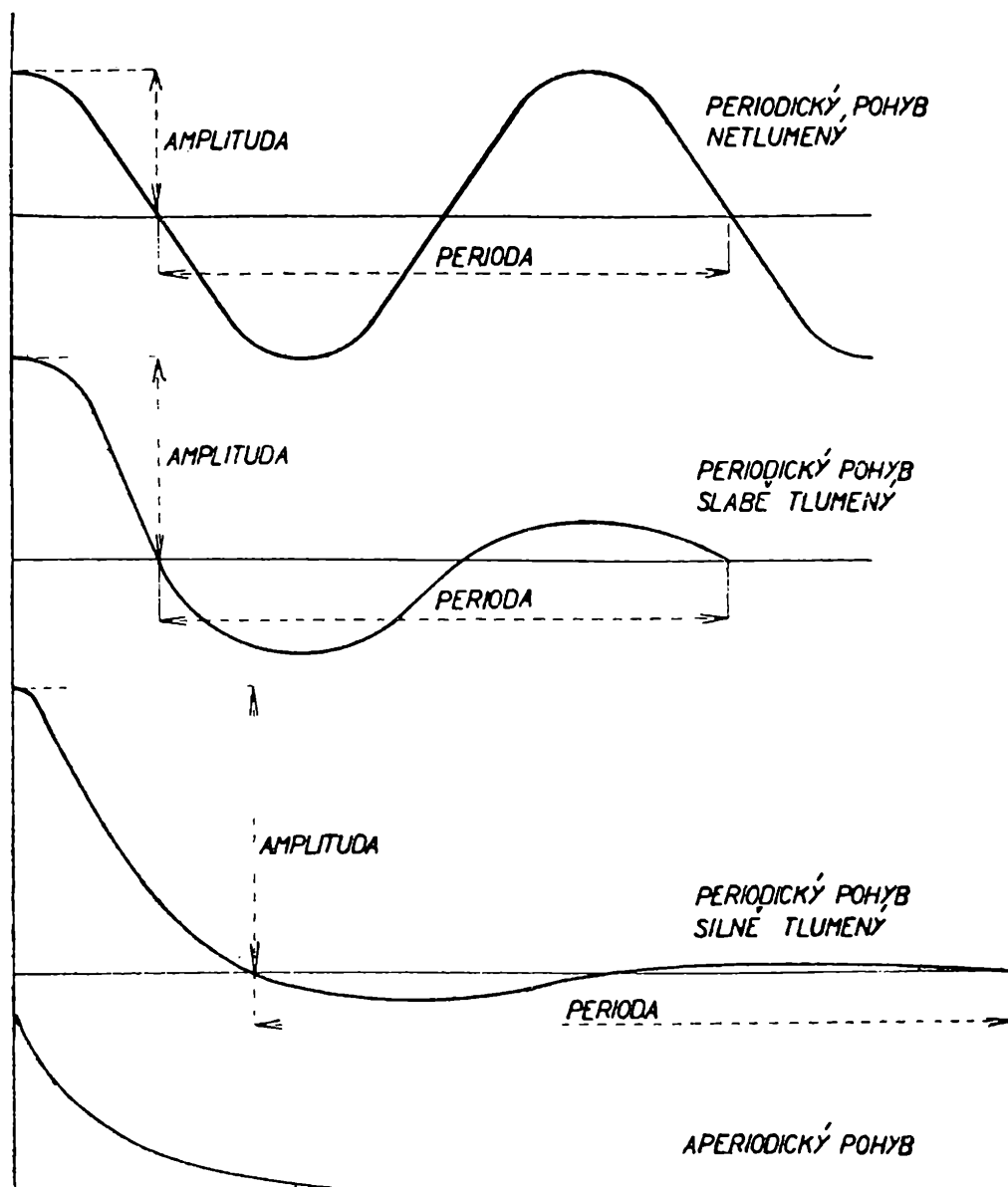
Obr. 3

Pohyb systému se opticky převádí na stupnici, kde se odražený paprsek jeví jako světelný index (stopa). Výchylku odečítáme dalekohledem anebo ji přímo čteme na stupnici. Aby byl přístroj chráněn před přetížením, bývá mu předřaděn vícestupňový odpor větší hodnoty anebo je připojen k regulovatelnému bočníku. Výhodou užití bočníku je stále stejné tlumení galvanometru, poněvadž odpor R (obr. 3), k němuž je přístroj připojen, se během nastavení bočníku nemění. Odpor R má velikost 30 000 až 100 000 ohmů. Bočník má obvykle zařízení na komutaci proudu v obvodu galvanometru a ke spojení jeho systému nakrátko, má-li být výchylka rychle utlumena. Proud I_g v galvanometru je v poměru k měřenému proudu I dán vztahem:

$$I_g = I \frac{R_1}{R_g + R} \quad (1)$$

Pohyblivý systém galvanometru představuje soustavu schopnou kmitavého pohybu. Při vychýlení z rovnovážné polohy kmitá kolem ní

tak dlouho, dokud se jeho pohybová energie nespotřebuje na ztráty třením. Kdyby nebylo tohoto tlumení, kmital by systém ustavičně s neproměnnou amplitudou i periodou. Byl by to stav periodického netlumeného kmitání (obr. 4). Takový pohyb je neuskutečnitelný pro tlumení vznikající třením o vzduch nebo jiným způsobem, např. elektromagneticky.



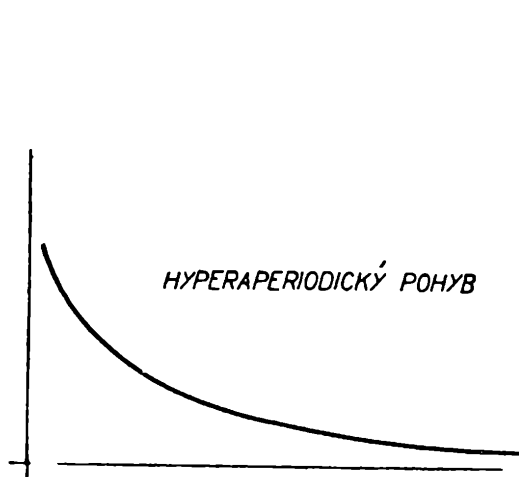
Obr. 4

Periodický tlumený pohyb (obr. 4) má různý průběh podle velikosti tlumení. Systém kmitá kolem rovnovážné polohy, při čemž se zmenšuje velikost amplitud a s velikostí tlumení roste i perioda kmitání. Při určité velikosti tlumení nastává pohyb *a p e r i o d i c k ý* (obr. 4), kdy systém dojde do rovnovážné polohy, aniž by ji překročil.

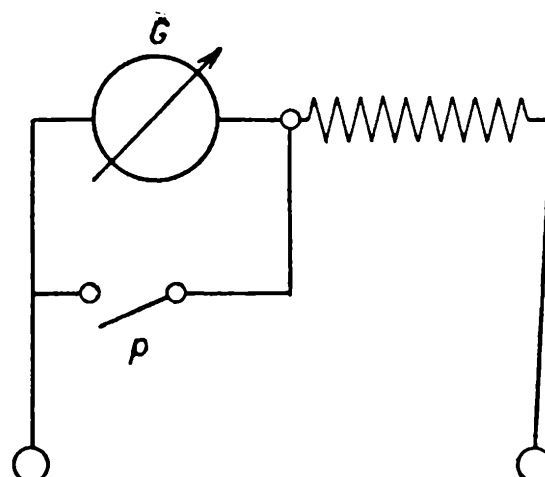
Má-li tlumení příliš velkou hodnotu, pohybuje se systém galvanometru do rovnovážné polohy neobyčejně dlouho, pohyb se stává *h y p e r a p e r i o d i c k ý* (obr. 5).

Při měření galvanometrem lze užít pouze mezního pohybu aperioidického, kdy přístroj dosáhne nejrychleji výchylky, odpovídající pohybovému momentu. V praxi je výhodnější stav tomuto pohybu velmi blízký, kdy systém přístroje vykoná asi jeden a půl kmitu, než se ustálí v rovnovážné poloze. Tím je tato poloha bezpečně určena a nevznikne chyba odečtení při přehlédnutí případného plouživého pohybu indexu.

Kromě tlumení působí na pohyblivý systém galvanometru *m o m e n t h n a c í*, vznikající měřeným proudem, *m o m e n t d i r e k t i v n í*, vyvolaný zkroucením závěsného vlákna, a *m o m e n t s e t r v a č n ý c h s i l*. Součet všech momentů je podle d'Alembertova principu v každém okamžiku roven nule. Tuto rovnováhu momentů vyjadřuje tzv. diferenciální rovnice druhého řádu. Jejím řešením dostaneme tři podmínky, určující buď tlumený periodický pohyb nebo pohyb aperioidický anebo konečně pohyb pro měření nejdůležitější, mezní aperioidický. Pro něj je charakteristickou veličinou velikost vnějšího obvodu



Obr. 5



Obr. 6

galvanometru R_a . Nazýváme jej *m e z n í m v n ě j š í m o d p o r e m* nebo *v n ě j š í m k r i t i c k ý m o d p o r e m*. Jeho závislost na konstrukci galvanometru je patrná ze vztahu:

$$R_a = \frac{Q^2}{2 \sqrt{D \cdot K} - L} - R_g. \quad (2)$$

Ze vzorce (2) vidíme, že kritický odpor R_a může nabývat větší hodnoty, zvětšuje-li se dynamická konstanta přístroje Q (daná magnetickou indukcí ve vzduchové mezeře a rozměry cívky) nebo zmenšuje-li se buď direktivní moment D nebo moment setrvačných sil K (ve vzorci je L moment vznikající odporem prostředí a R_g vnitřní odpor galvanometru).

Podle toho je pohyb systému galvanometru ovlivněn také změnou vnějšího odporu R_a . Nemůžeme proto použít pro určité měřicí zařízení jakýkoli galvanometr. Odpor tohoto zařízení vůči galvanometru musí být přibližně rovný vnějšímu kritickému odporu R_a , při němž má vy-

braný druh galvanometru mezní aperiodický pohyb systému. Je-li odpor měřicího zařízení příliš velký, připojíme ke galvanometru vhodný bočník. Je-li naopak příliš malý, zapojíme do obvodu galvanometru předřadný odpor. Obojí se však děje na úkor jeho citlivosti.

Některé galvanometry mají u magnetu regulovatelný shunt, kterým se může ve velkém rozsahu měnit síla pole ve vzduchové mezeře a tím i rozsah kritického odporu R_a . Takový galvanometr dá se tak přizpůsobit různým měřicím zařízením, že vždy pracuje ve stavu mezního aperiodického pohybu. Ale i tím se poněkud mění jeho citlivost.

Galvanometr, jehož systém je spojen nakrátko (obr. 6), je velmi silně tlumen. Spojením spínače p docílí se téměř okamžitého utlumení pohybu jeho systému.

U všech měřicích přístrojů je důležitá jejich citlivost, daná velikostí výchylky ukazatele připadající na jednotku měřené hodnoty a dále pak konstanta, číslo, kterým je třeba násobit údaj přístroje, abychom dostali velikost měřené hodnoty. Konstanta přístroje je převratná hodnota jeho citlivosti.

Podobně je tomu také u galvanometru. Jakmile byla dosažena výchylka systému, odpovídající měřenému proudu, vymizí v pohybové rovnici všechny členy obsahující úhlovou rychlost a úhlové zrychlení. Podle zákona odrazu odpovídá úhlová výchylka pohyblivého systému φ (obr. 7) úhlové výchylce 2φ odraženého paprsku na stupnici. Mezi výchylkou φ a proudem I_g v systému galvanometru platí vztah:

$$I_g = \frac{D}{Q} \varphi, \quad (3)$$

kde poměr D/Q se obvykle nazývá *statická proudová konstanta* c'_i , udávající proud, potřebný pro jednotkovou úhlovou výchylku (1 rad) systému. Její převratná hodnota $1/c'_i$ je pak *úhlová proudová citlivost* přístroje.

Ze vztahu (3) je patrné, že citlivost galvanometru roste úměrně s velikostí jeho dynamické konstanty Q a klesá se vzrůstající direktivní silou D . Proto je výhodné zvyšovat intenzitu pole ve vzduchové mezeře a použít co nejjemnějšího závěsu. Obojí je ovšem omezeno konstrukčními možnostmi. Nejsnadněji se dá citlivost galvanometru zvyšovat opticky, zvětšením vzdálenosti zrcátka systému od stupnice. Teoretickou mezí je zde neklid systému vyvolávaný Brownovým molekulárním pohybem vzduchu a jemným kolísáním měřeného proudu statického charakteru.

Proto je výhodnější zvyšovat citlivost, pokud se jedná o její vysoké hodnoty, speciálním uspořádáním, např. užitím soustavy dvou galvanometrů, z nichž jeden je připojen k vakuovému termočládku, ovlivňovanému světelným paprskem druhého galvanometru apod.

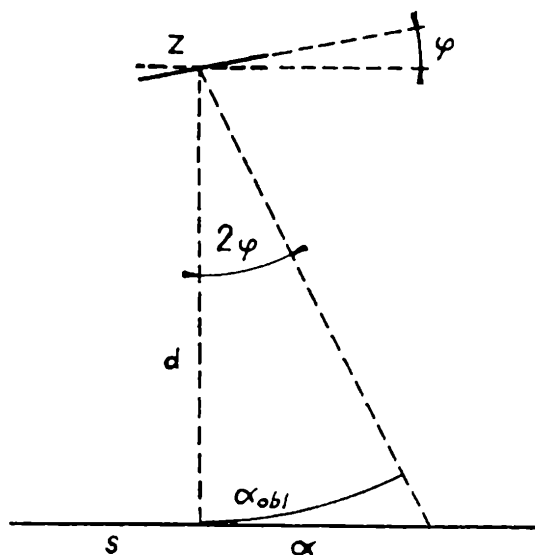
Při konstantním poli ve vzduchové mezeře platil by pro kruhovou

stupnici galvanometru (obr. 7) pro vztah mezi výchylkou systému φ a výchylkou α_{obl} na stupnici výraz:

$$\alpha_{obl} = d \ 2 \varphi \quad (4)$$

Obvykle však používáme stupnice ležící v rovině a proto místo výrazu (4) musíme uvažovat vztah:

$$\alpha = d \ \operatorname{tg} \varphi \quad (5)$$



Obr. 7

Pokud je výchylka systému φ malá (tedy platí: $\operatorname{tg} 2 \varphi \doteq \operatorname{arc} 2 \varphi$) je přibližně $\alpha = \alpha_{obl}$. Vztah mezi výchylkou α na rovinné stupnici s (obr. 7) a proudem I_g v systému zní pak:

$$I_g = c_i \cdot \alpha, \quad (6)$$

kde c_i je obvykle používaná proudová konstanta galvanometru, udávající velikost proudu, potřebného pro výchylku indexu na rovinné stupnici o jeden dílek, nejčastěji pro vzdálenost stupnice 1 metr od zrcátka galvanometru. Převratná hodnota $1/c_i$ značí p r o u d o v o u

c i t l i v o s t galvanometru. Má-li proudová konstanta rozměr A/mm, je rozměr proudové citlivosti $1/c_i$ mm/A.

Při větších výchylkách systému, pokud se z nich určuje měřená hodnota, je třeba počítat s korekcí na rovinnou stupnici. Výchylka na ní odečtená je větší než by odpovídalo výchylce α_{obl} na kruhové stupnici. Vzájemný vztah je dán mocninovou řadou:

$$\alpha_{obl} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{3d^2} + \frac{\alpha^4}{5d^4} - \frac{\alpha^6}{7d^6} + \dots \right) \quad (7)$$

pro d i α v mm.

Obvykle se pro výpočet korekce uvažují pouze dva první členy.

Všechny uvedené vztahy platí přesně jen tehdy, je-li paprsek odražený zrcátkem přístroje v nulové poloze kolmý ke stupnici. Tato poloha se kontroluje větší výchylkou na obě strany stupnice, vyvolanou stejně velkým proudem. Případný rozdíl se odstraní natočením stupnice, aniž by se měnila její vzdálenost od zrcátka galvanometru.

Proud v galvanometru závisí na napětí obvodu podle Ohmova zákona:

$$I_g = \frac{U}{R_g + R_a}, \quad (8)$$

kde výraz $R_g + R_a$ je celkový odpor obvodu galvanometru.

Zavedeme-li si místo I_g výraz $\alpha \cdot c_i$ podle rovnice (6), dostaneme rovnici (8) ve tvaru:

$$\alpha \cdot c_i (R_g + R_a) = U = c_e \cdot \alpha, \quad (9)$$

kde výraz $c_i (R_g + R_a) = c_e$ nazývá se n a p ě ě v o u k o n s t a n t o u galvanometru, obvykle v jednotkách V/mm. Její převratná hodnota $1/c_e$ je n a p ě ě v á c i t l i v o s t galvanometru v jednotkách mm/V, nejčastěji pro vzdálenost stupnice 1 metr od zrcátka galvanometru.

J a r o s l a v P o s p í š i l, UP Olomouc:

Elektronový mikroskop

Objev světelného mikroskopu (optického mikroskopu) koncem 16. století značně přispěl k pokroku vědy a techniky, neboť umožňoval pozorování podrobností neviditelných prostým okem. Světelný mikroskop se stal v mnoha oborech neocenitelným pomocníkem a nedovedeme si bez něho dnešní laboratoře ani představit. V některých případech však nestačí našim požadavkům, neboť možnosti zvětšení jsou u něho omezeny poměrně velkou vlnovou délkou viditelného světla. Tuto skutečnost si dokážeme.

Ze zákonů optiky vyplývá, že r o z l i š o v a c í m e z objektivu mikroskopu, tj. (délková) velikost δ nejmenších rozlišitelných detailů, je dána vzorcem

$$\delta = \frac{0,61 \lambda}{n \sin \alpha}, \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka použitého světla a výraz $n \sin \alpha = A$ je tzv. č í s e l n á a p e r t u r a objektivu, α je úhel, který svírá krajní paprsek, jdoucí od pozorovaného předmětu do objektivu mikroskopu, s osou objektivu, n je index lomu prostředí mezi pozorovaným předmětem a objektivem mikroskopu. Pro vzduch je $n = 1$. Čím je rozlišovací mez δ menší, tím je rozlišovací schopnost přístroje větší.

Má-li být rozlišovací schopnosti objektivu náležitě využito, je nutno volit vhodné zvětšení mikroskopu, tzv. u ž i t e č n é z v ě t š e n í. Užitečné zvětšení je parametr závislý na rozlišovací mezi δ . Je-li zvětšení větší než užitečné, je zobrazení neostré a v obrazu nelze odhalit žádné větší detaily. Pro užitečné zvětšení mikroskopu platí nerovnost

$$\frac{A}{8 \lambda} \leq \Gamma \leq \frac{A}{2 \lambda}, \quad (2)$$

kde vlnová délka λ se udává v milimetrech. Zpravidla se omezujeme na střední hodnotu a píšeme, že užitečné zvětšení

$$\Gamma \doteq \frac{A}{4\lambda}. \quad (3)$$

Ze vztahu (1) plyne, že pro konstantní n a α je rozlišovací mez δ funkcí vlnové délky λ . Čím je tedy vlnová délka λ menší, tím je rozlišovací mez δ menší. Mikroskopem mohu pak pozorovat větší detaily, neboť bude mít větší rozlišovací schopnost, a tím také podle (3) bude větší příslušné užitečné zvětšení mikroskopu.

U světelného mikroskopu, volíme-li střední vlnovou délku viditelného světla $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ mm, plyne pro velikost rozlišitelných detailů (tedy pro rozlišovací mez) hodnota

$$\delta = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{A} \text{ [mm]} \quad (4)$$

a pro užitečné zvětšení z (3)

$$\Gamma \doteq 500 A \quad (5)$$

Z principů vlnové mechaniky, k jejímž zakladatelům patří vynikající francouzský fyzik Louis de Broglie (čti luj d broli), vyplývá, že elementární částici (elektronu, neutronu, protonu aj.) hmoty m , pohybující se rychlostí v , přísluší vlnová délka (B r o g l i e o v a v l n a)

$$|\lambda| = \frac{\hbar}{m v}, \quad (6)$$

kde $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta.

Skutečnost, že elementární částice mají vlnovou povahu, vedla k myšlence sestavit mikroskop, ve kterém by se k zobrazení využilo místo světla elementárních částic. Protože ze všech elementárních částic lze nejspíše získávat elektrony a lze také jejich pohyb snadno ovlivňovat, byl jako první zkonstruován mikroskop, ve kterém se k zobrazení využívá elektronů, tzv. *elektronový mikroskop* (obr. 1). Elektronový mikroskop je přístroj, ve kterém se využívá zákonů elektronové optiky¹⁾ k zobrazování malých předmětů na fluorescenčním stínítku, nebo na fotografické desce, či filmu, pomocí svazku elektronů pohybujících se ve vakuu; lze jím získat značně zvětšené obrazy rozličných předmětů.

Elektrony hmoty m lze v elektronovém mikroskopu urychlit elek-

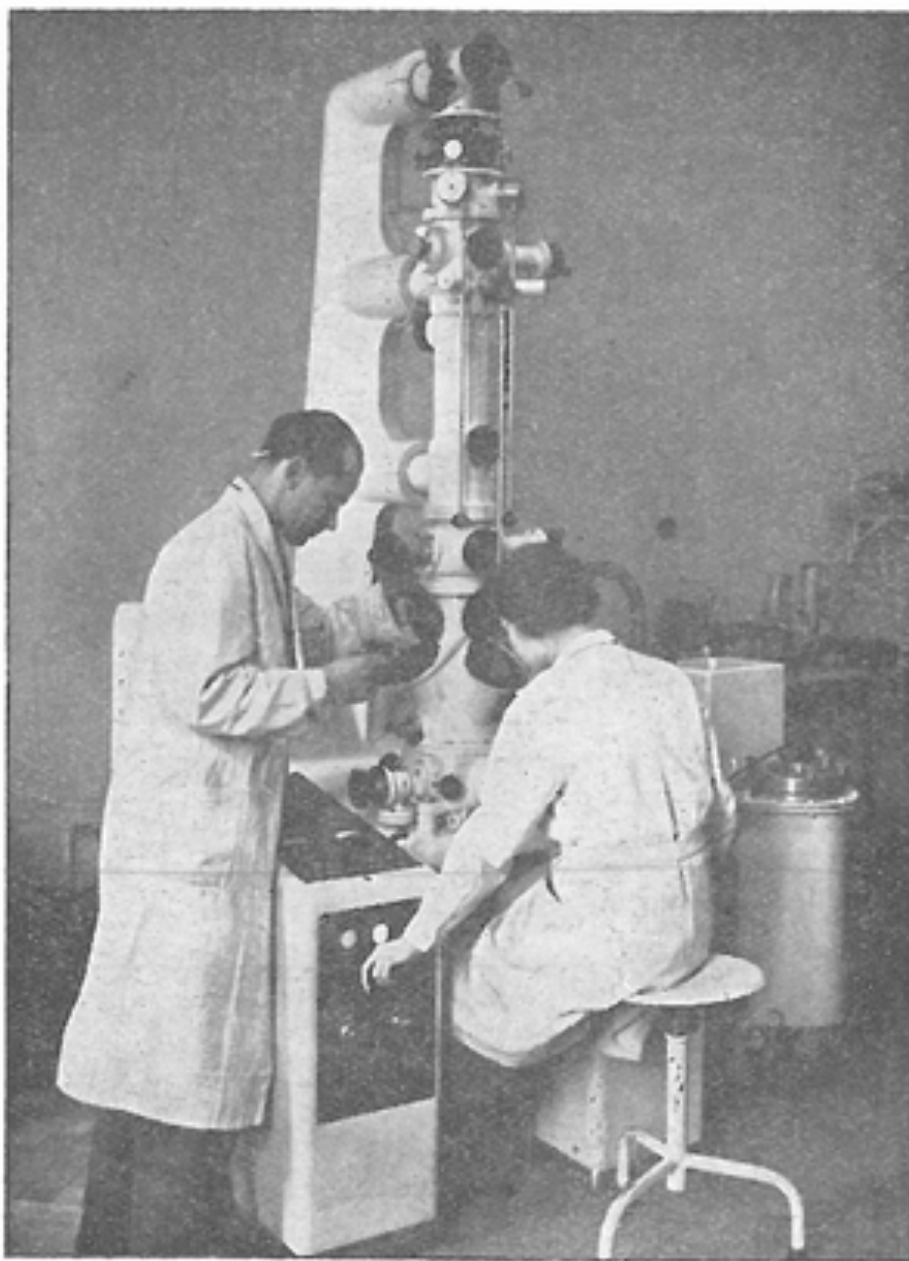
¹⁾ O elektronové optice bylo pojednáno v článku J. Pospíšil, *Elektronová optika*; *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 1961/62, č. 2, 3, 4.

trickým polem. Bylo-li dosaženo rychlosti v zrychlením elektronů potenciálním rozdílem U , pak platí

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U$$

Odtud

$$v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} \quad (7)$$



Obr. 1

Dosazením vztahu (7) do (6) dostaneme pro Broglieho délku vlny

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} \quad (8)$$

Dosadíme-li číselné hodnoty za $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C a udáme-li napětí U ve voltech, pak vychází

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} \cdot 10^{-10} \text{ [m]}$$

čili po odmocnění a úpravě

$$\lambda = \frac{1,225}{\sqrt{U}} \cdot 10^{-6} \text{ [mm]} \quad (9)$$

Ze vztahu (9) plyne, že zvětšováním urychlujícího napětí U elektrického pole můžeme zmenšovat vlnovou délku λ elektronu a tím podle (1) zmenšovat rozlišovací mez δ a podle (3) zvětšovat užitečné zvětšení Γ elektronového mikroskopu. Vlnovou délku λ elektronu můžeme tedy podle potřeby měnit změnou velikosti urychlujícího napětí U elektrického pole.

Je-li např. napětí $U = 100$ V, vychází vlnová délka elektronu $\lambda = 1,225 \cdot 10^{-7}$ mm, tj. vlnová délka zhruba 4080krát menší než je střední vlnová délka $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ mm viditelného světla. Dosazením do (3) pak vychází pro příslušné zvětšení elektronového mikroskopu

$$\Gamma \doteq 2,04 \cdot 10^6 A \quad (10)$$

Porovnáme-li vztah (5) se vztahem (10) vidíme, že v uvažovaném případě je užitečné zvětšení elektronového mikroskopu při stejné číselné apertuře A asi 4080krát větší než užitečné zvětšení světelného mikroskopu.

Nutno poznamenat, že zatím co u světelných mikroskopů může číselná apertura A dosáhnout hodnoty 1,5 až 1,6, u elektronového mikroskopu může maximálně dosáhnout hodnoty $A = 0,02$. Další zvětšení číselné apertury by mělo vliv na kvalitu obrazu, neboť elektrony emitované z bodu by se při velkém úhlu α nesoustřeďovaly v obrazové rovině znovu v bodě.

Dosadíme-li do vztahu (10) za $A = 0,02$, dostaneme ve zkoumaném případě užitečné zvětšení $\Gamma \doteq 40\,800$.

Z předcházejících úvah je vidět, že elektronový mikroskop umožňuje pozorovat děje a předměty, které nelze pozorovat ani sebedokonalejším světelným mikroskopem.

Díky vynikajícím vlastnostem elektronových paprsků dosahuje se přímého zvětšení až 200 000násobného, zatím co u světelných mikroskopů lze prakticky dosáhnout nejvýš zvětšení 1000násobného. Udává se, že kdyby bylo možno vyrobit elektronové čočky tak dokonalé jako jsou čočky optické, bylo by možno dosáhnout rozlišovací meze asi 1 Å a užitečného zvětšení asi 10^6 . Vzhledem k neodstranitelným vadám elektronových čoček je praktická krajní rozlišovací mez elektronových mikroskopů 7 až 13 Å, stále ještě daleko menší než u nejdokonalejších

světelných mikroskopů, tj. jejich rozlišovací schopnost je mnohem větší než u mikroskopů světelných, kterými nelze rozlišit detaily menší než je $0,1 \mu$, tj. $10^3 \text{ \AA}$. Z toho plyne, že elektronové mikroskopy umožňují vidět dokonce větší molekuly, jako jsou např. organické molekuly s molekulovou hmotou aspoň 40 000, z nichž největší (molekuly bílkovin s molekulovou hmotou až $7 \cdot 10^6$) mají průměr až 200 $\text{\AA}$. Tuto velikost mají zhruba makromolekuly hemocyaninu s molekulovou hmotou kolem $6 \cdot 10^6$, které se dají oddělit z roztoku ultracentrifugou.

Ze zkušeností, jichž se nabylo při pracích s elektronovými mikroskopy jak u nás, tak i v zahraničí, vyplývá, že většině pracovníků ve vědě a technice stačí zvětšení 10 000 až 15 000násobné, což bývá zvětšení tzv. příručních elektronových mikroskopů. Ty mají ještě tu výhodu, že jsou přenosné a dají se lehce obsluhovat. Pro větší zvětšení se užívá velkých a dokonalejších elektronových mikroskopů.

(Pokračování)

Matematické zábavy



Jiří Sedláček, CSc, Praha:

Úloha o druhé odmocnině

Pavel napsal na tabuli podivnou rovnici

$$x^2 = 1234567890 \dots$$

„Proč jsou na konci tři tečky?“ táže se Petr.

„Chtěl bych vědět“, odpovídá Pavel, „zda je možno najít přirozené číslo x takové, že číslo x^2 začíná desíti číslicemi 1234567890.

„Další číslice mohou být libovolné?“

„Ano, mohou být libovolné a ani na jejich počet nekladu žádný požadavek“.

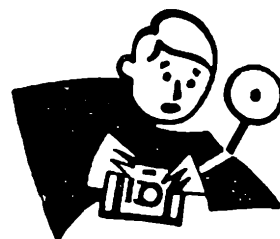
Milí čtenáři, zamyslete se nad touto otázkou. Najdete-li řešení, pošlete je do redakce našeho časopisu. Nejlepší příspěvek rádi otiskneme.

J. S.

J o s e f K o t y k, Pardubice:

Hermann Helmholtz

(Dokončení)



III. Fyzika a fyziologie smyslů

Prologem moderní kvantové a atomové fyziky je přednáška Planckova, proslovená na slavnostním shromáždění Německé fyzikální společnosti v roce 1900¹). Další půlstoletí Společnosti, jež tak velkou měrou přispěla k vytvoření fyzikálního novodobého světového názoru, bývá proto někde zváno érou Planckovou. Předcházející půlstoletí stojí pod přímým vlivem Helmholtzovým. Charakteristickým rysem tohoto období je, že v něm připadá významná úloha *f y z i o l o g i i*.

Spojení biologie s exaktní vědou, na němž se Helmholtz, lékař a fyzik, odhodlal založit svá bádání, se vyhýbali jak biologové, tak i fyzikové dřívějších dob. Úzké spolupráci fyziky a fyziologie lze však připsat většinu vědeckých úspěchů Helmholtzových. Helmholtzovy práce z fyziologické a fyzikální akustiky a optiky jsou epochální. S Helmholtzovým jménem se proto setkáváme v těchto oborech stále a téměř všude. Práce do nich spadající shrnul Helmholtz v rozsáhlé spisy *Physiologische Optik* (1858) a *Die Lehre von den Tonempfindungen* (1862), jež svědčí dodnes o významu Hermanna Helmholtze jako tvůrce *psychofyziologie smyslů*.

Podle *Young-Helmholtzovy* teorie vidění barev jsou k čípkům oční sítnice napojeny tři různé druhy jemných nervových vláken. Jeden je citlivý pouze pro paprsky fialové, druhý pro zelené, třetí pro červené. Barevné odstíny vznikají v oku superpozicí (překládáním) těchto tří základních barev²). Podrážděním první a druhé skupiny vzniká dojem barvy modré, první a třetí purpurové, druhé

¹) Viz Část I., pozn. 5), v podrobnostech pak zejména můj článek *Max Planck* v 36. ročníku *Rozhledů*, stať II. (Nauka o záření), čís. 6, str. 285 až 287.

²) Nejnovější výzkumy však ukázaly, že skutečnosti lépe vyhovuje teorie čtyř základních barev (fialové, modré, zelené a žluté).

a třetí žluté. Jsou-li světlem podrážděny všechny skupiny současně, máme dojem bílého světla. Tato teorie nedovede však uspokojivě vyložit úkazy kontrastu a daltonismu (slepoty barev). Iradiaci (plochy intenzívně světlé zdají se nám větší, než skutečně jsou) vysvětluje tím, že při velmi silných popudech se podráždění sdělí také okolním nervovým vláknům, která nebyla původním popudem přímo zasažena.

Helmholtz vyložil také oční akomodaci. Roku 1851 proslavil se však i jako vynálezce tzv. ophthalmoskopu, zvláštního očního zrcadla, vhodného k pozorování sítnice.

J e v y s l u c h o v é vykládal Helmholtz na základě principu rezonance (H e l m h o l t z o v a t e r i e r e z o n a n c n í). Každé z vláken neobyčejně jemné soustavy v ústrojí Cortiho je vzhledem k své délce, tloušťce a napětí (podobně jako struna) citlivé na jednu akustickou frekvenci, na jeden určitý tón. Zaznívá-li tón určité výšky, rozechvěje se podle Helmholtzovy teorie to vlákno, které má stejný kmitočet; je tedy na daný tón naladěno. Základní blána, na níž je umístěno Cortiho ústrojí, se chvěje zároveň jako celek. Připomenu-li čtenářům známé zkušenosti s tónem zazpívaným např. proti harfě nebo do otevřeného klavíru, budou jim výklady Helmholtzovy teorie přístupné a zcela přirozené.

H e l m h o l t z vyložil také barvitost zvuku hudebních nástrojů a lidského hlasu. Ukázal, že rozkládání daného kmitočtu na sinusové vlny odpovídá bezprostřední psychologické realitě. Složený zvuk nevnímáme jako celek, nýbrž jako soubor jednotlivých tónů³). Helmholtzovou zásluhou slavila tehdy velké úspěchy a n a l ý z a (r o z k l a d) z v u k u na složky. Pokusy s r e z o n á t o r y⁴) Helmholtz potvrdil, že každý hudební zvuk je složen z tónu základního a některých vrchních tónů harmonických. Výška tónu je určena tónem základním, jenž má zpravidla největší intenzitu. O barvitosti zvuku rozhoduje, které vrchní tóny a v jaké intenzitě jsou v něm obsaženy.

Aby své výsledky ověřil (jeho pečlivost by mohla být příkladem jediné správného vědeckého postupu), Helmholtz vykonal také úspěšnou s y n t é z u (s k l á d á n í) t ó n ů, připojuje k tónu základnímu vrchní tóny harmonické.

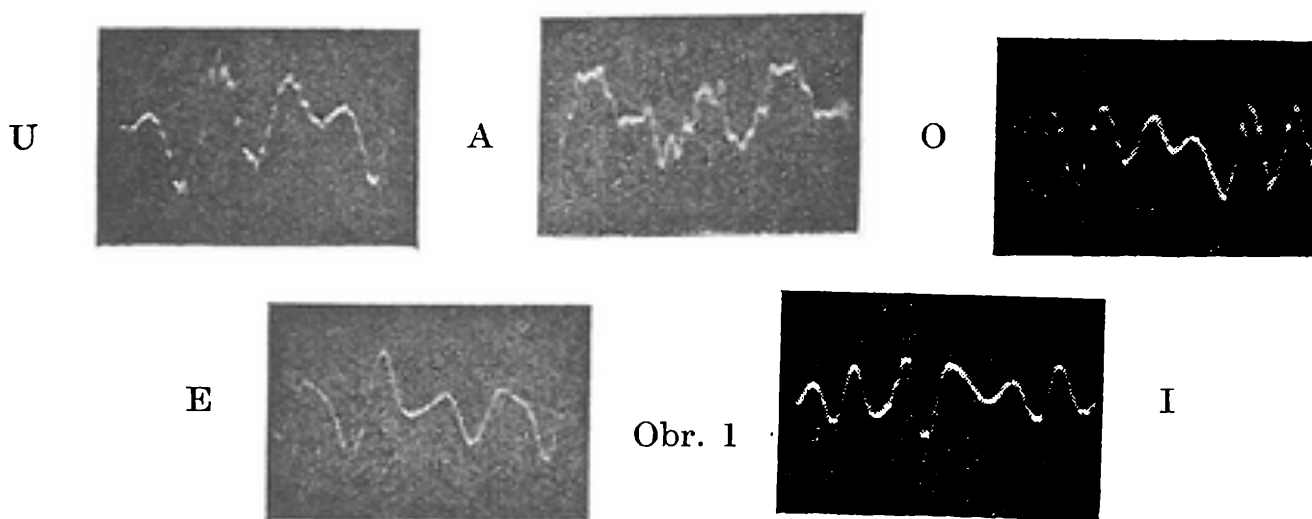
Pozoruhodná je také H e l m h o l t z o v a t e o r i e k o n s o n a n c e a d i s o n a n c e, založená na rázech, které vznikají mezi vrchními tóny harmonickými. Když studoval Helmholtz podmínky nestejně libozvučnosti různých souzvuků, shledal, že konsonantní jsou dva zvuky, jejichž řada vrchních tónů harmonických splývá (např. kvinta má s pri-

³) Tuto okolnost zjistil roku 1843 také G e o r g S i m o n O h m (1787 až 1854,) autor známého zákona elektrokinetiky.

⁴) Viz učebnici fyziky pro 10. postupný ročník (1954), obr. 123. Běží o H e l m h o l t z ů v r e z o n á t o r k u l o v ý, naladěný na jeden tón. Učebnice nepopisuje však H e l m h o l t z ů v r e z o n á t o r v á l c o v ý, který lze vytahováním nebo zasunováním ladit na různé tóny.

mou sudé, oktáva s primou dokonce všechny vrchní tóny harmonické společné). Jsou-li vrchní tóny harmonické dvou zvuků blízké, vzbuzují rázy; tím nastává drsnost souzvuku a vzniká disonance. Počet rázů za vteřinu určujeme rozdílem kmitočtů; při počtu asi 33 rázy za vteřinu je pocit nejnepříjemnější.

S příkladným porozuměním a vytrvalostí věnoval se Helmholtz také studiu v z n i k u h l á s e k. Souhlásky jsou nepravidelné zvuky krátkého trvání, samohlásky lze však zachytit typickým záznamem na stínítku oscilografu (viz snímky, získané při laboratorních pracích žáků, na připojeném obrázku⁵). Podle Helmholtze jsou samohlásky zvuky složené z jednotlivých harmonických tónů různé intenzity. Rezonancí dutin, hlavně dutiny ústní, se některé tóny ve zvuku obsažené zeslabují, jiné zesilují. Helmholtzovi se podařilo samohlásky také uměle napodobit.



K pokusům použil řady ladiček, jež naladil na jednotlivé tóny a elektromagneticky uváděl ve chvění různé intenzity. Ukázal, že tónu ladiček se podobá samohláska U, v níž převládá tón základní. Při samohláskách A, O převládají nízké, při E, I vysoké tóny harmonické. Samohlásku I považujeme (viz obr. případ V.) za fyzikálně nejsložitější.

Jako badatel lékařsky vzdělaný zabýval se H e l m h o l t z činností smyslových orgánů, především oka a ucha. Dospěl také k srovnávání fyzikálních podobností a rozdílností lidského zraku a s l u c h u. Nemůžeme ovšem souhlasit s jeho známým výrokem, že oko je opticky méněcenný výtvar přírody. Problematika vzájemné dialektické souvislosti zraku a sluchu, nejdůležitějších smyslových orgánů lidského těla, upoutává však pozornost fyziků a fyziologů dodnes.

Laboratorní cvičení.

Pokuste se také o zpracování fotografických snímků popsaných typických záznamů samohlásek, jež můžete zachytit na stínítku oscilografu.

⁵) Běží však jen o typický průběh křivek jednotlivých samohlásek. Při laboratorním studiu nepodařilo se žákům vyloučit z křivek téže samohlásky individuální rozdíly, způsobené okamžitými hlasovými dispozicemi.

Marie Bílková, Praha:

**Správné výsledky cvičení z učebnice
„Geometrie pro 12. ročník
dvanáctiletých středních škol“**

(Dokončení)

13

8. b) $9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144$. $x=2, y=2$

14

9. $Rr \left(x - \frac{R+r}{2} \right)^2 - \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 y^2 = Rr \left(\frac{R-r}{2} \right)^2$

III. Opakování

1

7. $82^\circ 17' 40''$ 8. $\frac{3}{4} R$ a $\frac{5}{4} R$.

2

1. $v \doteq 17,7$ m.

4

1. $90^\circ, 105^\circ, 90^\circ, 75^\circ$; $r, r\sqrt{2}, r\sqrt{2}, r\sqrt{3}$. 3. $a(\sqrt{2}-1), 2a^2(\sqrt{2}-1)$.

5

1. 80 kg, 113 kg. 3. 397,6 m. 5. $x=30, y \doteq 51,96$,
 $z \doteq 69,28, t \doteq 72,12$. 6. 1980 m. 7. 259,9 a.

6

1. $51,85 \text{ m}^2, 3 \text{ } 132 \text{ } 000 \text{ m}^3$. 3. $3 \text{ } 475 \text{ l}$. 4. 764 dm^3 . 7. $\frac{9}{8} \pi a^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
10. $\frac{\pi a^3 \sin^2 \beta}{3 \sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + \beta)$. 11. $17 \text{ } 130 \text{ cm}^2; 284 \text{ } 000 \text{ cm}^3$. 12. Asi 10 %.

V části II. a III. nejsou uvedeny ony výsledky, které jsou v učebnici otištěny správně.

Matematická a fyzikální olympiáda

J a r o s l a v P o s p í š i l
a V l a d i m í r R u d o l f, U P,
Olomouc:

Průběh II. ročníku FO ve školním roce 1960/61



Soutěž fyzikální olympiáda (FO) byla celostátně řízena ústředním výborem fyzikální olympiády (ÚVFO) a v jednotlivých krajích krajskými výbory fyzikální olympiády (KVFO). Soutěž proběhla v kategoriích:

A pro žáky 11. tříd JSŠ, 12. tříd DSŠ a 3. a 4. ročníků SOŠ,

B pro žáky 10. tříd JSŠ, 11. tříd DSŠ a 2. ročníků SOŠ,

C pro žáky 9. tříd JSŠ, 10. tříd DSŠ a 1. ročníků SOŠ.

Soutěž v kategoriích B a C se konala ve dvou a v kategorii A ve třech kolech.

Prvé kolo bylo uspořádáno na školách do 28. února 1961. Soutěžící měli vyřešit alespoň šest z devíti zadaných úloh a prostudovat jedno téma. Mezi vyřešenými úlohami musela však bezpodmínečně být také experimentální úloha, která byla v každé kategorii označena číslem 9.

V prvním kole všech kategorií soutěžilo celkem 1939 studentů, kteří byli v kategorii A ze 147 škol, v kategorii B ze 133 škol a v kategorii C ze 166 škol. Hochů soutěžilo 77 % a dívek 23 %. Úspěšných řešitelů prvního kola FO bylo 698, z čehož 75,5 % hochů a 24,5 % dívek. Opravu úloh prováděli na školách učitelé fyziky a referenti FO. Celkem opravili 9307 příkladů, z nichž bylo 7050 správných.

Úspěšní řešitelé z prvního kola všech kategorií postoupili pak do druhého (krajského) kola soutěže, které proběhlo v jednotlivých krajích ve dnech 8. a 9. dubna 1961. Soutěžící byli pozváni do města, které určil příslušný KVFO, a ve dvou půldnech za dozoru řešili celkem čtyři úlohy a to tři teoretické a jednu experimentální. Úspěšnými řešiteli byli uznáni ti, kteří ze čtyř zadaných úloh vyřešili aspoň dvě. Vítězové ze všech tří kategorií dostali pochvalné uznání a knižní ceny.

Do druhého kola všech kategorií se dostalo celkem 636 žáků, tj. 36 % soutěžících z prvního kola. Mezi soutěžícími bylo 77 % hochů a 23 %

dívek. Úspěšných řešitelů bylo 396 a z těch 84 % hochů a 16 % dívek. Opravu řešených úloh prováděly KVFO a z celkového počtu 2256 opravovaných úloh uznaly 1378 úloh za správně vyřešené.

Pro vybrané úspěšné řešitele FO kategorie A bylo ve dnech 28. až 30. dubna 1961 uspořádáno na Slovenské vysoké škole technické v Bratislavě třetí (celostátní) kolo soutěže. Soutěžící měli za úkol vyřešit tři teoretické úlohy a jednu úlohu experimentální. Za úspěšného řešitele byl považován, kdo ze čtyř zadaných úloh vyřešil alespoň dvě.



Obr. 1

Ze 138 úspěšných řešitelů druhého kola kategorie A (z nich 125 hochů a 13 dívek) ze všech krajů bylo k účasti na třetím kole vybráno a pozváno jen 71 žáků (z toho 67 hochů a 4 dívky). Tito vybraní žáci byli vesměs ze středních všeobecně vzdělávacích škol, až na dva hochy ze škol průmyslových.

Podle programu sjeli se dne 28. dubna 1961 všichni pozvaní účastníci třetího kola soutěže do Bratislavy a zúčastnili se v 17.30 hodin zahajovací besedy v budově Slovenské vysoké školy technické. Vedle členů ÚVFO byli též přítomni zástupci Slovenské národní rady, ÚV KSS a ÚV ČSM.

První část soutěže proběhla dne 29. dubna 1961 od 8 do 12 hodin, při níž účastníci soutěže řešili teoretické úlohy za dozoru členů ÚVFO. Odpoledne byla prohlídka Bratislavy a večer navštívili všichni účastníci operu Richarda Wagnera „Bludný Holanďan“ ve Slovenském národním divadle.

Dne 30. dubna 1961 od 7 hodin se konala za dozoru asistentů katedry fyziky SVŠT po skupinách druhá část soutěže, tj. řešení experimentální úlohy. Na závěr soutěže byla uspořádána závěrečná beseda, po níž se účastníci soutěže rozejeli do svých domovů.

Z 71 účastníků tohoto kola soutěže bylo 56 úspěšných řešitelů podle výsledků své práce sestaveno do pořadí. Podle organizačního řádu FO bylo prvních dvacet v pořadí uvedených řešitelů vesměs hochů - prohlášeno za vítěze II. ročníku FO. Mezi dalšími úspěšnými řešiteli (pořadí č. 21 až 56) bylo 34 hochů a 2 dívky, celkem 36 řešitelů. Soutěžící se nejlépe osvědčili v řešení experimentální úlohy, dané z elektřiny. Průměrná známka zde dosažená byla 1,7, při čemž klasifikační stupnice měla jen tři známky a to výborně (1), dobře (2) a nevyhovuje (3). Z ostatních tří teoretických úloh opět nejlepší výsledek byl dosažen z úlohy z elektřiny (průměr 1,8) pak následoval co do úspěšnosti příklad z termiky a mechaniky (průměr 2,2) a nejslabší výsledek byl z příkladu z geometrické optiky (průměr 2,6). Tento příklad výborně vyřešilo jen 8 a dobře 10 účastníků.

Z uvedených čísel je patrné, že II. ročník soutěže FO byl celkem úspěšný. Podrobnosti o průběhu soutěže, seznam úspěšných řešitelů a vítězů i zhodnocení výsledků jsou uvedeny v brožůře „II. ročník Fyzikální olympiády“. Seznam vítězů II. ročníku FO byl již uveřejněn v č. 4 Rozhledů matematicko-fyzikálních.

T o m á š J e c h, Praha:

Třetí mezinárodní matematická olympiáda

Ve dnech 8. až 16. července 1961 uspořádala maďarská M a t e m a t i c k á s p o l e č n o s t J á n o s e B o l y a i e (BJMT - Bolyai János Matematikai Társulat) s ministerstvem kultury Maďarské lidové republiky I I I. m e z i n á r o d n í m a t e m a t i c k o u o l y m p i á d u. Soutěž se konala v krajském městě Veszprému poblíž severovýchodního pobřeží Blatenského jezera. Účastnilo se jí 48 žáků středních škol ze šesti států a to Bulharska, Československa, Maďarska, NDR, Polska a Rumunska. Účastníci byli vybráni na základě umístění při národních matematických olympiádách ve svých zemích. Mezi soutěžícími bylo pět děvčat (tři z Bulharska, dvě z NDR).

Československá žákovská osmičlená delegace s pedagogickým průvodcem s. Petrem Bendou odjela do Budapešti v pátek 7. července. Vedoucí naší výpravy s. Rud. Zelinka, tajemník ústředního výboru matematické olympiády, byl v Budapešti již od středy a s vedoucími ostatních delegací tvořil komisi, která provedla výběr příkladů pro soutěž. V sobotu odjeli všichni účastníci olympiády do Veszprému, kde byli ubytováni v koleji technické university (obor chemie). Ve velké posluchárně této školy se konala v pondělí a v úterý vlastní soutěž. V neděli jsme podnikli společný výlet k Blatenskému jezeru. V krásném prostředí moderního lázeňského místa Siófoku jsme strávili příjemné odpoledne a načerpali jsme síly pro nastávající „boj“.

Dne 10. a 11. července jsme řešili v budově university 6 příkladů z algebry, trigonometrie, planimetrie a stereometrie. Výběr úloh provedla mezinárodní komise, složená z vedoucích jednotlivých delegací. První den byly zadány tři příklady z algebry a trigonometrie. Každý žák dostal obálku s texty úloh ve své mateřštině. Na řešení těchto příkladů byly vymezeny 4 hodiny čistého času. Za jejich vyřešení bylo možno získat maximálně 20 bodů (6 bodů za první příklad, po 7 bodech za druhý a třetí). Texty úloh jsou uvedeny v příloze.

(Pokračování)

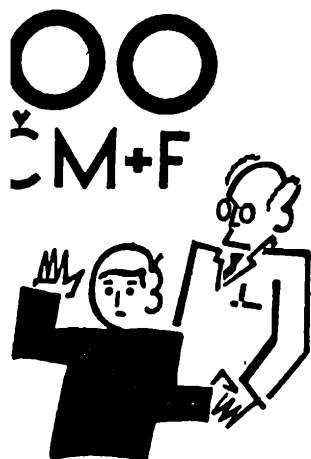
Oprava k článku S. Burýška z minulého čísla *O s u m a c i a r i t m e t i c k o - g e o m e t r i c k ý c h ř a d.* Vzorec (1.4) správně zní: $s_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - q \frac{q^n - 1}{(q-1)^2}$. Opravte si proto také formuli (2.6) na $s_n = a_1 b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} + db_1 \left[\frac{(n-1)q^n}{q-1} - q \frac{q^{n-1} - 1}{(q-1)^2} \right]$, vzorec (3.3) pak zní $s_n = \frac{n^2 q^{n+1}}{q-1} - q \frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{2q}{q-1} \left[\frac{(n-1)q^n}{q-1} - q \frac{q^{n-1} - 1}{(q-1)^2} \right]$, výsledek cvičení 1) je $s_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n (3n - 7) + 7$ a cvičení 4): $s = q [(q+2)^2 - 3] (1-q)^4$.

Autor

V zadání příkladu č. 9, kategorie C, fyzikální olympiády zní vzorec pro tíhové zrychlení $g = \frac{s}{h} \cdot a$.

Upozorňujeme účastníky 1. kola III. ročníku Fyzikální olympiády, že v zadání úlohy č. 7, kategorie A uvedeném v prvním čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních a v letáku „III. ročník Fyzikální olympiády“ byla omylem vynechána věta „Počáteční teplota pojistky je 17 °C.“

Ú V F O



František Veselý, Plzeň:

Vznik a vývoj Jednoty československých matematiků a fyziků

(Dokončení)

Od roku 1873 začala pak JČM vydávat vědecké a odborné spisy a vysokoškolské i středoškolské učebnice matematiky a fyziky. Krize kapitalistického hospodářství, která postihla téměř celou Evropu nejsilněji v letech 1873—1879, ovlivnila svými důsledky spolkovou a zejména vydavatelskou činnost JČM, která oživila teprve v letech devadesátých.

Na práci JČM pro rozvoj české matematiky a fyziky v minulém století měl podíl velký počet našich matematiků a fyziků, jež tu není možno všechny uvést. Připomenu proto jen nejzasloužilejší pracovníky v těchto vědách. Z matematiků to byli mimo jmenovaného již F. J. Studničku bratři Emil Weyr (1848—1894) a Eduard Weyr (1852 až 1903), z fyziků mimo jmenovaného již Augusta Seydlera nejnadanější český fyzik 19. století František Kolářek (1851—1913) a experimentální fyzik Čeněk Strouhal (1850—1922), který se též osvědčil jako vynikající učitel našich vědeckých pracovníků a středoškolských nebo vysokoškolských učitelů. V posledním desetiletí minulého století měly vědecké práce českých matematiků a fyziků již velmi dobrou úroveň a některé z nich měly již vynikající úroveň mezinárodní. Byly to zejména práce našeho slavného matematika Matyáše Lercha (1860—1922) a mladého, tehdy v Brně působícího středoškolského profesora Karla Petra (1868—1950).

Když od školního roku 1899/1900 byla otevřena česká vysoká škola technická v Brně, začalo tam vznikat nové pracovní středisko členů JČM, kteří se ve fyzikálním ústavu české techniky začali scházet. Brzy začali pořádat přednášky a diskuse o otázkách vědeckých i školských. Roku 1912, kdy JČM oslavila též 50 let svého trvání, byly změněny spolkové stanovy Jednoty, která přijala též rozšířený název *Jednota českých matematiků a fyziků* (JČMF). Nové stanovy připouštěly zřizování odborů

JČMF i mimo Prahu. Roku 1913 ustavil se pak b r n ě n s k ý o d b o r J Č M F, jehož činnost vzrostla zejména po první světové válce, když roku 1919 byla v Brně zřízena universita s přírodovědeckou fakultou. Největší zásluhu o vznik i rozvoj činnosti brněnského střediska a později odboru JČMF si získali fyzikové F r a n t i š e k N a c h t i k a l (1874—1939) a V l a d i m í r N o v á k (1869—1944).

Na počátku našeho století ujala se práce na pražské universitě i v Jednotě nová mladší generace vědeckých pracovníků v matematice a fyzice. Z matematiků to byli zejména K a r e l P e t r a J a n S o b o t k a (1862—1931), kteří se o rozvoj české matematické vědy zasloužili nejen svými vědeckými pracemi, ale i tím, že vychovali mnoho nových vědeckých pracovníků a středoškolských a vysokoškolských učitelů matematiky. K nim přibyl o několik let později matematik B o h u m í l B y d ť o v s k ý, který mimo svou vědeckou i učitelskou činnost vykonával mnoho práce při úsilí Jednoty o zlepšení vyučování matematice na českých středních školách. Za první světové války i po ní stál spolu s M i - l o s l a v e m V a l o u c h e m (1878—1952) v čele kolektivu těch pokrokových členů JČMF, kteří usilovali o reformu středních škol. Č e n ě k S t r o u h a l dostal roku 1903 výborného spolupracovníka B o h u m í l a K u č e r u, který se též zasloužil o výchovu velkého počtu vědeckých pracovníků v experimentální fyzice. Jejich vědecká i výchovatelská práce byla usnadněna, když roku 1907 byla ukončena výstavba nového fyzikálního ústavu české university. Po smrti K o l á č k o v ě stal se jeho nástupcem ve vedení ústavu teoretické fyziky všestranně vzdělaný vědecký pracovník F r a n t i š e k Z á v i š k a (1879—1945), který se pak zejména v době mezi oběma světovými válkami osvědčil jako obhájce a průkopník nových myšlenek v moderní fyzice.

Již v prvních dvou desetiletích našeho století projevila JČMF intenzivní činnost přednáškovou i publikační vydáváním vědeckých i odborných spisů a vysokoškolských i středoškolských učebnic. Přitom se v Jednotě velmi pěkně rozvinula práce různých komisí pro zlepšení vyučování matematice, fyzice a deskriptivní geometrii, resp. i pro reformu veškerého vyučování a výchovy na našich středních školách. Po první světové válce přijala Jednota roku 1921 svůj nynější název *Jednota československých matematiků a fyziků*, jehož užívala od té doby nepřetržitě s výjimkou doby německé okupace v letech 1939—1945. Již od svého vzniku udržovala Jednota styky s pracovníky v matematice a fyzice, kteří žili nebo pracovali na území dnešního Slovenska. Po vzniku československého státu se vytvořila na půdě JČMF velmi dobrá spolupráce českých i slovenských matematiků a fyziků, jejichž jednota nebyla pak narušena ani za druhé světové války. V roce 1929 vznikl v Bratislavě m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í k r o u ť e k J Č M F, který vznikl z iniciativy profesora fyziky na lékařské fakultě Komenského university V i k t o r a T e i s s l e r a. Jeho zásluhou zajímali se o práci tohoto

kroužku též vysokoškolští studenti v Bratislavě, i když Komenského universita neměla tehdy ještě přírodovědeckou fakultu.

V období mezi oběma světovými válkami ukázaly se dobré výsledky budovatelské a výchovatelské práce Karla Petra a Jana Sobotky v matematice a Čenka Strouhala i Bohumila Kučery ve fyzice. V té době byly již výsledky vědeckých prací jejich žáků mezinárodně uznávány a oceňovány. V této době nastal také veliký rozmach spolkové činnosti JČMF, která se opírala o dobrou organizační práci; od roku 1915 ji dobře promýšlel a řídil Miloslav Valouch, který až do roku 1952 zastával v Jednotě důležitou funkci ředitele JČMF. K jeho zásluhám patří též, že vybudoval a stále zdokonaloval tiskárnu JČMF tak, aby co nejlépe sloužila tisku matematických a fyzikálních nebo i jiných odborných textů. Dnes slouží tato tiskárna různým našim vědeckým institucím.

Velmi příznivý vývoj matematických a fyzikálních věd v naší vlasti byl náhle zastaven a v základech ohrožen mnichovskými událostmi a jejich důsledky, k nimž patřila druhá světová válka a nacistická okupace našich zemí. Po událostech 17. listopadu 1939 došlo k násilnému uzavření českých vysokých škol, které bylo počátkem perzekuce českých studentů i učitelů. Mnoho jich bylo uvězněno nebo odvečeno do koncentračních táborů. Tam mnozí z nich ztratili život nebo později předčasně zemřeli pro následky útrap, které utrpěli ve vězeních a koncentračních táborech. Vydavatelská činnost Jednoty byla omezena cenzurní praxí i nedostatkem papíru. Přes různá perzekuční opatření udržela JČMF svou dobrou činnost i po celou druhou světovou válku, a to hlavně zásluhou svých obětavých pracovníků Miloslava Valoucha a Františka Vyčichla (1905—1958).

