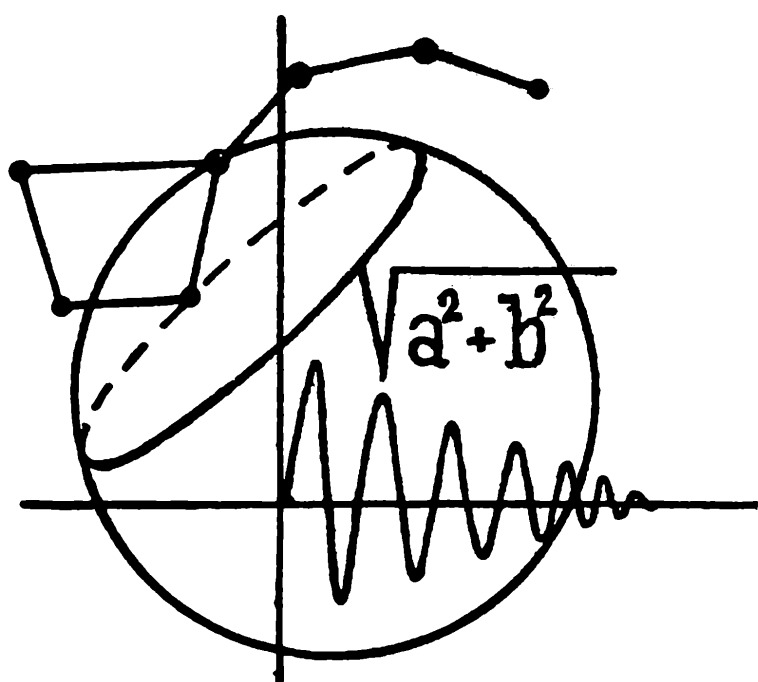


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



1

ROČ. 39
1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 1

Toto číslo vyšlo 15. září 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

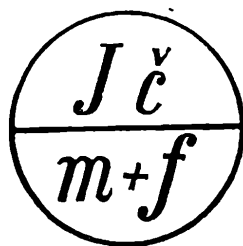
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 505

O B S A H

Inž. J. Klír: Číselné soustavy	1
V. Vitek: Iracionální čísla	6
J. Straka: Neurčité rovnice	8
Doc. O. Setzer: Konstrukce normály středových kuželoseček	14
Prof. dr. V. Santholzer: Jak se u nás projeví pokusné nukleární výbuchy na Sahaře	17
Inž. dr. V. Šindelář: Vyšetření reálnosti srážky dvou kulových těles pohybujících se rovnoměrně přímočaře	23
Úlohy k řešení	26
Řešení úloh z minulého ročníku	28
O. Š.: Nedbalý student	37
K. Čulík: Řešení čínské hry	37
Prof. dr. J. Vanovič: Fyzikálně zaujímavosti	39
Doc. dr. A. Huťa: Akademik Jur Hronec	43
F. Komurka: Baconův článek	44
X. ročník MO	45
Přípravné úlohy MO	46
Recenze	48
Redakční sdělení	48
Zahajujeme II. ročník Fyzikální olympiády	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*01276. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

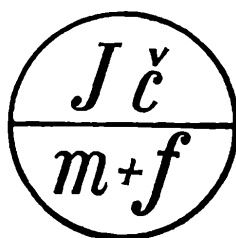
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUcí REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER



ROČNÍK 39

1960-61

Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; C. Sc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; C. Sc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; C. Sc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H

Úvodníky:

Chudý Jaroslav: 40 let KSČ. 385

Matematika:

Danielová Ema: Kvadratická funkční sieť. 337
 Glivický Josef: Konstrukce včelí buňky. 145
 Horák Stanislav j.: Použití Moivreovy věty. 342
 Horák Stanislav s.: O maximálním součinu čísel s konstantním součtem. 386
 Kasková Ema: Další řešení jedné úlohy MO. 442
 Klein Tomáš: Čo priniesol objav neeuklidovskej geometrie. 49, 97
 Klír Jiří: Číselné soustavy. 1
 Klír Jiří: Boolova algebra. 61, 102
 Kos Zdeněk: Vydatnost jímací galerie a přítok do stavební jámy. 156
 Kraemer Emil: O analytické geometrii. 161, 193, 248, 303
 Kriegelstein Eduard: Úvod do diferenciálního počtu. 289, 345, 390, 433
 Kunc Karel: Součty mocnin přirozených čísel. 398
 Straka Josef: Neurčité rovnice. 8, 54, 99, 166
 Špaček Karel: Trojúhelník z výšek. 254
 Vávra Stanislav: Existuje jediná násobilka?. 198
 Vítek Václav: Iracionální čísla. 6
 Vitner Čestmír: Diferenciální geometrie křivek v rovině. 241, 286
 Zajíc Vladimír: Jednoduchá konstrukce libovolného pravidelného mnohoúhelníka. 150

Deskriptivní geometrie:

Drábek Karel: Sestrojení sdružených průměrů elipsy s daným úhlem φ . 64
 Drábek Karel: Několik úloh o parabole s daným parametrem. 447
 Drs Ladislav: Skládání geometrických příbuzností. 200
 Filip Josef: Ku konstrukci kosouhlého axonometrického průmětu. 263, 312
 Hejný Milan: Úpätnica kružnice. 410
 Jeništa Oldřich: Obrisy rotačních ploch v rovnoběžném promítání pravoúhlém. 106, 172
 Medeková Tatiana: Kružítkové pravítko. 407
 Setzer Ota: Konstrukce normály středových kuželoseček. 14
 Šaloun Josef: Konstrukce průsečíků dvou soustředných elips o stejné dlouhých hlavních osách. 261
 Urban Alois: Hyperoskulační kružnice elipsy. 256, 306

Fyzika:

Burjan Václav: „Rodokmen“ prvků. 208
 Cochlar Jiří: Pásmová teorie pevné fáze. 203, 273
 Hroník Jaromír: Známe mocnější energii než atomovou?. 267

Kašpar Emil: Fata morgána	415
Kodeš Jiří: Sluneční baterie-zdroj elektrické energie pro rakety	176
Kos Zdeněk: Průtok potrubím	454
Lepil Oldřich: Cesty k uvolnění jaderné energie	69
Lepil Oldřich: Atom vodíku a jeho spektrum	117
Machalický Jiří: Váha a hmota těles	178
Machalický Jiří: Úvahy nad vodní kapkou a paprskem	422
Pekárek Luděk: Plazma a řízená termonukleární reakce	72, 111
Růžha Zdeněk: Létající stroje využívající vzdušného polštáře	316
Říman Evžen: Kirchhoffovy zákony	425, 463
Santholzer Vilém: Jak se u nás projeví pokusné nukleární výbuchy na Sahaře	17
Smrž Ladislav: Základní normály v elektrotechnice	324, 363
Štaněk Petr: Zkoušení materiálu zvukem a ultrazvukem	356
Šindelář Václav: Vyšetření reálnosti srážky dvou kulových těles pohybujících se rovnoměrně přímočaře	23
Šindelář Václav: Něco o definicích tlaku	460
Šoler Kliment: Tlak na stěny a výtok tekutiny z nádoby	269

Astronomie:

Kopecký Miloslav: Astronomie se stává také vědou experimentální	278
Sehnal Ladislav: Umělé družice určují tvar Země	213
Sehnal Ladislav: Umělé družice a kosmické rakety	280
Smetanová Marie: Československo bude mít dvoumetrový dalekohled	470

Různé:

Bareš Jan: Konference o elektronice	obálka č. 5
Huťa Anton: Akademik Jur Hronec	43
Ik-ar: Interkamera 1960	285
Komurka František: Baconův článek	44
Korec Ivan: Druhá mezinárodní matematická olympiáda	143, 188
Menšík Miroslav: Prof. inž. dr. František Kadeřávek 1885—1961	336
M. M.: O jednotě československých matematiků a fyziků	obálka č. 2
M. M.: Od vesla k atomovému ledoborci	192
M. M. JČMF 1862—1962	obálka č. 6
O. S., M. M.: Rozhovor s vítězi soutěže Rozhledů	191
O. S.: Několik rad našim čtenářům o vstupu na vysoké školy technického směru	obálka č. 7
Redakce: Veřejná literární soutěž	381
Redakce: 12. duben 1961	obálka č. 9
Sedláček Jiří: Deset let Matematické olympiády	429
Sedláček Jiří: O sedmi mostech města Královce (ukázka z knížky)	431
Veselý František: Vyznamenání našich vědeckých pracovníků Eulrovou medailí	287

Matematické zábavy:

Čulík Karel: Řešení čínské hry	37
Herman Antonín: Pravděpodobnost, náhodné a nenáhodné jevy ve Sportce	282, 328
Klier Emanuel: Korděmského neodbytný rozdíl	217
Koman Milan: Dvě úlohy ze zábavné matematiky	134, 182
Menšík Miroslav: Řešení úloh: Klempíř v rozpacích, Máte dobrou představivost?	140
O. S.: Nedbalý student	37

O. S.: Řešení úloh: Matka - syn, Co způsobí jedna žena	375
Plajner Rudolf: Řešení Fibonacciovy úlohy	377
Vetter Quido: Řešení zajímavé úlohy z teorie čísel	91

Recenze:

Drábek Karel: J. Filip, Prehľad deskriptívnej geometrie.	142
Drábek Karel: J. Pál, Deskriptívna geometria videná priestorove.	475
Dubský Jaromír: R. Zelinka, Osmý ročník Matematické olympiády.	94
Říman Evžen: J. Hořejší, Sbírka úloh z dynamiky	48
Sedláček Jiří: Český překlad Wienerovy Kybernetiky.	382
Šetzer Ota: J. Sedláček, Nebojte se matematiky	383
Šoler Kliment: F. H. Norien, Poznejte svůj rozhlasový přístroj.	238
Šoler Kliment: K. Bohm-R. Dörge, Gigant atom	239
Šoler Kliment: J. Drobkinová, Kde roboti vytlačují člověka	239
Šoler Kliment: A. Kolman, Lenin a současná fyzika.	334
Šoler Kliment: E. Aisberg, Škola televize	384
Weber Zdeněk: R. Girke, G. Sprockhoff: Experiment po kursu elementarní fyziky.	335

Fyzikálně zajímavosti:

Vanovič Ján: Založení nové rubriky	39
Vanovič Ján: Aká je príčina priehľadnosti alebo nepriehľadnosti hmotných prostredí?	180
Vanovič Ján: Podľa akého zákona prebieha absorpcia žiarenia v prostredí?	222
Vávra Stanislav: Něco o první větě impulsové	223

Matematická olympiáda:

X. ročník MO	45
Přípravné úlohy MO	46, 83
Holubář Josef: Závěr devátého ročníku MO	89
II. soutěžní úloha I. kola MO	obálka č. 3
Soutěžní úlohy I. kola MO.	obálky č. 4, 5
Sdělení.	obálky č. 7, 8

Fyzikální olympiáda:

Zahajujeme II. ročník Fyzikální olympiády	obálka č. 1
Úlohy pro první kolo II. ročníku FO	85
Upozornění účastníkům FO	obálka č. 4
Koštal R. - Košťálová D. Vlach B.: Měření odporu metodou přímou a Wheatstonovým můstkem.	225
Koštal R. - Košťálová D. Vlach B.: Určování chyby veličiny měřené a veličiny vypočtené	229
Pospíšil Jaroslav: Informace o úlohách třetího kola I. ročníku FO	367

Úlohy k řešení.	26, 78, 122, 133
Redakční sdělení	48, 240, 476

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,—; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Matematika

Inž. Jiří Klír, Výzkumný ústav mat. strojů, Praha:

Číselné soustavy

Prostředek, kterého běžně užíváme pro vyjádření číselných informací, je tzv. desítková či dekadická číselná soustava. Tato soustava je nazývána desítkovou proto, že užívá deseti různých znaků (číslí) 0, 1, 2, ..., 9, při čemž libovolné číslo N je vyjádřeno jako součet mnohočlenu (polynomu) o základu 10, tedy

$$N = Z_n \cdot 10^n + Z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + Z_1 \cdot 10^1 + Z_0 \cdot 10^0 + \\ + Z_{-1} \cdot 10^{-1} + Z_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + Z_{-m} \cdot 10^{-m}, \quad (1)$$

kde na místo každého $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{-m}$ je dosazena podle povahy daného čísla vždy některá z deseti číslic 0, 1, ..., 9. Místo vypisování celého mnohočlenu (1) užíváme zkráceného zápisu, u kterého píšeme pouze posloupnost číslic $Z_n Z_{n-1} \dots Z_{-m}$, při čemž mezi číslicemi Z_0 a Z_{-1} děláme tzv. desetinnou čárku. Jisté číslo N , mající hodnotu danou vztahem (1), zapíšeme tedy zkráceně takto

$$N = Z_n Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0, Z_{-1} Z_{-2} \dots Z_{-m}, \quad (2)$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} Z_n &\neq 0, \\ Z_{-m} &\neq 0, \\ Z_i &= 0, \text{ pro } i > n \text{ a } i < -m. \end{aligned} \quad (3)$$

Je-li $Z_i = 0$ pro všechna $i < 0$ (celé číslo), pak desetinnou čárku neděláme a píšeme pouze posloupnost $Z_n Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0$ bez ohledu, zda $Z_0 \neq 0$ nebo $Z_0 = 0$.

Zkrácený zápis čísel je mnohem přehlednější než zápis ve formě mnohočlenu a umožňuje snadné provádění základních aritmetických

operací s čísly, tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení, jak se učí již na obecné škole.

Pozorný čtenář si jistě již položil otázku, zda bychom nemohli pro vyjádření číselné informace použít mnohočlenu o jiném základu než 10. To je skutečně možné za předpokladu, že za základ vezmeme některé celé kladné¹⁾ číslo větší než jedna, při čemž počet potřebných znaků (číslic) musí být právě roven zvolenému základu. Uvažujeme-li soustavu o základu P , pak libovolné číslo N je vyjádřeno mnohočlenem

$$N = Z_n \cdot P^n + Z_{n-1} \cdot P^{n-1} + \dots + Z_1 \cdot P^1 + Z_0 \cdot P^0 + \\ + Z_{-1} \cdot P^{-1} + \dots + Z_{-m} \cdot P^{-m}, \quad (4)$$

kde za $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{-m}$ se podle povahy daného čísla dosadí vždy některá z číslic $0, 1, \dots, P-1$. Pro zkrácený zápis platí totéž co u soustavy desítkové, ale místo specifického názvu *desetinná čárka* užíváme u všech ostatních soustav obecnějšího názvu *řádková čárka*.

Každá soustava, která zobrazuje čísla pomocí vztahu (4), nazývá se *polyadická číselná soustava o základu P* . Podle použitého základu jsou pak soustavy blíže označovány, např. *dvojková* (binární) pro $P = 2$, *osmičková* (oktalová) pro $P = 8$, *desítková* (dekadická) pro $P = 10$ atd.

Přesto, že z historie je známo užívání polyadických soustav s různým základem, nebo i jejich kombinací, byly postupně tyto soustavy vytlačeny soustavou desítkovou, které dnes užíváme s naprostou samozřejmostí. Zdá se, že soustava desítková se ujala proto, že člověk má deset prstů na ruce a těch bylo používáno jako první primitivní počítač pomůcky. Teprve s rozvojem číslicových matematických strojů (viz článek [1]) opět nabyly na významu některé polyadické soustavy s nedekadickým základem a to především soustava dvojková.

Nyní odvodíme, jakým způsobem lze převádět číselný obraz z jedné polyadické soustavy do jiné²⁾. K tomu účelu přepíšeme nejdříve mnohočlen (4) do jiného tvaru:

$$N = [(\dots((Z_n \cdot P + Z_{n-1}) \cdot P + Z_{n-2}) \cdot P + \dots + Z_1) \cdot P + Z_0] + \\ + [P^{-1} (Z_{-1} + P^{-1} (Z_{-2} + P^{-1} (Z_{-3} + \dots + P^{-1} Z_{-m} \dots)))] \quad (5)$$

Hranatými závorkami jsme oddělili část mnohočlenu odpovídající obrazu před řádkovou čárkou od části odpovídající číselnému obrazu za řádkovou čárkou. Pro každou z obou částí je třeba provést převod samostatně a pak oba získané číselné obrazy spojit.

¹⁾ Obecně může být základem též číslo záporné nebo číslo necelé, popřípadě i iracionální. Takové soustavy nenašly však dosud praktického užití. Zajímavé jsou pouze soustavy mající za základ záporné celé číslo. U těchto soustav není třeba užívat znamének $+$ a $-$ pro rozlišení obrazů kladných a záporných čísel, neboť všechna čísla od $-\infty$ do $+\infty$ mají jednotný obraz.

²⁾ Postup je ilustrován dále na několika příkladech, které umožní čtenáři lépe pochopit toto obecné odvození.

Předpokládejme, že číslo N je vyjádřeno v soustavě o základu p , což označíme $[N]_p$ a chceme je převést do soustavy o základu P , tj. chceme získat číselný obraz $[N]_P$. Z mnohočlenu (5) vezměme nejdříve pouze část před řádovou čárkou, kterou označíme $[N]_P$, tedy:

$$[N]_P' = [(\dots ((Z_n \cdot P + Z_{n-1}) P + Z_{n-2}) P + \dots + Z_1) P + Z_0]_P^3 \quad (6)$$

Ze vztahu (6) je vidět, že dělením čísla $[N]_P'$ číslem $[P]_p$ dostaneme podíl $[(\dots ((Z_n \cdot P + Z_{n-1}) P + Z_{n-2}) P + \dots + Z_1]_p$ a zbytek $[Z_0]_p$.

Tabulka číselných obrazů v polyadických soustavách s různým základem P

$P = 10$	9	8	7	6	5	4	3	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	10
3	3	3	3	3	3	3	10	11
4	4	4	4	4	4	10	11	100
5	5	5	5	5	10	11	12	101
6	6	6	6	10	11	12	20	110
7	7	7	10	11	12	13	21	111
8	8	10	11	12	13	20	22	1000
9	10	11	12	13	14	21	100	1001
10	11	12	13	14	20	22	101	1010
11	12	13	14	15	21	23	102	1011
12	13	14	15	20	22	30	110	1100
13	14	15	16	21	23	31	111	1101
14	15	16	20	22	24	32	112	1110
15	16	17	21	23	30	33	120	1111
16	17	20	22	24	31	100	121	10000
17	18	21	23	25	32	101	122	10001
18	20	22	24	30	33	102	200	10010
19	21	23	25	31	34	103	201	10011
20	22	24	26	32	40	110	202	10100

Dělíme-li získaný podíl opět číslem $[P]_p$, dostaneme jiný podíl a zbytek $[Z_1]_p$. Opakujeme-li tuto činnost, dostaneme postupně $[Z_2]_p$, $[Z_3]_p$, ... a nakonec nulový podíl a zbytek $[Z_n]_p$. Je-li $p > P$, je $[Z_i]_p = [Z_i]_P$ a převod je skončen. Je-li však $p < P$, musíme k nalezeným číslům $[Z_i]_p$ nalézt ekvivalentní číslíce $[Z_i]_P$, což provádíme zpravidla podle

³⁾ Indexu p za hranatou závorkou užíváme zde jako zjednodušeného označení toho, že všechna čísla uvnitř této závorky jsou vyjádřena v soustavě o základu p .

tabulky, kterou jsme právě uvedli pro $P = 2 \div 10$, nebo po dosažení určitého cviku z paměti.

Naznačený postup ukážeme nyní na konkrétních příkladech.

P ř í k l a d 1. Převedte číslo $[27]_{10}$ do dvojkové soustavy.

Ř e š e n í. Provádíme postupně dělení dvěma a zaznamenáváme zbytky vzniklé po dělení

$$27 : 2 = 13$$

$$1 \rightarrow Z_0$$

$$13 : 2 = 6$$

$$1 \rightarrow Z_1$$

$$6 : 2 = 3$$

$$0 \rightarrow Z_2$$

$$3 : 2 = 1$$

$$1 \rightarrow Z_3$$

$$1 : 2 = 0$$

$$1 \rightarrow Z_4 .$$

Obraz daného čísla ve dvojkové soustavě je $Z_4 Z_3 Z_2 Z_1 Z_0 = 11011$. Platí tedy rovnost $[27]_{10} = [11011]_2$.

P ř í k l a d 2. Převedte číslo $[1011011]_2$ do desítkové soustavy.

Ř e š e n í. Provádíme postupně dělení daného čísla desítkou vyjádřenou ve dvojkové soustavě, tj. podle uvedené tabulky obrazem $[1010]_2$ a zaznamenáváme opět zbytky po dělení⁴⁾

$$1011011 \quad 1010 = 1001$$

$$1 \rightarrow Z_0$$

$$1001 \quad 1010 = 0$$

$$1001 \rightarrow Z_1$$

Desítkový obraz daného čísla je roven $[Z_1]_{10} [Z_0]_{10}$. Podle tabulky určíme $Z_1 = [1001]_2 = [9]_{10}$, takže platí $[1011011]_2 = [91]_{10}$.⁵⁾

Nyní ukážeme způsob, jak převádět části číselných obrazů za řádovou čárkou, tj. z mnohočlenu (5) uvažujeme pouze druhou část, kterou označíme $[N]_p''$

⁴⁾ Dělení je ovšem třeba provádět v příslušné soustavě - v našem případě tedy v soustavě dvojkové. Při tom je třeba se řídit důsledně číselnými obrazy dané soustavy podle uvedené tabulky.

⁵⁾ Převod čísla do soustavy desítkové je též možno provést jednoduše tak, že číslo rozepíšeme do mnohočlenu (4) se základem původní soustavy. Vyčíslením mnohočlenu (umocněním, znásobením a sečtením) dostaneme již přímo číslo v desítkové soustavě. Příklad 2. bychom tedy řešili takto: $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91$.

$$[N]_p'' = [P^{-1}(Z_{-1} + P^{-1}(Z_{-2} + P^{-1}(Z_{-3} + \dots + P^{-1}Z_{-m} \dots)))]_p. \quad (7)$$

Ze vztahu (7) je zřejmé, že násobíme-li číslo $[N]_p''$ hodnotou $[P]_p$, dostaneme nové číslo, které má před řádovou čárkou číslo $[Z_{-1}]_p$ a za řádovou čárkou číslo

$$[P^{-1}(Z_{-2} + P^{-1}(Z_{-3} + \dots + P^{-1}Z_{-m} \dots))]_p.$$

Násobíme-li nyní toto číslo za řádovou čárkou opět číslem $[P]_p$, dostaneme číslo, jehož část před řádovou čárkou je rovna $[Z_{-2}]_p$. Opakováním zmíněného postupu získáme postupně další čísla $[Z_{-3}]_p$, $[Z_{-4}]_p$ atd. Poznamenejme hned, že necelá čísla, která jsou v jedné soustavě vyjádřena konečným počtem číslic, se často nedají zobrazit v jiné soustavě konečným počtem číslic. Např. $\frac{1}{3}$ se nedá vyjádřit v desítkové soustavě konečným počtem číslic, avšak v trojkové soustavě jí odpovídá jednoduchý obraz $[0,1]_3$.

Nyní budeme celý předcházející výklad ilustrovat ještě několika příklady.

P ř í k l a d 3. Převeďte číslo $[0,79]_{10}$ do trojkové soustavy.

Ř e š e n í. Provádíme postupné násobení třemi a zaznamenáváme ty části podílu, které jsou před řádovou čárkou

$$\begin{aligned} 0,79 \cdot 3 &= 2,37 & (Z_{-1} &= 2) \\ 0,37 \cdot 3 &= 1,11 & (Z_{-2} &= 1) \\ 0,11 \cdot 3 &= 0,33 & (Z_{-3} &= 0) \\ 0,33 \cdot 3 &= 0,99 & (Z_{-4} &= 0) \\ 0,99 \cdot 3 &= 2,97 & (Z_{-5} &= 2). \end{aligned}$$

Tímto způsobem bychom mohli postupovat dále a zpřesňovat tak získávaný obraz. V našem případě platí přibližná rovnost

$$[0,79]_{10} \doteq [0,21002]_3.$$

P ř í k l a d 4. Převeďte číslo $[625,832]_{10}$ do osmičkové soustavy.

Ř e š e n í. Nejdříve provedeme převedení části před řádovou čárkou, tj. čísla $[625]_{10}$. Provádíme postupné dělení osmičkou a zaznamenání zbytků

$$\begin{aligned} 625 : 8 &= 78 \\ 1 &\rightarrow Z_0 \\ 78 : 8 &= 9 \\ 6 &\rightarrow Z_1 \\ 9 : 8 &= 1 \\ 1 &\rightarrow Z_2 \\ 1 : 8 &= 0 \\ 1 &\rightarrow Z_3 \end{aligned}$$

Dostáváme $[625]_{10} = [1161]_8$. Nyní převedeme část za řádovou čárkou, tj. číslo $[0,832]_{10}$. Provádíme postupné násobení osmičkou a zaznamenáváme hodnoty před řádovou čárkou podílu

$$0,832 \cdot 8 = 6,656 \quad (Z_{-1} = 6)$$

$$0,656 \cdot 8 = 5,248 \quad (Z_{-2} = 5)$$

$$0,248 \cdot 8 = 1,984 \quad (Z_{-3} = 1)$$

$$0,984 \cdot 8 = 7,872 \quad (Z_{-4} = 7)$$

Spokojíme-li se se čtyřmi místy za řádovou čárkou, dostáváme přibližnou rovnost $[0,832]_{10} \doteq [0,6517]_8$. Pro celé číslo pak platí $[625,832]_{10} \doteq [1161,6517]_8$.

Poznamenejme závěrem, že polyadické soustavy jsou pouze jedním ze způsobů, jak zobrazovat číselné informace. Z ostatních způsobů nabývá v poslední době na významu zejména tzv. *číselná soustava zbytkových tříd*, která je za jistých podmínek velmi vhodná pro číslicové matematické stroje. Protože vysvětlení principu této soustavy vyžaduje některé předběžné znalosti z teorie čísel, nebudeme se jí zde zabývat, při čemž vážnější zájemce odkazujeme na práce [2] a [3].

Tímto příspěvkem jsme chtěli pouze ukázat podstatu polyadických číselných soustav a naznačit postup převádění číselných obrazů mezi soustavami o různých základech. Doufáme, že jsme tím pomohli čtenářům studovat základní práce o matematických strojích, kde se vyskytují soustavy s různými základy.

Literatura.

- [1] J. Klír, *Matematické stroje*. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1959/60, č. 1.
- [2] Valach M., *Vznik kodu a číselné soustavy zbytkových tříd*. Stroje na zpracování informací, sborník III, NČSAV, Praha 1955.
- [3] A. Svoboda, *Rational Number System of Residual Classes*. Stroje na zpracování informací, sborník V, NČSAV, Praha 1957.

V á c l a v V í t e k, ČVUT, Praha:

Iracionální čísla

Tento článek je velmi neúplným přehledem výsledků podrobněji dokazovaných v knížce I. Niven, *Irrational numbers* (11. číslo *The Carus Mathematical Monographs*, Copyright 1956 by The Mathematical Association of America).

Jak je vám jistě známo, podíl dvou celých čísel $\frac{h}{k}$, $k \neq 0$ je tzv. číslo racionální. Také víte, že v matematice zavádíme ještě další čísla, tzv. reálná iracionální čísla. Číslům racionálním a reálným iracionálním říkáme dohromady reálná čísla. Racionálních čísel známe nyní zajisté dost. Naproti tomu u čísel iracionálních býváme s jejich výčtem brzy hotovi; ještě nejsnáze si vzpomene, že iracionální je $\sqrt{2}$, π a nekonečný neperiodický desetinný zlomek. Ve skutečnosti se však ukazuje, že iracionálních čísel je podstatně více než racionálních, že totiž v jistém smyslu skoro všechna reálná čísla jsou iracionální. Uvedu nyní (bez důkazu) některé třídy iracionálních čísel.

I. Je-li $m > 0$ celé, $n \geq 1$ přirozené, m není n -tou mocninou celého čísla, pak $\sqrt[n]{m}$ je iracionální (tak např. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$ jsou čísla iracionální, nikoliv však $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[9]{9}$).

II. Pro libovolné racionální $r \neq 0$ je $\cos r$ iracionální.

Důsledkem tohoto tvrzení je: π je iracionální. Kdyby totiž π bylo racionální, muselo by podle právě řečeného $\cos \pi$ být iracionální, zatím co $\cos \pi = -1$. Důsledkem je též, že pro $r \neq 0$ i hodnoty ostatních trigonometrických funkcí jsou iracionální. Např. kdyby $\sin r$ byl racionální pro racionální $r \neq 0$, byl by racionální $\cos 2r = 1 - 2\sin^2 r$, což je spor. Kdyby $\operatorname{tg} r$ byl racionální, byl by racionální $\cos 2r = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 r}{1 + \operatorname{tg}^2 r}$, tedy opět spor. Též $\operatorname{cosec} r$, $\sec r$ a $\operatorname{cotg} r$ jsou iracionální pro racionální hodnoty argumentu, neboť jsou to převrácené hodnoty iracionálních čísel.

III. Pro libovolné kladné racionální $r \neq 10^n$ (n celé) $\log_{10} r$ je iracionální. (Tedy $\log 2$, $\log 3$ je iracionální, nikoliv však $\log 10$, $\log \frac{1}{10}$ a pod.)

Pojem racionálního čísla lze jistým způsobem zobecnit. Racionální číslo r splňuje rovnici tvaru $x - r = 0$ s racionálními koeficienty 1, $-r$. Obecně definujeme: algebraické číslo je takové číslo, které splňuje nějakou rovnici tvaru

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

s racionálními koeficienty 1, $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 1$ přirozené). Čísla, jež nejsou algebraická (jež tedy nesplňují žádnou rovnici tvaru (1) s racionálními koeficienty), nazveme čísla transcendentní. V důsledku uvedené definice množina reálných čísel se rozpadá na dvě množiny: množinu reálných čísel algebraických a množinu reálných čísel transcendentních. Čísla algebraická a transcendentní mohou být i nereálná. Množina čísel algebraických je jistě neprázdná, neboť obsahuje množinu všech čísel racionálních; ale na rozdíl od čísel racionálních alge-

braická čísla mohou být též iracionální, např. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, jež je číslem algebraickým jakožto řešení rovnice $x^2 - \frac{3}{4} = 0$ s racionálními koeficienty. Příkladem čísla transcendentního je číslo π , což uvádím opět bez důkazu.

Je vidět, že zavedené pojmy čísel algebraických a transcendentních nejsou pojmy „prázdné“, tj. definovaná čísla skutečně existují.

Nyní opět známe dosti algebraických čísel; jimi jsou např. všechna čísla třídy I., neboť splňují rovnici $x^n - m = 0$ s racionálními, dokonce celými koeficienty 1, $-m$. Jinou třídu algebraických čísel (jak se dá ukázat) tvoří hodnoty trigonometrických funkcí v racionálních násobcích π (např. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je číslo algebraické). Naproti tomu jsme si uvedli jen jedno transcendentní číslo π . Ve skutečnosti je však transcendentních čísel daleko více než algebraických; dokonce - jak se zase dá dokázat - v jistém smyslu skoro všechna reálná čísla jsou transcendentní. Např. platí: je-li $\alpha \neq 0$ algebraické, pak $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$ jsou čísla transcendentní.

J o s e f S t r a k a, ČVUT, Praha:

Neurčité rovnice

Článek rozdělíme na čtyři části. V první části uvedeme některé věty z dělitelnosti celých čísel potřebné pro druhou část, v druhé části budeme řešit lineární neurčitou rovnici, v třetí části pojednáme o jednoduché neurčité rovnici 2. stupně a ve čtvrté části podáme řešení lineární neurčité rovnice jiným postupem. V celé práci budou značit písmena c e l á čísla, nebude-li řečeno nic jiného.

I

Definice 1. Číslo a je násobkem čísla $b \neq 0$, jestliže existuje takové celé číslo q , že platí $a = bq$.

Někdy se též říká, že b je d ě l i t e l e m a , nebo a je dělitelné b .

Naproti tomu výrok, že číslo a není násobkem čísla $b \neq 0$, čili že a není dělitelné b znamená, že existují určitá celá čísla q , z taková, že platí $a = bq + z$, kde $0 < z < |b|$. Např. číslo 19 není násobkem čtyř a proto existují celá čísla $q = 4$, $z = 3$ taková, že platí $19 = 4 \cdot 4 + 3$, kde $0 < 3 < 4$.

V ě t a 1. Je-li číslo $a \neq 0$ násobkem čísla $b \neq 0$, potom platí $|b| \leq |a|$.

D ů k a z. Podle předpokladu existuje celé číslo q , že $a = bq$, tedy též $|a| = |b| \cdot |q|$. Poněvadž $a \neq 0$, $b \neq 0$, je také $q \neq 0$, takže celé číslo q nabývá některé z hodnot $\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots$. Přejdeme-li u čísla q k jeho absolutní hodnotě, dostaneme podmínku pro číslo $q : |q| \geq 1$. Po vynásobení této nerovnosti kladným celým číslem $|b|$ dostaneme $|b| \cdot |q| \geq |b|$, čili $|a| \geq |b|$, jak tvrdí věta.

V ě t a 2. Jsou-li čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dělitelná číslem $c \neq 0$, potom i číslo $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$ je dělitelné číslem c .

D ů k a z. Podle předpokladu existují celá čísla $q_i, i = 1, 2, \dots, n$, že platí

$$\begin{aligned} a_1 &= cq_1, \\ a_2 &= cq_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$a_n = cq_n$$

Znásobíme-li všechny rovnosti z (1), a to postupně první, druhou až n -tou po řadě čísla $b_1, b_2, \dots, b_n$, dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= c (q_1 b_1), \\ a_2 b_2 &= c (q_2 b_2), \end{aligned}$$

$$a_n b_n = c (q_n b_n)$$

Po sečtení těchto rovností vyjde po úpravě

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = c (q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_3 b_3 + \dots + q_n b_n).$$

Poslední rovnost podle definice násobku udává, že číslo na levé straně poslední rovnosti je dělitelné číslem c .

Definice 2. Číslo $d \neq 0$, které je dělitelem čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, se nazývá jejich s p o l e č n ý d ě l i t e l.

Definice 3. Největší kladné celé číslo D , kterým jsou čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ dělitelná, se nazývá jejich n e j v ě t š í s p o l e č n ý d ě l i t e l. Budeme psát $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = D$.

Definice 4. Jestliže čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \geq 2$ nemají jiných dělitelů, kromě čísel 1, -1 (tzv. samozřejmí společní dělitelé), nazývají se č í s l a n e s o u d ě l n á.

Jsou-li čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nesoudělná, je zřejmě $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ a obráceně. Protože každý dělitel čísla a je také dělitelem čísla $|a|$, je zřejmě

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = D(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|),$$

takže můžeme předpokládat, že čísla $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou vesměs kladná. Kdyby tomu tak nebylo, můžeme je nahradit jejich absolutními hodnotami.

Nyní půjde o to, nalézt postup, kterým se stanoví největší společný dělitel daných dvou čísel. Jedna známá cesta je založena na rozkladu v prvočinitele. Druhá cesta, které použijeme, je tzv. Euklidův algoritmus postupného dělení. Jeho podkladem jsou věty 3. a 4.

Věta 3. *Je-li číslo a násobkem čísla $b > 0$, je $D(a, b) = b$ a obráceně.*

Důkaz. Podle předpokladu je číslo b dělitelem čísla a . Číslo b je též dělitelem sama sebe. Je tedy číslo b společným dělitelem čísel a, b . Že je největším společným dělitelem vyplývá z toho, že číslo b již nemůže mít většího dělitele podle věty 1. Obrácenou větu si ověří čtenář snadno sám.

Věta 4. *Není-li číslo a násobkem čísla $b \neq 0$ a jestliže při dělení čísla a číslem b vyjde zbytek z , potom každý společný dělitel čísel a, b je také dělitelem čísla z a každý společný dělitel čísel b, z je dělitelem čísla a .*

Důkaz. Předpokládejme, že při dělení čísla a číslem b vyjde podíl q a zbytek z , tj. nechť platí $a = bq + z$, kde $0 < z < |b|$, čili $z = a - bq$. Je-li číslo d společným dělitelem čísel a, b , je také dělitelem čísla $z = a - bq$ podle věty 2. a je-li d společným dělitelem čísel b, z , je podle téže věty i dělitelem čísla $a = bq + z$.

Důsledek. *Největší společný dělitel čísel a, b je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z .*

Důkaz. Označme $D(a, b) = D$, $D(b, z) = D'$. Protože D je dělitelem čísel a, b , je podle předcházející věty číslo D dělitelem čísla z , takže D je společným dělitelem čísel b, z a proto $D \leq D'$, neboť D' je největší společný dělitel čísel b, z a dělitel D nemůže být větší. Obdobně podle předcházející věty je D' společným dělitelem čísel a, b a proto $D' \leq D$, neboť D je největší společný dělitel čísel a, b a dělitel D' nemůže být větší. Platí tedy vztahy

$$D \leq D' \quad D' \leq D$$

Obojímu lze vyhovět jen když bude $D = D'$

Podle věty 4. je každý společný dělitel čísel a, b dělitelem čísla z ; je tedy také společným dělitelem čísel b, z , která se vyskytují v prvním kroku Euklidova algoritmu. Z téhož důvodu je také dělitelem všech ostatních zbytků, které se vyskytují v dalších krocích. Společný dělitel čísel a, b je tedy též dělitelem posledního nenulového zbytku, který je největším společným dělitelem čísel a, b . Tím je dokázáno, že:

Každý společný dělitel čísel a, b je dělitelem jejich největšího společného dělitele.

Podle Euklidova algoritmu stanovíme největšího společného dělitele dvou celých čísel a, b takto. Budiž $|a| \geq |b|$. Číslo $|a|$ dělíme číslem $|b|$. Vyjde-li dělení beze zbytku, je číslo $|b|$ největším společným dělitelem obou čísel (podle věty 3.). Nevyjde-li dělení beze zbytku, postup opakujeme s dělitelem a zbytkem a to tak dlouho, až dojdeme k dělení,

které vyjde beze zbytku. Poslední dělitel, tj. poslední nenulový zbytek, je pak největším společným dělitelem daných dvou čísel (podle věty 4.).

Ze tento postup vede k cíli, tj. vždy skončí po konečném počtu kroků, je zřejmé, neboť zbytek dělení je vždy menší než dělitel a není nikdy záporný. Zbytky, které v našem postupu vycházejí, se tedy stále zmenšují a jsou to celá nezáporná čísla. Proto po konečném počtu dělení musíme dojít k nulovému zbytku.

Definice 5. Číslo $a\bar{a} + b\bar{b}$, kde $\bar{a}$, $\bar{b}$ jsou libovolná celá čísla, nazýváme součtem násobků čísel a , b .

P o z n á m k a. V dalším budeme vždy předpokládat, že součet násobků čísel a , b je kladné celé číslo. Kdyby tomu tak nebylo, nahradíme číslo $a\bar{a} + b\bar{b}$ číslem $|a\bar{a} + b\bar{b}|$.

V ě t a 5. *Budtež a , b celá čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.*

Dále budiž M množina všech kladných čísel tvaru $a\bar{a} + b\bar{b}$.

~~Potom platí~~

- M nožina M obsahuje čísla a , b .*
 - Jsou-li A , B dvě čísla z množiny M , potom i číslo $A \pm B$ patří do množiny M .*
 - Je-li A číslo z množiny M a $|c|$ libovolné celé číslo různé od nuly, potom i číslo $|c|A$ patří do množiny M .*
 - M nožina M obsahuje nejmenší číslo D .*
 - M nožina M obsahuje všechny násobky čísla D .*
 - Číslo D je největším společným dělitelem čísel a , b .*
- D ů k a z. Libovolný prvek A množiny M má tvar

$$a\bar{a} + b\bar{b}, \quad (2)$$

kde $\bar{a}$, $\bar{b}$ jsou celá čísla.

a) Položíme-li v (2) $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = 0$, resp. $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 1$, vidíme, že čísla a , b patří do množiny M .

b) Nechť $A = a\bar{a} + b\bar{b}$, $B = a\bar{x} + b\bar{y}$. Potom

$$A \pm B = a(\bar{a} \pm \bar{x}) + b(\bar{b} \pm \bar{y}),$$

takže číslo $A \pm B$ má tvar (2) a patří proto do množiny M .

c) Nechť $A = a\bar{a} + b\bar{b}$ je číslo z množiny M a $|c|$ libovolné celé číslo různé od nuly. Potom číslo

$$|c|A = a(\bar{a}|c|) + b(\bar{b}|c|)$$

má tvar (2) a patří do množiny M .

d) Množina M obsahuje kladná čísla a proto obsahuje nejmenší číslo, které označíme D .¹⁾

¹⁾ Podle věty o tzv. infimu číselné množiny existuje v neprázdné množině M kladných celých čísel číslo nejmenší, tj. číslo x té vlastnosti, že pro každý prvek y z množiny M platí $y \geq x$.

e) Budiž A libovolné číslo z M . Dělme číslo A číslem D . Nechť při tomto dělení vyjde podíl q a zbytek z . Pak platí $A = Dq + z$, kde $0 \leq z < D$, takže $z = A - Dq$. Podle vlastností b), c) množiny M je číslo z možno psát ve tvaru kladného součtu násobků čísel a, b , tj. číslo z patří též do množiny M . Je jistě $z = 0$. Kdyby totiž bylo $z > 0$, bylo by $z < D$, takže podle d) by nebylo číslo D nejmenším číslem množiny M . Potom je $A = Dq$ a množina M obsahuje násobky čísla D . Protože lze číslo D vyjádřit kladným součtem násobků čísel a, b , lze podle c) i číslo $|k|D$ takto vyjádřit a množina M obsahuje všechny násobky čísla D .

f) Protože číslo D je podle e) dělitelem libovolného čísla A z množiny M , je jistě společným dělitelem čísel a, b , neboť obě tato čísla do M patří (podle a)).

Nechť t je společný dělitel čísel a, b . Podle věty 2. je t dělitelem čísla $a\bar{a} + b\bar{b}$, takže t je společným dělitelem každého čísla z množiny M , tedy i čísla D . O číslu D víme, že je společným dělitelem čísel a, b a každý jiný společný dělitel t čísel a, b je dělitelem čísla D . Protože $D > 0$ (číslo D patří do množiny M , která obsahuje kladná čísla) je číslo D největším společným dělitelem čísel a, b .

Tím je věta 5. úplně dokázána.

D ů s l e d e k v ě t y 5. Je-li $D(a, b) = D$, potom existují určitá celá čísla $\bar{a}, \bar{b}$ tak, že

$$a\bar{a} + b\bar{b} = D$$

Číslo D patří totiž do množiny M a má tedy tvar součtu násobků čísel a, b .

V ě t a 5 a. Čísla a, b jsou nesoudělná tehdy a jen tehdy, když existují celá čísla $\bar{a}, \bar{b}$ tak, že

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1$$

Jsou-li totiž čísla a, b nesoudělná, je číslo 1 jejich největším společným dělitelem.

P ř í k l a d 1. Máme určit $D(684; 252)$.

Jednotlivá dělení, která vystupují v Euklidově algoritmu, můžeme psát takto

$$\begin{aligned} 684 &= 252 \cdot 2 + 180, \\ 252 &= 180 \cdot 1 + 72, \\ 180 &= 72 \cdot 2 + 36, \\ 72 &= 36 \cdot 2 + 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Je tedy $D(684; 252) = 36$.

Z každé z rovností (3) lze vyjádřit zbytek a postupným dosazováním dostaneme každý zbytek ve tvaru $a\bar{a} + b\bar{b}$, kde $\bar{a}, \bar{b}$ jsou určitá celá čísla. Tak z první rovnosti vyjde

$$180 = 684 - 252 \cdot 2 = 684 \cdot 1 + 252 \cdot (-2) \quad (\bar{a} = 1, \bar{b} = -2)$$

Z první a druhé rovnosti dostaneme

$$72 = 252 - 180 = 252 - 684 + 252 \cdot 2 = 684 \cdot (-1) + 252 \cdot 3$$

$$(\bar{a} = -1, \bar{b} = 3).$$

Z první, druhé a třetí rovnosti plyne

$$36 = 180 - 72 \cdot 2 = 684 \cdot 1 + 252 \cdot (-2) - [684 \cdot (-1) + 252 \cdot 3] \cdot 2 =$$

$$= 684 \cdot 1 + 252 \cdot (-2) + 684 \cdot 2 + 252 \cdot (-6) = 684 \cdot 3 + 252 \cdot (-8)$$

$$(\bar{a} = 3, \bar{b} = -8).$$

Pro největšího společného dělitele čísel 684 a 252, tj. pro poslední nenulový zbytek ve vztahu (3), platí $36 = 684 \cdot 3 + 252 \cdot (-8)$

Je tedy psán poslední nenulový zbytek 36 ze vztahu (3) ve tvaru $a\bar{a} + b\bar{b}$, kde $a = 684$, $b = 252$ jsou daná čísla, $\bar{a} = 3$, $\bar{b} = -8$ jsou celá čísla.

Z věty 5. vyplývá, že každý násobek největšího společného dělitele daných čísel a , b lze psát jako součet násobků čísel a , b .

Kdybychom proto za $\bar{a}$, $\bar{b}$ volili libovolnou dvojici celých čísel, třeba $\bar{a} = -2$, $\bar{b} = 5$, dostaneme

$$|a\bar{a} + b\bar{b}| = |684 \cdot (-2) + 252 \cdot 5| = |-1368 + 1260| = 108,$$

což je násobek nalezeného největšího společného dělitele 36, neboť $108 = 36 \cdot 3$.

V ě t a 6. Jsou-li a , b dvě nesoudělná čísla a je-li součin ac násobkem čísla b , je číslo c násobkem čísla b .

D ů k a z. Podle předpokladu existují celá čísla $\bar{a}$, $\bar{b}$ tak, že

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \quad (4)$$

Po vynásobení vztahu (4) číslem c vyjde

$$(a\bar{a})c + (b\bar{b})c = (ac)\bar{a} + (bc)\bar{b} = c.$$

Protože čísla ac , bc jsou násobky čísla b , je podle věty 2. i číslo $(ac)\bar{a} + (bc)\bar{b} = c$ násobkem čísla b .

V ě t a 7. Je-li číslo c násobkem dvou nesoudělných čísel a , b , je násobkem i jejich součinu ab .

D ů k a z. Podle předpokladu existují celá čísla $\bar{a}$, $\bar{b}$, že platí (4). Po vynásobení vztahu (4) číslem c dostaneme

$$ac\bar{a} + bc\bar{b} = c. \quad (5)$$

Podle předpokladu dále platí

$$c = aq, \quad c = br. \quad (6)$$

Dosadíme-li první rovnost z (6) do druhého členu na levé straně v (5) a druhou rovnost z (6) do prvního členu na levé straně v (5), vyjde po úpravě $ab(\bar{ra} + \bar{qb}) = c$.

Protože číslo $\bar{ra} + \bar{qb}$ je celé, ukazuje poslední rovnost, že číslo c je násobkem čísla ab .

V ě t a 8. Je-li D největší společný dělitel čísel a, b , potom jsou čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ nesoudělná.

D ů k a z. Podle předpokladu existují taková celá čísla $\bar{a}, \bar{b}$, že platí

$$a\bar{a} + b\bar{b} = D.$$

Dělíme-li poslední výraz číslem D , dostaneme rovnost

$$\frac{a}{D}\bar{a} + \frac{b}{D}\bar{b} = 1$$

Z ní podle věty 5a plyne, že čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ jsou nesoudělná.

P ř í k l a d 2. a) Čísla 8, 11 jsou nesoudělná a součin $8 \cdot 33 = 264 = 11 \cdot 24$ je násobkem čísla 11. Skutečně je číslo 33 násobkem čísla 11.

b) Číslo 60 je násobkem nesoudělných čísel 3 a 5. Skutečně je číslo 60 násobkem čísla $3 \cdot 5 = 15$.

c) Je $D(36;24) = 12$. Čísla $\frac{36}{12} = 3, \frac{24}{12} = 2$ jsou nesoudělná.

(Pokračování)

Deskriptivní geometrie

Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Konstrukce normály středových kuželoseček

V deváté třídě jste si dokázali tuto větu:

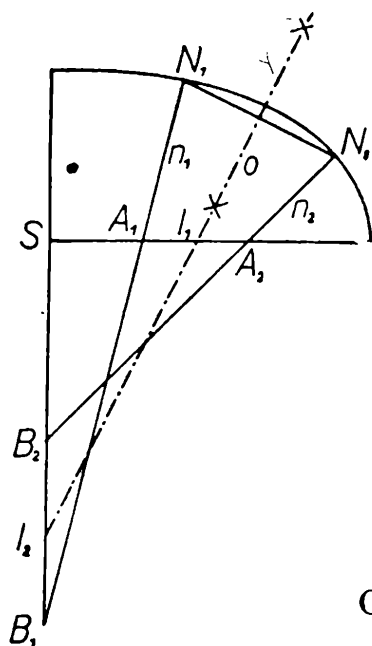
Tečna a normála v bodě N středové kuželosečky (tj. elipsy nebo hyperboly) *půlí úhel průvodičů* (tj. spojnic bodu N s oběma ohnisky).

Podle druhu kuželosečky půlíme pro tečnu nebo normálu buď vnitřní, nebo vnější úhel těchto průvodičů.

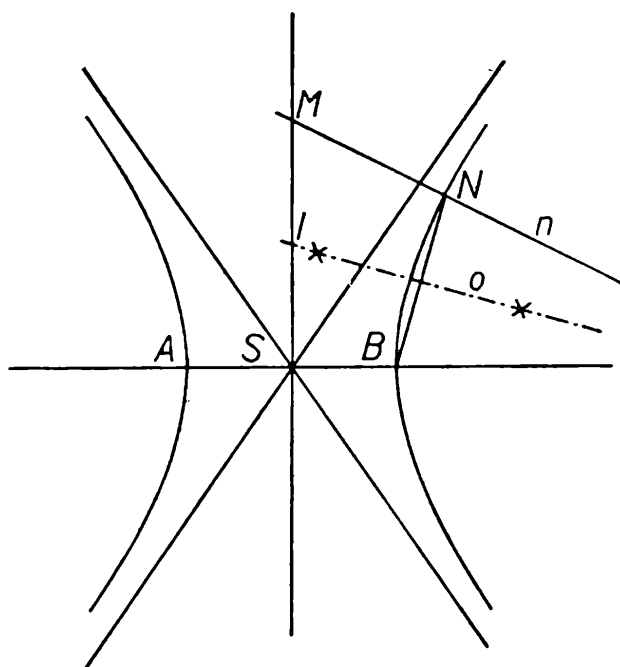
O normálách středových kuželoseček však platí další věty. Bez důkazu zde uvedu zajímavou vlastnost pomocí tzv. Steinerovy-Pelzovy paraboly¹⁾.

Protínají-li normály n_1 a n_2 sestrojené v bodech N_1 a N_2 středové kuželosečky její osy v bodech A_1, A_2 a B_1, B_2 , pak osa o úsečky N_1N_2 půlí úseky A_1A_2 a B_1B_2 (v obr. 1 $A_1I_1 = I_1A_2$, $B_1I_2 = I_2B_2$).

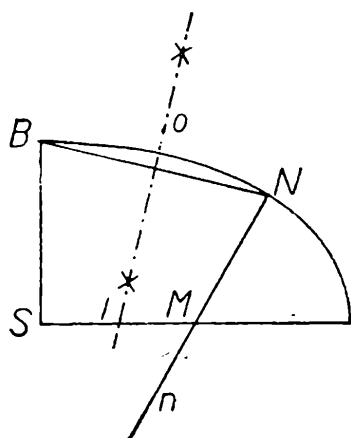
Zvolíme-li nyní bod N_2 ve vrcholu B jedné osy, šplýne normála n_2 s touto osou a její průsečík s druhou osou je ve středu S kuželosečky. Podle toho můžeme již sestrojit normálu n v bodě N ke kuželosečce dané vrcholy A, B jedné osy a bodem N na křivce (obr. 2ab).



Obr. 1



Obr. 2b



Obr. 2a

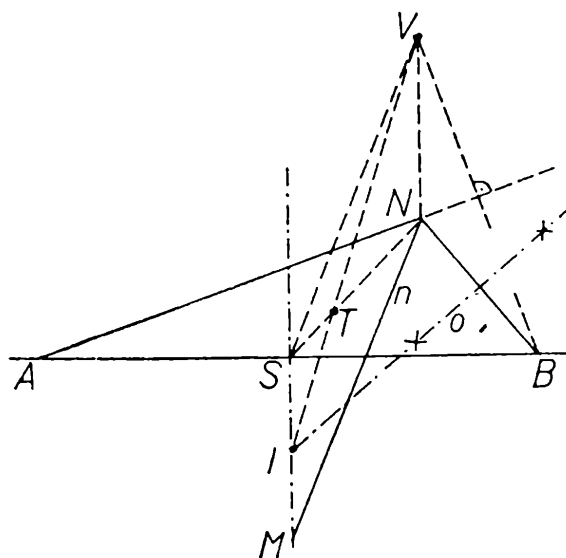
Určíme průsečík I osy souměrnosti úsečky NB s druhou osou kuželosečky, vyhledáme na této druhé ose bod M tak, aby $SI = IM$; potom spojnice NM je hledanou normálou n kuželosečky v bodě N .

¹⁾ Je odvozena v knize: Fr. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský „Deskriptivní geometrie“ I. díl str. 54, vydala ČSAV, III. vyd., 1954.

Abychom nemuseli používat při této konstrukci kružítka, nýbrž jen dvou pravoúhlých trojúhelníků, odvodíme si větu:

Normála n v bodě N kuželosečky k dané osou AB a bodem N je rovnoběžná se spojnicí středu S a ortocentra V (průsečíku výšek) trojúhelníka ABN .

Důkaz (obr. 3). Podle dříve uvedené poučky sestrojíme osu souměrnosti o úsečky BN , určíme její průsečík I s druhou osou, na níž leží i bod M , pro nějž platí $SI = IM$. Podle konstrukce je bod I středem kružnice opsané trojúhelníku ABN . Spojnice IV je tedy *Eulerovou přímkou*²⁾ trojúhelníka ABN a prochází proto jeho těžištěm T , jež však leží i na druhé těžnici SN ($NT = 2 \cdot TS$). Protože však podle konstrukce $SM \parallel VN$, jsou trojúhelníky TSI a TNV stejnolehle pro poměr $\frac{1}{2}$ a střed stejnolehlosti v bodě T , proto $NV = 2 \cdot SI = SM$. Čtyřúhelník $SMNV$ je tedy rovnoběžník, z čehož plyne, že $SV \parallel MN$, což se mělo dokázat. Vlastní konstrukce podle toho pak vypadá takto: Sestrojíme pouhým přiložením dvou trojúhelníků potřebnou část výšky BV (u předpokládaného ortocentra), aniž rýsujeme stranu AN , stejně tak část výšky VN , čímž získáme ortocentrum V . Rovnoběžka $n \parallel SV$ (SV nerýsujeme) je hledaná normála n .



Obr. 3

Rozbor. Leží-li bod N v n ě pásu tvořeného tečnami a, b ve vrcholech A, B dané osy, je kuželosečkou k hyperbola a body A, B jsou vrcholy osy; leží-li bod N u v n i t ě tohoto pásu, je kuželosečkou k :

a) elipsa, která má v bodech A, B vrcholy hlavní osy, je-li bod N vrcholem t u p ě h o úhlu ANB , tj. N uvnitř kružnice $k_1(S; SA)$;

b) elipsa, která má v bodech A, B vrcholy vedlejší osy, je-li bod N vrcholem o s t r ě h o úhlu ANB , tj. N vně kružnice $k_1(S; SA)$;

c) kružnice, je-li úhel ANB p r a v ý.

I pro případ c) platí naše konstrukce, neboť pak ortocentrum V splývá s bodem N , normálou n je poloměr $n \equiv SN$.

²⁾ *Eulerova přímk a* v trojúhelníku spojuje těžiště T , střed opsané kružnice I a průsečík výšek V , přičemž $VT = 2 \cdot IT$.

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

Jak se u nás projevíly pokusné nukleární výbuchy na Sahaře

Naše katedra fyziky se několik let zabývá soustavným měřením *nukleárního spadu*, který vzniká následkem pokusných nukleárních výbuchů. Nukleární spad jsou v podstatě rozprášené štěpné zplodiny, tj. radioizotopy, vznikající štěpením uranové nebo plutoniové nálože nukleárních pum. Radioizotopy se rozpadávají a přitom vysílají radioaktivní záření, které můžeme velmi citlivě zjišťovat a měřit.

Radioaktivní spad zachycujeme do sběrné nádoby na střeše naší fakulty. Dno nádoby je trvale pokryto destilovanou vodou, do níž prach padá a v níž se zachycuje. Nádobu vyprazdňujeme za jeden až tři dny podle toho, jak silná aktivita se vyskytuje v daném období v ovzduší. Vodu odpaříme, odparek vyžeháme v elektrické peci a naneseeme jej na měrnou hliníkovou mističku (plochy 3 cm^2), kterou vkládáme do měřicího zařízení. Měříme paprsky beta, které vyletují z preparátu do počítací trubice Geiger-Müllerovy.

Po zprávě, že francouzská armáda odpálila dne 13. února 1960 v 7 h. ráno v Reggane na Sahaře plutoniovou pumu, zvýšili jsme naši pozornost a s napětím jsme očekávali, zdali se také u nás objeví zvýšená radioaktivita, a jak dlouho to bude trvat, než k nám dospěje. Oasa Reggane je 200 km jižně od Colomb Béchar. Od nás je vzdálena asi 4000 km, kdežto atomová střelnice v Nevadě 11 000 km. Podle našich několikaletých zkušeností spad z Nevady se k nám rozšíří za 10—13 h. Pokusný výbuch na Sahaře byl však proveden za takové povětrnostní situace, aby se aktivní zplodiny nešířily na sever do Evropy. Protože byla odpálena poměrně velká plutoniová puma - její energetický ekvivalent byl asi 80 kilotun TNT (80 tisíc tun trinitrotoluenu) - bylo možno očekávat, že nedostane-li se k nám radioaktivní spad rychle a přímou cestou, dospěje k nám zcela jistě později a „zadními dvířky“. Máme stále na paměti výrok akademika Něsmějanova, že není na zeměkouli místa, kam by se radioaktivní zplodiny po nukleárních explozích ne-

dostaly. Už ta skutečnost, že i u nás v Hradci Králové můžeme spolehlivě zjišťovat spad z velmi daleké Nevady, vzbuzovala přesvědčení, že přesně zjistíme také spad ze Sahary.

Podle novinářských zpráv byla radioaktivita ze saharského výbuchu nejprve zjištěna v sev. Africe, potom v Saudské Arábii a za několik málo dnů i v Japonsku. Je pravděpodobné, že radioaktivní prach byl nesen tzv. *tryskovým proudem*, tj. značně rychlým vzdušným prouděním na hranici troposféry a stratosféry.

Novinářské zprávy pak přestaly šíření radioaktivního spadu sledovat, po př. spad se šířil nad oceány, kde není pozorovacích stanic. Od výbuchu uplynulo 14 dnů, a u nás nebylo ještě ani stopy po zvýšené aktivitě.

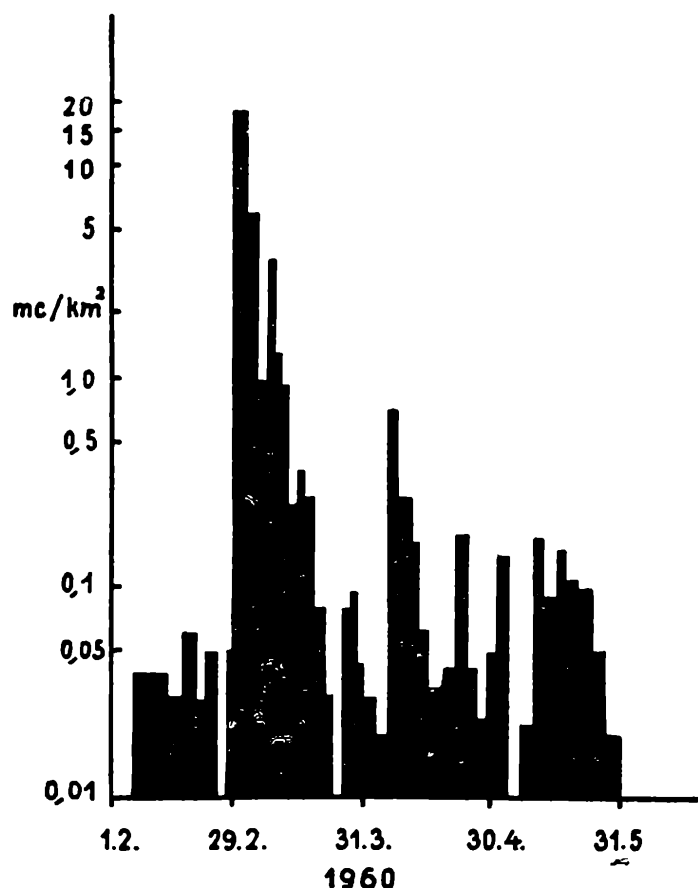
Situace pro zjištění i nepatrného zvýšení byla však velmi příznivá, neboť až do francouzského výbuchu na Sahaře (13. 2. 1960) nebyly 15 měsíců prováděny žádné nukleární výbuchy. Zásluhou Sovětského svazu se velmocí dohodly na dočasném zastavení nukleárních zkoušek dnem 1. listopadu 1958. Po celý rok 1959 nebyly prováděny žádné výbuchy, takže umělá radioaktivita ovzduší poklesla na nepatrnou hodnotu. V létě 1959 se sice ještě vyskytovalo poměrně značné množství spadu, avšak na podzim 1959 nastal rychlý pokles. Koncem r. 1959 a v lednu a únoru 1960 dopadalo na 1 km² za 1 den pouze 0,02–0,03 milicurie štěpných zplodin, tj. asi stokrát méně než začátkem r. 1959. (1 milicurie je tisícina jednotky radioaktivity curie; 1 mc = = 10⁻³ c.)

Koncem roku 1959 se tedy jasně projevil blahodárny účinek zastavení nukleárních výbuchů. Ovzduší se začalo pročišťovat, takže na začátku roku 1960 bylo jen velmi nepatrné radioaktivní „pozadí“, na němž se muselo projevit každé zvýšení aktivity velmi nápadně.

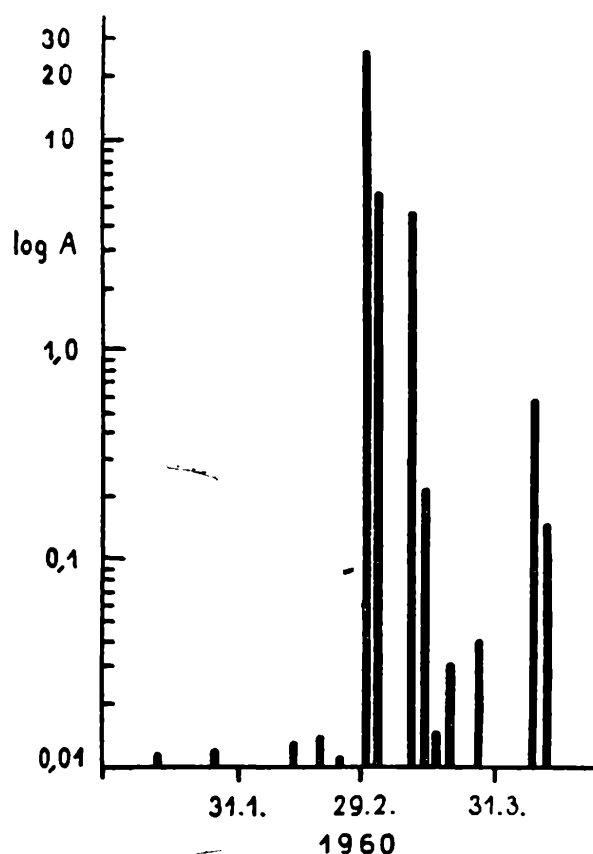
To se vskutku stalo dne 2. března 1960, kdy jsme v 7 h. ráno vyprázdnilí sběrnou nádobu na střeše fakulty. V nádobě byla také dešťová voda, jak říkáme *dešťový spad*, neboť od 1. 3. do 2. 3. u nás napršelo 1,3 mm. Dešťové kapky strhávají prachové částice z ovzduší a proto dešťový spad obvykle bývá (alespoň ze začátku, než se ovzduší deštěm „vymyje“) několikrát aktivnější než *suchý spad*.

Vzorek suchého spadu ze dne 29. února nejevil zvýšenou aktivitu, jak je patrné z obr. 1, kde je přehled denních aktivit spadu od 1. 2. do 31. 5. 1960. Aktivity jsou naneseny v jednotkách milicurie na 1 km² (mc/km²). Naše sběrná mísa má plochu 1 m², takže aktivitu na 1 km² obdržíme násobením číslem 10⁴. Aktivity jsou nanášeny v logaritmech, jinak by musel být obrázek 70krát vyšší! Protože nejnižší naměřená aktivita spadu bývá okolo 0,01 mc/km², jsou na obr. 1 znázorněny vlastně stonásobné hodnoty aktivit. (log 100 × 0,01 = 0. Škála aktivit začíná tedy u 0,01 mc/km².) Tam kde je prázdné místo, byla naměřena aktivita $A < 0,01$ mc/km², což je i s biologického hlediska velmi nepatrná hodnota.

Vzorek spadu získaný 2. března měl aktivitu asi 350krát vyšší než vzorek z 29. února. *Za pouhý jeden den aktivita vzrostla z 0,05 mc/km² na 17,7 mc/km².* Je to dosud nejvyšší denní aktivita spadu, kterou jsme v Hradci Králové naměřili. I když k nám dospěla až po šestnácti dnech a nějakými „zadními dvířky“, byla překvapivě veliká. Patrně se uplatnily zvláště příznivé okolnosti: poměrná blízkost Sahary od nás a náhodný výskyt deště, právě když se v našich končinách vznášel radioaktivní mrak. Generační oblast (oblast vzniku) dešťové srážky musela být situována tak, že kapky deště padaly skrze radioaktivní mrak a strhovaly s sebou radioaktivní částičky.



Obr. 1. Aktivita denního spadu v období od 1. 2. do 31. 5. 1960. Březnové maximum bylo způsobeno prvním saharským nukleárním výbuchem, dubnové maximum druhým.



Obr. 2. Aktivita všech atmosférických srážek v období od 1. 1. do 15. 4. 1960. Náhlé zvýšení aktivity je následek saharských výbuchů.

Z obr. 1 je patrné, že asi za 3 týdny aktivita spadu opět poklesla na nízké hodnoty. Dalo se to očekávat proto, že výbuch byl ojedinělý. Série nukleárních zkoušek působí vždycky několikaměsíční zvýšení.

Druhý francouzský nukleární výbuch byl proveden na stejném místě dne 1. dubna 1960. Podle novinářských zpráv byla explodována menší plutoniová puma, ale nebyla umístěna tak vysoko nad zemí. Její účinek

na radioaktivitu spadu se u nás projevil již ve vzorku získaném 9. dubna, který měl aktivitu sice jen $0,7 \text{ mc/km}^2/\text{den}$, avšak proti předešlému vzorku byl 35krát aktivnější. Proti spadu z první saharské zkoušky byl však 25krát méně aktivní, takže na obr. 1 tvoří nevýrazné, podružné maximum.

Je zajímavé, že *průměrná* březnová denní aktivita spadu se vlivem saharské zkoušky zvýšila skoro na 2 mc/km^2 . Průměrná denní aktivita v lednu 1960 byla stokrát menší, $0,02 \text{ mc/km}^2$. V dubnu se uplatnila druhá saharská zkouška a dozníval ještě vliv první. Průměrná denní aktivita byla $0,14 \text{ mc/km}^2$. V květnu poklesla na $0,09 \text{ mc/km}^2$, tedy na hodnotu ještě 4,5krát vyšší než byla v lednu.

Tedy pouhé dva nukleární výbuchy, a jak znatelně se projeví i u nás! I když u nás naměřená radioaktivita nebyla již nebezpečná, zcela jistě by se zvyšovala dalšími nukleárními zkouškami. Jedině naprostý zákaz nukleárních výbuchů všech typů a všeobecné a úplné odzbrojení, jak o ně usiluje Sovětský svaz, odstraní nebezpečí postupného zvyšování radioaktivity ovzduší a tím i celého našeho životního prostředí.

Na obr. 2 jsou různě dlouhými úsečkami znázorněny aktivity všech atmosférických srážek od 1. 1. do 15. 4. 1960. Aktivita je uvedena v jednotkách milimikrocurie pro 1 litr dešťové vody. (Milimikrocurie = μc . Je to miliontina milicurie, tedy miliardina curie.)

Dešťová voda nasbíraná 2. 3. 1960 měla dosud u nás nejvyšší aktivitu 26 milimikrocurie/litr.

Čtyři vzorky spadu z března a jeden z dubna měříme dodnes, skoro každodenně. Nejsilnější vzorek z 2. 3. budeme měřit ještě alespoň půl roku. Sledujeme časový pokles těchto vzorků. Z něho můžeme usuzovat se značnou přesností na dobu vzniku štěpných zplodin, které jsou ve vzorku obsaženy. U březnových vzorků vskutku vychází 13. únor, což je datum první saharské zkoušky. U vzorku z 9. dubna vychází 1. duben, datum druhé saharské zkoušky. Protože vzorky ze saharských zkoušek jsou poměrně značně radioaktivní a vyskytly se na skoro „čistém“ pozadí, můžeme datum jejich vzniku určit s přesností jednoho dne. U sérií zkoušek v Nevadě to nebylo možné, zvláště když výbuchy následovaly brzy za sebou a pozadí od předešlých zkoušek bylo podstatně vyšší.

Soustavné sledování poklesu aktivity vzorků spadu vyžaduje hodně času. Proto nyní používáme *měřicí automatiky*, kterou navrhl náš asistent inž. Jiří Macků a zhotovila ji dílna naší katedry. Toto automatické zařízení měří najednou 12 preparátů, samo si je posunuje pod okénko počítací trubice a počet impulsů (vlastně počet paprsků beta, který je úměrný radioaktivitě vzorku) zapisuje na proužek papíru. „Mozek“ aparatury je řídicí a programová jednotka. „Program“ se

např. nastaví tak, že každý preparát je měřen 15 minut. Je-li zapotřebí provádět *absorpční měření*, tj. měření, jak se záření pohlcuje v kovových fóliích (z toho se dá usuzovat na energii záření), automatika posunuje před preparáty vhodné sady filtrů. To vše se provádí podle nastaveného programu samočinně a vše se zapisuje. Např. zápis automatiky ze dne 7. března 1960 vypadal takto:

7,00
180
7,01
2461
7,02
265
7,03
436
7,04
48 479
7,05
18 404
7,06
6185

Kurzívou tištěná čísla tiskne automatika červeně. Je to datum měření a číslo vzorku. Např. 7,00 znamená datum sedmého běžného měsíce a „nultý“ vzorek, což je údaj „pozadí“, kdy pod trubicí není zasunut preparát. V tomto případě aparatura zapsala 180 impulsů (paprsků beta) za dobu 5 minut. Je to *spontánní aktivita*, zvaná také *volný chod přístroje*, která pochází z jiných zdrojů než z preparátu, jimiž jsou: znečištění, kosmické paprsky, záření z okolí, aj.

Další řádek je uveden značkou 7,01, tj. měří se první preparát, který u nás vždycky je *stronciový standard*, tj. preparát Sr90 pro srovnávací měření. Radioaktivita stronciového preparátu je přesně známa a s ní jednoduše srovnáváme radioaktivitu neznámou.

Preparáty uvedené značkami 7,02 a 7,03 byly vzorky spadu získané 26. a 29. února. Jejich aktivita je nepatrná. *Správnou aktivitu dostaneme tehdy, odečteme-li od naměřené hodnoty pozadí*. Stroncium 90 mělo skutečnou aktivitu $2461 - 180 = 2281$. Preparát č. 2 měl skutečnou aktivitu $265 - 180 = 85$ impulsů za 5 min. Další měřený preparát (7,04) pocházel z 2. března 1960 a měl aktivitu $48\,479 - 180 = 48\,299$ impulsů za 5 minut. Pochází z *první saharské zkoušky*.

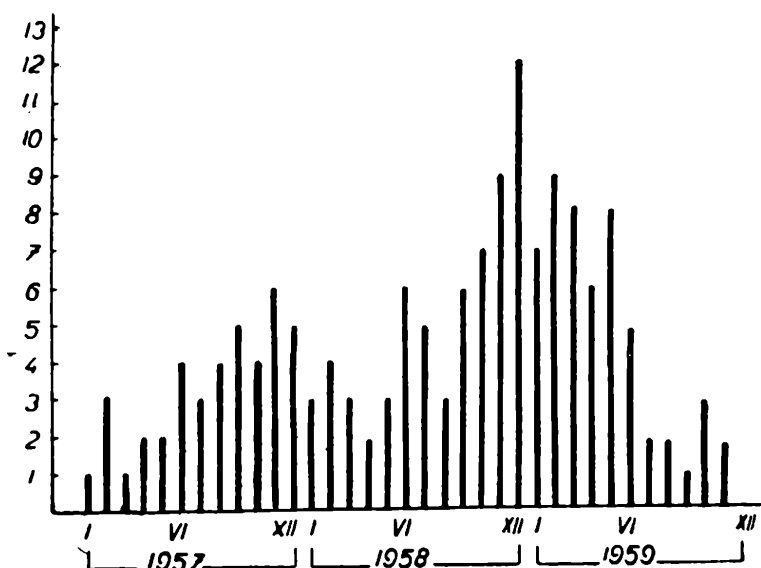
Další vzorek 7,05 byl získán 4. března a měl nekorigovanou aktivitu 18 404 impulsů za 5 min.

. Další vzorek ze 6. 3. měl nekorigovanou aktivitu 6185 impusů za 5 min. Vzorek č. 5 i č. 6 pocházel také z prvního saharského výbuchu, jak jsme po uplynutí několika dnů zjistili z časového poklesu aktivity, z něhož se datum vzniku dá určit.

Ze záznamu měřicí automatiky je na první pohled patrné, jak začátkem března 1960 se náhle aktivita spadu zvýšila a potom se zmenšovala, jak je také graficky vystiženo na obr. 1.

Stronciový standard obsahuje 1 milimikrocurie Sr90. Protože je na stejné misce jako vzorky spadu a jeho umístění pod počítací trubicí je totožné s umístěním vzorků, můžeme s ním jednoduše vzorky porovnávat. (Stronciových standardů máme několik s různě velikou radioaktivitou. Poločas Sr90 je 28 let, takže intenzita záření je prakticky stálá.)

K uvedenému příkladu zápisu měřicí automatiky dlužno ještě podotknout, že měrné preparáty necháme v aparatuře několikrát kolovat, takže dostaneme několik hodnot, z nichž počítáme střední hodnoty. Čím více měření, tím je chyba získaného výsledku menší. Také naopak můžeme předem vypočítat, kolikrát musíme vykonat měření za sebou, aby chyba získaného výsledku byla patřičně malá.



Obr. 3. Histogram obsahu radioaktivního stroncia 90 v mléce v hradeckém kraji v l. 1957—1959. Dočasné zastavení nukleárních zkoušek se projevilo také značným poklesem radioaktivity mléka.

Blahodárný vliv dočasného zastavení nukleárních výbuchů je patrný také z obr. 3, který je *histogramem* (časovým přehledem) obsahu radioaktivního stroncia 90 v konsumním mléce z našeho kraje. Sr90 je obsaženo ve spadu a z něho se dostává do vegetace a celé biosféry. Histogram zahrnuje léta 1957, 1958 a 1959. Aktivita stroncia je vyjádřena ve *stronciových jednotkách*, tj. v mikromikrocurie Sr90 obsaženého na 1 gram vápníku v mléce. (Mikromikrocurie = 10^{-12} curie, tj. miliontina z miliontiny curie. Mikromikrocurie značíme $\mu\mu c$.)

Z obr. 3 je patrné, jak obsah stroncia 90 v mléce postupně vzrůstal a dosáhl maxima koncem r. 1959, těsně po zastavení nukleárních vý-

buchů (12 stronciových jednotek). V roce 1959 nastal pokles na 1 až 2 jednotky, což je nepatrná radioaktivita.

Vzorky mléka, jejichž radioaktivitu měří naše katedra, připravila katedra chemie a biochemie KU v Hradci Králové, pod vedením prof. dr. Jaroslava Noska. Bylo zpracováno již přes 3 000 litrů mléka.

Je pravděpodobné, že dočasné zvýšení radioaktivity následkem saharských výbuchů nezpůsobí u nás zvýšenou aktivitu mléka. Zvýšení aktivity spadu bylo jen krátkodobé a jeho vliv se patrně v našem životním prostředí vůbec neprojeví. Série dalších nukleárních zkoušek by však způsobily zvýšenou kontaminaci biosféry, zvyšování hladiny umělé radioaktivity. Účinky malých dávek záření nejsou ještě biologům a lékařům přesně známy. Převážná část odborníků všech národností je však již dnes plně přesvědčena, že i malé dávky za delší dobu mohly by způsobit vážné poškození zdraví celého lidstva, zvláště pak příštích generací. Všichni tito odborníci plně souhlasí s úsilím Sovětského svazu o *naprostý zákaz nukleárních zkoušek*.

I n ž. d r. V á c l a v Š i n d e l á ř, ÚN, Praha:

Vyšetření reálnosti srážky dvou kulových těles pohybujících se rovnoměrně přímočaře

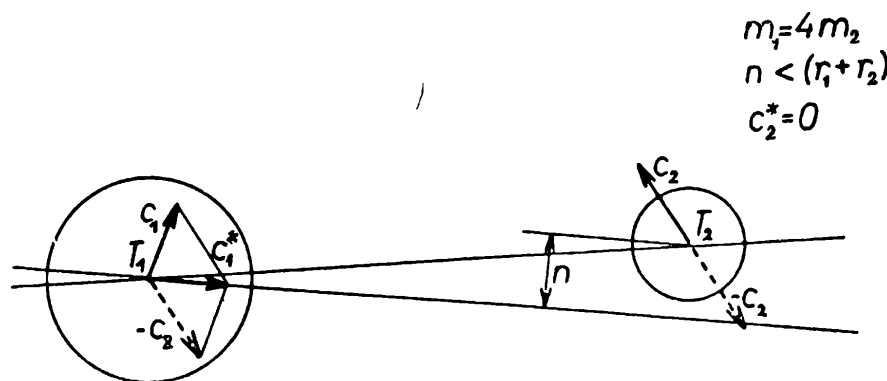
Při různých mikromechanických dějích dochází k více či méně častým vzájemným srážkám malých těles (molekul, částic apod.). Pojednávám krátce o jednoduchém vyšetření reálnosti srážky dvou takových těles, předpokládáme-li u nich kulový tvar. Je to úloha velmi prostá, nicméně jsem se s ní setkal při konkrétním vyšetřování rázu molekul plynu a zjednodušil jsem její řešení.

Jedná-li se o tělesa velmi malá rozměry i velikostí hmoty, můžeme přitom zanedbat jakákoliv vnější silová působení na ně. Pohyb jejich těžišť (středů koulí) pokládáme pak za rovnoměrný přímočarý.

Budiž hmota dvou malých kulových těles m_1 a m_2 , jejich poloměry r_1 , r_2 , poloha jejich těžišť v čase t_0 je dána pravoúhlými souřadnicemi a_{1i} , a_{2i} a jejich rychlosti budiž c_1 , c_2 . Souřadnice a_i i rychlosti c jsou vztaženy k soustavě S klidného pozorovatele. Běžné případy vyšetření reálnosti srážky, kterou zde rozumím jistotu, že za zmíněných podmínek dojde ke srážce dvou těles (v limitním případě k bodovému dotyku) v libovolné soustavě, tedy i soustavě klidného pozorovatele, jsou zpravidla dosti zdlouhavé, zejména tehdy, pohybují-li se těžiště obou těles po různoběžných nebo dokonce po mimoběžných paprscích. Výjimečně

je takové vyšetření jednoduché v tom případě, že jedno těleso je v soustavě S v klidu (je to jak dále uvidíme případ totožnosti ($S \equiv S^*$), nebo pohybují-li se těžiště každého z obou těles po společném paprsku, nebo po dvou paprscích rovnoběžných (případ analogický, nikoliv však totožný s případem dále uvedeným $S \equiv T$). Druhý ze zmíněných případů je zvlášť jednoduchý, protože je při něm srážka nevyhnutelná v případě, že se vzájemná vzdálenost těžišť těles zmenšuje před předpokládanou srážkou. I v prvním případě by takový případ mohl nastat, kdyby těžiště jednoho z těles se pohybovalo po paprsku procházejícím těžištěm tělesa klidného.

Abychom si libovolný případ převedli na jednu z uvedených jednodušších alternativ, musíme je transformovat do jiné inerciální souřadnicové soustavy, pohybující se buď rychlostí těžiště jednoho z těles (soustava S^*), nebo rychlostí těžiště systému obou těles jako celku (soustava T).



Obr. 1

Po transformaci do soustavy S zbývá pak vyšetřit (analyticky), zda kolmá vzdálenost n paprsku, po němž se těžiště jednoho z těles pohybuje, od těžiště druhého, klidného tělesa je menší než součet poloměrů obou kulových těles

$$n < r_1 + r_2. \quad (1)$$

V limitním případě $n = r_1 + r_2$ nedojde ke srážce obou těles, nýbrž jen k jejich vzájemnému dotyku. Graficky je tato transformace znázorněna na obr. 1.

Transformace vyšetřovaného děje do soustavy T (tj. soustavy pohybující se rychlostí těžiště systému obou těles) je zvlášť významná, protože v této soustavě je jednoduché nejen vyšetření reálnosti srážky, ale i řešení samotného rázu, dojde-li k němu. Významné vlastnosti soustavy T podporuje i známá skutečnost, že potenciální i kinetická energie jakéhokoli systému je v ní minimální. Transformací do soustavy T stávají se rychlosti obou těles vždy rovnoběžnými, neleží-li snad již přímo

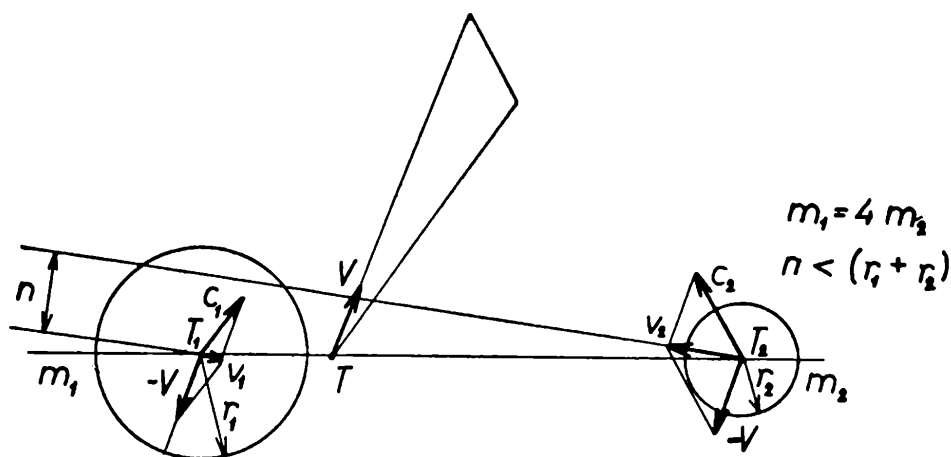
na jednom společném paprsku nebo dvou paprscích rovnoběžných. To lze ostatně jednoduše dokázat. Byly-li rychlosti obou těles v soustavě S c_1 a c_2 , je v téže soustavě rychlost jejich společného těžiště rovna

$$V = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$

a rychlosti obou těles v soustavě T , jež si označme v_1 a v_2 budou

$$v_1 = c_1 - V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2),$$

$$v_2 = c_2 - V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (c_2 - c_1).$$



Obr. 2

Oba vektory v_1 a v_2 vzájemně vektorově znásobíme a dostáváme

$$v_1 \times v_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \times (c_2 - c_1) = 0, \quad (2)$$

jasný důkaz jejich rovnoběžnosti.

Po transformaci, jež je graficky znázorněna na obr. 2, zbývá již jen vyšetřit, zda kolmá vzdálenost paprsků, na nichž oba vektory leží, je rovna (bodový dotyk), nebo menší (možná srážka) než součet jejich poloměrů. Platí tedy i zde vztah (1). Jen nutno připomenout, že i když je podmínka (1) splněna, je srážka reálná jen tehdy, blíží-li se předpokládanou srážkou vzájemně těžiště obou těles.

Úlohy k řešení

Řešitelům

Tradiční soutěž v řešení úloh o ceny zahajujeme otištěním úloh z matematiky. Úlohy z fyziky a deskriptivní geometrie otiskneme v příštích číslech.

Řešení úloh pište čitelně perem nebo strojem po jedné straně papíru formátu A4, každou úlohu na zvláštní arch. V pravém dolním rohu každého listu uveďte své plné křestní jméno a příjmení, jméno školy i třídu - pokud studujete - a vždy svou podrobnou adresu. Pracujte samostatně.

L h ů t a k odeslání těchto soutěžních úloh je d o k o n c e l e d n a 1 9 6 1. Úplná řešení zasílejte na adresu: D o c. O t a S e t z e r, P r a h a 6, Z i k o v a 4.

Matematika:

1. Jsou-li a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) libovolná kladná reálná čísla, pak platí

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Josef Brejcha

2. Nad stranami obecného trojúhelníka ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 . Jakou vlastnost mají úsečky AA_1 , BB_1 , CC_1 ?

Josef Brejcha

3. Nad stranami pravoúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny čtverce $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$, nad vzniklými úsečkami DG , FI , HE opět čtverce $DGKL$, $FI MN$, $HEOP$ a nad úsečkami KN , MP , OL čtverce $KNQR$, $MPST$ a $OLUV$. Jakou větu lze vyslovit o obsazích tří posledně jmenovaných čtverců?

O. Cochsmeyer

v něm. časopise *A r c h i m e d e s* (leden 1960).

4. R ů z n á přirozená čísla v počtu $n \cdot p$ rozepíšeme do n řádek a p sloupců. V každém řádku určíme největší číslo a nejmenší z těchto

maxim označíme a ; v každém sloupci určíme nejmenší číslo a největší z těchto minim označíme b . Které z čísel a a b je menší, které větší?

F. Galtier

ve franc. časopise *L e f a c t e u r* X (únor 1960).

5. Jsou-li $a, k \neq 1$ přirozená čísla, sečtěte n členů řady

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+k+1)(a+k+2)} + \dots$$

Josef Kotyk

6. Dálkoměrem byly v osmivteřinových intervalech změřeny vzdálenosti od pozorovatele $l_1 = 2600$ m, $l_2 = 3200$ m, $l_3 = 4200$ m letadla letícího rovnoměrně přímočaře. Určete jeho rychlost a) obecně, b) početně pro daný případ, c) graficky.

Miroslav Menšík

7. Bez tabulek určete hodnotu výrazu:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

Attila Meskó, Budapešť

8. Daný rovnostranný trojúhelník ABC rozdělte úsečkou MN na dvě části obsahem si rovné: na rovnostranný trojúhelník MNC a rovnostranný lichoběžník $ABNM$. Která z těchto dvou částí má větší obvod?

Jiří Sedláček

9. Určete všechna celá čísla x, y , pro která platí:

$$2(x^2 - x) + y^2 < 20.$$

Jiří Sedláček

10. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC ($AB = 10$). Sestrojte kružnici k tak, aby tečny vedené k ní z bodu A měly délku $a = 4$, tečny z bodu B délku $b = 5$ a tečny z C délku $c = 6$.

Ota Setzer

11. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je výraz $n^3 + 5n$ dělitelný šesti!

Ota Setzer

12. Je dán nerovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách a , b ($a > b > 0$) a úhlu α . Osa souměrnosti přepony a osy vnitřního i vnějšího úhlu při vrcholu C určují pravoúhlý trojúhelník. Vyjádřete jeho odvěsny užitím a , b a jeho úhly pomocí α .

Alois Urban
(Pokračování)

Řešení úloh z minulého ročníku

Uveřejňujeme řešení prvních úloh z minulého ročníku. Autoři jednotlivých úloh všechna zaslaná řešení prohlédli, ocenili a navrhli redakci vhodná řešení - třeba i po menší úpravě - k otištění. Další řešení otiskneme v příštích číslech tak, aby bylo možno soutěž včas uzavřít a rozhodnout i o odměnách.

Matematika:

1. Jsou dány kružnice k_1 , k_2 , k_3 o stejném poloměru r a jednom společném bodu O . Označíme S_1 , S_2 , S_3 středy těchto kružnic a P_{12} , (P_{23} , P_{31}) další společný bod kružnic k_1 , k_2 (k_2 , k_3 ; k_3 , k_1). Dokažte, že kružnice k'_1 , k'_2 , k'_3 opsané poloměrem r kolem bodů P_{12} , P_{23} , P_{31} mají též jeden společný bod O' !

Josef Brejcha

(Došlo 6 řešení.)

Řešil Vladimír Regner, 11. B, DSS, Mladá Boleslav:

Úlohu řešíme na základě kružnice opsané trojúhelníku. Vzhledem k předpokladu, že kružnice k_1 , k_2 , k_3 mají společný jeden bod O , tvoří jejich středy S_1 , S_2 , S_3 vrcholy trojúhelníka.

Bod O je středem kružnice h_1 opsané tomuto trojúhelníku poloměrem r . Musí tomu tak být proto, že bod O jako společný bod všech tří kružnic musí mít od všech středů stejnou danou vzdálenost r .

Má-li existovat bod O' (společný bod tří kružnic $k'_1 \equiv (P_{12}; r)$, $k'_2 \equiv (P_{23}; r)$, $k'_3 \equiv (P_{31}; r)$ opsaných kolem zbývajících průsečíků kružnic k_1 , k_2 ; k_2 , k_3 ; k_3 , k_1 jako středů), musí tento bod mít od bodů P_{12} , P_{23} , P_{31} stejnou vzdálenost r , čili jinak řečeno existuje kružnice $h_2 \equiv (O', r)$ opsaná trojúhelníku $P_{12} P_{23} P_{31}$.

Opsaná kružnice trojúhelníku $P_{12} P_{23} P_{31}$ skutečně vždy existuje. Zbývá tedy dokázat, že poloměr této kružnice je r . Dokážeme-li to, dokážeme tím, že existuje bod O' , který má výše uvedené vlastnosti.

1. Zvolme po řadě body E , F , G jako půlící body stran $S_3 S_1$, $S_1 S_2$, $S_2 S_3$ trojúhelníka $S_1 S_2 S_3$. Pak platí:

$$\triangle EFG \sim \triangle S_2 S_3 S_1 \text{ s poměrem podobnosti } 1 : 2,$$

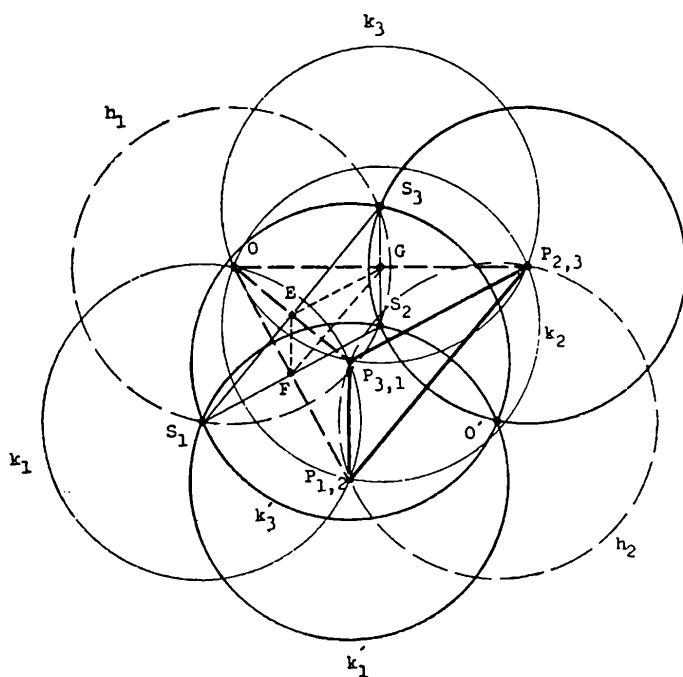
EF , FG , GE jsou střední příčky trojúhelníka $S_2 S_3 S_1$.

2. Body P jsou sdruženými body k bodu O podle stran trojúhelníka $S_2 S_3 S_1$. Vyplyvá to z toho, že od dvojice bodů S k bodu O a příslušnému bodu P jsou vždy shodné vzdálenosti rovné r .

Proto platí: $2 OF = OP_{12}$, $2 OG = OP_{23}$, $2 OE = OP_{31}$

Zvolme O středem stejnolehlosti s poměrem stejnolehlosti $\lambda = \frac{OP}{OF} = \frac{2}{1}$;

$\triangle EFG$ je stejnolehlý s $P_{31} P_{12} P_{23}$ pro poměr $2 : 1$.



Obr. 1

Z předcházejícího vyplývá, že $\triangle S_2 S_3 S_1 \sim \triangle P_{31} P_{12} P_{23}$. Poměr podobnosti $\lambda = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

*Trojúhelníky $S_2 S_3 S_1$
a $P_{31} P_{12} P_{23}$ jsou shodné.*

U shodných trojúhelníků jsou shodné všechny prvky, tedy i poloměry opsaných kružnic. Tím jsme také dokázali, že existuje bod O' s výše uvedenými vlastnostmi.

Poznámka: a) Předpoklad je ovšem, že k_1 , k_2 , k_3 jsou různé kružnice. b) V případě, že budou mít dvě kružnice jeden společný bod O , přejde bod O' do středu třetí kružnice. Viz obr. 1.

2. Sestrojte trojúhelník, je-li dán rozdíl stran $a - b$, úhel γ a těžnice t_c vedená z bodu C .

Josef Glivický

(Došlo 9 řešení.)

Řešil Jiří Vanžura, DSŠ Prostějov, Kollárova ul.:

1. Rozbor: Předpokládejme, že jest $a - b > 0$ a nechť jest trojúhelník ABC řešením dané úlohy. V něm je $BC = a$, $AC = b$, těžnice $CC' = t_c$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ ($0 < \gamma < 180^\circ$). Na polopřímku CB nanesme $CD = b$, pak $DB = a - b$. Trojúhelník DCA je rovnoramenný s úhlem γ při vrcholu C . Vedme osu o úhlu γ , která protne základnu rovnoramenného trojúhelníka DCA v bodě $^1C'$. Úsečka C^1C' je výškou a současně těžnicí trojúhelníka DCA , vedenou z vrcholu C . Jest tedy $A^1C' =$

$= {}^1C' D$. Uvažujme o trojúhelníku BDA . Poněvadž $AC' = C' B$ a $A {}^1C' = {}^1C' D$ je úsečka $C' {}^1C'$ střední příčkou trojúhelníka BDA a platí $BD \parallel C' {}^1C'$, $BD = \frac{1}{2} C' {}^1C'$, to jest $C' {}^1C' = \frac{a - b}{2}$.

Množina všech středů C' úsečky AB je kružnice $k \equiv (C, t_c)$. Pohybuje-li se bod ${}^1C'$ po přímce o vyplní středy C' přímku q rovnoběžnou s o , kterou lze vésti bodem E na polopřímce CB tak, že $CE = \frac{1}{2}(a - b)$. Průsečík přímky q a kružnice k je bod C' . Odtud vyplývá konstrukce.

2. Konstrukce: Nakresleme úhel $B' C A' = \gamma$ a sestrojme jeho osu o . Z bodu C opišme kružnici $k \equiv (C, t_c)$. Na polopřímku CB' nanesme $CE = \frac{a - b}{2}$ a vedme bodem E rovnoběžku q s osou o . Průsečík kruž-

nice k a přímky q jest bod C' . Vedme bodem C' rovnoběžku s $C B'$, jejíž průsečík s osou o jest bod ${}^1C'$. Úsečka $C {}^1C'$ je výškou rovnostranného trojúhelníka DCA . Spojnice AC' protne polopřímku CB' v bodě B .

3. Důkaz: Úhel $B' C A' = \gamma$. Úsečka $C C' = t_c$. Je nutno dokázat, že $C C'$ je těžnicí sestrojeného trojúhelníka ABC a že rozdíl stran BC a AC je $a - b$. Je zřejmé, že $A {}^1C' = {}^1C' D = \frac{1}{2} AD$ (trojúhelník ADC rovnoramenný) a také, že spojnice $C' {}^1C'$ je rovnoběžná s BD . Jsou tedy trojúhelníky $C' {}^1C' A$ a $B D A$ podobné. Proto $AC' = C' B = \frac{1}{2} AB$ a proto úsečka $C C'$ je těžnicí trojúhelníka ABC . Jest pak též $BC - AC = BD = 2 \cdot C' {}^1C' = a - b$ ($C' {}^1C'$ střední příčka v trojúhelníku ABD .)

4. Diskuse: Počet možných trojúhelníků splňujících podmínky úlohy je podle konstrukce závislý na počtu průsečíků kružnice k a přímky q , které leží uvnitř dutého úhlu $B' C A'$. Poněvadž středem kružnice k jest vrchol trojúhelníka C , bude ležet uvnitř dutého úhlu γ pouze jeden průsečík kružnice k s přímkou q . Aby tento průsečík existoval, musí být $t_c > \frac{a - b}{2}$.

4. Které dvojciferné číslo má tu vlastnost, že jím končí jeho dvoj-moc?

Stanislav Horák

(Došlo 8 řešení.)

Řešení autorovo:

Hledané číslo označíme $10x + y$, kde x, y jsou přirozená čísla vyhovující nerovností

$$0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9.$$

Vzhledem k dané úloze platí

$$(10x + y)^2 = 100z + 10x + y, \quad (1)$$

kde z je zatím neznámé přirozené číslo, o němž platí

$$0 < z \leq 99.$$

Pro jednoduchost položíme

$$u = 10x + y$$

a rovnice (1) se dá potom uvést na tvar

$$u(u - 1) = 100z.$$

Pravá strana této rovnice je dělitelná číslem 100 a proto tímto číslem musí být dělitelná i levá strana. To nastane v těchto případech:

1. $u = 100$, což pro úlohu nemá význam, neboť u má být číslo dvojciferné.

2. $u - 1 = 100$, a to pro naši úlohu také nemá význam z téhož důvodu jako prve.

3. $u = 25$, $u - 1 = 24$, $z = 6$ a hledané číslo je 25.

4. $u = 76$, $u - 1 = 75$, $z = 57$ a hledané číslo je 76. Jiná možnost neexistuje.

Poznámka. Všichni řešitelé si povšimli toho, že každé číslo končící cifrou 0, 1, 5, 6 má dvojnásobek končící touž cifrou a toho pak využili k řešení, takže za y postupně dosazovali 0, 1, 5, 6.

5. Řešte soustavu rovnic

$$x^2 = ax + by, \quad y^2 = bx + ay.$$

Položte speciálně $a = n(n - 1) + 1$, $b = n(n - 1)$.

Stanislav Horák

(Došlo 8 řešení.)

Řešil Jiří Vanžura, 11. C, DSŠ Prostějov.

Budeme uvažovat čtyři případy.

I. $a = 0$, $b = 0$. Soustava daných rovnic má pak tvar

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0$$

a kořeny jsou $x_1 = y_1 = 0$. Zde ovšem neplatí speciální případ.

II. $a = 0$, $b \neq 0$. V tomto případě má soustava daných rovnic tvar

$$x^2 = by, \quad y^2 = bx. \quad (1)$$

Odečtením těchto dvou rovnic a upravením obdržíme

$$(x - y)(x + y + b) = 0.$$

Z toho dostaneme

$$1. \quad x = y$$

a po dosazení do (1) dostaneme

$$x_1 = y_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = b.$$

$$2. \ x + y + b = 0$$

a po dosazení do jedné z rovnic (1) obdržíme

$$\begin{aligned} x_2 = y_2 &= \frac{1}{2} (-b + bi\sqrt{3}), \\ x_3 = y_3 &= \frac{1}{2} (-b - bi\sqrt{3}). \end{aligned}$$

III. $a \neq 0, b = 0$. Tu dané rovnice nabudou tvaru

$$x^2 = ax, \ y^2 = ay$$

Odtud obdržíme

$$x_1 = y_1 = 0; \ x_2 = y_2 = a.$$

IV. $a \neq 0, b \neq 0$. Tento případ je nejzajímavější. Obě rovnice odečteme: $\underline{\hspace{1cm}}$

$$x^2 - y^2 = ax + by - bx - ay$$

Z toho po úpravě dostaneme

$$(x - y)(x + y - a + b) = 0$$

a z toho dostáváme opět dvě možnosti.

1. $x - y = 0$, což spojeno s některou z daných rovnic dá

$$x_1 = y_1 = 0$$

nebo

$$x_2 = y_2 = a + b = 2n(n - 1) + 1$$

2. Dále obdržíme

$$x + y = a - b.$$

Tato rovnice spojena s některou z daných dvou rovnic dává

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2} (a - b + \sqrt{D}), & y_3 &= \frac{1}{2} (a - b - \sqrt{D}), \\ x_4 &= y_3, & y_4 &= x_3, \end{aligned}$$

kde

$$D = a^2 + 2ab - 3b^2$$

Ve speciálním případě je

$$x_3 = y_4 = n, \ x_4 = y_3 = 1 - n.$$

6. Které úhly od 0° do 360° splňují rovnici

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= \\ = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &? \end{aligned}$$

Stanislav Horák

(Došlo 10 řešení.)

Řešil Václav Jiříček, 11. B, JSS Hranice na Moravě:

Na levé straně součet prvního a čtvrtého členu, druhého a třetího členu vyjádříme součinem. Totéž provedeme na pravé straně. Obdržíme tak

$$2\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2\cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Této rovnici lze dát tvar

$$\left(\sin \frac{5x}{2} - \cos \frac{5x}{2}\right) \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) = 0$$

Mohou tedy nastat tyto možnosti:

$$\text{A)} \quad \sin \frac{5x}{2} - \cos \frac{5x}{2} = 0 ,$$

tj.

$$\operatorname{tg} \frac{5x}{2} = 1$$

a z toho plyne

$$\frac{5x}{2} = 45^\circ + k \cdot 180^\circ ,$$

$$x = 18^\circ , 90^\circ , 162^\circ , 234^\circ , 306^\circ$$

$$\text{B)} \quad \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$$

Této rovnici lze dát jednodušší tvar

$$\cos x \cos \frac{x}{2} = 0 .$$

A tu mohou nastat dvě možnosti:

$$\text{I. } \cos x = 0 , \quad \text{II. } \cos \frac{x}{2} = 0 ,$$

$$x = 90^\circ , 270^\circ$$

$$x = 180^\circ$$

Deskriptivní geometrie:

1. Jsou dány dvě různoběžky a , b a délka $h \neq 0$. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, jehož dvě sousední pobočné hrany leží v přímkách a , b a mají délku h .

Stanislav Horák

(Došlo 6 řešení.)

Řešil Petr Tomšů, PŠ, Kopřivnice:

Podstavu hledaného jehlanu označme $ABCD$ a jeho vrchol (tj. průsečík přímk a, b) označme V . Dá se dokázat, že $\sphericalangle AVB = \sphericalangle BVC = \sphericalangle CVD = \sphericalangle DVA < 90^\circ$. Z toho je již patrné, že úloha je řešitelná jen tehdy, svírají-li přímky a, b kosé úhly. Jsou-li k sobě kolmé, řešení neexistuje.

Od společného bodu V přímek a, b nanese se v určitém smyslu na obě dané přímky úsečky $VA = VB$ délky h . Body A, B jsou již dva podstavné vrcholy hledaného jehlanu. Bod V je jeho hlavní vrchol. Další podstavný vrchol C leží na kulové ploše opsané kolem V poloměrem h , dále na kulové ploše opsané kolem B poloměrem AB a v rovině ρ jdoucí B kolmo k AB . Rovina ρ protne obě kulové plochy v kružnicích, jejichž společný bod je třetí vrchol C . Další je již snadné.

Vyloučíme-li případ, že přímky a, b jsou vzájemně kolmé, má úloha čtyři různá řešení.

2. Je dána kulová plocha α , kruhová válcová plocha β , rovina ρ , rovina σ a ostrý úhel ω . Sestrojte přímku p tak, aby s rovinou ρ svírala úhel ω , dotýkala se přitom ploch α, β a aby byla rovnoběžná s rovinou σ .

Stanislav Horák

(Došla 3 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, 10. A, JSŠ Nymburk:

V rovině σ najdeme přímku r , která s rovinou σ svírá úhel ω . Najdeme ji tímto způsobem. V σ zvolíme libovolný bod P a sestrojíme rotační kuželovou plochu s vrcholem v P , s osou kolmou k rovině ρ , jejíž přímky svírají s ρ úhel ω . Přímka společná této kuželové ploše a rovině ρ je přímka r .

Kulové ploše opíšeme nyní rotační válcovou plochu κ , jejíž přímky jsou rovnoběžné s přímkou r . K ploše β sestrojíme tečné roviny rovnoběžné s přímkou r . Ty protnou plochu v hledané přímce p .

V nejpriznivějším případě existuje nejvýše osm různých přímek p , neboť jsou dvě různé přímky r a každá tečná rovina protne plochu κ ve dvou přímkách. Počet řešení se může přirozeně zmenšit. Úplná diskuse je však velmi složitá a proto ji nebudeme provádět.

Fyzika:

1. Vlak, který se rozjížděl po vodorovné dráze $s = 360$ m po dobu $t = 1$ min., stoupá hned potom po nakloněné rovině. Lokomotiva táhne vlak stejnou silou při stoupání jako po vodorovné rovině. Vlak se pohybuje po nakloněné rovině rovnoměrně tou rychlostí, jakou měl na konci první minuty. Jaké je stoupání nakloněné roviny? (Stoupání se rozumí poměr výšky nakloněné roviny k její délce, vyjádřený v ‰. Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte! Kladte $g \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.)

Evžen Říman

(Došlo 12 řešení.)

Řešil Jaroslav Vilímk, 10. B, JSŠ v Praze 13;

Na vodorovné dráze s se vlak pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným se stálým zrychlením a ; platí

$$s = \frac{at^2}{2}, \text{ tedy } a = \frac{2s}{t^2}.$$

Na nakloněné rovině, kde se vlak pohybuje rovnoměrným pohybem, je tažná síla vlaku F rušena složkou váhy vlaku G . Je-li úhel sklonu nakloněné roviny α , bude $\sin \alpha = \frac{F}{G}$ a po úpravě

$$a = g \cdot \sin \alpha.$$

Platí:

$$a = \frac{2s}{t^2} = g \cdot \sin \alpha,$$

tedy

$$\sin \alpha = \frac{2s}{gt^2}$$

Stoupání nakloněné roviny je vyjádření funkce $\operatorname{tg} \alpha$ v procentech. Protože pro úhly menší než 5° je $\sin \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha$, je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2s}{gt^2},$$

což bude stoupání nakloněné roviny.

Po dosazení v soustavě MKSA je

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \frac{2 \cdot 360 \text{ [m]}}{10 \text{ [ms}^{-2}\text{]} \cdot 3600 \text{ [s}^2\text{]}} = 0,02 = 2 \text{ ‰}.$$

2. Jak velkou dobu kyvu má kyvadlo znázorněné na obrázku? Délka nití $l = 1,44 \text{ m}$, vzdálenost $KA = d = 0,63 \text{ m}$. Kladte přibližně $\sqrt{9,81} \doteq 3,14$!

Evžen Říman

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Petr Tomšů, PŠ, Kopřivnice:

Hmotný bod přejde z polohy X_1 do X_2 , která je ve stejné výšce (podle zákona o zachování energie). Nejnižší poloha hmotného bodu bude X_0 , kdy nit prochází bodem A (obr. 1).

Doba, za kterou přejde hmotný bod z polohy X_1 do polohy X_0 je rovna polovině doby kyvu kyvadla o délce l , tedy

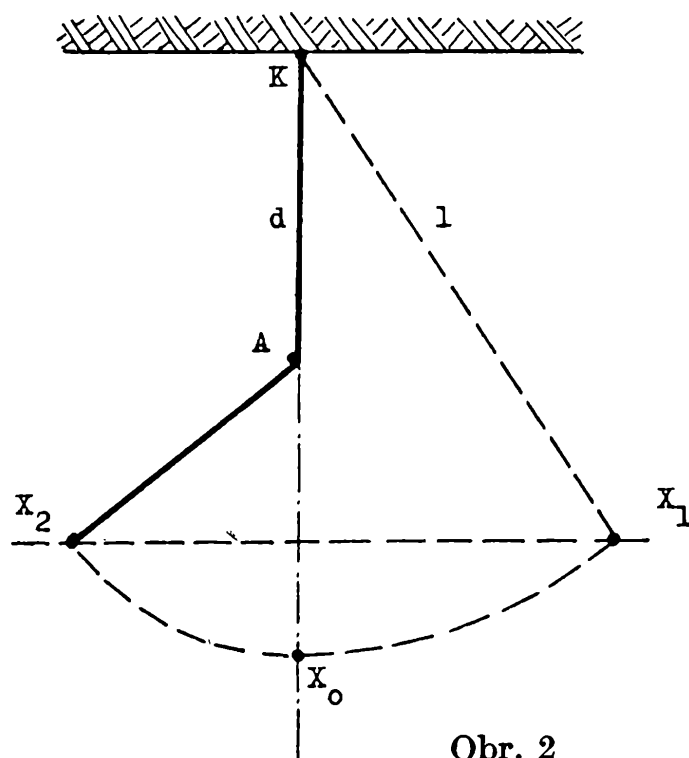
$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Doba t_2 , potřebná k průchodu z bodu X_0 do X_2 bude podobně rovna polovině doby kyvu kyvadla délky $AX_2 = l - d$, takže

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l-d}{g}}$$

Celková doba kyvu jest pak

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{l} + \sqrt{l-d}}{\sqrt{g}} = \\ &= \frac{3,14}{2} \frac{\sqrt{1,44} + \sqrt{0,81}}{3,14} \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m s}^{-2}}} = 1,05 \text{ s} . \end{aligned}$$



Závěr: Kyvadlo má dobu kyvu 1,05 sekundy.

Poznámka: Vzorec pro dobu kyvu matematického kyvadla platí jen pro malé amplitudy, kdy doba kyvu nezávisí na výchylce. Bude-li se v našem případě d blížit ku l , tj. AX_2 bude malé proti délce niti l a bude-li výchylka (tj. $\sphericalangle AKX_1$) příliš veliká, může se stát, že délka niti nedovolí, aby se hmotný bod dostal do stejné výšky jako v poloze X_1 ; pak by se nit začala okolo bodu A omotávat.

Nedbalý student

Student dostal úlohu: Určete plochu trojúhelníka ABC , jehož vrcholy jsou dány pravoúhlými souřadnicemi, tj. vzdálenostmi x, y od dvou kolmých přímk, ležících v rovině trojúhelníka: $A (0; 0)$; $B (1; 1)$. Souřadnice třetího bodu si nedbale opsal $C (a, b, c)$, takže nevěděl, co s čárkami mezi ciframi a, b, c . Pro jistotu vypočetl plochu trojúhelníka ABC pro oba možné případy $C (a, b; c)$ i $C' (a; b, c)$, vždy mu však vyšel stejný výsledek 9, 15. Dovedete z toho určit, jaké byly cifry a, b, c ? Řešení zašlete redakci do 1. prosince 1960

O. S.

Řešení čínské hry

Již od obecné školy jsme zvyklí počítat v desítkové soustavě. Deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek jednu stovku, deset stovek jeden tisíc atd. Podle toho také zapisujeme čísla pomocí číslic 0, 1, ..., 9. Číslice napsaná na posledním místě značí počet jednotek, na předposledním místě počet desítek atd. Tedy na příklad číslo 183 znamená vlastně

$$1 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

To, že jsme vybrali si k zapisování čísel zrovna desítkovou soustavu je celkem náhodné a tento způsob vznikl z počtu deseti prstů na ruce. Stejně tak bychom mohli čísla zapisovat třeba v osmičkové soustavě. Tam by nám stačily číslice 0, 1, ..., 7, protože osmička už by se psala 10. Ale zato k zapsání stejně velkého čísla by bylo zapotřebí v této soustavě o něco více číslic než v desítkové soustavě. Velkou důležitost při počítání na moderních elektronkových strojích má soustava dvojková. Při zápisu čísel pomocí dvojkové soustavy potřebujeme totiž jenom dvě číslice - nulu a jedničku. Tedy k zapsání čísla stačí přítomnost - 1 a nepřítomnost - 0 elektrického impulsu, dvojka se zapíše totiž již jako 10.

Když chceme nějaké číslo zapsat ve dvojkové soustavě, zapisujeme, kolikrát jsou v něm obsaženy jednotlivé mocniny 2; na příklad

$$183 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

Tedy desítkové číslo 183 bude zapsáno dvojkově: 10110111

Další příklad. Máme dvojkové číslo 101000. Jaké mu odpovídá desítkové?

$$1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 20$$

Ještě si v přehledné tabulce uvedeme čísla od jedničky do pěti ve dvojkové soustavě:

desítkově	dvojkově
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101

A nyní si ukážeme jako příklad použití dvojkové soustavy, kterou čtenář již zná z článku Inž. J. Klíra: Číselné soustavy v tomto čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních řešení úlohy „Stará čínská hra“ uveřejněné v Rozhledech roč. č. 5, strana 234, která zněla:

Libovolný počet kamenů si rozdělí dva hráči na několik hromádek, z nichž některé mohou obsahovat i stejný počet kamenů. Hra postupuje tak, že hráči střídavě odebírají kameny. Hráč může při jednom tahu odebrat kameny vždy jen z jedné hromádky, ale v libovolném počtu, tzn. nejméně jeden, nejvýše celou hromádku. Vyhrává ten hráč, který bere poslední, čili prohrává ten, který - je-li na něm řada - nemá již co brát.

Nakonec si položíme tuto obecnou úlohu: Je dáno n hromádek s těmito počty kamenů: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Máte možnost volby prvního tahu pro sebe nebo pro soupeře. Jak musíte postupovat, abyste vyhrál?

Napišeme si počty kamenů na jednotlivých hromádkách pod sebe ve dvojkové soustavě tak, aby číslice téhož řádu byly vždy pod sebou ve stejném sloupci. Potom se podíváme, je-li v každém sloupci sudý počet jednotek. Je-li tomu tak, přenechám první „tah“ soupeři. Není-li ve všech sloupcích sudý počet jednotek, vyberu si sám první „tah“. Pak vezmu z některé z hromádek tolik sirek, aby se ve dvojkovém zápise počtů kamenů objevil ve všech sloupcích sudý počet jedniček. Lze to vždy tak udělat? Ukážeme si, že je to možné. Vezmeme si předpis (algoritmus), podle kterého můžeme vždy postupovat. Vybereme si první sloupec zepředu (to znamená sloupec co nejvyšších řádů), ve kterém je

lichý počet jednotek: (neexistuje-li takový, je ve všech sloupcích sudý počet a v tom případě přenechám první tah soupeři). Budu brát kameny z hromádky, která odpovídá řádku, ve kterém je jednotka. Je-li ve sloupci lichý počet jednotek větší než jedna, mohu si vybrat kteroukoli z 3, 5, 7, ... hromádek.]

Tím jsme si zatím určili - ne však vždy jednoznačně - ze které hromádky máme brát, musíme si ještě říci, kolik kamenů máme odtamtud vzít. To už je celkem jednoduché.

Zápis počtu kamenů, které musím z hromádky odebrat ve dvojkové soustavě, dostanu, když napíši jednotky na místa těch řádků, v jejichž sloupcích byl lichý počet jednotek a nuly na místa těch řádů, v jejichž sloupcích byl sudý počet jednotek. Čili názorně řečeno, uberu jednotky z těch sloupců, ve kterých byl jejich počet lichý. Znamená to, že nechám soupeři takové počty v jednotlivých hromádkách, že v jejich dvojkovém zápisu je všude sudý počet jednotek. A soupeř, jelikož alespoň jeden kámen z některé hromádky musí vzít, nechá takový počet v jednotlivých hromádkách, že v jejich dvojkovém zápisu je alespoň v jednom sloupci lichý počet jednotek. A já budu dál postupovat stejným způsobem. Soupeři nechám tedy vždy takovou pozici, že bude brát z takových počtů v jednotlivých hromádkách, v jejichž zápisu ve dvojkové soustavě bude ve všech sloupcích sudý počet jednotek. Může tedy na soupeře zůstat jen jedna hromádka (ať již s jedním kamenem nebo s větším počtem)? Jistě že nikoliv, protože, zapíšeme-li ve dvojkové soustavě jedno číslo, budou sloupce tvořit jednotlivé cifry a tedy tam, kde bude jednička, bude jedniček lichý počet - jedna, někde být jednička musí, není-li číslo rovné nule. Poslední hromádku vezmu tedy při tomto postupu vždycky já a vždycky vyhraji.

Karel Čulík

Fyzikálne zaujímavosti

Zakladáme novú rubriku v našom časopise, v ktorej si chceme všímať rôzne fyzikálne zaujímavosti, hlbšie preniknúť do uplatňovania sa fyzikálnych zákonov. Nazveme ju preto „*Fyzikálne zaujímavosti*“. Sledujeme tým cieľ priblížiť dialektickému mysleniu chápanie a vysvetľovanie fyzikálnych súvislostí.

Dialektika pojmov je totiž poznaným odrazom dialektického pohybu matérie, jedinej to objektívnej podstaty sveta. Fyzika, ako prírodná veda, získava svoj materiál rovnako odrážaním skutočnosti. Aj v nej postupovať dialekticky znamená: skúmať a používať pojmy a ich spojenia ako poznané odrazy reality.

Prvé, čo vstupuje do poznania, sú zprávy podávané zmyslovými orgánmi. Až neskôršie sa objavujú a hľadajú zariadenia, ktoré zmyslové vnímanie dopĺňajú a predlžujú, takže poznávame i tie stránky skutočnosti, ktoré zmyslami nemohli byť pozorované.

Zastavíme sa preto na začiatku pri fyzike zmyslových orgánov. Tieto sú totiž zaujímavými fyzikálnymi zariadeniami. Je zaujímavé poznať, v akých podmienkach sa vyvinuli a aké fyzikálne zákonitosti sa v nich využívajú. Pritom k poznaniu najviac prispieval vždy zrak, preto sa u neho zastavíme ako u prvého.

V siedmom čísle nášho časopisu bolo už pojednané o rozdielnostiach a podobnostiach ľudského zraku a sluchu¹⁾. Tam bola zmienka o viditeľnom odbore elektromagnetického žiarenia, ležiacom v intervale od 3 900 Å do 7 600 Å. Nechceme opakovať nič, čo bolo v citovanom článku povedané, položíme si nové otázky a zodpovieme ich. Ako prvý zaujíma nás problém:

Existuje dôvod, pre ktorý práve uvedený interval vlnových dĺžok elektromagnetického spektra tvorí viditeľné žiarenie?

Aby sme našli odpoveď, musíme hľadať súvislosť hmotného prostredia a elektromagnetického vlnového rozruchu.

Elektromagnetické vlnenie je periodický proces. Charakterizujeme ho dvoma periódami: 1. priestorovou, zvanou dĺžkou vlny λ ; 2. časovou, alebo periódou T , alebo kmitočtom, rovným $f = \frac{1}{T}$. Medzi oboma tými periódami je vzťah $\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$.

V elektromagnetickom rozruchu sa navzájom udržujú kmity elektrickej a magnetickej sily, súčasne postupujú v priestore rýchlosťou $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s. Elektromagnetická vlna môže postupovať i v „prázdnom“ priestore, teda v priestore bez hmotných častíc.

Hmotné prostredie je zas usporiadaná sústava elementárnych častíc. Základnými časticami sú atómy. V ich jadrách sú vstavané protóny a neutróny; jadrá sú obkľúčené do elektrónových obalov vstavanými elektrónmi. Častice hmotného prostredia nachádzajú sa v silovom poli väzbových síl, majú preto určitú potenciálnu energiu. Ich zostavy v silovom poli nie sú strnulé a môžu konať i pohyby (i keď priestorove obmedzené), majú preto i pohybovú energiu. Vzájomnou premenou ich potenciálnej (polohovej) energie v pohybovú, vzniká ich prirodzený pohybový stav, ktorý je pohybom kmitavým.

Aká je vonkajšia príčina kmitavých pohybov častíc hmotného prostredia? Elektromagnetické vlnenie, ako periodický proces (kmitajúcej elektrickej sily), prechádzajúce pevnou mriežkou (ovšem tiež kvapalinou, alebo plynom), uvádza do spolukmitania nabité častice mriežky. Sú

¹⁾ Rozhľedy, roč. 1959/60, č. 7., A. Špelda, Fyzikální rozdílnosti a podobnosti lidského sluchu a zraku; str. 321.

preto možné jednak kmity častíc ako celkov (iónov), alebo kmity elektrónov v elektrónovom obale. Naopak, kmitajúce častice spätne pôsobia na elektromagnetický rozruch.

Toto pôsobenie je podobné, ako vplyv dipólov dielektrickej látky na vnútorné pole v hmotnom prostredí. Taký priemerný vplyv polarizovaných častíc, ako je známe sa prejaví zmenšením intenzity elektrického poľa vnútri dielektrika. Číslo, ktoré udáva, koľkokrát sa zmenší vnútorná intenzita poľa je *e l e k t r i c k á p e r m i t i v i t a* (dielektrická konštanta ϵ). Elektromagnetický rozruch preto nemôže prechádzať prostredím bez toho, aby sa neprejavil vplyv hmotného prostredia.

Vzájomný vplyv vlnového rozruchu a hmotného prostredia môžeme najľepšie sledovať, keď výjdeme zo zákona postupu elektromagnetického rozruchu v závislosti od hmotného prostredia. Elektromagnetický rozruch sa môže šíriť len v prostrediach, ktoré neobsahujú voľné elektróny (je známe, že kovy, obsahujúce voľné elektróny, sú nepriehľadné a neprepúšťajú ani ostatné elektromagnetické žiarenia). Izolátory, alebo dielektriká nie sú vodičmi elektriny, zato sa v nich môžu šíriť elektromagnetické vlny, sú teda „vodičmi“ elektromagnetickej energie.

Rýchlosť elektromagnetickej vlny v dielektriku je $v = \frac{c}{n}$,

kde $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s je vákuová rýchlosť elektromagnetickej vlny a n tzv. *a b s o l ú t n y i n d e x l o m u*.

Index lomu je materiálovou funkciou a možno ho vyjadriť pomocou elektrickej permitivity ϵ , ktorá zas vyjadruje vplyv častíc prostredia na elektrické pole v prostredí. Keď - ako sme už uviedli - častice môžu kmitať a ich vlastné frekvencie označíme f_i a frekvenciu elektromagnetického rozruchu označíme f , platí pre index lomu

$$n = \sqrt{\epsilon} = 1 + \sum_i \frac{k_i}{f_i^2 - f^2} \quad ^2) \quad (1)$$

Vzájomné pôsobenie prostredia a elektromagnetického rozruchu závisí preto od vlastných frekvencií f_i častíc prostredia a frekvencie elektromagnetickej vlny f . Pôsobenia bude najväčšie, keď častice prostredia majú vlastné frekvencie f_i rovnaké s frekvenciou vlnenia, teda keď budú v rezonancii. Vtedy budú vynútené kmity najväčšie, za sprievodného absorbovania elektromagnetickej energie rozruchu. Pritom bude rezonančných oblastí viac.

Celé častice (ióny) rezonujú s ohľadom na svoju väčšiu hmotu pri nižších frekvenciách. Prejaví sa to v infračervenom obore elektromagnetického spektra (frekvencie od 10^{12} do $3 \cdot 10^{14}$ 1/s). Pre rezonančnú frekvenciu je $f_i = f$ a podľa (1) index lomu (ale i permitivita) rastú nad všetky hranice. Prostredie pre tú frekvenciu prestáva byť prechod-

²⁾ Kde k_i závisí od počtu a hmoty pohybujúcich sa nábojov a ich náboja.

ným a nastáva prudká absorpcia žiarenia. Môžeme povedať, že v tom obore prejavujú sa anomálie indexu lomu a postup elektromagnetických vln je nepravidelný (niektoré frekvencie sú pohltené).

Vo viditeľnom obore elektromagnetického spektra niet rezonančných frekvencií. Frekvencie tohto žiarenia sú vzdialené od rezonančných a preto je index lomu spojitou funkciou frekvencie, nemá anomálie. Ide o frekvencie od $3,93 \cdot 10^{14}$ do $7,7 \cdot 10^{14}$ 1/s.

Ak frekvencie žiarenia ďalej zväčšujeme, vzdalujeme sa od rezonančných frekvencií celých častíc, ale na druhej strane približujeme sa zas vlasným frekvenciám elektrónov v elektrónových obaloch. V ultrafialovej oblasti sa preto zas vyskytnú rezonančné frekvencie a s nimi súvisiace anomálie indexu lomu (1). Tu ide o frekvencie od $7,7 \cdot 10^{14}$ do $3 \cdot 10^{16}$ 1/s.

Ďalším zvyšovaním frekvencie prechádzajúceho žiarenia, vzdalujeme sa od elektrónových vlastných frekvencií, preto bude rozdiel $f_i^2 - f^2$ rásť a podľa (1) bude sa index lomu zmenšovať, blížiac sa jednotkovej hodnote. To znamená, že tieto žiarenia sa už na prostredí ani neodrážajú, ani nelámu. Vlnová dĺžka sa približuje vlastným rozmerom častíc a jednotlivé častice začínajú vlnenie ohýbať.

Zrakový orgán sa však zakladá na lome, pretože na lome možno založiť zobrazovanie, nebol by možný pre veľmi krátkovlnné žiarenia.

Viditeľná oblasť elektromagnetického spektra nie je náhodou v známej oblasti frekvencií. Sú pre to vážne dôvody. Len keď je index lomu spojitou funkciou frekvencie žiarenia, môže vzniknúť nerušené a spoľahlivé zobrazovanie a spoľahlivý zobrazujúci orgán, založený na lome elektromagnetického žiarenia.

Oko, založené na vnímaní alebo infračerveného, alebo ultrafialového žiarenia, bolo by asi tak kvalitné, ako ucho, v ktorom by bola miesto bubníka (rezonujúceho v širokom rozsahu) struna, rezonujúca len na vlastnú frekvenciu a jej príslušné vyššie harmonické.

Oko je najcitlivejšie na stred viditeľného oboru ($5550 \text{ \AA}$) a v tejto oblasti je súčasne maximum slnečného žiarenia. Slnko a oko teda úzke dialekticky spolu súvisia.

Ucho so strunovým prijímačom podávalo by zprávy len o frekvenciách, na ktoré struna rezonuje. Oko v oblasti s rezonančnými frekvenciami, by zas nedávalo zprávy o rozruchoch rezonančných frekvencií prostredia, pretože tieto sú pohltené. Keď sa rozruch elektromagnetický šíri rôznymi prostrediami, prichádzali by do úvahy rezonančné frekvencie všetkých tých prostredí. Absorpcie boli by preto celkom nepravidelné a závislé od cesty lúča. Oko prestalo by byť spoľahlivým orgánom.

Oblasť viditeľného žiarenia vyvinula sa teda v zmysle platnosti fyzikálnych zákonov, výberom najpravidelnejšie sa šíriaceho elektromagnetického žiarenia.

Prof. dr. Ján Vanovič, Bratislava

Doc. dr. Anton Huťa, Bratislava:

Akademik Jur Hronec

(* 17. V 1881 — † 1. XII. 1959)

Na sklonku roku 1959 rozlúčila sa naša verejnosť s významným československým vedcom, najstarším slovenským matematikom akademikom Jurom Hroncom.

Prof. Ph. dr, Dr. h. c. ped. vied Jur Hronec, riadny člen SAV, doktor fyzikálne-matematických vied narodil sa v Gočove (okres Rožňava), kde jeho otec bol maloroľníkom.

Po smrti svojho otca ako deväťročný pracoval so svojimi dvoma staršími bratmi v bani Rudno. Vo svojom 13. roku, za podpory svojich bratov išiel na gymnázium do Rožňavy, kde aj zmaturoval s vyznamenaním. Po maturite odišiel na univerzitu do Kluže. Po skončení univerzitných štúdií stal sa profesorom gymnázia v Kežmarku.

Behom svojho pôsobenia na gymnáziu viackrát podnikol študijné cesty do zahraničia. Takto študoval v Göttingenu, Berlíne, Giessene, Paríži atď.

R. 1923 habilitoval sa v Prahe a r. 1924 stal sa profesorom na Českej vysokej škole technickej v Brne.

Jeho hlavným vedným oborom boli diferenciálne rovnice a diferenciálne systémy. Okrem toho sa zaoberal aj algebrou, hlavne klasickou. Vedľa matematiky zaoberal sa prof. Hronec aj pedagogikou a to po teoretickej aj praktickej stránke.

Počas svojho pôsobenia na Českej vysokej škole technickej v Brne bol zvolený za dopisujúceho člena Kráľovskej českej spoločnosti nauk v Prahe, za riadneho člena Moravskosliezskej akadémie prírodných vied a za člena Učenej spoločnosti Šafaříkovej.

Okrem vedeckej a pedagogickej činnosti vyvíňoval prof. Hronec aj rozsiahlu organizačnú činnosť. Bol zakladateľom celého radu vysokých škôl a fakúlt vysokých škôl.

V júli r. 1938 bol splnomocnený vládou organizovať novozaloženú Slovenskú vysokú školu technickú v Košiciach, ktorá sa po odtrhnutí južných území Slovenska odsťahovala najskôr do Prešova, potom do

Turč. Martina a konečne do Bratislavy. R. 1939 organizoval Prírodovedeckú fakultu Univerzity, r. 1940 s podporou obchodných komôr organizoval Vysokú školu obchodnú (terajšiu Vysokú školu ekonomickú), r. 1946 organizoval Pedagogickú fakultu univerzity, ďalej otváral viac fakúlt techniky v Bratislave ako aj spolupôsobil pri zakladaní vysokých škôl v Košiciach, Nitre atď.

Čo sa týče odbornej činnosti prof. Hronca, zanechal 35 diel vedeckých matematických odborných a pedagogických, medzi ktorými je 7 kníh, z ktorých niektoré vyšli vo dvoch a niektoré dokonca vo troch vydaniach.

Za jeho životné dielo možno považovať jeho dvojdielne „Diferenciálne rovnice“ (1. diel Obyčajné dif. rovnice a 2. diel Parciálne dif. rovnice), ktoré napísal už na sklonku svojho života. Známe je tiež jeho dvojzväzkové dielo „Diferenciálny a integrálny počet“ ako aj jeho „Algebraické rovnice a ich použitie na analytickú geometriu“.

Jeho odborné matematické práce sa týkajú zväčša diferenciálnych rovníc.

R. 1950 prešiel prof. Hronec na Prírodovedeckú fakultu Univerzity Komenského v Bratislave, kde pôsobil ako riadny bezplatný profesor od jej založenia. Tu bol vedúcim Katedry matematiky až do svojho penziovania 1. septembra 1959.

- R. 1953 bol menovaný medzi prvými akademiky SAV. Pri príležitosti 1. mája 1953 bol mu za jeho zásluhy udelený „Rad práce“. Konečne r. 1955 na celoštátnom sjazde JČMF v Prahe bol zvolený za čestného člena JČMF.

Akademik Jur Hronec bol vzorom socialistického vedca, ktorý zostal verný svojmu pôvodu. Možno povedať, že pracoval až do posledného okamihu svojho života.

Ako vedec a učiteľ zostane akademik Hronec vždy príkladom skromného, pracovitého, vedeckého pracovníka a dobrého, svedomitého, prísneho ale pritom spravodlivého učiteľa a pedagoga, pracujúceho pre lepšiu budúcnosť nášho ľudu.

Česť jeho pamiatke.

Baconův článek

Výroba elektrické energie z tepelných zdrojů oklikou přes parní stroje a plynové motory, jimiž teprve jsou poháněny elektrické generátory, je stále ještě spojena se značnými ztrátami, jichž příčinou je malá účinnost tepelných strojů. Vždyť nejlepší spalovací motor Dieselův pracuje s účinností 36 %, parní turbína s nadkritickým tlakem páry asi 40 %, kdežto např. benzinový motor má účinnost pouze asi 25 % a plynová turbína dokonce jen 20 %. Proto pořád se hledá nějaký nový způsob

výroby elektrické energie přímou přeměnou energie tepelné v elektrickou. Zdá se, že tento problém rozřešil badatel F. T. B a c o n (čti bejkn), jenž použil inverzního zjevu k elektrolyze. Jak víme, lze elektrolyzou oddělit prvky nějaké sloučeniny; tak např. lze elektrickým proudem rozložit vodu na vodík a kyslík. Tyto dva plyny by opět zpětným sloučením (shořením) daly stejné množství energie, ovšem tepelné, jak známo z principu o zachování energie. Inverzním zjevem k rozkladu vody na vodík a kyslík tedy bude přímá přeměna energie, jež vzniká sloučením vodíku a kyslíku, v energii elektrickou. Bacon k tomu používá zvláštního zařízení, jež nazveme B a c o n ů v č l á n e k. V nádobě s draselným louhem jsou dvě porézní elektrody niklové; do jedné je přiváděn kyslík, do druhé vodík. Nikl sám zde účinkuje jako katalyzátor celého procesu, při němž na kyslíkové elektrodě se ze vháněného kyslíku a přítomné vody tvoří ionty hydroxylu, které putují elektrolytem k druhé elektrodě. Na druhé elektrodě se vháněný vodík sloučí s přicházejícími ionty hydroxylu na vodu, čímž vznikne elektrický proud, který se odvádí elektrodami. Celý pochod probíhá daleko intenzivněji za vyšší teploty a tlaku. Avšak i při normální teplotě se podařilo Baconovi pohánět takovouto baterií posunovací vozík, dosud napájený akumulátory. Perspektivy tohoto Baconova vynálezu jsou velmi nadějně. Badatel sám doufá, že baterie jeho článků pomohou z hospodárnit a ozdravit městskou dodávkovou dopravu: V noci bude levným nočním proudem vyráběn rozkladem vody vodík a kyslík a uskladněn do tlakových nádrží, které pak ve dne budou v Baconových bateriích pohánět dodávkové elektromobily místo dosavadních těžkých akumulátorů.

Tím se městská doprava zbaví nezdravého kouře a sazí z výfukových plynů naftových a benzinových motorů, které dnes tak zhoubně zamořují ovzduší velkoměst.

Kromě toho lze doufat, že Baconův článek ve zdokonalené formě, pracující za vyššího tlaku a teploty, umožní levnou výrobu elektrické energie všude tam, kde je dosti laciného vodíku a kyslíku, jako např. v chemickém průmyslu. Velikou výhodou tohoto postupu je také okolnost, že pořizovací a udržovací náklady Baconových článků jsou velmi nízké a provoz je naprosto spolehlivý.

F r a n t i š e k K o m u r k a

X. ročník MO

Žádáme čtenáře, aby upozornili žáky i učitele našich škol na X. ročník Matematické olympiády; zvláště na to, že vedle šesti soutěžních úloh budou žáci letos řešit povinně všech šest přípravných úloh, aby se jejich studium matematiky stalo hlubší a plynulejší.

*Žákům středních a odborných škol
Na vědomí pracovníkům MO*

V letošním jubilejním X. ročníku Matematické olympiády budete v každé kategorii řešit celkem 12 úloh. Tyto úlohy jsou dvojího druhu, jednak přípravné, jednak soutěžní.

Přípravných úloh je šest a jsou snadné, asi toho druhu jako řešíte ve škole; chcete-li se soutěže účastnit, *musíte správně rozřešit všech těchto šest přípravných úloh*. Máte na nich prokázat, že nejen dovedete řešit matematické úlohy, ale také, že umíte ke svému řešení napsat řádný výklad tak, aby každý z vašeho řešení poznal, jak jste při řešení postupovali a jak jste dospěli k výsledku. Vzory řešení příkladů máte ve svých učebnicích. Řešení každé úlohy proveďte na zvláštním listě; rovněž konstrukce geometrické úlohy proveďte na zvláštním listě a obrázky očísľujte (ve výkladu konstrukce uveďte číslo obrázku). Při psaní výkladu dbejte na úpravu a především na správné vyjadřování ve své mateřštině; při tom užívejte názvosloví, které je uvedeno v učebnicích. Neříkáme na př. „uděláme kružnici“, nýbrž „opíšeme (nebo sestrojíme nebo narýsujeme) kružnici“

První tři přípravné úlohy odevzdejte svému učiteli matematiky do 31. 10. 1960, *druhé tři* úlohy do 30. 11. 1960. Na základě toho rozhodne váš učitel, zda budete zařazeni do soutěže I. kola.

Soutěžních úloh I. kola bude rovněž 6. Uveřejníme je v Rozhledech matematicko-fyzikálních (viz dále). Ze šesti soutěžních úloh *musíte rozřešit správně* (alespoň s oceněním „vyhovující“) *nejméně čtyři úlohy*, abyste se mohli účastnit soutěže II. kola. O vaší účasti na II. kole na návrh ředitele školy a vašeho učitele matematiky rozhodne krajský výbor MO (pro kategorie A, B, C) nebo okresní výbor MO (pro kategorii D); stane se tak podle toho, jak jste vypracovali jak šest přípravných tak i šest soutěžních úloh.

Doporučujeme vám, abyste řešení úloh neodkládali na dobu těsně před lhůtou odevzdání; zabývejte se studiem matematiky soustavně po celý školní rok. Váš učitel vám poradí, které části z učebnic si máte prostudovat a které příklady z učebnic a sbírek si máte rozřešit.

Přejeme vám hodně úspěchu v práci; svou účastí v olympiádě si zajišťujete možnost, že se stanete předními technickými a odbornými pracovníky naší socialistické společnosti.

Přípravné úlohy MO

(X. ročník soutěže)

K a t e g o r i e A

1. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dán poloměr kružnice trojúhelníku opsané a poloměr kružnice vepsané. Proveďte diskuzi řešitelnosti vzhledem k velikostem obou daných poloměrů.

(P o k y n. Vypočtete součet odvěsen pomocí daných poloměrů a výsledku užijte ke konstrukci.)

2. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 (o poloměrech R, r , kde $R \geq r = 1$, které mají vnější dotyk.

Vypočítejte poloměr x kružnice k , která se každé z kružnic k_1, k_2 dotýká vně a zároveň se dotýká jedné společné vnější tečny kružnic k_1, k_2 .

Rozhodněte, při které hodnotě R je x nejmenší.

3. Narýsujte graf funkce:

$$\text{a) } y = \frac{x^2}{|x|}; \quad \text{b) } y = \frac{x^2}{|x^2|}; \quad \text{c) } y = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{|x^2 - 9|}}$$

$$\text{d) } y = \frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}} \quad \text{e) } y = |x| \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2}{|4 - x^2|}};$$

$$\text{f) } y = |x| \sqrt{\frac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}.$$

Podejte odůvodnění.

K a t e g o r i e B.

1. Jsou dána celá čísla A, B . Potom alespoň jedno z čísel $A, B, A + B, A - B$ je dělitelné třemi; dokažte. (P o k y n. Existuje jediná dvojice celých čísel a, z , kde $0 \leq z < 3$, taková, že platí $A = 3a + z$.)

2. V rovině jsou dány dva různé body C, P a na přímce CP bod V .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , v němž je bod P středem základny AB a bod V průsečíkem výšek.

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k poloze bodu V na přímce CP . (P o k y n. Vypočtete velikost úsečky $x = \frac{1}{2} AB$.)

3. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$.

Sestrojte kružnice $k_1 = (S_1, r_1), k_2 = (S_2, r_2)$ těchto vlastností:

- (1) kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk,
- (2) platí $r_2 = 2r_1$,
- (3) kružnice k_1 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle DAB$ a kružnice k_2 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle BCD$,
- (4) obě kružnice k_1, k_2 leží v kosočtverci $ABCD$.

K a t e g o r i e C.

1. Mořská voda obsahuje 5 % soli. Kolik kilogramů obyčejné vody musíme přilít do m kg mořské vody, abychom dostali dvouprocentní roztok soli ve vodě? (Ostatní látky rozpuštěné ve vodě při tom zanedbáme.) Proveďte též příklad pro $m = 40$.

2. V rovině je dána úsečka CP a přímka $p \perp CP$, která prochází bodem P . Uvažujme rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vrcholy A, B leží na přímce p .

Vyšetřte, co vyplní těžiště T všech trojúhelníků ABC .

(P o z n á m k a. Pro polohu hlavního vrcholu trojúhelníka ABC jsou dvě podstatně odlišné možnosti.)

3. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, c a uvnitř jimi určeného pásu je dán bod B .

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

(P o k y n. Otočte přímku c kolem bodu B o pravý úhel.)

Kategorie D.

1. Udejte všechny dělitele (tj. přirozená čísla) čísla 180. Uveďte postup, jak jste úlohu řešili.

2. JZD mělo v r. 1959 dodat 2670 q obilí; plán splnilo na 115 % (takže plán dodávky obilí překročilo o 15 %).

Kolik obilí musí dodat v roce 1960, jestliže chce překročit o 15 % svou dodávku z minulého roku.

3. Narýsujte dvě rovnoběžky p , q o vzdálenosti 4 cm; na přímce p zvolte bod P .

(Pokračování)

Recenze

Jiří Hořejší: Sbírka úloh z dynamiky

Stran 241, obrázků 170, SNTL Praha 1960, cena váz. výtisku Kčs 24,30.

Sbírka obsahuje téměř 170 podrobně řešených příkladů z dynamiky hmotného bodu, tuhého tělesa, rázu těles a kmitání soustav, zejména vzhledem k problémům stavebních konstrukcí. Je určena posluchačům stavebních fakult, ale bude také dobrou pomůckou všem, kdož chtějí zvládnout obtížné základy dynamiky, učitelům a vynikajícím žákům středních a průmyslových škol. Studium vyžaduje však znalost základů infinitezimálního počtu a diferenciálních rovnic. Použité značky matematické a fyzikální jsou někdy odlišné od užívaných norem.

Kniha je vhodná pro učitelské knihovny.

Evžen Říman

Redakční sdělení

Přicházíme k vám - milí čtenáři - s prvním číslem 39. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních opět na začátku školního roku.

Budeme přinášet články z matematiky, fyziky, astronomie a deskriptivní geometrie. Chceme vám pomáhat při hlubším studiu těchto základních přírodních věd a přibližovat školu životu, zvláště technické praxi. V Rozhledech dále najdete informace o Matematické i Fyzikální olympiádě. Těšíme se, že se budete nejen účastnit našich soutěží, ale že se časem stanete i našimi přispěvateli.

Zahajujeme II. ročník Fyzikální olympiády

Po úspěšném zakončení I. kola Fyzikální olympiády (FO), pořádá ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a Československým svazem mládeže letos II. ročník této soutěže.

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky výběrových středních škol. Bude probíhat ve třech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky 11. tříd JSŠ, 12. tříd DSŠ, 3. a 4. tříd středních odborných škol. Kategorie B je pro žáky 10. tříd JSŠ, 11. tříd DSŠ a 2. tříd středních odborných škol. Pro žáky výběrových 9. tříd JSŠ, 10. tříd DSŠ a 1. tříd středních odborných škol je určena kategorie C.

První kolo soutěže bude probíhat na jednotlivých školách ve všech kategoriích. Úlohy a témata k prostudování zadané ÚV FO budou postupně uveřejňovány v tomto časopise. Z devíti úloh musí žák rozřešit nejméně šest s prospěchem alespoň dobrým a prostudovat příslušné téma, aby se mohl ucházet o účast v druhém kole soutěže. V rozřešených úlohách musí být i experimentální příklad. První kolo končí 28. února 1961.

Řešení prvních tří úloh provedou žáci do 19. listopadu 1960, další tři odevzdají do 24. prosince 1960 a poslední tři s prostudováním tématu provedou do 28. února 1961. Tento termín je třeba přesně dodržet, neboť opravené úlohy se musí nejpozději do 14 dní po uvedeném termínu zaslat příslušnému KV FO.

Žákovská řešení opravuje žákův učitel a spolu s referentem FO na škole rozhodne o zařazení žáka do soutěže. Zhodnocení řešení se provede jedním ze stupňů: výborné řešení, dobré řešení, nevyhovující řešení. Výsledky hodnocení oznámí učitel řešiteli. O zařazení žáka do II. kola soutěže definitivně rozhodne příslušný KV FO. Pozvání k soutěži druhého kola dostane žák prostřednictvím své školy.

Doporučujeme soutěžící sdružovat do fyzikálních kroužků. V nich si žáci prohloubí své fyzikální znalosti, aby mohli s úspěchem řešit soutěžní úlohy. Není úkolem kroužků počítat soutěžní úlohy.

Opravami úloh prvního kola Fyzikální olympiády, organizováním a řízením fyzikálních kroužků plní učitelé svůj výchovně politický úkol.

Druhé kolo bude probíhat v dubnu 1961. Do tohoto kola budou KV FO vybráni nejlepší řešitelé z prvního kola. Krajské kolo bude probíhat ve všech kategoriích. Témata úloh budou ÚV FO rozeslána v zapečetěných obálkách jednotlivým KV FO. Obálky se otevřou až těsně před započatím soutěže v přítomnosti soutěžících v místě soutěže. Nejlepším účastníkům druhého kola budou uděleny věcné odměny. Vynikající řešení nebo řešení originální povahy budou uveřejňována.

Nejlepší řešitelé druhého kola soutěže kategorie A se účastní ještě třetího kola soutěže, v němž soutěží žáci z celého území republiky. Dvacet nejlepších řešitelů třetího kola bude prohlášeno vítězi II. ročníku Fyzikální olympiády. Vítězové budou odměněni knižními a jinými věcnými cenami a diplomy. Za zvlášť vynikající řešení budou žákům uděleny ceny mimo pořadí.

Řešení úloh musí být psáno čitelně inkoustem na listy formátu A4. Každou úlohu vypracujte na samostatném listě. Řešení úloh doprovázejte slovním výkladem tak, aby mu každý rozuměl. První list řešení každé úlohy má být opatřen záhlavím. Dodržujte toto uspořádání záhlaví:

Jméno řešitele. Kategorie. Třída. Úloha č. Škola s adresou.

Potom následuje text a řešení úlohy. Dodržením této úpravy bude usnadněna práce těm, kteří řešení opravují. Pomocné obrázky a konstrukce úloh se provedou na zvláštním listě, odděleně od textu a řešení úloh.

Soutěž ve všech kategoriích řídí KV FO, který poskytne další informace a instrukce. Celostátně je soutěž řízena ÚV FO. Obecné směrnice řízení a provádění Fyzikální olympiády jsou ve Věstníku MŠK z 8. října 1959 a platí od 1. 11. 1959.

Přejeme všem soutěžícím mnoho úspěchů.

Ústřední výbor Fyzikální olympiády

Upozornění

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních uvítá s radostí i váš příspěvek, pokud jeho tematika zapadá do našeho plánu. Rukopis však musí být psaný strojem po jedné straně papíru černou páskou. Píše se vždy s řádkovou mezerou, takže na stránce formátu A4 je asi 30 řádek. Řádka obsahuje 60 až 70 úhozů. Vzorce a jiný algebraický text je nejlépe pečlivě vpisovat ručně, a to přesně na místa, kde mají být vysazeny. Jednotlivé listy rukopisu pořadově číslyte a neopomeňte připojit svoji přesnou adresu, místo zaměstnání (u studujícího též školu) a plné jméno.

Jsou-li v textu poznámky, které mají být vytištěny pod čarou, číslyte je a vpisujte přímo do textu. Obrázky se reprodukcí dvakrát zmenší, proto je úhledně popisujte, nejlépe normalizovanou abecedou (šablonka 5 mm). Písmena algebraického textu budou vysazena kurzívou a vyznačte je podtržením vlnovkou (tužkou). Fyzikální jednotky cm, kg atd. se nepodtrhávají. V matematice i fyzice užívejte předepsaného názvosloví. Otištění neurgujte, nepoužité rukopisy vracíme.

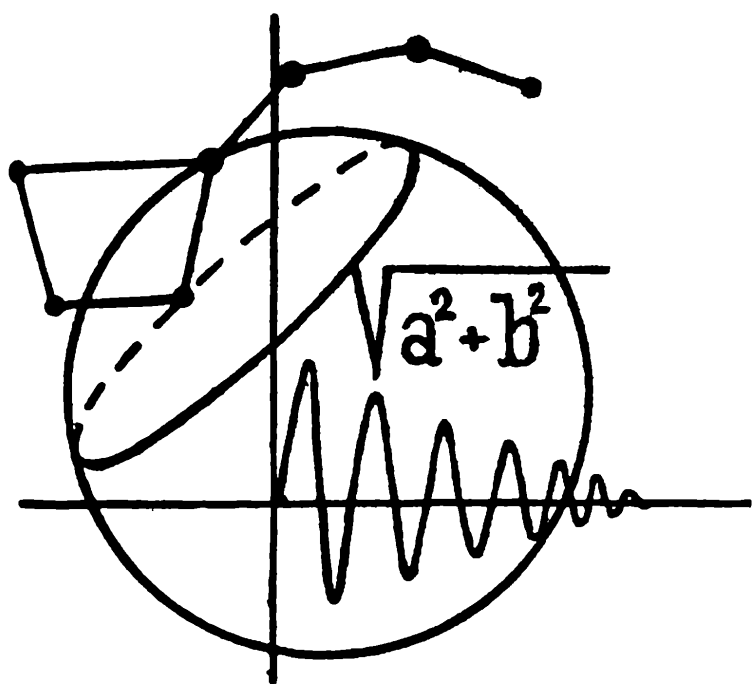
✱

Žádáme ředitelství jedenáctiletých, dvanáctiletých a odborných škol i učitele vyučující matematice, fyzice a deskriptivní geometrii, a to zvláště členy JČMF, aby ve smyslu doporučení ministerstva školství a kultury provedli laskavě na počátku školního roku nábor předplatitelů Rozhledů matematicko-fyzikálních. Objednávky provádějte pouze prostřednictvím Poštovní novinové služby nebo u svého poštovního doručovatele. Děkujeme za spolupráci.

Redakce

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



2

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 2

Toto číslo vyšlo 20. října 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

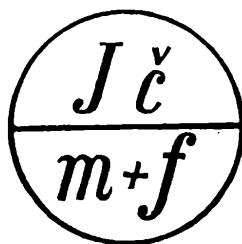
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JŠŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H

T. Klein: Čo priniesol objav neeuklidovskej geometrie	49
J. Straka: Neurčité rovnice (Pokračování)	54
Inž. J. Klír: Booleova algebra	61
K. Drábek: Sestrojení sdružených průměrů elipsy s daným úhlem φ	64
O. Lepil: Cesty k uvolnění jaderné energie	69
CSc. L. Pekárek: Plazma a řízená termonukleární reakce	72
Úlohy k řešení	78
Řešení úloh z minulého ročníku	79
Matematická a fyzikální olympiáda	83
Prof. dr. Q. Vetter: Řešení zajímavé úlohy z teorie čísel	91
Recenze	93
Závěr IX. ročníku MŮ v Praze-ÚNV	96
M. M.: O Jednotě československých matematiků a fyziků	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-12*01534. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

Matematika

Tomáš Klein, Zvolen:

Čo priniesol objav neeuklidovskej geometrie

V rámci svetových kultúrnych výročí tohto roku oslavuje Svetová rada mieru a s ňou i všetok pokrokový ľud 100. výročie úmrtia jedného z objaviteľov neeuklidovskej geometrie, veľkého maďarského matematika Jánosa Bolyaia (1802—1860). Pri tejto príležitosti tento časopis vo svojom 8. čísle 38. ročníka priniesol stručný životopis Jánosa Bolyaia od prof. dr. Q. Vettera. Podrobnejší životopis s nadhodením problematiky a významu objavu neeuklidovskej geometrie priniesli členský časopis JČMF Pokroky matematiky, fyziky a astronómie a Časopis pro pěstování matematiky (viď citovaných literatúru na konci tohto článku). Pretože spomínané časopisy sa nedostanú do rúk zvlášť našim mladým čitateľom, chcel by som niektoré pekné myšlienky z uvedených článkov priblížiť i našim čitateľom. Príklad neeuklidovskej geometrie v rovine si veľmi stručne ukážeme na Poincarého (čti Poénkaré) modeli. Iný model neeuklidovskej geometrie je veľmi prístupnou formou uvedený v nedávno vyššej knižke *Cesty moderní matematiky* (viď zoznam literatúry).

Často sa stáva, keď hovoríme s ľuďmi, ktorí majú stredoškolské, prípadne i vysokoškolské technické vzdelanie a majú trebárs i solídne matematické vedomosti, že nám postaví otázku: „Ako je to s tou neeuklidovskou geometriou? Tá vraj vyvracia vety Euklidovej geometrie, keď tvrdí, že súčet uhlov v trojuholníku je väčší, alebo menší ako dva pravé, atď. K čomu Vám matematikom je neeuklidovská geometria, keď v praxi nám úplne stačí euklidovská geometria.“ Na tieto a podobné otázky by som chcel stručne odpovedať.

Vieme z našej matematickej praxe, že každá matematická definícia vyjadruje definovaný pojem pomocou pojmov iných, pred tým už zavodených a práve tak každý dôkaz matematickej vety sa odvodzuje z iných pred tým už známych viet. Vieme, že ak by sme išli touto

spiatočnou cestou a hľadali vety, na základe ktorých bola dokázaná veta predom zvolená a podobne u definícií, že takto by sme nemohli postupovať do nekonečna. Musíme na začiatku každej disciplíny, či vedného odboru vychádzať z niekoľkých pojmov, ktoré neboli definované a z niekoľkých tvrdení viet, ktoré nedokazujeme, ale ich pravdivosť mnohokrát overenú v praxi proste preberáme. Z týchto pojmov a viet potom môžeme logicky odvodiť celý systém viet a definícií, ktorý nám obyčajne dáva systematický celok tej-ktorej disciplíny.

Toho si bol vedomý už aj grécky učenec Euklides; žil v III. storočí pred n. l. Bol odchovancom slávnych starogréckych rečníckych škôl, v ktorých sa pestovala hlavne logika. Starogrécky rečník musel vedieť v polemike vyvrátiť argumenty svojho protivníka (hlavne vo voľbách), musel vedieť rozlíšiť úsudky zrejmé, logicky evidentné od úsudkov plausibilných (pravdepodobných), alebo falošných, pri čom logické vývody boli konfrontované so skutočnosťou. Tu teda vyrástol majster logiky Euklides, ktorý zhrnul geometrické poznatky Babylončanov a Egypťanov, ktorí svoje poznatky odpozorovávali z praxe z prírody, ako i dosť vyvinutej školy Pytagorovej, logicky ich usporiadal a vo svojich slávnych „*Základoch*“ (Elementa 15 kníh) podal výklad geometrie axiomaticky. Vychádzal zo 14 *axiomov*, z ktorých 5 nazval *postulátmi* (požiadavkami) a ktoré zneli:

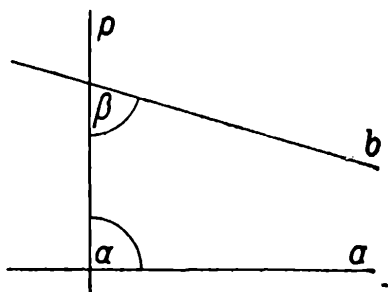
1. Dvoma bodmi možno vždy viesť jedinú priamku.
2. Úsečku možno neobmedzene predĺžiť.
3. Z ľubovoľného stredu možno ľubovoľným polomerom zostrojiť kružnicu.
4. Všetky pravé uhly sú zhodné.
5. Dve priamky a , b v rovine, ktoré pretínajú inú priamku p tejto roviny a tvoria s ňou po jednej strane vnútorné uhly α , β , ktorých súčet je menší ako dva pravé, sa vždy pretínajú a to po tej strane priamky p , kde je súčet vnútorných uhlov α , β menší ako dva pravé uhly (obr. 1).

Posledný postulát je tzv. *Postulát o rovnobežkách*, lebo hovorí to isté (ako bolo neskôr dokázané), ako tvrdenie, že: V rovine možno bodom ležiacim mimo danú priamku k nej viesť práve jednu priamku, ktorá ju nepretína, čiže je s ňou rovnobežná.

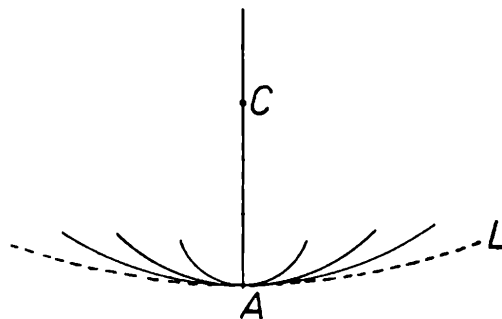
Na týchto 14 axiomoch vybudoval systém dnes nám dobre známej euklidovskej geometrie. Ovšem už pozdejší grécki vykladači *Základov* si povšimli, že *Základy* netvorila úplný logický systém, že Euklid sa pri dôkaze niektorých svojich viet odvoláva na vety, ktoré predtým ani nedokázal ani neuviedol medzi axiomami. A potom 5. postulát sa im zdal vzhľadom k predchádzajúcim štyrom a niektorým odvodeným vetám, veľmi zložitý. Upadli do podozrenia, či by sa 5. postulát nedal odvodiť z predchádzajúcich štyroch. Prvé pokusy dokázať 5. postulát sa objavili už v Grécku v I. storočí pred n. l. (Possidonios) a potom

sa tento problém tzv. p r o b l é m o r o v n o b e ť k á c h vliekol cez stredovekých Arabov až k novodobým Europeanom do začiatku 19. storočia. Často sa zdalo, že dôkaz 5. postulátu je hotový, ale pri jeho kontrole sa vždy zistilo, že v dôkaze je zahrnutý predpoklad toho, čo sa malo dokázať.

Na skomplikovanie situácie sa v 18. storočí objavila K a n t o v s k á š p e k u l a t í v n a f i l o z ó f i a so svojim apriórnym nazeraním na priestor. Podľa nej naše názory na priestor sú nezávislé na skúsenosti, sú to vrodené apriórne formy nášho nazerania. Odtiaľ vychádzalo presvedčenie, že Euklidova geometria je jedine možná a že znamená vrodené a tým i nemenné zákony nášho geometrického myslenia. Táto filozofia obchádzala práve fakt, že Euklidova geometria vyšla zo skúseností a z potrieb praxe. Táto filozofia mala reakčný, obmedzujúci vplyv na ďalší vývoj problému rovnobežiek.



Obr. 1



Obr. 2

Vedci totiž pri svojej práci nevedomky správne užívali dialektickej metódy, ale výsledky ku ktorým došli a boli správne, sami vyhlasovali za nezmysly, alebo sa ich báli zverejňovať, pretože sa obávali kriku vládnucích vrstiev zaťažených reakčnou filozofiou.

Napríklad taliansky jezuita G i r o l a m o S a c c h e r i už v r. 1733 vydal spisok o probléme rovnobežiek, v ktorom dôkaz 5. postulátu prevádza nepriamo. Použil správne dialektický krok. Predpokladal logickú negáciu 5. postulátu a došiel k určitým vetám neeuklidovskej geometrie, ovšem zaťažený osobnými názormi sám vyhlasuje svoje výsledky za „naskrze falošné, pretože odporujú prirodzenosti...“ a i keď bol na správnej ceste, vzdáva sa tohto problému.

O 100 rokov pozdejšie r. 1832 už v pokročilom veku veľký nemecký matematik K. F. G a u s s (1777—1855) vtedajší „kráľ matematiky“, píše Farkašovi Bolyaiovi, otcovi spomínaného Jánosa Bolyaia, ktorý mu poslal prácu svojho syna na posúdenie: „...obsah spisu, cesta ktorou sa Tvoj syn dal i výsledky, ku ktorým došiel sa temer všade zhodujú s mojimi úvahami, z ktorých niektoré som previedol už pred 30—35 rokmi... nemal som v úmysle publikovať za svojho života vôbec nič z týchto svojich výsledkov, z ktorých som ostatne len veľmi málo dal na papier. Mnohí totiž nemajú pochopenia o čo tu beží...“

Teda tak veľký matematik ako bol Gauss, ktorý mal veľkú autoritu za svojho života sa bál nielen publikovať o neeuklidovskej geometrii, ale dokonca svoje úvahy zachytiť na papier. Taký bol vplyv Kantovskej filozofie, s ktorou Gauss osobne nesúhlasil.

Celkom ináč to bolo u Jánoša Bolyaia a N. I. Lobačevského (1792—1856), ktorým sa priznáva objav neeuklidovskej geometrie (každý prišiel k objavu samostatne, v tom istom čase, nezávisle na sebe navzájom ani na Gaussovi). Nestarali sa o spoločenské konvekcie, ani sa nedali nimi odradiť, zvlášť Lobačevskij, ale postupovali vedecky, výsledky svojej práce zverejňovali a neohrozene ich hájili.

J. Bolyai najprv odvodzoval vety plynúce z vyššie uvedených prvých štyroch Euklidových postulátov (teda nezávislých na 5. postuláte) a prišiel ku geometrii, ktorú nazval - a aj dnes ju tak nazývame - *absolútnou geometriou*. Potom ukázal, že kružnice idúce pevným bodom A majúce stredy na priamke AC s neobmedzene rastúcim polomerom majú za svoju limitu nejakú limitnú kružnicu, L -krivku (dnes ju nazývame *horocyklus*, alebo *paracyklus*), o ktorej nemôžeme len tak prehlásiť, že je to priamka (obr. 2). V prehlásení L -krivky za priamku je skrytý 5. Euklidov postulát. Analogicky, limitou guľ s neobmedzene rastúcim polomerom nazval F -plochou (dnes nazývame *horosfera*, alebo *parasfera*), ktorú zasa nemôžeme len tak prehlásiť za rovinu, pretože v tomto prehlásení sa opäť skrýva 5. Euklidov postulát.

Potom použil správneho dialektického kroku. Vzal logickú negáciu 5. Euklidovho postulátu: „V rovine možno bodom mimodanú priamku k nej viesť aspoň dve rôzne s ňou sa nepretínajúce priamky.“

Z prvých štyroch Euklidových postulátov a z tohto pozmeneného (negovaného) 5. postulátu odvodzoval vety, ktoré tvorili nový systém viet, ktoré predstavovali novú geometriu a ktoré neviedli ku sporu vzhľadom ku spornému predpokladu. Tvorili bezosporný celok. Boli a sú v nej vety, ktoré vzhľadom ku Euklidovej geometrii znejú trochu nezvykle ako napr.:

V rovine prechádza bodom mimodanú priamku nekonečne mnoho priamok, ktoré danú priamku nepretínajú.

Existuje kolmica na rameno ostrého uhla, ktorá nepretne druhé jeho rameno.

Súčet uhlov v trojuholníku je menší ako dva pravé. Atd.

Už J. Bolyai ukazoval a dokazoval, že táto jeho nová geometria nie je v rozpore s Euklidovou geometriou, že ju nevyvracia, ale podstatne rozširuje, zobecňuje, že Euklidova geometria je špeciálnym prípadom jeho geometrie. Ukázal totiž, že ak na jeho F -ploche pokladáme za

priamky jeho *L*-krivky, tak pre túto plochu platí Euklidova geometria. Tým potvrdil i bezospornosť svojej geometrie.

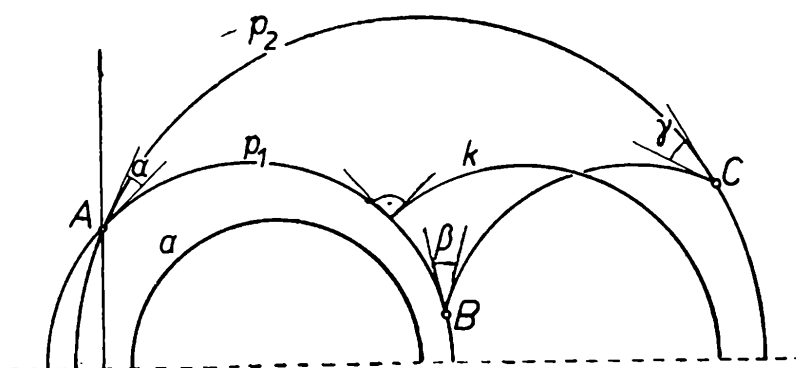
Svoju prácu zverejnil v knižke svojho otca Farkasa Bolyaia *Tentamen...* (1832) ako dodatok pod názvom *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* a poslal skrz svojho otca na posúdenie Gaussovi. Už vyššie citovaná odpoveď Gausa jeho otcovi silne rozladila J. Bolyaia. V jeho pozostalostiach sa nám zachovali niektoré úvahy nad touto odpoveďou: „...ved' vo vede práve tak, ako v skutočnom živote samom sa vždy jedná o to, aby nutné a všeobecne prospešné, i keď ešte nie dosť jasné veci, boli náležite vysvetľované a aby chýbajúci, alebo skôr driemajúci zmysel pre pravdu a právo bol burcovaný, náležite utvrdzovaný a podporovaný...“ Aj tieto jeho myšlienky svedčia o jeho pokrokovom zmýšľaní.

Podobnou cestou šiel aj veľký ruský matematik, vtedajší rektor Kazaňskej univerzity N. I. Lobačevskij. Urobil analogické úvahy metódami analytickej geometrie a došiel k tým istým výsledkom. Ba urobil viac a o niečo skôr publikoval a preto sa mu priznáva priorita objavu neeuklidovskej geometrie. Lobačevskij svoj objav hneď zverejňoval. Jednak ho publikoval v univerzitnom časopise *Kazaňskij vestnik* v r. 1829—1830 a jednak ho predložil ešte v r. 1826 Fyzikálno-matematickej fakulte Kazaňskej univerzity. Ako ohlas na jeho objav boli ostré a mnohokrát i nehorázne kritiky a výsmech nielen od ľudí nezasvätených, rôznych redaktorov, či vydavateľov, ktorí mu nechceli jeho práce publikovať, ale i od ľudí najkompetentnejších ako bol napr. akademik Ostrorodskij (1801—1861) i dnes uznávaný ako slávny matematik, ale žiaľ v tejto veci chybil. Keď Lobačevskij nenachádzal pochopenie doma, začal svoje práce publikovať v zahraničí. A nielen to. Urobil ešte viac, čo musíme u Lobačevského hodnotiť zvlášť kladne. Nielen, že dokazoval bezospornosť svojej geometrie, ale svoje výsledky pokúšal sa overovať v praxi. Skúmal súčet uhlov vo veľkých trojuholníkoch. Bral za vrcholy trojuholníka stálice Rigel-Sirius-29. Eridani. Ačkoľvek zistil, že rozdiel od π je síce v medziach pozorovacích chýb, ale ako sa neskôr ukázalo, bola to veľmi šťastná myšlienka.

Objavom neeuklidovskej geometrie bola v základoch otrávená špekulatívna Kantovská filozofia, ktorá bola v tom čase na vrchole svojej slávy. Neskôr, žiaľ až po smrti objaviteľov neeuklidovskej geometrie, keď taliansky matematik E. Beltrami (1835—1900), jeden z prvých, ktorý upozornil verejnosť na práce Bolyaia a Lobačevského, skonštruoval modely neeuklidovskej geometrie, nastúpila táto geometria svoju víťaznú cestu. Beltramiho modely znamenali súčasne definitívny úpadok tejto časti Kantovskej filozofie. Okrem Beltramiho konštruovali modely neeuklidovskej geometrie tiež F. Klein a H. Poincaré.

Ak by sme si chceli predstaviť niektoré z vyššie spomínaných viet

Bolyai-Lobačevského geometrie museli by sme si skonštruovať napr. takýto model (model Poincaréov): Pod pojmom „rovina“ budeme rozumieť otvorenú Euklidovu polrovinu, tj. polrovinu, do ktorej nepočítame deliacu priamku. Pod pojmom „priamka“ budeme rozumieť ľubovoľnú polkružnicu tejto polroviny so stredom na deliacej priamke (včetně kružníc so stredom v úbežnom bode tj. polpriamok kolmých na deliacu priamku). Pod pojmom „bod“ budeme rozumieť ľubovoľný bod uvedenej otvorenej polroviny. Pod pojmyami „uhol“ a „incidencia“ budeme rozumieť to isté čo v Euklidovej geometrii. Potom model tejto geometrie je na obr. 3.



Obr. 3

Napr.: Bodom A mimo priamku a prechádzajú dve (i viac nekonečne mnoho) priamky p_1, p_2 , ktoré danú priamku a nepretínajú. Alebo: na rameno p_1 ostrého uhla $\alpha = \angle p_1 p_2$ existuje kolmica k , ktorá nepretína druhé rameno p_2 . Alebo: Súčet uhlov v trojuholníku je menší ako dva pravé (ako je vidieť na trojuholníku ABC).

(Pokračování)

Josef Straka, ČVUT, Praha:

Neurčité rovnice

(Pokračování)

II

V této části se budeme zabývat otázkou celočíselných řešení jedné lineární rovnice o dvou neznámých tvaru

$$ax + by = c, \quad (7)$$

kde a, b, c jsou racionální čísla. Takovou rovnici budeme nazývat

diofantickou²⁾ neboli neurčitou. Pro koeficienty rovnice jsou možné dva případy:

a) všechny koeficienty a, b, c jsou celá čísla,

b) všechny koeficienty nejsou celá čísla.

Ke každé rovnici (7) typu b) je vždy možno sestavit rovnici typu a) s ní ekvivalentní tím, že ji znásobíme nejmenším společným jmenovatelem koeficientů a, b, c . Stačí se tedy zabývat rovnicí typu a).

Je-li $a = b = c = 0$, potom rovnici (7) vyhoví jakákoliv dvojice reálných čísel x, y , tím spíše celých. Je-li $a = b = 0, c \neq 0$, je rovnice (7) neřešitelná. Je-li $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$, (resp. $b = 0, a \neq 0, c \neq 0$), má zřejmě daná rovnice řešení jen tehdy, je-li b dělitelem čísla c (resp. a dělitelem c). To vyplývá z definice dělitele. Zbývá případ, kdy každý z koeficientů a, b, c je různý od nuly.

Věta 9. *Rovnice $ax + by = c$ má celočíselné řešení tehdy a jen tehdy, je-li největší společný dělitel čísel a, b dělitelem čísla c .*

Důkaz. a) Je-li D největší společný dělitel čísel a, b , jsou čísla ax, by násobky čísla D a podle věty 2. i číslo $c = ax + by$ je násobkem čísla D , čili D je dělitelem čísla c .

b) Předpokládejme, že největší společný dělitel D čísel a, b je dělitelem c . Podle věty 8. jsou čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ nesoudělná, a proto podle věty 5. existují celá čísla $\bar{a}, \bar{b}$ tak, že

$$\frac{a}{D} \bar{a} + \frac{b}{D} \bar{b} = 1 \quad (8)$$

Znásobíme-li rovnost (8) číslem c , dostaneme

$$a \cdot \frac{c}{D} \bar{a} + b \cdot \frac{c}{D} \bar{b} = c,$$

taže čísla $x = \frac{c}{D} \bar{a}, y = \frac{c}{D} \bar{b}$ jsou řešením rovnice (7).

Je-li rovnice (7) řešitelná, potom nemá jediné řešení, ale nekonečně mnoho řešení. Určíme-li jedno z nich (třeba zkusmo), dostaneme snadno všechna ostatní.

Předpokládejme, že rovnice (7) má řešení, při čemž největší společný dělitel D čísel a, b je též dělitelem čísla c a budiž jedno její řešení $x = x_0, y = y_0$. Dělíme-li rovnici (7) číslem D , dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{a}{D} x + \frac{b}{D} y &= \frac{c}{D}, \\ \frac{a}{D} x_0 + \frac{b}{D} y_0 &= \frac{c}{D} \end{aligned} \quad (9)$$

²⁾ Diofantos, řecký matematik, žil v Alexandrii kolem r. 300 n. l.

Po odečtení druhé rovnice od první vyjde

$$\frac{a}{D}(x - x_0) + \frac{b}{D}(y - y_0) = 0 ,$$

čili

$$\frac{a}{D}(x - x_0) = -\frac{b}{D}(y - y_0) \quad (10)$$

Protože číslo $\frac{a}{D}$ je dělitelem čísla $\frac{b}{D}(y_0 - y)$, kde čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ jsou nesoudělná, je podle věty 6. číslo $\frac{a}{D}$ dělitelem čísla $y_0 - y$. Musí tedy existovat takové celé číslo t , že

$$y_0 - y = \frac{a}{D} t ,$$

čili

$$y = y_0 - \frac{a}{D} t$$

Dosadíme-li za $y_0 - y$ do (10) a krátíme číslem $\frac{a}{D}$, vyjde

$$x - x_0 = \frac{b}{D} t .$$

Každé celočíselné řešení rovnice (7) lze tedy psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{D} t , \\ y &= y_0 - \frac{a}{D} t , \end{aligned} \quad (11)$$

kde t je nějaké celé číslo. Zvolíme-li za t v těchto dvou rovnicích libovolné celé číslo, jsou příslušná x, y celočíselným řešením rovnice (7), jak se přesvědčíme dosazením. Rovnice (11) dávají tedy všechna celočíselná řešení rovnice (7).

V numerickém příkladě postupujeme stejně jako v obecném případě. Řešme např. rovnici $6x - 9y = 12$, která je řešitelná, neboť $D(6, -9) = 3$ a číslo 3 je dělitelem čísla 12. Danou rovnici děleme třemi a dostaneme

$$2x - 3y = 4 . \quad (A)$$

Jedno celočíselné řešení rovnice (A) je $x = 2$, $y = 0$ (určeno zkusmo), neboť

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 4. \quad (\text{B})$$

Po odečtení rovnosti (B) od rovnice (A) vyjde

$$2(x - 2) - 3y = 0,$$

čili

$$2(x - 2) = 3y \quad (\text{C})$$

Vztah (C) říká, že číslo $3y$ je $(x - 2)$ -hým násobkem čísla 2, neboli číslo 2 je dělitelem čísla $3y$. Protože čísla 2, 3 jsou nesoudělná, je podle věty 6. číslo 2 dělitelem čísla y . Musí tedy podle definice násobku existovat takové celé číslo t (na jeho označení vůbec nezáleží; mohlo by se jmenovat jakkoliv jinak), že platí

$$y = 2t$$

Dosadíme-li za y do vztahu (C) a krátíme-li dvěma, vyjde

$$x - 2 = 3t,$$

čili

$$x = 2 + 3t.$$

Každé celočíselné řešení rovnice (A) a tím i dané rovnice $6x - 9y = 12$, lze psát ve tvaru

$$x = 2 + 3t,$$

$$y = 2t,$$

kde t je nějaké celé číslo. Dosadíme-li za t v těchto dvou rovnicích např. po řadě čísla a) -3 , b) -1 , c) 5 , dostaneme postupně tato řešení dané rovnice

$$\text{a) } x = -7 \quad y = -6,$$

$$\text{b) } x = -1, \quad y = -2,$$

$$\text{c) } x = 17, \quad y = 10,$$

jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Někdy je ovšem zdlouhavé určit jedno řešení rovnice (7) ať zkusmo, nebo Euklidovým algoritmem. V takovém případě udává postup následující příklad.

Příklad 3. Rovnici, která je řešitelná (proč?), např. $13x - 55y = -12$, upravíme na tvar

$$13x = 55y - 12, \quad (12)$$

tj. osamotníme člen s tou neznámou, jejíž koeficient má menší absolutní hodnotu. Rovnice (12) vyjadřuje, že $55y - 12$ je násobkem čísla 13.

Přičteme tedy ke každému členu na pravé straně rovnice (12) libovolný násobek třinácti. Vzniklý výraz zůstane podle věty 2. násobkem třinácti. Násobky zvolíme tak, aby se absolutní hodnota čísel co nejvíce zmenšila. V našem případě tedy přičteme k prvnímu členu $55y$ číslo $(-4) \cdot 13y$, k druhému členu -12 číslo $1 \cdot 13$. Pravá strana vztahu (12) tím nabude tvaru $3y + 1$, což je určitý násobek třinácti. Existuje takové celé číslo t , že platí

$$3y + 1 = 13t ,$$

čili

$$3y = 13t - 1 \quad (13)$$

U rovnice (13) použijeme téhož postupu. K pravé straně rovnice (13) přičteme $(-3) \cdot 4t + 3 \cdot 1$ a dostaneme $t + 2$, což je jistý násobek tří, čili

$$3v = t + 2 ,$$

neboli

$$t = 3v - 2$$

Za t dosadíme do (13) a po úpravě vyjde $y = 13v - 9$. Za y dosadíme do (12) a po úpravě dostaneme $x = 55v - 39$. Všechna celočíselná řešení dané rovnice (12) lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 55v - 39 , \\ y &= 13v - 9 , \end{aligned} \quad (14)$$

kde v je celé číslo. Rovnice (14) dávají pro každé celé číslo v celočíselné řešení dané rovnice. Tak např. pro $v = -2$ dostaneme z rovnic (14) toto řešení rovnice (12): $x = -149$, $y = -35$, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Příklad 4. Pro školní kuchyni byly objednány housky, máslo a mýdlo. Cena jedné housky je 0,5 Kčs, cena jedné kostky másla je 10 Kčs, cena mýdla je 3 Kčs za jeden kus. Všeho zboží bylo dohromady 100 kusů a rovněž celková cena byla 100 Kčs. Kolik kterého zboží bylo? Předpokládáme celistvý počet kostek másla.

Označíme-li počet kostek másla x , počet mýdel y a počet housek z , sestavíme snadno dvě rovnice

$$x + y + z = 100 , \quad (15)$$

$$10x + 3y + 0,5z = 100 . \quad (16)$$

Vynásobíme-li rovnici (16) dvěma a odečteme-li rovnici (15) od upravené rovnice (16), dostaneme

$$19x + 5y = 100 . \quad (17)$$

Protože počet každého druhu zboží je vyjádřen celým kladným

číslem, hledáme celočíselná řešení rovnice (17), která je řešitelná (proč?). Užijeme-li postupu z příkladu 3, dostaneme

$$5y = -19x + 100. \quad (18)$$

K pravé straně poslední rovnice přičteme číslo $20x - 100$, což je násobek pěti a vyjde x , které je jistým násobkem pěti podle rovnice (17). Proto existuje takové celé číslo u , že platí

$$x = 5u$$

a po dosazení do (18) (19)

$$y = -19u + 20.$$

Protože počet kostek másla musí být vyjádřen číslem celým kladným, je $x > 0$, neboli

$$u > 0. \quad (20)$$

Kostek másla však musí být méně než 10. Kdyby totiž kostek másla bylo aspoň 10, pak by máslo stálo aspoň $10 \cdot 10 = 100$ Kčs, což odporuje podmínce úlohy, která žádá 3 druhý zboží. Musí tedy být $x < 10$, čili $5u < 10$, neboli

$$u < 2. \quad (21)$$

Vztahy (18) vyjadřují sice všechna celočíselná řešení rovnice (17). My však z nich žádáme ta řešení, která splňují podmínky (20) a (21). Je zřejmé, že uvedené podmínky splňuje jediné celé číslo u , totiž $u = 1$. Dosadíme-li do (19) $u = 1$, vyjde

$$x = 5 \cdot 1 = 5,$$

$$y = -19 \cdot 1 + 20 = 1$$

Dosadíme-li dále do (15), dostaneme

$$z = 100 - x - y = 94.$$

Bylo tedy 94 housek, 5 kostek másla a 1 mýdlo. Zkoušku si udělá jistě čtenář sám.

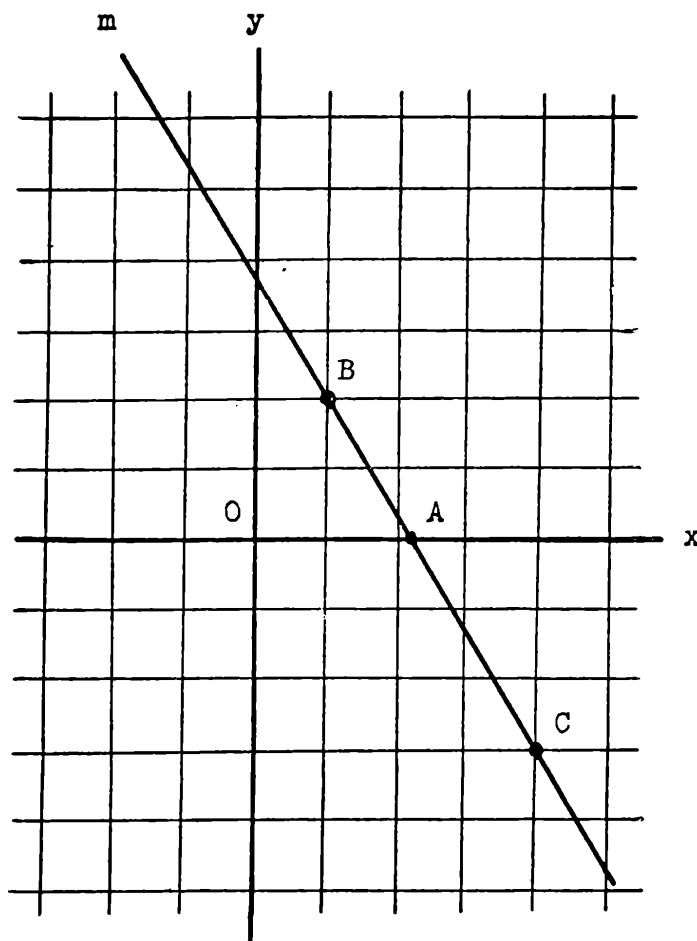
Řešení neurčité lineární rovnice má jednoduchý geometrický význam. V učivu o lineární funkci se vykládá grafické znázornění lineární funkce o dvou proměnných x, y a dokazuje se, že grafem je přímka. Vychází se ze soustavy pravoúhlých souřadnic. Poloha bodu v rovině je stanovena uspořádanou dvojicí reálných čísel x, y , která se nazývají souřadnice bodu. Jsou-li obě souřadnice celá čísla, dostaneme tzv. *mřížový bod*. Jedním z nich je počátek soustavy souřadnic. Naléztí všechna celočíselná řešení rovnice $ax + by = c$ značí geometricky nalézt na dané přímce všechny mřížové body.

Příklad 5. Na přímce $m \equiv 5x + 3y = 11$ určíme mřížový bod nejbližší ose x . Celočíselná řešení dané rovnice jsou

$$x = 3k + 1, \quad (22)$$

$$y = -5k + 2^3)$$

Průsečík A osy x o rovnici $y = 0$ s danou přímkou odpovídá hodnotě $k_0 = \frac{2}{5}$. Mřížový bod dané přímky nejbližší ose x určíme, nalezneme-li celé číslo k nejbližší hodnotě $k_0 = \frac{2}{5}$. Tímto číslem je $k = 0$ a nejbližší mřížový bod B dané přímky vzhledem k ose x je tedy $(1; 2)$. (Obr. 1).



Obr. 1

Podobně bychom zjistili, že mřížový bod C dané přímky nejbližší ose x , který leží v polorovině opačné k polorovině xB , je bod $(4, -3)$.

Na obrázku, na kterém je naznačena část sítě mřížových bodů, což jsou průsečíky rovnoběžek s osami souřadnic vedenými ve vzdálenostech $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, čtenář si ihned ověří správnost výpočtu.

(Pokračování)

³⁾ Čtenář, který zná základy analytické geometrie v rovině, z článků doc. E. Kraemera v loňském ročníku Rozhledů, hned vidí, že rovnice (22) jsou tzv. parametrické rovnice přímky. Souřadnice všech bodů přímky jsou vyjádřeny pomocí nové proměnné k , tzv. parametru.

Booleova algebra¹⁾

1. Úvod

Vedle všeobecně známé algebry, které se učíme ve školách, existují v nepřeberném množství i jiné algebry (algebrou se nazývá obecně systém splňující jisté axiomy), které jsou zpravidla málo známé, i když některé z nich mají velký význam. Jednou z těchto důležitých algeber je tzv. algebra Booleova, která byla vybudována již asi před sto lety irským matematikem a logikem Georgem Boolem (1815—1864).

Booleova algebra je dnes mocným nástrojem pro návrh logických obvodů číslicových matematických strojů²⁾, obvodů automatických telefonních ústředen a mnoha jiných zařízení. Proto chceme v našem příspěvku čtenáře stručně seznámit se základními vlastnostmi této algebry. Ze snahy po největší srozumitelnosti upustíme úmyslně od přesného deduktivního výkladu a opřeme se spíše o představivost. Vysvětlíme totiž Booleovu algebru na tzv. výrokovém počtu, který splňuje axiomy této algebry.

2. Základní pojmy

Základním pojmem, o který se musíme opřít, je **v ý r o k**. Výrokem rozumíme každý projev (tvrzení), o kterém má smysl se vyslovit, zda je pravdivý nebo ne. Výroky jsou například tato tvrzení: $2 + 3 = 7$; rekord v běhu na 100 m je 10,1 sec.; na Marsu je život apod. Naproti tomu např. věty: „Kdy přijdeš?“, „Půjč mi tu knihu!“ a podobné nejsou výroky, neboť prohlášení o jejich pravdivosti či nepravdivosti nedává žádný smysl.

Existují též výroky o jiných výrocích a ty lze rozdělit do dvou kategorií:

1. **V ý r o k y u r č i t é**, které mají obecný tvar „Je pravda, že X “, nebo „Není pravda, že X “, kde X je jistý výrok.

2. **V ý r o k y n e u r č i t é**, které mají různé tvary, např. „Zdá se mi, že X “. „Je všeobecně uznáváno, že X “ „Věřím, že X “ atd., kde X je jistý výrok.³⁾

¹⁾ Čti Búlova algebra.

²⁾ Viz článek [1].

³⁾ V hovorové řeči zpravidla vynecháváme vazby „Je pravda, že“, resp. „Není pravda, že“, přičemž mimoděk pokládáme za samozřejmé že výrok je míněn pravdivě.

Výroky první kategorie mají určitou hodnotu (pravdivost nebo nepravdivost) a říkáme proto, že jsou nositeli elementární informace. Takové výroky - na rozdíl od výroků druhé kategorie, jejichž hodnota je neurčitá - dovedeme aritmeticky vyjádřit např. tím, že nepravdivému výroku přiřadíme symbolicky hodnotu 0 a pravdivému výroku hodnotu 1. Pak říkáme, že pravdivostní hodnota jistého výroku X^4) je 0 pro výrok nepravdivý a 1 pro výrok pravdivý, tedy:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{výrok } X \text{ je pravdivý,} \\ 0 & \text{výrok } X \text{ je nepravdivý.} \end{cases}$$

Označme symbolem A např. výrok „Číslo p je sudé“. Pak platí:

$A = 1$ pro všechna čísla p , která jsou sudá,

$A = 0$ pro všechna čísla p , která nejsou sudá.

Opačně formulovaný výrok, tj. výrok „Číslo p není sudé“, označujeme zpravidla $\bar{A}$ a čteme „non A “. Takový výrok nazýváme negací výroku původního a v našem případě pro něj platí:

$\bar{A} = 1$ pro všechna čísla p , která nejsou sudá,

$\bar{A} = 0$ pro všechna čísla p , která jsou sudá.

Z uvedeného je pozornému čtenáři jistě jasné, že ke každému výroku X existuje jeho negace $\bar{X}$, přičemž pravdivostní hodnota negace je vždy opačná než hodnota výroku původního.

3. Složené výroky

Ze dvou nebo více jednoduchých výroků můžeme vhodným spojováním získat výroky nové, jejichž pravdivost či nepravdivost závisí na způsobu spojení a na pravdivostních hodnotách výroků jednoduchých. K spojování výroků slouží některé výrazy z hovorové řeči jako např. spojka *nebo* a spojka *a*.

Spojení dvou výroků A , B pomocí spojky *nebo* nazýváme disjunkcí či logickým součtem obou výroků a značíme $A + B$, což znamená výrok, který je pravdivý, je-li pravdivý alespoň jeden z výroků jednoduchých.

Spojení dvou výroků A , B pomocí spojky *a* nazýváme konjunkcí, či logickým součinem obou výroků a značíme $A \cdot B$ nebo prostě AB , což znamená výrok, který je pravdivý, jsou-li pravdivé oba výroky jednoduché.⁵⁾

⁴⁾ Výroky můžeme označovat libovolnými symboly. V našem případě budeme užívat písmen velké abecedy.

⁵⁾ Aby nedošlo k omylu, bývá logický součet v literatuře často označován znakem $\cup$ a logický součin znakem $\cap$, popřípadě i znaky jinými.

Ukažme nyní smysl logického součtu a součinu na příkladě:

A „Číslo p je sudé“,

B „Číslo p je dělitelno 7“.

$A + B$ „Číslo p je sudé, *nebo* je dělitelno 7“,

AB „Číslo p je sudé a je dělitelno 7“.

Je zřejmé, že pravdivostní hodnotu složeného výroku můžeme chápat jako funkci pravdivostních hodnot jednoduchých výroků za předpokladu, že tyto jednoduché výroky uvažujeme jako nezávisle proměnné, které mohou nabývat všech svých hodnot. Takto chápané nezávisle proměnné a jim odpovídající funkce se nazývají **funkce Booleovy**.

Průběhy matematických funkcí se často vyjadřují tabulkami, v nichž jsou vypsány různé hodnoty nezávisle proměnných a jim odpovídající hodnoty funkce. Také Booleovy funkce můžeme vyjádřit tabulkami. Snadno lze např. ukázat, že pro logický součet a součin platí tabulky:

A	B	$A + B$	A	B	AB
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Zajímavá je zvláště poslední řádka tabulky logického součtu, která ukazuje, že v Booleově algebře platí:

$$1 + 1 = 1$$

což je jedním z rysů, které odlišují tuto algebru od algebry známé.

Zvláštní situace nastane, položíme-li v uvedených tabulkách $B = \bar{A}$ ⁶⁾:

A	$\bar{A}$	$A + \bar{A}$	A	$\bar{A}$	$A\bar{A}$
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0

Vidíme, že platí

$$A + \bar{A} = 1^7)$$

$$A\bar{A} = 0.$$

(Pokračování)

⁶⁾ První a čtvrtá řádka tabulek logického součtu a součinu nedává v tomto případě smysl, neboť nikdy nemůže být splněna rovnost $A = \bar{A}$.

⁷⁾ Hodnota 1 znamená zde výrok *vždy pravdivý* a hodnota 0 výrok *vždy nepravdivý*.

Deskriptivní geometrie

K a r e l D r á b e k, ČVUT, Praha:

Sestrojení sdružených průměrů elipsy s daným úhlem φ

V tomto článku najdeme dvojici sdružených průměrů m, n dané elipsy k , které budou svírat předem daný úhel φ a podmínky, kterým musí vyhovovat tento úhel φ , aby úloha měla řešení. K tomu užijeme pravoúhlé afinity elipsy a kružnice a pak uvidíme, že řešení vede k sestavení čtyřúhelníka s vlastnostmi dále uvedenými. Toto sestavení provedeme početně a ukážeme na příkladě se zvláštní hodnotou úhlu φ , jak pomocí početního výsledku se tento čtyřúhelník stanoví graficky.¹⁾

Předpokládejme, že úhel φ , sevřený dvojicí m, n sdružených průměrů elipsy k dané osami $^1A^2A$, $^1B^2B$ se středem S , je úhel tupý. K elipse k přiřadíme kružnici k' tak, že se dotýká v bodě 1B elipsy k (tedy $^1B \equiv ^1B'$, $^1b \equiv ^1b'$, je-li 1b tečna ve vrcholu 1B k dané elipse k) a má poloměr r' rovný velikosti její hlavní poloosy a . Kružnice k' a elipsa k jsou pak v pravoúhlé afinitě o ose ve společné tečně $^1b \equiv ^1b'$ (obr. 1) a středy S' kružnice k' a S elipsy k tvoří dvojici odpovídajících si bodů. Potom každé dvojici sdružených průměrů m', n' kružnice k' (tedy k sobě kolmých přímek) odpovídají v elipse k sdružené průměry m, n , které svírají úhel větší než úhel pravý, jestliže např. průměr m' kružnice k' není ani rovnoběžný s osou zvolené afinity, ani k ní kolmý. Pak totiž také průměr n' kružnice k' sdružený průměru m' nemá zvláštní polohu vzhledem k ose afinity. Označme I , příp. II , průsečík odpovídajících si přímek m, m' , příp. n, n' . Abychom mohli určit průměry m, n elipsy k tak, aby svíraly daný úhel φ , musí být možné sestavení čtyřúhelníka $SIS' II$. V tomto čtyřúhelníku jsou úhlopříčky SS' , $I II$ k sobě kolmé a úhlopříčka SS' je dělena bodem $^1B \equiv ^1B'$ tak, že úsečka S^1B je rovna velikosti b vedlejší poloosy, kdežto úsečka $^1BS'$ je rovna velikosti a hlavní poloosy. Jedná se tedy o stanovení velikosti druhé úhlopříčky $I II$ tohoto čtyřúhelníka a o její rozdělení bodem $^1B \equiv ^1B'$ na příslušné úseky I^1B , $^1B II$. K tomu provedme tuto úvahu:

¹⁾ Prostředky vyšší (tzv. projektivní) geometrie sice umožňují snadné určení dvojice sdružených průměrů elipsy, které svírají předem daný úhel φ , v článku vystačíme však se znalostmi přiměřenými čtenářům Rozhledů.

Dejme tomu, že by úsečka $I II$ byla známa. Označme c její délku a úseky určené průsečíkem 1B obou úhlopříček u, v . Potom zřejmě platí:

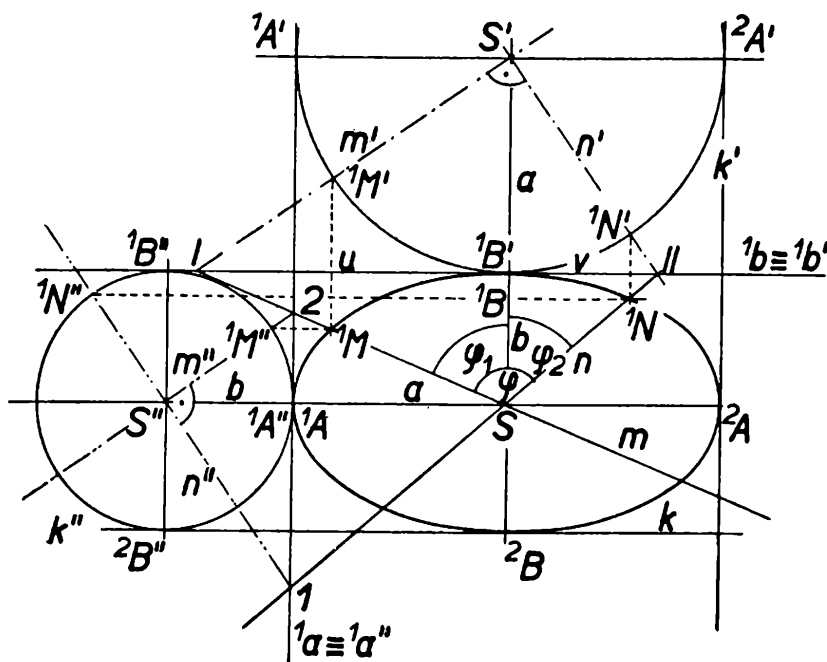
$$u + v = c, \quad (1)$$

$$uv = a^2, \quad (2)$$

$$\frac{u}{h} = \operatorname{tg} \varphi_1, \frac{v}{h} = \operatorname{tg} \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \quad (3)$$

Z toho plyne:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\frac{1}{b} (u + v)}{1 - \frac{uv}{b^2}} = \frac{bc}{b^2 - a^2} \quad (4)$$



Obr. 1

Z rovnice (4) lze při známé hodnotě c určit velikost úhlu φ , ale také obráceně, při známém úhlu $\varphi > 90^\circ$ stanovit velikost c druhé úhlopříčky sestrojovaného čtyřúhelníka:

$$c = \frac{1}{b} (b^2 - a^2) \operatorname{tg} \varphi = -\frac{e^2}{b} \operatorname{tg} \varphi \quad (5)$$

²⁾ Na uvedený jednoduchý způsob početního řešení čtyřúhelníka *SIS' II* našeho čtyřúhelníka mne upozornil s. Bruno Budinský, odborný asistent ČVUT, Praha.

Z naší podmínky dané volbou sdružených průměrů plyne, že $v > 0$, tedy protože řešením rovnic (1), (2) dostáváme

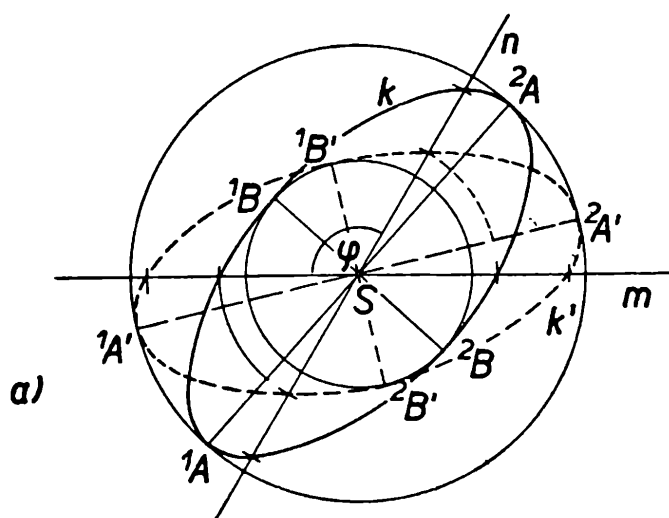
$$v_{1,2} = \frac{1}{2} (c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2}) = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2}, \quad (6)$$

musí být $c \geq 2a$ a proto

$$\operatorname{tg} \varphi \leq -\frac{2ab}{e^2}. \quad (7a)$$

Vzhledem k vlastnostem rovnic (1), (2) plyne pro úsek u z rovnice (6), že

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1$$



Obr. 2a

Je-li úhel φ sevřený sdruženými průměry m, n ostrý, pak použijeme afinity mezi kružnicí k'' , dotýkající se elipsy k ve vrcholu $1A$ hlavní osy a mající poloměr r'' rovný velikosti její vedlejší poloosy b . Omezuji-li body 1, 2 druhou úhlopříčku čtyřúhelníka $S1S''2$ a označíme-li d velikost této úhlopříčky, pak pro ni platí za stejných předpokladů o průměrech m, n jako dříve, že

$$d = \frac{e^2}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

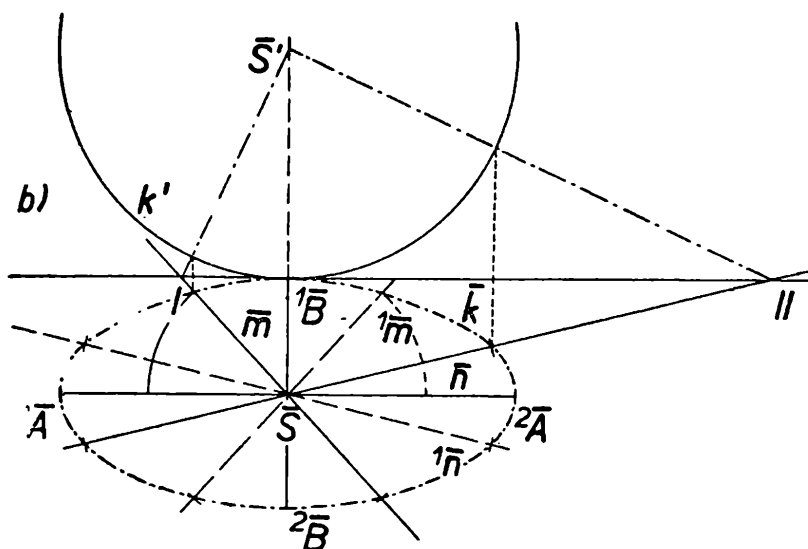
a pro úhel φ omezení, plynoucí z toho, že musí být $d \geq 2b$:

$$\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{2ab}{e^2}. \quad (7b)$$

Existují dvě dvojice sdružených průměrů m, n elipsy k , které svírají daný úhel φ při vyloučení rovnosti v podmínkách (7a), (7b). Platí-li v těchto podmínkách znaménko rovnosti, pak příslušná dvojice sdru-

žených průměrů je jediná a svírá extrémní možný úhel. V prvním případě jsou existující dvojice sdružených průměrů souměrně sdružené podle hlavní i vedlejší osy elipsy k . V druhém případě oba průměry svírají stejný úhel s hlavní osou elipsy k a rovněž s vedlejší osou svírají stejný úhel.

Kdybychom do úvah zavedli též osy elipsy jako dva zvláštní sdružené průměry, pak uvidíme, že úhel φ sdružených průměrů je vždy větší nebo rovný ostrému úhlu ξ , pro který platí $\operatorname{tg} \xi = \frac{2ab}{e^2}$ a že je menší nebo rovný úhlu $180^\circ - \xi$.



Obr. 2b

Sestrojené sdružené průměry m, n elipsy k lze omezit pomocí použité afinní kružnice k' nebo k'' . Jestliže sdružené průměry m, n svírají extrémní úhel ξ , pak jsou oba poloprůměry stejně dlouhé a tečny v koncových bodech těchto průměrů určují kosočtverec s vrcholy na osách elipsy k .

Při konstrukci je třeba nejdříve sestavit úsečku rovnou velikosti tangenty úhlu φ sevřeného sdruženými průměry a tu můžeme určit, jak známo, pomocí tzv. jednotkové kružnice. Tuto úsečku lze vždy najít, je-li úhel φ dán jako úhel dvou různoběžek; je-li jeho velikost dána v míře stupňové či obloukové, lze ji přesně sestavit jen pro úhly φ , které získáme jako středové úhly při dělení obvodu kružnice pomocí pravítka a kružítka. Jinak je její stanovení pouze přibližné.

Ukažme si to na příkladě:

Máme sestavit elipsu k , která je dána sdruženými průměry m, n svírajícími úhel 120° , známe-li ještě velikost a hlavní a b vedlejší poloosy (obr. 2):

V pomocné elipse $\bar{k}$ o hlavní poloose a a vedlejší poloose b sestrojme sdružené průměry $\bar{m}, \bar{n}$ (příp. ${}^1\bar{m}, {}^1\bar{n}$), které svírají daný úhel $\varphi = 120^\circ$. Z podmínky (5) plyne, že $c = \frac{e^2}{b} \sqrt{3}$. Je tedy třeba nejdříve určit tuto

úsečku. Užitím Euklidovy věty získáme úsečku $\bar{c}$, pro kterou $\bar{c}b = e^2$ a dvojím užitím Pythagorovy věty obdržíme z ní úsečku $\bar{c} \sqrt{3}$, tj. právě hledanou úsečku c . Potom od plochy čtverce o straně $\frac{c}{2}$ odečteme plochu

čtverce o straně a tak, aby tento

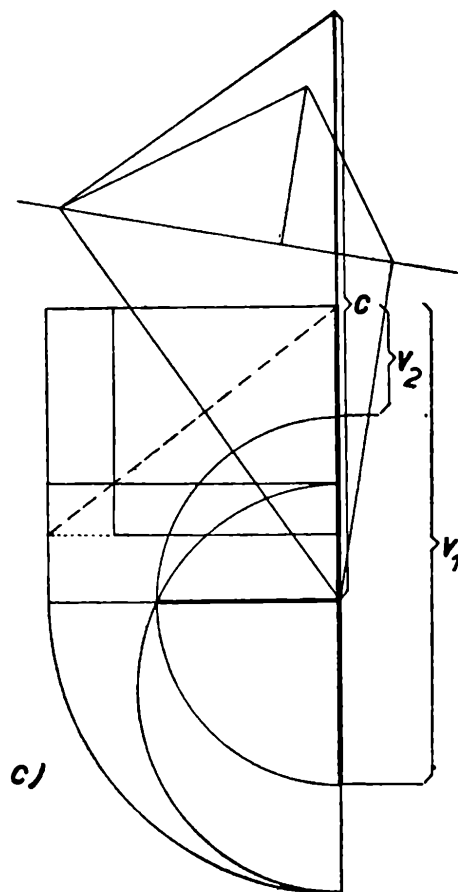
čtverec měl se čtvercem o straně $\frac{c}{2}$

společný vrchol a dvě společné strany. Po grafickém sestrojení odmocniny z uvedeného rozdílu čtverců (kterou lze snadno též určit dalším použitím Pythagorovy věty) přičteme tuto délku k úsečce $\frac{c}{2}$, příp.

ji odečteme od úsečky $\frac{c}{2}$ a získáme úsečky v_1 , příp. v_2 , které jsou grafickým řešením rovnic (1) a (2). Pomocí těchto úseček dostaneme na vrcholové tečně 1b body I, II příp. ${}^1I, {}^1II$ (v obr. 2 nejsou tyto body vyznačeny), kterými procházejí sdružené průměry $\bar{m}, \bar{n}$, příp. ${}^1\bar{m}, {}^1\bar{n}$, žádané vlastnosti.

Jsou-li pak dány dvě přímky m, n protínající se v bodě S a svírající úhel $\varphi = 120^\circ$, které jsou sdruženými průměry elipsy k z našeho pří-

kladu, pak posunutím pomocné elipsy $\bar{k}$ směrem a velikostí úsečky $\bar{S}S$ a otočením jedné příp. druhé dvojice sestrojených sdružených průměrů s daným úhlem $\varphi = 120^\circ$ do přímek m, n i s osami posunuté pomocné elipsy, obdržíme dvě soustředné elipsy k, k' , které řeší úlohu.



Obr. 2c

Oldřich Lepil, Gottwaldov:

Cesty k uvolnění jaderné energie

Světový rozmach průmyslu a stále se zmenšující zásoby uhlí, nafty a jiných klasických paliv, nutí vědecké pracovníky studovat možnosti využití také jiných zdrojů energie, hlavně energie atomových jader. Výzkum hvězd a především našeho Slunce ukázal, že zářivá energie těchto kosmických zdrojů je produktem jaderných přeměn, které probíhají v nitru hvězd. Klademe si tedy otázku, zda je možné i na Zemi vytvořit takové podmínky, jaké panují na hvězdách, abychom pomocí obdobných dějů získali zdroj energie prakticky nevyčerpatelný.

Všimněme si nejprve, v čem je podstata energie atomového jádra a jakými cestami ji můžeme uvolnit.

1. Vazebná energie jádra

Jádro atomu se podle našich současných představ skládá z jaderných částic nukleonů, z nichž největší význam mají částice kladné, jednotkové hmoty¹⁾ protony (p) a částice elektricky neutrální, jednotkové hmoty neutrony (n). Některé pokusně získané poznatky o vlastnostech jádra vedly dánského fyzika N. Bohra k vytvoření tzv. kapkového modelu jádra. Jádro je tvořeno kapkou jakési nukleární kapaliny složené z nukleonů, podobně jako např. voda z molekul. Obdobně jako u vody existuje jisté povrchové napětí, které brání rozpadu kapky, i mezi jednotlivými nukleony existují určité síly, poutající nukleony dohromady. O podstatě těchto vazebných sil dosud mnoho nevíme, předpokládáme však jejich velmi malý dosah. K těmto silám přistupují ještě odpudivé síly elektrostatické, kterými se odpuzují souhlasně nabití protony.

Jestliže budeme k sobě přibližovat dva protony, budou se z počátku

¹⁾ Jednotkovou hmotou rozumíme v atomistice hmotu jednoho protonu $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

vzájemně odpuzovat. Při určitém přiblížení však převládne síla přitažlivá a částice se spojí. Podle této úvahy bychom si tedy mohli představit, že hmota takto vzniklého jádra bude rovna součtu hmot obou nukleonů. Ale pokusy ukázaly, že výsledná hmota je poněkud menší. Rozdíl v součtu hmot jednotlivých nukleonů a výsledné hmoty jádra říkáme *h m o t o v ý d e f e k t* (Δm).

Moderní fyzika vysvětluje vznik hmotového defektu přeměnou příslušného množství hmoty na energii, která se při vzniku jádra uvolní jako důsledek práce, kterou vykonaly vazebné síly. Čím větší je hmotový defekt, tím je větší tato práce a tím je také jádro stabilnější.

Energii, odpovídající hmotovému defektu, nazýváme vazebnou energií jádra. Její velikost vypočítáme podle vztahu $E = \Delta m \cdot c^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Tak např. u nejjednoduššího složeného jádra těžkého vodíku - *d e u t e r i a* ($1 p + 1 n$) je vazebná energie 2,18 MeV²). U heliového jádra ($2 p + 2 n$) je vazebná energie 28,2 MeV. Jak vidíme, jsou mezi vazebnými energiemi různých jader značné rozdíly. Avšak výzkum dalších jader ukázal, že průměrná vazebná energie ($\bar{E}$) připadající na jeden nukleon je přibližně stejná a kolísá mezi 7,5 až 8,6 MeV. Jen u některých nejlehčích prvků byla zjištěna výrazná odchylka (deuterium, lithium, bór). Celkový průběh této závislosti je na obr. 1.

Z křivky vidíme, že největší vazebná energie připadá na jeden nukleon u jader s atomovou hmotou kolem 60. Jsou tedy tato jádra také nejstabilnější. Kdyby se nám podařilo štěpit jádra těžší na jádra středně těžká, nebo jádra velmi lehká skládat, uvolnilo by se vždy určité množství energie, odpovídající rozdílu vazebných energií jader před přeměnou a po přeměně. A v tom je podstata uvolnění energie při jaderných reakcích.

Uvolnění energie štěpením jader těžkých prvků známe z příkladu *ř e t ě z o v é r e a k c e* uranu 235. Tato reakce byla úspěšně zvládnuta a tvoří základ praktického využití jaderné energie k průmyslovým účelům.

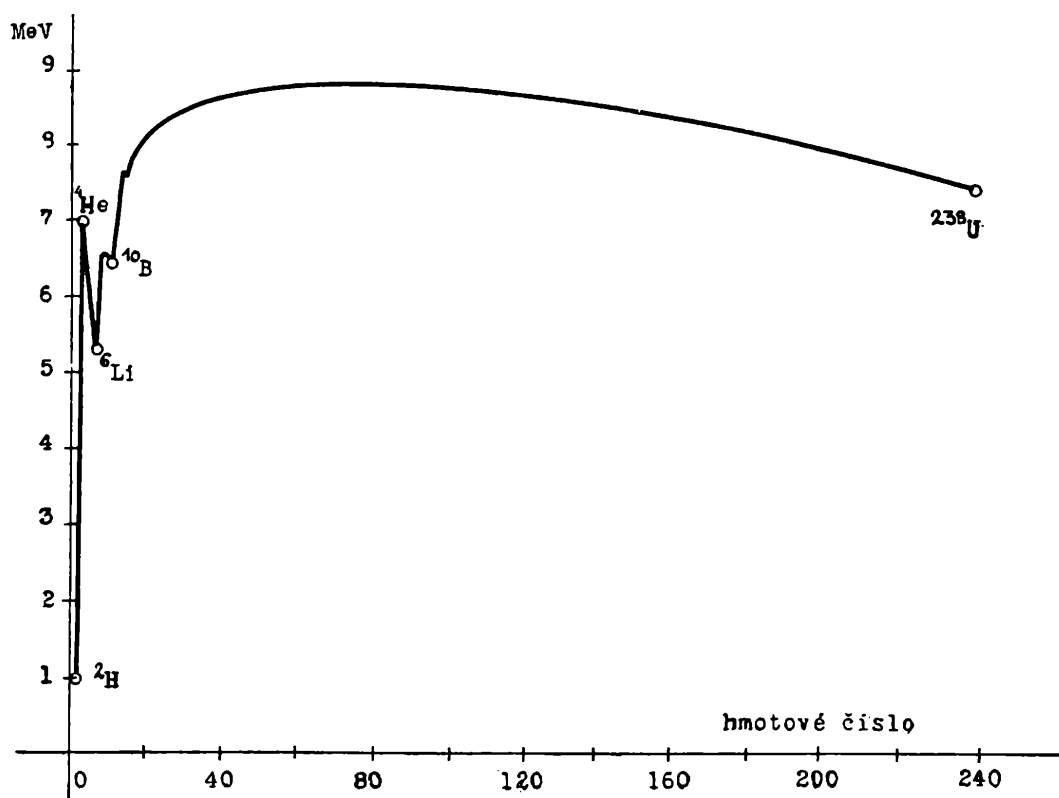
Obrácený děj - syntéza těžších jader z lehkých probíhá jen za velmi vysoké teploty. Proto mluvíme o *r e a k c i t e r m o n u k l e á r n í*. Domníváme se, že např. na Slunci probíhá v gigantickém rozsahu termonukleární reakce jader vodíku na helium v cyklu, jehož se účastní ještě další prvky N, O a C. I na zemi se podařilo uskutečnit termonukleární reakci „spalování“ vodíku na helium při výbuchu vodíkové pumy. Reakci však umožnila teprve teplota a tlak, vznikající při řetězovém štěpení uranové nálože, která tvoří jádro vodíkové pumy.

Pro praktické použití potřebujeme regulovatelný proces trvalého charakteru. Podívejme se, jaké podmínky musí být splněny, aby byla vyvolána taková termonukleární reakce.

²) MeV = 10⁶ eV; elektronvolt je energie, kterou elektron získá, projde-li dvěma místy o rozdílu potenciálů 1 V. 1 eV = 1,6 · 10⁻¹⁹ J.

2. Termonukleární reakce

Termonukleární proces nastane tehdy, jestliže kinetická energie atomových jader je tak veliká, že při vzájemných tepelných srážkách překonají jádra odpudivé síly a spojí se v nové, těžší jádro s větší vazebnou energií. Z obr. 1 vidíme, že k tomuto účelu bude nejvhodnější jádro deuteria a tritia ($1p + 2n$). Při spojení dvou jader deuteria (deuteronů) vznikne jádro helia se dvěma protony a jedním neutronem ($\text{He } 3$) a uvolní se neutron, nebo vznikne jádro tritia (triton) a uvolní se proton (reakce DD). V prvním případě je reakce provázena uvolněním energie 3,25 MeV, v druhém případě 4 MeV. Deuteron s tritonem reagují mno-



Obr. 1

hem snadněji než dva deuterony za vzniku jádra helia ($\text{He } 4$), uvolnění jednoho neutronu a energie 17,6 MeV. Je tedy tato reakce nejintenzivněji zkoumána v současné době.

Teploty, odpovídající dostatečně velkým kinetickým energiím jader, dosahují hodnot několika miliónů stupňů. Za těchto podmínek je plyn dokonale ionizován, jádra jsou zbavena elektronů a vzniklá směs volných elektronů a jader se nazývá plazma. Je samozřejmé, že současně také vzroste značně tlak. Např. při teplotě 10^8 K je tlak $1,5 \cdot 10^6$ atmosfér, měl-li plyn za normální teploty normální tlak. Rychlost elektronů je $1,44 \cdot 10^5$ km/s a rychlost jader 24 km/s. To jsou podmínky,

při nichž už existuje pravděpodobnost vzniku termonukleární reakce. To však ještě neznamená, že by se reakce udržela. Ztráty energie (ve formě záření, pohybové energie elektronů, neutronů a nečistot) jsou mnohem větší než množství energie uvolněné reakcí. Teprve při teplotách vyšších než $50 \cdot 10^6$ °K může nastat samostatná reakce DT a při teplotě $350 \cdot 10^6$ °K reakce DD.

Vzhledem k obrovským tlakům, které by za normálních okolností vznikaly, bude nutné provést reakci v silně zředěném plynu. V těchto podmínkách je potřebné poměrně malé množství energie, kterou musíme shromáždit v plazmatu, aby teplota vzrostla na míru nutnou k reakci. V 1 litru plazmatu, při tlaku 0,001 atp a teplotě $350 \cdot 10^6$ °K se udržuje jen asi 18 kcal tepla. Kdyby tedy bylo plazma dokonale izolováno, mohla by se termojaderná reakce udržet už pomocí malých zdrojů energie.

Dalším problémem je čistota plazmatu a ztráty energie, unikající z reakce ve formě záření. Plazma musí být prostá jakýchkoliv příměsí, zejména příměsí těžkých prvků, poněvadž vyzařování závisí na atomovém čísle. Stačilo by, aby se vypařila kapka kovu a „otráví“ několik m³ plazmy.

Než dojde k účinné srážce, proběhnou atomová jádra v silně zředěném prostředí několik tisíc km. Je tedy vysoká pravděpodobnost, že by jádro narazilo na stěnu nádoby, v níž reakce probíhá. Přitom by se jednak stěny nádoby vypařovaly, jednak by se plazma ochlazovala a to by vedlo k zániku reakce.

Jsou tedy podmínky pro vytvoření termonukleární reakce značně náročné. Je třeba dosáhnout velmi vysokých teplot a tlaků, dokonale tepelně izolovat plazmo a zabránit jeho styku se stěnami reakčního prostoru. Jak je tento problém řešen, uvidíme v článku *Plazma a řízená termonukleární reakce*.

CSc L u d ě k P e k á r e k, Fyzikální ústav ČSAV, Praha:

Plazma a řízená termonukleární reakce

1. Nový zdroj energie - jaderné reakce při vysokých teplotách

V posledních několika letech se stal jedním z hlavních problémů moderní fyziky úkol, jak dosáhnout a udržet teploty desítek a stovek miliónů stupňů. Snaha po dosažení tak nepředstavitelně vysokých teplot vyplývá z poznatku, že některé látky s lehkými atomovými jádry jsou schopny při tak vysoké teplotě vstupovat v jaderné reakce, v tzv. *termonukleární reakce* a uvolňovat energii. Množství uvol-

něné energie je při tom stejné, nebo i větší, než je množství energie uvolněné známým štěpením uranových jader. Hlavním jaderným palivem pro získávání termonukleární energie bylo by podle dnešních představ d e u t e r i u m, těžší izotop vodíku. Protože se deuterium vyskytuje v množství prakticky neomezeném ve vodě oceánů a řek, v případě, že by se podařilo z deuteria získat využitelnou energii, bylo by lidstvo zabezpečeno zdrojem energie na prakticky neomezenou dobu. Stala by se skutečností představa, kterou si do nedávna mohli dovolit jen spisovatelé fantastických románů, že by se energie získávala spalováním látky, dobývané z obyčejné vody. Nebylo by to ovšem obyčejné hoření, k jakému dochází při spalování obyčejných paliv. Probíhalo by při teplotě několika set miliónů stupňů a „spalovala“ by se při něm atomová jádra těžkého vodíku - deuteria - na jádra jiného prvku - helia. Dnes je známo, že k takovému „spalování“ lehkých jader, hlavně vodíku, na těžší jádra dochází v nitru hvězd, například i v nitru našeho Slunce. Proto mohou hvězdy vyzařovat po miliardy i desítky miliard let do celého vesmíru tak ohromné množství energie; zdrojem této energie jsou právě termonukleární reakce. Zapálit a udržet na Zemi takový termonukleární „ohně“ tak, aby sloužil jako neomezený zdroj energie pro člověka - to je konečným cílem laboratoří, pracujících nyní na problému dosažení extrémně vysokých teplot.

Obtíže, které se stavějí do cesty uskutečnění tohoto cíle, jsou však nesmírně velké. I když se ve vodíkové bombě podařilo uskutečnit na Zemi termonukleární reakci ve formě prudkého výbuchu, není tento způsob naprosto vhodný jako zdroj energie pro mírové účely. Zapálit ovladatelný termonukleární „ohně“, čili jak se obyčejně říká, uskutečnit řízenou termonukleární reakci, se dosud na Zemi nepodařilo. Přes využití všech vymožeností současné techniky, přes důvtip i systematickou tvůrčí práci stovek fyziků a techniků, byly dosud učiněny na cestě k vytčenému cíli teprve první nejisté kroky.

To ovšem není nic překvapujícího, uvědomíme-li si, že ještě do nedávné doby nepřesahovaly nejvyšší teploty, dosahované velmi složitými metodami ve speciálních laboratořích, několik málo desítek tisíc stupňů. Je zajímavé si uvědomit, že ani zapálení obyčejného ohně nebylo kdysi na samém počátku rozvoje lidské společnosti pro člověka snadnou záležitostí. I když teplota, potřebná k zapálení obyčejného chemického ohně, je téměř miliónkrát nižší než u „ohně“ termonukleárního, bylo získání této teploty pro pravěkého člověka krajně obtížné. Tato obtížnost a současně i vědomí nesmírného významu ovládnutí ohně se odráží i v některých náboženstvích, například u Řeků. Podle řecké mytologie ukradl člověk oheň bohům. Moderní doba, ve které byla vysvětlena nejen podstata ohně, ale byly pochopeny i mnohem složitější jevy v neživé i živé přírodě, odsunula pochopitelně náboženské představy mezi přežitky minulosti. Přesto však dovedeme dobře

pochopit, že v dřívější době vysvětloval člověk mnoho přírodních jevů působením nadpřirozených sil. Takové představy mu dávaly také iluzi o tom, že může na přírodní jevy, které sám nedovedl ovládnout, působit prostřednictvím bohů. V případě ohně je zcela pochopitelný význam, který mu člověk od počátku přikládal. Vždyť to byl první zdroj energie, který člověk ovládl a řídil podle svého přání. Zdroje energie, které by nahradily a znásobily fyzickou práci člověka, jsou vůbec jedním z hlavních technických předpokladů pro růst výroby. Není bez zajímavosti, že i když se za oněch několik set tisíc let, které uplynuly od prvních počátků vzniku lidské společnosti, změnil od základu způsob výroby životních potřeb a s ním i způsob života člověka, zůstává přece dodnes hlavním zdrojem energie člověka tentýž oheň, který mu v dávných dobách poskytl teplo a světlo nezávisle na denní a roční době a dal mu účinnou zbraň proti dravé zvěři.

Před necelými dvěma sty lety se člověk naučil přeměňovat teplo, uvolňované při hoření, v mechanickou práci a to nejprve v parním stroji, později ve výbušném motoru. I když elektrickou energii získáváme dnes též v mohutných hydroelektrárnách, je přece jen hlavním zdrojem elektrické energie oheň udržovaný pod kotly parních turbínových elektráren.

K udržování ohně potřebujeme ovšem paliva. Látek použitelných jako paliva, není na Zemi mnoho. Jsou to uhlí, ropa, rašelina, zemní plyny a dříví. V posledních desítiletích stoupá spotřeba těchto paliv tak rychle, že doba, kdy se jejich zásoby na Zemi vyčerpají, se blíží velmi rychle; odhadují se na méně než 200 let. Kdyby do této doby nenalezl člověk jiný zdroj energie nezávislý na chemickém palivu, byl by nucen omezovat výrobu a tím by se snižovala i životní úroveň lidstva.

Naštěstí se v nedávné době podařilo uvolnit a využít zcela nový druh energie – energii uranových jader. Podle dnešních odhadů přesahuje obsah energie, utajené v uranu všech nalezišť na světě, několika-násobně energii, obsaženou v uhlí a ropě, které se vyskytují v zemské kůře.

Přesto však nelze ani tento zdroj energie pokládat za definitivní řešení. Jednak je výskyt prvků se štěpitelnými jádry (uran a thorium) na Zemi omezený, takže se jednou vyčerpají, i když to bude trvat mnoho století, jednak mají všechny tyto zdroje jednu zvlášť velkou nevýhodu, že totiž neodstranitelnou vlastností reakcí jaderného štěpení je vznik silně radioaktivního odpadu. Při uvolňování jaderné energie uranu vzniká tak současně obtíž s ukládáním těchto odpadů takovým způsobem, aby nezpůsobovaly zamoření ovzduší a vod a neohrožovaly zdraví všeho lidstva. Tento problém by vyvstal zvláště naléhavě v době, až by se jaderných atomových reaktorů používalo k výrobě energie ve velkém měřítku, kdy by tedy množství reaktorů a tím i množství

radioaktivních produktů z reaktorů o mnoho řádů převyšovalo množství produkované reaktory v současné době.

Když přihlídneme ke všem těmto okolnostem, zdá se, že jediné definitivní vyřešení zdrojů energie pro vzdálenější budoucnost lidstva, jak si je můžeme představit na základě současných fyzikálních znalostí, je využití energie termonukleárních reakcí. U těchto jaderných reakcí odpadá také obtíž s radioaktivním odpadem, neboť nově vzniklé prvky - jde hlavně o izotopy plynu helia - nejsou radioaktivní.

Jestliže tedy v současné době kdy je ještě k dispozici dostatečná zásoba jiných zdrojů energie je uskutečnění řízené termonukleární reakce jen lákavým problémem jak získat další zdroj energie, bude pro vzdálenější budoucnost vyřešení tohoto úkolu naprosto nutné pro zajištění dalšího růstu výroby, pokud ovšem by se nepodařilo nalézt ještě další, dnes neznámé zdroje energie.

2. Látka při teplotě miliónů stupňů

Sotva si asi kdokoli z nás dovede představit, jak vypadá látka zahřátá na teplotu mnoha miliónů stupňů. Vždyť teploty, i s jakými se běžně setkáváme, nepřesahují několik tisíc stupňů. Tak například teplota plamene speciálního hořáku se svítiplynem dosahuje zhruba 1600 stupňů, teplota vlákna žárovky 3000 stupňů, a v nejteplejším místě uhlíkové obloukové lampy, které se používá například při promítání filmů, nepřesahuje teplota hodnotu 3000 až 4000 stupňů. Ani teplota výbojového kanálu bouřkového blesku není o mnoho vyšší.

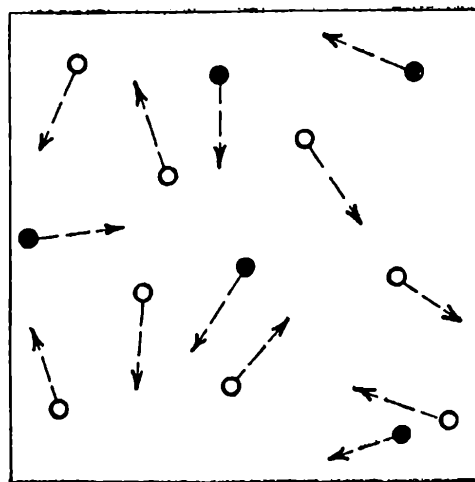
Na základě těchto poznatků naší běžné zkušenosti můžeme tedy říci o látce s teplotou mnoha miliónů stupňů jen to, že pravděpodobně bude vydávat velmi silné tepelné, světelné, případně i jiné záření a že bude ve skupenství plynném nebo plynu podobném, protože žádná látka nemůže existovat jako pevná látka nebo kapalina při teplotě přesahující desítky tisíc stupňů.

Vědecké poznatky o vlastnostech atomů a působení teploty však umožňují určit mnoho důležitých vlastností látek při teplotách mnoha miliónů stupňů, a to i pro takové teploty, jakých se zatím nepodařilo v laboratoři vůbec dosáhnout. Abychom pochopili, s jakými problémy se fyzikové setkávají při pokusech o dosažení extrémně vysokých teplot, všimněme si krátce některých těchto vlastností.

Předně si připomeňme, co vlastně způsobuje vysokou teplotu látky. Víme, že teplo není vlastně nic jiného, než pohybová energie atomů v látce; čím vyšší je teplota látky, tím rychleji se v ní atomy pohybují. Například v plynném deuteriu se za normální teploty 20 °C molekuly deuteria pohybují průměrnou rychlostí 1800 m za vteřinu. Při teplotě asi 1200 °C je tato rychlost již dvojnásobná a zvyšujeme-li teplotu plynu, průměrná rychlost molekul dále roste. Pohybují se chaoticky všemi směry, srážejí se navzájem a zdálo by se, že další zvyšování

teploty nemůže vyvolat žádné pronikavé změny ve vlastnostech takového plynu, nepočítáme-li zvyšování rychlosti pohybu molekul a tím i stoupání tlaku plynu na stěny nádoby, v níž je uzavřen. Ale není tomu tak. Pravda, zahříváme-li plynné deuterium jen na běžné teploty, dosahující několika tisíc stupňů, neděje se s ním nic zvlášť pozoruhodného. Při teplotě přesahující tisíc stupňů dojde sice k určité změně a to v tom, že molekuly vodíků (deuteria), tvořené vždy dvěma atomy spojenými silami chemické vazby, se rozpadnou při této teplotě na jednotlivé atomy. Avšak vlastnosti tohoto „atomárního“ plynu se nijak zásadně neliší od vlastnosti deuteria s molekulami.

Teprve při dalším zvyšování teploty se začínají objevovat zcela nové jevy. Tak plynný vodík, který byl za nižší teploty výborným elektrickým izolátorem, ztrácí při vysoké teplotě tuto vlastnost a vede poměrně dobře elektrický proud. Kromě toho se stává zdrojem silného světelného záření. Tyto nové vlastnosti jsou způsobeny tím, že při teplotách mnoha tisíců stupňů je pohyb vodíkových atomů již tak rychlý, že při vzájemné srážce dvou atomů dojde často k tomu, že se u jednoho z nich oddělí elektron a místo krouživého pohybu kolem jádra se začne pohybovat volně mezi ostatními atomy; z atomu deuteria vzniknou tak dvě elektricky nabitě částice: elektron se záporným nábojem a kladně nabitý zbytek atomu iont v tomto případě jádro deuteria. Tomuto jevu se říká *i o n i z a c e*. Čím vyšší je teplota, tím více atomů deuteria je ionizováno. Nakonec, při teplotě několika set tisíc stupňů, jsou ionizovány všechny atomy. Horké deuterium se pak vlastně skládá ze směsi dvou druhů elektricky nabitých částic záporných elektronů a kladných jader deuteria. Na obr. 1 je schematicky znázorněn tento stav deuteria při velmi vysoké teplotě. Elektrony i jádra deuteria se pohybují nezávisle na sobě, tvoří tak vlastně jakousi směs dvou plynů; jeden je složen z elektronů, druhý z kladných jader deuteria.



Obr. 1. Schematické znázornění stavu deuteria při velmi vysoké teplotě. Elektron je značen tečkou, jádro deuteria kroužkem.

Chování jiných látek při zahřívání do extrémně vysokých teplot je zcela obdobné. Při dostatečně vysokých teplotách se atomy ionizují, se stoupající teplotou ztrácejí postupně další elektrony, které normálně obíhají kolem jádra. Nakonec zůstanou i z nejtěžších atomů holá jádra a elektrony, pohybující se velkými rychlostmi navzájem zcela nezávisle.

Plyn, který je v takovém ionizovaném elektricky vodivém stavu, nazýváme obvykle p l a z m a t e m. Plazma má kromě elektrické vodivosti ještě řadu dalších nových fyzikálních vlastností, které souvisí s tím, že je složeno z volně se pohybujících elektricky nabitých částic. Tak například působí na plazma velmi silně magnetické a elektrické pole. Mohou v něm vznikat složité typy elektromagnetických vln, jaké se nevyskytují v jiných prostředích. Může vydávat nejen světelné, ale i rentgenové záření atd. Pro tyto nové vlastnosti, zcela rozdílné od vlastností normálního plynu, je jistě na místě pokládat plazma za nové č t v r t é s k u p e n s t v í h m o t y. A tak vlastně docházíme k závěru, že při termonukleární reakci nebude deuterium - nebo jakékoli jiné termonukleární palivo - ve stavu, s jakým se s látkami setkáváme v denním životě, nýbrž v novém skupenství, které má podstatně jiné vlastnosti než obvyklý plyn.

Plazma, které není vlastně nic jiného, než ionizovaný plyn, může však vzniknout i jiným způsobem než zahřátím plynu na velmi vysokou teplotu. Například silné elektrické pole může ionizovat atomy plynu a vytvořit plazma, i při poměrně nízké teplotě. Takový případ nastává v elektrickém výboji, jaký známe například v zářivkách. Takové plazma je možné uzavřít v obvyklé skleněné nádobě, aniž by se její stěny ztelně zahřívaly. V takovém chladném plazmatu, i kdyby bylo vytvořeno z deuteria, nemohou ovšem v žádném případě probíhat termonukleární reakce. K těm může v plazmatu z deuteria docházet teprve tehdy, když jádra deuteria mají vzájemnou rychlost tak velikou, že při srážce mohou překonat elektrické síly, které je jako dva souhlasné náboje od sebe odpuzují a přiblížit se k sobě na tak malou vzdálenost, že mezi nimi začnou působit přitažlivé jaderné síly. V tom okamžiku může dojít k jaderné reakci a k uvolnění energie.

Se čtvrtým skupenstvím hmoty plazmatem se člověk setkával na Zemi velmi zřídka. Zatím co s pevnými, kapalnými i plynnými látkami přicházel neustále do styku a naučil se znát a využívat jejich vlastností mnohem dříve, než je začala zkoumat fyzika jako vědní obor, látku ve stavu plazmatu mohl pozorovat jen z dálky při bouřkovém blesku. Dnes, v době moderní techniky, se s látkou ve stavu plazmatu setkáváme častěji. Vyskytuje se v řadě elektrotechnických přístrojů, které používají elektrického výboje v plynu - například ve výbojových usměrňovačích, zářivkách, obloukových lampách, neonových trubicích atd. Plazma je zde vytvářeno elektrickým polem a jeho teplota je poměrně nízká. Dnes je rovněž známo, že i vrchní vrstvy zemské atmosféry, tzv. ionosféra (tj. ovzduší ve výšce několika set kilometrů), je velmi řídký ionizovaný plyn, který můžeme rovněž nazvat plazmatem. Ani v tomto případě není ionizace vyvolána vysokou teplotou, nýbrž slunečním zářením, hlavně ultrafialovým.

Okolnost, že plazma se na Zemi vyskytuje zřídka, způsobila, že jeho

vlastnosti jsou po fyzikální stránce prozkoumány ještě poměrně málo ve srovnání s vlastnostmi ostatních skupenství hmoty. Přesto již v dřívější době bylo plazma předmětem vědeckých výzkumů hlavně v souvislosti s elektrickými výboji v plynu a v astrofyzice při zkoumání atmosféry hvězd a mezihvězdného prostoru. Znalostí o plazmatu, nashromážděných dřívějšími výzkumy, využívají dnes fyzikové při studiu možností, jak uskutečnit řízenou termonukleární reakci.

Asi od roku 1950, kdy se začalo uvažovat reálně o těchto řízených termonukleárních reakcích, postoupily znalosti o fyzikálních vlastnostech plazmatu velmi rychle. Velké kolektivy vědců se začaly zabývat jednak teoriemi, které by podrobně vysvětlily a také předpověděly všechny vlastnosti horkého plazmatu, důležité pro termonukleární reakce, tak i složitými pokusy k získání nových experimentálních údajů. Byly zkonstruovány nákladné aparatury, v nichž si ještě vědci nekládou za cíl získat termonukleární energii, nýbrž se snaží přesněji poznat chování horkého plazmatu, najít způsob jeho zahřívání na velmi vysokou teplotu, vytvořit zvláštní nádobu, která by udržela horké plazma atd. Jde tedy teprve o získávání podrobnějších dat o horkém plazmatu, na jejichž základě by bylo v budoucnosti možné termonukleární reakce v plazmatu uskutečnit.

(Pokračování)

Úlohy k řešení

Lhůta k odeslání těchto soutěžních úloh do konce února 1960 na adresu: Doc. Ota Setzer, Praha 2, Na bojišti 3.

Deskriptivní geometrie:

1. Sestrojte kulovou plochu, která má střed na přímce p a protíná dané rovnoběžné roviny ρ a σ v kružnicích poloměru a a b .

Ota Setzer

2. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká roviny τ v bodě T a která na přímce p různoběžné s rovinou τ vytíná úsečku délky $2d$!

Ota Setzer

3. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány různoběžné tečny t_1, t_2 jedné podstavy a bod A na obvodě druhé podstavy!

Ota Setzer

4. Sestrojte rovnostranný kužel o daném vrcholu V , normále n , je-li dán bod A v rovině jeho podstavy!

Ota Setzer

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika:

7. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a úsečka MN délky $d \neq 0$, která neleží na žádné z přímek AB, BC, AC . Z bodů M, N spustíme kolmice na přímku BC do bodů M_1, N_1 . Podobně dostaneme na přímkách AC, AB body $M_2, N_2; M_3, N_3$. Ostrý úhel přímek MN a AB označme α . Jak musíme tento úhel zvolit, aby součet $M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3$ byl co největší? (Bez použití diferenciálního počtu.)

Stanislav Horák

(Došlo 7 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, 10. A, JSS Nymburk.

Označme $M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3 = F$. Budeme rozlišovat tři případy.

a) $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$. Potom

$M_1N_1 = d \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$, $M_2N_2 = d \cdot \cos(60^\circ + \alpha)$, $M_3N_3 = d \cos \alpha$.
Součet.

$$F = d [\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) + \cos \alpha] = 2d \cdot \cos \alpha.$$

Výraz $F = 2d \cdot \cos \alpha$ je tedy maximální při maximálním $\cos \alpha$, tj. pro $\cos \alpha = 1$, z čehož plyne $\alpha = 0$.

b) $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. V tomto případě

$M_1N_1 = d \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$, $M_2N_2 = d \cdot \cos(120^\circ - \alpha)$, $M_3N_3 = d \cdot \cos \alpha$.
Součet F po úpravě je pak

$$F = 2d \cdot \cos(\alpha - 60^\circ)$$

Maximum tohoto výrazu nastane pro

$$\cos(\alpha - 60^\circ) = 1$$

a z toho vyplývá $\alpha = 60^\circ$.

c) $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Zde zase

$$M_1 N_1 = d \cdot \cos(\alpha - 60^\circ), \quad M_2 N_2 = d \cdot \cos(120^\circ - \alpha),$$

$$M_3 N_3 = d \cdot \cos \alpha.$$

Výraz (po úpravě)

$$F = 2d \cdot \cos(\alpha - 60^\circ),$$

který pro žádanou podmínku dává opět $\alpha = 60^\circ$.

V ý s l e d e k. Součet průmětů je maximální jenom tehdy, když úsečka MN je rovnoběžná s některou stranou trojúhelníka ABC .

P o z n á m k y. 1. V uveřejněném řešení není uvažován případ, kdy úsečka MN je kolmá na stranu AC nebo BC . Na výsledek to však vliv nemá.

2. S. Petr Tomšů, PŠ v Kopřivnici, zavedl orientovaný úhel α a dostal tak tentýž výsledek.

8. Do obdélníka je vepsán čtyřúhelník o úhlopříčkách rovnoběžných se stranami opsaného obdélníka. Dokažte, že průsečíky úhlopříček obdélníka i čtyřúhelníka jsou symetrické podle tzv. analytického středu čtyřúhelníka! (Analytický střed čtyřúhelníka pólí spojnicí středů protilehlých stran čtyřúhelníka.)

† Josef Langr

(Došlo 6 řešení)

Řešil Vladimír Regner, 11. B, DŠŠ v Mladé Boleslavi:

Označme A, B, C, D vrcholy daného obdélníka, S průsečík jeho úhlopříček, dále E, F, G, H vrcholy vepsaného čtyřúhelníka a průsečík jeho úhlopříček Q . Podle předpokladu platí: $EG \parallel AD \parallel BC$; $HF \parallel AB \parallel DC$. Vznikají čtyři obdélníky $AEQH, EBFQ, QFCG, HQGD$, jejichž úhlopříčky se navzájem pólí v bodech A', B', C', D' . Platí tedy:

$$2 \cdot QB' = QB, \quad 2 \cdot QC' = QC, \quad 2 \cdot QD' = QD, \quad 2 \cdot QA' = QA$$

Z toho plyne, že obrazec $A'B'C'D'$ je obdélník stejnohlý s obdélníkem $ABCD$ podle středu Q a poměru 1 : 2. Bod S' - analytický střed čtyřúhelníka $EFCH$ je průsečík úhlopříček obdélníka $A'B'C'D'$. Jsou-li stejnohlé obdélníky, jsou stejnohlé i průsečíky S a S' jejich úhlopříček:

$$2 \cdot QS' = QS, \quad \text{čili} \quad QS' = S'S,$$

body S, S', Q leží na paprsku stejnohllosti, čímž je věta dokázána.

10. Obecnému trojúhelníku ABC o obsahu P a vnitřních úhlech α, β, γ je vepsána kružnice k_1 , do ní $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$ s vepsanou kruž-

nicí k_2 , do ní vepsán trojúhelník $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ atd. Určete obsah n -tého trojúhelníka $A_nB_nC_n$.