Po osvobození naší vlasti Sovětskou armádou se starala JČMF především o to, aby byly co nejdříve zahlazeny škody vzniklé okupací. Její funkcionáři a členové pečovali o obnovu pedagogické i vědecké činnosti vysokých škol a o obnovu četných středních škol, které Němci v době okupace uzavřeli. Starali se též o urychlené vydání středoškolských i vysokoškolských učebnic. Pečovali též o to, aby před očekávanou reformou našeho školství byly rozřešeny základní metodické otázky vyučování matematice, deskriptivní geometrii a fyzice.

Jednota se přihlásila již svým usnesením ze dne 30. dubna 1945 ke Košickému vládnímu programu a v jeho duchu pomáhala při budování socialistického státu. Když se tempo této výstavby po únorových událostech roku 1948 zrychlilo, předala JČMF mnohé své úkoly státu nebo veřejným institucím a národním podnikům socialistického hospodářství. Přitom se Jednota starala, aby bylo využito zkušeností z její dlouholeté činnosti pro rozvoj naší vědy i našeho školství. Roku 1951 darovala JČMF také svůj dům v Žitné ul. v Praze i svou bohatou, po 90 let budovanou knihovnu státu s přáním, aby zůstala zachována pro ty účely, pro které

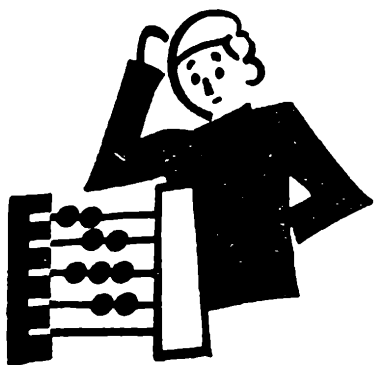
byla budována. V budově, která byla dříve majetkem Jednoty, je nyní umístěn **M a t e m a t i c k ý ú s t a v Č e s k o s l o v e n s k é a k a d e m i e** věd, k jejímuž zřízení došlo v roce 1952. Ten také spravuje a dále buduje vědeckou knihovnu, která vznikla ze základního fondu darovaného Jednotou. Má nyní již přes 33 tisíc svazků a filmů a dochází do ní asi 280 cizích vědeckých časopisů. Je proto velmi cennou knihovnou pro všechny pracovníky v matematicko-fyzikální vědě i pro studenty vysokých škol nebo i pro jiné zájemce o studium matematiky a fyziky.

Roku 1956 byla JČMF reorganizována. Při této reorganizaci se uplatnily zásady demokratického rozhodování všech členů JČMF a zásada kulturní decentralizace. Práce Jednoty je totiž nyní soustředěna do poboček JČMF, které byly zřízeny ve všech větších městech, v nichž pro jejich práci byly splněny dobré předpoklady.

Snad i vy se brzy stanete členy JČMF, která chce dále pečovat o rozvoj matematických a fyzikálních věd v naší vlasti. Touto prací chce přispívat k takovému rozvoji technických, přírodních nebo i společenských věd, který by zabezpečil ještě lepší uspokojování materiálních i kulturních potřeb našeho lidu.

Matematika

Prof. Dr. Josef Brejcha CSc., Brno:



Konstrukce čtyřúhelníka, jehož vrcholy jsou patami kolmic spuštěných z bodu v rovině na čtyři její různoběžky

V rovině budtež dány čtyři různoběžky a_i ($i = 1, 2, 3, 4$), z nichž žádné tři nemají společný týž bod. Vrcholy konvexního čtyřúhelníka, který tyto přímky vytvoří, označme A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a to tak, aby

vrchol A_1 byl průsečíkem přímek	$a_3, a_4,$
" A_2 " " "	$a_4, a_1,$
A_3	$a_1, a_2,$
A_4	$a_2, a_3,$

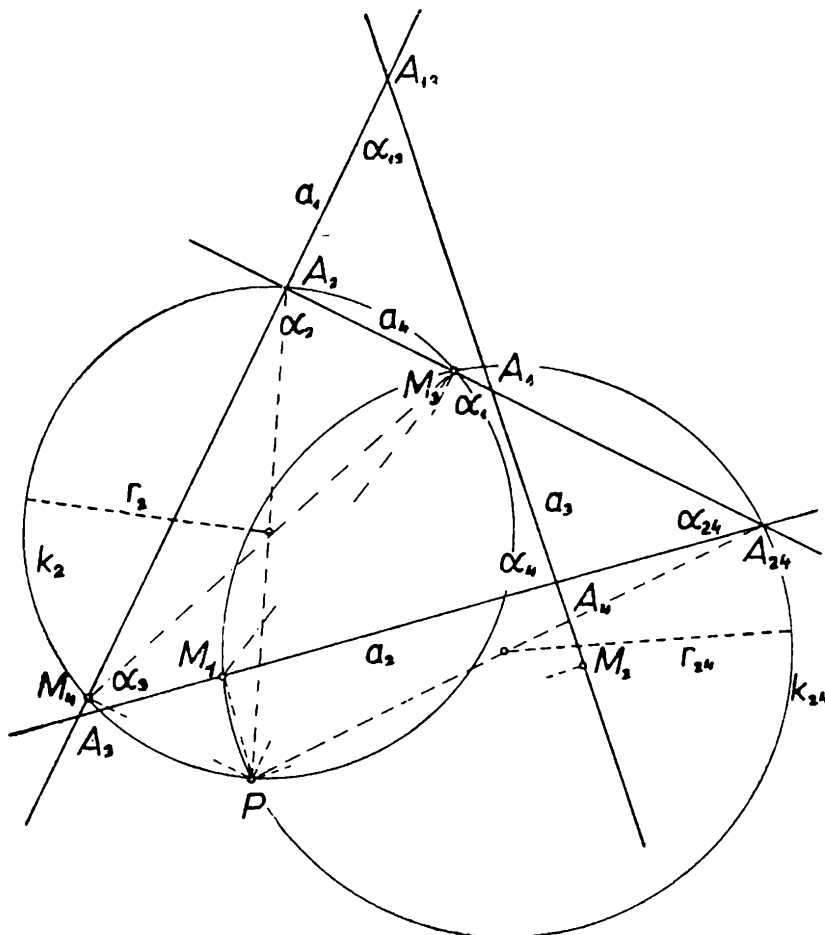
a vrcholy A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) následovaly za sebou na obvodu jimi vytvořeného čtyřúhelníka v přirozeném pořádku. Dále budtež

M_1	na přímce	$a_2,$
M_2	" "	$a_3,$
M_3		$a_4,$
M_4		a_1

čtyři body té vlastnosti, že kolmice, vztyčené v každém z nich k přímce a_i , na níž tento bod leží, se protínají v jediném bodě P (obr. 1).

Budiž nyní α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vnitřní úhel čtyřúhelníka A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), při vrcholu A_i se stejným indexem. Dále označíme

r_1	poloměr kružnice, opsané trojúhelníku	$A_1M_2M_3$,
r_2	" " " "	$A_2M_3M_4$,
r_3		$A_3M_4M_1$,
r_4		$A_4M_1M_2$.



Obr. 1

Pak platí

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{M_2M_3}{2 \sin \alpha_1}, & r_3 &= \frac{M_4M_1}{2 \sin \alpha_3}, \\ r_2 &= \frac{M_3M_4}{2 \sin \alpha_2}, & r_4 &= \frac{M_1M_2}{2 \sin \alpha_4} \end{aligned} \quad (1)$$

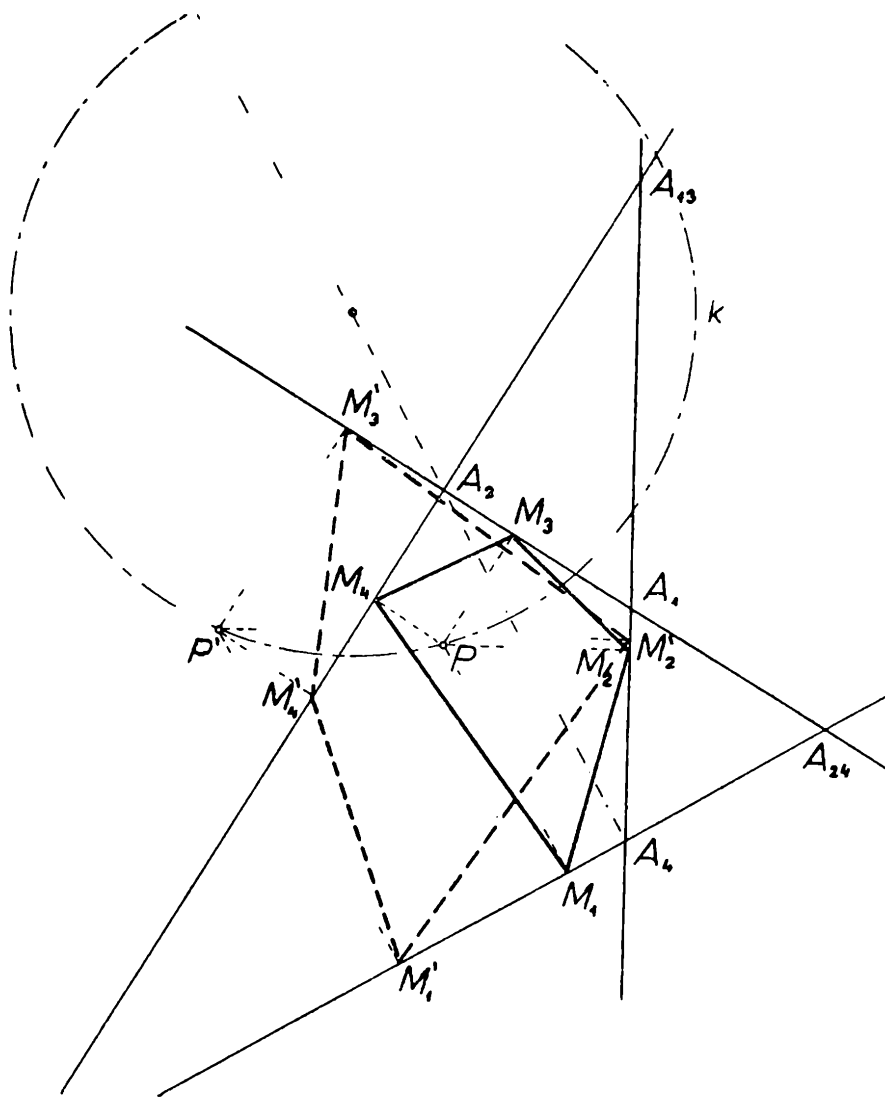
Nezávisle na poloze bodu P platí dále, vzhledem k předpokladům o vlastnostech bodů M_i , relace

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1M_2P &= \sphericalangle A_1M_3P = \frac{\pi}{2}, & \sphericalangle A_3M_4P &= \sphericalangle A_3M_1P = \frac{\pi}{2}, \\ \sphericalangle A_2M_3P &= \sphericalangle A_2M_4P = \frac{\pi}{2}, & \sphericalangle A_4M_1P &= \sphericalangle A_4M_2P = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Kružnice k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) o poloměrech r_i , opsané trojúhelníkům $A_1M_2M_3$, $A_2M_3M_4$, $A_3M_4M_1$, $A_4M_1M_2$ jsou tedy též opsány čtyřúhelníkům $A_1M_2PM_3$, $A_2M_3PM_4$, $A_3M_4PM_1$, $A_4M_1PM_2$.

S ohledem na (2) je dále možno položit

$$A_iP = 2r_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$



Obr. 2

Označme ještě A_{13} průsečík přímek a_1, a_3 , A_{24} průsečík přímek a_2, a_4 , α_{13} resp. α_{24} vnitřní úhly při vrcholech A_{13} , resp. A_{24} trojúhelníků $A_{13}M_2M_4$, $A_{24}M_1M_3$ a konečně r_{13} , r_{24} poloměry kružnic opsaných těmito trojúhelníky v uvedeném pořadí.

Pak zcela analogicky jako dříve získáme relace

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{M_2M_4}{2 \sin \alpha_{13}}, & r_{24} &= \frac{M_1M_3}{2 \sin \alpha_{24}}, \\ A_{13}P &= 2r_{13}, & A_{24}P &= 2r_{24}. \end{aligned} \quad (4)$$

Považujme nyní body M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) za vrcholy čtyřúhelníka a stanovme jejich konstrukci za některých dalších podmínek, a to v případech, že

1. dvě ze základních délek (tj. stran nebo úhlopříček) jsou v určitém předem daném poměru,

2. je dán některý vnitřní úhel uvažovaného čtyřúhelníka o vrcholech M_i .

Ad 1. Vyšetřme třeba případ, že mezi stranami čtyřúhelníka M_i platí vztah

$$M_1M_2 : M_3M_4 = m : n \quad m, n > 0.$$

V obr. 2 je $m = 3$, $n = 2$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\alpha_4 = 120^\circ$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Z relací (1) nalezneme ihned

$$\begin{aligned} r_4 \sin \alpha_4 : r_2 \sin \alpha_2 &= m : n, \\ r_2 : r_4 &= n \sin \alpha_4 : m \sin \alpha_2, \end{aligned}$$

odkud vzhledem k relacím (3) vychází

$$A_2P : A_4P = n \sin \alpha_4 : m \sin \alpha_2, \text{ tj.}$$

geometrickým místem bodů P při uvažované podmínce je Apolloniova kružnice, vztažená k bodům A_2, A_4 jako bodům základním podle poměru

$$\lambda = \frac{n \sin \alpha_4}{m \sin \alpha_2}$$

V případě, že podobná relace by platila mezi úhlopříčkami, tj. požadujeme-li aby bylo splněno

$$M_1M_3 : M_2M_4 = p : q \quad p, q > 0,$$

pak z relací (4) nalezneme podobně

$$\begin{aligned} r_{13} : r_{24} &= p \sin \alpha_{24} : q \sin \alpha_{13}, \\ A_{13}P : A_{24}P &= p \sin \alpha_{24} : q \sin \alpha_{13}. \end{aligned}$$

Geometrickým místem bodů P je opět Apolloniova kružnice, vztažená však nyní k bodům A_{13}, A_{24} jako základním podle poměru $\lambda = \frac{p \sin \alpha_{24}}{q \sin \alpha_{13}}$.

Ad 2. Konstrukce čtyřúhelníka M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) je v tomto případě založena na následující větě:

Budtež A_i ($i = 1, 2, 3$) vrcholy libovolného trojúhelníka, α_i ($i = 1, 2, 3$) jeho vnitřní úhly v běžném označení. Dále budiž ω libovolný úhel, splňující podmínku $0 < \omega < 2R$. Nyní označme

$$\begin{array}{ll} M_1 & \text{patu kolmice, spuštěné s libovolného bodu } P \text{ na stranu } A_2A_3, \\ M_2 & \text{" " " " " " " " " " " " } A_3A_1, \\ M_3 & \text{" " " " " " " " " " " " } A_1A_2. \end{array}$$

Sestrojíme nad stranou A_2A_3 jako tětivou kruhový oblouk, ležící v polorovině $A_2A_3A_1$, jako geometrické místo obvodových úhlů velikosti $\omega + \alpha_1$.

V obr. 3 je $\omega = 90^\circ$.

Pak tento oblouk je geometrickým místem bodů P té vlastnosti, že paty kolmic M_i ve shora uvedeném označení vytvoří trojúhelník, v němž platí $\sphericalangle M_3M_1M_2 = \omega$.

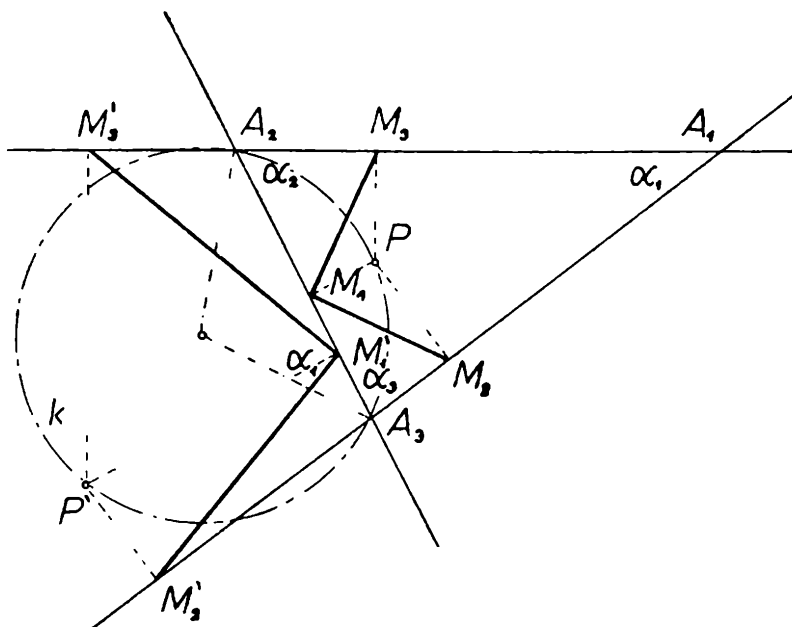
Oblouk téže kružnice, neležící v polorovině $A_2A_3A_1$, je pak zřejmě geometrickým místem bodů P té vlastnosti, že paty kolmic M_i za téhož označení vytvoří trojúhelník, v němž platí $\sphericalangle M_3M_1M_2 = 2R - \omega$.

Další dvě analogické věty obdržíme cyklickou záměnou.

D ů k a z. Volme uvnitř ostroúhlého trojúhelníka A_i ($i = 1, 2, 3$) bod P , spustíme z něho příslušné kolmice o patách M_i a předpokládejme, že platí $\sphericalangle M_3M_1M_2 = \omega$.

Podle konstrukce platí:

Čtyřúhelníky $PM_1A_2M_3$, $PM_1A_3M_2$, $PM_2A_1M_3$ jsou tětivové. Z tohoto



Obr. 3

důvodu platí též $\sphericalangle A_2PM_3 = \sphericalangle A_2M_1M_3$; $\sphericalangle A_3PM_2 = \sphericalangle A_3M_1M_2$;
 $\sphericalangle M_2PM_3 = 2R - \alpha_1$.

Dále platí zřejmě

$$\sphericalangle A_2M_1M_3 + \omega + \sphericalangle M_2M_1A_3 = 2R.$$

Snadno nyní zjistíme

$$\sphericalangle A_2PA_3 = 4R - \sphericalangle M_2PM_3 - \sphericalangle M_3PA_2 - \sphericalangle M_2PA_3$$

$$\sphericalangle A_2PA_3 = 4R - (2R - \alpha_1) - (2R - \omega) = \omega + \alpha_1.$$

Důkaz lze snadno upravit i pro jiný než právě uvažovaný případ. Možnost konstrukce čtyřúhelníka M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) v různých speciálních případech volby základních délek, jejich poměru, jakož i volby vnitřního úhlu ω podle v článku uvedených vět - je zřejmá.

Největší a nejmenší hodnota kvadratické celistvé funkce

V článku budeme vyšetřovat největší (maximální) nebo nejmenší (minimální) hodnotu dané kvadratické celistvé funkce. Těmto dvěma hodnotám budeme říkat *extrémní hodnoty* dané funkce. Bude užitečné, když zopakujeme některé věci. Tak především *funkcí* rozumíme předpis, kterým každému x z určité číselné množiny A přiřazujeme jediné číslo y . Tímto předpisem, který zprostředkuje přiřazení, je nejčastěji rovnice. Množinu A čísel x nazýváme *definičním oborem* funkce, číslo y přiřazené předpisem číslu x , nazýváme *hodnotou* funkce v čísle (čili v bodě) x . Všechna čísla y vyplní množinu čísel, kterou označíme písmenem B .

Mějme dány např. tyto funkce

$$y = -3x + 2,$$

$$y = \frac{x - 3}{5x + 1},$$

$$y = 2x^2 - 3x + 5,$$

$$y = \sqrt{\log \frac{2x - 1}{5}}$$

a určíme jejich definiční obor. Oborem první funkce (tzv. *lineární celistvé*) je množina všech reálných čísel. Pro $x = -2$ je hodnota funkce $y = (-3) \cdot (-2) + 2 = 8$. Oborem druhé funkce (tzv. *lineární lomené*) je množina všech reálných čísel, pro která platí

$5x + 1 \neq 0$, tj. množina všech čísel kromě $-\frac{1}{5}$. Pro $x = 1$ je hodnota

funkce $-\frac{1}{3}$. Oborem třetí funkce (tzv. *kvadratická celistvé*)

je množina všech reálných čísel a např. pro $x = -1$ je hodnota funkce $y = 10$. Konečně oborem poslední funkce jsou všechna taková čísla x ,

pro která platí $\frac{2x - 1}{5} \geq 1$, tj. všechna $x \geq 3$. Pro $x = 18$ je hodnota

funkce $y = \sqrt{\log 7}$

Každému x , které je obsaženo v oboru funkce, je přiřaděna jediná hodnota y dané funkce. Při tom pro některá x mohou být tyto hodnoty stejné. Např. u funkce $y = 5$ je vidět, že dokonce pro všechna reálná

čísla x je hodnota funkce táž, totiž 5. Můžeme si dát úlohu nalézt takové číslo x (existuje-li) z oboru funkce - pro které je hodnota funkce extrémní - tj. buď největší nebo nejmenší. Třeba poznamenat, že existují funkce, které nemají extrémní hodnotu. Tak třeba již uvedená funkce $y = 5$ zřejmě nemá takovou hodnotu, neboť je pro všechna x konstantní.

Mějme funkci $y = 2 - 3x$, jejímž oborem nechť jsou všechna taková čísla x , pro něž platí $-1 \leq x \leq 3$. Nejmenší hodnoty funkce dosáhne pro takové x , pro které je rozdíl $y = 2 - 3x$ nejmenší. Protože je menšenec 2 konstantní, nastane nejmenší hodnota rozdílu pro největší možnou hodnotu menšitele $3x$, tj. pro $x = 3$. Minimální hodnota dané funkce pro $x = 3$ je $y = 2 - 3 \cdot 3 = -7$. Podobně maximální hodnota dané funkce nastane pro takové x , pro které je rozdíl $y = 2 - 3x$ největší, tj. pro nejmenší možnou hodnotu menšitele $3x$, čili pro $x = -1$. Maximální hodnota dané funkce nastane tedy pro $x = -1$ a bude $y = 2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Kdybychom funkci $y = 2 - 3x$ definovali pro všechna $x \geq -1$, měla by tato funkce pro $x = -1$ opět maximální hodnotu $y = 5$, ale minimální hodnota by neexistovala. To proto, že rozdíl $y = 2 - 3x$ může nabýt hodnoty menší než jakékoliv číslo. Čím větší bude číslo x (a číslo x může být větší než jakékoliv kladné číslo b , neboť $x \geq -1$), tím větší bude menšitel $3x$ a tím menší bude rozdíl $y = 2 - 3x$, tj. hodnota funkce.

Kdybychom funkci $y = 2 - 3x$ definovali pro všechna reálná čísla x , neměla by funkce žádné extrémní hodnoty. Víme již, že nemůže mít nejmenší hodnotu. Nemůže však mít ani největší hodnotu, neboť rozdíl $y = 2 - 3x$ může nabýt větší hodnoty než jakékoliv kladné číslo.

Na tomto příkladě je vidět, že existují funkce, které nemají žádnou extrémní hodnotu. Ukážeme však, že kvadratická celistvá funkce má vždy jedinou extrémní hodnotu.

Mějme danu kvadratickou celistvou funkci

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

kde $a \neq 0$, b , c jsou reálná čísla. Jejím oborem je množina všech reálných čísel.

A) Zabývejme se nejprve případem, kdy $b = c = 0$, tj. funkcí

$$y = ax^2.$$

Je-li $a > 0$, je součin $ax^2 = y$ číslo nezáporné. Nemá tedy smyslu mluvit o maximální hodnotě této funkce, neboť číslo ax^2 roste nade všechny meze. Zato existuje pro tuto funkci minimální hodnota. Protože je číslo ax^2 nezáporné, nastane nejmenší hodnota pro takové x , pro které je součin $y = ax^2$ nejmenší, tj. pro $x = 0$ (neboť $a > 0$).

Příslušná minimální hodnota dané funkce je $y = ax^2 = 0$. Je-li $a < 0$, je součin $ax^2 = y$ číslo nekladné. Obdobně jako výše zjistíme, že neexistuje minimální hodnota, ale zato existuje maximální hodnota $y = 0$, která nastane pro $x = 0$.

V případě A) tedy vidíme, že funkce $y = ax^2$ má vždy jednu extrémní hodnotu. Maximální hodnotu $y = 0$ pro $x = 0$, je-li $a < 0$. Minimální hodnotu $y = 0$ pro $x = 0$, je-li $a > 0$.

B) Je-li v rovnici (1) $b = 0$, $c \neq 0$, dostaneme funkci

$$y = ax^2 + c.$$

Je-li $a > 0$, je číslo ax^2 nezáporné. Protože číslo c je konstanta, roste číslo $y = ax^2 + c$ nade všechny meze a neexistuje maximální hodnota, ale existuje minimální hodnota. Číslo $ax^2 + c$ je minimální, je-li číslo ax^2 minimální. To nastane pro $x = 0$ a nejmenší hodnota funkce je $y = ax^2 + c = c$. Je-li $a < 0$, je číslo ax^2 nekladné, a protože c je konstanta, klesá číslo $y = ax^2 + c$ pod všechny meze. Neexistuje tedy minimální hodnota, ale existuje maximální hodnota. Číslo $ax^2 + c$ je maximální, je-li číslo ax^2 maximální. To nastane pro $x = 0$ a maximální hodnota funkce je $y = c$.

Případ B) opět ukazuje, že funkce $y = ax^2 + c$ má vždy jednu extrémní hodnotu, a to maximální $y = c$ pro $x = 0$, je-li $a < 0$, minimální $y = c$ pro $x = 0$, je-li $a > 0$.

C) Zabývejme se nyní funkcí $y = ax^2 + bx + c$, kde $a > 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Pravou stranu funkční rovnice upravíme na tvar

$$y = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c.$$

Dvojčlen v závorce doplníme na úplný čtverec tím, že do závorky přidáme člen $\left(\frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$. Protože před závorkou je činitel $a > 0$, zvětšila se tím pravá strana rovnice o $a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a}$. Tento člen třeba odečíst. Tak dostaneme

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

$$\text{čili} \quad y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \quad (2)$$

Protože číslo a je kladné, číslo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ je nezáporné, je číslo $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ nezáporné. Číslo $c - \frac{b^2}{4a}$ je konstanta. Číslo y roste nade všechny meze a neexistuje tedy maximální hodnota. Existuje však minimální hodnota, která nastane tehdy, bude-li nezáporné číslo $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ minimální, tj. pro $x + \frac{b}{2a} = 0$, čili pro $x = -\frac{b}{2a}$ (neboť $a \neq 0$). Minimální hodnota dané funkce bude $y = c - \frac{b^2}{4a}$. Je-li v případě C) $a < 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, lze provést tutéž úpravu a dospět k téže rovnici jako v (2). Protože v tomto případě je číslo $a < 0$, číslo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ je nezáporné, je číslo $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ nekladné. Číslo $c - \frac{b^2}{4a}$ je konstanta, a proto číslo y klesá pod všechny meze a neexistuje minimální hodnota. Existuje však maximální hodnota, která nastane tehdy, bude-li nekladné číslo $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ maximální, tj. pro $x + \frac{b}{2a} = 0$, čili pro $x = -\frac{b}{2a}$ (neboť je opět $a \neq 0$). Maximální hodnota dané funkce bude $y = c - \frac{b^2}{4a}$.

I v případě C) jsme ukázali, že funkce $y = ax^2 + bx + c$ má vždy jednu extrémní hodnotu. Maximální hodnota je $y = c - \frac{b^2}{4a}$ pro $x = -\frac{b}{2a}$, je-li $a < 0$, minimální hodnota je $y = c - \frac{b^2}{4a}$ pro $x = -\frac{b}{2a}$, je-li $a > 0$.

Příklad 1. Máme určit extrémní hodnotu funkce $y = -2x^2 + x - 1$, kde $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$.

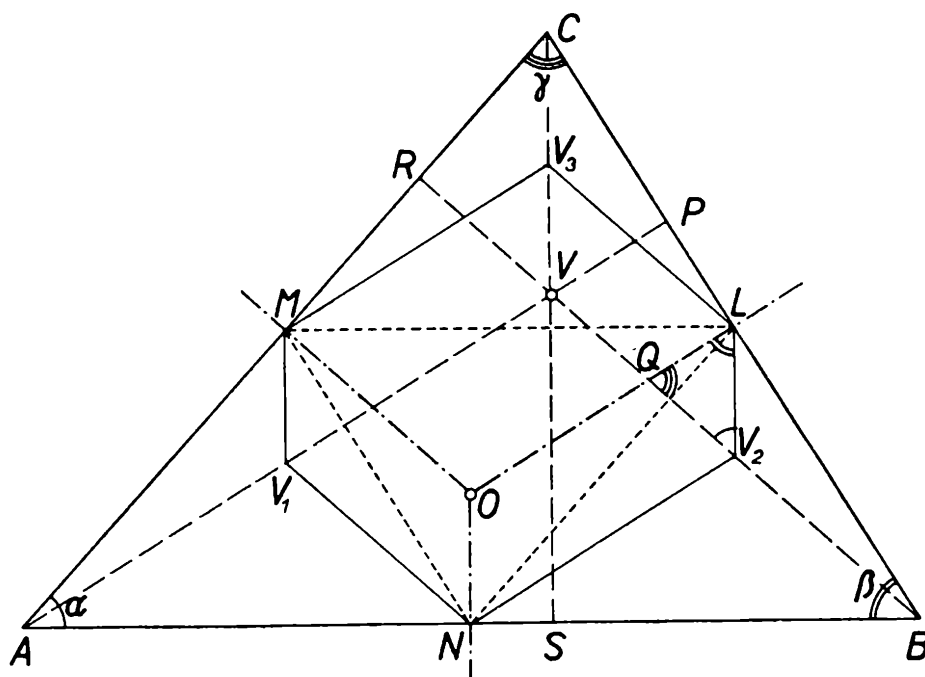
Protože je $a < 0$, nabude funkce pro $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ maximální hodnoty $y = c - \frac{b^2}{4a} = -1 - \left(\frac{1}{-8}\right) = -\frac{7}{8}$. Čtenář si jistě tento výsledek a následující výsledky odvodí podobným postupem jako v případě C).

(Pokračování)

Z geometrie trojúhelníka

V obr. 1 je dán trojúhelník ABC , v němž jsou sestrojeny osy stran a výšky. Středů stran AB , BC , AC označme po řadě N , L , M a paty výšek S , P , R . Průsečík výšek, kterému se říká *ortocentrum*, označme V a středy úseček VA , VB , VC označme postupně V_1 , V_2 , V_3 . Body L , V_2 , N , V_1 , M , V_3 v tomto pořadí jsou vrcholy šestiúhelníka.

Věta 1. *Protější strany tohoto šestiúhelníka jsou shodné a navzájem rovnoběžné.*



Obr. 1

D ů k a z. Strana LV_2 je v trojúhelníku BCV střední příčka, a proto

$$LV_2 \parallel VC \text{ a zároveň } LV_2 = \frac{1}{2} CV$$

Podobně MV_1 je střední příčka v trojúhelníku ACV , a proto

$$MV_1 \parallel VC \text{ a zároveň } MV_1 = \frac{1}{2} CV$$

Z toho vyplývá

$$MV_1 \parallel LV_2 \text{ a také } MV_1 = LV_2.$$

D ů k a z pro druhé dvě dvojice stran je úplně shodný.

Věta 2. *Obsah šestiúhelníku $LV_2NV_1MV_3$ je roven polovině obsahu daného trojúhelníka ABC .*

D ů k a z. Úsečky OL , OM , ON (leží na osách stran trojúhelníka ABC) rozdělují náš šestiúhelník na tři rovnoběžníky: $LONV_2$, $MONV_1$, $LOMV_3$. Obsah šestiúhelníka je tedy roven součtu obsahů těchto rov-

noběžníků. Strany trojúhelníka LMN , o němž víme, že jeho obsah je čtvrtina obsahu trojúhelníka ABC , jsou úhlopříčkami těchto rovnoběžníků. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\triangle MNL &= \frac{1}{4} \triangle ABC = \triangle MON + \triangle LON + \triangle MOL = \\ &= \frac{1}{2} MONV_1 + \frac{1}{2} LONV_2 + \frac{1}{2} MOLV_3 = \\ &= \frac{1}{2} (MONV_1 + LONV_2 + MOLV_3) = \\ &= \frac{1}{2} LV_2NV_1MV_3,\end{aligned}$$

a to jsme měli dokázat.

P o z n á m k a. Čtyřúhelník $MONV_1$ je rovnoběžník, neboť protější jeho strany jsou vzájemně rovnoběžné, a proto

$$MO = NV_1 = \frac{1}{2} BV$$

což je jistě zajímavý vztah mezi vzdáleností středu opsané kružnice od strany a vzdáleností vrcholu trojúhelníka od ortocentra.

Věta 3. *Trojúhelník V_2LQ je podobný danému trojúhelníku ABC .*

D ů k a z. Že úhel při vrcholu L je roven β , je takřka samozřejmé. Z téhož důvodu úhel při V_2 je roven α , a tudíž úhel při Q je roven γ . (Upravil S. Horák.)

C v i č e n í.

1. Délky AV , BV , CV vyjádřete pomocí stran a , b , c a úhlů α , β , γ daného trojúhelníka.

2. Vypočítejte délky stran trojúhelníka LQV_2 .

I n ž. E d u a r d K r i e g e l s t e i n, Praha:

Užití diferenciálního počtu

(Dokončení)

b) Diferenciál funkce a jeho užití

Předpokládejme, že máme funkci $f(x)$, která má derivaci v určitém bodě x . Jak již víme, udává derivace $f'(x)$ směrnici tečny v příslušném bodě A grafu funkce (obr. 32).

Změníme-li souřadnici x bodu A o nějaký přírůstek h , odpovídá tomuto přírůstku souřadnice y přírůstek $CD = dy$ pořadnice tečny a přírůstek $BD = \Delta y$ funkční hodnoty funkce $f(x)$

Přírůstek $CD = dy$ závisí jednak na volbě bodu A , tj. na volbě x a jednak na přírůstku h . Tento přírůstek $CD = dy$ nazýváme diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x a označujeme jej písmenem d (např. $d \sin x$; $d f(x)$ apod.).

Z obrázku je patrné, že

$$dy = y' \cdot h,$$

neboť derivace y' udává směrnici tečny v bodě A .

Zvolíme-li nyní speciální funkci $y = x$, dostaneme

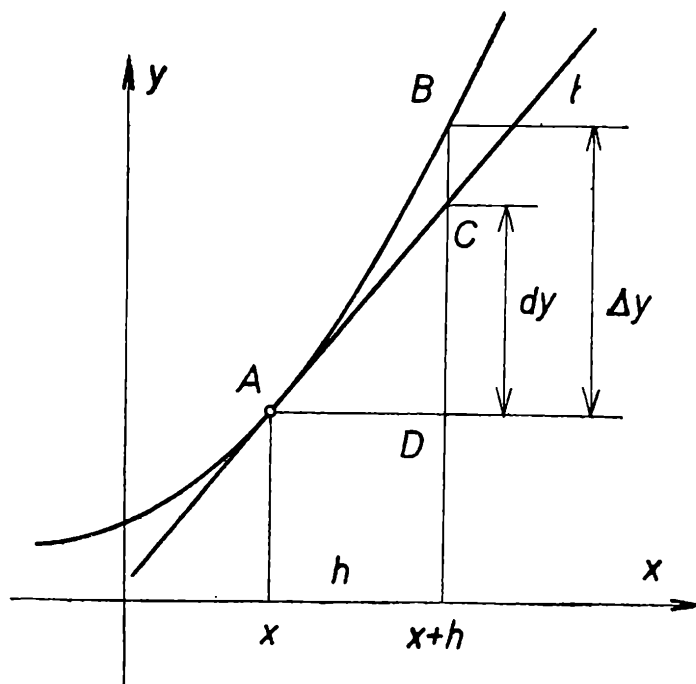
$$dx = 1 \cdot h$$

a proto přírůstek nezávisle proměnné označujeme dx .

Můžeme tedy psát

$$dy = y' \cdot dx$$

a vyslovit definici diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě x .



Obr. 32

Definice 12. Budiž $y = f(x)$ funkce, která má v bodě x derivaci $y' = f'(x)$ a budiž dále dx přírůstek nezávisle proměnné. Diferenciál funkce $y = f(x)$, v bodě x je pak součin $dy = y' \cdot dx$, nebo $df(x) = f'(x) \cdot dx$.

Je tedy diferenciál funkce roven součinu z derivace funkce a diferenciálu nezávisle proměnné (někdy říkáme také diferenciálu argumentu).

Z geometrického významu diferenciálu funkce vidíme, že diferenciálem funkce můžeme s jinou chybou nahradit přírůstek (nebo také úbytek) funkční hodnoty, protože se tečna v okolí uvažovaného bodu málo liší od grafu funkce. Lze říci, že pomocí diferenciálu funkce provádíme *linearizaci* dané funkce v daném bodě. Nutno si uvědomit, že diferenciál funkce vyjadřuje vždy přírůstek pořadnice tečny a ne pořadnice funkce.

Protože $dy = y' \cdot dx$ nebo $df(x) = f'(x) \cdot dx$, je tím dodatečně vy-

světlena poznámka za definicí 8, kde jsme uvedli pro derivaci funkce označení $y' = \frac{dy}{dx}$, nebo $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Určení derivace funkce, nebo určení diferenciálu funkce se někdy nazývá *diferencování* a odtud se metody výpočtů a užití derivací a diferenciálů nazývají *diferenciální počet*.

Nyní si ukážeme užití diferenciálu.

Příklad 47.

Máme určit přibližně $75,3^2$. Podle toho, co jsme si řekli o diferenciálu je $y = x^2$; $x = 75$; $dx = 0,3$. Pak můžeme přírůstek funkce $y = x^2$ v bodě $x = 75$ přibližně nahradit diferenciálem této funkce $y = x^2$ v bodě $x = 75$. Dostaneme

$$dy = 2xdx = 2 \cdot 75 \cdot 0,3 = 45$$

a tedy

$$75,3^2 \doteq 75^2 + 45 = 5625 + 45 = 5\,670.$$

Přesná hodnota je $75,3^2 = 5\,670,09$.

Příklad 48.

Vypočítejte přibližně $\sqrt[3]{120}$. Zde je $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 125$; $dx = 120 - 125 = -5$.

Diferenciál v daném bodě je

$$dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx = \frac{-5}{3\sqrt[3]{125^2}} = -\frac{5}{3 \cdot 25} = -\frac{1}{15} \doteq -0,061$$

Celkem je

$$\sqrt[3]{120} \doteq \sqrt[3]{125} - 0,061 = 4,939$$

Přesnější hodnota je $\sqrt[3]{120} = 4,932\,42$.

Příklad 49.

Oč se změní doba kyvu matematického kyvadla dlouhého 1 m, prodlouží-li se o 5 cm?. Zde je $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; $l = 1$ m; $dl = 5$ cm.

Diferenciál je

$$dT = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} \, dl = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{5}{2\sqrt{100}} = \frac{\pi \cdot 0,25}{\sqrt{g}} = 0,1003 \cdot 0,25 = 0,025\,075.$$

Doba kyvu se prodlouží asi o 0,025 s.

Příklad 50.

Určete přibližně $\sin 30^\circ 05'$. Pro výpočet diferenciálu máme $y = \sin x$; $x = 30^\circ$; $dx = 5' = 0,001\,45$ (v míře obloukové)

$$dy = \cos x \cdot dx = \cos 30^\circ \cdot 0,001\,45 = 0,866\,03 \cdot 0,001\,45 \doteq 0,001\,26.$$

Je tedy

$$\sin 30^\circ 05' \doteq 0,501\,26,$$

což je ve shodě s hodnotou v tabulkách.

Příklad 51.

Máme určit s jakou chybou bude vypočten obsah čtverce, bude-li strana čtverce změřena s chybou 5%. To znamená určit diferenciál funkce $P = a^2$ v bodě a , je-li $da = 0,05 a$.

Dostaneme

$$dP = 2ada = 2a \cdot 0,05a = 0,1a^2 = 0,1 \cdot P.$$

Bude-li strana čtverce změřena s chybou 5%, bude obsah čtverce vypočten s chybou 10%.

Úlohy.

Určete lokální extrémy funkcí

1. a) $y = 3x^2 - 4x + 5$; b) $y = 2x^2 + 5x - 3$.

2. a) $y = 2 - 3x - 4x^2$; b) $y = 1 + 2x - 5x^2$.

3. a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$; b) $y = 2x^3 - 5,5x^2 - 10x + 1$.

4. a) $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2$; b) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Vyšetřete průběh funkce

5. a) $y = x^2 + 5x + 6$; b) $y = x^3 + 3x - 6$; c) $y = x^4 - 4x + 5$.

6. a) $y = e^{2x^2} - 4x + 3$; b) $y = \frac{x+1}{x-1}$; c) $y = 2x^3$.

Vyšetřete průběh funkce v daném intervalu

7. a) $y = 6 \sin x - 3 \cos 2x, <0; \pi>$.

b) $y = x - \sin 2x, < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}>$; c) $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x,$

$$<0; \frac{\pi}{2}>$$

Vypočtete přibližně

8. a) $30,6^2$; b) $5,1^4$; c) $10,2^3$; d) $24,8^2$; e) $9,3^3$; f) 98^4 .

9. a) $\sqrt[3]{105}$; b) $\sqrt[3]{1\,020}$; c) $\sqrt[4]{630}$; d) $\sqrt{395}$; e) $\sqrt[3]{60}$; f) $\sqrt[4]{600}$.

10. a) $\sin 30^\circ 10'$; b) $119^\circ 55'$; c) $\operatorname{tg} 224^\circ$; d) $\operatorname{cotg} 46^\circ$.

11. Jak se změní doba kyvu matematického kyvadla dlouhého 1 m, zkrátí-li se o 5 cm?

12. Jak se změní doba kyvu matematického kyvadla dlouhého 1 m, zmenší-li se urychlení tíže z $9,81 \text{ m/s}^2$ na $9,78 \text{ m/s}^2$?

13. Jak se přibližně změní obsah rovnostranného trojúhelníka, a) zvětší-li se strana o 5%; b) zmenší-li se strana o 10%?

14. Jak se změní strana rovnostranného trojúhelníka, a) zvětší-li se jeho obsah o 10%; b) zmenší-li se jeho obsah o 5%?

15. S jakou přesností musíme změřit poloměr koule, aby chyba při výpočtu a) objemu byla nejvýše 1%; b) povrchu byla nejvýše 1%?

16. Dokažte, že pro malé hodnoty h platí následující přibližné vzorce:

a) $e^h \doteq 1 + h$; b) $\frac{1}{1-h} \doteq 1 + h$; c) $\lg(1+h) \doteq h$.

17. Číslo 20 rozdělte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

18. Do půlkruhu o poloměru r vepište obdélník největšího obsahu a určete jeho rozměry.

19. Do koule o poloměru 10 cm vepište rotační válec největšího objemu a vypočtěte jeho rozměry.

20. Do koule o poloměru 5 cm vepište rotační kužel největšího objemu a vypočtěte jeho rozměry.

21. Z obdélníkového kusu plechu rozměrů 80 cm a 50 cm zhotovte otevřenou krabici největšího objemu a vypočtěte její rozměry.

22. Tunel má průřez tvaru obdélníka zakončeného půlkruhem. Obvod průřezu je 36 m. Vypočtěte rozměry průřezu tunelu tak, aby měl průřez největší obsah.

23. Z kruhu o poloměru r vyřízněte výseč o středovém úhlu α tak, aby kužel z ní sestrojený měl největší objem.

24. Plechový otevřený žlab má průřez v podobě rovnoramenného lichoběžníka, jehož základna a ramena jsou stejně dlouhá a mají délku 40 cm. Jak široký bude žlab nahoře, aby pojal co nejvíce vody.

25. Z bodu A lze se dostat do bodu D přes bod B rychlostí $c_s = 5$ km/h. Z bodu A se máme dostat do bodu D přes bod C . Rychlost pohybu po AC je $c_m = 4$ km/h. Rychlost pohybu po CD je $c_s = 5$ km/h. Máme určit polohu bodu C tak, aby pohyb po ACD trval nejkratší dobu. Délka AB je 1,2 km; $BD = 2$ km. Určete také, jak dlouho bude trvat pohyb po trati ACD (obr. 33).

Výsledky.

1. a) Minimum pro $x = \frac{2}{3}$; b) minimum pro $x = -1,25$.

2. a) Maximum pro $x = -0,375$; b) maximum pro $x = 0,2$.

3. a) Maximum pro $x = 1$; minimum pro $x = 2$;

b) maximum pro $x = -\frac{2}{3}$; minimum pro $x = 2,5$.

4. a) Maximum pro $x = 0$; minimum pro $x = -\frac{1}{2}$ a $x = 2$;

b) maximum pro $x = 1$; minimum pro $x = -1$.

5. a) Klesá v intervalu $(-\infty; -2,5)$, roste v intervalu $(2,5; \infty)$; b) roste v intervalu $(-\infty; \infty)$; c) klesá v intervalu $(-\infty; 1)$, roste v intervalu $(1; \infty)$.

6. a) Roste v intervalu $(-\infty; -1)$, klesá v intervalu $(-1; 1)$; roste v intervalu $(1; \infty)$; b) klesá v intervalu $(-\infty; \infty)$; c) roste v intervalu $(-\infty; \infty)$.

7. a) Roste v intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; klesá v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

b) roste v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$, klesá v intervalu $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) roste v intervalu $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, klesá v intervalu $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$

8. a) 936; b) 675; c) 1 060; d) 610; e) 802; f) 92 000 000.

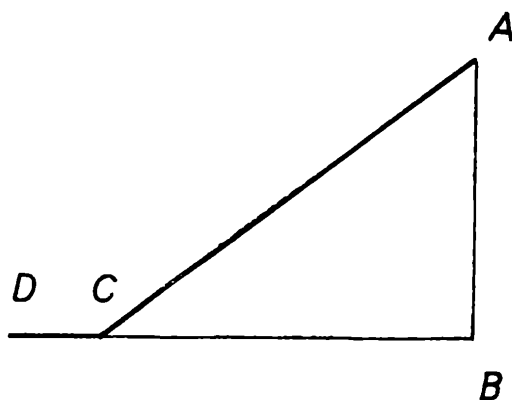
9. a) 10,5; b) 10,66; c) 5,01; d) 19,87; e) 3,917; f) 4,95.

10. a) 0,5025; b) $-0,4987$; c) 0,9651; d) 0,9651.

11. Doba kyvu se zkrátí asi o 0,025 s.

12. Doba kyvu se zvětší asi o 0,15 %.

13. a) Zvětší se asi o 10%; b) zmenší se asi o 20%.



Obr. 33

14. Zvětší se asi o 5%; b) zmenší se asi o 2,5%.

15. a) S chybou 0,3%; b) s chybou 0,5%.

17. 10; 10.

18. $a = r\sqrt{2}$; $b = r\sqrt{2}$.

19. Poloměr podstavy je $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$, tělesová výška je $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (r je poloměr koule).

20. Poloměr podstavy je $\frac{2}{3}r\sqrt{2}$, tělesová výška je $\frac{4}{3}r$; r je poloměr koule.

21. Rozměry jsou 60 cm $\times$ 30 cm $\times$ 10 cm.

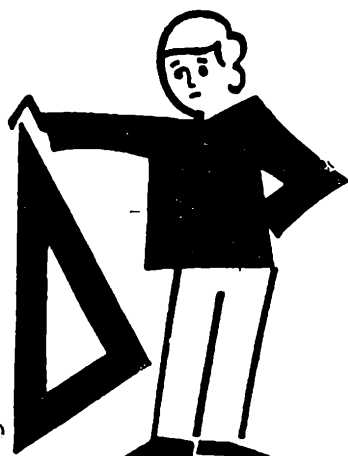
22. $r = \frac{36}{\pi + 4} \doteq 5.041$ m.

23. $\alpha \doteq 294^\circ$.

24. 80 cm.

25. $BC = 1,6$ km; $CD = 0,4$ km; doba pohybu je celkem $t = 0,58$ h.

Deskriptivní geometrie



Josef Šaloun, Lázně Bělohrad:

Užití stejnolehlosti v praxi

I. V tomto článku chci čtenářům Rozhledů ukázat, že se geometrie hodně používá v sochařské a kamenické práci. Nebude snad na škodu, když aspoň v přehledu se nejprve seznámíme s nářadím a nástroji, jichž sochaři používají (obr. 1).

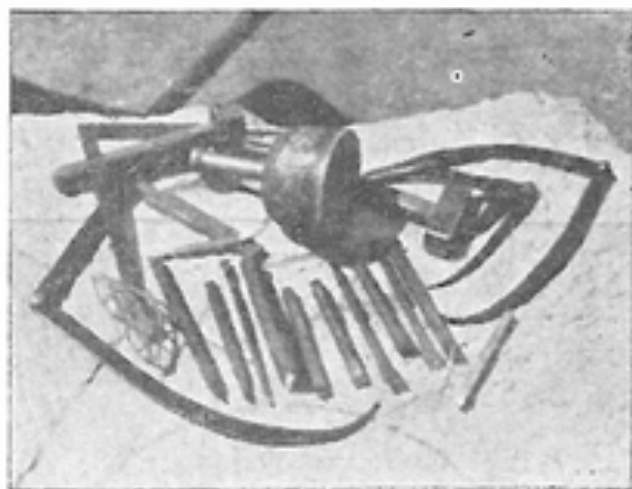
Kladiva jsou různých velikostí, ale násady jsou kratší než u normálních kladiv. Pemrlice je kladivo s jehlancovitými hroty.

Z používaných dlát jsou nejznámější špičky se zakalenou špičkou a zubáky se zubatým ostrím.

Dále se používá úhelník k zjišťování pravých úhlů a hmatacích kružidel různých velikostí.

Nyní si popíšeme, jak sochař podle daného modelu zhotoví plastiku do materiálu (do pískovce, žuly, mramoru apod.). Má-li být plastika v téže velikosti jako model, používá se tečkovacího přístroje. Je to dřevěný kříž, jehož délka a šířka jsou asi takové jako délka a šířka modelu. K svislému rameni je dole upevněno příčné rameno. Konec svislého ramene a oba konce vodorovného ramene jsou opatřeny hroty. Hroty představují tři body neležící v přímce, a proto určují rovinu.

Kříž se položí na model tak, že uvedené tři hroty zapadají do tří pevných jamek, jimž na plastice přesně v týchž místech odpovídají tři jamky. V obr. 2a je pěkně vidět sádrový model a tečkovací přístroj.



Obr. 1



Obr. 2a



Obr. 2b

Hrot svislého ramene je k přístroji přisádrován a spočívá v jamce, která byla vyhloubena v kousku sádry připevněné nahoře k modelu. Na delším (svislém) rameni kříže je umístěno kloubové zařízení s dlouhou jehlou, posunovatelnou ve všech směrech. Když se hrotem jehly dotkneme určitého bodu na modelu, je možné jehlu šrouby, ustálit. V obr. 2a je jasně vidět kloubové zařízení na přístroji i jeho jehlu.

Pak přístroj přeneseme na plastiku a pod hrotem jehly odstraníme materiál tak, až se hrot jehly dotkne plastiky. Na obr. 2b je tečkovací přístroj umístěn na plastice zčásti již hotové. Tím dostáváme jeden bod plastiky. Takových bodů se musí z modelu přenést popsáním způsobem značné množství, abychom dosáhli správného tvaru vytvářené plastiky.

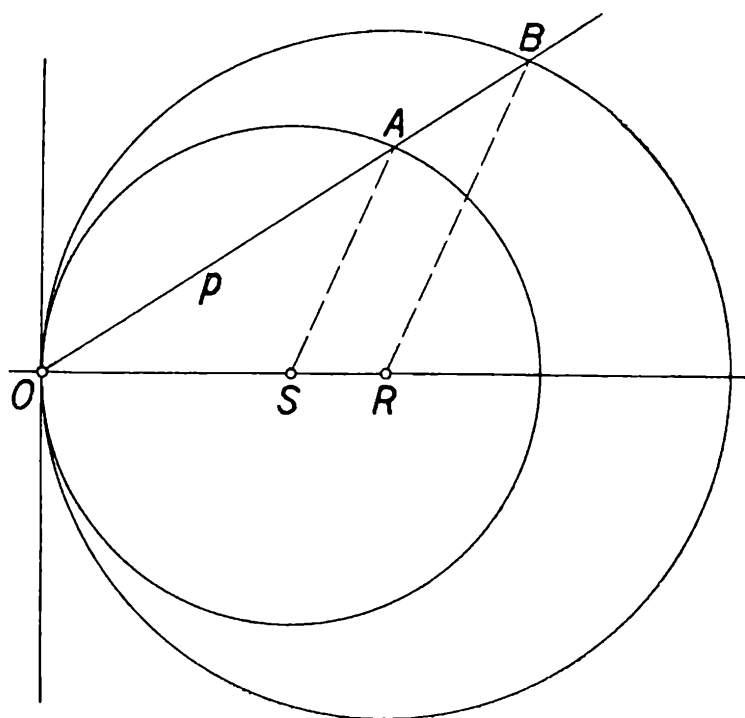
II. Jestliže plastika má být větší než sádrový model, používá se h m a t a c í h k r u ž i d e l (obr. 2c). Abychom mohli mluvit konkrétněji, budeme popisovat dvojnásobné zvětšení. Pracuje se takto. Na modelu zvolíme tři body tak, aby tvořily trojúhelník. Volí se zpravidla na okrajích modelu. Na bloku kamene nalezneme trojúhelník podobný, jehož strany jsou dvakrát větší. Ve vrcholech obou trojúhelníků se zarazí mosazné hřebíčky s jamkami ve vrcholech. Každý další bod modelu tvoří se zvolenými třemi body čtyřstěn a je jednoznačně určen svými vzdálenostmi od základních tří bodů. Tyto vzdálenosti se na modelu odměří hmatacími kružidly (pro každou vzdálenost je vždy jedno kružidlo, takže je tu potřebí tří kružidel), zvětší se dvakrát a přenesou se na blok kamene. Zde se odstraňuje materiál tak dlouho, až hroty kružidel jejichž druhé hroty jsou v základních bodech - se dotknou. Tím se získá jeden bod plastiky. Sochaři jej obvykle označí křížkem. Je přirozené, že čím více bodů modelu tímto způsobem přeneseme, tím je plastika věrnějším zobrazením modelu. Práce je proto zdoluhavá, ale musí být přesná. Umělec sochař tuto práci přenechává řemeslníku kameníkovi. Po vytečkování na plastice nastává teprve pro sochaře zajímavá práce vyrovnáváním materiálu, která je korunována radostí z vykonaného krásného díla.



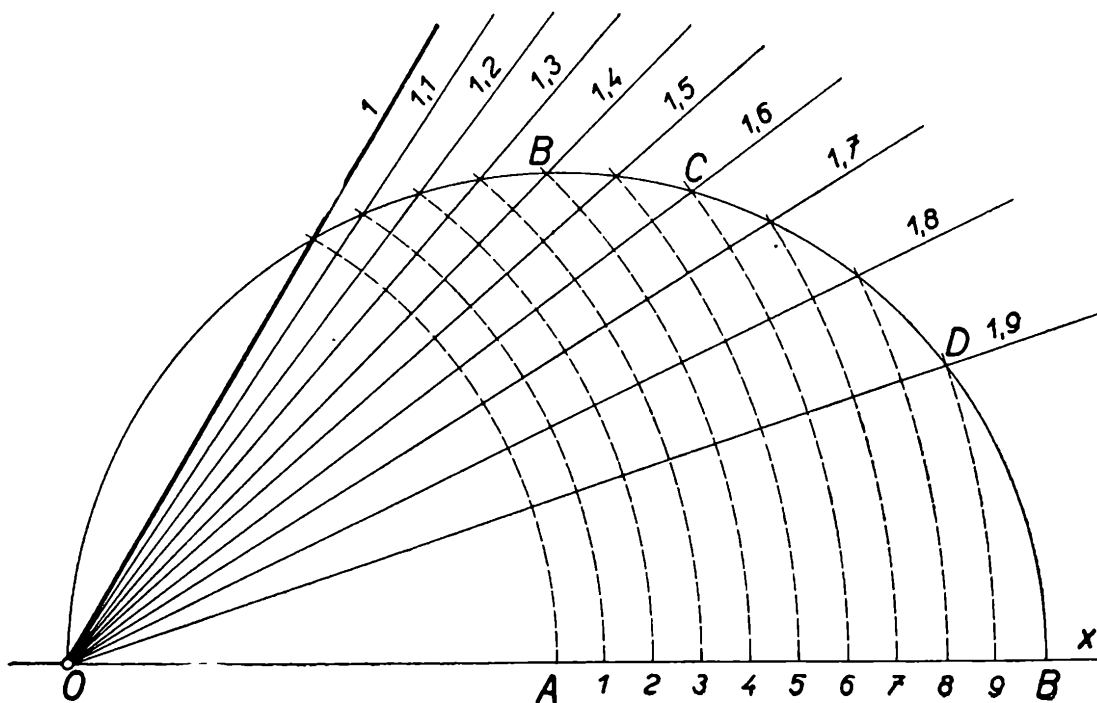
Obr. 2c

Zvětšování, vyjádřené čísly (1), 2, 3, ... není obtížné. Při zvětšování, vyjádřeném čísly desetinnými, by bylo obtížnější a časově náročnější.