Ota Setzer

(Došlo 7 řešení)

Řešení autorovo:

Spustíme-li v původním trojúhelníku ABC ze středu S vepsané kružnice kolmici na stranu c do bodu S_1 pak

$$AS_1 = \rho \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}, \quad S_1B = \rho \cdot \cotg \frac{\beta}{2},$$

sečtením:

$$AS_1 + S_1B = c = \rho \cdot \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right),$$

odtud:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c}{\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2}} = \frac{c \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\ &= \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ABC , $A_1B_1C_1$ platí:

$$a_1 = k \cdot a, \quad b_1 = k \cdot b, \quad c_1 = k \cdot c.$$

Poloměr r_1 kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ lze vyjádřit

$$r_1 = \frac{c_1}{2 \sin \gamma} = \rho, \quad \text{čili} \quad \frac{k c}{2 \sin \gamma} = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

z toho

$$\begin{aligned} k &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \\ &= 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Z konstrukce vyplývá, že poměr stran dvou bezprostředně následujících podobných trojúhelníků je stále k , poměr obsahů k^2 .

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = \dots = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1}{P} = k^2, \quad P_n = P \cdot k^{2n},$$

$$P_n = P \cdot 16^n \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{2n}$$

Deskriptivní geometrie:

3. Sestrojte elipsu, která je dána vrcholem A hlavní osy, ohniskem F a bodem L na elipse!

Miroslav Menšík

(Došlo 5 řešení)

Řešil Vladimír Regner, 11. B, DSŠ, Mladá Boleslav:

Podle definice elipsy pro její bod L platí $FL + EL = 2a$, přičemž délku FL známe. Na polopřímce QF ($AQ = AF$) sestrojíme bod X tak, aby $QX = FL$. Tento bod X je stejně vzdálen od hledaného ohniska E jako bod L . Osa úsečky LX protne tedy osu elipsy $o = AF$ v hledaném ohnisku E .

Úloha má řešení, leží-li bod E na polopřímce AF , ježto u elipsy je vrchol hlavní osy vždy vně úsečky FE . V případě $LF = AF$ ($E \equiv F$) přejde elipsa v kružnici. Uvažme krajní možnost, kdy $LX \perp o$, pak je osa této úsečky rovnoběžná s osou elipsy a hledané ohnisko E není v konečnu. Bod L v tom případě náleží parabole o vrcholu A a ohnisku F . Leží-li daný bod L uvnitř této paraboly je úloha jednoznačně řešitelná. Snadno se přesvědčíte, že volíme-li bod L vně této paraboly, protne osa úsečky LX přímku o v bodu E ležícím na polopřímce AQ a nemůže být proto tento bod ohniskem elipsy.

Případy, kdy bod L je zvolen na úsečce AF vylučme.

Podrobnou diskusi provedl P. Tomšů, PŠ, Kopřivnice. K. Hrbáček, 10. A JSŠ, Nymburk, užil věty: elipsa je geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají kružnice opsané kolem ohniska poloměrem $2a$ a procházejí druhým ohniskem, konstrukci však zcela nedokončil.

4. Narýsujte tuší pravoúhlé průměty rotačního kužele, který leží v prvním oktantu, má vrchol v počátku, dotýká se půdorysny, nárysny i stranorysny, leží-li bod $B(3; 1; 4)$ v rovině jeho podstavy.

Ota Setzer

(Došla 2 řešení)

Řešil Vladimír Regner, 11. B, DSŠ v Mladé Boleslavi:

Osa o hledaného kužele je i osou prvního oktantu, má od všech tří

průměten stejnou odchylku. V pravoúhlém promítání se jeví o_1, o_2 jako přímky svírající s osou $\alpha_{1,2}$ úhel 45° . Rovinu podstavu danou bodem B sestrojíme jako rovinu kolmou ke známé přímce o užitím hlavní přímky h ($p_1^o \perp o_1, n_2^o \perp o_2$). Rovina σ omezí v 1. oktantu pravidelný trojboký jehlan $OX'YZ$ s vrcholem v počátku O . Podstavu tohoto jehlanu - rovnostranný trojúhelník $X'YZ$ otočíme kolem stopy p^o do π do polohy $X_0Y_0Z_0$. Trojúhelníku $X_0Y_0Z_0$ vepíšeme kružnici k_0 o středu S_0 a dotykových bodech ${}^1T_0, {}^2T_0, {}^3T_0$ na stranách opsaného trojúhelníka. Zpětným otočením roviny σ do původní polohy určíme střed S_1 i délky poloos elipsy k_1 , která je půdorysem podstavné kružnice k . Odtud již snadno odvodíme nárys k_2 kružnice k i obrys hledaného kužele.

Poznámka: Došlé rysy nejsou schopny reprodukce.

(Pokračování)

Matematická a fyzikální olympiáda

Přípravné úlohy MO

(X. ročník soutěže - pokračování)

Kategorie A

4. Určete všechna reálná čísla p , pro které rovnice

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

o neznámé x má:

a) oba kořeny různé a záporné; b) jeden záporný kořen, druhý nezáporný.

5. Výroba podniku se každým rokem zvyšuje o p %. V průběhu kterého roku vzroste výroba o np % (kde n je dané přirozené číslo) proti počátečnímu stavu? Na závěr proveďte výpočet pro $p = 20, n = 5$.

6. Označme D průsečík osy úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníku ABC se stranou AB ; dále označme $CB = a, CA = b, CD = u$.

a) Dokažte, že platí $\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}$.

b) Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC , jestliže jsou dána čísla a, b, u . (Je výhodné užít trigonometrických vzorců pro obsah trojúhelníka.)

Kategorie B

4. V rovině jsou dány dva pravé přilehlé úhly $\sphericalangle QMN, \sphericalangle MNP$. Uvažujme čtverec $ABCD$, kde bod A leží na polopřímce MQ , bod B je bodem úsečky MN , bod C leží na polopřímce NP .

Vyjádřete délku úsečky AB pomocí dané délky $MN = 2d$ a vzdálenosti

x bodů O, B (je tedy $x \geq 0$), kde O je střed úsečky MN . Jestliže bod B probíhá úsečku MN , vyšetřte, co při tom vyplní:

a) střed S čtverce $ABCD$; b) vrchol D čtverce $ABCD$. (Ke zvolenému bodu B příslušný bod C je průsečíkem přímky NP a přímky, kterou dostaneme otočením přímky MQ o pravý úhel kolem bodu B .)

5. Řešte rovnici

$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3,$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla a x je neznámá.

Rozhodněte, pro které trojice čísel a, b, c nemá rovnice řešení; dále kdy má jediné řešení a kdy má nekonečně mnoho řešení.

6. Výraz

$$V = \frac{p-2}{p+2} - \frac{p^2-4p+4}{p^2+4p+4} + \frac{p^3-6p^2+12p-8}{p^3+6p^2+12p+8},$$

kde $p \neq -2$ je dané reálné číslo, je záporný pro ta čísla p , o nichž platí

$$-2 < p < 2;$$

jinak je nezáporný; dokažte a udejte všechna čísla p , pro něž je daný výraz roven nule.

(P o k y n. Lze řešit tak, že nejprve dokážete: $1-x+x^2 > 0$ pro všechna reálná čísla x ; položte $x = \frac{p-2}{p+2}$).

Kategorie C

4. Narýsujte trojúhelník SMN , kde $SM = 5$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 6$ cm.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ o středu S , aby platilo:

- (1) Délka stran kosočtverce je 7,5 cm.
- (2) Přímka AB prochází daným bodem M .
- (3) Přímka CD prochází daným bodem N .

Dokažte, že úloha má dvě řešení.

(Užijte souměrnosti o středu S .)

5. Najděte všechna přirozená čísla p, q , o nichž platí:

$$\text{a) } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad \text{b) } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

(Dokažte, že úloze a) vyhovují jediné čísla $p = q = 2$, úloze b) tyto tři dvojice: $p = 6, q = 3$; $p = q = 4$; $p = 3, q = 6$.)

6. Jsou dána reálná čísla a, b, c , o nichž platí $a + b + c = 0$.

Má-li výraz

$$V = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

smysl, potom platí

$$V = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc};$$

dokažte.

Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c , pro něž daný výraz ztrácí smysl.

Kategorie D

3. Narýsujte dvě rovnoběžky p, q o vzdálenosti 4 cm; na přímce p zvolte bod P .

Sestrojte kružnici, která se přímkou p dotýká v bodě P a která na přímce q vytíná tětivu délky 5 cm.

4. Počítejte dvojím způsobem, napřed podle poučky o druhé mocnině mnohočlenu, potom podle poučky o rozdílu čtverců:

$$(2x + y)^2 - (x + 2y)^2$$

5. Narýsujte úhel $\sphericalangle MPN = 60^\circ$.

Na polopřímce PM sestrojte bod A a na přímce PN sestrojte body B, C tak, aby o trojúhelníku ABC platilo: $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $\sphericalangle BCA = 75^\circ$.

Úloha má dvě řešení; z provedené konstrukce rozhodněte, zda oba sestrojené trojúhelníky padnou do úhlu $\sphericalangle MPN$.

6. V rovnoběžníku $ABCD$ je strana $AB = 4,9$ cm, strana $AD = 7$ cm a výška příslušná ke straně AB má délku 5 cm; při tom úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý.

Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky vedená bodem D ke straně AB padne dovnitř úsečky AB či nikoli.

Úlohy pro první kolo II. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie A

A - 1. Ve svislé rovině leží přímka p a bod O . Přímka p svírá s vodorovnou rovinou úhel α a bod O leží nad přímkou p a má od ní svislou vzdálenost rovnou h . Mezi úsečkami, které vycházejí z bodu O a končí na přímce p , určete úsečku q , kterou hmotný bod proběhne v nejkratší době a určete tuto dobu. (Pohyb po úsečce q je způsoben jen gravitačním polem Země; při tom vnější vlivy zanedbáváme.)

A - 2. Kovová tyč má průřez $S = 4$ cm² a při teplotě 0°C délku $l_0 = 1$ m. Jestliže ji namáháme v tahu silou $F = 800$ N, prodlouží se o délku $\Delta l_1 = 0,001$ cm. Při zahřátí na teplotu $t_1 = 60^\circ\text{C}$ se tyč prodlouží o délku $\Delta l_2 = 0,066$ cm.

Vypočítejte:

a) Modul pružnosti v tahu E materiálu tyče;

b) teplotní koeficient délkové roztažnosti α materiálu tyče;

c) jak velkými tlakovými silami F' by tyč působila na pevné stěny, vzdálené od sebe přesně l_0 , mezi něž bychom ji vložili a pak zvýšili její teplotu na 40°C .

A - 3. Při jaké rychlosti vlaku budou péra jeho vozů zvláště silně kmitat účinkem nárazů kol na spoje kolejnic, je-li délka kolejnic $l = 15$ m a zatížení péra $G = 5,5$ t*? Péro se prohne vahou 1 tuny o $y = 16$ mm.

A - 4. Dvě rovinná zrcadla z_1, z_2 svírají úhel $\alpha = 60^\circ$. V prostoru mezi nimi ve vzdálenosti $r_1 = 6$ m od průsečnice obou zrcadel je bodový zdroj Z , který je od prvního zrcadla ve vzdálenosti $d_1 = 1$ m. Pozorovatel P je v bodě ve vzdálenosti $r_2 = 9$ m od průsečnice obou zrcadel a ve vzdálenosti

$d_2 = 4$ m od prvého zrcadla. Oko a bodový zdroj jsou v téže rovině kolmé k průsečnici zrcadel. Narýsujte chod paprsků ze zdroje do oka

- po jednom odraze (paprsek se odráží jen od jednoho zrcadla),
- po dvou odrazech (paprsek se odráží od každého zrcadla jednou),
- po třech odrazech.

A - 5. Kondenzátor kapacity $C_1 = 1 \mu\text{F}$ a kondenzátor kapacity $C_2 = 2 \mu\text{F}$ byly spojeny do série a připojeny ke zdroji napětí $U = 1000$ V.

a) Najděte náboj a napětí na každém kondenzátoru.

b) Nabité kondenzátory byly odpojeny od zdroje a od sebe rozpojeny. Potom byly spolu spojeny souhlasně nabitě desky kondenzátorů. Najděte výsledný náboj a napětí na každém kondenzátoru.

A - 6. Dva konstantanové dráty tvoří úhlopříčky obdélníka $ABCD$, jehož strana $AB = 4$ dm, $AD = 3$ dm. Oba dráty jsou uprostřed vzájemně izolovány; průřez drátu AC je $S_1 = 1 \text{ mm}^2$, drátu BD je $S_2 = 0,5 \text{ mm}^2$. Jejich konce A a B jsou spojeny silným drátem s póly akumulátoru ($E = 2$ V, $R_i = 0$). Konce A a D se spolu spojí vodivou tyčí, jejíž odpor je nepatrný; je určit: a) proud, který prochází obvodem, b) jeho změny, posunuje-li se tyčí AD po obou drátech rovnoběžně směrem ke straně BC .

A - 7. K baterii vnitřního odporu $R_i = 20 \Omega$ je připojeno ocelové vedení k signalizačnímu zařízení odporu $R_1 = 820 \Omega$. Přípojka má délku $l = 4,5$ km, průřez vodičů $S = 3,0 \text{ mm}^2$, měrný odpor oceli $\rho = 0,12 \Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$. Ke svorkám baterie je připojen voltmetr, který ukazuje napětí $U = 118,0$ V. Na vedení vznikl zkrat, při němž se změnilo napětí měřené voltmetrem na $U' = 106,6$ V.

a) Jak velký byl výkon signalizačního zařízení (před zkratem)?

b) Jak velký je celkový výkon zdroje?

c) Jak daleko od baterie zkrat vznikl?

A - 8. V katodové trubici jsou umístěny dvě rovnoběžné kovové destičky délky $l = 5$ cm, vzdálené od sebe o $d = 1$ cm. Středem mezi destičkami proletuje proud katodových paprsků rychlostí $v = 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Jaké největší stejnosměrné napětí můžeme na destičky vložit, aby se vychýlený proud elektronů nedotkl kladné destičky? Hmotu elektronu $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; náboj elektronu $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

b) Jak velká by musela být při stejném napětí jako v případě a) rychlost elektronů, aby dopadly ve vzdálenosti 1 cm před okrajem kladně nabitě destičky?

A - 9. Určete odpor spotřebiče (např. žárovky) a) metodou přímou (při dvou způsobech zapojení voltmetru: napětí se měří na svorkách spotřebiče; napětí se měří na spotřebiči a ampérmetru), b) Wheatstonovým můstkem. Srovnajte výsledky a případné rozdíly se pokuste vysvětlit. Popište přesně spotřebič a měřicí přístroje (typ přístroje, rozsah stupnice, počet dílků, případně odpor), kterých jste v úloze použili. Ke každému měření sestrojte schéma zapojení.

Téma k prostudování pro první kolo soutěže:

Měření odporu metodou přímou a Wheatstonovým můstkem.

Literatura: Z. H o r á k, P r a k t i c k á f y z i k a, SNTL 1958, čl. 71.1; čl. 71.3, str. 471.

Kategorie B

B - 1. Dvě závaží o stejných hmotách M jsou zavěšena na koncích nitě vedené přes pevnou kladku. Na jedno závaží položíme přívazek o hmotě m' . a) Určete zrychlení pohybu obou závaží. b) Jakou silou bude napínána nit při pohybu závaží? c) Jakou silou je namáhána osa kladky při pohybu

závaží? d) Jakou silou tlačí přívazek m' při pohybu na závaží M ? Váha niti, odpor prostředí a vliv kladky se zanedbává.

Řešte nejprve obecně a pak pro číselné hodnoty $M = 10^{-1}$ kg, $m' = 10^{-2}$ kg, $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

B - 2. Automobil jede do mírného kopce o stoupání $\alpha = 10^\circ$ stálou rychlostí $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jede-li po témže svahu dolů, nabude rychlosti $v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ při stejném výkonu motoru. Jaké rychlosti nabude po vodorovné rovině při stejném výkonu motoru?

B - 3. Na vlákně délky l a pevnosti p je upevněna koule o váze G . Koule je roztočena ve svislé rovině. Při jaké postupné rychlosti se vlákno přetrhne? Řešte nejprve obecně a pro číselné hodnoty $l = 2$ m, $p = 10$ kp, $G = 3$ kp.

B - 4. První kosmická loď po vypuštění obíhala kolem Země v přibližně kruhové dráze o poloměru $l = 320$ km. Za předpokladu, že by na okamžik přestala působit jejich vzájemná přitažlivost, vypočítejte a) průměr drátu z ocele, který by při napětí rovném mezi pružnosti v tahu udržel kosmickou loď na dráze kolem Země, nepřihlíží-li se k váze drátu. b) O kolik by se kosmická loď připoutaná tímto drátem, vzdálila od Země? Je dáno:

Modul pružnosti drátu v tahu $E = 2,2 \cdot 10^6$ kp/cm², mez pružnosti $\frac{F}{S} = 3,3 \cdot 10^3$ kp/cm², hmota Země $M = 5,959 \cdot 10^{24}$ kg, hmota kosmické lodi $m = 4,54 \cdot 10^3$ kg, poloměr Země $R = 6,37 \cdot 10^6$ m a gravitační konstanta $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻².

B - 5. Víte-li, že hladina kapaliny v nádobě se ustálí tak, že je kolmá k výslednici sil působících na částice kapaliny, určete směr hladiny kapaliny v nádobě v těchto případech:

a) Pohybuje-li se nádoba s kapalinou po vodorovné rovině rovnoměrným přímočarým pohybem;

b) pohybuje-li se nádoba s kapalinou rovnoměrně zrychleně po vodorovné rovině se zrychlením a ;

c) pohybuje-li se nádoba s kapalinou vlastní vahou bez tření po nakloněné rovině s úhlem sklonu α ;

d) jak by se musela pohybovat nádoba s kapalinou po nakloněné rovině, aby hladina kapaliny byla vodorovná?

B - 6. V měděném kalorimetru hmoty m_1 kg jest m_2 kg vody a m_3 kg ledu v tepelné rovnováze. Do kalorimetru ponoříme kus olova hmoty m_4 kg, zahřátý na teplotu t °C.

a) Jaký bude výsledný stav v kalorimetru za předpokladu, že tepelné ztráty lze zanedbat? Proveďte rozbor a řešte potom pro tyto hodnoty:

$m_1 = 0,1$ kg, $m_2 = 0,15$ kg, $m_3 = 0,08$ kg, $m_4 = 0,1$ kg, $t = 200$ °C, $c_{Cn} = 0,094$ kcal kg⁻¹ deg⁻¹, $c_{Pb} = 0,03$ kcal kg⁻¹ deg⁻¹.

b) Jakou hmotu m_4 by muselo mít olovo, aby se po jeho vnoření teplota v kalorimetru ustálila na $t' = 5$ °C?

B - 7. Parní stroj o výkonu $P = 14,7$ kW spotřeboval za hodinu $m = 12,9$ kg uhlí o výhřevnosti $H = 7,8 \cdot 10^3$ kcal kg⁻¹.

Zlepšovacími návrhy (vhodnější rošt, regulace přívodu vzduchu, zmenšení ztrát zlepšenou izolací) zvýšila se účinnost o $\Delta\eta = 1,5$ %. Kolik Kčs by závod uspořil při nepřetržitém provozu ročně, je-li 1 q uhlí za 12 Kčs?

B - 8. Kolikrát musíme stlačit píst hustilky, která má objem $V_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ m³, abychom naplnili vzduchem prázdnou pneumatiku jízdního kola tak, aby styčná plocha pneumatiky s vozovkou byla $S = 60$ cm²?

Zatížení kola $G = 35$ kp, objem pneumatiky $V_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, atmosférický tlak $b = 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$. Tuhost pneumatiky zanedbáváme.

B - 9. Určete tíhové zrychlení z doby kyvu a délky matematického kyvadla. Matematické kyvadlo sestrojte z tenké nitě délky aspoň 1 m a malé těžké kuličky o průměru menším než 10 mm. Délku kyvadla měřte od bodu upevnění niti do středu kuličky; určete délku kyvadla z deseti měření a stanovte chybu výsledku. Doby kyvu určete z deseti kyvů; čas měřte stopkami; čas začnete měřit, když kyvadlo po několika kyvech prochází rovnovážnou polohou. Opakujte měření doby kyvu desetkrát a stanovte chybu výsledku. Z naměřených veličin vypočítejte tíhové zrychlení a určete chybu takto vypočítané veličiny. Popište přesně postup měření i měřicí přístroje (délkové měřítko, stopky), kterých jste použili při řešení úlohy.

Téma k prostudování pro první kolo soutěže:

C h y b a v e l i č i n y m ě ř e n é a v y p o č t e n é.

Text bude uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Kategorie C

C - 1. Hmotný bod se pohybuje po přímce s konstantním zrychlením. V bodě A má rychlost $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, v bodě B má rychlost $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Vzá-

jemná vzdálenost bodů A a B je $d = 15$ m. Vypočítejte:

a) S jakým zrychlením se hmotný bod pohybuje;

b) v jaké vzdálenosti s před bodem A měl hmotný bod nulovou rychlost.

C - 2. Těleso o hmotě $m_1 = 0,08$ kg je na vodorovné, dokonale hladké rovině a je přes kladku vodorovně taženo volně visícím tělesem o hmotě $m_2 = 0,04$ kg. Určete zrychlení soustavy a napětí vlákna, jestliže nepřehlídíme k hmotě kladky, k hmotě spojovacího vlákna a k tření. Řešte nejprve obecně.

C - 3. Na koncích tenkého provazu, přehozeného přes kladku, visí ve stejné výšce dvě závaží různé váhy. Po dvou sekundách od začátku jejich pohybu je vzdálenost mezi závažími $l = 0,48$ m. Určete váhu G_2 těžšího závaží, je-li váha lehčího závaží $G_1 = 100$ p.

C - 4. Kulička byla vržena s povrchu zemského svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Současně z maximální výšky, do které se kulička dostane, začne padat dolů druhá kulička se stejnou počáteční rychlostí v_0 . Vypočtete dobu τ , za kterou se kuličky střetnou, vzdálenost h od povrchu zemského, v které se střetnou, a rychlosti obou kuliček v_1 a v_2 v okamžiku střetnutí. Odpor vzduchu zanedbejte.

C - 5. Vlak přijíždí setrvačností po vodorovné rovině ke kopci, na němž stojí nádraží, rychlostí $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a dojíždí na stanici rychlostí $v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Vypočtete, o kolik je nádraží zvýšeno, je-li délka svahu, který vlak zmáhá $l = 1000$ m a tření $T = \frac{1}{250}$ váhy vlaku.

C - 6. Plně obsazený osobní výtah pro čtyři osoby (po 75 kp) vyjede rovnoměrným pohybem do výše $h = 10$ m za dobu $t = 20$ s. Protizávaží vyvažuje váhu kabiny a polovinu užitečného zatížení. Kolik procent se počítá na ztráty, má-li elektromotor výkon $P = 3$ kW?

C - 7. Ze stejnorodého kotouče tvaru kruhu o poloměru $r = 6$ m a všude stejné výšky je vyříznut kruh o poloměru $r' = \frac{1}{3} r$, jehož střed je ve $\frac{2}{3}$ poloměru kotouče (počítáno od středu kotouče). Určete polohu těžiště zbylého tělesa.

C - 8. Dvě lodky se počnou pohybovat současně na klidném jezeře týmž směrem. Lodka A vyjede z místa X k místu Y , lodka B vyjede z místa Y ; vzdálenost $XY = d = 6$ m. Lodka se pohybuje tak, že za první vteřinu urazí 2 m a v každé další vteřině o $\frac{1}{4}$ m více než ve vteřině předcházející. Lodka B se pohybuje rovnoměrně rychlostí $v_2 = 2$ m/s. Kdy dohoní lodka A lodku B ?

C - 9. Určete hustotu válečku: a) přímou metodou (výšku válečku změřte posuvným měřítkem s noniem, průměr mikrometrem, hmotu zjistíte vážením s přesností na 1 cg); b) užitím Archimedova zákona (vážením s přesností na 1 cg).

Téma k prostudování pro první kolo soutěže:

Chyba veličiny měřené a vypočtené.

Text bude uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Závěr devátého ročníku Matematické olympiády

V sobotu 14. května 1960 se v budově Matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze konala soutěž III. kola devátého ročníku Matematické olympiády (MO). Pro tuto závěrečnou část soutěže loňského ročníku MO bylo po návrhu Krajských výborů MO vybráno Ústředním výborem MO celkem 64 žáků (v tom 12 žákyň) posledních tříd jedenáctiletých i čtvrtých ročníků škol průmyslových z celé republiky, kteří úspěšně absolvovali II. kolo MO. Ze 62 účastníků (v tom 10 žákyň) III. kola bylo 42 úspěšných; z nich nejlepších 20 bylo podle organizačního řádu MO prohlášeno vítězi devátého ročníku MO.

Pořadí těchto vítězů:

1. *Petr Tomšů*, 4. b. roč. prům. školy, Kopřivnice;
2. *Ivan Korec*, 11. a tř. jsš, Partizánské;
- 3.—4. *Pavel Nosek*, 11. a tř. jsš, Hradec Králové a
Jiří Souček, 11. a tř. 21. jsš, Na Santošce 1, Praha XVI;
- 5.—7. *Josef Komrská*, 11. tř. jsš, Týn nad Vltavou,
Josef Kořenář, 11. tř. jsš, Vodňany a
Jan Veselý, 11. tř. jsš, Matiční 5, Ostrava I;
8. *Ladislav Baran*, 11. b tř. dsš, Jilemnického n. 1, Žilina;
- 9.—11. *Jiří Cihlář*, 11. a tř. jsš, Na Skřivánku, Ústí nad Labem,
Petr Köhler, 11. a tř. dsš, ul. Niny Popové, Ostrava II a
Oldřich Vajsar, 11. a tř. jsš, Třebíč;
- 12.—15. *Pavel Bálek*, 11. a tř. jsš, Chrudim,
Josef Kolář, 11. jsš, Roudnice,
Milan Kulíček, 11. b tř. jsš, Trutnov a
Karel Wichterle, 11. a tř. jsš, Jeseník;
- 16.—20. *Vladislav Čápek*, 11. b tř. jsš, Sanytrova 10, Praha 1,
Kristína Dudašková, 11. b dsš, Vrútocká 18, Bratislava-Trnávka,
Alois Klíč, 11. b jsš, Boskovice,
Eduard Krumpolc, 11. b jsš, Kyjov a
Kamil Sarka, 11. a jsš, Žarnovica, kraj B. Bystrica.

Ministerstvo školství a kultury odměnilo tyto vítěze na návrh Ústředního výboru MO věcnými cenami podle vlastního výběru vítězů; kromě toho vítězové dostali značné peněžní částky na nákup odborné literatury. Každý z nich dostal dále umělecky provedený diplom, podepsaný ministrem školství a kultury a předsedou Ústředního výboru MO. Z těchto dvaceti vítězů soutěže bylo také ministerstvu školství a kultury navrženo 15 studentů pro výběr čs. účastníků na II. mezinárodní matematické olympiádě, jež se konala už po druhé v Rumunsku¹⁾. Jim všem zaslala Jednota čs. matematiků a fyziků vhodné příručky pro další studium matematiky. Redakce Rozhledů přeje vítězům, z nichž většina jsou čtenáři našeho časopisu, mnoho úspěchů v dalším studiu.

V III. kole MO byly zadány tyto úlohy

1. Najděte všechna reálná čísla x , pro něž platí nerovnost

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

2. Daná je kocka $ABCD A' B' C' D'$, kde $ABCD$ je štvorec a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Na priamke AA' leží bod P .

Zostrojte stred S guľovej plochy, ktorá je súmerná podľa roviny ABB' , prechádza bodom P a dotýka sa priamok $p \equiv AB$, $q \equiv A'D'$.

Urobte diskusiu o riešiteľnosti úlohy pre rôzne polohy bodu P na priamke AA' .

3. V rovině jsou dány dva různé body A , M o vzdálenosti d . Dále je dáno kladné číslo v . V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC .

Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení úlohy.

Může být řešením místo kosočtverce čtverec?

4. Zistite, pre ktoré reálne čísla x je definovaná funkcia

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}$$

a zostrojte jej graf.

Soutěž III. kola MO byla odpoledne 14. května 1960 zakončena slavnostní besedou za předsednictví akademika Josefa Nováka a za účasti širší veřejnosti. Na besedě promluvil rektor Českého vysokého učení technického v Praze akademik Theodor Ježdík o významu matematiky pro technické vědy a doc. dr. František Kysela, prorektor ČVUT o možnostech studia na vysokých školách technických. Beseda skončila diskusí, v níž se dostalo olympionikům zejména poučení o naukách studovaných na vysokých technických školách a o způsobu jejich studia.

Večer téhož dne navštívili olympionici v Armádním divadle na Vinohradech divadelní představení. Před odjezdem do svých domovů si ještě v neděli 15. května 1960 prohlédli pod vedením mládežnických pracovníků památnosti a zajímavosti hlavního města.

Doc. Josef Holubář, Praha

¹⁾ O průběhu a výsledku II. mezinárodní matematické olympiády se čtenáři dozvědí v dalším čísle Rozhledů.

Řešení zajímavé úlohy z teorie čísel

Je dána úloha:

Najděte šesticiferné číslo, které znásobeno čísly 2, 3, 4, 5, 6 dá rovněž šesticiferná čísla, napsaná týmiž číslicemi, avšak v jiném pořádku¹⁾.

Budiž hledané číslo $N = a_6a_5a_4a_3a_2a_1$, neboli

$$N = 100\,000a_6 + 10\,000a_5 + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1.$$

Hledané číslo a jeho násobky sestavíme do této tabulky

Tab. I.

$$\begin{array}{l} N = a_6a_5a_4a_3a_2a_1 \\ 2N = \\ 3N = \\ 4N = \\ 5N = \\ 6N = \end{array}$$

Číslice a_6 nemůže být nulou, neboť pak by číslo N nebylo šesticiferné, nýbrž jen pěticeiferné. Tato číslice nemůže také být 2 nebo vyšší, neboť pak by $5N$ bylo číslo sedmimístné. Je tudíž

$$a_6 = 1 \tag{1}$$

Čísla vyznačená v naší tabulce prvními číslicemi zleva vzrůstají a u každého následujícího čísla je první číslice zleva větší než u předcházejícího. Je tudíž v prvním sloupci zleva šest různých číslic srovnaných podle velikosti. Tytéž číslice jsou také šesti číslicemi hledaného čísla N , avšak seskupenými v jiném pořádku. Mezi těmito číslicemi není 0.

Číslice a_1 nemůže být 0, neboť 0 se nevyskytuje mezi číslicemi hledaného čísla; a_1 nemůže také být 1, neboť již číslice a_6 je 1 a číslice hledaného čísla jsou různé. Číslice a_1 nemůže však být také číslo sudé, neboť pak by číslo $5N$ končilo nulou. Rovněž a_1 se nemůže rovnat 5, neboť pak by $2N$ končilo nulou. Zbývají tudíž pro číslici a_1 jen liché

¹⁾ Toto řešení uveřejnil I. Ja. Depman v 1. kapitole své knihy *Rassказы o rešenii zadach*.

číslíce 3, 7 a 9. Kdyby a_1 se rovnalo 3, byl by první sloupec zprava 3, 6, 9, 2, 5, 8. To je však šest nových číslic, mezi nimiž není 1. Protože však a_6 je 1 a protože se v tabulce má vystřídat jen šest číslic hledaného čísla, nemůže $a_1 = 3$. Z téhož důvodu nemůže $a_1 = 9$, neboť pak by první sloupec zprava byl vytvořen číslicemi 9, 8, 7, 6, 5, 4, tedy zase šesti dalšími číslicemi, mezi nimiž není 1. Zbývá tudíž pro a_1 jen číslice 7. I platí:

$$a_1 = 7 \quad (2)$$

První sloupec zprava tvoří proto číslice 7, 4, 1, 8, 5, 2. Lze tudíž psát

Tab. II.

N	$= 1a_5a_4a_3a_27$
$2N$	$= 2. \quad 4$
$3N$	$= 4. \quad 1$
$4N$	$= 5. \quad 8$
$5N$	$= 7. \quad 5$
$6N$	$= 8. \quad 2$

Dejme tomu, že v číslech $4N$ a $6N$ na třetím místě zleva se vyskytuje též číslice b , čili že tato čísla jsou $6N = 8abcd2$; $4N = 5ebfg8$.

Odečteme-li tato dvě čísla, dostaneme $6N - 4N = 2N$. Rozdíl pravých stran hořených rovnic má na třetím místě zleva buď 0, je-li $c > f$, nebo 9, je-li $c < f$. Protože se však ani 0, ani 9 mezi číslicemi hledaného čísla N nevyskytuje, nemohou tyto číslice stát na třetím místě zleva čísla $2N$. Není tudíž náš předpoklad možný. Podobně bychom mohli pro kteroukoli dvojici kteréhokoli sloupce ukázat, že nemůže být vytvořena stejnými číslicemi. Z toho plyne, že v každém sloupci je šest různých číslic a tedy všech šest číslic hledaného čísla N . Proto součet šesti číslic každého sloupce je stejný a rovná se součtu číslic prvního sloupce zleva, tj. 27. Sečteme-li levou stranu tabulky II, dostaneme součet $21N$. Součet pravé strany dá $2\,700\,000 + 270\,000 + 27\,000 + + 2\,700 + 270 + 27 = 2\,999\,997$, neboli $21N = 2\,999\,997$, čili $N = 2\,999\,997 : 21 = 142\,857$. Je tedy naše tabulka

Tab. III.

N	$= 142857$
$2N$	$= 285714$
$3N$	$= 428571$
$4N$	$= 571428$
$5N$	$= 714285$
$6N$	$= 857142$

Srovnáme-li tato čísla do kruhu v tomto pořádku: N , $3N$, $2N$, $6N$, $4N$, $5N$, vidíme, že jsou tato čísla vytvořena cyklickou záměnou číslic čísla N .

A ještě jednu podivuhodnou vlastnost vykazují uvedená čísla. Vytvořme tyto podíly $1 : 7 = 0,142\,857$; $2 : 7 = 0,285\,714$; $3 : 7 = 0,428\,571$; $4 : 7 = 0,571\,428$; $5 : 7 = 0,714\,285$; $6 : 7 = 0,857\,142$. Čísla naší tabulky jsou periody těchto podílů.

Dr. Quido Vetter

Recenze

Inž. A. Melezinek: Základy radiotechnického měření

Příručka má 312 stran malého formátu, 256 obrázků. SNTL Praha 1959. Cena za brož. výtisk 10,80 Kčs.

Vyšla jako 28. svazek souboru *Elektrotechnická minima* a je určena širokému okruhu pracovníků v radiotechnickém průmyslu i radioamatérům. Poskytne však také dobrou službu našim učitelům fyziky.

Kniha je rozdělena do dvou částí. Prvá část popisuje měřicí přístroje. Po krátkém úvodu o účelu, přesnosti a chybách radiotechnických měření, popisuje základní elektrotechnická měřidla ručková, různé typy ohmmetrů, můstky na měření odporů, indukčností a kapacit a všechny u nás dostupné elektronkové přístroje, které se vyrábějí jak u nás, tak i v NDR. Zejména popisuje elektronkový oscilograf a jeho zesilovač, elektronkové voltmetry, frekventoměry, kmitočtové modulátory, zkoušeče elektronek, elektronkové přepínače, měřiče zkreslení, zdroje a stabilizátory napětí, i speciální měřicí přístroje.

V druhé části autor popisuje různé měřicí metody pro měření napětí a proudu, pro měření odporů, kapacit, indukčnosti a vzájemné indukčnosti, výkonu, fázového posunutí, činitele jakosti, kmitočtového zdvihu, hloubky modulace a určování rezonančních křivek. Podrobněji pojednává o proměřování elektronek, o měřeních na usměrňovačích, zesilovačích, rozhlasových přijímačích a na nahrávacích zařízeních.

Je patrné, že příručku psal skutečný odborník. Podává velmi pěkný přehled o dnešním stavu měřicí techniky v radiotechnice a o přístrojích, které se dnes vyrábějí pro tento účel. Proto poskytne velmi cenné informace i našim učitelům fyziky a studentům radioamatérům.

K. Šoler

Osmý ročník Matematické olympiády

Počátkem letošního léta vyšla ve Státním pedagogickém nakladatelství aktualita, která má velký význam pro rozvoj zájmu o matematiku vůbec a pro žákovskou Matematickou olympiádu bezprostředně.

Hlavním autorem brožury je opět **R u d o l f Z e l i n k a**, jeho spolupracovníky jsou vesměs členové ústředního výboru Matematické olympiády a **T i b e r i u R o m a n**, docent techniky v Bukurešti, který přispěl popisem vzniku a průběhu **P r v n í m e z i n á r o d n í m a t e m a t i c k é o l y m p i á d y** v Rumunsku v r. 1959. Tuto partii doplnil R. Zelinka dalšími údaji o soutěži již se vedle nás účastnily Sovětský svaz a všechny lidově demokratické státy Evropy mimo Albánii - a přehledem mezinárodních olympijských úloh v jejím prvním ročníku.

Brožura o MO je vydávána pravidelně od roku 1953. Je určena hlavně pro žáky jedenáctiletých nebo dvanáctiletých středních škol, osmou či devátou třídou počínaje a poslední konče. Dalšími účastníky soutěže a tedy i čtenáři knížky o ní jsou žáci I. až IV. ročníků škol odborných.

Účel publikace je především instrukční a propagační. Má oživit i prohloubit zájem studentů o důležitou matematickou soutěž a zároveň dát jim také vzorová řešení úloh jako návod usnadňující přístup k nově zahájenému ročníku. Propagace MO, soustavně pěstovaná, získává část žactva všeobecně vzdělávacích a odborných škol pro elementární matematiku, jejíž znalost je podmínkou úspěšného studia tohoto předmětu na vyšších a vysokých školách, především ovšem technického směru. V dnešní době prudkého technického rozvoje nemůže snad vůbec být odborný a vědecký význam matematiky přespříliš propagován nebo jinak přeceněn. Matematika je uznaným základním kamenem všeho moderního exaktního vzdělání; s rychlejším růstem a prohlubováním matematických vědomostí zrychluje se současně i tempo technického pokroku. Proto také naše socialistická společnost dává tomuto vyučovacímu předmětu důležité místo v učebním rozvrhu na všech druzích škol a podporuje každý prostředek, který přispívá k propagaci matematiky a její popularitě v širokých vrstvách obyvatelstva.

A právě tady spočívá těžiště periodicky vycházející brožury o MO. Ta ve své nejdůležitější části obsahuje vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž tematika v jednotlivých kategoriích koresponduje s vyučovací náplní odpovídajících ročníků středních nebo odborných škol. Svým zpracováním a obsahem pomáhá nejen přímo soutěži, ale přispívá ke zvýšení vyučovacích výsledků v matematice.

Roční periodicitu brožury způsobuje, že její stálý hlavní autor má rozsáhlé zkušenosti. Tak se po všech stránkách neustále zvyšuje kvalita nově vycházejících publikací. Jako dříve, je i teď většina geometrických

partií jeho dílem, zatímco na algebraické části se podílí s učiteli praktiky ze všech krajů naší republiky i s vysokoškolskými pracovníky.

Celým svým vnitřním uspořádáním opakuje letošní brožura dřívější systém je však přitom rozšířena o novou kapitolu, která je zařazena jako poslední. S charakteristikou jednotlivých částí začneme však od začátku: *Úvodním slovem* připomíná autor jména dvou zasloužilých pracovníků na poli moderní matematiky, kteří nás opustili v průběhu posledního ročníku a kteří přitom tolik znamenají pro vznik a zdar prvních ročníků této soutěže. Jsou to akademici Eduard Čech a Jur Hronec; vděčná vzpomínka na ně zůstane proto zlatým písmem vryta do čela této naší soutěže.

První kapitola informuje přehledně o průběhu osmého ročníku MO, i o účasti jednotlivých krajů a typů škol. Všechny statistické údaje jsou tu zachyceny v několika tabulkách.

Kapitola druhá shrnuje zprávy o výsledcích jednotlivých kol soutěže. Pokračuje seznamem vítězů jednotlivých kategorií a končí vítězi celé soutěže.

V ústřední, tj. *třetí části* knihy, jsou řešeny příklady všech tří soutěžních kol v kategoriích A až D. Všechna řešení jsou vědecky přesná, vyčerpávají všechny podmínky daných úloh a jsou současně i návodnými ukázkami vzorného metodického postupu. Určité příklady, popřípadě některá z alternativních řešení - v celkovém rozsahu asi třetiny tohoto textu - jsou uvedeny slovensky. Slovenské texty přeložil a upravil doc. dr. Milan Kolibiar. Řešení jednotlivých geometrických úloh jsou tu jako každoročně doplněna četnými technickými obrázky, které odborně a názorně narýsoval opět Vlastimil Macháček.

Závěrečná čtvrtá kapitola je věnována *První mezinárodní matematické olympiádě v Rumunsku*. Vedle hlavního autora na ní pracoval i generální tajemník Společnosti pro matematické a fyzikální vědy Rumunské lidové republiky, doc. T. Roman. Velmi zajímavá a poučná je tu zpráva o našem umístění v mezinárodní matematické soutěži a typy příkladů, které byly pro tento účel mezinárodní matematickou komisí vybrány. Současně je uveden jakýsi perspektivní plán dalších ročníků mezinárodní MO, která byla letos ve svém druhém ročníku opět pořádána v Rumunsku. Ideově-výchovným zhodnocením významu mezinárodního olympijského soutěžení v matematice je knížka uzavřena.

Příručku v prodejnách Služby škole poznáte podle vkusného žlutočerného přebalu od Evy Feiglové.

Publikace vyšla v praktickém kapesním formátu a je k dostání za 4,75 Kčs.

Jaromír Dubský

Závěr IX. ročníku MO v Praze – ÚNV

Krajský výbor Matematické olympiády (KV-MO) pro oblast hl. m. Prahy uspořádal na závěr 2. kola 9. ročníku MO slavnostní rozdělení cen. Dne 9. června 1960 sešlo se v Národním klubu, jedné z místností Ústředního kulturního domu školství, vědy, umění a tisku v Praze 38 žáků jedenáctiletých a průmyslových škol, vítězných to řešitelů MO kategorie A, B, C.

Po zahájení slavnosti pohovořil o významu MO tajemník KV-MO R. Langhammer. Za ústřední výbor Matematické olympiády (ÚV-MO) pozdravil slavnost doc. Jos. Holubář a předal dvěma žákům diplom za vítězství ve třetím - celostátním - kole 9. ročníku MO.

Vítěz 2. kola - kategorie B, *Tomáš Jech*, žák 1. jedenáctileté střední školy v Praze 1, pohovořil o své práci a hodnotil letošní ročník soutěže:

„Vážené soudružky, vážení soudruzi, milí spolužáci, dovolte mi, abych zde řekl několik slov o svém úspěchu a zhodnotil letošní ročník MO. Letos se MO konala již po deváté. To, že se této soutěže každoročně účastní několik tisíc žáků odborných a jedenáctiletých škol, je důkazem o její velké popularitě. Vždyť také pro každého, kdo má o matematiku a technické obory hlubší zájem, je MO vítanou příležitostí prohloubit své znalosti matematiky a případně získat některá z hodnotných cen, jimiž jsou úspěšní řešitelé 2. resp. 3. kola odměňováni.

Letos byla MO uspořádána velmi pěkně. Příklady 1. i 2. kola byly zajímavé a doba, vymezená k jejich řešení, byla úměrná jejich obtížnosti. Pouze jedinou připomínku k organizaci soutěže bych zde rád uvedl. Totiž okolnost, že ve všech kategoriích probíhá soutěž ve stejný den, což nedovolí těm, kteří by případně chtěli řešit úlohy vyšší kategorie, zúčastnit se soutěže v obou kategoriích. Jinak se, myslím, všem řešitelům, obzvláště úspěšným, letošní soutěž líbila.

O svém úspěchu chci říci jen tolik: MO jsem se zúčastnil již po třetí. Předloni jsem skončil v obvodním kole kategorie D na 3. místě. Loni jsem byl úspěšným řešitelem kategorie C. Letošní vítězství mne skutečně překvapilo. Myslím, že mi při řešení příkladů také trochu pomohlo štěstí a že tohoto výsledku by právě tak mohl dosáhnout kterýkoliv z ostatních úspěšných řešitelů mé kategorie, neboť rozdíl mezi jejich a mými řešeními byl celkem nepatrný. Za to, že jsem dosáhl tohoto úspěchu, vděčím především své vyučující matematiky s. prof. Dlouhé, která mě učí již čtvrtý rok. Svým žákům se věnuje skutečně obětavě a svědomitě.

Své znalosti matematiky si prohlubuji četbou časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*, který odebíráám již druhý rok. Je to velmi dobrý časopis a obsahuje řadu zajímavých článků a úloh. V poslední době studuji matematiku z vysokoškolských učebnic prof. Jarníka. Matematické se chci věnovat i po maturitě; rád bych navštěvoval matematicko-fyzikální fakultu Karlovy university.

Závěrem děkuji jménem všech soutěžících pořadatelům soutěže za jejich obětavou práci a Vám, kteří se zúčastníte příštího ročníku MO, přeji co největší úspěch.“

Na závěr slavnosti byly pražští olympionici pohoštěni. Člen KV-MO, dr. Fr. Běloun popřál pak vítězům mnoho zdarů a úspěchů.

O Jednotě československých matematiků a fyziků

Jednota československých matematiků a fyziků (J Č M F) byla založena téměř před sto lety v r. 1862. Je jednou z našich nejstarších a nejúspěšnějších vědeckých společností.

Sloužila a slouží pokroku a základním přírodním vědám. Obezřetným dlouholetým vedením řadou vynikajících dobrovolných pracovníků získala u nás i za hranicemi uznání naší vědě. Z řad Jednoty vyšli téměř všichni čeští i slovenští vědečtí pracovníci v matematice, fyzice i astronomii. Z nepatrných a po generace strádaných příspěvků a pečlivým hospodařením dosáhla i hospodářských úspěchů.

Nyní je Jednota vědeckou výběrovou společností, přidruženou k Československé akademii věd. Sdružuje odborné a vědecké pracovníky z oboru matematiky, fyziky i příbuzných věd a tak napomáhá rozvoji vědy i jejímu spojení s praxí.

Citujme z organizačního řádu, jaké úkoly má Jednota:

Podněcovat a pěstovat vědeckou a odbornou práci, zejména se zřetelem na potřeby výstavby socialismu. Utužovat spolupráci vědy s praxí a přenášet nové poznatky vědy do širokých řad pracovníků. Podněcovat i podporovat vědeckou a odbornou publikační činnost. Zvyšovat odbornou a ideologickou úroveň vyučování. Pečovat o zvyšování odborné a ideologické úrovně svých členů. Propagovat a popularizovat výsledky pokrokové vědy.

Proto Jednota pořádá přednášky, diskuse, zájezdy, exkurze, konference, sjezdy i výstavy a vydává časopisy a jiné publikace. Spolupracuje s ministerstvem školství a kultury, vysokými školami, školami všeobecně vzdělávacími i odbornými a s kulturními institucemi.

Členové Jednoty jsou činní, mimořádní a čestní. Činným členem se může stát vědecký nebo odborný pracovník v oboru matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky, astronomie, geofyziky, meteorologie, geodézie, fotogrammetrie, vědecké fotografie i v oborech příbuzných. Mimořádným členem se může stát student starší 17 let. Členové mohou se účastnit vědeckých a kulturních podniků Jednoty a přednostně získávat některé publikace. Dostávají zdarma členský časopis.

Veškerou činnost J Č M F řídí její ústřední výbor složený z předsedy (nyní je jím ministr školství a kultury doc. dr. F. Kahuda), dvou místopředsedů, jednatele, hospodáře a dalších členů. Na Slovensku vyvíjí svoji činnost J Č M F v součinnosti se Slovenskou akademií věd. Slovenský výbor J Č M F je v Bratislavě. Ve větších městech zřizuje J Č M F své pobočky.

Z uvedeného stručného popisu je zřejmé, jak široké je pole činnosti Jednoty. Každý učitel matematiky, fyziky a příbuzných oborů všech druhů škol by měl být členem J Č M F.

Zdůrazňujeme, že naše studující mládež najde v J Č M F vhodné prostředí pro svůj odborný a později i vědecký růst, pokud má zájem o uvedené vědy.

Členské přihlášky přijímá a veškeré dotazy zodpovídá kancelář Jednoty československých matematiků a fyziků, Praha 1, Malá Strana, Maltézské nám. 1, telefon 40892.

M. M.

OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

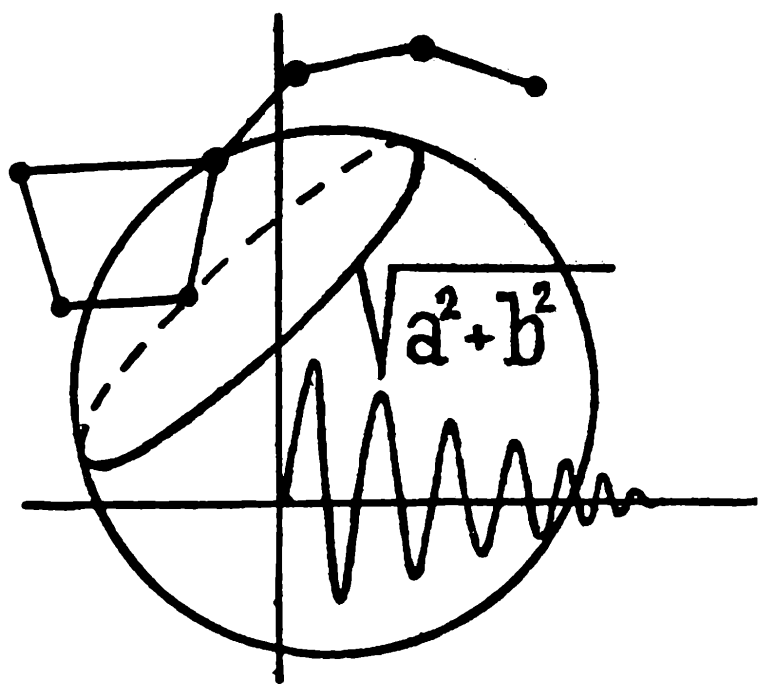
Každoročně vycházející brožura o této důležité celostátní soutěži je už letos k dostání ve všech prodejnách Služby škole. Obsahuje vzorová řešení olympijských úloh, která jsou návodem pro přístup k nově probíhajícímu ročníku soutěže. Vedle zhodnocení naší národní olympiády obsahuje tato publikace i zprávu o průběhu I. mezinárodní olympiády, která byla v r. 1959 v Rumunsku.

Tato důležitá příručka pro všechny olympioniky vyšla ve Státním pedagogickém nakladatelství v praktickém kapesním formátu za cenu 4,75 Kčs.

**Upozorňujeme své čtenáře i přispěvatele
na změnu adresy: Redakce Rozhledů mate-
maticko-fyzikálních, Praha 2, Na bojišti 3,
telefon 22 52 86.**

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



3

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 3

Toto číslo vyšlo 15. listopadu 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

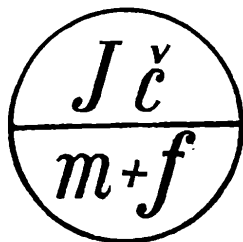
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H

T. Klein: Čo priniesol objav neeuklidovskej geometrie (Dokončení)	97
J. Straka: Neurčité rovnice (Pokračování)	99
Inž. J. Klír: Boolova algebra (Dokončení)	102
O. Jeništa: Obrisy rotačních ploch v rovnoběžném promítání pravoúhlém	106
CSc L. Pekárek: Plazma a řízená termionukleární reakce (Dokončení)	111
O. Lepil: Atom vodíku a jeho spektrum	117
Úlohy k řešení	122
Řešení úloh z minulého ročníku	123
Seznam řešitelů úloh z ročníku 1959/60	133
M. Koman: Dvě úlohy ze zábavné matematiky	134
Řešení zábavných úloh z minulých čísel	140
Recenze	142
I. Korec: Druhá mezinárodní matematická olympiáda 1960	143
II. soutěžní úlohy I. kola MO	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-12*01552. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

Matematika

Tomáš Klein, Zvolen:

Čo priniesol objav neeuklidovskej geometrie

(Dokončení)

Po objave Bolyai-Lobačevského neeuklidovskej geometrie prišiel B. Riemann (1826—1866) metódami diferenciálno-geometrickými k ďalšiemu typu neeuklidovskej geometrie, v ktorej pozmenený 5. Euklidov postulát by znel: Bodom mimo danú priamku nemožno viesť žiadnu priamku, ktorá by danú nepretínala. V tejto Riemannovej geometrii neplatia ovšem ani všetky prvé štyri Euklidove postuláty. Platia tu ale vety ako:

Dvoma rôznymi bodmi nie je jednoznačne určená priamka.

Každé dve priamky sa pretínajú.

Niektorým bodom mimo priamku možno k nej viesť nekonečne mnoho kolmíc.

Súčet uhlov v trojuholníku je väčší ako dva pravé. Atď.

Ucelenú teóriu všetkých týchto typov geometrií podal potom metódami projektívnej geometrie nemecký matematik Felix Klein (1849—1925). Roztriedil tieto geometrie a nazval geometriu Bolyai-Lobačevského *hyperbolickou geometriou* a Riemannovu geometriu *eliptickou geometriou*.

Túto všeobecnú neeuklidovskú geometriu použil Einstein na kozmický priestor pri budovaní svojej teórie relativity. Totiž, keď napr. sledujeme svetelný lúč prechádzajúci kozmickým priestorom, ktorý je nesúrodý (v rôznych častiach kozmického priestoru je rôzna hustota hmoty), jeho dráha nie je priamka, ale nejaká krivka. Tento lúč sa neriadi zákonami Euklidovej geometrie, ale zákonami všeobecnej neeuklidov-

skej geometrie na nejakej krivej ploche a len v malom okolí nejakého bodu - tejto plochy - napr. v našom okolí, v ktorom v prvom priblížení zamieňame geometriu na ploche s geometriou v dotykovej rovine, sa riadi zákonami Euklidovej geometrie.

Teda vznik neeuklidovskej geometrie nepodvrátil Euklidovu geometriu, ale ju podstatne rozšíril, zovšeobecnil, dal nám možnosť lepšie a presnejšie skúmať širší svet okolo nás - kozmické priestory, v procese poznávania priblížil nás o krôčik ďalej k pravde.

Vznikom neeuklidovskej geometrie konečne bol rozriešený viac ako 2000 ročný problém o rovnobežkách, problém 5. Euklidovho postulátu nazývaný tiež „škandalom základov matematiky“ alebo „škvrnou na krásnom tele matematiky“. Bolo tým dokázané; že sa 5. Euklidov postulát z predchádzajúcich štyroch dokázať nedá. Tým boli objasnené mnohé nejasnosti v základoch geometrie a súčasne tento objav si vyžadoval nový pohľad na mnohé veci, ktoré boli ponímané falošne. Vznikla tak v 19. storočí akási revízia matematiky, ktorá spolu s rodiacou sa matematickou logikou dala podnet k vzniku novej matematickej disciplíny *Z á k l a d y m a t e m a t i k y*. Táto zasa dala podnet k dôslednému prepracovaniu axiomatickej metódy, ktorá bola do tých čias nedocenená a ktorá sa stala mohutným nástrojom matematiky.

Nemecký matematik D. Hilbert (1862—1943) previedol revíziu Euklidových *Z á k l a d o v* a vo svojej knihe *G r u n d l a g e n d e r G e o m e t r i e* (Základy geometrie) podal dôsledný axiomatický výklad geometrie.

Axiomatickej metódy sa začalo používať nielen na geometriu, ale i ostatné matematické disciplíny, ktoré pomocou axiomatiky po stáročia získavané poznatky zhrňovali, logicky usporiadúvali do ucelených, logicky usporiadaných systémov. A nielen to. Vďaka axiomatickej metóde vznikli nové vedné obory ako napr. *t e ó r i a p r a v d e p o d o b n o s t i*, ktorá je dnes mohutným nástrojom matematickej štatistiky, teoretickej fyziky a celého radu technických disciplín. Pravdepodobnosť prv než dostala pevný axiomatický základ od veľkého sovietskeho matematika A. N. Kolmogorova bola len tzv. teóriou hazardných hier a používala sa iba v teórii vyrovnávaní chýb.

A hádam najväčším a najcennejším plodom, ktorý vo svojom dôsledku splodil objav neeuklidovskej geometrie je zovšeobecnenie pojmu priestoru. Treba si uvedomiť, že až do čias objavu neeuklidovskej geometrie nielen fyzici, ale i matematici narábali iba s našim fyzikálnym trojrozmerným priestorom. Takmer súčasne s objavom neeuklidovskej geometrie začal sa v matematike plne uplatňovať jej dnešný charakteristický rys abstraktnosti a matematici vo svojich plodných úvahách dochádzajú k všeobecným pojmom ako je *t e ó r i a m n o ž í n*, *a b s t r a k t n é p r i e s t o r y* rôznych dimenzií a rôznych štruktúr,

algebraické telesá a pod. Vďaka práve tejto abstraktnosti, stojí dnes matematika medzi poprednými vedami ako jedna z najvyšších vedných disciplín. Vyšla z praxe, odpozorovala určité zákonitosti prírody, zhrňuje už existujúce a na pohľad od seba vzdialené teórie, abstrahuje ich spoločné jadro a postupným zovšeobecňovaním dochádza k novým dosiaľ neprebádaným oblastiam, k novým poznatkom, ktoré zhrňuje do určitých systémov, ktoré potom využívajú ostatné prírodné a technické vedy a tak plní svoje poslanie, ktoré už pred sto rokmi vyslovil práve J. Bolyai v závere nemeckého prekladu svojho *A p e n d i x u* *Autor je presvedčený o tom, že objasnením daného problému bol prevedený jeden z najdôležitejších a najvýznamnejších krokov k skutočnému obohateniu vedy a vzdelania a teda i k zlepšeniu ľudského osudu.*

LITERATÚRA

- K. Havlíček*: Sté výročí smrti Jánoše Bolyaie. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie; ČSAV, Praha 1960, roč. 5, čís. 3.
K. Havlíček a kolektiv: Cesty moderní matematiky. Malá moderní encyklopedie; Orbis, Praha 1960.
J. B. Pavlíček: Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského. Přírodovědecké vydavatelství; Praha 1953.
J. B. Pavlíček: Sto let od smrti Jánoše Bolyaie. Časopis pro pěstování matematiky; ČSAV, Praha 1960, sv. 85, čís. 2.
 V uvedenej literatúre najde záujemca i ďalšiu podrobnejšiu literatúru.

J o s e f S t r a k a, ČVUT, Praha:

Neurčité rovnice

(Pokračování)

III

Hledejme kladná celočíselná řešení neurčité rovnice 2. stupně tvaru

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (23)$$

Geometricky to znamená, nalézt pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami x , y a přeponou z s celočíselnými stranami, které se nazývají *P y t h a g o r o v y t r o j ú h e l n í k y*. Nejprve budeme hledat jen taková řešení rovnice (23), kde x , y , z jsou nesoudělná. Tato řešení nazveme *p r i m i t i v n í a p ř í s l u š n ý t r o j ú h e l n í k p r i m i t i v n í P y t h a g o r ů v t r o j ú h e l n í k*. Ostatní řešení rovnice (23) dostaneme z primitivních řešení násobením libovolným celým kladným číslem. Je-li totiž

$D > 1$ největší společný dělitel čísel x, y, z , můžeme psát $x = D\bar{x}$, $y = D\bar{y}$, $z = D\bar{z}$, kde čísla $\bar{x} = \frac{x}{D}$, $\bar{y} = \frac{y}{D}$, $\bar{z} = \frac{z}{D}$ jsou podle věty 8. nesoudělná. Dosadíme-li do rovnice (23) za x, y, z a krátíme D^2 , vyjde $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{z}^2$, takže $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ jsou vskutku řešením rovnice (23). Jinak řečeno, je každý Pythagorův trojúhelník podobný primitivnímu Pythagorovu trojúhelníku s koeficientem podobnosti D .

Hledáme-li tedy primitivní, tj. nesoudělná řešení x, y, z rovnice (23), je zřejmé, že obě čísla x, y nemohou být zároveň sudá ani lichá.

a) Kdyby obě čísla byla sudá, mohli bychom psát $x = 2k$, $y = 2l$, kde k, l jsou celá kladná čísla. Pak by bylo $x^2 = 4k^2$, $y^2 = 4l^2$, čili $z^2 = x^2 + y^2 = 4(k^2 + l^2)$. Protože čtverec čísla z je dělitelný čtyřmi, bylo by z číslo sudé a čísla x, y, z by byla soudělná aspoň dvěma proti předpokladu.

b) Kdyby obě čísla byla lichá, mohli bychom psát $x = 2r + 1$, $y = 2h + 1$, kde r, h jsou celá kladná čísla. Pak by bylo $x^2 = 4r^2 + 4r + 1$, $y^2 = 4h^2 + 4h + 1$, čili

$$z^2 = x^2 + y^2 = 4(r^2 + h^2 + r + h) + 2. \quad (24)$$

Číslo z^2 by bylo sudé. Protože jediné čtverec sudého čísla je sudý (dokonce dělitelný čtyřmi), muselo by být číslo z sudé. Potom však jeho čtverec by musel být dělitelný čtyřmi, ale to odporuje vztahu (24).

Z čísel x, y je tedy jedno sudé, druhé liché, číslo z je liché. Předpokládejme, že číslo x je sudé, y liché. V opačném případě bychom zaměnili označení. Rovnici (23) píšme ve tvaru

$$(z + y)(z - y) = x^2 \quad (25)$$

a po dělení čtyřmi

$$\frac{1}{2}(z + y) \cdot \frac{1}{2}(z - y) = \frac{1}{4}x^2. \quad (26)$$

Čísla z, y jsou obě lichá, čísla $\frac{1}{2}(z + y)$, $\frac{1}{2}(z - y)$ jsou celá kladná a nesoudělná. Je ovšem $z > y$, neboť přepona je větší než odvěsna. Kdyby totiž čísla $\frac{1}{2}(z + y)$, $\frac{1}{2}(z - y)$ měla společného dělitele $d > 1$, pak by platilo $\frac{1}{2}(z + y) = dw$, $\frac{1}{2}(z - y) = dt$, kde $w > t$ jsou celá čísla, čili $z = (w + t)d$, $y = (w - t)d$. Číslo d by bylo společným dělitelem čísel z, y , tím i čísel $z + y, z - y$ a tedy i čísla x podle rovnice (25). Čísla x, y, z by byla soudělná aspoň dvěma proti předpokladu. Podle rovnice (26) je číslo $\frac{1}{4}x^2$ rozloženo na součin dvou nesoudělných činitelů.

Je-li q prvočinitel čísla $\frac{1}{2}(z + y)$ (ovšem q není dělitelem čísla $\frac{1}{2}(z - y)$, jinak by obě čísla byla soudělná číslem q , to však nenastane), je též prvočinitelem čísla $\frac{1}{4}x^2$, které je násobkem čísla $\frac{1}{2}(z + y)$. Číslo $\frac{1}{4}x^2$ je však čtverec čísla $\frac{1}{2}x$ a proto v prvočíselném rozkladu čísla $\frac{1}{4}x^2 = (\frac{1}{2}x)^2$ jsou prvočinitelé pouze v sudých mocninách. Je tedy prvočinitel q v sudé mocnině. Tuto úvahu lze provést pro každého prvoči-

nitele čísel $\frac{1}{2}(z + y)$, $\frac{1}{2}(z - y)$. Prvočinitelé obou těchto čísel jsou v sudých mocninách a proto každé z těchto dvou čísel je čtvercem celého čísla. Můžeme tedy položit

$$\frac{1}{2}(z + y) = u^2, \quad \frac{1}{2}(z - y) = v^2, \quad \text{potom } \frac{1}{4}x^2 = u^2v^2.$$

Z těchto vztahů vyjádříme x , y , z . Všechna primitivní kladná řešení rovnice (23) mají tvar

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2, \quad (27)$$

kde $u > v > 0$, u , v jsou nesoudělná a nejsou obě lichá. Kdyby totiž čísla u , v byla zároveň lichá, byla by čísla y , z sudá proti předpokladu. Rovnice (27) udávají všechny primitivní Pythagorovy trojúhelníky. Všechny Pythagorovy trojúhelníky dostaneme z rovnic

$$x = 2kuv, \quad y = k(u^2 - v^2), \quad z = k(u^2 + v^2), \quad (28)$$

kde k je celé kladné, $u > v$ nesoudělná a nejsou obě lichá.

Dosazením se přesvědčíme, že každá trojice čísel x , y , z , která vyhovuje rovnicím (28) při libovolné volbě čísel k , u , v je řešením rovnice (23). Např. pro $u = 2$, $v = 1$, $k = 1$ vyjde $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$; pro $u = 4$, $v = 1$, $k = 2$ dostaneme $x = 16$, $y = 30$, $z = 34$ apod.

Kdybychom žádali všechna řešení rovnice (23) bez ohledu na geometrickou interpretaci, mohli bychom ve vzorcích připustit jakékoliv celé číslo k (ne jenom kladné).

Příklad 6. Určíme všechny Pythagorovy trojúhelníky tak, aby jejich odvěsna x byla aritmetickým průměrem zbývajících odvěsny a přepony.

Podle rovnic (28) dostaneme podmínku

$$2kuv = ku^2$$

Položíme-li $k = 1$, tj. hledáme-li primitivní řešení, vyjde po dělení číslem u

$$2v = u. \quad (29)$$

Vztah (29) vzhledem k podmínkám pro čísla u , v v rovnicích (28) splní čísla $u = 2$, $v = 1$. Hledaný primitivní Pythagorův trojúhelník má strany $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$ a ostatní pravoúhlé trojúhelníky, podobné s primitivním, mají strany $x = 4k$, $y = 3k$, $z = 5k$, kde k je číslo celé kladné. Zároveň je vidět, že každý z nalezených pravoúhlých trojúhelníků má obvod $12k$. Kdybychom chtěli, aby určitý z nalezených trojúhelníků měl obvod $2s$, kde s je celé kladné číslo, dostali bychom podmínku $12k = 2s$, odkud vyjde $s = 6k$. Museli bychom číslo s volit tak, aby bylo násobkem šesti. Žádáme-li např. obvod $2s = 72$, dostaneme $k = 6$, takže pravoúhlý trojúhelník o stranách $x = 24$, $y = 18$, $z = 30$ má obvod $2s = 72$.

(Dokončení)

Booleova algebra

(Dokončení)

4. Výrokotvorné funktoři

Prostředky, kterými z jednoduchých výroků vytváříme výroky nové, jsou nazývány *v ý r o k o t v o r n ý m i f u n k t o r y*. Výše uvedené spojky *nebo* a *a* nejsou jedinými výrokotvornými funktoři. Počet možných funktorů závisí na tom, kolik jednoduchých výroků spojujeme. Pro jeden výrok existují čtyři funktoři (tab. I), z nichž nejdůležitější je funktor vytvářející negaci. Pro dva výroky vzrůstá počet funktorů na 16 (tab. II), z nichž nejužívanějšími jsou funktoři vytvářející logický součet a součin. Z dalších se často užívá např. tzv. *e k v i v a l e n c e* $\equiv$, *n e e k v i v a l e n c e* $\neq$ a tzv. *Shefferův funktor* |

Tab. I. Funktoři jedné proměnné

A	p	A	$\bar{A}$	n
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Tab. II. Funktoři dvou proměnných

A	B	p	$+$	$\leftarrow$	A	$\rightarrow$	B	$\equiv$		$ $	$\neq$	$\bar{B}$	$\leftrightarrow$	$\bar{A}$	$\leftarrow +$	$\cdot$	n
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Počet výrokotvorných funktorů udává počet různých Booleových funkcí. Pro n Booleových proměnných existuje 2^{2^n} různých funktorů, z nichž každému odpovídá jedna Booleova funkce. Místo tak velkého počtu funktorů, užíváme jich zpravidla pouze několik, neboť funktoři se dají na sebe vzájemně převádět. Platí např.

$$A | B = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}.$$

Dá se sice ukázat, že libovolnou Booleovu funkci je možno vyjádřit i pouze pomocí jediného funktoru, a to již zmíněného funktoru Shefferova, zpravidla však vyjadřujeme Booleovy funkce pomocí tří funktorů, a to logického součtu, logického součinu a negace.

5. Kanonický rozvoj Booleovy funkce

Základní věta Booleovy algebry říká:

Jakoukoliv Booleovu funkci n Booleových proměnných lze vyjádřit jako součet součinů těchto proměnných, kde v kterémkoliv ze součinů se jednou vyskytuje každá z proměnných a to buď ve své původní hodnotě, nebo jako negace.

Uvedený způsob vyjádření Booleovy funkce se nazývá kanonickým rozvojem⁸⁾. Ukážeme na příkladě, jak lze pro Booleovu funkci danou tabulkou najít uvedený kanonický rozvoj. Mějme např. stanovit kanonický rozvoj, vyjadřující Booleovu funkci F tří Booleových proměnných, A, B, C , danou touto tabulkou:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Postupujeme tak, že procházíme shora dolů sloupec funkce F , při čemž uvažujeme pouze řádky, ve kterých daná funkce F nabývá hodnoty 1. Každému takovému řádku odpovídá jeden součinnový člen kanonického rozvoje. Proměnná, která má v příslušném řádku hodnotu 1, je v tomto členu zastoupena původní hodnotou, proměnná mající v příslušném řádku hodnotu 0, je zastoupena negací. Např. pro druhý řádek uvedené tabulky dostáváme složku $\bar{A}\bar{B}C$, pro pátý řádek složku $A\bar{B}\bar{C}$ a celá funkce má kanonický rozvoj:

$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

⁸⁾ Ve skutečnosti existuje ještě jeden kanonický rozvoj, který vyjadřuje Booleovu funkci jako součin součtů.

6. Základní pravidla Booleovy algebry

Booleovy funkce v kanonickém tvaru je možno upravovat podle potřeby pomocí jistých zákonů či pravidel, která v této algebře platí. Uvedme nyní bez důkazů nejdůležitější zákony Booleovy algebry (některé z nich jsou v podstatě axiomy):

1. Zákon komutativní

$$A + B = B + A ,$$
$$AB = BA$$

2. Zákon asociativní

$$A (BC) = (AB) C ,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3. Zákon distributivní

$$A (B + C) = AB + AC ,$$
$$A \cdot (BC) = (A + B) (A + C) .$$

4. Zákon dvojité negace

$$\overline{\overline{A}} = A .$$

5. Zákon vyloučeného třetího

$$A + \overline{A} = 1 ,$$
$$A\overline{A} = 0 .$$

6. Zákony agresivnosti hodnot 0 a 1:

$$A \cdot 0 = 0 ,$$
$$A + 1 = 1$$

7. Zákony neutrálnosti hodnot 0 a 1:

$$A \cdot 1 = A ,$$
$$A + 0 = A$$

8. Zákony absorpce:

$$A + A = A ,$$
$$AA = A ,$$
$$A (A + B) = A ,$$
$$A + AB = A .$$

9. Zákony absorpce negace

$$A + \overline{A}B = A + B ,$$

$$\bar{A} + AB = \bar{A} + B.$$

10. De Morganovy zákony o vytvoření negace:

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B},$$

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}.$$

Ověření jakéhokoliv vztahu v Booleově algebře je možno provést pomocí podobných tabulek, jaké jsme uvedli pro logický součet a součin. Ukažme např. ověření zákona absorpce negace

$$A + \bar{A}B = A + B$$

podle této tabulky:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}B$	$A + \bar{A}B$	$A + B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Nejdříve jsme stanovili hodnoty $\bar{A}$ k hodnotám A , pak podle tabulky logického součinu jsme stanovili hodnoty výrazu $\bar{A}B$ a nakonec podle tabulky logického součtu hodnoty celého výrazu $A + \bar{A}B$. Hodnoty výrazu $A + B$ jsme určili jednoduše podle tabulky logického součtu. Protože oba výrazy, tj. $A + \bar{A}B$ a $A + B$, mají v tabulce stejné hodnoty, je tím prokázána jejich rovnost.

7. Závěr

V článku tak malého rozsahu jsme nemohli vyčerpat všechny vlastnosti Booleovy algebry a přidržet se přesného deduktivního způsobu výkladu. Omezili jsme se proto pouze na ty vlastnosti, které budeme potřebovat k pochopení dalšího článku, pojednávajícího o použití Booleovy algebry pro návrh reléových obvodů. Pro další studium doporučujeme práce [2], [3] a zejména novější práce [4], [5] a [6].

LITERATURA

- [1] Klár J.: Matematické stroje. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1959 až 1960, č. 1.
- [2] Katětov M.: Jaká je logická výstavba matematiky? Jednota č. mat. a fys., Praha 1946.
- [3] Rieger L.: O grupách a svazech. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.
- [4] Zich O. a kol.: Moderní logika. Orbis, Praha 1958.
- [5] Grzegorzcyk A.: Populární logika, SNPL, Praha 1957.
- [6] Weinberger O.: Logika, SPN, Praha 1959.

Deskriptivní geometrie

Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:

Obrysy rotačních ploch v rovnoběžném promítání pravoúhlém

V praktickém životě se setkáváme velmi často s různými předměty a součástkami, jichž tvar sleduje určitý účel. Tvar židlí, opěradla lavic apod. odpovídají nejen tvaru těla, ale svým tvarem mají napomáhat zdravému držení těla při sezení. Páčky, kliky, kola a vůbec různá držadla strojových součástí odpovídají svým tvarem lidské ruce, dlani, prstům. Při jejich projektování se bere v úvahu jejich nejvýhodnější sevření rukou i místo a poloha člověka, obsluhujícího stroj. To platí i o navrhování různého pracovního nářadí.

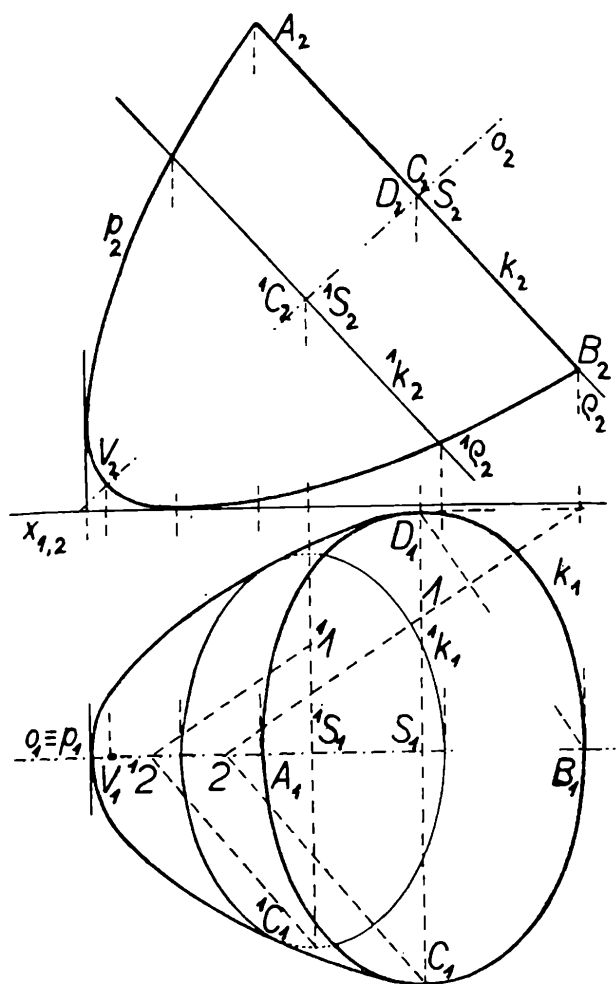
Při navrhování různých předmětů nejde však vždy jen o nejvhodnější tvar z hlediska účelnosti. Mnohdy při volbě vhodného tvaru předmětu se hledí i k nákladnosti výroby. Nejohospodárnější je ovšem výroba sériová a to takových tvarů, které výrobně jsou nejsnazší, nejrychlejší, a tedy i nejlacinější. Z tohoto stanoviska jsou nejvyhledávanější tvary rotační, které je možno poměrně snadno zhotovit (např. na soustruhu). Naproti tomu tvary hranaté dají při zhotovování i při konečném opracovávání mnohem více práce, která si vyžádá i více času a více různých pracovních úkonů. Nejsou to však jen drobné předměty, u nichž dáváme přednost tvarům zaobleným před tvary hranatými. Např. ve stavebnictví jsou kulaté (rotační) sloupy vhodnější. Hranaté sloupy jsou vystaveny větší možnosti poškození hran. U strojových součástí zaoblená část je bezpečnější proti lomu než součást opracovaná v ostrou hranu.

Navrhovatel jakéhokoliv předmětu praktického použití musí tedy uvážít tvar předmětu z mnoha hledisek, a jde-li o předmět vystavený určitému namáhání, musí propočítat každý sebemenší detail jeho tvaru. Pro dílenskou výrobu musí pak předmět nakreslit podle obvyklých zásad technického kreslení. Někdy stačí zobrazit předmět z jedné strany (jeden pohled, jeden obraz, jeden průmět), někdy je potřebí pohledů ze dvou i více stran. Někdy je nutno sestrojit předmět i z takového směru pohledu, že pak sestrojení obrysu tělesa je značně obtížné. Zejména bývají mnohdy rotační tělesa, pozorovaná a kreslená z neob-

vyklého směru, oříškem, zejména pokud jde o správné sestrojení jejich obrysů. Ukážeme si na několika případech, jak lze dostatečně přesně sestrojiti obrys rotačního tělesa, když jeho osa není ani kolmá k rovině, na níž budeme obraz tělesa kreslit (tj. průmětna), ani není s touto rovinou osa tělesa rovnoběžná. Osa zobrazovaných rotačních předmětů bude tudíž v našich případech k průmětně nakloněna. Pro odchylku ω osy tělesa o od průmětny bude tedy platit: $0^\circ < \omega < 90^\circ$.

Předpokládáme, že čtenáři znají pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (Mongeova projekce). Je samozřejmé, že se nebudeme zabývat sestrojováním průmětů základních rotačních těles (válec, kužel, koule) ani v obecné poloze. Ostatně sestrojení obrysů těchto těles není nic obtížného. I tak pro své příklady si zvolíme rotační tělesa co nejjednodušší, aby výklad konstrukcí byl co nejsrozumitelnější a aby jej pak bylo lze použít i na případy složitějších rotačních těles.

Tak na obr. 1 je dán rotační paraboloid, který má sice osu $o \parallel v$, avšak tato osa je k π nakloněna. Těleso je určeno svou osou o a hlavním poledníkem (hlavním meridiánem) p^1). Paraboloid je omezen parabolickou plochou a rovinou ρ , procházející bodem $S \in o^2$). Rovina ρ protíná paraboloid v kružnici k , jejíž dva sdružené průměry (průměry na sebe kolmé) $AB \parallel v$ a $CD \perp v$ nám poslouží pro sestrojení půdorysu k_1 , který se jeví jako elipsa. Přitom je nám známo, že C_1D_1 je ve sku-



Obr. 1

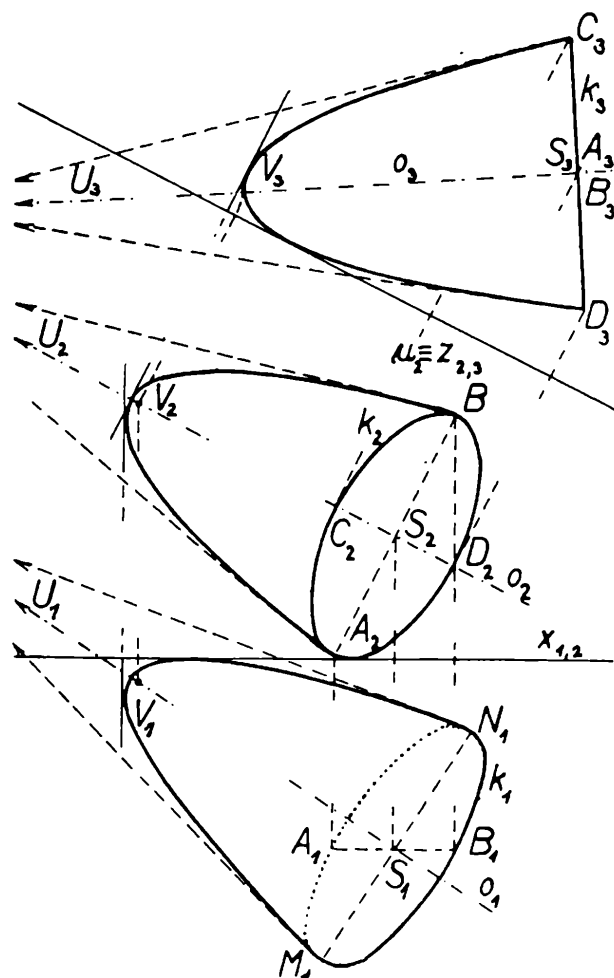
tečné velikosti a tedy $C_1D_1 = A_2B_2$. Protněme nyní paraboloid rovinou ${}^1\rho \parallel \rho$ a nechť tato rovina ${}^1\rho$ prochází bodem ${}^1S \in o$. Rovněž rovina ${}^1\rho$ protíná paraboloid v kružnici 1k , jejíž půdorys ${}^1k_1 \sim k_1$. Tato podobnost nám umožní snadné sestrojení průmětu 1k_1 , jestliže průmět k_1 jsme sestrojili např. použitím kružnic křivosti (oskulačních kružnic) ve vrcholech průmětu. Označme středy křivosti průmětu k_1 pro jednoduchost jen číslicemi 1 a 2. Středy 11 a 12 kružnic křivosti průmětu 1k_1 sestro-

¹⁾ Hlavní poledník leží v rovině rovnoběžné s nárysnou.

²⁾ Symbol $\in$ čti „leží na“ (nebo „je elementem“).

jíme na základě podobnosti tak, že vedeme ${}^1C_1 {}^12 \parallel C_1 2$ a ${}^11 {}^12 \parallel 1 2$. Samozřejmě body 11 a 12 leží na osách průmětu 1k_1 . A tak bychom mohli sestavit další povrchové kružnice ${}^2k, {}^3k, {}^4k, \dots$ na paraboloidu. Nárysy všech těchto kružnic jsou úsečky rovnoběžné s průmětem k_2 a půdorysy kružnic jsou elipsy vesměs podobné s průmětem k_1 a tudíž jejich konstrukce je obdobná s konstrukcí průmětu 1k_1 . Obrys půdorysu paraboloidu sestavíme jednoduše jako obalovou křivku (obálku) všech průmětů $k_1, {}^1k_1, {}^2k_1, \dots$. Čím více průmětů ${}^1k_1, {}^2k_1, {}^3k_1, {}^4k_1, \dots$ sestavíme, tím přesněji obdržíme půdorysný obrys tělesa. Křivka půdorysného obrysu bude ovšem souměrná podle o_1 a nás bude zajímat, kde se tato křivka protne s o_1 . Že to nebude půdorys V_1 vrcholu paraboloidu, není třeba dokazovat. Uvažovaný bod sestavíme snadno. Najdeme na druhém průmětu hlavního meridiánu bod, v němž se tohoto meridiánu dotýká svislá tečna. Tuto konstrukci provedeme na základě známých ohniskových vlastností paraboly. (Úloha: Sestavit k parabole tečnu, rovnoběžnou s daným směrem!). Půdorys takto získaného dotykového bodu leží na o_1 a je vrcholem půdorysné obrysové křivky tělesa, již je v našem případě parabola.

Přejdeme nyní k případu obecnějšímu. Budiž dán opět rotační paraboloid, jehož osa je však v obecné poloze. Není tedy rovnoběžná ani s jednou průmětnou. Meridián paraboloidu sestavíme v 3. průmětě (viz obr. 2). Pomocnou 3. průmětnu sestavíme např. kolmo k ν . Obrysovou křivku nárysu sestavíme pak pomocí 3. průmětu tak, jako jsme sestavovali v obr. 1 půdorysnou obrysovou křivku pomocí nárysu. Při sestavování půdorysu najdeme nejprve osy průmětu k_1 (Rytzovou konstrukcí ze sdružených průměrů) a nejlépe opět i středy kružnic křivosti ve vrcholech. Průměty dalších povrchových kružnic ${}^1k_1, {}^2k_1, {}^3k_1$, sestavíme již jen podobností. Konstruujeme jejich středy křivosti jako v půdoryse na obr. 1. Jako nárysná obrysová křivka je obálkou všech průmětů $k_2, {}^1k_2, {}^2k_2, \dots$, tak půdorysná obrysová křivka je obálkou všech průmětů $k_1, {}^1k_1, {}^2k_1, {}^3k_1, \dots$. Bod, ve kterém se nárysový obrys

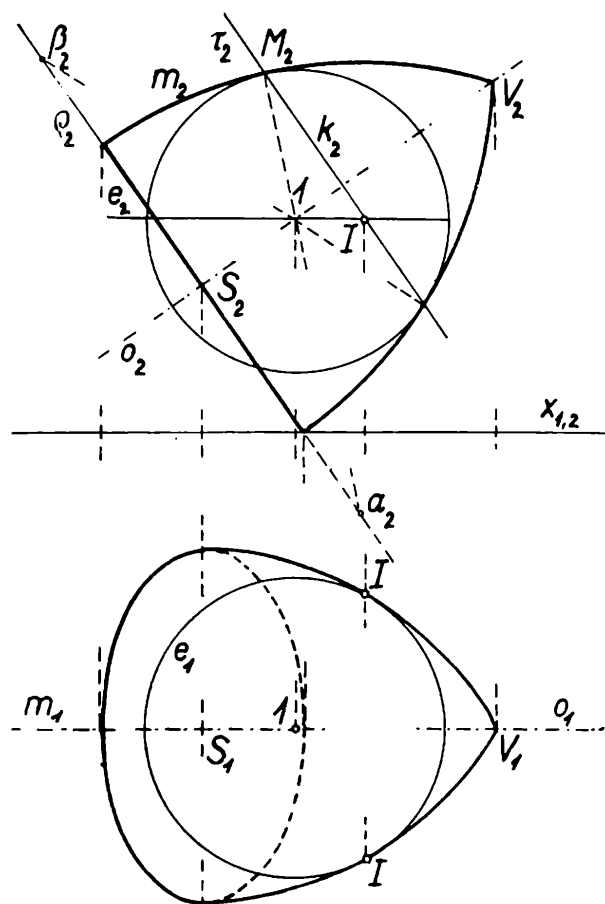


Obr. 2

protne s o_2 , obdržíme jako druhý průmět bodu, který je v 3. průmětě dotykovým bodem tečny obrysové paraboly kolmé k $z_{2,3}$. Kdybychom chtěli takto přesně sestrojit i bod, ve kterém půdorysná obrysová křivka protíná o_1 , nezbyvalo by než sestrojit si ještě 4. průmět paraboloidu tak, aby 4. průmětna byla kolmá k π a rovnoběžná s o . Vrchol půdorysné obrysové křivky pak dostaneme stejným způsobem ze 4. průmětu, jako jsme obdrželi vrchol nárysné obrysové křivky z 3. průmětu.

Pro lepší vykreslení obrysových křivek můžeme ještě použít dvou pomůcek. Jednou pomůckou je kužel, opsaný paraboloidu podle kružnice k . Vrchol U tohoto kužele obdržíme, když vzdálenost SV přeneseme od vrcholu paraboloidu na druhou stranu osy; tedy $SV = VU$.

Tato konstrukce je založena na té vlastnosti subtangenty paraboly, že ji pólí vrchol křivky. Sestrojíme-li z bodu U tečny ke k , jsou tyto tečny obrysem zmíněného opsaného kužele. Obrysová křivka se musí dotýkat i obrysu kužele, nikde nesmí přecházet. Této vlastnosti můžeme použít jak v prvním, tak i v druhém průmětu. A ještě máme druhou pomůcku pro snazší zjištění průběhu obrysových křivek. Nakreslíme-li k nárysnému obrysu přibližně tečnu kolmou k ose x a prodloužíme-li tuto tečnu i pod osu x , musí tato přímka být tečnou i pro půdorysný obrys.

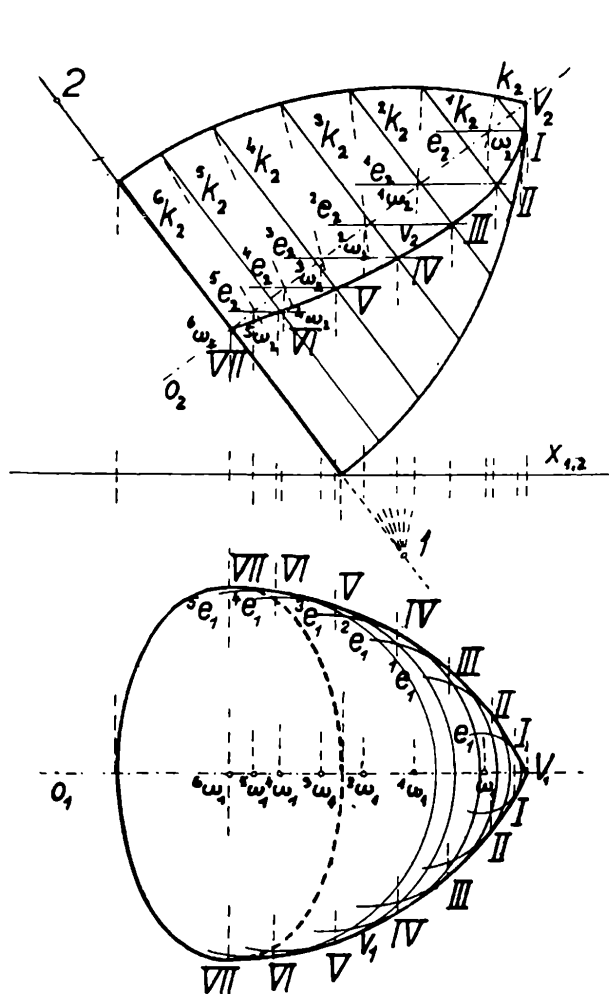


Obr. 3

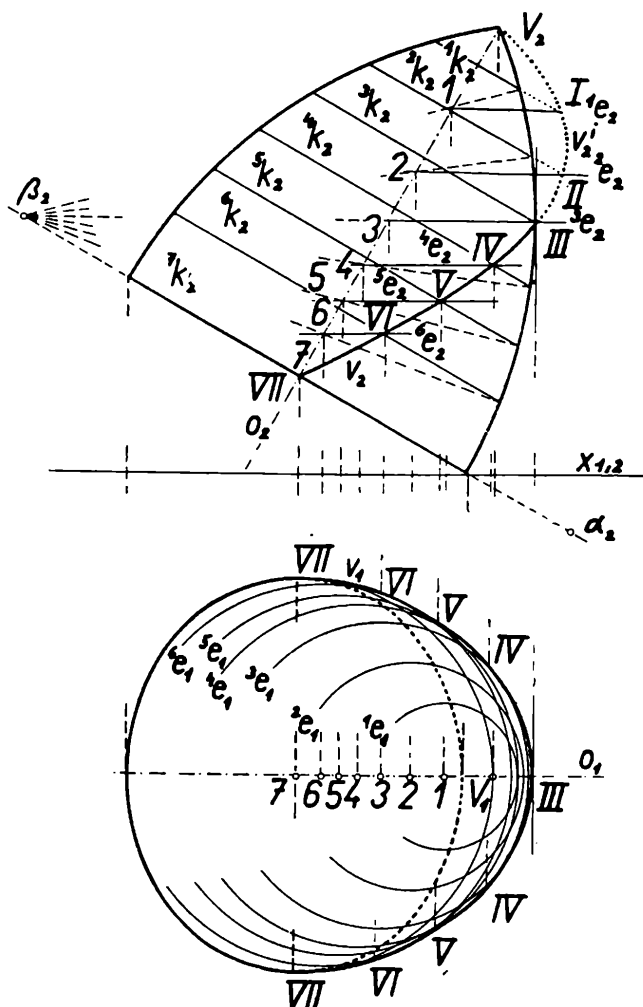
Uvedený způsob získání obrysu rotačního tělesa má jednu podstatnou nevýhodu. Tato metoda předpokládá rýsování značného počtu elips, jichž konstrukce příliš zdržuje a správný výsledek závisí značně na pečlivosti, s jakou byly elipsy vyrýsovány. Používáme proto raději

konstrukce, která je objasněna v obr. 3. Budiž dáno rotační těleso vzniklé rotací meridiánu m kolem osy $o \parallel v$. Osa o je k π nakloněna. Daným meridiánem budiž právě hlavní meridián. Pro jednoduchost byl meridián zvolen jako část kruhového oblouku o středu α . Těleso je omezeno rovinou $\rho \perp o$. Tato rovina je tedy také kolmá k nárysně. Střed α leží v ρ . Dané rotační těleso vytváří na rovině ρ kruhovou stopu, podstavu tělesa. Meridián protíná osu tělesa o v bodě V , který je tak vrcholem tělesa. Rovina $\tau \parallel \rho$ protíná těleso v kružnici k . Podle této kružnice vepíšme rotačnímu tělesu plochu kulovou. Zmíněná kruž-

nice je tedy dotykovou kružnicí, podle které se koule dotýká daného tělesa. Střed vepsané koule je na ose o v bodě I . Jeho nárys je průsečík spojnice $M_2\alpha_2$ s průmětem o_2 , kde bod M je průsečík meridiánu m s rovinou τ . Poloměr plochy kulové $r = IM_2$. Půdorys vepsané kulové plochy má střed v půdorysu středu I a poloměr je rovněž r . Opakujeme tuto konstrukci pro další kružnice $^1k, ^2k, ^3k, \dots$ a sestrojíme půdorysy příslušných vepsaných kulových ploch. Pak obalová křivka obrysů všech těchto koulí tvoří půdorysný obrys rotačního tělesa. Je jasné, že v náryse není třeba rýsovat obrysy vepsaných koulí.



Obr. 4



Obr. 5

Tento způsob konstrukce obrysu půdorysu tělesa nám poskytuje možnost sestavit přesně body, ve kterých se obrysová křivka dotkne půdorysných obrysů vepsaných kulových ploch. Půdorysný obrys koule je vlastně její rovník e . Nárys e_2 rovníku e prochází nárysem středu I rovnoběžně s osou $x_{1,2}$. Obě kružnice e (rovník) i k (dotyková kružnice koule a rotačního tělesa) jsou kružnice na téže ploše kulové a proto se protínají ve dvou bodech, jichž nárysy v našem příkladě splývají v bodě

označeném I . Jejich půdorysy (stejně) označené I jsou na půdoryse rovníku e_1 a jsou to již body obrysové křivky půdorysu tělesa.

V obr. 4 je provedena použitím naznačené metody úplná konstrukce obrysové křivky půdorysu tělesa. Tato křivka v_1 je množina všech půdorysů bodů $I, II, III, IV, \dots$, jakožto průsečíků kružnic $k, {}^1k, {}^2k, {}^3k, \dots$, podle nichž jsou rotačnímu tělesu vepsány jednotlivé plochy kulové a rovníků $e, {}^1e, {}^2e, {}^3e, \dots$ příslušných koulí. Nárys v_2 křivky v je opět množinou nárysů bodů $I, II, III, \dots$. Křivku v můžeme také pokládat za mez vlastního stínu tělesa, kdyby bylo osvětleno svislými rovnoběžnými paprsky. Pak by část oblony tělesa nad křivkou v byla osvětlena a část pod v by byla ve stínu.

Uvažujme nyní totéž těleso, avšak jeho osu $o \parallel v$ sestrojme tak, aby svírala s π větší úhel, tj. aby byla osa strmější. Při použití stejného konstrukčního způsobu se může stát, že se rovník a příslušná dotyková kružnice vepsané koule na rotačním tělese neprotínají vždy ve dvou reálných bodech, jako je tomu např. v obr. 5 v případech bodů $I \equiv {}^1k \times {}^1e$ a $II \equiv {}^2k \times {}^2e$. Pak ovšem křivka v je množina jen reálných bodů $III, IV, V, \dots$. Nárys v_2 končí v bodě III , který můžeme přesně zjistit. Je to dotykový bod svislé tečny k nárysovému obrysu tělesa a obdržíme jej jako průsečík nárysného obrysu rotačního tělesa v našem případě s přímkou $III\beta_2 \parallel x_{1,2}$. Tato přímka je vlastně nárys 3e_2 rovníku 3e koule vepsané tělesu podle kružnice 3k . Obě tyto kružnice (3e i 3k) na téže ploše kulové se navzájem dotýkají v bodě III ($III \equiv {}^3e \cdot {}^3k$).

(Dokončení)

Fyzika

CSc L u d ě k P e k á r e k, Fyzikální ústav ČSAV, Praha:

Plazma a řízená termonukleární reakce

(Dokončení)

3. Jak se dosahuje vysokých teplot

K uskutečnění řízené termonukleární reakce je třeba vyřešit dva problémy. Za první je nutno látku zahřát na potřebnou vysokou teplotu. Za druhé takto zahřátou látku plazma je třeba udržet při vysoké

teplotě v nějaké nádobě tak dlouho, dokud termonukleární reakce neproběhla, tj. dokud termonukleární palivo neshoří. Oba tyto problémy jsou velmi obtížné.

Všimněme si nejdříve prvního problému jak zahřát deuterium na teplotu několika set miliónů stupňů. Je zřejmé na první pohled, že způsobu, kterého se používá ve vodíkové bombě tj. exploze atomové bomby nemůžeme použít pro zapálení řízené termonukleární reakce. Výbuch atomové bomby je sám o sobě neřízenou lavinovou reakcí a má-li se při něm dosáhnout vysokých teplot, musí to být silný výbuch s plným využitím nálože. Pro řízenou termonukleární reakci je proto nutné najít jiný způsob zahřátí termonukleárního paliva.

Takových způsobů bylo již navrženo mnoho, avšak většina z nich zatím nedala teploty větší než asi 100 000 stupňů. Jen několik málo způsobů vedlo k výsledkům, při nichž bylo dosaženo podstatně vyšších teplot. Nejúspěšnějším z nich je způsob, který používá k zahřátí plazmatu tzv. rychlého impulzního elektrického výboje. O prvních pracích v tomto směru podal již v roce 1956 zprávu akademik J. V. K u r č a t o v při návštěvě sovětské vládní delegace v Anglii. Princip tohoto způsobu spočívá v tom, že se zředěným deuteriem naplní výbojová trubice, podobná například trubici zářivky, avšak větších rozměrů. Po naplnění deuteriem se k elektrodám umístěným uvnitř trubice připojí baterie kondenzátorů, nabitá na vysoké elektrické napětí. To vyvolá elektrický výboj v deuteriu, přičemž proud, který po krátkou dobu - než se kondenzátory vybijí - prochází deuteriem, dosahuje jednoho i více miliónu ampérů. Za těchto podmínek dojde uvnitř trubice k zvláštnímu jevu, který se nazývá z ú ž e n í, nebo též cizím názvem „pinč-efekt“. Elektrický výboj vytvoří totiž uvnitř trubice velmi tenké plazmatické vlákno, které se elektrickým proudem a také prudkým pohybem deuteria směrem od stěn do středu trubice zahřeje na velmi vysokou teplotu. Na velmi nákladných aparaturách, které umožňují dodat v jednom výbojovém impulzu energii větší než je energie spotřebovaná výbojem velkého bouřkového blesku, bylo popsáným způsobem dosaženo teploty asi 5 miliónů stupňů. Tato teplota se však v trubici udrží jen po velmi krátkou dobu, rovnou několika milióntinám vteřiny. Plazmatické úzké vlákno je totiž velmi nestabilním útvarem a ihned po svém vzniku se začne různě prohýbat a trhat. Proto nelze vysokou teplotu tímto způsobem udržet déle než oněch několik milióntin vteřiny.

Byla vytvořena řada obměn tohoto způsobu a také řada dalších způsobů, jak získat horké deuteriové plazma, například použití detonace obyčejné třaskaviny k vytvoření vysoké teploty v malém objemu, naplněném deuteriem aj. Ani jeden způsob nevedl však zatím k teplotám, které by postačily k zapálení termonukleární reakce. Přesto však již byly zjištěny velmi slabé termonukleární reakce například v popsáném

impulzním výboji. Jejich intenzita postačí sice k tomu, aby byly zjištěny citlivými fyzikálními přístroji, avšak na získávání energie tímto způsobem není zatím ještě možno pomýšlet; teplota je stále ještě asi stokrát nižší, než je zápalná teplota deuteria a kromě toho se ve výboji i tato nižší teplota udrží jen po velmi krátkou dobu.

4. Nádobu na horké plazma

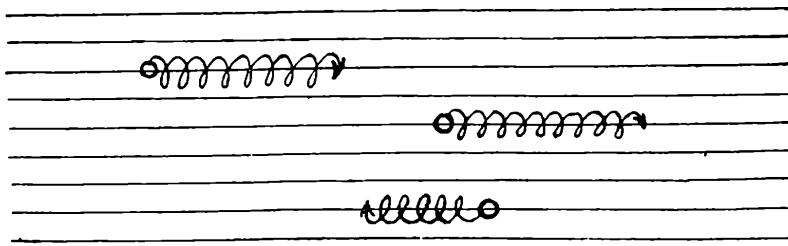
Přejdeme nyní k druhému problému a to, jak udržet plazma, zahřáté na vysokou teplotu, dostatečně dlouhou dobu v nějakém omezeném prostoru tak, aby mohla plně proběhnout termonukleární reakce, čili aby mohlo všechno termonukleární palivo „shořet“ a uvolnit potřebnou energii. Také tento problém je krajně obtížný. Jde při něm vlastně o to, zkonstruovat nádobu, která by udržela plazma horké stovky miliónů stupňů.

Na první pohled se zdá takový problém neřešitelný. Vždyť ať bychom nádobu udělali z jakékoli sebeodolnější látky, její stěny by se při styku s plazmatem horkým milióny stupňů ohřály na tak vysokou teplotu, že by se ihned vypařily a samy změnily v plazma.

I z této na první pohled beznadějně situace našli fyzikové východisko. První námět na řešení nádoby na horké plazma podali již v roce 1950 sovětsí fyzikové T a m m a S a c h a r o v. Nezávisle na nich vznikly později podobné návrhy i v jiných laboratořích, které se zabývaly touto tematikou v USA a v Anglii. Až do roku 1956, kdy akademik J. V. Kurčatov podal první obsáhlou zprávu o některých těchto výzkumech prováděných v SSSR, byly tyto práce drženy v hluboké tajnosti a nedovídala se o nich ani veřejnost, ani vědečtí pracovníci druhých států. Proto je dnes také těžko rozhodnout o prvenství některých myšlenek, které vznikaly nezávisle a v přibližně stejné době v různých laboratořích.

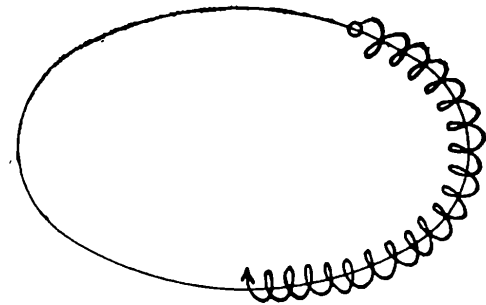
Myšlenka Tamma a Sacharova spočívá v uzavření horké plazmy do „nádoby“, jejíž stěny nejsou tvořeny látkou, nýbrž magnetickým polem. Fyzikální princip takové nádoby je velmi jednoduchý. Řekli jsme již, že za teploty mnoha miliónů stupňů jsou všechny atomy deuteria ionizovány, to znamená, že v takovém plazmatu se nevyskytují elektricky neutrální částice, nýbrž jen částice elektricky nabitě, tj. záporné elektrony a kladná jádra deuteria. Pohyb těchto částic je za normálních okolností přímočarý a jejich směr pohybu se mění jen při srážce s druhou částicí. Avšak umístíme-li takové plazma do silného magnetického pole, pohyb každé elektricky nabitě částice se pronikavě změní. Magnetické pole působí totiž na pohybující se nabitou částici silou, která zakřivuje její původně přímočarou dráhu. Je to tatáž síla, která uvádí do pohybu například vinutí rotoru elektromotoru, zapneme-li elektrický proud. Vlivem této síly se přímočará dráha každé nabitě částice změní na dráhu tvaru šroubovice, jak je to schematicky znázorněno na obr. 2.

Magnetické pole zabrání tedy částicím plazmatu unikat ve směru kolmém na jeho silové čáry; ionty plazmatu se pohybují krouživým pohybem pouze podél magnetických silových čar.



Obr. 2. V magnetickém poli - jehož silové čáry mají směr naznačený vodorovnými čarami - se elektricky nabitě částice pohybují po šroubové dráze kolem silové čáry.

Aby magnetická nádoba byla uzavřená pro plazma i ve směru magnetických silových čar, je nutno učinit ještě další přizpůsobení. Existují v podstatě dva způsoby uzavření magnetické nádoby ve směru magnetických silových čar. První, ve kterém spočívá návrh Tamma a Sacharova, je uzavření magnetické „nádoby“ do tvaru prstence (obr. 3). V tom případě se částice, kroužící podél magnetické linie, vrátí po proběhnutí celého prstenu do polohy, odkud vyšla a neunikne tedy z nádoby. Druhý způsob používá tzv. magnetických zátek. Spočívá v tom, že se magnetické pole na obou koncích nádoby zesílí, takže silové čáry jsou v těch místech hustší. Takový tvar magnetického pole má tu vlastnost, že kroužící elektricky nabitý iont vrátí zpět do vnitřního prostoru nádoby.



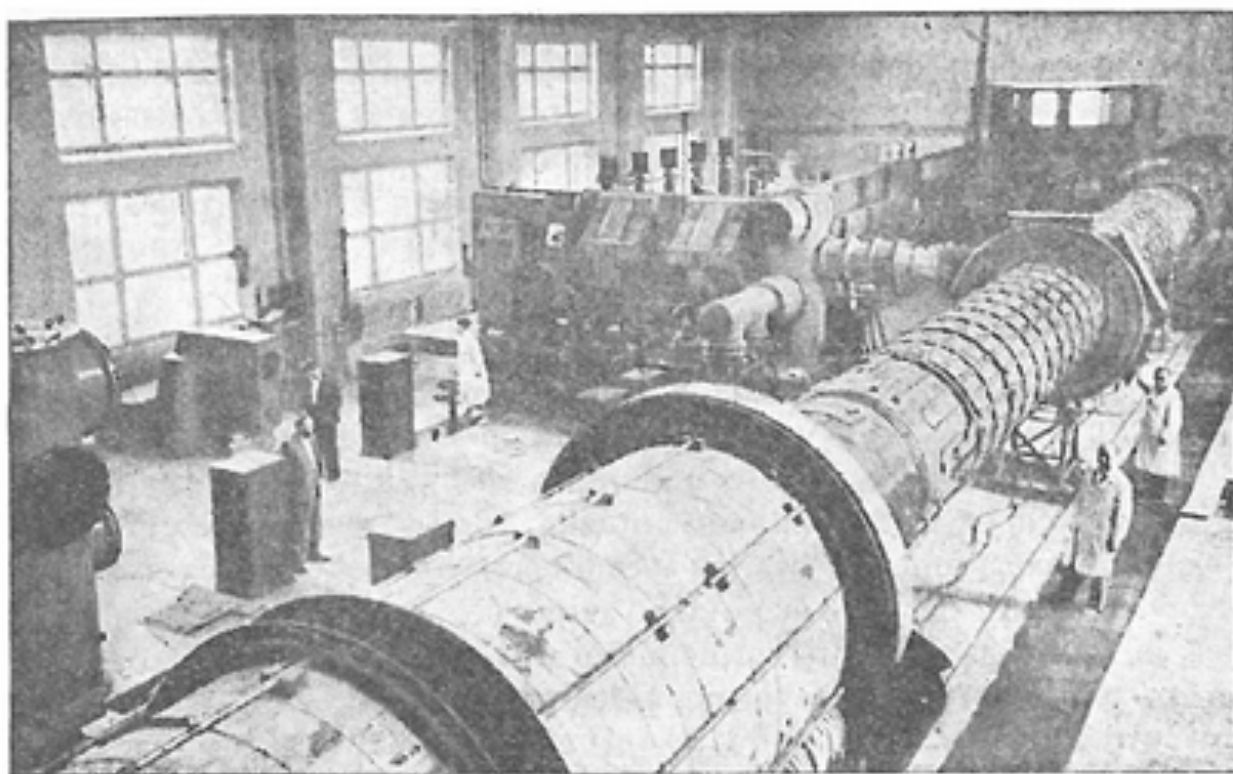
Obr. 3. Magnetická „nádoba“, v níž tvoří silové čáry uzavřený prstenec.

Takto vytvořená magnetická „nádoba“ není pochopitelně nijak citlivá na teplotu plazmatu, které je v ní uzavřeno, neboť magnetické pole není teplotou ovlivňováno. Je to nádoba, jejíž „stěny“ snesou dotyk s libovolně horkým plazmatem. Zdálo by se tedy, že problém, jak udržet horké plazma uzavřené v omezeném prostoru, je vyřešen. Stačí pouze vytvořit magnetické pole s vhodným průběhem silových čar a uzavřít v něm horké plazma.

Skutečně také byly v řadě laboratoří v SSSR, USA, Anglii i jinde zkonstruovány aparatury s magnetickým polem různého tvaru, určené k uzavření horkého plazmatu. Největší z těchto magnetických nádob,

které jsou již v provozu, je sovětská pokusná aparatura, která má název OGRA. Její fotografie je na obr. 4. Magnetická nádoba má tvar válce a je uzavřena magnetickými „zátkami“. Magnetické pole je tvořeno cívkami, nasazenými na široké trubici, kterou je na obrázku dobře vidět. Nádoba pro plazma má průměr 1,4 metru a je 12 metrů dlouhá. Podobné, poněkud menší aparatury tohoto typu byly postaveny v USA a v Anglii.

Na principu magnetické nádoby tvaru prstence (viz obr. 3) je rovněž v provozu několik aparatur v SSSR, USA a Anglii. V roce 1960 má být dokončena v USA aparatura nazvaná STELLARATOR, jejíž prstencová trubice bude mít v průměru několik metrů.



Obr. 4. Fotografie sovětské aparatury OGRA, pracující na principu nádoby s magnetickými „zátkami“.

Zkoušejí se i jiné tvary magnetických nádob na horké plazma. Zatím však všechny magnetické nádoby, které se až dosud podařilo sestavit, udrží plazma krátkou dobu, nejvýše asi jednu tisícinu vteřiny. Tato nedokonalost, „děravost“ magnetických nádob, které byly dosud zkonstruovány, má řadu příčin. Jednou z nich je zvláštní vlastnost plazmatu, totiž jeho nestabilita v magnetickém poli, která se projevuje mimo jiné například tím, že plazma se snaží prohnout vlastním tlakem magnetickou „stěnu“ a uniknout vzniklou „dírou“ z „nádoby“. Další příčinou této „děravosti“ magnetických nádob je skutečnost, že ionty v plazmatu se navzájem srážejí a tím se některé z nich postupně dostávají mimo dosah magnetického pole. Také „zátky“ z magnetického

pole se dosud nepodařilo udělat tak, aby byly pro plazma dokonale hermetické. Kromě toho vydrží „stěny“ této nádoby jen poměrně malý tlak, rovný asi jedné atmosféře. Plazma musí být proto v nádobách velmi řídké, téměř milionkrát řidčí, než atmosférický vzduch. Avšak v takovém plazmatu by termonukleární reakce probíhala velmi pomalu. Aby „shořelo“ větší množství deuteria, musilo by se v nádobě udržet po dobu nejméně několika desítek vteřin při potřebné teplotě, přesahující čtyři sta milionů stupňů. Avšak ve skutečných zatím sestrojených nádobách se plazma udrží jen po dobu desettisíckrát kratší.

Vlastnosti magnetických nádob dosud sestrojených nestačí tedy zatím k tomu, aby udržely potřebnou dobu plazma při termonukleární reakci. Již při stavbě těchto zařízení si fyzikové nekladli za cíl uskutečnit v nich prakticky využitelné termonukleární reakce. Jejich úkolem je především prozkoumat chování plazmatu v magnetických nádobách, poznat co nejpřesněji jeho vlastnosti a teprve na základě těchto nových velmi důkladných znalostí přistoupit v budoucnosti k pokusům o realizaci termonukleárního reaktoru s nádobou z magnetického pole.

5. Co můžeme očekávat

K řízené termonukleární reakci, která by byla nevyčerpatelným zdrojem energie, chybí tedy zatím ještě velmi mnoho: stonásobná teplota, než se jí nyní dosahuje a desettisíckrát delší doba udržení plazmatu v magnetické nádobě. Těmto hodnotám se fyzikové zatím nedokázali přiblížit. Někoho možná napadne otázka, zdali se podaří vůbec člověku získávat energii umělou, řízenou termonukleární reakcí. Současná fyzika nedovede zatím dát na tuto otázku odpověď. Jediné, co je dnes možno říci, je, že neznáme žádný principiální důvod, proč by nebylo na Zemi možné uskutečnit řízenou termonukleární reakci.

Naopak je mnoho důvodů k optimismu. Vyniknou zvláště tehdy, srovnáme-li, jak velký pokrok byl učiněn za těch necelých osm let od prvního konkrétního námětu pro realizaci řízené termonukleární reakce. Nejde jen o hodnoty dosahovaných teplot, o velikost doby, po kterou se udrží horké plazma v magnetické nádobě atd. Jde především o to, jak za tuto poměrně krátkou dobu pokročily znalosti o fyzikálních vlastnostech samotného plazmatu. Řada jevů a vlastností horkého plazmatu, o nichž dříve neměl nikdo ani tušení, byla nejen zjištěna a popsána, ale i vysvětlena v nových teoriích. Bylo vyzkoušeno mnoho způsobů, jak zahřát a uzavřít plazma, bylo provedeno mnoho teoretických výpočtů atd. Jestliže se v budoucnosti ukáží neschůdnými některé dnes zkoumané cesty, budou jistě na základě nových poznatků o vlastnostech plazmatu nalezeny jiné možnosti.

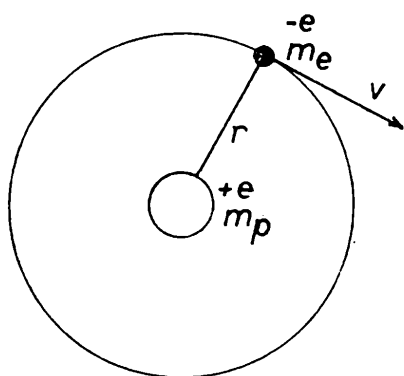
A tak můžeme být přesvědčeni, že není již příliš vzdálena doba, kdy se člověk naučí získávat energii z izotopu vodíku, jehož zásoby na Zemi jsou prakticky nevyčerpatelné.

Atom vodíku a jeho spektrum

1. Rutherfordův model atomu vodíku

Atomy prvků se skládají z kladně nabitého jádra, kolem něhož krouží záporné elektrony. Tuto představu o stavbě atomu, kterou v podstatě přijímáme dosud, popsal v roce 1911 na základě experimentálního studia anglický fyzik E. Rutherford. Viděl v atomu jakousi obdobu sluneční soustavy, kde kolem Slunce - jádra - obíhají planety, elektrony. Pohyb elektronu je určován dostředivou silou, působící podle Coulombova zákona mezi jádrem a elektronem. Gravitační působení jádra je tak malé, že jej můžeme vedle elektrických sil pominout.

Rutherford předpokládal, že nejlehčí prvek - vodík - má i nejjednodušší atom. Jádro je tvořeno částicí s elementárním kladným nábojem ($e = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) - *protonem* - a kolem obíhá *elektron* se stejně vel-



kým nábojem záporným (obr. 1). Elektron se bude pohybovat po dráze, na níž je splněna podmínka, že síla přitažlivá je rovna síle odstředivé. Předpokládáme-li pro jednoduchost kruhovou dráhu elektronu (ve vakuu), můžeme tuto podmínku vyjádřit vztahem

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e \cdot v^2}{r} \quad (1)$$

Obr. 1. Schéma Rutherfordova modelu atomu vodíku.

(e - náboj elektronu; r - poloměr dráhy; m_e - klidová hmota elektronu;

v - postupná rychlost elektronu na dráze).

Tento závěr odpovídá mechanické analogii. Ze stanoviska klasické fyziky má však model jeden vážný nedostatek, jehož si byl Rutherford vědom. Elektron vytváří při pohybu po kruhové dráze elektromagnetické pole, tzn., že by musel vyzařovat elektromagnetickou energii do okolního prostoru. Výpočet ukazuje, že by veškerá energie elektronu byla vyzařena za dobu řádově 10^{-8} sekundy. Elektron by se k jádru přibližoval, až by do něho konečně spadl. Celý děj by byl provázen spojitým vyzařováním elektromagnetických vln a pomocí spektroskopu bychom museli sledovat spojitě spektrum. Ze zkušenosti však víme, že volné atomy vodíku vyzařují spektrum složené z *jednotlivých čar*. Tento zásadní nesouhlas teorie s pokusem ukázal, že zákony klasické fyziky,

vyhovující pro makroskopická tělesa, nemůžeme přenášet mechanicky do oblasti atomu.

Nesnáze Rutherfordova modelu atomu překlenul v roce 1913 dánský fyzik *N. Bohr*. Vypracoval teorii stavby vodíkového atomu, založenou na *Planckově teorii* o vyzařování energie v určitých nejmenších množstvích - *kvantech*. V Bohrově modelu vodíkového atomu se může elektron pohybovat jen na jistých diskretních drahách, pro něž jsou splněny podmínky, stanovené v tzv. *Bohrových postulátech*.

2. Bohrovy postuláty

První Bohrův postulát je vyjádřením podmínek, jimiž je určena možná dráha elektronu. Elektron se může pohybovat jen po takové dráze, jejíž délka je rovna celistvému násobku výrazu $\frac{h}{m_e \cdot v_n}$, čili

$$2\pi r_n = \frac{h}{m_e \cdot v_n} \cdot n \quad (2)$$

(r_n - poloměr n -té kruhové dráhy; n - celé číslo; h - Planckova konstanta; m_e - klidová hmotnost elektronu; v_n - posuvná rychlost elektronu na n -té dráze, součin $m_e v_n$ je příslušná hybnost elektronu).

Bohr stanovil tuto podmínku bez důkazu, jako postulát, nemaje možnost podat k rovnici průkazné zdůvodnění. Teprve za 11 let byl první postulát potvrzen na základě *vlnové mechaniky*.

V roce 1924 vyslovil *de Broglie* myšlenku, že každá částice, tedy i elektron, může mít dvojí povahu: *částicovou* a *vlnovou*. U elektronu se projevuje převážně charakter částicový, ale při pokusech s průcho-dem elektronu tenkou kovovou fólií byly získány interferenční obrazce, což svědčí o vlnovém charakteru elektronu. De Broglie odvodil základní rovnici pro určení vlnové délky těchto tzv. *hmotových vln* částic zobecněním závěrů, které učinil pro světlo.

Podle Planckovy teorie je světlo složeno z fotonů energie $\varepsilon = h \nu$ (h - Planckova konstanta; ν - kmitočet světla). Toto kvantum energie je ekvivalentní hmotě podle vztahu

$$m_\nu \cdot c^2 = h \nu$$

(m_ν - hmotnost fotonu kmitočtu ν ; c - rychlost světla). Z rovnice najdeme výraz pro hybnost fotonu - $m_\nu \cdot c$ a poněvadž vlnová délka příslušného záření je dána vztahem $\lambda = \frac{c}{\nu}$, dostaneme po úpravě

$$\lambda = \frac{h}{m_\nu \cdot c}$$

Zobecněním na elektron, pohybující se rychlostí v_n kolem jádra vodíkového atomu, vychází délka hmotových vln elektronu

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v_n}$$

První Bohrovův postulát zní tedy podle vlnové mechaniky

$$2\pi r = n \lambda .$$

To znamená, že jsou možné jen takové dráhy, na nichž leží celistvý počet hmotových vln.

Řešením rovnic (1) a (2) vypočítáme poloměry elektronových drah a posuvné rychlosti elektronů na těchto drahách. Pro poloměr odpovídající tzv. hlavnímu *kvantovému* číslu n najdeme

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m_e} n^2 \quad (3)$$

Z výrazu vidíme, že poloměr je přímo úměrný druhé mocnině kvantového čísla. Vypočítejme poloměr první dráhy ($n = 1$)

$$r_1 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{4 \cdot 3,14^2 (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

Poloměry ostatních drah určíme ze vztahu $r_n = r_1 \cdot n^2$.