Aby i zde se práce prováděla mechanicky, rychle, avšak přesně, používá se způsobu, jehož podstatou je redukční úhel. V další



Obr. 3



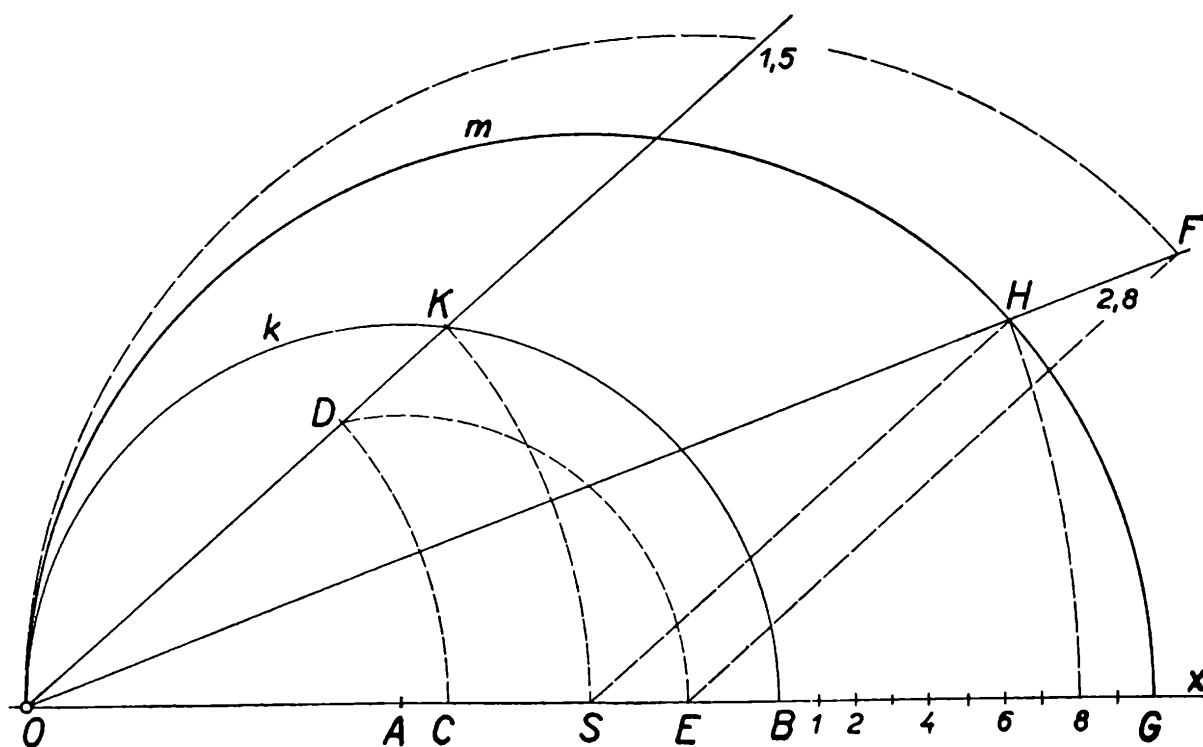
Obr. 4

části tohoto článku pojednáme o tomto způsobu a teoreticky jej zdůvodníme.

V obr. 3 jsou dány dvě kružnice o různých středech S, R s vnitřním dotykem v bodě O . Tento bod je zároveň středem stejnolehlosti obou kružnic. Bodem O proložme libovolnou přímku p , svírající s přímkou OS úhel menší než 60° . Přímka p protíná dané dvě kružnice v bodech A, B . I platí

$$OA : OS = OB : OR .$$

Poměr $OA : OS$ je poměr zvětšení poloměru OS . Ale v témže poměru se zvětšil i poloměr OR . Kdybychom sestrojili další kružnici o středu T , pak její poloměr OT se zvětší opět v poměru $OA : OS$. Tato další kružnice totiž protne přímku p v bodě C a úsečka OC je rovna polo-



Obr. 5

měru OT znásobenému číslem $OA : OS$. Můžeme tedy tímto způsobem jakoukoli délku (tj. poloměr kružnice) zvětšit v poměru $OA : OS$.

Můžeme však celou věc zařídit tak, aby poměr zvětšení $OA : OS$ měl předem danou hodnotu. V praxi se užívá těchto hodnot zvětšení: 1,1; 1,2; ...; 1,9. Hodnot menších než 1 (a pak by nešlo o zvětšení) docílíme použitím přímek p , které s přímkou OS svírají úhly větší než 60° a hodnot větších než 2 tímto způsobem nedostaneme.

V obr. 4 je podle předešlého návodu narýsována soustava přímek, která danou délku zvětšuje 1,1 krát, 1,2 krát, ..., 1,9 krát. Tak např. $OB = 1,4 \cdot OA$, $OC = 1,6 \cdot OA$, $OD = 1,9 \cdot OA$.

III. Jestliže jde o zvětšení 2,1 až 2,9-násobné, postupuje se poněkud jinak. Danou úsečku zvětšíme nejprve 1,5krát a teprve pak určíme žádané zvětšení. Celý postup popíšeme pro zvětšení 2,8-násobné.

Na přímce x (obr. 5) nanese od bodu O třikrát po sobě úsečku téže délky. Dostaneme tak čtyři různé body O, A, B, G , o nichž tedy platí $OA = AB = BG$. Kolem bodu A opíšeme kružnici k procházející bodem O (a také bodem B). Kružnice, opsaná kolem O a procházející středem S úsečky AB , protne kružnici k v bodě K . Ten spojíme s bodem O přímkou, která je v obr. 5 označena 1,5 (poskytuje způsobem popsáním v odst. II. zvětšení 1,5-násobné). Kolem S opišme kružnici m jdoucí O (a taky G). Úsečku BG rozdělme na 10 stejných dílů a dělicí body označme po řadě $B, 1, 2, \dots, 8, 9, G$. Kolem O opsaná kružnice procházející bodem 8 protne kružnici m v bodě H ; přímka OH poskytuje zvětšení 2,8-násobné (v obr. je označena 2,8).

A jak nyní pracuje kameník, má-li již připraveno, co jsme zde popsali, to uvedeme v následujících řádcích. Má-li nějakou délku zvětšit 2,8krát, nanese ji od O na x a dostane tak bod C . Kolem O opsané kružnice poloměrem CO protne přímku 1,5 v bodě D . Na přímce x sestrojí bod E tak, aby $AE = AD$. Kolem E opišme kružnici jdoucí O a tato kružnice protne přímku 2,8 v bodě F , o němž platí $OF = 2,8 \cdot OC$ (obr. 5).

Má-li být zvětšení ještě větší, tj. mezi 3,1 až 3,9-, postupuje se obdobně zase na dvakrát. Úsečka se nejprve zvětší dvakrát, a teprve potom podle potřeby.

P o z n á m k a . Čtenáře bych rád upozornil na zajímavou věc. Při zvětšování používá kameník nebo sochař kromě několika málo pevných přímek, jen kružnic. Souvisí to s tím, že všechny délky přenáší hmatacím kružidlem. Zde je kružidlo jeho nejdůležitější pomůckou.

* *

*

Jubilejní sjezd

Jednoty československých matematiků a fyziků

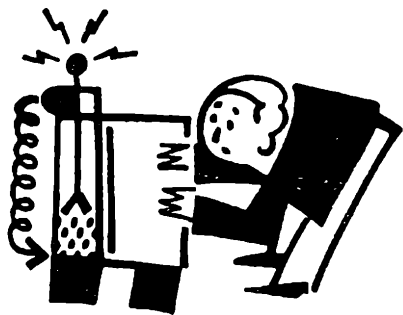
se koná ve dnech 17. až 19. dubna 1962 v Praze.

* *

*

Knížka Františka Veselého: 100 let Jednoty československých matematiků a fyziků nebude ve volném prodeji.

Lze ji přímo objednat v kanceláři v JČMF, Praha 1, Malá Strana, Maltézské nám. 1, tel. 408-92. Bude po vyjití zasílána na dobírku. Cena asi 10 Kčs.



Dr. Kliment Šoler, ČVUT Praha:

Stavba atomového jádra

Vývoj lidského poznání přírody spočívá v tom, že její zákony poznáváme stále dokonaleji a že si tak můžeme tvořit stále lepší a dokonalejší obrazy jednotlivých věcí a dějů v přírodě probíhajících. Pokrok fyzikálního poznání ve dvacátém století byl umožněn hlavně tím, že člověk získal schopnost rozšířit své poznání dějů a předmětů srovnatelných s rozměry lidského těla (m a k r o s v ě t) také na objekty velmi malých rozměrů, které není možno pozorovat a vnímat přímo lidskými smysly (m i k r o s v ě t). Naopak mohl rozšířit své poznání také na objekty velmi značných rozměrů, které svými rozměry přesahují naši sluneční soustavu, i celou galaktickou soustavu mléčné dráhy (m e g a s v ě t). Výsledky rozvoje fyziky posledních desetiletí jsou nejpřesvědčivějším důkazem správnosti poučky dialektického materialismu o poznatelnosti světa.

Z oblasti mikrosvěta se v poslední době věnovalo mnoho pozornosti zejména stavbě atomů. Stavba elektronového obalu atomů je dnes již velmi podrobně známa a popis Bohrova modelu atomu, upravený podle současných znalostí, se běžně probírá ve všech učebnicích fyziky i chemie a je dnes již všeobecně znám. Je rovněž všeobecně známo, že jádro atomu není jednoduchý útvar, ale je složeno z částic, které obecně označujeme jako n u k l e o n y a že v něm působí zvláštní jaderné síly, které celé jádro drží pohromadě. Je jisté, že se tato představa bude ještě dále vyvíjet, stále doplňovat a prohlubovat. Při velkém úsilí, které se dnes této otázce věnuje, dá se očekávat, že v nedlouhé době se stane znalost stavby atomového jádra a podstaty jaderných sil součástí všeobecného vzdělání. Proto k této otázce přinášíme několik článků, které mají naše čtenáře seznámit s dnešním stavem našich znalostí o těchto věcech.

Jádro atomu

J á d r o a t o m u představuje jeho centrální část a má velikost řádově asi 10^{-14}m . Protože velikost celého atomu je řádu 10^{-10}m , je

patrně, že jádro představuje pouze mizivou část atomu, asi desetitisícinu jeho objemu. Pozoruhodné je, že přes svůj nepatrný objem, je v něm soustředěna prakticky veškerá hmota atomu. Jádro je podstatnou částí atomu a rozhoduje o charakteru prvku, jemuž přísluší. O b a l o v é e l e k t r o n y určují pouze jeho fyzikální stav a vnější valenční slupka elektronů jeho chemické vlastnosti. Radioaktivita a jaderné reakce jsou dokladem toho, že atomové jádro není jednolitý celek, nýbrž že je to poměrně složitá soustava menších částic, vázaných pevně dohromady. Tato soustava je buď stálá (stabilní), nebo nestálá (nestabilní), tj. může přecházet vyzařováním (emisí) některých svých částic v soustavu jinou (přirozená nebo umělá radioaktivita).

Atomové jádro je nositelem kladného náboje, jehož velikost, vyjádřená v elementárních kvantech náboje, je dána pořadovým číslem prvku v Mendělejevě periodické soustavě prvků. Tento náboj způsobuje, že normální atom s úplným elektronovým obalem se navenek jeví jako elektricky neutrální. Počet elementárních nábojů obsažených v jádře udává a t o m o v é č í s l o Z . Počet všech nukleonů v jádře obsažených udává h m o t o v é č í s l o A . Těmito dvěma čísly (parametry) je atom jednoznačně určen. Z významu těchto parametrů je patrné, že to jsou vždy čísla celá. Symbolicky značíme jádro prvku se značkou R o hmotovém čísle A a o atomovém čísle Z znakem

$${}^A_Z R^1).$$

Protože atomové číslo je dáno již chemickou značkou prvku a oba tyto údaje si jednoznačně odpovídají, je možno atomové číslo vynechat (je totožné s pořadovým číslem prvku v Mendělejevě soustavě) a užíváme pak kratšího označení

$$R_A \quad \text{nebo} \quad RA$$

Na příklad místo ${}^{238}_{92}U$ je možno kratěji napsat U_{238} , nebo $U 238$, protože znak U , samočinně odpovídá 92. prvku Mendělejevovy periodické soustavy prvků.

Protože $A \geq Z$, je patrné, že na stavbě jádra se musí podílet dva typy částic, aby při daném náboji a při dané hmotě částic bylo možno najít takovou jejich kombinaci, že výsledná soustava má náboj i hmotu odpovídající danému jádru.

Prvky se stejným atomovým číslem Z a různým A se označují jako i z o t o p y. Užívá se pro ně pro všechny téhož chemického znaku R . Výjimku dosud činí některé přirozené radioaktivní látky, pro něž se z historických důvodů nadále užívá jejich dříve zavedeného značení.

¹⁾ Indexy A a Z se dosud ke znaku prvku nepíší jednotně. Někdy se píše oba vlevo od znaku prvku, někdy oba vpravo od tohoto znaku a někdy dokonce jeden vlevo a druhý vpravo.

(Pokračování)

Ferromagnetismus z hlediska moderní fyziky

V teorii magnetického pole platí mezi magnetickou indukcí B a intenzitou magnetického pole H vztah $B = \mu\mu_0 H$, v němž materiálovou funkcí μ , zvanou magnetická permeabilita, vyjadřujeme vliv prostředí na magnetické děje. Podle hodnot magnetické permeability rozdělujeme látky do tří skupin:

1. d i a m a g n e t i c k é, $\mu < 1$;
2. p a r a m a g n e t i c k é, $\mu > 1$;
3. f e r r o m a g n e t i c k é, $\mu \gg 1$

(řádově $10^3 - 10^6$), u nichž magnetická permeabilita závisí ještě na intenzitě magnetického pole H .

Podle výzkumů moderní fyziky dnes víme, že každá látka vykazuje magnetické vlastnosti. Diamagnetismus jeví všechny látky, avšak u látek, které nepokládáme za diamagnetické, je tato vlastnost převážena paramagnetickými či ferromagnetickými vlastnostmi. Možno tedy, podle intenzity magnetizace v magnetických polích a při teplotách technicky realizovatelných, rozdělit látky v zásadě do dvou skupin:

1. látky s l a b ě m a g n e t i c k é tj. diamagnetické a paramagnetické,
2. látky s i l n ě m a g n e t i c k é tj. látky ferromagnetické a ferrity, označované jako látky f e r r i m a g n e t i c k é.

Na základě těchto skutečností docházíme k závěru, že lze zmagnetovat nejen látky druhé skupiny, nýbrž i látky slabě magnetické. Ke zmagnetování těchto látek do úplného nasycení bylo by však třeba velmi silných magnetických polí, řádově $10^8 - 10^9 \text{ Am}^{-1}$, která dnešní technikou neumíme získat.

Doménové struktury

S představou magnetu vybaví se nám účinky, jimiž se magnet projevuje navenek, avšak narazíme na značné obtíže, zeptáme-li se, proč některý kov se dá zmagnetovat a jiný nikoliv. Abychom tuto otázku zodpověděli, vyjdeme ze dvou experimentálně zjištěných skutečností. Na jedné straně je možno změnit celkovou magnetizaci vzorku z ferromagnetického materiálu od nuly do nasycení, vystavíme-li vzorek účinku magnetického pole nepatrné intenzity $0,79 \text{ Am}^{-1}$, (starší jednotka

o e r s t e d $Oe = \frac{1}{4\pi} 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}} \doteq 7,9 \cdot 10 \text{ Am}^{-1}$). Na druhé straně je však

také možné, aby tentýž vzorek měl přibližně nulovou magnetizaci v nulovém vnějším magnetickém poli.

Abychom vysvětlili tyto zdánlivě protichůdné poznatky, řekneme si několik slov o podstatě magnetismu z hlediska moderní atomové fyziky. Je totiž známo, že atom ve značně zjednodušené představě sestává z jádra čili protonu, kolem něhož v různých, přesně vymezených drahách, obíhají elektrony. Poněvadž elektrický proud je způsoben pohybem volných elektronů, můžeme ztotožnit elektron obíhající po určité dráze s elektrickým obvodem protékáným proudem a z tohoto tvrzení plyne zcela logický důsledek, že obíhající elektron je doprovázen magnetickým polem, které charakterizujeme magnetickým momentem. Avšak kromě tohoto tzv. dráhového pohybu, koná elektron současně ještě otáčivý pohyb kolem své vlastní osy a tento pohyb je rovněž charakterizován magnetickým momentem, který označujeme jako spinový magnetický moment. A právě spinový moment je jedním z určujících faktorů ferromagnetismu.

Naši představu rozšíříme ještě poznatkem, že všechny atomy, z nichž se látka skládá, vykonávají neustále kmitavý pohyb, jehož amplitudy závisí na teplotě látky.

Vložíme-li ferromagnetickou látku do magnetického pole, stojí proti sobě dvě tendence opačného charakteru: vnější pole vykazuje snahu uspořádat jednotlivé magnetické momenty do směru, v němž působí, zatím co tepelné pohyby ruší tuto orientaci. Aby pak bylo možno zmagnetizovat nějakou látku, musí zde existovat nějaký činitel, který by převážil vliv tepelného působení.

Pierre Weiss roku 1907 předpokládal, že uvnitř ferromagnetického materiálu existuje velmi silné vnitřní magnetické pole, nesprávně označené jako molekulární pole, pro které stanovil řádovou velikost 10^7 Am^{-1} , což je pole asi $10 \times$ silnější než pole, které se podařilo vyrobit laboratorně. Dnes víme, že ve ferromagnetických látkách působí síly elektrostatického původu, které se snaží srovnat magnetické momenty do jednoho směru. Vznik těchto sil, které se označují jako výměnné, můžeme vysvětlit kvantovou mechanikou. Avšak předpoklad existence molekulárního pole vysvětluje první experimentálně zjištěnou skutečnost, že je možné zmagnetovat do nasycení ferromagnetickou látku již slabým vnějším magnetickým polem. Molekulární pole převažuje nad tepelnými pohyby až do určité teploty, kterou označujeme jako Curieův bod a silně podporuje snahu vnějšího pole orientovat jednotlivé magnetické momenty stejným směrem. Nad Curieovým bodem převažují naopak tepelné fluktuace, následkem čehož se látka stává paramagnetická. Magnetické vlastnosti látek slabě magnetických možno tedy v podstatě vysvětlit na základě dráhových (orbitálních) a spinových magnetických momentů jednotlivých elektronů. V látkách, v nichž se orbitální a spinové momenty elektronů navzájem ruší, nemají atomy výsledný magne-

tický moment; tyto látky jsou diamagnetické. V opačném případě mají atomy výsledný magnetický moment a látky jsou obecně paramagnetické. V paramagnetických látkách jsou výměnné síly zanedbatelné, protože převažují tepelné pohyby a magnetické momenty atomů jsou uspořádány zcela nahodile. Aplikujeme-li na paramagnetickou látku vnější magnetické pole, docílíme jistého srovnání těchto elementárních magnetických momentů, avšak k jejich úplnému uspořádání, tedy ke zmagnetování do nasycení, bylo by třeba silných, technicky nerealizovatelných polí, jak bylo řečeno v úvodu.

Weiss vysvětlil i druhou skutečnost, že totiž magnetizace ferromagnetika může být nulová v nulovém vnějším magnetickém poli, předpokladem, že ferromagnetický materiál je složen z malých oblastí, zvaných *domény*, z nichž každá je zmagnetována do nasycení (*spontánní magnetizace*) bez vlivu vnějšího pole. Směry magnetizací jednotlivých domén jsou za nepřítomnosti vnějšího pole orientovány zcela nahodile a látka se navenek chová jako nemagnetická.

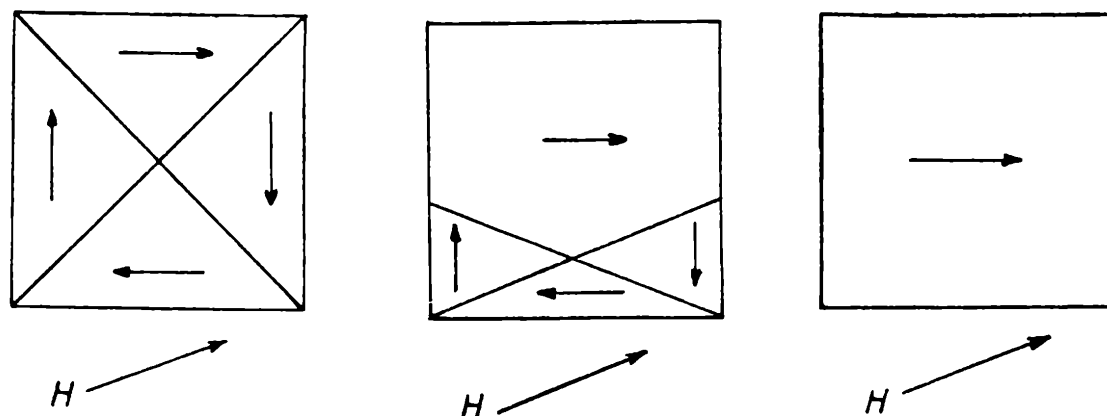
Směr magnetizace se mění tedy od domény k doméně, avšak její velikost zůstává stejná. Tato pak se rovná intenzitě sycení materiálu při dané teplotě. Prakticky závisí velikost spontánní magnetizace toliko na teplotě, a teplotu, při které se stává nulovou, označujeme jako již uvedený *Curieův bod*. Na druhé straně závisí velikost elementárních domén, jakož i směr jejich spontánních magnetizací, na mnoha činitelích, např. na vnějším poli, na vnitřním demagnetizačním poli, na přítomnosti nečistot, pnutí atd. Za nepřítomnosti vnějšího pole je směr magnetizace v doméně ovlivněn krystalovou strukturou a vnitřním pnutím. Z magnetizačních křivek, zjištěných v různých krystalografických osách, odvozujeme, že v doméně krystalu železa, které krystaluje v kubické soustavě, je za nepřítomnosti vnitřního pnutí a vnějšího pole, magnetizace vždy rovnoběžná s jednou z hran krychle. Tato hrana tedy představuje směr snadné magnetizace, tj. směr, v němž můžeme krystal zmagnetovat do nasycení s nejmenším množstvím energie. Poněvadž pak existují směry, směr těles a stěnové úhlopříčky krychle, v nichž je zapotřebí větší energie, abychom krystal zmagnetovali do nasycení, pravíme, že krystal je magneticky anizotropní.

Jednotlivé domény jsou od sebe odděleny hranicemi, které označujeme jako *Blachovy stěny*. Tyto stěny nepředstavují jednoduché geometrické plochy, nýbrž tvoří přechodovou oblast, uvnitř které se magnetizace mění z jednoho směru do druhého.

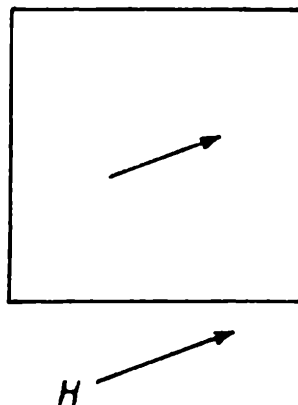
Jak již bylo uvedeno, je změna velikosti spontánní magnetizace ovlivněna v největší míře změnami teploty a jen v zanedbatelné míře aplikací velmi silného vnějšího magnetického pole. Zpravidla je při konstantní teplotě magnetizace ferromagnetického tělesa měněna dvěma procesy:

- a) změnou objemu domény - tedy pohybem stěny,
- b) změnou směru doménové magnetizace.

Magnetizační proces můžeme z hlediska doménové teorie vysvětlit tak, že při aplikaci slabého magnetického pole zvětšuje se posouváním Blochových stěn nejprve objem těch domén, jejichž směry magnetizací mají vzhledem k magnetizaci nejvýhodnější orientaci. Se zvětšováním pole probíhá tento proces dále, až nakonec krystal je tvořen jedinou doménou. Zvětšujeme-li pole ještě dále, dochází k natáčení doménové magnetizace do směru pole. Jestliže přemístění stěn je malé, lze očekávat, že je vratné, tzn., že po zaniknutí příčiny, která pohyb způsobila, vrátí se stěna na své původní místo. Jestliže přemístění stěn jsou velká, pak jsou nevratná, tedy jsou zdrojem magnetické hystereze (obr. 1).



Obr. 1a, b, c. Magnetování krystalu Fe pohybem stěny.



Obr. 1d. Rotace vektoru doménové magnetizace.

Sledujeme-li dále orientaci doménových struktur z hlediska vnitřní stavby materiálu, zjistíme na základě kvantové mechaniky, že doménové obrazce jsou výsledkem rovnováhy mezi různými druhy energie, a to energie výměnné, anizotropní, magnetostatické a magnetoelastické. Stanovíme-li matematickou formulaci těchto energií, můžeme z podmínky nejmenší energie systému určit přibližnou sílu Blochovy stěny 250 angströmů a její energii $1,8 \cdot 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$. Matematická analýza našeho problému však také objasní otázku, proč vlastně vznikají doménové struktury. K snadnému zodpovědění této otázky provedeme toto srovnání: Vypočetli jsme řádovou velikost energie jedné domény, která

činí $6,8 \cdot 10^{-4} \text{ J. s. m}^{-2}$ a tuto hodnotu srovnáme s energií nějakého povrchu, na němž se nevytvořila doménová struktura a pro jehož energii lze vypočítat hodnotu $1,7 \cdot 10^{-1} \text{ J. s. m}^{-2}$. Odpověď je snadná. Vytvořením doménové struktury se podstatně sníží celková energie systému.

Z koncepce doménových struktur odvodil Akulov a Bitter důsledek, který se stává opěrným bodem pro posuzování ferromagnetik podle Weissových domén. Zjistili totiž experimentálně, že nad čarami, v nichž Blochovy stěny protínají povrch, musí existovat rozptylové magnetické pole. Posypeme-li tedy dobře vyleštěný povrch vzorku jemným ferromagnetickým práškem, budou se částičky shromažďovat nad Blochovými stěnami, podobně jako železné piliny sledují průběh siločar magnetického pole. Takto je tedy možné sledovat doménové struktury mikroskopem analogicky jako posuzujeme vlastnosti kovů na základě metalografických struktur. Technika indikace doménových struktur byla dále zdokonalena, takže dnes používáme koloidního roztoku Fe_3O_4 a docílujeme mikroskopicky dobrých výsledků poměrně jednoduchým způsobem.

(Pokračování)

J a r o s l a v P o s p í š i l, UP Olomouc:

Elektronový mikroskop

(Pokračování)

Elektronových mikroskopů je mnoho druhů a můžeme je rozdělit do skupin podle různých hledisek.

Podle druhu elektronových čoček, kterými ovlivňujeme proud elektronů v elektronovém mikroskopu, rozeznáváme m a g n e t i c k é, e l e k t r o s t a t i c k é a s m í š e n é, neboli k o m b i n o v a n é e l e k t r o n o v é m i k r o s k o p y.

V magnetickém elektronovém mikroskopu jsou čočkami nehomogenní středově souměrná magnetická pole soustředěná do malého prostoru podél osy elektronového mikroskopu.

Jsou-li tato nehomogenní středově souměrná magnetická pole vytvořena elektromagnety, nazýváme příslušné přístroje m i k r o s k o p y e l e k t r o m a g n e t i c k é, zatím co elektronové mikroskopy, u nichž zmíněná pole jsou vytvořena pouze permanentními magnety ze speciálních slitin s vysokou koercitivní silou (bránivou silou proti odmagnetování), se nazývají m i k r o s k o p y m a g n e t i c k é.

V elektronových mikroskopech elektrostatických jsou elektrony ovlivňovány nehomogenními středově souměrnými elektrickými poli vytvořenými elektrostatickými čočkami. Z elektrostatických čoček je nejčastěji použito č o č e k u n i p o t e n c i á l o v ý c h.²⁾ Na obr. 1 je

²⁾ O jednotlivých druzích elektrostatických a magnetických čoček bylo podrobněji pojednáno v článku E l e k t r o n o v á o p t i k a.

pohled na elektrostatický elektronový mikroskop, značky TTC švýcarské výroby, pro zvětšení až 15 000.

Smíšené elektronové mikroskopy obsahují jak čočky elektrostatické, tak čočky magnetické.

Srovnáme-li mikroskop s magnetickými čočkami a mikroskop s elektrostatickými čočkami, pak zjistíme, že mikroskopy elektrostatické jsou po elektrické stránce jednodušší než magnetické. Po stránce mechanické jsou však složitější a také dosud jimi dosažené maximální zvětšení, i jejich rozlišovací schopnost, jsou podstatně nižší než u mikroskopů magnetických. Centrování soustavy elektrostatických čoček se musí provádět se stejnou přesností jako u obdobné soustavy čoček magnetických.

Podle konstrukčního provedení rozlišujeme **m i k r o s k o p y u n i v e r z á l n í a p ř í r u č n í**. Univerzálními se nazývají elektronové **m i k r o s k o p y p r o z a ř o v a c í h o t y p u** (elektrony procházejí pozorovaným předmětem). Jsou určeny k pozorování všech možných předmětů pro elektrony prostupných. Tyto mikroskopy dosahují zvětšení v širokých mezích od několika set do 25 až 40 tisíc.

Příručními nazýváme menší mikroskopy s jednoduchou obsluhou, které dovolují pozorovat předměty při celkem nevelkých zvětšeníh, ale přesto s dosti velikou rozlišovací schopností.

Elektronové mikroskopy dělíme též podle způsobu vytváření elektronového obrazu (elektronogramu). Jsou to jednak mikroskopy, které k vytváření elektronového obrazu neužívají žádných elektronových čoček, dále tzv. **m i k r o s k o p y z o b r a z o v a c í**, které používají čoček k zobrazování úplně stejně jako mikroskopy světelné a konečně mikroskopy, které k vytvoření obrazu používají techniky obvyklé v televizi (**m i k r o s k o p y r a s t r o v a c í**).

Všechny uvedené druhy elektronových mikroskopů lze rozdělit do tří základních skupin:

a) **e l e k t r o n o v é m i k r o s k o p y e m i s n í**, jimiž se zobrazují zdroje emitující elektrony (uvolňující elektrony);

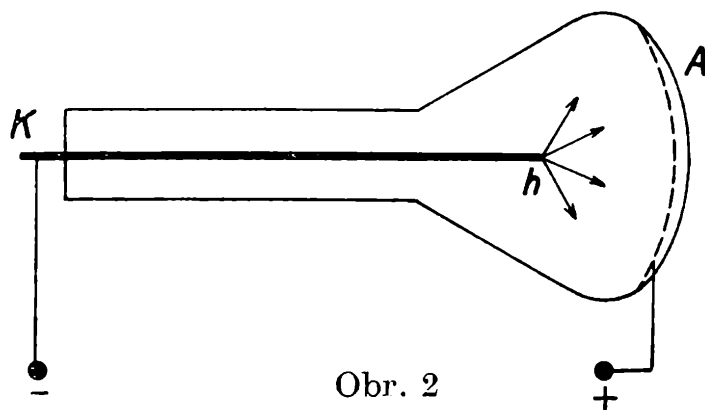
b) **e l e k t r o n o v é m i k r o s k o p y r e f l e x n í**, kterými se zobrazují objekty pomocí elektronů odražených od jejich povrchu;

c) **e l e k t r o n o v é m i k r o s k o p y p r o z a ř o v a c í**, kterými se zobrazují objekty prozářením elektronovými paprsky. Ty jsou nejdokonalejší a nejvíce se jich používá.

Emisní elektronový mikroskop je nejstarší elektronový mikroskop. Existuje v konstrukcích jak bez zobrazovacích čoček, tak i s jednou nebo dvěma zobrazovacími čočkami, a to buď s elektrostatickými nebo magnetickými. Podle způsobu získávání elektronů označujeme často tyto mikroskopy jako **t e r m i c k é**, **f o t o e l e k t r i c k é**, **s e s e k u n d á r n í e m i s í**, nebo **e m i s í z a s t u d e n a** vysokým napětím (autoemisí). U emisních mikroskopů bez zobrazovacích čoček elektrony vystupující kolmo k povrchu zdroje se urychlují ve vakuu vhodným elektrickým

napětím mezi zdrojem a pozorovacím stínítkem, které má vhodný tvar podle tvaru zdroje. Zvětšení a rozlišovací schopnosti dosažitelné těmito mikroskopy jsou poměrně malé, avšak dostačují pro celou řadu úkolů. Kde je nutno použít větších zvětšení, užívá se konstrukcí s elektronovými čočkami. Elektrony vystupující ze zdroje jsou nejprve urychlovány a pak procházejí zobrazovacími čočkami, které vytvářejí zvětšený obraz zdroje.

Ke skupině emisních mikroskopů patří tzv. *t e r m i o n i c k ý m i k r o s k o p*. Je založen na termionické emisi elektronů s povrchu žhavých kovů, po případě jejich kysličníků. Je to mikroskop, kterého se užívá ke studiu rozložení energie *t e r m o e l e k t r o n ů* (elektronů uvolněných termickou cestou) na povrchu kovů a ke studiu oxydových katod. Paprsky termoelektronů se urychlí elektrostaticky ve vakuu a jejich chod se elektrickým a magnetickým polem upraví tak, aby na fluorescenčním stínítku, nebo na fotografické desce, nebo na filmu, vznikl obraz (až 200krát zvětšený) emitujícího povrchu katody.



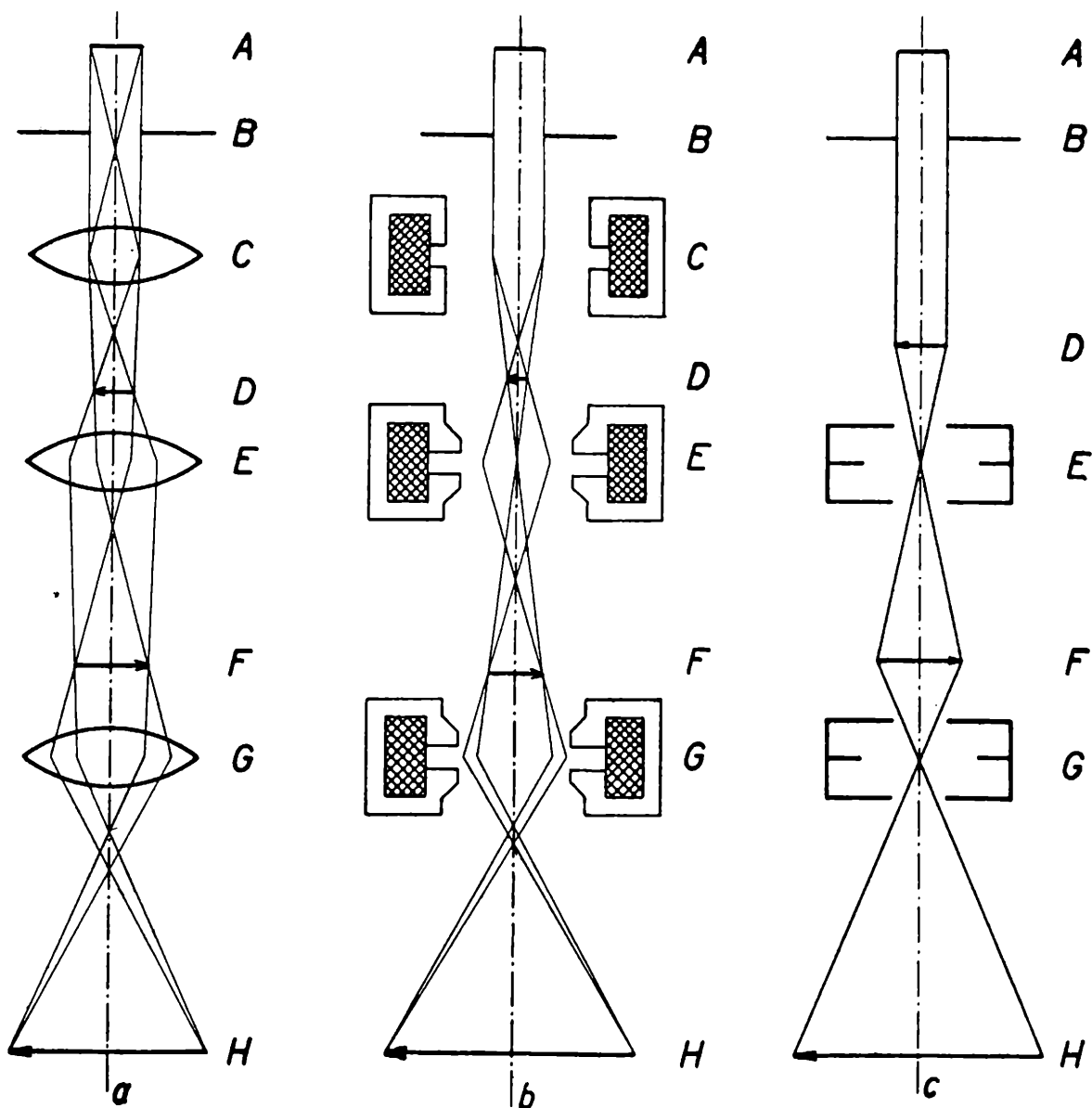
Obr. 2

Dalším důležitým představitelem skupiny emisních mikroskopů je *k a t o d o v ý m i k r o s k o p*, u něhož se elektrony uvolňují ze studené katody vysokým napětím. Princip katodového mikroskopu je jednoduchý (obr. 2). Katodu *K* tvoří drát ze zkoumaného kovu (např. wolframový drát), ukončený polokulovým hrotem *h*, který je leptáním upraven tak, aby měl velmi malý poloměr křivosti. Kulový povrch evakuované (vzduchu zbavené) skleněné bány, pokrytý uvnitř fluorescenční vrstvou, tvoří anoda *A*. Vlivem napětí mezi katodou a anodou vznikne v okolí hrotu elektrické pole velké intenzity, kterým se emitují elektrony z katody. Katodové paprsky (proudy elektronů ve vakuu) vyzářené z hrotu se šíří k anodě a narazí na fluorescenční stěnu, kde se vytvoří elektronogram katody. Je pozoruhodné, že lze katodovým mikroskopem dosáhnout většího zvětšení než některými druhy elektronových mikroskopů prozařovacího typu, ovšem při splnění velmi přísných podmínek, zvláště pokud jde o vakuum. Zároveň je jejich rozlišovací schopnost tak značná, že umožňuje rozlišovat body vzdálené vzájemně jen asi 20 Å. Lze jím tedy pozorovat i jednotlivé velké molekuly.

Jinou skupinou elektronových mikroskopů jsou m i k r o s k o p ý r e f l e x n í, kterých se používá k zobrazování a zkoumání předmětů, které neemitují elektrony a jsou pro elektrony neprostupné. Mezi ně patří především mikroskopy analogické mikroskopům světelným, u nichž se vhodným svazkem elektronů ozařuje povrch studovaného objektu a k zobrazení se použije elektronů od tohoto povrchu odražených. Odražené elektrony procházejí pak ve vakuu elektronovými čočkami, kterými se vytvoří zvětšený obraz studovaného objektu. Získávání těchto obrazů je velmi obtížné pro značný rozptyl elektronů, takže tyto mikroskopy nedosáhly ani zdaleka těch zvětšení a rozlišovacích schopností, jako mikroskopy prozařovacího typu. Teprve zdokonalené typy tohoto mikroskopu mají (při vhodných metodách zkoumání) poněkud větší rozlišovací schopnost.

Ze všech druhů elektronových mikroskopů se dnes využívá hlavně těch, v nichž elektrony prozařují předmět. Takové mikroskopy se nazývají p r o z a ř o v a c í. Těmito mikroskopy můžeme zobrazovat předměty, které nejsou schopny emitovat elektrony. Poněvadž se u nich používá elektronů, které musí předmětem projít, musí tloušťka zobrazovaných předmětů být tak malá, aby největší část elektronů neztratila průchodem na rychlosti a nezměnila příliš svůj směr. Optimální tloušťka, která závisí nepřímo na hustotě hmoty, je asi $1\text{ m}\mu$. Nejdůležitější z mikroskopů tohoto typu jsou mikroskopy uspořádané analogicky jako mikroskopy světelné, zařízené na fotografování. Jsou to mikroskopy, kterými bylo dosud dosaženo největšího zvětšení a které mají největší rozlišovací schopnosti (supermikroskopy), a proto se jich nejvíce používá v praxi. Dosažení velkých zvětšení a velké rozlišovací schopnosti bylo umožněno konstrukcí dokonalých elektronových čoček, zejména elektromagnetických a užitím elektronů urychlených vysokým napětím ve vakuu. Elektronové mikroskopy tohoto typu se vyznačují mnohem větší hloubkovou ostrostí, než jaké mohou dosáhnout mikroskopy světelné. Hloubková ostrost i při vysoké rozlišovací schopnosti je řádově 10^2 krát větší než při mezní rozlišovací schopnosti světelného mikroskopu. Proto změna ohniskové dálky čočky o tloušťku preparátu nemá pozorovatelný vliv na ostrost obrazu. Tato velká hloubková ostrost umožňuje i při vysoké rozlišovací schopnosti stereoskopické (prostorové) snímky, které u světelného mikroskopu jsou při vysokých rozlišovacích schopnostech prakticky neproveditelné. Význam prozařovacích elektronových mikroskopů je také v tom, že dovolují přesné kvantitativní stanovení rozdílů tlouštěk jednotlivých míst zobrazovaného předmětu. Elektronové mikroskopy prozařovacího typu dovolují, podobně jako mikroskopy světelné, vedle normálního zobrazení ve světlém poli provádět zobrazování v temném poli. Zobrazení v temném poli se dosáhne tím, že hlavní svazek elektronů, který projde zkoumaným předmětem bez znatelného vychýlení ze svého směru, bude zachycen clonkou a neprojde celou optickou

soustavou elektronového mikroskopu. Zobrazení se uskuteční jen rozptýlenými elektrony. Při tomto zobrazení budou tedy odpovídat hmotnějšíma tlustším místům předmětu jasnější místa elektronogramu na fluorescenčním stínítku. Rozložení světlých a tmavých míst bude na fluorescenčním stínítku opačné než při zobrazení ve světelném poli. Zobrazení v temném poli se užívá k zvýšení kontrastu elektronogramu.



Obr. 3

Velmi jednoduchým mikroskopem prozařovacím je tzv. mikroskop s bodovou projekcí. Jeho princip je ten, že co nejdokonalější bodový zdroj elektronů se umístí těsně za pozorovaným objektem a na fluorescenčním stínítku se pozoruje obraz vyvolaný prošlými elektrony, urychlenými vysokým napětím mezi zdrojem elektronů a stínítkem. Rozlišovací schopnost je zde omezena rozptylem zobrazujícího svazku elektronů, ale je větší než u světelných mikroskopů.

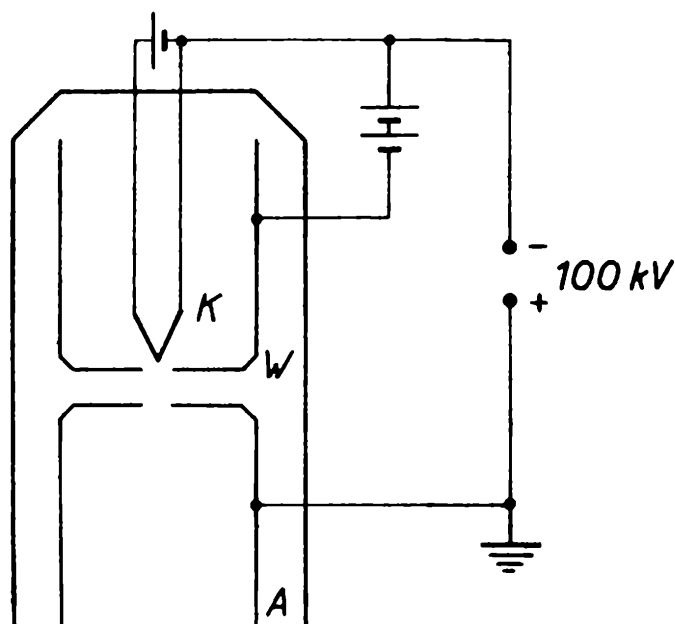
Analogický je mikroskop stínový, u něhož je bodový zdroj elektronů realizován pomocí dvou elektronových čoček. Ty soustřeďují

do jednoho bodu elektronové paprsky, vycházející všemi směry ze zdroje elektronů. Stínový elektronový mikroskop se nazývá tak proto, že se na fluorescenčním stínítku zobrazuje stín zkoumaného předmětu. Také tímto mikroskopem bylo dosaženo zvětšení, i rozlišovací schopnosti větší než u světelného mikroskopu.

Na obr. 3 jsou pro srovnání znázorněny optické soustavy prozařovacího světelného mikroskopu (a), prozařovacího magnetického elektronového mikroskopu (b) a prozařovacího elektrostatického elektronového mikroskopu (c).

Optická soustava prozařovacího elektronového mikroskopu má tyto části (obr. 3):

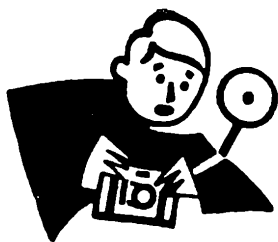
1. Zdroj elektronových paprsků (*A*) v různé úpravě, který spolu se svazkem elektronů má funkci osvětlovací, což je obdobné funkci světelného zdroje a světla u světelného mikroskopu. Zdrojem je buď tzv.



Obr. 4

žhavená katoda, což je wolframový nebo tantalový drátek, který se rozžhává ve vysokém vakuu elektrickým proudem, nebo tzv. studená katoda, což je hořčíková nebo hliníková destička bombardovaná proudem iontů za nízkého tlaku plynu, který tvoří ionty. Někdy to bývá také fotokatoda, z jejíž cesiové vrstvy se účinkem světla uvolňují elektrony. Zdroj elektronů je součástí zařízení zvaného **e l e k t r o n o v á t r y s k a** (obr. 4). Elektronová tryska se skládá z katody *K*, fokusační elektrody (Wehneltova válce) *W* a anody *A*. Elektrony vystupující z katody různými směry procházejí nejprve fokusační elektrodou, kde se fokusuují (soustřeďují) do jednoho bodu (fiktivní katoda), potom anodou, která pohyb elektronů zrychlí a pak clonou (*B*) (obr. 3), kde se vytvoří žádaný úzký svazek elektronových paprsků. Změnou potenciálu na elektrodách trysky lze změnit aperturní úhel a tím podle (1) a (3) i rozlišovací mez a zvětšení elektronového mikroskopu. (Pokračování)

Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:



Čs. matematici a fyzici na nových poštovních známkách

Čs. poštovní správa již od několika let vydává každoročně sérii známek v emisi, nazvané „Kulturní osobnosti“. V této emisi se objevují na poštovních známkách portréty většinou našich, ale někdy i zahraničních osob, zasloužilých např. o vědu, techniku, umění, nebo i jinak významných pro nás či pro celou lidskou společnost.

Také letos vydává poštovní správa sedm známek v této sérii. Tyto známky jsou pro československou filatelii a pro československou známkovou tvorbu zvlášť významné tím, že jsou to poslední známky, které vytvořil jeden z největších představitelů našeho výtvarného umění, národní umělec PhDr. h. c. Max Švabinský, nositel Řádu republiky a Čs. ceny míru. Znamky vyšly dne 26. února 1962 a jejich vydání se již autor nedožil; zemřel 10. února 1962.



Obr. 1

Dvě z těchto známek mají pak ještě význam pro naši matematickou vědu, mají totiž připomenout sté výročí založení naší vědecko-pedagogické společnosti Jednoty čs. matematiků a fyziků, která byla založena dne 28. března 1862. Na každé z obou známek jsou zvěčněny podoby dvou vynikajících příslušníků Jednoty.

Znamka hodnoty 40 h představuje fyzika PhDr. Františka Závistého (1879—1945), od roku 1906 docenta a od roku 1914 profesora teoretické fyziky na Karlově universitě v Praze. Zabýval se mimo jiné studiem polarisace hraničních čar při úplném odrazu ve dvouosých krystalech

vlivem Röntgenova záření na kondenzaci vodních par a šířením elektromagnetických vln ve válcích a trubicích. Je učitelem celé řady našich vynikajících fyziků a spojoval ve své činnosti po celý život vědce a pedagoga.

Na téže známce je dále portrét matematika PhDr. Karla P e t r a (1868—1950), nejprve středoškolského profesora, od roku 1902 docenta techniky v Brně, od roku 1903 mimořádného a od roku 1908 řádného profesora matematiky na Karlově universitě v Praze. Jeho vědním oborem byla teorie čísel a forem a analýza. Byl plodným vědeckým spisovatelem a jeho literární vědecké dílo je vysoce ceněno i v zahraničí. Celý život byl učitelem a velká řada našich matematiků vděčí jemu za dobrou přípravu pro své povolání.

Profesor Závíška i profesor Petr mají velké zásluhy o jubilující dnes Jednotu čs. matematiků a fyziků, v jejímž výboru se po dlouhá léta podíleli na společné práci.

Známka hodnoty 1,80 Kčs přináší portrét PhDr. Miloslava V a l o u c h a (1878—1952), původně středoškolského profesora matematiky a fyziky, od roku 1918 významného činitele v tvořícím se ministerstvu školství a národní osvěty a posléze zasloužilého ředitele Jednoty čs. matematiků a fyziků, jíž věnoval drahně let své síly. Jeho přičiněním se stala Jednota jednou z nejdůležitějších vědeckých společností v naší republice. Dr. Valouch byl i literárně činný, vydáváje zejména středoškolské učebnice. Snad každý náš student měl v ruce jeho Logaritmické tabulky, které vyšly v mnoha vydáních; pozdější vydání zpracovával se svým synem prof. RNDr. Miloslavem Valouchem.

Na této známce je dále ještě zobrazen PhDr. Juraj H r o n e c (1881 až 1959), nejprve středoškolský profesor, od roku 1923 docent v Praze, od roku 1924 profesor matematiky Vysoké školy technické v Brně, od roku 1938 vládní zmocněnec pro zorganizování Slovenské vysoké školy v Košicích, s kterou pak po odtržení Košic od naší republiky věrně putoval do Prešova, do Turčanského Martina a do Bratislavy. Ještě za války a zejména pak po válce v osvobozené vlasti organizoval výstavbu téměř všech nových slovenských vysokých škol a fakult. Od roku 1950 byl profesorem přírodovědecké fakulty university Komenského v Bratislavě. Pracoval zejména v oboru diferenciálních rovnic a diferenciálních systémů, byl horlivě činný literárně a pro svůj význam byl jmenován členem mnohých vědeckých společností a od roku 1953 se stal členem Slovenské akademie věd. Za svou záslužnou vědeckou i pedagogickou činnost dostalo se mu Řádu práce. Za zásluhy o činnost Jednoty čs. matematiků a fyziků jmenovala ho Jednota svým čestným členem.

Čin čs. poštovní správy, že vydává každoročně série známek v rámci emise „Kulturní osobnosti“, lze skutečně s povděkem kvitovat. Čs. poštovní známky jsou v cizině velmi oblíbené a tudíž i hledané a bylo by si jen přát, aby i nadále úspěšně hlásaly vysokou úroveň naší vědy.

Matematická olympiáda



Tomáš Jech, Praha:

Třetí mezinárodní matematická olympiáda

(Dokončení)

Při první písemné práci jsme utrpěli velkou bodovou ztrátu. Průměr na jednoho žáka byl pouze 6,4 bodů z 20 možných. Příklady byly poněkud odlišné od těch, které se vyskytují na našich olympiádách. Nejslabšího výsledku jsme dosáhli na trigonometrickém příkladě, u něhož nikdo z našich žáků nepřišel na obrat, na němž se zakládalo řešení (jestliže součet dvou nezáporných sčítanců je roven nule, jsou oba sčítanci současně rovny nule). Jeden žák však vyřešil tuto úlohu jinou metodou. Také druhý příklad (důkaz nerovnosti) působil značné těžkosti. V řešeních prvního příkladu se vyskytla řada chyb numerických, chyb ve znaménku apod.

Druhý den byly na pořadu tři geometrické příklady. Soutěž probíhala za stejných podmínek jako v pondělí. Příklady nám lépe vyhovovaly než první den, což se projevilo i na zlepšeném výkonu - průměr na žáka byl 13,5 bodů z 20 možných. Na prvním příkladě (úloha na použití stejno-
lehlosti) získalo 6 členů našeho družstva plný počet bodů. Druhý příklad (planimetrická konstruktivní úloha) považuji za nejlepší příklad soutěže. Třetí úloha, stereometrická, byla nejsnadnější. Někteří naši žáci však na této úloze ztratili body proto, že jim na její řešení již nezbyl čas.

Ve středu a ve čtvrtek navštívili účastníci olympiády památné historické místo Tihány na břehu Balatonu a moderní město na Dunaji Sztalinváros. Zbytek týdne jsme strávili a Budapešti.

Slavnostní zakončení soutěže se konalo v pátek 14. července v Domě techniky sídle Matematické společnosti Jánose Bolyaie. Akademik dr. György Alexits, čestný předseda BJMT, zdůraznil význam olympiády pro utužení přátelských vztahů mezi studenty zúčastněných zemí a pro další rozvoj matematiky a přírodních věd. Jménem ministerstva kultury MLR pozdravil zúčastněné dr. József Fekete. Za soutěžící poděkoval pořadatelům člen polské delegace Maciej Skwarczyński, žák varšavského lycea, který spolu s dvěma maďarskými studenty získal I. cenu.

Absolutním vítězem soutěže se stal maďarský student B é l a B o l l o b á s z Budapešti, který jako jediný z účastníků dosáhl plného počtu bodů. Celkem bylo uděleno 11 cen: 3 první, 4 druhé a 4 třetí. Z toho 6 cen získali maďarští žáci, 2 ceny rumunští a po jedné žáci Polska, NDR a Československa (T o m á š J e c h z Prahy 1 získal III. cenu). Dále byla udělena čestná uznání, která obdržela 19 účastníků, mezi nimi 3 naši studenti. Všichni účastníci dostali od pořadatelů upomínkové předměty, hlavně v národním folklóru a dárek od rumunské delegace.

Po vyhlášení výsledků se konala slavnostní večeře, která probíhala v srdečném a přátelském ovzduší. Při večeři jsme vyslechli hlášení maďarského rozhlasu, který ve své zpravodajské relaci vyhlásil výsledky III. mezinárodní matematické olympiády.

V sobotu večer si účastníci MMO prohlédli osvětlenou Budapešť z rozhledny na hoře Sv. Jana. V neděli 16. července odcestovala zahraniční delegace do svých zemí.

V soutěži byli nejúspěšnější domácí matematici. Všichni byli odměněni cenou nebo čestným uznáním. Jejich vysoká úroveň je patrna z toho, že někteří vypracovali dvojí rozličné řešení úlohy, pokusili se o zobecnění a pod. Podle neoficiálního hodnocení je možno uvést toto pořadí zúčastněných zemí: Maďarsko, Polsko, Rumunsko, Československo, NDR, Bulharsko. Tabulka ukazuje, kolik bodů získali svému družstvu jednotliví žáci:

Země	Počet bodů, které získal žák čís.								Celkem bodů
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Maďarsko	40	37	36	34	34	33	29	27	270
Polsko	39	29	29	24	23	23	20	16	203
Rumunsko	34	30	28	27	26	26	14	12	197
ČSSR	33	25	24	21	16	15	13	12	159
NDR	31	23	22	20	14	13	12	11	146
Bulharsko	28	18	15	14	14	13	4	2	108

Poznámka. I. cena nad 37 bodů, II. cena nad 34 bodů, III. cena nad 30 bodů, 1. čestné uznání nad 25 bodů, 2. čestné uznání nad 20 bodů.

Přesto, že jsme se všichni snažili, abychom dosáhli co nejlepšího výsledku, nestačili jsme na výborně připravené studenty maďarské, polské a rumunské. Umístění československého družstva je vzhledem k loňskému vítězství do jisté míry zklamáním. Projevil se n e d o s t a t e k p r a x e v p o č í t á n í s a l g e b r a i c k ý m i v ý r a z y a zvláště se ukázalo, že některé typy příkladů se u nás vůbec nevyskytují ani na školách, ani v MO (např. 3. úloha z algebry). Dále se ukázalo, že n a š i

žáci prováděli příliš rozvláčná řešení úloh, což bylo většinou na újmu přesnosti.

Jedním z důvodů, proč se maďarští olympionici stali vítězi III. MMO, je ten, že byli na soutěž během roku pečlivě připravováni pracovníky Matematické společnosti. Nelze však přehlížet ani tu skutečnost, že dva členové maďarského a dva členové rumunského družstva byli již loni v Bukurešti odměněni cenou a letošní vítěz Bollobás se účastnil MMO dokonce již předloni. Čtyři členové maďarského družstva ještě neukončili střední školu. Také v polské výpravě bylo několik mladších žáků. Myslím, že kdyby u nás byly termíny krajského kola upraveny tak, aby se mohli v kategorii A zúčastnit i mladší žáci, zvýšila by se kvalita ústředního kola. Ukazuje to nakonec několik ojedinělých případů z minulých ročníků.

Soutěž se těšila v Maďarsku značné pozornosti. Maďarské listy přinesly několikrát zprávu o olympiádě a maďarský rozhlas vysílal z prvního dne soutěže reportážní záběr.

III. mezinárodní matematická olympiáda splnila dobře své hlavní poslání navázat přátelství mezi mladými matematiky zúčastněných zemí. Přes jazykové potíže si všichni velmi dobře rozuměli a mnozí si budou s novými přáteli dopisovat. K radostnému prostředí přispěli velkým dílem maďarští hostitelé, kteří se snažili, aby se nám v jejich zemi co nejvíce líbilo. Přejeme si také, aby příští MMO která se bude konat letos v rámci 100. výročí založení JČMF v Československu, probíhala ve stejně radostném a přátelském ovzduší jako loňská v Maďarsku.

Texty úloh zadaných na III. MMO v Maďarsku
(V závorce je uvedena země, která úlohu zadala).

První písemná práce:

1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2,\end{aligned}$$

kde a, b jsou daná čísla.

Udejte podmínky, které musí čísla a, b splňovat, aby čísla x, y, z (která jsou řešením soustavy rovnic) byla kladná a navzájem různá.

(Maďarsko)

2. Budte a, b, c délky stran trojúhelníka a S velikost jeho obsahu. Dokažte, že potom platí vždy

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S \sqrt{3}.$$

Ve kterém případě nastává rovnost?

(Polsko)

3. Řešte rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kde n je libovolné dané přirozené číslo.

(Bulharsko)

Druhá písemná práce:

1. Je dán trojúhelník $P_1P_2P_3$ a uvnitř tohoto trojúhelníka je dán libovolný bod P . Přímký P_1P , P_2P , P_3P protínají protější strany trojúhelníka pořadě v bodech Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Dokažte, že z čísel

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

nejméně jedno není větší než 2 a nejméně jedno není menší než 2.

(NDR)

2. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $AC = b$, $AB = c$ a úhel $\sphericalangle AMB = \omega$, kde M je střed úsečky BC ; při tom je $\omega < 90^\circ$. Dokažte, že úloha má řešení tehdy a jen tehdy, platí-li

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq c < b.$$

Ve kterém případě platí rovnost?