Výpočet rychlosti ponecháme čtenáři. Pro kontrolu podáváme výsledek: $v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$. Rychlosti v dalších drahách se zmenšují úměrně hlavnímu kvantovému číslu: $v_n = \frac{v_1}{n}$

Druhý Bohrovův postulát stanoví, že při pohybu na téže dráze elektron energii nevyzařuje, takže jeho energie je konstantní.

Třetí Bohrovův postulát určuje děje při přechodu z jedné dráhy do druhé. Přejde-li elektron na dráhu s menší energií, vyzáří foton, jehož energie je rovna rozdílu energií na obou drahách $h \cdot \nu = W_n - W_k$ ($k < n$). Při pohlcení fotonu je děj obrácený a elektron přechází na dráhu s vyšší energií.

Abychom mohli stanovit vlnovou délku záření, které se při pochodech v atomu vodíku uvolňuje nebo pohlcuje, stanovíme hladiny energie na jednotlivých drahách.

3. Energetické hladiny elektronu

Potenciální energie elektronu ve vzdálenosti r_n od protonu je dána výrazem

$$W_{\text{pot}} = - \frac{e^2}{r_n} ,$$

což je práce vykonaná přitažlivou silou jádra vodíkového atomu při

přemístění elektronu z nekonečna (kde je potenciál roven nule) na hladinu potenciálu $\frac{e}{r_n}$. Poněvadž se elektron pohyboval ve směru síly, bude tato práce záporná.

Musíme také uvážit, že se elektron pohybuje po dráze velmi rychle. Jeho celková energie bude tedy dána součtem energie kinetické a potenciální

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} \quad (4)$$

Poněvadž podle rovnice (1) $m_e v_n^2 = \frac{e^2}{r_n}$, dostaneme z rovnice (4)

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_n} - \frac{e^2}{r_n} = - \frac{e^2}{2r_n}$$

a po dosazení za r_n ze vztahu (3)

$$W = - \frac{2\pi^2 m_e e^4}{n^2 \cdot h^2}$$

I celková energie elektronu vychází záporná a má-li být rozdíl energií při přechodu z jedné dráhy do druhé kladný, má-li atom zářit, musí elektron přecházet z dráhy o větším kvantovém čísle do dráhy s menším n . Při obráceném přechodu je znaménko rozdílu záporné a atom energii pohlcuje.

4. Spektrum vodíku

Každému přechodu elektronu z hladiny vyšší do nižší odpovídá vyzaření fotonu určité vlnové délky. Pozorujeme-li zářící vodík spektroskopem, vidíme spektrum složené z velkého množství jednoduchých čar, kde každé čáře odpovídá zcela určitý přechod. Určením vlnové délky příslušné čáry si můžeme ověřit jednak správnost Bohrových postulátů, jednak můžeme určit druh přechodu. Je pochopitelné, že na dráhu s $n = 1$ mohou přecházet elektrony ze všech výšekvantových drah a tím vznikne celá tzv. *série spektrálních čar*. Podobně přechodem na dráhu $n = 2$ vznikne nová série atd. (obr. 2). Z Bohrovy teorie najdeme jednoduchý výraz pro určení frekvencí jednotlivých spektrálních čar všech sérií.

Uvažujme přechod na dráhu nížekvantovou (kvant. číslo n) z dráhy výšekvantové (kvant. číslo k), čili přechod, kde $k > n$. Vyzářený foton bude mít energii

$$h \cdot \nu = W_k - W_n = - \frac{2\pi^2 \cdot m_e e^4}{k^2 \cdot h^2} - \frac{2\pi^2 m_e e^4}{n^2 \cdot h^2}$$

a po úpravě s ohledem na znaménko

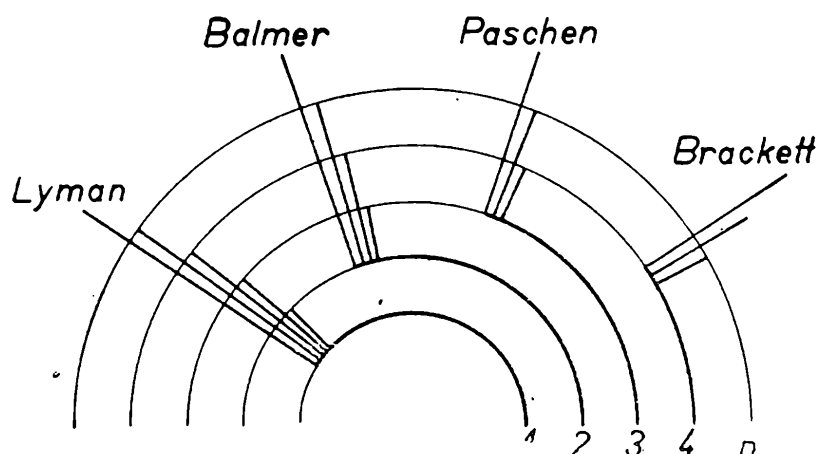
$$h \cdot \nu = \frac{2\pi^2 \cdot m_e \cdot e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

Pro kmitočet vyzářeného fotonu najdeme

$$\nu = \frac{2\pi^2 \cdot m_e \cdot e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (5)$$

Zlomek před závorkou je konstantní. Konstantu si označme symbolem N (je to tzv. *Rydbergův kmitočet*), jejíž velikost je $3,3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

Dosadíme do vztahu (5) za n např. 2 a za k postupně 3, 4, ∞ . Dostaneme teoreticky kmitočty nekonečného množství čar. Pro velké hodnoty k se bude hodnota rozdílu v závorce měnit jen nepatrně a nepatrné budou i rozdíly vypočítaných frekvencí, až pro $k \rightarrow \infty$ dostaneme limitní kmitočet, kterému říkáme hrana série. Výpočtem se přesvědčíme, že první čtyři čáry této tzv. *Balmerovy série* leží ve viditelném oboru a ostatní v oboru ultrafialovém. Hrana série má vlnovou délku 3646,2 Å. Čtyři viditelné čáry jsou důležitými orientačními objekty v praktické spektrometrii a označují se H_α (červená: 6562,8 Å),



Obr. 2. Spektrální série ve spektru vodíku.

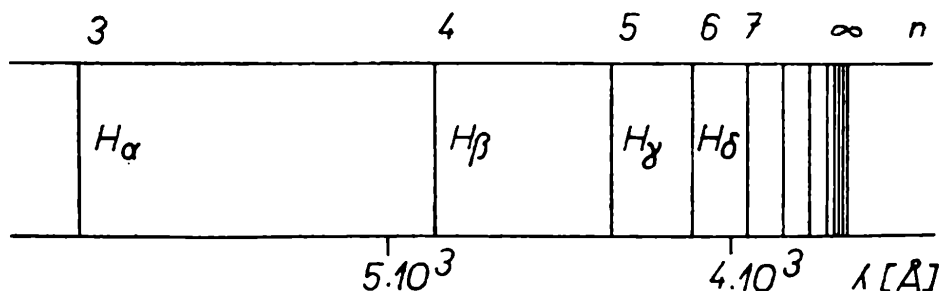
H_β (zelená: 4861,3 Å), H_γ (modrá: 4340,4 Å), H_δ (fialová: 4101,7 Å). Ve světle vodíkové výbojky a ve spektrech hvězd bylo zjištěno asi 32 dalších čar ultrafialového oboru této série.

Série kvantového čísla $n = 1$ se jmenuje podle objevitele prvních čar *Lymanova* (první čáry byly objeveny 1914) a leží v ultrafialovém oboru. Další série *Paschenova* (1909), *Brackettova* (1922) a *Pfundova* (1924) pro $n = 3, 4, 5$ leží v infračerveném oboru.

Kmitočty objevených čar vynikajícím způsobem souhlasí s teorií (odchylka je asi 0,0005%) a tak proměřením spektra byla správnost Bohrovy teorie bezpečně prokázána.

Skvělým potvrzením teorie byl objev těžkého vodíku na základě studia spektrálních čar obyčejného vodíku. Kromě čar vodíku byly

zjištěny ještě velmi slabé čáry vyšších kmitočtů a jejich existence byla vyložena přítomností těžšího izotopu s hmotou odpovídající dvojnásobku hmoty vodíku.



Obr. 3. Balmerova spektrální série.

5. Závěr

V předcházejících řádcích jsme se zabývali nejjednodušším případem atomu vodíku s elektronem obíhajícím po kruhových drahách. Přesnější spektroskopický výzkum však naznačil, že ve skutečnosti jsou podmínky v atomu vodíku složitější než ve zjednodušeném Bohrově modelu. Spektroskopy o velké disperzi ukázaly, že jednotlivé spektrální čáry mají jemnou strukturu, že jsou složeny z několika velmi blízkých čar (dublety, triplety). *Sommerfeld* vyložil tento jev teorií, podle níž mohou elektrony obíhat nejen po drahách kruhových, ale i eliptických. Jednotlivé dráhy se nepatrně liší energií a tomu odpovídá vznik fotonů s odlišným kmitočtem.

Dále bylo nutné uplatnit při rozpracování teorie *princip relativity*, poněvadž rychlost elektronů na dráze již není vedle rychlosti světla zanedbatelná. Ve spektru byly pozorovány další zajímavé jevy (např. *jev Zeemanův*), které vedly k postupnému zdokonalení teorie a přesnější představě o struktuře vodíkového atomu.

Úlohy k řešení

Fyzika

1. Čtyři žárovky pro napětí $U_1 = 120$ [V] a výkon $P = 60$ [W] jsou spojeny paralelně (obr. 1). Jak velký nutno předřadit odpor R , aby žárovky měly předepsaný výkon (nepřepálily se), jsou-li zapojeny paralelně na síť o napětí $U = 220$ voltů. Jak velký proud prochází a) každou žárovkou (I_1), b) nerozvětvenou částí obvodu (I). Jak velký je odpor všech žárovek?

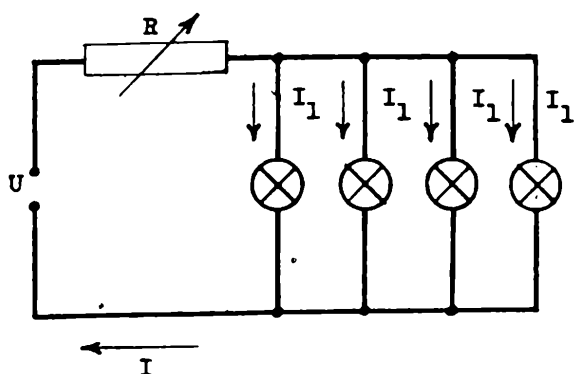
Evžen Říman

2. Nádrž objemu $V = 4,5$ hl má být naplněna vodou teploty $t_1 = 25^\circ\text{C}$. K dispozici je voda z ohřívače o teplotě $t_2 = 90^\circ\text{C}$ a voda z vodovodu, jejíž teplota je $t_3 = 10^\circ\text{C}$. Jak velké množství vody 90°C teplé a 10°C teplé je nutno smíchat? (Dáno specifické teplo vody $C = 1 \text{ kcal kg}^{-1} \cdot \text{stupeň}^{-1}$).

Evžen Říman

3. Přes kladku s vodorovnou osou je vedena nit, jejíž konce jsou zatíženy závažími o hmotách $m_1 = 96$ g a $m_2 = 104$ g. Obě hmoty jsou udržovány v klidu můstkem. Určete, kterým směrem se budou závaží pohybovat a jakou dráhu urazí za 10 vteřin. Jaká bude rychlost obou závaží koncem desáté vteřiny?

Evžen Říman



Obr. 1

Řešení těchto úloh v obvyklé úpravě zašlete redakci nejpozději do 10. března 1961.

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika

3. Délka poloměru ρ kružnice k je dána libovolným lichým prvočíslem. Dokažte, že existují vždy 3 různé pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran x , y , z jsou vyjádřeny celými čísly a jež jsou opsány kružnici k . Vyjádřete vzorcem délky jejich stran pomocí ρ .

Břetislav Fiala

(Došlo 6 řešení)

Řešil Pavel Bálek, 11. tř., JSŠ, Chrudim:

Budtež x , y , z čísla, která vyhovují naší úloze. Potom musí platit

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (1)$$

Této rovnici vyhovují všechna x , y , z , která jsou udána vztahy

$$x = 2kuv, \quad y = k(u^2 - v^2), \quad z = k(u^2 + v^2), \quad (2)$$

kde k , u , v jsou vhodná celá čísla.

Pro každý trojúhelník, který vyhovuje naší úloze, platí vztah

$$\varrho (x + y + z) = x y . \quad (3)$$

Do vztahu (3) dosadíme za x, y, z ze vztahu (2); dostáváme

$$\varrho [2 k u v + k (u^2 - v^2) + k (u^2 + v^2)] = 2 k^2 u v (u^2 - v^2)$$

a odtud po úpravě:

$$\varrho = k v (u - v) \quad (4)$$

Protože ϱ je liché prvočíslo, řeší rovnici (4) tato čísla k, u, v :

1. $k = 1 ; \quad v = 1 ; \quad u = \varrho + 1$
2. $k = 1 ; \quad v = \varrho ; \quad u = \varrho + 1$
3. $k = \varrho \quad v = 1 ; \quad u = 2$

Odtud dosazením do vztahu (2) dostáváme tři různé trojice celých čísel x, y, z , řešících naši úlohu:

1. $x_1 = 2 (\varrho + 1) ; \quad y_1 = \varrho (\varrho + 2) \quad z_1 = \varrho^2 + 2\varrho + 2 ;$
2. $x_2 = 2\varrho (\varrho + 1) ; \quad y_2 = 2\varrho + 1 \quad z_2 = 2\varrho^2 + 2\varrho + 1 ;$
3. $x_3 = 4\varrho ; \quad y_3 = 3\varrho ; \quad z_3 = 5\varrho$

Existují tedy tři různé pravoúhlé trojúhelníky splňující podmínky úlohy.

9. Vyhledejte všechna přirozená čísla n , která mají tuto vlastnost: Mezi čísly 1, 2, 3, ..., n je právě 16 čísel soudělných s číslem n .

Jiří Sedláček

(Došla 3 řešení)

Řešil Petr Tomšů, S4. b, PŠ, Kopřivnice:

Nechť
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \quad p_k^{\alpha_k}$$

je kanonický rozklad čísla n . Pak počet čísel nesoudělných s číslem n a menších než n je dán Eulerovou funkcí $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} p_k^{\alpha_k-1} (p_1 - 1) (p_2 - 1) \quad (p_k - 1)$$

Počet čísel soudělných s n , menších nebo rovných n , pak je $n - \varphi(n)$. Podle podmínky úlohy má platit

$$n - \varphi(n) = 16 ,$$

čili
$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} p_k^{\alpha_k-1} (p_1 - 1) (p_2 - 1) (p_k - 1) = 16$$

$$p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} p_k^{\alpha_k-1} [p_1 p_2 p_k - (p_1 - 1) (p_2 - 1) (p_k - 1)] = 16 \quad (1)$$

Levou stranu rovnice (1) rozložíme na součin

$$A \cdot B = 16 ,$$

kde

$$A = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} p_k^{\alpha_k-1} ,$$

$$B = p_1 p_2 p_k - (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_k - 1)$$

Dokážeme, že číslo B s rostoucím počtem prvočinitelů k roste, čili platí:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_k p_{k+1} - (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_k - 1)(p_{k+1} - 1) &> \\ > p_1 p_2 p_k - (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_k - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

Z nerovnosti (2) plyne ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_k (p_{k+1} - 1) &> \\ > [(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_k - 1)] (p_{k+1} - 2) \end{aligned} \quad (3)$$

Nerovnost (3) vznikne znásobením zřejmě správných nerovností:

$$p_1 > p_1 - 1$$

$$p_2 > p_2 - 1$$

(3')

$$p_k > p_k - 1$$

$$p_{k+1} - 1 > p_{k+1} - 2$$

Volíme-li označení tak, že

$$2 \leq p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k < p_{k+1} ,$$

jsou nerovnosti (3') vztahy mezi kladnými čísly, jsou souhlasné, je možno je znásobit a dostat nerovnost (3) a z ní nerovnost (2).

Pro tři nejmenší prvočísla je

$$B = 2 \cdot 3 \cdot 5 - (2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) = 30 - 8 = 22 > 16 ,$$

proto počet prvočinitelů bude $k < 3$.

I. Nechť $k = 1$; pak máme

$$p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) = 16 , \quad \text{čili} \quad p_1^{\alpha_1-1} = 16 = 2^4$$

Protože p_1 je prvočíslo, jest $p_1 = 2$; pak $\alpha - 1 = 4$, tj. $\alpha = 5$. Pak $n = 32$. Snadno si ověříme, že toto číslo vyhovuje úloze.

II. Nechť $k = 2$; pak

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} - p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) = 16 ,$$

čili

$$p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} (p_1 + p_2 - 1) = 16 .$$

Číslo $p_1 + p_2 - 1$ je dělitelem čísla 16, proto dosahuje hodnot 1, 2, 4, 8, 16.

a) Vztah $p_1 + p_2 - 1 = 1$ čili $p_1 + p_2 = 2$ nelze splnit prvočísla p_1, p_2 .

b) Ani vztah $p_1 + p_2 - 1 = 2$ nelze splnit prvočísla p_1, p_2 .

c) Ze vztahu $p_1 + p_2 - 1 = 4$ plyne $p_1 = 2, p_2 = 3$.

Pak je $2^{\alpha_1-1} \cdot 3^{\alpha_2-1} = 4 = 2^2$.

Číslo 2^2 není násobkem čísla 3^{α_2-1} pro $\alpha_2 - 1 \neq 0$. Proto musí být

$$\alpha_2 - 1 = 0, \text{ tj. } \alpha_2 = 1.$$

Pak je $2^{\alpha_1-1} = 2^2$ čili $\alpha_1 - 1 = 2$, tj. $\alpha_1 = 3$; potom $n = 2^3 \cdot 3 = 24$; snadno se ověří, že i toto číslo vyhovuje.

d) Nechť $p_1 + p_2 - 1 = 8$; odtud $p_1 + p_2 = 9$.

Je-li součet dvou celých čísel číslo liché, musí jeden sčítanec být lichý, druhý sudý. Protože existuje jediné sudé prvočíslo, jest $p_1 = 2$. Potom $p_2 = 7$, což je prvočíslo.

Musí být:

$$p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} = 2,$$

čili

$$2^{\alpha_1-1} \cdot 7^{\alpha_2-1} = 2$$

Odtud $\alpha_2 = 1$. Z toho postupně:

$$2^{\alpha_1-1} = 2, \alpha_1 - 1 = 1, \alpha_1 = 2;$$

$n = 2^2 \cdot 7 = 28$, což naší úloze vyhovuje.

e) Konečně nechť

$$p_1 + p_2 - 1 = 16,$$

čili

$$p_1 + p_2 = 17$$

Opět jako v předešlém případě musí být $p_1 = 2$, pak $p_2 = 17 - p_1 = 15$, což není prvočíslo. Nemůžeme tedy nastat možnost e).

Odpověď: Podmínkám úlohy vyhovují čísla $n = 24, 28, 32$.

Poznámka autora úlohy: S. Petr Tomšů podal řešení, které se opírá o znalost Eulerovy funkce, úlohu však můžeme řešit i středoškolskými prostředky.

Předně je vidět, že $n > 16$. Jestliže pro celá čísla x, y platí $x + y = n$ a je-li x nesoudělné s číslem n , pak také y je nesoudělné s n a platí $x \neq y$. To umožňuje srovnat všechna přirozená čísla, která jsou nesoudělná s n a menší než n , do dvojic $[x, y]$. Jinak řečeno, počet těchto čísel je sudý. Pro náš případ to znamená, že také n je sudé.

Mezi čísla 1, 2, 3, ..., n je $\frac{n}{2}$ sudých a tedy soudělných s n . Podle podmínek úlohy je tedy $16 \geq \frac{n}{2}$ čili $n \leq 32$. Souhrnem tedy máme

$$16 < n \leq 32,$$

čemuž vyhovují sudá čísla 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32. Zkouškou se přesvědčíme, že z těchto osmi případů vyhovuje úloze jen $n = 24, 28, 32$.

Fyzika

3. Olověná krychle o hraně $a = 4$ cm má být ve vodě o hustotě $\rho_0 = 1$ g . cm⁻³ udržena zavěšením na dřevěné krychli. Jakou hranu a_1 musí mít tato krychle, je-li hustota dřeva $\rho_1 = 0,6$ g . cm⁻³ a hustota olova $\rho_2 = 11,8$ g . cm⁻³?

Evžen Říman

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Karel Hrbáček, 10. A, JSŠ v Nymburce:

Označme V_0 součet objemů olověné a dřevěné krychle:

$$V_0 = a^3 + a_1^3 \quad (1)$$

Váha dřevěné krychle $G_1 = a_1^3 \cdot \rho_1 \cdot g$,

váha olověné krychle $G_2 = a^3 \cdot \rho_2 \cdot g$.

Dřevěná krychle bude zřejmě nejmenší, jestliže těleso, vzniklé spojením obou krychlí, se bude ve vodě vznášet. Potom váha tohoto tělesa

$$G = G_1 + G_2 = a_1^3 \cdot \rho_1 g + a^3 \cdot \rho_2 g \quad (2)$$

se bude rovnat váze G' vody tělesem vytlačené. Použijeme-li vztahu

$$(1), \text{ je } G' = V_0 \rho_0 g = (a^3 + a_1^3) \cdot \rho_0 g \quad (3)$$

Platí tedy: $G = G'$ čili podle (2) a (3)

$$a_1^3 \cdot \rho_1 g + a^3 \cdot \rho_2 g = (a^3 + a_1^3) \cdot \rho_0 g$$

Protože $\rho_0 \neq \rho_1$, bude

$$a_1^3 = a^3 \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_0 - \rho_1} \quad (4)$$

Z fyzikálních vlastností parametrů vyplývá $a > 0$, $\rho_2 - \rho_0 > 0$, $\rho_0 - \rho_1 > 0$. Má tedy rovnice (4) jediný reálný kořen

$$a_1 = a \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_0 - \rho_1}} \quad (5)$$

Dosaďme do vztahu (5) hodnoty dané v textu a upravme:

$$a_1 = 4 \text{ [cm]} \sqrt[3]{\frac{11,8 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}] - 1 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}]}{1 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}] - 0,6 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}]}} =$$

$$= 4 \text{ [cm]} \cdot \sqrt[3]{\frac{10,8}{0,4}} = 4 \text{ [cm]} \sqrt[3]{27} = 12 \text{ [cm]}$$

Závěr: Nejmenší hrana krychle, která ještě udrží danou olověnou krychli ve vodě, má velikost $a_1 = 12 \text{ cm}$.

4. Nějaká fyzikální veličina je dána vzorcem $x = \frac{m g h}{q U}$, kde m = hmotu, g = gravitační zrychlení, h = výška, q = elektrické množství, U = elektrické napětí. Dosazením jednotek resp. převedením na jednotky základní (tj. metr, kilogram, sekunda, ampér) určete, o kterou veličinu jde!

Evžen Říman

(Došlo 11 řešení.)

Řešil Radomír Ošmera, PŠ, Kopřivnice:

Výraz v čitateli i výraz ve jmenovateli znamená práci.

Výraz $m g h$ v čitateli vyjadřuje práci A_1 potřebnou k tomu, aby těleso o hmotě m , vyjádřené v [kg] bylo zvednuto do výšky h v metrech, při gravitačním zrychlení g udaném v jednotkách [m s^{-2}].

Součin dává práci A_1 vyjádřenou v jednotkách [$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$] čili v joulech.

Rovněž jmenovatel vyjadřuje práci, neboť $q U = A_2$ je práce elektrického proudu. U značí napětí na spotřebiči, udané ve voltech, kdežto $q = I t$, kde I je proud (v ampérech), který prochází spotřebičem, a t je čas (v sekundách), po který proud teče. Proto q dosadíme v ampérsekundách a U ve voltech. Práci A_2 pak dostaneme v ampérsekundách čili wattsekundách, tedy rovněž v joulech.

Poměr obou prací $x = \frac{A_1}{A_2}$ je proto číslo nepojmenované a to účinnost (značka η , čteno éta), předpokládáme-li, že A_1 je práce strojem vykonaná a A_2 je energie stroji dodaná.

Například: Chceme-li břemeno o hmotě m zvednout do výšky h , je třeba k tomu práce $A_1 = m g h$. Budeme-li toto břemeno zvedat zdvihadlem poháněným elektromotorem, jehož spotřeba energie je $A_2 = q U$, pak poměr obou je účinnost zdvihadla s elektromotorem.

5. Vodivá kulička poloměru $r = 15 \text{ mm}$ ve vakuu je nabita na potenciál $V = 6000 \text{ V}$. Za předpokladu, že v její blízkosti není těles, jež by rušila její elektrostatické pole, vypočítejme, jaká je intenzita jejího

pole a) v těsné blízkosti jejího povrchu, b) ve vzdálenosti 20 cm od jejího středu, c) ve vzdálenosti 1 m od středu!

Václav Šindelář

(Došlo 10 řešení)

Řešil Petr Nedoma, 11. C, JSS, Plzeň:

Při řešení se budeme opírat o tyto vztahy a věty:

(1) Koule nabitá elektrickým množstvím Q dává ve svém vnějším okolí stejné pole, jako by dával náboj Q umístěný v jejím středu.

(2) $V = \frac{Q}{R}$, kde značí potenciál V koule o poloměru R , nabité nábojem Q .

(3) $E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot r^2}$, kde je intenzita E elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového náboje, $\varepsilon = 1$ (ve vakuu, což je náš případ); pak $E = \frac{Q}{r^2}$.

Podle (1) si můžeme náboj Q koule představit tak, jako by byl umístěn ve středu koule o poloměru r jeho velikost se podle (2) rovná:

$$Q = Vr$$

a) Intenzita pole v těsné blízkosti povrchu koule, kdy $r \doteq r_1$, kde r_1 je vzdálenost uvažovaného bodu od středu koule, je

$$E_1 = \frac{Q}{r_1^2} \doteq \frac{V \cdot r}{r^2} = \frac{V}{r}$$

Po dosazení

$$E_1 = \frac{6\,000}{0,015} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 400\,000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Intenzita pole ve vzdálenosti $r_2 = 0,2$ m od středu je

$$E_2 = \frac{Q}{r_2^2} = \frac{V \cdot r}{r_2^2},$$

$$E_2 = \frac{6\,000 \cdot 0,015}{0,04} = 2\,250 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

c) Intenzita pole ve vzdálenosti $r_3 = 1$ m od středu:

$$E_3 = \frac{Q}{r_3^2} = \frac{V \cdot r}{r_3^2},$$

po dosazení

$$E_3 = 6\,000 \cdot 0,015 = 90 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

↑
Hledané intenzity pole v různých bodech jsou rovny

$$\text{a) } E_1 = \frac{V}{r} = 400\,000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$\text{b) } E_2 = \frac{V r}{r_2^2} = 2\,250 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$\text{c) } E_3 = \frac{V r}{r_3^2} = 90 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

6. Deskový kondenzátor má za izolační vrstvou skleněnou destičku ($\varepsilon = 7$) tloušťky $d = 2 \text{ mm}$ a plochy $s = 300 \text{ cm}^2$. Kondenzátor nabijeme na napětí $V_1 = 100 \text{ V}$ a odpojíme jej od proudového zdroje. Máme vypočítat mechanickou práci, kterou je třeba vynaložit, chceme-li zcela odstranit skleněnou destičku z kondenzátoru. Tření přitom zanedbáváme, práci proti gravitačním silám při výpočtu neuvažujeme.

Václav Šindelář

(Došlo 8 řešení)

Řešení autorovo:

Protože se náboj Q na deskách kondenzátoru nezmění, odstraníme-li skleněnou destičku, můžeme psát

$$Q = C_1 V_1 = C_0 V_0, \quad (\text{a})$$

kde C_1 je kapacita kondenzátoru se skleněnou destičkou, C_0 kapacita bez destičky. Mezi oběma kapacitami platí známý vztah

$$C_1 = \varepsilon \cdot C_0, \quad (\text{b})$$

kde ε je permitivita dielektrika (skleněné destičky). Kapacita odstraněním destičky klesne, ovšem napětí vzroste, jak plyne z rovnic (a) a (b)

$$V_0 = \varepsilon V_1. \quad (\text{c})$$

Mechanická energie, potřebná k odstranění destičky bude ze zákona o zachování energie nutně rovna rozdílu elektrických energií s dielektrikem a bez něho:

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= -\frac{1}{2} (C_1 V_1^2 - C_0 V_0^2) = -\frac{1}{2} \left(C_1 V_1^2 - \frac{C_1}{\varepsilon} \varepsilon^2 V_1^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (C_1 V_1^2 - \varepsilon C_1 V_1^2) = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 (\varepsilon - 1) = E_{\text{mech}} \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Abychom mohli vypočítat E_{mech} musíme ještě určit hodnotu C_1 . Kapacita deskového kondenzátoru je dána vztahem

$$C_1 = \varepsilon' \cdot \frac{S}{d} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{d} \doteq 7 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0,03}{0,002} =$$

$$= 9,3 \cdot 10^{-10} \frac{(\text{As})^2}{\text{J}} = 930 \text{ pF} , \quad (\text{e})$$

bereme-li relativní permitivitu skla $\varepsilon = 7$ (jak je v zadání úlohy). Mechanická práce plyne z (d) po dosazení

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \cdot 9,3 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4 (7 - 1) = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

7. Vedení z elektrárny, jež vyrábí stejnosměrný proud ke spotřebiteli, je z měděného drátu o průřezu $S = 2,5 \text{ mm}^2$. Délka dvou vodičové přípojky je $L = 49 \text{ m}$. V elektrárně je napětí $V = 120 \text{ V}$. Má-li být připojen u spotřebitele elektrický vaříč o výkonu $P_s = 600 \text{ W}$, jaký musí být jeho odpor? Měrný odpor vedení volte $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \Omega \text{cm}$.

Václav Šindelář

(Došlo 7 řešení)

Řešení autorovo:

Celkový odpor přívodních drátů bude podle

$$R_v = \rho \frac{2L}{S} = 1,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{9800}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 0,416 \Omega . \quad (\text{a})$$

Podle známých vztahů platí

$$P = P_v + P_s = (V_v + V_s)I = (R_v + R_s) I^2 = VI , \quad (\text{b})$$

kde značí P celkový výkon ve vedení a spotřebiči, P_v výkon ve vedení, P_s výkon ve spotřebiči, V_v napětí na vedení, V_s napětí na spotřebiči a podobně R_v a R_s odpor vedení a spotřebiče.

Ježto máme dáno $P_s = 600 \text{ W}$, odpor vedení jsme z (a) vypočetli $R_v = 0,416 \Omega$ a dané napětí na svorkách generátoru je $V = 120 \text{ V}$, můžeme určit proud I ze vztahu

$$P_s + R_v I^2 = VI$$

$$0,416 I^2 - 120 I + 600 = 0 , \quad (\text{c})$$

kde $I = 5,096 \text{ A}$.

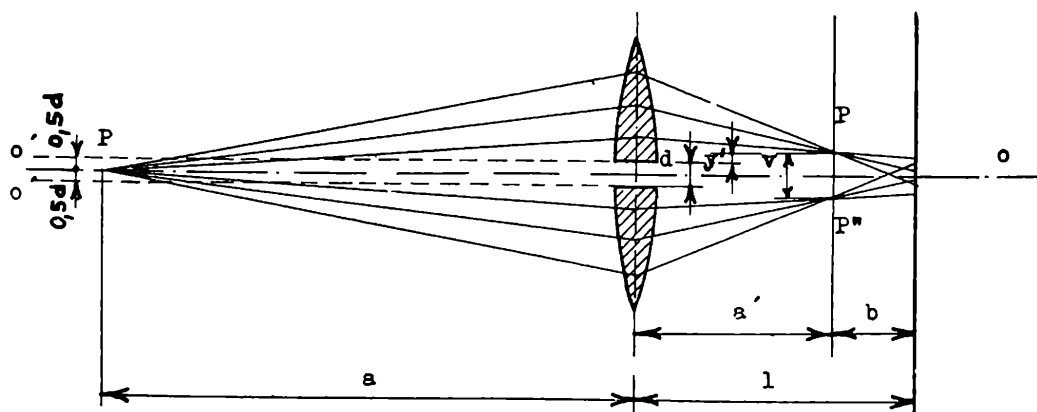
Hledaný odpor spotřebiče plyne ze vztahu

$$P_s = R_s \cdot I^2 , \quad R_s = \frac{P_s}{I^2} = \frac{600}{25,97} = 23,1 \Omega .$$

Poznámka: Z kvadratické rovnice (c), z níž jsme vypočítali proud I plyne při kladném kořenu toto druhé řešení $I' = 283,46 \text{ A}$ a z toho $R_s' = 0,00747 \Omega$, což sice daným podmínkám u spotřebiče vyhovuje, není však prakticky možné, protože by se přívodní dráty rozžhavily

a porušily ($P_v > P_s$), nehledě k velkému průřezu odporových drátů vaříče, jenž by s ohledem na nutný malý odpor musely mít, a k značně neekonomickému ohřevu, při němž by ztráty ohřevem vedení mnohokrát převyšovaly užitečný výkon.

8. Tenkou spojnou čočkou, jež má ohniskovou dálku $f = 50$ cm, rozříznutou na dvě poloviny rovinou jdoucí osou o procházejí paprsky vycházející z bodového zdroje P . Uspořádání je zřejmé z obrázku. Obě poloviny čočky jsou od sebe vzdáleny o délku $d = 0,1$ cm. Bodový zdroj je umístěn před čočkou na optické ose původní nerozříznuté čočky ve vzdálenosti $a = -300$ cm od původního středu čočky. Úlohou je vypočítat vzdálenost s mezi sousedními světelnými interferenčními proužky, jež se objeví na stínítku umístěném za zdrojem ve vzdálenosti $l = 450$ cm od středu čočky. Zdroj vysílá monochromatické světlo vlnové délky $\lambda = 500$ m μ .



Obr. 1

Poznámka: Vzdálenost s mezi sousedními interferenčními proužky na stínítku vypočteme ze vztahu

$$s = \lambda \cdot \frac{b}{v}, \quad (1)$$

kde λ značí vlnovou délku světla, b je vzdálenost stínítka od obrazové roviny, v vzdálenost obou obrazů vytvořených rozříznutou čočkou (obr. 1).

Václav Šindelář

(Došla 3 řešení)

Řešil Petr Tomšů, 4. b, PŠ, Kopřivnice:

Body P' , P'' jsou obrazy bodu P , vytvořené oběma polovinami čoček. Vzdálenost a' vypočteme z čočkové rovnice. Přitom položíme $a > 0$, protože zdroj zobrazovaný předmět leží před čočkou; dále položíme $f > 0$. Máme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{50} - \frac{1}{300} = \frac{1}{60}$$

Ježto $a' = 60 \text{ cm} > 0$, body P' , P'' leží na opačné straně čočky než bod P . Můžeme též počítat $a < 0$, $f < 0$, změníme-li úmluvu.

O vzdálenosti y' bodu P' od osy o' platí

$$y' = -\frac{a'}{a} \quad y = -\frac{a'}{a} \cdot 0,5 d = -\frac{60}{300} \cdot 0,5 \cdot 0,1 = -0,01 \text{ cm} = \\ = -0,1 \text{ mm}.$$

Protože je $y' < 0$, leží body P , P' v opačných polorovinách vyřatých osou o . Vzdálenost bodu P' od osy o bude $y' + y = 0,1 \text{ mm} + 0,5 d = 0,1 \text{ mm} + 0,5 \text{ mm} = 0,6 \text{ mm}$. Bod P leží na ose o , obě poloviny čoček a také body P' , P'' jsou souměrné podle o . Proto je

$$v = P'P'' = 2(y' + y) = 1,2 \text{ mm}.$$

Poznámka. Nechť y_1 je vzdálenost bodu P od přímky o_1 , y_2 vzdálenost bodu P od přímky o_2 tak, že $y_1 + y_2 = d$; pak ukážeme, že hodnotu v se nezmění. Skutečně je

$$v = -\left(-\frac{a'}{a} y_1\right) + -\left(-\frac{a'}{a} \cdot y_2\right) + d = \frac{a'}{a} (y_1 + y_2) + \\ + d = 1,2 \text{ mm}$$

Dále je

$$b = l - a' = 450 \text{ cm} - 60 \text{ cm} = 390 \text{ cm}.$$

Vzdálenost s na stínítku mezi interferenčními proužky vypočteme ze vztahu (1):

$$s = \lambda \cdot \frac{b}{v} = 500 \text{ m}\mu \cdot \frac{3900 \text{ mm}}{1,2 \text{ mm}} = 1\,625\,000 \text{ m}\mu = 1,625 \text{ mm}$$

Seznam řešitelů úloh z ročníku 1959—60

Nejdříve jsou uvedena čísla příkladů správně vyřešených, v závorce jsou příklady s menšími nedostatky; nesprávná řešení neuveřejňujeme vůbec. Seznam je abecední.

Pavel Bálek, 11, JSŠ v Chrudimi: M 3, 4, 7, 8, 10 [2, 5, 6]; *Svatopluk Fučík*, 10 f, DSŠ J. K. Tyla v Hradci Králové: M 1, 4, 10 [2, 6, 7, 8], F 3 [1, 2], G 3; *Tomáš Hlinka*, hornický brigádník v Karviné:

M 3, 4, 8 [1, 5, 6, 7]; *Jiří Hofmon*, 11a, JSŠ v Nymburce: F 3, 5, 6, 8 [1, 2, 4, 7]; *Karel Hrbáček*, 10a, JSŠ v Nymburce: M 2, 4, 5, 6, 7, 10; F 2, 3, G 1, 2, [3]; *Václav Jiříček*, 11b, JSŠ v Hranici na Mor.: M 6; *Richard Kuba*, 11b, 1. DSŠ v Gottwaldově: F 1, 3, 4 [2]; *Petr Nedoma*, 11e, JSŠ v Plzni: F 3 [1, 2, 4, 5, 8]; *Jiří Norek*, 11a, DSŠ v Praze 16: F 1, 4, 5, 7 [2, 3]; *Radomír Ošmera*, 2a, PŠ v Kopřivnici: M 1, 3, 4 [2, 6], F 1, 2, 3, 4, 7; *Jan Pretel*, 11d, 15. JSŠ v Praze: F 2, 3, 4 [5, 7]; *Ivan Pur*, 10b, JSŠ v Šumperku: F [2]; *Vladimír Regner*, 11b, DSŠ v Mladé Boleslavi: M 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10 [5, 6, 9], F 1, 2, 4 [3, 7], G 1, 3, 4 [2]; *Zdeněk Sekera*, 11b, JSŠ v Praze 4: F 2, 3, 4; *Petr Tomšů*, 4b PŠ v Kopřivnici: M 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10 [2, 6], F 1, 2, 3, 4, 7, 8, G 1, 2, 3, 4; *Jiří Vanžura*, 11c, DSŠ v Prostějově: M 1, 2, 3, 5, 8 [6, 7], F 1, 3, 4 [2, 5]; *Vladimír Vätter*, 11a JSŠ v Nepomuku: M 10 [2], F [2, 3], G 3; *Jaroslav Vilímek*, 10b, 37. JSŠ v Praze: F 1, 2, 3; *Antonín Vrba*, 11a, JSŠ v Přešticích: M 4 [6], F 1, 3, 4 [2, 5].

Matematické zábavy

M i l a n K o m a n, PI, Praha:

Dvě úlohy ze zábavné matematiky

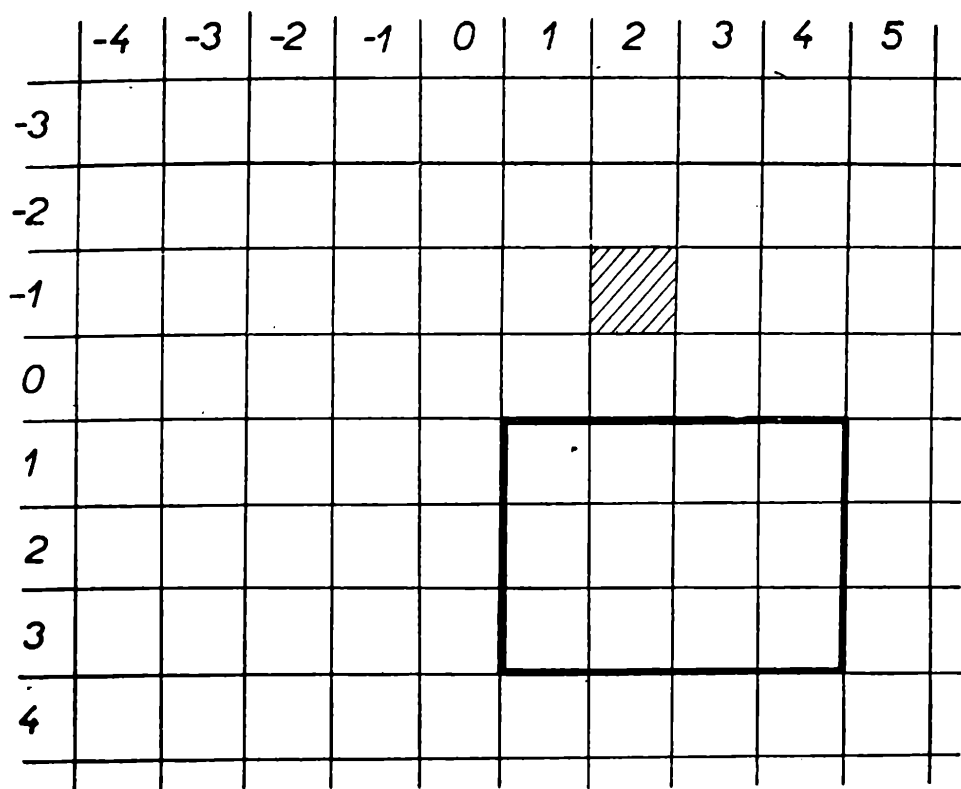
Velký počet příkladů a úloh patřících do zábavné a rekreační matematiky je inspirován šachovou hrou. Také v tomto článku řešíme dvě úlohy, k nimž dala podnět hra v šachy. Úlohy řešíme jednak pro neomezené šachovnice, jednak pro libovolné obdélníkové šachovnice o $p \cdot q$ polích (p značí počet řad a q počet sloupců).

Abychom úlohy snáze rozřešili, očíslováme všechna pole neomezené šachovnice uspořádanými dvojicemi celých čísel (n, k) , kde první číslo n značí příslušnou řadu a druhé číslo k příslušný sloupec šachovnice [viz obr. 1; na tomto obrázku je současně pro lepší názornost vyšrafováno pole $(-1, 2)$]. Obdélníkovou, resp. čtvercovou šachovnici o $p \cdot q$ polích očíslováme analogickým způsobem uspořádanými dvojicemi celých čísel (n, k) , kde ovšem $1 \leq n \leq p$, $1 \leq k \leq q$ (na obr. 1 je silnější čarou vyznačena šachovnice o $3 \cdot 4$ polích).

Úloha 1. Na libovolné šachovnici (neomezené nebo obdélníkové) jsou dána dvě různá pole (n_0, k_0) , (n_1, k_1) . Určete nejmenší počet tahů, kterými lze přemístit krále z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) .

Odpověď na otázku, kolika tahy lze přemístit krále na neomezené nebo čtvercové šachovnici z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) , vyplývá ihned ze známého šachového pravidla, tzv. pravidla čtverce:

P. 1. Krále lze přemístit z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) N tahy, právě když lze jediným tahem přemístit krále z pole (n_0, k_0) do jistého čtverce o N^2 polích, obsahujícího pole (n_1, k_1) .



Obr. 1

Toto pravidlo se velmi lehce dokáže matematickou indukcí, jestliže si uvědomíme, že krále lze jediným tahem přemístit z daného pole na některé ze sousedních polí. Úplně stejně se dokáže toto obecnější pravidlo pro libovolnou šachovnici:

P. 2. Nejmenší počet tahů, jimiž lze přemístit krále z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) , je dán číslem $N = \max(|n_1 - n_0|, |k_1 - k_0|)$.¹⁾

Úloha 2. Určete, kolika různými způsoby lze užitím nejmenšího možného počtu tahů přemístit

¹⁾ Zápis $\max(x, y)$ má tento význam: Je-li $x \geq y$, pak $\max(x, y) = x$, je-li $x < y$, pak $\max(x, y) = y$.

na dané šachovnici krále z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) .

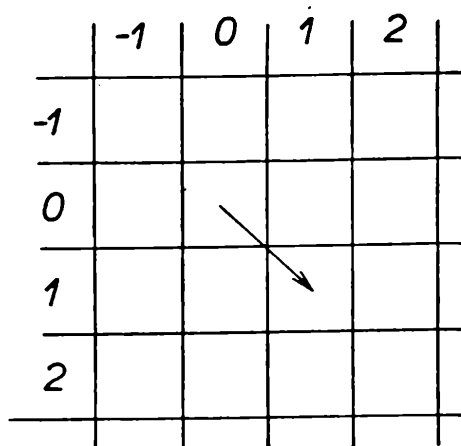
Než přistoupíme k vlastnímu řešení, provedeme několik přípravných úvah.

Ú m l u v a. Tahem „dolů“ („nahoru“) rozumíme takový tah, kterým lze přemístit krále z n -té řady na $(n + 1)$ -ní řadu [na $(n - 1)$ -ní řadu]. Tahem „vpravo“ („vlevo“) rozumíme takový tah, kterým lze přemístit krále z k -tého sloupce na $(k + 1)$ -ní sloupec [na $(k - 1)$ -ní sloupec].

P o z n á m k a. Všechny tahy krále po úhlopříčce tedy patří vždy do dvou kategorií, např. tah krále z pole $(0, 0)$ na pole $(1, 1)$ patří jak mezi tahy „dolů“, tak mezi tahy „vpravo“ (obr. 2).

P. 3. Nutná a postačující podmínka pro to, aby bylo možno přemístit krále z pole (n_0, k_0) na pole (n, k) pouze užitím tahů „dolů“ (resp. „nahoru“, resp. „vpravo“, resp. „vlevo“) je, aby platilo $0 \leq |k - k_0| \leq n - n_0$, (resp. $0 \leq |k - k_0| \leq n_0 - n$, resp. $0 \leq |n - n_0| \leq k - k_0$, resp. $0 \leq |n - n_0| \leq k_0 - k$).

Pravidlo P. 3 je ihned zřejmé. Pro snažší ujasnění „geometrického“ významu tohoto pravidla je na obr. 3 naznačeno, na která pole lze přemístit krále z pole $(-2, 1)$ pouze užitím tahů „dolů“. Doporučuji čtenáři, aby si sám ostatní případy načetl.



Obr. 2

P. 4. Nutná a postačující podmínka pro to, aby přemístění krále z pole (n_0, k_0) na pole (n, k) bylo nejrychlejší je, aby přemístění bylo provedeno pouze užitím jediného druhu tahů (tj. např. tahy „dolů“, nebo „nahoru“ atd). Druh tahů se určí pomocí pravidla P. 3.

I toto pravidlo je ihned zřejmé. Má-li být totiž přemístění nejrychlejší, pak si nesmí král, populárně řečeno, zajít oklikou.

Danou úlohu 2. rozřešíme nyní pro neomezenou šachovnici. Úlohu stačí zřejmě rozřešit pouze pro případ cesty z pole (n_0, k_0) na pole (n, k) , kde $n_0 = k_0 = 0$, $0 \leq |k| \leq n$, $n > 0$. Každá nejkratší cesta bude tedy uskutečňována pouze užitím tahů „dolů“. Ostatní případy odtud dostaneme vhodným posunutím a otočením šachovnice.

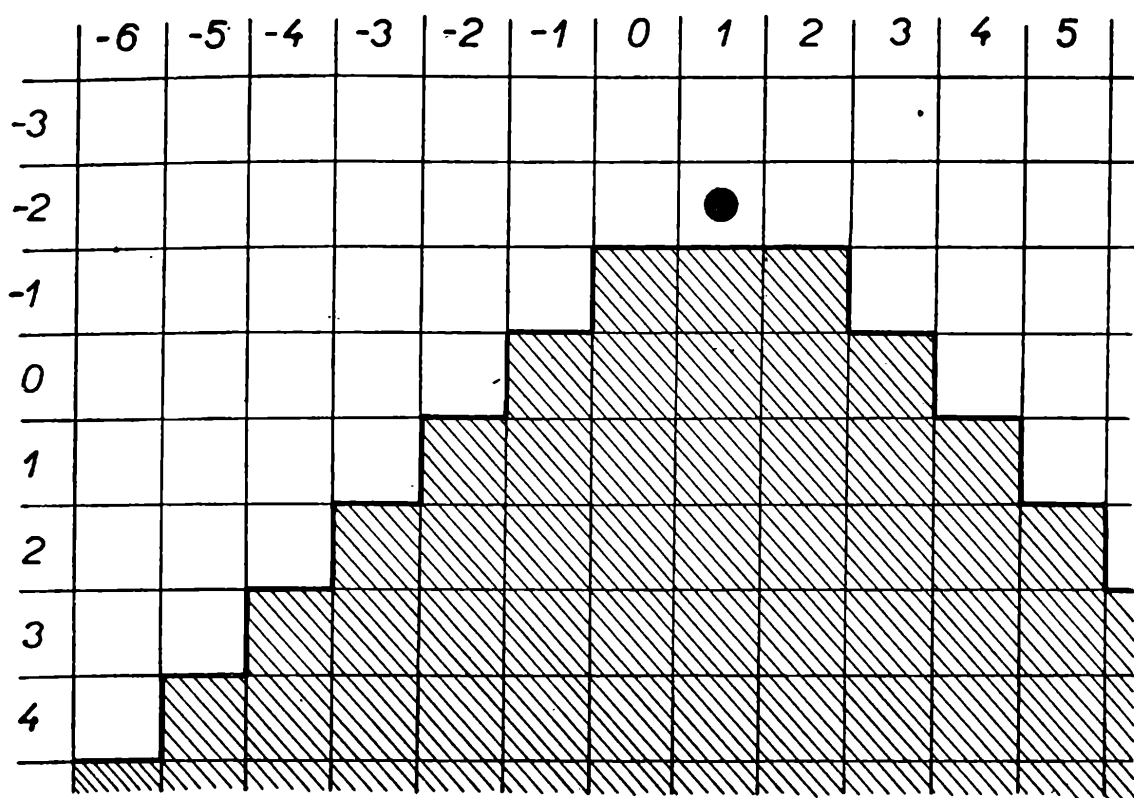
Je ihned vidět, že na pole (n, k) lze přemístit krále jediným tahem „dolů“ pouze z polí $(n - 1, k - 1)$, $(n - 1, k)$, $(n - 1, k + 1)$. Odtud a z předcházejících pravidel P. 3 a P. 4 dostáváme:

P. 5. Počet různých nejkratších cest krále na neomezené šachovnici z pole

$(0, 0)$ na pole (n, k) , kde $0 \leq |k| \leq n$, $n > 0$, je dán číslem $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ definovaným rekurentní formulí

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = 0$ pro $i \neq 0$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$;
2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix}$ (1)

Na obr. 4 je podle tohoto pravidla naznačeno řešení úlohy 2. v tomto speciálním případě. Nejdříve byly podle tohoto pravidla zjištěny počty



Obr. 3

nejkratších cest na všechna pole 1. řady, potom 2. řady atd. Chceme-li tedy zjistit např. počet nejkratších cest krále z pole $(0, 0)$ na pole $(4, 1)$, resp. $(4, -3)$, musíme nejdříve určit příslušné počty nejkratších cest na všechna pole 1. až 3. řady a odtud pak dostáváme

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 + 6 + 3 = 16,$$

$$\text{podobně } \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 + 1 + 3 = 4.$$

P o z n á m k a. Čísla $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ pro $0 \leq |k| \leq n$ můžeme tedy napsat do

schematu, které nám trochu připomíná známý Pascalův trojúhelník

				1					
				1	1	1			
			1	2	3	2	1		
		1	3	6	7	6	3	1	
	1	4	10	16	19	16	10	4	1

Z pravidla P. 5 plyne snadno obecnější pravidlo:

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	2	3	2	1	0	0
3	0	1	3	6	7	6	3	1	0
4		4				16			

Obr. 4

P. 6. Počet nejkratších cest krále na neomezené šachovnici z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) je dán číslem $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, kde

$$n = \max(|n_0 - n_1|, |k_0 - k_1|), \quad k = \min(|n_0 - n_1|, |k_0 - k_1|)$$

Nyní odvodíme některé vlastnosti čísel $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

Věta 1. Je-li $n \geq 0$, potom $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -k \end{bmatrix}$

Věta 2. Je-li $|k| > n \geq 0$, potom $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$

Obě věty se snadno dokáží matematickou indukcí.

Věta 3. Budiž $x \neq 0$, n celé nezáporné. Potom

$$(x + 1 + x^{-1})^n = \sum_{k=-n}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (2)$$

Důkaz podáme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ věta platí. Nyní

za předpokladu, že věta platí pro jisté $n \geq 0$, dokážeme její platnost pro $n + 1$. Protože pro $|k| > n \geq 0$ je $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, můžeme vztah (2) přepsat ve tvaru

$$(x + 1 + x^{-1})^n = \sum_{k=-n-2}^{n+2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (2')$$

Nyní

$$(x + 1 + x^{-1})^{n+1} = (x + 1 + x^{-1})^n \cdot (x + 1 + x^{-1}). \quad (3)$$

Dále určíme ve výrazu (3) koeficient při mocnině x^k , kde $-n-1 \leq k \leq n+1$. Člen s x^k ve výrazu (3) dostaneme vynásobením

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+1} + \dots \right) (x + 1 + x^{-1}) = \\ & = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+2} + \\ & + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+1} + \\ & + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-2} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k-1} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^k + \dots = \\ & = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} x^k + \dots = \dots \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k + \\ & + \text{což jsme měli dokázat.} \end{aligned}$$

Věta 3. nám však příliš nepomůže k rychlému určení čísla $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Výpočet čísla $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ provedeme poměrně rychle pomocí další věty 4. Nejdříve však zobecníme definici binomických koeficientů $\binom{n}{k}$. Pro $0 \leq k \leq n$ definujeme $\binom{n}{k}$ obvyklým způsobem. Pro $k < 0 \leq n$, resp. $k > n \geq 0$ definujeme $\binom{n}{k} = 0$. Snadno se ihned ověří, že pro takto zobecněnou definici čísla $\binom{n}{k}$ platí opět známý vzorec

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (4)$$

(Pokračování)

Řešení úlohy Klempíř v rozpacích

Úloha v č. 7 Rozhledů zněla:

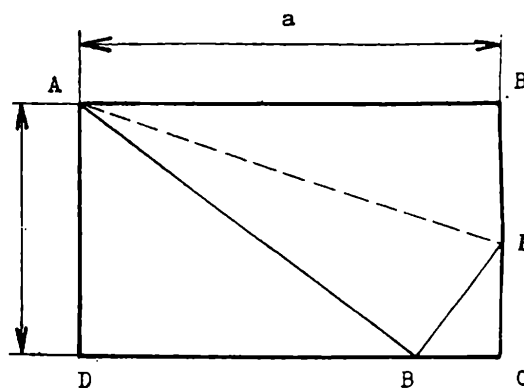
Z plechového obdélníku $ABCD$ má klempíř odstříhnout trojúhelník ABE tak, aby při jeho přeložení (viz obr. 1) do polohy AEB' byl bod B' na okraji CD .

Jak nejrychleji vypočíte délkou $B'E$, aby věděl, kudy má vést řez AE ? Pokuste se vypočíst tuto délku z paměti pro $AB = 15$, $BC = 9$!

Řešení: Z obrázku je vidno
 $\triangle AB'D \sim \triangle B'CE$, tedy $\frac{B'E}{B'C} = \frac{AB'}{AD}$,

dále $B'C = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ a konečně

$B'E = \frac{a}{b} (a - \sqrt{a^2 - b^2})$. Pro $a = 15$, $b = 9$ je $B'E = 5$.



Obr. 1

Správně řešili užitím různých podobných trojúhelníků:

Kraemer E., 10. B, 27. JSŠ, Praha 6; *Marunová E.*, JSŠ, Kaplice.
 Jen číselné řešení: *Fiala B.*, učeň ZUŠ Tesly, Pardubice.

M. Menšík

Řešení úlohy Máte velmi dobrou představivost?

Úloha v č. 9 Rozhledů zněla:

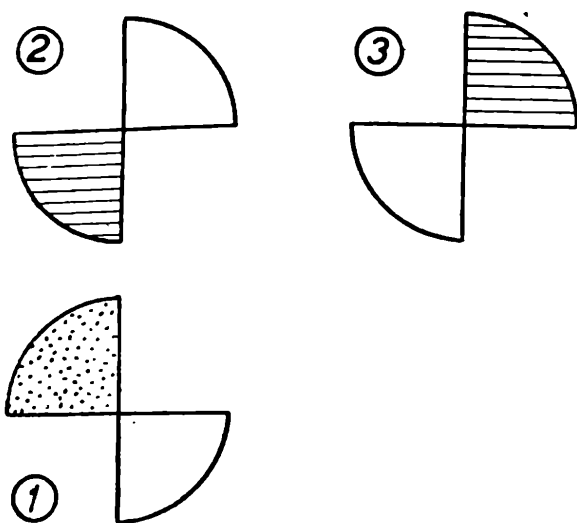
Nakreslete nebo narýsujte názorný obrázek těles daných na obr. 1 a 2 vždy půdorysem, nárysem a bokorysem zleva.

Správně zobrazit v názorném (např. kosoúhlém) průmětu těleso, jehož pravoúhlé průměty byly dány, činilo většině soutěžících značné obtíže, byť správný tvar jim byl znám.

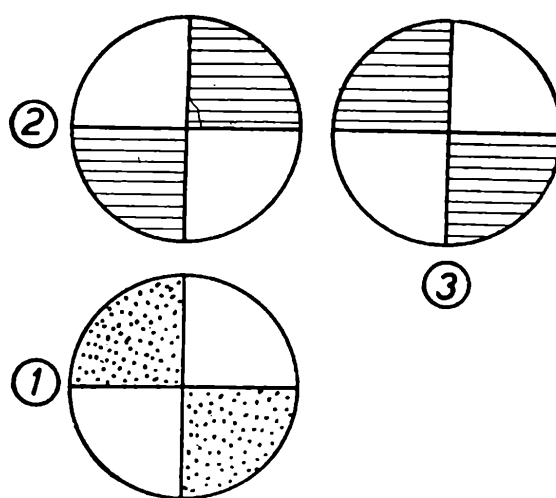
Jako nejlépe vyhovující jsme vybrali obr. 3, a 4, které zaslal *Jiří Jedlička*, učeň radiotechnik, Praha 5. Také *Jaromír Vostrý* z Jičína provedl takové obrázky. Otočíme-li těleso na obr. 4 o 90° např. kolem svislé osy, dostaneme též správné řešení.

Další správná řešení zaslali: *Baumlová M.*, Plzeň; *Brettschneiderová S.*, 9. B DSŠ, Olomouc; *Korec J.*, Partizánské, který správně došel k závěru po matematické úvaze, že „...nejjednodušší vyhovující těleso je

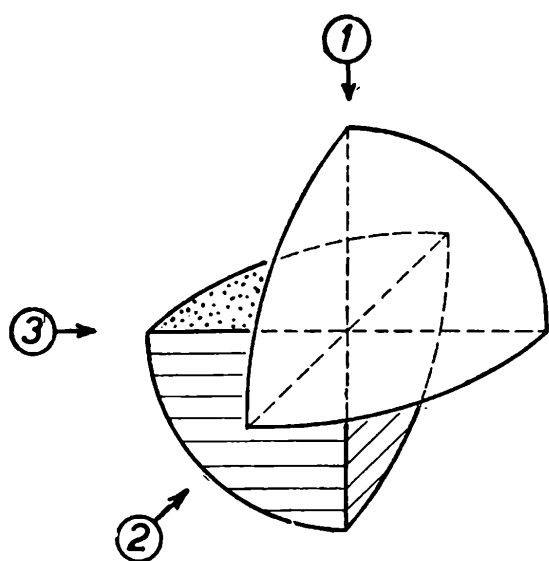
gula“ (tj. její části); *Kos V.*, 10. tř. DSŠ, Lázně Bělohrad; *Kubálková S.*, laborantka ČKD, Praha 3; *Malovecký L.*, PŠEl, Košice; *Paloušková M.*, 9. B DSŠ, Olomouc; *Inž. Rataj J.*, Plzeň; *Sojka P.*, JSŠ, Chotěboř; *Váter V* JSŠ, Nepomuk; *Vokřínek P.*, Urbanov a *Vrba A.*, Přestice.



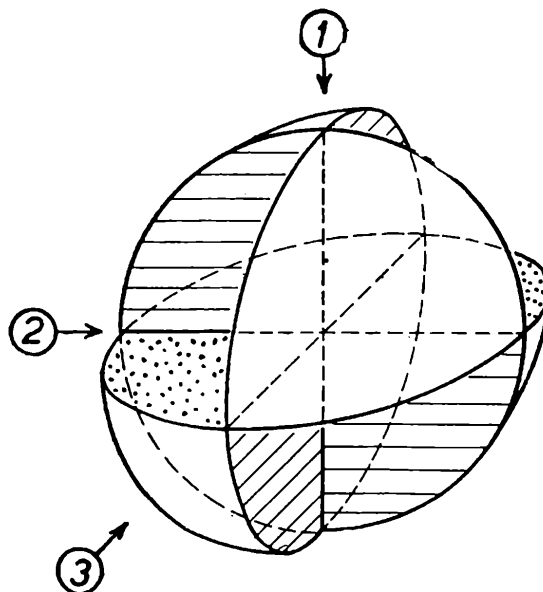
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Tvar pouze prvního tělesa určili: *Hlaváčová P.*, 10. tř. JSŠ, Modřany; *Koštíř J.*, JSŠ, Praha 10.

M. Menšík

J. Filip: Prehľad deskriptivnej geometrie

Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry v Bratislave vydalo v roku 1959 knihu Jozefa Filipa, *Prehľad deskriptivnej geometrie*.

Kniha je rozdelená do 13 kapitol, ktoré tvorí tri väčšie celky. V úvodní časti je krátce vysvetlená hlavná úloha deskriptívnej geometrie, v knihe užívaná symbolika, základné vzťahy medzi body, priamkami a rovinami, osová afinita a ohniskové vlastnosti kuželosečiek.

Druhá časť (kap. 6 až 8) sa zaoberá pravoúhlým promítaním na jednu priemietnu (a to tzv. kótovaným promítaním), pravoúhlým promítaním na dve k sebe kolmé priemietny (Mongeovým promítaním) a zavedením ďalších pomocných priemietny. V oboch druhoch promítaní sú riešené úlohy polohy a základné metrické úlohy.

Ve tretej časti (kap. 9 a 10, 12 a 13) sa autor zaoberá zobrazením hranolů a jehlanů, príp. kruhových valcov a kuželů a zobrazením plochy kulové. Preto je do tejto časti vsunutá kap. 11 o priemete kružnice a elipsy s niektorými ďalšími konštrukciami dôležitými pre vyrýsovanie danej elipsy. Vedľa zobrazení uvedených telies je prevedený podrobný výklad o jejích rezech rovinami (včetně věty Quételet-Dandelinovy pro rovinný řez na kruhovém válci příp. kuželi), dále určení průsečíků přímky s těmito tělesy a jejich sítě.

Kniha je určená pro opakování, nebo jako příprava k dalšímu studiu a proto nejsou obvykle prováděny všechny důkazy. Její obsah se shoduje z větší části s látkou nynější 9.—11. třídy, jen v některých podrobnostech je ovšem poněkud širší. Přímou v textu je úplně vyřešeno 27 příkladů včetně s důkazem správnosti konstrukce a diskusí řešené úlohy. Pro vlastní cvičení čtenáře je připojeno 237 úloh, které navazují na vyloženou látku a nepotřebují zpravidla ani žádného návodu k řešení.

Způsob výkladu je velmi srozumitelný, takže kniha jistě dobře splní úkol, pro který byla sepsána. Pomůže totiž tomu, kdo už se někdy deskriptivní geometrii učil, osvěžit zapomenuté, a toho, kdo se chce s deskriptivní geometrií teprve seznámit, uvádí do nejdůležitějších základních vztahů včetně dvou nejdůležitějších zobrazovacích metod.

Kniha vázaná do desek z umělé hmoty je kapesního formátu, má 332 stran, 201 obrázků a stojí 14,90 Kčs.

Karel Drábek

I v a n K o r e c, absolvent JSŠ, Partizánske:

Druhá medzinárodná matematická olympiáda 1960

V dňoch 21.—24. júla 1960 sa konala v meste Sinai v Rumunsku druhá medzinárodná matematická olympiáda. Usporiadala ju Rumunská vedecká spoločnosť pre matematiku a fyziku. Termín bol veľmi krátky. Súťažiť sa malo už v utorok, 19. júla. Naša delegácia však nemala v potrebnom čase lietadlo a cestu musela nastúpiť až 18. júla večer vlakom. Vedúci našej delegácie s. prof. Rudolf Zelinka, tajomník ústredného výboru čs. matematickej olympiády, vybavil telefonicky odloženie súťaže o jeden deň. Situácia vyzerala tak, že prídeme do miesta konania súťaže o tretej hodine ráno a ešte v ten istý deň budeme počítať prvú časť príkladov. Všetci členovia československého družstva boli však ochotní súťažiť i za takýchto podmienok.

Napriek nevhodnému času nášho príchodu do Sinai, prišli nás čakať na stanicu rumunskí i iní súdruhovia, a to nielen funkcionári, ale i členovia družstiev. Rumunskí usporiadatelia vyšli nám v ústrety i v tom, že sami navrhli odloženie súťaže o ďalší deň. Prvý deň po príchode sme využili na odpočinok po ceste a čiastočne prebdenej noci. Ostatné delegácie podnikli spoločný výlet.

V dňoch 21. a 22. júla sa riešili súťažné príklady. V prvom dni boli zadané tri príklady z algebry (texty príkladov sú uvedené v prílohe).

Najviac ťažkosti pôsobil československým žiakom prvý príklad. Bol to príklad takého typu, aký sa u nás v matematickej olympiáde nevyskytuje. Príklad bol hodnotený na 8 bodov. Žiaden z našich žiakov však tento počet nedosiahol. Druhý príklad bol pre našich žiakov pomerne ľahký, pretože podobné úlohy sa vyskytli niekoľko ráz i v našej matematickej olympiáde. Siedmi získali na ňom plný počet bodov. V treťom príklade päť našich žiakov dosiahlo plný počet bodov, no traja ďalší nezískali ani bod.

Po prvom dni sme nemali veľa nádejí. Žiaden náš žiak nemal plný počet bodov a priemer bodov na žiaka bol 12,1 z 20 možných. V druhom dni boli zadané štyri príklady z geometrie (texty v prílohe).

Prvý príklad bol pre čs. družstvo najľahší zo všetkých príkladov súťaže. Všetci na ňom získali plný počet bodov. Druhý príklad, ako sme sa neskôr dozvedeli, zadaný Československom, mali traja naši žiaci na plný počet bodov, štyria ďalší na 5 bodov zo 7 možných. Tretí príklad, najťažší príklad druhého dňa, vyriešili na plný počet bodov iba dvaja naši žiaci. Štvrtý príklad sme vyriešili šiesti na plný počet bodov, ďalší dvaja získali na ňom 4 body z 5 možných.

Celkove sme v druhom dni získali priemer 18,75 bodu z 25 možných.

Uvediem teraz tabuľku príkladov, kde je bodové hodnotenie príkladov a percento získaných bodov pre československé družstvo:

Deň:	I.			II.				I.	II.	I. + II.
Čís. príkl.:	1	2	3	1	2	3	4	spo- lu: 1—3	spo- lu: 1—4	cel- kom:
Body:	8	6	6	5	7	8	5	20	25	45
Získ-percent:	34	92	61	100	77	60	95	61	75	71

Tabuľka I. Počet bodov, ktoré získali na II. MMO jednotliví žiaci (anonymne).

Zem										Spolu
ČSSR	43	37	34	33	32	32	24	22		257
Maďarsko	43	41	38	37	29	21	21	18		248
Rumunsko	41	39	34	30	28	27	26	23		248
Bulharsko	35	31	29	28	22	14	10	6		175
NDR	16	10	6	4	2	0	0	0		38

Poznámka: Prvá cena nad 40 bodov, druhá cena nad 37 bodov, tretia cena nad 33 bodov, čestné uznanie nad 29 bodov.

Každý má iný vkus, a preto vo veci príkladov môžem hovoriť iba za seba. Mne sa najviac páčili druhý a tretí príklad druhého dňa.

(Dokončení)

Nová adresa redakcie:

Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86.

II. soutěžní úlohy I. kola MO

(První trojice úloh)

Kategorie A

1. a) Dokažte, že je-li $0 < x < 1$, potom platí

$$1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x} < \frac{1}{2}x^2.$$

b) Narýsujte (např. na milimetrový papír pomocí tabulky hodnot) graf funkcí

$$y = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}, \quad y = \frac{1}{2}x^2$$

v intervalu $(0, 1)$; za jednotku délky zvolte 20 cm.

c) Vypočítejte (na čtyři desetinná místa), o kolik se liší hodnoty pravé a levé strany dokazované nerovnosti v úloze a) pro $x = \frac{1}{2}$.

2. Ak sú a, b, c dĺžky stran trojuholníka ABC a s jeho polovičný obvod; potom pre dĺžku u osi vnútorného uhlu pri vrchole A tohoto trojuholníka platí vzťah

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot s(s-a);$$

dokažte.

Ak je trojuholník ABC pravouhlý o prepone BC , potom použitím predchádzajúceho výsledku dokažte, že

$$u = \frac{1}{2}a \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

pričom ω je veľkosť hociktorého z oboch ostrých uhlov trojuholníka ABC .

3. Je dán čtverec $MNPQ$. Uvažujme všetky rovnostranné trojúhelníky ABC , které mají tyto dvě vlastnosti:

(1) Vrchol A leží na úsečce MN .

(2) Vrcholy B, C leží pořadě na polopřímkách NP, MQ .

Zjistěte, který útvar je geometrickým místem:

a) vrcholů B ; b) středů úseček BC ; c) těžišť trojúhelníků ABC .

Potom sestrojte ten z trojúhelníků ABC , jehož těžiště padne na úsečku MP .

Kategorie B

1. Závod dodává p procent svých výrobků pro vývoz, zbytek na domácí trh.

a) Závod dostane za úkol zvýšit vývoz o q %, domácí dodávky o r %. O kolik procent musí zvýšit celkem výrobu?

b) Závod zvýší celkovou výrobu o s %; z tohoto zvýšení dodá třikrát více vývozu než na domácí trh. O kolik procent vzrostly jeho dodávky pro vývoz a o kolik procent dodávky pro domácí trh?

2. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané veľkosti výšok v_a, v_b a ďalej veľkosť ťažnice t_a .

Udajte podmienky riešiteľnosti.

3. Máme rozdeliť lichoběžník ve tři nepřekrývající se trojúhelníky o stejných obsahích.

Zjistěte, zda je úloha řešitelná pro každý lichoběžník.

V případech, kdy je úloha řešitelná, najděte všechny způsoby takového rozdělení.

Kategorie C

1. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{5678901234}{6789012345}, \frac{5678901235}{6789012347}$$

je väčší.

2. Z cihelny v mieste A se vozí nákladnými auty cihly na stavbu v mieste B . Řidič nákladního vozu nastupuje a končí práci v mieste A , jezdí průměrnou rychlostí 45 km/h s vozem plným a 48 km/h s vozem prázdným. Při každé jízdě trvá nakládání vozu 35 minut, jeho vyložení 20 minut.

Vypočtete vzdálenost místa A od místa B , víte-li, že řidič při osmihodinové pracovní době odvezl z cihelny na staveniště 5 vozů cihel.

O kolik minut při každé jízdě je nutno zkrátit dobu nakládání a skládání (počítáno dohromady), aby neklesl osmihodinový výkon řidiče, je-li nákladní auto nuceno jet z místa A do B (i zpět) objíždkou, která je o čtvrtinu delší než původní silnice.

3. Dané sú polomery r , ρ kružníc opísanej a vpísanej pravouhlému trojuholníku.

Vyjadrite vzdialenosť stredov obidvoch týchto kružníc použitím čísel r , ρ .

Kategorie D

1. V zápise dělení dvou přirozených čísel chybí některé cifry. Nahraďte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný. Zápis zní: $12*76 : 23* = *2$ (každá hvězdička značí jednu chybějící cifru).

2. Je dána úsečka AB o středu S ; označme a , b kolmice sestrojené pořadě v bodech A , B k přímce AB . Dále zvolme bod M na prodloužení úsečky AB za bod A .

Bodem M sestrojte přímku p tak, aby její průsečíky X , Y s přímkami a , b , a bod S byly vrcholy pravoúhlého trojúhelníka o přeponě XY .

3. Majme tri prirodzené čísla a , b , c . Utvorme

$$(a + b + c)^2, (a + b - c)^2, (a - b + c)^2, (-a + b + c)^2, \\ (a - b - c)^2, (-a + b - c)^2, (-a - b + c)^2, (-a - b - c)^2$$

a označme s súčet týchto ôsmých čísel.

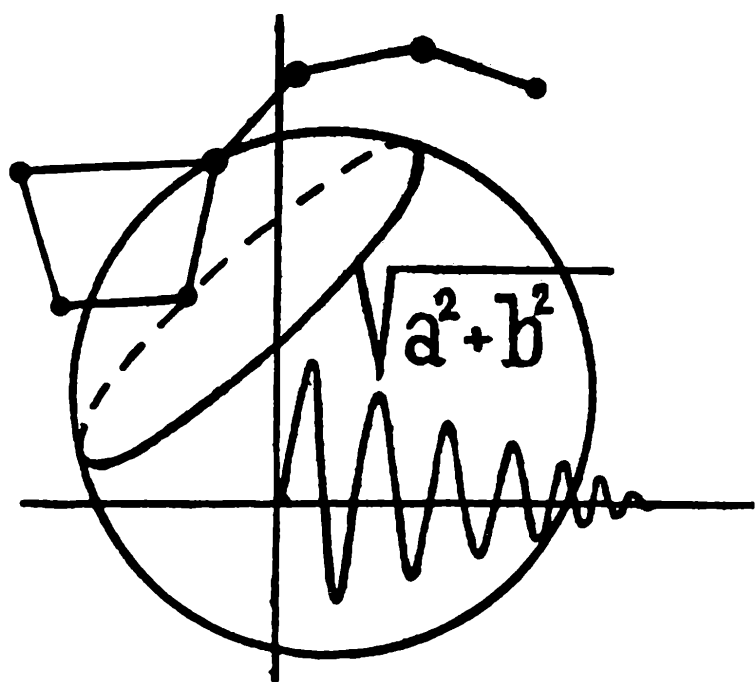
a) Napíšte súčet s v najjednoduchšom tvare.

b) Najdite všetky trojice prirodzených čísel a , b , c tak, aby výsledný súčet s bol rovný 240.

Řešení těchto tří prvních soutěžních úloh odevzdejte do 20. prosince 1960.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



4

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 4

Toto číslo vyšlo 10. prosince 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

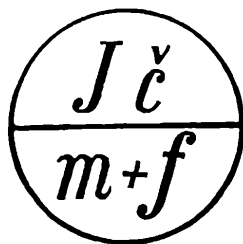
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H

J. Glivický: Konstrukce včelí buňky	145
Inž. dr. V. Zajíc: Jednoduchá konstrukce libovolného pravidelného mnohoúhelníka	150
Inž. Z. Kos: Vydatnost jímací galerie a přítok do stavební jámy	156
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	161
J. Straka: Neurčité rovnice (Dokončení)	166
O. Jeništa: Obrisy rotačních ploch v rovnoběžném promítání pravoúhlém (Dokončení)	172
Inž. J. Kodeš: Sluneční baterie - zdroj elektrické energie pro rakety	176
Inž. J. Machalický: Váha a hmota těles	178
Prof. dr. J. Vanovič: Aká je príčina priehľadnosti alebo nepriehľadnosti hmotných prostredí?	180
M. Koman: Dvě úlohy ze zábavné matematiky (Dokončení)	182
I. Korec: Druhá medzinárodná matematická olympiáda 1960 (Dokončení)	188
O. S., M. M.: Rozhovor s vítězi soutěže Rozhledů	191
M. M.: Od vesla k atomovému ledoborci	192
Soutěžní úlohy I. kola MO (Druhé trojice úloh)	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*01379. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

Matematika

Josef Glivický, Prostějov:

Konstrukce včelí buňky

Včelí plást je tvořen z šestihranných buněk. Je otázka, proč si včely zvolily pro své dílo právě pravidelný šestiúhelník za podstavu při stavbě buňky. Je to proto, že síť pravidelných šestiúhelníků pokryje celou rovinu a nenechá nevyužitých mezer. Kromě toho už jen síť čtverců a rovnostranných trojúhelníků má stejné vlastnosti. Dá se však matematicky dokázat, že při stejném obvodu je obsah pravidelného mnohoúhelníka o větším počtu stran větší než obsah mnohoúhelníka o menším počtu stran. A naopak, jsou-li obsahy dvou pravidelných mnohoúhelníků stejné, pak ten, který má větší počet stran, má menší obvod.

Proto je pro konstrukci včelí buňky nejvýhodnější podstavou (lépe řečeno kolmým řezem) pravidelný šestiúhelník, poněvadž s nejmenším množstvím vosku může včela obsáhnout co největší část roviny. Jednotlivé včelí buňky jsou proto pravidelné šestiboké hranoly o rovnoběžných osách a jsou připojeny k svislé, tzv. mezistěně z obou jejích stran. Osy buněk na různých stranách mezistěny se neshodují. Jsou posunuty tak, že splývají s jednou z hran protilehlé buňky. Podstava šestiúhelníkové buňky na mezistěně leží vždy třetinou na podstavách tří protilehlých buněk. Dna těchto buněk na mezistěně nejsou rovinná. Šestiboký hranol, představující včelí buňku, je ukončen na mezistěně pravidelným souosým trojbokým jehlanem, jehož stěny svírají tedy se základní rovinou stejný úhel a jehož pobočné hrany protínají hrany hranolu. Šest průsečnic jehlanové a hranolové plochy spolu s třemi pobočnými hranami jehlanové plochy tvoří tři kosočtverce.

Provedme konstrukci včelí buňky a stanovme matematické podmínky pro volbu trojbokého jehlanu ukončujícího šestiboký hranol a to tak, aby včelí buňka byla tělesem, které při stejném objemu má minimální

obsah povrchu. Zvolme si pravidelný šestiúhelník A, B, C, D, E, F (obr. 1) podstavou pravidelného šestibokého hranolu. Na třech nesousedních pobočných hranách si zvolme body B', D', F' tak, že $BB' = DD' = FF'$. Podle přesného měření včelí buňky je tato vzdálenost rovna $\frac{25}{6} AB$. Roviny ${}^1SB' D', {}^1SD' F'$ a ${}^1SF' B'$ protnou šestibokou

hranolvou plochu a vytvoří tři kosočtverce ${}^1SB' C' D', {}^1S D' E' F', {}^1SF' A' B'$, přičemž body C', E', A' leží na zbývajících třech pobočných hranách a pak též $CC' = EE' = AA'$.

Takto vzniklé těleso je podstatou včelí buňky. Zbývá určit vzdálenost roviny určené body $B' D' F'$ od roviny $C' E' A'$. Tato vzdálenost se rovná též vzdálenosti roviny $B' D' F'$ od bodu 1S . Objem tohoto tělesa je nezávislý na poloze bodu 1S , tím též na poloze bodů $C' E' A'$. Nutno jen stanovit podmínku pro to, při jaké volbě bodu 1S , případně bodů $C' E' A'$, je povrch tělesa minimální.

Celé těleso se skládá ze šesti trojbokých pravidelných hranolů. Uvažujme o jednom z nich $BCS B' C' {}^1S$ a s povrchu tohoto hranolu uvažujme pouze o součtu obsahů lichoběžníka $BCC' B'$ a trojúhelníka ${}^1S B' C'$.

Vedme nejdříve v kosočtverci $SB C D$ úhlopříčky SC, BD a v kosočtverci ${}^1S B' C' D'$ úhlopříčky ${}^1SC', B' D'$ (obr. 1). Průsečíky obou párů úhlopříček označme M a M' .

Je pak

$$BC = 2 \cdot MC = \frac{2 MB}{\sqrt{3}}$$

(trojúhelník BCS je rovnostranný) a také

$$BB' = MM', MB = M'B'$$

Obsah lichoběžníku $BCC' B'$ je

$$P = \frac{1}{2} (BB' + CC') \cdot BC = (BB' + CC') \frac{M'B'}{\sqrt{3}}.$$

Obsah trojúhelníka ${}^1SB' C'$ se rovná součinu délek $M'B'$ a $M'C'$. Minimálním má být proto výraz, představující součet obsahů obou obrazců, to je

$$(BB' + CC') \frac{M'B'}{\sqrt{3}} + M'B' \cdot M'C'$$

v němž členy $M'B'$ a BB' jsou konstantní.

Jde tedy v podstatě o výraz

$$\frac{CC'}{\sqrt{3}} + M'C' \quad (1)$$

Uvažujme o lichoběžníku $M C C' M'$, v němž jsou rovnoběžnými základnami úsečky $C C'$ a $M M'$.

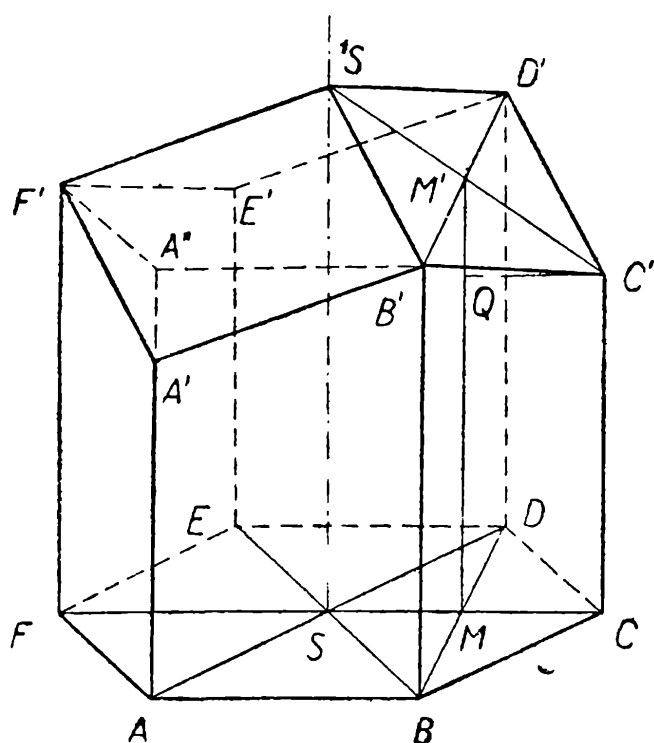
Vedme $C' Q$ rovnoběžně s $C M$, pak $C C' = M M' - Q M'$.

Dosaďme za $C C'$ do (1) a po vynechání konstantní veličiny $\frac{M M'}{\sqrt{3}}$ jde o určení minima výrazu

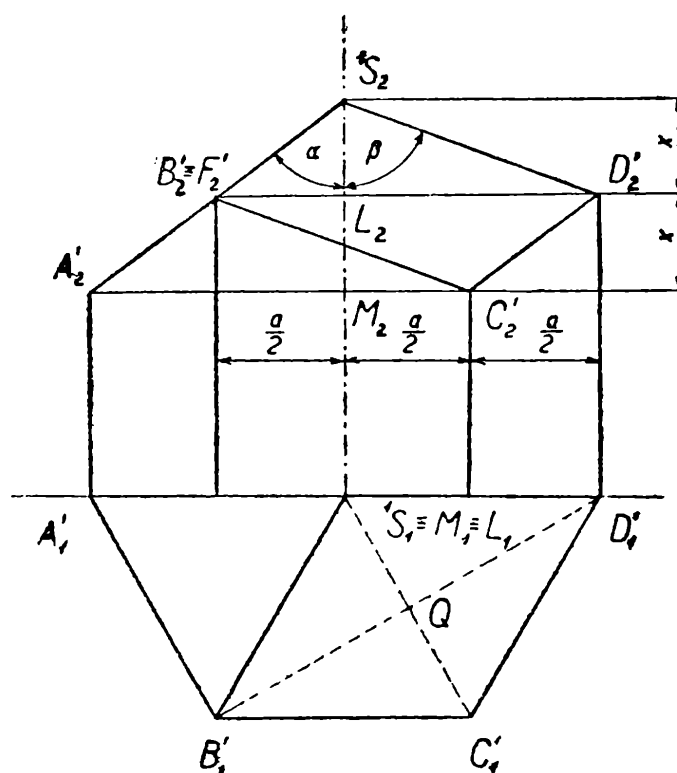
$$M' C' - \frac{Q M}{\sqrt{3}}.$$

Položme $BC = a$, pak $C' Q = \frac{a}{2}$, $\left(C' Q = C M = \frac{a}{2} \right)$; $Q M' = x$.

Dále položme



Obr. 1



Obr. 2

$$M' C' - \frac{Q M'}{\sqrt{3}} = z. \quad (2)$$

V trojúhelníku $M' Q C'$ platí podle věty Pythagorovy

$$M' C' = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Po dosazení do (2) je

$$\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{x}{\sqrt{3}} = z.$$

Krátkou úpravou tohoto výrazu obdržíme kvadratickou rovnici

$$8x^2 - 8xz\sqrt{3} + 3(a^2 - 4z^2) = 0, \quad (3)$$

jejíž diskriminant $D = 24(6z^2 - a^2)$. Minimum nastane pro $D = 0$, to je pro $z = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (3), dostaneme rovnici

$$8x^2 - 4ax\sqrt{2} + a^2 = 0$$

a odtud

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

To značí, že povrch uvažovaného tělesa je při stejném objemu nejmenší tehdy, je-li rozdíl sousedních pobočných hran (a také vzdálenost roviny $A'C'E'$ od roviny $B'D'F'$, resp. vrcholu 1S od roviny $B'D'F'$) rovný čtvrtině úhlopříčky čtverce, sestrojeného nad hranou podstavy pravidelného šestibokého hranolu $AB = BC = a$.

Pomocí vypočtené hodnoty $x = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ určíme velikost úhlu α stěny jehlanové plochy, která protíná hranolovou plochu, s osou hranolové plochy. Na obr. 2 jsou sdružené průměty tělesa představujícího ukončení včelí buňky. Rovina kosočtverce ${}^1S B' A' F'$, kolmá k druhé průmětně se promítá do druhé průmětny jako úsečka $A'_2 {}^1S_2$. Z trojúhelníka $B'_2 L_2 {}^1S_2$ je patrné

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{a}{2x} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2};$$

a odtud

$$\alpha \doteq 54^\circ 44'$$

Podobně úhel β hrany jehlanové plochy s osou tělesa. Například hrana ${}^1S D'$ je rovnoběžná s druhou průmětnou, a proto se úhel β jeví ve skutečné velikosti v trojúhelníku ${}^1S_2 L_2 D'_2$. Bude pak

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{x} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}; \quad \beta \doteq 70^\circ 32'$$

V kosočtverci $B'C'D' {}^1S$ je délka úhlopříčky $B'D' = a\sqrt{3}$. Druhá úhlopříčka ${}^1S C'$ se snadno vypočte z pravoúhlého trojúhelníka ${}^1S C' M$ a rovná se $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Na základě obou úhlopříček kosočtverce snadno se

vypočte velikost úhlů $\angle S B' C'$ a také $\angle B' C' D'$. Bude $\angle S B' C' \doteq 70^\circ 32' = \beta$ a také $\angle B' C' D' = 109^\circ 28' \doteq 2\alpha$.

Mnohem obtížnější by byl důkaz, že všechny stěny včelí buňky svírají navzájem úhel 120° .

Přesným proměřením včelí buňky bylo zjištěno, že všechny rozměry a vztahy odpovídají všem matematickým výpočtům a konstrukcím provedeným s modelem včelí buňky. Výpočty byly provedeny před více než 200 lety matematikem Koenigem na popud slavného francouzského fyzika Réaumur (René Antoine de Réaumur 1683 až 1757), který dokonce navrhl, aby včelí buňka byla vzata za základ neproměnných měr¹⁾.

Celek včelího díla lze považovat z hlediska matematického za plochu minimálního povrchu. To se projevuje v úspornosti provádění celého díla, neboť spotřeba vosku je při stavbě včelího díla minimální. Například v díle, které má objem 36 dm^3 , váha 30 kg medu je nesena voskem váhy 1 kg.

Četní přírodopytci zastávali názor, že včely stavějí své dokonalé dílo instinktem nebo podle zkušenosti. Avšak domněnka o jakémsi inženýrskokonstruktérském instinktu včel a také různé teorie o „geometrii včel“ neobstojí před vysvětlením, při němž srovnáme stavbu včelího díla se vznikem jiných minimálních ploch.

Ponoříme-li zprohýbaný drát, tvořící uzavřený celek, do nějakého roztoku s malým povrchovým napětím (např. do mýdlového roztoku), pak se napne mýdlová blána do takového tvaru (daného v podstatě drátem), při němž potenciální energie povrchového napětí je nejmenší. To je tvar, při němž má vzniklá plocha nejmenší povrch (plocha minimální²⁾).

Mýdlový roztok stejně jako včela „pracuje“ s největší ekonomikou. Zvolí si vždy plochu, třeba složitou, u které je nejmenší spotřeba materiálu. Vosková blána vazká a velmi tenká má za dosti velké teploty při stavbě plástu velmi podobné fyzikální vlastnosti jako mýdlová blána. Obě mají velmi malý modul pružnosti, obě se velmi snadno deformují, i velmi malými vnějšími silami. Působením molekulárních sil vzniká u obou tak zvané povrchové napětí, působící kolmo na blánu. Proto zaujme vazká vosková blána takovou polohu, aby povrchové napětí vymizelo a vytvoří automaticky minimální plochu.

¹⁾ Zajímavé podrobnosti i četné statické výpočty uvádí v časopise *Včela moravská* (roč. 71—1937), v článku *Konstrukce včelího díla* profesor Vysokého učení technického v Praze inž. dr. J. Pantoflíček (1875—1951).

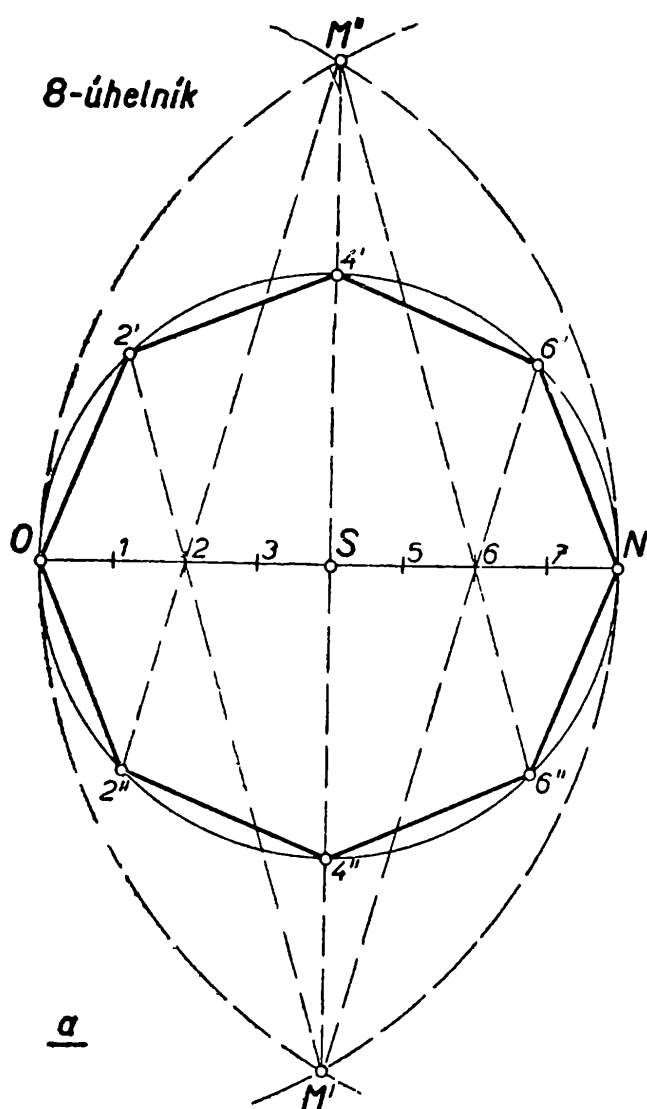
²⁾ Podrobnější poučení podává dr. Z. Pírko a J. Veselka v článku *Fyzikální demonstrace některých matematických úloh*, 30. roč. *Rozhledů matematicko-přírodovědeckých*, str. 80, 106 a násl.

Závěrem možno říci, že *konstruktivní dokonalost včelí stavby vcelku i v podrobnostech si vysvětlíme úplně a přirozeně povrchoým napitím, tudíž fyzikální vlastností mrtvé hmoty.*

Dr. Inž. Vladimír Zajíc, Praha:

Jednoduchá konstrukce libovolného pravidelného mnohoúhelníka

V naší technické literatuře¹⁾ byla nedávno popsána zajímavá jednoduchá konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Vychází z kružnice



Obr. 1a

opsané n -úhelníku (obr. 1). Průměr ON této kružnice rozdělíme známou konstrukcí (obr. 1c) na n stejných dílů, jejichž koncové body označíme číslicemi 1, 2, 3, 4, Na průměru kolmém k průměru ON sestrojíme body M' , M'' tak, aby $OM' = OM'' = ON$. Spojnice bodů označených sudými číslicemi s body M' a M'' pomocné konstrukce vytvoří s kružnicí průsečíky 0, 2', 4', ..., resp. 0, 2'', 4'', ..., které jsou již přímo vrcholy hledaného n -úhelníka. Body M' a M'' získáme jako průsečíky kružnic o poloměru ON , opsaných ze středů O a N .

Výhodou konstrukce je její jednoduchost, univerzálnost a možnost bezprostředního sestrojení všech vrcholů hledaného n -úhelníka, což postrádají obvyklé konstrukce pravidelných n -úhelníků. Bývají zatíženy chybou při postupném vynášení nalezené strany jako tětivy po obvodu opsané kružnice.

Popsaná konstrukce pravidelného n -úhelníka není ovšem matematicky přesná, nýbrž jde o řešení

přibližné. Ukažme si, jaká je jeho přesnost.

¹⁾ Časopis Jemná mechanika a optika, č. 8/1958, str. 286.

úhlu $\angle S'SN = 90^\circ$.



C

$SQ = mr$ a velikostí středového úhlu φ , příslušného oblouku $S'Q'$.

Vzdálenost bodu M' od středu $S(0,0)$ kružnice k na kolmici $SM' \perp ON$ je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka $\triangle OSM'$. Má velikost

$$SM' = \sqrt{(OM')^2 - (OS)^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Bod Q' je průsečíkem přímky QM' a kružnice k . Rovnice přímky QM' v úsekovém tvaru pro souřadnou soustavu (x, y) zní

$$QM' \equiv \frac{x}{r\sqrt{3}} + \frac{y}{rm} = 1 \quad (1)$$

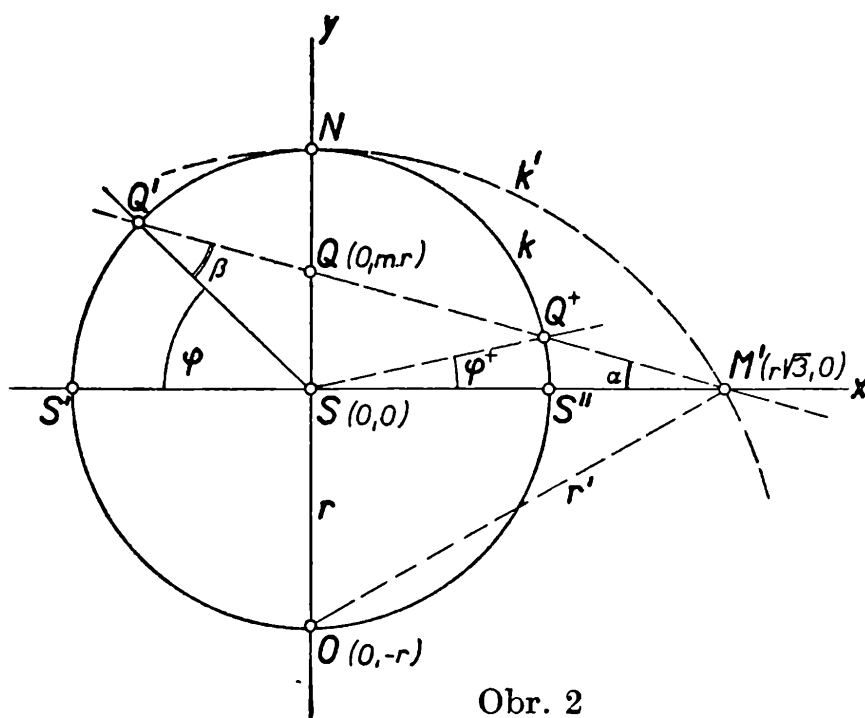
Je výhodné převést tuto rovnici do polárních souřadnic (ϱ, φ) pomocí známé transformace

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi,$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi.$$

Dostaneme tvar

$$QM' \equiv \frac{\varrho \cdot \cos \varphi}{r\sqrt{3}} + \frac{\varrho \cdot \sin \varphi}{r \cdot m} = 1 \quad (2)$$



Obr. 2

Kružnice $k \equiv x^2 + y^2 = r^2$ má po transformaci do polárních souřadnic rovnici

$$k \equiv \varrho = r \quad (3)$$

Soustava rovnic (2) a (3) o neznámých ϱ, φ určuje polární souřadnice průsečíku Q' , z nichž jednou je právě hledaný úhel φ . Zavedením (3) do (2) vzniká rovnice

$$\frac{r \cdot \cos \varphi}{r\sqrt{3}} + \frac{r \cdot \sin \varphi}{r \cdot m} = 1$$

a po úpravě

$$m \cdot \cos \varphi + \sqrt{3} \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot m. \quad (4)$$

Dosadíme-li $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ do (4), získáme kvadratickou rovnici

$$(m^2 + 3) \sin^2 \varphi - 6m \cdot \sin \varphi + 2m^2 = 0 \quad (5)$$

Její kořeny jsou

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{m}{m^2 + 3} (3 + \sqrt{3 - 2m^2}), \\ \sin \varphi^+ &= \frac{m}{m^2 + 3} (3 - \sqrt{3 - 2m^2}), \end{aligned} \quad (6)$$

kde součet v závorce vede k určení polární úhlové souřadnice φ bodu Q' , rozdíl pak k určení souřadnice φ^+ bodu Q^+ (obr. 2), který nemá pro náš účel smyslu.

Ke stejným výsledkům vede řešení úlohy pomocí trigonometrických vztahů v trojúhelnících $\triangle SM'Q'$ a $\triangle SM'Q$. Pro $\triangle SM'Q'$ platí jednak sinová věta

$$\frac{SQ'}{SM'} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (7)$$

odkud

$$\sin \beta = \sqrt{3} \cdot \sin \alpha, \quad (8)$$

jednak věta o součtu úhlů v trojúhelníku

$$\varphi = \alpha + \beta, \quad (9)$$

odkud

$$\beta = \varphi - \alpha \quad (10)$$

a dále

$$\sin \beta = \sin (\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cdot \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha. \quad (11)$$

Srovnáním rovnic (8) a (11) získáme vztah

$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha \quad (12)$$

a po jeho úpravě rovnici

$$\sqrt{3} = \sin \varphi \cdot \cotg \alpha - \cos \varphi. \quad (13)$$

Dosadíme-li sem

$$\cotg \alpha = \frac{SM'}{SQ} = \frac{r\sqrt{3}}{r \cdot m} = \frac{\sqrt{3}}{m}, \quad (14)$$

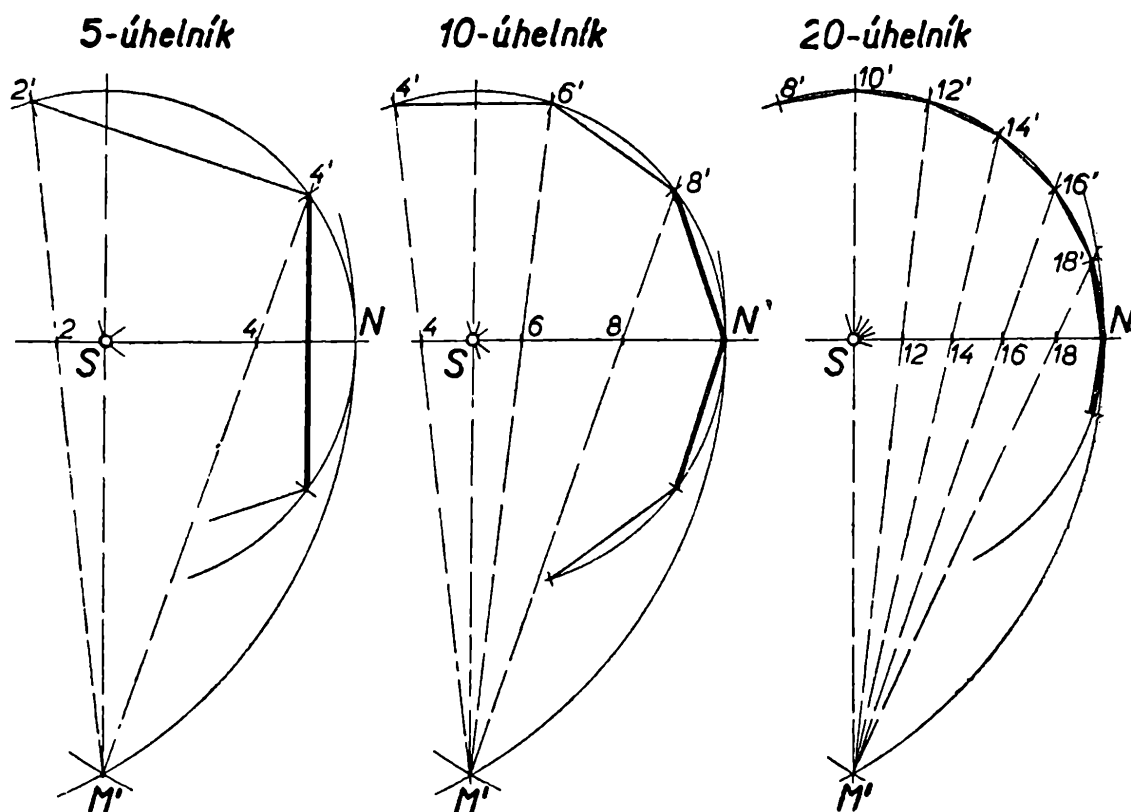
dojdeme opět k rovnici (5) po zavedení $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$.

V následující tabulce jsou udány výsledky výpočtů úhlů φ podle

rovnice (6) pro řadu hodnot m , odpovídající dělení pravého úhlu na pět stejných dílů čili pravidelnému dvacetiúhelníku.

m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\sin \varphi$	0	0,30978	0,58696	0,80536	0,94758	1
φ	0°	18°02'48"	35°56'30"	53°38'42"	71°22'0"	90°
$m \cdot 90^\circ$	0°	18°	36°	54°	72°	90°
$\Delta \varphi =$ $= \varphi - m \cdot 90^\circ$	0'	+ 2'48"	- 3'30"	- 21'18"	- 38'0"	0'

Pro srovnání je v tabulce uvedeno přesné dělení pravého úhlu na pětiny. Jak je z tabulky a z obr. 2 zřejmé, vzniká největší chyba $\Delta \varphi$ přibližného dělení v nejvzdálenější části poloměru SN od středu S kružnice k a činí v nejnepříznivějším případě u konstrukce pravidelného dvacetiúhelníka $\Delta \varphi / \varphi = 38'0'' / 18^\circ = 3,52 \%$.

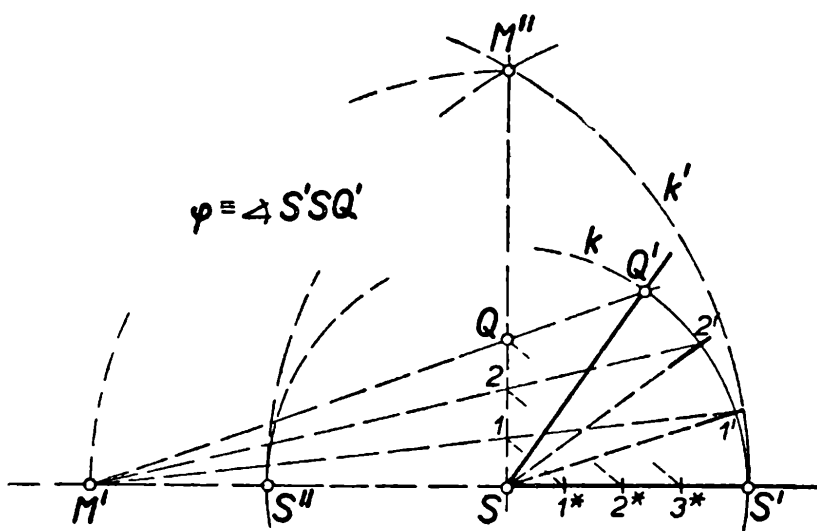


Obr. 3

Konstrukce pravidelného desetiúhelníka by byla charakterizována řadou hodnot $m = 0; 0,4; 0,8$, nebo $m = 0,2; 0,6; 1,0$ a největší chyba přibližného dělení oblouku zde činí $\Delta \varphi / \varphi = -21'18'' / 36^\circ = 0,99 \%$.

Pravidelný pětiúhelník vznikne pro $m = 0; 0,6$, nebo $m = 0,2; 0,8$; případně pro $m = 0,4; 1,0$ a maximální chyba konstrukce zde činí $\Delta\varphi/\varphi = 2 \times 21'18''/72^\circ = 0,99\%$. Nejméně přesné strany zmíněných pravidelných obrazců jsou vyznačeny silně v obr. 3.

Samotnou délku strany pravidelného mnohoúhelníka lze ovšem určit s přesností daleko větší tím, že použijeme části oblouku kružnice vycházející z bodu S' . Délku strany pravidelného dvacetiúhelníka lze pak stanovit (mezi body určenými hodnotami $m = 0$ a $m = 0,2$) s přesností $\Delta\varphi/\varphi = 2'48''/18^\circ = 0,259\%$, což je pro stranu 100 mm dlouhou chyba $+0,26$ mm. Pro délku strany pravidelného desetiúhelníka vychází v tomto případě přesnost $\Delta\varphi/\varphi = -3'30''/36^\circ = -0,162\%$ mezi vrcholy určenými hodnotami $m = 0$ a $m = 0,4$. Stranu pravidelného pětiúhelníka mezi vrcholy určenými hodnotami $m = 0,2$ a $m = 1$ stanovíme s přesností $\Delta\varphi/\varphi = 2'48''/72^\circ = 0,065\%$. Tím vzniká chyba

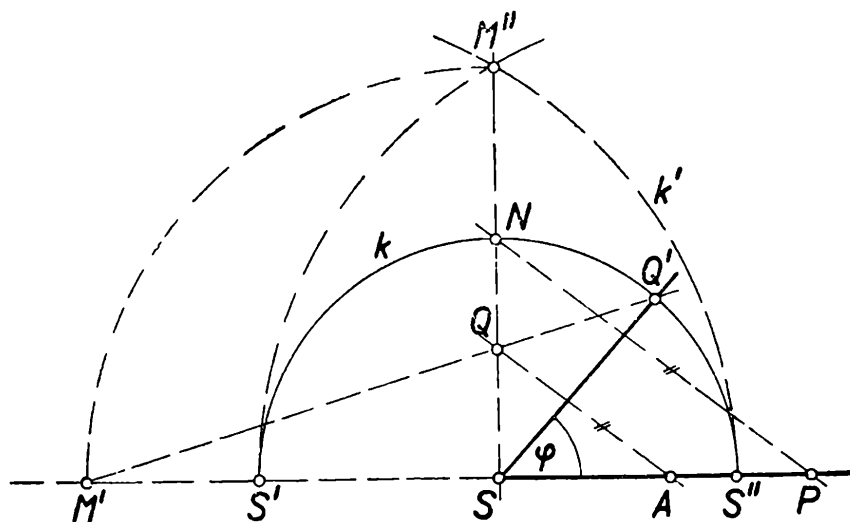


Obr. 4

pro stranu dlouhou 100 mm u pravidelného desetiúhelníka $-0,16$ mm, u pravidelného pětiúhelníka $+0,065$ mm, tj. necelých sedm setin milimetru. Pro rýsování v obvyklém měřítku a obvyklými prostředky školní i technické praxe je to přesnost velmi značná.

Principu popsané konstrukce lze použít i pro dělení úhlů na libovolný počet částí (obr. 4). Daný úhel φ opatříme libovolným kruhovým obloukem $Q'S'$ o vhodném poloměru $SQ' = r$ a z bodů S' a S'' opíšeme poloměrem $S'S'' = 2r$ pomocné kružnice, jejichž průsečík M'' převedeme obloukem na spojnici SS' tak, aby $SM' = SM''$. Tím získáme bod M' , jehož spojnice s bodem Q' vytne na svislici SM'' bod Q . Vymezenou úsečku SQ rozdělíme konstrukcí podle obr. 1c na žádaný počet dílků. Spojnice koncových bodů 1, 2 těchto dílků vymezí na oblouku $S'Q'$ body 1', 2' hledané úměrné rozdělení úhlu φ .

Stejně dobře se dá konstrukce uplatnit i při rýsování úhlů libovolné velikosti bez pomoci úhlového měřítka a tabulek goniometrických funkcí. Máme-li sestavit úhel velikosti φ° , narýsujeme libovolnou půlkružnici k , opatřenou průměrem $S'S''$ (obr. 5), určíme jako v předešlém případě body M'' a M' a vytvoříme kolmici $M''S$. Nato od středu S vyneseme jednak úsečku SA o délce rovné v libovolném měřítku počtu stupňů hledaného úhlu φ (např. $SA = 56$ mm), jednak úsečku SP o délce rovné v témže měřítku devadesáti (např. $SP = 90$ mm). Rov-



Obr. 5

noběžka ke spojnici NP vedená bodem A vyznačí bod Q . Jeho spojením s M' najdeme bod Q' a hledaný úhel φ (v uvažovaném případě 56°).

Společný princip všech uvedených konstrukcí se snadno pamatuje a vystačíme s ním dobře pro běžné úkoly praktické geometrie.

Inž. Zdeněk Kos, SÚTV, Praha:

Vydatnost jímací galerie a přítok do stavební jámy

Mnohé úlohy inženýrské praxe vyžadují znalost pohybu podzemní vody. Například ve vodárenství musíme znát vydatnost jímacích galerií a studní a snížení hladiny podzemní vody, které při tom nastává. Podobný problém řešíme při zemědělských melioracích odvodnění kdy odvádíme přebytečnou podzemní vodu a musíme navrhnout hloubku drénů a jejich rozchod. Rozchodem rozumíme vodorovnou vzdálenost

vzájemně rovnoběžných drenů. Při úpravách toků, při navrhování zemních přehrad a hrází rybníků, je třeba znát velikost průsaku čili průtočný objem vody, který prosakuje zeminou za jednotku času. Při návrhu jezových a přehradních těles, která nejsou založena na skále, je třeba znát velikost průsaku při proudění podzemní vody pod nimi. Při zakládání staveb je třeba určit přítok vody do stavební jámy.

Proudění podzemní vody, jež se děje v pórech, obsažených v zeminách, se nazývá *filtrací*. Množství a velikost pórů hraje při tom důležitou úlohu. Kvantitativně vyjadřujeme *pórovitost* p jako poměr objemu pórů V_p k celkovému objemu V a je tudíž:

$$p = \frac{V_p}{V}; \quad 0 < p < 1 \quad (1)$$

Velikost pórovitosti se mění se zeminou prakticky mezi hodnotami 0,3 až 0,8.

Velikost a tvar pórů se rychle mění od místa k místu. Tím se také mění podmínky pro proudění podzemní vody. Nemá tedy význam zjišťovat rychlosti proudění v jednotlivých bodech, nýbrž hledáme jisté střední statistické hodnoty. Střední rychlostí v pórech v_s rozumíme pak průměrnou rychlost, která je v rozmezí plošky ΔS konstantní. ΔS je vůči rozměrům pórů dostatečně velká, je však na druhé straně omezena podmínkou konstantní střední rychlosti v pórech v_s . Je situována kolmo na směr proudění průtočného objemu o velikosti ΔQ .

Ploškou ΔS je prořazena řada pórů. Plocha těchto řezů je ΔS_p . Střední rychlost v pórech v_s je pak určena vztahem:

$$v_s = \frac{\Delta Q}{\Delta S_p} \quad (2)$$

Při analýze proudění podzemní vody je výhodné zavést místo rychlosti v_s rychlost *filtrace* v nezávislou na tvaru a velikosti pórů, která se vztahuje na celou plošku řezu ΔS . Je určena vztahem:

$$v = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad (3)$$

kde ΔQ je skutečný průtočný objem.

Vzájemný vztah mezi v a v_s udává rovnice

$$v = p \cdot v_s, \quad (4)$$

kde p je pórovitost.

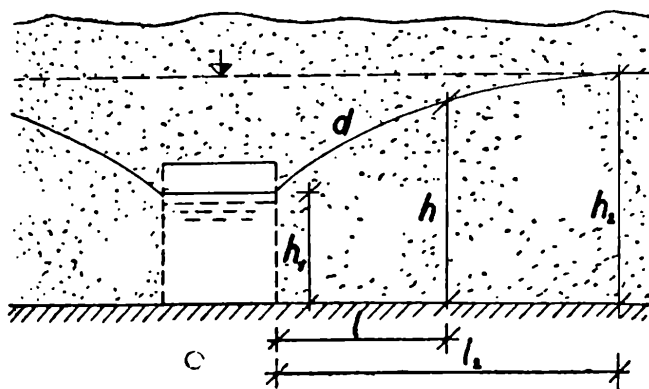
Základním empirickým zákonem, ze kterého se vychází při výpočtech, týkajících se proudění podzemní vody, je zákon, který stanovil na základě svých pokusů *Darcy*

$$\Delta Q = k \Delta S \frac{\Delta h}{\Delta l}, \quad (5)$$

říká, že filtrační průtok ΔQ je přímo úměrný ploše ΔS , kterou filtrační proud prochází a ztrátě piezometrické výšky Δh , nepřímo úměrný délce uvažované dráhy Δl částice. Piezometrická neboli celková tlaková výška je hloubka bodu tekutiny pod jejím volným povrchem, ve které působením síly tíže působí tlak určité velikosti. Konstanta úměrnosti v rovnici (5) k je tzv. koeficient filtrace.

Poměr $I = \frac{\Delta h}{\Delta l}$ se nazývá piezometrický spád. Dosadíme-li z rovnice (3) do rovnice (5) za ΔQ , dostáváme pro filtrační rychlost

$$v = k \frac{\Delta h}{\Delta l} = k I. \quad (6)$$



Obr. 1

Jímání vody ve vodárenství se provádí různými způsoby. Jeden z nich jsou vodorovné galerie (zhruba tj. ve spádu minimálně 1 ‰). Jsou to zařízení, kterých používáme tehdy, když není pramen soustředěn, nýbrž je rozvleklý. Jsou mělce uloženy (do 6 m) a klademe je kolmo na směr vývěru, resp. příčného spádu území.

Předpokládáme, že dno galerie dosahuje na nepropustné, vodorovné podloží a galerie má svislé stěny (obr. 1). Podzemní voda je tedy v pohybu pouze vlivem galerie a přítok je stejný z obou stran. Budeme tedy počítat přítok pouze z jedné strany, např. pravé a výsledný přítok bude dvojnásobný. Filtrace se děje volnou hladinou čili hladinou, na niž působí pouze atmosférický tlak a je ustálená; tj. odvádíme právě tolik vody z galerie, kolik jí přitéká, takže hladina v galerii je ustálena na výši h_1 nad nepropustným podložím. Vlivem proudění podzemní vody směrem ke galerii se sníží hladina podzemní vody a vytvoří se ustálená plocha snížení čili depresní plocha, jež má tvar válce s povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou galerie, což je průsečnice roviny souměrnosti galerie s jejím dnem. Jedná se tedy

o problém jednorozměrné ustálené filtrace a počítáme průtočný objem na jeden běžný metr galerie, tj. metr měřený v podélném směru, čili ve směru její osy. Depresní plocha se promítá na řez kolmý k ose galerie jako *d e p r e s n í k ř í v k a d* (obr. 1). Průtočný objem určíme z rovnice (5). Sečteme výrazy ΔQ v podélném směru v rozsahu jednoho běžného metru a dostáváme:

$$\Sigma \Delta Q = q \cdot l ; \quad \Sigma \Delta S = h \cdot l \quad (7)$$

$$q = k h \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (8)$$

a úpravou

$$\frac{q}{k} \Delta l = h \Delta h . \quad (9)$$

V těchto rovnicích značí q průtok na běžný metr a h je svislá pořadnice depresní křivky ve vzdálenosti l od svislé stěny galerie.

Provedeme součty přírůstků Δl (v rozsahu 0 až l_2) a Δh (v rozsahu h_1 až h_2) a dostáváme:

$$\frac{q}{k} \sum_0^{l_2} \Delta l = \sum_{h_1}^{h_2} h \Delta h ; \quad (10)$$

l_2 je tzv. *d o s a h g a l e r i e*, čili vzdálenost, kde je snížení hladiny podzemní vody proti původnímu stavu prakticky zanedbatelné, h_2 je nesnížená hladina podzemní vody nad nepropustným podložím.

Pravá strana rovnice (10) je vlastně obsah lichoběžníka; jehož obsah stanovíme jako rozdíl dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách h_2 a h_1 (obr. 2) a je rovna $\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2}$. Lze tedy rovnici (10) napsat takto:

$$\frac{q}{k} l_2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \quad (11)$$

a úpravou

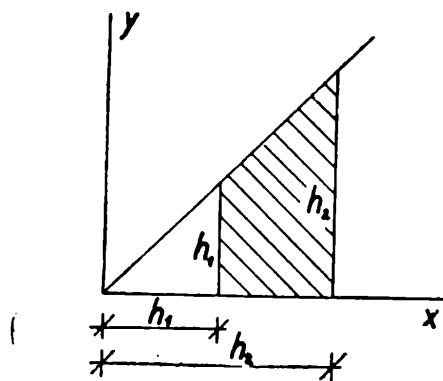
$$q = k \frac{h_2^2 - h_1^2}{2 l_2} . \quad (12)$$

Rovnice (12) se nazývá *r o v n i c í D u p u i t o v o u*. Pro oboustranný přítok ke galerii délky a metrů pak platí:

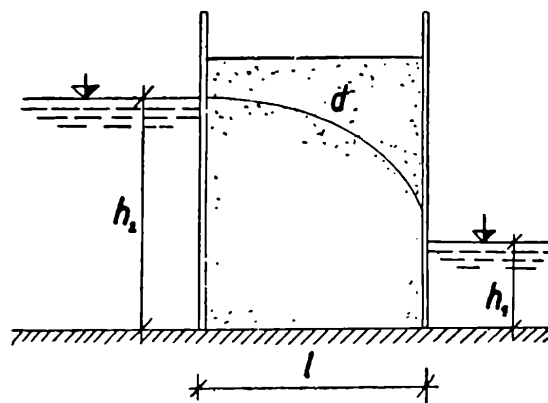
$$Q = k \frac{a (h_2^2 - h_1^2)}{l_2} . \quad (13)$$

V rovnici (13) se dopouštíme jisté chyby tím, že galerie nekonečné délky, kterou jsme zatím uvažovali ve výpočtech, nahrazujeme galerií ve srovnání s příčným řezem značné, avšak konečné délky a . Na svých koncích působí totiž galerie jako poloviční studna a vytváří se kuželová plocha snížení. Měli bychom vlastně přičíst k vydatnosti galerie ještě vydatnost studny o průměru rovném šířce galerie. Ve skutečnosti jsou však hydraulické poměry složitější a nejsou přesně dodrženy předpoklady výpočtu. Výpočet pomocí Dupuitovy rovnice je pouze přibližný a lze zanedbat přídatný člen, který by vyplynul při uvažování studny.

Rovnice Dupuitovy můžeme rovněž použít při výpočtu přítoku vody do stavební jámy. Hydraulické poměry jsou prakticky tytéž jako při přítoku do galerie.