(ČSSR)

3. Je dána rovina ε a po téže straně této roviny jsou dány tři body A , B , C , které neleží v téže přímce; přitom rovina těmito body určená není rovnoběžná s rovinou ε . V rovině ε zvolme tři libovolné body A' , B' , C' . Označme L , M , N středy úseček AA' , BB' , CC' ; dále označme G těžiště trojúhelníka LMN . (Nebudeme uvažovat takové polohy bodů A' , B' , C' , pro které příslušné body L , M , N netvoří vrcholy trojúhelníka).

Co je geometrickým místem bodů G , když body A' , B' , C' nezávisle na sobě probíhají rovinou ε ?

(Rumunsko)

Jmenný seznam žáků na III. mezinárodním matematické olympiádě

I. ceny

B é l a B o l l o b á s, IV. ročník gymnasia „Apáczai Csere János“,
Budapešť (Maďarsko) 40 bodů

M a c i e j S k w a r c z y ŋ s k i, 11. tř. I. stř. školy, Varšava (Polsko) 39 bodů

J ó z s e f K ó t a, III. ročník gymnasia, Tatabánya (Maďarsko) 37 bodů

II. ceny

István Juhász, IV. ročník gymnasia „Madách Imre“, Budapešť (Maďarsko)	36 bodů
Miklós Simonovits, III. ročník gymnasia „Radnóti Miklós“, Budapešť (Maďarsko)	34 body
Constantin Nastasescu, 11. tř. stř. školy, Pucioasa (Rumunsko)	34 body
Gerzson Kéri, III. ročník gymnasia, Sopron (Maďarsko)	34 body

III. ceny

Tomáš Jech, III. b ročník SVVŠ Jana Nerudy, Praha 1 (ČSSR)	33 body
László Gálfi, III. ročník gymnasia „I. István“, Budapešť (Maďarsko)	33 body
Thomas Görnitz, 12. tř. stř. školy „Thomas Schule“, Lipsko (NDR)	31 bodů
Tudor Zamfirescu, 11. stř. tř. školy „G. H. Lazar“, Bukurešť (Rumunsko)	30 bodů

1. čestné uznání

obdrželo 10 účastníků, mezi nimi Michal Kretschmer, III. b SVVŠ v Praze 10 (25 bodů).

2. čestné uznání

obdrželo 9 účastníků, mezi nimi Karel Příkrý, III. a SVVŠ, Vyškov na Moravě (24 body) a Přemysl Svoboda, III. b SVVŠ, Roudnice n. L. (21 bodů).

Devátý ročník matematické olympiády

Jako v dřívějších letech můžeme opět v prodejnách Knihy najít brožurku, vydanou Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze, která má mimořádný význam pro zvyšování zájmů o matematiku v ČSSR. Tuto úlohu uskutečňuje hodnocením a propagací IX. ročníku naší matematické olympiády i zprávou o II. mezinárodní matematické olympiádě v Rumunsku.

Hlavním autorem dílka je opět Rudolf Zelinka. Jeho spolupracovníky jsou členové ústředního výboru matematické olympiády i mnozí z úspěšných řešitelů IX. ročníku soutěže.

Matematická olympiáda je soutěží pro žactvo nejvyšších čtyř ročníků jedenáctiletých a dvanáctiletých středních škol. Mimo ně se jí zúčastnilo jen několik žáků z odpovídajících ročníků (tj. I. až IV.) průmyslových a pedagogických škol.

Soustavná propagace matematické olympiády získává matematicky nadanou část našich studentů pro hlubší studium elementární matematiky, která je základním požadavkem úspěšného studia na vysokých školách technického směru. Proto v naší socialistické vlasti se snažíme studium matematiky co neúčinněji podporovat, neboť jedině tak budeme moci udržet soulad s mílovými kroky socialistické vědy a její zásluhou přispívat k hospodářskému i technickému vítězství nad kapitalismem.

Brožura o matematické olympiádě, vycházející pravidelně vždy s ročním odstupem, pomáhá nejen soutěži samotné, nýbrž přispívá i k zvýšení vyučovacích výsledků v matematice. Jako minule je i nyní většina geometrických partií dílem s. Zelinky. Na algebraických statích se účastnili středoškolští učitelé i vysokoškolští pracovníci z oboru matematiky ze všech krajů naší vlasti.

P r v n í k a p i t o l a informuje o průběhu devátého ročníku soutěže i o zapojení jednotlivých krajů a typů škol. Všechna statistická data jsou tu zachycena v několika přehledných tabulkách.

D r u h á k a p i t o l a shrnuje zprávy o výsledcích jednotlivých kol soutěže. Pokračuje seznamem vítězů II. kola ve všech kategoriích a končí výčtem vítězů III. závěrečného kola, tedy vítězů celé soutěže. Protože v posledním kole se ukázal úbytek olympioniků, bude z rozhodnutí ústředního výboru MO poskytnuta ještě výraznější péče spolehlivým studentům, kteří budou mít vlohy pro studium matematiky. Úbytek zavinuje jistě do značné míry I. fyzikální olympiáda, zahájená rokem 1960, která odvedla zájem některých účastníků dřívějších ročníků olympiády matematické. Přesto pokládá ústřední výbor MO za správné, že se účast současně na obou soutěžích (tj. fyzikální i matematické) nepovoluje, aby se soutěžící nepřetěžovali. Proti předešlým ročníkům byli tentokrát v pražském kraji odměněni i vítězové II. kola soutěže.

V t ř e t í, hlavní části knihy, jsou řešeny příklady všech tří soutěžních kol a kategorií A až D. Všechna řešení jsou vědecky přesná, vyčerpávající všechny podmínky daných úloh. Jsou současně i ukázkami jak vzorného metodického postupu, tak i úsporného a přesného matematického vyjadřování. Některé příklady, popřípadě některá z alternativních řešení jsou uvedeny ve slovenském jazyce. Překlady provedl odborný asistent přírodovědecké fakulty university J. Á. Komenského v Bratislavě, s. Ján Moravčík. Řešení geometrických úloh jsou doplněna instruktivními a vzorně provedenými obrázky, které rýsoval vedoucí katedry matematiky na Pedagogickém institutu v Praze, s. Vlastimil Macháček.

Poslední, č t v r t á k a p i t o l a, se zabývá přehlednou zprávou o dru-

hé mezinárodní matematické olympiádě, která - stejně jako první - byla organizována v Rumunsku. K střetnutí osmičlených delegací (ČSSR, Maďarsko, Rumunsko, Bulharsko a NDR) došlo v Sinai, lázeňském letovisku v Jižních Karpatech. Naši delegáti, jimiž byli opět vybraní olympionici naší národní matematické soutěže, obsadili ve druhém ročníku přes silnou konkurenci první místo. V brožuře jsou uvedeny i soutěžní příklady, vybrané mezinárodní komisí z příspěvků jednotlivých soutěžících zemí.

Mezinárodní olympiády si už získaly určitou tradici; jejich význam pro podporu zájmu o matematiku jako vědeckou disciplínu je větší, než u olympiád národních. Vedle přínosu vědeckého prohlubují tyto soutěže i soustavnou vzájemnou výměnu zkušeností; neméně důležité jsou i jejich výsledky politicko-výchovné.

Publikace má 208 stran a jako dříve praktický kapesní formát; dostane se za 4,10 Kčs.

Jaromír Dubský

Recenze



Inž. Jiří Klír:

Matematické stroje

V dnešní době, kdy se bouřlivě rozvíjí výroba, doprava a způsoby řízení ve všech oblastech lidské činnosti, stoupá zájem o moderní technická zařízení, zvláště o matematické stroje. Zájem projevují i lidé, kteří se nikdy hlouběji nezabývali matematikou, elektrotechnikou a jinými technickými vědami. Odborníci jsou často dotazováni, na jakých principech jsou tyto stroje založeny, v jakých oborech se uplatňují, do jaké míry mohou nahradit duševní práci lidí atd. Lidé se zvláště ptají, jak mají rozumět tomu, že stroje mohou mít paměť, že mohou rozhodovat o postupu výpočtu, zkrátka, že mají některé vlastnosti, jež dosud bylo zvykem považovat pouze za vlastnosti živých bytostí.

Pro uspokojení tohoto zájmu je u nás dosud málo populárně-technické literatury. Inž. J. Klír, autor knížky *Matematické stroje*, pojednává o všech těchto otázkách a to způsobem vhodným pro každého, kdo se

o matematické stroje zajímá, i když zná jen elementy z matematiky, fyziky a příbuzných oborů.

V prvních čtyřech kapitolách jsou charakterizovány všechny skupiny matematických strojů. Čtenář se také dovídá, pro jaký druh úloh je příslušný stroj určen. V páté až sedmé kapitole podává autor výklad o základních stavebních prvcích samočinných počítačů (relé, elektronky aj.), popisuje funkce hlavních částí strojů, způsob provádění aritmetických a jiných operací a konečně dává čtenáři představu o tom, jak se programují výpočty na samočinných počítačích. Každou složitou matematickou úlohu je totiž nutno rozložit na řadu operací, jako sčítání, násobení, apod., a tento program vložit do stroje.

V osmé kapitole je vylíčen historický vývoj matematických strojů. V deváté a desáté kapitole autor popisuje, v kterých oborech vědy, techniky a administrativy se užívá matematických strojů a k jakým účelům. Jsou tu i tak překvapující oblasti, jako lékařství, umění, hry, jazykověda. Na prvním místě je ovšem využití v technických výpočtech a v řízení výroby. Tak např. vypouštění umělých družic by bylo neproveditelné bez rychlých samočinných počítačů. Dále se mluví o kybernetice a její souvislosti s teorií matematických strojů. V budoucnosti budou nepochybně konstruovány stále složitější stroje, které budou víc a více nahrazovat a nahrazovat činnost lidí. V posledních dvou kapitolách jsou připojeny informace o strojích, vyráběných a vyvíjených v ČSSR, jakož i o příslušných pracovištích. Konečně je tam uveden seznam hlavních odborných časopisů a základních vědeckých spisů, z nichž lze čerpat zevrubné poučení o matematických strojích.

Knížka inž. J. Klíra je malého formátu, takže se hodí ke čtení i na cestách. Je psána srozumitelně a poutavě, výklad je provázen četnými obrázky a diagramy. Splní bezpochyby svůj účel jako informativní a přehledná pomůcka pro široký okruh čtenářů. Vydala Práce, Praha.

Evžen Jokl

* *

*

Konference o vyučování fyzice

V rámci jubilea svého stého trvání pořádá Jednota československých matematiků a fyziků ve dnech 2.—4. července 1962 konferenci s mezinárodní účastí na téma: Fyzika ve škole budoucnosti.

Zásadní referáty prvního dne přednesou ministr školství a kultury doc. dr. F. Kahuda, prof. KU v Praze akademik A. Kolman a prof. MFF KU v Praze dr. L. Zachoval, člen-korespondent ČSAV. Druhého dne přednesou k tematice „Nové pojetí školské fyziky“ referáty prof. MFF KU v Praze dr. E. Kašpar a prof. UK v Bratislavě dr. J. Vanovič.

Zbývající část konference bude věnována koreferátům a diskusi. Důležitou součástí konference bude návštěva výstavy fyzikálních a matematických pomůcek a besedy o pomůčkách na této výstavě. Pro účastníky konference bude zajištěno několik exkursí na různá fyzikální pracoviště.

J. Vachek

*Ministerstvo školství a kultury ve spolupráci
s Jednotou čs. matematiků a fyziků a s Národním
technickým museem uspořádá ve dnech 6. června
až 26. srpna 1962 v Národním technickém museu
v Praze - Letná výstavu*

matematika + fyzika
učební pomůcky

Výstava je součástí jubilejních akcí stoletého trvání Jednoty čs. matematiků a fyziků. Bude otevřena denně, mimo pondělí, od 10 do 17 hod.

Návštěvníci výstavy se seznámí s vývojem matematiky a fyziky v našich zemích od 14. století až po současnou dobu, s významnou průkopnickou prací Jednoty čs. matematiků a fyziků pro rozvoj matematiky a fyziky v Československu a s příspěvkem pro jejich světový rozvoj.

Ediční činnost Jednoty čs. matematiků a fyziků bude doložena vydanými odbornými vědeckými publikacemi a školními učebnicemi.

Rozvoj metod názorného vyučování ve fyzice a matematice bude dokumentován učebními pomůckami, které se na školách používaly, nyní používají nebo budou školám dodávány, které svépomocí na školách vznikají a vývojově ve Státním pedagogickém nakladatelství pro výrobu se plánují jako zdokonalená a nejnovější pomůcky domácí a zahraniční výroby.

Výstava má ukázat odborným pracovníkům, učitelům, mládeži i zájemcům z řad pracujících na důležitost matematických a fyzikálních znalostí pro další technický i kulturní pokrok ve vyspělé socialistické a vznikající komunistické společnosti.

Během výstavy budou denně od 15 do 16 hodin promítány matematické, fyzikální a technické školní filmy. Kromě toho budou uspořádány vždy v úterý ve dnech 19. 6., 26. 6., 3. 7. a 12. 7. od 15 hod. besedy o fyzikálních a matematických pomůckách spojené s jejich předváděním a s využitím moderních audiovizuálních pomůcek.

Současně si lze prohlédnout v Národním technickém museu stálou expozici vývoje fotografie, filmu a fotografické i filmové techniky.

Výstava je určena všem učitelům, zejména učitelům matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie a všem hromadným návštěvám školní mládeže, zvláště při červnových exkurzích a výletech.

Ústavům dalšího vzdělání učitelů a výchovných pracovníků se doporučuje, aby organizovaly v rámci odborných červencových exkurzí návštěvu výstavy.

Za komisi pro uspořádání výstavy:
J. Bartůněk

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ROČNÍK 40 - 1961/62

ČÍSLO 9

Číslo matriky: 4531

PRESIDENT ČESKOSLOVENSKÉ SOCIALISTICKÉ REPUBLIKY

propůjčuje časopisu

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

za vynikající dlouholetou propagaci matematiky a fyziky mezi
žactvem středních škol a za účinnou pomoc při zvyšování úrovně
vyučování těmito předměty

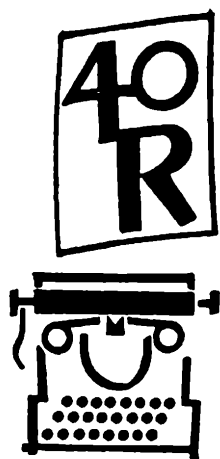
VYZNAMENÁNÍ ZA ZÁSLUHY O VÝSTAVBU

V Praze dne 17. dubna 1962

■

Ministr školství a kultury

v z. Dr. Křístek



František Veselý, Plzeň:

Jak vznikl náš časopis Rozhledy matematicko-fyzikální

Ještě před sto lety nevycházel v celém Rakousku žádný odborný časopis specializovaný jen pro vědecké nebo populárně vědecké články z oboru věd matematických a fyzikálních. Roku 1862 byl v Praze založen studentský Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky, z něhož roku 1869 vznikla reorganizací Jednota českých matematiků (JČM). O vývoji této odborné společnosti, z níž vznikla nyní JČMF, jsme vás informovali v článku, který byl otištěn v č. 7. a 8. našeho časopisu. V tomto článku vám chceme říci něco o tom, jak JČM, resp. JČMF přispěla ke vzniku časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

V listopadu roku 1869 navrhl universitní profesor František Josef Studnička (1836—1903) výboru JČM, aby Jednota začala vydávat v nezávazných lhůtách *Zprávy JČM*, v nichž by byly otiskovány odborné články, obsahy přednášek pořádaných JČM, referáty o odborných spisech z matematiky a fyziky, drobné zprávy vědecké i zprávy o spolkové činnosti, úlohy pro čtenáře apod. Tento návrh byl schválen na členské schůzi JČM dne 9. ledna 1870, když se F. J. Studnička zavázal, že uhradí případnou finanční ztrátu, kdyby vznikla při vydání první *Zprávy JČM*.

V březnu roku 1870 vyšla *První zpráva Jednoty českých matematiků* a byla přijata s velkým zájmem členů i širší veřejnosti. Téhož roku vyšla ještě *Druhá zpráva Jednoty českých matematiků* s obdobným obsahem jako *První zpráva*. Pozoruhodnou novinkou v ní bylo to, že jedna z matematicko-fyzikálních úloh, jejímž autorem byl August Seydler (1849—1891), později známý český teoretický fyzik a astronom, byla určena středoškolským žákům a označena jako tzv. „cenná úloha“, neboť na její řešení byla vypsána cena. V předepsané lhůtě zaslali jen tři žáci řešení této „cenné úlohy“ a jeden z nich, František Štejnár, žák VI. tř. kutnohorské reálky, byl za její řešení odměněn, i když jeho řešení nebylo zcela správné. Roku 1871 vyšla ještě *Třetí zpráva JČM*. Více jich již nevyšlo, neboť

Jednota se rozhodla pro vydávání pravidelně vycházejícího matematicko-fyzikálního časopisu.

Dne 17. března 1872 konala se schůze JČM na oslavu desátého výročí vzniku Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky, na níž její účastníci dostali do rukou I. číslo I. ročníku matematicko-fyzikálního časopisu, který byl prvním časopisem toho druhu v Rakousku. Na jeho titulním listě čteme: Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Dr. F. J. Studnička, profesor matematiky na c. k. universitě pražské, a vydává Jednota českých matematiků. Založení a vydávání tohoto časopisu patřilo k výsledkům obrozeneckých snah o pěstování matematických a fyzikálních věd českým jazykem, a proto v něm byly otiskovány příspěvky mladých českých vědeckých pracovníků. Počet a rozsah vědeckých článků převyšoval často počet a rozsah článků z elementární matematiky a fyziky, určených vysokoškolským i středoškolským studentům, kteří tvořili hlavní kádr odběratelů časopisu. Zájem středoškolských žáků o studium matematiky a fyziky byl povzbuzován též uveřejňováním úloh a otiskováním jejich vzorných řešení, která studenti redakci zasílali. Téměř ve všech ročnících byly otiskovány také „cenné úlohy“, jejichž řešitelé dostávali za správná řešení knižní odměny.

Prohlížíme-li nejstarší ročníky zmíněného časopisu, najdeme mezi řešiteli úloh jména mnohých středoškolských studentů, z nichž někteří se později stali známými vědeckými pracovníky v matematice nebo fyzice. Tak např. v roč. XII. (1883) je uveden jako řešitel rovnice

$$(x - a)(x - 3a)(x - 8a)(x + 4a) = b^4 - 35a^2b^2$$

též žák III. tř. gymnasia v Jindřichově Hradci František Nušl, jehož jméno pak nacházíme mezi řešiteli úloh po celou dobu jeho středoškolských studií. František Nušl (1867—1951), který byl později profesorem matematiky na české technice a praktické astronomie na české universitě v Praze, stal se významným organizátorem české astronomické vědy a konstruktérem některých přesných měřicích přístrojů, které se osvědčily při měřeních astronomických i geodetických. V ročníku XIII. (1884) najdeme mezi řešiteli úloh poprvé jméno Bohuslava Maška, žáka V. tř. gymnasia v Praze, který rozřešil mnoho úloh i v dalších ročnících časopisu otištěných. B. Mašek (1868—1956) byl později významným pracovníkem české fyziky i astronomie; napsal středoškolské učebnice fyziky a od roku 1920 redigoval astronomickou ročenku, která vycházela v nakladatelství Jednoty. O rok později se mezi řešiteli v časopise objevuje jméno Maškova spolužáka Vladimíra Nováka (1869—1944). Vl. Novák byl v letech 1902—1939 profesorem technické fyziky na české technice v Brně a zasloužil se o vzrůst vědecké i kulturní práce v Brně.

V ročníku XV. (1886) byla dána tato „cenná úloha“:

Do daného trojúhelníka vepsati jest obdélník, jehož úhlopříčna jest dána.

Tuto úlohu, jejímž autorem byl tehdejší předseda JČM Martin Pokorný (1836—1900), rozřešilo správně podle požadavku autora 18 studentů a dalších 6 studentů, mezi nimiž byl i Vladimír Novák, zaslalo správné řešení algebraické místo řešení geometrického, které požadoval autor. Mezi 10 odměněnými řešiteli je uveden Karel Petr, žák VI. tř. reál. gymnasia v Chrudimi, a František Nušl, jehož řešení metodou ekvipolencí označila redakce za skvělé. Karel Petr (1868—1950) vytvořil již na konci minulého století významné vědecké práce z matematiky a stal se naším slavným matematikem, který se v první polovině 20. století nejvíce zasloužil o rozvoj české matematické vědy. O rok později byla v roč. XVI. (1887) uveřejněna tato cenná úloha:

a) Budiž sestroyen trojúhelník, dána-li jedna jeho strana a , poloměr r kružnice opsané a poloměr ϱ kružnice vepsané.

b) Buďtež vypočítány neznámé strany, úhly a obsah tohoto trojúhelníku, dáno-li $a = 78, r = 65, \varrho = 28$.

Tuto úlohu navrhl Alois Strnad (1852—1911), v té době profesor reálky v Hradci Králové, který byl známým vědeckým pracovníkem v geometrii a později i vynikajícím pedagogem ve vyučování matematice. Mezi odměněnými řešiteli najdeme opět jméno Karla Petra i Vladimíra Nováka.

O vztahu tehdejších středoškolských studentů k JČM a o tom, jak silně a povzbudivě působily soutěžní úlohy na naše studenty, uvedu jako doklad vzpomínku z knihy Vladimíra Nováka *Vzpomínky a paměti* (Brno 1939), v níž na str. 406 napsal: Již jako student vyššího gymnasia na Novém Městě v Praze odbíral jsem Časopis pro pěstování matematiky a fyziky a řešil jsem úlohy, které bývaly připojeny na konci každého čísla. Představte si moji radost, když jsem v XV. ročníku Časopisu (1886) našel na str. 284 své jméno a svoje řešení úlohy 22. Dosud jako památku mám uschovány knihy, jež jsem dostal jako ceny za správná řešení zvláštních úloh.

Již v prvních dvou desetiletích trvání Časopisu uvažoval výbor JČM často o jeho obsahu, který v celém svém rozsahu nemohl být přiměřený chápavosti středoškolských žáků. Na valné schůzi JČM roku 1892 došlo z podnětu B. Maška k diskusi o obsahu a úpravě členského časopisu a výboru JČM byly dány směrnice pro jeho novou organizaci. Od roč. XXII., tj. od počátku škol. roku 1892/93, byly v hlavní části časopisu otiskovány vědecké články, kdežto pro články z elementární matematiky a fyziky byla určena Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, kterou mohli odebírat středo-

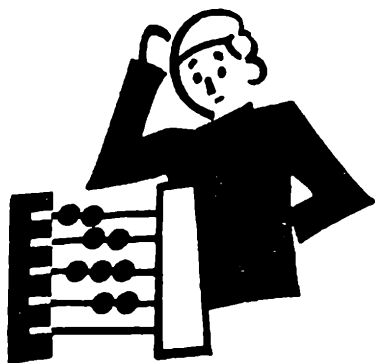
školští žáci, i když nebyli členy JČM. Zatímco v tomto školním roce měl Časopis asi 400 odběratelů, měla Příloha k Časopisu asi 1200 předplatitelů. Byla u žáků velmi oblíbena a jejich zájem podněcovaly zejména úlohy v Příloze otiskované. V každém ročníku Přílohy bylo otištěno zpravidla asi 40 úloh, a to většinou z matematiky. V každém ročníku byla jedna z úloh označena jako „cenná úloha“. Od ročníku XXXVI. (1907) byly úlohy již rozděleny do tří kategorií (matematika, deskriptivní geometrie, fyzika) a v každé z nich byly řešitelům podle počtu správně rozřešených úloh udělovány první, druhé a třetí ceny.

Když se po první světové válce podstatně zvětšil počet českých a slovenských středních i vysokých škol, vzrostl také počet členů Jednoty i počet odběratelů Přílohy k Časopisu. Od počátku škol. roku 1921/22 začala JČMF vydávat místo Přílohy k Časopisu samostatný časopis s názvem *R o z h l e d y m a t e m a t i c k o - p ř í r o d o v ě d e c k é*, který měl stejné poslání jako Příloha. Jejich prvním redaktorem byl Vladimír Ryšavý (1889—1950), vynikající středoškolský učitel, který si získal velmi dobrou pověst jako autor učebnic i jiných spisů matematicko-fyzikálních, a redigoval je devět let. Po něm je po dva roky řídil Jan Schuster (1880—1961), středoškolský profesor, který uveřejnil řadu vědeckých prací z geometrie. Od roč. XII. je po 14 let redigoval František Vyčichlo a Alois Wangler; v době druhé světové války přistoupili do jejich redakce ještě Zdeněk Pírko a Alois Urban a řídili je až do konce škol. roku 1945/46. František Vyčichlo (1905—1958) zasloužil se o rozvoj činnosti JČMF a zejména o to, že Jednota udržela svou poměrně rozsáhlou činnost i za druhé světové války, kdy český kulturní život trpěl nacistickou perzekucí. Jeho zásluhou nebylo přerušeno vydávání *Rozhledů*, které pak umožňovaly styk výboru JČMF s členstvem, když vydávání Časopisu bylo německými úřady roku 1941 zastaveno. Označení Vyčichlova matematická knihovna ČVUT připomíná nyní část jeho poválečných zásluh o obnovu českého vysokého technického školství v Praze.

Ročníky XXVI.—XXIX. *Rozhledů* redigovali Emil Kašpar, Zdeněk Pírko a Alois Urban, roč. XXX. Zdeněk Pírko a Alois Urban. Po ukončení XXX. ročníku přestala JČMF *Rozhledy* vydávat. Ročník XXXI. vydalo Přírodovědecké nakladatelství, další tři ročníky Nakladatelství Československé akademie věd. Když se nezdařil pokus nové redakce *Rozhledů* matematicko-přírodovědeckých zaměřit obsah časopisu na širší okruh čtenářů, zastavilo Nakladatelství ČSAV jejich vydávání. Když byla JČMF roku 1956 reorganizována, postarala se o obnovu vydávání *Rozhledů*. Od ročníku XXXV (1957) vychází tento časopis s názvem poněkud změněným *R o z h l e d y m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í* v Státním pedagogickém nakladatelství a JČMF pečuje o jejich obsah. Stará se o něj početná redakční rada, v níž je docent ČVUT Dr. Miroslav Menšík vedoucím a docent ČVUT Ota Setzer výkonným redaktorem.

JČMF i redakce Rozhledů usilovaly vždy o to, aby obsah Rozhledů byl přiměřený zájmům, chápavosti a vědomostem středoškolských žáků. Proto vždy pečlivě uvažovaly o všech kritických poznámkách k obsahu časopisu a o podnětech k jeho zlepšení. I nynější redakční rada uvítá každou vaši připomínku nebo návrh, který jí sdělíte.

Matematika



Inž. Vasil Čapla, Praha:

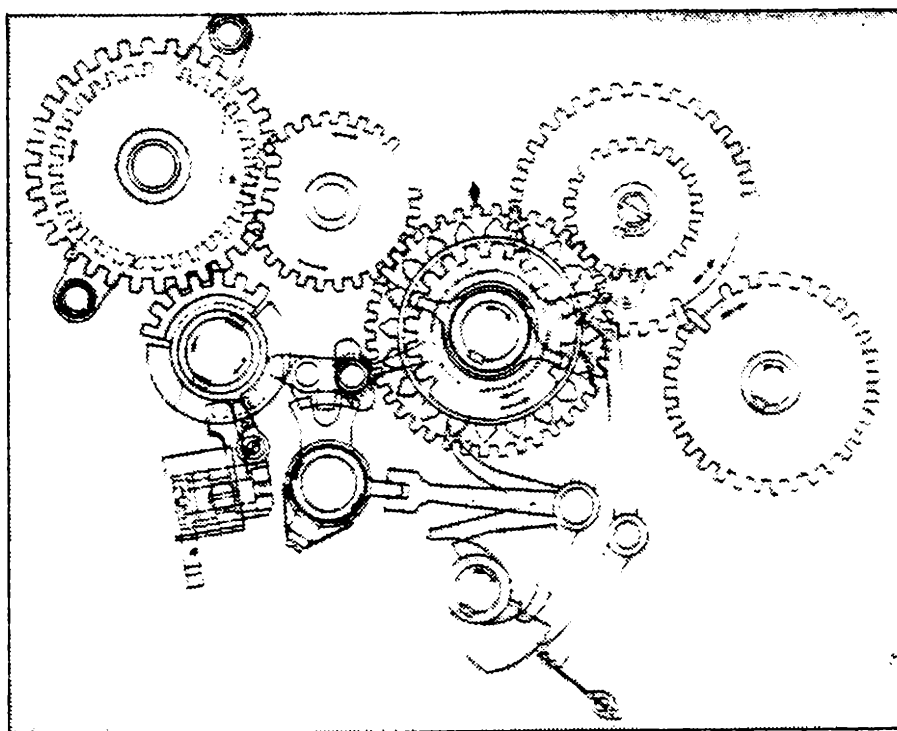
Vznik a vývoj reléových a elektronických samočinných počítačů

Úvod. Rozvoj vědy a techniky na začátku 19. stol. se již nespokojil v této době s existujícími stolními počítacími stroji, jako jsou Hahnovy kalkulací stroje (1778), nebo Thomasovy aritmetry (1820), ale nutně potřeboval takové počítací stroje, které by dokázaly zvládnout již tehdy rozsáhlé a úmorné výpočty. Ve čtyřicátých letech 19. stol. zabýval se anglický matematik Babbage (čti bebič) myšlenkou sestavit počítač pro mechanické výpočty a tisk hodnot polynomů, což se mu podařilo a stroj vypočítával čísla na 8 desetinných míst. Asi r. 1842 se rozhodl sestavit počítač zvaný Analytical Engine (čti aenelitykl endžin), který by byl s to, na základě vloženého programu samočinně zpracovávat informace vstupní na informace výstupní (obr. 1). Podle projektu se měl Babbageův počítač skládat stejně tak jako dnešní moderní samočinné počítače z pěti částí, a to ze vstupu, výstupu, paměti, aritmetické jednotky, kterou nazval „mill“ a řadiče. Zajímavým způsobem řešil Babbage vstup informací do počítače pomocí děrných štítků, používaných již Jacquardem (čti žakárem) k programování jeho tkalcovského stavu. Většina dnešních moderních samočinných počítačů používá děrných štítků jako prostředku vstupu informací. I když se Babbage plně věnoval jen stavbě svého počítače, a proto nekonal přednášky na universitě v Cambridge, nepodařilo se mu dílo dokončit, nebo tento velmi složitý stroj byl stavěn na mechanickém principu ozubených koleček. V této době Henry vynalezl relé; nebyly však propracovány reléové obvody.

Babbageův syn H. P. Babbage pokračoval ve stavbě počítače, který jeho otec nedokončil. Podařilo se mu dokončit jen stavbu sčítacího mechanismu. Nedokončený Babbageův počítač se nachází v Science Museum v Londýně.

1. Reléové počítače

Na základě dlouholetých zkušeností s reléovými obvody, zejména ve spojovací technice, vznikl ve třicátých letech nový vědní obor - teorie reléových obvodů, který pak umožnil stavbu reléových počítačů. V tomto novém vědním oboru vynikl jako jeden z prvních Japonec A. Nakasima, jehož teoretické práce o reléových obvodech pocházejí z let 1935 až 1938. To bylo snad příčinou, že první reléový počítač byl sestaven v r. 1935 v J a p o n s k u, a to techniky společnosti FUJI, zabývající se stavbou zařízení a přístrojů spojovací techniky. Tento počítač byl určen pro výpočty, spojené s provozem telefonní centrály.



Obr. 1

Zdá se, že národní katastrofa, spojená se svržením atomových bomb dne 9. a 12. srpna 1945 na Hirošimu a Nagasaki, měla za následek přerušení výzkumných a vývojových prací stavby reléových počítačů, neboť dr. Goto a dr. Kamamiya z Elektrotechnické laboratoře se teprve od r. 1948 zvláště zabývali problémem stavby reléových počítačů. První pokusný model byl postaven až v prosinci 1952 a má název podle počátečních písmen Elektrotechnické tokijské laboratoře ETL, Mark I. Za tři roky následoval stroj ETL, Mark II, jenž je velkým reléovým počítačem; tato firma postavila ještě dalších 12 počítačů.

V N ě m e c k u se zabýval tímto problémem inženýr Konrad Zuse, který v r. 1934 končil Vysokou školu technickou v Berlíně. Pracoval rok jako stavební inženýr. Jako 25letý muž se rozhodl postavit reléový počítač. V bytě svých rodičů si zřídil laboratoř a práci začal tím, že si koupil u vetešníka několik relé. Za podpory některých jeho přátel stavba slibně pokračovala. Zuse si vzal za základ stavby počítače koncepci propagovanou již Leibnitzem, a to koncepci programového řízení a binární soustavy. První pokusný model reléového počítače byl dokončen v r. 1938 a byl pojmenován Z-1. Tento stroj měl mechanickou kolíčkovou paměť. Operace a řazení sledu operací byly řízeny vestavěným programem, vybaveným telefonními voliči. V době druhé světové války zřídil Zuse společnost, která postavila první dokonalý reléový samočinný počítač s programovým řízením pro Ústředí letecké výzkumu. Tento stroj Z-3 byl zničen zásahem letecké pumy. Firma Zuse, postavila v únoru r. 1945 další stroj Z-4, který byl umístěn na venkově. V r. 1948 byl stroj Z-4 prodán katedře aplikované matematiky Federální vysoké školy technické v Curychu. V poslední době byl zakoupen a převezen do Mnichova, kde je umístěn v museu. Pro účely optické firmy Leitz ve Wetzlaru byl v r. 1953 postaven stroj Z-5. Dalším zdokonalením Z-5 vznikl stroj Z-11, jehož tři kusy jsou instalovány v naší republice.

V e S p o j e n ý c h s t á t e c h a m e r i c k ý c h přikročil v r. 1937 ke stavbě reléového počítače Howard Aiken, profesor Harvardské university, a to ve spolupráci s firmou International Business Machine Corporation, používající zkratky písmen IBM, která v této době vyráběla děrnoštítkové stroje. Tento stroj, řízený instrukčním řádem, byl dokončen r. 1944 a znamenal přechod od děrnoštítkových strojů k moderním samočinným počítačům. Je znám pod názvem MARK I (psáno velkými písmeny, neboť později se objevil v Anglii stroj Mark I, psáno malými písmeny). Vstup informací se děl pomocí děrných štítků, nebo děrné pásky, výstup pomocí děrných štítků, nebo dvou psacích strojů. Pracovní rychlost, sčítání 3 s (vteřiny), násobení 7 s, dělení 60 s. V r. 1945 byl dokončen druhý stroj MARK II, který již měl milisekundovou (tisícina vteřiny) rychlost.

Druhým pracovištěm v USA, kde se stavěly reléové počítače jsou laboratoře firmy Bell Telephon. Se stavbou malého reléového počítače používajícího binárního kódu, bylo započato v r. 1938 a stavba byla dokončena r. 1940. V jednoročních lhůtách byly postaveny další tři stroje pro použití v topné kontrole. Avšak již v r. 1944 postavila tato firma velký reléový samočinný počítač a pak byly postaveny ještě další takové stroje. Zatím co Aikenovy stroje MARK I a II používaly binárního kódu, velké stroje firmy Bell Telephon používaly bikvinárního (dvoupětkového) kódu.

A n g l i e převzala zkušenosti USA a postavila pod vedením A. D. Bootha, profesora londýnské university, reléový počítač ARC (Automatic

Relay Computer, tj. automatický reléový počítač), který je zjednodušenou verzí Aikenova stroje MARK I, avšak s 250krát větší pracovní rychlostí. Stroj ARC byl vybaven bubnovou pamětí. Kopie stroje ARC byla postavena v Amsterdamu v Holandsku pod názvem ARRA.

Švédsko. Na základě zkušeností, získaných v USA a v Anglii, byl postaven v r. 1950 ve Stockholmu velký reléový počítač BARK, tj. Binar Automatic Relay Calculator. Program může obsahovat až 840 instrukcí, nastavovaných ručně za pomoci přepínačů na řídicím pultu.

Československo. V Ústavu matematických strojů ČSAV, který byl v r. 1958 přeměněn na Výzkumný ústav matematických strojů, byl postaven od r. 1952 do r. 1958 velký reléový samočinný počítač SAPO. Tento stroj vyniká především dokonalou kontrolou výpočtů, neboť má tři aritmetické (operační) jednotky, které současně počítají každou úlohu trojmo. Kapacita bubnové paměti je 1024 slov, skládajících se z 32 binárních číslic (0 nebo 1). Vypočítá 3 až 5 operací za vteřinu, což se považuje za velmi pomalý stroj.

(Pokračování)

Inž. Eduard Kriegelstein, Praha:

Úvod do integrálního počtu

1. Primitivní funkce čili neurčitý integrál

V diferenciálním počtu jsme poznali, že jeho hlavním úkolem bylo určení derivace dané funkce. Položme si nyní otázku, zdali bychom uměli najít k dané derivaci onu původní funkci, z níž derivováním vznikla.

Je-li např. $y' = 2x$, uhodneme snadno, že $y = x^2$. Řekněme si však hned, že tato úloha, najít k derivaci neznámou původní funkci, je nesrovnatelně obtížnější, než určit derivaci dané funkce.

Označme obecně hledanou funkci $F(x)$. Pro její derivaci pak platí

$$F'(x) = f(x)$$

kde $f(x)$ je daná funkce definovaná v intervalu $(a; b)$.

Jestliže taková funkce $F(x)$ existuje, nazýváme ji *primitivní funkce k funkci $f(x)$* , nebo také *neurčitý integrál funkce $f(x)$* .

Označujeme ji

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Symbol $\int f(x) dx$ čteme „integrál $f(x) dx$ “.

Úlohu najít primitivní funkci, můžeme chápat také tak, že k diferen-

ciálu $f(x) dx$ hledáme původní funkci, čímž se nám také osvětlí smysl zápisu

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Je třeba zdůraznit, že dx tvoří neoddělitelnou část integrálního symbolu a říká nám, podle které proměnné se integruje. Existují totiž integrály funkcí více proměnných, kde je to třeba jasně vytknout. V integrálu $\int uv^2 dv$ integrujeme podle proměnné v , kdežto v integrálu $\int uv^2 du$ integrujeme podle u .

Připomeňme si ještě, že integrovaná funkce se vkládá vždy mezi $\int$ a dx . Vždycky píšeme např. $\int 3x^2 \cos^3 x dx$ a ne třeba $\int 3x^2 dx \cos^3 x$ apod. Je tedy dx vždycky poslední částí zápisu integrálu.

Nyní již můžeme vyslovit definici primitivní funkce čili neurčitého integrálu.¹⁾

Definice 1. *Primitivní funkce čili neurčitý integrál $F(x)$ k dané funkci $f(x)$ je taková funkce $F(x)$, jejíž derivace $F'(x)$ je daná funkce $f(x)$.*

Píšeme buď

$$F'(x) = f(x) ,$$

nebo

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Obě poslední rovnice mají tentýž význam.

Připomeňme si, že funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $(a; b)$, protože má v každém bodě intervalu $(a; b)$ derivaci $F'(x) = f(x)$.

Uvažujme nyní funkci $F_1(x) = x^2$ a $F_2(x) = x^2 + c$. Obě funkce mají tutéž derivaci $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$. Usuzujeme proto, že k dané funkci $f(x) = F'(x)$ existuje nesčíslné množství primitivních funkcí.

Bude-li k funkci $f(x)$ jedna z primitivních funkcí $F(x)$, pak všechny primitivní funkce lze vyjádřit ve tvaru $F(x) + c$, kde c je *integrační konstanta*.

Zvolme si několik primitivních funkcí pro různé integrační konstanty, např. pro

$$\begin{array}{llll} c = -2 \text{ je } & F(x) = x^2 - 2 & c = 1 & \text{je } F(x) = x^2 + 1 \\ c = -1 \text{ je } & F(x) = x^2 - 1 & c = 2 & \text{je } F(x) = x^2 + 2 \\ c = 0 & \text{je } & & F(x) = x^2 , \end{array}$$

Zakreslíme-li primitivní funkce $F(x)$, vidíme, že jsou to shodné paraboly o osách v ose y , posunuté ve směru osy y .

Z toho, co jsme si uvedli, vidíme, že hlavním úkolem integrálního počtu je určit k funkci dané funkci primitivní. Při tom nikdy neopomeneme uvést interval, v němž je primitivní funkce definována. K tomu si bez důkazu uvedme větu.

Věta 1. *K funkci spojitě v intervalu $\langle a; b \rangle$ existuje vždy primitivní funkce.*

¹⁾ Neurčitý integrál má svůj název „neurčitý“ odvozený právě od neurčitosti této integrační konstanty.

2. Základní vztahy pro výpočet primitivních funkcí

V diferenciálním počtu jsme se naučili počítat derivace některých jednoduchých funkcí. Vyjděme nyní z těchto poznatků a odvodme si některé jednoduché věty pro integrování.

Víme např., že pro $n \neq -1$ je

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$$

Položíme-li $f(x) = x^n$ je $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. Můžeme proto psát

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Zbývá ještě určit definiční obor. Je zřejmé, že je-li n číslo přirozené, můžeme za x dosadit libovolné číslo. Je-li n číslo celé záporné různé od -1 , můžeme za x dosadit všechna čísla kromě nuly. Není-li n celé číslo, můžeme za x dosadit jen kladná čísla.

Celkem tedy je

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \begin{cases} \text{v intervalu } (-\infty; \infty) \text{ pro } n \text{ přirozené;} \\ \text{v intervalech } (-\infty; 0) \text{ a } (0; \infty) \text{ pro } n \text{ celé zápor-} \\ \text{né, ale různé od } -1; \\ \text{v intervalu } (0; \infty) \text{ není-li } n \text{ celé číslo.} \end{cases}$$

P ř í k l a d 1. $\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + c$ v intervalu $(-\infty; \infty)$.

P ř í k l a d 2. $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$ v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

P ř í k l a d 3. $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + c$ v intervalu $(0; \infty)$.

P ř í k l a d 4. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{5}} dx = \frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}} + c$ v intervalu $(0; \infty)$.

Máme-li integrovat funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, připomeneme si, že funkce $F(x) = \lg x$ má za derivaci $F'(x) = \frac{1}{x}$. Avšak také $F(x) = \lg(-x)$ má derivaci $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Spojíme-li oba výsledky, je

$$\int \frac{1}{x} dx = \lg |x| + c$$

pro všechna $x \neq 0$.

P ř í k l a d 5. Máme integrovat $\int \frac{dx}{x+1}$ pro $x \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \lg |x+1| + c.$$

Integrační konstantu c můžeme položit rovnou logaritmu nějakého čísla $k > 0$. Výsledek pak můžeme upravit takto:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \lg |x+1| + \lg k = \lg k |x+1|$$

O správnosti výsledku se přesvědčíme tím, že výslednou funkcí $F(x) = \lg k |x+1|$ derivujeme a dostaneme integrovanou funkci

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Je-li

$$x+1 > 0, \text{ je } |x+1| = x+1$$

Pak

$$(\lg k |x+1|)' = \frac{1}{k(x+1)} \cdot k = \frac{1}{x+1}$$

Je-li

$$x+1 < 0, \text{ je } |x+1| = -x-1$$

Pak

$$(\lg k |x+1|)' = [\lg k(-x-1)]' = \frac{1}{k(-x-1)} \cdot k \cdot (-1) = \frac{1}{x+1}.$$

Kontrola ukázala správnost výpočtu.

Z diferenciálního počtu si pamatujeme, že $(e^x)' = e^x$. Je tedy

$$\int e^x dx = e^x + c$$

pro každé x .

Na základě znalostí derivací goniometrických funkcí dostaneme tyto jednoduché výsledky

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Oba integrály jsou definovány pro každé x .

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + c$$

je definován pro všechna x , pro něž je $\sin x \neq 0$, tj. v intervalech $(k\pi; (k+1)\pi)$, kde k je celé číslo.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + c$$

je definován pro všechna x , pro něž je $\cos x \neq 0$, tj. v intervalech

$$\left(\frac{1}{2} (2k - 1) \pi; \frac{1}{2} (2k + 1) \pi \right).$$

(Pokračování)

D r . R o b e r t K a r p e , B r n o :

Iracionální číslo není rovno podílu dvou čísel celých

V matematické literatuře se trvale uvádí klasická forma důkazu s případem $\sqrt{2}$. Podávám zde obecnější a současně stručnější variantu.

Vyjdeme z věty, že jedno a totéž přirozené číslo w_i lze rozložit jediným způsobem do sestupně uspořádaného prvočíselného součinu

$$w_i = a_i^{\alpha_i} \cdot b_i^{\beta_i} \cdot n_i^{\nu_i} \quad (1)$$

kde $a_i > b_i > \dots > n_i$ jsou prvočísla,
 $\alpha_i, \beta_i, \dots, \nu_i$ jsou čísla přirozená.

Nechť p je libovolné prvočíslu. Nechť κ je libovolné přirozené číslo různé od jedné.

Dokážeme sporem, že iracionální číslo $\sqrt[\kappa]{p}$ nelze vyjádřit podílem dvou nesoudělných čísel přirozených.

Předpokládejme, že je to možné

$$\sqrt[\kappa]{p} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (2)$$

Pak však též musí platit

$$p w_2^{\kappa} = w_1^{\kappa},$$

čili vzhledem k (1)

$$p \cdot a_2^{\kappa \alpha_2} \cdot b_2^{\kappa \beta_2} \cdot n_2^{\kappa \nu_2} = a_1^{\kappa \alpha_1} \cdot b_1^{\kappa \beta_1} \cdot n_1^{\kappa \nu_1} \quad (3)$$

Z hořejší věty je však patrné, že relace (3) je nesprávná: levá strana se nemůže rovnat pravé, neboť jde o dva různé prvočíselné rozklady. Například prvočíslu a_1 z rozkladu na pravé straně nemůže být obsaženo v rozkladu na levé straně, vzhledem k tomu, že přirozená čísla w_1, w_2 jsou nesoudělná. Ani kdybychom položili $p = a_1$, nedosáhli bychom v relaci (3) shodu obou rozkladů, neboť $\kappa \alpha_1 \neq 1$.

Dospěli jsme tudíž ke sporu, z něž vyplývá že $\sqrt[\kappa]{p}$ nelze vyjádřit podílem dvou (nesoudělných) přirozených čísel.

Největší a nejmenší hodnota kvadratické celistvé funkce

(Dokončení)

Příklad 2. Který z rotačních válců s daným obvodem osového řezu $o = 100$ cm má plášť největšího obsahu?

Označíme-li poloměr válce r a jeho výšku v , dostaneme tuto podmínku (osovým řezem válce je obdélník)

$$2r + v = \frac{o}{2}. \quad (3)$$

Obsah pláště válce, který má být maximální, je

$$p = 2\pi r v \quad (4)$$

Vyloučením neznámé v z rovnice (3) a dosazením do rovnice (4) vyjde

$$p = 2\pi r \left(\frac{o}{2} - 2r \right) = -4\pi r^2 + \pi o r$$

Je tedy obsah pláště rotačního válce kvadratickou celistvou funkcí poloměru. Zachováme-li označení koeficientů jako v případě C), je $a = -4\pi$, $b = \pi o$, $c = 0$. Maximální hodnota nastane pro $r = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{o}{-8}\right) = \frac{o}{8}$, takže průměr válce je $2r = \frac{o}{4}$. Protože výška $v = \frac{o}{2} - 2r = \frac{o}{2} - \frac{o}{4} = \frac{o}{4}$, je vidět, že úloha má řešení pro takový rotační válec, jehož osovým řezem je čtverec (tzv. válec rovnostranný).

Příklad 3. Vyjádříme číslo m ve tvaru součtu dvou čísel tak, aby součet čtverců těchto čísel byl minimální.

Označíme-li obě hledaná čísla po řadě x , y , musí platit

$$x + y = m \quad (5)$$

a číslo

$$z = x^2 + y^2 \quad (6)$$

má být nejmenší.

Ze vztahu (5) vychází $y = m - x$ a po dosazení do (6) vyjde

$$z = x^2 + y^2 = x^2 + (m - x)^2 = 2x^2 - 2mx + m^2$$

Je tedy číslo z kvadratickou celistvou funkcí x . Zde je $a = 2$, $b =$

$= -2m$, $c = m^2$. Protože číslo a je kladné, nastane skutečně minimální hodnota čísla z pro $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2m}{4} = \frac{m}{2}$. Hledaná čísla, která vyhovují podmínce úlohy, jsou $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}$.

Příklad 4. Z drátu dlouhého 120 cm se má vytvořit drátěný model pravidelného čtyřbokého hranolu. Jak dlouhá má být podstavná hrana, aby povrch P hranolu byl největší?

Označíme-li podstavnou hranu x (podstavou je čtverec) a pobočnou hranu y , máme tyto podmínky

$$8x + 4y = 120, \quad (7)$$

$$P = 2x^2 + 4xy$$

Z první rovnice vychází

$$y = 30 - 2x.$$

Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice ve vztahu (7). Tím dostaneme

$$P = 2x^2 + 4x \cdot (30 - 2x) = -6x^2 + 120x.$$

Povrch hranolu je tedy kvadratickou celistvou funkcí podstavné hrany x . Zde je $a = -6$, $b = 120$, $c = 0$. Maximální hodnota povrchu P nastane pro $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-12} = 10$. Úlohu splní takový čtyřboký hranol, jehož podstavná hrana je $x = 10$ cm. Pobočná hrana je $y = 30 - 2x = 10$ cm, takže jde o krychli s hranou 10 cm.

Příklad 5. Kus drátu délky u cm je třeba rozdělit na dvě části, z kterých první se ohne do tvaru čtverce a druhá na tvar rovnostranného trojúhelníka. Na kterém místě je třeba drát rozdělit, aby součet obsahů obou obrazců byl minimální?

Nechť ta část drátu, která připadá na obvod rovnostranného trojúhelníka je $3x$, takže jeho strana je x . Potom na obvod čtverce připadá délka $u - 3x$, takže strana čtverce je $\frac{u - 3x}{4}$. Vyjádříme-li podmínku pro součet obsahů obou obrazců, dostaneme

$$P = \left(\frac{u - 3x}{4}\right)^2 + \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Po úpravě vyjde

$$P = \frac{9 + 4 \cdot \sqrt{3}}{16} x^2 - \frac{3u}{8} x + \frac{u^2}{16}.$$

Součet obsahů P je opět kvadratickou celistvou funkcí strany trojúhelníka. Zde je $a = \frac{9 + 4 \cdot \sqrt{3}}{16}$, $b = -\frac{3u}{8}$, $c = \frac{1}{16} u^2$. Protože je číslo a

kladné, nastane pro součet obsahů P skutečně minimální hodnota, a to pro $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3u}{9 + 4\sqrt{3}}$, což je strana hledaného rovnostranného trojúhelníka. Drát je třeba rozdělit na takovém místě, které má od jednoho konce drátu vzdálenost $3x = \frac{9u}{9 + 4\sqrt{3}}$ cm.

Máme-li tedy řešit nějakou úlohu o nalezení extrémní hodnoty, vyjádříme dané i hledané podmínky početně. Po úpravách dostaneme jistou funkci. Je-li tato funkce kvadratická celistvá, víme, jak si v tomto případě počínat. To bylo právě úkolem a cílem článku. Je samozřejmé, že v řadě jiných případů dostaneme funkci, která není kvadratická celistvá, ale složitější. Takový případ zde neprobíráme. Jenom upozorníme na to, že v matematice existuje postup, který řeší otázku nalezení extrémních hodnot daleko úplněji, přesněji a dokonaleji, a to nejen pro kvadratickou celistvou funkci, ale i pro jiné funkce. Kdo bude studovat matematickou analýzu, pozná sám takový postup.

Konečně upozorníme na to, že problém nalezení extrémních hodnot kvadratické celistvé funkce lze řešit i graficky. K tomu je však třeba odvodit a dokázat, že grafem kvadratické celistvé funkce je jistá parabola. Extrémní hodnota je vlastně y souřadnice vrcholu paraboly a nastane pro takové číslo x , které je x souřadnicí vrcholu. Každý jistě poznal, že jde o grafické znázornění v pravoúhlém systému souřadnic, o němž pojednávala řada článků *doc. E. Kraemera* v loňském ročníku *R o z h l e d ů*. Kdybychom volili tento postup řešení, dostali bychom se k užití extrémních hodnot dosti pozdě, a to by věc jen komplikovalo. Jistě si mnozí z vás tuto grafickou část doplní, i když ne třeba úplně¹⁾.

Nakonec připojíme několik cvičení, která poslouží k zopakování a k vlastní práci. V závorce je uveden výsledek, resp. návod k řešení.

1. Vyjádřete číslo a ve tvaru součtu dvou čísel tak, aby jejich součin byl největší. $\left(a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$

2. V trojúhelníku ABC je úhel $\alpha = 30^\circ$ a součet stran, které svírají tento úhel, je $a = 100$ cm. Jak dlouhá musí být strana $c = AB$, aby obsah trojúhelníka byl největší? (Vypočtete výšku na stranu c užitím funkce $\sin \alpha$. Vyjde obsah $P = \frac{bc}{4}$, potom postupujte jako v ostatních případech - výsledek: $c = 50$.)

3. Okno má tvar obdélníka zakončeného nahoře půlkruhem, jehož průměr je roven základně obdélníka. Jak dlouhá má být základna

¹⁾ Grafické znázornění kvadratické funkce celistvé je obsaženo např. v učebnici algebry pro 9. až 11. ročník JŠŠ, která byla vydána SPN v roce 1954.

obdélníka, má-li mít okno největší obsah. Obvod okna má být 2 m.

$$\left(\frac{4}{4 + \pi} \right)$$

4. Těleso se skládá z rotačního válce, na kterém je postaven rotační kužel o téže podstavě. Úhel při vrcholu kužele je $\alpha = 60^\circ$. Obvod osového řezu je 100 cm. Jak velký má být poloměr válce, aby plášť tělesa měl největší obsah? (12,5 cm)

5. Do rovnoramenného trojúhelníka se základnou a a výškou na základnu h je vepsán obdélník. Jaká má být výška obdélníka, aby jeho obsah byl největší? (Výška obdélníka se musí rovnat polovině výšky trojúhelníka.)

J i n d ř i c h P a l á t, Olomouc:

Archimedova metoda výpočtu objemů rotačních těles

Určení obsahů rovinných útvarů a objemů těles je jedna z nejstarších úloh, kterou položil matematické praktický život. Dnes se tyto úlohy řeší nejčastěji pomocí integrálního počtu. Hlavní myšlenky integrálního počtu, spojené s pojmem limity, byly poprvé přesně formulovány v 17. století Newtonem (1642—1727) a Leibnitzem (1646—1716). Tím zajímavější je, že již daleko dříve řešili někteří matematikové tyto úlohy bez znalostí integrálního počtu.

Seznámíme čtenáře s jednou metodou, která pochází od řeckého matematika a mechanika Archimeda (asi roku 287—212 před n. l.). Tato metoda se opírá o poznatky z mechaniky (statiky) a mimo jiné umožňuje výpočet objemů rotačních těles. Je třeba však upozornit na to, že z matematického hlediska není tato metoda bez nedostatků. Mnohé, co se v metodě předpokládá, bylo by totiž třeba přesně dokázat. Tohoto nedostatku si byl vědom i Archimedes. Přes to si své metody cenil a díval se na ni jako na prostředek, pomocí kterého lze získat určité poznatky, jež mohou být přesně dokázány.

1. Mějme dvě rotační tělesa A a B , která leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami α a β , jejichž vzdálenost je h . Předpokládejme, že tělesa mají s rovinami α , β aspoň jeden společný bod (obr. 1). Každá rovina γ , rovnoběžná s β , ve vzdálenosti x ($0 \leq x \leq h$) od β (obr. 1), protíná tělesa A , B v řezech, které označíme $A(x)$ a $B(x)$. Každý řez $A(x)$ a $B(x)$ budeme nazývat e l e m e n t e m t ě l e s a A , B . Řezy v rovině γ $A(x)$ a $B(x)$ nazýváme pak odpovídajícími si elementy těles A a B . Odtud usuzujeme, že

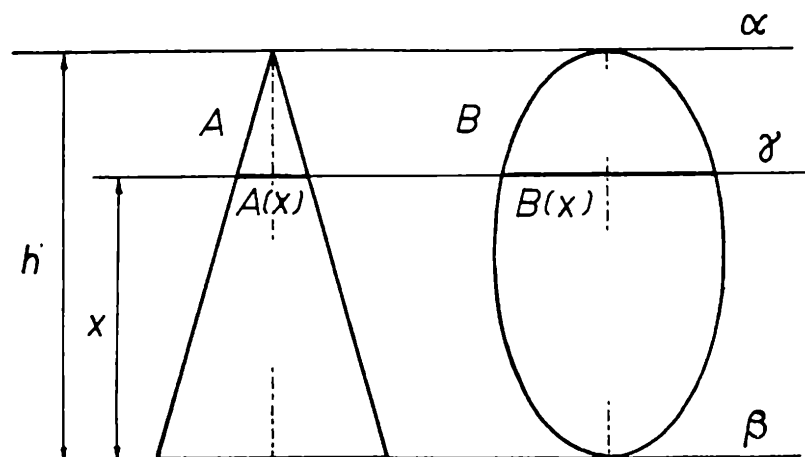
každé rotační těleso je složeno ze všech svých elementů. (Věta 1).

2. Ve fyzice se učí tato věta o rovnováze těles na dvojitratné páce:

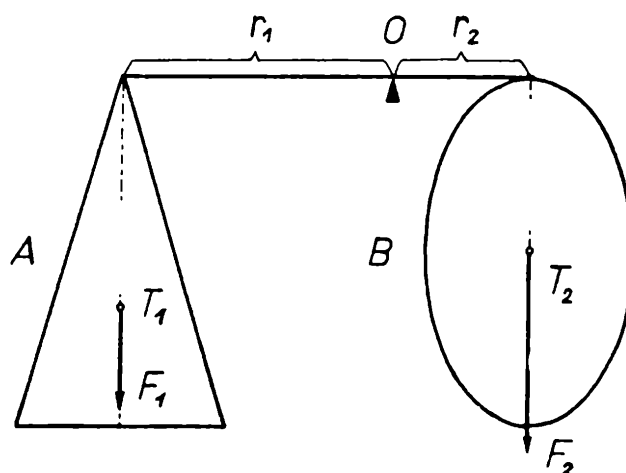
Páka zůstává v klidu nebo v rovnoměrném otáčivém pohybu, rovná-li se moment síly momentu břemene.