Obr. 2



Obr. 3

Příklad: Do nepropustného podloží je zaražena dvojitá štětová stěna, chránící staveniště. Štětová stěna je řada pilot čili kůlů, dřevěných, železných nebo betonových, zaražených do země tak, aby vytvořily souvislou stěnu, schopnou odporovat zemnímu nebo vodnímu tlaku. Prostor mezi stěnami je vyplněn zeminou, která má filtrační koeficient $k = 10^{-4}$ m/s. Vlastní štětová stěna není vodotěsná. Je třeba vypočítat průsak na běžný metr této stěny, když její šířka $l = 2,4$ m, výška vody nad nepropustným podložím je na nechráněné straně $h_2 = 2,8$ m a na chráněné straně $h_1 = 0,8$ m (obr. 3). Průtočný objem na běžný metr q vypočteme z rovnice (12)

$$q = k \frac{h_2^2 - h_1^2}{2 \cdot l} = 10^{-4} \frac{2,8^2 - 0,8^2}{2 \cdot 2,4} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,15 \text{ l/s}.$$

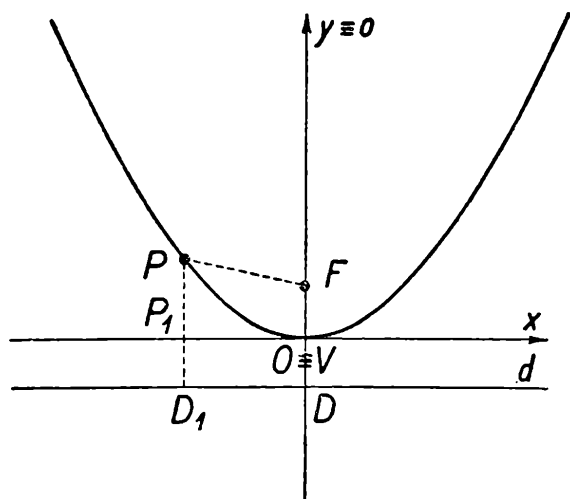
Tento příklad z výpočtů pohybu podzemní vody byl jeden z nejjednodušších. Ve skutečnosti jsou podmínky často daleko složitější a jejich analytické zvládnutí vyžaduje dosti složitý matematický aparát.

O analytické geometrii v rovině

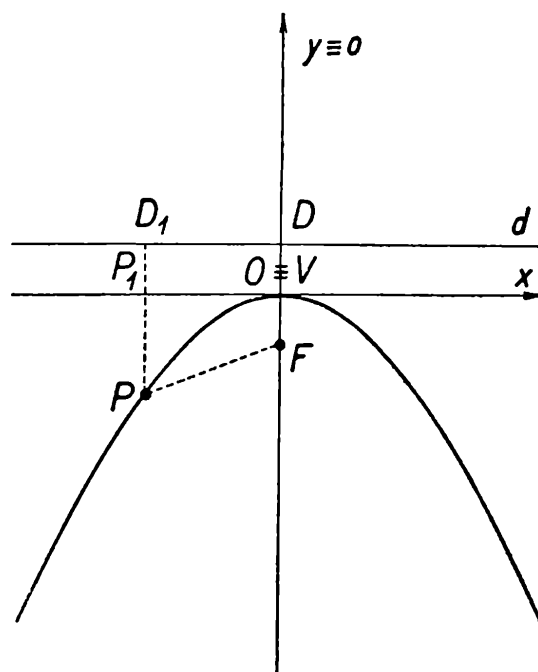
(Pokračování)

V posledním čísle minulého ročníku jsme se zabývali analytickým vyjádřením kružnice a řešili jsme několik úloh o kružnici. Nyní si všimneme další rovinné křivky, která se v praxi často vyskytuje a které se říká parabola.

Parabola je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a od dané přímky d , která tímto bodem neprochází.



Obr. 25a



Obr. 25b

Bod F se nazývá *ohnisko*, přímka d se jmenuje *řídící přímka*. Parabolu vidíte na obr. 25 ab. Vzdálenost p ohniska F od řídící přímky d se nazývá *poloparametrem* paraboly a číslo $2p > 0$ jejím *parametrem*. Z definice paraboly plyne, že jedním jejím bodem je bod V , který leží na přímce o vedené ohniskem F kolmo k řídící přímce d a pólí úsečku FD , jejíž krajní bod D je patou kolmice o na přímce d . Bod V se nazývá *vrcholem* paraboly.

Rovnici paraboly dostaneme ve velmi jednoduchém tvaru, zvolíme-li soustavu souřadnic Oxy tak, jako na obr. 25a nebo 25b; počátek O zvolíme ve vrcholu V paraboly a osu y v přímce $o \equiv FV$. Přitom na obr. 25a zvolíme za kladnou část osy y polopřímku VF , kdežto na

obr. 25b polopřímku k ní opačnou. Po každé je $FD = p > 0$; protože počátek $O \equiv V$ pólí úsečku FD , je

$$VF = VD = \frac{p}{2}.$$

Odvodme rovnici paraboly nejprve pro případ zobrazený na obr. 25a. V tomto případě leží ohnisko F uvnitř kladné části osy y , kdežto bod D leží uvnitř záporné části osy y . Protože je $p > 0$, je

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right), \quad D\left(0; -\frac{p}{2}\right).$$

Budiž $P(x; y)$ libovolný bod. Vedme jím kolmici k ose x (a tedy i k přímce $d \parallel x$) a označme písmenem D_1 její průsečík s přímkou d . Potom má bod D_1 touž souřadnici x jako bod P a touž souřadnici y jako bod D . Je tedy celkem

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right), \quad P(x; y), \quad D_1\left(x; -\frac{p}{2}\right).$$

Leží-li bod P na dané parabole, pak podle její definice je $PF = PD_1$, tj. podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \\ x^2 - py &= py, \\ x^2 &= 2py \end{aligned}$$

Neleží-li bod P na parabole, pak je $PF \neq PD_1$ čili

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \neq \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

protože jde o čísla nezáporná, jsou též jejich dvojmoci různé, tj.

$$x^2 + y^2 - py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \neq y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Odečteme-li na obou stranách číslo $y^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$, dostaneme

$$x^2 - py \neq py;$$

přičtením py pak dostáváme konečně výsledek

$$x^2 \neq 2py.$$

Pro každý bod $P(x; y)$ paraboly tedy platí rovnice $x^2 = 2py$ a pro bod $P(x; y)$, který na parabole neleží, tato rovnice neplatí čili rovnice

$x^2 = 2py$ platí pro body paraboly a jenom pro tyto body; je to tedy rovnice paraboly.

V druhém případě (obr. 25b) je celá úvaha stejná. Rozdíl je pouze v tom, že pro body F , P , D_1 nyní platí:

$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right), \quad P(x; y), \quad D_1\left(x; \frac{p}{2}\right).$$

Provedeme-li celý výpočet, zjistíme, že rovnice paraboly je v tomto případě

$$x^2 = -2py.$$

Výsledek svých úvah můžeme tedy shrnout takto:

V ě t a 17. Parabola, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a ohnisko na její ose y , má rovnici

$$x^2 = 2py \text{ nebo } x^2 = -2py,$$

podle toho, zda ohnisko leží uvnitř kladné nebo záporné části osy y ; přitom číslo $2p > 0$ je parametr paraboly.

Rovnici $x^2 = 2py$ nebo $x^2 = -2py$ říkáme *vrcholová rovnice* paraboly. Z této rovnice můžeme ihned vyčíst základní vlastnosti paraboly (provedeme pro rovnici $x^2 = 2py$):

1. Platí-li $x^2 = 2py$, platí též $(-x)^2 = 2py$, tj. leží-li na parabole bod $(x; y)$, leží na ní i bod $(-x; y)$. To však znamená, že parabola je souměrná podle osy $y \equiv o \equiv VF \perp d$ čili parabola je souměrná podle přímky o vedené ohniskem kolmo k řídící přímce; proto tuto přímku nazýváme *osou paraboly*.

2. Hledejme společné body paraboly a její osy, tj. body vyhovující současně rovnicím $x^2 = 2py$, $x = 0$; z těchto rovnic plyne, že pro hledané body je též $y = 0$. To znamená, že parabola má se svou osou jediný společný bod; je to vrchol paraboly.

3. Přímce vedené vrcholem paraboly kolmo k její ose říkáme *vrcholová tečna* paraboly. V našem případě je to osa x , která má (jak víme) rovnici $y = 0$. Pro společný bod této přímky a paraboly platí rovnice $y = 0$, $x^2 = 2py$ čili též $x = 0$. To znamená, že vrcholová tečna má s parabolou společný jedině její vrchol.

4. Protože pro body $(x; y)$ paraboly platí $2py = x^2 \geq 0$ a protože je $2p > 0$, je nutně $y \geq 0$. To znamená, že všechny body paraboly z obr. 25a leží nad osou x čili všechny body paraboly leží s jejím ohniskem v téže polorovině, jejíž hranicí je vrcholová tečna paraboly.

Mějme nyní obráceně danou rovnici $x^2 = 2py$ a hledejme křivku, která má tuto danou rovnici. Sestrojme parabolu s ohniskem $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

a s řídící přímkou $y = -\frac{p}{2}$ (obr. 25a). Pak podle věty 17 má tato

parabola rovnici $x^2 = 2py$, tj. danou rovnici. Obdobně existuje také k rovnici $x^2 = -2py$ parabola, která je umístěna stejně jako na obr. 25b.

Platí tedy

V ě t a 18. Každá rovnice $x^2 = 2py$ nebo $x^2 = -2py$ ($p > 0$) je rovnicí paraboly s osou v ose y a s vrcholem v počátku soustavy souřadnic; její ohnisko je $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ nebo $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$

Poznámka. Z algebry známe tzv. kvadratickou funkci $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Napíšeme-li ji ve tvaru $x^2 = \frac{1}{a}y$ a položíme-li $\frac{1}{a} = 2p$ pro $a > 0$, resp.

$\frac{1}{a} = -2p$ pro $a < 0$, vidíme podle věty 18, že grafem této funkce je parabola, která je nakreslena na obr. 25a (pro $a > 0$) nebo 25b (pro $a < 0$).

P ř í k l a d 10. Na ose o paraboly určete množinu všech bodů S , které mají tuto vlastnost: Kružnice k opsaná kolem bodu S poloměrem SV (V = vrchol paraboly) má s parabolou ještě další společné body.

Ř e š e n í. Označme ohnisko paraboly písmenem F a velikost úsečky VF označme $\frac{p}{2}$. Zvolme soustavu souřadnic Oxy tak, aby bylo $O \equiv V$ a aby kladná část osy y splynula s polopřímku VF . Potom podle věty 17 má parabola rovnici

$$x^2 = 2py, \quad p > 0. \quad (1)$$

V této soustavě souřadnic je pak středem hledané kružnice bod $S(0; n)$; přitom je zřejmě $n > 0$, neboť pro $n < 0$ dostaneme kružnici ležící pod osou x a mající proto s parabolou společný jedině bod V . Poloměr kružnice je $SV = n$; kružnice má tedy rovnici:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - n)^2 &= n^2, \\ x^2 + y^2 - 2ny &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Má-li parabola (1) s kružnicí (2) společný bod $P(x; y)$, pak jeho souřadnice x, y , vyhovují rovnici (1) i rovnici (2), a tedy také rovnici

$$\begin{aligned} 2py + y^2 - 2ny &= 0, \\ y(y + 2p - 2n) &= 0 \end{aligned}$$

Tato rovnice má však kořeny

$$y_1 = 0, \quad (3)$$

$$y_2 = 2(n - p). \quad (4)$$

Z rovnice (1) pak dostaneme k číslu y_1 číslo $x_1 = 0$; tak dostaneme

jeden společný bod kružnice paraboly, a to bod $V(0; 0)$. K číslu y_2 dostaneme z rovnice (1) číslo x určené rovnicí

$$x^2 = 4p(n - p). \quad (5)$$

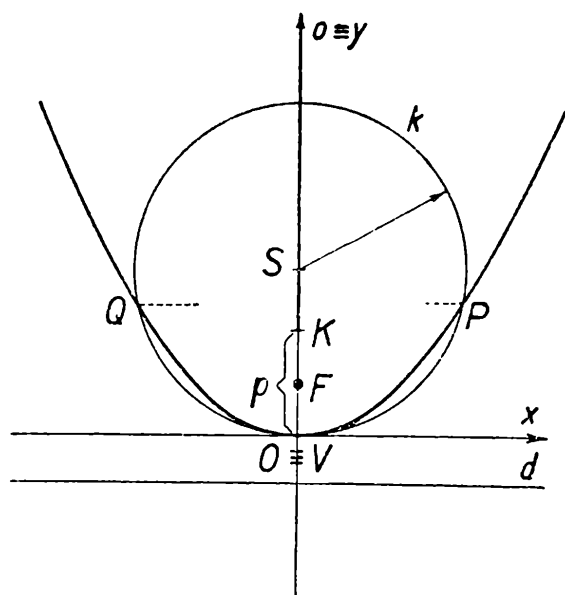
Protože je $x^2 \geq 0$, $p > 0$, musí být $n - p \geq 0$ čili

$$n \geq p.$$

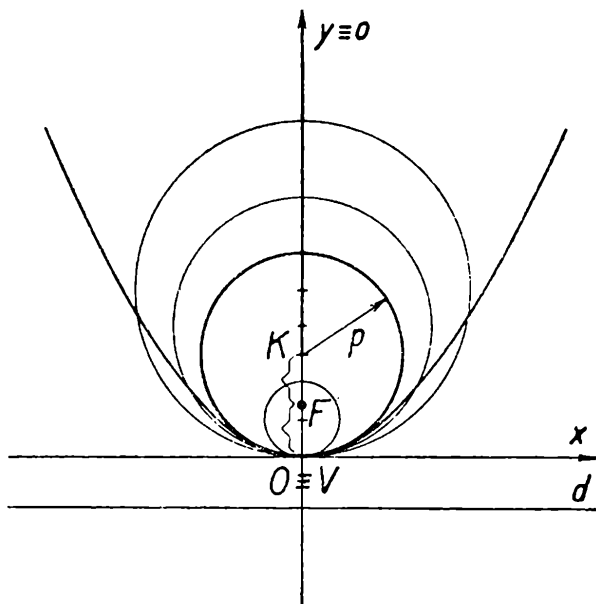
Je-li $n < p$, nemá rovnice (5) vůbec reálné řešení.

Sestrojme na ose paraboly bod $K(0; p)$. Je-li $n < p$, tj. leží-li bod $S(0; n)$ pod bodem K , má kružnice k opsaná kolem bodu S poloměrem SV s parabolou společný jedině bod V . Je-li $n = p$, má rovnice (5) jedině řešení $x = 0$, k níž podle (4) patří $y = 0$; i v tomto případě má kružnice k s parabolou společný jedině bod V .

Je-li $n > p$, tj. leží-li bod $S(0; n)$ nad bodem K , má kružnice k opsaná kolem bodu S poloměrem SV s parabolou společné tři různé body, a to: $V(0; 0)$, $P(2\sqrt{p(n-p)}; 2n-2p)$, $Q(-2\sqrt{p(n-p)}; 2n-2p)$. Množina bodů S je tedy vnitřek polopřímky opačné k polopřímce KV .



Obr. 26



Obr. 27

Všimněme si ještě případu $n = p$; potom kružnice opsaná kolem bodu $K(0; p)$ poloměrem $p = KV$ má s parabolou společný jedině bod V , ve kterém však podle (5) splývají i body P, Q . Z obrázku 27 je patrné, že tato kružnice se ze všech kružnic k k parabole nejvíce v blízkém okolí bodu V přimyká. Říkáme jí *oskulační kružnice* dané paraboly v jejím vrcholu; její poloměr je $p = 2 VF$. Této kružnici výhodně užíváme pro narysování paraboly v blízkém okolí bodu V .

Poznámky. 1. Má-li parabola vrchol $V(m; n)$ a osou rovnoběžnou s osou y , pak lze dokázat, že má rovnici

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \text{ nebo } (x - m)^2 = -2p(y - n)$$

podle toho, je-li její ohnisko F nad vrcholem V nebo pod vrcholem V (při obvyklé orientaci osy y).

2. Položíme-li osu paraboly do osy x a vrchol do počátku, pak je zřejmé, že se oproti případu vyloženému ve větě 17 jenom vymění úloha souřadnic x, y . Proto taková parabola má rovnici

$$y^2 = 2px \text{ nebo } y^2 = -2px$$

podle toho, zda její ohnisko leží na kladné nebo na záporné části osy x .

3. Má-li parabola vrchol $V(m; n)$ a osu rovnoběžnou s osou x , pak má rovnici

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \text{ nebo } (y - n)^2 = -2p(x - m)$$

podle toho, je-li její ohnisko F napravo nebo nalevo od vrcholu V (při obvyklé orientaci osy x).

(Pokračování)

Josef Straka, ČVUT, Praha:

Neurčité rovnice

(Dokončení)

IV

V této části podáme řešení lineární neurčité rovnice pomocí *kongruence*.

Definice 5. Jestliže rozdíl $a - b$ dvou celých čísel a, b je dělitelný celým číslem $m \neq 0$, říkáme, že číslo a je kongruentní s b podle modulu m , což píšeme $a \equiv b \pmod{m}$.

Jestliže a není kongruentní s b podle modulu m , potom píšeme $a \not\equiv b \pmod{m}$. Uvedenému vztahu mezi čísly a, b se říká *kongruence*. Podle definice dělitele značí vztah $a \equiv 0 \pmod{m}$ totéž, co rovnost $a = mq$, tj. že m je dělitelem a . Uvedeme některé věty o kongruencích, kterých v dalším užijeme.

Věta 10. *Vždy platí $a \equiv a \pmod{m}$.*

Důkaz. Podle definice kongruence má být rozdíl $a - a = 0$ dělitelný číslem $m \neq 0$. To je však zřejmé.

Věta 11. *Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, potom platí $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.*

Důkaz. Podle předpokladu existují taková celá čísla q, r , že platí

$$a - b = mq, \quad c - d = mr.$$

Po sečtení těchto rovností dostaneme po úpravě

$$(a + c) - (b + d) = m (q + r), \text{ takže}$$

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

V ě t a 12. *Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, je též $ac \equiv bc \pmod{m}$, kde c je libovolné celé číslo.*

D ů k a z. Podle předpokladu existuje takové celé číslo q , že platí $a - b = mq$. Po vynásobení této rovnosti číslem c a po úpravě dostaneme $ac - bc = m (qc)$, takže $ac \equiv bc \pmod{m}$.

V ě t a 13. *Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, potom existuje celé číslo k takové, že platí $a = km + b$.*

D ů k a z. Podle předpokladu existuje celé číslo k , že $a - b = km$, čili $a = km + b$.

Rovnici $ax + by = c$ lze psát ve tvaru $-ax + c = by$, čili podle definice kongruence $-ax \equiv -c \pmod{b}$, neboli podle věty 12. $ax \equiv c \pmod{b}$.

V ě t a 14. *Kongruence $ax \equiv c \pmod{b}$ má aspoň jedno řešení tehdy a jen tehdy, jestliže $D(a, b) = D$ je dělitelem čísla c .* (30)

D ů k a z. a) Předpokládejme, že kongruence (30) má řešení a označme $D(a, b) = D$. Protože D je dělitelem čísel a, b , existují celá čísla q, r , že platí $a = Dq, b = Dr$. Po úpravě dostaneme $ax = (Dq)x, bt = (Dr)t$, kde x, t jsou celá čísla. Podle definice kongruence je $ax - c = bt$, neboli $(Dq)x - c = (Dr)t$. Odtud vyjde $c = (Dq)x - (Dr)t = D(qx - rt)$. Je tedy číslo D dělitelem čísla c .

b) Předpokládejme, že $D(a, b) = D$ je dělitelem čísla c . Potom jsou čísla $\frac{a}{D}, \frac{b}{D}$ podle věty 8. nesoudělná a proto existují celá čísla u, v , že podle věty 5. platí

$$\frac{a}{D} u + \frac{b}{D} v = 1.$$

Po vynásobení číslem c vyjde

$$a \cdot \frac{c}{D} u + b \cdot \frac{c}{D} v = c, \text{ čili } -a \cdot \frac{c}{D} u + c = b \cdot \frac{c}{D} v.$$

Podle definice kongruence vychází

$$-a \cdot \frac{c}{D} u \equiv -c \pmod{b}, \text{ neboli podle věty 12. } a \cdot \frac{c}{D} u \equiv c \pmod{b}.$$

Je tedy číslo $x = \frac{c}{D} u$ jedním řešením kongruence $ax \equiv c \pmod{b}$.

Můžeme tedy vyslovit tento souhrnný výsledek:

Nutná a postačující podmínka, aby kongruence (30) a tím i rovnice $ax + by = c$, (kde a, b, c jsou celá čísla) byla řešitelná celými čísly, je, aby největší společný dělitel čísel a, b byl dělitelem čísla c , jak už ostatně víme.

Dělíme-li jakékoliv celé číslo číslem $|m| \neq 0$, je možných $|m|$ různých zbytků $0, 1, 2, \dots, |m| - 1$. Obor celých čísel se vzhledem k děliteli $|m|$ rozpadne na $|m|$ množin, tzv. z b y t k o v ý c h t ř í d podle modulu $|m|$. Ve zbytkové třídě 0 jsou všechna čísla, která při dělení $|m|$ dají zbytek 0. Ve zbytkové třídě 1 jsou všechna ta čísla, která při dělení $|m|$ dají zbytek 1 atd. Je-li $x \equiv 2 \pmod{3}$, kde x je celé číslo, existuje podle věty 13. celé číslo k , že platí $x = 3k + 2$. Např. pro $k = -4, 0, 5, \dots$ dostaneme $x = -10, 2, 17, \dots$ a všechna tato čísla x jsou řešením dané kongruence, kterou tedy splňuje jistá množina čísel x . Touto množinou je zbytková třída 2 podle modulu 3.

To znamená, že ve zbytkové třídě 2 podle modulu 3 jsou všechna celá čísla, která při dělení třemi dají zbytek 2.

P o z n á m k a. Při podrobnějším studiu kongruence (30) by se dokázalo, že v případě, kdy $D(a, b) = 1$, má daná kongruence nekonečně mnoho řešení navzájem spolu kongruentních $\pmod{b}$.

V numerických příkladech při řešení kongruence $ax \equiv c \pmod{b}$ se snažíme docílit u x koeficient 1, načež se užije věty 13.

P ř í k l a d 7. Řešme rovnici $5x + 3y = 11$ (viz příklad 5), která je řešitelná. Postup řešení je tento

$$-5x + 11 = 3y,$$

$$-5x \equiv -11 \pmod{3}, \text{ ale též}$$

$$6x \equiv 12 \pmod{3}, \text{ neboť } 6x - 12 \text{ je dělitelné číslem } 3$$

Po sečtení obou posledních kongruencí podle věty 11. dostaneme

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

a podle věty 13.

$$x = 3k + 1$$

a po dosazení

$$y = -5k + 2,$$

kde k je celé číslo. Vztahy

$$x = 3k + 1,$$

$$y = -5k + 2$$

vyjadřují všechna celočíselná řešení dané rovnice.

P ř í k l a d 8. Máme určit nejmenší počet pětikorunových a tříkorunových bankovek, kterými je možno vyplatit částku 364 Kčs. (Viz druhou úlohu II. kola kategorie C ve čtvrtém ročníku MO).

Označíme-li počet tříkorun x , počet pětikorun y , máme rovnici

$$3x + 5y = 364, \quad (31)$$

která je jistě řešitelná, neboť čísla 3, 5 jsou nesoudělná. Řešíme-li rovnici (31) dostaneme postupně

$$3x = -5y + 364$$

$$-5y \equiv -364 \pmod{3}, \text{ ale též}$$

$$6y \equiv 363 \pmod{3}, \text{ neboť } 6y - 363 \text{ je dělitelné třemi.}$$

Po sečtení obou posledních kongruencí podle věty 11. vyjde

$$y \equiv -1 \pmod{3}$$

a podle věty 13.

$$y = 3k - 1$$

a po dosazení

$$x = -5k + 123,$$

kde k je celé číslo. Vztahy

$$x = -5k + 123, \quad (32)$$

$$y = 3k - 1$$

vyjadřují pro každé celé číslo k celočíselné řešení rovnice (31). Podle naší úlohy je počet bankovek obou druhů vyjádřen celým kladným číslem. Je tedy $x > 0$, $y > 0$ a ze vztahů (32) vychází $k < 24\frac{3}{5}$, $k > \frac{1}{3}$. Všechna celá čísla k , která vyhovují oběma těmto nerovnostem, jsou

$$1 \leq k \leq 24. \quad (33)$$

Podle rovnic (31) určíme součet $x + y$ obou druhů bankovek, pro který platí

$$x + y = 122 - 2k. \quad (34)$$

Protože hledáme nejmenší počet obou druhů bankovek, hledáme vlastně minimální hodnotu rozdílu $122 - 2k$. Minimální hodnota tohoto rozdílu nastane pro maximálního menšitele, čili pro maximální přípustné číslo k ze vztahů (33), tj. pro $k = 24$. Dosadíme-li $k = 24$ do vztahu (34), vyjde nejmenší počet obou druhů bankovek, což je 74. Dosadíme-li dále $k = 24$ do vztahů (32), vyjde

$$x = 3, \quad y = 71$$

Tato dvojice řeší danou úlohu, jak se snadno přesvědčíme dosazením. Čtenář si jistě všiml, že pro každé celé číslo k , které vyhovuje nerovnostem (33), dostaneme z rovnic (32) celkem 24 různých dvojic čísel x, y . Je tedy možno částku 364 Kčs vyplatit pětikorunovými a tříkorunovými bankovkami celkem 24 různými způsoby. Pouze jediná dvojice $x = 3, y = 71$ vede k minimálnímu počtu obou bankovek.

Na závěr uvedeme řešení první úlohy I. kola kategorie C letošního ročníku MO. Řešení podáme způsobem, který byl uveden v druhé části.

Příklad 9. Máme v zásobě litrové láhve 14⁰/₀-ního, 11⁰/₀-ního a 9⁰/₀-ního roztoku kyseliny octové (dostatečný počet od každého druhu). Kolik plných lahví každého z těchto druhů bude třeba smísit, abychom dostali 30 litrů 12⁰/₀-ního roztoku, přičemž máme použít roztoků všech tří druhů. Udejte všechny možnosti.

Označíme-li počet lahví 14⁰/₀-ního roztoku x , počet lahví 11⁰/₀-ního roztoku y a počet lahví 9⁰/₀-ního roztoku z , pak vzhledem k tomu, že láhve jsou litrové, obsahují celkem $x + y + z$ litrů. Máme tedy rovnici

$$x + y + z = 30. \quad (35)$$

Láhev s 14⁰/₀-ním roztokem obsahuje $\frac{14}{100}x$ litrů kyseliny octové, láhev s 11⁰/₀-ním roztokem obsahuje $\frac{11}{100}y$ litrů kyseliny octové a láhev s 9⁰/₀-ním roztokem obsahuje $\frac{9}{100}z$ litrů kyseliny octové. Vzniklá směs obsahuje celkem $\frac{12}{100} \cdot 30$ litrů kyseliny octové. Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{14}{100}x + \frac{11}{100}y + \frac{9}{100}z = \frac{12}{100} \cdot 30.$$

Znásobíme-li poslední rovnici stem, vyjde

$$14x + 11y + 9z = 360. \quad (36)$$

Vyjádríme-li z z rovnice (35) a dosadíme do rovnice (36), vyjde

$$5x + 2y = 90. \quad (37)$$

Rovnici (37) máme řešit celými čísly (dokonce jen kladnými). Z (37) plyne

$$2y = -5x + 90. \quad (38)$$

Pravá strana poslední rovnice je násobkem dvou. Přičteme tedy k pravé straně rovnice (38) číslo $6x - 90$, které je násobkem dvou. Po přičtení vyjde číslo x , které zůstává podle věty 2. násobkem čísla 2. Existuje proto celé číslo k , že

$$x = 2k$$

a po dosazení do (38)

$$y = -5k + 45.$$

Dosadíme-li konečně $x = 2k$, $y = -5k + 45$ do rovnice (35), dostaneme

$$z = 3k - 15.$$

Vztahy

$$\begin{aligned}x &= 2k, \\y &= -5k + 45, \\z &= 3k - 15,\end{aligned}\tag{39}$$

kde k je nějaké celé číslo, vyjadřují všechna celočíselná řešení rovnice (35), jak se přesvědčíme dosazením. My však z nich žádáme ta, která splňují zřejmě podmínky

$$\begin{aligned}0 &< x < 30, \\0 &< y < 30, \\0 &< z < 30,\end{aligned}\tag{40}$$

neboť každého druhu musí být aspoň jeden litr, ale méně než 30 litrů, jak žádá úloha. Dosadíme-li do nerovností (40) za x, y, z z (39), vyjdou tyto podmínky pro číslo k

$$\begin{aligned}0 &< k < 15, \\3 &< k < 9, \\5 &< k < 15.\end{aligned}\tag{41}$$

Všecka celá čísla k , která splní podmínky (41) jsou

$$5 < k < 9,$$

tj. $k = 6, 7, 8$. Řešení úlohy vede tedy ke třem různým možnostem, která dostaneme, dosadíme-li po řadě $k = 6, 7, 8$ do vztahů (39). Vyjde

$$\begin{aligned}\text{I. } x &= 12, y = 15, z = 3; \\ \text{II. } x &= 14, y = 10, z = 6; \\ \text{III. } x &= 16, y = 5, z = 9.\end{aligned}$$

Všecka tři řešení úloze vyhovují, jak se přesvědčíme dosazením do (35). Nakonec připojíme několik *cvičení*.

1. Rozhodněte, která z rovnic je řešitelná a proč. Řešitelné vypočítejte:

$$4x + 6y = 1, 17x - 3y = 7, 129x + 5y = 1.$$

2. Odůvodněte, že každá neurčitá rovnice tvaru $ax + by = 0$ (tzv. *homogenní*) je vždy řešitelná.

3. Dopravní podniky mají k dispozici pro dopravení 12 000 osob dva druhy souprav. Souprava A pojme 90 osob, do soupravy B se vejde 150 osob. Kolik kterých souprav je třeba, aby jejich celkový počet byl co nejmenší.

4. Na přímce $2x + 3y - 5 = 0$ najděte mřížový bod nejbližší ose y .

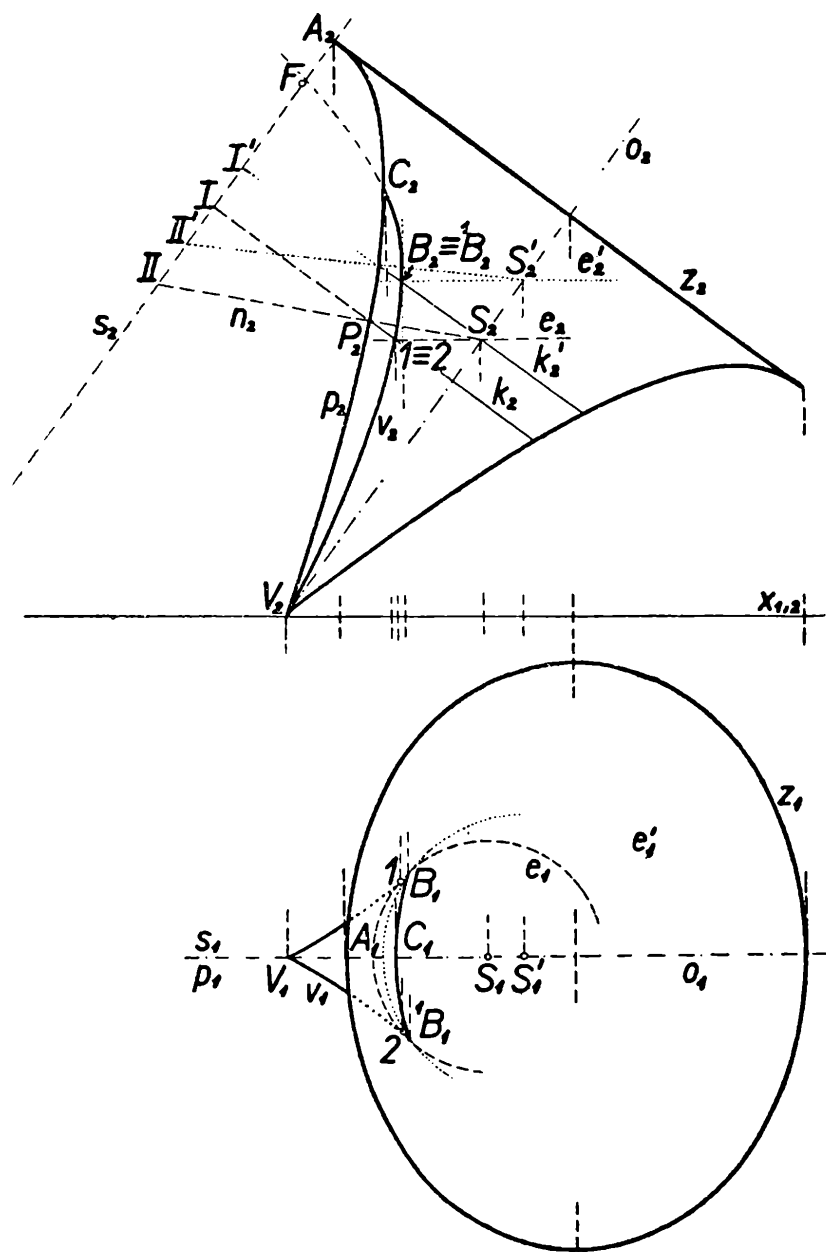
Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:

Obrysy rotačních ploch v rovnoběžném promítání pravoúhlém

(Dokončení)

Obrysová křivka u některého rotačního tělesa má velmi zajímavý průběh. V obr. 6 je těleso, které vzniklo rotací paraboly p kolem osy $o \parallel v$. Tvořící parabola má osu $s \parallel o$ a vrchol ∇ bodě A . Osu rotace o protíná parabola p v bodě V , který je jakýmsi vrcholem vzniklého rotačního tělesa. Křivku v_1 obrys půdorysu tělesa - sestrojíme opět použitím vepsaných kulových ploch. Tak např. podle dotykové kružnice k se dotýká rotační plochy koule, jejíž střed S sestrojíme v náryse snadno jako průsečík osy tělesa o_2 a normály n_2 obrysové paraboly (meridiánu hlavního) p_2 v průmětu P_2 bodu P . Je tedy $P_2 \equiv k_2 \cdot p_2$. Vzdálenost $\overline{I II}$ je rovna parametru paraboly p_2 . Rovník e vepsané plochy kulové protíná ve dvou bodech 1 a 2 dotykovou kružnici k . V nárysu jsou oba tyto průsečíky $1 \equiv 2 \equiv e_2 \cdot k_2$. V půdorysu leží průměty 1 a 2 na e_1 . Sestrojíme-li tímto způsobem přiměřený počet bodů 1, 2, a spojíme-li tyto body plynulou čarou, obdržíme v půdorysu křivku v_1 jako obrys daného rotačního tělesa. Nárys této křivky v_2 je opět čára, spojující nárysy všech bodů 1, 2, Přitom však můžeme pozorovat, že křivka v_2 od nárysu V_2 vrcholu V tělesa nejprve (v našem případě) stále stoupá vpravo a od určitého bodu B_2 stoupá sice dále, ale obrací se (vrací se) vlevo, posléze překročí v bodě C_2 nárysný obrys tělesa a teoreticky pokračuje dále, při čemž se přímka z_2 - nárys kružnice otáčení bodu A kolem osy o stává asymptotou křivky v_2 , tj. křivka v_2 se sice stále blíží k přímce z_2 , ale nikdy se jí nedotkne. Poněvadž meridián tělesa je v našem případě parabola, můžeme bod $C_2 \equiv v_2 \cdot p_2$ sestrojit přesně, když známe ohnisko F , osu s a vrchol A paraboly meridiánu. Průmět C_2 je totiž dotkový bod svislé tečny paraboly p_2 . (Je to známá úloha: Sestrojit tečnu k parabole p_2 , rovnoběžnou se směrem kolmým k ose $x_{1,2}$, a zjistit na ní dotkový bod.) Bod B_2 , tj. bod, ve kterém stoupající křivka v_2 mění svůj směr ze směru doprava do směru doleva, sestrojíme sice jen přibližně, ale pro naši potřebu dostatečně přesně, jako dotkový bod křivky v_2 se svislou tečnou. Bodem B proložíme povrchovou kružnici k' na rotačním tělese

a najdeme střed S' plochy kulové, která se bude dotýkat tělesa podle kružnice k' . Je zřejmé, že musí být $B_2S'_2 \parallel x_{1,2}$, protože B leží na rovníku e' vepsané koule. Ovšem kružnice k' s rovníkem e' má dva společné body (průsečíky), které v nárysu splývají ($B_2 \equiv {}^1B_2$), kdežto v půdorysu jsou jejich průměty B_1 a 1B_1 rozdílné. Tyto body na půdorysu v_1 křivky v nazýváme body vratu. Z průběhu křivky v_1 vidíme, že

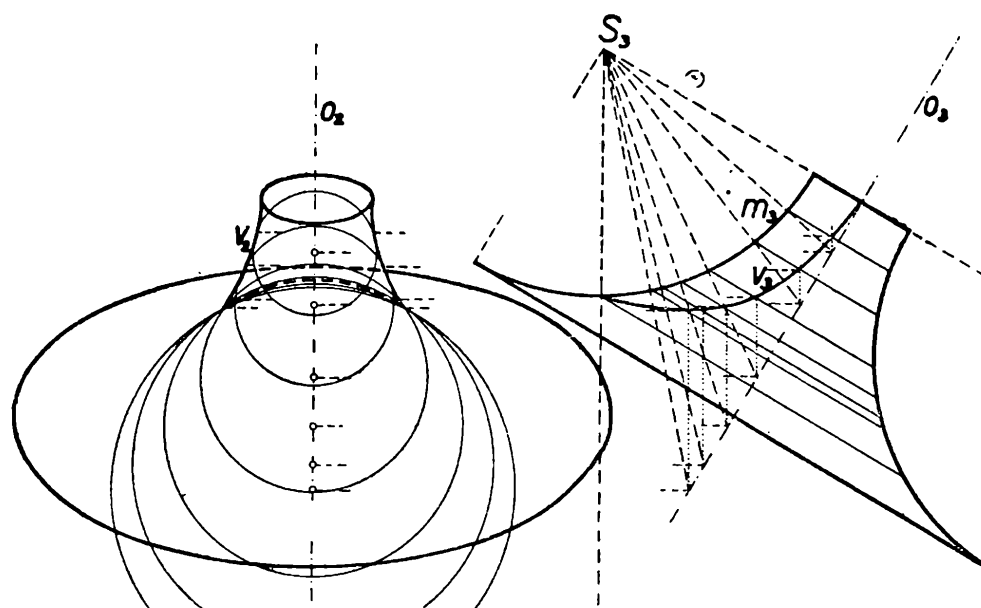


Obr. 6

křivka v_1 probíhá zprvu z V_1 až do bodu B_1 , resp. 1B_1 , tam změní směr v opačný a vrací se směrem na bod C_1 . Jestliže si představíme, že uvažované těleso je duté, pak půdorys nám ukazuje pohled dovnitř tělesa a křivka BC^1B je viditelná. Tvoří mez viditelnosti. Část plochy tělesa, která je mezi křivkou BC^1B a bodem A , resp. kružnicí z , je v půdoryse

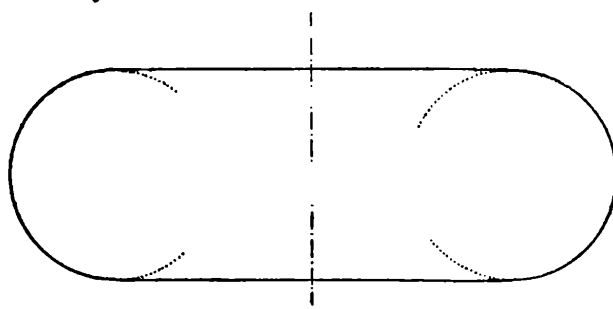
viditelná, kdežto část plochy mezi křivkou BC^1B a vrcholem plochy V není při pohledu shora vevnitř viditelná.

Abychom si osvojili dobře sestrojování obrysů různých rotačních ploch při rovnoběžném a pravoúhlém promítání, provedme si ještě



Obr. 7

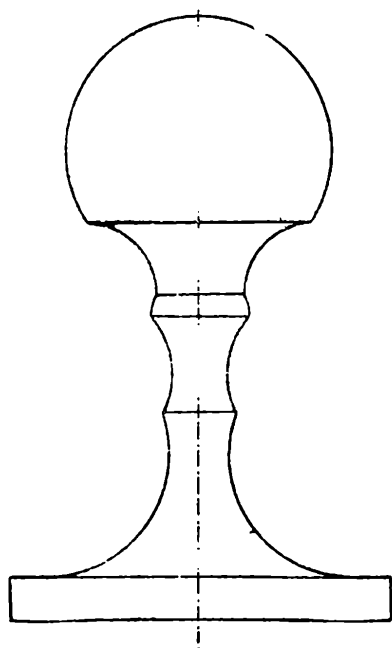
jednu úlohu. V obr. 7 je těleso, které vzniklo otáčením čtvrtkružnice m o středu S kolem osy $o \perp x$. Tato osa není rovnoběžná ani s půdorysnou, ani s nárysnou. Kdybychom kolem osy o otáčeli místo čtvrtkružnice půlkružnici, jejíž koncové body by byly na průměru kružnice rovnoběžném s osou o , pak vzniklé rotační těleso se nazývá *trochyl*. V našem případě, kdy se bude otáčet jen čtvrtkružnice kolem uvedené osy, vznikne rotační těleso, které budeme jmenovat *polotrochyl*. Otáče-



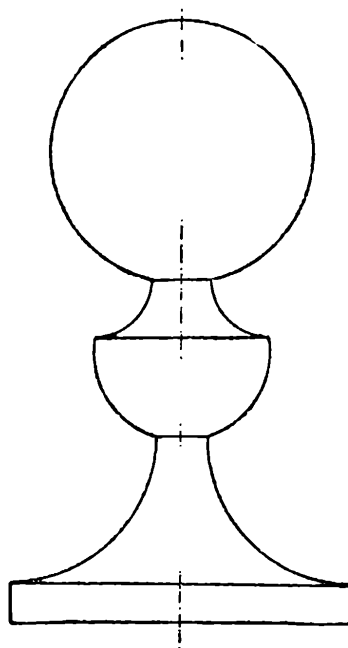
Obr. 8

jící se čtvrtkružnici (meridián) vidíme ve skutečné velikosti i tvaru v bokorysu (v třetím průmětu). Použitím soustavy vepsaných koulí můžeme opět sestrojit bokorys v_3 křivky v . Konstrukce je provedena v obrázku bez podrobného popisu, aby se neztěžovala zřetelnost a čitelnost konstrukce. V obrázku je rovněž patrné sestrojení bodů vratu nárysu v_2 křivky v .

Konstruování obrysů rotačních těles je práce zajímavá. Aby si čtenář mohl prakticky vyzkoušet sestrojování obrysů různých rotačních těles - vyskytujících se v praktickém životě - a aby se vhodnými úlohami do tohoto oboru průmětnictví dostal, je pro jeho úvodní studium připojeno

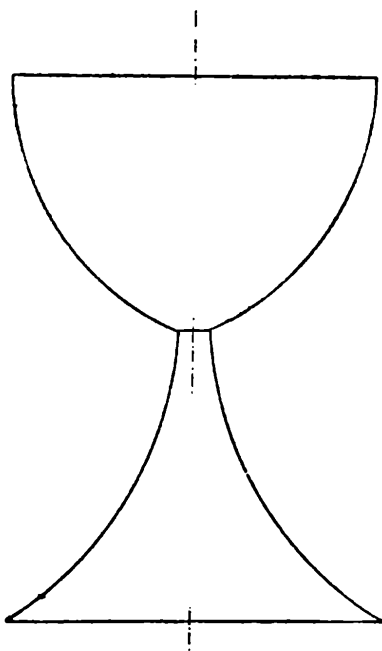


Obr. 9

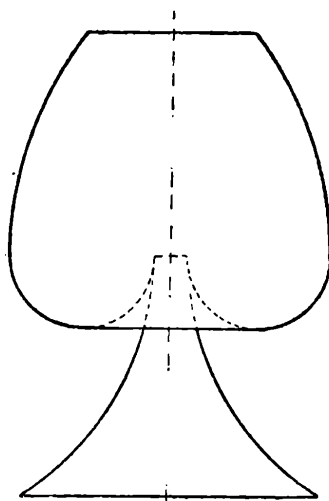


Obr. 10

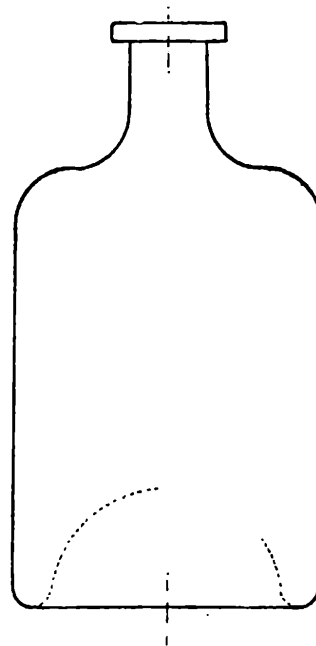
několik příkladů. Příklady jsou dány jen nárysem hlavního meridiánu a to tak, že osa tělesa je kolmá k půdorysně. Čtenář necht' si nejprve



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

skloní osu tělesa k půdorysně asi o 15° až 30° při zachování její rovnoběžnosti s nárysnou. Pak jako další cvičení necht' čtenář skloní dále

osu tělesa k půdorysně, aby s ní svírala asi 45° až 60° a opět zůstala rovnoběžná s nárysnou a konečně, nechť se čtenář pokusí o vyrýsování těles, jestliže jejich osy jsou v obecné poloze vzhledem k průmětnám. Rozměry těles je lépe volit větší, neboť pak se snadněji provádějí jednotlivé konstrukce.

Cvičení

1. Anuloid neboli prstenec (obr. 8).
2. Hlavice razítka nebo pečetidla (obr. 9).
3. Šachová figurka, běžec (obr. 10).
4. Pohár nebo kalich (obr. 11).
5. Váza (obr. 12).
6. Láhev (obr. 13).

Fyzika

Inž. Jiří Kodeš, Praha:

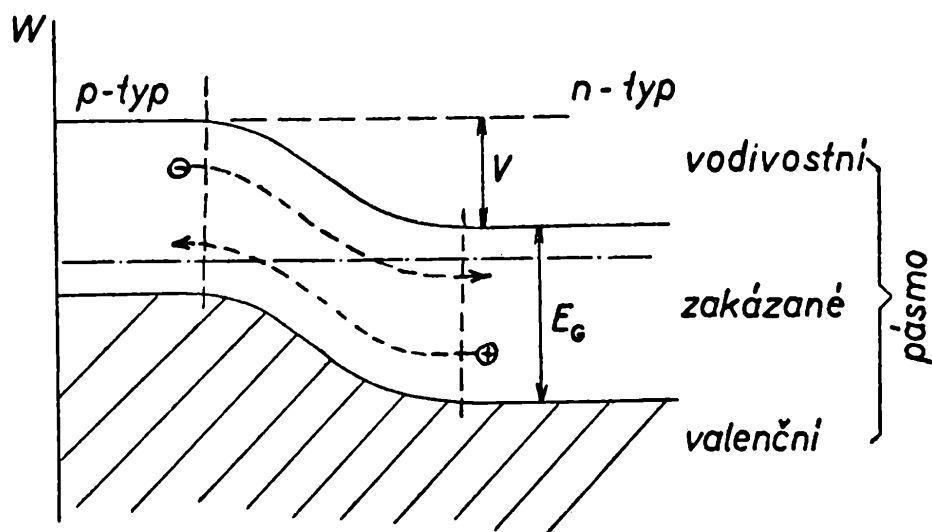
Sluneční baterie - zdroj elektrické energie pro rakety

Všichni s napětím sledujeme úspěchy sovětské raketové techniky a posloucháme signály vysílané na Zemi. Hodinu za hodinou, dny, týdny, i měsíce vysílají rakety a družice neúnavně údaje svých měřících přístrojů. A tu jistě v mysli vyvstane otázka, z jakých zdrojů elektrické energie je napájeno elektronické zařízení rakety. Vždyť akumulátory i baterie mají jen určitou životnost závislou na odebíraném výkonu. Jistě shledáme, že družice by musely být vybaveny velkým množstvím akumulátorů, které by zvyšovaly nadměrně váhu těchto družic. Víme, že aktivní užitečnou váhu družic tvoří elektronické zařízení. Co je to tedy za zdroje energie, které jsou lehké a mají prakticky nekonečnou dobu života? Jsou to tzv. **s l u n e č n í b a t e r i e**.

Rychlý rozvoj polovodičů v posledním desetiletí pomohl rozřešit problém přímé přeměny zářivé energie v elektrickou využitím polovodičových fotoelementů. Předchůdcem sluneční baterie jsou známé elektrické expozimetry. Ty nám přeměňují také světelnou (zářivou) energii slunce na elektrickou, ale s malou účinností.

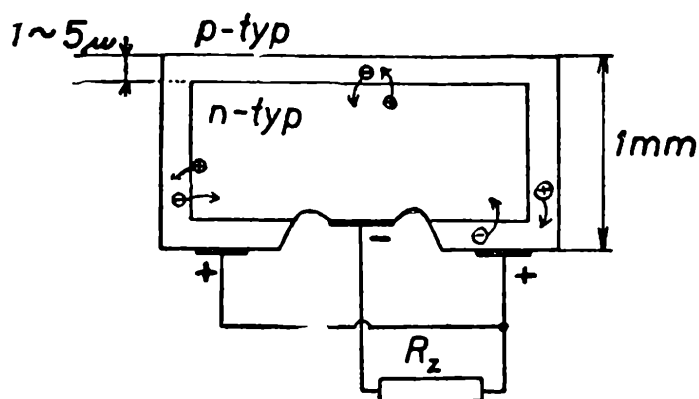
Přímá přeměna sluneční energie v elektrickou se děje vlivem pohlcení

vání fotonů světelné energie. Foton je kvantum světelné energie $W = h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν kmitočet dopadajícího světla. Přeměna se děje na p - n přechodu polovodiče a vyložíme ji podle následujícího obrázku (obr. 1). (O p - n přechodu viz článek



Obr. 1

v č. 3., roč. 1959–60 tohoto časopisu.) V oblasti p - n přechodu se vytvoří potenciální bariéra o výšce V . Vlivem dopadu světelné energie $h\nu = E_G$ vznikají v polovodiči páry elektron-díra a difundují do oblasti p - n přechodu. Zde E_G je šíře zakázané zóny energií. V této oblasti se totiž nemohou pohybovat žádní nositelé elektrické energie. Můžeme si představit, že potenciální bariéra V rozděluje tyto nositele elektrického náboje tak, že elektrony volně přecházejí do n oblasti a vytvářejí v ní záporný náboj a díry volně přecházejí do p oblasti a nabíjejí ji kladně.



Obr. 2

Řez takovým fotoelementem a jeho připojení k vnějšímu obvodu (např. elektronickému zařízení) je na obr. 2. Kladné díry difundují do krajní p oblasti a nabíjejí ji kladně, zatím co elektrony nabíjejí vnitřní oblast n záporně. Na obě oblasti jsou navařeny kovové elektrody.

V případě připojení vnějšího obvodu (obr. 2) počne fotoelementem protékat proud, který je úměrný počtu párů elektron-díra N ,

$$I = qN\alpha,$$

kde q je náboj elektronu, α je koeficient úměrnosti a N je počet párů elektron-díra.

Sluneční baterie je tvořena kombinací několika fotoelementů, zapojených buď do série nebo paralelně a je umístěna na vnější straně rakety.

Fotoelementy slunečních baterií jsou tvořeny tenkými destičkami vyříznutými z monokrystalu křemíku. Vhodným technologickým postupem se vytvoří p - n přechod. Účinnost takto vzniklé baterie je asi 10% a odevzdaný výkon se pohybuje kolem 15–20 mW/cm². Vedle slunečních baterií se používá pro přímou přeměnu zářivé energie také baterie atomové, s kterou vás seznámíme v některém dalším čísle.

Inž. Jiří Machalický, katedra fyziky FSI, Praha:

Váha a hmota těles

Je známo, že příčinou změny pohybového stavu těles mohou být nejrůznější síly. Změnou pohybového stavu rozumíme, že těleso vnějším zásahem (působením síly) mění rychlost, nabývá určitého zrychlení. Pozorování (experimenty) nás poučují o tom, že stejná síla uděluje různým tělesům různá zrychlení, a že tedy změna pohybového stavu závisí kromě na působících silách také na určité vlastnosti těles samých; této vlastnosti říkáme *hmota*¹⁾. Čím většího zrychlení nabude těleso účinkem určité síly, tím menší je jeho hmota.

Zvláštním druhem působící síly je *váha* těles. Z pozorování víme, že účinkem přitažlivosti Země padá ve vakuu každé těleso se stejným zrychlením g , kterému říkáme *tíhové zrychlení*. Jeho hodnota se mění na povrchu Země podle místa pozorování. Vzájemný vztah pro hmotu a váhu píšeme nejčastěji ve tvaru

$$\vec{G} = m \vec{g} \quad (1)$$

Vysvětlíme zde trochu blíže vztah mezi veličinami váha a hmota a jejich jednotkami.

Hmotou rozumíme ve fyzice míru tíhových a setrvačných účinků;

¹⁾ Výstižnější je název *hmotnost*, který navrhuje katedra fyziky strojní fakulty. Podrobněji o tom viz článek prof. RNDr. Z. Horáka. K terminologii základních pojmů ve fyzice, v 3. čísle časopisu Pokroky matematiky a fyziky (roč. 1960).

pro tělesa pohybující se stejnou rychlostí je též mírou množství látky. Hmotu nezávisí na poloze (na Zemi, ani jinde v prostoru). Nejběžnější způsob měření hmoty je vážení.

V á h a²⁾ je síla, které je podrobena každé těleso v poli zemské tíže. Její velikost se mění s polohou na Zemi (a s výškou h nad povrchem Země). Má prakticky směr, určený spojnicí místa pozorování a středu Země (nepřihlížíme-li k vlivu odstředivé síly, která působí na každé těleso v důsledku otáčení Země kolem osy). Je tedy váha $\vec{G}$ vektor stejného směru jako tíhové zrychlení $\vec{g}$.

Vztah (1) si ještě ozřejmíme na číselném příkladu. Napřed však připomeňme jednotky obou veličin. V následující tabulce je uvádíme v soustavách MKSA, technické a CGS:

Soustava	Váha	Hmotu
MKS	N (newton) = kgms ⁻²	kg
Technická	kp	kpm ⁻¹ s ²
CGS	dyn = gcms ⁻²	g

Č í s e l n ý p ř í k l a d Břemeno má hmotu $m = 100$ kg. Stanovte váhu tohoto tělesa: 1. v místě normálního zrychlení ($g_0 = 9,806\,65$ ms⁻²), 2. v Praze³⁾ ($g_m = 9,810\,40$ ms⁻²).

Chtěli bychom na tomto místě upozornit, že platí jen přibližně rovnost číselných hodnot, číselná hodnota hmoty (v [kg]) = číselné hodnotě váhy (v [kp]).

Tento vztah platí přesně jen v místě normálního tíhového zrychlení. Tam je tedy

$$G_0 = 100 \text{ kp} = 100 [\text{kg}] \cdot 9,806\,65 [\text{ms}^{-2}] = 980,665 [\text{N}].$$

V Praze má břemeno váhu

$$G_m = 100 \frac{9,810\,40}{9,806\,65} = 100,038 [\text{kp}] = 981,038 [\text{N}].$$

²⁾ V poslední době se objevily návrhy ponechat slovo *váha* jako populární synonymum hmoty a pro *váhu jako sílu* volit jiný název, např. *gravitační účinek (působení)*. (Pozn. red.).

³⁾ Výsledky měření tíhového zrychlení v řadě míst naší planety jsou uvedeny v knize Horák, Krupka, Šindelář: *Technická fyzika*, str. 172 (SNTL 1960).

Místní zrychlení g_m lze určit buď měřením, nebo na základě dohody mezinárodní geodetické unie z r. 1930 podle vzorce

$$g_m = 9,780\,49 (1 + 5,288\,4 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi - 5,9 \cdot 10^{-6} \sin^2 2\varphi) - 1,967 \cdot 10^{-6} h ,$$

v němž φ je zeměpisná šířka, h nadmořská výška v [m].

Fyzikálne zaujímavosti

Aká je príčina priehľadnosti alebo nepriehľadnosti hmotných prostredí?

Svet sa rozdeľuje na pozorovateľné predmety v podstate odlišnosťou hmotných útvarov prepúšťajúcich, alebo neprepúšťajúcich viditeľné elektromagnetické žiarenie. Vynára sa preto otázka, na základe akého vzájomného vplyvu elektromagnetického vlnenia a hmotného prostredia možno vysvetliť priehľadnosť alebo nepriehľadnosť?

Priehľadnosť prostredia nastane, keď častice hmotného prostredia nebudú odnímať energiu elektromagnetickému rozruchu, prostredím postupujúcemu. Odnímanie energie žiareniu sa pritom uskutočňuje tak, že sa energia žiarenia mení v pohybovú energiu častíc prostredia. A tu možnosť odovzdania energie elektromagnetickej vlny bude závislá jednak od pohybových možností častíc (hlavne elektricky nabitých), jednak od frekvencie vlnenia. Priehľadnosť a nepriehľadnosť ukážu sa tak ako vlastnosti, závislé nielen od prostredia, ale tiež od vlnového rozruchu, ktorý ním má postupovať. Keby zrak vnímal inú oblasť frekvencií elektromagnetického spektra, svet vzal by na seba celkom inú tvárnosť, ako pri jeho vnímaní pomocou viditeľného svetla.

Keď sme zdôvodňovali interval frekvencií viditeľného elektromagnetického vlnenia, povšimli sme si, že index lomu (Rozhledy č. 1., roč. 39, str. 41., rovnica (1)) nadobúda pre rezonančné frekvencie pohybu častíc s frekvenciou elektromagnetickej vlny hodnotu, rastúcu nad všetky hranice. Tým sa i permitivita zväčšuje nad všetky hranice. Čo je príčinou tej divergencie indexu lomu, alebo permitivity?

Elektrické napätie medzi doskami kondenzátora klesá úmerne s hodnotou permitivity, vyplňujúcej priestor medzi doskami. Pretože by kleslo na nulovú hodnotu pri vodivom krátkom spojení, vyplýva odtiaľ, že permitivita vodiča má tiež hodnotu nekonečne veľkú. Prostredie sa pre rezonančnú frekvenciu chová skutočne ako kov a vlnenie len odráža (odraz kovového charakteru). Kovy elektromagnetické vlny pohlcujú a preto príčinou divergencie indexu lomu resp. permitivity je odovzdávanie energie vlnenia rezonujúcim časticiam prostredia.

Prostredie je pre nerezonančné frekvencie prechodné pre elektromagnetickú vlnu; len v prípade rezonančných frekvencií sa chová ako absorptor elektromagnetickej energie. Tu pevne viazané častice s ohľadom na svoje vlastné kmity, prijímali energiu vlny, v ktorej sa elektrické pole menilo s rovnakou frekvenciou.

Všeobecná absorpcia energie elektromagnetickej vlny preto môže nastať len v prostredí, ktoré obsahuje voľné, alebo len veľmi voľne viazané elektrické častice, aby nezávisle od frekvencie elektromagnetickej vlny prijímali jej energiu tým, že sa spolurozkmítavajú. Také prostredia sú však vodivé. Vodivé prostredia musia preto byť nepriehľadnými pre elektromagnetické vlny všetkých frekvencií.

Vyslovené tvrdenie nie je ešte jednoznačné, pretože existujú vodiče, v ktorých sú nositeľmi elektrických nábojov rôzne častice: elektróny, ióny, alebo vodiče zmiešané. Napr. roztok modrej skalice je vodivý pre jednosmerný prúd i striedavé prúdy, pritom je však súčasne priehľadný. Pokúste sa úkaz správne vysvetliť (riešenie prinesieme v budúcom čísle).

Ak sa vodivé látky javia ako nepriechodné pre elektromagnetické žiarenia, naopak izolátory mali by byť priechodnými, mali by byť vodičmi elektromagnetických vln. I tu však existujú izolátory nepriehľadné. Priehľadnosť a nepriehľadnosť závisia od štruktúry hmotného prostredia a potom od frekvencie elektromagnetickej vlny, o ktorej prechod prostredím ide.

Väčšia priechodnosť žiarenia prostredím sa vytvára pri veľmi vysokých frekvenciách žiarení. Veľmi vysoká frekvencia žiarenia je potom veľmi vzdialená od posledných rezonančných frekvencií, ležiacich v ultrafialovom obore. V takom prípade sa index lomu a súčasne permitivita prostredia blíži jednotkovej hodnote. S tým súvisí, že prestávajú podmienky pre odraz a lom vlnenia a žiarenie sa stáva veľmi priechodným. Menšie vzájomné pôsobenie žiarenia a hmotného prostredia tu existuje preto, že vzdialenosti častíc v hmotnom prostredí sa stali veľkými proti vlnovej dĺžke žiarenia. Vzdialenosť častíc (mriežková konštanta) je rádovo $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$, kdežto vlnová dĺžka krátkovlnových žiarení gamma klesá až na hodnotu 10^{-13} cm . Prostredie je vzhľadom k takému vlneniu ako priestorová sieť a jednotlivé častice prostredia vlnenie len ohýbajú.

Kovy a niektoré metalické zlúčeniny nie sú priehľadné pre žiadne

elektromagnetické žiarenie, hlavne keď ide o ich silnejšie vrstvy. V nich prítomné voľné elektróny, pre svoju malú hmotu a zotrvačnosť spolu-kmitajú v poli každej elektromagnetickej vlny a tým preberajú jej energiu. Pohlcuje sa však vždy len tá časť žiarenia, ktorá mohla odovzdať energiu rozkmitaným elektrónom (tieto potom v dôsledku svojej zväčšenej pohybovej energie z prostredia i vystupujú fotoelektrický efekt).

Prečo je roztok modrej skalice ako vodivý, predsa priehľadný?

Galvanometer s pohyblivou cievkou mení smer výchylky so smerom prúdu. Nárazový prúd ho vychýli a ručička potom kmitá. To sú jeho vlastné kmity. Pri pomaly premenlivom prúde ručička stačí sledovať zmeny smeru prúdu. Ak naň zapneme prúd striedavý, ktorého frekvencia leží vysoko nad vlastnou frekvenciou galvanometra, ručička nekoná žiadny pohyb.

Vodivosť modrej skalice súvisí s iónmi, teda časticami väčšej hmoty, než majú elektróny. Vlastná frekvencia kmitov, ktoré môžu v roztoku konať, je asi 10^{10} 1/sek, kdežto frekvencia viditeľného svetla je 10^{14} a túto frekvenciu ióny elektrolytu nestačia sledovať. Pre túto frekvenciu je modrá skalica izolátorom a súčasne je pre svetlo priehľadná.

Prof. dr. Ján Vanovič

Matematické zábavy

M i l a n K o m a n, Pl, Praha:

Dvě úlohy ze zábavné matematiky

(Dokončení)

Věta 4. Je-li $|k| \leq n$, potom

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{i=-n}^k \binom{n}{k-i} \binom{k-i}{n+i}. \quad (5)$$

D ů k a z. Předně musíme ukázat, že všechna kombinační čísla ve výrazu (5) mají smysl, to znamená, že pro všechna i probíhající od $-n$ do k , je číslo $(k-i)$ nezáporné. To je však ihned zřejmé, neboť $i \leq k$ a tedy $k-i \geq 0$.

V dalším použijeme matematické indukce. Pro $n = 0$ věta platí. Nyní za předpokladu, že věta platí pro jisté $n \geq 0$ dokážeme její platnost i pro $n + 1$.

Pro

$|k - 1| \leq n$, tj. pro $(-n + 1) \leq k \leq n + 1$ platí podle výrazu (5)

$$\left[\begin{matrix} n \\ k - 1 \end{matrix} \right] = \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-1-i}{n+i}. \quad (6)$$

Pro $|k| \leq n$, tj. pro $-n \leq k \leq n$ platí

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{i=-n}^k \binom{n}{k-i} \binom{k-1}{n+1}.$$

Tento výraz ještě upravíme dosazením $i = j + 1$

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^k \binom{n}{k-i} \binom{k-1}{n+1} = \sum_{j=-n-1}^{k-1} \binom{n}{k-1-j} \binom{k-1-j}{n+1+j} = {}^2) \\ &= \sum_{j=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-j} \binom{k-1-j}{n+1+j} + \binom{n}{k+n} \binom{k+n}{0} = \\ &= \sum_{j=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-j} \binom{k-1-j}{n+1+j} + \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0}. {}^3) \end{aligned}$$

Protože nezáleží na tom, jak označíme proměnnou, přes kterou provádíme sčítání, můžeme konečně napsat

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-1-i}{n+1+i} + \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0}. \quad (7)$$

Pro $|k + 1| \leq n$, tj. pro $-n - 1 \leq k \leq n - 1$ platí podle výrazu (5)

$$\left[\begin{matrix} n \\ k + 1 \end{matrix} \right] = \sum_{i=-n}^{k+1} \binom{n}{k+1-i} \binom{k+1-i}{n+i}.$$

Tento výraz můžeme upravit podobně jako v předcházejícím případě dosazením $i = j + 1$:

²⁾ Doporučuji čtenáři, aby si ověřil správnost této úpravy na některém konkrétním případě dosazením.

³⁾ Připomínám, že pro všechna n platí $\binom{n}{0} = 1$.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k+1} \binom{n}{k+1-i} \binom{k+1-i}{n+i} = \\
&= \sum_{j=-n-1}^k \binom{n}{k-j} \binom{k-j}{n+1+j} = \\
&= \sum_{j=-n}^{k-1} \binom{n}{k-j} \binom{k-j}{n+1+j} + \binom{n}{k+n+1} \binom{k+n+1}{0} + \\
&\quad + \binom{n}{0} \binom{0}{n+1+k} = \\
&= \sum_{j=-n}^{k-1} \binom{n}{k-j} \binom{k-j}{n+1+j} + \binom{n}{k+n+1} \binom{k+n+1}{0} + \\
&\quad + \binom{n+1}{0} \binom{0}{n+1+k}
\end{aligned}$$

Označíme-li proměnnou, přes kterou sčítáme, opět i , dostáváme

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-i} \binom{k-i}{n+1+i} + \binom{n}{k+n+1} \binom{k+n+1}{0} + \\
&\quad + \binom{n+1}{0} \binom{0}{n+1+k} \tag{8}
\end{aligned}$$

Vztahy (6) až (8) platí současně, pokud $-n+1 \leq k \leq n-1$, tj. pro $|k| \leq n-1$. Můžeme je za těchto předpokladů sečíst. Nejprve sečteme vztahy (6) a (7)

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-1-i}{n+i} + \\
&+ \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-1-i}{n+1+i} + \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0} = \\
&= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \left[\binom{k-1-i}{n+i} + \binom{k-1-i}{n+1+i} \right] + \\
&\quad + \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0}
\end{aligned}$$

Užijeme-li vztahu (4), dostaneme

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-i}{n+1+i} + \\
&\quad + \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0} \tag{9}
\end{aligned}$$

Přičteme-li k vztahu (9) ještě vztah (8), dostaneme

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-1-i} \binom{k-i}{n+1+i} + \\
&+ \binom{n}{k+n} \binom{k+n+1}{0} + \\
&+ \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n}{k-i} \binom{k-i}{n+1+i} + \binom{n}{k+n+1} \binom{k+n+1}{0} + \\
&+ \binom{n+1}{0} \binom{0}{n+1+k} = \\
&= \sum_{i=-n}^{k-1} \left[\binom{n}{k-1-i} + \binom{n}{k-i} \right] \binom{k-i}{n+1+i} + \left[\binom{n}{k+n} + \right. \\
&\left. + \binom{n}{k+n+1} \right] \binom{k+n+1}{0} + \binom{n+1}{0} \binom{0}{n+1+k}.
\end{aligned}$$

Užijeme-li opět vztahu (4), dostaneme konečně

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] &= \sum_{i=-n}^{k-1} \binom{n+1}{k-i} \binom{k-i}{n+1+i} + \\
&+ \binom{n+1}{k+n+1} \binom{k+n+1}{0} + \binom{n+1}{0} \binom{0}{n+1+k} = \\
&= \sum_{i=-(n+1)}^k \binom{n+1}{k-i} \binom{k-i}{n+1+i} = \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right].
\end{aligned}$$

Tím je tedy v případě $|k| \leq n-1$ vzorec pro $\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]$ dokázán. Zbývá tedy dokázat tento vzorec v případech $(n-1) < k \leq (n+1)$.

Podle věty 2. pro $|k-1| > n$ platí $\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] = 0$, pro $|k| > n$ platí $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ a pro $|k+1| > n$ platí $\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] = 0$. Stačí tedy v případech $(n-1) < |k| \leq (n+1)$ místo obecného vzorce

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]$$

ověřit tyto speciální případy:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{matrix} n+1 \\ -n-1 \end{matrix} \right] &= \left[\begin{matrix} n \\ -n \end{matrix} \right], \\
\left[\begin{matrix} n+1 \\ -n \end{matrix} \right] &= \left[\begin{matrix} n \\ -n \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ -n+1 \end{matrix} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}.$$

Ověření správnosti uvedené věty však v těchto případech přenechávám již čtenáři.

Příklad. Určete počet nejkratších cest krále na neomezené šachovnici z pole $(-2, 1)$ na pole $(2, 6)$.

Protože $\max [2 - (-2), 6 - 1] = 5$, $\min [2 - (-2), 6 - 1] = 4$, je hledaný počet dán číslem $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. Toto číslo určíme pomocí vztahu (5)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Všechny členy s výjimkou $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ jsou rovny nule, tedy

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 5.$$

				●		
			1	1	1	
		1	2	3	2	1
	1	3	6	7	6	3
1	4	10	16	19	16	9
5	15	30	45	51	44	25
20					120	

Obr. 5

Hledaný počet cest se tudíž rovná pěti.

Nyní budeme danou úlohu řešit na libovolné obdélníkové šachovnici o $p \cdot q$ polích. Připomeňme, že pravidla P. 3 a P. 4 platí i pro obdélníkovou šachovnici. Bez újmy na obecnosti můžeme i zde úlohu řešit pro případ cesty z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) , kde $0 \leq |k_1 - k_0| \leq \leq n_1 - n_0$, neboť ostatní případy dostaneme opět vhodným otočením šachovnice. Nejkratší cestu z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) lze realizovat pouze užitím tahů „dolů“. I zde je vidět, že na pole (n_1, k_1) lze přemístit krále jediným tahem „dolů“

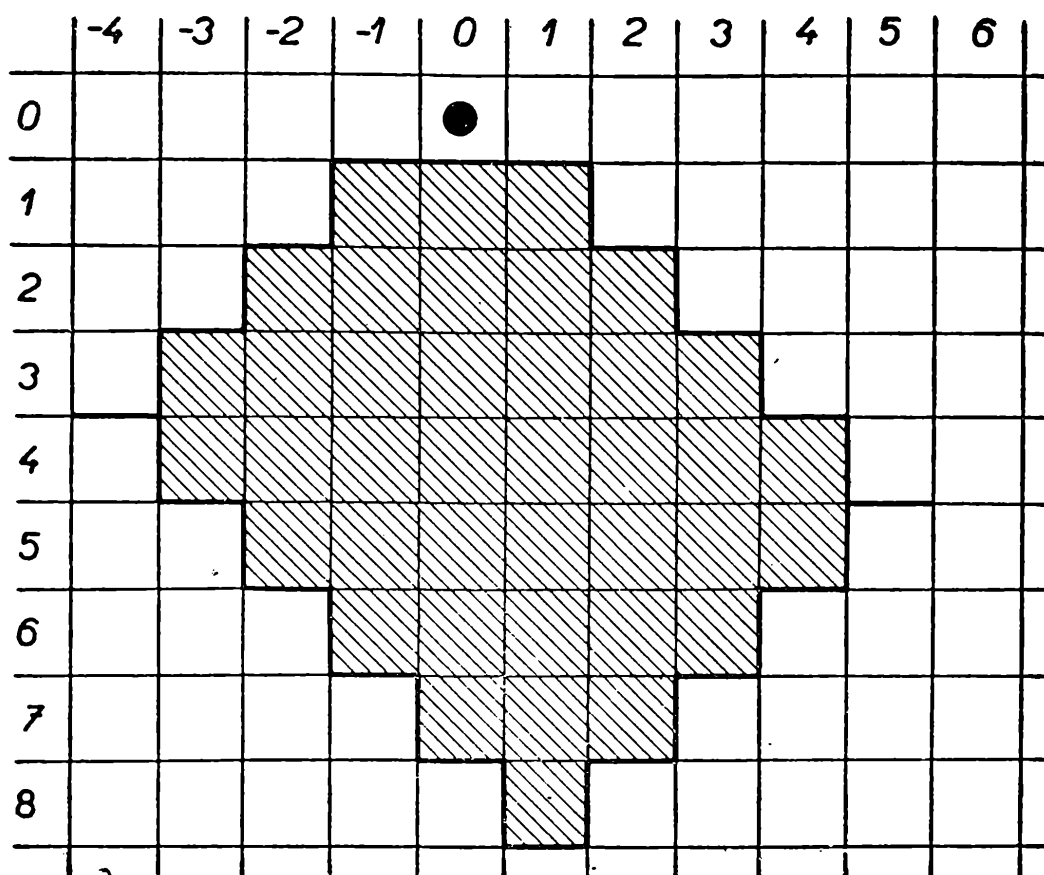
pouze ze sousedních polí $(n_1 - 1)$ -ní

řady. Rozdíl proti neomezené šachovnici je pouze v tom, že počet těchto sousedních polí může být menší než tři a to v případě, že pole (n_1, k_1) leží při některém okraji šachovnice. Odtud snadno plyne toto pravidlo:

P. 7. Budiž dána obdélníková šachovnice o $p \cdot q$ polích a na ní pole (n_0, k_0) , (n_1, k_1) (to zn. $1 \leq n_0 \leq p$, $1 \leq n_1 \leq p$, $1 \leq k_0 \leq q$, $1 \leq k_1 \leq q$). Nechť platí $0 \leq |k_1 - k_0| \leq n_1 - n_0$. Označme $n = n_1 - n_0$, $k = k_1 - k_0$, $a = k_0 - 1$, $b = q - k_0$. Číslo a , resp. b , značí počet sloupců, které leží mezi levým, resp. pravým okrajem šachovnice a polem (n_0, k_0) . Potom počet nejkratších cest krále z pole (n_0, k_0) na pole (n_1, k_1) je dán číslem $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_a^b$ definovaným takto:

1. $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix} \right]_a^b = 0$ pro $i \neq 0$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_a^b = 1$.
2. Je-li $n > 0$ a $k < -a$, resp. $k < b$, potom

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_a^b = 0.$$



Obr. 6

3. Je-li $n > 0$, $-a \leq k \leq b$, potom

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_a^b = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_a^b + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_a^b + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]_a^b.$$

P o z n á m k a. Čtenář asi pochopí smysl uvedeného pravidla lépe, když si provede sám nějaký výpočet. Na obr. 5 je též naznačen výpočet v jednom konkrétním případě.

Věta 6. Jestliže $0 \leq n \leq \min(a, b)$, pak

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a^b = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

D ů k a z věty se provede snadno úplnou indukcí.

P o z n á m k a. Lze však dokázat trochu více než říká věta 6. Numerické řešení této otázky je však již dosti složité. Na obr. 6 je aspoň naznačeno v jednom konkrétním případě, pro která čísla platí $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a^b = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Čtenář jistě sám snadno nahlédne, proč pro pole (n, k) , která jsou na obrázku vyšrafována, platí $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3^4 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Různé

I v a n K o r e c, absolvent JSŠ, Partizánske:

Druhá mezinárodní matematická olympiáda 1960

(Dokončení)

Slávnostné ukončenie súťaže bolo v nedeľu 24. 7. 1960 v Bukurešti, kam odišli všetci účastníci II. medzinárodnej matematickej olympiády deň po skončení súťaže. Na ňom vedúci delegácií a rumunskí usporiadatelia osobitne zdôraznili dvojaký význam medzinárodnej MO, jednak ako porovnanie vedomostí medzi žiakmi rozličných krajín tábora mieru, jednak ako prostriedok ďalšieho utuženia priateľských vzťahov medzi krajinami tábora mieru. Hovorili o perspektívach a úlohách účastníkov v budúcnosti, o neustále vzrástajúcej úlohe matematiky vo všetkých vedných odboroch, o perspektívach samotnej matematiky i o nevyhnutnosti matematiky pri budovaní socializmu. V mene všetkých účastníkov súťaže poďakoval rumunským usporiadateľom za krásne chvíle pobytu v Rumunsku, za srdečné prijatie a starostlivosť žiak Ferenc Mezei z gymnázia v Budapešti. Zároveň sľubil menom všetkých účastníkov, že sa budeme ďalej učiť a zdokonaľovať v matematike.

Po tom nasledovalo rozdelenie cien. Boli udelené štyri prvé ceny, 4 druhé, 4 tretie a 7 čestných uznaní. Z toho jednu prvú, 1 druhú, 2 tretie ceny a 2 čestné uznania získali členovia československého druž-

stva. Iba dvaja členovia našej delegácie nezískali diplomy, ale i tí sa držali dobre a ich výkon bol rozhodujúci pre konečný počet bodov. Najväčší počet bodov získalo československé družstvo. Počet bodov získaných jednotlivými družstvami bol:

1. Československo 257, 2. Rumunsko 248, 3. Maďarsko 248, 4. Bulharsko 175 a 5. NDR 38.

Žiaden účastník súťaže nedosiahol plný počet bodov (45). Najväčší dosiahnutý počet bodov bol 43. Dosiahli ho dvaja riešitelia: československý účastník Ivan Korec z JSŠ v Partizánskom a maďarský Ferenc Mezei, 4. roč. gymnázia v Budapešti.

V pondelok 25. júla podnikli účastníci MMO spoločný výlet k Čiernemu moru do mesta Konstanci. Bol to posledný deň spoločného pobytu v Rumunsku. V utorok bol naplánovaný odchod všetkých delegácií. Československá delegácia však nedostala miesta v lietadle a zostala ešte v Bukurešti. Pri rozlúčke sme si všetci vymenili adresy najmä s členmi nemckej a bulharskej delegácie.

Naša delegácia ostala v Bukurešti až do piatku. Nepozerajúc na to, že súťaž už skončila a že odchod všetkých delegácií bol naplánovaný na utorok, rumunskí súdruhovia sa o nás starali rovnako dobre ako počas plánovaného pobytu. Zaviedli nás do múzea mesta Bukurešti, kde s. Zelinka po prehliadke urobil zápis do pamätnej knihy, potom do múzea feudálneho umenia. Urobili s nami tiež exkurziu do rumunského Domu tlače (moderný tlačiarenský kombinát). Myslím, že členov nášho družstva najviac zaujal práve tento.

V piatok popoludní, po srdečnej rozlúčke s rumunskými súdruhmi, odletela československá delegácia do Prahy.

Ak mám vcelku hodnotiť výkon nášho družstva, môžem smelo povedať, že sme dobre obstáli a že so svojím výkonom môžeme byť spokojní.

Medzinárodná matematická olympiáda nebola iba previerkou vedomostí žiakov. Túto úlohu, myslím splnila dobre. A rovnako dobre splnila i svoje druhé poslanie: umožnila nadviazanie družby medzi mladými matematikmi krajín tábora mieru. Treba len ľutovať, že sa súťaže nezúčastnili všetky ľudovodemokratické štáty. Súťaže sa zúčastnilo iba päť delegácií. Československá delegácia prišla najneskôr a preto nemala na nadväzovanie priateľstiev toľko možností ako ostatné delegácie. I tak si však každý z nás našiel niekoľko priateľov, s ktorými si vymenil adresy, takže môže aspoň listovne pokračovať v rozvíjaní priateľstva s mladými matematikmi ľudovodemokratických štátov.

Texty úloh, zadaných na II. medzinárodnej matematickej olympiáde

(V zátvorke za textom je uvedená zem, ktorá úlohu zadala.)

Prvá písomná práca

1. Ak delíme hľadané trojciferné číslo jedenástimi, dostaneme podiel, ktorý sa rovná súčtu druhých mocnín jednotlivých cifier hľadaného čísla. - Určte všetky také trojciferné čísla. (Bulharsko)

2. Určte všetky čísla x , pre ktoré platí nerovnosť

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9. \quad (\text{Maďarsko})$$

3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC , ktorého prepona BC je rozdelená na n zhodných úsečiek. pričom je n nepárne číslo. Označme α dutý uhol, pod ktorým vidieť z bodu A tú zo zhodných úsečiek, ktorá obsahuje stred prepony daného trojuholníka. Ďalej označme h výšku a a veľkosť prepony daného trojuholníka. Dokážte, že potom platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a} \quad (\text{Rumunsko})$$

Druhá písomná práca

4. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané veľkosti v_a, v_b výšok (príslušných po rade vrcholom A, B trojuholníka), a ďalej veľkosť t_a ťažnice, ktorá prislúcha k vrcholu A .

5. Daná je kocka $ABCD A'B'C'D'$.

a) Určte geometrické miesto stredov úsečiek XY , kde X je ľubovoľný bod úsečky AC a Y je ľubovoľný bod úsečky $B'D'$.

b) Určte geometrické miesto bodov Z , ktorá ležia vnútri úsečiek XY [z úlohy a)] a o ktorých platí

$$ZY = 2 \cdot XZ. \quad (\text{ČSSR})$$

6. Daný je rotačný kužeľ, ktorému je vpísaná guľová plocha tak, že sa dotýka podstavy kužela. Tejto guľovej ploche je opísaný rotačný valec, ktorého jedna podstava leží v rovine podstavy daného kužela. Označme V_1 objem kužela, V_2 objem valca.

a) Dokážte, že neplatí rovnosť $V_1 = V_2$.

b) Určte najmenšie číslo k , pre ktoré platí vzťah

$$V_1 = k \cdot V_2;$$

pre tento prípad zostrojte dutý uhol, pod ktorým vidieť z vrcholu kužela priemer podstavy kužela. (Bulharsko)

7. Daný je rovnoramenný lichobežník so základňami a, c a výškou v . Na osi súmernosti tohto lichobežníka zostrojte bod P tak, aby z neho bolo vidieť obe ramená lichobežníka pod pravými uhlami.

Ďalej vypočítajte vzdialenosť bodu P od jednej zo základní lichobežníka.

Konečne rozhodnite, za akých podmienok možno urobiť konštrukciu bodu P . (Diskusia prípadov, ktoré môžu nastať.) (NDR)

Menný zoznam odmenených žiakov na II. medzinárodnej matematickej olympiáde.

I. ceny:

Korec Ivan, XI. roč. jsš, Partizánske (ČSSR);

Mezei Ferenc, IV. roč. „gymnázium“ Budapešť (MLR);

Gheorghe Cezar, XI. roč. strednej školy Buzau (RLR);

Bollobás Béla, III. ročník pokusného gymnázia Budapešť (MLR).

II. ceny:

Popa Nicolae, X. roč. strednej školy, Focsani (RLR);

Frítz Jozsef, III. roč. „gymnázium“, Mosonmagyaróvár (MLR);

Souček Jiří, XI. roč., jsš, Praha (ČSSR);
Muszély György, IV. roč. „gymnázium“, Budapešť (MLR).

III. ceny:

Petrov I. Peter, XI. roč. strednej školy, Plovdiv (BLR);
Tomšů Petr, IV roč. priemyslovej školy, Kopřivnice (ČSSR);
Stratilia Serban, X. roč. strednej školy, Pitesti (RLR);
Veselý Jan, XI roč. jsš, Ostrava (ČSSR).

Čestné uznania:

Baran Ladislav, XI. roč. jsš, Žilina (ČSSR);
Nosek Pavel, XI. roč. jsš, Hradec Králové (ČSSR);
Bojanov P. Todor, XI. roč. strednej školy, Sofia (BLR);
Nicolescu Basarab, XI. roč. strednej školy, Ploesti (RLR);
Vlaev P. Panajot, XI. roč. strednej školy, Ajtos (BLR);
Komlós János, IV. roč., Pokusné gymnázium, Budapešť (MLR);
Walter Klaus, XII. roč. strednej školy, Görlitz (NDR).

Rozhovor s vítězi soutěže Rozhledů

Během minulého školního roku probíhala v našem časopisu soutěž v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Po jejím skončení provedla redakce spolu s autory příkladů její ohodnocení a výsledky jsme otiskli v 3. čísle.

Dnes uveřejňujeme „středové průměty“ prvních tří vítězů, jež jsme současně požádali, aby nám napsali něco ze svého „matematicko-fyzikálního“ života. Z jejich dopisů vyjímáme:



P e t r T o m š ů, stud. matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university, absolvent průmyslové školy v Kopřivnici:

„...o matematiku jsem měl zájem již na osmileté škole v Kopřivnici. Od té doby jsem se každoročně zúčastňoval MO. Ve vašem časopise jsem viděl „Úlohy k řešení“. Pokoušel jsem se je řešit. Některé byly celkem snadné, jiné si vyžadovaly trochu více přemýšlení, popřípadě byly odlišné od osnov matematiky na průmyslovkách. V tom případě jsem si vypůjčil patřičnou literaturu a nastudoval jsem ji. To jsem pokládal za užitečné, protože jsem začal uvažovat o studiu matematiky a fyziky na universitě. Řekl jsem si, že

každou úlohu musím vyřešit sám, nemělo by přece pro mne ceny, kdyby mně úlohy někdo řešil. Tím bych se nezdokonaľoval...“



Vladimír Regner, stud. elektrotechnické fakulty ČVUT, absolvent DSŠ v Mladé Boleslavi:

„...žádali jste mne, abych vám odpověděl na otázku, co mě vedlo k účasti na vaší soutěži. Nedožvíte se asi nic zvláštního. Je to obyčejný příběh žáka, který se zajímal o všechny přírodní vědy a zvláště o matematiku. Řešil jsem vždy rád matematické příklady; zpočátku že „mi to šlo“, později už s pevným úmyslem uplatnit své získané vědomosti v budoucnu jako inženýr. Zúčastnil jsem se všech čtyř posledních soutěží MO a vždy jsem se stal úspěšným řešitelem ve druhém kole. V celostátním kole jsem se však

neumístil. Získal jsem přitom důležitou zkušenost, že člověk musí být pozorný i k věcem, které dělá samozřejmě, že největší pozornost má při výpočtech věnovat právě nejjednodušším úkonům...“

Karel Hrbáček, stud. JSS v Nymburce:

„...v osmé třídě se mi dostala do rukou knížka „Od bodu k čtvrtému rozměru“. A právě ten čtvrtý rozměr zvýšil můj zprvu romantický zájem o hlubší studium matematiky. Vydatným pomocníkem přitom je mi váš časopis a soutěže. Účastnil jsem se úspěšně tří ročníků MO a vaší soutěže. Mám velmi dobrého učitele matematiky s. Hubáčka...“

O. S., M. M.



Redakce děkuje ministerstvu školství a kultury i JČMF za umožnění udělení knižních cen vítězům. Všem soutěžícím děkujeme za účast, blahopřejeme vítězům a přejeme letošním účastníkům mnoho úspěchů.

Od vesla k atomovému ledoborci

Tak zní název výstavy pořádané varšavským muzeem a polským pražským kulturním střediskem v Národním technickém muzeu v Praze 7, Kostelní 42.

Pro nás „suchozemce“ mají velké vodní plochy a zvláště moře - které tak postrádáme zvláštní kouzlo. Proto se jistě se zájmem podíváte na tuto výstavu, která potrvá do konce prosince a pak bude přemístěna i do jiných měst.

M. M.

Soutěžní úlohy I. kola MO

(Druhá trojice úloh)

Kategorie A

4. Necht α, β, γ jsou velikosti úhlů trojúhelníka; označme

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma, \quad q = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1.$$

a) Je-li trojúhelník pravoúhlý, potom je $p = q$; dokažte.

b) Je-li $p = q$, potom je trojúhelník pravoúhlý; dokažte.

c) Které největší hodnoty může nabýt číslo p pro pravoúhlé trojúhelníky?

5. Najdite všechny prirodzené čísla n , pro které je číslo $2^n - 1$ druhou nebo vyšší (celistvou) mocninou přírodního čísla.

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ, σ a úsečka AC , která nemá s žádnou z obou rovin ρ, σ společný bod a která není kolmá k průsečnici rovin ρ, σ .

Sestrojte rovnostranný rovnoběžník (kosočtverec nebo čtverec) $ABCD$ těchto vlastností:

(1) Body A, C jsou jeho protější vrcholy.

(2) Bod B leží v rovině ρ a bod D leží v rovině σ .

Provedte prostorové řešení úlohy a diskusi řešitelnosti.

Kategorie B

4. Najdite všechny trojice navzájem různých přírodních čísel x, y, z , které mají tú vlastnost, že součet každých dvou čísel trojice je dělitelný zvyšným číslem¹⁾.

5. Jsou dány dvě shodné kružnice, které se protínají ve dvou různých bodech P, Q . Bodem P vedme přímku, která protne obě kružnice ještě v dalších bodech X, Y navzájem oddělených bodem P .

a) Vyšetřte geometrická místa středů stran trojúhelníků QXY .

b) Vyšetřte, který útvar vyplní středy kružnic opsaných trojúhelníkům QXY .

6. Je-li x nezávisle proměnná, dokažte:

a) Funkce $y = x + 2\sqrt{1-x}$ je klesající v intervalu $(0, 1)$.

b) Funkce $y = \frac{10x}{x^2 + 25}$ je v intervalu $< -5, 5 >$ rostoucí, kdežto v obou intervalech $(-\infty, -5 > , < 5, \infty)$ je klesající; načrtněte přibližný graf funkce.

Vysvětlení. Funkce $y = f(x)$ se nazývá v určitém intervalu klesající, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) > f(x_2)$; nazývá se v intervalu rostoucí, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Kategorie C

4. Jsou-li p, q přirozená čísla, potom je číslo

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4}{36}$$

celé, dokažte.

¹⁾ „Zvyšný“ česky znamená „zbývající“.

5. Zvolte ostrý úhel $\sphericalangle PVQ$ a uvnitř tohoto úhlu bod C .

Uvažujme všechny trojúhelníky ABC , kde A je vnitřní bod polopřímky VP a B vnitřní bod polopřímky VQ .

Sestrojte body A, B tak, aby trojúhelník ABC , který tak vznikne, měl ze všech uvažovaných trojúhelníků nejmenší obvod.

Dokažte, že se takový trojúhelník dá sestavit právě jeden.

6. Jsou dány dvě shodné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$, které se navzájem protínají. Označme O střed úsečky $S_1 S_2$.

Bodem O vedte takovou přímku, aby její průsečíky s kružnicemi k_1, k_2 byly krajními body tří navzájem shodných úseček bez společných vnitřních bodů.

Udejte podmínky řešitelnosti pomocí čísel r, c , kde $c = S_1 S_2$.

Řešení těchto druhých tří úloh odevzdejte do 28. února 1961!

Upozornění účastníkům Fyzikální olympiády

Protože text úlohy B-4 (uveřejněný v druhém čísle tohoto časopisu) vedl k nejasnostem, rozhodl se ÚVFO text této úlohy opravit: Místo první věty „První kosmická loď po vypuštění obíhala kolem Země v přibližně kruhové dráze o poloměru $l = 320$ km“, je správná věta „První kosmická loď po vypuštění obíhala kolem Země v přibližně kruhové dráze ve vzdálenosti $l = 320$ km od povrchu Země.“

Doplňujeme text úlohy B-6 udáním skupenského tepla tání ledu $q \doteq 80 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1}$ a opravujeme tiskovou chybu při udání specifického tepla mědi, místo c_{Cu} má být c_{Cu} .

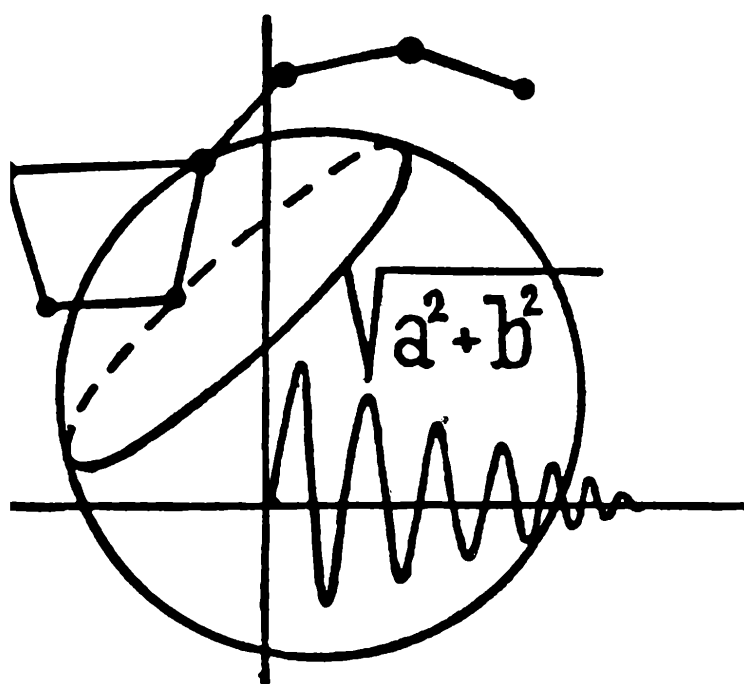
V zadání úlohy B-8 je správná hodnota objemu pneumatiky $V_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Dále uveřejňujeme změněné termíny k odevzdání úloh. První tři vyřešené úlohy odevzdají soutěžící svému učiteli nejpozději do 20. 12. 1960, další tři do 31. 1. 1961 a poslední tři s prostudováním tématu do 28. 2. 1961.

Ústřední výbor Fyzikální olympiády

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



5

ROČ. 39
1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 5

Toto číslo vyšlo 10. ledna 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

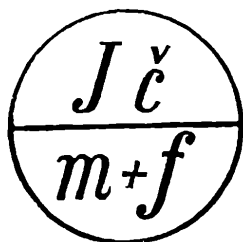
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H

Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	193
S. Vávra: Existuje jediná násobilka?	198
Inž. L. Drs: Skládání geometrických příbuzností	200
J. Cochlar: Pásmová teorie pevné fáze	203
V. Burjan: „Rodokmen“ prvků	208
CSc L. Sehnal: Umělé družice určují tvar Země.	213
Inž. E. Klier: Korděmského neodbytný rozdíl	217
Prof. dr. J. Vanovič: Podľa akého zákona prebieha absorpcia žiarenia v prostredí?	222
S. Vávra: Něco o první větě impulsové	223
Prof. dr. R. Košťál, D. Košťálová, dr. B. Vlach: Měření odporu metodou Wheatstonovým můstkem	225
Prof. dr. R. Košťál, D. Košťálová, J. Konrád: Určování chyby veličiny měřené a veličiny vypočtené	229
Recenze	238
Redakční sdělení	240
J. Bareš: Konference o elektronice	3. str. obálky
Soutěžní úlohy I. kola MO (Dokončení)	4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-12*01647. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

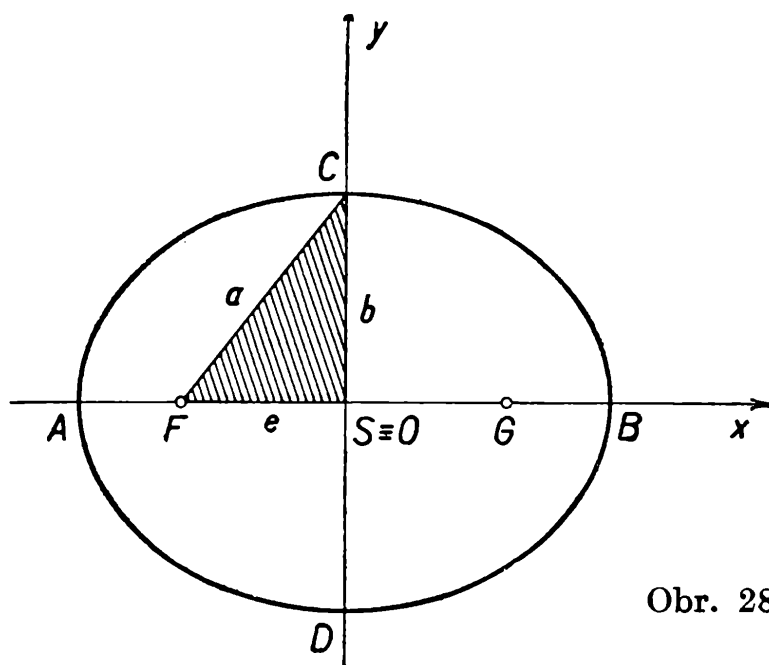
Matematika

Doc. Emil Kramer, Karlova universita, Praha:

O analytické geometrii v rovině

(Pokračování)

Poznali jsme již rovnici přímky, kružnice a paraboly; nyní odvodíme rovnici elipsy. Jak víte, je *elipsa* množinou všech bodů (v rovině), které mají od dvou pevných bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost těchto dvou bodů. Elipsu vidíte na obr. 28. Dané pevné body jsou označeny F , G a nazývají se *ohnisky* elipsy; stálý součet vzdáleností bodů elipsy od ohnisek označujeme $2a$.



Obr. 28

Z definice elipsy odvodíme její rovnici. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby její osou x byla přímka FG a jejím počátkem O střed S úsečky FG . Velikost shodných úseček $OF = OG$ označme e . Potom je

$$F(-e; 0), G(e; 0).$$

Podle dané podmínky je $2a > 2e$ čili $a > e$.

Souřadnice libovolného bodu P označme x, y . Jeho vzdálenosti PF, PG od ohnisek F, G se vypočtou podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů

$$PF = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}, \quad (1)$$

$$PG = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}. \quad (2)$$

Jestliže bod P leží na elipse, pak podle definice elipsy je $PF + PG = 2a$ čili

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

Umocníme-li dvěma, dostaneme

$$(x + e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + (x - e)^2 + y^2.$$

Upravíme, převedeme člen obsahující odmocninu na levou stranu a dělíme čtyřmi; tak dostaneme

$$a\sqrt{(x - e)^2 + y^2} = a^2 - ex.$$

Umocníme-li ještě jednou dvěma, dostaneme

$$a^2(x^2 - 2ex + e^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2,$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Protože je $a > e > 0$, je také $a^2 > e^2$ čili $a^2 - e^2 > 0$. Označíme-li

$$a^2 - e^2 = b^2, \quad (3)$$

dostaneme konečně rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (4)$$

Dokázali jsme tedy, že každý bod $P(x; y)$ elipsy splňuje rovnici (4), ve které je b^2 dáno rovnicí (3).

Nyní dokážeme, že také obráceně každý bod $P(x; y)$ splňující rovnici (4) je bodem elipsy s ohnisky F, G , tj., že pro něj platí

$$PF + PG = 2a.$$

Abychom to mohli dokázat, potřebujeme z rovnice (4) vypočítat PF a PG . Především z rovnice (4) plyne, že je

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \quad (5)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2). \quad (6)$$

Protože je $y^2 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, je také $a^2 - x^2 \geq 0$, $b^2 - y^2 \geq 0$ čili $x^2 \leq a^2$, $y^2 \leq b^2$, tj.

$$|x| \leq a, |y| \leq b \quad (7)$$

Souřadnice x, y každého bodu P , který splňuje rovnici (4), vyhovují tedy nerovnostem (7).

Pro každý bod $P(x; y)$ splňující rovnici (4) platí podle (1) a podle (5) toto:

$$\begin{aligned} \overline{PF^2} &= (x + e)^2 + y^2 = (x + e)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = \\ &= x^2 + 2ex + e^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2ex + e^2 + b^2 \end{aligned}$$

Avšak podle (3) je $a^2 - b^2 = e^2$, $e^2 + b^2 = a^2$, takže je

$$\begin{aligned} \overline{PF^2} &= \left(\frac{e}{a} x \right)^2 + 2ex + a^2, \\ \overline{PF^2} &= \left(a + \frac{ex}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Podle (7) je $|x| \leq a$; dále je $e < a$, takže $e|x| < a^2$ čili

$$\frac{|ex|}{a} < a, \quad \left| \frac{ex}{a} \right| < a. \quad (9)$$

Je-li $x \geq 0$, je $a + \frac{ex}{a} > 0$; je-li $x < 0$, je podle (9) opět $a + \frac{ex}{a} > 0$,

tj. tento výraz je vždy kladný. Proto z (8) plyne, že je

$$PF = a + \frac{ex}{a}. \quad (10)$$

Docela tímž postupem zjistíme, že

$$PG = a - \frac{ex}{a}. \quad (11)$$

Avšak z (10) a (11) plyne, že je $PF + PG = 2a$, tj., že bod P leží na elipse s ohnisky F, G .

Rozborem rovnice elipsy odvodíme její základní vlastnosti:

1. Vyhovují-li rovnici (4) souřadnice bodu $(x; y)$, vyhovují jí i sou-

řadnice bodu $(x; -y)$, tj. elipsa je souměrná podle přímky, která spojuje její ohniska; této přímce říkáme *hlavní osa* elipsy. Protože tato přímka je osou x soustavy souřadnic, má rovnici $y = 0$. Její průsečíky s elipsou mají tedy souřadnici $y = 0$; k tomuto $y = 0$ dostaneme z rovnice (4) $x^2 = a^2$ čili $x_1 = a$, $x_2 = -a$. To znamená, že hlavní osa protíná elipsu ve dvou bodech $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$; nazýváme je *hlavními vrcholy* elipsy. Délku úsečky $AB = 2a$ nazýváme *délkou hlavní osy* nebo stručně hlavní osou; číslo a pak nazýváme *hlavní poloosou* elipsy.

2. Vyhovují-li rovnici (4) souřadnice bodu $(x; y)$, vyhovují jí i souřadnice bodu $(-x; y)$, tj. elipsa je souměrná podle osy souměrnosti úsečky FG ; této přímce říkáme *vedlejší osa* elipsy. Její rovnice je $x = 0$, takže má s elipsou (4) společné body, pro jejichž souřadnice y platí rovnice $y^2 = b^2$ čili $y_1 = +b$, $y_2 = -b$. Vedlejší osa tedy protíná elipsu ve dvou bodech $C(0; b)$, $D(0; -b)$ zvaných *vedlejší vrcholy* elipsy. Délku úsečky $CD = 2b$ nazýváme *délkou vedlejší osy* nebo stručně také vedlejší osou; číslo b pak nazýváme *vedlejší poloosou* elipsy.

3. Vyhovují-li rovnici (4) souřadnice bodu $(x; y)$, vyhovují jí i souřadnice bodu $(-x; -y)$, tj. elipsa je souměrná podle středu $S \equiv O$ úsečky FG . Tento bod nazýváme proto *středem* elipsy.

Výsledek svých úvah můžeme nyní shrnout stručně takto:

V ě t a 19. *Je-li soustava souřadnic zvolena tak, že její osa x splývá s hlavní osou a osa y s vedlejší osou elipsy, má elipsa rovnici*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 ;$$

přitom a je hlavní, b vedlejší poloosa elipsy.

Číslo $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ se nazývá *excentricita* (výstřednost) elipsy. Vztah mezi a , b , e je patrný z pravoúhlého trojúhelníka OFC s přeponou FC ; podle Pythagorovy věty je

$$\overline{OF}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{FC}^2 .$$

Protože je $OF = e$, $OC = b$, je $FC = a$. Zároveň je z obrázku ihned vidět, že je $b < a$. Položíme-li $b = a$, dostaneme z rovnice $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ rovnici $x^2 + y^2 = a^2$, tj. rovnici kružnice se středem v počátku a s poloměrem a . Poznamenejme ještě, že rovnici elipsy můžeme zřejmě psát také ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obráceně, každá taková rovnice, resp. rovnice $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ve které je $a^2 > b^2 > 0$, je vždy rovnicí elipsy se středem v počátku a s hlavní osou v ose x ; její ohniska jsou $F(-e; 0)$, $G(e; 0)$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Potom je totiž $a^2 = e^2 + b^2$ čili $a > e$ a platí tedy celé

odvození rovnice elipsy podané před vyslovením věty 19. Platí tedy:

V ě t a 20. Každá rovnice $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, v níž je $a^2 > b^2 > 0$, je rovnicí elipsy se středem v počátku a s hlavní osou v ose x .

Tak např. rovnice $4x^2 + 9y^2 = 36$ je rovnicí elipsy, která má poloosy $a = 3$, $b = 2$, excentricitu $e = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ a ohniska $F(-\sqrt{5}; 0)$, $G(\sqrt{5}; 0)$.

Poznámka. Leží-li ohniska elipsy na ose y a jsou-li souměrně sdružena podle počátku soustavy souřadnic, pak má elipsa rovnici

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 ;$$

přitom a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa. Obráceně, každá taková rovnice, ve které je $a^2 > b^2 > 0$, je rovnicí elipsy se středem v počátku a s hlavní osou v ose y .

P ř í k l a d 11. Napište rovnici tečny elipsy $9x^2 + 25y^2 = 900$, která je rovnoběžná s přímkou $4x + 5y - 1 = 0$.

Ř e š e n í. Především je nutno zjistit, zda daná rovnice je opravdu rovnicí elipsy. Dělíme-li rovnici číslem 900, dostaneme

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad (1)$$

Elipsa se středem v počátku, s hlavní osou v ose x a s poloosami $a = 10$, $b = 6$ má pak skutečně rovnici (1).

Tečna elipsy je přímka, která má s elipsou společný právě jeden bod. Má-li být rovnoběžná s danou přímkou, pak má touž směrnici jako tato přímka. Směrnici přímky $4x + 5y - 1 = 0$ pak poznáme z jejího směrnicevého tvaru $y = kx + q$; proto rovnici upravíme takto:

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

Tato přímka má tedy směrnici $k = -\frac{4}{5}$. Proto hledaná tečna má rovnici

$$y = -\frac{4}{5}x + q ; \quad (2)$$

protože je tečnou dané elipsy, má s ní společný jediný bod. Jeho souřadnice x , y pak vyhovují rovnici (2) i rovnici dané elipsy a tedy také rovnici:

$$9x^2 + 25 \left(q - \frac{4}{5}x \right)^2 = 900 ,$$

$$9x^2 + 25 \left(q^2 - \frac{8}{5}qx + \frac{16}{25}x^2 \right) = 900 ,$$

$$25x^2 - 40qx + 25q^2 - 900 = 0 ,$$

$$5x^2 - 8qx + 5q^2 - 180 = 0 .$$

Protože tato rovnice má mít jediný kořen, musí být její diskriminant D roven nule. Protože je

$$D = 64q^2 - 20(5q^2 - 180) ,$$

má být

$$\begin{aligned} 16q^2 - 25q^2 + 900 &= 0 , \\ 9q^2 &= 900 , \\ q^2 &= 100 . \end{aligned}$$

Této rovnici však vyhovují čísla $q_1 = 10$, $q_2 = -10$. Úloha má tedy dvě řešení; rovnice dvou hledaných tečen pak dostaneme z rovnice (2), jestliže do ní dosadíme buď $q = 10$ nebo $q = -10$. Tak dostaneme rovnice

$$y = -\frac{4}{5}x + 10 , y = -\frac{4}{5}x - 10 ;$$

po úpravě obdržíme

$$4x + 5y - 50 = 0 , 4x + 5y + 50 = 0 .$$

Přesvědčte se (zkouškou), že tyto dvě přímky jsou skutečně tečnami dané elipsy.

(Pokračování)

S t a n i s l a v V á v r a, studující KU, Praha:

Existuje jediná násobilka?

Přirozená čísla byla prvními čísly, která si člověk vytvořil pro svou potřebu. Již v pravěku užívali lidé těchto několik čísel k vyjádření množství ulovených zvířat, nádob s obilím, zbraní apod.¹⁾.

¹⁾ První písemné zápisy přirozených čísel nacházíme v egyptských rukopisných památkách ze XVII. století př. n. l. - Ahmesův papyrus, moskevský papyrus.

Přirozená čísla začal člověk také nejprve sčítat a násobit. S o u č e t a s o u č i n vytvořil tak, aby vyhovoval jeho praktické potřebě. Jestliže číslo 2 přiřadil k určitému množství třeba nádob s obilím a číslo 3 k jinému množství nádob, označil součtem $2 + 3$ počet nádob, který dostal, když obě množství spojil. Počítal-li v desítkové soustavě, měl dohromady 5 nádob, odtud $2 + 3 = 5$.

Aby si lidé usnadnili počítání (sčítání), vytvářeli skupiny určitého počtu prvků (např. zbraní) a tyto skupiny sčítali. Vznikalo násobení přirozených čísel. Lidé dospěli k závěru, že např. $2 \cdot 3$ je v desítkové soustavě vždy r o v n o 6 a nemůže být rovno něčemu jinému. I v jiných soustavách (ve dvanáctkové, dvojkové atd.), kterých některé národy dříve užívaly, jsou součet, součin a rovnost zavedeny stejným způsobem, jen označení čísel je jiné. V dalších úvahách se přidržíme dnes užívaného nejjednoduššího zápisu čísel v desítkové soustavě.

Když byla do matematiky zavedena množina celých čísel, zahrnující čísla přirozená, záporná celá a nulu²⁾, byly dosavadní operace součtu a součinu i rovnost pro přirozená čísla ponechány a dodefinovány pro ostatní celá čísla.

Také v dalších číselných oborech racionálních čísel, reálných čísel a čísel komplexních, obsahujících jako součást přirozená čísla, definujeme součet, součin a rovnost v souhlase s původním zavedením součtu, součinu a rovnosti v množině přirozených čísel. Přesto způsob zavedení součtu, součinu a rovnosti, vytvořený před mnoha sty lety, není způsobem jediným. Je možné, aby platilo např. $2 + 3$ se rovná 1 a $2 \cdot 3$ je rovno 2? Ukážeme si, že to možné je, dokonce i když ponecháme původní definice součtu a součinu (v oboru celých čísel). Budeme však mezi celými čísly definovat novou rovnost, kterou budeme nazývat kongruencí modulu 4 a značit $a \equiv b$.

Definice. Budeme říkat, že celé číslo a je **kongruentní** s celým číslem b ($a \equiv b$) p o d l e m o d u l u 4 právě tehdy, je-li číslo $a - b$ dělitelné čtyřmi.

Z definice plyne, že např. $14 \equiv 6$, protože $14 - 6 = 8$ a 8 je dělitelné číslem 4, dále $5 \equiv 1$, $1 \equiv 5$, $-4 \equiv 0$, $3 \equiv 3$ a $7 \not\equiv 2$, $2 \not\equiv 3$ atd. V oboru celých čísel je podle normální rovnosti každé celé číslo rovno jen sobě samému, ale již v oboru čísel racionálních existuje nekonečně mnoho čísel sobě rovných. Platí třeba $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$, takže definice rovnosti jakožto kongruence odpovídá matematickému pojetí rovnosti. Nadto má kongruence mod. 4 i všechny vlastnosti, které obyčejně po-

²⁾ Záporná čísla znali Indové již v VI. stol. n. l. V Evropě užil těchto čísel poprvé francouzský matematik a filosof René Descartes (1596–1650), avšak teprve Eulerovy práce v XVIII. stol. přiměly matematiky k všeobecnému uznání záporných čísel. Ke zrovnoprávnění nuly s ostatními čísly došlo v XV. stol. Doporučuji čtenáři přečíst Engelsovu poznámku o nule v díle *Dialektika přírody*.

žadujeme na rovnosti. Platí totiž v ě t a :

- a) Pro každé celé číslo a platí $a \equiv a$ (reflexivnost).
- b) Platí-li pro celá čísla vztah $a \equiv b$, pak platí $b \equiv a$ (symetričnost).
- c) Jsou-li a, b, c , celá čísla a platí $a \equiv b, b \equiv c$, pak platí $a \equiv c$ (transitivnost).

D ů k a z. a) Protože číslo 0 je dělitelné číslem 4 a platí $0 = a - a$, je $a - a$ dělitelné číslem 4, to znamená $a \equiv a$. b) Nechť $a \equiv b$, tj. nechť $a - b$ je dělitelné číslem 4. Potom je i $-(a - b)$ dělitelné číslem 4, tedy $b - a$ je dělitelné čtyřmi a odtud $b \equiv a$. c) Rovnosti $a \equiv b$ a $b \equiv c$ značí, že čísla $a - b$ a $b - c$ jsou dělitelná čtyřmi. Proto i jejich součet $(a - b) + (b - c) = a - c$ je dělitelný číslem 4, to znamená $a \equiv c$.

Definujeme-li rovnost výše uvedenou definicí, platí při normálním zavedení součtu a součinu v množině celých čísel $2 + 3 \equiv 1$, neboť $5 \equiv 1$ a $2 \cdot 3 \equiv 2$, protože $6 \equiv 2$. Došli jsme tedy k výsledku, kterého jsme chtěli dosáhnout.

Na závěr můžeme přenechat čtenáři k samostatnému rozřešení tuto úlohu:

Které číslo musíme zvolit za modul, aby platilo a) $2 \cdot 5 \equiv 3$, b) $6 + 5 \equiv 0$?

Deskriptivní geometrie

In ž. L a d i s l a v D r s, ČVUT, Praha:

Skládání geometrických příbuzností

V našich úvahách vyjdeme ze dvou geometrických příbuzností a to z *posouvání* a z *kosoúhlé souměrnosti*.

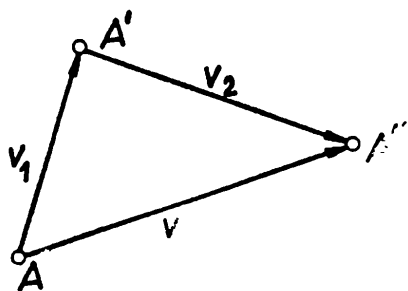
Kosoúhlá souměrnost je zobecněním osově souměrnosti. Kosoúhle souměrné body leží na rovnoběžkách s daným směrem s , který svírá s danou osou souměrnosti o libovolný úhel $\alpha \neq 0^\circ$. Vzdálenosti kosoúhle souměrných bodů od osy souměrnosti o jsou stejné. Pro $\alpha = 90^\circ$ dostáváme osovou souměrnost.

Skládáním dvou příbuzností rozumíme toto: Jestliže bodu A odpovídá (je sdružen) bod A' a tomuto bodu A' v jiné příbuznosti bod A'' ,

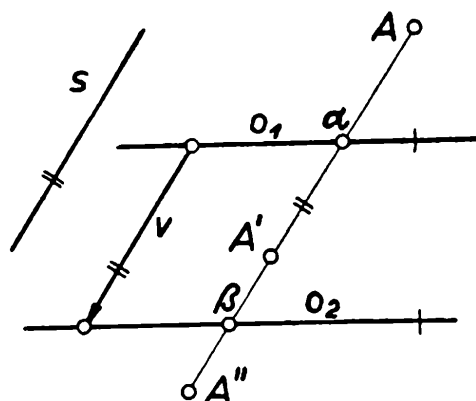
pak body A, A'' jsou sdruženy v nové příbuznosti, složené ze zmíněných dvou.

Skládání dvou posunutí

Je-li první posunutí určeno směrem posunutí, smyslem posunutí a velikostí posunutí (krátce vektorem posunutí v_1) a je-li druhé posunutí určeno vektorem v_2 , pak složená příbuznost je opět posunutí a je určeno vektorem $v = v_1 + v_2$ (obr. 1). Srovnej obdobu při skládání dvou sil ve fyzice.



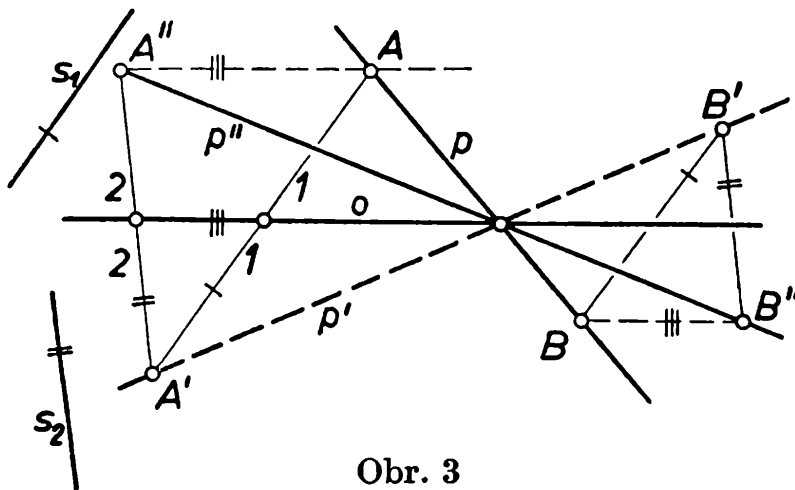
Obr. 1



Obr. 2

Skládání dvou souměrností

A. První souměrnost budiž určena směrem s a osou o_1 , druhá týmž směrem s , ale osou o_2 , rovnoběžnou s o_1 (obr. 2). Je-li v vektor od o_1 k o_2 ve směru souměrnosti s , pak složená příbuznost je posunutí určené vektorem $2v$.



Obr. 3

D ů k a z. Označíme-li $AA' \times o_1 = \alpha$, $A'A'' \times o_2 = \beta$, je $A\alpha = \alpha A'$, $A'\beta = \beta A''$ a dále je $AA'' = A\alpha + \alpha A' + A'\beta + \beta A'' = 2\alpha A' + 2A'\beta = 2\alpha\beta = 2v$.

B. K zajímavému výsledku dojdeme, složíme-li dvě souměrnosti, které mají společnou osu a různé směry. První souměrnost budiž dána osou o a směrem s_1 , druhá směrem s_2 (obr. 3).

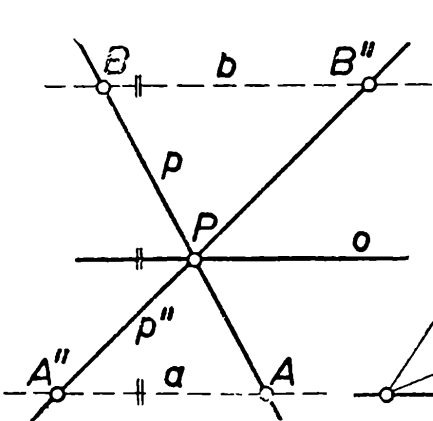
1. Spojnice sdružených bodů AA'' , BB'' , ... jsou rovnoběžné s osou o , neboť přímky o , $A'A''$ vytínají na přímkách $A'A$, $A'A''$ úměrné úseky.

Protože se souměrné přímky $p \equiv AB$, $p' \equiv A'B'$ i p' , $p'' \equiv A''B''$ protínají v jediném bodě na ose o , platí též, že

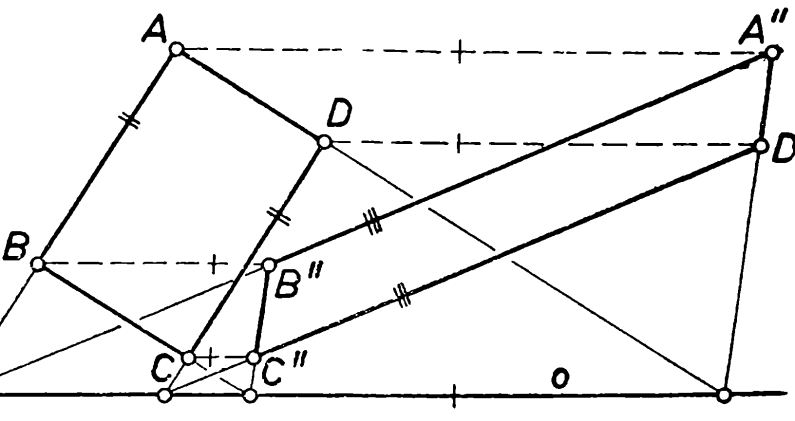
2. sdružené přímky p , p'' se protínají na ose o . Tyto dvě vlastnosti charakterizují novou příbuznost - elaci. Zabývejme se jí podrobněji.

Elace je určena osou o a párem sdružených bodů A , A'' , kde $AA'' \parallel o$ (obr. 4). Tvzení dokážeme tak, že k libovolně zvolenému bodu B sestrojíme sdružený B'' . Ten leží podle 1. vlastnosti elace na rovnoběžce b , vedené bodem B s osou o . Je-li $AB \equiv p$, $p \times o \equiv P$, leží podle 2. vlastnosti elace bod B'' na přímce $p'' \equiv A''P$, tedy $B'' \equiv b \times p''$.

Elace je určena osou o a párem sdružených přímek p , p'' , kde $p \times p'' \equiv P$ leží na ose o (obr. 4). Toto zadání převedeme snadno na předchozí, zvolíme-li libovolnou přímku $a \parallel o$ a označíme-li $p \times a \equiv A$, $p'' \times a \equiv A''$.



Obr. 4



Obr. 5

V elaci odpovídají rovnoběžkám opět rovnoběžky. Tuto vlastnost mají totiž obě souměrnosti, z nichž elace vznikla. Tak je například k obdélníku $ABCD$ sdružen v elaci rovnoběžník $A''B''C''D''$ (obr. 5).

Užití elace v kosoúhlém promítání

Nechť je kosoúhlé promítání určeno kvocientem q a úhlem w a nechť mezi těmito veličinami platí vztah

$$q = \frac{1}{\sin w}$$

Pak je kosoúhlý průmět U^k útvaru U , který leží v půdorysně $\pi \equiv xy$, s půdorysem U_1 ve vztahu elace. Tato elace je určena osou x a párem přímek y^k , y_1 , kde y^k je kosoúhlý průmět osy y a y_1 je její půdorys. Dokažte sami!

Cvičení.

1. Jaká příbuznost vznikne složením n posunutí?
2. Jaká příbuznost vzniká složením n souměrností o rovnoběžných osách a stejném směru souměrnosti? Rozlišujte n sudé a liché!
3. Jaká příbuznost vzniká složením n souměrností o stejné ose a různých směrech souměrnosti? Rozlišujte n sudé a n liché!
4. Užitím elace sestrojte kosoúhlý průmět pravidelného mnohoúhelníka (kružnice), leží-li v půdorysně a je-li $w = 150^\circ$, $q = 2$!

Fyzika

J i ř í C o c h l a r, ČVUT, Poděbrady:

Pásmová teorie pevné fáze

1. Úvod

Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře se základy pásmové teorie pevné fáze, tj. látek pevného skupenství; závěry vyplývající z této teorie jsou důležité pro pochopení základních dějů odehrávajících se v polovodičích. Pásmová teorie dává odpověď na otázku, proč určitá látka je vodič a jiná izolant nebo polovodič.

Než přikročíme k vlastnímu výkladu, seznámíme se s pojmy a vztahy, kterých se bude v dalším často používat.

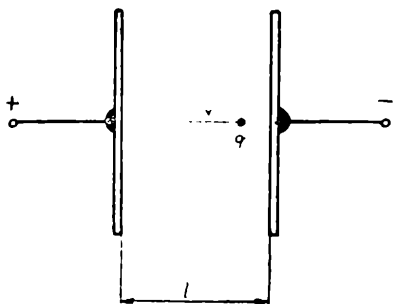
1.1. Základní poznatky o pevné fázi. U pevné fáze hmoty rozeznáváme dvojí strukturu - amorfní a krystalickou. **A m o r f n í l á t k a** (např. sklo) má základní částice, tj. atomy či molekuly, uspořádané v prostoru bez jakékoliv pravidelnosti. **K r y s t a l i c k á l á t k a** (např. NaCl) má všechny částice rozloženy tak, že tvoří v prostoru určité stále se opakující obrazce. Toto prostorové uspořádání atomů či molekul nazýváme **k r y s t a l o v á m ř í ž k a**.

Krystalové mřížky skutečných krystalů nesplňují vždy požadavek přísné pravidelnosti. Vyskytují se v nich tzv. poruchy, které mohou být různého druhu. Buď některý element mřížky vůbec chybí, nebo je vysunut ze své správné polohy. Pak hovoříme o tzv. mechanické poruše. Chemická porucha nastane v tom případě, jestliže krystalová mřížka sice zachovává svou pravidelnost, ale na některém místě je v ní

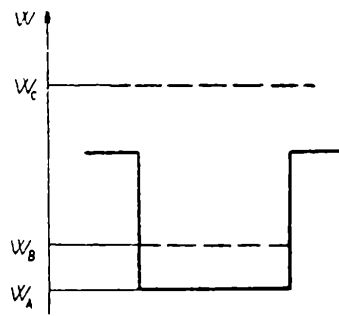
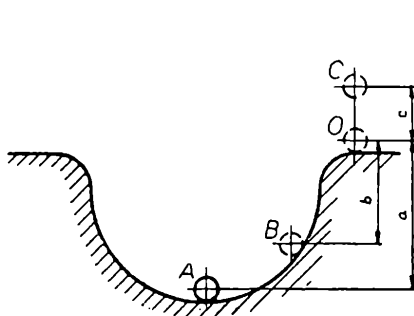
místo částice látky vytvářející krystal, částice nějaké látky chemicky odlišné. Tyto poruchy mají velký význam u polovodičů, jak ještě bude dále objasněno.

Je ještě třeba zmínit se o rozdílu mezi strukturou polykrystalickou a monokrystalickou. Polykrystalickou strukturou rozumíme případ, kdy je látka tvořena mnoha malými krystaly, jejichž osy jsou vzájemně různě pootočený. Monokrystalická struktura vzniká tehdy, je-li celý vzorek pevné látky tvořen jediným krystalem. Daný vzorek nazýváme monokrystal. Celý výklad pásmové teorie se zabývá pouze strukturou monokrystalickou.

1.2. *Definice a velikost elektronvoltu.* Pro sledování a popis dějů probíhajících v atomech a molekulách jsou běžné jednotky pro energii příliš velké. Zavádí se proto jednotka nová, tzv. elektronvolt (eV). Je definován jako energie, kterou získá nebo ztratí volný elektron průchodem mezi dvěma body v elektrickém poli, jejichž potenciální rozdíl je roven jednomu voltu.



Obr. 1. Odvození elektronvoltu.



b)

Obr. 2. Elektron v krystalu.

Provedeme odvození velikosti jednoho elektronvoltu v soustavě jednotek MKSA (obr. 1).

Představme si, že mezi dvěma rovnoběžnými deskami, na kterých je napětí U , se pohybuje elektron, jehož náboj je roven q , hmota tohoto elektronu je m . Působením elektrického pole získá elektron rychlost v . Pro sílu elektrického pole působící na elektron platí vztah

$$F = m \cdot a = q \cdot E, \quad (1.1)$$

kde E je intenzita elektrického pole, a zrychlení pohybu elektronu.

Protože pole mezi deskami je homogenní, můžeme psát

$$E = \frac{U}{l}. \quad (1.2)$$

Ze vztahů (1.1) a (1.2) plyne

$$a = \frac{qU}{ml} \quad (1.3)$$

Pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu platí

$$v = \sqrt{2al} \quad (1.4)$$

a pro kinetickou energii máme vztah

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.5)$$

Dosazením (1.3) a (1.4) do (1.5) dostaneme výsledný vztah pro kinetickou energii elektronu

$$W_k = q U \quad (1.6)$$

Dosazením hodnot z definice elektronvoltage do vztahu (1.6) ($q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $U = 1 \text{ V}$) určíme velikost 1 eV:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}.$$

2. Energie elektronů

Pro pochopení pásmové teorie je nutná znalost energetického uspořádání elektronů v osamocených atomech i v krystalech při různých teplotách. Proto se v této části budeme zabývat energií elektronů.

2.1. *Energie elektronů v krystalu.* V odstavci 1.1 jsme se stručně seznámili se strukturou krystalů. Víme, že se skládají z atomů, které jsou v prostoru určitým způsobem uspořádány. Jestliže nebudeme uvažovat tepelný pohyb atomů, můžeme si představit, že krystal se skládá z kladně nabitých nehybných atomových jader, v jejichž elektrickém poli se pohybují záporně nabitě elektrony. Z chemie víme, že atomy, tvořící krystalovou mřížku, jsou k sobě vázány pomocí tzv. *v a l e n ě n í c h e l e k t r o n ů*. Podle typu krystalu jsou buď všechny valenční elektrony pevně vázány s částicemi, tj. molekulami, atomy nebo ionty, tvořícími krystalovou mřížku (např. krystal NaCl), nebo jsou vázány poměrně volně (např. krystaly kovů a jejich slitin). Tyto volně vázané elektrony se mohou pohybovat po krystalu; nazýváme je *e l e k t r o n y v o l n é*. V á z a n é e l e k t r o n y jsou pak takové elektrony, které se nemohou v krystalu volně pohybovat a setrvávají stále v blízkosti svého atomového jádra. Přítomnost volných elektronů má rozhodující vliv pro vedení elektrického proudu. Látky, které ve svých krystalech nemají volné elektrony, nemohou být dobrými vodiči elektrického proudu.

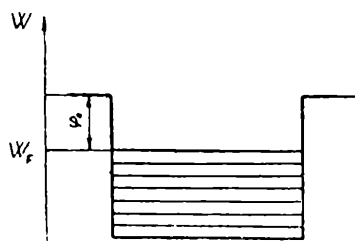
Z hlediska elektronů lze krystal považovat za část prostředí, vůči kterému mají tyto elektrony určitou potenciální energii (poněvadž k přemístění elektronu do větší vzdálenosti od jádra je třeba vynaložit určitou práci) a na které jsou tyto elektrony vázány přitažlivou silou. Elektron v krystalu můžeme srovnat např. s kuličkou v důlku, jak je schematicky naznačeno na obr. 2. Z obrázku 2a je zřejmé, že k tomu, aby se kulička z bodu A dostala do bodu O, tj. mimo důlek, je zapotře-

bí dodat jí energii, která je úměrná výškovému rozdílu a jak plyne ze známého vztahu

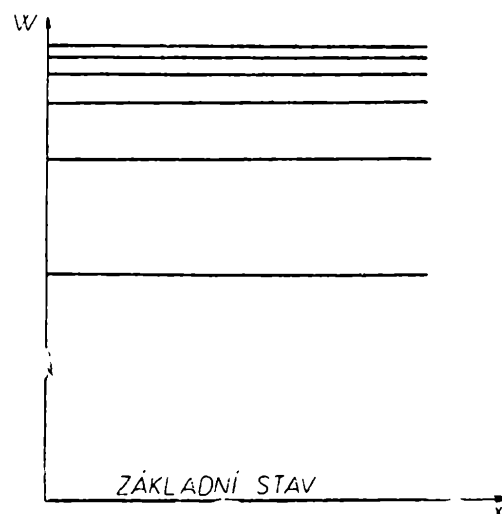
$$W_p = m \cdot g \cdot h ,$$

kde je W_p potenciální energie, m hmota kuličky, g tíhové zrychlení ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$) a h výška.

Jestliže však je kulička v bodě B (např. vlivem vlastního kmitavého pohybu), pak k přechodu do bodu O je zapotřebí energie, která je úměrná výškovému rozdílu b , při čemž tato energie je zřejmě menší, než energie dodaná v kuličce předchozím případě. Aby se kulička dostala až do bodu C , je nutné dodat ještě energii odpovídající rozdílu c . Obdobné úvahy budou platit pro elektron v krystalu.



Obr. 3. Fermiho hladina.



Obr. 4. Energetické spektrum atomu.

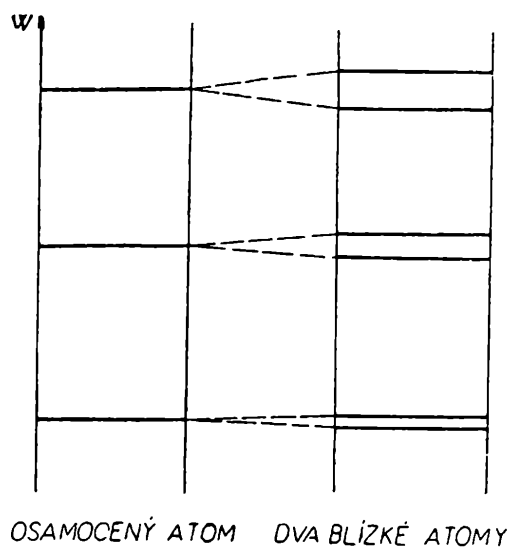
V krystalu se nachází mnoho elektronů, které mají různou velikost energie. Ve fyzice pevné fáze říkáme o elektronech, které mají stejnou energii, že jsou na jedné *e n e r g e t i c k é h l a d i n ě*, která je určena touto energií. Tyto energetické hladiny si můžeme znázornit graficky, což vidíme na obr. 2b. Aby mohl elektron, který je uvnitř krystalu, tento krystal opustit, je nutné dodat mu energii. Pro elektron z energetické hladiny W_B je tato energie rovna $W_C - W_B$, kde W_C je energetická hladina, kterou zaujme elektron po opuštění krystalu. Jelikož se jedná o dodanou energii, která, jak známo, je záporná, je i energie W_B záporná. Při teplotě absolutní nuly ($T = 0 \text{ °K}$), zaujmou elektrony v krystalu všechny nejnižší energetické hladiny až do jisté mezní hladiny, které přísluší energii W_F . Tuto mezní hladinu nazýváme *h l a d i n o u F e r m i h o*, někdy též *F e r m i h o m e z í* (obr. 3). Pro energii potřebnou k tomu, aby elektron mohl opustit krystal, pak platí vztah

$$W > W_F + \varphi_0 ,$$

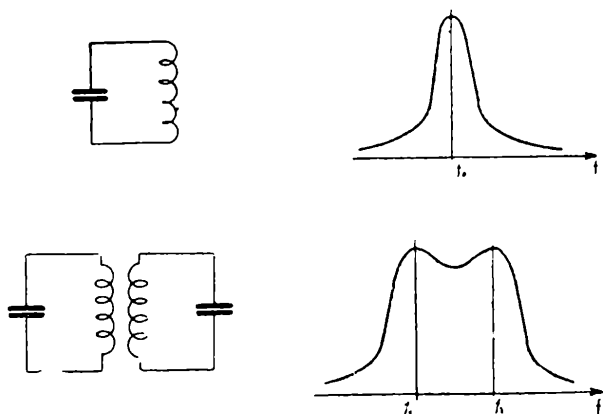
kde φ_0 je tzv. *v ý s t u p n í p r á c e*, jejíž velikost je pro různé látky různá (např. pro wolfram je $\varphi_0 = 4,5 \text{ eV}$, pro měď je $\varphi_0 = 4,0 \text{ eV}$, pro

cesium platí $\varphi_0 = 1,81 \text{ eV}$). Energie potřebná k opuštění krystalu může být elektronům dodána např. tepelnými pohyby krystalové mřížky. Pak říkáme, že došlo k *termické emisi elektronů*, na jejímž základě pracuje většina elektronek.

2.2. Energetická spektra atomů. V tomto odstavci se seznámíme s energií elektronů v izolovaném atomu. Ze závěrů kvantové mechaniky plyne, že elektrony se mohou pohybovat kolem jádra atomu jen po určitých drahách s určitou dovolenou energií. Tato energie je součtem kinetické a potenciální energie daného elektronu vzhledem k jádru atomu. Pro atom vodíku máme tyto dovolené energie, neboli energetické hladiny, znázorněny na obr. 4. K tomu, aby elektron přešel z jedné hladiny na druhou, je nutné, aby mu byla dodána energie rovná právě



Obr. 5. Energetické spektrum dvou blízkých atomů.



Obr. 6. Resonanční obvod.

rozdílu energií uvažovaných hladin. Při teplotě absolutní nuly ($T = 0 \text{ °K}$) zaujme elektron dráhu s nejmenší možnou energií - atom je v *základním stavu*. Žádnou jinou energii než dovolenou nemůže elektron mít; přechod z jedné energetické hladiny na druhou se děje skokem. Uvažujme nyní jiný atom prvku s větším počtem elektronů než má vodík. Diagram energetických hladin, čili *energetické spektrum* tohoto atomu, bude obdobné jako na obr. 4.

2.3. Energetická spektra monokrystalů (viz odst. 1.1). Mysleme si, že máme dva samostatné atomy vzdálené od sebe tak, že jejich vzájemné působení můžeme zanedbat. Každý z těchto dvou atomů má své energetické spektrum obdobné obr. 4. Budeme-li tyto atomy přibližovat až na vzdálenost řádově rovnou vzdálenosti atomů v krystalu (asi 10^{-11} m), dojde k zajímavému jevu. Každá energetická hladina se vlivem působení druhého atomu rozštěpí na dvě velmi blízké hladiny (obr. 5). Tento jev můžeme srovnat s rezonanční křivkou dvou rezonančních obvodů samostatných a s rezonanční křivkou pásmového filtru, který

vznikne, jestliže k sobě přiblížíme dva rezonanční obvody tak blízko, že magnetické pole cívky jednoho obvodu začne ovlivňovat magnetické pole cívky druhého obvodu (obr. 6). Vidíme, že rezonanční křivka s jedním vrcholem se přetvoří v křivku se dvěma vrcholy.

Jestliže vezmeme N atomů a uspořádáme je do krystalové mřížky určitého krystalu, rozštěpí se jejich původní energetické hladiny působením sil okolních atomů na celá pásma hladin vzájemně velmi blízkých. Tato pásma nazýváme *energetickými pásmy krystalu* a každé obsahuje N hladin. Vzdálenosti těchto hladin jsou asi 10^{-22} eV. Čím více atomů je v krystalu, tím bližší jsou jednotlivé hladiny. Mezi energetickými pásmy jsou tzv. *pásma zakázaná*. Elektrony v krystalu nemohou mít energie, které odpovídají zakázanému pásmu.

(Dokončení)

V á c l a v B u r j a n, Praha:

„Rodokmen“ prvků

Čtenáři jsou jistě známy hypotézy o utváření vesmíru a o jeho vývoji. Představí si při tom obrázek jakési spirální mlhoviny. Možná, že již viděl Hertzsprung-Russellův diagram, který ukazuje rozdělení stálic podle spektra, které vysílají, a tím i podle povrchových teplot a ukazuje dále vztah těchto spekter a teplot ke skutečné velikosti. Vlivem pokroku, kterého bylo dosaženo v posledních letech v jaderné fyzice, může být řečeno mnoho o tom, jak se ve stálicích během jejich vývoje měnily jednotlivé prvky na jiné. K tomuto poznání přispěly také údaje o tom, v jakém množství je zastoupen který prvek na určitých stálicích. Víme již mnoho o tom, jak ve vesmíru jeden prvek vznikl z druhého.

V tomto článku mluvíme zatím o prvcích, ale v dalších bude třeba spíše uvádět jednotlivé izotopy prvků. Na představě, jak jednotlivé prvky vznikaly, to však nic nezmění.

Z prvků je dodnes ve stálicích nejhojnější vodík (izotop H^1). Pokládáme ho za základní prvek, z něhož vznikly ostatní prvky. Jeho atom obsahuje jeden proton a jeden elektron.

Někde ve vesmíru se nakupil vodík. Jestliže hmota tohoto nakupeného vodíku byla asi tak veliká jako hmota Slunce, stlačil se vodík účinkem gravitace tak, že uprostřed měl hustotu asi 10^4 g/cm³. Tím se k sobě tak přiblíží jádra vodíku, protony, že jsou asi 10krát blíže než v obyčejné molekule vodíku. Aby se mohly dva protony sloučit a vytvořit deuteron, to však nestačí, poněvadž oba protony mají kladný

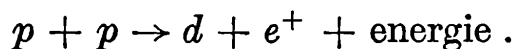
náboj a jsou v nepatrné vzdálenosti asi $6 \cdot 10^{-10}$ cm, takže odpudivá síla je obrovská. Avšak atomy a s nimi jádra nejsou v klidu, ustavičně do sebe narážejí. Některé srážky jsou slabé, jiné prudší a čím prudší, tím řidší. Přece však se stane, že jednou za velmi dlouhou dobu nějaký proton letí tak prudce, že přemůže odpudivé síly, srazí se s jiným protonem a vznikne deuteron. Vždyť tím, že je vodík stlačený, překonal proton 9/10 obtížné cesty k druhému protonu, jak byla shora zmínka. Jak často se taková srážka se sloučením za různých okolností může stát, ukazuje tabulka I.

Tabulka I.

Hustota stlačeného vodíku	Počet jader deuteria, která vzniknou v 1 g vodíku za 1 s.	Se vznikem jednoho jádra deuteria vznikne energie	Celkem se vznikem deuteria vznikne energie
$5 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^3$	$2,5 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^{-12} \text{ J}$	10^{-4} J
$0,7 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^3$	$6,2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^{-12} \text{ J}$	$2,5 \cdot 10^{-8} \text{ J}$
1 g vodíku obsahuje asi $6 \cdot 10^{23}$ atomů;			
při hustotě $5 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^3$ vydrží 1 g vodíku $2,4 \cdot 10^{16} \text{ s.}$, tj. $8 \cdot 10^9 \text{ let}$ při hustotě $0,7 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^3$ vydrží 1 g vodíku 10^{20} s. , tj. $3 \cdot 10^{11} \text{ let}$			

Uvedenou dobu by vydržel vodík při stejně rychlém průběhu slučování po celou dobu, což se jistě neděje. Ale pro představu takový obraz postačí.

Sloučením dvou protonů vznikne deuteron, jádro těžkého vodíku. Jádra však nejsou tvořena pouze samými protony. Proto při slučování se jeden z protonů deuteronu přemění na neutron za vzniku kladného elektronu či pozitronu. Zapišeme tento děj asi takto:

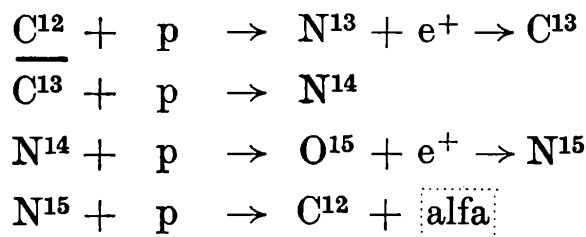


Vzniklá energie se projeví prudkým pohybem letících deuteronů. Na překonávání odpudivých sil mezi kladnými jádry pomáhá nyní vedle velkého tlaku již také veliká rychlost. Proto poměrně snáze vznikne při srážce deuteronu s dalším protonem jádro He^3 a ještě s dalším protonem He^4 (jindy zvané také částicí alfa).

Slučování jader s dalšími protony se děje již hůře, poněvadž při větším počtu protonů v jádře působí jejich kladné náboje na blížící se další protony také většími odpudivými silami. Tak He^4 má dva protony a dvojnásobný náboj jako proton, Li se třemi protony má trojnásobný náboj, Be má čtyřnásobný náboj atd. Nesmíme však zapomínat, že vzniká též energie, takže srážky mezi jednotlivými částicemi jsou stále prudší, jinak řečeno, stoupá teplota.

V dalším průběhu nastávají trojí děje: Jednak jádra přibírají další a další protony. Z Be^8 vznikne B^9 , z B^9 vznikne B^{10} (jeden proton se současně změnil na neutron), z B^{10} vznikne C^{11} atd.; stále vznikají těžší a těžší jádra, jednak se slučují s jádrem částice alfa: z Be^8 vznikne C^{12} , z C^{12} a další částice alfa O^{16} , z O^{16} Ne^{20} a z Ne^{20} Mg^{24} .

Konečně jsou známy též jakési cyklické děje, jako je např. děj, který probíhá, když už je dostatek jader C^{12} :



proton + proton,	1,008 13	2 + 1,008 13	2,016 26
dává		2	
deuteron + positron,	2,014 71 + 0,000 55		= 2,015 26
$\text{C}^{12} + \text{He}^4$	12,003 86 + 4,003 88		= 16,007 74
dává		16	
O^{16}	16,000 00		= 16,000 00
$\text{V}^{51} + \text{proton},$	50,957 7 + 1,008 13		= 51,965 83
dává			
Cr 52,	51,955 90		

Obr. 1. Hmoty částic před sloučením (horní řádek) a po sloučení (dolní řádek) v šestnáctinách hmoty O^{16} . 1 mm odpovídá 1/1000 uvedené jednotky hmoty. V první dvojici by čáry dosahovaly 2000 mm doleva od značky 2, v druhé 16 000 mm a v třetí 52 000 mm (52 m). Ztráta 1/1000 jednotky hmoty (1 mm) značí zisk energie 0,9 MeV.

Vzniklo tedy ze čtyř protonů jádro He^4 , aniž se přitom změnil počet jader C^{12} . Jádra C^{12} působí pouze jako jakési katalyzátory.

Všimneme si hmot jader před sloučením a hmot jader, která vznikla po sloučení, jak ukazuje obr. 1.

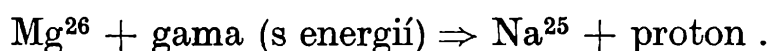
Je vidět, že hmota nebo součet hmot po sloučení je menší než součet hmot před sloučením. To znamená, že určité množství hmoty se přeměnilo na energii. Pro takovou přeměnu hmoty na energii platí vztah:

$$W = m \cdot c^2$$

Jestliže měříme energii W v MeV a jestli jednotka hmoty m je $1/16$ hmoty O^{16} (c je rychlost světla), pak tato jednotka vydá energii 930 MeV.

Z obr. 1 je vidět, že na jednotku hmoty je při tvorbě těžších jader úbytek hmoty, a tedy i vyvinutá energie, menší než při tvorbě lehčích jader.

Kinetická energie, kterou mají po sloučení letící jádra, není všechna energie, která se uvolní při jejich vzniku. Část energie se vyvine ve formě elektromagnetického záření gama. Stává se proto na pozdějším vývojovém stupni, když je již dostatek těžších jader a tím také dost záření gama, že nastává také pochod obrácený než je slučování. Působením záření gama se nějaké jiné jádro rozkmitá a uvolní částici alfa nebo proton, takže nastává vlastně rozklad těžších jader na lehčí. Součet hmot lehčích součástí je větší než hmota těžšího jádra, energie se spotřebovala. Taková reakce je např.:



$$\begin{array}{rcll}
 \hline
 41,97 & K^{41} + \text{neutron}, & 40,9747 & 1,00896 & = 41,98366 \\
 \hline
 41,97 & \text{dává} & & & \\
 & K^{42}, & 41,9749; & & = 41,9749 \\
 \hline
 41,97 & \text{to se rozpadá:} & & & \\
 \hline
 & Ca^{42} + \text{elektron}, & 41,9711 & 0,00055 & = 41,97165
 \end{array}$$

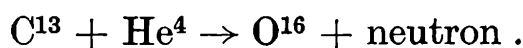
Obr. 2. Vznik těžších jader slučováním s neutrony, po němž následuje po delší nebo kratší době vypuštění elektronu (rozpad beta). 1 mm odpovídá energii 0,09 MeV = 90 000 eV.

Dalšímu slučování těžších jader na jádra ještě těžší překážejí současně tři okolnosti:

1. Stále větší a větší odpudivé síly.
2. Probíhá vedle slučování mezi jádry a protonem, nebo částicí alfa též rozklad jader, z jader těžších vznikají jádra lehčí.
3. Při vzniku těžších jader se uvolňuje menší energie.

To má za následek, že těžší jádra než Fe^{56} nebo Co^{58} by vůbec nevznikala a proces tvorby dalších jader by byl ukončen, kdyby neexistoval jiný mechanismus pro vznik ještě těžších jader.

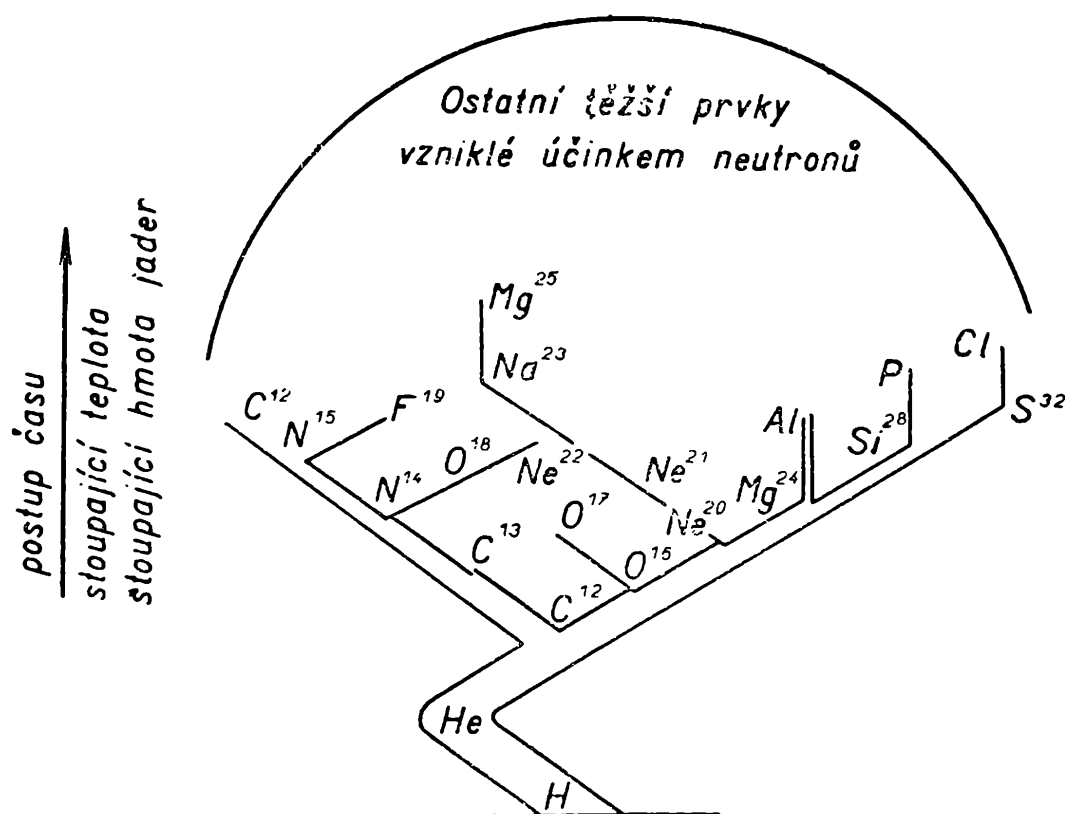
Mezitím však při četných reakcích vznikl ve hvězdách dostatek volných neutronů, např. v reakci:



Protony se již nemohly přiblížit dostatečně blízko k jádru, např. Co^{58} , avšak neutrony se přiblížit mohou. Poněvadž nemají náboj, ne-

nastává odpuzování. Po sloučení neutronu s jádrem se ještě nové jádro přeměňuje tím, že vypouští záporný elektron. Celou přeměnu ukazuje obr. 2. Slučováním neutronů s jádry vzniká opět energie.

Avšak i tento mechanismus přestává být účinný a nejtěžší jádra, která vznikají ve hvězdách, skládají se asi z 250 částic, tj. protonů a neutronů dohromady, jako je třeba Cf^{254} . Avšak již jádra, která mají přes 210 částic, se samovolně rozkládají, jako třeba Ra^{228} , tj. vypouštějí



Obr. 3. „Rodokmen“ prvků. Směr $\backslash$ značí slučování jader s protony; směr $/$ značí slučování jader s He^4 ; směr $|$ značí slučování jader s neutrony, po kterém následuje rozpad beta. Nejsou značeny prvky Li, Be, B. Jejich původ je asi jiný.

částici alfa. Ještě těžší jádra, jako třeba U^{235} se účinkem neutronů štěpí, tj. rozdělí se na dvě nestejně části a několik neutronů.

Celkový obrázek o vzniku prvků podává obr. 3.

Literatura

Burbidge E. M., Burbidge G. R. a j.: Synthesis of the elements in stars. Rev. mod. Phys. 29, str. 547—650 (1957).

Zeldovič Ja. B.: O jaderných reakcích v sverchplotnom chłodnom vodorode. Ž. eksp. teor. Fiz. 33, č. 4, str. 991—993 (1957).

L a d i s l a v S e h n a l, kandidát fyz.-mat. věd, Ondřejov:

Umělé družice určují tvar Země

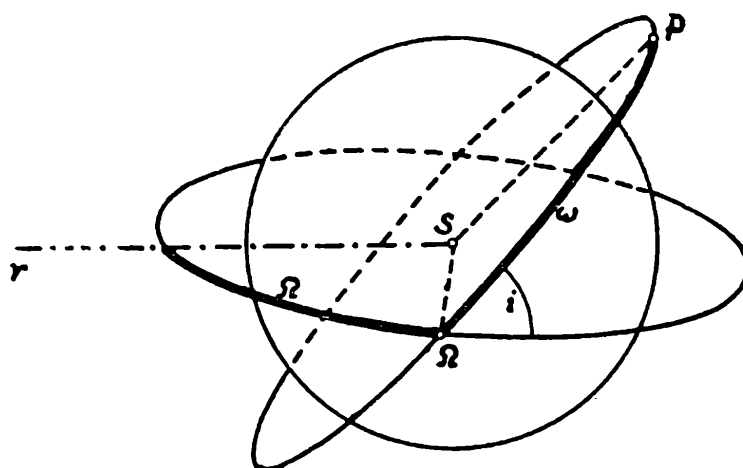
Vědecké výzkumy, prováděné během Mezinárodního geofyzikálního roku vyvrcholily vypuštěním umělých družic, které znamenaly nejen vrchol technického pokroku a dokonalosti, ale též velký přínos k vědeckým pracem, prováděným v rámci MGR. Přístroje, umístěné na družicích, měřily ty nejrůznější geofyzikální údaje: magnetické pole Země, složení vysokých vrstev zemské atmosféry, hustotu meteorických tělísek, různé druhy záření aj. Avšak některé podstatné výzkumy o zemském tělese a jeho atmosféře je možno provádět i bez použití zvláštních přístrojů; stačí k tomu přesné pozorování pohybů umělých družic. A tak je tomu například při zjišťování přesného tvaru Země. Dráha družice nezůstává v prostoru neměnná, různě se stáčí a také její tvar se mění. Tyto změny jsou kromě některých jiných vlivů, jako je např. odpor zemské atmosféry, způsobeny odchylkami zemského tělesa od pravidelného kulového tvaru.

Abychom mohli lépe pochopit, jakým změnám podléhá dráha umělého satelitu, musíme si především objasnit, jak určujeme základní údaje o poloze a tvaru dráhy družice. Veličiny, které nám tyto údaje popisují, jsou v astronomii nazývány *e l e m e n t y*; jejich význam je nejlépe patrný z připojených obrázků. Kolem Země, kterou si nyní představíme jako kulovou, obíhá družice po eliptické dráze (obr. 1), jejíž jedno ohniško leží ve středu S Země. Bod, v němž protíná vzestupná větev dráhy rovinu zemského rovníku, se nazývá *v ý s t u p n ý u z e l* Ω . Jeho poloha se měří od jistého pevného bodu, který se nazývá *j a r n í b o d* (je to průsečík ekliptiky s rovníkem, v němž je Slunce 21. března). Tento směr k jarnímu bodu není ovšem pevný vůči zemskému povrchu; je pevný v prostoru a během jedné otočky Země opíše kolem ní 360° .

Úhel, který svírají ze středu Země (S) směry k jarnímu bodu a k výstupnému uzlu se nazývá *d ě l k a v ý s t u p n é h o u z l u* a značí se Ω . Od výstupného uzlu můžeme přejít ve směru pohybu družice k bodu P , v němž je dráha ke středu Země nejbližší; je to tzv. *p e r i g e u m* (přízemí). Úhlová vzdálenost od uzlu k perigeu je dalším zá-

kladním elementem - je to vzdálenost perigea - a značí se ω . Konečně je zde ihned patrný sklon dráhy družice k rovině rovníku, který označujeme písmenem i .

Těmito třemi elementy Ω , ω a i máme tedy úplně určenu polohu dráhy vůči Zemi; musíme však ještě nějak popsat tvar dráhy v její rovině. Umělé družice obíhají kolem Země v elipsách a tak se tvar dráhy určí již celkem známými prvky (obr. 2), jimiž je velká poloosa a a excentricita (výstřednost) e . Připomínám jen, že tu jde o tzv. numerickou výstřednost, která je v obr. 1 dána poměrem vzdáleností $OS : OP$. O je střed elipsy, S její ohnisko (splývající zde se středem Země) a P je perigeum.



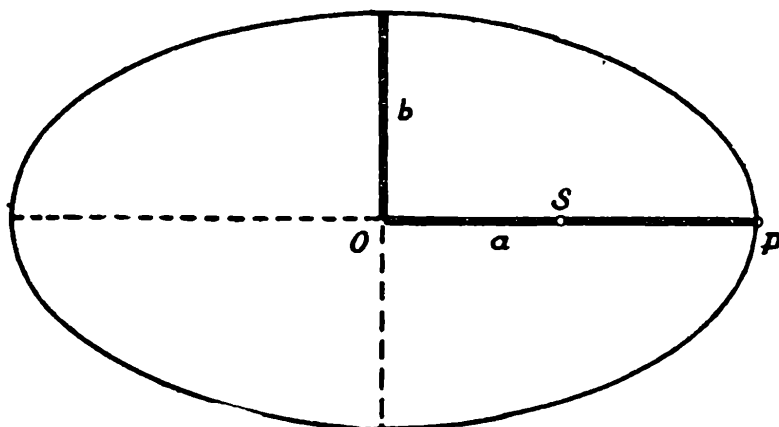
Obr. 1

Jestliže bychom konečně chtěli znát přesnou polohu satelitu ve dráze, pak by bylo nutno přidat ještě další element, určující čas průchodu satelitu určitým bodem dráhy. Nejčastěji se používá průchodu tělesa perigeem, který se značí T .

Elementy Ω , ω , i , a a e nám tedy úplně popisují polohu a tvar dráhy umělé družice. Kdyby Země byla přesně kulová, podléhaly by tyto elementy pouze změnám, plynoucím jednak z odporu, který klade letící družici prostředí a jednak z vlivu ostatních nebeských těles (Měsíc, Slunce). Zatím však Země vykazuje značné odchylky od kulového tvaru a každá taková odchylka znamená rovněž změnu v gravitačním poli zemského tělesa, kterým je pohyb umělé družice určen. Tyto nepravidelnosti se tedy projeví změnami v elementech dráhy satelitu; v astronomii se takové změny nazývají poruchy. Poruchy elementů je možno zjistit sledováním družic, ať už pozorováním pouhým okem (visuálně), fotograficky nebo radiově. Z jednotlivých pozorovaných a změřených poloh umělé družice se dá vypočítat její dráha a při soustavných pozorováních tak objevíme i změny této dráhy, tj. poruchy dráhových elementů. Poněvadž tyto poruchy jsou způsobeny v podstatě nepravidelností tvaru zemského tělesa, je zřejmé, že z velikosti pozorovaných poruch se dají zpětně tyto nepravidelnosti odvodit. Proto je tedy velmi důležité soustavné pozorování satelitů, neboť může zde

přinést výsledky, které svou přesností předčí hodnoty, získané pomocí jiných metod.

Základní a největší odchylkou Země od kulového tvaru je její zploštění na pólech, které bylo zjištěno již dříve např. z měření zemské tíže na různých místech zemského povrchu. Vezmeme-li v úvahu toto zploštění, má tedy Země tvar rotačního elipsoidu, jaký bychom dostali rotací elipsy kolem její vedlejší osy. Osa rotace by zde splývala s osou zemskou. Toto zploštění působí v drahách družic největší změny, které se dají z pozorování snadno určit. Dráha družice se vlivem tohoto zploštění stáčí tak, že sklon dráhy k rovníku zůstává stálý, ale délka uzlu se mění, zmenšuje se. Velikost tohoto zpětného pohybu uzlu je



Obr. 2

závislá ovšem na vlastních elementech dráhy družice. Čím je hlavní poloosa dráhy větší, tedy čím je družice dále od Země, tím je stáčení uzlu menší, a je též menší pro dráhy s menší excentricitou. Stáčení uzlu závisí též podstatně na sklonu: Pro dráhy s malým sklonem je největší, se zvětšujícím se sklonem klesá a pro dráhy se sklonem $i = 90^\circ$ (tj. dráhy jdoucí přes póly) je stáčení uzlu nulové.

Vlivem zploštění Země se posouvá též perigeum dráhy; zákonitosti jsou obdobné jako u stáčení uzlu, až na závislost na sklonu dráhy. Pro $i = 0^\circ$ (rovníková dráha) je posun největší, s přibývajícím sklonem klesá a je nulový již při sklonu $i = 63^\circ 40'$. Potom se posouvání perigea, které dříve šlo ve směru pohybu družice, mění v opačné a mírně vzrůstá.

Abychom si učinili představu o velikosti těchto změn, uvedu jejich číselné hodnoty za jeden den pro dráhy některých známých satelitů:

	Změna na 1 den	Změna na 1 den
Sputnik II	— $2,9^\circ$	— $0,5^\circ$
Sputnik III	— $2,5^\circ$	— $0,3^\circ$
Vanguard I	— $3,0^\circ$	— $4,4^\circ$
Explorer I	— $4,3^\circ$	— $6,4^\circ$

Z těchto pozorovaných změn, především ze změny uzlu se dá zpětně matematicky odvodit zemské zploštění, které tyto změny působí. Je zajímavé, že i pozorování pouhým okem dají zde po matematickém zpracování velmi přesné hodnoty. U nás určil např. prof. E. Buchar zpracováním československých vizuálních pozorování druhé sovětské umělé družice z pohybu jejího uzlu hodnotu zploštění na $1 : 297,4$. Tento podíl vyjadřuje poměr rozdílu velké a malé poloosy zemského elipsoidu k jeho velké poloose. Označíme-li tedy hlavní poloosu elipsoidu a a vedlejší b , udává se zemské zploštění podílem $(a - b) : a$. Zpracováním jiných pozorování (hlavně satelitu Vanguard I) byly získány hodnoty $1/298,2$ až $1/298,3$. Pozorování umělých družic umožnilo tedy upřesnit naše znalosti o zploštění Země a dnes se přijímá za správnou hodnota zploštění $1/298,3$.

Popsané poruchy délky uzlu a perigea jsou základními změnami elementů drah družic. Tyto poruchy neustále s časem rovnoměrně narůstají. Takovým poruchám říkáme v astronomii *poruchy věkovité*, neboli *sekulární*. Kromě nich působí zemské zploštění ještě další poruchy, které se pravidelně mění a periodicky nabývají kladné a záporné hodnoty. To jsou tzv. *poruchy periodické*. Proti poruchám sekulárním jsou však spíše podružného rázu a v pohybu družic nejsou již tak patrné.

Zcela nedávno byly objeveny periodické poruchy excentricity a sklonu, které se pravidelně opakují v delším časovém intervalu. Jak jsme již řekli, vzdálenost perigea dráhy družice se vlivem zploštění Země mění, takže za určitý počet dní oběhne perigeum kolem Země 360° . A v této periodě se mění též excentricita a sklon, přičemž excentricita je maximální tehdy, je-li perigeum nad severní polokoulí. Za příčinu těchto periodických poruch byla označena nestejnost hmot na severní a jižní polokouli; na jižní polokouli je zemské hmoty více, než na polokouli severní. Tato nesymetričnost Země byla již dříve předpověděna také z tíhových měření na povrchu Země a nyní pomocí umělých družic byla přesně vypočtena. Zemské těleso má tvar jakési hrušky, jejíž širší část je tvořena jižní polokoulí. Ačkoliv rozdíl hmot je na změnách elementů drah družic dobře patrný, rozdíly ve výškách takto zidealizovaného zemského povrchu činí jen asi 15 m.

Tato zploštělá a hruškovitá Země je však i přesto dosti ideálním tvarem naší planety. Země je ve skutečnosti ještě složitější, je např. zploštělá ještě na rovníku, tj. má tvar elipsy i při pohledu ve směru zemské osy. Určit velikost tohoto zploštění podle pohybů umělých družic se zatím ještě nepodařilo. Bylo však dokázáno, že všechny poruchy, způsobené tímto zploštěním jsou periodického rázu a převažuje zde perioda $1/2$ dne, související s rotací Země. Jejich amplitudy jsou však velmi malé, takže se je zatím nepodařilo v poruchách elementů drah umělých družic zjistit. Je však jisté, že další zlepšení pozorovacích

metod povede zcela určitě i k přesnému určení této vlastnosti zemského tělesa.

Přesné zjištění tvaru Země je jistě jedním z nejdůležitějších problémů geofyziky a astronomie, zvláště v době raket a družic, v jejichž pohybech se bezprostředně odrážejí vlastnosti zemského tělesa. A naopak, z přesného pozorování těchto umělých nebeských těles můžeme tvar Země spolehlivě určit a dojít zde k takové přesnosti, jaká by bez umělých družic nebyla možná.

Matematické zábavy

Inž. Emanuel Klier, Plzeň:

Korděmského neodbytný rozdíl

V Korděmského knize *Matematické prostovky* je na str. 270 uvedena úloha:

Neodbytný rozdíl. Napište libovolné čtyřmístné číslo, které nemá všechny číslice stejné. Z číslic tohoto čísla sestavte dvě další čísla, a to největší možné číslo a nejmenší možné číslo. Vypočtete jejich rozdíl a s tímto rozdílem proveďte totéž co s původním číslem. Budete-li to několikrát opakovat, dojdete vždy k rozdílu 6 174 a budete-li pokračovat dále, bude vám stále znovu a znovu vycházet tento rozdíl.

Vysvětlení tohoto jevu je obsahem našeho článku.

Úvodní poznámky. Pro stručné vyjadřování zavedme některé pojmy.

Volme n -místné číslo N , které nazveme *přirozené*. Z jeho číslic vytvoříme největší číslo tím, že jeho číslice sestavíme sestupně podle jejich hodnot. Toto číslo nazveme *spořádané* a označme je $\vec{N}$. K němu příslušné nejmenší číslo psané v opačném pořádku nazveme *opačné* a označme je $\overleftarrow{N}$. Obě čísla od sebe odečtena dávají první *rozdílové číslo* N_1 . Ovšem to je zase přirozené, k němu přísluší spořádané, opačné a další rozdílové.

Spořádané n -místné číslo budiž

$$\vec{N} = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10 a_1 + a_0,$$

opačné

$$\overleftarrow{N} = 10^{n-1} a_0 + 10^{n-2} a_1 + \dots + 10 a_{n-2} + a_{n-1}$$

a první rozdíllové

$$\begin{aligned} N_1 = (10^{n-1} - 1) (a_{n-1} - a_0) + (10^{n-2} - 10) (a_{n-2} - a_1) + \dots + \\ + (10^{\frac{n-1}{2}} - 10^{\frac{n-3}{2}}) (a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-3}{2}}) \quad \text{pro } n \text{ liché,} \\ + (10^{\frac{n}{2}} - 10^{\frac{n-2}{2}}) (a_{\frac{n}{2}} - a_{\frac{n-2}{2}}) \quad \text{pro } n \text{ sudé.} \end{aligned}$$

Poněvadž N je číslo spořádané je

$$a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq a_{n-3} \geq \dots \geq a_0.$$

Pro $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1$ musí být a_0 aspoň o 1 menší než a_1 , neboť jinak by nebylo spořádané, nebo by bylo psáno stejnými číslicemi. Ale taková čísla neuvažujeme, poněvadž při prvním kroku by bylo $N_1 = 0$.

Pro $a_{n-2} = a_{n-3} = \dots = a_0$ musí být zase a_{n-1} aspoň o 1 větší než a_0 z těchto důvodů.

Označme $a_{n-1} - a_0 = x$, $a_{n-2} - a_1 = y$ atd. Tak máme pro první rozdíllové číslo

$$N_1 = (10^{n-1} - 1) x + (10^{n-2} - 10) y + \dots \quad (1)$$

Je tedy první rozdíllové číslo součtem násobků čísel psaných devítkami a nulami.

Čtyřmístná čísla. Pro čtyřmístná čísla dává rovnice (1) při $n = 4$

$$N_1 = 999 x + 90 y, \quad (2)$$

s podmínkami

$$10 > x \geq 1, \quad 10 > y \geq 0.$$

Můžeme psát

$$N_1 = 1000 x + 100 (y - 1) + 10 (9 - y) + (10 - x);$$

a) pro $10 - x$ místo x dostáváme číslo psané stejnými číslicemi jako pro x , jenže první a poslední číslice si vyměnily místa;

b) pro $10 - y$ místo y vyměnily si místa prostřední číslice;

c) pro $10 - x$ a současně $10 - y$ místo x , y vyměnily si místa číslice první a poslední a prostřední číslice.

Ale všechny tyto případy jsou při daném x , y reprezentovány jedním spořádaným číslem. Nutno však poznamenat, že pro $y = 0$ máme

$$N_1 = 1000 (x - 1) + 990 + (10 - x),$$

a to pro $11 - x$ místo x dává

$$1000 (10 - x) + 990 + (x - 1),$$

tedy číslo psané týmiž číslicemi jako N_1 , ale první a poslední číslice si vyměnily místo.

Tím, že vycházíme od spořádaných čísel $\vec{N}$, redukuje se celkový počet čtyřmístných čísel na 30 spořádaných čísel $\vec{N}_1$ k vyšetření, neboť:

všechna čtyřmístná čísla přejdou prvním krokem v první rozdílová čísla daná rovnicí (3) a podle bodů a, b, c , může x při daném y nabýt hodnot

$$x = \begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \\ 9, 8, 7, 6 \end{matrix} 5.$$

Tím dostáváme pět různých čísel $\vec{N}_1$ při daném y .

Podobně při daném x dostáváme pro

$$y = 0 \begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \\ 9, 8, 7, 6 \end{matrix} 5$$

šest různých čísel $\vec{N}_1$. Celkem dostáváme skutečně $5 \times 6 = 30$ spořádaných čísel, která počítáme z rovnice (2).

Podle všech těchto poznatků je sestavena tabulka I.:

Tabulka I.

$y \backslash x$	1 (9)	2 (8)	3 (7)	4 (6)	5
5	9441 (8,0) 7	8442 (6,0) 7	7443 (4,0) 4	6444 (2,0) 5	5544 (1,1) 5
4 (6)	9531 (8,2) 6	8532 (6,2) 2	7533 (4,2) 2	6543 (3,1) 4	5553 (2,0) 5
3 (7)	9621 (8,4) 3	8622 (6,4) 5	7632 (5,3) 5	6642 (4,2) 2	6552 (4,0) 4
2 (8)	9711 (8,6) 3	8721 (7,5) 5	7731 (6,4) 5	7641 (6,2) 1	7551 (6,0) 7
1 (9)	9810 (9,7) 4	8820 (8,6) 3	8730 (8,4) 3	8640 (8,2) 6	8550 (8,0) 7
0	9990 (9,0) 5	9981 (8,1) 4	9972 (7,2) 6	9963 (6,3) 3	9954 (5,4) 6
$y \backslash x$	1 (10)	2 (9)	3 (8)	4 (7)	5 (6)

V záhlaví jsou čísla x a v závorkách $10 - x$. V prvním sloupci je y

a v závorkách $10 - y$. Pro $y = 0$ však platí v poslední řádce hodnoty pro x a v závorkách $11 - x$. Čísla $x(x)$ a $y(y)$ lze kombinovat čtyřmi způsoby a vždy dostáváme totéž spořádané číslo. V tabulce je 30 spořádaných čísel, na která se redukují všechna čtyřmístná čísla po prvním kroku. Vedle každého čísla jsou uvedeny „okamžité“ hodnoty x , y prvních rozdílových čísel. Např. u 9 441 je $x = 8$, $y = 0$. Čísla uvedená v tabulce nejsou nic jiného než čtyřmístná čísla pro další krok.

Rodokmen. Místo abychom prováděli další kroky, užijeme vlastností naší tabulky a tím vyšetříme osudy všech čtyřmístných čísel.

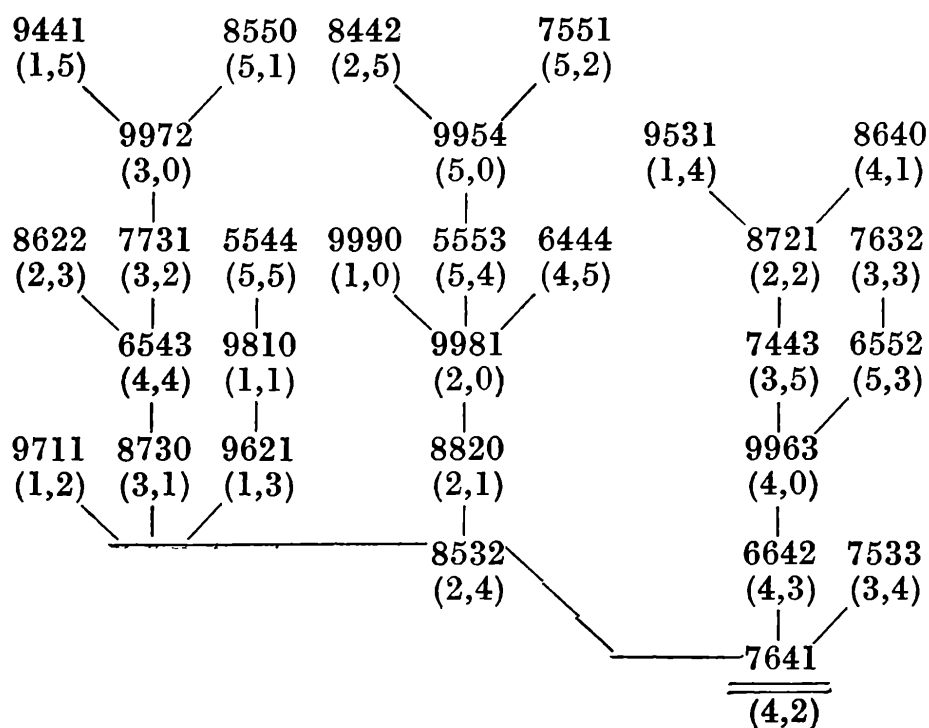
Počneme číslem 9 441, které povstalo z dvojice $x = 1$, $y = 5$, stručně psáno (1, 5). Toto číslo má však okamžité $x = 8$, $y = 0$. V tabulce najdeme, že (8, 0) vede k číslu 9 972. Tím je proveden druhý krok. Tak pokračujeme dále, ale rozhlédněme se, není-li ještě aspoň jedno první rozdílové číslo s toutéž okamžitou dvojicí. Ano, je to 8 550. To tedy při druhém kroku bude mít „stejný osud“ jako 9 441, tj. přejde v 9 972. To má okamžitou dvojici (7, 2), přejde tedy třetím krokem v 7 731, tj. (6, 4). Ale (6, 4) má také 8 622. Splynou tedy druhým krokem obě čísla v 6 543. Tak pokračujeme dále až sedmým krokem dojdeme k číslu 7 641, mezitím co 9 711 a 5 544 spojila svůj osud s uvažovaným číslem.

Dále vyjdeme od čísel 8 442 a 7 551 a shledáme, že splynou v číslech 9 954 a po sedmém kroku zase proces končí v 7 641. Mezitím však spojila čísla 9 990 a 6 444 svůj osud s uvažovanou řadou.

Dále uvažme čísla 8 640 a 9 531, pro něž $x = 8$, $y = 2$. I ta mají společný osud a přidruží se k nim 7 632 a proces končí opět 7 641.

Na konec zbývá 7 533, které má $x = 4$, $y = 2$ a dává hned jedním krokem 7 641. Můžeme tedy místo tabulky sestavit „rodokmen“ (tab. II.).

Tabulka II.



Tím jsme dokázali, že všechna čtyřmístná čísla končí svůj osud číslem 7 641. Ukážeme ještě, že tomu tak musí být.

Ptejme se: Je v tabulce nějaké číslo, jehož původní x, y je stejné jako okamžité? Ano, je to jediné číslo 7 641. To znamená, že toto jediné číslo nemá „žádného potomka“. Reprodukce se samo. Ale jaké má „předky“? To jsou taková čísla, jejichž okamžité hodnoty jsou také 6(4), 2(8). Ale taková jsou podle tabulky jednak samo 7 641 a pak 8 532, 8 642, 7 533. U posledního je (4, 2), ale jak víme, je totéž jako (6, 2). Stejně se ptáme po dalších „předcích“, tj. v „rodokmenu“ postupujeme opačně, až vyčerpáme všechna čísla tabulky nebo rodokmenu.

Nejvýše po sedmi krocích každé čtyřmístné číslo vede k 7 641.

Pomocí tabulky, v níž vedle čísel jsou uvedeny počty kroků potřebných k dosažení 7 641, nebo pomocí „rodokmenu“, kde vedle čísel jsou původní x, y , můžeme k zvolenému číslu udat počet kroků, po nichž se algoritmus zastaví.

P ř í k l a d. Volme nejmenší čtyřmístné číslo 1000, tj. $x = 1, y = 0$. Z tabulky vidíme, že proces končí po pěti krocích. První rozdílové číslo je 9 990 (spořádané) a z „rodokmenu“ vidíme celý průběh. Stejný osud má největší čtyřmístné číslo 9 998, neboť první rozdílové číslo je zase 9 990.

Čísla s jiným počtem číslic. K popsání množiny prvních rozdílových čísel čtyřmístných jsme potřebovali dva parametry x, y . K popsání stejných množin čísel vícemístných bude třeba více parametrů $x, y, z, \dots$. Např. pro šestmístná čísla bude

$$N_1 = 99\,999x + 9\,990y + 990z.$$

Tím ovšem se stává vyšetřování velmi složité.

Pro čísla pětímístná stačíme ještě s 2 parametry, neboť

$$\begin{aligned} N_1 &= 9\,999x + 990y = \\ &= 10\,000x + 1000(y - 1) + 100 \cdot 9 + 10(9 - y) + (10 - x). \end{aligned}$$

Z toho je zřejmo, že N_1 jsou čísla psaná týmiž číslicemi jako pro čtyřmístná, ale uprostřed je 9, čili ve spořádaných číslech vždy 9 vepředu. Algoritmus však nekončí určitým číslem, nýbrž po několika krocích začíná cyklus. Např.: $N = 76\,543$ vede po prvním kroku k číslu 97 641, jímž začíná čtyřčlenný cyklus.

Pro čísla trojmístná je $N_1 = 99x$. Jsou to tedy násobky 99. To jsou však čísla v tabulce v poslední řádce, avšak bez první devítky, tj. 990, 981, 972, 963, 954. Poslední číslo vzniklo z $x = 5$ (6), ale samo má $x = 5$; tedy jako u čtyřmístných je toto číslo vyznamenané tím, že jím končí algoritmus. Např. $N = 692, \overrightarrow{N} = 962, 962 - 269 = 693, 963 - 369 = 594, 954 - 459 = 495$.

Pro dvojmístná čísla je $N_1 = 9x$ a to víme, že násobky 9 tvoří pětičlenný cyklus. Např. $N = 74, 74 - 47 = 27, 72 - 27 = 45, 54 - 45 = 9, 90 - 9 = 81, 81 - 18 = 63, 63 - 36 = 27$.

Fyzikálne zaujímavosti

Podľa akého zákona prebieha absorpcia žiarenia v prostredí?

Absorpcia žiarenia je dej a ako bolo už vyššie naznačené, spravuje sa absorpčným zákonom. Ak je intenzita vstupujúceho žiarenia - (energia za jednotku času prechádzajúca jednotkou plochy) - J_0 a na hĺbke h preniku do prostredia pohltí sa časť, úmerná vstupnej hodnote intenzity, teda $\Delta J = a \cdot J_0 h$, do ďalšej vrstvy prostredia vstupuje už len žiarenie intenzity

$$J_1 = J_0 - \Delta J = J_0 \cdot (1 - ah).$$

Po prechode ďalšou, rovnako hrubou vrstvou prostredia, bude intenzita

$$J_2 = J_0 (1 - ah) - J_0 (1 - ah) \cdot ah = J_0 (1 - ah)^2$$

Intenzita žiarenia postupujúceho v pohlcujúcom prostredí tedy klesá ako mocnina so základom $(1 - ah)$, menším od jednotky.

Ak celkovú dĺžku x preniku žiarenia do prostredia rozdelíme na n častí, takže hrúbka vyššie uvažovanej vrstvy bude $h = \frac{x}{n}$, vyjde po prechode n takých absorbujúcich vrstiev výsledná intenzita žiarenia

$$J_n = J_0 \left(1 - \frac{ax}{n}\right)^n$$

alebo pri označení $\frac{ax}{n} = -\frac{1}{m}$

$$J_n = J_0 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m \cdot ax} = J_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{-ax} \quad (1)$$

Dostávame tak pre žiarenie prechádzajúce prostredím exponenciálny zákon absorpcie, ktorá spôsobuje, že sa prostredie stáva pre elektromagnetickú vlnu nepriechodným, resp. pre viditeľné svetlo nepriehľadným.

Číselná hodnota a' (koeficient absorpcie) charakterizuje prostredie a

udáva hĺbku preniku žiarenia do prostredia $x = 1/a$, na ktorej sa intenzita žiarenia zmenší na hodnotu $1/e$ krát menšiu¹⁾.

Exponenciálny zákon poklesu intenzity žiarenia je dôležitý pre nebezpečné žiarenia, napr. röntgenovo alebo gamma žiarenie. Podľa toho zákona totiž klesne intenzita žiarenia na nulovú hodnotu až po prechode prostredím nekonečnej hrúbky. Žiarenia podľa toho možno odtieniť len na hodnoty intenzít prakticky nemerateľných, a tým neškodných.

Prof. dr. Ján Vanovič

Něco o první větě impulsové

Baron Prášil (podle G. A. Bürgera) se dostal z močálu, do kterého spadl, tak, že se chytil rukama za cop a táhl vzhůru. To se ovšem mohlo podařit právě jen baronu Prášilovi. V praxi také ztroskotaly veškeré představy naivních středověkých vynálezců, nahradit koňský potah beranem, kterým by zbrojnoši uvnitř tloukli do přední stěny vozu a měli tak vytvořit jakýsi „tank“ rytířských výprav. Pokusy tohoto druhu obyčejně končily rozpadem vozu na původní součásti. Také se nikdy nepodařilo uvést v bezvětrí do pohybu trojstěžník, třebaže se celá posádka mocně opřela do hlavního stěžně.

Žák 9. třídy by asi odkázal myslitele, pracujícího v oboru středověkých „tanků“, či barona Prášila, na zákon akce a reakce. Jak však tento princip souvisí s uvedenými příklady? Vždyť síly, o nichž se v zákoně mluví (akce a reakce), působí na různá tělesa; v případě barona Prášila se vyskytuje pouze jediné těleso a to baron Prášil sám. Mohli bychom si sice při vysvětlování principem akce a reakce před-

1) Zmenšováním hrúbky absorpčnej vrstvy $\frac{x}{n}$ bude rásť číslo n . Pri tomto medznom prechode $n \rightarrow \infty$ pokúste sa pomocou binomickej vety (Rozhľedy č. 9., roč. 38, str. 394) vypočítať základ mocniny v rovnici (1).

Dostanete tak zákon absorpcie v tvare

$$J = J_0 \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{-ax} = J_0 \cdot e^{-ax},$$

kde $e = 2,718\,281\,8\dots$ je základ prirodzených logaritmov a vo fyzike tiež veľmi dôležitá číselná hodnota.

Tento výsledok vyplýva tiež z rovnice

$$\frac{dJ}{dx} = -aJ$$

definujúcej zákon prirodzeného poklesu (resp. pri kladnom znamienku pravej strany, zákon prirodzeného vzrastu), kde dJ , dx ktoré čítame „diferenciál J “ a „diferenciál x “ - znamenajú nekonečne malé prírastky týchto veličín. Vo fyzike prichádza často k uplatneniu.

stavit barona Prášila rozděleného na části (tj. ruce, tělo atd.), ale zde je výhodné vzít na pomoc vnitřní síly soustavy.

Teoretická mechanika nahrazuje při svých úvahách fyzikální těleso soustavou hmotných bodů. Taková abstrakce umožňuje použití zákonů, odvozených pro izolovaný hmotný bod (např. třetího Newtonova zákona), na body tělesa a objevit zákony, platící pro těleso jako celek. Na každý bod soustavy mohou působit síly vnitřní a vnější. V n i t ř n í m i s í l a m i rozumíme ty, kterými na hmotný bod nebo na systém bodů soustavy působí ostatní body soustavy. Síly, které pocházejí od hmot nepatřících soustavě, nazýváme v n ě j š í m i. Teoretickou cestou je možno - s použitím principu akce a reakce pro hmotné body - dokázat větu o těžišti, nebo jinak první větu impulsovou:

Těžiště soustavy se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota soustavy a jako by na něj působila výslednice jen vnějších sil.

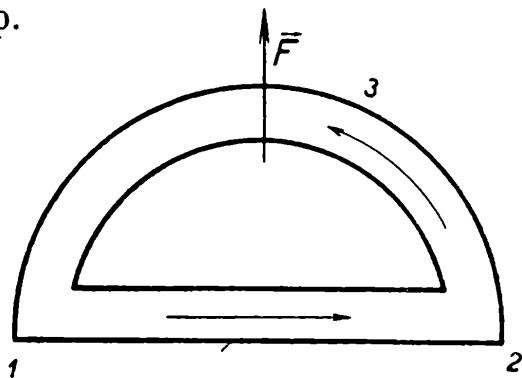
Jestliže se výslednice všech sil působících na soustavu rovná nule - takovou soustavu nazýváme d y n a m i c k y i z o l o v a n o u - nemůže se poloha těžiště vnitřními silami změnit. Vnitřní síly dynamicky izolované soustavy mohou jen způsobit vzájemný pohyb jednotlivých částí soustavy, *těžiště dynamicky izolované soustavy však setrvává v klidu (když byla soustava před působením vnitřních sil v klidu), nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.*

Větou o těžišti pak můžeme vysvětlit příklady, uvedené na začátku článku. U středověkého „tanku“ (zanedbáme-li tření v osách kol a tření kol o zemi) by vnější pozorovatel třeba i zjistil určitý pohyb. Při přesunu zbrojnošů s beranem k zadní stěně vozu by se vůz pohnul dopředu, ale při útoku zbrojnošů s beranem na přední stěnu by se zase vrátil na své místo a náraz beranu na přední stěnu by neměl na jeho pohyb vliv. V obou případech zůstává poloha těžiště soustavy nezměněna: vůz + zbrojnoši + beran. Všechny vystupující síly (kromě síly tíže, která na pohyb nemá vliv) jsou totiž vnitřními silami soustavy. Vezme-me-li v úvahu tření, situace se podstatně nezmění. V první etapě pohybu vozu bude tření působit proti směru pohybu dopředu, ve druhé etapě pak proti pohybu dozadu; bude tedy brzdit jen výkyvy kolem neměnného těžiště. Protože pohyby vozu nebudou příliš rychlé, nemusíme uvažovat závislost tření na rychlostech; budou tedy síly tření co do velikosti v obou etapách stejné.

Od auta, taženého silou motoru, se liší případ „tanku“ rytířských výprav v tom, že u pohybu auta tření kol o zemi (tj. vnější sílu působící na auto) nemůžeme zanedbat. Auto nebo lokomotiva se rozjíždí právě proto, že působí tato vnější síla. Tak třeba lokomotiva by se nemohla rozjet jen působením tlaku páry na píst (vnitřní síla), kdyby byla na dokonale hladkých kolejích. Chceme-li použít i zde I. impulsové věty, musíme uvažovat celou soustavu: auto nebo lokomotiva + Země,

v níž i síly tření jsou vnitřními silami. Tato soustava pak polohu svého těžiště pohybem auta nebo lokomotivy nemění.

Zdánlivým problémem je aplikace této věty na let meziplanetární rakety. Raketa se přece může dostat vnitřními silami třeba se Země na Měsíc. Těžiště rakety bylo na Zemi a teď bude na Měsíci. Bylo by jistě nesprávné tvrdit, že věta o těžišti neplatí. Spíše je chyba v naší úvaze. Síla, která žene raketu, je vnitřní silou soustavy: raketa + palivo + Země a těžiště této soustavy zřejmě původní polohu nezmění, respektive bude se pohybovat dále stejným způsobem po své dráze kolem Slunce. Raketa se ovšem od těžiště soustavy vzdálí na jednu stranu (na Měsíc), Země na stranu druhou. Pohyb Země však vzhledem k velmi malému poměru hmot raketa - Země bude zanedbatelně malý. První větou impulsovou se řídí i pohyb soustavy dělo + granát, pohyb těžiště střepin granátu po výbuchu (když se granát ve vakuu pohyboval po parabole, pohybuje se po výbuchu i těžiště střepin dále po parabole) atp.



Obr. 1

Závěrem přenecháváme čtenáři k posouzení „vynález“ létajícího stroje. Na obrázku 1. je nakreslen průřez trubicí, v níž se ve směru šipek pohybuje kapalina, poháněná vrtulkami uvnitř trubice. V oblouku 2, 3, 1 tlačí kapalina odstředivou silou $\vec{F}$ na vnější stěnu trubice. Proud v přímé části 1, 2 odstředivou sílu nevyvolává, tedy stroj se dá při

jisté rychlosti kapaliny vlivem síly $\vec{F}$ do pohybu směrem vzhůru. (Dá se opravdu stroj do pohybu? Kde je síla vyvažující sílu $\vec{F}$? (Návod: Uvažujte pohyb kapaliny v bodech 1 a 2.)

Fyzikální olympiáda

Prof. dr. Rostislav Košťál Dagmar Košťálová Dr. Bohumil Vlach

Měření odporu metodou přímou a Wheatstonovým můstkem

Studijní text pro 1. kolo 2. fyzikální olympiády, kategorie A

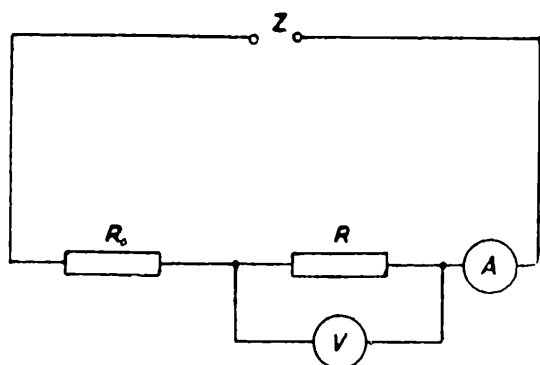
Na měření odporu je několik metod. Uvedeme z nich jen dvě: metodu přímou a metodu Wheatstonova můstku.

1. *Metoda přímá.* Metoda, kterou se určuje měřená veličina podle její definice, se nazývá metoda přímá. Poněvadž odpor R je definován vztahem

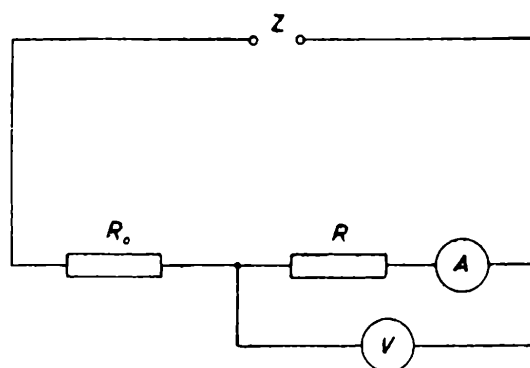
$$R = \frac{U}{I}, \quad (1)$$

kde U je napětí na odporu a I proud jdoucí odporem, určíme odpor přímou metodou změřením těchto veličin. Proto měření vyžaduje spojení podle obr. 1, v němž R je určovaný odpor, Z zdroj, R_0 odpor zdroje předřazený (aby odporem R příp. ampérmetrem neprocházel velký proud), A ampérmetr a V voltmetr.

Při tomto spojení naměří však ampérmetr nejen proud jdoucí odporem, ale i proud jdoucí voltmetrem. Aby ampérmetr udával proud jdoucí jen měřeným odporem R , musel by mít voltmetr nekonečně velký odpor; pak by jím neprocházel proud.



Obr. 1.



Obr. 2.

Abychom tuto závadu odstranili, připojíme voltmetr podle obr. 2 paralelně nejen k odporu, nýbrž i k ampérmetru. Pak sice ampérmetr měří proud jdoucí jen odporem, ale voltmetr měří zase napětí na odporu i ampérmetru. Vzniká tedy zase chyba ve čtení na voltmetru, která při spojení podle obr. 1 nebyla. Z toho vidíme, že při přesném měření nemůžeme užít jednoduchého vztahu (1), nýbrž musíme přihlídnout i k vlivu voltmetru a ampérmetru.

Proto provedme výpočet odporu a jeho diskusi pro spojení podle obr. 1 (případ a) a podle obr. 2 (případ b).

a) Proud jdoucí ampérmetrem je podle 1. Kirchhoffova zákona dán vztahem

$$I = \frac{U}{R} + \frac{U}{R_V}, \quad (2)$$

kde U je napětí naměřené na voltmetru a R_V odpor voltmetru. Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{U}{R} = I - \frac{U}{R_V}$$

a

$$R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}} \quad (3)$$

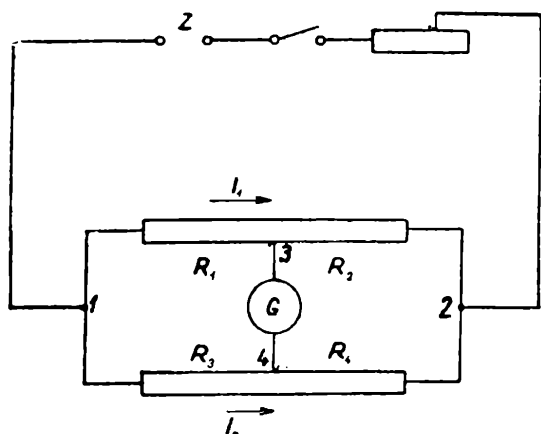
Abychom mohli místo vztahu (3) užít jednoduchého vztahu (1), musel by proud procházející voltmetrem být zanedbatelný vzhledem k proudu I ; to je splněno, když $R_V \gg R$. Není-li splněna tato podmínka, musí se odpor vypočíst podle přesnějšího vzorce (3).

b) V druhém případě platí pro napětí na voltmetru

$$U = (R + R_A) I ,$$

kde R_A je odpor ampérmetru a I proud naměřený ampérmetrem. Z toho

$$R = \frac{U}{I} - R_A \quad (4)$$



Obr. 3.

Místo vztahu (4) můžeme užít vztahu (1) tehdy, když bude $R_A \ll R$. Pak napětí naměřené na voltmetru bude přibližně totéž jako napětí, které je jen na odporu R .

Diskuse ukazuje, že k přesnému určení odporu můžeme užít spojení podle obr. 1 nebo podle obr. 2; výpočet pak provedeme užitím vztahu (3) nebo (4). Určujeme-li odpor jen přibližně podle vzorce (1), volíme spojení vyznačené v obr. 1 nebo obr. 2 podle toho, je-li splněna podmínka $R_V \gg R$ nebo $R_A \ll R$.

2. Metoda Wheatstonova můstku. Rozdělí-li se proud na dvě větve, lze ke každému bodu v jedné větvi nalézt bod v druhé větvi, který má s ním stejný potenciál; proto, spojíme-li tyto dva body vodičě můstkem, nemůže jím procházet proud. Takové spojení, vyznačené na obr. 3, nazýváme Wheatstonovým můstkem. Označme části odporů ve větvích podle obr. 3 R_1 , R_2 , R_3 a R_4 . Neprochází-li můstkem - v němž je zapojen galvanometr G - proud, říkáme, že na Wheatstonově můstku je rovnováha. V tomto případě označme proudy ve větvích I_1 a I_2 . Potom napětí mezi body 1 a 3, tj. $R_1 I_1$, musí býti rovno napětí mezi body 1 a 4, tj. $R_3 I_2$. Totéž platí o napětí mezi body 3 a 2 a body 4 a 2; tedy:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 &= R_3 I_2 , \\ R_2 I_1 &= R_4 I_2 . \end{aligned}$$

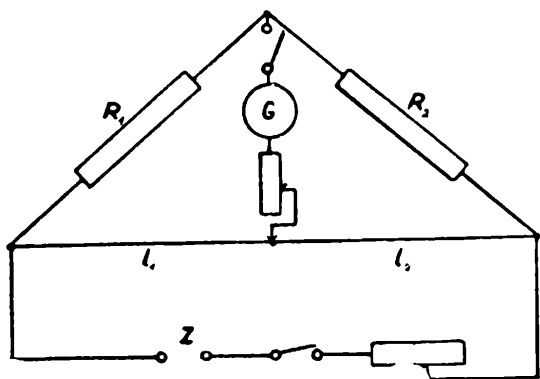
Vyloučením I_1 a I_2 z těchto rovnic dostáváme podmínku rovnováhy na Wheatstonově můstku:

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4 . \quad (5)$$

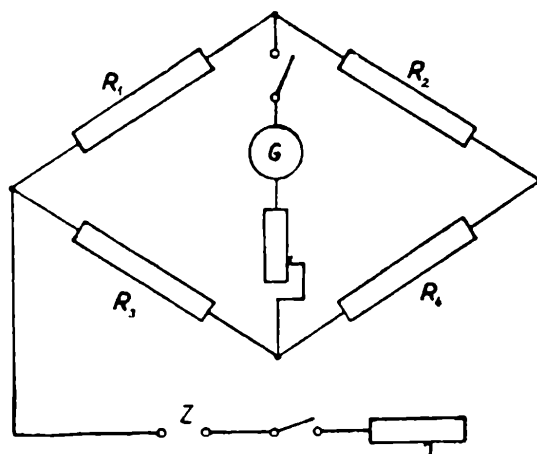
Této podmínky užíváme k měření odporu Wheatstonovým můstkem. Známe-li v poslední rovnici tři odpory, můžeme čtvrtý vypočít.

Metoda Wheatstonova můstku patří k tzv. nulovým metodám, poněvadž se odpor neurčuje z výchylky na měřicím přístroji, nýbrž vyrovnaním výchylky na nulovou hodnotu.

Wheatstonův můstek pro měření sestavíme takto: Určovaný odpor a tři další známé odpory, (z nichž některé musí být proměnné) spojíme do „čtyřúhelníka“. K dvěma jeho protilehlým vrcholům připojíme zdroj elektrického napětí, takže vznikne rozvětvený obvod. Na druhé dva protilehlé vrcholy připojíme můstek s galvanometrem.



Obr. 4



Obr. 5

Aby při hledání rovnováhy na můstku neprocházel galvanometrem silný proud, předradíme mu na začátku měření odpor, případně předradíme odpor i zdroji. Zdroj zapojujeme jen na malý okamžik (tuku-tím klíče). Takto dosáhneme přibližné rovnováhy na můstku. Nyní vyřadíme odpor u galvanometru, příp. i u zdroje, a stanovíme rovnováhu přesně.

Z dřívějšího výsledku je vidět, že podmínka rovnováhy na můstku nezávisí ani na odporech předřazených zdroji, ani na odporu galvanometru.

Wheatstonova můstku užíváme ve dvojí úpravě:

1. Zvolíme odpor R_3 a R_4 tak, aby jejich poměr byl 10^n , kde n je celé číslo. Za R_1 dáme měřený odpor a za odpor R_2 odpor měrný. Odpor R_2 měníme, až galvanometrem neprochází proud (obr. 4). Poměr $R_3 : R_4$ volíme tak, abychom využili všech řádů odporu na reostatu R_2 . Tak určíme neznámý odpor na největší počet míst.

2. Za odpory R_3 a R_4 užijeme homogenního drátu o stálém průřezu a délky např. 1 m. Za odpor R_1 dáme měřený odpor a za odpor R_2 užijeme reostatu o známém odporu.

Můstek s galvanometrem je opatřen kontaktem, který lze posunovat po drátě a kterým se drát rozdělí na odpory R_3 a R_4 . Kontaktem posunujeme, až nastane rovnováha (obr. 5). Nejpřesněji měříme, když je kontakt asi uprostřed drátu. Abychom toho dosáhli, zvolíme vhodně odpor R_2 .

Použitý drát musí být homogenní a všude stejného průřezu, abychom mohli předpokládat, že odpor je úměrný délce. Pak

$$\begin{aligned}R_3 &= k l_1, \\R_4 &= k l_2,\end{aligned}$$

kde l_1 a l_2 jsou vzdálenosti kontaktu od konce drátu naměřené při rovnováze na můstku; k je konstanta úměrnosti. Proto bývá drát napjat na měřítku, aby se mohly délky l_1 a l_2 snadno přečíst. Z podmínky rovnováhy (5) plyne

$$R_1 : R_2 = l_1 : l_2 ;$$

odtud můžeme neznámý odpor vypočítat.

Úměra (5) zůstane správná, zaměníme-li v ní vnitřní členy. Proto se podmínka rovnováhy nezmění, když zaměníme na Wheatstonově můstku zdroj a galvanometr.

Prof. dr. Rostislav Košťál
šťálová

Dagmar Ko-

Josef Konrád:

Určování chyby veličiny měřené a veličiny vypočtené

Studijní text pro 1. kolo 2. fyzikální olympiády, kategorie B, C

Fyzikální veličiny buď přímo měříme, nebo je vypočítáváme z jiných naměřených veličin. Proto probereme nejdříve určování měřené veličiny a její chyby, pak určování chyby veličiny vypočtené z veličin naměřených.

a) Veličina měřená a její chyba.

Naměřená hodnota veličiny se vždy o něco liší od hodnoty skutečné. Rozdíl obou hodnot nazýváme *chybou měřené veličiny*. Skutečnou hodnotu a tedy ani chybu měřené veličiny nemůžeme nikdy určit; naším úkolem je určit pravděpodobnou hodnotu měřené veličiny a její pravdě-

podobnou chybu. K tomu potřebujeme měření veličiny několikrát opakovat. Přitom se dopouštíme chyb. Chyby měření rozdělujeme na soustavné a nahodilé.

1. *Chyby soustavné.* Chyby soustavné vznikají buď z nedokonalosti měřicí metody, nebo z chyby užitého přístroje, nebo z nedokonalosti práce pozorovatelovy.

Když určujeme např. rychlost zvuku ve vzduchu měřením v trubici, dopouštíme se chyby, poněvadž předpokládáme, že rychlost zvuku uvnitř trubice je táž jako na volném prostranství; to však nesouhlasí zcela se skutečností. V tom tkví chyba metody. Na chybu metody usuzujeme z naměření téže veličiny různými metodami.

Chyby přístroje jsou způsobeny jeho technickou nedokonalostí. Např. teploměrná stupnice, nanesená na sklo brzo po zhotovení teploměru, se smrští a teploměr udává hodnoty vyšší. Chyby přístrojů odstraňujeme srovnáním s přístroji dokonalejšími; z tohoto srovnání pořizujeme pro přístroj korekční tabulku, případně graf.

Osobní chyba pozorovatele se projevuje např. tím, že od sluchového nebo zrakového vjemu uplyne určitá doba do vykonání příslušného úkonu. Na osobní chyby usuzujeme z výsledků měření provedených několika pozorovateli.

Soustavné chyby bývají poměrně stálé.

2. *Chyby nahodilé.* Chyby nahodilé se projevují tím, že se opakovaná měření skoro vždy od sebe poněkud liší; příčiny jejich vzniku jsou různé. Při čtení na měřítku mohou nahodilé chyby souviset např. s tím, že se nedíváme kolmo na stupnici, nebo že se během měření změnila teplota měřeného předmětu nebo měřítka. Při měření mikrometrem může vzniknout chyba tím, že šroub při jednotlivých měřeních nestejně dotáhneme. Tyto chyby odstraňujeme opakováním měření.

Měříme-li rozměry těles (např. průměr nebo výšku rotačního kolmého válce), pak různost naměřených hodnot nemusí souviset jen s pozorovatelem, nýbrž může být způsobena nepřesností výroby. Měření proto opakujeme v různých místech tělesa systematicky zvolených.

Z naměřených hodnot určujeme *pravděpodobnou hodnotu měřené veličiny*.

3. *Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny a její chyby.* Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny a její chyby vyložíme na měření mikrometrem.

Při měření délky mikrometrem sevřeme měřený předmět čelistmi mikrometru a přečteme hodnotu (na tisícinu milimetru). Měření opakujeme n -krát (např. desetkrát); přitom zjistíme, že naměřené hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ nejsou stejné. Správnou hodnotu x neznáme a z měření určíme nejvyšší hodnotu pravděpodobnou $\bar{x}$. Rozdíl $\bar{x} - x_k$ se nazývá

odchylka měření (x_k značí kteroukoliv z hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$). Předpokládáme, že kladné odchylky určité velikosti jsou stejně pravděpodobné jako odchylky záporné téže velikosti. Proto součet kladných odchylek musí být až na znaménko roven součtu záporných odchylek. Tedy součet všech odchylek musí být roven nule

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n) = 0. \quad (1)$$

Z toho vypočteme pravděpodobnou hodnotu $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Tato hodnota $\bar{x}$ je tedy aritmetickým středem naměřených hodnot; nemusí být přesně rovna správné hodnotě.

Abychom nemuseli v čitateli vypisovat všechny členy, napíšeme jen jeden, který označíme x_k . Součet členů vyznačíme tím, že před x_k napíšeme velké řecké písmeno Σ (sigma). Abychom vyznačili, že index k probíhá všechna přirozená čísla od 1 do n , připíšeme pod součtové znaménko Σ označení $k = 1$ a nad ně n , tedy

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}. \quad (2)$$

Označme sčítance v rovnici (1) obecně $\bar{x} - x = \Delta_k$.

Střední odchylku jednotlivého měření nemůžeme počítat jako aritmetický střed jednotlivých odchylek, poněvadž jejich součet je nulový. Proto vypočteme součet druhých mocnin odchylek

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = (\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2, \quad (3)$$

který budeme značit prostě $\Sigma \Delta^2$. Kdybychom za $\bar{x}$ dosazovali zcela libovolné hodnoty, nabýval by výraz (3) různých hodnot. Dá se dokázat, že nejmenší hodnoty nabude, když za $\bar{x}$ dosadíme hodnotu určenou výrazem (2). Proto se tato metoda výpočtu pravděpodobné chyby nazývá *metodou nejmenších čtverců*.

Každé měření je zatíženo nějakou chybou. Pro nás je důležité, jakou chybou je zatížen aritmetický střed naměřených hodnot. Počtem pravděpodobnosti se odvodí, že tato chyba říkáme ji *střední chyba aritmetického středu* - je dána vztahem

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n(n-1)}}$$

Odvození $\bar{\delta}$ pro obtížnost neprovádíme.

Aby byla vyznačena přesnost měření, připojuje se k aritmetickému středu hodnota příslušné střední chyby, a to s oběma znaménky. To však neznamená, že správná hodnota x musí ležet v mezích

$$\bar{x} - \bar{\delta} \leq x \leq \bar{x} + \bar{\delta}$$

Je jen pravděpodobné, že správná hodnota padá do tohoto intervalu. Při velkém počtu měření je tato pravděpodobnost 68 %. Je-li počet měření menší, pak pravděpodobnost, že do uvedeného intervalu padne správná hodnota, je menší (při 20 měřeních je 67 %, při 10 měřeních 65 %, při 5 měřeních 62 % a při 3 měřeních jen 57 %).

Pro naše účely zcela postačí počítat střední chybu aritmetického středu $\bar{\delta}$ jen na jedno místo. Aritmetický střed, k němuž tato chyba přísluší, zaokrouhlíme po to místo, které je zatíženo chybou; další místa vynecháme. Když např. $\bar{x} = 3,853\,67$ cm, $\bar{\delta} = \pm 0,002$ cm, píšeme $x = 3,854$ cm $\pm 0,002$ cm. Naopak, vypočteme-li $\bar{\delta} = \pm 0,01$ cm a má-li aritmetický střed $\bar{x}$ měřené délky hodnotu přesně 20 cm, musíme psát $x = 20,00$ cm $\pm 0,01$ cm.

Při zpracování naměřených hodnot metodou nejmenších čtverců postupujeme takto:

1. Určíme aritmetický střed

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

2. Určíme všechny odchylky $\Delta_k = \bar{x} - x_k$.

3. Pro kontrolu výpočtů uvedených v 1 a 2 sečteme odchylky (při správném výpočtu musí platit $\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0$).

4. Určíme příslušná Δ_k^2

5. Určíme $\sum \Delta^2$.

6. Vypočteme střední chybu aritmetického středu podle vzorce:

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}}$$

7. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta}.$$

4. *Stanovení chyby měření z kladných odchylek.* Uvedený způsob výpočtu chyb lze nahradit jednodušším způsobem, u něhož použijeme jen součtu kladných odchylek $\sum \Delta_+$. Pak dostáváme pro střední chybu aritmetického středu (uvádíme bez odvození) přibližně hodnotu

$$\bar{\delta} = \pm \frac{5 \sum \Delta_+}{2n \sqrt{n-1}}$$

Výsledky obou způsobů výpočtu se liší od sebe jen nepatrně.

Při tomto způsobu zpracování naměřených hodnot postupujeme takto:

1. Určíme aritmetický střed $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$
2. Určíme všechny kladné odchylky Δ_{k+} .
3. Určíme jejich součet $\Sigma \Delta_{k+}$.
4. Vypočteme střední chybu aritmetického středu podle uvedeného vzorce.
5. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta}.$$

5. *Příklad na výpočet chyby měřené veličiny.* Dotykovým měřítkem byla měřena délka válečku d desetkrát. Měření a výpočet výsledku zapíšeme takto:

d_k cm	Δ_k cm	Δ_k^2 cm ²
5,39	− 0,003	0,000 009
7	+ 17	289
41	− 23	529
0	− 13	169
39	− 3	9
8	+ 7	49
9	− 3	9
8	+ 7	49
7	+ 17	289
9	− 3	9
$\bar{d} = 5,387$	$\begin{array}{r} + 48 \\ - 48 \\ \hline \Sigma \Delta_k = 0 \end{array}$	$\Sigma \Delta_k^2 = 0,001 410$

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{0,001 410}{90}} \text{ cm} = \pm \sqrt{0,000 016} \text{ cm} = \pm 0,004 \text{ cm},$$

$$d = 5,387 \text{ cm} \pm 0,004 \text{ cm}.$$

Je tedy d s pravděpodobností 65 % v mezích

$$5,383 \text{ cm} \leq d \leq 5,391 \text{ cm}.$$

Použijeme-li pro výpočet jen kladných odchylek, dostáváme v tomto případě také

$$\bar{\delta} = \pm \frac{1}{12} 0,048 \text{ cm} = \pm 0,004 \text{ cm} .$$

6. *Chyba absolutní a chyba relativní.* Chyba vypočtená v předcházejících odstavcích je chyba absolutní. K posouzení měření má větší význam chyba relativní, tj. poměr absolutní chyby $\bar{\delta}$ a veličiny $\bar{x}$. Relativní chybou r vyjadřujeme obvykle v procentech

$$r = \frac{\bar{\delta} \cdot 100}{\bar{x}}$$

Měření s menší relativní chybou je přesnější.

Např. pro $a = 58,2 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$ je relativní chyba

$$r = \frac{0,4 \cdot 100}{58,2} = 0,7 \% \text{ (menší než } 1 \% \text{)} ;$$

pro $b = 0,019 \text{ mm} \pm 0,002 \text{ mm}$ je relativní chyba

$$r = \frac{0,002 \cdot 100}{0,019} = 10,5 \% \text{ (větší než } 10 \% \text{)} .$$

Relativní chyby ukazují, že prvé měření bylo přesnější než druhé, ačkoliv v prvé případě je absolutní chyba 40 cm a v druhém jen 0,002 mm. Snažíme se vždy měřit aspoň tak, aby relativní chyba byla menší než 1 %, U přesných měření žádáme, aby klesla např. pod 0,1 %.

b) *Chyba veličiny vypočtené z naměřených veličin.*

Často počítáme hledanou veličinu z veličin naměřených.

K odvození její chyby potřebuje se znalost počtu diferenciálního. Proto se zde omezíme jen na výsledky plynoucí z teorie, a to ještě jen pro určité speciální případy.

α) Pro veličinu u , odvozenou z veličin $x_1, x_2, \dots, x_n$ vztahem

$$u = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{k=1}^n p_k x_k , \quad (4)$$

kde p_k ($1 \leq k \leq n$) jsou konstanty, vypočteme střední hodnotu $\bar{u}$ dosazením aritmetických středů $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ do vztahu (4)

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^n p_k \bar{x}_k . \quad (5)$$

Počtem pravděpodobnosti vychází pro její chybu

$$\begin{aligned}\bar{\delta}u &= \pm \sqrt{(p_1 \bar{\delta} x_1)^2 + (p_2 \bar{\delta} x_2)^2 + \dots + (p_n \bar{\delta} x_n)^2} \\ &= \pm \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k \bar{\delta} x_k)^2},\end{aligned}\quad (6)$$

kde δx_k je střední chyba aritmetického středu měřené veličiny x_k .

Když $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, dostáváme součet

$$u = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

a pro něj plyne ze (6)

$$\bar{\delta}u = \pm \sqrt{\bar{\delta}x_1^2 + \bar{\delta}x_2^2 + \dots + \bar{\delta}x_n^2}.\quad (7)$$

Když některé z konstant p_k budou rovny $+1$ a některé -1 , bude chyba $\bar{\delta}u$ táž, poněvadž ve vztahu (6) jsou druhé mocniny p_k . Proto např. $u_1 = x_1 + x_2$ a $u_2 = x_1 - x_2$ mají stejnou chybu

$$\bar{\delta}u = \pm \sqrt{\bar{\delta}x_1^2 + \bar{\delta}x_2^2}$$

β) Pro veličinu v odvozenou z veličin $x_1, x_2, \dots, x_n$ vztahem

$$v = b \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n},\quad (8)$$

kde a_k ($1 \leq k \leq n$) a b jsou konstanty, vypočteme střední hodnotu $\bar{v}$ dosazením aritmetických středů $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ do vztahu (8)

$$\bar{v} = b \cdot \bar{x}_1^{a_1} \cdot \bar{x}_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_n^{a_n}.\quad (9)$$

Počtem pravděpodobnosti vychází pro její chybu

$$\begin{aligned}\bar{\delta}v &= \pm \bar{v} \sqrt{\left(a_1 \frac{\bar{\delta}x_1}{x_1}\right)^2 + \left(a_2 \frac{\bar{\delta}x_2}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n \frac{\bar{\delta}x_n}{x_n}\right)^2} \\ &= \pm \bar{v} \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\bar{\delta}x_k}{x_k}\right)^2}\end{aligned}\quad (10)$$

kde $\bar{\delta}x_k$ je střední chyba aritmetického středu veličiny x_k .

Užití těchto výsledků ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1. Při měření mikrometrem musíme určit nejdříve nulovou polohu n_0 mikrometru a pak teprve provést vlastní měření n dané veli-

činy, např. průměru válce d . Obě měření musíme opakovat a pak určit příslušnou chybu; dostaneme pro měřené veličiny

$$n_0 = \bar{n}_0 \pm \bar{\delta}n_0,$$

$$n = \bar{n} \pm \bar{\delta}n$$

Poněvadž průměr válce

$$d = n - n_0,$$

je ve (4) $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = p_4 = \dots = p_n = 0$; pak ze (7) dostáváme

$$\bar{\delta}d = \pm \sqrt{\bar{\delta}n^2 + \bar{\delta}n_0^2}$$

a pro chybu poloměru $r = \frac{d}{2}$ platí podle (6) (zde $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = p_3 = \dots = p_n = 0$)

$$\bar{\delta}r = \frac{1}{2} \bar{\delta}d.$$

Je-li $n_0 = 0,0034 \text{ cm} \pm 0,0004 \text{ cm}$, $n = 1,3256 \text{ cm} \pm 0,0006 \text{ cm}$, je

$$\bar{\delta}d = \pm \sqrt{0,000\,000\,16 + 0,000\,000\,36} \text{ cm} = \pm 0,0007 \text{ cm},$$

$$d = 1,3222 \text{ cm} \pm 0,0007 \text{ cm},$$

$$r = 0,6611 \text{ cm} \pm 0,0004 \text{ cm}.$$

Příklad 2. Jest vypočíst modul pružnosti v tahu E z prodloužení ocelového drátu napínaného silou F .

Podle Hookova zákona platí pro prodloužení

$$y = \frac{1}{E} \frac{F}{S} l, \quad (11)$$

kde F je působící síla, l délka drátu a $S = \pi r^2$ je průřez drátu. Síla F je přesně stanovena, délka drátu je naměřena s chybou $\bar{\delta}l$, poloměr drátu s chybou $\bar{\delta}r$ a prodloužení y s chybou $\bar{\delta}y$. Pak ze vztahu (11) vychází

$$E = \frac{F}{\pi r^2} \frac{l}{y} \quad (12)$$

a tedy podle vzorce (10)

$$\bar{\delta}E = \pm \bar{E} \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{\delta}r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}y}{y}\right)^2} \quad (13)$$

Jsou-li naměřené hodnoty:

$$\begin{aligned} F &= 4,000 \text{ kp} = 4,000 \cdot 9,81 \text{ N} , \\ l &= 1,202 \text{ m} \pm 0,003 \text{ m} , \\ 2r &= 0,3000 \text{ mm} \pm 0,0002 \text{ mm} , \\ y &= 0,315 \text{ cm} \pm 0,001 \text{ cm} , \end{aligned}$$

vychází dosazením do výrazu (12) a (13)

$$E = (2,119 \pm 0,008) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

Příklad 3. Jest vypočíst modul pružnosti v tahu E z prohybu ocelové tyče s obdélníkovým průřezem.

Pro snížení y , středu tyče podepřené ve dvou bodech ve vzdálenosti l , a uprostřed zatížené silou F platí:

$$y = \frac{1}{48 E} \frac{l^3}{H} F , \quad (14)$$

kde $H = \frac{1}{12} b^3 c$; b je rozměr tyče ve směru působící síly a c rozměr tyče k němu kolmý.

Pro E ze (14) vychází

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{b^3 c} \frac{F}{y}$$

Pro chybu $\bar{\delta E}$ vychází podle (10) za předpokladu, že F je stanoveno přesně,

$$\bar{\delta E} = \pm \bar{E} \sqrt{\left(\frac{3\bar{\delta l}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{3\bar{\delta b}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta c}}{\bar{c}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta y}}{\bar{y}}\right)^2}$$

Jsou-li naměřené hodnoty:

$$\begin{aligned} F &= 5,000 \text{ kp} = 5,000 \cdot 9,81 \text{ N} , \\ l &= 100,2 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm} , \\ b &= 0,6050 \text{ cm} \pm 0,0006 \text{ cm} , \\ c &= 1,223 \text{ cm} \pm 0,001 \text{ cm} , \\ y &= 2,182 \text{ cm} \pm 0,009 \text{ cm} , \end{aligned}$$

vychází dosazením do výrazu (14)

$$E = (2,09 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} .$$

F. H. Norien:

Poznejte svůj rozhlasový přijímač

Kniha je určena pro každého, kdo chce poznat principy rozhlasového příjmu a lépe využít svého přijímače. V úvodní kapitole podává autor zajímavým způsobem historický vývoj spojení na dálku od nejprimitivnějších forem až po vznik radiotelegrafie, radiotelefonie, rozhlasu a televize. Tento historický výklad je zdůrazněn vhodně volenými obrázky.

V druhé kapitole autor vysvětluje, jak rozhlasový přijímač pracuje. Vykládá podstatu a druhy vlnění a přechází pak k základům rozhlasu. Popisuje populárním, ale zajímavým způsobem činnost vysílače i přijímače rozhlasu a vysvětluje a objasňuje zde četné základní radiotechnické pojmy (vazba, detekce, demodulace, citlivost, selektivnost, elektronka, vysokofrekventní, mezifrekventní zesilovač, proudový zdroj atd).

Třetí kapitola, označená „Jak zlepšit poslech rozhlasu“, probírá základní podmínky pro dobrou funkci přijímače. Pojednává zejména o různých typech antén, o uzemnění a o ladění přijímačů, o ukazatelích vyladění, o tónové cloně, různých vadách a poruchách přijímačů a o jejich odstraňování.

Čtvrtá kapitola ukazuje, jak je možno rozhlasového přijímače využít i jinak, než k přímému poslouchání rozhlasu. Upozorňuje zejména na možnost využití zdírek pro gramofon a pro druhý reproduktor. Uvádí také, jak je možno upravit starší přijímače, aby jejich výkonu bylo plně využito.

Pátá kapitola shrnuje základní směrnice zvláště pro ty, kdo si chtějí koupit nový rozhlasový přijímač.

V šesté kapitole knihy jsou zachyceny výhledy do budoucnosti. Autor popisuje různá zařízení, jimiž mohou být přijímače doplněny (dálkové ovládání, časové spínání) a upozorňuje, že řada věcí přitom podléhá módě. V závěru poukazuje na význam elektromagnetických vln a další možnosti jejich použití.

K. Šoler

K. Böhm - R. Dörge: Gigant atom

SNTL, Praha 1959, 328 stran, 48 stran obrazových příloh a četné obrázky v textu. Z německého originálu z r. 1957 přeložili V. Doksan-
ský a Josef Škop. Cena 29,50 Kčs za vázaný výtisk.

Je to populárně vědecká kniha o problémech jaderné fyziky a tech-
niky. Autoři začínají od řeckých filosofů, probírají základní poznatky
a objevy fyziky i chemie a přecházejí pak do moderní doby, kdy obje-
vem štěpení uranu začíná věk využití jaderné energie. Při sledování
vývoje vědeckých poznatků a názorů upozorňují při každé vhodné pří-
ležitosti i na společenské podmínky, za nichž došlo k těmto objevům
a názorům. Vhodně spojují vývoj vědeckého názoru a vědecké objevy
s vývojem lidské společnosti a ukazují na jejich souvislost. Zejména
v závěrečné kapitole jasně vyzdvihují, že nově objevený zdroj energie
nutně povede k podstatnému zvýšení výroby i spotřeby a že celková
produkce se do konce našeho století zvýší proti roku 1955 nejméně
20 až 200 krát. Zdůrazňují, že objev uvolňování jaderné energie bude
působit revolučně nejen v technice, ale i ve společenské organizaci
lidstva a že pouze socialistický společenský řád může spolehlivě zajistit
její plné využití ve prospěch celé lidské společnosti. Objev uvolňování
jaderné energie si ve svých důsledcích vynutí, aby byly vytvořeny
takové vztahy mezi státy, které by znemožnily jakoukoli další válku.
Až to bude zajištěno, zmizí chudoba a zaostalost z posledních částí
světa a lidstvo bude žít v míru a štěstí.

Kniha je psána zajímavě a čte se místy jako napínavý dobrodružný
román. Také překlad je velmi dobrý. Kniha má velmi pěknou úpravu,
je bohatě vypravena ilustracemi a obrazovými přílohami, které dopl-
ňují a vtipně glosují její text. Proto bude jistě velmi zajímavou četbou
pro naši mládež i pro její učitele, kteří v ní najdou mnoho podnětů
ke své odborné i k politickovýchovné práci.

K. Šoler

J. Drobkinová: Kde roboti vytlačují člověka

Vydalo SNPL Praha 1959, 130 stran, cena 3,85 Kčs.

Sovětská autorka ukazuje, jak využití jaderné energie a využití auto-
matizace ve výrobě zvyšuje produktivitu práce a umožňuje uskutečnit
Marxovu geniální předpověď o budoucí společnosti, v níž každý bude
pracovat podle svých schopností a každému se dostane podle jeho
potřeb. Kniha přesvědčivě a zajímavě líčí důsledky technického po-
kroku pro dělníky kapitalistických zemí, především USA a Anglie.
Autorka ukazuje na řadě fakt, jak Marxem a Leninem objevené zákony
kapitalistické výroby dnes na jedné straně vedou s neúprosnou nut-

ností k růstu bídy, vykořisťování, nezaměstnanosti a v důsledku toho i ke ztrátě jakékoli radosti z práce u miliónů pracujících a na druhé straně naopak vedou k ohromnému růstu bohatství a přepychu u hrstky kapitalistů. V socialistických státech je automatizace a mechanizace výroby základem celého hospodářství, zaměřeného na zvyšování životní a kulturní úrovně všech pracujících. Člověk se jejich pomocí stává vládcem strojů, stroje vytlačují těžkou manuální práci a pomáhají člověku dobývat rozsáhlá bohatství přírody stále účinněji a ve stále větší míře. Socialistická společnost tím získává prostředky k neustálému zvyšování životní a kulturní úrovně všech pracujících.

K. Šoler

Redakční sdělení

Redakce děkuje všem ředitelstvím škol i členům JČMF, kteří provedli nábor mezi mládeží, aby získali nové čtenáře. Narazili ovšem mnohdy na potíže s Poštovní novinovou službou, jak nám např. sděluje ředitelství dvacíleté střední školy v Ústí nad Labem:

„...ihned jsme provedli na škole nábor a získali jsme devět odběratelů Rozhledů matematicko-fyzikálních. Okamžitě jsme učinili hromadnou objednávku u zdejšího okresního poštovního úřadu, ale dosud jsme neobdrželi ani časopisy ani vyrozumění, že naše objednávka bude vyřízena. Protože při loňské objednávce jsme dopadli podobně, že jsme žádné časopisy nedostávali, obracíme se přímo na vás...“.

Stížnost této školy i průmyslové školy zeměměřické v Praze jsme postoupili ministerstvu spojů k dalšímu řízení.

Při této příležitosti upozorňujeme čtenáře, že redakce nemá na objednávky ani na doručování žádného vlivu. Nedisponujeme také žádnými náhradními čísly. Žádáme však všechny, kteří mají stížnosti na doručování našeho časopisu, aby nám zaslali písemnou zprávu. Budeme se snažit docílit u PNS zlepšení.

Redakce přeje svým čtenářům mnoho úspěchů v novém roce.

Konference o elektronice

Ve dnech 25.—27. dubna 1960 byla u příležitosti 15. výročí osvobození Československé republiky uspořádána Jednotou československých matematiků a fyziků, matematicko-fyzikální fakultou University Karlovy a Výzkumným ústavem pro vakuovou elektrotechniku 1. celostátní konference o elektronice. Účastnilo se jí asi 250 pracovníků.

Zahajovací projev na plenárním zasedání pronesl předseda JČMF ministr školství a kultury doc. dr. F. Kahuda. Zabýval se v něm některými otázkami výzkumu na vysokých školách a ostatních pracovištích a možnostmi jejich vzájemného spojení, např. zřizováním příslušných kateder vysokých škol přímo ve výzkumných ústavech a závodech. V dalších referátech byl shrnut vývoj a současný stav těchto oborů u nás i v cizině.

J. Váňa referoval o vzniku a rozvoji výzkumu vakuové elektroniky v ČSSR. Uvedl mj., že v Československu se nyní vyrábí téměř 50 druhů elektronek, včetně televizní obrazovky s vychylovacím úhlem paprsku 120° .

O výzkumu ionizačních jevů v plynech promluvil L. Pekárek. Zabýval se otázkami souvisícími se studiem vysoce ionizovaného plynu, tzv. plazmatu. Tento výzkum má bezprostřední význam pro uskutečnění řízené termonukleární reakce. Ukázal, že stávající stav si vynucuje hlubší zkoumání základních procesů probíhajících v plynech. Zmínil se též o některých možnostech využití v praxi: tavení pomocí vysoké teploty plazmatu, obrábění s použitím výboje, uskutečnění chemických reakcí ve výboji, plazmatické raketové motory, přímá přeměna tepelné energie v elektrickou a dalších.

L. Pátý referoval o současném stavu fyziky nízkých tlaků. Ukázal na rychlý vývoj v této oblasti, vyvolaný potřebami nejrůznějších oborů. Zmínil se o nových metodách získávání nízkých tlaků (difuzní, iontové a sorpční čerpání) a o výzkumu procesů probíhajících v čerpaném prostoru. Po probrání měřicích metod poukázal na praktické využití v průmyslu a laboratorní praxi. Uvedme např. čerpání elektronek, komor urychlovačů částic, pracovních prostorů termonukleárních reaktorů a jiných přístrojů.

Další práce na konferenci proběhla v těchto šesti sekcích: Elektronika decimetrových a centimetrových vln, Výboje v plynech a fyzika plazmatu, Katodová elektronika, Vakuová fyzika, Technika a technologie, Elektronová a iontová optika a Elektronické obvody.

Některé referáty byly věnovány následujícím otázkám. Např. speciální elektronky pro buzení a zesilování centimetrových vln (permaktron, karinotron), doutnavý výboj v plynech a párách organických sloučenin, přímá přeměna tepelné energie v elektrickou pomocí termoelektronové emise, citlivé fotokatody, hmotová spektrometrie, elektrické svařování skla, urychlovače částic, barevná televize a další. Celkem bylo předneseno 77 sdělení.

Na závěrečném plenárním zasedání promluvil zástupce Státního výboru pro rozvoj techniky. V diskusi se delegáti vyjádřili k současnému stavu a budoucím potřebám čs. výzkumu v oblasti elektroniky. Výsledky diskuse jsou obsaženy v rezoluci schválené v závěru konference. Elektronika je oborem, který prodělal v posledních letech bouřlivý rozvoj. Řízené termonukleární reakce nám zajistí téměř nevyčerpatelný zdroj energie. Stále rostoucí automatizace výrobních procesů, právě tak jako nové a perspektivní konstrukce výkonných matematických strojů a telemechanických zařízení, nutných pro úspěšný rozvoj astronautiky, staví před elektronický výzkum stále nové a složitější úkoly. Předpokladem jejich zdárného vyřešení je výchova dostatečného počtu fyziků, kteří se mohou uplatnit jak v základním, tak i v aplikovaném výzkumu.

Jan Bareš

Soutěžní úlohy I. kola MO

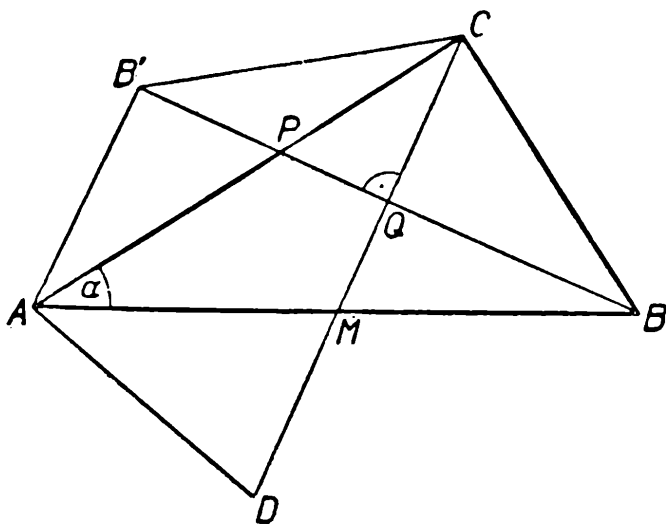
(Dokončení)

Kategorie D

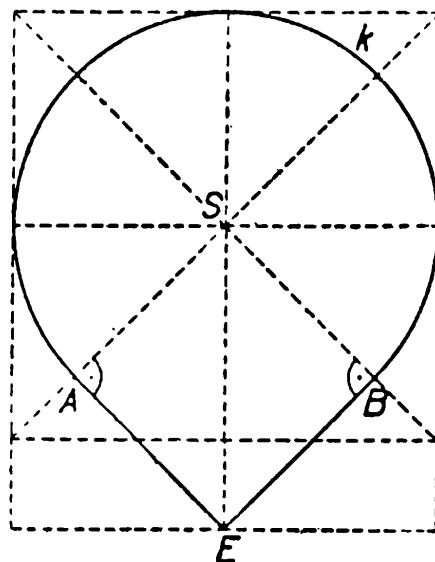
4. Na obr. 1 je ABC , pravouhlý trojúhelník o přeponě AB ; M je střed přepony, $CD = CA$; B' je bod symetrický s bodem B podle přímky CD , přičemž je úhel $\alpha > 45^\circ$.

Vyjadřte pomocí α velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků zakreslených na obrázku. Na závěr proveďte výpočet pro $\alpha = 42^\circ$.

5. Tenký drát jsme stočili do tvaru číslice 8 tak, že se skládá ze dvou shodných smyček. (Obr. 2.)



Obr. 1



Obr. 2

Smyčku tvoří oblouk $\widehat{AB}$ kružnice k a části tečen sestrojených v bodech A, B ke kružnici k ; délka oblouku je $\frac{3}{4}$ délky kružnice k . Víme, že výška zhotovené číslice je 48 cm.

Vypočítejte šířku číslice a délku spotřebovaného drátu.

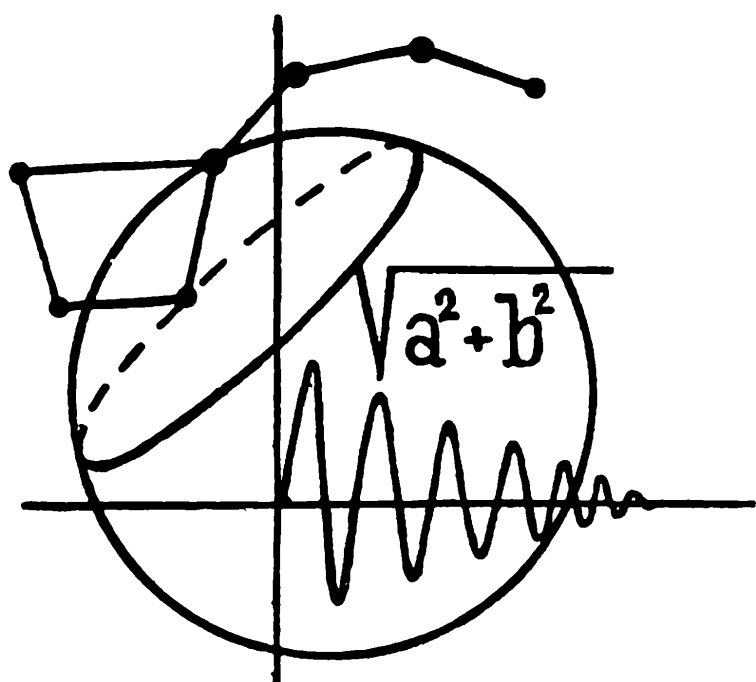
6. Je dán výraz $V = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) : \left(\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b} \right).$

- Zjednodušte daný výraz V .
- Udejte, pro která čísla a, b nemá výraz V smysl.
- Udejte, pro která čísla a, b je $V = 0$; dále, kdy je kladný a kdy záporný.

Řešení těchto druhých tří úloh odevzdejte do 28. února 1961.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



6

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 6

Toto číslo vyšlo 10. února 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

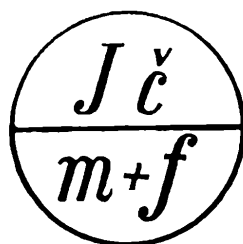
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H:

Dr. Č. Vitner: Diferenciální geometrie křivek v rovině	241
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	248
K. Špaček: Trojúhelník z výšek	254
Prof. Dr. A. Urban: Hypéroskopulační kružnice elipsy	256
J. Šaloun: Konstrukce průsečíků dvou soustředných elips o stejné dlouhých hlavních osách	261
J. Filip: Ku konstrukci kosouhlého axonometrického přímku	263
Inž. J. Hroník: Známe mocnější energii než atomovou?	267
Dr. K. Šoler: Tlak na stěny a výtok tekutin z nádoby	269
J. Cochlar: Pásmová teorie pevné fáze (Dokončení)	273
Dr. M. Kopecký: Astronomie se stává také vědou experimentální	278
CSc. L. Sehnal: Umělé družice a kosmické rakety	280
A. Herman: Pravděpodobnost, náhodné a nenáhodné jevy ve Sportce	282
Ik-ar: Interkamera 1960	285
F. Veselý: Vyznamenání našich vědeckých pracovníků Eulerovou metodou	287
M. M.: JČMF 1862—1962	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*11045. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Matematika

Dr. Čestmír Vitner, ČVUT, Praha:

Diferenciální geometrie křivek v rovině

§ 1. Úvod

Úkolem tohoto článku je seznámit vás se základními pojmy diferenciální geometrie rovinných křivek. Aby byl pro vás článek srozumitelnější, nebudu používat aparátu diferenciálního počtu, jak je to při výkladu tohoto odvětví geometrie obvyklé.

Základem diferenciální geometrie rovinných křivek je především pojem rovinné křivky a její tečny, pojem oskulační kružnice křivky a pojem řádu styku dvou křivek ve společném bodě. Při definici těchto pojmů hraje důležitou roli limitní přechod některých geometrických útvarů, jako jsou body, přímky a kružnice¹⁾. Definice zmíněných pojmů zde budou podány bez použití analytické geometrie. Při zkoumání některých otázek by však vyhýbání se analytické geometrii působilo potíže. Pro vaše pohodlí zde uvedu ve vší stručnosti vše, co budu z analytické geometrie potřebovat²⁾. Bude to rovnice přímky, kružnice, paraboly, elipsy a hyperboly, jakož i vzorce pro vzdálenost dvou bodů.

Přímka je dána lineární rovnicí $ax + by + c = 0$. Souřadnice průsečíku dvou přímek najdeme řešením příslušných rovnic. Přímka, která prochází bodem o souřadnicích $(x_0; y_0)$ a má směrnici k (tangentu úhlu přímky s osou x), má rovnici

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1,1)$$

¹⁾ Viz články doc. dr. K. Havlíčka v Rozhledech. Roč. 1958 č. 3 a 4.

²⁾ O analytické geometrii napsal do Rozhledů řadu článků doc. E. Kraemer. (Roč. 1959 a 1960).

Vzdálenost dvou bodů $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ je dána vzorcem

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1,2)$$

Kružnice se středem v bodě $(x_0; y_0)$ a poloměrem r má rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (1,3)$$

Parabola s vrcholem v počátku a s ohniskem v bodě $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ na ose y má rovnici

$$x^2 = 2p y \quad (1,4)$$

Elipsa se středem v počátku souřadnic a s ohnisky $F_1(-e; 0)$, $F_2(e; 0)$ na ose x má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1,5)$$

kde a je velká a b malá poloosa elipsy. Platí, jak víme, vztah $e^2 = a^2 - b^2$. Elipsa má čtyři vrcholy se souřadnicemi $(\pm a; 0)$, $(0; \pm b)$.

Hyperbola se středem v počátku a s ohnisky $F_1(e; 0)$, $F_2(-e; 0)$ na ose x má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1,6)$$

kde a je reálná, b imaginární poloosa. Asymptoty hyperboly jsou přímky procházející jejím středem a mající směrnici $\pm \frac{b}{a}$. Hyperbola má dva vrcholy na ose x se souřadnicemi $(\pm a; 0)$.

Výše jmenovaný limitní proces geometrických útvarů bude mít přirozený odraz u použitého analytického aparátu. Jde přitom v podstatě o tzv. *limitu funkce*. Pro naše účely celkem postačí, když vezmete na vědomí snadno pochopitelný následující fakt: Blíží-li se číslo x k číslu

x_0 , potom se číslo $\left(\frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}\right)^\alpha$ blíží k číslu $\left(\frac{a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1}{a_2 x_0^2 + b_2 x_0 + c_2}\right)^\alpha$

pokud je jmenovatel $a_2 x_0^2 + b_2 x + c_2$ různý od nuly; α přitom znamená libovolné kladné racionální číslo, nejčastěji jedničku; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ jsou reálné koeficienty.

§ 2. Křivka v rovině

Znáte jistě celou řadu rovinných křivek, máte patrně také jakousi představu o tom, co asi pod slovem rovinná křivka rozumíme, ovšem

definici, která by uspokojila z matematického hlediska, asi neznáte. Zastavíme se proto chvíli u tohoto základního pojmu. Křivku si dobře představíme jako kus všelijak pokrouceného drátu, který vznikl deformací nějakého kusu rovného. Odmyslíme-li si hmotu tohoto drátu, dospějeme k matematickému pojmu křivky. Zmíněný drát může sám sebe všelijak protínat. Je ho ale možno sestavit z jistého počtu částí, které již samy sebe neprotínají. Vezmeme-li nějaký kus velmi dlouhý, třeba součást dálkového elektrického vedení, dospějeme k pojmu neomezené, tj. do „nekonečna“ se táhnoucí křivky. Tyto jednoduché představy nám dávají náznak, jak při definování obecného pojmu křivky postupovat. Začneme s křivkami, které samy sebe neprotínají.

Definice jednoduché křivky. *Jednoduchá křivka* je soustava bodů, které vzniknou *spojitou deformací* úsečky, přímky anebo polopřímky, při které různým bodům původní úsečky (přímky anebo polopřímky) odpovídají různé body výsledné křivky.