Jestliže na ramenech dvojitratné páky jsou zavěšena dvě tělesa A a B , která jsou upevněna ve svých těžištích T_1 a T_2 , potom rovnováhu na páce lze vyjádřit rovností.

$$F_1 r_1 = F_2 r_2, \quad (1)$$



Obr. 1



Obr. 2

kde $r_1(r_2)$ značí rameno síly $F_1(F_2)$. Přitom $F_1(F_2)$ je váha tělesa $A(B)$, jak vidíme na obr. 2. Jsou-li obě tělesa z téže stejnorodé látky o specifické hmotě s , a je-li objem tělesa $A(B)$ roven $V_1(V_2)$, potom

$$F_1 = V_1 s g \quad F_2 = V_2 s g$$

kde g značí tíhové zrychlení. Po dosazení do rovnosti (1) dostaneme

$$V_1 s g r_1 = V_2 s g r_2$$

a po vydělení $s g$

$$V_1 r_1 = V_2 r_2 \quad (2)$$

Upravíme-li předcházející rovnost na tvar

$$r_1 : r_2 = V_2 : V_1$$

usuzujeme, že

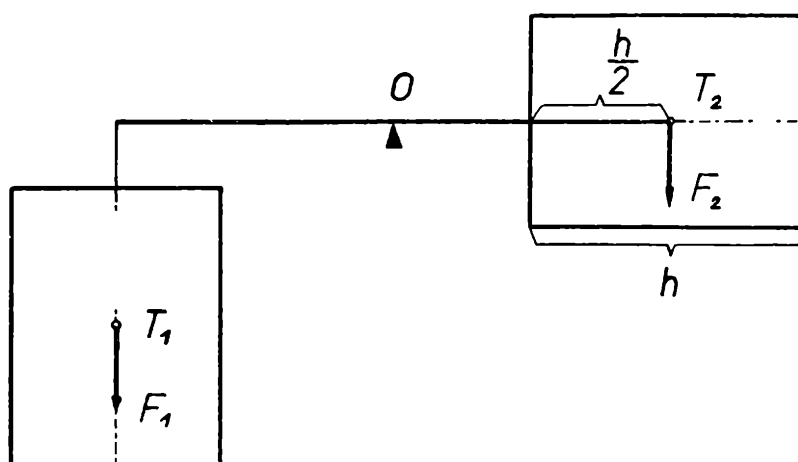
každá dvě rotační tělesa upevněná v těžišti jsou na dvojzvratné páce v rovnováze, jsou-li vzdálenosti těžišť od osy páky nepřímo úměrné objemům těles. (Věta 2.)

Zjednodušíme si další úvahy tak, že budeme uvažovat za rotační tělesa A, B dva kolmé rotační válce o výšce h , ze stejnorodé látky o specifické hmotě s . Podstavy válců jsou kruhy, obsah první podstavy označme p_1 , obsah druhé podstavy p_2 . Objem prvního válce je tedy $V_1 = hp_1$ a druhého $V_2 = hp_2$. Dosadíme-li V_1 a V_2 do rovnosti (2), dostáváme

$$hp_1r_1 = hp_2r_2$$

a po vydělení h , rovnost

$$p_1r_1 = p_2r_2$$



Obr. 3

která vyjadřuje vlastně podmínku rovnováhy libovolných dvou odpovídajících si elementů prvního a druhého válce (u každého válce jsou totiž všechny elementy sobě rovny).

Dále si připomeňme, že působí-li na rameno páky svou vahou kolmý rotační válec ze stejnorodé látky tak, že jeho osa splývá s ramenem páky (obr. 3 - válec na pravém rameni páky), je výslednice působících sil rovna váze válce a její působíště je v těžišti válce. Těžiště válce je jeho střed souměrnosti, tj. střed spojnice středů podstav.

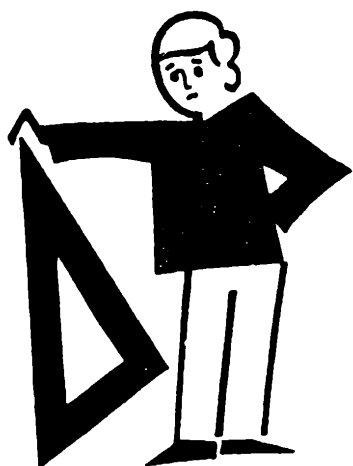
Vyjdeme-li z poznatků získaných v uvedeném případě rovnováhy dvou rotačních válců na dvojzvratné páce, snadno pochopíme, že Archimedes došel k těmto základním poznatkům:

Jsou-li dvě rotační tělesa v rovnováze, jsou i odpovídající si elementy těles v rovnováze. (Věta 3.)

Jsou-li každé dva odpovídající si elementy rotačních těles v rovnováze, pak jsou i příslušná tělesa v rovnováze. (Věta 4.)

(Pokračování)

Deskriptivní geometrie



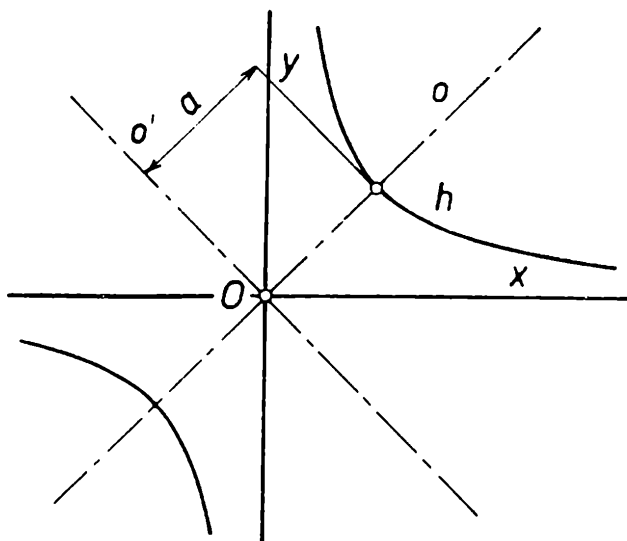
Josef Novák, ČVUT, Praha:

Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly

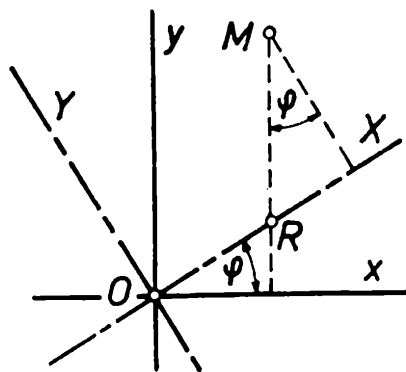
V tomto článku ukážeme některé zajímavé vlastnosti rovnoosé hyperboly, které mají výhodné konstruktivní důsledky. Vyjdeme z předpokladu, že jste se s rovnoosou hyperbolou již seznámili při grafickém znázornění nepřímé úměrnosti

$$xy = k \quad (k \neq 0) \quad (1)$$

v pravoúhlé souřadnicové soustavě $(x; y)$. Jak známo, jsou osy souřadnic x, y asymptotami této hyperboly a délka její poloosy je $a = \sqrt{2|k|}$. Na obr. 1 je narysována rovnoosá hyperbola h pro $k > 0$.



Obr. 1



Obr. 2

Zabývejme se nejdříve analytickým vyjádřením této hyperboly v nové soustavě souřadnic $(X; Y)$, jejíž osy souřadnic X a Y jsou totožné s hlavní a vedlejší osou hyperboly h . Je zřejmé, že novou soustavu souřadnic $(X; Y)$ dostaneme otočením původní soustavy $(x; y)$ kolem počátku O o úhel $\frac{\pi}{4}$.

Najdeme nyní vztahy mezi souřadnicemi téhož bodu v obou soustavách souřadnic, přičemž úhel otočení budiž φ . Zcela jasný případ splývajících os X a y nebudeme dále uvažovat. Mějme libovolný bod M , jehož souřadnice v jedné soustavě jsou (x_M, y_M) a v druhé $(X_M; Y_M)$. Z tohoto bodu spustíme kolmici na osu x a průsečík s osou X označíme R ($X_R; 0$) (obr. 2). Potom je

$$x_M = X_R \cos \varphi \quad X_M - X_R = Y_M \operatorname{tg} \varphi$$

a z obou rovnic plyne

$$x_M = X_M \cos \varphi - Y_M \sin \varphi$$

Stejným způsobem odvodíme prostřednictvím os y a Y rovnici

$$y_M = X_M \sin \varphi + Y_M \cos \varphi.$$

Abychom zdůraznili, že M byl zcela libovolný bod, nebudeme v rovnicích, které vyjadřují vztahy mezi jeho souřadnicemi (jsou to tzv. transformační rovnice), psát indexy.

Pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dostaneme tyto transformační rovnice

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y). \end{aligned} \tag{2}$$

Hledanou rovnici rovnoosé hyperboly h v soustavě souřadnic $(X; Y)$ dostaneme dosazením (2) do rovnice (1)

$$\frac{1}{2} (X^2 - Y^2) = k$$

neboli

$$X^2 - Y^2 = a^2, \tag{3}$$

kde a je délka poloosy hyperboly.

Rovnici (3) můžeme geometricky interpretovat v poučce

P. 1. Necht libovolná kružnice prochází vrcholy rovnoosé hyperboly, pak krajní body jejího průměru, který je rovnoběžný s hlavní osou hyperboly, leží na této hyperbole.

Důkaz (obr. 3). Střed S uvažované kružnice k leží na vedlejší ose $o' \equiv y$ rovnoosé hyperboly. Předpokládejme, že $S \neq O$ (pro $S \equiv O$ je důkaz zřejmý), pak trojúhelník SOA je pravoúhlý a pro jeho přeponu, která je zároveň poloměrem kružnice k , platí $\overline{SA}^2 = a^2 + y^2$. Krajní body M, M' průměru m kružnice k , rovnoběžného s hlavní osou hyperboly, mají pak souřadnice $M (\sqrt{y^2 + a^2}; y)$, $M' (-\sqrt{y^2 + a^2}; y)$, které vyhovují rovnici (3). Jsou tudíž M a M' body rovnoosé hyperboly.

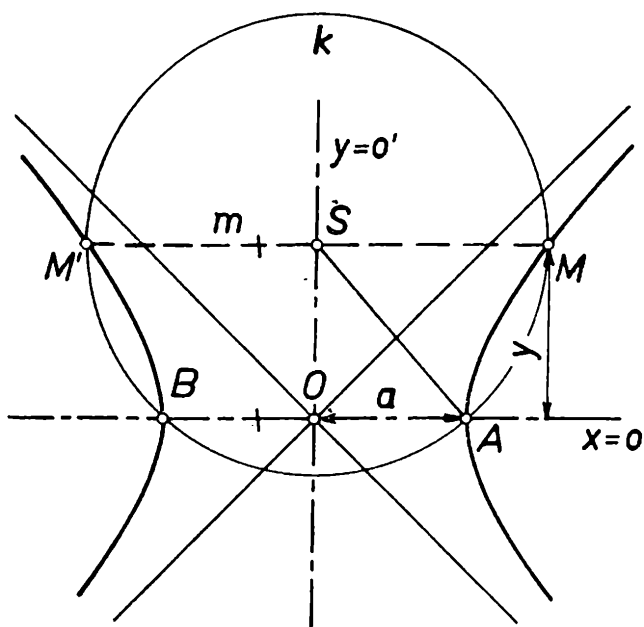
Užitím předcházející poučky můžeme snadno sestrojovat body rovnoosé hyperboly, známe-li její vrcholy. Zvláště výhodná je tato konstrukce na grafickém papíru. Ozřejmíme si ji při řešení úlohy

Ú. 1. *Sestrojte průsečíky rovnoosé hyperboly s přímkou m , rovnoběžnou s její hlavní osou. Hyperbola je určena svými vrcholy A, B .*

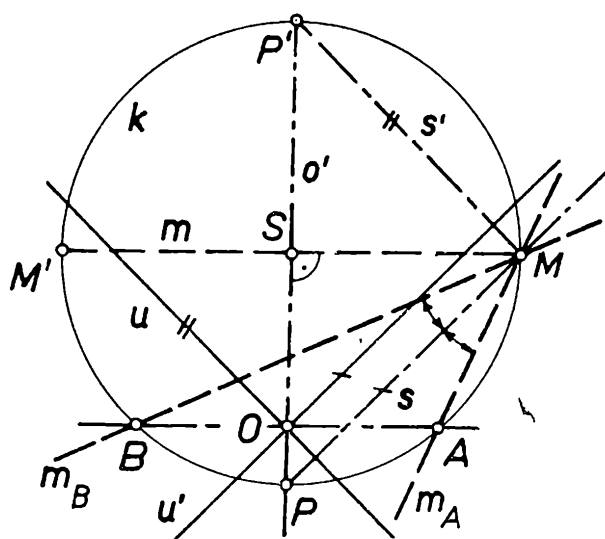
Řešení (obr. 3). Průsečík přímky m s vedlejší osou o' hyperboly, je středem S kružnice k , která procházející vrcholy A, B , protíná přímku m v hledaných průsečících M, M'

Dále se budeme zabývat vlastnostmi spojnic bodu rovnoosé hyperboly s jejími vrcholy. Tyto spojnice budeme nazývat *vrcholovými průvodiči bodu rovnoosé hyperboly*. Jejím vrcholu přiřadíme jako vrcholové průvodiče hlavní osu a tečnu v tomto vrcholu.

Vyslovíme o vrcholových průvodičích poučku



Obr. 3



Obr. 4

P. 2: *Symetrály úhlů vrcholových průvodičů každého bodu rovnoosé hyperboly jsou rovnoběžné s jejími asymptotami.*

Důkaz (obr. 4). Pro vrcholy rovnoosé hyperboly je věta samozřejmá. Provedeme tedy důkaz pro ostatní body rovnoosé hyperboly. Z libovolně zvoleného bodu M spustíme kolmici na vedlejší osu o' rovnoosé hyperboly. Patu této kolmice zvolíme za střed S kružnice k , procházející vrcholy A, B hyperboly. Podle P. 1 protíná kružnice k přímku m ve dvou bodech hyperboly. Jedním z nich je právě bod M , neboť přímka m nemá s hyperbolou více společných bodů než dva. Průsečíky kružnice k s vedlejší osou o' označme P a P' (P nechť leží na polopřímce SO), pak je $\widehat{PA} = \widehat{PB}$. Obvodové úhly $\sphericalangle BMP$ a $\sphericalangle PMA$ kružnice k jsou potom shodné a přímka $s = MP$ je symetrálou úhlu vrcholových průvodičů m_A, m_B bodu M rovnoosé hyperboly. Druhá symetrála s' pak prochází bodem P' .

Z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka PSM plyne, že symetrála

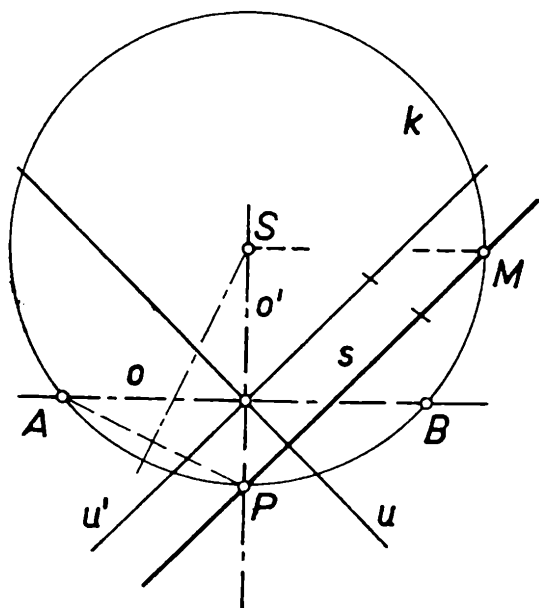
s svírá s vedlejší osou o' úhel $\frac{\pi}{4}$ a je

tedy rovnoběžná a asymptotou rovnosé hyperboly. Samozřejmě je pak druhá symetrála s' rovnoběžná s druhou asymptotou.

Užitím poučky P. 2 vyřešíme úlohu

Ú. 2. Sestrojte průsečík rovnosé hyperboly s přímkou s , která je rovnoběžná s asymptotou hyperboly. Hyperbola je určena svými vrcholy A, B .

Řešení (obr. 5). Kružnice k , procházející průsečíkem P přímky s s vedlejší osou o' a vrcholy A, B , protíná přímkou s v hledaném bodu M . (Pokračování)

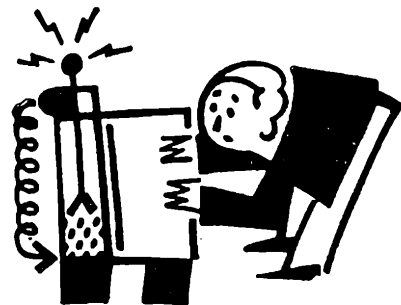


Obr. 5

Fyzika

Inž. Dr. Václav Šindelář, Praha:

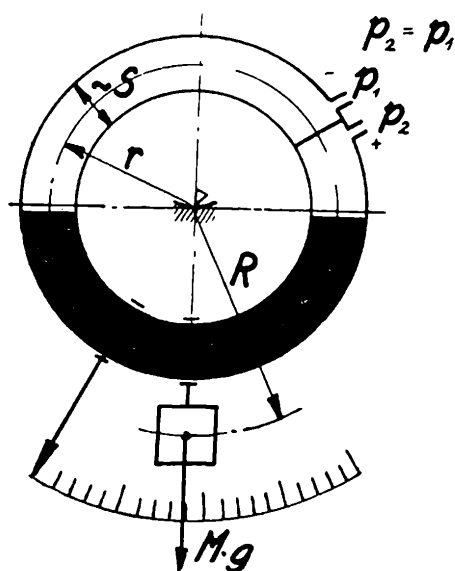
Prstenový tlakoměr



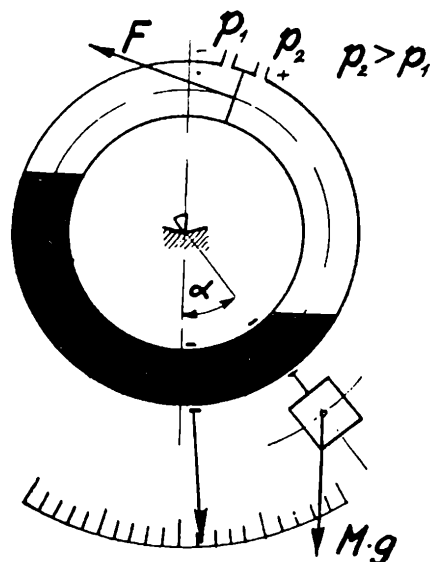
Prstenový tlakoměr je dalším přístrojem, který patří do skupiny tlakoměrů kapalinových. Z nich jsme si již v krátkosti probrali v minulých článcích tlakoměry trubicové, nádobkové a zvonové. Prstenový tlakoměr je přístroj zajímavého principu. Hlavní jeho částí je prstenová trubice kruhového, eliptického, nebo zaobleného obdélníkového profilu (průřezu), otočná na břitech kolem vodorovné osy totožné s osou prstenu (viz schematický obr. 1). Je-li průřez trubice kruhový, má prsten vlastně tvar anuloidu. Podle břitového uložení bývá tento přístroj také zván vcelku nevhodně prstenovou váhou.

Uvnitř prstenové trubice je v její horní části přepážka, po jejíchž obou stranách jsou umístěny tlakové přívody. Trubice je do necelé poloviny naplněna tlakoměrnou kapalinou, zpravidla rtutí nebo vodou. Na

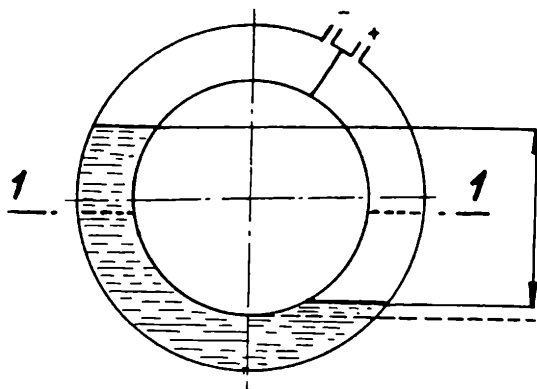
spodní část trubice je připojeno kompenzační závaží. S prstenem je rovněž spojena ručička ukazující na kruhové stupnici tlakové hodnoty. Podle uspořádání přívodů lze přístrojem měřit přetlaky, podtlaky i tlakové difference; tento poslední případ je nejčastější. Je-li na pravý přívod (obr. 1) připojen tlak větší a na levý přívod tlak menší, vychýlí se tlakoměrná kapalina, jak je to naznačeno v obr. 1b. Vychýlení kapaliny však samo nezpůsobuje natočení prstenu. To je vyvozeno momentem síly



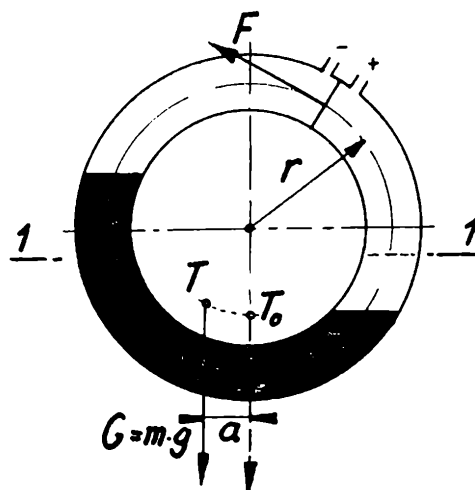
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 2



Obr. 3

působící na přepážku uvnitř trubice. Je-li vnitřní průřez trubice roven S (stejně velká je i přepážka, jež je v trubici umístěna kolmo) a působí-li po obou stranách přepážky rozdílné tlaky p_1 a p_2 ($p_2 > p_1$), bude výsledná síla F , působící svým momentem natočení prstenu rovna rozdílu sil působících proti sobě na obě strany přepážky. Tedy

$$F = S \cdot p_2 - S \cdot p_1 = S (p_2 - p_1), \quad (1)$$

což je součin průřezu S a měřené tlakové difference $\Delta p = p_2 - p_1$.

Kdyby neměla prstenová trubice kompenzační protizávaží, natáčela by se působením silového momentu rovného $F \cdot r$ tak dlouho, až by se přepážka dotkla tlakoměrné kapalinové náplně, při čemž by kapalina začla vytékat do přívodu nižšího tlaku, což by jistě bylo nežádoucí. Má-li závaží hmotu M (rozumí se včetně připojovací součástí) a je-li jeho těžiště na poloměru R , bude se natáčet prsten pouze tak dlouho, až moment síly, působící na přepážku bude právě roven momentu váhy. Tento druhý kompensující silový moment bude roven součinu okamžitého horizontálního průmětu poloměru R a váhy $M \cdot g$, kde g je místní tíhové zrychlení. Pro rovnováhu tedy musí platit

$$F \cdot r = M \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

čili podle (1)

$$S(p_2 - p_1) = N \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

kde α je úhel vychýlení prstenové trubice. Z rovnice (3) můžeme již určit hledanou tlakovou diferenci

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{M \cdot g \cdot R}{S} \cdot \sin \alpha = \text{const.} \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

V této rovnici jsme položili

$$\frac{M \cdot g \cdot R}{S} = \text{const.} \quad (5)$$

protože hodnoty na levé straně rovnice jsou u téhož přístroje vesměs konstantní a jsou tedy charakteristickou konstantou přístroje.

Z rovnic je patrné, že úhlové natočení prstenové trubice při nějaké měřené tlakové diferenci není závislé na druhu kapalinové náplně, ani na jejím přesném množství. Poněvadž však (obr. 1b) zřejmě platí, jako ostatně u všech kapalinových tlakoměrných přístrojů, že

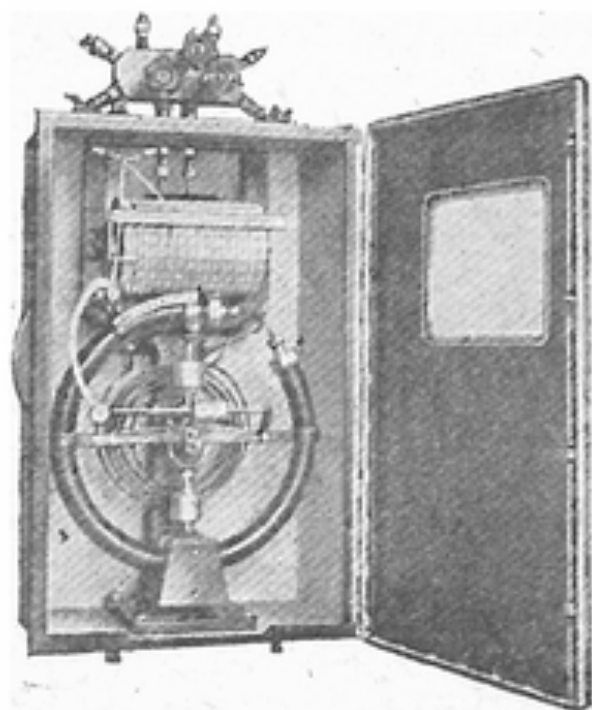
$$p_2 - p_1 = h \cdot \rho \cdot g \quad (6)$$

kde h je rozdíl výšek kapalinových sloupců uvnitř trubice, ρ hustota kapaliny a g místní tíhové zrychlení, bude hustota kapaliny omezovat u trubice daných rozměrů maximální měřenou tlakovou diferencí, protože není možno připustit, aby spodní část sloupce kapaliny svou hladinou (meniskem) zasahoval do spodního (myšleného) průřezu prstenové trubice (obr. 2).

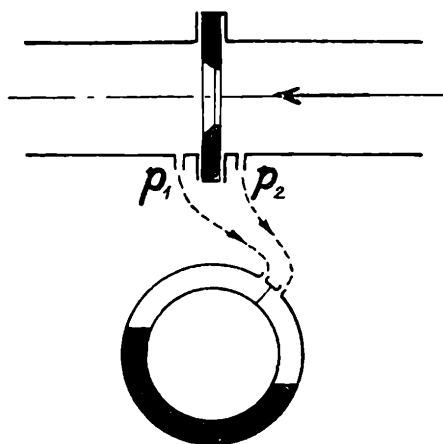
Působením tlakové difference vychýlí se kapaliny v trubici, což bylo již řečeno. Tímto vychýlením je též umožněno rozdílné silové působení na přepážku uvnitř trubice. Silový moment $F \cdot r$ musí být shodný s momentem váhy G vychýlené kapalinové náplně vzhledem k vertikální rovině jsoucí osou prstenu (obr. 3); tedy

$$F \cdot r = G \cdot a = m \cdot g \cdot a \quad (7)$$

kde značí G váhu kapaliny, m její hmotu, g místní tíhové zryhlení a a kolmou vzdálenost vychýleného těžiště T kapaliny od zmíněné vertikální roviny. Těžiště T_0 kapaliny před měřením leželo zřejmě v této rovině. Pokuste se sami matematicky dokázat rovnost obou momentů uvedených v rovnici 7.



Obr. 4



Obr. 5

Protože přestavující síla natáčecího se prstenu je dosti značná, lze zařízení použít vhodně i k plynulému záznamu (registraci) měřených hodnot. Na obr. 4 je celkové provedení zapisovacího prstenového tlakoměru. Velmi běžně se prstenového tlakoměru užívá při měření průtočného objemu plynů a par (např. vodní páry v tepelné energetice). Uspořádání je pak takové, že se do potrubí, kterým měřený plyn nebo pára proudí, vloží tzv. průřezový snímač (např. clona, dýza nebo zvláštní trubice), který místním zmenšením průtočného průřezu způsobí zvýšení rychlosti proudění a zmenšení statického tlaku proudícího prostředí. Z této tlakové difference, kterou můžeme měřit prstenovým tlakoměrem, určí se okamžitá rychlost proudu; je-li znám zúžený průřez, vypočte se i vlastní průtočný objem. Na obr. 5 je schematicky zachyceno uspořádání clony s prstenovým tlakoměrem.

Elektronová vodivost

Elektrický proud ve vodičích je zprostředkován pohybem nabitých částic, které označujeme jako nositele elektrického proudu. V kovech a některých polovodičích jsou nositeli elektrického proudu *v o l n é e l e k t r o n y*; mluvíme proto o *vodivosti elektronové*. Volné elektrony jsou obvodové elektrony, které jsou k jádru poutány slabými silami. Odtržení volných elektronů (např. tepelnou energií apod.) vzniknou kladné ionty, které vytvářejí iontovou mříž kovu. V krystalové mříži kovů existují tedy jednak elektrony volné a elektrony vázané. *V á z a n é e l e k t r o n y* jsou přiřazeny určitému atomu a nejsou schopny volného postupného pohybu, ale jen kmitavého pohybu spolu s jádrem kolem rovnovážné polohy. Volné elektrony se mohou pohybovat v celém objemu krystalu. Volné elektrony se pohybují mezi ionty mříže neuspořádaným tepelným pohybem jako molekuly plynu. Protože je možno na ně aplikovat metody kinetické teorie plynů, označují se proto souhrnně jako *e l e k t r o n o v ý p l y n*.

Elektrony jsou hmotné částice s klidovou hmotou $m = 9,108 \cdot 10^{-31}$ kg, což je $1/1838$ hmoty vodíkového atomu. Při neuspořádaném pohybu vytvářejí volné elektrony v prostoru elektromagnetické pole. Protože však ve vodiči je velké množství volných elektronů a jejich pohyb je neuspořádaný, ruší se vzájemně jejich magnetické účinky již na nepatrnou vzdálenost. Nepůsobí-li pak na tyto elektrony nějaká vnější síla, nedá se zjistit pohyb náboje v určitém směru. Vlivem vnějšího elektrického pole jsou unášeny polem v jistém směru a nabývají rychlosti. Překládá se tedy přes neuspořádaný pohyb elektronů pohyb v určitém směru vznikne usměrněný pohyb, který přenáší náboje ve směru pole.

Elektrony se mohou volně pohybovat jen ve vakuu. Pohybují-li se např. v kovu, narážejí na ionty mříže i na jiné elektrony. Dráha, kterou urazí elektron mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami, je *v o l n á d r á h a e l e k t r o n u*. Srážky elektronů s ionty jsou častější než vzájemné srážky elektronů. Srážky volných elektronů s ionty kovové mříže brzdí pohyb elektronů. Tím vzniká odpor, který klade vodič elektrickému proudu.

Počet volných elektronů v objemové jednotce a střední kinetická energie se nemění s teplotou. Ze zkušenosti je známo, že odpor kovů závisí na teplotě. Je tedy nutno předpokládat, že změna elektrického odporu v závislosti na teplotě musí být způsobena změnou střední volné dráhy vlivem teploty. Velikost amplitudy kmitajících iontů bude

tím větší, čím vyšší je teplota; kmitají-li pak ionty s větší amplitudou, snižuje se střední volná dráha elektronů a odpor roste.

Vznik *Jouleova tepla* při průchodu elektrického proudu vodičem vysvětluje elektronová teorie tak, že při srážce pohybujících se elektronů s ionty odevzdají elektrony iontům jistou část své kinetické energie, kterou získaly v elektrickém poli. Vlivem této energie zvětší se amplituda iontů, a tím vzroste teplota vodiče.

Z praxe je známo, že kovy jsou nejen dobrými vodiči elektriny, ale i dobrými vodiči tepla; dielektrika naproti tomu špatnými vodiči nejen elektriny, ale i tepla. Poněvadž kovy mají volné elektrony, kdežto dielektrika nikoli, možno předpokládat, že také tepelná vodivost je podmíněna volnými elektrony. Proces vedení tepla si můžeme představit tak, že volné elektrony na ohřívaném konci vodiče nabývají větší rychlosti. S ohledem na jejich velkou rychlost nenarážejí jen na blízké ionty, ale dostanou se i k iontům vzdálenějším. Při srážce s ionty odevzdají jim kinetickou energii, a tím se umožňuje rychlý a dobrý přenos tepla.

Emise elektronů. Volné elektrony mohou za jistých podmínek vylétovat z kovu. Má-li však elektron opustit hraniční oblast povrchu kovu, musí překonat pole, které způsobuje, že elektrony jsou uvnitř kovu uzavřeny jako v krabici. Práce která se musí spotřebovat k překonání tohoto pole, je *v ý s t u p n í p r á c e*. Je patrné, že elektron může vylétnout za hraniční oblast kovu, jestliže jeho kinetická energie je větší než výstupní práce. Při normální teplotě (kolem 20°C) má jen malá část volných elektronů dostatečně velkou kinetickou energii, která by stačila na vykonání výstupní práce, takže při této teplotě vystupuje z kovu jen velmi málo elektronů. Se vzrůstající teplotou roste rychlost neuspořádaného tepelného pohybu elektronů, roste i kinetická energie a nastává výstup většího množství elektronů a dochází k *t e r m o e m i s i* elektronů, která je např. využita u elektronových lamp.

Elektron může být uvolněn z kovu nejen zahřátím, ale i působením světla *f o t o e m i s e e l e k t r o n ů*. Výklad fotoemise podal Einstein tak, že předpokládal, že záření pozůstává z „atomů“ energie velikosti $h\nu$, kde h je univerzální konstanta, zvaná *P l a n c k o v a k o n s t a n t a*, rovná $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Jms}^2 \text{ a } \nu$ je frekvence světla. Tyto částičky zářivé energie (atomy energie) se z počátku nazývaly *s v ě t e l n ý m i k v a n t y*, nyní se pro ně ustálil název *f o t o n*. Kovem pohlcený foton předá svou energii elektronu a jestliže je tato energie dostatečně velká, tj. větší než výstupní práce, vyletí elektron z ozářeného kovu. Pravděpodobnost, že by jeden elektron pohltil současně dva fotony je velmi nepatrná. Dostává tedy každý uvolněný elektron svou energii od *j e d n o h o* fotonu. Neplatí zde však věta obráceně, že by každý pohlcený foton musel uvolnit jeden elektron. Fotoemise je prakticky využito například u fotočlánků.

Elektronový mikroskop

(Dokončení)

2. E l e k t r o n o v ý k o n d e n z o r (C), jehož úkolem je vytvořit svazek elektronových paprsků žádaného tvaru (buď sbíhavý nebo rovnoběžný), kterým se ozařuje studovaný objekt (D). Poloha a lámavost kondenzoru mají velký vliv na zvětšení a rozlišovací schopnost elektronového mikroskopu, na což je také nutno při sestavování elektronového mikroskopu pamatovat. Osvětlovací soustava některých elektronových mikroskopů koná svou funkci bez kondenzoru (obr. 3c).

Studovaný objekt (D) bývá připevněn k nosiči objektu, jehož konstrukce je složitá, neboť musí jednak umožňovat velmi jemné posuvy objektu ve vakuu, dále musí dovolovat jeho sklánění podle potřeby a konečně umožňovat snadnou výměnu objektu ze vzduchu do vakua, aniž by při tom vnikl vzduch do evakuovaného prostoru mikroskopu.

3. První zobrazovací čočka, zvaná o b j e k t i v (E), která vytváří středně zvětšený obraz (F) zkoumaného objektu. Před objektem bývá umístěna clona k zachycování rozptýlených elektronů (tím se zvětší rozlišovací schopnost elektronového mikroskopu).

4. Druhá zobrazovací čočka, zvaná p r o j e k t i v (G), která ještě dále zvětšuje obraz vytvořený objektivem.

5. Fluorescenční stínítko, nebo fotografická deska, nebo film, kde se vytvoří konečný elektronový obraz (H) studovaného předmětu.

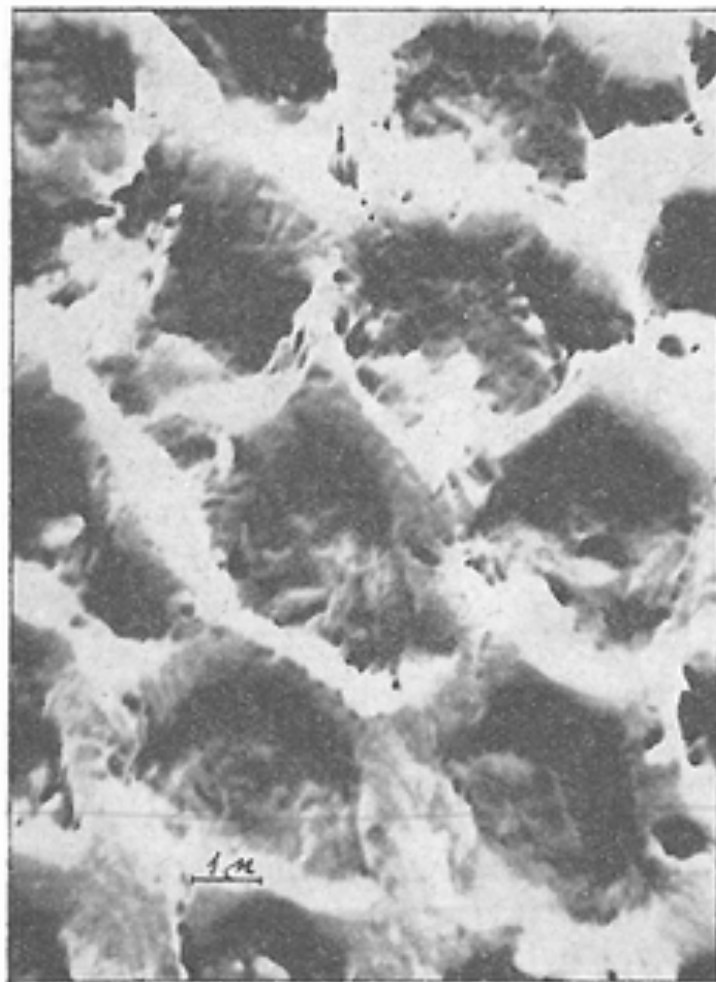
Kazeta pro fotografické desky nebo filmy musí být konstruována tak, aby ji bylo možno otvírat a zavírat i ve vakuu a aby dále bylo možno i vyměňovat exponované desky nebo filmy z mikroskopu, aniž by se zhoršilo vakuum v evakuovaném prostoru mikroskopu.

Popsaná soustava tvoří vlastní elektronový mikroskop. Ten je upevněn na podstavci, zvaném s t ů l m i k r o s k o p u, v němž je obvykle umístěn čerpací systém elektronového mikroskopu a někdy i napájecí zdroj. Čerpací systém, vytvářející vakuum asi 10^{-4} až 10^{-5} mm Hg, je zcela nezbytný k provozu elektronového mikroskopu. Napájecí systém elektronového mikroskopu dává tato potřebná napětí: anodové vysoké napětí ze speciálního generátoru, napětí k napájení elektronových čoček, napětí ke žhavení katody a napětí k napájení fokusační elektrody elektronového mikroskopu. Vyjmenované části doplňují pomocná zařízení, k nimž patří zpravidla uzemnění, zvedací mechanismus mikroskopu a podobná zařízení, nezbytná k nerušené práci s elektronovým mikroskopem.

Za mateřskou zemi elektronového mikroskopu lze považovat Německo. První průmyslově vyráběné elektronové mikroskopy se objevily koncem

roku 1939. První elektronový mikroskop v Sovětském svazu byl vyroben v roce 1940. Jeho zvětšení bylo 10 000násobné. U nás, po úspěšném vyřešení československé konstrukce elektronového mikroskopu, začala vyrábět po druhé světové válce elektronové mikroskopy Tesla n. p. v Brně. Svými vynikajícími vlastnostmi získaly si československé elektronové mikroskopy za krátkou dobu uznání u nás i v zahraničí.

Přesto, že elektronová mikroskopie je obor poměrně mladý, pronikla už do mnoha odvětví vědy a techniky a přinesla mnoho významných poznatků.



Obr. 5

Velkých úspěchů dosáhla elektronová mikroskopie v biologii. První pokusy s elektronovým mikroskopem v biologii se datují již kolem roku 1943. Vědečtí pracovníci se pokoušeli studovat pomocí elektronového mikroskopu složení bakterií. Malá rozlišovací schopnost světelného mikroskopu neposkytla zpravidla možnost usuzovat ani na jejich vnitřní strukturu. Obraz bakterie zhotovený elektronovým mikroskopem přesně ukazoval na jejich složitou vnitřní strukturu. I takové detaily, jako jsou bičíky bakterií, bylo možno objevit v elektronovém mikroskopu. V elektronovém mikroskopu se poprvé podařilo zobrazit povrchovou blanku

bakterií. Dokonce se podařilo získat obraz bakterie opouštějící svou blanku. Bylo možno též pozorovat dělení mikrobů a oddělování protoplasmu od blány u některých bakterií.

Elektronovým mikroskopem byl také sledován účinek různých antibiotik (penicilinu, streptomycinu, aureomycinu, cycloserinu aj.) na různé druhy bakterií. Zjistilo se, že při použití některých antibiotik se bakterie úplně rozkládají, zatím co jiná antibiotika porušují jen protoplasmu nebo buněčnou blanku bakterie.

Pozoruhodným úspěchem elektronové mikroskopie bylo objevení dosud neviditelných mikrobů, tak zvaných filtrabilních virů, jejichž existence byla již dříve předpokládána. Filtrabilní viry jsou tak malé, že je nemůžeme pozorovat ani v nejsilnějších světelných mikroskopech. Jsou schopny bez potíží pronikat i nejmenšími póry filtrů, například porcelánovými filtry, a proto dostaly název filtrabilní viry. Viry jsou původci nebezpečných chorob člověka, živočichů a rostlin. U lidí způsobují nemoci jako chřipku, neštovice, vzteklinu, spalničky, dětskou obrnu. U živočichů způsobují vzteklinu, slintavku a jiné choroby. Viry též napadají brambory, tabák, rajská jablíčka, ovocné stromy a jsou příčinou kroucení, sevrkání a konečně odumírání listů, dřevnatění plodů, odumírání a zakrnění celých rostlin.

Elektronovým mikroskopem se zkoumaly bakteriofágy. Zjistilo se, že některé bakteriofágy jsou velmi malá kulatá tělíška s dlouhým bičkem.

Na rozdíl od světelného mikroskopu je možno v elektronovém mikroskopu pozorovat zatím jen mrtvá těla bakterií, neboť ani jediná živoucí bytost nevydrží vysoké vakuum mikroskopu. K tomu ještě přistupuje smrtící účinek elektronových paprsků. Často se využívá toho, že v elektronovém mikroskopu je možno pozorovat obraz také tehdy, je-li předmět v plynu za dosti vysokého tlaku. Je pouze třeba, aby plyn byl soustředěn v přímé blízkosti zkoumaného předmětu.

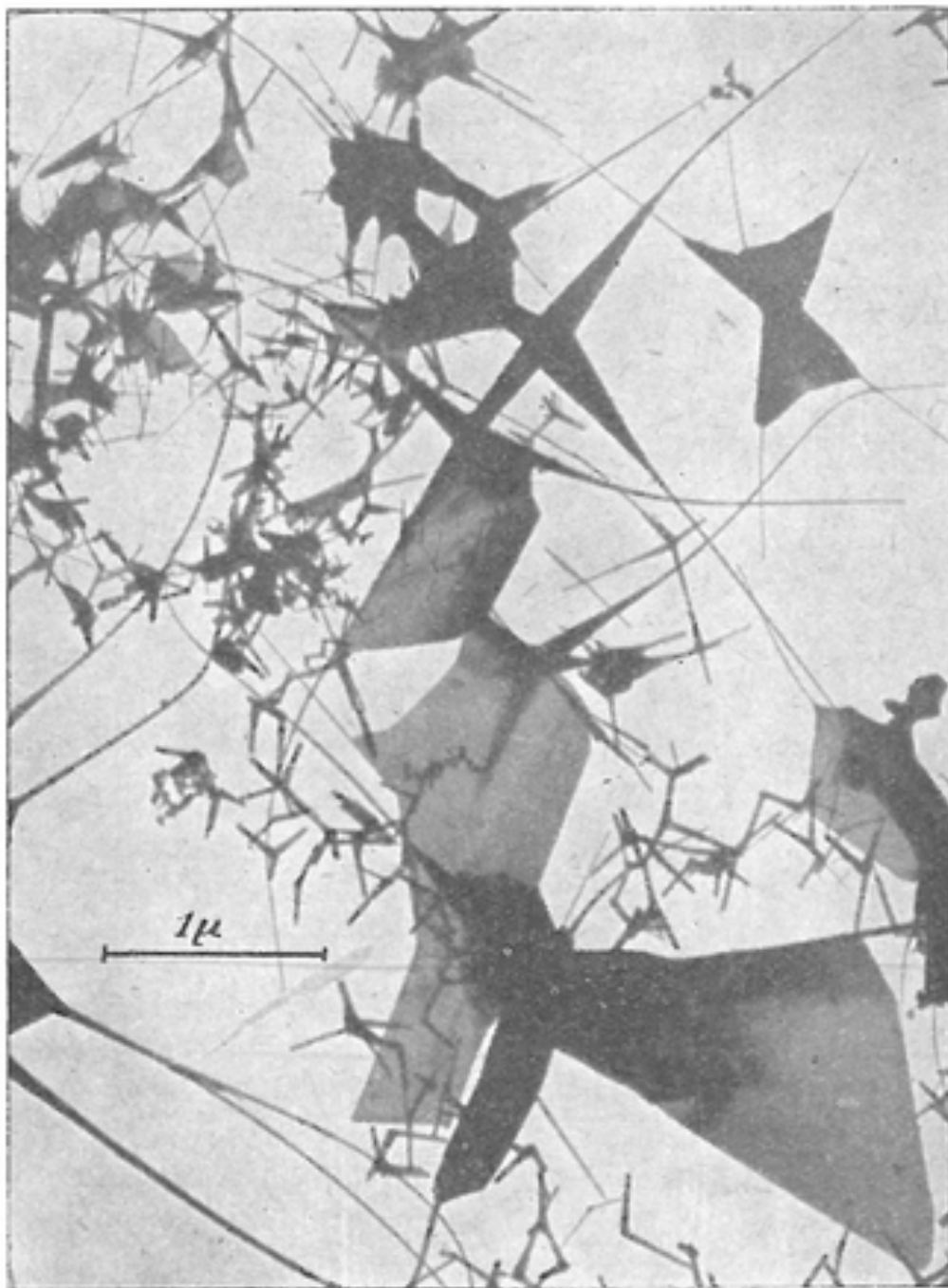
Elektronovým mikroskopem můžeme také zkoumat strukturu různých tkání živočichů a rostlin, strukturu kostí, zubů apod. Na obr. 5. je vyobrazena struktura povrchu mladého zubu štěněte. Snímek byl pořízen elektronovým mikroskopem při zvětšení 10 000násobném.

Elektronový mikroskop se také uplatnil v jiných přírodních vědách (v chemii, fyzice apod.). S velkým úspěchem byly studovány velmi malé částice, tzv. koloidy, dále kovové prášky různého druhu, saze, prach a podobně. Pečlivým pozorováním se podařilo zjistit velikost a tvar těchto částic. Podrobným zkoumáním kouře a prachu se hledá cesta, jak lépe chránit zdraví zaměstnanců některých průmyslových závodů a obyvatel měst. Na obr. 6 je snímek kouře spáleného zinku (kysličník zinečnatý), pořízený elektronovým mikroskopem se 40 000násobným zvětšením.

Elektronový mikroskop se hodí ke zkoumání vzniku latentního obrazu v citlivé fotografické emulsi, ke zkoumání technických vlastností kera-

mických výrobků aj. Pozorování skla ukázalo, že povrch skla je po vytažení ze sklářské pece, nebo po sejmutí s foukací píšťaly, nejhladším známým povrchem, který ani pod elektronovým mikroskopem nevykazuje žádnou znatelnou strukturu.

Elektronový mikroskop umožnil pozorovat obrovské molekuly různých



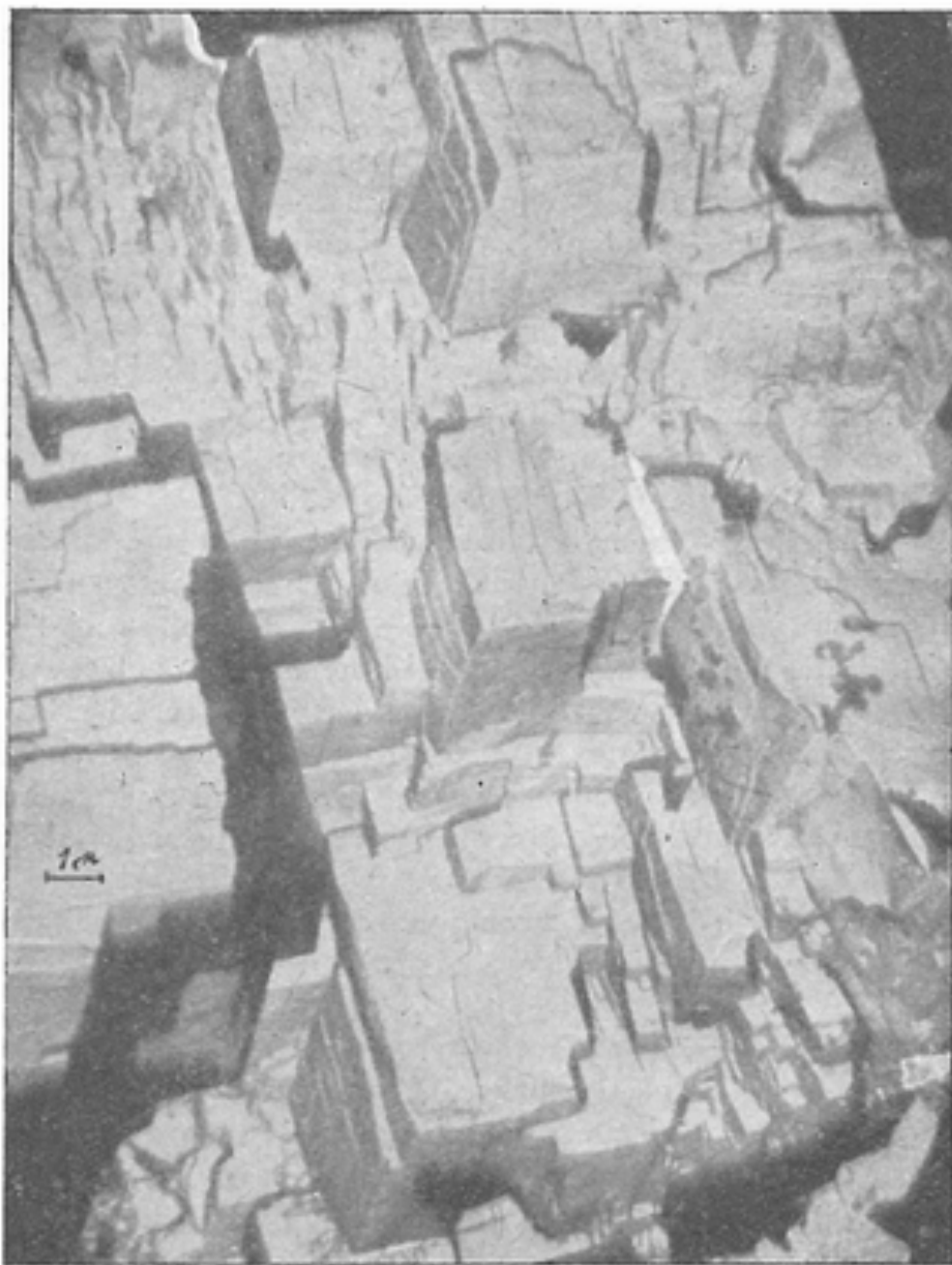
Obr. 6

ných organických látek, jako je např. molekula hemocyaninu, která je řádově velikosti 10^{-5} mm. Dokonalými elektronovými mikroskopy lze pozorovat molekuly hemoglobinu a vaječného bílku řádově velikosti 10^{-6} mm, ba i částice velikosti 10^{-7} mm (atomy *Pb*, *C*).

Elektronovým mikroskopem se sleduje mikrostruktura katalyzátorů a různých sloučenin, makromolekuly proteinů, nukleové kyseliny a struk-

tura plastických hmot, studuje se složení hlín, minerálů, struktura bavlny, hedvábí apod.

Dalekosáhlé využití má elektronový mikroskop v technice. V metalurgii se studuje zejména povrch kovů. Nejdříve se zdálo, že zkoumání povrchů kovů je možné jen pomocí emisních nebo reflexních elektronových mikroskopů. Později se však podařilo studovat tlusté vrstvy kovu také pomocí



Obr. 7

procházejících elektronových paprsků, tedy pomocí prozařovacích mikroskopů. Toho bylo dosaženo užitím metody otisků (replik). Otiskem se nazývá kopie studovaného povrchu kovu, která se získá tím, že povrch kovu pokryje vrstvičkou nějaké látky, například koloidem, křemenem, kysličníkem téhož kovu a podobně. Tuto vrstvičku, aniž ji porušíme, zvláštním způsobem oddělíme od kovu. Oddělená vrstvička je

otiskem povrchu kovu a mohou jí snadno pronikat elektronové paprsky. Průchodem elektronových paprsků replikou nastane v ní na různých místech různý rozptyl, takže na fluorescenčním stínítku nebo na fotografické desce (filmu) dostaneme obraz, z kterého můžeme usuzovat na strukturu povrchu příslušného kovu. Studium vrstev hliníku bylo například zjištěno, že tyto vrstvy jsou bez jakýchkoliv otvorů. Rychlé elektrony mohou pronikat mezi atomy a molekulami takové vrstvičky, aniž ji poškodí. Větším a pomalejším částicím, například molekulám kyslíku, je cesta přes takovou vrstvičku uzavřena. Tím se vysvětluje pozoruhodná odolnost hliníku proti korozi. Tím, že se hliník pokryje vrstvičkou kysličníku, zabrání dalšímu přístupu molekul kyslíku zvenčí. Jiné je to u vrstev kysličníku železa. Vrstvy kysličníku železa jsou doslova posety otvory, kterými mohou molekuly kyslíku snadno pronikat, slučovat se s železem a vytvářet stále silnější vrstvu rzi. Tak bylo objeveno na vlastnostech stavby tenkých vrstev kysličníku hliníku a železa tajemství velké odolnosti hliníku a malé odolnosti železa proti korozi. Na obr. 7 je zobrazen povrch hliníku leptaný kyselinou solnou.

Metody otisků se užívá i ke studiu povrchu hotových kovových výrobků, jako jsou např. různé součástky strojů.

Pozoruhodných výsledků bylo dosaženo také jinou metodou. Ke studovanému povrchu se pod velkým tlakem (asi 250 atmosfér) a za teploty kolem 160° C přitiskne prášek zvláštní látky, zvané polystyrol. Po zchladnutí vytváří polystyrol kompaktní hmotu. Kov se rozpustí v kyselině a polystyrolová vrstva se oddělí. Na té straně, která byla obrácena ke kovu, se působením velkého tlaku otisknou všechny nerovnosti povrchu kovu. Na polystyrol se konečně nanese tenká vrstva křemíku, která má po oddělení polystyrolu výstupky a důlky přesně odpovídající důlkům a výstupkům na povrchu kovu. Elektrony procházející křemenným otiskem se různě rozptylují na různých jeho místech, takže vytvářejí na fluorescenčním stínítku, nebo na fotografické desce (filmu) obraz odpovídající struktuře povrchu kovu.

Pomocí elektronového mikroskopu byly odhaleny jemné rozdíly v submikroskopické struktuře oceli a litiny. Elektronový mikroskop umožnil podrobné studium pochodů při kalení a popouštění. Pozorování elektronovým mikroskopem se ovšem neomezuje jen na ocel a železo, ale přináší praktické výsledky i při studiu nejrůznějších slitin a lehkých kovů.

Použitá literatura.

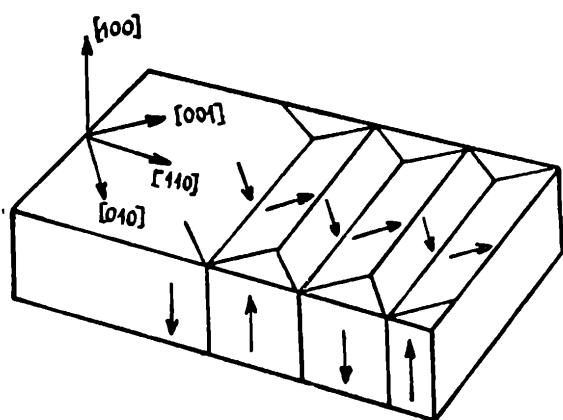
- J. Fuka, B. Havelka: Elektromagnetické pole (SPN Praha, 1958).
S. E. Friš, A. V. Timoreva: Kurs fyziky II a III (NČSAV Praha, 1953).
Z. Horák: Úvod do molekulové a atomové fyziky (SNTL Praha, 1955).
N. G. Suškin: Elektronový mikroskop (SNTL Praha 1954).
E. A. Wainrib, W. I. Miljutin: Elektronenoptik (VEB Verlag Technik Berlin, 1954).
V. K. Zworykin, G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier, A. W. Vance: Electron Optics and the Electron Microscope (New York, 1945).

K a m i l K r a u s, E j p o v i c e:

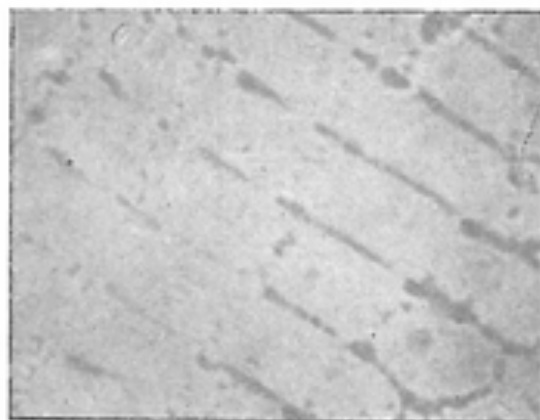
Ferromagnetismus z hlediska moderní fyziky

(Dokončení)

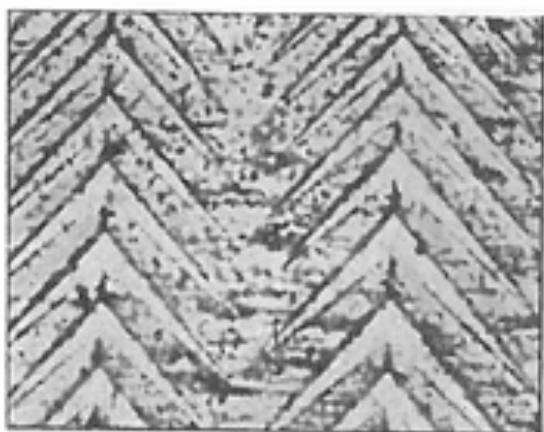
Od r. 1935, kdy byla v německém znění Fyzikálního časopisu Sovětského svazu uveřejněna stěžejní práce autorů Landau a Lifšice, o níž se opírají všechny další práce o doménových strukturách, byla provedena celá řada studií na krystalech křemíkového železa.



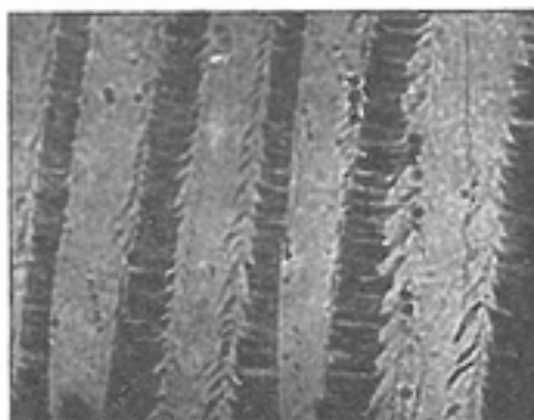
Obr. 2. Néelův řez.



Obr. 3. Lístková struktura na rovině (100) krystalu Si-Fe, zvětšeno 240 ×.



Obr. 4.
Struktura „jehličnatého stromu“ na krystalu Si-Fe, zvětšeno 240 ×.

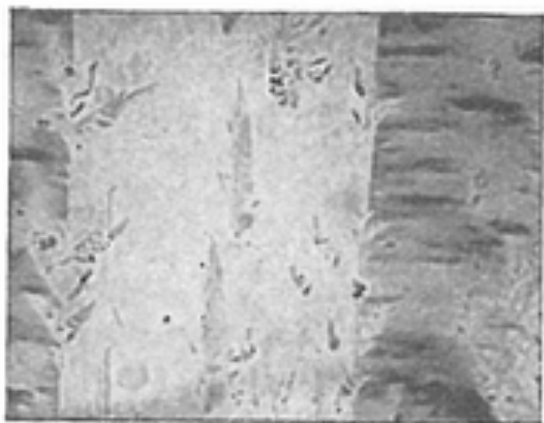


Obr. 5.
Struktura „krajková“ na rovině 110 krystalu Si-Fe, zvětšeno 240 ×.

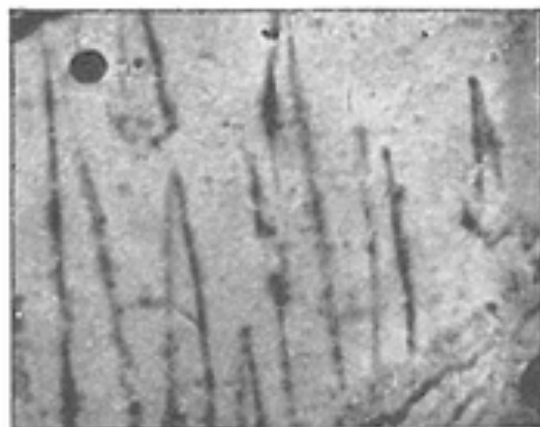
Železo, které krystaluje v soustavě kubické, má tři směry snadné magnetizace. Jsou značeny indexy [100], [010], [001] a jsou totožné s hranami krychle a směry nesnadné magnetizace - směry stěnové úhlopříčky

značené indexem [110] a tělesové úhlopříčky [111]. Pro studium doménových struktur na krystalech Si-Fe byl z krystalu vyříznut vzorek zcela zvláštním způsobem. Horní a dolní povrch vzorku je tvořen rovinami (100), boční stěny jsou roviny (110) (obr. 2). Takto upravený vzorek je označován jako N é e l ů v ř e z. Hlavní domény vznikající na rovinách, (100) jsou lístkovité a každá z nich je magnetována ve směru snadné magnetizace (obr. 3). Kromě hlavních domén vznikají na Néelově řezu, ještě trojúhelníkové domény tvaru klínu, označené jako Q - d o m é n y, které způsobují uzavěr magnetického toku a nazývají se proto u z a v í r a c í d o m é n y. Jsou magnetovány ve směru snadné magnetizace. Matematicky lze dokázat, že vytvořením uzavíracích domén tohoto typu sníží se ještě více celková energie systému.

Je-li povrch krystalu mírně odkloněn od krystalografické roviny (100), vzniká typická doménová struktura „j e h l i č n a t é h o s t r o m u“ (obr. 4). Kmen stromu odděluje dvě domény, které jsou magnetovány



Obr. 6. Uzavírací domény - „dýky“ na krystalu Si-Fe zvětšeno $240\times$.



Obr. 7. Uzavírací domény „dýky“ na krystalu Si-Fe, zvětšeno $240\times$.

v opačných směrech, je tedy tvořen 180° - stěnou. Větve stromu jsou tvořeny uzavíracími doménami.

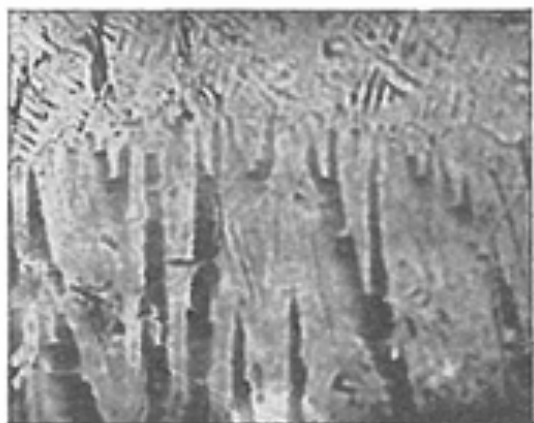
Doménové struktury, které vznikají na bočních stěnách Néelova řezu, jsou většinou velmi složité a nazývají se „k r a j k y“ (obr. 5). Mnohé z nich dosud nebyly vysvětleny.

Řekli jsme již, že tvar a velikost elementárních domén závisí na mnoha činitelích, především na přítomnosti nečistot a pnutí. Poněvadž přítomnost nečistoty uvnitř hlavní domény by vedla k podstatnému zvýšení magnetostatické energie systému, vytváří se kolem ní uzavírací domény tvaru „d ý k y“ (obr. 6, obr. 7), které zabraňují zvýšení této energie. Pnutí pak je charakterizováno neuspořádanou strukturou bez jakékoliv symetrie (obr. 8).

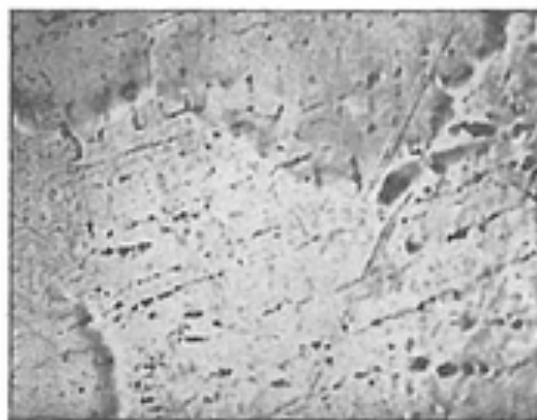
Je nepopíratelné, že pro specifikaci jednotlivých typů doménových

struktur jsou výsledky získané na monokrystalech velmi důležité, avšak teorie doménových struktur nabude plného významu, bude-li aplikována na vzorky materiálu, s nimž se setkáváme v technické praxi, tedy na vzorky polykrystalické. Struktury nalezené na vhodných vzorcích, podávají informaci o orientaci zrn polykrystalického vzorku. Mají-li sousední zrna přibližně stejnou orientaci, pak struktury jsou často spojitě z jednoho zrna na druhé (obr. 9).

Studium polykrystalických vzorků podává rychlým způsobem obraz o magnetických vlastnostech sledovaných materiálů na jedné straně, na druhé straně získáváme z rozborů doménové struktury informace o činitelích, které způsobily lepší či horší magnetické vlastnosti materiálu, tedy na základě těchto údajů je možné opravit technologický postup výroby daného materiálu.



Obr. 8. Struktura neuspořádaná, charakterizující pnutí na krystalu Si-Fe, zvětšeno $240\times$.



Obr. 9. Struktura na polykrystalickém vzorku Si-Fe, zvětšeno $240\times$.

Závěr

V článku jsme uvedli základy výkladu ferromagnetismu z hlediska soudobé fyziky, který je založen na dvou předpokladech P. Weiss: existenci silného vnitřního molekulárního pole a existenci elementárních domén zmagnetovaných do nasycení bez vlivu vnějšího pole. Na základě Weissových domén vysvětlili jsme změnu magnetizace ferromagnetického tělesa dvěma procesy: a) změnou objemu domény, b) změnou směru doménové magnetizace. V další části článku jsme uvedli několik doménových struktur, charakteristických pro slitiny Si-Fe. Zpracovaná látka má sloužit především k doplnění látky o podstatě magnetismu, probírané v učebnici fyziky pro odborné školy.

Stavba atomového jádra

(Dokončení)

Model jádra atomu

Pokusy o vytvoření modelu atomového jádra jsou již staršího data. Ze základních stavebních kamenů jádra (*nukleonů*) je již poměrně dlouho znám *proton*. Je to jádro lehkého vodíku ${}^1_1\text{H}$. Jeho náboj je jednotkový základní kladný kvantový náboj. Je stejně velký jako náboj elektronu, ale má kladné znaménko. Jeho hmotu je přibližně rovna hmotové jednotce²⁾.

Původně byly za stavební jednotky atomového jádra považovány *protony* s kladným elementárním nábojem a *elektrony* se záporným elementárním nábojem. Jejich kombinací je možno teoreticky vysvětlit hmotu i náboj každého atomového jádra. Tento předpoklad však vedl k velmi četným rozporům s experimentálně získaným materiálem.

Plně vyhovující model stavby atomového jádra bylo možno vytvořit až po objevu druhého základního nukleonu, *neutronu*. *Neutron* má asi stejnou hmotu jako *proton*, ale nemá elektrický náboj. Právě tato okolnost způsobila, že byl objeven Chadwickem teprve v roce 1932. Téhož roku vyslovil sovětský fyzik D. Ivaněnko předpoklad, že základními stavebními kameny jader atomů jsou *protony* a *neutrony*, pro něž bylo zavedeno společné označení *nukleony*. Tento model atomu dále propracoval známý německý fyzik Heisenberg. V jádře atomu ${}^A_Z\text{R}$ je zřejmě Z protonů, které mu dávají jeho kladný náboj a $N = A - Z$ neutronů, které doplňují jeho atomovou hmotu. Označíme-li *proton* písmenem p a *neutron* písmenem n , lze psát

$${}^A_Z\text{R} = T \cdot p + (A - Z) \cdot n$$

Z toho, že jádro atomu se skládá z protonů a z neutronů lze snadno vyložit skutečnost, že u lehkých prvků $A = 2Z$, u těžkých prvků $A > 2Z$.

²⁾ Jako hmotová jednotka se v chemii označuje jedna šestnáctina hmoty atomu kyslíku (tak, jak se vyskytuje v přírodě). Protože se ukázalo, že kyslík má několik izotopů, jež jsou v přírodním kyslíku smíšené, je fyzikální hmotovou jednotkou jedna šestnáctina hmoty atomu izotopu kyslíku $O\ 16$. Hmotová jednotka činí $1,660 \cdot 10^{-27}$ kg.

Mezi každými dvěma nukleony působí totiž přitažlivá síla podle Newtonova gravitačního zákona

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

kde m_1 a m_2 značí hmoty nukleonů, r jejich vzdálenost a κ je konstanta gravitačního zákona. Tato síla je však poměrně značně malá.

Více se uplatňuje odpudivá elektrická síla, působící mezi každými dvěma protony, která je dána Coulombovým zákonem

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \cdot 10^9 \left[\frac{N \cdot m}{C^2} \right].$$

Čím více tudíž bude v jádře protonů, tím více se budou uplatňovat tyto Coulombovy odpudivé síly působící mezi nimi, což je stav pro trvalou existenci protonů v jádře nepříznivý. Tyto odpudivé síly mohou být částečně vyrovnány (vykompenzovány) nadbytkem neutronů v jádře. Proton a neutron se navzájem přitahují a tyto přitažlivé síly mohou přispět ke stabilitě atomového jádra. Protože $A = Z + N$, je pro lehké prvky nejstabilnější stav, při němž $N = Z$, tudíž $A = 2Z$. Pro těžší atomy se začnou rušivě projevovat Coulombovy odpudivé síly působící mezi protony, jež se musí kompenzovat nadbytkem neutronů ($Z < N$). Bude tudíž s rostoucím Z rozdíl $N - Z$ stále větší, takže $A > 2Z$. S rostoucím Z tudíž rozdíl $A - 2Z$ stále roste. Snadno si to ověříme na několika atomech prvků

$${}^1_1H : A = 1 \quad Z = 1 \quad N = 0$$

$${}^4_2He : A = 4 \quad Z = 2 \quad N = 2$$

$${}^{238}_{92}U : A = 238 \quad Z = 92 \quad N = 146.$$

Dvě nebo více atomových jader, která mají stejný počet protonů označujeme jako i z o t o p y ($Z_1 = Z_2$), různá jádra, která mají stejný počet nukleonů ($A_1 = A_2$) se označují jako i z o b a r y a různá jádra se stejným počtem neutronů ($N_1 = N_2$) jako i z o t o n y.

Je pravděpodobné, že nukleony nejsou v jádře umístěny náhodně, ale že v něm jsou určitým způsobem seskupeny. To, že při radioaktivním rozpadu atomů vznikají a l f a č á s t i c e (kladná jádra heliová = 2 protony + 2 neutrony) nasvědčuje tomu, že dva páry (neutron + proton) tvoří již v jádře atomů samostatné seskupení, které je velmi stálé. Potvrzuje to také okolnost, že jádra atomů, pro něž $A = 4k$ (k = libovolné celé číslo), jsou velmi stabilní.

Při radioaktivním rozpadu se jedná o procesy, které probíhají přímo

v jádře atomů. Alfa částice vzniká tím, že se taková skupina dvou protonů a dvou neutronů uvolní z jádra.

Také *b e t a z á ř e n í* (tj. proud elektronů) vzniká při radioaktivním rozpadu dějem probíhajícím v jádře atomu. Beta paprsky nejsou tedy elektrony z elektronového obalu atomu. Při vzniku beta záření dochází v jádře radioaktivního prvku k přeměně neutronu v proton a elektron. Elektron však nemůže existovat uvnitř jádra a objeví se proto vně jádra. Děj lze vyjádřit rovnicí



Vznik *p o z i t r o n ů* (kladně nabité částice téže hmoty jako elektron, ale opačného náboje, které vznikají při rozpadu některých uměle vyrobených radioaktivních látek), vysvětlujeme podobně procesem



Aby nebyla porušena platnost principu zachování energie a principu zachování hybnosti (impulzu), je nutné předpokládat při těchto přeměnách ještě vyslání velmi malé neutrální částice, zvané *n e u t r i n o*, pro kterou se užívá označení ν .

Tyto děje probereme později podrobněji v samostatném článku.

Hladinový model jádra

Dá se čekat, že nukleony budou v jádře podobně seskupeny do slupek, jako elektrony v elektronovém obalu atomu. Zjistit a ověřit toto seskupení je ovšem značně obtížnější, protože je nemůžeme z vnějšku tak snadno prověřovat a ovlivnit. Přes to se studiem výskytu jednotlivých atomů a jejich izotopů podařilo tuto stavbu zjistit. Tak vznikl *h l a d i n o v ý m o d e l a t o m o v é h o j á d r a*.

Hladinový model atomového jádra předpokládá, že nukleony jsou v jádře atomu uspořádány do uzavřených *s l u p e k*. Na každé slupce jsou pouze nukleony určitého druhu a může jich tam být nanejvýš určitý maximální počet. Je-li určitá slupka nukleony zcela naplněna, představuje výsledné seskupení (konfigurace) neobyčejně stálý (stabilní) atom.

Experimentální materiál vede k závěru, že protony i neutrony tvoří své vlastní slupky, které mohou obsahovat pouze určitý maximální počet těchto nukleonů. Maximální možný počet je při tom dán tzv. *m a g i c k ý m i č í s l y*, která jsou dána posloupností 0, 2, 6, 8, 14, 20, 28, 40, 50, 70, 82, 112, 126.

Posloupnost tuto je možno rozdělit na dvě části:

1. *malá magická čísla*, která jsou dána posloupností 0, 2, 8, 20, 40, 70, 112;
2. *velká magická čísla*, která tvoří posloupnost 0, 2, 6, 14, 28, 50, 82, 126.

Nějaký obecně platný jednoduchý vytvářecí zákon pro tyto posloupnosti dosud nebyl nalezen. Určitá zákonitost se však ukáže, tvoříme-li postupně rozdíly členů této posloupnosti. Vydělíme-li číslo obou posloupností dvěma a tvoříme-li postupně jejich difference, dostaneme tabulku

M a l á m a g i c k á č í s l a

Posloupnost	0	1	4	10	20	35	56
1. difference	1	3	6	10	15	21	
2. difference		2	3	4	5	6	

V e l k á m a g i c k á č í s l a

Posloupnost	0	1	3	7	14	25	41	63
1. difference	1	2	4	7	11	16	26	
2. difference		1	2	3	4	5	6	

Tak vznikl h l a d i n o v ý m o d e l, který předpokládá, že nukleony každého druhu jsou rozděleny do slupek tak, jak je uvedeno v následující tabulce. Číslo uvedená v tabulce vyjadřují maximálně přípustný počet nukleonů v jednotlivých slupkách označených římskými číslicemi (sloupec druhý) a z toho vyplývající maximálně možný počet těchto nukleonů v jádře (třetí sloupec), které má tuto slupku plně obsazenu.

Slupka	P o č e t č á s t i c	
	ve slupce	celkem
I	2	2
II	6	8
II a	6	14
III	6	20
III a	8	28
IV	22	50
V	32	82
VI	44	126

Jádra, u nichž je počet protonů nebo neutronů vyjádřen magickým číslem, jsou v přírodě nejvíce rozšířeny a tvoří také největší počet izotopů případně izotonů. Ukážeme si to na několika příkladech. Pro jasnost je u atomů vedle dvou obvyklých indexů uveden ještě třetí vpravo nahoře, který udává tzv. n e u t r o n o v é č í s l o, tj. počet neutronů obsažených v jádře atomu.

Například:

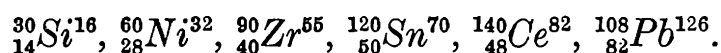
Izotop ${}^4_2\text{He}^2$ má zaplněnou první slupku protonů i první slupku neutronů. Představuje 99,9999 % helia vyskytujícího se v přírodě.

Izotop ${}^{16}_8\text{O}^8$ má zaplněny první dvě protonové i první dvě neutronové skupky. Tvoří 99,757 % kyslíku přicházejícího v přírodě.

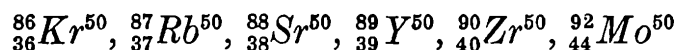
Izotop ${}^{40}_{20}\text{Ca}^{20}$ je poslední stabilní izotop se stejným počtem protonů i neutronů. Tvoří 99,96 % vápníku přicházejícího v přírodě.

Izotop ${}^{89}_{39}\text{K}^{20}$ tvoří 93,30 % tohoto prvku v přírodě.

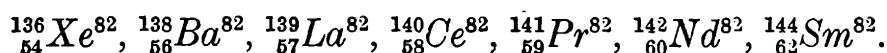
Izotopy s magickými čísly mají také větší vazebnou energii nežli sousední atomy Mendělejevovy soustavy. Nápadné je to zvláště u lehkých izotopů ${}^4_2\text{He}^2$ a ${}^{16}_8\text{O}^8$, ale ukazuje se to i u těžších jader, na příklad



Také počet stabilních izotonů, u nichž je neutronové číslo vyjádřeno magickými čísly, je poměrně značný. Existuje například šest stabilních izotonů, pro které $N = 50$



a sedm izotonů s $N = 82$



Tyto prvky tvoří nejpočetnější známou skupinu izotonů.

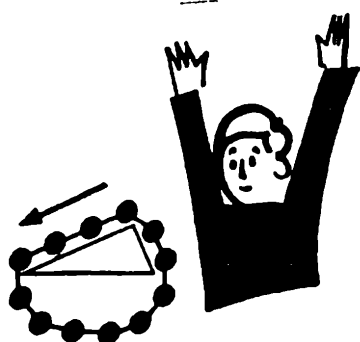
Z toho, co bylo uvedeno, je patrné, že i při stavbě jádra atomů se ukazují zákonitosti obdobné zákonitostem pro výstavbu jejich elektronového obalu. Zákonitost však má jiný charakter a periodicitu jevů je zde vyjádřena jinými čísly. Je to dokladem bohatosti forem projevů hmoty, kterou tak pěkně předpověděl Lenin již před půl stoletím.

Vedle mechanického popisu sestavení atomu je důležité znát také jaderní síly, které drží jádro pohromadě a jejich podstatu. K této otázce se obrátíme v dalším článku.

Koncem března zemřel po těžké chorobě dlouholetý člen a činovník Jednoty čs. matematiků a fyziků a přispěvatel Rozhledů matematicko-fyzikálních V i l é m L a m p a r t e r, učitel středních škol v Brně.

Čest jeho památce!

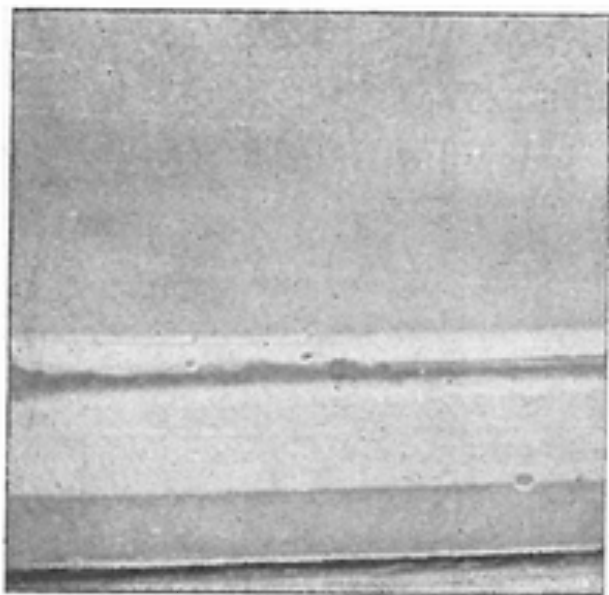
zvikální zaujímavosti



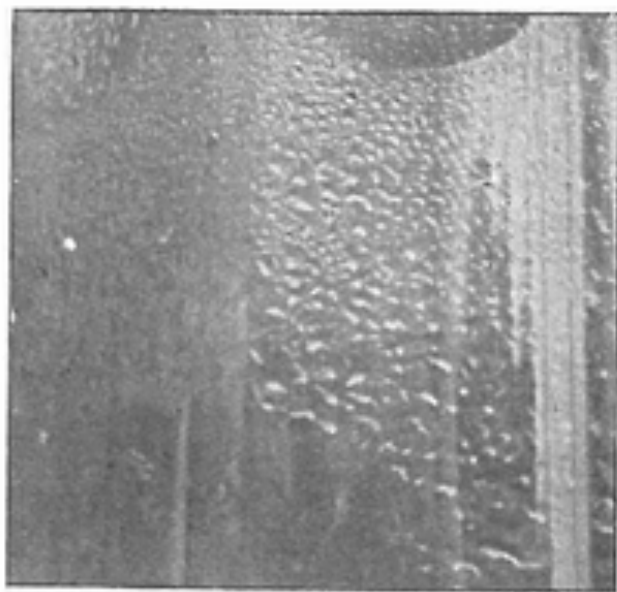
Prof. Dr. Ján Vanovič, Bratislava:

O niektorých vlastnostiach kvapiek

Iste si každý z vás povšimol, že pri vonkajšej nižšej teplote sa vnútorná strana okennej tabule zarosí, čo značí, že sa pokryje malými vodnými kvapôčkami. Okno vyzerá ako z matného skla, kým sú kvapôčky na začiatku temer rovnaké a pomerne veľmi malé (obr. 1). Postupom času a pri pokračujúcej kondenzácii vodných pár, obsiahnutých vo vzduchu, niektoré kvapky rastú rýchlejšie a stávajú sa dobre odlišiteľnými od ostatných kvapôčiek, ktoré vo svojom vývoji ako by byli zaostali



Obr. 1



Obr. 2

(obr. 2). A nakoniec kvapky, ktoré najviac zväčšili svoj objem sa na skle neudržia a stekajú dolu okennou tabulou, zanechávajúc za sebou „riečište“, zbavené vodných kvapôčiek (obr. 3).

Je to bežne pozorovateľný úkaz. Zamyslel sa však niekto z vás o príčine jeho priebehu? Vysvetlenie opísaného bežného javu predpokladá znalosť istých vlastností kvapák. A možno z neho robiť uzávery i na

iné úkazy. Venujme preto pozornosť uvedenému bežnému a možno azda povedať všednému javu.

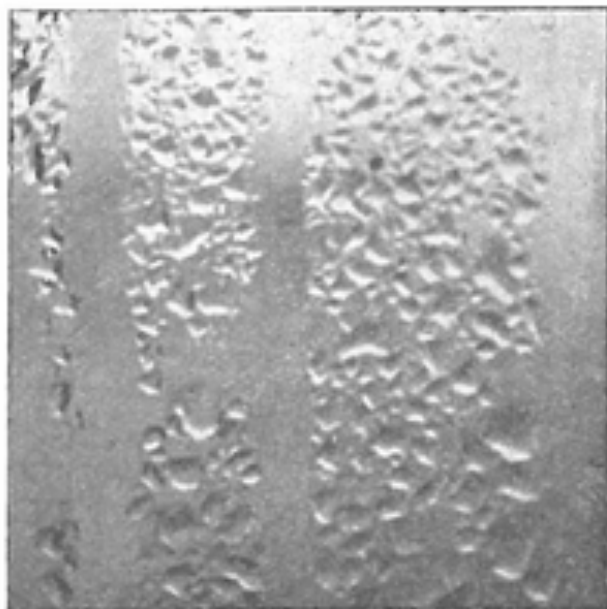
Prečo sa menia pary na kvapky a nie na súvislú kvapalinu? Vieme, že v plynoch, alebo parách konajú častice látky - molekuly - neusporiadané tepelné pohyby. Veľkosť priemernej rýchlosti tepelných pohybov molekúl, závisí od teploty. Prítomnosť prachových teliesok, alebo iónov spôsobuje, že molekuly ich okolia strácajú rýchlosť. V tých polohách sú preto miesta nižšej teploty. Tu zrážajúce sa molekuly uviaznu vo vlastných silových poliach (molekuly sa navzájom priťahujú), pretože po odraze nemajú už dostatočnú pohybovú energiu, ktorá by ich vzdialila z dosahu pôsobenia príťažlivých síl. Mohli by sme povedať, že molekuly nemajú únikovú rýchlosť, ktorý pojem je známy v súvislosti s raketami. Napred sa vytvorí molekulové dvojča (dve spojené molekuly) a potom k ním pribúdajú ďalšie molekuly, ktoré uviazli v silovom poli vytvárajúcej sa veľmi malej kvapôčky.

Taký je priebeh kondenzácia i na skle. Preto sa sklo, zvonku ochladené, pokrýva množstvom veľmi malých kvapôčiek.

Molekuly kvapôčky sa navzájom priťahujú i v smere povrchu a tým spôsobujú, akoby bola kvapka obalená akousi blanou. Napätie tej blany, ako napätie nafúknutej duše spôsobuje, že sa kvapôčka ustáľuje do guľového tvaru. Stlačením kvapôčky sa táto deformuje, nadobúda väčší povrch. Pri uvoľnení sa však hneď vracia do pôvodného tvaru, vyrovnávaním sa napätia povrchovej blany. Na zväčšenie povrchu kvapky bolo potrebné vykonať prácu stlačením, táto práca sa utajila vo zväčšenom povrchu deformovanej kvapky ako povrchová energia. Pri odstránení príčiny stlačenia, utajená práca (ako povrchová energia) sa zas uvoľňuje a kvapka nadobúda pôvodný tvar. S povrchom kvapky teda súvisí povrchová (kapilárna) energia.

Keď sa stýkajú dve kvapky, zlejú sa. Prečo? Dve kvapky majú súčet povrchov väčší, ako jedna kvapka, ktorá vznikne ich zliatím. Preto prebieha zlievanie stýkajúcich sa kvapiek samovolne. Pritom sa znižuje energia o pokles povrchovej energie. Na základe tohto deja vzniká z kvapiek súvislá kvapalina, pretože je sústavou menšej energie, ako to bolo vtedy, kým bola v jednotlivých kvapkách.

Na zarosenom skle sú však nestýkajúce sa kvapky, prečo teda jedny rastú rýchlejšie ako druhé? Kvapky sú na strane, kde je teplejší vzduch



Obr. 3

a preto sa odparujú. V dôsledku toho kvapky nie sú stálými útvarmi. Kvapky mali by sa stabilizovať, keby sa nachádzali v nasýtených vodných parách. Ale ani tak sa nestabilizujú, pretože nad menšími kvapkami majú pary pri rovnakej teplote vyššie napätie, ako nad kvapkami väčšími a menej zakrivenými.

V dôsledku rôzneho napätia nasýtených pár nad kvapkami odlišnej veľkosti, nachádzajú sa väčšie kvapky vlastne v parách presýtených. Menšie kvapky sa rýchlejšie odparujú a ich nasýtené pary kondenzujú do väčších kvapiek, nad ktorými je napätie nasýtených pár menšie. Tak sa menšie kvapky postupne strácajú a väčšie kvapky naproti tomu zas narastajú. Menšie kvapky vlastne destilujú do kvapiek väčších a tak sa zlievajú i kvapky, ktoré sa nedotýkajú. Taký proces prebieha na pôvodne rovnomerne zarosenej okennej tabuli.

Rôzne veľké kvapky nemajú rovnakú stabilitu. Pretože objem rastie s tretou mocninou polomeru a povrch s druhou mocninou polomeru, sú malé kvapky útvarmi väčšej energie v pomere k objemu ako kvapky veľké, pretože ich povrch a povrchová energia sú väčšie v pomere k objemu akou kvapka veľkých. V prírode platí však pravidlo, že sústava je tým stálejšia, čím má menšiu energiu. Samovoľný priebeh prírodných dejov je taký, že sa pritom znižuje energia sústavy. Preto sú i kvapky vynalievavé a ak sa nemôžu zlievať pretože sa nestýkajú, nachádzajú cestu, ako vytvoriť sústavu menšej energie, trochu zložitejšou cestou.

Destilácia menších kvapiek do väčších prebieha napr. i v oblakoch. Oblak je pritom miesto, kde vzniká kondenzáciou vodnej pary množstvo kvapôčiek vo vystupujúcej, vodnou parou nasýtenej vzduchovej bubline. Výstup vlhkého vzduchu je podmienený tým, že vodná para má hustotu 0,6 proti hustote suchého vzduchu (jednotkovej). Pretože vystupujúca bublina dostáva sa do polôh menšieho tlaku vzduchu, rozpína sa adiabaticky a tým sa ochladzuje a vytvárajú sa podmienky kondenzácie. Vystupujúci prúd vzduchu udržiava kvapky oblaku vo výške, i keď sú tieto špecificky ťažšie od vzduchu. Pri prudkej kondenzácii vzniká množstvo malých kvapôčiek, ktoré rýchle destilujú do kvapiek väčších, v dôsledku toho prudko narastajúcich. Tieto kvapky už vystupujúci vzdušný prúd neudrží a preto padajú k zemi vo forme prudkého dažďa.

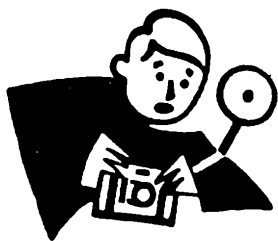
A keď sme sa už dostali k fyzikálnemu úkazu, ktorý nazývame oblakom (mračnom), povšimnime si, ako je tento úkaz prírody priamo klasickým príkladom a dokladom tvrdenia dialekticko-materialistickej filozofie: Hmotná skutočnosť je v stálnej premene, vývoji a pohybe, pričom každá zmena je podmienená súvislosťami so stavom hmotných útvarov okolia.

Mračno tvoria čochvíľa iné kvapky, pretože sa existujúce kvapky v istom okamihu jednak odparujú a jednak vznikajú nové kondenzačné jadrá a okolo nich sa formujú nové kvapky. Tie kvapky, ktoré pretrvávajú v niekoľkých po sebe nasledujúcich okamihoch, menia stále polohu i svoju

veľkosť, pretože sa podľa okolností alebo odparujú, alebo sa po zrážke s inými kvapkami zväčšujú, alebo narastajú destiláciou malých, miznúcich kvapiek do kvapiek väčších. Je preto v svojej existencii mračno len miestom vzniku a zaniku kondenzačných jadier vodnej pary. Nemá trvalú stavbu a každý stav, ktorým je určené rozmiestenie a pohyb okamžite existujúcich vodných kvapiek, sa stále mení.

Podobnú dynamickú povahu má každá hmotná skutočnosť, no v mnohých prípadoch nie je premenlivosť prístupná zmyslom (ako napr. u pevného skupenstva), takže sa zdá, ako keby existovali i predmety úplne stále.

Rúžné



T i b o r S z e b é n y i, p r o m. f y z., Bratislava:

M. O. Dolivo-Dobrovolskij

(K 100. výročiu narodenia)

K najslávnejším ruským elektrotechnikom patrí Michail Osi-povič Dolivo-Dobrovolskij, ktorého 100. výročie narodenia si touto cestou pripomíname. Jeho hlavná zásluha spočíva v tom, že prvý navrhol trojfázový systém striedavého prúdu, ktorý je základom súčasnej silnoprúdovej techniky a tento systém rozpracoval do najmenších podrobností. Ďalej zostrojil generátory, elektromotory a transformátory striedavého prúdu. Zaviedol trojfázový prúd aj do praxe a prvý realizoval prenos elektrickej energie na veľké vzdialenosti trojfázovým prúdom. Jeho zásluha pre elektrotechniku je obrovská.

Dolivo-Dobrovolskij sa narodil 2. 1. 1862 v Odese v rodine úradníka. Po úspešnom skončení reálnej školy v Odese, Dolivo-Dobrovolskij začal navštevovať v roku 1878 Rižský polytechnický inštitút. Počas jeho štúdia na inštitúte bolo obdobie veľkých študentských nepokojov. Za aktívnu účasť v tomto hnutí bol v roku 1881 vylúčený z inštitútu a zbavený práv navštevovať vysokú školu v Rusku, čo bolo príčinou jeho odchodu na elektrotechnické oddelenie Darmstadtského polytechnického inštitútu. Po skončení inštitútu Dolivo-Dobrovolskij začal pracovať ako inžinier v nemeckej Všeobecnej elektrotechnickej spoločnosti (A.E.G.), kde sa zanedlho stal spolupracovníkom riaditeľa tohto veľkého závodu.

Dolivo-Dobrovolskij dáva točivému magnetickému poľu talianskeho fyzika Ferrarisa omnoho praktickejšiu formu tým, že zavádza rozdiel fáz prúdov v dvoch susedných cievkách 120° miesto 90° , čím dochádza

k t r o j f á z o v é m u p r ú d u. Taktiež rozpracoval spojenie vodičov tohto systému do hviezdy a do trojuholníka. V roku 1889 Dolivo-Dobrovolskij demonštroval trojfázový prúd európskym elektrotechnikom, ktorých pozvala firma A.E.G. Ešte väčší bol jeho však triumf na Frankfurtskej elektrotechnickej výstave v roku 1891. Na výstave okrem systému trojfázového prúdu demonštroval p r e n o s e l e k t r i c k e j e n e r g i e t r o j f á z o v ý m p r ú d o m z Frankfurtu, na vzdialenosť 178 km. Po tejto výstave ako v Európe, tak aj v Amerike sa začalo budovať množstvo elektrární na prenos trojfázového prúdu.

Na Prvom všeruskom elektrotechnickom sjazde v Petrohrade v rokoch 1899—1900 Dolivo-Dobrovolskij predniesol obsiahly referát O s ú č a s n o m r o z v o j i t e c h n i k y t r o j f á z o v é h o p r ú d u. V tomto referáte hovoril o svojoj vynáleze nasledujúcimi slovami: „Elektrotechnická výstava v roku 1891 vo Frankfurte nad Mohanom bola hlavne preto dôležitá, že na nej prvý raz vystúpil verejne ako nový systém tzv. trojfázový prúd. Nehľadiac nato, že točivé magnetické pole bolo zistené prof. Ferrarisom 5—6 rokov predtým a malo svojich predchodcov, nehľadiac na to, že pokusy N. Teslu a taktiež moje existovali už rok-dva pred touto výstavou, musíme počítať rok tejto výstavy (1891) za rók narodenia trojfázového prúdu.“ V tom istom referáte veľmi podrobne opísal všetky výhody použitia generátorov striedavého prúdu a motorov založených na použití točivého magnetického poľa a nový typ transformátora, ktorý navrhol už v roku 1891, pre trojfázový striedavý prúd. V referáte rozobral všetky dôležité časti trojfázového zariadenia a posúdiac jeho klady prichádza k uzáveru, že „detailne rozpracovaný systém musí si vždy viac a viac získavať pole použitia a postupne si získavať všetky odvetvia priemyslu“. Ukázalo sa, že Dolivo-Dobrovolskij mal pravdu. Jeho vynálezy znamenali úplný prevrat v silnoprúdovej technike a tvoria základ elektrotechniky dnešných dní.

Dolivo-Dobrovolskij previedol celý rad pokusov v technike elektrických meraní a zostrojil niekoľko prístrojov, ako je napríklad f á z o m e r. Tiež pod jeho nepriamym vedením bol rozpracovaný spôsob získavania hliníka z jeho kyslíčnika, pomocou elektrolýzy pri vysokej teplote. V začiatkoch svojej vedecko-technickej práce v oblasti použitia elektrického prúdu v prvej polovici 80-tych rokov Dolivo-Dobrovolskij, ako aj mnoho iných elektrotechnikov, sa zaoberal galvanickými článkami a akumulátormi.

V posledných rokoch svojho života sa Dolivo-Dobrovolskij zaoberal problémami prenosu elektrickej energie na vzdialenosť pomocou striedavého prúdu vysoké napätia. Tento problém získava veľkú aktuálnosť v našej dobe, kedy vznikla nutnosť prenosu elektrickej energie na veľké vzdialenosti.

Podľa tvrdení jeho súčasníkov, Dolivo-Dobrovolskij mal neobyčajný talent prednášateľa. Prenikal v podstatu skúmaných javov nielen po-

mocou tých prostriedkov, kroté mu dávala matematická analýza, ale vďaka schopnosti pochopiť samotnú podstatu fyzikálnych javov silou svojej vynikajúcej intuície. Jeho rozhľad sa neohraničoval úzkou špecializáciou, zaujímal sa aj o iné vedecké odvetvia.

Keď sa v Petrohrade zakladal Polytechnický inštitút, prední ruskí vedecko-technickí pracovníci sa pokúsili získať Dolivo-Dobrovolského za vedúceho jednej z katedier tohto inštitútu. Dolivo-Dobrovolskij, žijúci v tom čase vo Švajčiarsku, bol ochotný sa vrátiť do Ruska, ale objektívne príčiny mu v tom zabránili. Rusko takto stratilo v osobe Dolivo-Dobrovolského, nie jeho vinou, vynikajúceho učiteľa, prvotriedneho vedca, technika a vynálezcu. Nemci sa stále domáhali, aby Dolivo-Dobrovolskij prijal nemeckú príslušnosť, no zbytočne, lebo až do konca svojho života zostal verným synom svojej vlasti a na všetky podobné návrhy odpovedal: „Mojou vlasťou je Rusko a ja som ruským príslušníkom.“ V rokoch 1909—1914 znovu pracoval v závode A.E.G. Potom odišiel do Švajčiarska, odkiaľ sa v roku 1919 presídlil do Darmstadtu, kde zanedlho zomrel.

Vysoká aktuálnosť jeho prác, radí Dolivo-Dobrovolského nielen za jedného z predných elektrotechnikov svojho času, ale za elektrotehniku majúceho v otázkach prenosu elektrickej energie na diaľku vedúcu svetovú úlohu.

Uranová ruda

Prvek uran je nejzaujímavejším prvkom ze všetkých kovových prvků. Byl objeven r. 1789 nemeckým chemikom M. H. Klaprothom. Tento prvek môže byť stroj-, pěti- i osmimocný. Jeho hmotové číslo je 238,07. Je tudíž ze všetkých prvků, ktoré sa v prírode vyskytujú ve forme rudy, najťažší. Klaproth ovšem netušil, jakou úlohu bude hrát uran v dějinách lidstva.

Povšimneme si výskytu uranové rudy v cizině. Francie není bohatá na uranovou rudu. Jen v Západní Bretani se vyskytuje uranová ruda, ale jen sporadicky. Není nikterak kvalitní, neboť obsahuje velmi malé procento kyslíčnicku uraničito-uranového U_3O_8 (zpravidla se kvalita uranové rudy hodnotí podle obsahu kyslíčnicku uraničito-uranového).

Náklad na 1 kg kovového uranu obnáší tu asi 9000 franků. Můžeme si tedy přibližně vypočítat kolik stojí Francii jedna atomová bomba, s kterými se dělají pokusy na Sahaře. A k ceně uranu se musí připočíst i náklad na ostatní příslušenství, jako atomový reaktor a jiné.

V USA nejsou na tom nikterak lépe. Uranová ruda se doluje v Horách Skalistých a obsahuje průměrně 0,3 % U_3O_8 . I zde si umíme vypočítat, jaký fantastický náklad si vyžádá jedna atomová raketa s doletem 5000 km.

Podle článku z časopisu Die Atomwirtschaft, 1960.

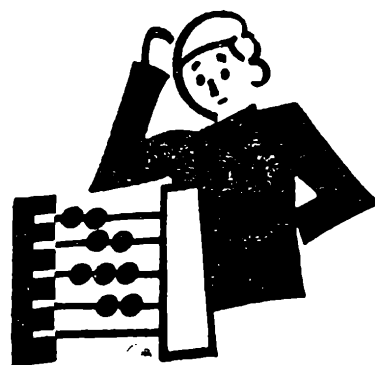
Inž. Dr. B.

Matematika

Jindřich Palát, Olomouc:

Archimedova metoda výpočtu objemů rotačních těles

(Dokončení)



Podstata Archimedovy metody, sloužící k výpočtu objemů rotačních těles, spočívá v uvedených čtyřech větách. Praktické použití uvedených vět k výpočtu objemů rotačních těles ukážeme na dvou příkladech. Příklady jsou zvoleny tak, aby ukázaly dvojí možnost použití zvláště věty 4.

Příklad 1. *Vypočítejte objem úseče rotačního paraboloidu, určené rovinou kolmou k ose rotace.*

Řešení. Rotační paraboloid je těleso, které vznikne rotací paraboly kolem její osy. Jak známo, lze vyjádřit rovnicí $y = ax^2$ parabolu souměrnou podle osy y pravoúhlé souřadnicové soustavy. Chceme-li, aby úseč rotačního paraboloidu měla výšku h a poloměr podstavy r , musíme požadovat, aby parabola určená rovnicí $y = ax^2$ procházela bodem $M(r, h)$. Rovnice (3) pak nabude tvaru

$$y = \frac{h}{r^2} x^2. \quad (4)$$

Úseč rotačního paraboloidu vznikne rotací části paraboly určené rovnicí (4) a podmínkami $0 \leq y \leq h$ kolem osy y . Po vynásobení rovnice (4) činitelem πr^2 dostaneme

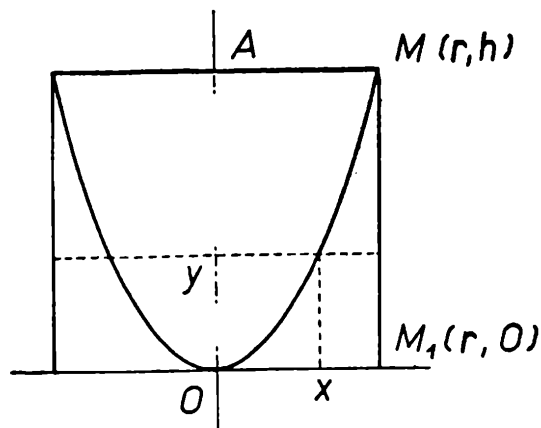
$$y\pi r^2 = h\pi x^2 \quad (5)$$

Na obr. 4 je znázorněna část paraboly a úsečka MM_1 . Rotací obrazce OMA kolem osy y vznikne rotační paraboloid a rotací obdélníka OM_1MA kolem osy y vznikne válec, jehož výška a podstava je totožná s výškou a podstavou úseče.

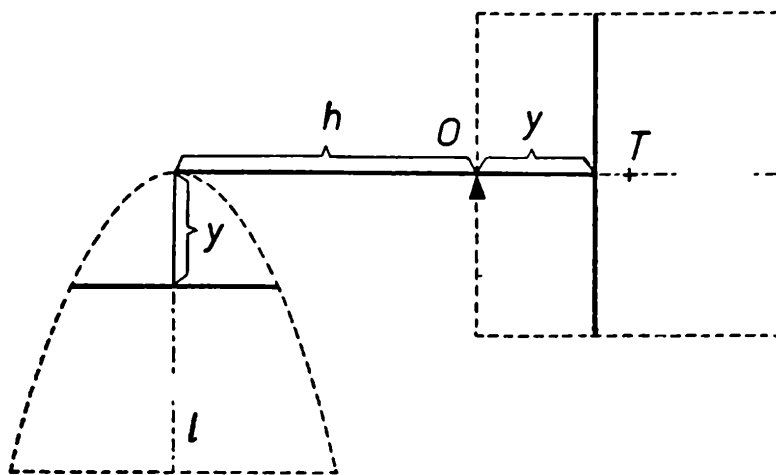
Zvolme libovolné y ($0 \leq y \leq h$) a veďme ve vzdálenosti y od počátku rovinu kolmou k ose y . Uvažujme odpovídající si elementy určené touto

rovinou. Každý z nich je kruh, jehož obsah v případě úseče je roven πx^2 a v případě válce je roven πr^2 . Přístupme nyní k vážení odpovídajících si elementů úseče a válce, které provedeme takto:

Uvedeme osu y otočením kolem počátku o 90° (obr. 5) do vodorovné polohy a budeme ji považovat za dvojzvratnou páku. Počátek zvolíme za osu páky. Vybraný element válce ponecháme na svém místě (tedy ve vzdálenosti y od osy páky) a jemu odpovídající element úseče zavěšíme ve vzdálenosti h od O na druhém rameni páky. Element úseče zavěšíme v těžišti (tj. ve středu kruhu). Z rovnice (5) vyplývá rovnováha libovolných dvou odpovídajících si elementů takto zavěšených. Podle věty 4. docházíme k závěru, že i příslušná tělesa jsou v rovnováze. Protože těžiště všech elementů úseče rotačního paraboloidu leží na přímce l (viz obr. 5), leží i těžiště úseče rotačního paraboloidu na přímce l , která je od osy páky vzdálena o h . Jak víme z odstavce 2, je působíště váhy válce vzdáleno od osy páky o $\frac{h}{2}$. Z rovnováhy těles plyne rovnost



Obr. 4



Obr. 5

$$hV_p = \frac{h}{2} V_v, \text{ neboli } V_p = \frac{1}{2} V_v,$$

kde V_p znamená objem úseče rotačního paraboloidu a V_v objem válce o stejné výšce a podstavě. Vzorec pro objem válce známe, takže

$$V_p = \frac{1}{2} h \pi r^2$$

Příklad 2. Vypočítejte objem rotačního elipsoidu, který vznikne rotací elipsy o poloosách a, b ($a > b$) kolem hlavní osy.

Řešení. Elipsu umístíme tak, aby střed měla v počátku, hlavní osu na ose x a vedlejší osu na ose y . Rovnice elipsy má tvar

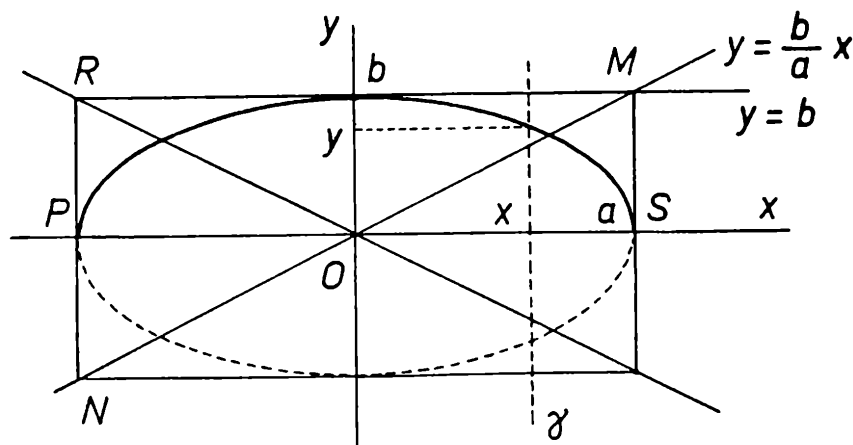
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

Rotační elipsoid vznikne rotací horní poloviny elipsy kolem hlavní osy (tzn., že uvažujeme $0 \leq y \leq b, -a \leq x \leq a$). Po vynásobení rovnice (6) činitelem $\pi a^2 b^2$ dostaneme

$$x^2 \pi b^2 + y^2 \pi a^2 = \pi a^2 b^2$$

a po úpravě

$$a \left[\pi \left(\frac{b}{a} x \right)^2 + \pi y^2 \right] = a \pi b^2. \quad (7)$$



Obr. 6

Na obr. 6 je znázorněna horní polovina elipsy, přímka, která má rovnici $y = b$, na ní ležící úsečka RM a dále přímka procházející počátkem o rovnici $y = \frac{b}{a} x$ a na ní ležící úsečka NM . Rotací horní poloviny elipsy kolem osy x vznikne rotační elipsoid. Rotací obdélníka $SMRP$ válec a rotací obrazce (složeného ze dvou shodných trojúhelníků) $SMONP$ dvojkužel s vrcholem v počátku.

Nechť tato tři rotační tělesa zaujímají polohu znázorněnou na obr. 6. Vedme libovolným bodem x ($-a \leq x \leq a$) rovinu γ , kolmou k rotační ose. Řez roviny γ s každým tělesem nám určí tři odpovídající si elementy. Každý z elementů je kruh, jehož obsah se v případě elipsy rovná πy^2 , v případě dvojkužele $\pi \left(\frac{b}{a} x \right)^2$ a v případě válce πb^2 . Vážení odpovídajících si elementů provedeme takto:

Osu x považujeme za páku a počátek za osu páky. Vpravo od osy páky ve vzdálenosti a zavěsíme elementy dvojkužele a elipsy (obr. 7). Všechny elementy zavěsíme v těžišti (tzn. ve středech kruhů). Z rovnice (7) vyplývá, že libovolný element válce je v rovnováze s elementy dvojkužele a elipsy jemu odpovídajícími, jak je to znázorněno na obr. 7. Podle věty 4. docházíme k závěru, že i příslušná tělesa jsou v rovnováze. Jak je vidět z obrázku 7, platí v tomto případě rovnost

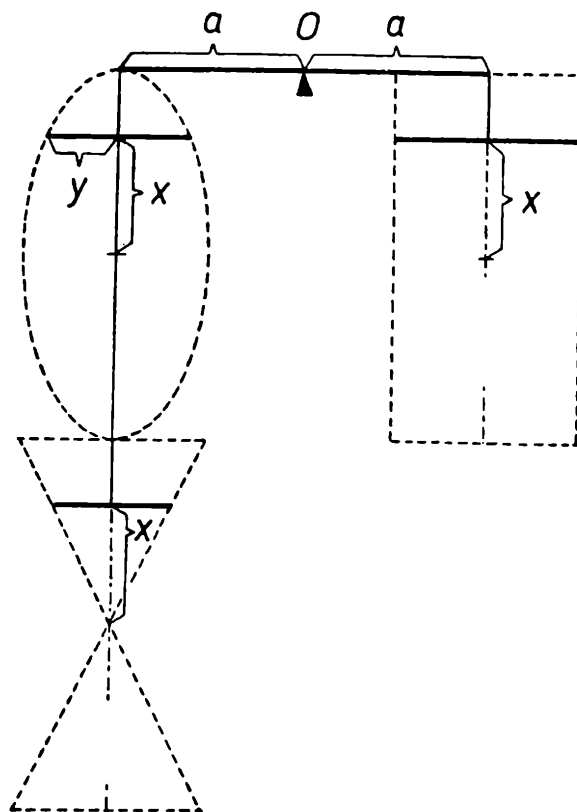
$$a(V_K + V_E) = aV_V$$

a po úpravě

$$V_E = V_V - V_K,$$

kde V_E je označení pro objem elipsoidu, V_V pro objem válce a V_K pro objem dvojkužele. Protože $V_K = \frac{1}{3} V_V$, dostáváme, že $V_E = \frac{2}{3} V_V$. Dosadíme-li za $V_V = 2\pi ab^2$, dostaneme

$$V_E = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$



Obr. 7

Cvičení.

1. Vypočítejte popsanou metodou objem koule o poloměru r ($V_K = \frac{4}{3} \pi r^3$).

Ukažte, že objem koule se rovná třem polovinám objemu válce, do něhož je daná koule vepsaná. (Výsledek, jehož si Archimedes nesmírně vážil.)

2. Stejným způsobem vypočítejte objem úseku rotačního hyperboloidu, vzniklého rotací hyperboly o poloosách a, b kolem osy x . Hyperbola je určena rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; volte $x \geq 0$, výšku úseče h .

$$\left(V_H = \frac{1}{3} \pi h^2 \frac{b^2}{a} (3a + h) \right).$$

Literatura.

1. Archimedes, Werke. T. L. Heit-Berlin 1914.
2. Archimedes, V. F. Kagan Orbis-Praha 1953.
3. Matematika i pravdepodobnyje rassuždenija, G. Polya Inoizdat-Moskva 1957.

Úvod do integrálního počtu

(Dokončení)

Uvedme ještě dvě věty analogické větám diferenciálního počtu.

V ě t a 2. *Násobící konstantu lze vytknout před integrační symbol.*
Platí tedy

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Můžeme říci, že integrál násobku funkce je roven násobku integrálu funkce.

V ě t a 3. *Neurčitý integrál součtu několika funkcí se rovná součtu neurčitých integrálů těchto funkcí.*

$$\begin{aligned} & \int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \\ & = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Ukažme si užití obou vět na příkladech.

P ř í k l a d 6. Integrál $\int (5x^3 - 4x^2 + 3) dx$ vypočteme takto

$$\begin{aligned} \int (5x^3 - 4x^2 + 3) dx &= \int 5x^3 dx - \int 4x^2 dx + \int 3 dx = \\ &= 5 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 3 \int dx = \frac{5}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 3x + c = \\ &= \frac{5}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 3x + c; (-\infty; \infty) \end{aligned}$$

P ř í k l a d 7. Podobně upravíme integrál $\int (3 \sin x - \sqrt[3]{4x^2} + \frac{5}{x}) dx = 3 \int \sin x dx - \sqrt[3]{4} \int x^{\frac{2}{3}} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = -3 \cos x -$

$$- \sqrt[3]{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + 5 \lg |x| + c = -3 \cos x - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} \sqrt[3]{4} + 5 \lg |x| + c$$

pro všechna $x \neq 0$, tj. v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

P ř í k l a d 8. Počítáme-li $\int (3x^2 + 2x - 4)(5x - 6) dx$, vynásobíme nejprve oba mnohočleny a dostaneme

$$\begin{aligned} (3x^2 + 2x - 4)(5x - 6) &= 15x^3 + 10x^2 - 20x - 18x^2 - 12x + 24 = \\ &= 15x^3 - 8x^2 - 32x + 24. \end{aligned}$$

Pak je

$$\begin{aligned} & \int (3x^2 + 2x - 4)(5x - 6) dx = \\ &= 15 \int x^3 dx - 8 \int x^2 dx - 32 \int x dx + 24 \int dx = \\ &= \frac{15}{4} x^4 - \frac{8}{3} x^3 - 16x^2 + 24x + c \end{aligned}$$

pro všechna x z intervalu $(-\infty; \infty)$.

Příklad 9. Chceme-li vypočítat $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$, nahradíme $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. Integrovaná funkce se tím podstatně zjednoduší. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \\ &= \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + c \text{ pro všechna} \end{aligned}$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Příklad 10. Při výpočtu $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ je třeba si uvědomit, že v integrované funkci $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ můžeme jednotku v čitateli zlomku nahradit součtem druhých mocnin $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a funkci rozložit na součet dvou zlomků a pak krátit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Pak je

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$$

Integrál je definován pro všechna x , pro něž je současně $\sin x \neq 0$ a $\cos x \neq 0$.

Příklad 11. Počítáme-li $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$, nahradíme nejprve $\cos^2 \frac{x}{2}$ kosinem jednoduchého úhlu podle vztahu $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ a zlomek rozdělíme na dva zlomky. Pak je

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} (\int dx + \int \cos x dx) = \\ &= \frac{1}{2} (x + \sin x) + c \end{aligned}$$

pro všechna x z intervalu $(-\infty; \infty)$.

Příklad 12. Při úpravě integrované funkce v integrálu

$\int \frac{\cotg x}{\sqrt{1 + \cotg^2 x}} dx$ postupujeme takto

$$\frac{\cotg x}{\sqrt{1 + \cotg^2 x}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{|\sin x|}}.$$

Je-li $\sin x > 0$, je $|\sin x| = \sin x$ a integrovaná funkce $\frac{\cotg x}{1 + \cotg^2 x} = \cos x$. To platí v intervalech $(2k\pi; (2k + 1)\pi)$.

Pak je

$$\int \frac{\cotg x}{\sqrt{1 + \cotg^2 x}} dx = \int \cos x dx = \sin x + c$$

Je-li $\sin x < 0$, je $|\sin x| = -\sin x$ a integrovaná funkce $\frac{\cotg x}{\sqrt{1 + \cotg^2 x}} = -\cos x$. To platí v intervalech $((2k + 1)\pi; (2k + 2)\pi)$.

Hledaný integrál pak je

$$\int \frac{\cotg x}{\sqrt{1 + \cotg^2 x}} dx = -\int \cos x dx = -\sin x + c.$$

P ř í k l a d 13. Určete primitivní funkci $F(x) =$

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2} dx,$$

jestliže pro $x = -1$ je $F(x) = 3$.