Tato definice potřebuje několik vysvětlivek. Slovo *deformace* znamená něco analogického jako funkce: každému bodu původní úsečky (přímky nebo polopřímky) přiřadíme nějaký bod. V matematice se místo slova *deformace* používá častěji slova *zobrazení*. Pojem *spojitá deformace* znamená zhruba asi to, že bodům blízkým na úsečce (přímce nebo polopřímce) odpovídají při deformaci opět vzájemně blízké body. Tento pojem spojitosti pro svou důležitost by si zasloužil větší pozornosti a poněkud určitější formulace. Nebudu se tím ale zabývat. Spokojím se s uvedeným náznakem definice a s tím, že podmínka spojitosti zaručuje, že křivka není „přetrhaná“. To, že při definici jednoduché křivky požadujeme, aby různým bodům úsečky (přímky nebo polopřímky) odpovídaly různé body křivky, neříká zřejmě nic jiného, než že vylučuje zatím případ, kdy křivka sama sebe protíná, tj. vylučujeme tzv. vícenásobné body.

Příkladem jednoduché křivky nám může sloužit např. oblouk kružnice, parabola, jedna větev hyperboly, ale už nikoliv celá hyperbola anebo elipsa.

Jednoduchou křivku, která vznikne deformací nějaké úsečky, budeme nazývat *jednoduchým obloukem*. Body jednoduchého oblouku, které vzniknou zobrazením koncových bodů zmíněné úsečky, budeme nazývat *koncovými body* jednoduchého oblouku.

Pokusím se nyní definovat obecně pojem křivky, aby obsahoval pokud možno všechny nám známé příklady křivek a odpovídal také našemu drátěnému modelu křivky.

Definice rovinné křivky. *Křivka k* je soustava bodů, která má následující vlastnost. Ke každému bodu A na k lze nalézt dostatečně malou kružnici se středem v bodě A takovou, že část křivky ležící uvnitř této kružnice se skládá z konečného počtu jednoduchých

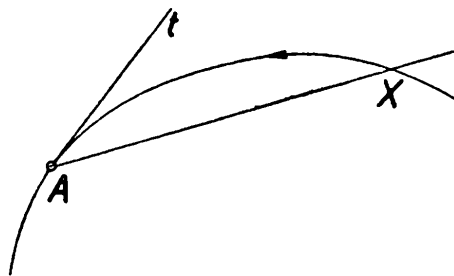
oblouků, které vycházejí z bodu A , při čemž žádné dva z nich již nemají další společný bod.

Jest zřejmé, že soustava bodů, která se skládá z konečného počtu jednoduchých křivek, z nichž každé dvě mají nejvýše konečný počet společných bodů, jest podle naší definice křivkou. Naše definice křivky obsahuje ovšem křivky složitější.

Definice křivky zde podaná je poněkud příliš obecná. Zahrnuje totiž křivky, které nejsou vůbec tak názorné, jako byl náš drátěný model. Nebudu zde uvádět příklady takových nenázorných křivek. Jejich studiem se - mimo jiné - zabývá jedna rozsáhlá část moderní matematiky, tzv. *topologie*. Další odstavec nám dá prostředky, jak tuto nenázornost do značné míry odstranit.

§ 3. Tečna křivky

Omezme se nejdříve na *jednoduché křivky*. Zvolme na takové jednoduché křivce pevný bod A . Vedle tohoto bodu vezměme na křivce jiný bod X a sestrojme polopřímku AX vycházející z bodu A . Viz obr. 1. Blíží-li se bod X po křivce k bodu A , může se polopřímka AX blížit k nějaké mezní (říkáme limitní) poloze, kterou nazveme *polotečnou jednoduché křivky* v bodě A . Pokud není bod A koncovým bodem, lze se k němu zřejmě blížit ze dvou stran, takže v nekonečném bodě křivky mohou existovat dvě různé polotečny. Pokud body těchto dvou polotečen vyplňují přímku, nazývá se tato přímka *tečnou křivky* v nekonečném bodě jednoduché křivky. Bod A se pak nazývá *dotykovým bodem*. Říkáme také, že se křivka dotýká tečny (přímky) v bodě A . Přímka procházející dotykovým bodem a kolmá k tečně se nazývá *normálou křivky*.



Obr. 1.

Přejděme nyní k obecnému případu. Omezme se na část křivky, ležící uvnitř dostatečně malé kružnice se středem v bodě A , uvažované při definici křivky. Z bodu A vychází konečný počet jednoduchých oblouků, z nichž žádné dva se kromě v bodě A již neprotínají. Viz např. obr. 2. Každý z těchto oblouků může mít v bodě A jednu polotečnu, kterou budeme nazývat *polotečnou křivky* v bodě A . Pokud z bodu A vycházejí právě dva jednoduché oblouky, dávají dohromady jediný jednoduchý oblouk, který nemá bod A za koncový. Tečnu tohoto jednoduchého oblouku v bodě A budeme nazývat *tečnou křivky* v bodě A .

Ve všech bodech křivky vyobrazené na obr. 2, až na body A , A_1 , A_2 , A_3 existuje tečna. V bodech A , A_1 , A_2 , A_3 existují tři různé polo-

tečny; při tom v bodech A_1, A_2, A_3 dvě z nich dávají dohromady přímku.

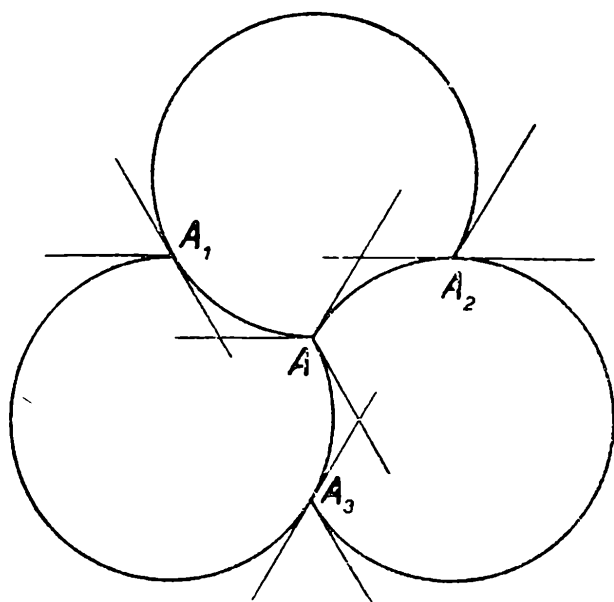
Nyní můžeme doplnit definici křivky, jak to bylo slíbeno v předchozím odstavci. Omezme se opět nejdříve na jednoduché křivky.

Jednoduchou hladkou křivkou nazveme jednoduchou křivku, která má tyto vlastnosti:

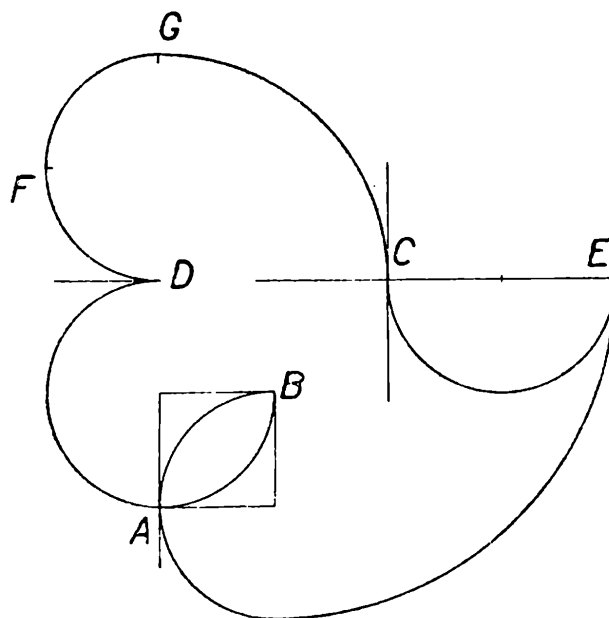
1. V každém nekonečném bodě existuje tečna.
2. V koncových bodech, pokud je jednoduchá křivka má, existuje polotečna.

3. Tečny křivky (resp. polotečny v koncových bodech) se spojitě mění. To přibližně znamená, že blízkým bodům odpovídají blízké tečny (resp. polotečny v koncových bodech).

Jestliže nyní v definici obecné rovinné křivky zaměníme slova jednoduchý oblouk na jednoduchý hladký oblouk, dostaneme definici *po částech hladké křivky*.



Obr. 2.



Obr. 3.

V této obecnosti se pojem křivky běžně v matematice i v aplikacích užívá. V klasické diferenciální geometrii, v tzv. diferenciální geometrii v malém se obvykle omezujeme na jednoduché hladké oblouky, na které klademe zpravidla ještě další požadavky.

Na obr. 3 je znázorněna po částech hladká křivka, která se skládá ze samých kruhových oblouků. Ve všech bodech křivky až na body A, B, D, E existuje tečna. V bodech A, B, D, E mají všechny oblouky vycházející z těchto bodů polotečny. V bodě A existují čtyři polotečny, které dávají dohromady dvě přímky. Takové body se zpravidla nazývají *dvojnásobnými uzlovými body*. V bodě B existují dvě polotečny, které svírají nenulový úhel, který je rovněž různý od přímého úhlu.

Takové body se někdy nazývají *bodý úhlové*. V bodech D i E obě polo-tečny splývají (a nedávají tudíž dohromady přímku). Takové body se nazývají *bodý vratu*. Bod D je *bodem vratu prvního druhu*, bod E *bodem vratu druhého druhu*. Všimněme si ještě bodu C ; ten se nazývá *bod inflexní*. V takovém bodě leží křivka ve dvou protilehlých kvadrantech, tvořených tečnou a normálou křivky (omezíme-li se ovšem na dosta-tečně malé okolí inflexního bodu).

Ukažme si nyní na jednoduchých příkladech, jak se pomocí analy-tické geometrie tečna v bodech křivky hledá.

P ř í k l a d 3,1. Najděme rovnici tečny elipsy v jejím bodě $(x_0; y_0)$. Pro tento bod platí

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (3,1)$$

Pro jiný bod $(x; y)$ elipsy platí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3,1')$$

Odečtením rovnic (3,1) a (3,1') dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - x_0^2)}{a^2} + \frac{(y^2 - y_0^2)}{b^2} = 0, \text{ tj. } \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{a^2} + \\ + \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{b^2} = 0 \end{aligned}$$

Odtud jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = - \frac{b^2 (x + x_0)}{a^2 (y + y_0)}. \quad (3,2)$$

Výraz $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ je zřejmě směrnici spojnice bodů $(x_0; y_0)$ a $(x; y)$.

Blíží-li se bod $(x; y)$ k bodu $(x_0; y_0)$, blíží se tato směrnice k směrnici tečny elipsy. To, že se bod $(x; y)$ blíží k bodu $(x_0; y_0)$, znamená, že souřadnice x se blíží k x_0 a souřadnice y k y_0 . Jednoduchým limitním přechodem dostaneme z rovnice (3,2) pro směrnici k tečny:

$$k = - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (3,2)$$

Při tom zřejmě nezáleželo na tom, po kterém z jednoduchých oblouků jsem se k bodu $(x_0; y_0)$ blížil. Pro hledanou tečnu známe tedy dotkový bod $(x_0; y_0)$, který samozřejmě splňuje rovnici (3,1) a směrnici k , pro kterou platí (3,2). Podle vzorce (1,1) tedy pro tečnu elipsy platí

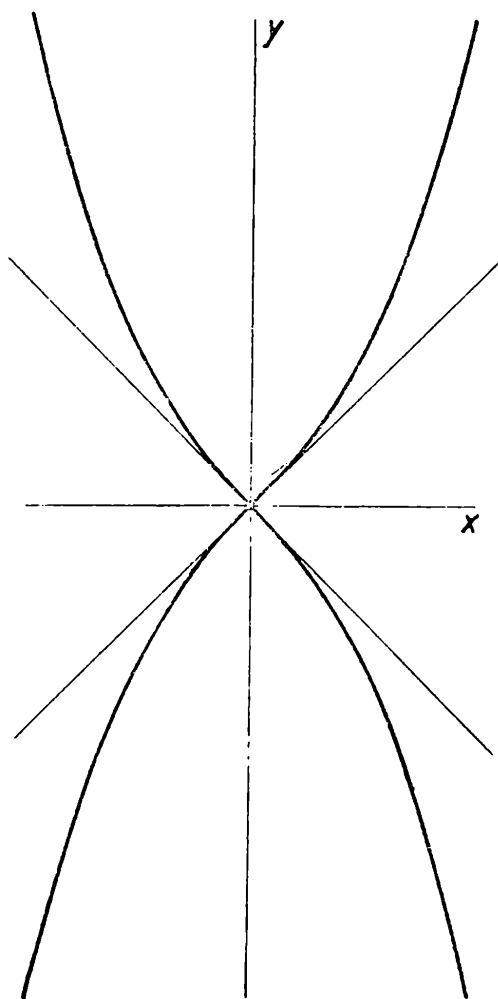
$$(y - y_0) = - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\frac{y_0 (y - y_0)}{b^2} + \frac{x_0 (x - x_0)}{a^2} = 0$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Vzhledem k (3,1) dostaneme konečně rovnici tečny elipsy ve tvaru



Obr. 4.

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1 \quad (3,3)$$

Výpočet byl udělán za předpokladu $y_0 \neq 0$, tj. že dotykový bod $(x_0; y_0)$ není vrcholem elipsy na ose x . Dá se nahlédnout, že vzorec (3,3) platí i v tomto případě.

Při odvození rovnice (3,3) jsme použili v podstatě pouze rovnice elipsy. Jestliže bychom v rovnici elipsy připustili možnost $a = b$, dostaneme rovnici

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (3,4)$$

což je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem a . Ze vzorce (3,3) dostaneme v případě $a = b$ rovnici:

$$x x_0 + y y_0 = a^2, \quad (3,5)$$

která je rovnicí tečny kružnice v jejím bodě $(x_0; y_0)$.

Příklad 3,2. Uvažujme křivku danou rovnicí

$$y^2 = (x^2 + 1) x^2 \quad (3,6)$$

a hledejme polotečny v počátku $(0; 0)$, kterým křivka zřejmě prochází. Směrnice sečny spojující bod $(0; 0)$ s bodem $(x; y)$ křivky je dána podílem $\frac{y}{x}$. Podle (3,6) však máme

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + x^2 \quad (3,7)$$

Blíží-li se bod $(x; y)$ k bodu $(0; 0)$, znamená to, že především se x blíží k nule. Rovnice (3,7) pak dává pro směrnici polotečny $k^2 = 1$, tj. $k_{1,2} = \pm 1$. Při tom $+1$ platí tehdy, blížíme-li se po bodech křivky ležících v prvním a ve třetím kvadrantu, -1 pak v případě, že se blížíme po bodech v druhém a čtvrtém kvadrantu. V bodě $(0; 0)$ tedy existují čtyři různé polotečny, které dávají dohromady dvě různé přímky s rovnicemi

$$y = \pm x. \quad (3,8)$$

Všimněme si tvaru křivky (3,6). Protože se v její rovnici vyskytují pouze sudé mocniny, jest křivka symetrická podle obou souřadnicových os. (S bodem $(x; y)$ na ní leží bod $(x; -y)$ a také $(-x; -y)$ - odtud to plyne.) Bod $(0; 0)$ je dvojnásobným uzlovým bodem. Křivka je znázorněna na obr. 4.

C v i č e n í 1. Dokažte, že v každém bodě hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ existuje tečna o rovnici $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$.

2. Dokažte, že v každém bodě paraboly $x^2 = 2py$ existuje tečna o rovnici $x x_0 = p(y + y_0)$.

3. Nakreslete křivku $y^2 = x^3$ (semikubická parabola). Ukažte, že v bodě $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$ existuje tečna se směrnicí $k = \frac{3x_0^2}{2y_0}$. V bodě $(0; 0)$ má křivka bod x vratu prvního druhu. Přesvědčte se, že kromě dotykového bodu má tečna s křivkou společný bod $\left(\frac{x_0}{4}; -\frac{y_0}{8}\right)$.

(Pokračování)

D o c. E m i l K r a e m e r, Universita Karlova, Praha:

O analytické geometrii v rovině

(Pokračování)

Kromě paraboly a elipsy je významnou křivkou *hyperbola*; je to množina všech bodů (v rovině), které mají od dvou pevných bodů stálý rozdíl vzdáleností, který není rovný nule a je menší než vzdálenost těchto bodů. Hyperbolu vidíte na obr. 29. Dané pevné body jsou označeny F, G a nazývají se *ohnisky* hyperboly; stálý rozdíl vzdáleností bodů hyperboly od ohnisek F, G označujeme $2a$ ($a > 0$).

Z definice hyperboly odvodíme její rovnici. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby její osou x byla přímka FG a jejím počátkem O střed S úsečky FG . Velikost shodných úseček OF , OG označme e ; potom je

$$F(-e; 0), G(e; 0)$$

Podle dané podmínky je $2a < 2e$ čili $a < e$.

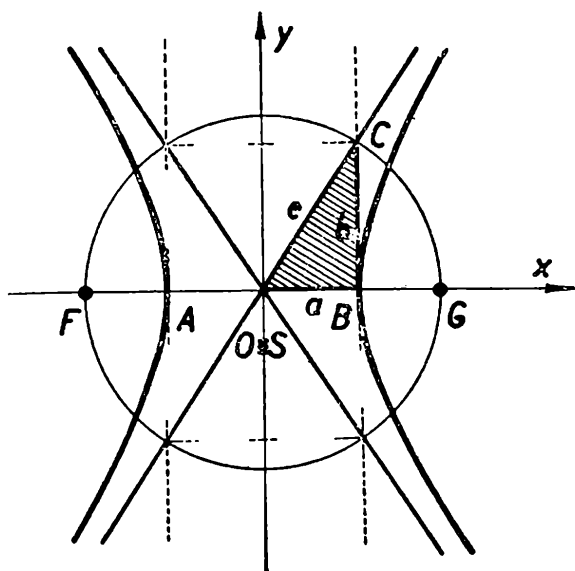
Souřadnice libovolného bodu P označme x, y . Jeho vzdálenosti PF , PG od ohnisek F, G se vypočtou podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů takto:

$$PF = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}, \quad (1)$$

$$PG = \sqrt{(x - e)^2 + y^2} \quad (2)$$

a) Jestliže bod $P(x; y)$ leží na hyperbole, pak podle definice hyperboly je buď $PF - PG = 2a$ nebo $PG - PF = 2a$. V prvním případě dostaneme podle (1) a (2) rovnici

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} - \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a \quad (3)$$



Obr. 29.

v druhém případě dostaneme rovnici

$$\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a. \quad (4)$$

Upravme nyní rovnici (3) takto:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + e)^2 + y^2} &= \\ &= 2a + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Umocníme-li dvěma a upravíme-li výsledek, dostaneme

$$\begin{aligned} 2ex &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x - e)^2 + y^2} - 2ex \\ ex - a^2 &= a\sqrt{(x - e)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Umocníme-li ještě jednou dvěma, dostaneme (po úpravě)

$$\begin{aligned} e^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2, \\ (e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(e^2 - a^2) \end{aligned}$$

Protože je $e > a > 0$, je $e^2 > a^2$ čili $e^2 - a^2 > 0$. Označíme-li

$$e^2 - a^2 = b^2, \quad (5)$$

dostaneme konečně rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (6)$$

K téže rovnici dospějeme obdobnou úpravou rovnice (4). Dokázali jsme tedy, že pro každý bod $P(x; y)$ hyperboly platí rovnice (6), ve které je b^2 dáno rovnicí (5).

b) Nyní dokážeme, že také obráceně každý bod $P(x; y)$, jehož souřadnice splňují rovnici (6), je bodem dané hyperboly s ohnisky F, G , tj. že pro něj platí buď $PF - PG = 2a$ nebo $PG - PF = 2a$. Abychom mohli důkaz provést, potřebujeme z rovnice (6) vypočítat PF a PG .

Z rovnice (6) především plyne, že je

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \quad (7)$$

Protože je $y^2 \geq 0$, $\frac{b^2}{a^2} > 0$, je také $x^2 - a^2 \geq 0$ čili $x^2 \geq a^2$ čili

$$|x| \geq a \quad (8)$$

To však znamená, že pro $x > 0$ je $x \geq a$, kdežto pro $x < 0$ je $-x \geq a$ čili $x \leq -a$. Je tedy

$$\text{buď } x \leq -a \text{ nebo } x \geq a \quad (9)$$

Souřadnice x každého bodu P , který splňuje rovnici (6), vyhovují tedy nerovnosti (8) čili nerovnostem (9).

Pro každý bod $P(x; y)$ splňující rovnici (6) platí pak podle (1) a podle (7):

$$\begin{aligned} \overline{PF}^2 &= (x + e)^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 + 2ex + e^2 - b^2 \end{aligned}$$

Avšak podle (5) je $a^2 + b^2 = e^2$, $e^2 - b^2 = a^2$, takže je

$$\begin{aligned} \overline{PF}^2 &= \left(\frac{e}{a} x\right)^2 + 2ex + a^2, \quad \overline{PF}^2 = \left(\frac{e}{a} x + a\right)^2 \\ PF &= \left| \frac{e}{a} x + a \right| \end{aligned} \quad (10)$$

Obdobně pro každý bod $P(x; y)$ splňující rovnici (6) platí podle (2) a podle (7):

$$\overline{PG}^2 = (x - e)^2 + y^2 = x^2 - 2ex + e^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$$

Upravíme-li obdobně jako v minulém případě, dostaneme

$$PG = \left| \frac{e}{a} x - a \right|. \quad (11)$$

Podle (8) platí pro souřadnici x bodu P splňujícího rovnici (6) odhad $|x| \geq a$. Protože je $e > a$, $|x| \geq a$, je

$$\begin{aligned} e|x| &> a^2, \\ |ex| &> a^2, \\ \left| \frac{ex}{a} \right| &> a \end{aligned} \quad (12)$$

Podle (9) je buď $x \geq a$ nebo $x \leq -a$.

Je-li $x \geq a$, je $x > 0$, takže je $\frac{e}{a}x + a > 0$; podle (10) je tedy v tomto případě

$$PF = \frac{e}{a}x + a \quad (13)$$

Podle (12) je dále pro $x \geq a$ (čili $x > 0$) výraz $\frac{e}{a}x - a > 0$, takže podle (11) je

$$PG = \frac{e}{a}x - a \quad (14)$$

Proto je podle (13) a (14)

$$PF - PG = 2a ;$$

to znamená, že bod P leží na hyperbole.

Je-li $x \leq -a$, je $x < 0$ čili $\frac{e}{a}x < 0$. Podle (12) je pak $\frac{e}{a}x + a < 0$, takže podle (10) je v tomto případě

$$PF = -\frac{e}{a}x - a . \quad (15)$$

Protože je $\frac{e}{a}x < 0$, je $\frac{e}{a}x - a < 0$, takže podle (11) je v tomto případě

$$PG = -\frac{e}{a}x + a \quad (16)$$

Podle (15) a (16) je tedy

$$PG - PF = 2a ;$$

to znamená, že bod P leží na hyperbole.

V oddíle a) jsme dokázali, že pro souřadnice x, y každého bodu P hyperboly platí rovnice $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. V oddíle b) jsme dokázali, že každý bod P , jehož souřadnice x, y splňují rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, leží na hyperbole. To znamená, že uvedená rovnice je *rovnici hyperboly*.

Rozborem této rovnice, který je zcela obdobný jako u elipsy (viz minulé číslo Rozhledů), dostaneme základní vlastnosti hyperboly, které lze shrnout takto:

1. Hyperbola je souměrná podle přímky spojující její ohniska; této přímce říkáme *hlavní osa* hyperboly. Tato osa protíná hyperbolu ve dvou bodech $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$ zvaných *vrcholy* hyperboly (obr. 29). Délku úsečky $AB = 2a$ nazýváme *délkou hlavní osy* nebo stručně hlavní osou; číslo a pak nazýváme *hlavní poloosou* hyperboly.

2. Hyperbola je souměrná podle osy souměrnosti úsečky FG ; této ose souměrnosti říkáme *vedlejší osa* hyperboly. Z její rovnice $x = 0$ a z rovnice hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ plyne, že tato osa nemá s hyperbolou žádný společný bod (viz obr. 29).

3. Hyperbola je souměrná podle středu $S \equiv O$ úsečky FG ; tento bod proto nazýváme *středem* hyperboly.

Výsledek našich úvah můžeme nyní shrnout stručně takto:

V ě t a 2 1. *Je-li soustava souřadnic zvolena tak, že její osa x splývá s hlavní osou a osa y s vedlejší osou hyperboly, má hyperbola rovnici*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Přitom a je hlavní poloosa hyperboly a $b = \sqrt{e^2 - a^2}$; číslo $2e$ je vzdálenost ohnisek hyperboly.

Číslo $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme *excentricitou* (*výstředností*) hyperboly. Vztah mezi a , b , e je patrný z pravoúhlého trojúhelníka OBC , jehož přepona $OC = e$ (obr. 29). Zároveň je patrné, že může být $b < a$, $b = a$ nebo $b > a$.

Rovnici hyperboly můžeme zřejmě také napsat ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obráceně, každá taková rovnice, resp. rovnice $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ve které je $a^2 > 0$, $b^2 > 0$, je vždy rovnicí hyperboly se středem v počátku a s hlavní osou v ose x . Její ohniska jsou $F(-e; 0)$, $G(e; 0)$, kde $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. Potom je totiž $e^2 - a^2 = b^2$ a platí celé odvození rovnice hyperboly. Platí tedy věta:

V ě t a 2 2. *Každá rovnice $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, v níž je $a^2 > 0$, $b^2 > 0$, je rovnicí hyperboly se středem v počátku a s hlavní osou v ose x .*

Tak např. rovnice $9x^2 - 16y^2 = 144$ je rovnicí hyperboly, která má poloosy $a = 4$, $b = 3$, excentricitu $e = \sqrt{16 + 9} = 5$ a ohniska $F(-5; 0)$, $G(5; 0)$.

Z rovnice hyperboly můžeme odvodit ještě její další vlastnosti; všimněme si aspoň dvou z nich.

1. Z rovnice hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ plyne, že je

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

tuto rovnici jsme dříve označili (7). Podle úvahy následující za rovnici (7) je

$$\text{buď } x \leq -a \text{ nebo } x \geq a$$

Geometricky to znamená (obr. 29), že každý bod $P(x; y)$ hyperboly buď leží vlevo od přímky $x = -a$ nebo vpravo od přímky $x = a$. Protože je $a > 0$, jsou to dvě různé přímky, takže se hyperbola skládá ze dvou od sebe oddělených částí zvaných *větve*. Z úvahy uvedené za rovnici (12) pak plyne, že pro body P jedné větve je $PF > PG$, kdežto pro body P druhé větve je $PG > PF$.

2. Hledejme průsečíky hyperboly s přímkou, která prochází jejím středem. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, aby bylo $x \equiv FG$ (F , G ohniska hyperboly) a aby počátek splynul se středem hyperboly, má hyperbola rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (a)$$

Každá přímka $p \neq y$ procházející jejím středem (tj. počátkem soustavy souřadnic) má pak rovnici

$$y = kx; \quad (b)$$

přítom k je směrnici této přímky.

Pro průsečíky obou čar platí pak rovnice (a) i (b) a tedy také rovnice

$$b^2x^2 - a^2k^2x^2 = a^2b^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2},$$

$$|x| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

Aby ovšem bylo x reálné, musí být $b^2 - a^2k^2 > 0$ čili

$$k^2 < \frac{b^2}{a^2},$$

$$|k| < \frac{b}{a}$$

Je-li $k \geq 0$, je $|k| = k$, takže dostáváme podmínku $k < \frac{b}{a}$. Je-li $k < 0$,

je $|k| = -k$, takže dostáváme podmínku $-k < \frac{b}{a}$ čili $k > -\frac{a}{b}$.

Po každé je tedy

$$-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$$

Je-li tato podmínka splněna, protíná přímka $y = kx$ hyperbolu ve dvou bodech, a to

$$P \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}} ; \frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}} \right)$$

$$Q \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}} ; -\frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}} \right)$$

Není-li tato podmínka splněna, pak přímka $y = kx$ hyperbolu vůbec neprotíná. To vidíme také jasně na obr. 29, kde jsou přímky

$$y = \frac{b}{a} x \quad y = -\frac{b}{a} x$$

nakresleny. Tyto přímky se nazývají *asymptoty* hyperboly. Hyperbola leží v těch dvou vrcholových úhlech sevřených asymptotami, v nichž leží její hlavní vrcholy A, B .

(Dokončení)

K a r e l Š p a č e k, ČVUT, Praha:

Trojúhelník z výšek

1. Konstrukce trojúhelníka z daných výšek se uvádí v Geometrii pro 9. až 11. postupný ročník tak, že se ze vztahů

$$P_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

odvodí postupná úměra

$$a : b : c = v_b : v_a : \frac{v_a \cdot v_b}{v_c} \quad (1)$$

Výraz $\frac{v_a \cdot v_b}{v_c}$ sestrojíme jako čtvrtou geometrickou úměrnou. Z úseček

$v_a, v_b, \frac{v_a \cdot v_b}{v_c}$ sestrojíme trojúhelník a hledaný trojúhelník je tomuto podobný.

V obr. 1 je narysován trojúhelník ABC . Označme $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Na straně AC sestrojme bod D tak, aby $CD = v_a$ a na straně BC bod E tak, aby $CE = v_b$. Pak úsečka DE je rovnoběžná s AB a zároveň $DE = \frac{v_a \cdot v_b}{v_c}$.

D ů k a z. Podle (1) platí

$$a \cdot b = v_b \cdot v_a$$

a proto DE je rovnoběžné s AB . Z podobnosti trojúhelníků ABC , DEC platí

$$CA : AB = CD : DE ,$$

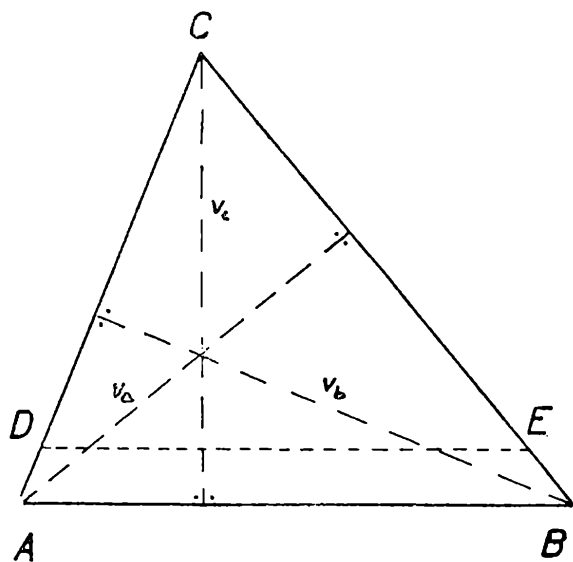
tj.

$$b \cdot c = v_a \cdot DE$$

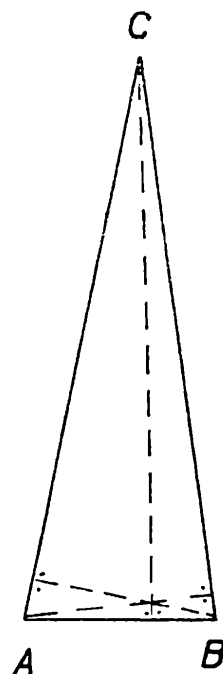
Porovnáním této úměry s rovnicí (1) máme

$$DE = \frac{v_a \cdot v_b}{v_c} ,$$

jak jsme měli dokázat.



Obr. 1.



Obr. 2.

2. Sestrojení trojúhelníka z daných výšek se řeší někdy též na základě postupné úměry

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c} ,$$

nebo

(2)

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

které dostaneme ze vzorců pro obsah trojúhelníka

$$2 \cdot P_{\Delta} = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c .$$

Zde sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, jehož strany jsou $A'B' = v_c$, $B'C' = v_a$, $A'C' = v_b$. O jeho výškách v'_a , v'_b , v'_c platí rovnice obdobné rovnicím (2):

$$\frac{1}{v'_a} : \frac{1}{v'_b} : \frac{1}{v'_c} = v_a : v_b : v_c, \quad (3)$$

respektive

$$v'_a \quad v'_b \quad v'_c = A'B' \quad B'C' \quad A'C' \quad (4)$$

Porovnáním rovnic (2) a (4) dostáváme

$$v'_a : v'_b : v'_c = a : b : c$$

Tedy trojúhelník, jehož strany mají délky v_a , v_b , v_c , je hledanému podobný. Konstrukce trojúhelníka je pak tato: Sestrojíme trojúhelník $A''B''C''$, jehož strany mají délky $A''B'' = v'_a$, $A''C'' = v'_b$, $B''C'' = v'_c$ a žádaný trojúhelník ABC je tomuto podobný.

Obr. 2 však ukazuje, že tato cesta nepovede vždy k cíli, neboť z výšek v_a , v_b , v_c se nedá vždy sestrotit pomocný trojúhelník $A'B'C'$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby se dal sestrotit trojúhelník $A'B'C'$, jehož strany mají délky v_a , v_b , v_c , je

$$v_a + v_b > v_c, \quad |v_a - v_b| < v_c$$

Tyto podmínky vyjádříme pomocí stran a , b , c trojúhelníka ABC . Z rovnice (2) dosadíme do (5) a obdržíme

$$bc + ac > ab, \quad |bc - ac| < ab \quad (6)$$

Vztahy (5) nebo (6) jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby se dal sestrotit trojúhelník $A'B'C'$, jehož strany mají velikosti v_a , v_b , v_c . Nejsou-li tyto podmínky splněny, použijeme prvního způsobu.

Deskriptivní geometrie

Prof. Dr. Alois Urban, ČVUT, Praha:

Hyperoskulační kružnice elipsy

Při praktickém rýsování nahrazuje se obvykle elipsa v okolí svých vrcholů oblouky tzv. oskulačních kružnic, přesněji řečeno hyperoskulačních kružnic. Jejich snadno zapamatovatelná konstrukce je patrná z obr. 1, kde elipsa je dána svými osami AB , CD . Z průsečíku E tečen elipsy ve vrcholech A , C spustíme kolmici

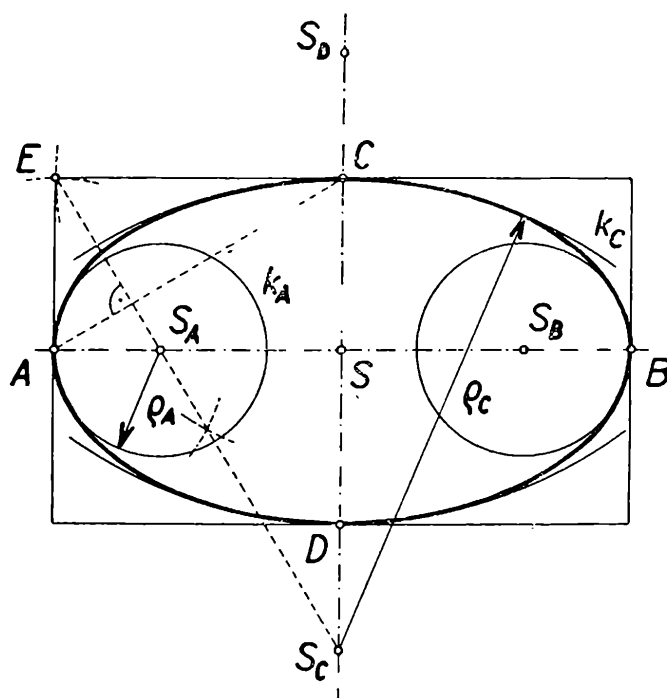
na spojnici AC . Její průsečíky S_A, S_C s osami elipsy jsou již středy osculačních kružnic pro vrcholy A, C . Středy S_B, S_D osculačních kružnic elipsy ve vrcholech B, D jsou s nalezenými středy S_A, S_C středově souměrné podle středu S elipsy.

Kolmici z E na AC sestrojíme konstruktivně výhodně jako spojnici průsečíků kružnice opsané okolo A poloměrem AE a kružnice opsané okolo C poloměrem CE .

Jsou-li a, b velikosti hlavní a vedlejší poloosy dané elipsy, pak pro poloměr ϱ_A osculační kružnice ve vrcholu A najdeme z podobných trojúhelníků $\triangle EAS_A \sim \triangle ASC$

$$\varrho_A \quad b = b : a ,$$

$$\text{tj. } \varrho_A = \frac{b^2}{a} .$$



Obr. 1.

Podobně poloměr ϱ_C osculační kružnice ve vrcholu C určíme z podobnosti trojúhelníků $\triangle S_CCE \sim \triangle ASC$; jest $\varrho_C = \frac{a^2}{b}$.

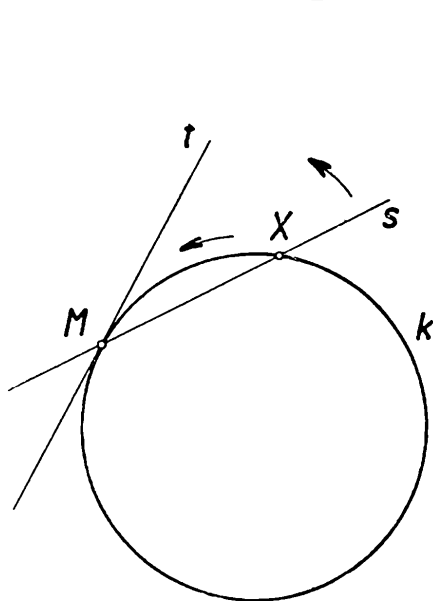
Proč však vlastně ze všech kružnic, které procházejí vrcholy elipsy, se k nahrazování oblouků elipsy v okolí jejích vrcholů užívá právě sestrojených kružnic o poloměrech $\varrho_A = \frac{b^2}{a}$ a $\varrho_C = \frac{a^2}{b}$ a proč ne snad nějakých jiných kružnic?

Odůvodnění provedeme dvěma metodami. Jednak analyticky užitím analytické geometrie, jednak prostorově užitím metod prostorové geometrie, lépe řečeno užitím deskriptivní geometrie.

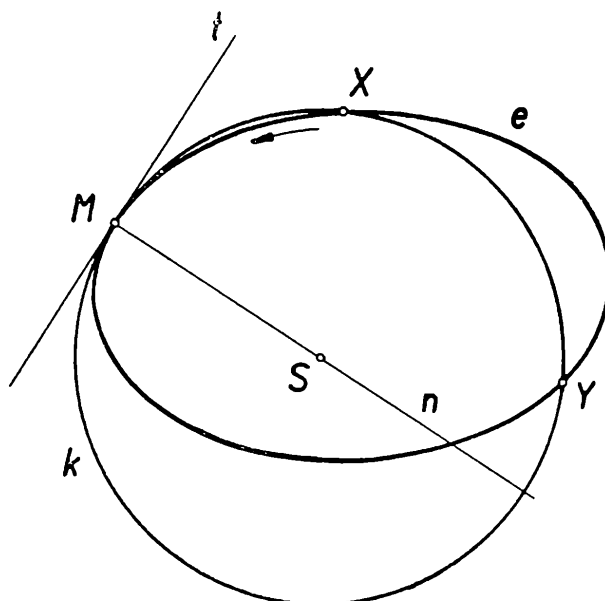
1. Analytická metoda

Je zřejmé, že kružnice, která má co nejlépe nahrazovat elipsu v okolí některého jejího bodu, musí v okolí tohoto bodu co nejtěsněji přiléhat k elipse, tj. musí mít s elipsou v daném bodě nejvyšší možný styk. Pojem styku dvou křivek patří ovšem do diferenciální geometrie, jež se vykládá až na vysoké škole. Osvětlíme jej však alespoň v rozsahu potřebném pro naše účely.

Jak víme, každá přímka s procházející bodem M kružnice (obr. 2), protíná ji ve dvou bodech: v bodě M a v dalším bodě X . Výjimku činí tečna t kružnice v bodě M , která má s kružnicí společný právě jen bod M . Otáčeli-li se však sečna $s \equiv MX$ kolem bodu M , přejde v tečnu t . Přitom bod X , který se pohybuje po kružnici, současně přejde v bod M . Je proto účelné říci, že tečna t má s kružnicí v bodě M dvojbodový styk. Podobně také tečna elipsy má ve svém dotykovém bodě s elipsou dvojbodový styk.



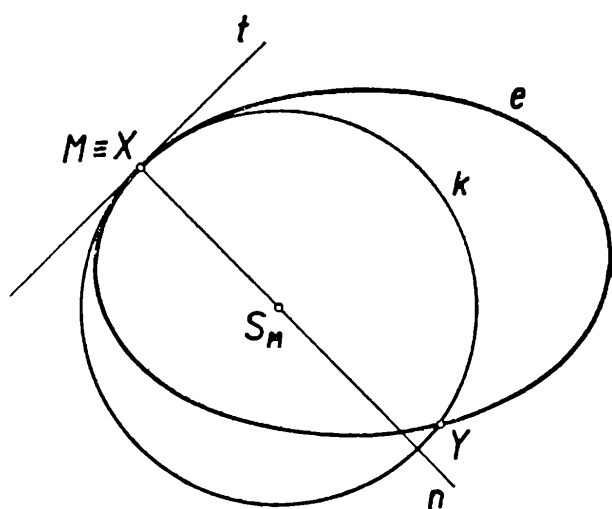
Obr. 2.



Obr. 3.

O kružnici, která se dotýká tečny elipsy v dotykovém bodě M , říkáme rovněž, že má s elipsou v tomto bodě dvojbodový styk. Takových kružnic je nekonečně mnoho. Všechny mají středy na normále elipsy v bodě M . Mezi nimi jsou kružnice, které mají s elipsou kromě bodu M ještě další dva body společné (obr. 3). Každá z nich alespoň zhruba nahrazuje elipsu v okolí bodu M . Jestliže jeden z dalších průsečíků kružnice s elipsou např. bod X splyne s bodem M , říkáme, že příslušná kružnice (která nyní má s elipsou společné jen body M a Y) má s elipsou v bodě M trojbodový styk (obr. 4). Kružnici pak nazýváme *oskulační kružnicí* elipsy v bodě M . Pro každý bod elipsy existuje právě jedna taková kružnice. Z její definice je zřejmé, že v okolí svého dotykového bodu s elipsou nejlépe ze všech kružnic nahrazuje elipsu.

Zavedených pojmů uijeme nyní při výpočtu poloměrů oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy; výpočet provedeme např. pro oskulační kružnici v hlavním vrcholu A . Uijeme k tomu, jak jsme již dříve uvedli, analytické geometrie.



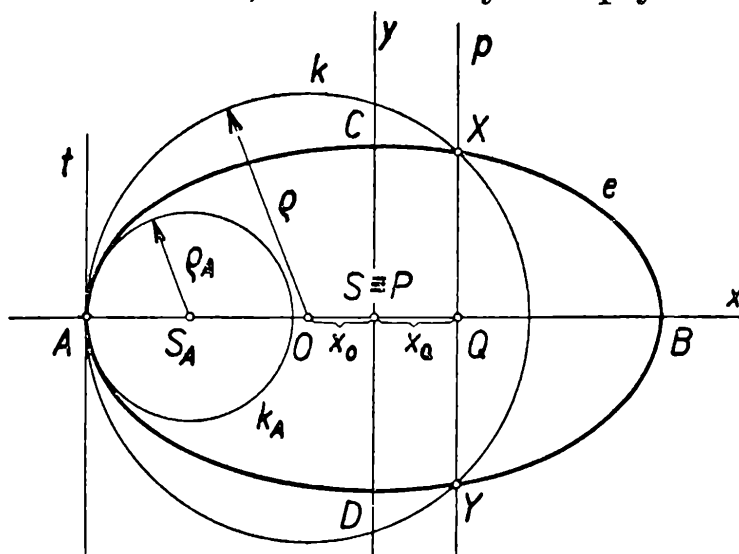
Obr. 4.

V rovině zvolíme pravoúhlou souřadnicovou soustavu $(P; x, y)$ o počátku P a osách x, y ¹⁾ tak, aby souřadnicová osa x (y) ležela v hlavní (vedlejší) ose elipsy; počátek P leží pak ve středu S elipsy (obr. 5).

Jsou-li a, b ($a > b > 0$) poloosy dané elipsy, pak její rovnice ve zvolené souřadnicové soustavě je

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad .^2) \quad (1)$$

Označení vrcholů elipsy volme tak, aby hlavní vrchol A ležel na záporné poloose x . Každá kružnice k , která se dotýká elipsy v bodě A , má střed



Obr. 5.

$O \neq A$ na ose x . Nechť jeho souřadnice je x_0 ($\neq -a$); je tedy $O(x_0; 0)$. Kružnice k má rovnici

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (a + x_0)^2 \quad .^3) \quad (2)$$

¹⁾ Zdůrazňme, že předpokládáme tzv. *reálnou euklidovskou rovinu*, tj. množinu bodů $M(x; y)$, kde souřadnice x, y jsou *reálná čísla*.

²⁾ Elipsa je tedy množina těch bodů $M(x; y)$ roviny, jejichž souřadnice x, y (reálná čísla) jsou vázány rovnicí (1).

³⁾ O číslech x, y v rovnici (3) předpokládáme ovšem, že jsou reálná.

Pro souřadnici x jejich společných bodů s elipsou (1) tedy najdeme (po vyloučení y^2 z rovnic (1) a (2) a po dosazení $e^2 = a^2 - b^2$)

$$(x + a) [e^2 x - a (e^2 + 2ax_0)] = 0. \quad (3)$$

Z rovnice (3) plyne, že společné body zvolené kružnice a elipsy leží jednak na přímce o rovnici

$$x + a = 0, \quad (4)$$

jednak na přímce p o rovnici

$$e^2 x - a (e^2 + 2ax_0) = 0.^4) \quad (5)$$

Rovnice (4) je rovnicí tečny elipsy (1) i kružnice (2) v bodě A ; jak víme, v tomto bodě se kružnice a elipsa dotýkají. Dosadíme-li (4) do (1), najdeme $y^2 = 0$; stejný výsledek dostaneme, dosadíme-li (4) do (2). Je tedy bod A (o souřadnicích $x = -a$, $y = 0$) jako průsečík přímky (4) s elipsou (1) i s kružnicí (2) počítán dvojnásobně. To je ve shodě s naším rčením, že tečna elipsy nebo kružnice má s ní dvojbodový styk. Podobně - v souhlase se zavedenými pojmy styku - každá kružnice (2) má s elipsou (1) v bodě A dvojbodový styk.

Zvolme libovolnou kružnici (2) tak, aby elipsu (1) protínala. Přímka p , na níž leží další společné body zvolené kružnice a dané elipsy, musí tedy protínat osu x v bodě úsečky AB , tj. pro souřadnici x_Q jejího průsečíku Q s osou x musí platit

$$-a \leq x_Q \leq a. \quad (6)$$

Protože je

$$x_Q = \frac{a (e^2 + 2ax_0)}{e^2}, \quad (7)$$

jak najdeme řešením rovnice (5), dostaneme po dosazení (7) do (6) a po krátké úpravě podmínku pro volbu x_0

$$-\frac{e^2}{a} \leq x_0 \leq 0 \quad (8)$$

Žádejme nyní, aby kružnice (2), jejíž střed vyhovuje podmínce (8), měla s elipsou ve vrcholu A více než dvojbodový styk. Pak musí jeden z průsečíků přímky p s elipsou splynout s vrcholem A . Protože v tomto případě je $x_Q = -a$, musí být $x_0 = -\frac{e^2}{a}$ [plyne přímo z (6) a (8)].

⁴⁾ Jestliže přímka p neprotíná elipsu (nebo kružnici), pak nemají dalších společných bodů, neboť neexistují *reálná čísla* x , y , která by současně vyhovovala rovnic (5) a (1) [nebo rovnic (5) a (2)]. Pak ovšem existují *komplexní čísla* x , y , která vyhovují oběma rovnicím. Vzhledem k tomu, že jsme se omezili jen na reálnou euklidovskou rovinu, existence společných komplexních řešení rovnic (1) a (2) nás nezajímá.

Protože přímka p je kolmá k hlavní ose, tak také druhý průsečík přímky p s elipsou splyne s bodem A . Volíme-li tedy $x_0 = -\frac{e^2}{a}$, pak rovnice (5) přímky p má tvar (4). Příslušná kružnice (2) má pak s elipsou (1) v bodě A nejen trojbodový styk, jak jsme požadovali, nýbrž dokonce čtýřbodový styk. Oskulační kružnice elipsy ve vrcholu A je tedy hyperoskulační (nebo také superoskulační) kružnicí elipsy.

Nalezená hyperoskulační kružnice prochází vrcholem A ($-a; 0$) a má střed $S_A \left(-\frac{e^2}{a}; 0\right)$; pro její poloměr ϱ_A snadno najdeme

$$\varrho_A = AS_A = |x_0 + a| = \left|a - \frac{e^2}{a}\right| = \frac{b^2}{a}. \quad (9)$$

Je tedy totožná s kružnicí k_A ze známé konstrukce v obr. 1.

Obdobnou metodou bychom našli, že kružnice k_C (obr. 1) je hyperoskulační kružnicí elipsy v jejím vrcholu C , tj. kružnicí, která má s elipsou v bodě C čtýřbodový styk.

(Dokončení)

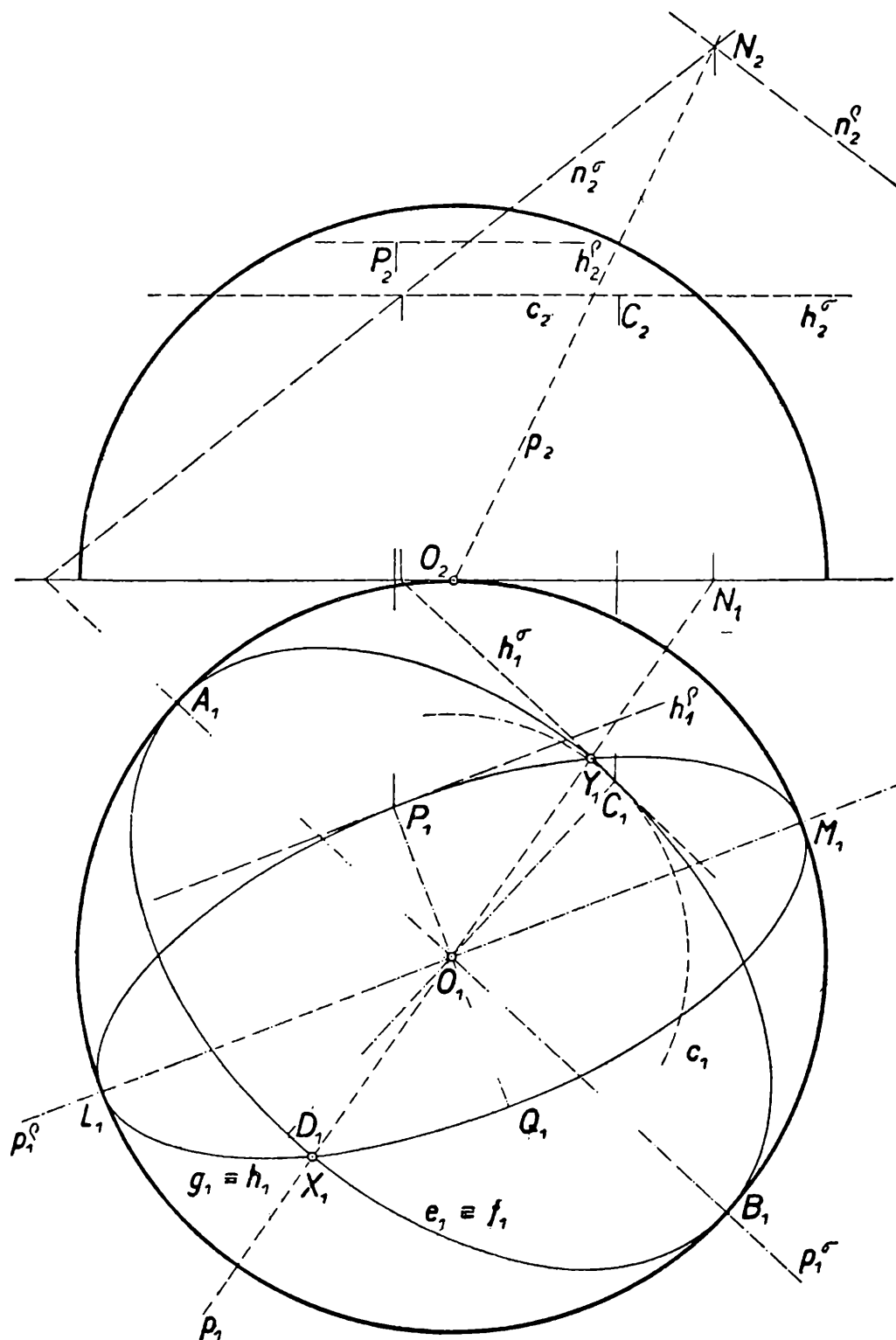
J o s e f Š a l o u n, Lázně Bělohrad:

Konstrukce průsečíků dvou soustředných elips o stejně dlouhých hlavních osách

Rovina σ procházející středem O dané kulové plochy protíná tuto plochu v hlavní kružnici, jejímž průmětem, pokud σ není promítací, je elipsa mající střed v průmětu bodu O a dotýkající se v hlavních vrcholech (zdánlivého) obrysu kulové plochy. Hlavní osa leží v průmětu hlavní přímky, vedlejší osa v průmětu spádové přímky. Obráceně, je-li dána elipsa se středem v průmětu O_1 středu kulové plochy a dotýkající se v hlavních vrcholech obrysu kulové plochy, můžeme ji považovat za průmět dvou hlavních kružnic dané kulové plochy. Roviny těchto kružnic jsou souměrně sdružené vzhledem k rovině procházející středem kulové plochy rovnoběžně s průmětnou. Tohoto poznatku použijeme nyní k řešení jedné planimetrické úlohy. Čtenáři však doporučuji, aby si před čtením dalšího textu narýsoval 1. a 2. příklad ze cvičení.

Úloha. Jsou dány dvě soustředné elipsy e_1, g_1 , jejichž délky hlavních os jsou stejné. Sestrojte jejich společné body.

Rovinu daných elips e_1, g_1 považujeme za půdorysnu (obr. 1). Jejich hlavní vrcholy označme po řadě $A_1, B_1; L_1, M_1$ a vedlejší osy označme $C_1, D_1; P_1, Q_1$, společný střed elips O_1 . Kolem O_1 opišme kružnici r_1 ,



Obr. 1.

která se elips e_1, g_1 dotýká v hlavních vrcholech. Kruh, omezený kružnicí r_1 , považujeme za půdorys kulové plochy, jejíž střed O leží v půdorysně a jejíž poloměr je roven hlavní poloose elips e_1, g_1 . Půdorysna

protíná pak kulovou plochu právě v kružnici r . Elipsy e_1, g_1 jsou podle dřívějšího půdorysy hlavních kružnic e, g položených na sestrojené kulové ploše. Nebereme zatím v úvahu, že elipsa e_1 (i g_1) je průmětem dvou hlavních kružnic kulové plochy. Kružnice e leží v rovině σ , jejíž půdorysná stopa je přímka AB . Nárysnou stopu n° sestrojíme pomocí bodu C , který leží na kulové ploše. Podobně kružnice g leží v rovině ϱ , jejíž půdorysná stopa je přímka LM a nárysnou stopu sestrojíme pomocí bodu P . Průsečnice p obou rovin protíná kulovou plochu v bodech X, Y . O bodu X platí, že leží na přímce p , přímka p leží v rovině σ a proto i bod X leží v σ , tj. X je bodem řezu e . Dále, přímka p leží v ϱ a proto i bod X leží v ϱ , tj., je bodem řezu g . Bod X je tedy bod společný kružnicím e, g a jeho půdorys je průsečík elips e_1, g_1 . Totéž platí o bodě Y .

Názor nám však říká, že obě elipsy mají kromě bodů X_1, Y_1 společné ještě další dva body U_1, V_1 . To se dá i dokázat.

Elipsa e_1 je půdorysem dvou hlavních kružnic e, f ; jejich roviny σ, σ' jsou souměrně sdružené podle půdorysny. Podobně g_1 je půdorysem dvou hlavních kružnic g, h , jejichž roviny ϱ, ϱ' jsou také souměrně sdružené podle půdorysny. Při konstrukci jsme použili průsečnice rovin σ, ϱ a došli jsme k bodům X_1, Y_1 . K těmto dvěma bodům bychom došli pomocí rovin σ', ϱ' . Pomocí rovin σ, ϱ' nebo σ', ϱ obdržíme body U_1, V_1 . Existují tudíž vždy čtyři různé průsečíky.

Cvičení

1. Danou kulovou plochu $[O(-2; 5; 5), r = 4,5]$ protněte rovinou $\sigma(8; 9; ?)$ v hlavní kružnici.

2. Je dána kulová plocha $O(0; 5; 5), r = 4,5$ a v půdorysně elipsa e_1 , jejíž střed je O_1 , hlavní osa má délku 9 cm a svírá s osou x 45° , vedlejší osa má délku 5,4 cm. Sestrojte nárysy obou hlavních kružnic dané kulové plochy, jejichž půdorys je daná elipsa.

Josef Filip, Bratislava:

Ku konštrukcii kosouhlého axonometrického priemetu

V čísle 4. ročníka 38 tohoto časopisu bol pod názvom „Jednoduché zobrazovací metody“ uverejnený článok o zostrojovaní názorného obrazu objektu z jeho pravouhlých priemetov. V tomto článku chceme podať ďalší jednoduchý praktický spôsob zostrojenia kosouhlého axonometrického priemetu z pravouhlých priemetov: pôdorysu a nárysu.

Pri konštrukcii axonometrického priemetu vychádzame obyčajne

z pravouhlého osového kríža $Oxyz$, ktorý tvorí základ súradnicovej sústavy. Za predpokladu, že sme zvolili, alebo že je daná axonometrická priemetňa σ a premietací lúč s zvierajúci s rovinou σ kosý uhol, zostrojíme kosouhlý priemet osového kríža $Oxyz$ a potom zostrojujeme priemety jednotlivých bodov zobrazovaného objektu pomocou ich pravouhlých súradníc.

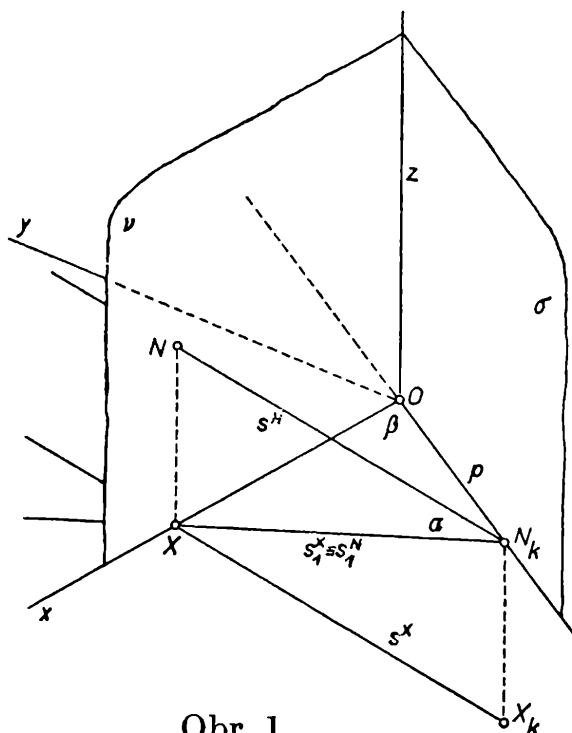
Z dôvodov, ktoré vysvitnú z ďalšieho bude výhodné voliť axonometrickú priemetňu σ tak, aby prechádzala osou z a bola od roviny $\nu \equiv xz$ odchýlená o uhol β . Rovina σ pretína rovinu $\pi \equiv xy$, na ktorú je kolmá, v priamke p , ktorá prechádza začiatkom súradníc O a má od osi x odchýlku β . Priamku p budeme krátko nazývať **z á k l a d n i c o u**. Premietací lúč s volíme kolmo na základnicu p , nie však kolmo na rovinu σ . Priamka s je teda od roviny π odchýlená o ostrý uhol α (obr. 1). Ak označíme s_1 pravouhlý priemet priamky s do roviny π , je $\alpha = \sphericalangle ss_1$.

Dohovoríme sa, že uhol $\beta = \sphericalangle px$ ($0 < \beta < R$) budeme nanášať od kladnej polosi x do tej polroviny roviny π oddelenej osou x , ktorá neobsahuje kladnú polos y . Uhol $\alpha = \sphericalangle ss_1$ ($0 < \alpha < R$) budeme nanášať takto: Rovina π rozdelí priestor na dva polpriestory, z ktorých ten, ktorý obsahuje kladnú polos z , označíme za kladný ($+P$) a k nemu opačný za záporný polpriestor ($-P$).

Priamka s_1 rozdelí rovinu $\pi \equiv ss_1 \parallel z$ na polroviny, z ktorých tú, ktorá leží v kladnom polpriestore ($+P$), nazveme kladnou polrovinou a k nej opačnú zápornou polrovinou. Konečne priamka p rozdelí priamku s_1 na dve polpriamky, z ktorých zase tú, ktorá leží v polrovine obsahujúcej kladné polosi x, y , označíme za kladnú. Potom uhol α nanášame od kladnej polpriamky s_1 do kladnej polroviny π , ak ide o pohľad zhora (nadhľad) a do zápornej, ak ide o pohľad zdola (podhľad).

Pri usporiadaní, aké sme zaviedli, je premietanie uhlami α, β určené. Voľbu uhlov α, β môžeme uviesť vždy do takého súladu, aby obraz mal také vlastnosti, ktoré požadujeme. Myslíme tu hlavne na názornosť a jasnosť obrazu s ohľadom na poradie dôležitosti jednotlivých detailov zobrazovaného objektu, na požiadavku úhľadnosti a pod.

Pre zjednodušenie vzťahu medzi objektom a jeho obrazom budeme predpokladať, že priemetňa σ je zároveň nákresňou a že má polohu

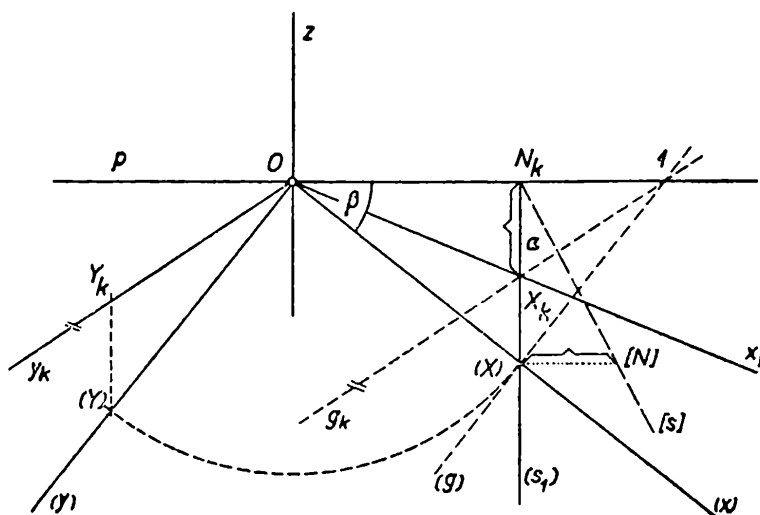


Obr. 1.

priečelnú. Pri tejto úprave splýva priemet s obrazom a preto budeme priemet nazývať tiež obrazom. Kosohlé priemety, resp. obrazy, budeme označovať indexom k . Priemety útvarov ležiacich na priemetni splývajú s útvarmi samotnými a preto ich označíme bez indexu.

Na obr. 1 sme naznačili zostrojenie kosohlých priemetov N_k, X_k bodov N, X , z ktorých jeden - bod X - leží na osi x a druhý - bod N - leží v rovine $\nu \equiv xz$ nad bodom X tak vysoko, že jeho kosohlý priemet N_k padne na základnicu p . Body N, X, N_k, X_k ležia v rovine $\kappa \equiv ss_1 \parallel z$ a preto je obrazec NXX_kN_k rovnobežníkom a $NX = N_kX_k$.

Teraz môžeme prikročiť ku konštrukcii priemetu osového kríža $Oxyz$. Os z si obyčajne predstavujeme v polohe zvislej a preto bude obrazom osi z zvislá priamka a obrazom základnice p vodorovná priamka. Ich priesečník je obrazom začiatku súradníc O (obr. 2). Rovinu $\pi \equiv xy$ sklopíme okolo priamky p do roviny σ . Súradnicové osi x, y prejdú



Obr. 2.

do priamok $(x) \perp (y)$, pričom $\sphericalangle p(x) = \beta$. Na kladnú polos (x) naniesieme jednotkovú úsečku $O(X) = j$ a zostrojíme kosohlý priemet X_k bodu X . Bodom (X) vedieme priamku $(s_1) \perp p$. Ak použijeme označenie z obr. 1, je priesečník $(s_1) \cdot p \equiv N_k$. K polpriamke $N_k(X)$ prenesieme uhol $\alpha \equiv (s_1)[s]$ a na priamke $[s]$ zostrojíme bod $[N]$, aby $(X)[N] \perp (s_1)$. Priamka $[s]$ je premietací lúč bodu N sklopený do π a s rovinou π do roviny σ . Ak ide o nadhľad, naniesieme na polpriamku $N_k(X)$ úsečku $N_kX_k = (X)[N]^1$. Bod X_k je kosohlý priemet bodu X , spojnica $OX_k \equiv x_k$ je kosohlý priemet osi x a úsečka $OX_k = j_x$ je priemet jednotkovej úsečky na tejto osi.

Aby sme zostrojili kosohlý priemet y_k osi y , uvedomíme si, že medzi

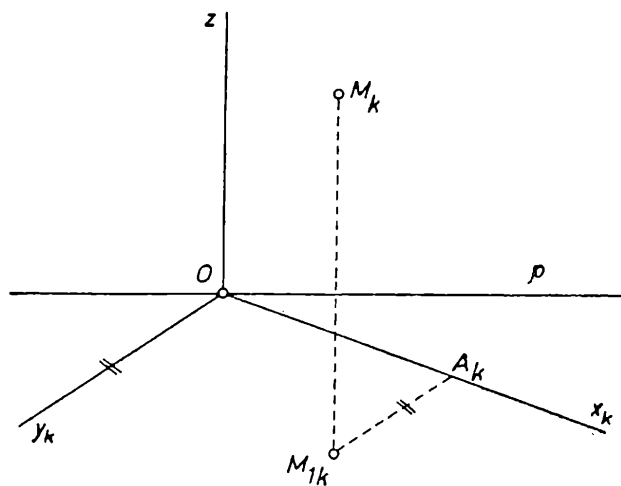
¹⁾ Keby sme zostrojovali podhľad, naniesli by sme úsečku $(X)[N]$ na polpriamku opačnú k polpriamke $N_k(X)$.

sklopeným útvarom a jeho kosouhlým priemetom jestvuje afinita, ktorá má os p a v ktorej jednej dvojici združených bodov je dvojica (X, X_k) . Na obr. 2 sme zostrojili y_k tým spôsobom, že sme viedli bodom (X) pomocnú priamku $(g) \parallel (y)$. Táto priamka pretína os afinity p v samodružnom bode I . Potom spojnicou $IX_k \equiv g_k$ a $y_k \parallel g_k$. Keď na os (y) nanesieme jednotkovú úsečku $O(Y) = j$ a na y_k zostrojíme bod Y_k , aby $(Y)Y_k \perp p$, je úsečka $OY_k = j_k$ kosouhlým priemetom jednotkovej úsečky na osi y .

Jednotková úsečka j na osi z sa zobrazí v skutočnej veľkosti, takže $j_z = j$.

Keď máme kosouhlý priemet súradnicových osí x, y, z i priemety jednotkových úsečiek na nich, môžeme jednoducho zostrojiť obraz každého bodu, ktorého súradnice poznáme.

Postupujeme obyčajne takto: (obr. 3). Ak čísla x, y, z sú súradnice bodu M vyjadrené pomocou jednotkovej úsečky j , nanesieme na os x_k



Obr. 3.

úsečku $OA_k = x \cdot j_k$, potom na rovnobežku s osou y_k úsečku $A_k M_{1k} = y \cdot j_y$ a získame axonometrický obraz pôdorysu M_{1k} bodu M . Keď konečne na rovnobežku s osou z bodom M_{1k} nanesieme úsečku $M_{1k} M_k = z \cdot j$, dostaneme axonometrický kosouhlý priemet M_k bodu M . Uvedené úsečky zrejme nanášame vždy s ohľadom na znamienko príslušnej súradnice²⁾.

(Pokračovanie)

²⁾ Keď máme zostrojiť obrazy viacerých bodov z ich súradníc, je výhodné urobiť pre osi x, y mierky s jednotkovými úsečkami j_x, j_y alebo (ak je to možné) redukčné uhly pre pomery $q_x = j_x : j, q_y = j_y : j$.

Inž. J a r o m í r H r o n í k, Brno:

Známe mocnější energii než atomovou?

Objevení energie atomového jádra v první polovině 20. století vyvolalo v technickém rozvoji takový závratný obrat, že kdysi mnohé fantastické plány, o nichž snil Verne a jež se až do nedávna zdály jen utopií, blíží se dnes již svému uskutečnění. Ani vynalezení parního stroje a později výbušných motorů, ani spoutání a využití elektrické energie, nemělo v dějinách techniky takový epochální význam, jako odhalení a ovládnutí energie atomového jádra. Prof. Dr. Pauling, známý zastánce zákazu zkoušek s nukleárními zbraněmi, prohlásil, že objev atomové energie je největším objevem, jaký byl učiněn od doby, kdy člověk pochopil, jak využít ohně.

Tu se vtírá lidské mysli všetečná otázka, neexistuje-li ve světě ještě mohutnější a účinnější energie než ta, která je skryta v atomovém jádře. A vskutku známe ji. Je to energie k o s m i c k ý c h p a p r s k ů, které přicházejí k naší Zemi z mezihvězdného prostoru.

Je tomu dnes již přes 45 let, co bylo bezpečně fyzikálně dokázáno, že na naši Zemi dopadá trvale ze všech stran vysoce pronikavé záření. Protože tyto paprsky mají svůj původ ve vesmíru, byly nazvány kosmickými.

Kosmické záření jsou paprsky neviditelné a našimi smysly nevnímatelné. Obrazně můžeme toto záření přirovnat k nepřetržitému krupobití, které se skládá z nepatrných „kosmických projektilů“, které dopadají do naší atmosféry. Ve dne v noci, v létě i v zimě, je naše Země neustále vystavena tomuto neviditelnému „krupobití“. Kosmické záření je značně pronikavé a bylo zjištěno nejen na ledovcích velehor, ale i při hladině mořské, na dnech hlubokých jezer, ba dokonce i v tunelech podzemních drah a v dolech, několik set metrů pod povrchem zemským.

Výzkum kosmického záření je dnes vedle atomistiky a astronautiky v popředí fyzikálních problémů. Dnes je již známo, že kosmické paprsky jsou poněkud jiné povahy než paprsky gama, jak se původně myslelo. Bylo zjištěno, že v kosmickém záření jsou elektricky nabitě

částice, které se pohybují velice rychle. Četná měření ukázala, že intenzitu kosmického záření ovlivňuje zeměpisná šířka a že je minimální na magnetickém rovníku a maximální asi na 50° geomagnetické šířky, odkud ji potom již dále k pólům nepřibývá.

Síla účinnosti kosmických paprsků se však dále mění s nadmořskou výškou. Díky umělým družicím Země bylo nutno podstatně poopravit dosavadní představy o intenzitě kosmického záření ve značných výškách. Až do této doby byly údaje ověřovány pokusnými přístroji, vyneseny mi balóny do výšky asi 30 km. Bylo zjištěno, že intenzita kosmických paprsků je tam o něco slabší než ve výši 20 km nad hladinou mořskou. Tento úkaz byl již dříve vysvětlen. Původní kosmické paprsky přicházející z vesmíru, tzv. **p r i m á r n í s l o ž k a k o s m i c k ý c h p a p r s k ů**, je složena hlavně z rychle se pohybujících protonů, které se srážejí v naší atmosféře s molekulami dusíku, kyslíku, případně jinými plyny obsaženými ve vzdušném obalu. Srážkou se vyvolá záření, tzv. **s e k u n d á r n í** (druhotné), které se kaskádovitě šíří, dosahuje svého maxima a pak postupně k zemskému povrchu slábne. Zatím co se až do nedávné doby předpokládalo, že maximum intenzity sekundární složky kosmického záření je kolem 20 km nad mořskou hladinou, přístroje družic a speciálních raket zaznamenaly něco jiného.

Z výsledků měření Mezinárodního geofyzikálního roku v letech 1957 až 1959 bylo zjištěno, že existují dvě zóny čili pásy kosmického záření kolem naší Země, které vykazují značně vysokou intenzitu. Tyto zóny si možno představit jako oblak elektricky nabitých částic, které jsou udržovány v blízkosti Země jejím magnetickým polem. Vnitřní pásmo, obsahující částice s podstatně vyšší energií než v pásmu vnějším, začíná v zeměpisné šíři 35° až 40° nad oběma polokoulemi a nazývá se též **z ó n o u p o l á r n í**. Objevuje se ve výši asi tisíce kilometrů, vzrůstá směrem nahoru, takže maximální intenzita je soustředěna ve vzdálenosti asi dvou až tří tisíc kilometrů od povrchu zemského. Druhá vnější zóna, nazvaná též **r o v n í k o v á**, dosahuje nejvyšší výšky nad rovníkem, kdežto v zeměpisné šířce kolem 60° se přibližuje na pouhých několik set kilometrů k povrchu Země. Toto pásmo je složeno výhradně z elektronů a podle měření sovětské kosmické rakety nastává maximum „zemského korpuskulárního záření“ asi ve vzdálenosti 26 000 km od středu Země. Vnější hranice tohoto pásma není stálá a může se měnit v rozmezí 60 000 až 90 000 km. Nad touto hranicí možno již mluvit jen o primární složce kosmických paprsků.

Charakteristické a z technického hlediska zajímavé je to, že kosmické částice se vyznačují obrovskou energií, která je schopna uvolnit v atomovém jádře takové množství energie, že se jádro rozletí na „střepiny“, to je alfa-částice, protony, mesony, elektrony atd. Takový rozpad spotřebuje obrovskou energii, a to 10krát větší než je ta, kterou uvolňují obyčejná radioaktivní štěpení. Pohybová energie kosmických paprsků

je nesmírná, o mnoho větší (až tisíckrát) než u částíček vyzařujících z radioaktivních jader, nebo uměle urychlených v cyklotronech. Jak bylo zjištěno, kosmické paprsky vyplňují veškerý prostor naší galaktické soustavy a fyzikové vypočítali, jakou energii přináší všechno kosmické záření ve chvíli, kdy vstupuje do naší atmosféry. Vyšlo jim číslo přibližně stejně veliké jako energie všeho hvězdného záření, jež dopadá na naši Zemi. Tato energie vyjádřená v technických jednotkách by se rovnala práci, vykonané za hodinu s výkonem asi dvou a půl miliónu koní. Největší část této gigantické energie se však pohltí ve vzdušném obalu naší Země.

Bádání o kosmických paprscích přispívá nejen k prohloubení základních poznatků geofyziky a atomistiky, ale je přímo rozhodující pro perspektivu budoucích meziplanetárních letů. Proto kdysi z podružného odvětví fyziky, zabývajícího se jen specifickými jevy v ovzduší, vyrostla v poslední době nauka o kosmických paprscích v jeden z vedoucích oborů současné moderní vědy.

Dr. Kliment Šolér, Praha:

Tlak na stěny a výtok tekutiny z nádoby

V nauce o tlaku v kapalinách se uvádí, že tlak na stěny je přímo úměrný hloubce otvoru pod povrchem kapaliny a tento poznatek se potvrzuje pokusem, při němž kapalina vytéká ze tří pod sebou (obvykle souměrně) položených otvorů ve stěnách válcové nádoby. Tento obrázek najdeme ve většině populárních knih o fyzice, zejména v učebnicích pro 6. a 7. ročník všeobecně vzdělávacích škol. Obrázek je např. otištěn v naší nynější učebnici pro 7. postupný ročník (str. 49, obr. 41) a je uveden také v sovětské učebnici Peryškin-Falejev, Kurs fyziky I., obr. 46; najdeme jej dokonce i ve vysokoškolských skriptech (Kašpar-Terš, Mechanika-Akustika, str. 127, obr. 106). Je však zajímavé, že obrázek neodpovídá skutečnosti. Na obrázku je poměrně vysoká válcová nádoba (jako na obr. 2) s třemi otvory. Z každého otvoru vytéká vodní paprsek ve tvaru paraboly. Parabola vycházející z horního otvoru protíná rovinu dna blízko nádoby, parabola vycházející ze středního otvoru o něco dále a parabola vycházející z nejnižšího otvoru dopadá do roviny dna nejdále. Pokus se uvádí jako důkaz skutečnosti, že tlak na stěnu nádoby je v rovině horního otvoru nejmenší, v rovině dolního otvoru největší. Přesvědčíme se o tom pomocí následujícího, nepříliš obtížného, výpočtu.

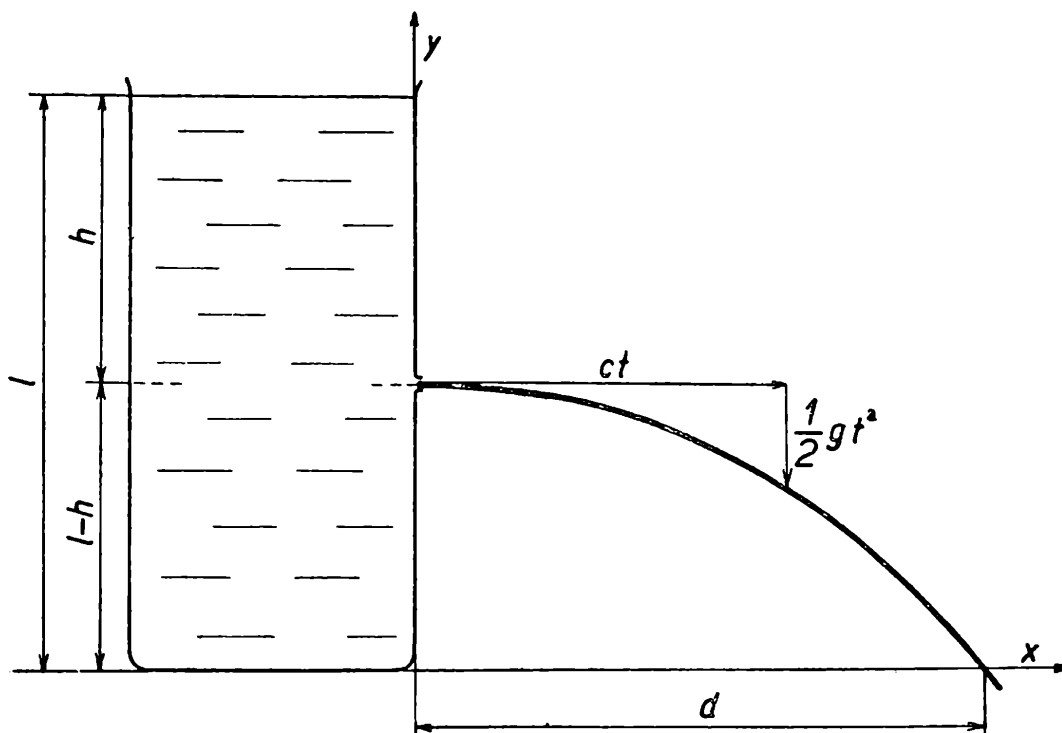
Základní rozměry jsou uvedeny na obrázku č. 1. Výšku vody v nádobě označíme l , výšku horní hladiny kapaliny nad výtokovým otvorem h .

Tlak kapaliny na 1 cm^2 ve výšce otvoru činí

$$p = h g s \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = h g s \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \text{ cm}} = h g s \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3};$$

je číselně roven potenciální energii 1 cm^3 kapaliny hustoty $s \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, takže potenciální energie 1 cm^3 kapaliny u dna nádoby je

$$E_p = h g s$$



Obr. 1.

Vytéká-li kapalina z otvoru, přemění se tato její potenciální energie v kinetickou energii tohoto množství kapaliny ($m = s$)

$$E_k = \frac{1}{2} s v^2.$$

Nebereme-li v úvahu energetické ztráty, vyplývá ze zákona zachování energie rovnice

$$\frac{1}{2} s v^2 = h g s,$$

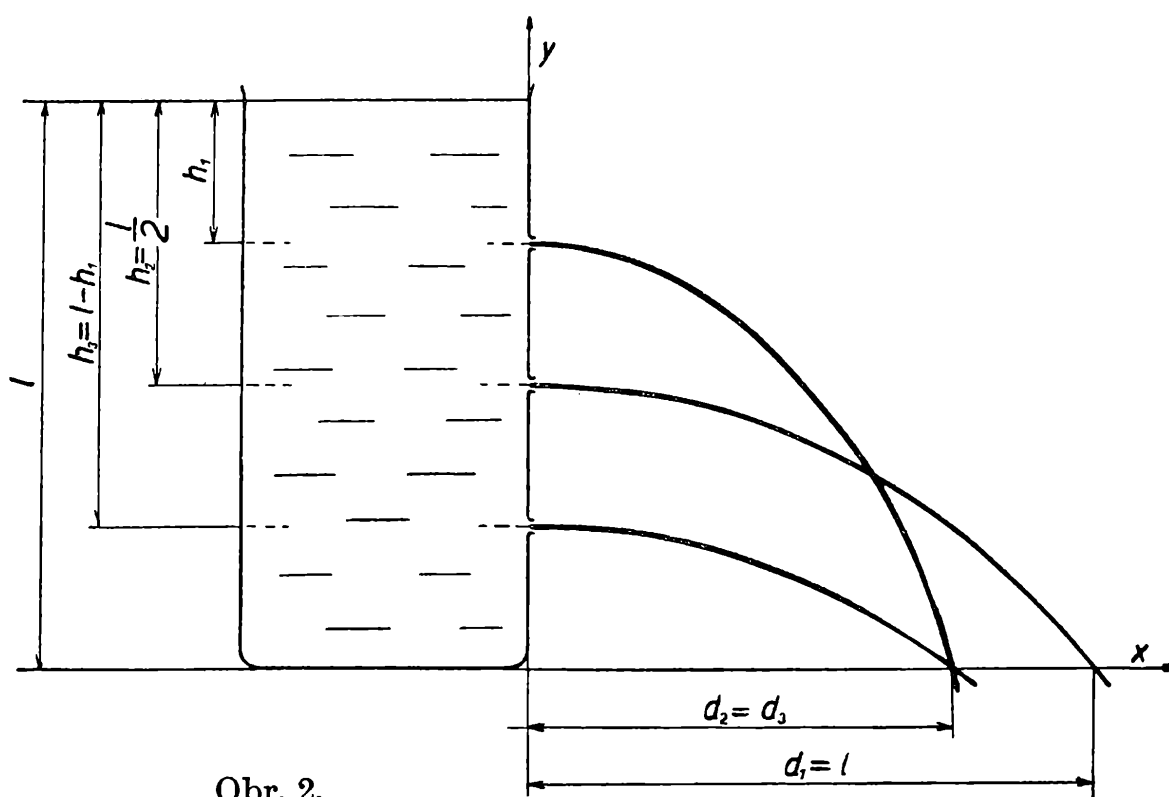
kde v značí výtokovou rychlost kapaliny. Z rovnice vyplývá přímo Torricelliho vzorec pro výtok tekutin

$$v = \sqrt{2 h g} \quad (1)$$

Tekutina vytéká z otvoru stejnou rychlostí, které by dosáhla, kdyby padala volným pádem od horní hladiny kapaliny k výtokovému otvoru, což je ostatně také zřejmé přímo z principu zachování energie.

Protože na vytékající kapalinu působí současně také zemská tíže, padá současně volným pádem svisle dolů a její proud vytvoří parabolický oblouk. Abychom dostali jeho rovnici, užijeme souřadného systému znázorněného na obr. 2. Osa x je průsečíkem roviny proložené svisle otvory ve stěně a roviny dna nádoby. Osa y je proložena středy výtokových otvorů kolmo k rovině dna. Souřadnice bodů, jimiž vytékající kapalina postupně protéká, je dána parametrickými rovnicemi

$$x = v t, \quad y = (l - h) - \frac{1}{2} g t^2$$



Obr. 2.

Vypočítáme-li z první rovnice $t = \frac{x}{v}$ a dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme

$$y = (l - h) - \frac{g x^2}{2 v^2}.$$

Dosadíme-li z rovnice (1) $v = \sqrt{2 h g}$, je

$$y = l - h - \frac{g x^2}{2 \cdot 2 h g},$$

$$y = l - h - \frac{x^2}{4 h}. \quad (2)$$

Délku vrhu dostaneme jako souřadnici x průsečíku nalezené křivky (paraboly) s osou x . Pro tento bod je souřadnice y rovna nule, takže x dostaneme řešením rovnice

$$l - h = \frac{x^2}{4h}.$$

Z ní vyplývá pro délku vrhu, tj. pro délku, v níž vytékající paprsek dopadne do roviny dna, vztah

$$x^2 = 4h(l - h) \quad (3)$$

Je-li výtokový otvor (2) v polovině nádoby ($h = l/2$), plyne ze vzorce (3) délku vrhu $x_2 = l$. Délka vrhu je rovna výšce sloupce kapaliny nad dnem nádoby. Přesvědčíme se, že pro tuto polohu výtokového otvoru je délka vrhu maximální, tj. delší, než pro kteroukoli jinou polohu výtokového otvoru. Snadno se o tom přesvědčíme úpravou rovnice (3)

$$\begin{aligned} x^2 &= 4h(l - h) = 4hl - 4h^2 = -(4h^2 - 4hl + l^2 - l^2) = \\ &= -(4h^2 - 4hl + l^2) + l^2, \\ x^2 &= l^2 - (2l - h)^2 \end{aligned}$$

Veličina x^2 je rozdílem dvojmocí dvou čísel a má proto největší hodnotu, je-li záporný člen roven nule, tj. pro $l = h/2$.

Snadno si to ověříme také přímým výpočtem, sestavíme-li tabulku pro různé polohy výtokového otvoru pod horní hladinou (h), pro výšku nádoby např. pro $l = 10$.

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(l - h)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$4h(l - h)$	0	36	64	84	96	100	96	84	64	36	0
v	0	6,0	8,0	9,17	9,8	10,0	9,8	9,17	8,0	6,0	0

Ze vzorce (3) je zároveň přímo patrné, že délka vrhu je stejná pro paprsek vytékající ve vzdálenosti h od horní hladiny, tj. ve vzdálenosti $(l - h)$ ode dna nádoby, jako pro paprsek vytékající ve vzdálenosti h od dna nádoby. Vzorec (3) se při tom nezmění, protože oba jeho poslední činitele se v těchto dvou případech pouze vymění.

Toto si snadno ověříme pro $h_1 = l/5$ a pro $h_3 = 4l/5$, kdy pro délku vrhu vyjde jednoduchý výraz

$$x_1 = d_1 = \frac{4l}{5} = d_3 = x_3.$$

Délka vrhu je v těchto případech opravdu stejná a o pětinu kratší, než pro otvor umístěný uprostřed výšky nádoby.

Výsledky výpočtu si také ověříme pokusně, např. pomocí plechovky od konzerv, které mívají výšku 12 cm, nebo u velkých konzerv 24 cm. Zhotovíme-li do nich (z vnitřku) pomocí hřebíků otvory ve stanovených výškách, zjistíme souhlas s provedeným výpočtem.

Výsledek, který snad na první pohled překvapuje, pochopíme snadno, uvážíme-li, že o délce vrhu rozhoduje nejen tlak a počáteční rychlost kapaliny, ale i doba, která uplyne mezi okamžikem, kdy kapalina vyteče z výtokového otvoru a mezi okamžikem, kdy dopadne do roviny dna nádoby. Tato doba je pro nejnižší otvor kratší, takže třetí paprsek nedostříkne tak daleko jako paprsek prostřední. Chceme-li provést pokus uvedený v učebnici, je třeba, aby nádoba stála na podstavci, který by byl alespoň tak vysoký, jako výška sloupce kapaliny v nádobě nade dnem. Učitelé pokus většinou demonstrují tak, že s ohledem na to, aby žáci dobře viděli, staví výtokovou nádobku na vyšší podstavec, nebo ji drží nad stolem v ruce. Okolnost způsobila, že téměř žádný učitel si dosud nevšiml, že pokus vlastně není bezvadným důkazem věty, k jejíž demonstraci bývá prováděn.

Jiří Cochlar, ČVUT, Poděbrady:

Pásmová teorie pevné fáze

(Dokončení)

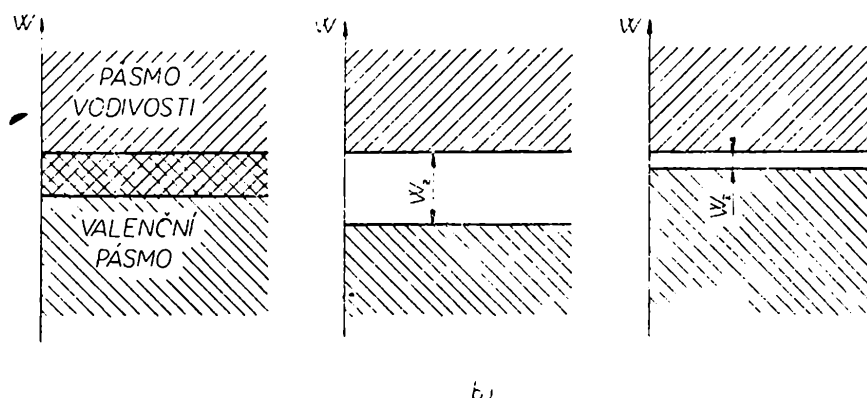
3.0. Pásmová teorie

V odstavci 2.3 jsme se zabývali energetickými spektry krystalů. Z celého spektra krystalu si budeme v dalším všimát hlavně nejvyššího pásma elektrony buď zcela, nebo částečně zaplněného (tzv. *v a l e n ě n í p á s m o*), nejbližší vyššího pásma volného (tzv. *v o d i v o s t n í p á s m o*) a zakázaného pásma mezi nimi. Tato pásma mají pro výklad elektrických jevů v pevné fázi z hlediska pásmové teorie základní význam. Na obr. 8 máme naznačeny tři možné případy vzájemné polohy pásem vodivosti a valenčního, které si nyní podrobněji rozebereme.

Kovy. U kovů nastává případ zakreslený na obr. 8a. Pásma valenční a vodivostní se překrývají. Z toho plyne, že nad elektrony valenčního pásma je dostatek volných hladin. Vložíme-li kov do elektrického pole, začnou se elektrony vlivem tohoto pole pohybovat v jeho směru, energie těchto elektronů se zvýší, kov povede elektrický proud. Vidíme, že nutnou podmínkou pro vedení elektrického proudu pevnou

fází je možnost elektronů zvýšit poněkud svou energii na úkor elektrického pole. A je to právě tato možnost u kovů, poněvadž v blízkosti elektronů z pásma valenčního je dostatek volných energetických hladin pásma vodivosti, na které mohou být tyto elektrony vnějším elektrickým polem urychleny.

Všimneme si nyní vlivu teploty na vodivost kovů. Při teplotě absolutní nuly jsou elektrony na nejnižších hladinách pásma valenčního, mají tedy nad sebou mnoho volných hladin a mohou se všechny zúčastnit vedení elektrického proudu. Vodivost je vysoká. Jestliže se teplota zvýší, získají některé elektrony takovou energii, že obsadí i nejvyšší



Obr. 8.

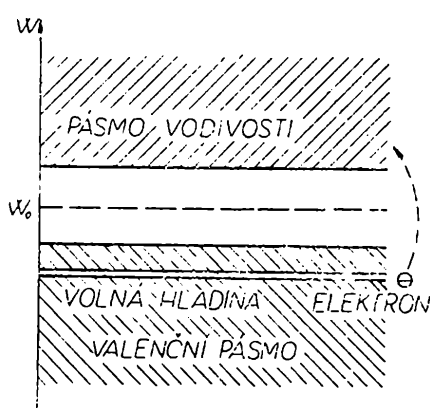
hladiny pásma vodivosti. Nad těmito hladinami je již zakázané pásmo, tyto elektrony nemohou být elektrickým polem urychlovány, zmenší se tudíž počet elektronů zprostředkovávajících vodivost a tato poklesne. Jinak si též můžeme vysvětlit pokles vodivosti s rostoucí teplotou tím, že tepelné pohyby krystalové mřížky brání elektronům v pohybu.

Izolanty. Energetická spektra izolanů odpovídají případu na obr. 8b, při němž pásmo valenční je elektrony plně obsazeno a pásmo vodivosti je prázdné. Vidíme, že elektrony valenčního pásma nemohou být elektrickým polem nijak urychlovány, protože nemají ve své blízkosti volné energetické hladiny. Izolanty tedy nemohou vést elektrický proud. Jestliže zahřejeme izolan na poměrně vysokou teplotu, získá určitý nepatrný počet elektronů energii, dostatečnou k přechodu zakázaného pásma; tyto elektrony se dostanou do pásma vodivosti a mohou zprostředkovat vedení elektrického proudu. Odpor izolanů s rostoucí teplotou tedy poněkud klesá. K přechodu elektronů přes zakázané pásmo může dojít i pod vlivem velmi silného elektrického pole. Pak říkáme, že došlo k tzv. elektrickému průrazu izolanu.

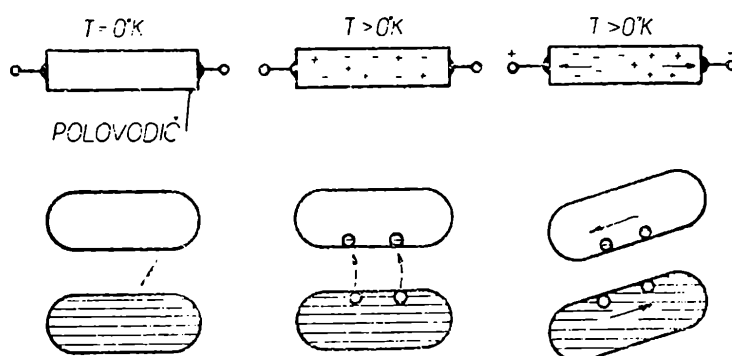
Polovodiče. Energetické spektrum polovodičů odpovídá obr. 8c, v pásmu vodivosti při teplotě absolutní nuly nejsou elektrony, pásmo valenční je zcela obsazeno. Zakázané pásmo mezi nimi je poměrně úzké (asi 1 eV).

a) *Polovodiče vlastní.* Polovodiče vlastní nemají ve své krystalové mřížce žádné poruchy. Lze dokázat, že úroveň Fermiho

hladiny (W_0 na obr. 9) leží v tomto případě uprostřed zakázaného pásma mezi pásmem valenčním a pásmem vodivosti. Při teplotě absolutní nuly nemá tedy žádný elektron energii dostatečnou k přechodu do pásma vodivosti a polovodič se tedy chová jako izolant. Jestliže se teplota zvýší, určitý počet elektronů přejde do pásma vodivosti a polovodič začne vést elektrický proud. Vodivost polovodičů však nezpůsobují jen elektrony v pásmu vodivosti. Přechodem elektronu z obsazeného valenčního pásma do pásma vodivosti se ve valenčním pásmu uvolní jedna hladina, na kterou může být urychlen elektron z hladiny nižší, na jeho místo může postoupit opět další elektron atd. Volná hladina ve valenčním pásmu se chová jako částice, která postupuje v elektrickém poli proti směru pohybu elektronů a je tedy kladně nabitá. Bývá zvykem si ji skutečně představovat jako kladně nabitou částici, tzv. díru. Vznik a pohyb elektronů a děr si můžeme představit podle obr. 10. Na tomto obrázku jsou energetická pásma před-



Obr. 9. Energetické spektrum vlastního polovodiče.



Obr. 10. Schéma polovodiče.

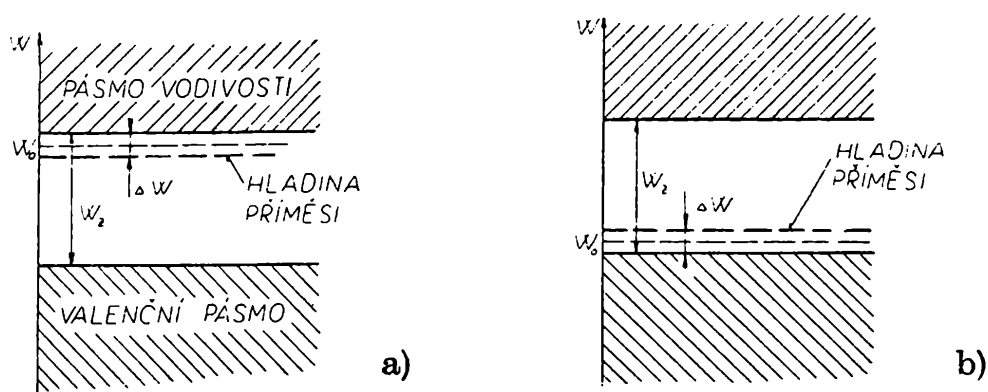
stavována trubičkami s nějakou kapalinou a účinkům elektrického pole odpovídá naklonění trubiček. Z obrázku je zřejmý celý princip elektrické vodivosti polovodičů. Elektronům odpovídají kapky tekutiny v horní trubičce (odpovídá vodivostnímu pásmu), díry jsou představovány bublinkami v dolní trubičce (odpovídá valenčnímu pásmu). Nakloníme-li trubičky, čili přivedeme-li na polovodič vnější elektrické pole, budou se bublinky i kapky (díry i elektrony) pohybovat vzájemně opačnými směry.

Z předchozího je zřejmé, že vodivost vlastních polovodičů s teplotou vzrůstá, protože čím je vyšší teplota, tím více se objeví elektronů v pásmu vodivosti a děr v pásmu valenčním, které zprostředkovávají elektrickou vodivost.

Na závěr výkladu pásmové teorie vlastních polovodičů je třeba zmínit se ještě o důležité skutečnosti, která právě odlišuje tento typ polovodičů od typu, o němž budeme v dalším uvažovat. U vlastních polovodičů je totiž vždy počet elektronů v pásmu vodivosti roven počtu

děr v pásmu valenčním, poněvadž přechod elektronu do vodivostního pásma je nezbytně provázen vznikem díry v pásmu valenčním.

b) **P o l o v o d i č e n e v l a s t n í.** Nevlastní polovodiče se liší od vlastních polovodičů přítomností cizích prvků v krystalové mřížce. Přítomnost prvků vytvoří energetické hladiny v zakázaném pásmu. Pro naše úvahy jsou důležité dvě polohy těchto hladin, které máme znázorněny na obr. 11. Hladiny těchto příměsí leží na okraji zakázaného pásma a to buď v blízkosti pásma vodivosti, nebo pásma valenčního. Příměsným prvkům, které tvoří energetické hladiny podle obr. 11a, říkáme **d o n o r y** v některé literatuře též **d o n á t o r y** prvkům, jejichž hladiny jsou podle obr. 11b, říkáme **a k c e p t o r y**. Na obrázcích máme též zakresleny polohy Fermiho hladiny (W_0). Lze ukázat, že Fermiho hladina leží pro nepříliš vysoké teploty - např. při pokojové teplotě - uprostřed mezi hladinou příměsí a bližším okrajem zakázaného pásma. Jestliže zvyšujeme teplotu nad určitou mez, přejde Fermiho hladina do poloviny zakázaného pásma, tedy do stejné polohy jako u vlastních polovodičů. Z polohy Fermiho hladiny plyne, že stejně jako u polovodičů vlastních je vodivost nevlastních polovodičů při teplotě $T = 0^\circ\text{K}$ rovna nule; polovodič má tedy vlastnosti izolantů. Při zvýšení teploty se však situace podstatně změní.



Obr. 11. Energetické spektrum nevlastního polovodiče.

Nejprve budeme uvažovat polovodič s energetickým spektrem podle obr. 11a. Protože ΔW je poměrně velmi malé proti šířce zakázaného pásma W_z (srovnej hodnoty v tabulce 1), dojde již při malém zvýšení teploty k přechodu elektronů z energetické hladiny donorů do pásma vodivosti a polovodič začne vést elektrický proud. Prázdná místa v hladině donorů se nemohou zúčastnit vedení elektrického proudu tak jako díry u vlastních polovodičů, protože elektrony z obsazeného valenčního pásma jsou od této hladiny odděleny zakázaným pásmem o šířce $W_z - \Delta W$. To znamená, že vodivost tohoto typu polovodiče je způsobena hlavně elektrony; nazýváme tedy takové polovodiče **p o l o v o d i č e t y p u n** (negativní vodivost). Při dalším zvyšování teploty začne však převládat vodivost vlastní, protože elektrony z valenčního pásma získají

dostatek energie k přechodu do pásma vodivosti. Při dostatečně vysokých teplotách pro germanium a křemík při teplotách vyšších než 100 °C - je jich pak v pásmu vodivosti více, než tam může dodat hladina příměsí. Počet elektronů v tomto pásmu je pak přibližně stejný jako počet děr v pásmu valenčním a tudíž převládá vodivost vlastní.

Polovodič, jehož energetické spektrum je na obr. 11b, chová se při teplotě absolutní nuly rovněž jako izolant. Při zvýšení teploty dojde k přechodu elektronů z obsazeného valenčního pásma na hladinu akceptorů a díry, které takto vzniknou ve valenčním pásmu, umožní elektrickou vodivost. Tento druh polovodiče nazýváme proto *p o l o v o d i č t y p u p* (pozitivní vodivost). Záporně nabité ionty akceptoru se nemohou zúčastnit vodivosti, protože jsou odděleny od pásma vodivosti zakázaným pásmem o šířce $W_z - \Delta W$. Při dalším zvyšování teploty dojde opět k převládnutí vodivosti vlastní z důvodů, které byly vyloženy výše.

Všimneme si nyní problému, které prvky se hodí pro určitý polovodič jako donory nebo akceptory. Úvahy provedeme pro germanium a křemík, což jsou prvky 4. sloupce Mendělejevovy periodické soustavy; to znamená, že mají čtyři valenční elektrony. Přimísíme-li do germania nebo křemíku prvky 5. sloupce, které mají pět valenčních elektronů, zúčastní se tvorby krystalové mřížky jen čtyři valenční elektrony, pátý je s atomem příměsí vázán jen volně a může být poměrně snadno odtržen. Prvky 5. sloupce Mendělejevovy soustavy se tedy chovají v germaniu nebo křemíku jako donory. Prakticky se používá fosfor, arsen, antimon a lithium.

Přimísíme-li do germania nebo křemíku prvky třetího sloupce Mendělejevovy soustavy, které mají tři valenční elektrony, bude při tvorbě krystalové mřížky jeden elektron chybět a na místo tohoto chybějícího elektronu může snadno přeskočit jiný elektron ze sousední vazby. Prvky 3. sloupce se tedy chovají jako akceptory. Prakticky se používá bor, hliník a indium.

Na závěr tohoto odstavce si ještě uvedeme některé základní fyzikální vlastnosti křemíku a germania (tab. 1):

Tab. 1

	W_z (eV)	ΔW (eV)					
		P	As	Sb	B	Al	In
Ge	0,78	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Si	1,12	0,045	0,049	0,039	0,045	0,057	0,16
Druh příměsí:		Akceptory			Donory		

4.0. Závěr

Pásmová teorie vysvětluje poměrně jednoduše různé fyzikální jevy v pevných látkách, poněvadž však vychází z určitých zjednodušujících předpokladů (např. neuvažuje vzájemné působení elektronů), nedávají její závěry vždy přesnou shodu s prakticky zjištěnými ději. Rovněž tak neplatí vývody pásmové teorie pro všechny polovodiče. Celkem dobrou shodu teorie s prakticky zjištěnými hodnotami dává pásmová teorie pro germanium a křemík.

Na závěr děkuji s. inž. Kodešovi z katedry fyziky ČVUT Praha za cenné rady a připomínky, kterými mně pomohl při vypracování tohoto článku.

Literatura:

- [1] Drška-Klimeš-Slavík: Základy atomové fyziky.
- [2] D. A. Wright: Semiconductors.
- [3] W. C. Dunlap: An Introduction to Semiconductors.
- [4] A. F. Joffe: Fyzika poluprovodníků.

Astronomie

R N D r. M i l o s l a v K o p e c k ý, CSc, Astronomický ústav
ČSAV, Ondřejov:

Astronomie se stává také vědou experimentální

Experimentálními vědami nazýváme takové vědní obory, které jako jedné ze svých výzkumných metod používají pokusu čili experimentu. Při tom pokus je nejvyšším ověřením správnosti našich poznatků, neboť při experimentu se jako kritéria správnosti používá praxe. Jde zde v podstatě o toto: Na základě pozorování, zkušenosti apod. zjistíme, že určitý jev nastává tehdy, jsou-li splněny dané podmínky. Potom toto zjištění můžeme pokládat za správné jedině tehdy, jestliže lidskou prací uskutečníme zjištěné podmínky pro daný jev a ten potom skutečně nastane. Jako příklad si můžeme uvést přeměnu vodíku v helium při současném uvolňování značného množství energie. Na základě atomového výzkumu se došlo k závěru, že za určitých podmínek tato přeměna může nastávat a předpokládalo se, že probíhá v nitrech hvězd. Že však tento proces skutečně může probíhat, bylo dokázáno až teprve výbuchem vodíkové bomby, v níž byly podmínky nutné pro přeměnu

vodíku v helium uskutečněny. Pokusné ověření správnosti našich poznatků je pro vědu nejvyšším kritériem správnosti, neboť je ověřením těchto poznatků praxí.

Avšak astronomie, jako jedna z mála přírodních věd, neměla dosud možnost ověřovat si své poznatky experimentem, protože nemohla provádět pokusy v kosmickém měřítku. Astronomové neměli technickou možnost realizovat podmínky, které zjistili jako nutné, aby nastal určitý jev. Astronomie nebyla tedy dosud vědou experimentální.

Teprve raketová technika znamená revoluční změnu v tomto postavení astronomie, neboť již na dnešní své úrovni umožňuje astronomii provádět pokusy v kosmickém měřítku. Můžeme si dnes uvést tři konkrétní případy takovýchto kosmických experimentů.

Prvým bylo vytvoření u m ě l ý c h m e t e o r ů. Meteory, nebo jak se lidově říká „padající hvězdy“, vznikají tím, že do zemského ovzduší vnikají z meziplanetárního prostoru pevné úlomky hmoty a to velkými rychlostmi takže při jejich srážkách s molekulami a atomy zemského ovzduší dochází ke vzniku záření, které vidíme jako meteor.

Tento výklad vzniku viditelného meteoru byl sice ověřován řadou pozorování, ale experimentálně byl dokázán až pomocí raket. Do raketových hlavic byly dány pevné úlomky podobného chemického složení, jaké mají meteority. Rakety, když dosáhly výšek okolo 100 km nad zemským povrchem, vystřelily do okolního ovzduší tyto pevné úlomky, které pak vyvolaly jev obdobný meteoru, čímž byla původní teorie vzniku meteoru pokusně dokázána.

Jaké experimentální možnosti dává astronomii raketová technika nám ukazuje též vytvoření u m ě l ý c h k o m e t s o d í k o v ý c h o b l a k ů v meziplanetárním prostoru prvou a druhou sovětskou meziplanetární stanicí. Pomocí těchto sodíkových oblaků byla astronomům dána poprvé možnost zkoumat chování plynu, jako je jeho rozpínání, záření apod., při přesně známých vlastnostech tohoto plynu, (jeho chemického složení, množství apod.), a tak si experimentálně ověřit řadu dřívějších úvah o chování plynu v kosmickém prostoru.

Avšak nejzajímavějším kosmickým pokusem vůbec bylo vlastní vypuštění první umělé družice Země a první umělé planety Slunce, protože těmito dvěma umělými tělesy sluneční soustavy byla ve skutečnosti poprvé experimentálně dokázána platnost zákona o všeobecné přitažlivosti těles ve vesmíru. Vypadá to poněkud neuvěřitelně, že od dob Newtonových, který objevil gravitační zákon, nebyla jeho platnost exaktně pokusně dokázána, až teprve současná technika dala k tomu možnosti. Experimentálně byla dokázána platnost zákona o všeobecné přitažlivosti těles pouze v pozemských měřítkách a v kosmických měřítkách neexistovalo nic, co by tomuto zákonu odporovalo. Významným potvrzením správnosti tohoto zákona v kosmickém měřítku bylo objevení planety Neptuna na základě toho, že svou přitažlivou silou způ-

sobuje poruchy v dráze planety Úrana. Při tomto objevu planety Neptuna bylo gravitačního zákona použito jako pracovní hypotézy a skutečným objevením této planety byla správnost hypotézy potvrzena. Avšak tento důkaz nelze pokládat za dokonalý, konečný, protože není důkazem experimentálním. Zde nebyly lidskou prací vytvářeny žádné podmínky pro to, aby nastal nějaký jev. Neptun v době svého objevení již dávno po své dráze obíhal. Naproti tomu v případě umělých družic a planet jsou podmínky teprve vytvářeny lidskou prací, a to tím, že tato tělesa vypouštíme v námi zvoleném okamžiku a tudíž i za určité námi volené konfigurace gravitačních polí ve sluneční soustavě, že jim udělujeme námi zvolenou rychlost v námi zvoleném směru a tím tedy vytváříme podmínky pro jejich let, pro jejich dráhu. Jestliže se nám potom takto vypuštěné těleso pohybuje po předem vypočtené dráze, znamená to, že i gravitační pole okolních těles je takové, jaké jsme při výpočtech uvažovali. Je tedy správnost Newtonova zákona o všeobecné přitažlivosti těles dokázána i v kosmickém měřítku praxí, pokusem.

Vidíme, že rychlý vývoj výrobních sil lidské společnosti umožnil astronomii provádět pokusy v kosmickém měřítku. Tyto možnosti experimentování v astronomii se budou v budoucnu neustále zvětšovat. A tak raketová technika způsobila kvalitativní skok ve vývoji astronomie, která se z vědy budující pouze na pozorování, stává také vědou experimentální.

L a d i s l a v S e h n a l CSc, Ondřejov:

Umělé družice a kosmické rakety

Velký pokrok, jaký učinila v poslední době věda a technika, je snad nejlépe vidět na umělých družicích a kosmických raketách. Těchto umělých těles je vypuštěno stále více a sestavení nové umělé družice není pro široké vrstvy lidí již něčím neobvyklým. Proto bude jistě dobře připomenout si existenci těchto našich souputníků a podat stručný přehled dosud existujících umělých družic v malé tabulce. Jsou zde zachyceny umělé družice, které obíhaly kolem Země ke dni 1. prosince 1960:

Umělé družice

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu min.	Výška perigea km	Sklon dráhy
1. II. 1958	Explorer I	14	115	352	33,2°
17. III. 1958	Vanguard I	1,5	135	656	34,3
17. II. 1959	Vanguard II	9,7	123	530	33

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu min.	Výška perigea km	Sklon dráhy
7. VIII. 1959	Explorer VI	64,6	12 ^h 45m	252	47
13. VIII. 1959	Discoverer V	?	100	194	80
18. IX. 1959	Vanguard III	45	130	503	33
13. X. 1959	Explorer VII	41,4	101	518	50,3
1. IV. 1960	Tiros I	122	99	700	48
13. IV. 1960	Transit I	120	96	375	51
15. V. 1960	Kosmická loď I	4540	91	320	65
24. V. 1960	Midas II	2500	94,5	468	33
22. VI. 1960	Transit II	120	101,5	740	67,5
10. VIII. 1960	Discoverer XIII	136	94	259	90
12. VIII. 1960	Echo I	75	118,2	1487	47,2
18. VIII. 1960	Discoverer XIV	136	94,5	250	90
19. VIII. 1960	Kosmická loď II	4600	90	306	64,6
13. IX. 1960	Discoverer XV	?	94,3	209	90
4. X. 1960	Courier	216,5	?	1045	?
3. XI. 1960	Explorer VIII	40,8	?	?	?
13. XI. 1960	Discoverer XVII	?	95	230	90
23. XI. 1960	Tiros II	126	98	640	48
1. XII. 1960	Kosmická loď III	4563	88	187	65

Kosmické rakety

Datum vypuštění	Název	Váha kg	Doba oběhu dnů	Vzdálenost v perihelu mil. km
2. I. 1959	Luník I	1437	450	146,5
3. III. 1959	Pioneer IV	25,9	392	147,7
11. III. 1960	Pioneer V	40	311	120,5

V tabulce umělých družic se doba oběhu, výška perigea (tj. nejmenší výška dráhy družice nad zemským povrchem) a sklon dráhy vztahují k datu vystřelení příslušné družice. Tyto prvky se vlivem různých činitelů postupně mění, takže např. doba oběhu a výška perigea byla k 1. prosinci 1960 již podstatně menší.

V tabulce kosmických raket se dobou oběhu myslí doba oběhu kolem Slunce a vzdálenost v perihelu je vzdálenost družice od Slunce v místě dráhy, které je Slunci nejbližší.

Nejzajímavější z umělých družic jsou jistě pokusy Sovětského Svazu, které jsou v našem přehledu reprezentovány třemi umělými družicemi (kosmickými loděmi). Jsou to satelity, které přímo sledují jeden cíl: přípravu letu člověka do vesmíru. První pokus z května 1960 nebyl zcela zdařilý, neboť kabina, která se měla snést k Zemi, nedostala

zpětný impuls v patřičném směru a naopak se dostala do dráhy od Země vzdálenější. Ale již další pokus ze srpna 1960 byl zcela úspěšný, kabina s množstvím různých pokusných zvířat přistála na zemském povrchu ve vzdálenosti méně než 10 km od předem daného místa.

U amerických družic můžeme sledovat několik typů. Předně jsou to satelity *Explorer*, z nichž *Explorer I* je vůbec prvním americkým satelitem, vystřeleným na oběžnou dráhu kolem Země. Tyto satelity jsou určeny především k měření různých druhů záření. Podobné určení, tj. zevrubný výzkum vysokých vrstev zemské atmosféry a okolí Země, mají satelity *Vanguard*. K navigačním účelům pro lodi a letadla jsou určeny satelity *Transit*. Meteorologické satelity typu *Tiros* mají za úkol fotografovat mraky, jejich pohyb a vývoj. Satelity *Courier* jsou určeny k radiovému spojení různých míst na Zemi. Zajímavý je v tomto ohledu satelit *Echo*, což je pouze balón z umělé hmoty o průměru 30 m, který má odrážet radiové paprsky z pozemských vysílačů. Tento způsob spojení však není zcela vyhovující, neboť vyžaduje mimořádně velké a silné vysílače. Satelit *Midass* má vysloveně špiónážní poslání.

Pro let člověka do vesmíru jsou přípravou satelity *Discoverer*. Ty mají kabinu, která se má oddělit v předem určeném okamžiku od vlastní rakety a přistát na Zemi. Ze sedmnácti pokusů byly zatím tři úspěšné, ve dvou případech byla kabina vylovena z moře a jednou byla zachycena letadly přímo při letu vzduchem.

Kosmické rakety měly především za úkol důkladně prozkoumat prostor mezi Zemí a Měsícem; jejich zásluhou byly objeveny dva pásy, obepínající Zemi, s velkou koncentrací elektricky nabitých částic, které jsou pro let člověka do vesmíru velmi nebezpečné.

Matematické zábavy

Antonín Herman, prom. fyz., Brno:

Pravděpodobnost, náhodné a nenáhodné jevy ve Sportce

1. Sportka jako příklad působení přírodních zákonů v lidské společnosti

Od středy do pátku bývá na poštovních úřadech vidět hloučky lidí vyplňujících sázenky. Často slyšíme dva, tři hráče, jak se radí: „Tohle číslo netipuj, to nechodí, napiš tohle, to vychází často.“ Nebo: „Už dlouho nebylo číslo..., to by mohlo teď vyjít.“ Někteří hráči přistu-

pují k okénku s celou hrstí sázenek, které vyplnili společně se svými přáteli podle nějakého „spolehlivého“ předpisu. Mnozí z takových kolektivů tvrdí, že sázejí již dva měsíce svůj osvědčený tríz a stále ještě jim výhry čtvrtého pořadí stačí zaplatit sázky.

Existuje nějaký spolehlivý předpis, podle kterého lze uhádnout, která čísla budou v budoucím týdnu tažena? Našli byste dost lidí, kteří jsou celou řadu týdnů schopni vás přesvědčovat, že jejich tríz zaručeně neselže. Někdy možná uslyšíte, jak někdo vypráví, že se mu ta a ta čísla v noci zdála, vsadil na ně a vyhrál ve čtvrtém, nebo dokonce ve třetím pořadí. V Nerudově Malostranské povídce Týden v tichém domě se můžeme dočíst, jakým způsobem odvozovali kdysi pověřiví hráči v loterii svá čísla ze snů, ve kterých zjevení nebožtíci, sousedé a známí radili nepřímou, jaká čísla je třeba sázet. Dnes byste u nás, bohudík, už nenašli mnoho takových naivních lidí, kteří by doufali, že Bůh nebo některý z jeho andělů jim v odměnu za zbožný život sdělí ve snu šťastná čísla.

Odpovězme však na položenou otázku. Protože postup, jakým jsou čísla vytahována z osudí, je závislý jen na náhodě, není možné výsledek určit předem. Kdyby Bůh nebo jiná nadpřirozená bytost věděla, která čísla budou tažena, znamenalo by to, že jednání lidí je předem určeno, že tedy je určeno i to, kdo jaká čísla volí, kdo vyhraje. Uvěřit v něco takového by znamenalo stát se fatalistou. Pak bychom také museli připustit, že například druhá světová válka skončila porážkou nacismu ne proto, že ji vyhráli obětaví vlastenečtí vojáci i civilisté, nýbrž jen proto, že tak bylo předem určeno v „knize osudu“. Proč by se však kolem nás všechno pohybovalo a vyvíjelo podle určitých zákonů, proč by osud byl tak pedantsky logický, když by mohl být třeba právě tak chaotický jako horečný sen?

Avšak přestože vytažená čísla závisejí na náhodě, je vše, co souvisí se sportkou, plně podřízeno určitým statistickým zákonům. Není náhodou, že počet sázejících kolísá během celého roku v širokých mezích asi 70 % až 130 % kolem téhož čísla. Znamená to jen, že procento obyvatelstva, které tvoří skupinu stálých i nestálých hráčů, se podstatně nemění. Kdybychom podobně rozdělili občany narozené během jednoho roku do skupin podle týdnů, ve kterých se narodili, zjistili bychom, že na každý týden připadá přibližně stejný počet osob. Také celkové vklady spořicíků obyvatel budou ve většině týdnů stejné. Všimněme si, že v tomto posledním příkladě mluvíme jen o většině. Je přirozené, že v předvánočním období se projevuje zvýšení nákupu a v důsledku toho pokles spoření. Není pak náhodou, že celkový vklad obyvatelstva na konci prosince bude menší než v dalších měsících. Kdybychom sledovali počet občanů zemřelých v témže týdnu v průběhu posledních desetiletí, viděli bychom, že v posledních letech je znatelně menší než třeba před válkou. Zase to není náhodou, nýbrž

zásluhou rozvoje našeho zdravotnictví. Ve sportce se obyčejně během roku nesetkáváme s podstatným nenáhodným působením na velké množství jevů. Můžeme pozorovat, že celková vsazená suma se mění poměrně málo. Při nezměněných pravidlech hry je pak celý proces hry podřízen stále stejným zákonům.

2. Pojem pravděpodobnosti

Osudí ze kterého se při losování sportky čísla vytahují, je uspořádáno tak, že pravděpodobnost vytažení kteréhokoli z čísel v osudí je stejná. Předpokládejme, že je v osudí celkem n čísel, například 2, 3, 4, ..., 46, 47 (zde $n = 46$). Máme-li vyjádřit, jaká je pravděpodobnost, že bude vytaženo některé z dané skupiny m čísel, například 3, 4, 47 ($m = 3$), která patří mezi zmíněných n čísel, použijeme klasické definice matematické pravděpodobnosti:

Pravděpodobnost jevu je rovna poměru počtu případů jevu příznivých k počtu všech možných případů, $p = \frac{m}{n}$ (v našem příkladě $p = \frac{3}{46}$)

Snadno určíme, jaká je pravděpodobnost vytažení jednoho určitého čísla, třeba čísla 14, z úplného osudí, tj. obsahujícího všech 49 čísel. Zřejmě je v tomto případě $n = 49$, $m = 1$, takže $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{49}$. Stejná pravděpodobnost přísluší vytažení kteréhokoli jiného určitého čísla mezi 1 a 49.