Vypočteme nejprve primitivní funkci jako v minulých příkladech

$$F(x) = \int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2} dx$$

$$F(x) = \int \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$F(x) = 2 \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx$$

$$F(x) = 2x - 3 \cdot \lg |x| - \frac{4}{x} + c$$

Nyní do výsledku dosadíme za $F(x)$ dané číslo 3 a za x do pravé strany rovnice číslo -1 . Z takto získané rovnice vypočteme integrační konstantu c .

$$3 = -2 + 4 + c$$

$$c = 1.$$

Hledaná primitivní funkce pak je

$$F(x) = 2x - 3 \cdot \lg |x| - \frac{4}{x} + 1$$

pro všechna $x \neq 0$.

Cvičení.

$$1. \int \sqrt[3]{x^4} dx. \quad 2. \int x^2 \sqrt[3]{x^2} dx. \quad 3. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx. \quad 4. \int \frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$5. \int x^m \sqrt[n]{x} dx. \quad 6. \int \frac{dx}{x^m \sqrt[n]{x}} \quad 7. \int \frac{x^m \sqrt[n]{x}}{x^n \sqrt[m]{x}} dx \quad 8. \int \sqrt[3]{3x^2} dx.$$

$$9. \int \frac{a dx}{\sqrt[n]{bx^m}} \quad 10. \int \frac{dx}{3x \sqrt[4]{3x^3}} \quad 11. \int \frac{2x dx}{5 \sqrt[6]{7x^5}}$$

$$12. \int x(x-1)(x+2) dx. \quad 13. \int (2x+3)^3 dx.$$

$$14. \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx. \quad 15. \int (2x-1)^3 \sqrt{x} dx.$$

$$16. \int \left(ax - \frac{b}{x}\right)^2 dx. \quad 17. \left(\sqrt{3x} - \sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 dx. \quad 18. \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$19. \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx. \quad 20. \int \frac{dx}{1 - \cos 2x}. \quad 21. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$22. \int \operatorname{tg}^2 x dx. \quad 23. \int \frac{3\sin^2 x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx. \quad 24. \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx.$$

25. Určete primitivní funkci $F(x) = \int (3 - 4x + 5x^2) dx$, jestliže pro $x = -1$ je $F(x) = \frac{10}{3}$.

26. Určete primitivní funkci $F(x) = \int \frac{3 + 4x}{x} dx$, jestliže pro $x = -1$ je $F(x) = 4$.

Výsledky.

$$1. \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + c; x \geq 0. \quad 2. \frac{3}{11} x^3 \sqrt[3]{x^2} + c; x \geq 0.$$

$$3. \frac{12}{13} x \sqrt[12]{x} + c; x > 0. \quad 4. \frac{12}{31} x^2 \sqrt[12]{x^7} + c; x > 0.$$

$$5. \frac{n}{mn + n + 1} x^{m+1} \sqrt[n]{x} + c; x > 0 \quad 6. \frac{n}{n - 1 - mn} \frac{x^{1-m}}{\sqrt[n]{x}} + c; x > 0$$

$$7. \frac{mn}{m^2 + m - mn^2 - n + mn} x^{m-n+1} \sqrt[mn]{x^{m-n}} + c; x > 0.$$

$$8. \frac{3}{5} x \sqrt[3]{3x^2} + c; \text{ pro všechna } x. \quad 9. \frac{anx}{(n-m) \sqrt[n]{bx^m}} + c; x \geq 0.$$

$$10. -\frac{4}{9 \sqrt[4]{3x^3}} + c; x > 0. \quad 11. \frac{12}{35} x^6 \sqrt[7]{\frac{x}{7}} + c; x > 0.$$

$$12. \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 + c; (-\infty; \infty)$$

$$13. 2x^4 + 12x^3 + 27x^2 + 27x + c; (-\infty; \infty)$$

$$14. \frac{2 \sqrt{x}}{15} (3x^2 - 20x + 15) + c; (0; \infty)$$

$$15. \frac{2}{315} x \sqrt{x} (280x^3 - 540x^2 + 378x - 105) + c; (0; \infty).$$

$$16. \frac{1}{3} a^2 x^3 - 2abx - b^2 x^{-1} + c; x \neq 0.$$

$$17. \frac{3}{2} x^2 - 6x + 3 \lg |x| + c; x \neq 0.$$

$$18. \sin x + \cos x + c; x \neq \frac{\pi}{4} (3 + 4k)$$

$$19. 2 \sin x + c; x \neq k\pi.$$

$$20. -\frac{1}{2} \cotg x + c; x \neq \frac{\pi}{4} (2k + 1)$$

$$21. \frac{1}{2} (x - \sin x) + c; (-\infty; \infty).$$

$$22. \tg x - x + c; x \neq \frac{\pi}{2} (2k + 1).$$

$$23. 3 \tg x + 4 \cotg x + c; x \neq k \frac{\pi}{2}.$$

$$24. -\cotg x + c; x \neq k\pi.$$

$$25. \frac{5}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + 10.$$

$$26. 3 \lg |x| + 4x + 4.$$

Inž. V a s i l Č a p l a, Praha:

Vznik a vývoj reléových a elektronických samočinných počítačů

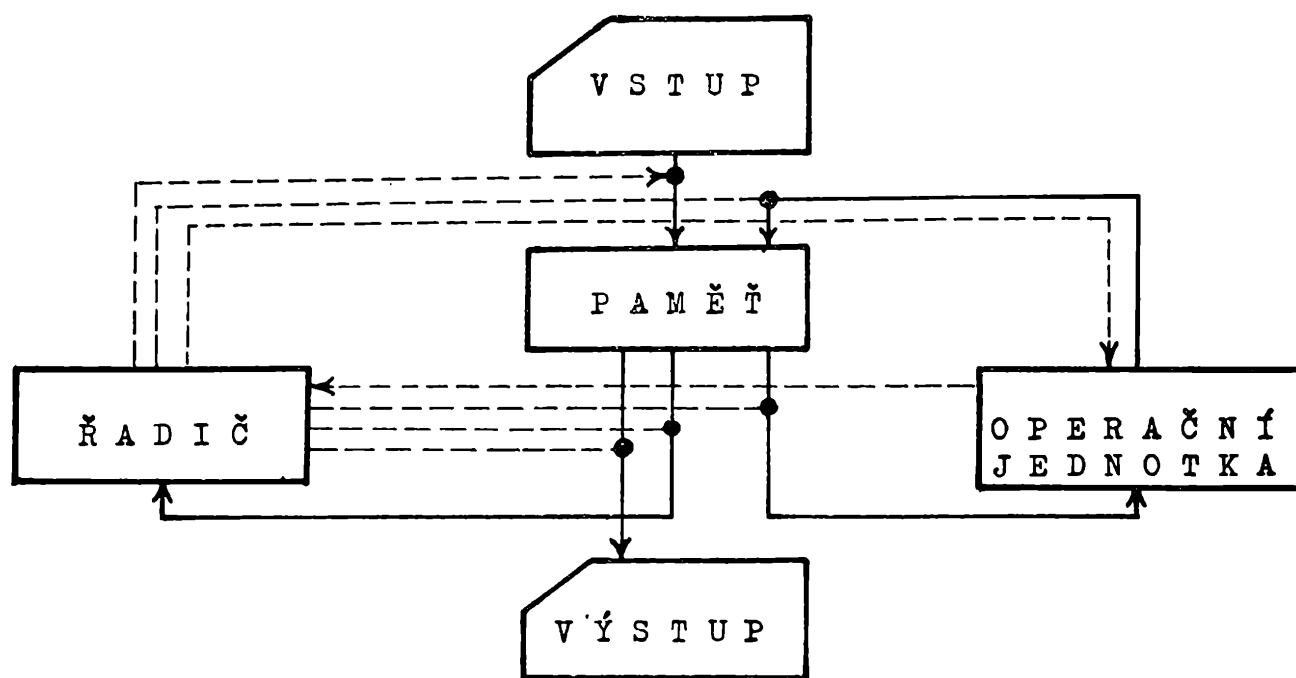
(Dokončení)

Složení moderních číslicových samočinných počítačů

Většina moderních samočinných počítačů se v podstatě skládá ze tří hlavních částí neboli jednotek. Jsou to: paměť, aritmetická (operační) jednotka a řadič.

Paměť je zařízení určené k uchování počátečních hodnot, různých konstant a jednotlivých instrukcí, tj. předpisů, podle nichž stroj pracuje. Instrukce jsou dány tak, aby výstupní informace dávaly odpověď na položené otázky, představující řešený úkol. Během výpočtu se zaznamenávají v paměti informace zpracované strojem (mezi výsledky a transformované instrukce) a výsledek výpočtu.

Paměť se dělí na množství paměťových míst (buněk), kterým jsou



Obr. 2 Hradlové zařízení.

přiřazena čísla, zvaná a d r e s y. V buňkách může být umístěno jedno slovo, skládající se z posloupnosti znaků, jako číslic, písmen apod.

Aritmetická (operační) jednotka je ta část stroje, která provádí aritmetické operace s čísly a také nearitmetické operace, a proto

jí říkáme operační jednotka, např. rozdělování slov na části, změny instrukcí aj. Operační jednotka dokáže provést výkony, které se považují za nejjednodušší prvky myšlení, např. srovnávat a nacházet společné, nebo rozdílné znaky. Proto se někdy samočinným počítačům říká „m y s l í c í s t r o j e“, což ovšem není správné.

Ř a d i č zastupuje výpočtáře a řídí chod celého stroje, tj. práci aritmetické jednotky, přísun čísel do ní a odsunutí (záznam) výsledku do paměti, dále přísun dalších instrukcí do řadiče a činnost výstupu pomocí h r a d l o v é h o z a ř í z e n í (obr. 2).

Kromě výše uvedených tří hlavních částí neboli jednotek, obsahuje každý samočinný počítač ještě mechanismy, nebo celá zařízení v s t u p u a v ý s t u p u. Prostřednictvím v s t u p n í c h z a ř í z e n í (mechanismů) vkládáme do stroje čísla a instrukce, jimž říkáme i n f o r m a c e. V ý s t u p n í z a ř í z e n í převádějí výsledky, získané ve stroji do „řeči“ nebo tvaru srozumitelného obsluhovateli. Hlavní jednotky, vstupní a výstupní zařízení, jsou logicky spojeny signálními cestami.

2. Elektronické samočinné počítače

Již v r. 1941 se vyskytly návrhy na stavbu elektronických samočinných počítačů. Takové návrhy dával Norbert Wiener a známý teoretik samočinných počítačů A. M. Turing, který při příjezdu z Anglie do Spojených států nabídl Johnu von Neumannovi postavení elektronického počítače. Turing projektoval již v r. 1936 stavbu číslicového počítače a vytvořil novou teorii samočinných počítačů. Wiener věnoval v r. 1940 mnoho času studiu diferenciálního analyzátoru, sestrojeného Bushem. Zjistil, že tento stroj nelze nazvat univerzálním počítačem, a proto navrhl sestrojení takových strojů, které by mohly řešit nejen obyčejné diferenciální rovnice, nýbrž i ostatní početní problémy. Tyto své úvahy sdělil Wiener Bushovi pro eventuální použití ve válce.

Roku 1944 se Wiener zajímal o stroj MARK I a ve svém životopise „Jsem matematik“ píše: „S novějšími počítaacími stroji, používajícími relé, jsem se setkal na Harvardské universitě, kde jsem pracoval za vedení H. Aikena. Aiken je tehdy vyvíjel pro vládu. Jeho práce na mne udělala velký dojem a vyvolala můj obdiv. Aiken sám pokládal svou práci za moderní provedení primitivních počítacích strojů, které před 100 lety konstruoval v Anglii Babbage. Byl jsem překvapen, že Aiken byl úplně oddán myšlence relativně pomalých mechanických relé jako hlavního nástroje mechanických počítacích strojů a nepřikládal velkého významu rychlosti, které bylo možno dosáhnout použitím elektronických relé. Aiken nyní sám odložil toto omezení v přístupu k věci a stal se jedním z nejaktivnějších a nejoriginálnějších vynálezců a konstruktérů elektronických počítačů.“ Aiken pak sestrojil elektronickou verzi stroje MARK III a IV.

Neumann (zemřel r. 1957) je považován za největšího teoretika elektronických samočinných počítačů. V r. 1941 formuloval základní rysy moderních samočinných počítačů takto:

1. Stroj provádí a řadí operace samočinně.
2. Stroj si přetváří výpočtový program do něho vložený.

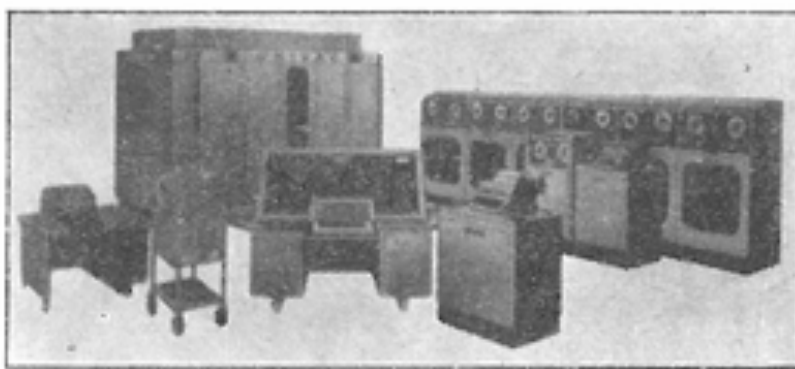
Již r. 1941 vypracoval Neumann projekt elektronického samočinného počítače, který však byl dokončen až v dubnu 1952. Je to čtyřadresový stroj, zaujímající plochu 1200 čtv. stop a mající příkon 50 kW. Stavební prvky: 3600 elektronek a 10 000 germaniových diod. Paměť tvoří rtuťové zpožďovací linky o kapacitě 1024 slov. Vstup a výstup se dále pomocí děrné pásky.

Aby bylo možno za druhé světové války zvládnout rozsáhlé výpočty, zejména balistické, dalo ministerstvo národní obrany Spojených států v r. 1943 příkaz k stavbě elektronického počítače. Projekt vypracovali J. P. Eckert mladší a J. W. Mauchly. Stroj, který navazuje na způsob stavby Aikenova Mark I, byl postaven v Moore School of Electrical Engineering Pennsylvanské university a dostal název ENIAC, tj. Electronic Numerical Integrator and Computer, což znamená Elektronický číslicový integrátor a počítač. Tento stroj byl dokončen až v r. 1946, tedy po ukončení druhé světové války a instalován u Balistické výzkumné laboratoře v Aberdeenu. ENIAC se skládal až z 18 000 elektronek, k čemuž bylo třeba zvláštních chladicích zařízení a opatření proti požáru, z 1500 relé, 70 000 odporů, 10 000 kondenzátorů a 500 000 přepínacích spojů. Sčítání trvalo 200 μ s (mikrosekund), násobení 2,8 ms (milisekund), dělení 6 ms. Vstup se dále pomocí programovacích desek a děrných štítků, výstup prostřednictvím děrných štítků. Stroj vážil 30 tun a zaujímal plochu 135 m². Příkon 150 kW. Na dnešní dobu je to dědeček a monstrum, neboť nové stroje jsou několikrát menší, až miniaturní. Tento stroj byl v provozu od r. 1947 do r. 1955. Roku 1957 byl rozebrán a uložen ve skladišti. Pro demonstrační účely sestavil jej opět v r. 1958 washingtonský Smithsonianův institut a National Science Foundation dal zhotovit 3 kopie tohoto stroje. Problém štěpení uranu vypočítal ENIAC za 103 hodiny, zatím co školený matematik by potřeboval 100 let k vyřešení problému.

Na základě zkušeností se stavbou stroje ENIAC sestrojili Eckert a Mauchly pro firmu Remington Rand velký samočinný počítač UNIVAC, tj. Universal Automatic Computer - Univerzální samočinný počítač. Tento stroj byl modernizován, a tak máme nyní UNIVAC II a III. K velkým strojům též firmy patří též stroje UNIVAC-Scientific a UNIVAC-LARC. Stroj UNIVAC-File patří ke středním strojům, zatímco stroje UNIVAC 40, 60 a 120 jsou malé stroje. U nich jak vstup, tak i výstup a paměť mohou pojmout jen 4, 6 nebo 12 desetimístných čísel. Známý je též malý stroj UCT (Univac Calculating Tabulator), který doplňuje soupravu děrnostítkových strojů Remington Rand (obr. 3).

V e S p o j e n ý c h s t á t e c h je skoro 100 podniků, zabývajících se stavbou samočinných počítačů. Největší z nich je však firma IBM, která postavila elektronické počítače mnoha typů malých, středních i velkých. Firma IBM má své filiálky v 84 státech. Cena jednoho počítače IBM činí od 30 000 do 8 mil. dolarů a stroj STRETCH stojí ještě i více. Podle „sedmiletého plánu“ chce do r. 1965 IBM vyrobit 10 000 počítačů. Je však jisté, že toto číslo bude překročeno, neboť některé počítače vyrábí firma v USA, v Anglii, v Kanadě, ve Francii a v NSR sériově po 10 kusech denně.

K větším podnikům USA, vyrábějícím samočinné počítače, patří ještě Royal McBee, vyrábějící stroje LGP-30, z kterých jsme dovezli 2 kusy do ČSSR.



Obr. 3. Stroj U n i v a c II.

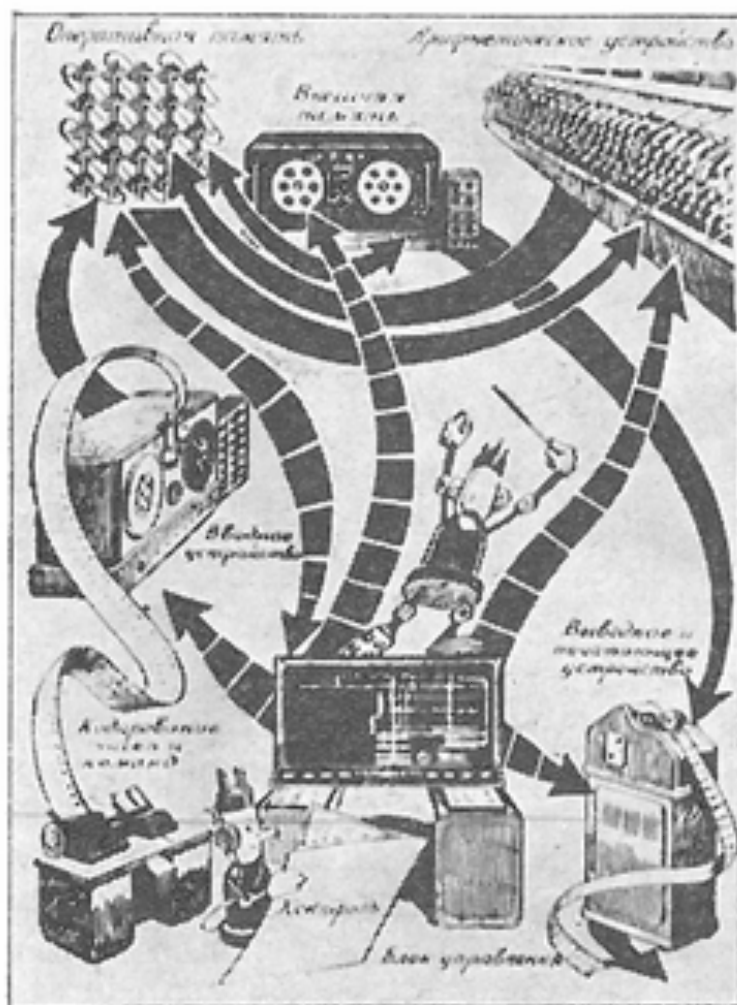
A n g l i e začala se stavbou elektronických samočinných počítačů asi o rok později než USA. Avšak počítače britské výroby jsou mnohem levnější, a proto některé americké firmy vstupují do spolupráce s anglickými podniky a vyrábějí počítače v Anglii pod společnou firmou, např. National Elliott. V Anglii vyrábí samočinné počítače mnoho továren. Největší z nich je Ferranti, která vyrobila stroje řady typů, z nichž Sirius jsme objednali pro ČSSR.

V ý z k u m a v ý v o j samočinných počítačů v Anglii se soustřeďuje zejména na universitách v Manchesteru, v Cambridge a v Londýně. Na elektrotechnické fakultě university v Manchesteru byl pod vedením prof. F. C. Williamse sestrojen počítač Mark 1, který pak vyrobila firma Ferranti. Na stejné universitě se staví nejmodernější anglický počítač MUSE, zvaný též ATLAS, který vyrobí v r. 1962 též Ferranti. Samočinný počítač EDSAC I, postavený v matematické laboratoři university v Cambridge pod vedením prof. M. V. Wilkese, byl vzorem pro stavbu počítače LEO I. V laboratoři Birkbeck College londýnské university byl sestrojen počítač MAC 2 a APER, který byl vzorem pro stavbu počítačů HEC a APE(X)C.

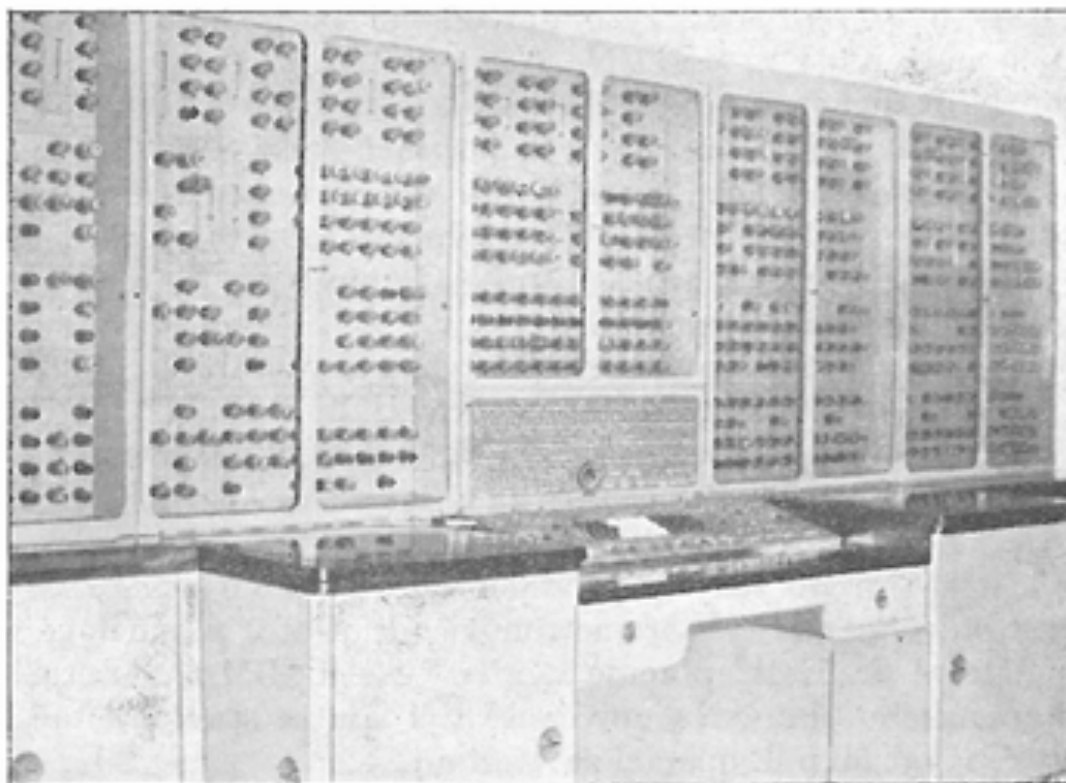
S o v ě t s k ý s v a z začal s výzkumem a vývojem samočinných počítačů v r. 1948. Podle zkušeností v jiných státech začal stavět jen

elektronické počítače. První počítač MESM byl postaven r. 1951 v Akademii věd Ukrajinské SSR pod vedením akademika S. A. Lebeděva, který již r. 1952 postavil v Akademii věd SSSR v Moskvě velký samostatný počítač BESM-1 a pak BESM-2. V r. 1960 postavil též počítač M-20, vykonávající 20 000 operací za vteřinu.

K velkým počítačům SSSR patří též stroj STRELA, na kterém bylo za jeden rok uskutečněno asi 17 900 mil. operací, k čemuž by tisícičlenný personál úředníků, pracujících s obyčejnými kalkulačkami, potřeboval více než 24 let (obr. 4).



Obr. 4. Stroj Strela. Kódování čísel (slov) a instrukcí (rusky: kódirovanije čísel i komand) se provede na dálnopisu, čímž vznikne dálnopisná (děrná) páska. Ta se vloží do snímacího zařízení, které přečte záznam na pásce a elektrickými impulsy vstupního zařízení (vводное устройство) provede záznam informací v jádrové paměti, která tvoří tzv. operativní paměť (operativnaja pamjat'), a která je spojena s vnější pamětí (vněšnaja pamjat'). Operativní paměť předává informace aritmetické jednotce, zvané též zařízení (арифметическое устройство) k zpracování podle sledu, určeného řadičem, jenž je na obrázku umístěn v řídicím bloku (блок управления). Zpracované informace se zatímne zaznamenají ve vnější paměti a odtud se odsunou do výstupu, spojeného s tiskacím zařízením (выводное и печатающее устройство), vyhotovujícím hotové sestavy (výsledky).



Obr. 5. Polocetek stroje U r a l.



Obr. 6. Stroj S E S M. (Specializirovannaja elektr. sčotnaja mašina.) Stroj je určen pro hydrotechnické stavební výpočty.

V SSSR byly vyrobeny tyto univerzální počítače: střední M-2 a CEM-1 a malé KIJEV, SETUŇ, M-3 a URAL-1, z kterého jsme dovezli do ČSSR dva stroje. Nyní dovezeme ještě URAL-2 (obr. 5).

Kromě univerzálních samočinných počítačů staví SSSR též speciální počítače, např. POGODA (pohoda) pro určení počasí, LUČ (paprsek) pro optické účely, SESM pro stavební výpočty (obr. 6) aj.

Z kapitalistických států je nutno se zmínit o Francii. Její CAB 500 byl objednán pro ČSSR.

Německá spolková republika vyrábí stroje Siemens 2002 a řadu dalších, z nichž Z-22 jsme dovezli do ČSSR.

Hodnotné počítačí stroje staví Švédsko a Nizozemsko.

V Itálii se konstruují počítače na universitě v Pise (CEP) a u firmy Olivetti.

Velký význam pro stavbu počítačů má Japonsko. Byly tam vyvinuty stavební prvky parametronové (dr. Goto) a tunelové diody, jejíž vynálezce dr. Esaki pracuje nyní v USA u IBM za desetinásobek svého japonského platu. Na universitě v Tokiu se staví počítač, který bude vykonávat 50 mil. operací za vteřinu.

Československo. Ve Výzkumném ústavu matematických strojů se staví počítač EPOS, jehož elektronková verze bude hotova v r. 1962. Zároveň se připravuje i tranzistorová verze. Stavíme též i jiné samočinné počítače.

Celkový nynější stav počítačů je: USA - 9908, Evropa kapit. - 1874, SSSR - 800 kusů.

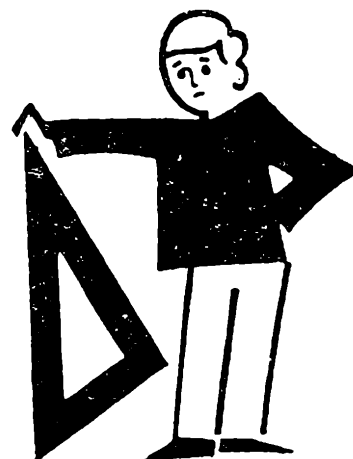
Literatura

- [1] Booth A. D. - Booth K. H. V.: Automatic Digital Calculators, Butterworth Sc. Publications, Londýn, 1956.
- [2] Kitov A. I.: Elektronnyje cifrovije mašiny, Sov. radio, Moskva, 1956.
- [3] Klír J. Čapla V.: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 38, č. 4, 5 a 6.
- [4] Kobrinskij N. - Pekelis V.: Bysteje mysli, Molodaja gvardia, Moskva, 1959.
- [5] Lebeděv S. A. Mělnikov V. A.: Obščije opysanije BESM, GIFML, Moskva, 1960.
- [6] Matematické stroje, Sborník I, II, III, IV.
- [7] Raichl J.: Charakteristické rysy samočinných počítačů. Kurs programování, 1959.
- [8] Smirnov G. D.: Elektronnyje cifrovije mašiny, Gosenergoizdat, Moskva, 1958.
- [9] Wilkes M. V.: Automatic Digital Computers, Methuen, Londýn, 1957.
- [10] Časopisy: Computers and Automation, New York, ročníky 1960, 1961, Automatizace, SNTL, roč. 1960, 1961.

Josef Novák, ČVUT, Praha:

Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly

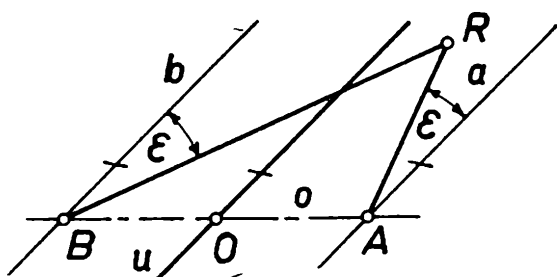
(Dokončení)



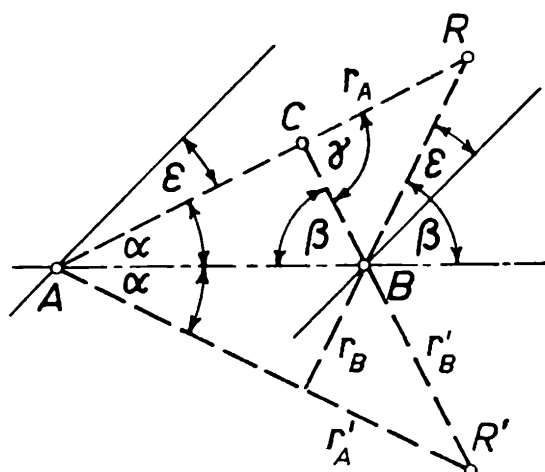
Z poučky P. 2 bezprostředně plyne poučka

P. 3. *Vrcholové průvodiče bodu rovnoosé hyperboly svírají s její asymptotou stejné, opačně orientované úhly.*

Ježto každá přímka, která prochází vrcholem rovnoosé hyperboly a není rovnoběžná s jejími asymptotami, je vrcholovým průvodičem bodu této hyperboly, můžeme s použitím poučky P. 3 vyslovit poučku o dalším vytvoření rovnoosé hyperboly



Obr. 6



Obr. 7

P. 4: *Nechť spojnice bodů A, B , které leží na 2 různých rovnoběžkách a, b , svírá s a úhel $\frac{\pi}{4}$. Otočíme-li pak přímky a, b kolem bodů A, B v nestejném smyslu o libovolný úhel ϵ , je jejich průsečík bodem rovnoosé hyperboly. Rovnoběžky a, b určují směr její jedné asymptoty a středy otáčení jsou její vrcholy (obr. 6).*

Další zajímavou vlastnost vrcholových průvodičů uvedeme v poučce P. 5: *Vrcholové průvodiče souměrně položených bodů R, R' rovnosé hyperboly podle její hlavní (vedlejší) osy, které procházejí různými (týmiž) vrcholy, jsou k sobě kolmé.*

D ů k a z (obr. 7). Vrcholové průvodiče r_A, r_B a r'_A, r'_B jsou souměrně položeny podle hlavní osy o a svírají s ní úhly α, β .

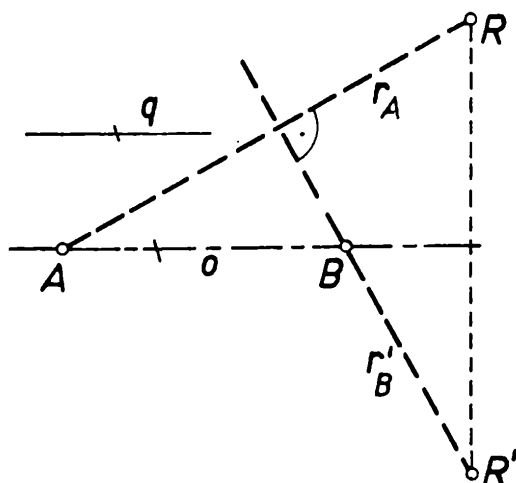
Podle P. 4 platí

$$\alpha + \varepsilon = \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

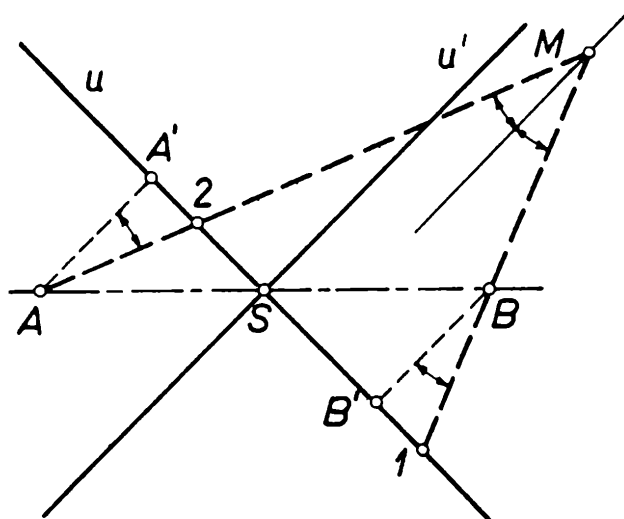
a je tedy

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Trojúhelník ABC je proto pravoúhlý a je tedy $r_A \perp r'_B$, což jsme měli dokázat.



Obr. 8



Obr. 9

Snadný důkaz druhé části věty pro body souměrně položené podle vedlejší osy přenecháme čtenáři; užitečný bude obr. 3.

Věnujme se dále úloze

Ú. 3. *Sestrojte rovnosou hyperbolu, která je určena svým vrcholem A , bodem R a směrem hlavní osy q .*

Ř e š e n í (obr. 8). Sestrojíme hlavní osu o a bod R' souměrně položený podle o . Podle poučky P. 5 je vrcholový průvodič r'_B kolmý na r_A a protíná hlavní osu v druhém vrcholu B rovnosé hyperboly. Další postup je již zřejmý.

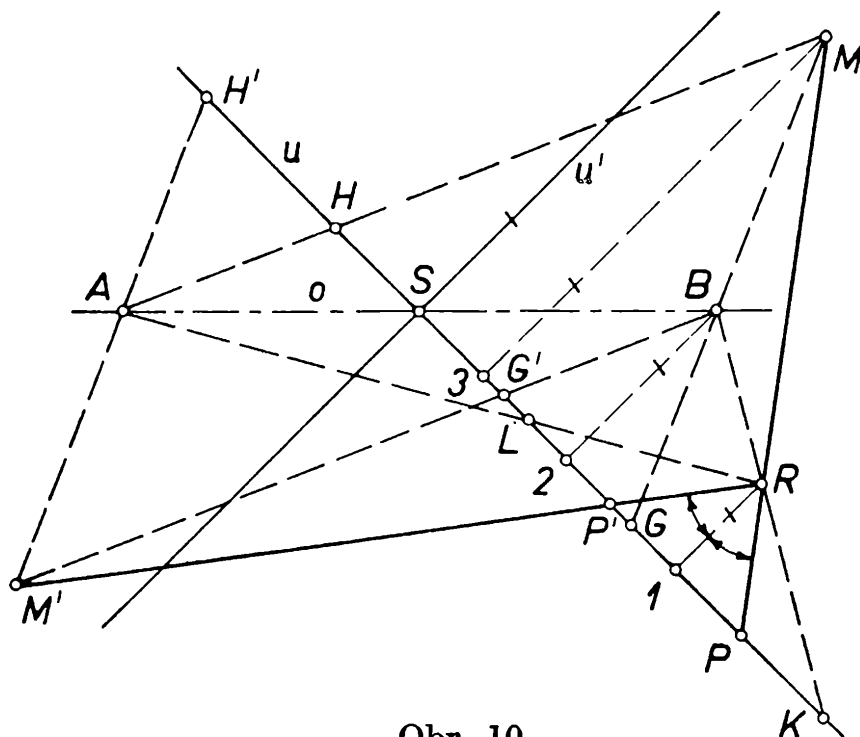
Jestliže se ještě vrátíme k poučce P. 5 a k doprovodnému obrázku 7, vidíme, že průsečík výšek v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body rovnosé hyperboly, je rovněž bodem této hyperboly. Např. v trojúhelníku ABR je průsečík výšek R' . Ovšem tento výsledek je zvláštním

případem obecné věty, která není omezena podmínkou, že mezi uvažovanými body musí být vrcholy rovnosé hyperboly.

Všimněme si ještě vztahu vrcholových průvodičů bodu rovnosé hyperboly k jejím asymptotám.

P. 6. *Vrcholové průvodiče bodů rovnosé hyperboly vytínají na jejích asymptotách shodné úsečky, jejichž délka je rovna excentricitě hyperboly.*

D ů k a z (obr. 9). Pravoúhlé průměty vrcholů A, B rovnosé hyperboly do její asymptoty u označíme A', B' a průsečíky vrcholových průvodičů libovolného bodu M hyperboly s touto asymptotou označíme 1 a 2 . Ze shodnosti trojúhelníků $BB'1$ a $AA'2$ plyne $B'1 = A'2$ a je tedy $12 = A'B' = \text{konst.}$ Tím jsme dokázali první část poučky. Trojúhelník $SA'A$ je rovnoramenný a platí proto $A'B' = 2 \cdot A'A$. Lineární excentricita rovnosé hyperboly $e = \sqrt{2} \cdot SA$, avšak $SA = \sqrt{2} \cdot AA'$ a je tedy



Obr. 10

$A'B' = \sqrt{2} \cdot SA = e$. Je okamžitě vidět, že pro druhou asymptotu u' dostáváme stejný výsledek.

Nyní můžeme již dokázat zobecněnou poučku P. 2

P. 7. *Symetrály úhlů, tvořených spojnici bodů rovnosé hyperboly se dvěma dalšími body rovnosé hyperboly, které jsou souměrně položeny podle jejího středu, jsou rovnoběžné s jejími asymptotami.*

D ů k a z (obr. 10). Nechť M, M' jsou body rovnosé hyperboly souměrně položené podle jejího středu S a R její další libovolný bod. Asymptoty označíme u, u' a vrcholy A, B . Paty kolmic, spuštěných z bodů R, B, M na jednu z asymptot, např. u , označíme po řadě $1, 2, 3$.

Podle poučky P. 6 vytínají vrcholové průvodiče bodů M, M', R na asymptotě u stejně dlouhé úsečky $HG = H'G' = KL$; přitom je rovněž $1K = 3G$. Spojnice bodu R s body M, M' protínají asymptotu u v bodech

P, P' . Ze stejnolehlosti dvojice trojúhelníků $K1R$ a $K2B$, $P1R$ a $P3M$, $G2B$ a $G3M$ plyne

$$\frac{K1}{1R} = \frac{K2}{2B}; \quad \frac{P1}{1R} = \frac{P3}{3M}; \quad \frac{G2}{2B} = \frac{G3}{3M}.$$

Z první a třetí rovnice dostáváme vzhledem k rovnici $1K = 3G$

$$1R \cdot K2 = G2 \cdot 3M. \quad (4)$$

Upravíme druhou rovnici

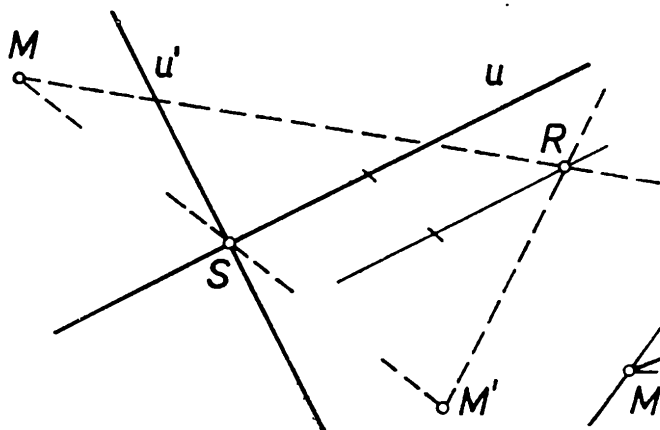
$$\begin{aligned} P1 \cdot 3M = 1R \quad (K2 + G3 - G2 - K1 + P1) = \\ = 1R \quad K2 + 1R \cdot (P1 - G2). \end{aligned}$$

Do této rovnice dosadíme (4)

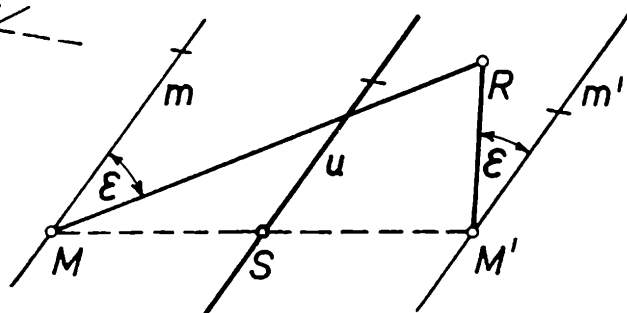
$$P1 \cdot 3M = G2 \cdot 3M + 1R \cdot (P1 - G2)$$

a po její úpravě dostáváme

$$P1 \cdot (3M - 1R) = G2 \cdot (3M - 1R). \quad (5)$$



Obr. 11



Obr. 12

Protože je $3M \neq 1R$, plyne z rovnice (5) $P1 = G2$. Podobně (pomocí bodu M') čtenář dokáže, že platí $1P' = 2G'$. Z rovnosti $G2 = 2G'$ dostáváme potom $P1 = 1P'$, z čehož již bezprostředně plyne tvrzení poučky.

Ú. 4. Sestrojte asymptoty rovnoosé hyperboly, která je určena středem S a dvěma body M a R (dané body neleží v přímce).

Ř e š e n í (obr. 11). Sestrojíme k bodu M bod M' souměrně položený podle středu S . Symetrály úhlu spojníc RM a RM' jsou podle P. 7 rovnoběžné s hledanými asymptotami.

Pomocí poučky P 7 snadno dokážeme zobecněnou poučku P. 4.

P. 8. Zvolme na dvou různých rovnoběžkách m, m' libovolné body M, M' tak, aby jejich spojnice nebyla kolmá na přímky m, m' . Otočíme-li pak přímky m, m' kolem bodů M, M' v nestejném smyslu o libovolný úhel ϵ , je jejich průsečík bodem rovnoosé hyperboly. Středů otáčení M, M' jsou jejími body, souměrně položenými podle jejího středu, a přímky m, m' určují směr asymptoty (obr. 12).

P. 9. Polovina absolutní hodnoty rozdílu délek dvou libovolných stran trojúhelníka je rovna vzdálenosti středu jemu vepsané kružnice od osy souměrnosti třetí strany.

Libovolnému trojúhelníku $MH'F$ opsaná kružnice k , prochází průsečíkem P osy souměrnosti o' strany $H'F$ a osy s úhlu stran MF a MH' ($MF \neq MH'$), jak to plyne ze shodnosti obvodových úhlů $\alpha = \sphericalangle H'MP = \sphericalangle PMF$. Jak známo¹⁾ je bod P středem kružnice f , která prochází vrcholy F , H' a středem W vepsané kružnice. Kružnice f protíná dále přímky MF , MH' v bodech H , F' . Z osové souměrnosti úseček FH a $F'H'$ podle osy s plyne

Kružnice g o středu P nechť se dotýká přímky MF v bodě T , pak se dotýká přímky MH' v bodě T' . Přitom z vlastnosti soustředných kružnic f a g a vztahu (6) plyne



Dále spustíme z bodu W na o' kolmici, její patu označíme E a ukážeme, že $WE = FT$.

¹⁾ Důkaz je proveden v článku F. Hradeckého (10. číslo 36. ročníku Rozhledů): Konstrukce trojúhelníků, mezi jejichž určovacími prvky jsou středy a poloměry kružnic opsaných a vepsaných.

Z trojúhelníka MFP plyne

$$\varphi = \alpha + \alpha' - \sigma = \frac{\pi}{2} - \sigma = \sigma'$$

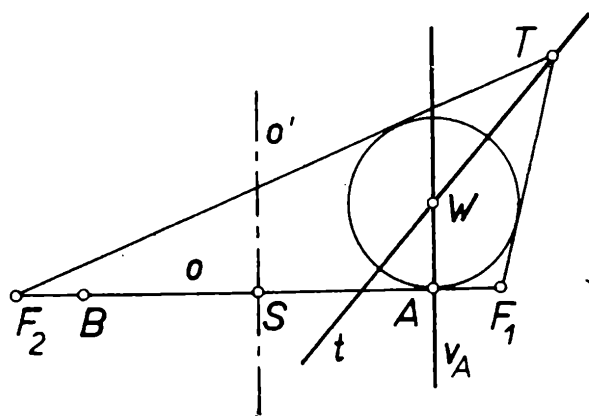
Tím je však dokázáno, že trojúhelníky PTF a PEW jsou shodné a je tedy $WE = TF$. Ze vztahu (7) plyne pak

$$WE = \frac{|MH' - MF|}{2}$$

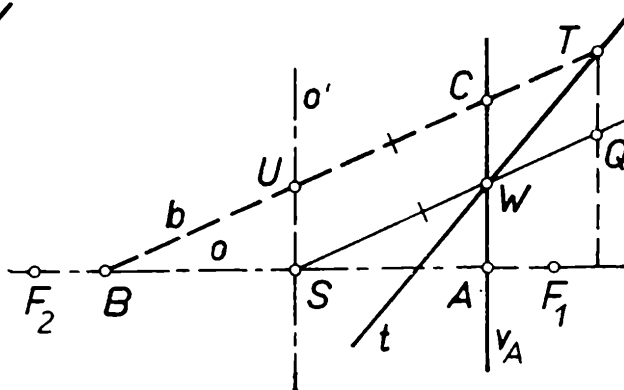
a tak je poučka dokázána.

Tento výsledek můžeme interpretovat pro tečny obecné hyperboly

P. 10. *Tečna hyperboly protíná vrcholovou tečnu větve, na níž leží bod dotyku, ve středu kružnice, vepsané trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ohniska hyperboly a bod dotyku.*



Obr. 14



Obr. 15

D ů k a z (obr. 14). Uvažujme trojúhelník F_1F_2T , kde F_1, F_2 jsou ohniska a T bod hyperboly. Podle poučky P. 9 je vzdálenost středu W kružnice vepsané trojúhelníku F_1F_2T od vedlejší osy o' rovna

$$\frac{|TF_2 - TF_1|}{2}. \quad (8)$$

Jistě již vidíte, že tento výraz je roven délce hlavní poloosy hyperboly. Leží tudíž bod W na vrcholové tečně hyperboly, a to na v_A , neboť bod W musí být vnitřním bodem trojúhelníka F_1F_2T . Zároveň musí bod W ležet také na tečně t hyperboly, neboť ta je symetrálou úhlu průvodičů bodu dotyku T .

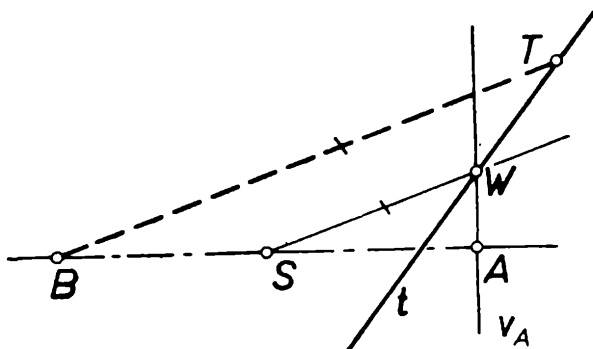
Pro konstrukci tečny hyperboly - nejen rovnoosé - se ukáže výhodnost vrcholových průvodičů.

P. 11. *Nechť tečna t v bodě T hyperboly protíná vrcholovou tečnu větve hyperboly, na níž leží T , v bodě W . Pak spojnice bodu W se středem hyperboly je rovnoběžná s vrcholovým průvodičem bodu T , a to s tím, který prochází vrcholem druhé větve hyperboly.*

D ů k a z (obr. 15). Podle poučky P. 10 je bod W středem kružnice

vepsané trojúhelníku F_1F_2T . Dále užijeme poučky, jejíž důkaz najdete v již citovaném článku: Spojnice středu S strany F_1F_2 trojúhelníka F_1F_2T se středem W jemu vepsané kružnice, protíná výšku jdoucí protějším vrcholem T v bodě Q , jehož vzdálenost od T je rovna poloměru vepsané kružnice, tj. $TQ = WA$.

Vedme vrcholem B rovnoběžku b s přímkou SW . Přímka b protíná vrcholovou tečnu v_A v bodě C , pro nějž zřejmě platí $AW = CW$. Ježto je $TQ = CW$, prochází přímka b bodem T a je tudíž vrcholovým průvodičem.



Obr. 16

P o z n á m k a. Snadno ukážeme dále, že $US = WA$, kde U je průsečík vrcholového průvodiče b s vedlejší osou o' hyperboly.

Ú. 5. *Hyperbola je určena vrcholy A, B a bodem T . Sestrojte v bodě T její tečnu.*

Ř e š e n í (obr. 16). Středem S hyperboly vedeme rovnoběžku s přímkou BT ($TB > TA$). Tato rovnoběžka protne vrcholovou tečnu v_A v bodě W hledané tečny.

Cvičení.

1. Rovnoosá hyperbola je určena vrcholy A, B . Sestrojte její průsečíky s přímkou rovnoběžnou s její vedlejší osou.

2. Sestrojte vrcholy rovnoosé hyperboly, která je určena asymptotami a bodem.

3. Sestrojte trojúhelník, který je určen těžnicí t_a , výškou v_a a podmínkou, aby symetrála s_a (úhlu α) svírala se stranou a úhel 45° . Proveďte rozbor.

4. Sestrojte trojúhelník, který je určen stranou b , výškou v_b a podmínkou, aby symetrála s_b svírala se stranou b úhel 45° .

5. Rovnoosá hyperbola je určena svými vrcholy. Sestrojte její průsečík s přímkou, která prochází jedním vrcholem.

6. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, která je určena asymptotou, bodem a lineární excentricitou.

7. Sestrojte trojúhelník, který je určen stranou a , rozdílem zbývajících dvou stran $|b - c|$ a poloměrem vepsané kružnice.

8. Sestrojte hyperbolu, která je určena vrcholy a bodem.

9. Jsou dány dvě různé rovnoběžky r, q a dva různé body M, M' , které leží v pásu, určeném přímkami r, q . Spojnice MM' není k přímkám r ani kolmá, ani s ní není rovnoběžná. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho základna ležela na q , vrchol A ležel na r a jeho ramena procházela body M, M' .

Rovinné úlohy řešené užitím deskriptivní geometrie

V článku řed. Šalouna jste se seznámili s rovinnou úlohou řešenou pomocí deskriptivní geometrie. Takto se dá řešit i mnoho jiných úloh. Tento způsob má tu výhodu, že se úlohy dají řešit velmi jednoduše, zatímco běžná řešení vyžadují hlubších znalostí z geometrie. Dokladem toho je již zmíněný článek Šalounův i tento článek. Nyní se naučíme sestavovat kuželosečku, jsou-li dány její body a tečny. Dříve však rozřešíme tuto úlohu:

Daný rotační válec s podstavou v půdorysně $[S(-3,5; 5,5; 0), r = 5]$ protne rovinou σ , která prochází body $A(-4,5; ?; 8)$, $B(0,5; ?; 4,5)$ a její půdorysná stopa se dotýká podstavy válce.

Řešení. V první řadě nám půjde o sestrojení roviny σ (obr. 1). Ta obsahuje body A , B a její půdorysná stopa p^σ bude procházet stopníkem P přímky AB a bude se dotýkat podstavy válce. Tím je rovina určena a řez zjistíme známým způsobem pomocí sdružených průměrů KL , MN , z nichž KL je rovnoběžný se stopou p^σ .

Zjistíme ještě počet řezů, tj. počet rovin σ . Nárysem A_2 jsou na oblině válce určeny dva body A , A' ; nárysem B_2 jsou určeny na oblině opět dva body B , B' . Stopníkem P přímky AB procházejí dvě tečny k podstavě válce. Podle toho dostaneme čtyři přímky: $a \equiv AB$, $a' \equiv A'B'$, $b \equiv A'B$, $b' \equiv AB'$. Poněvadž z každého stopníku těchto přímek lze vést dvě různé tečny k podstavě válce (tyto tečny jsou stopy rovin řezu), existuje celkem osm různých rovin řezu a tudíž i osm různých řezů. Avšak dva řezy jsou vždy souměrně sdružené podle roviny procházející osou válce rovnoběžně s nárysnou a proto nárysy vždy dvou řezů splývají. Našich osm různých řezů má jen čtyři různé nárysy. Ty přirozeně procházejí body A_2 , B_2 . V obr. je narýsována pouze jedna elipsa.

Nárys obr. 1 vnímejme nyní čistě planimetricky a zopakujme si z tohoto hlediska, co bylo dáno a co se sestrojilo. Byly dány tři různé přímky m_2 , n_2 , x , z nichž první dvě byly navzájem rovnoběžné, a body A_2 , B_2 ; sestrojili jsme elipsu (je to nárys řezu), která danými body A_2 , B_2 prochází a dotýká se tří přímek a_2 , b_2 , x . Ukázali jsme si, že takové elipsy jsou čtyři. Planimetrickou úlohu jsme rozřešili pomocí deskriptivní geometrie.

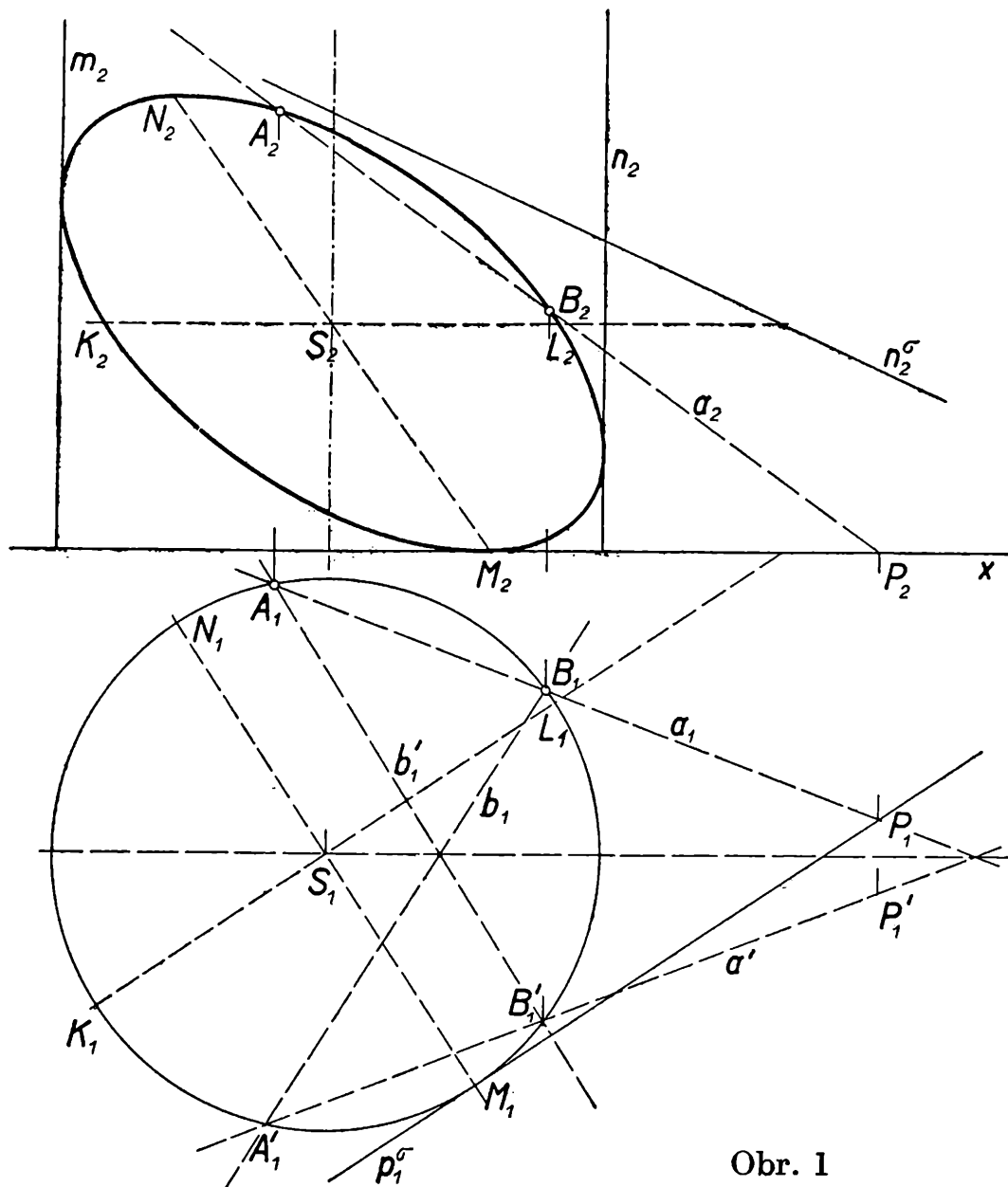
Podobně se dají řešit i dále následující úlohy. Podle nich si čtenář sestaví jistě i řadu dalších.

1. Sestrojte elipsu, která se dotýká daných dvou rovnoběžných přímek a prochází třemi danými body. Jinak: Daný rotační válec protne

rovinou σ , která je dána svými třemi body na plášti válce, tj. body A_2, B_2, C_2 .

2. Sestrojte kuželosečku, která se dotýká dvou různoběžných tečen a prochází třemi danými body. Jinak: Daný rotační kužel protněte rovinou σ , určenou body A, B, C na plášti kužele. Body A, B, C jsou dány svými nárysy.

3. Sestrojte kuželosečku, která se dotýká dvou tečen v daných bodech a prochází přitom dalším bodem neležícím na žádné z daných tečen.



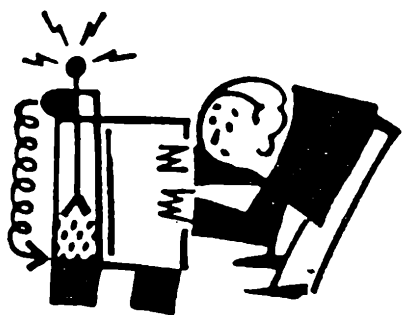
Obr. 1

Sestavte sami odpovídající úlohu z deskriptivní geometrie.

4. Sestrojte elipsu, která se dvakrát dotýká dané kružnice a prochází přitom třemi vnitřními body.

Návod: Danou kružnici považujte za obrys kulové plochy a dané body za průměty bodů této kulové plochy.

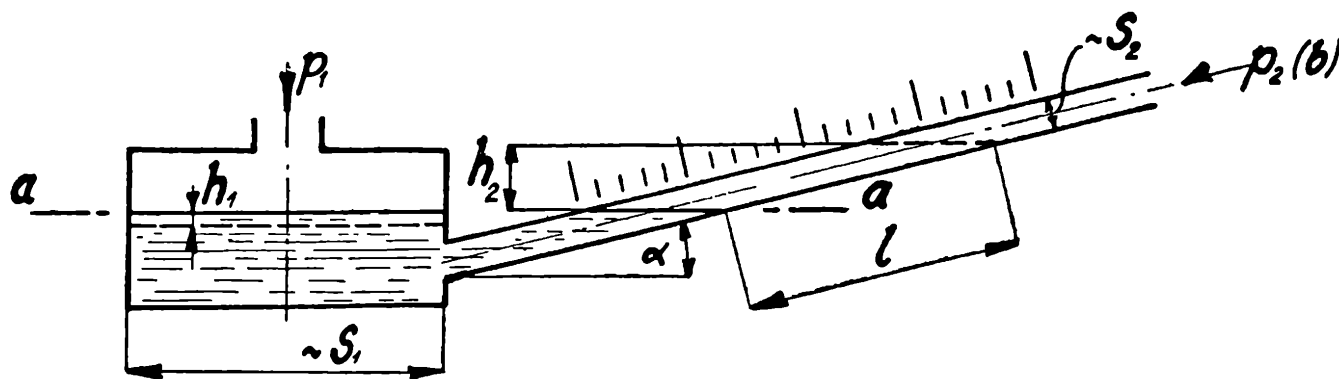
Kružnici tohoto příkladu můžeme nahradit elipsou (rotační elipsoid), hyperbolou nebo parabolou.



Inž. dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Mikromanometr

Pod tímto názvem rozumíme citlivý tlakoměrný přístroj pro měření malých tlaků. Nejběžnější je kapalinový *mikromanometr se skloněným ramenem*, který je podobný nádobkovému tlakoměru. Od něho se však liší tím, že trubice (rameno) připojená na nádobku není svislá, nýbrž skloněná v úhlu α od vodorovné roviny. Protože lze tohoto přístroje použít jak pro měření malých přetlaků (nebo obecně pro měření malých tlakových diferencí), tak i malých podtlaků, měli bychom jej správněji nazývat - ve shodě s dříve popsányi přístroji - m i k r o t l a k o m ě r e m. To by však odporovalo pravidlům tvorby složených slov, kdy je nutno se vyvarovat spojení cizího slova (v našem případě „mikro“, z řeckého mikros = malý, s českým slovem tlakoměr).



Obr. 1

Funkční schéma mikromanometru se skloněným ramenem je v obr. 1. Je-li v nádobce i v trubici stejný tlak $p_1 = p_2$, jsou hladiny v obou ve stejné výši (úroveň $\overline{aa}$). Je-li tlak v nádobce větší $p_1 > p_2$, klesne hladina v nádobce o h_1 a stoupne v trubici o h_2 . Přitom musí platit - podobně jako u nádobkového tlakoměru -

$$h_1 \cdot S_1 = \frac{h_2}{\sin \alpha} \cdot S_2 = l \cdot S_2, \quad (1)$$

kde S_1 je vnitřní průřez nádoby, S_2 vnitřní (kolmý) průřez trubice a α úhel sklonu trubice od vodorovné roviny. Délka l je patrná z obr. 1.

Pro rovnováhu, při měření přetlaku $p_1 - p_2$, musí platit dále

$$p_1 - p_2 = (h_1 + h_2) \cdot \rho \cdot g, \quad (2)$$

kde ρ je hustota tlakoměrné kapaliny a g je místní tíhové zrychlení.

Dosadíme-li do (2) z rovnice (1)

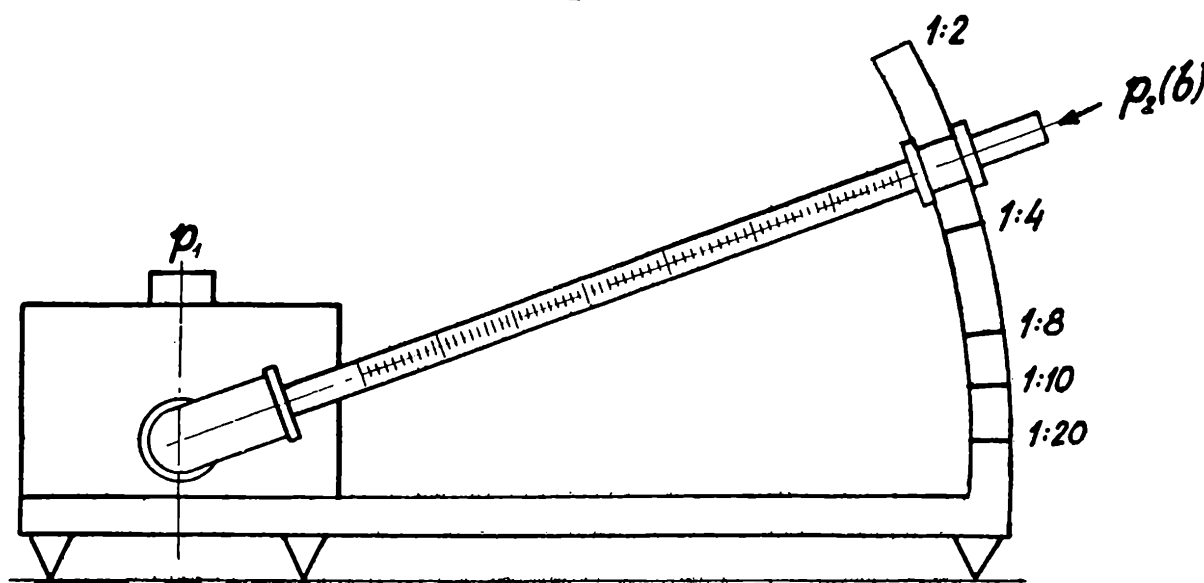
$$h_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot l \quad \text{a} \quad h_2 = l \cdot \sin \alpha,$$

dostáváme výsledný vztah

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \left(\frac{S_2}{S_1} \cdot l + l \cdot \sin \alpha \right) \cdot \rho \cdot g = \\ &= \left(\frac{S_2}{S_1} + \sin \alpha \right) l \cdot \rho \cdot g = k \cdot l \cdot \rho \cdot g, \end{aligned} \quad (3)$$

kde k je tzv. *konstanta mikromanometru* rovná

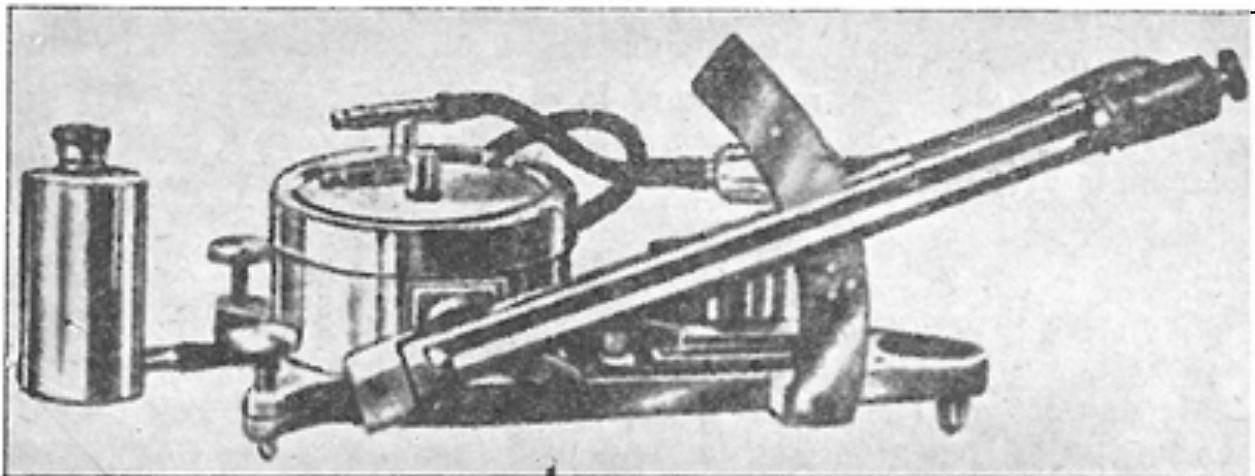
$$k = \frac{S_2}{S_1} + \sin \alpha. \quad (4)$$



Obr. 2

Označíme-li $h = h_1 + h_2$, udává hodnota l/h *převodní poměr mikromanometru*. Převodním poměrem tu rozumíme, kolikrát přesněji můžeme číst měřený tlak než u normálního tlakoměru U naplněného stejnou kapalinou. Vhodným sklonem lze dosáhnout převodu až dvacetinásobného. Použijeme-li za náplň mikromanometru čistého alkoholu (etylalkoholu), zvýšíme přesnost čtení ještě asi o 25 %, protože hustota etylalkoholu je zhruba $\rho \doteq 8 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Trubice mívá délku asi 200 mm. Milimetrová stupnice je buď podložena pod trubici (musí se

dát pozor na paralakční chybu), nebo je přímo vyleptána na trubici podobně jako na tyčinkových teploměrech. Vnitřní (kolmý) průřez trubice nebývá menší než 2 mm². Meniskus vody bývá v užších trubicích dosti neurčitý. Kromě vody a etylalkoholu lze za náplň mikromanometrů použít také toluol, xylol, éter apod.



Obr. 3. Příklad skutečného provedení mikromanometru se skloněným ramenem.

Abychom mohli případně podle měřeného rozsahu měnit převodní poměr přístroje, hotoví se často mikromanometry s trubicí, jejíž sklon je možno měnit a nastavit pomocí vedení v takové poloze, které odpovídá vhodný převodní poměr. Schematicky je taková úprava znázorněna v obr. 2.

M i r o s l a v M i l e r, Praha:

Zobrazování tenkou čočkou

V základních učebnicích fyziky není možno věnovat geometrické optice tolik místa, aby se vyčerpaly všechny možnosti zobrazení pomocí jednoduché tenké čočky, které v praxi nastávají. Proto se budeme zabývat v tomto článku některými z těchto možností.

Jak známo, je čočka definována jako průhledné prostředí z opticky homogenního materiálu, ohraničené dvěma plochami, které bývají obvykle kulové. V našich úvahách se omezíme jen na *tenké čočky*, u nichž lze zanedbat tloušťku vzhledem k poloměrům křivosti. Potom je ve vztahu pro lámavost čočky

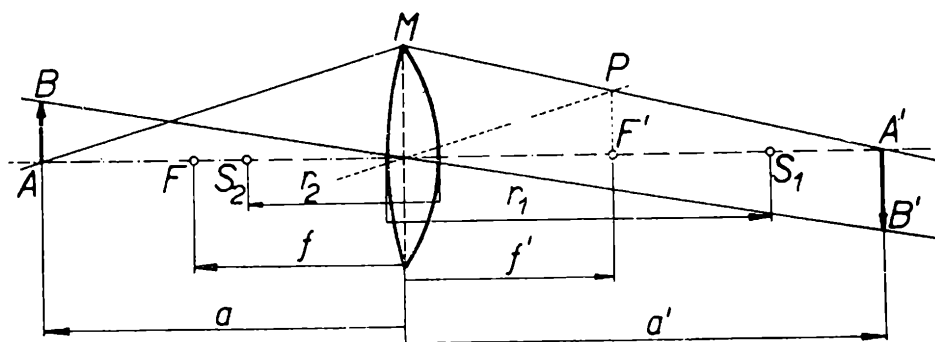
$$\varphi = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) - \frac{(n - 1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_1 r_2}$$

druhý člen na pravé straně malý a tedy rovnice přejde ve známý tvar

$$\varphi = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1)$$

ve kterém φ je lámavost čočky, f' je obrazová ohnisková vzdálenost, n index lomu čočky, r_1 , r_2 poloměry křivosti první a druhé plochy. V původní rovnici značí α tloušťku čočky na ose.

Přitom je na rozdíl od základních učebnic mezi převrácenými hodnotami poloměrů křivosti znaménko minus, poněvadž budeme zachovávat *znaménkovou úmluvu*. Podle ní kreslíme optické obrázky tak, aby předmětový prostor byl vlevo od čočky a obrazový vpravo. Paprsky pak postupují zleva doprava a tento smysl bereme při měření vodorovných úseček za kladný. Vzdálenosti ohnisek nebo obrazu a předmětu od čočky měříme vždy od čočky a vyznačujeme na obrázcích šipkami, které tedy začínají u čočky. Poloměry křivosti ploch čočky měříme též od ploch ke středům křivosti. Označujeme-li vzdálenosti obecně, např. a , f' apod., nepíšeme k nim znaménko. Teprve až k zvláštním číslům připisujeme znaménko podle smyslu šipky (např. podle obr. 1 může být $a = -7$ cm, $f = -4$ cm, $f' = 4$ cm, $r_2 = -3$ cm atd). a při výpočtu dosazujeme čísla samozřejmě i se znaménky.



Obr. 1

Všimněme si dále, že na obr. 1 je použito ke konstrukci zobrazení předmětu AB jiného způsobu, než jaký je obvyklý. Konstrukce obrazu pro bod A na ose je provedena pomocí paprsku AM . Jemu odpovídající paprsek MA' v obrazovém prostoru sestrojíme na základě věty, že paprsky v obrazovém prostoru, které přísluší rovnoběžným paprskům v předmětovém prostoru, se protínají v ohniskové rovině. Je tedy nejprve sestrojen tečkovaně rovnoběžný paprsek procházející středem čočky, který se neláme, a jeho průsečík P s ohniskovou rovinou. Tímto průsečíkem musí též procházet paprsek MA' , určující bod A' . Takovým způsobem lze provést konstrukci libovolného paprsku.

Pro výpočet budeme potřebovat *zobrazovací rovnici čočky*

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (2)$$

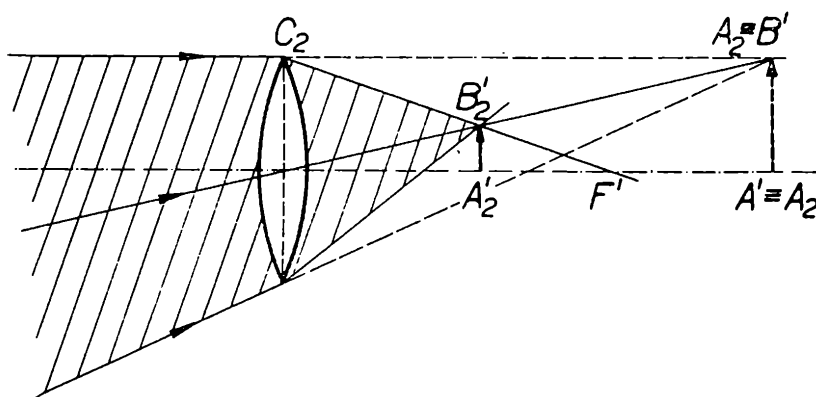
která je až na znaménko před převrácenou hodnotou předmětové vzdálenosti velmi dobře známa. Odlišné znaménko je způsobeno znaménkovou úmluvou.

Kromě rovnice (2) budeme dále používat pro výpočet *zvětšení* vztahu

$$Z = \frac{a'}{a} \quad (3)$$

Chceme-li vyčerpat všechny možnosti zobrazení, musíme si uvědomit, že zobrazovaným předmětem může být nejen *skutečný předmět*, ale i *předmět zdánlivý*. Zdánlivým předmětem se může stát skutečný obraz $A'B'$ (obr. 2), vytvořený předchozí zobrazovací soustavou, vložíme-li do cesty paprskům další čočku $\check{C}_2$.

Skutečný obraz, který by byla vytvořila předchozí zobrazovací soustava, tj. $A'B'$ se stal pro vloženou čočku $\check{C}_2$ zdánlivým předmětem



Obr. 2

(proto je na obr. 2 značená $A' \equiv A_2$, $B' \equiv B_2$), jehož zobrazení čočkou $\check{C}_2$ bude $A'B'$

Spojná čočka má předmětové ohnisko v předmětovém prostoru (proto $f < 0$) a obrazové v obrazovém prostoru (takže $f' > 0$). Hledejme zobrazení libovolného předmětu (pro jednoduchost opět šipky kolmé k optické ose) umístěného do různých poloh na ose a na základě rovnic (2) a (3) hledejme polohu a velikost obrazu. Budeme považovat předmět umístěný v předmětovém prostoru čočky za skutečný, kdežto v obrazovém prostoru za zdánlivý, jak již bylo dříve naznačeno. Opačně to platí pro obraz, který je skutečný v obrazovém prostoru a zdánlivý v prostoru předmětovém. V tab. I. a II. je skutečnost a neskutečnost uvedena ve sloupci označeném „charakter“.

Postup výpočtu bude takový, že si nejprve rozdělíme optickou osu zvolenými body na části a k těm budeme vztahovat polohy předmětů a obrazů. Těmito body jsou střed čočky, ohniska a body vzdálené o dvojnásobnou ohniskovou vzdálenost od středu čočky. Výpočet provedeme jen pro první případ, kdy předmět je umístěn před dvojná-

Tab. I

Předmět		Obraz		Zvětšení příčné
poloha	charakter	poloha	charakter	
$-\infty \leq a \leq -2f'$	skutečný	$f' \leq a' \leq 2f'$	skutečný	$0 \geq Z \geq -1$
$-2f' < a \leq -f'$	skutečný	$2f' < a' \leq \infty$	skutečný	$-1 > Z \geq -\infty$
$-f' < a \leq 0$	skutečný	$-\infty < a' \leq 0$	zdánlivý	$\infty > Z \geq 1$
$0 < a \leq f'$	zdánlivý	$0 < a' \leq \frac{f'}{2}$	skutečný	$1 > Z \geq \frac{1}{2}$
$f' < a \leq 2f'$	zdánlivý	$\frac{f'}{2} < a' \leq \frac{2}{3}f'$	skutečný	$\frac{1}{2} > Z \geq \frac{1}{3}$
$2f' < a \leq \infty$	zdánlivý	$\frac{2}{3}f' < a' \leq f'$	skutečný	$\frac{1}{3} > Z \geq 0$

Tab. II

Předmět		Obraz		Zvětšení příčné
poloha	charakter	poloha	charakter	
$-\infty \leq a \leq 2f'$	skutečný	$f' \leq a' \leq \frac{2}{3}f'$	zdánlivý	$0 \leq Z \leq \frac{1}{3}$
$2f' < a \leq f'$	skutečný	$\frac{2}{3}f' < a' \leq \frac{1}{2}f'$	zdánlivý	$\frac{1}{3} < Z \leq \frac{1}{2}$
$f' < a \leq 0$	skutečný	$\frac{1}{2}f' < a' \leq 0$	zdánlivý	$\frac{1}{2} < Z \leq 1$
$0 < a \leq -f'$	zdánlivý	$0 < a' \leq \infty$	skutečný	$1 < Z \leq \infty$
$-f' < a \leq -2f'$	zdánlivý	$-\infty < a' \leq 2f'$	zdánlivý	$-\infty < Z \leq -1$
$-2f' < a \leq \infty$	zdánlivý	$2f' < a' \leq f'$	zdánlivý	$-1 < Z \leq 0$

sobnou ohniskovou vzdáleností, tedy $-\infty < a \leq 2f$. Z rovnice (2) pak lze vypočítat obrazovou vzdálenost

$$a' = \frac{af'}{a + f'} = \frac{f'}{1 + \frac{f'}{a}}.$$

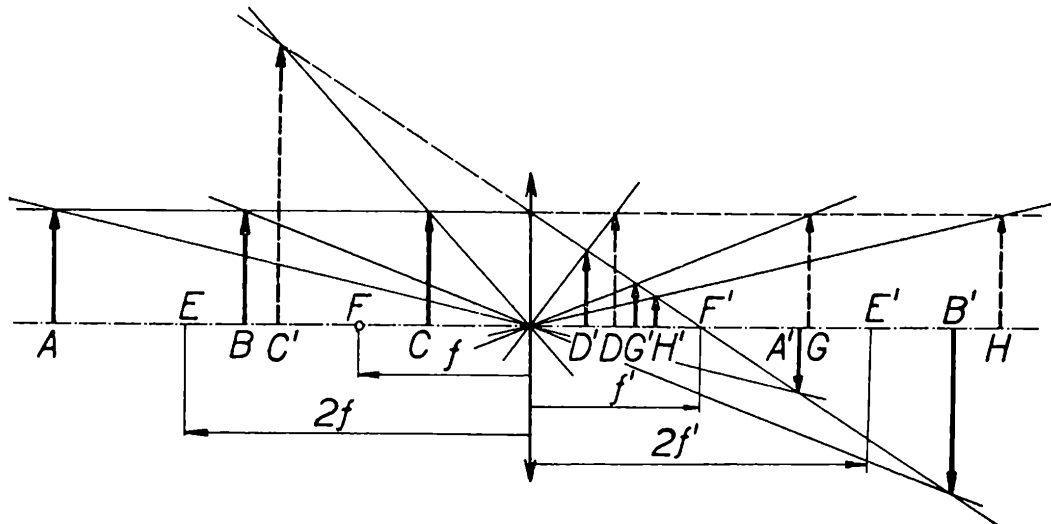
Do poslední rovnice postupně dosadíme příslušné meze předmětových vzdáleností (a) a obdržíme pro obrazovou vzdálenost a' jednak mez f' , jednak $2f'$. Při tom používáme poznatku, že pro čočku, u níž je předmětové prostředí stejné jako obrazové (omezujeme se jen na tento případ), platí

$$f' = -f$$

Je tedy $f' < a' \leq 2f'$ a obraz je mezi ohniskem a dvojnásobnou ohniskovou vzdáleností: skutečný, převrácený a zmenšený, jak dále

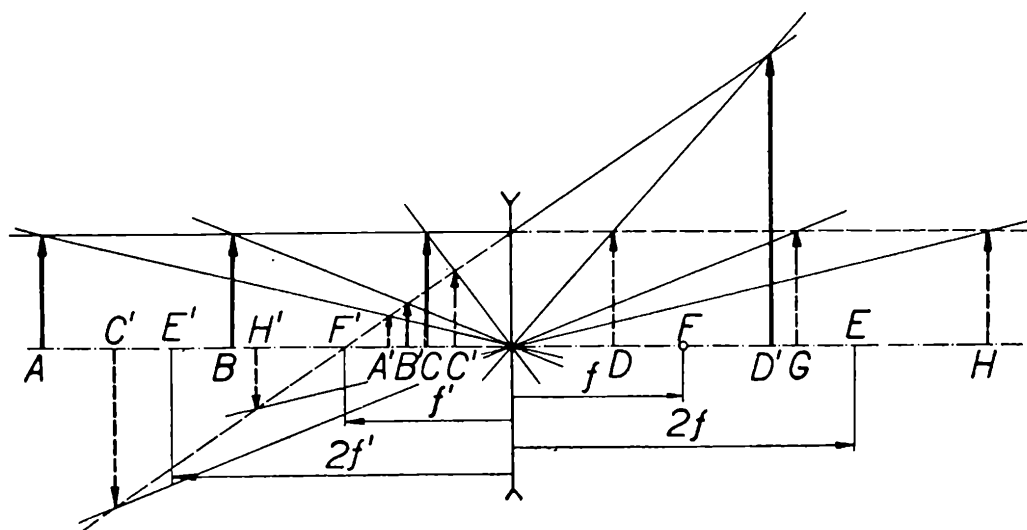
plyne dosazením mezi do vztahu (3). Výsledky jsou uvedeny v prvním řádku tab. I. Podobným způsobem vypočítáme dále polohy a zvětšení pro další případy, které jsou přehledně uspořádány v tab. I.

Pro názornost je na obr. 3 nakreslena obvyklá konstrukce obrazů pomocí paprsku rovnoběžného s optickou osou, který se láme do ohniska a paprsku procházejícího středem čočky.



Obr. 3

Rozptylná čočka má předmětové ohnisko v obrazovém prostoru (tudíž $f > 0$) a obrazové ohnisko v předmětovém prostoru (proto $f' < 0$). V tab. II jsou výsledky pro polohu, charakter a velikost obrazu pro případ rozptylné čočky a na obr. 4 je opět konstrukce obrazů pomocí dvou paprsků.



Obr. 4

Srovnáním obou tabulek zjistíme hlubokou analogii mezi zobrazováním oběma druhy čoček. Tak např. při sledování poloh obrazů vidíme, že posloupnost hodnot je stejná, jen místo shora dolů je zezdola nahoru. Podobně i zvětšení. Také charakter obrazu je vždy opačný.

Obě tabulky mají velký význam při skládání různých optických sestav na *optické lavici*, poněvadž umožňují rychlý odhad polohy a velikosti jak jednotlivých meziobrazů, tak i obrazu konečného.

Úloha o šachovnici



Rohem šachovnice je vedena přímka, která ji rozdělí ve dvě části, jejichž obsahy jsou v poměru 11 : 5. V průsečících této přímky s hranicemi šachových polí jsou zabodnuty svisle špendlíky. Zjistěte, zda kulička, jejíž průměr je čtvrtina rozměru šachového pole, projde mezi kterýmikoli dvěma špendlíky.

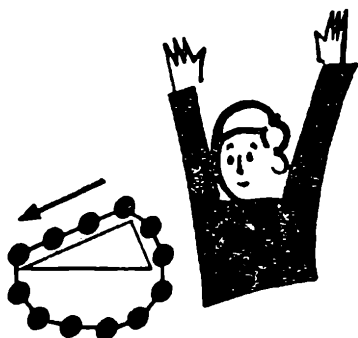
Řešení této úlohy pošlete do redakce našeho časopisu. Nejlepší příspěvek rádi otiskneme.

Doc. J. Vyšín

Jediné vážení

V každé z 9 krabic je 27 koulí. Výrobce tvrdí, že koule váží po 11 dkg. Při výrobě se však objevily zmetky o váze 97 g, resp. 99 g. Víme, že krabice obsahuje jen koule téže váhy. Jediným vážením na váze s maximálním zatížením do 5 kg, mající dělení po 1 g, rozhodněte, zdali všechny krabice obsahují jen samé správné koule nebo zdali se v jedné z nich (v které?) vyskytují zmetky (kterého druhu?). Dvě nebo více vadných krabic nepřicházejí v úvahu.

Řešení zašlete na adresu: Doc. O. Setzer, Praha-Nové Město, Trojanova 13.



Prof. dr. Ján Vanovič, Bratislava:

Poznámka k stavu feromagnetizmu

Všetky látky majú isté magnetické vlastnosti, za ktoré sú v podstate zodpovedné elektróny. Obiehajúce elektróny v atónoch predstavujú malé uzavreté prúdy, ktoré sa prejavujú magnetickými poľami, alebo ako malé magnetické dipóly (malé submikroskopické magnety s dvoma pólmi). Okrem toho samotné elektróny majú rotáciu a preto ako rotujúce elektrické náboje tiež predstavujú elektrické prúdy a majú magnetické pole a javia sa ako malé magnetické dipóly.

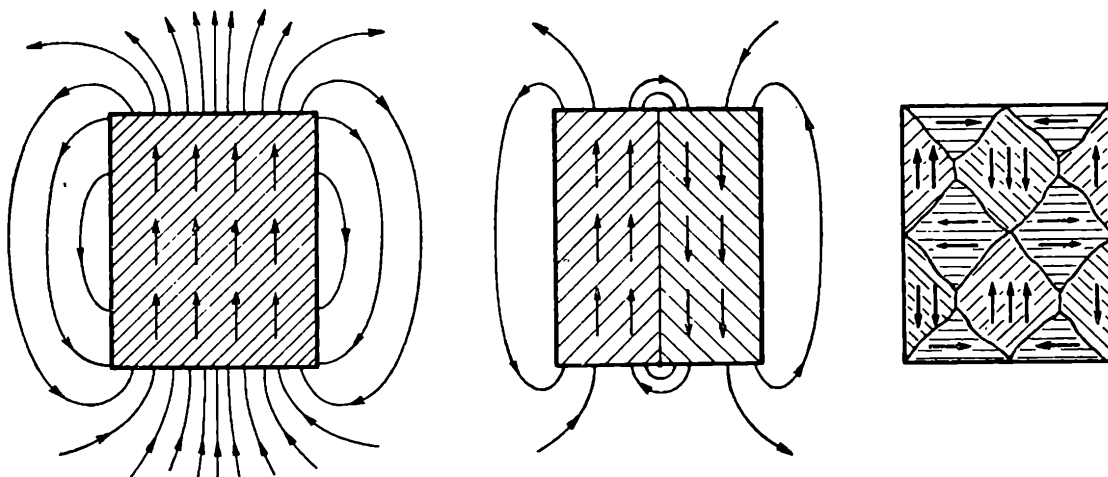
V látkach, v ktorých sa magnetické polia obiehajúcich a rotujúcich elektrónov rušia, sú diamagnetické. Tieto atómy a ani látky z nich zložené nemajú vonkajšie magnetické pole. Látky, v ktorých sa uvedené magnetické polia obiehajúcich a rotujúcich elektrónov nerušia, majú malé magnetické momenty a označujeme ich ako paramagnetické. Tu nevznikajú väzby medzi malými magnetickými momentami susedných častíc a preto sú tieto v dôsledku tepelných pohybov neusporiadané. Ani tieto látky nemajú preto vonkajšie magnetické pole.

Iba v látkach, ktoré označujeme ako feromagnetické (železo, kobalt, nikel a gadolinium), existujú sily, ktoré sa snažia jednotlivé magnetické momenty usporiadať do rovnakého smeru. Sú za ne zodpovedné voľné elektróny v pevnej kovovej mriežke tých látok. Feromagnetizmus sa totiž neprejavuje v kvapalnom stave a mení sa v paramagnetizmus po dosiahnutí istej teploty, zvanej Curieho teplotou, ktorá je nižšia ako bod topenia tej látky.

Usporiadanie všetkých magnetických momentov feromagnetickej látky do jedného smeru sa dosahuje vonkajším magnetickým poľom, napr. vytvoreným elektrickým prúdom. Po vymiznutí vonkajšieho magnetizujúceho poľa prúdu však ani feromagnetická látka neostáva navonok magnetizovaná. Javí sa ako nemagnetická. Ako je to možné, keď vo feromagnetickej látke existujú sily, usmerňujúce magnetické dipóly do jedného smeru?

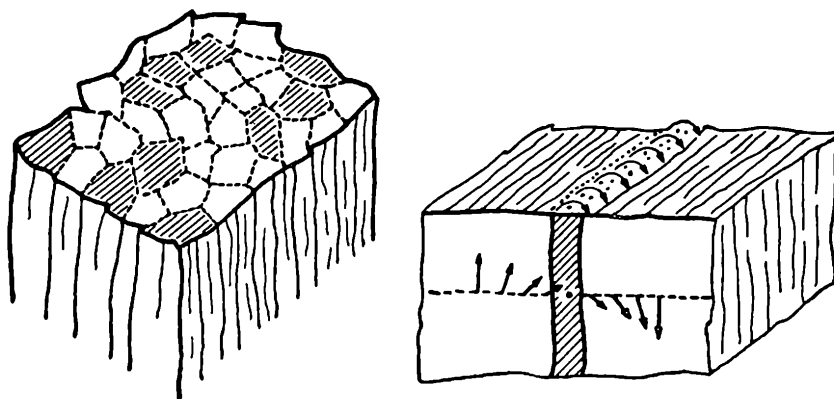
Že je tomu tak, názorne ukazuje obrázok 1.

V teóriách feromagnetizmu existenciu oblastí spontánnej magnetizácie, zvaných tiež doménami, ako prvý hypoteticky predpokladal Weiss. Na rozhraní medzi dvoma doménami je stena, v ktorej sa smer magnetizácie jednej domény spojitne mení v smer magnetických dipólov druhej domény. Táto stena medzi doménami sa nazýva Blochovou stenou. Pri



Obr. 1

výbruse feromagnetickej látky, výbrus pretína i Blochove steny a pretože po obidvoch stranách tej steny majú magnetické dipóly iný smer, existuje nad výbrusom steny malé magnetické vonkajšie pole (obr. 2.), ktoré možno zviditeľniť veľmi jemným práškom z magnetitu (prirodzeného magnetu), suspendovaného vo vode. Tak sa experimentálne skutočne dokazujú Weissove domény magnetizácie rôzneho smeru.



Obr. 2

Magnetovanie feromagnetického telesa prebieha potom tak, že sa v silnom magnetickom poli elektrického prúdu posunujú Blochove steny medzi doménami a narastajú domény so smerom dipólov, blízky smeru magnetického poľa. Po rozšírení sa takých domén na celé teleso feromagnetickej látky, sa ešte dipóly pootočia do smeru magnetického poľa. Po vypnutí magnetického poľa sa znovu vytvoria domény a teleso je navonok nemagnetické. Látky tak sa chovajúce sú tzv. mäkké feromagnetiká.

Rôznymi prímiesmi (uhlíka, kremíka, chrómu, volframu atď.) dá sa

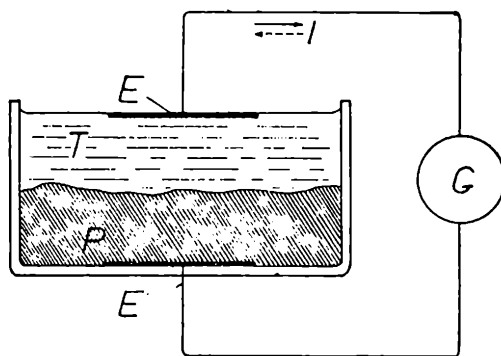
docieľiť, že sa v telese vytvárajú sily, ktoré bránia rozpadu jednotnej magnetizácie na domény a preto teleso ostáva zmagnetizované. Látky, ktoré sa tak chovajú voláme tvrdými feromagnetikami. Z nich sa vyrábajú permanentné magnety.

I n ž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN SMS, Praha:

Termo-dielektrický efekt, který nebyl dosud objasněn

Remanentní magnetizace feromagnetik dala vznik permanentním magnetům, udržujícím ve svém okolí stálé magnetické pole. Jakési elektrické protějšky permanentních magnetů jsou určitá dielektrika, např. některé druhy brazilských pryskyřic. Mají vlastnost, že si uchovávají elektrický polarizační moment, získaný v silném elektrickém poli při přechodu z tekutého stavu do tuhého.

Studiem tohoto zjevu, vyvolaného působením dielektrické hystereze, zabýval se fyzik J. Costa de Ribeiro. Při zkoumání vlastností některých pryskyřic objevil v roce 1942 zajímavý úkaz, vznikající při rozpouštění a tuhnutí těchto dielektrik. Úprava pokusu je znázorněna v obr. 1, kde E značí dvě kovové elektrody, mezi nimiž je vrstva T tekutého dielektrika a vrstva P tuhého dielektrika; G je citlivý elektrický indikátor.



Obr. 1

J. Costa zjistil, že při tavení dielektrika vzniká elektrický proud, směřující od jeho pevné části P k části kapalné T . Proud je tím větší, čím je vyšší rychlost tavení. Při opačném pochodu, tuhnutí roztaveného dielektrika, vzniká proud opačného směru.

Bylo určeno, že v jednom gramu užitého dielektrika je při popsaném pochodu uvolněno elektrické množství velikosti asi 10^{-12} As, u některých pryskyřic nebo u naftalinu je toto elektrické množství ještě větší, až 10^{-9} As /1 gram.

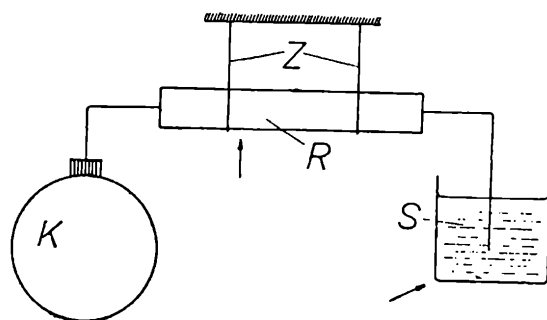
Tento zajímavý efekt se dosud nepodařilo uspokojivě vysvětlit. Bylo pouze zjištěno, že uvolnění elektrických nábojů vzniká při změně pevného stavu na kapalný, nebo opačně asi u 10^{11} až 10^{12} molekul.

Prvý kondenzátor

Prvým druhem kondenzátoru byla známá *leidenská láhev*, která, jak se zdá, měla více objevitelů. Byla sestavena na holandské universitě v Leydenu. Sestrojil ji r. 1745 v Cammin v Pomoranech v on *Kleist*. Stejně však může být její objev připsán holandskému fyzikovi *Muschenbroekovi*. Svědčí o tom dopis, který tento badatel napsal 20. dubna 1746 svému příteli Réaumurovi. Popisuje v něm pokus s primitivním přístrojem, který si sám sestavil. Je schematicky znázorněn na obr. 1; *K* je skleněná koule, *R* železná trubka, zavěšená na hedvábných nitích *Z* a *S* je skleněná nádobka s vodou.

Obsah dopisu fyzika Muschenbroeka je tak charakteristický pro tehdejší dobu a tak vystihuje úroveň bádání o elektřině, omezeného na nejprimitivnější zdroje elektřiny, vznikající třetím, že je zajímavé citovat jej doslovně:

„Podávám Vám zprávu o novém, ale strašlivém experimentu a dávám Vám radu, abyste jej nikdy neopakoval. Prováděl jsem bádání o síle elektřiny. K tomu jsem zavěsil na hedvábných nitích železnou rouru, spojenou se skleněnou koulí. Touto koulí se dalo rychle otáčet kolem její osy a přitom ji třením rukou elektrizovat. Vzniklá elektřina přecházela na železnou rouru. Na druhém konci roury visel mosazný drát, který



Obr. 1

byl ponořen do nádobky s vodou. Nádobku jsem držel v pravé ruce, zatím co jsem se pokusil levou rukou získati z elektrizované železné roury elektrickou jiskru. Náhle jsem ucítil v pravé ruce tak mocný elektrický úder, že jsem se chvěl na celém těle, jako bych byl zasažen bleskem... Nejen moje ruka, ale celé mé tělo bylo v strašlivém stavu. Myslil jsem, že je se mnou konec.“

Vysvětlení „strašlivého“ experimentu Muschenbroekova je snadné. Svým tělem vybil kondenzátor, tvořený sklenicí vody, přičemž jeho ruka, v níž držel sklenici, tvořila vnější elektrodu tohoto primitivního kondenzátoru (v obr. 1 jsou polohy rukou vyznačeny šipkami). Nádobka

s vodou v popsaném uspořádání nebyla nic jiného než náhodně sestavená leidská láhev.

Nedlouho potom opakoval pokus v Paříži abbé N o l l e t, avšak již s leidskou lahví opatřenou kovovými polepy. Provedl pokus ve Versailles před králem a jeho dvorem s více než dvěma sty gardistů, kteří se uchopili za ruce a vytvořili uzavřený vodivý obvod. Pokus se znamenitě podařil. Kompanie otrlých vojáků silně reagovala na mocný elektrický úder.

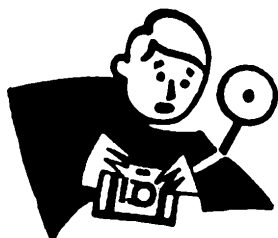
Leidské láhve se již dnes neužívá. Dala však vlastně vznik mnoha druhům kondenzátorů, všeobecně používaným v elektrotechnice.

Různé

T i b o r S z e b é n y i, Bratislava:

P. N. Lebedev

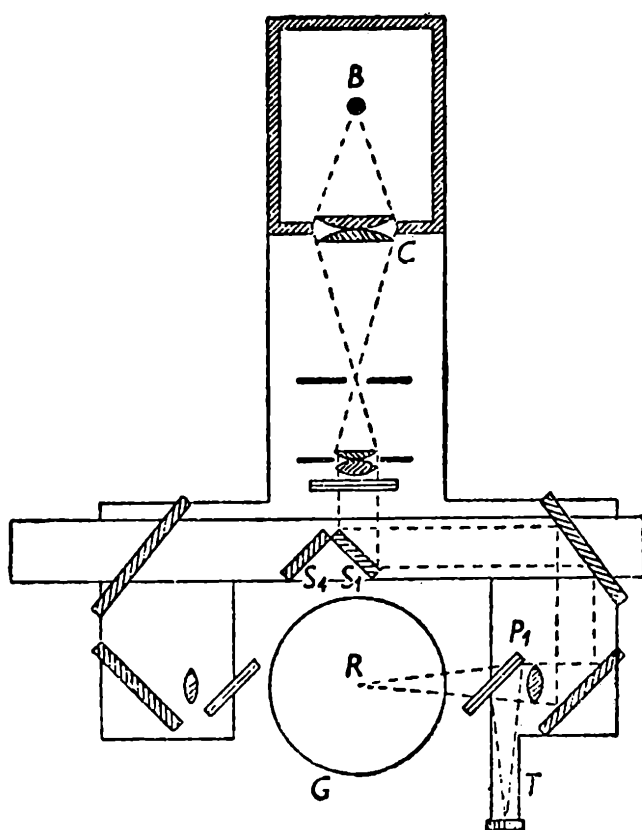
K 50. výročíu úmrtia.



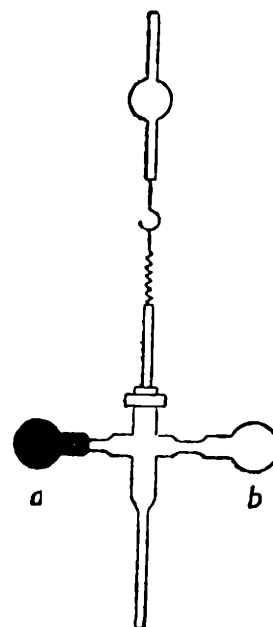
V 70-tych rokoch minulého storočia vznikali veľké laboratória a špeciálne fyzikálne školy. V Rusku už Stoletov (1839—1896) mal niekoľko žiakov, no školu v užšom slova zmysle nemal. V polovici 90-tych rokov založil prvú školu v Rusku, ktorá vychovávala vedcov, vynikajúci fyzik Peter Nikolajevič Lebedev. Spočiatku mal iba niekoľko žiakov, no v roku 1905 mal ich už tridsať. Je jasné, že ten kto vytvoril prvú, takéhoto druhu školu v Rusku, musel mať vynikajúce schopnosti nielen ako vedec, ale aj ako učiteľ, musel mať široký rozhľad vo vede. Lebedev tieto schopnosti mal. Pozrime sa bližšie na život a dielo tohto vynikajúceho vedca.

Peter Nikolajevič Lebedev narodil sa v Moskve v roku 1866, v obchodníckej rodine. Spočiatku navštevoval obchodnú školu, neskôr prestúpil na reálnu školu. Po skončení reálnej školy začal Lebedev navštevovať Vysokú technickú školu v Moskve. Čoskoro však zbadal, že činnosť inžiniera ho nevábi a tak na radu profesora Šegljajeva odišiel v roku 1887 do Strassburgu, do jednej z najlepších európskych fyzikálnych škôl - do školy Augusta Kundta. Po zložení doktorskej skúšky na jeseň v roku 1891 v Strassburgu sa vrátil do Moskvy. Stal sa učiteľom na Moskovskej univerzite a v roku 1900 po obhájení dizertačnej práce sa

stal doktorom fyziky a zanedlho aj univerzitným profesorom. V roku 1911 odišlo viac profesorov z Moskovskej univerzity, medzi ktorými bol aj Lebedev, ako protest proti činnosti cárskej vlády. Lebedev si potom vytvoril z vlastných prostriedkov nové laboratórium, kde obnovil svoju školu. Po odchode z univerzity dostal ponuku z Nobelovho inštitútu v Štokholme, aby tam prijal miesto riaditeľa laboratória a tak tiež mu dávali k dispozícii veľkú sumu peňazí na jeho práce. Lebedev však túto výhodnú ponuku neprijal a zostal radšej pri svojich žiakoch. V tomto období sa však jeho srdcová choroba začala zhoršovať a pomerne v mladom veku (46 ročný) 14. marca 1912 zomrel.



Obr. 1



Obr. 2

Zásluha Lebedevova vo vedeckej činnosti spočíva v tom, že bol prvým vedcom, ktorý experimentálne dokázal existenciu tlaku žiarenia na pevné telesá a na plyny.

Základnou časťou prístroja (obr. 1) pomocou ktorého experimentálne zistil tlak žiarenia bol veľmi ľahký záves na tenkom vlákne (obr. 2), ku ktorému sú pripevnené ľahké krídelká *a* a *b*, z ktorých je jedno začiernené a druhé lesklé. Záves bol umiestnený vo vákuu, v tom čase maximálne dosažiteľnom (v banke *G*). Svetlo z oblúčkovej lampy *B* sa sústreďuje sústavou šošoviek a zrkadiel na jedno krídelko (v bode *R*). Pôsobením tlaku žiarenia na krídelko sa záves otočí, pričom skrúti vlákno závesu. Skrútenie vlákna pozorujeme ďalekohľadom pomocou zrkadla

pripevneného ku vláknu. Posunutím dvojitého zrkadla S_1S_4 je možné vrhnúť prúd svetla buď na prednú, alebo na zadnú stenu krídelka a tým meniť zmysel krútenia vlákna. Zistenie tlaku žiarenia a jeho presné zmeranie malo veľké experimentálne ťažkosti. Základná ťažkosť spočívala v tom, že pri osvetlení tenkých krídeliek pripevnených na závese, okrem síl tlaku žiarenia, existujú tzv. rádiometrické sily, ktoré sú oveľa väčšie ako sily tlaku žiarenia. Rádiometrické sily sú vyvolané tým, že z osvetlenej strany sa krídelko zahrieva dopadajúcim svetlom a preto strana obrátená k dopadajúcemu svetlu je teplejšia ako tá, ktorá je v tieni. V dôsledku toho sa budú molekuly plynu pri dopade odrážať od zohriatej strany krídelka silnejšie ako z opačnej strany, ktorá je chladnejšia. Z tohto dôvodu bude pôsobiť na krídelko zo zohriatej strany väčší tlak ako zo strany opačnej. Lebedev teda musel určiť veľkosť pôsobenia týchto rádiometrických síl. Zistil, že tieto sily sa zmenšujú vo vákuu a pri zmenšovaní hrúbky krídeliek. Preto musel umiestniť záves do vákuu.

Z teórie tlaku žiarenia bolo známe, že svetelná vlna je vlnou elektromagnetickou a bol známy aj nasledujúci vzťah pre tlak žiarenia p vo vákuu na 1 cm^2

$$p = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) , \quad (1)$$

kde E a H sú intenzity elektrického a magnetického poľa, ε_0 je permitivita vákuu a μ_0 permeabilita vákuu. Z Maxwellovej teórie vyplýva, že $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ je objemová hustota elektrickej energie vo vákuu a $\frac{1}{2} \mu_0 H^2$ je objemová hustota magnetickej energie vo vákuu, takže tlak žiarenia p je vlastne rovný množstvu energie w nachádzajúcej sa v kubickom centimetri, tj. platí

$$p = w. \quad (2)$$

Vzťah (2) môžeme upraviť, keď uvážime, že tok svetelnej energie W súvisí s hustotou energie w vzťahom

$$W = wc, \quad (3)$$

kde c je rýchlosť svetla. Zo vzťahu (2) a (3) teda vyplýva, že tlak žiarenia p je rovný

$$p = \frac{W}{c} . \quad (4)$$

Lebedev platnosť tejto rovnice experimentálne potvrdil tak, že zmeral obe veličiny p aj W , c je konštanta. Veľkosť dopadajúcej svetelnej energie zistil tak, že jej určitú časť odviedol doštičkou P_1 (viď obr. 1) na termočlánok T špeciálnej konštrukcie. Tlak žiarenia p na osvetlené krídelko zistil torznými váhami. Vzťah (4) platí iba v tom prípade, ak by bola

osvetlená ploška začiernená tj. ploška absolutne pohlcujúca svetelnú energiu. Keď má ploška absolutnú odrazivosť (lesklá ploška), bude hustota energie v dopadajúcom a odrazenom svetelnom toku rovnaká; zmena hybnosti a aj tlak žiarenia p bude dvakrát väčší ako pri pohlcovaní svetelnej energie. V prípade, že povrch má koeficient odrazu $\varrho < 1$ časť energie $(1 - \varrho)W$ sa pohltí a časť ϱW sa odrazí. V tomto prípade je tlak žiarenia p rovný

$$p = (1 + \varrho) \frac{W}{c}. \quad (5)$$

Lebedev zmeral aj koeficient odrazu pre rozličné krídelká a takto experimentálne preveril uzávery Maxwellovej teórie, vyslovenej v rovniciach (4) a (5).

Lebedev však preveril nielen uzávery Maxwellovej teórie, ale i vzťah medzi hmotou (fotónov) a energiou, ktorý vyplýva z teórie relativity. Tlak žiarenia z hľadiska čisto mechanického je rovný nárazovým silám na plochu, na ktorú dopadajú fotóny. Nárazové sily súvisia so zmenou hybnosti fotónov a keď sú tieto pohltené začierneným krídelkom, odovzdávajú mu hybnosť mc , kde m značí hmotu za sekundu dopadajúcich fotónov na 1 cm^2 . Potom z rovnice (4) dostávame nasledujúci vzťah:

$$mc = \frac{W}{c} \quad (6)$$

a po úprave

$$W = mc^2. \quad (7)$$

Z uvedeného je vidieť, že vzťah (7), ktorý sa neustále používa v súčasnej fyzike atómového jadra je už obsiahnutý v Maxwellovej teórii tlaku žiarenia. Lebedev bol teda prvý fyzik, ktorý experimentálne preveril tento vzťah pre hmotu dopadajúcich fotónov, dávajúci trvalý základ všetkým našim súčasným výpočtom z oblasti atómovej fyziky.

Z ostatných prác Lebedeva si zasluhuje pozornosť práca, kde opisuje svoje pokusy so 6 mm elektromagnetickými vlnami, ktoré boli dlhý čas najkratšími elektromagnetickými vlnami, vytvorenými laboratórne (1895).

Jednou z najväčších zásluh Lebedeva je, že sa ako prvý vedec v Rusku podujal viesť fyzikálnu školu, čím vychoval Rusku niekoľkých vynikajúcich fyzikov.

* *

*

Naši čtenáři čtou pozorně. Studující P. Rumíšek z Veselí nad Moravou nás upozornil na tiskovou chybu v č. 9, str. 425, řádka 11, kde poslední uvedená difference činí správně 22 a na str. 426, kde správně má být ${}^{92}_{42}\text{MO}^{50}$.

Redakce



J o s i p K l e c z e k :

Astronomický slovník

Nakl. ČSAV, Praha 1961, 976 str., váz. 94,50 Kčs.

Vydání šestijazyčného astronomického slovníku je po Bečvářových hvězdných atlasech a *K a t a l o g u h v ě z d o k u p a a s o c i a c í* dalším významným československým přínosem mezinárodní astronomické spolupráci. Slovník obsahuje asi 5900 výrazů z astronomie a příbuzných disciplín. Termíny jsou řazeny systematicky podle oborů (1—34), takže každý číslovaný řádek obsahuje týž pojem postupně v angličtině, ruštině němčině, francouzštině, italštině a češtině. Druhou část slovníku tvoří abecední rejstříky termínů pro každý jazyk zvlášť současně s číselnými odkazy na příslušný obor a řádek v první části slovníku, kde pak snadno najdeme kterýkoliv potřebný překlad. Publikace tak zastupuje vlastně třicet dvojazyčných slovníků. Grafická úprava této výjimečné knihy dobře reprezentuje náš polygrafický průmysl, což nepochybně přispělo k tomu, že Československu bylo svěřeno vydání vícejazyčného výkladového astronomického slovníku.

Dílo je především výsledkem soustavné čtrnáctileté práce dr. Kleczka, ale i početného kolektivu dobrovolných spolupracovníků, jak o tom svědčí okolnost, že na výběru termínů, odborných i jazykových revizích a korekturách se podílelo na 250 odborníků z celého světa. Při sestavení slovníku bylo třeba překonat mnoho technických i odborných obtíží, způsobených například tím, že řada speciálních termínů dosud existovala třeba jen v jednom či ve dvou světových jazycích. Podle doporučení Mezinárodní astronomické unie spolupracovaly v tomto smyslu s autorem národní komitety zainteresovaných zemí, takže slovník se stal zároveň předpokladem pro normalizaci a jednoznačnost astronomického vyjadřování v hlavních světových řečech. V této souvislosti je třeba připomenout, že autor ve spolupráci s našimi astronomy a jazykovědci musel vytvořit některé nové české termíny, které nelze zatím považovat bezpodmínečně za závazné. Autor jistě uvítá případné připomínky od našich čtenářů.

Je přirozené, že tak široce založené dílo, ojedinělé ve světové odborné literatuře, obsahuje několik drobných nedopatření a že specialisté budou leckterý termín postrádat. Nijak to však neovlivní hlavní poslání slovníku, který se stane neocenitelnou pomůckou astronomů i pracovníků

příbuzných věd, jak o tom svědčí první příznivé ohlasy ze zahraničí. Ačkoliv slovník neobsahuje výklad jednotlivých termínů, je nepochybné, že patří do knihovny těch, kdož při své odborné nebo pedagogické práci přicházejí s astronomií do styku, a že přispěje i ke zkvalitnění odpovědné práce novinářů a překladatelů.

V budoucnu bude Kleczkův slovník rozšířen o některé další jazyky a později se pravděpodobně objeví v druhém vydání, respektujícím připomínky a doplňky, které již nyní přicházejí nakladatelství i autorovi od astronomů nejrůznějších národností. Právě rozsáhlá mezinárodní spolupráce, spojená s vysokou odbornou úrovní, je nejpozitivnějším rysem recenzované publikace.

Jiří Grygar

K a r e l H r u š a — J i ř í S e d l á č e k :

Řešené úlohy z matematiky

Aritmetika a algebra

Autoři zpracovali v této sbírce celkem 176 příkladů z učiva aritmetiky a algebry v rozsahu probíraném na všeobecně vzdělávacích a odborných školách. Řešení jednotlivých úloh je provedeno vždy se všemi podrobnostmi, jak tomu nebývá ve školních učebnicích; zvláště pak není nikdy zapomenuto na stanovení podmínek existence řešení. Při řešení rovnic je vždy prováděna zkouška a je zdůrazňováno, kdy prováděné úpravy jsou ekvivalentní a kdy nikoliv.

V knize jsou uvedeny příklady na početní výkony a závorky, zlomky, šedesátkovou soustavu a její použití, na dělitelnost čísel (největší společný dělitel, nejmenší společný násobek), mocniny a odmocniny (s geometrickou konstrukcí odmocniny z přirozeného čísla a úpravami odmocnin). Pak následují rovnice a soustavy rovnic s řešením v oboru reálných čísel, včetně příkladů na rovnice, obsahující výrazy pod odmocninou, kdy je zvlášť nutno dát pozor na ekvivalentnost úprav a vždy je třeba provádět zkoušku řešení dosazením do původní dané rovnice. Po nerovnostech a neúplných číslech jsou graficky znázorněny některé funkce, provedeno počítání s logaritmy a sbírka je ukončena úlohami z posloupností aritmetických i geometrických a ze základů kombinatoriky a komplexních čísel.

Je třeba zdůraznit, že příklady jsou velmi vhodně vybrány od nejjednodušších ke složitějším a že v mnoha případech se jedná o příklady, které mají praktické použití a které nejsou zcela běžné. Právě v příkladech tohoto druhu - jmenujme za mnohé jiné např. úlohu 66, 67, 99, 111 a 113 - je největší přínos sbírky. Propočtením příkladů získá čtenář užitečný přehled o látce z matematiky na středním a odborném školství.

Kniha vyšla v Polytechnické knižnici jako 20. svazek II. řady, vydalo ji SNTL v Praze, 1962, má 192 stran, 31 obrázků, cena brož. Kčs 6,70.

Karel Drábek

K a r e l H a v l í č e k:

Diferenciální počet pro začátečníky

V této knize se autor pokusil zpracovat základy diferenciálního počtu jedné proměnné tak, aby jej vysvětlil na malém počtu stran a aby jeho výklad byl přitom zcela přesný. Řekněme hned, že se mu to podařilo, takže všichni ti, kteří na vysokých školách budou mít v učebním plánu matematiku, se mohou se základy tohoto počtu předem seznámit. Prostudování knihy usnadní rovněž mnohému studentu přechod ze střední školy na vysokou školu, což činívá z počátku nemalé potíže.

Velmi důležité je, že autor dokazuje ty věty, které vyžadují znalostí ze všeobecně vzdělávací nebo odborné školy, příp. užívá k důkazům vlastností, které v předchozím textu sám odvodil. Naproti tomu věty, vyžadující znalostí z jiných oborů matematiky, umělých obrátů nebo jejichž důkaz by byl příliš dlouhý a obtížný, nedokazuje, ale vždy při tom zdůrazňuje, proč tak činí.

Užitečnost knihy je právě v postupném uvádění a vysvětlování nových pojmů. Metodicky správné je to, že teorii vždy předchází aspoň jeden příklad řešený se všemi podrobnostmi. Na konci jednotlivých kapitol potom jsou připojeny poměrně snadné úlohy k samostatnému procvičení látky, celkem 184 příkladů. Na konci knihy jsou pro většinu těchto příkladů uvedeny výsledky, u poněkud složitějších případně i návod k řešení.

Obsah knihy je rozdělen na dvě části. V první, přípravné části je pojednáno o reálných číslech a počítání s nerovnostmi, o důkazu úplnou indukcí, o funkcích a jejich vlastnostech (definiční obory, spojitost a limity). Druhá část se zabývá derivováním funkcí a vlastnostmi jejich derivací, uvádí se tu geometrický a mechanický význam derivace, a zvlášť pěkně je vysvětlen těžký pojem diferenciálu. Po derivacích vyšších řádů, inverzních a složených funkcích a studiu průběhu funkce je ukázáno praktické použití diferenciálního počtu na příkladech extrémů funkce. V závěru knihy jsou probrány funkce exponenciální a logaritmická a jejich vlastnosti.

Kniha vyšla jako 19. svazek II. řady Polytechnické knižnice ve Státním nakladatelství technické literatury v Praze, 1962, má 252 stran, 58 obrázků a brožovaná stojí Kčs 9,70.

Karel Drábek