Kdybychom se formálně tázali, jaká je pravděpodobnost vytažení čísla 50 z úplného osudí, pak musíme dosadit za m nulu, protože mezi čísla 1 až 49 není žádný příznivý případ pro tento jev. V takovém případě, kdy $p = 0$, říkáme, že jev je nemožný.

Opačný extrém nastává, ptáme-li se, jaká je pravděpodobnost vytažení některého z čísel 1 až 49 z úplného osudí. Zde $m = n = 49$, takže $p = 1$; říkáme, že jev je jistý.

Jaký je význam právě definovaného pojmu matematické pravděpodobnosti? Jestliže bychom provedli velký počet N , třeba několik tisíc tahů z úplného osudí, pak každé číslo o pravděpodobnosti p bude taženo přibližně pN krát. Kdybychom například provedli $N = 49\,000$ tahů, vytáhli bychom každé z čísel 1 až 49 (pro které, jak jsme již odvodili, je $p = \frac{1}{49}$) asi tisíckrát. Některé by padlo možná 987 krát, jiné 1036 krát atd., avšak všechny počty tahů téhož čísla by se nelišily příliš od 1000. Tato poučka je důsledkem tzv. zákona velkých čísel.

Jestliže sledujeme jen malý počet tahů, například všechna vylosování sportky během jednoho roku, pak nejsme plně oprávněni činit takové

závěry. Tak například v průběhu roku 1957 bylo číslo 33 vylosováno desetkrát, zatímco čísla 22, 46, 49 byla vytažena jen jednou. Ukážeme zde však, že i uvnitř jediného roku lze nalézt jevy, na kterých si budeme moci ověřit platnost zákona velkých čísel ve sportce.

(Pokračování)

Různé

Interkamera 1960

Pod tímto názvem otevřelo Národní technické muzeum v Praze velkou výstavu fotografické a filmové techniky. Výstava svým posláním je určena naší veřejnosti, laikům i odborníkům, kteří s povděkem vítají vysokou hodnotu expozice. Široká obec fotoamatérů prohlíží se zájmem nejen cenné historické přístroje, ale i nové přístroje, z nichž některé budou teprve uvedeny na trh. Odborní zájemci se zaujetím prohlížejí a porovnávají naše přístroje se zahraničními výrobky. Není jich málo. Celkem 124 zahraničních firem ze 32 zemí dalo k dispozici své přístroje a příslušenství, a tak umožnily Národnímu technickému muzeu soustředění skoro všech nejlepších přístrojů dneška.

Expozice fotografie zachycuje vývoj přístrojové techniky od doby vynálezu fotografie s naznačenými principy optiky v přímé aplikaci historických typech objektivů. V jednotlivých vitrínách jsou zpracovány vývojové řady hlavních typů fotografických přístrojů s poukazy na využití základních fyzikálních zákonů (odraz světla v zrcadle u zrcadlových fotografických přístrojů, principy mechanických fotografických závěrek, spoušťových mechanismů, příslušenství pro měření doby osvitů, umělého osvětlení a zvětšovacích přístrojů). Zatím za fotokameru I. řádu platil výrobek švédské firmy Hasselblad SW 1000, se 4 vyměnitelnými objektivy. Na výstavě vidíme kromě jiných dokonalejší aparát Zeuza Bronica I. i II. model, který si vítězně razí cestu a dostává se tak do čela zrcadlových fotoaparátů střední velikosti. Z miniaturních přístrojů zaujmou německé a hlavně opět japonské výrobky. Naše Mikroma však v této těžké soutěži si obhazuje čestné místo.

Zrcadlové fotografické přístroje jsou vysvětleny v úplné vývojové řadě aparátů Exakta Varex, československé Flexarety, sovětské zrcad-

lovky Zenith a Start i východoněmecké Praktisix. Diaprojektory jsou dovedeny ve vývojové řadě až k automatizované diaprojekci, kdy výměna diapozitivu je řízena impulzy z magnetofonu.

V další části výstavy je zajímavou formou zpracována technologie filmových triků a jejich aplikace ve známých, nedávno uvedených filmech. V reliefovém řešení vidí divák jádro několika systémů triků. Lehce a názorně pozná, jak triky vznikají a stiskem tlačítka mu hned malá promítačka předvádí úsek trikového filmu v běžném provedení.

V expozici historie kinematografu je zpracován vývoj této mladé technické disciplíny od nejstarších dob, od prvé snahy člověka o zobrazení pohybu, jak se nám zachoval na jeskynních kresbách, přes prvé stínové obrazy až k perspektivním kukátkům. Ve zkratce je tu způsobem polyekránu vyjádřen vývoj optických projekčních systémů od prvé spojně čočky, přes klášterní barokní laterny magiky k modernímu automatickému diaprojektoru, jenž se stal nezbytnou pomůckou vědců a techniků našeho století. Škoda, že malý uzavřený prostor nedovoluje plně rozvinout tuto tematiku, které by lépe vyhovovalo instalování do šířky než do výšky!

V další části výstavy je široce rozpracován vývoj snímací filmové techniky.

Od vysvětlení fyziologických principů kinematografu tu můžeme sledovat zákony doznívání zrakového vjemu, stroboskopické efekty, Mareyovy a Muybridgeovy studie se sériovými fotografiemi až k prvním pokusům Reynauda, Deményho a Edisona o sestrojení přístrojů, jež by mohly reprodukovat pohyb stejně přesně, jako jej zachycuje sítnice našeho oka.

Tato část výstavy je doplněna funkčními modely, které dokreslují a demonstrují jednotlivé základní zákony, které umožnily na konci minulého století vynález kinematografu.

Vlastnímu období vynálezu kinematografu je věnována další část expozice přístrojů bratří Lumiérů. Prvé přístroje jsou tu předvedeny i z dílen českých filmových techniků na začátku našeho století. Je zajímavé, že Francouzi se vyjadřují s pochvalou o naší péči o Lumierovy přístroje, neboť některé nemá dnes již ani pařížské „Palais de la Couvert“. Proto s vděčností vzpomínáme těch několika našich sběratelů, kteří ze svých zahraničních cest přinášeli pro nás „staré krámy“, jichž hodnotu nedovedeme ani dnes dobře ocenit.

Expozice snímací filmové techniky obsahuje velký soubor filmových kamer. Jsou tu zastoupeny všechny hlavní typy přístrojů našich i zahraničních. Tato část bude ještě doplněna a v novém uspořádání vývojové řady znázorní vývoj jednoho z velmi přesných mechanismů, jež se objevily na světě teprve v posledních 70 letech.

Expozice promítací techniky sleduje v hlavních ukázkách vývoj filmového projektoru od prvních primitivních přístrojů cestovních kin až

k posledním typům „těžkých“ filmových projektorů, které jsou duší dnešní laterny magiky nebo kruhového kina.

Výstava má ve všech nově instalovaných částech odborný výklad z magnetofonového pásu, jenž je předváděn podle přesného programu výstavy. Prostorově rozmístěné reproduktory dovolí ovládnout skupiny návštěvníků souhlasně s tématem, o kterém komentátor hovoří. V některých případech je komentář synchronizován s osvětlováním vitrín, nebo chodem demonstračních mechanismů a modelů. Tímto řešením nastupuje Národní technické muzeum v Praze novou průkopnickou cestu. Zvláště expozice historie filmu svou plnou automatizací je prvním krůčkem k novodobým formám výkladu.

Výstava je velmi početně navštěvována a má ohlas i v zahraničí. Svým zaměřením i obsahem uzavřených vývojových řad, originálním pojetím a částečnou automatizací se řadí k nejlepším na světě.

Interkamera není jen výstavou s krásnou podívanou. Je v pravém smyslu školou, kde návštěvník poznává snahu člověka o zobrazení pohybu, jak pracně se dopracovává prvních úspěchů. Teprve objevení základních zákonů umožňuje rychlý vývoj a ve spojitosti s rozmachem další techniky vytváří četné, dokonalé výrobky. Tato výstava je poučením hlavně pro naši mládež a proto můžeme blahopřát NTM k prvním úspěchům v polytechnické výchově.

Ik-ar.

Vyznamenání našich vědeckých pracovníků Eulerovou medailí

V letech 1689–1725 vládl v Rusku car Petr I., který bývá často označován jako Petr Veliký, protože se zasloužil svými organizačními schopnostmi a prozíravou politikou o hospodářský i kulturní rozvoj do té doby zaostalého carského Ruska. Jeho úsilí o zvýšení kulturní úrovně ruského lidu se projevovalo nejvýrazněji ve školských reformách, které vyvrcholily počátkem roku 1724 vydáním dekretu o zřízení akademie věd s přidruženou universitou a gymnasiem v Petrohradě. Po smrti Petra I. uskutečnila zřízení akademie carevna Kateřina I. (1725–1727), která povolala do petrohradské akademie větší počet vědeckých pracovníků z ciziny, mezi nimiž byli též dva příslušníci basilejské rodiny Bernoulli, známé tím, že tato rodina dala světové vědě mnoho schopných pracovníků. Daniel a Mikuláš Bernoulli se zasloužili o to, že roku 1727 byl na petrohradskou akademii věd pozván též jejich přítel z Basileje **Leonhard Euler** (1707–1783), který pracoval v Petrohradě až do roku 1741 a po přechodném pobytu v Berlíně opět v letech 1766–1783. Tvůrčí síla tohoto geniálního matematika byla tak veliká, že svými vědeckými pracemi, které zaujímají co do rozsahu asi třicet tisíc tištěných stran, ovlivnil vývoj matematiky ve všech jejích oborech. Přitom vydatně využíval matematických poznatků k řešení nej-různějších problémů věd přírodních i technických. Jeho neúnavné píli a lásce k Rusku, v němž našel on i jeho rodina svou druhou vlast, vděčí

ruský lid za vytvoření dobrých předpokladů pro samostatný rozvoj novodobé ruské vědy a za vynikající pověst akademie v Petrohradě, která byla předchůdcem nynější Akademie věd SSSR. Čtenáře tohoto časopisu, kteří by se zajímali o životopis a podrobnější zhodnocení Eulerových zásluh, odkazují na svůj článek „Leonhard Euler - nejslavnější petrohradský akademik“, otištěný v tomto časopise roku 1957 (roč. 35, seš. 2, str. 92—94 a seš. 3, str. 140—143).

Na den 15. dubna 1957 připadlo 250. výročí narození Leonharda Eulera. Bylo připomínáno oslavnými články v četných vědeckých časopisech nebo zvláštními oslavami, které pořádaly vědecké instituce, zejména v Basileji, v Berlíně a v Leningradě. Při této příležitosti dala Akademie věd SSSR razit medaili, která má na jedné straně reliéf Eulerova poprsí a na druhé straně reliéf Lomonosovovy university v Moskvě a rozhodla, že Eulerova medaile bude udělována jako uznání práce těm vědeckým pracovníkům, kteří se přímo nebo nepřímo zasloužili o rozvoj věd, zvláště matematických a fyzikálních.

Za první tři roky byli Eulerovou medailí vyznamenáni jen dva českoslovenští vědci, a to prezident Československé akademie věd Zdeněk Nejedlý a akademik Arnošt Kolman.

Na počátku října roku 1960 konala se v Domě vědeckých pracovníků v Liblicích u Mělníka první konference československých historiků přírodních, lékařských a technických věd, jíž se zúčastnili též tři sovětsí vědečtí pracovníci v oboru dějin věd. Vedoucí této sovětské delegace Ašot Tigranovič Grigorjan, který je vědeckým pracovníkem Institutu historie přírodních věd a techniky v Moskvě a současně stálým sekretářem Sovětského národního sdružení historiků přírodních věd a techniky, oznámil při slavnostním zakončení konference dne 5. října 1960, že Eulerovou medailí byli nyní vyznamenáni tito českoslovenští vědečtí pracovníci:

Akademik Bohumil Němec, akademik Vladimír Kořínek, náměstek ředitele Ústředního ústavu geologického Jan Kořan, akademik František Píšek, rektor Českého vysokého učení technického Theodor Ježdík, akademik Vojtěch Jarník, akademik Josef Novák, akademik Štefan Schwarz, akademik Josef Macek, člen korespondent ČSAV František Link, člen korespondent ČSAV Miroslav Kátětov, člen korespondent ČSAV Otakar Borůvka, profesor dr. Ladislav Zachevová, člen korespondent ČSAV Alois Zátopek, člen korespondent ČSAV Jan Osolsobě, ředitel Národního technického muzea dr. Josef Kuba, ředitel Geofyzikálního ústavu ČSAV dr. Jan Bouška, inž. dr. Ladislav Jeníček, profesor dr. Miloslav Valouch, profesor dr. Vilém Kunzl, člen korespondent ČSAV Čestmír Šimáně, děkan matematicko-fyzikální fakulty KU profesor dr. Alois Gregor, em. profesor ČVUT dr. Karel Rychlík, profesor dr. Karel Koutský a vědečtí pracovníci Historického ústavu ČSAV dr. Luboš Nový a dr. Josef Smolka.

Fr. Veselý, Plzeň.

JČMF 1862-1962

Příští rok oslaví J e d n o t a č s. m a t e m a t i k ů a f y z i k ů sto let svého trvání. Naše čtenáře postupně seznámíme s vývojem této vědecké instituce tak důležité pro vývoj základních přírodních věd u nás, neboť všichni vynikající čeští a slovenští matematikové i fyzikové vyrostli v jejím těsném okolí.

Zakladatelem JČMF byl český matematik G a b r i e l B l a ž e k. Přečtěte si, co o něm píše ve 4. dílu Ottova naučného slovníku, vydaném právě před sedmdesáti léty, jiný český matematik Augustin Pánek:

„Blažek Gabriel, mathematic a politic čes. (*20. září 1842 v Borovnici u Chocně v Čechách). Stud. gymn. v Mostě a Žatci, pak v Praze na Malé Straně. R. 1860 vstoupil na universitu pražskou, kde záhy vynikl jakožto výtečný mathematic. K jeho vybídnutí založen r. 1862 spolek pro volné přednášky z mathematicy a fysiky, z něhož později vznikla „Jednota českých mathematicův a fysiků“. R. 1863 odebral se na universitu vídeňskou, hlavně, aby seznal přednášky Stefanovy a Petzvalovy. Roku 1864 podrobil se učitelské zkoušce pro vyšší gymnasia z mathematicy a fysiky a téhož roku stal se assistentem při fysikálním ústavě prof. Ettingshausena. R. 1865 dosáhl hodnosti doktora filosofie na universitě ve Vídni a habilitoval se téhož roku jako soukromý docent veškeré mathematicy na téže universitě. Roku 1867 byl jmenován mimořádným a roku 1872 řádným professorem mathematicy král. české polytechniky v Praze. R. 1873 byl přednostou odboru stavitelství inženýrského, r. 1880 a 1884 odboru strojnického a r. 1876 a 1882 byl zvolen rektorem c. k. české vysoké školy technické. R. 1870 stal se mimořádným členem Král. čes. spol. nauk a čestným členem Jednoty českých mathematicův. Od roku 1876 až do spojení zkušební kommisie pro gymnasia a reálky, byl examinátorem ve zkušební kommissi pro učitelství škol reálních a obchodních. Roku 1883 a 1886 byl členem sboru obecních starších, roku 1886 městské rady a r. 1887 zvolen říšským

poslancem za Staré Město pražské a jest od té doby neunavně politicky činným hláse se ke straně svobodomyslné. Jako výborný znalec arithmetiky národohospodářské bývá často brán za rozhodčího ve sporech finančních. Z péra jeho pochází řada pojednání význačných hloubkou a vytríbeností mathematickou...”

Potud náš pramen, který dále cituje jeho vědecké práce. Sedmdesát let je ve vývoji lidské společnosti krátká doba, přesto však zvláště vy, mladí čtenáři, pocítujete na tomto původním znění životopisu Gabriela Blažka jistě silně vliv času.

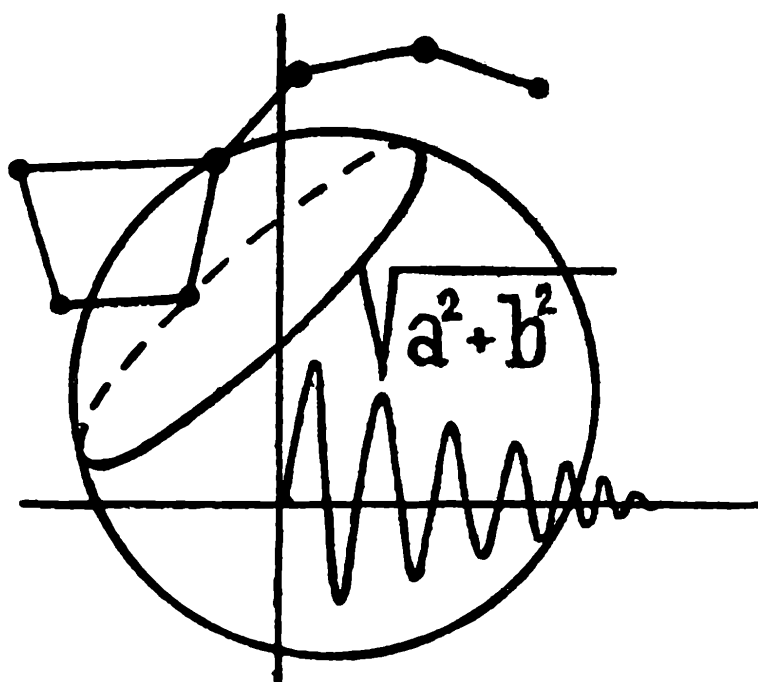
Uvažte, že tedy zakladatelem Jednoty čs. matematiků a fyziků byl vlastně dvacetiletý student.

M. M.

Rozhledy matematicko-fyzikální se objednávají pouze u místní Poštovní novinové služby nebo u poštovního doručovatele. Redakce nemůže přijímat objednávky a neprodává jednotlivá čísla.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



7

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 7

Toto číslo vyšlo 15. března 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

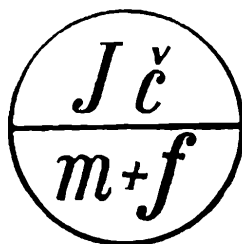
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

OBSAH:

Inž. E. Kriegelstein: Úvod do diferenciálního počtu . . .	289
Dr. Č. Vitner: Diferenciální geometrie křivek v rovině (Pokračování)	296
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování) .	303
Prof. dr. A. Urban: Hyperoskulační kružnice elipsy (Dokončení)	306
J. Filip: Ku konstrukci kosoúhlého axonometrického průmětu (Dokončení)	312
Inž. Z. Růzha: Létající stroje využívající vzdušného polštáře.	316
Inž. L. Smrž: Základní normály v elektrotechnice	324
A. Herman: Pravděpodobnost, náhodné a nenáhodné jevy ve Sportce (Dokončení)	328
Recenze	334
Doc. dr. M. Menšík: Prof. inž. dr. F. Kadeřávek (1885—1961) . .	336
O. S.: Několik rad našim čtenářům o vstupu na vysoké školy tech- nických směrů	3. a 4. str. ob.



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*11113. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Matematika

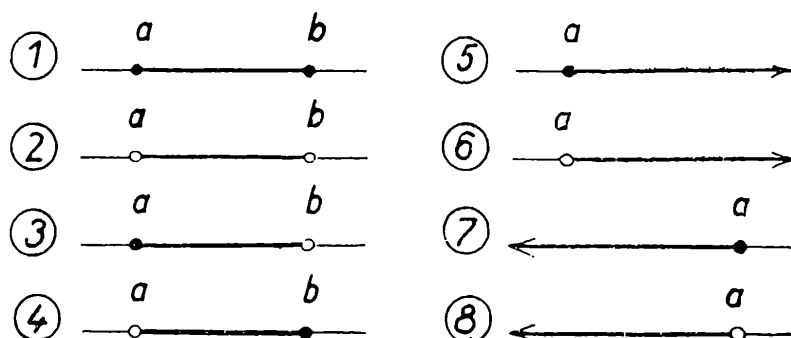
Inž. Eduard Kriegelstein, PŠZ, Praha:

Úvod do diferenciálního počtu

1. Funkce

V této kapitole si zopakujeme některé věci, které jste již poznali ve škole, některé prohloubíme a rozšíříme a zavedeme některé nové nezbytně nutné pojmy.

Definice 1. Číselná množina je souhrn konečného nebo nekonečného počtu čísel. O každém čísle umíme rozhodnout, zda do množiny patří nebo ne, tj. zda je či není prvkem množiny.



Obr. 1

Příklad 1.

Množina čísel přirozených jsou čísla 1; 2; 3; 4; 5; ...

Množina čísel celých jsou čísla ...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;

Množina čísel nezáporných jsou čísla, pro něž platí $x \geq 0$.

Velmi často se setkáváme s pojmem *intervalu*. Připomeňme si proto jeho definici.

Definice 2. Interval je množina čísel, pro která platí některá z následujících nerovností (obr. 1):

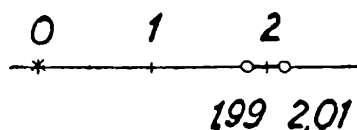
Nerovnost:	Označení:	Pojmenování:
1. $a \leq x \leq b$	$< a; b >$	uzavřený interval
2. $a < x < b$	$(a; b)$	otevřený interval
3. $a \leq x < b$	$< a; b)$	zleva uzavřený a zprava otevřený interval
4. $a < x \leq b$	$(a; b >$	zleva otevřený a zprava uzavřený interval
5. $x \geq a$	$< a; \infty)$	
6. $x > a$	$(a; \infty)$	
7. $x \leq a$	$(-\infty; a >$	
8. $x < a$	$(-\infty; a)$	

Definice 3. Symbolem $(-\infty; \infty)$ rozumíme množinu všech reálných čísel.

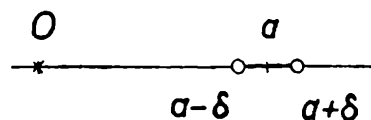
S pojmem interval úzce souvisí pojem *okolí bodu* a .

Definice 4. Okolí bodu a je každý otevřený interval, jehož vnitřním bodem je bod a .

Ukažme si smysl definice 4 na příkladu.



Obr. 2



Obr. 3

Příklad 2. Čísla, která splňují nerovnost $|x - 2| < 10^{-2}$, tvoří okolí bodu 2.

Jak se lze snadno přesvědčit, jsou to čísla, která splňují také nerovnost $1,99 < x < 2,01$ (obr. 2).

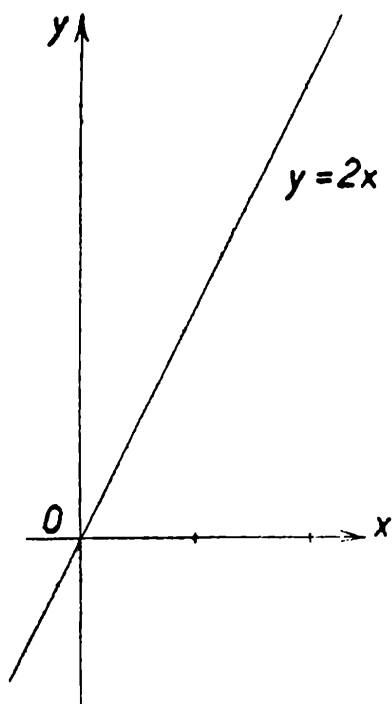
Příklad 3. Čísla, splňující nerovnost $|x - a| < \delta$ tvoří tzv. δ -okolí bodu a . Jsou to čísla, která splňují nerovnost $a - \delta < x < a + \delta$ (obr. 3).

δ -okolí bodu a má délku 2δ , jak si lze snadno ověřit z obrázku 3.

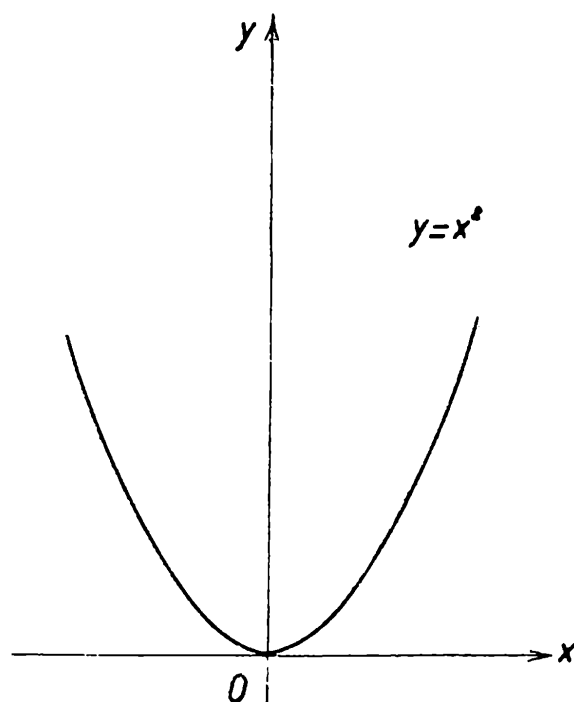
Dříve jsme se také seznámili s pojmem *funkce*. Uvedme nyní přesnou definici a zopakujme si, co jsme již dříve poznali.

Definice 5. Necht jsou dány dvě množiny čísel X a Y . Jestliže přiřadíme každému prvku x množiny X podle určitého daného předpisu jediný prvek y množiny Y , říkáme, že jsme definovali funkci na množině X . Symbolicky píšeme $y = f(x)$. Množině X říkáme definiční obor funkce, množině Y říkáme obor funkčních hodnot. Číslu x říkáme nezávisle proměnná (také argument), číslu y říkáme závisle proměnná.

Funkci zobrazujeme pro větší názornost graficky v pravouhlé soustavě souřadnic. Každý bod grafu funkce má dvě souřadnice $[x; f(x)]$.



Obr. 4



Obr. 5

Některé funkce jsme již poznali. Jsou to funkce mocninné dané rovnicí $y = ax^n$, kde n je přirozené číslo. Funkce mocninné jsou definovány pro všechna reálná čísla, tj. v intervalu $(-\infty; \infty)$. Např.:

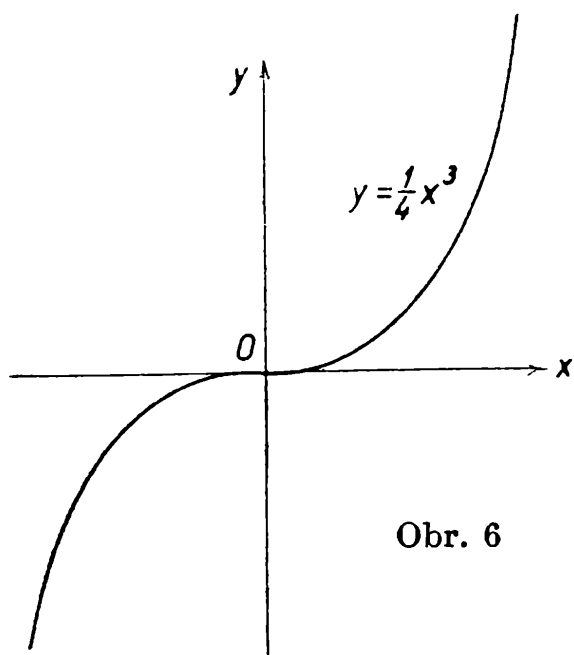
$y = 2x$, funkce lineární (obr. 4);

$y = x^2$, funkce kvadratická (obr. 5);

$y = \frac{1}{4}x^3$, funkce kubická (obr. 6).

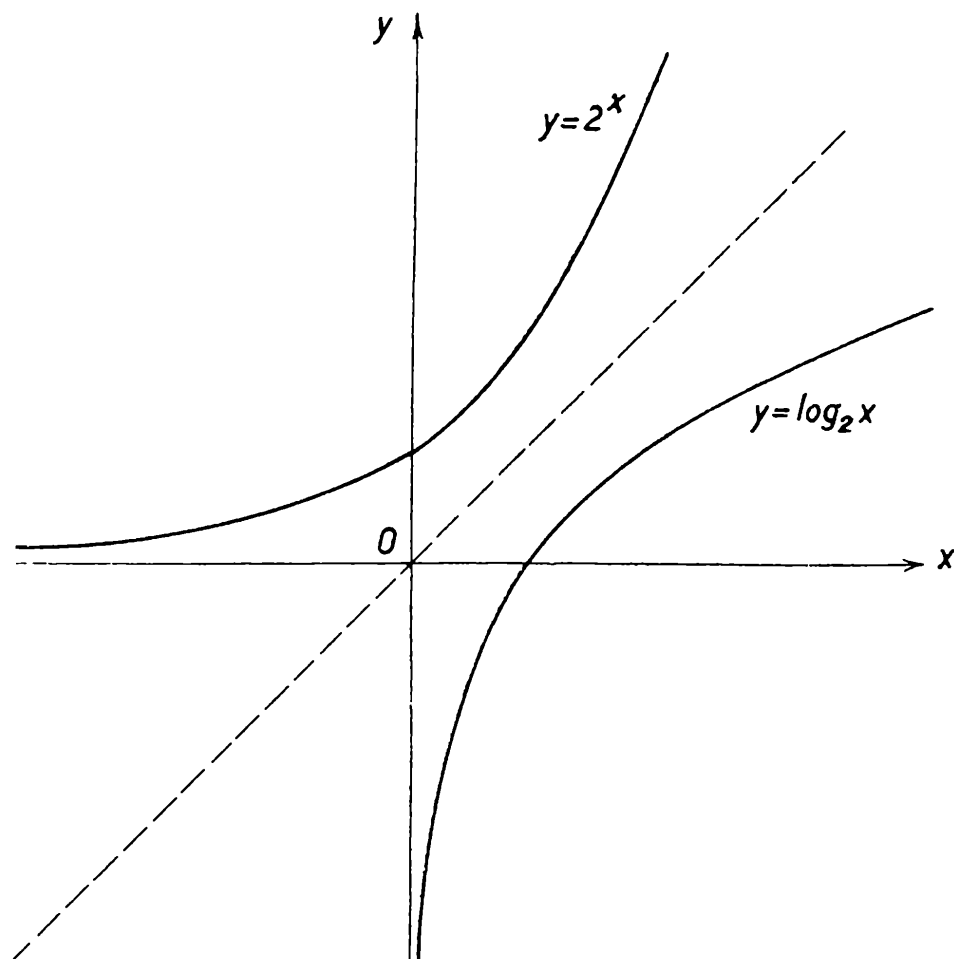
Dále jsme poznali funkci exponenciální, která je určena rovnicí $y = a^x$; $a > 0$. Je definována pro všechna reálná čísla (obr. 7).

Jinou známou funkcí je funkce logaritmická, daná rovnicí $y = \log_a x$; $a > 0$; $a \neq 1$. Funkce logaritmická je definována jen pro kladná čísla, tj. v intervalu $(0; \infty)$. Uvedme jako příklady na obě poslední funkce exponenciální a logaritmickou funkci o rovnicích $y = 2^x$ a $y = \log_2 x$ (obr. 7).



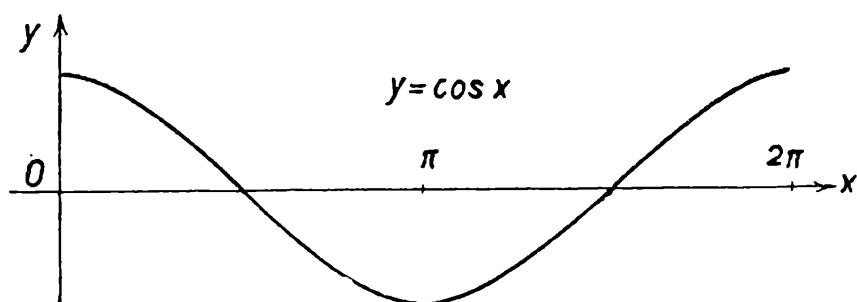
Obr. 6

Funkce exponenciální a logaritmická tvoří dvojici funkcí inverzních. Jejich grafy jsou souměrné podle osy úhlu os souřadnic v první a třetí čtvrti.



Obr. 7

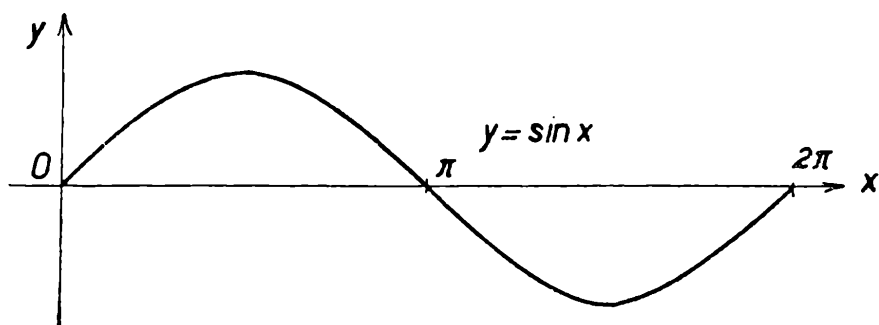
Dále známe ještě funkce goniometrické a to $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$ (obr. 8 až 11).



Obr. 8

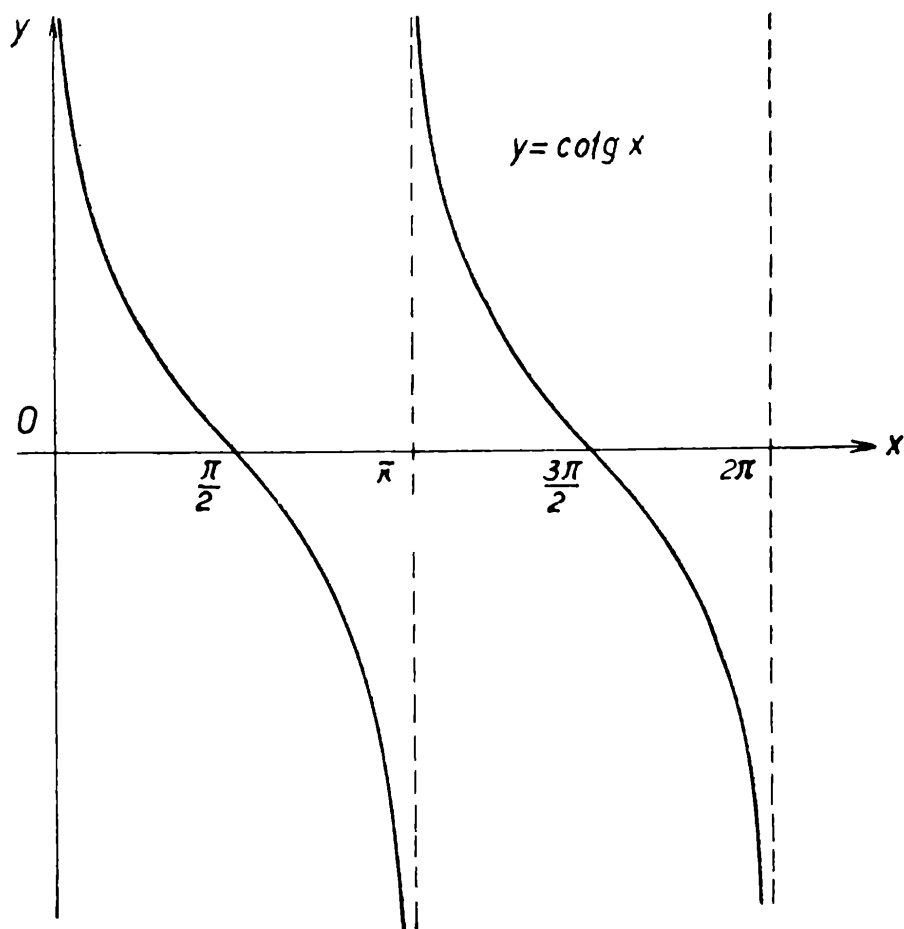
Funkce $y = \sin x$ je definována v intervalu $(-\infty; \infty)$; funkce $y = \cos x$ v intervalu $(-\infty; \infty)$; funkce $y = \operatorname{tg} x$ v intervalech $\left[(2k - 1)\frac{\pi}{2}; (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right]$ a funkce $y = \operatorname{cotg} x$ v intervalech $[k\pi; (k + 1)\pi]$.

Nakonec uvedme ještě jednu známou funkci. Je to lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Je definována pro všechna x s výjimkou $x = -\frac{d}{c}$



Obr. 9

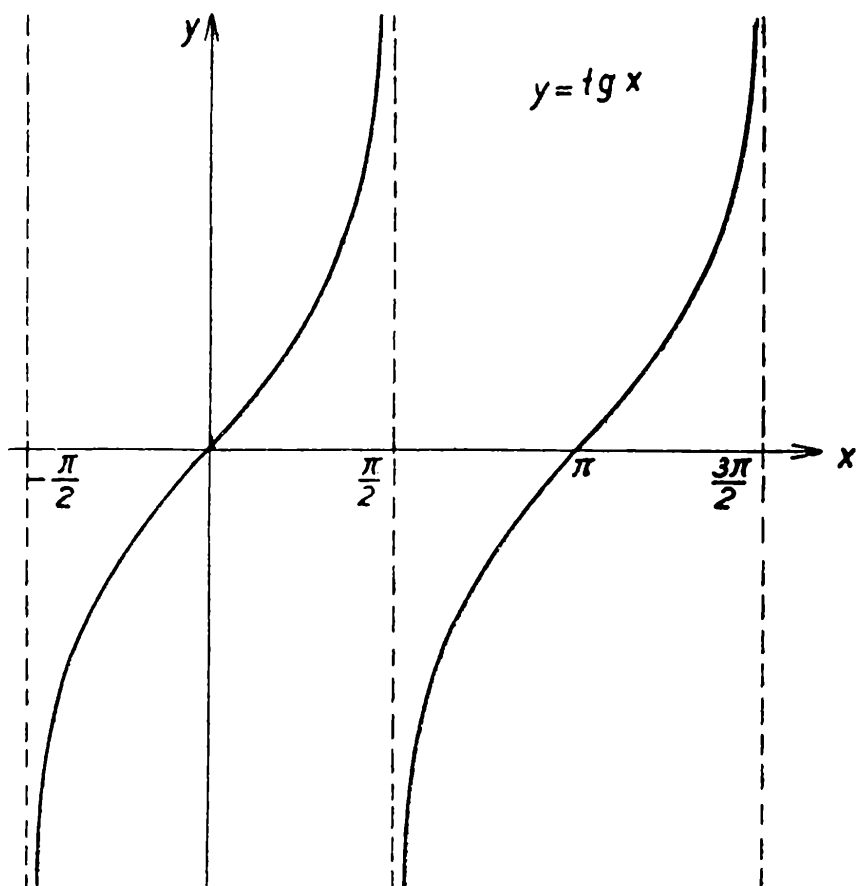
tj. v intervalech $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ a $\left(-\frac{d}{c}; \infty\right)$. Např. funkce $y = \frac{2x + 3}{2x - 4}$ (obr. 12).



Obr. 10

Funkce, které jsme si právě uvedli, nazýváme obvykle *elementární* či *základní funkce*.

Vedle těchto funkcí se setkáme v příštích úvahách s funkcí, kterou budeme nazývat *složená funkce*. Pojem složené funkce si můžeme objasnit takto: Představme si, že do rovnice $y = f(z)$ dosadíme za argument z nějakou funkci $z = g(x)$, která závisí na nezávisle proměnné x . Pak říkáme, že jsme složili dvě funkce a že výsledkem tohoto složení je složená funkce $y = f[g(x)]$. Se složenou funkcí jsme se již setkali i když jsme to výslovně neuváděli když jsme probírali logaritmy goniometrických funkcí.

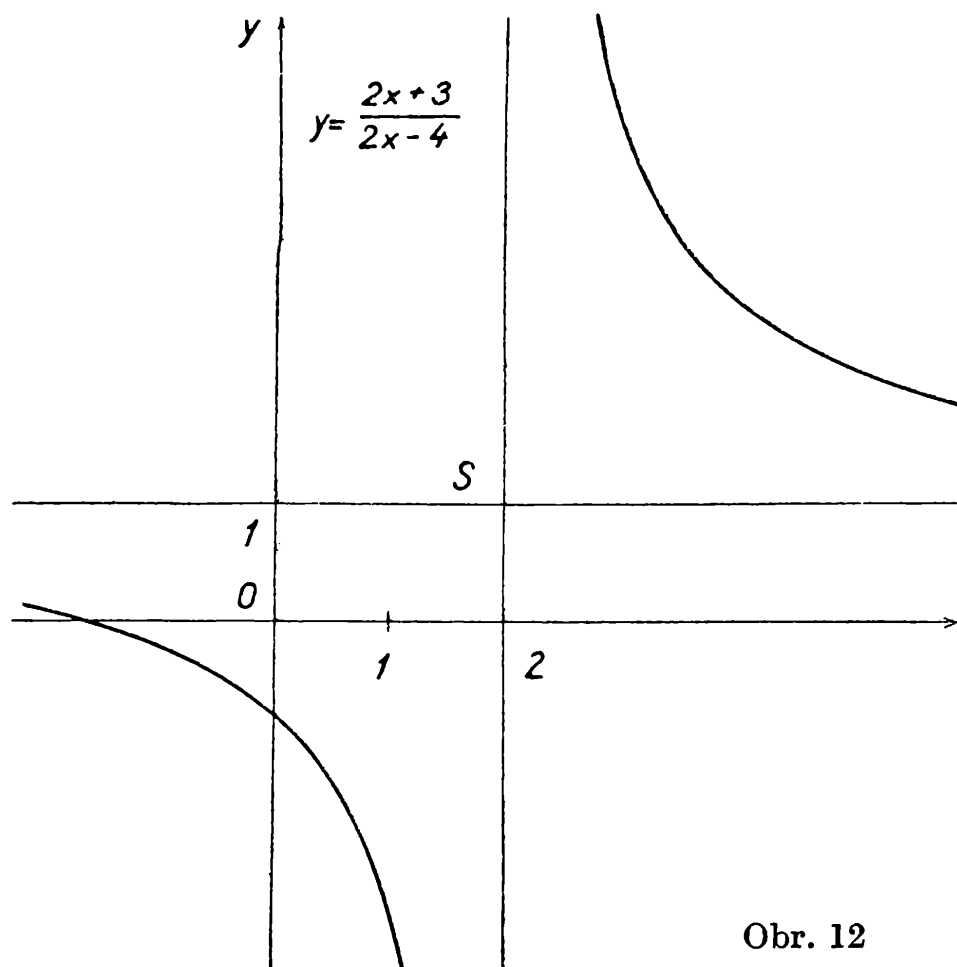


Obr. 11

Příklad 4. Mějme $y = \log z$ a $z = \sin x$. Pak složená funkce je $y = \log \sin x$. Definiční obor funkce určíme z požadavku, aby $\log \sin x$ měl smysl. Takto stanovený obor nazýváme výstižněji *existenčním oborem funkce*. Logaritmus je definován jen pro kladná čísla, proto funkce $y = \log \sin x$ je definována jen pokud $\sin x$ je kladné číslo, tj. např. v intervalu $(0; \pi)$ nebo $(2\pi; 3\pi)$ atd.

Příklad 5. Uvažujme ještě tuto složenou funkci $y = \sqrt{4 - x^2}$. Zde je $y = \sqrt{z}$ a $z = 4 - x^2$. Definiční obor určíme opět tak, aby výraz $\sqrt{4 - x^2}$ měl smysl. Musí tedy platit $4 - x^2 \geq 0$, tj. $x^2 \leq 4$ a odtud $-2 \leq x \leq 2$. Je tedy funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ definována v intervalu $[-2; 2]$. Sestrojme ještě graf této funkce pomocí tabulky.

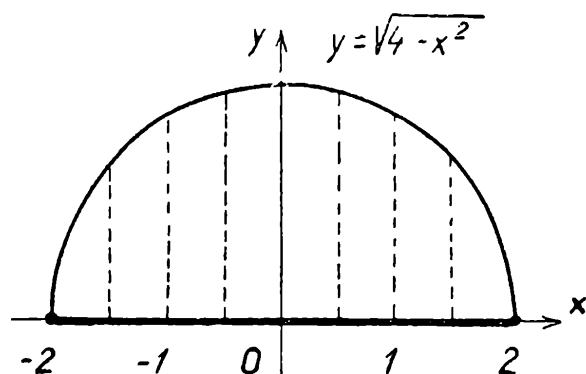
x	± 2	$\pm 1,5$	± 1	$\pm 0,5$	0
y	0	1,32	1,73	1,94	2



Obr. 12

Grafem dané funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ je půlkružnice. Je to část kružnice $x^2 + y^2 = 4$, pro jejíž body je $y \geq 0$ (obr. 13).

Úlohy. 1. Řešte nerovnosti: a) $|3x - 1| < 2$; b) $|2x - 3| \leq 0,5$; c) $2 < |5x - 1| \leq 3$.



Obr. 13

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt[3]{3x - 5}$; b) $f(x) = \frac{x - 2}{3 - x}$;

c) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

d) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$$\text{e) } f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}; \quad \text{f) } f(x) = \frac{x}{\log_2(x-1)}$$

3. Určete definiční obory následujících dvojic funkcí a udejte, v čem se dané dvě funkce liší či zda jsou to funkce totožné. a) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = x$; b) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = |x|$; c) $f(x) = \log x^2$, $f(x) = 2 \log x$; d) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

Výsledky. 1. a) $-\frac{1}{3} < x < 1$; b) $1,25 \leq x \leq 1,75$; c) $-0,4 \leq x < -0,2$ nebo $0,6 < x \leq 0,8$.

2. a) $< \frac{5}{3}$; $\infty(-\infty; 3)$ a $(3; \infty)$; c) $(-\infty; \infty)$; d) $(-1; 1)$; e) $(-\infty; -\frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}; \infty)$; f) $(1; 2)$ a $(2; \infty)$.

3. a) $(-\infty; \infty)$; b) $(-\infty; \infty)$; c) $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$, $(0; \infty)$; d) $(-\infty; 1)$ a $(1; \infty)$, $(-\infty; \infty)$.

(Pokračování)

Dr. Čestmír Vitner, ČVUT, Praha:

Diferenciální geometrie křivek v rovině

(Pokračování)

§ 4. Oskulační kružnice

Omezme se pro jednoduchost v dalším na body křivky, ve kterých existuje tečna. Uvažujme „kružnici“ $k(x)$, která se v bodě A dotýká tečny křivky (stručněji budeme říkat, že se dotýká křivky v bodě A) a prochází ještě jedním bodem x křivky různým od A . Uvozovek jsem použil proto, že se ta „kružnice“ může redukovat na přímku. Blížíme-li se nyní s bodem X k bodu A , může mít „kružnice“ $k(x)$ limitní polohu; takovou kružnici nazveme *oskulační „kružnici“ křivky v bodě A* . Redukuje-li se oskulační kružnice na přímku, budeme ji nazývat *oskulační tečnou křivky v bodě A* . Také se může stát, že se oskulační kružnice redukuje na dotykový bod.

Zřejmě záleží na tom, po kterém ze dvou možných jednoduchých obloučích se k bodu A blížíme. Mohou být tedy v bodě křivky třeba dvě různé oskulační kružnice. Doporučuji čtenáři, aby si rozvážil, které případy nastávají v bodech C , F , G křivky z obr. 3 v § 3, která se skládá ze samých kruhových oblouků.

V diferenciální geometrii se obvykle omezujeme na takové body, ve kterých každý ze dvou oblouků vycházející z toho bodu má oskulační kružnici s nenulovým poloměrem, při čemž obě dvě kružnice splývají. Střed této oskulační kružnice se pak nazývá *středem křivosti* křivky v bodě. Poloměr té oskulační kružnice se nazývá *poloměrem křivosti* a jeho převrácená hodnota *křivostí křivky* v bodě. Oskulační kružnice v bodech kružnice je zřejmě ve všech bodech stejná a splývá s tou kružnicí.

Redukují-li se obě oskulační kružnice v bodě křivky na oskulační tečnu, nazýváme *bod přímkový* a říkáme, že křivka má v tom bodě nulovou křivost a nekonečně velký poloměr křivosti. Všechny body přímky jsou zřejmě přímkové.

Redukují-li se obě oskulační kružnice v bodě křivky na bod, říkáme, že křivka má v tom bodě nekonečnou křivost a nulový poloměr křivosti.

Oskulační kružnice má zřejmě tu vlastnost, že v blízkosti dotykového bodu se velmi málo liší od uvažované křivky. Z toho důvodu se někdy pro zjednodušení v blízkosti svého bodu nahrazuje křivka oskulační kružnicí.

Užitím pojmu oskulační kružnice je možno dále omezit pojem hladké jednoduché křivky požadavkem, aby v každém bodě existovala oskulační kružnice, která se spojitě mění (tzn. blízkým bodům křivky odpovídají blízké středy oskulačních kružnic).

Příklad 4,1. Hledejme oskulační kružnici ve vrcholu paraboly $x^2 = 2py$. Kružnice, která se ve vrcholu $(0; 0)$ dotýká paraboly a prochází nějakým jejím bodem $(x_0; y_0)$, má střed na ose y a na symetrále bodů $(0; 0)$ a $(x_0; y_0)$. Tato symetrála se dostane jako geometrické místo bodů $(x; y)$, které mají od uvažovaných dvou bodů stejné vzdálenosti, tj.

$$x^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$2x x_0 + 2y y_0 = x_0^2 + y_0^2$$

Pro souřadnice $(x; y)$ středu té kružnice dostaneme tedy

$$x = 0, y = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}. \quad (4,1)$$

Nepoužili jsme zatím vůbec toho, že uvažovaná křivka je parabola, tj. že platí $x_0^2 = 2p y_0$. V případě paraboly se pak rovnice (4,1) redukují na

$$x = 0, y = p + \frac{y_0}{2}. \quad (4,2)$$

Blíží-li se nyní bod $(x_0; y_0)$ k bodu $(0; 0)$, blíží se y_0 k nule, a to ne-

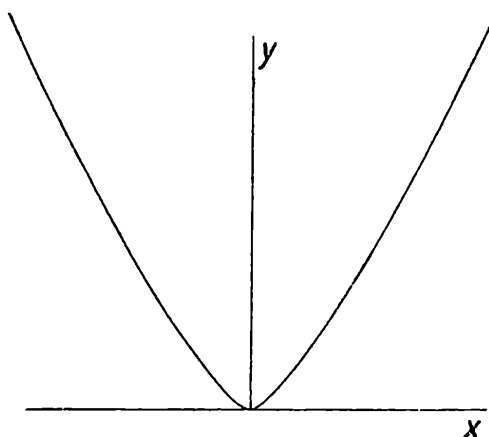
závisle na tom, zda se blížíme k bodu $(0; 0)$ z jedné nebo druhé strany. Odtud a z rovnice (4,2) plyne, že střed oskulační kružnice má souřadnice $(0; p)$ a tedy poloměr $|p|$.

Je tedy střed oskulační kružnice ve vrcholu paraboly na její ose ve dvojnásobné vzdálenosti od vrcholu než ohnisko. Viz obr. 5.

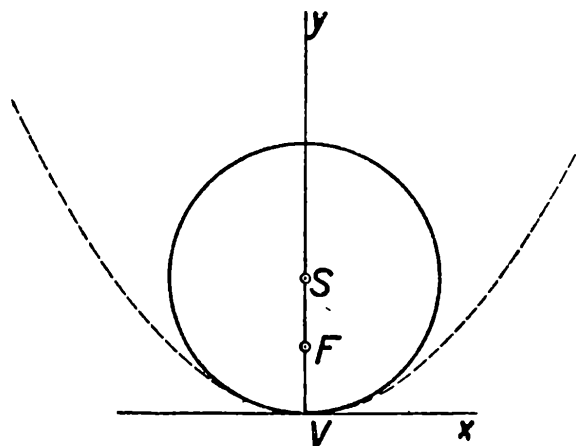
Příklad 4.2. Hledejme v bodě $(0; 0)$ oskulační kružnici křivky $y^3 = x^4$, která svým tvarem poněkud připomíná parabolu. Viz obr. 6. Tečna této křivky v bodě $(0; 0)$ splývá, jak snadno nahlédneme, s osou x . Pro střed kružnice, která se dotýká tečny v bodě $(0; 0)$ a prochází bodem $(x; y)$ křivky, platí opět (4,1). Pro naši křivku se tyto vzorce redukují na

$$x = 0, y = \frac{1}{2} (x_0^{2/3} + x_0^{4/3}).$$

Odtud dostaneme limitním přechodem $x = 0, y = 0$. Máme tedy výsledek: *Oskulační kružnice křivky $y^3 = x^4$ v bodě $(0; 0)$ se redukuje na tento bod.*



Obr. 5



Obr. 6

Příklad 4.3. Hledejme střed oskulačních kružnic elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v jejích vrcholech. Vezměme nejdříve vrchol $(0; 0)$ na hlavní ose. Střed kružnic použitých k definici oskulační kružnice v tomto bodě bude zřejmě ležet na ose x a na symetrále bodů $(a; 0)$ a $(x_0; y_0)$. Pro tuto symetrálu dostaneme snadno rovnici

$$(x - a)^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

což po úpravě dává

$$2y y_0 - 2x(a - x_0) = -a^2 + x_0^2 + y_0^2.$$

Pro souřadnice jejího středu tedy platí

$$y = 0, 2x(a - x_0) = a^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

Použijeme-li nyní toho, že pro bod $(x_0; y_0)$ elipsy platí $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$, dostaneme

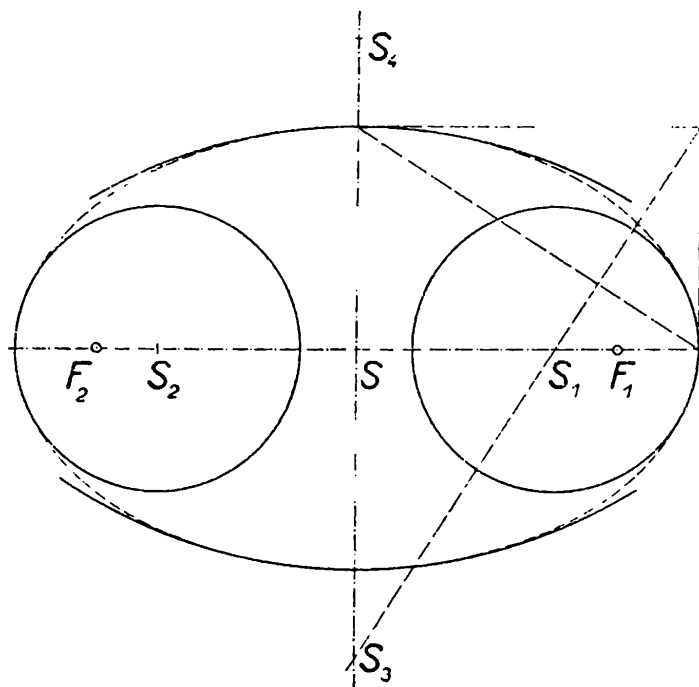
$$y = 0, 2a^2x(a - x_0) = a^2(a^2 - x_0^2) - b^2(a^2 - x_0^2), \text{ tj.}$$

$$y = 0, x = \frac{(a^2 - b^2)(a + x_0)}{2a^2}.$$

Odtud dostaneme pro x_0 blížící se k a

$$x = \frac{(a^2 - b^2)}{a}, y = 0. \quad (4,3)$$

To jsou rovnice středu oskulační kružnice elipsy ve vrcholu $(a; 0)$. Pro poloměr této oskulační kružnice pak platí $r = a - x = \frac{b^2}{a}$.



Obr. 7

Pro vrchol $(0; b)$ na vedlejší poloose dostaneme obdobným postupem oskulační kružnici se středem $\left(0; \frac{b^2 - a^2}{b}\right)$ a poloměrem $\frac{a^2}{b}$.

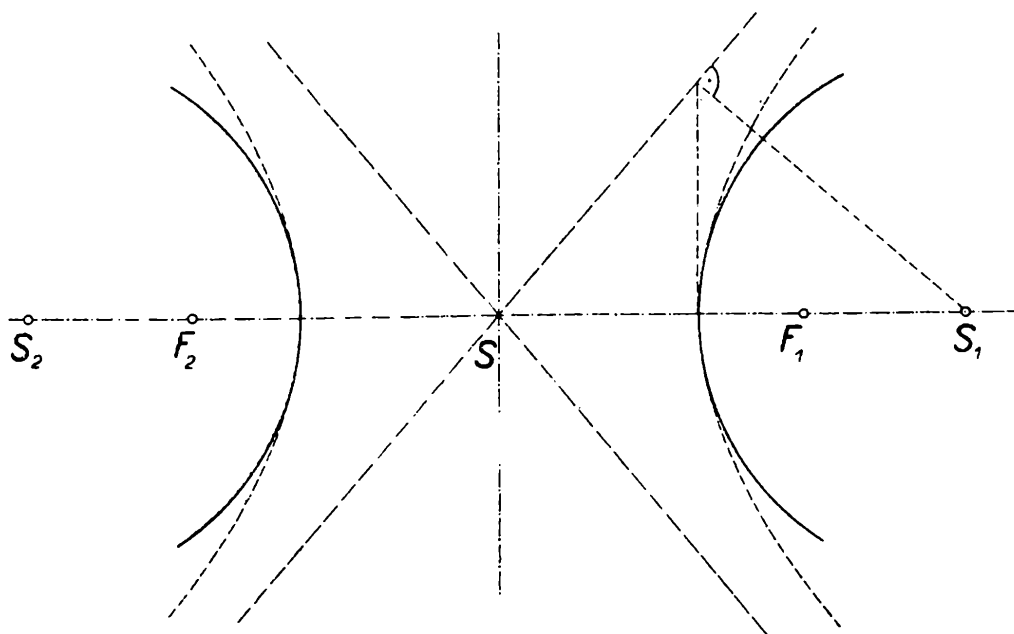
Z dosažených výsledků plyne známá konstrukce středů oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy, znázorněná v obr. 7. (Použije se podobnosti pravoúhlých trojúhelníků).

Oskulační kružnici ve vrcholu $(-a; 0)$ dostaneme zřejmě z oskulační kružnice ve vrcholu $(a; 0)$ symetrií podle osy y . Podobně oskulační kružnici ve vrcholu $(0; -b)$ dostaneme z oskulační kružnice ve vrcholu $(0; b)$ symetrií podle osy x .

Cvičení 1. Ukažte, že osculační kružnice paraboly čtvrtého stupně $y = x^4$ v bodě $(0; 0)$ se redukuje na osu x . Namalujte si tu křivku.

2. Provedte podrobně zdůvodnění konstrukce osculačních kružnic ve vrcholech elipsy.

3. Najděte střed osculační kružnice ve vrcholech hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\left(r = \frac{b^2}{a}\right)$ a odůvodněte konstrukci naznačenou na obr. 8.



Obr. 8

§ 5. Styk křivek

Omezme se v dalším pro jednoduchost na takový bod křivky, ve kterém existuje tečna a který má ještě následující vlastnost: Omezíme-li se na dostatečně malé okolí uvažovaného bodu, protnou přímky kolmé na tečnu křivku jen v jediném bodě. Lze dokázat, že každý bod po částech hladké křivky, ve kterém existuje tečna, má tuto vlastnost. V dalším se mlčky omezíme na zmíněné okolí uvažovaného bodu.

O křivkách, které mají ve společném bodě stejnou tečnu, budeme říkat, že se v tom bodě dotýkají. Tento dotyk může být více nebo méně těsný. Abychom mohli posoudit jak těsný je tento styk, zavedeme pojem řádu styku dvou křivek.

Mějme dvě křivky k_1 a k_2 , které mají v bodě A společnou tečnu t . Uvažujme na křivkách k_1 , k_2 dva body Y_1 , Y_2 , které leží na kolmici k tečně t . Bod, ve kterém protíná tato kolmice tečnu t , označme M .

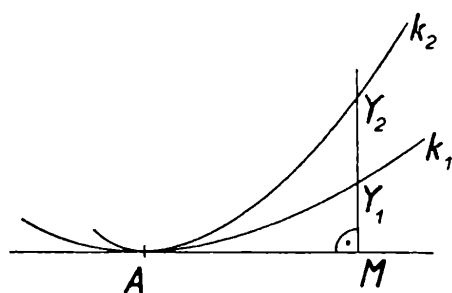
Viz obr. 9. Uvažujme podíl

$$\frac{Y_1 Y_2}{AM^k}, \quad (5,1)$$

kde k je přirozené číslo. Jestliže pro M blížící se k A z obou stran se podíl (5,1) blíží k číslu různému od nuly, říkáme, že křivky k_1 a k_2 mají v bodě A *styk řádu právě $k - 1$* ; blíží-li se tento podíl k nule, říkáme, že křivky mají v tom bodě *styk řádu vyššího než $k - 1$* .

Lze snadno dokázat, že platí následující tvrzení:

Mají-li dvě křivky ve společném bodě styk právě řádu k ($k > 0$) (anebo řádu vyššího než k), mají také styk řádu vyššího než i , kde $0 \leq i < k$. Mají-li křivky styk právě řádu k , pak už nemohou mít styk řádu vyššího než k .



Obr. 9

Okolnost, že dvě křivky mají ve společném bodě styk řádu právě $k - 1$ znamená zhruba řečeno toto: Vzdálenost bodů Y_1, Y_2 jde k nule asi stejně tak rychle jako k -tá mocnina vzdálenosti bodů A a M . Styk je řádu vyššího než $k - 1$ jestliže vzdálenost $Y_1 Y_2$ jde k nule daleko rychleji než AM^k . Jinak (opět zhruba) řečeno: Čím většího řádu mají

křivky styk, tím těsněji se k sobě přimykají.

Snadno lze dokázat také následující tvrzení:

Tečna v bodě křivky má s ní styk řádu vyššího než nultého.

Poněkud pracnější (ne však příliš pracný) by byl důkaz dalšího tvrzení:

Oskulační kružnice (resp. tečna) má s křivkou styk řádu vyššího než prvního.

Důkazy vět vyslovených v tomto odstavci jsou celkem jednoduché. Vynechal jsem je hlavně proto, že jsem nepředpokládal znalost obecných pravidel pro počítání s limity funkcí. Nebylo by ovšem těžké zde tato pravidla vyložit. Nebudu to dělat, abych nezatěžoval svůj výklad přílišnou obšírností.

Příklad 5,1. Křivka $y = x^3$ má s tečnou v bodě $(0; 0)$, tj. osou x styk řádu právě druhého. Tvrzení je zřejmé, neboť podíl $\frac{Y_1 Y_2}{AM^3} = \frac{|y|}{|x|^3} = 1$, neboli blíží se k jedné.

Příklad 5,2. Křivka $y^3 = x^4$ má s tečnou v bodě $(0; 0)$, tj. osou x styk řádu vyššího než nultého, nemá ale s ní styk právě řádu prvního

ani řádu vyššího než prvního. To plyne z té okolnosti, že se výraz $\frac{|x|^{4/3}}{|x|}$ pro x blíží se k nule blíží k nule, ale výraz $\frac{|x|^{4/3}}{|x|^2}$ limitní hodnotu nemá.

V tomto případě by bylo možno říci, že křivka má s osou x styk právě řádu $1/3$. Tuto možnost jsme v naší definici styku nepřipouštěli. Mohli bychom to ovšem učinit.

Příklad 5,3. Ukažme, že *oskulační kružnice ve vrcholu paraboly má s ní styk řádu právě třetího*.

Podle příkladu 4,1 plyne, že oskulační kružnice ve vrcholu paraboly $x^2 = 2py$ ($p > 0$) má rovnici

$$x^2 + (y - p)^2 = p^2, \text{ tj. } y = p \pm \sqrt{p^2 - x^2}.$$

Pro naše účely je třeba vzít spodní část kružnice, tj. $y = p - \sqrt{p^2 - x^2}$. Pro vzdálenost bodu $Y_1(x; y_1)$ paraboly a bodu $Y_2(x; y_2)$ oskulační kružnice, ležících na kolmici k tečně ve vrcholu A platí

$$y_2 - y_1 = p - \sqrt{p^2 - x^2} - \frac{x^2}{2p} = \frac{2p^2 - x^2 - 2p\sqrt{p^2 - x^2}}{2p}.$$

Rozšíříme-li zlomek výrazem $2p^2 - x^2 + 2p\sqrt{p^2 - x^2}$, dostaneme

$$y_2 - y_1 = \frac{(2p^2 - x^2)^2 - 4p^2(p^2 - x^2)}{2p(2p^2 - x^2 + 2p\sqrt{p^2 - x^2})} = \frac{x^4}{2p(2p^2 - x^2 + 2p\sqrt{p^2 - x^2})}.$$

Platí tedy

$$\frac{Y_1 Y_2}{AM^4} = \frac{y_2 - y_1}{x^4} = \frac{1}{2p(2p^2 - x^2 + 2p\sqrt{p^2 - x^2})}$$

Blíží-li se bod M k bodu A , blíží se x k nule a podíl $\frac{Y_1 Y_2}{AM^4}$ patrně k číslu $\frac{1}{8p^3}$, které je zřejmě různé od nuly. Odtud plyne dokazované tvrzení.

Vzhledem k vysokému řádu styku paraboly a její oskulační kružnice, říká se oskulační kružnici ve vrcholu paraboly *hyperoskulační*.

Cvičení 1. Ukažte, že křivka $y = x^4$ má s osou x v počátku styk právě třetího řádu.

2. Ukažte, že elipsa má s oskulačními kružnicemi ve svých vrcholech styk právě třetího řádu. Z toho důvodu se těm kružnicím říká kružnice hyperoskulační.

3. Ukažte, že také hyperbola má s oskulačními kružnicemi ve svých vrcholech styk právě třetího řádu. Mluvíme pak opět o hyperoskulačních kružnicích.

O analytické geometrii v rovině

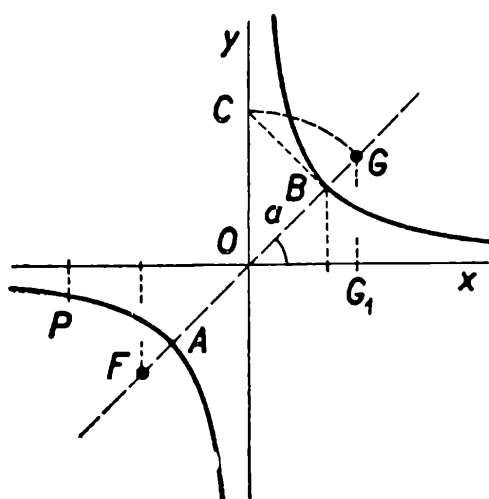
(Pokračování)

Jestliže asymptoty hyperboly jsou vzájemně kolmé, pak se tato hyperbola nazývá *rovnoosou hyperbolou*. Z obr. 29 (viz minulé číslo Rozhledů) pak plyne, že je $BC = OB$ čili $b = a$. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že její osa x splývá s hlavní osou hyperboly a osa y s její osou vedlejší, pak podle věty 21 má rovnoosá hyperbola rovnici

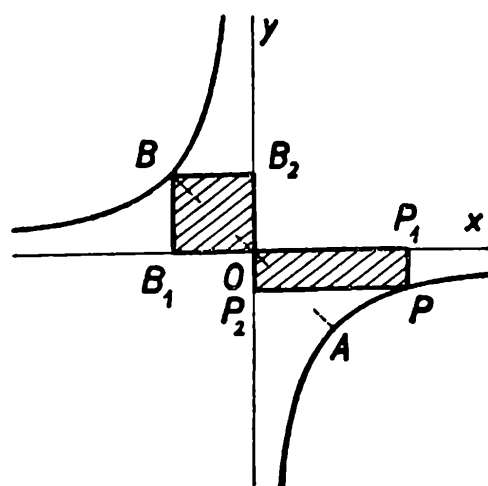
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Excentricita e rovnoosé hyperboly je

$$e = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \quad (1)$$



Obr. 30



Obr. 31

V aplikacích se často vyskytuje rovnoosá hyperbola, která je umístěna tak, že má v souřadnicových osách x , y nikoli své osy, nýbrž své asymptoty. Vzhledem k tomu, že jsou asymptoty hyperboly souměrné podle jejích os, pŕl při popsání umístění rovnoosé hyperboly její osy ŕhly souřadnicových os x , y . Takové hyperboly jsou narýsovány na obr. 30 a 31; odvodíme si jejich rovnice.

Probereme nejprve pŕpád, kdy vĕtve dané rovnoosé hyperboly (s hlavní poloosou a) leží v prvním a tŕetím kvadrantu; vrcholy hyperboly jsou A , B , její ohniska F , G (obr. 30). Označíme-li pravoŕhlý pŕŕmĕt ohniska G na osu x písmenem G_1 , pak pravoŕhlý trojŕhelník OG_1G má ŕhel $\angle GOG_1 = 45^\circ$, takže je rovnoramenný; je tedy

$$OG_1 = GG_1 = z > 0.$$

Protože podle (1) je $OG = e = a\sqrt{2}$, je podle Pythagorovy věty

$$2z^2 = 2a^2,$$

$$z = a.$$

Ohnisko G má tedy souřadnice $x = y = a$; ohnisko F má pak souřadnice $-a, -a$. Souřadnice libovolného bodu P označme x, y . Je tedy

$$F(-a; -a), G(a; a), P(x; y).$$

a) Leží-li bod P na hyperbole, pak podle její definice je buď $PF - PG = 2a$ nebo $PG - PF = 2a$, tj. podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů je buď

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a \quad (2)$$

nebo

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a. \quad (3)$$

Převědeme-li v rovnici (2) druhý člen levé strany na pravou stranu a umocníme-li pak na druhou, dostaneme

$$(x+a)^2 + (y+a)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} + (x-a)^2 + (y-a)^2,$$

$$4ax + 4ay = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2},$$

$$x + y - a = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}.$$

Umocníme-li ještě jednou na druhou, dostaneme (po úpravě)

$$2xy = a^2,$$

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad (4)$$

K témuž výsledku dospějeme analogickou úpravou rovnice (3). Pro každý bod $P(x; y)$ hyperboly tedy platí rovnice (4).

b) Dokážeme nyní, že také naopak každý bod $P(x; y)$ splňující rovnici (4) leží na dané hyperbole, tj. platí pro něj buď $PF - PG = 2a$ nebo $PG - PF = 2a$.

Z rovnice (4) plyne

$$2xy = a^2 \quad (5)$$

Potom je

$$PF^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2ax + 2ay + a^2;$$

$$PG^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + a^2$$

Podle (5) je $a^2 = 2xy$; dosadíme-li tedy do posledních dvou vzorců za poslední člen vždy $2xy$, dostaneme

$$PF^2 = (a + x + y)^2, \quad PG^2 = (a - x - y)^2.$$

Je tedy

$$PF = |a + x + y|, \quad PG = |a - (x + y)|. \quad (6)$$

Avšak podle (5) je

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + a^2 > a^2,$$

neboť podle (5) je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Je tedy

$$|x + y| > a. \quad (7)$$

Je-li $x + y > 0$, je také $a + x + y > 0$, takže podle (6) je

$$PF = a + x + y.$$

Podle (7) je v tomto případě $x + y > a$ čili $a - (x + y) < 0$. Podle (6) je tedy

$$PG = x + y - a.$$

Proto je $PF - PG = 2a$; to však znamená, že bod P leží na dané hyperbole.

Je-li $x + y < 0$, je $-(x + y) > 0$ čili $a - (x + y) > 0$, takže podle (6) je

$$PG = a - x - y$$

Podle (7) je v tomto případě $-(x + y) > a$ čili $a + x + y < 0$. Podle (6) je tedy

$$PF = -a - x - y$$

Proto je $PG - PF = 2a$; to znamená, že bod P leží i v tomto případě na dané hyperbole.

Dokázali jsme tedy, že každý bod $P(x; y)$ dané hyperboly vyhovuje rovnici $xy = \frac{1}{2}a^2$ a obráceně, že každý bod $P(x; y)$ vyhovující této rovnici leží na dané hyperbole. To znamená, že daná hyperbola má rovnici $xy = \frac{1}{2}a^2$.

Leží-li hyperbola v kvadrantu druhém a čtvrtém (obr. 31), pak lze úplně obdobně dokázat, že má rovnici $xy = -\frac{1}{2}a^2$.

Výsledky svých úvah můžeme vyslovit takto:

V ě t a 23. *Rovnoosá hyperbola, která má asymptoty v souřadnicových osách, má rovnici*

$$xy = c, \quad c \neq 0.$$

Leží-li v prvním a třetím kvadrantu, je $c > 0$; leží-li ve druhém a čtvrtém kvadrantu, je $c < 0$. V každém případě je

$$|c| = \frac{1}{2}a^2,$$

kde a je hlavní poloosa hyperboly.

Je-li $P(x; y)$ libovolný bod dané rovnosé hyperboly a jsou-li P_1, P_2 jeho pravoúhlé průměty na asymptoty této hyperboly (tj. na osy x, y), pak obrazec OP_1PP_2 je obdélník nebo čtverec (obr. 31). Jeho obsah je zřejmě rovný číslu $|xy|$. Protože součin xy je (podle věty 23) stále týž, je také číslo $|xy|$ konstantní. Platí tedy věta:

Obdélník (čtverec), který má jeden vrchol ve středu rovnosé hyperboly, strany rovnoběžné s jejími asymptotami a další vrchol P na této hyperbole, má obsah, jenž nezávisí vůbec na volbě bodu P .

Ptejme se ještě, zdali obráceně každá rovnice $xy = c, c \neq 0$, je rovnicí nějaké rovnosé hyperboly s asymptotami v souřadných osách x, y . Budiž tedy dána rovnice

$$xy = c, c > 0.$$

Sestrojíme hyperbolu, která má asymptoty v osách x, y (je tedy rovnosá), hlavní poloosu $a = \sqrt{2c}$ a leží v prvním a třetím kvadrantu. Podle věty 23 má tato hyperbola rovnici $xy = k, k > 0, k = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 2c = c$, tj. danou rovnici. Obdobně dokážeme, že také každá rovnice $xy = c, c < 0$ je rovnicí rovnosé hyperboly, která leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu a má asymptoty v osách x, y . Platí tedy věta:

V ě t a 24. *Každá rovnice $xy = c, c \neq 0$, je rovnicí rovnosé hyperboly, která má asymptoty v souřadnicových osách x, y ; její hlavní poloosa a je dána rovnicí $\frac{1}{2} a^2 = |c|$. Je-li $c > 0$, leží hyperbola v prvním a třetím kvadrantu; je-li $c < 0$, leží hyperbola ve druhém a čtvrtém kvadrantu.*

S rovnicí $xy = c, c \neq 0$, jste se ve škole setkali při probírání nepřímé úměrnosti (tj. funkce $y = \frac{c}{x}$, kde $c \neq 0$). Její graf jste sestrojovali z jednotlivých bodů a nazývali jste jej hyperbolou. Nyní jsme si dokázali, že tento graf je totožný s rovnosou hyperbolou definovanou pomocí ohnisek.

Deskriptivní geometrie

Prof. Dr. Alois Urban, ČVUT, Praha:

Hyperoskulační kružnice elipsy

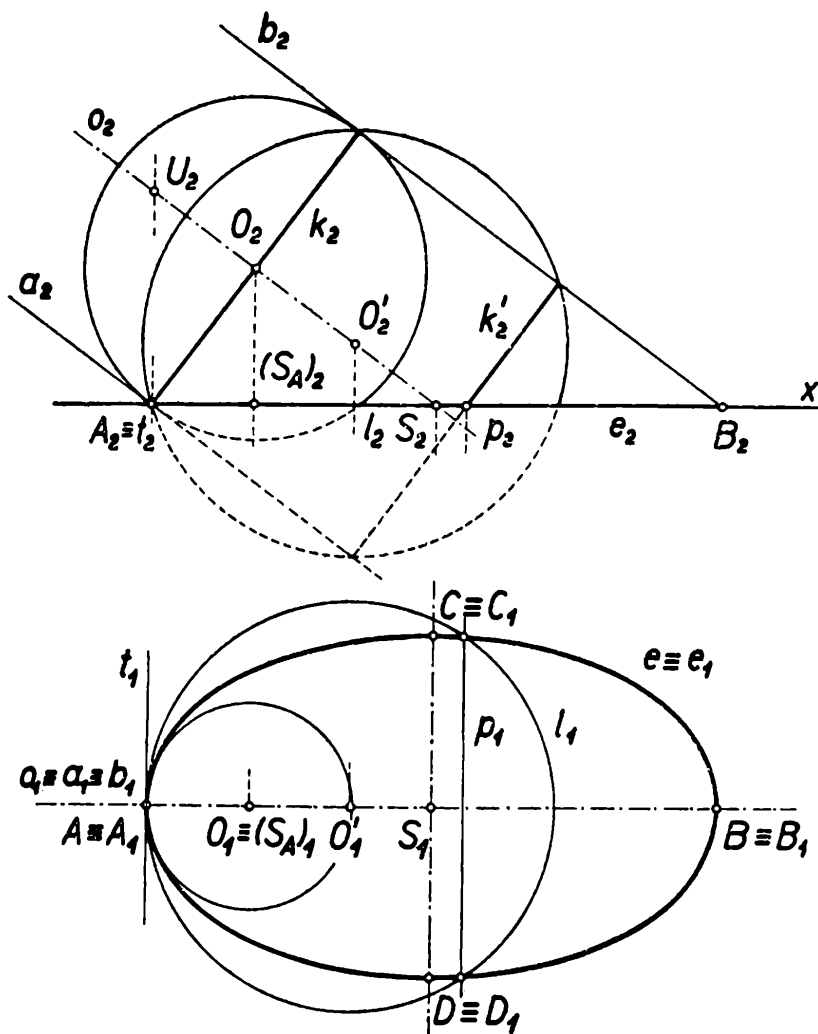
(Dokončení)

2. Deskriptivně geometrická metoda

V posledním ročníku střední školy se dokazuje, že rotační válcová plocha je prořazena rovinou (která není rovnoběžná

s jejími povrchovými přímkami, ani není k nim kolmá) v elipse. Obráceně také platí, že každá elipsa se dá sestrojít jako řez jisté rotační válcové plochy vhodně zvolenou rovinou. Toho použijeme k prostorovému sestrojení hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu elipsy.

Danou elipsou o osách $AB = 2a$, $CD = 2b$ (a středu S) proložíme rotační válcovou plochu. Rovinu elipsy zvolíme za prvou průmětnu π ; druhou průmětnu ν zvolíme tak, aby základnice x (průsečnice průmě-



Obr. 6

ten) byla rovnoběžná s hlavní osou (obr. 6). Sestrojíme bod O_2 tak, aby ležel na kružnici opsané nad průměrem A_2S_2 a tak, aby $A_2O_2 = b$. Dále sestrojíme ještě bod O_1 na A_1S_1 tak, aby bylo $O_1O_2 \perp x$. Dvojice O_1, O_2 tvoří půdorys a nárys bodu O prostoru. Přímka $o \equiv OS$ je pak osou jedné ze dvou rotačních válcových ploch, které půdorysna protíná v dané elipse. Kružnici válcové plochy, jejíž střed je právě bod O , označme k (v obr. 6 je vyznačen jen její nárys k_2).

Kružnice k a elipsa e - obě křivky leží na sestrojené válcové ploše - mají společný jen jediný bod A . V něm se navzájem dotýkají; jejich společná tečna je vrcholová tečna t elipsy e v bodě A .

Proložme kružnici k libovolnou kulovou plochu κ o středu $O' \neq U$, kde U je průsečík osy o válcové plochy s kolmicí v A k půdorysně⁵⁾. Půdorysna π protíná κ v kružnici l , která má s kružnicí k a tedy také s elipsou e v bodě A dvojbodový styk.

Mezi těmito kružnicemi existují kružnice, které mají s e další společné body. Jsou to kružnice, které leží na kulových plochách, majících střed na úsečce OS . Každá kulová plocha, která prochází kružnicí k , protíná totiž válcovou plochu ještě v kružnici k' . Společné body kružnice l a elipsy e určíme z toho, že l leží na kulové ploše a e na válcové ploše. Společné body obou křivek musíme proto hledat mezi společnými body obou ploch, tedy na průniku obou ploch, který je tvořen kružnicemi k, k' . Rovina elipsy e - tj. půdorysna π - protíná roviny kružnic k, k' v přímkách, na nichž leží společné body elipsy e a kružnice l . Protože nárysy křivek k, k', e jsou úsečky, můžeme nárysy společných bodů kružnice l a elipsy e snadno určit; půdorysy jsou na kolmicích k základnici x (leží na přímkách t a p).

Provedená konstrukce společných bodů kuželosečky e a kružnice l ukazuje, že nutná a postačující podmínka pro to, aby l byla hyperoskulační kružnicí elipsy e v bodě A , je, aby kružnice k a k' splynuly. To nastane právě tehdy, když kulová plocha se dotýká válcové plochy, tj. když střed kulové plochy zvolíme v bodě O . Potom ovšem střed S_A hyperoskulační kružnice elipsy v bodě A je O_1 .

O správnosti naší prostorové geometrické úvahy se snadno přesvědčíme výpočtem. Z podobnosti trojúhelníků $\Delta A_2 (S_A)_2 O_2 \sim \Delta A_2 O_2 S_2$ plyne $A_2 (S_A)_2 : A_2 O_2 = A_2 O_2 : A_2 S_2$, tj. $A_2 (S_A)_2 = \frac{b^2}{a}$. Je tedy $\varrho_A = A_2 (S_A)_2$.

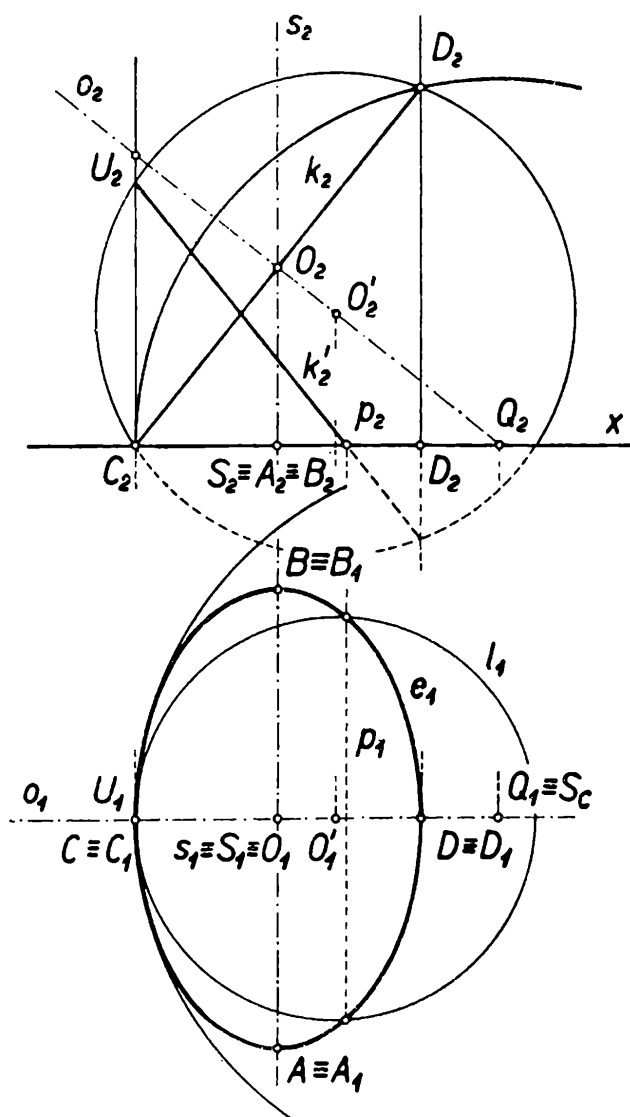
Chceme-li prostorovou konstrukcí sestavit hyperoskulační kružnici ve vedlejším vrcholu elipsy, užijeme jiných známých výsledků z deskriptivní geometrie:

P r a v o ú h l ý p r ů m ě t k r u ž n i c e, která neleží v rovině rovnoběžné s průmětnou ani v rovině k ní kolmé, je **e l i p s a**. Obráceně platí: Každá elipsa je pravouhlým průmětem jisté kružnice. Oba výsledky lze také formulovat takto: Řez kosé válcové kruhové plochy rovinou kolmou k po-
v r c h o v ý m p ř í m k á m je **e l i p s a**⁶⁾.

⁵⁾ Vylučujeme tedy kulovou plochu, která se dotýká půdorysny.

⁶⁾ Kruhová válcová plocha je množina přímek daného směru, které protínají danou kružnici; přitom směr není rovnoběžný s rovinou kružnice. Kruhová válcová plocha je *kosá*, jestliže směr není kolmý k rovině kružnice; v opačném případě je *rotační*.

Rovinu dané elipsy e o osách AB , CD zvolíme za půdorysnu π ; nárysnu ν zvolíme tak, aby byla rovnoběžná s vedlejší osou CD elipsy (obr. 7). Elipsou proložíme válcovou plochu⁷⁾, jejíž povrchové přímky jsou kolmé k půdorysně. Nárys s_2 půdorysně promítací přímky středu S



Obr. 7

elipsy protneme kruhovým obloukem o středu C_2 a poloměru a ; dostaneme dva body. Jeden z nich označíme O_2 (druhý na obr. není vyznačen). Přímka C_2O_2 je nárysem roviny kolmé k nárysně ν ; sestrojenou válcovou plochu protíná v kružnici (válcová plocha je tedy kosá kruhová), jejíž půdorys je daná elipsa o osách AB , CD . Kružnici označíme k .

Každá kulová plocha, která prochází kružnicí k (s výjimkou kulové plochy, jejíž střed je U) protíná půdorysnu v kružnici l , která má s danou elipsou e v bodě C dvojbodový styk. Kulová plocha procházející kružnicí k protíná válcovou plochu v další kružnici k' ; nárys je opět úsečka. Společné body kružnice l a elipsy e nutně leží na kružnicích k , k' (proč?). Jejich nárysy jsou průsečíky úseček k_2 , k'_2 se základnicí x ; půdorysy leží na kolmicích k x (k'_2 protíná úsečku C_2D_2 právě tehdy, když O' je bodem úsečky OQ). Tyto průsečíky splynou s bodem C tehdy a jen tehdy, když k a k' procházejí bodem C , tj. když kulová

plocha procházející kružnicí k má střed v rovině elipsy e (v půdorysně, bod Q). Je tedy Q_1 středem S_C hyperoskulační kružnice elipsy e ve vedlejším vrcholu C elipsy.

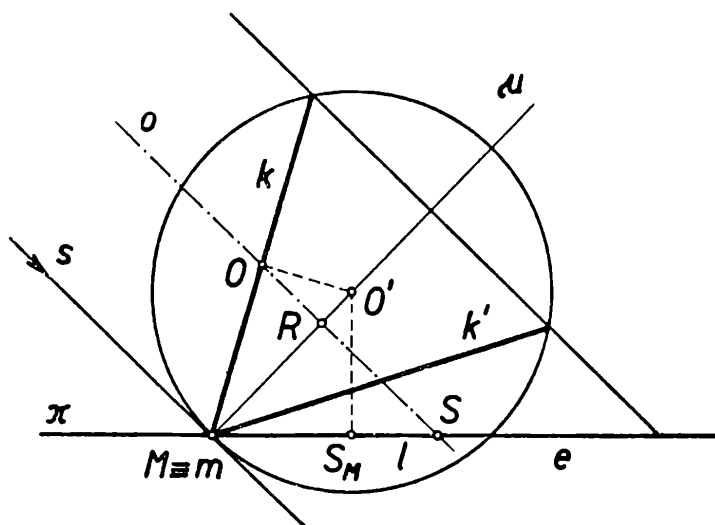
Pro poloměr kulové plochy o středu Q procházející kružnicí k (a tedy i pro její průsečnou kružnici s půdorysnou π) najdeme z podobných trojúhelníků $\Delta C_2Q_2O_2 \sim \Delta C_2S_2O_2$ úměru $C_2Q_2 : C_2O_2 = C_2O_2 : C_2S_2$. Odtud určíme $C_2Q_2 = \frac{a^2}{b}$. Našli jsme tedy, že C_2Q_2 je poloměr ϱ_C hyperoskulační kružnice elipsy ve vrcholu C .

⁷⁾ Protože řídící křivkou sestrojené válcové plochy je elipsa, říkáme jí někdy *eliptická válcová plocha*.

Každá z uvedených dvou prostorových konstrukcí hyperoskulačních kružnic ve vrcholech elipsy je speciálním případem obecnější konstrukce (obr. 8).

Je dána kulová plocha a na ní dvě různé kružnice k, l , které se v bodě M dotýkají; v obr. 8 je zobrazen průmět na rovinu kolmou ke společné tečně m obou kružnic v bodě M . V tečné rovině kulové plochy v bodě M vedme kolmici s na tečnu m . Platí pak tvrzení:

Kosoúhlý průmět kružnice k ve směru s do roviny π kružnice l je buď elipsa e , která má s l v bodě M čtyřbodový styk, nebo kružnice l .



Obr. 8

Promítací přímky bodů kružnice k tvoří kruhovou válcovou plochu, která je rovinou π protata buď v elipse nebo kružnici e ; v obr. 8 je vyznačen případ elipsy. Společné body elipsy (kružnice) e a kružnice l jsou body průniku promítací válcové plochy a dané kulové plochy, které současně leží v rovině π . Obě plochy se však - podle své konstrukce - v bodě M dotýkají. Protože mají společnou kružnici k , mají společnou ještě kružnici k' shodnou s k . Obě plochy jsou totiž symetrické podle roviny μ , která prochází středem O' kulové plochy kolmo k povrchovým přímkám válcové plochy. Tedy i jejich průnik je podle této roviny souměrný. Kružnice k, k' procházejí bodem M a mají v něm společnou tečnu.

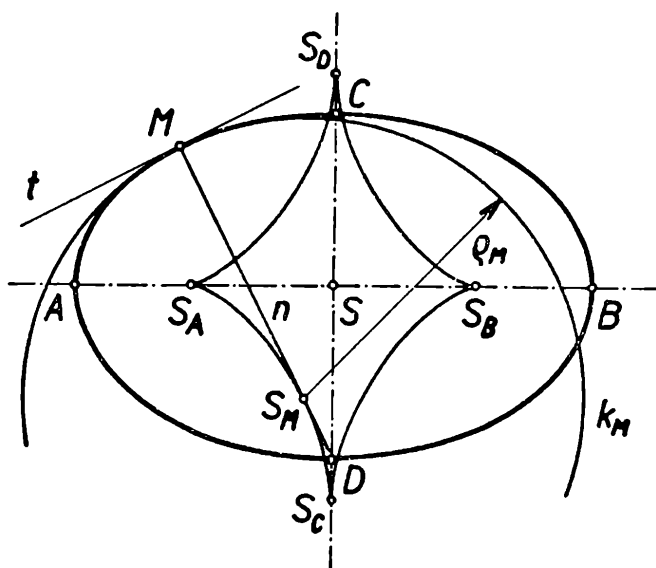
Vzhledem k tomu, že l leží na kulové ploše a e na válcové ploše, musí jejich společné body být ty body průniku obou ploch, které leží v rovině π .

Jsou možné dva případy. Buď kružnice k' neleží v π ; pak e je nutně elipsa, která má zřejmě s kružnicí l v bodě M čtyřbodový styk. Nebo k' leží v π ; pak je $k' \equiv l \equiv e$. Tím jsme dokázali platnost našeho tvrzení.

Při prostorovém zdůvodňování (užitím průniku ploch), že kružnice l je hyperoskulační kružnicí elipsy e v jejím vrcholu M , nepotřebovali jsme vědět, zda M je hlavní, či vedlejší vrchol elipsy e .

Z konstrukce v obr. 8 můžeme však také přímo početně určit, že l je hyperoskulační kružnicí elipsy e (jestliže ovšem je $e \neq l$) ve vrcholu M .

Nechť R je průsečík přímky OS s rovinou μ a nechť S_M je střed kružnice l (obr. 8). Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle MS_M O' \sim \triangle MRS$ plyne $MS_M : MO' = MR : MS$ a tedy $MS_M = \frac{MO' \cdot MR}{MS}$. Užijeme-li ještě vztahu $MO' \cdot MR = MO^2$ ⁸⁾, dostaneme $MS_M = \frac{MO^2}{MS}$.



Obr. 9

Poznámka. V každém bodě elipsy existuje, jak již víme, oskulační kružnice; její střed leží na normále elipsy v daném bodě. Množina všech středů oskulačních kružnic v bodech elipsy tvoří tzv. *evolutu elipsy* (obr. 9). Je to obalová křivka normál. Dotkový bod normály a evoluty je právě střed oskulační kružnice v bodě elipsy, ve kterém je sestrojená normála. Střed hyperoskulačních kružnic ve vrcholech elipsy jsou body vratu evoluty.

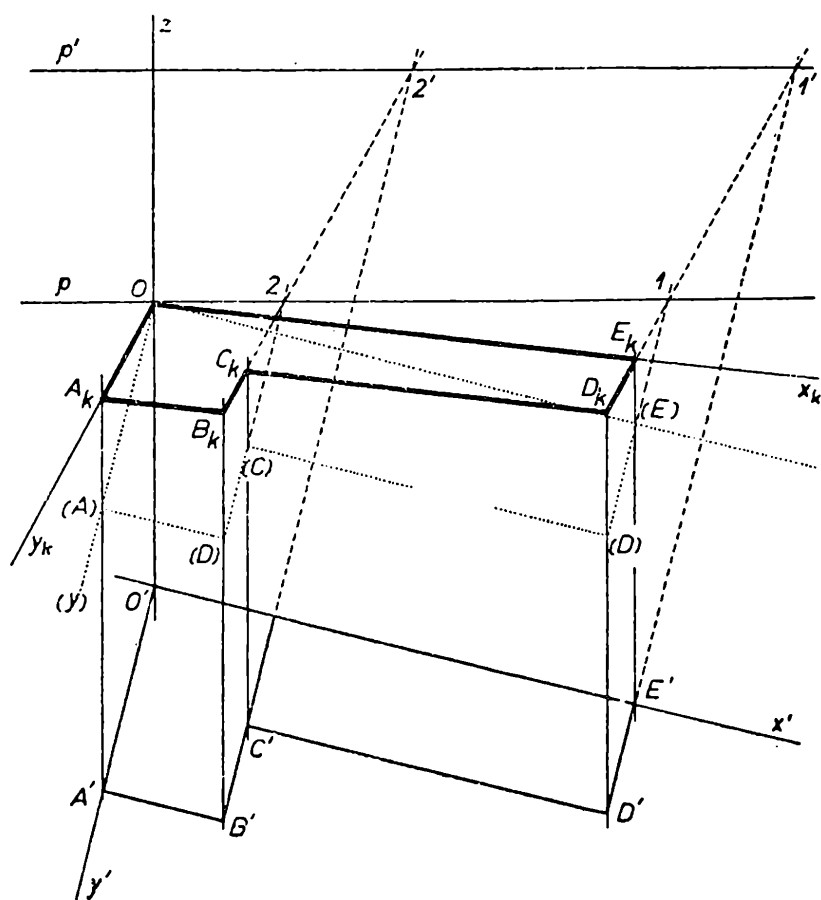
Jestliže je $MO < MS$, pak e je elipsa, pro níž M je hlavní vrchol. Označíme-li $a = MS$, $b = MO$, je $MS_M = \frac{b^2}{a}$ v soulase s dřívějším výsledkem.

Jestliže je $MO > MS$, pak e je elipsa, pro níž M je vedlejší vrchol. Píšeme-li $a = MO$, $b = MS$, pak $MS_M = \frac{a^2}{b}$ výsledek opět souhlasí s dříve nalezeným vzorcem.

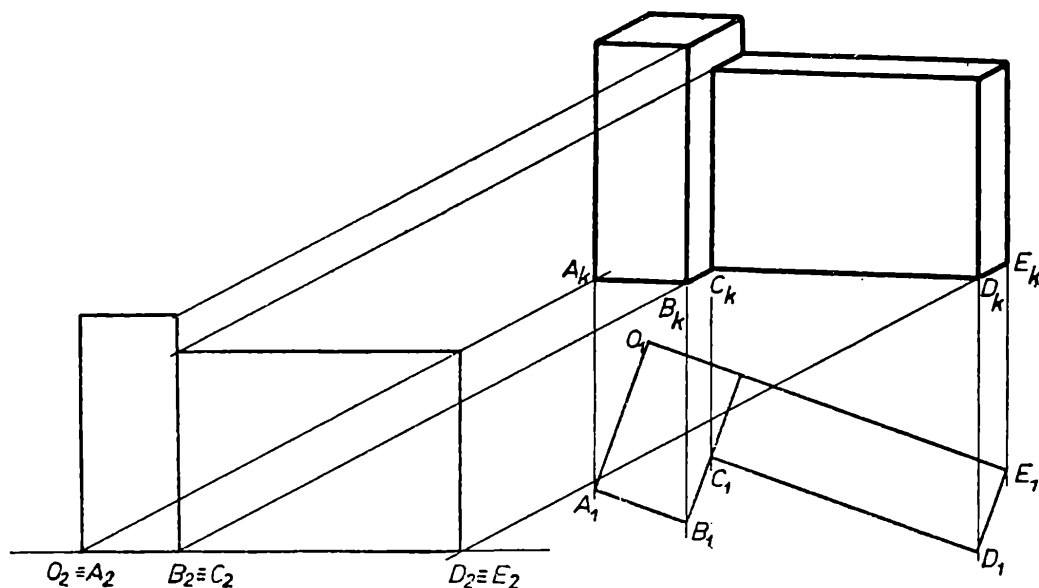
Jestliže je $MO = MS$, pak e splývá s kružnicí l .

⁸⁾ Je-li $R \neq O'$, rovnice plyne z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle MOO'$. Je-li $O' \equiv R$, je také $O \equiv R$ a tedy $MO' = MR = MO$; tento případ nastane právě tehdy, když $k \equiv k'$, tj. když se kulová a válcová plocha dotýkají podél k .

Je zrejmé, že môžeme axonometrický obraz pri konštrukcii pohodlne zväčšovať vo vhodnej mierke.



Obr. 5

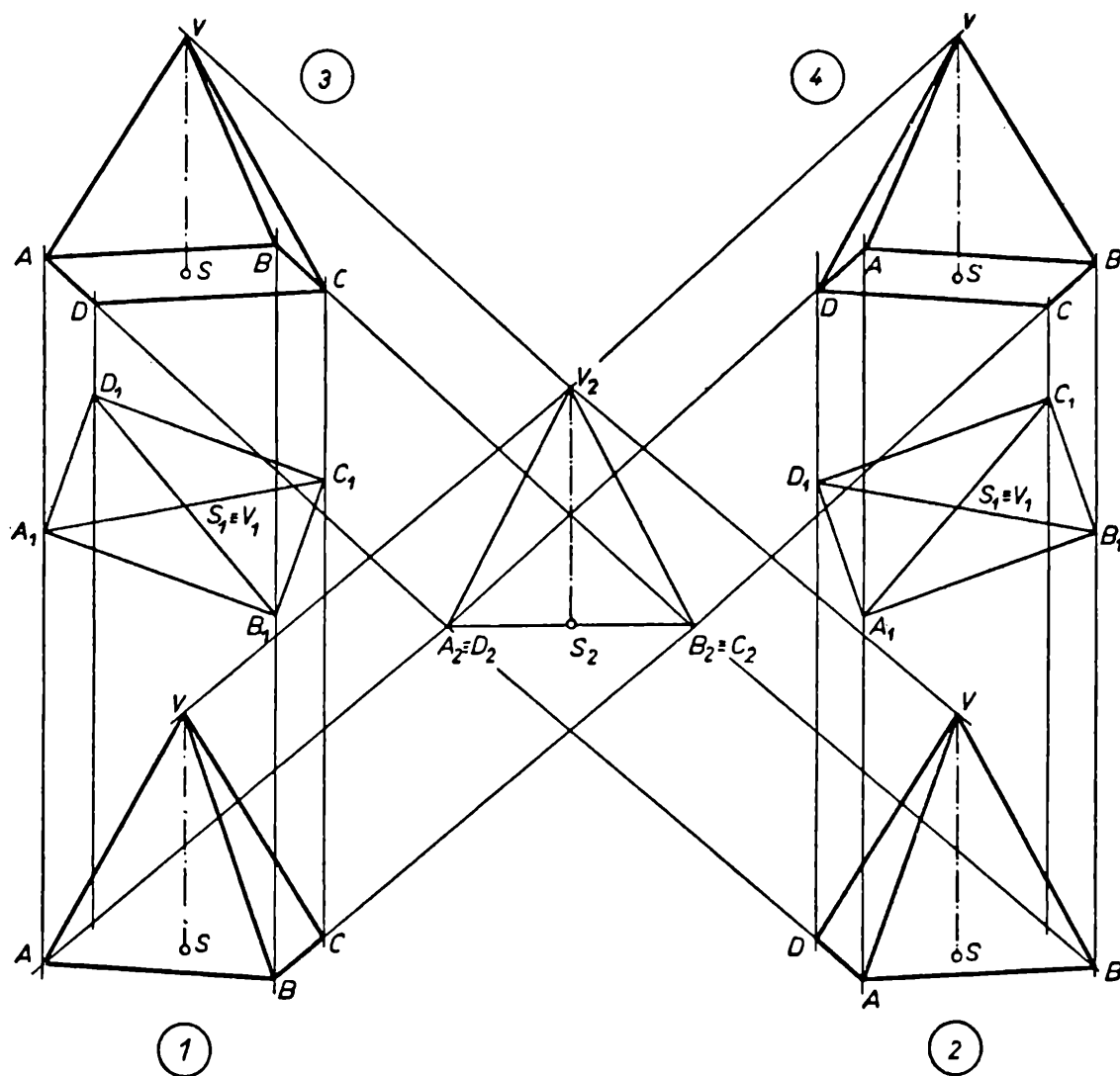


Obr. 6

Aby pôdorys $O(A)(B)(C)(D)(E)$ na obr. 4b nerušil kosuhlý obraz $OA_kB_kC_kD_kE_k$, môžeme ho v smere afinity, tj. v smere kolmom na priamku p , posunúť na voľné miesto. Na obr. 5 sme posunuli pôdorys nadol

do polohy $O'A'B'C'D'E'$. Možno dokázať, že afinita medzi pôdorysom a jeho kosouhlým priemetom sa týmto posunutím neruší, nastane iba posunutie osi afinity p do polohy $p' \parallel p$.

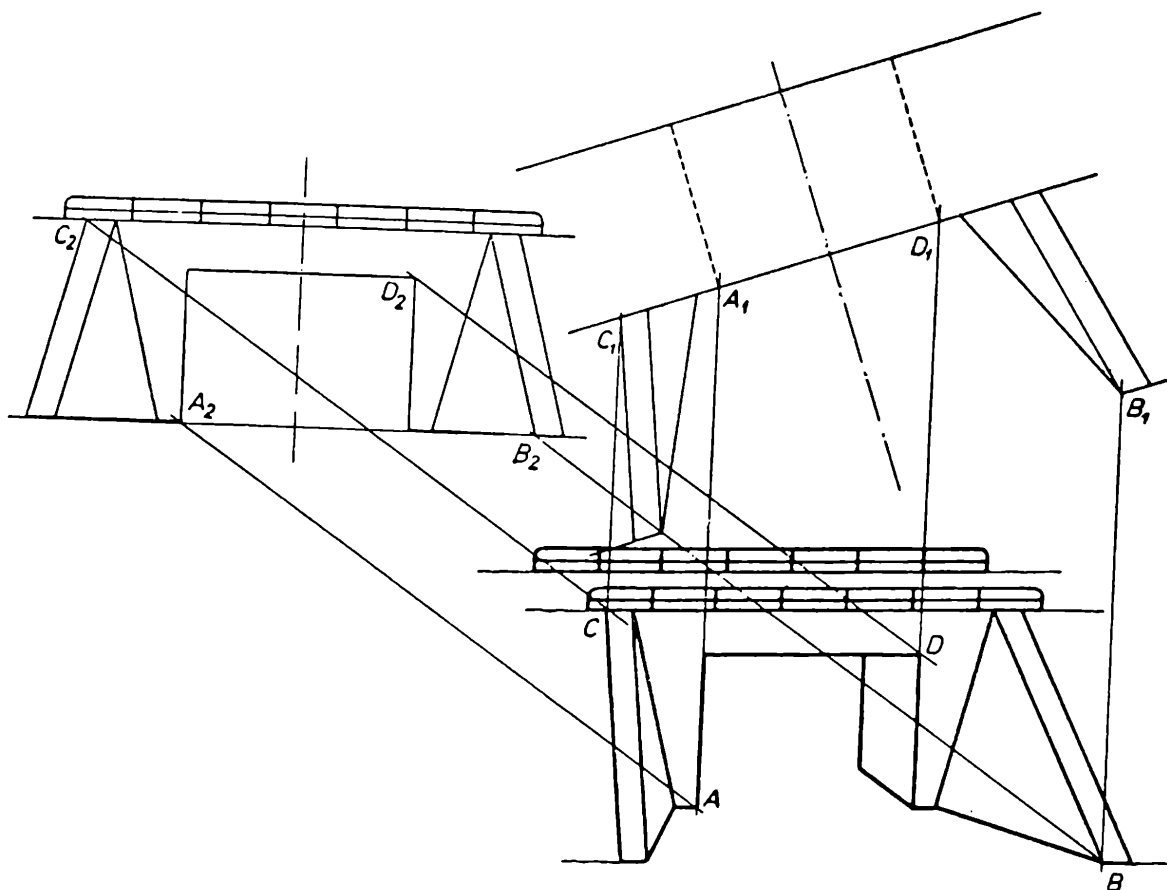
Nakoniec naznačíme, ako by sme mohli túto konštrukciu upraviť pre praktické použitie. Predpokladáme zase, že máme už zostrojené pravouhlé združené priemety objektu. Rozstrihnutím oddelíme pôdorys od nárysu a pripevníme ich na rysovaciu dosku asi tak ako na obr. 6.



Obr. 7

Nárys ponecháme v obvyklej polohe, aby zvislé úsečky na objekte ostali zvislými aj na obraze. Pôdorys však premiestime, aby sme mali nad ním, resp. pod ním dostatok miesta a natočíme ho podľa toho, či chceme mať v axonometrickom priemete zobrazený objekt zpredu a zprava alebo zpredu a zľava. Pôdorys a nárys týmto spôsobom umiestnený na rysovacej doske prekryjeme priesvitkou (pauzovacím papierom). Význačnými bodmi pôdorysu, ktorý vidíme cez priesvitku, narýsujeme na priesvitke priamky jedného smeru (zvislého) a príslušnými bodmi

nárysu priamky iného smeru (šikmého). Pretínaním priamok oboch smerov získavame axonometrické priemety jednotlivých bodov a tým aj obraz objektu. Podľa toho, ako volíme šikmý smer, dostávame alebo nadhľad alebo podhľad. Budeme teda rozoznávať vcelku 4 rozličné pohľady na objekt: 1. nadhľad zprava, 2. nadhľad zľava, 3. podhľad zprava, 4. podhľad zľava. Ako natočíme pôdorys a ako zvolíme šikmý smer, aby sme dostali tieto jednotlivé prípady, ukazuje názorne obr. 7³⁾.

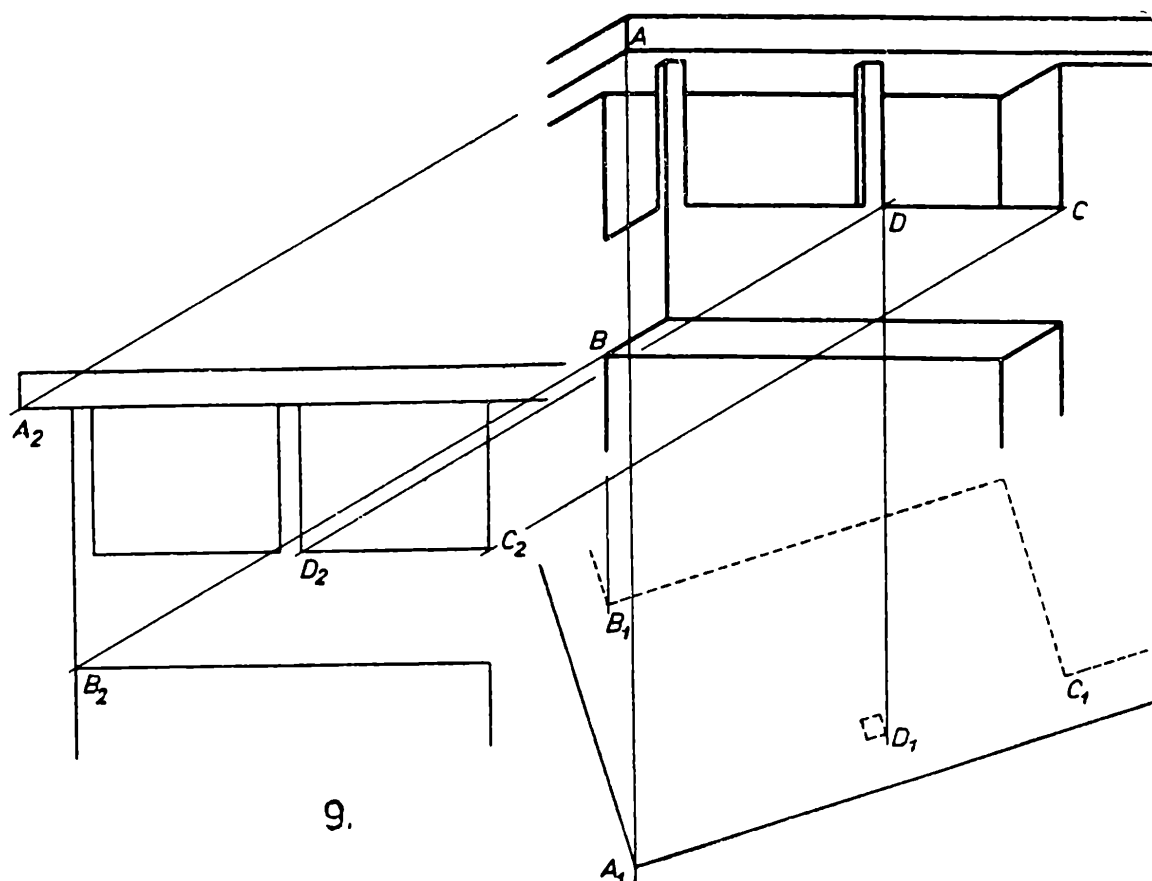


Obr. 8

Na posledných dvoch obrázkoch sú ukážky zobrazenia jednoduchých technických objektov: na obr. 8 podjazd v nadhľade zľava a na obr. 9 balkón v podhľade zľava.

V tejto úprave sa zobrazujú zvislé úsečky na objekte zase do úsečiek zvislých a obrazy pôsobia prirodzeným dojmom. Keď od tejto požiadavky upustíme a keď nám nezáleží ani na tom, aby sa zvislé úsečky (výšky) zobrazovali v skutočnej veľkosti, môžeme smery priamok sa pretínajúcich ľubovoľne pozmeniť, pravda vždy tak, aby sa priamky oboch smerov, z ktorých jedna prechádza pôdorysom a druhá nárysom toho istého bodu, pretli na nákresni.

³⁾ Je to ukážka jedného spôsobu usporiadania, mohli by sme zvoliť aj iný spôsob, viď obr. 6.



Obr. 9

Zpätným postupom by sme mohli z axonometrického obrazu získa-
ného metódou práve opísanou tzv. *zářezovou metódou* určit smer
premietacieho lúča. Riešenie tejto úlohy ponechávame čitateľovi.

Fyzika

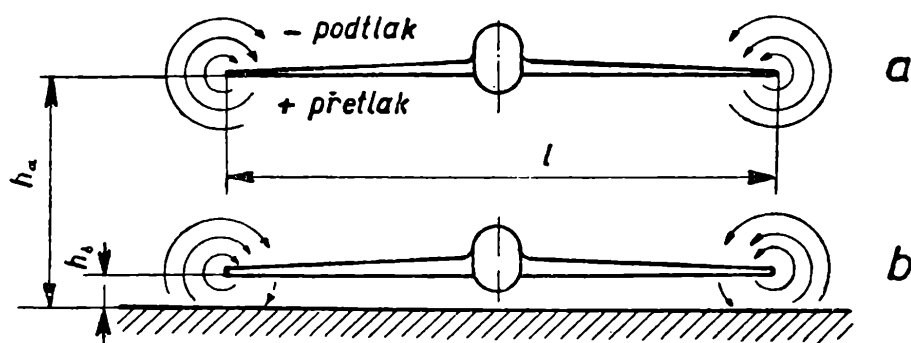
Inž. Zdeněk Růžha, Praha:

Létající stroje využívající vzdušného polštáře

V poslední době jsou v odborném tisku uveřejňovány zprávy o různých pokusech a zkouškách s letadly nebo vozidly bez kol, které se vznášejí v malé výši několika decimetrů, nebo jen centimetrů, nad zemí.

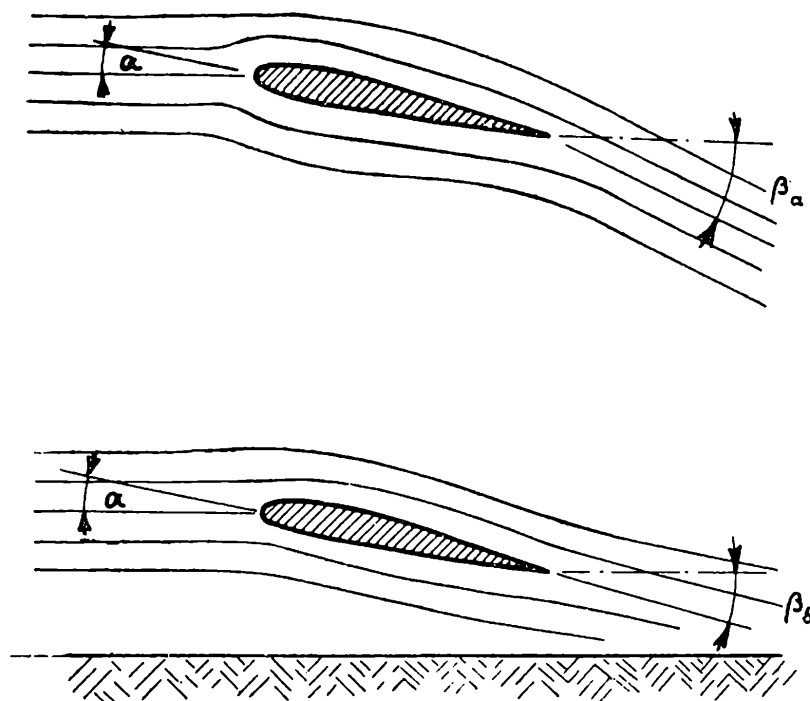
Již před několika desítkami let bylo zjištěno zvýšení vztlaku u pevné nosné plochy, tj. křídla letadla a též u pohyblivé nosné plochy, tj. rotoru

vrtulníku, které vzniká změnou proudění kolem těchto ploch, nalézají-li se v malé výši nad zemí. Zvýšení vztlaku vlivem země se zakládá na interferenci proudění mezi zemí a částmi letadla, které jsou poblíž země. Velikost zvýšení vztlaku závisí na více parametrech, např. na rychlosti a způsobu proudění, velikostí ploch, vzdálenosti a vzájemné poloze ploch k zemi hustotě vzduchu aj. Za určitých okolností se však může stát, že přírůstek se neprojeví, dokonce se může změnit jeho smysl a letadlo, místo aby bylo zvedáno, je přitlačováno k zemi.



Obr. 1

Vliv země na zvýšení vztlaku křídel je teoreticky zvládnut do značné hloubky. Zvýšení vztlaku je způsobeno snížením indukovaného odporu profilu křídla. Podstata spočívá ve změně obtékání konců křídel. Tlakový

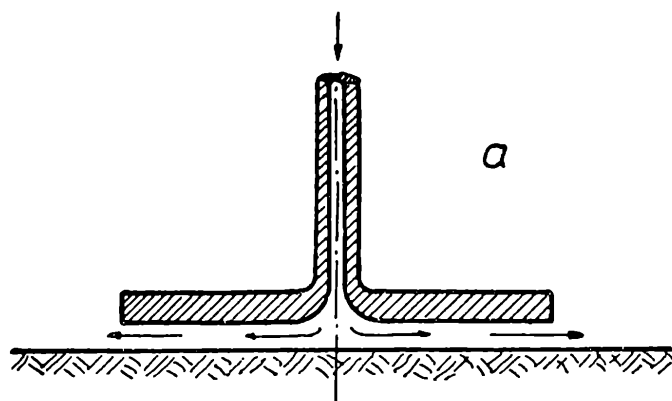


Obr. 2

rozdíl pod nosnou plochou se při letu v narušeném prostředí vyrovnává způsobem naznačeným na obr. 1a. V blízkosti země je proudění vzniklé tlakovým rozdílem porušeno, jak je naznačeno na obr. 2b. Změnou prou-

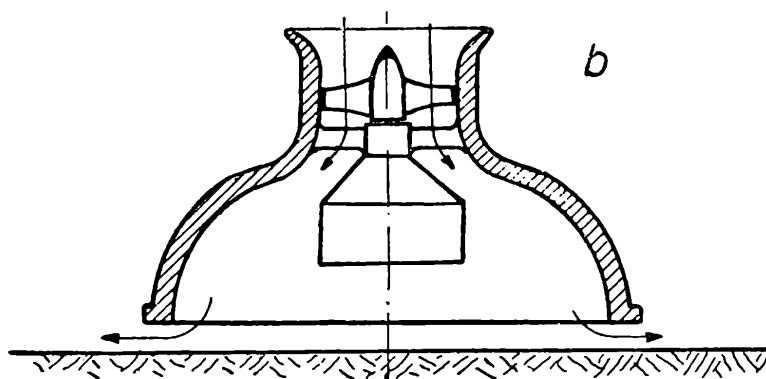
dění se změni i s r á z o v ý ú h e l β , tj. sklon proudnic za profilem, obr. 2 a tím se sníží indukovaný odpor. Při malých rychlostech letu činí indukovaný odpor značné procento celkového odporu.

Přídavným vztlakem se dosáhne zvednutí letadla od země a lepší jeho počáteční stoupání při menší dopředné rychlosti, než stoupání z vodorovného letu ve volné atmosféře. To způsobí zkrácení startu. Kromě změny výsledné síly, působící na křídlo, mění se i směr jejího působení, což vyvolá



Obr. 3a

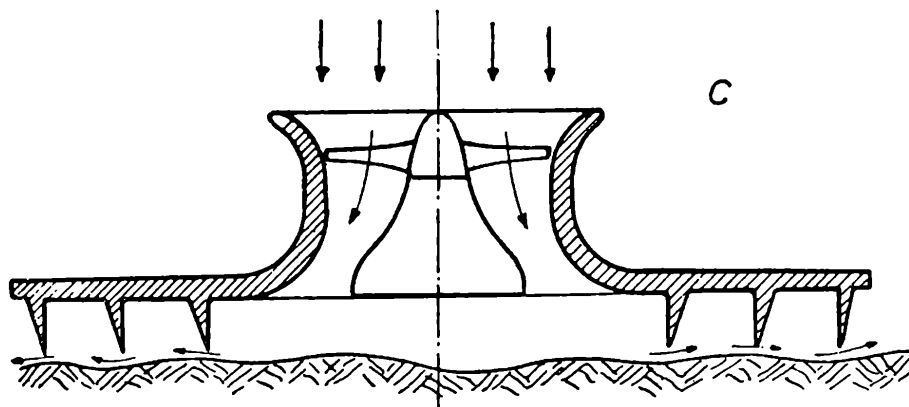
i změnu momentů působících na křídlo. Má-li být zachována rovnováha momentů, což je třeba, aby křídlo neměnilo sklon, musí být vyvolán potřebný moment na řídicích plochách tím, že se vychýlí. Nežádoucí se naopak stává zvýšení vztlaku při přistávání, neboť se tím prodlouží jeho délka.



Obr. 3b

Rovněž vliv země na rotory vrtulníků byl podroben již ve třicátých letech důkladnému studiu. Vlivem země je svislý proud vzduchu procházející rotorem nucen ohýbat se do stran, čímž se změni rychlostní a tlakové poměry proudu a zvýší se vztlak. Zvýšení vztlaku se projevuje u vrtulníku zřetelněji než u křídel letadel. Tento účinek měl za následek, že v prvních dobách vývoje vrtulníků, kdy byly používány poměrně slabé motory, se vznesl při svislém startu vrtulníku pouze o několik málo metrů. Při větší vzdálenosti totiž přídavný vztlak pominul a vrtulník nemohl výše svisle stoupat.

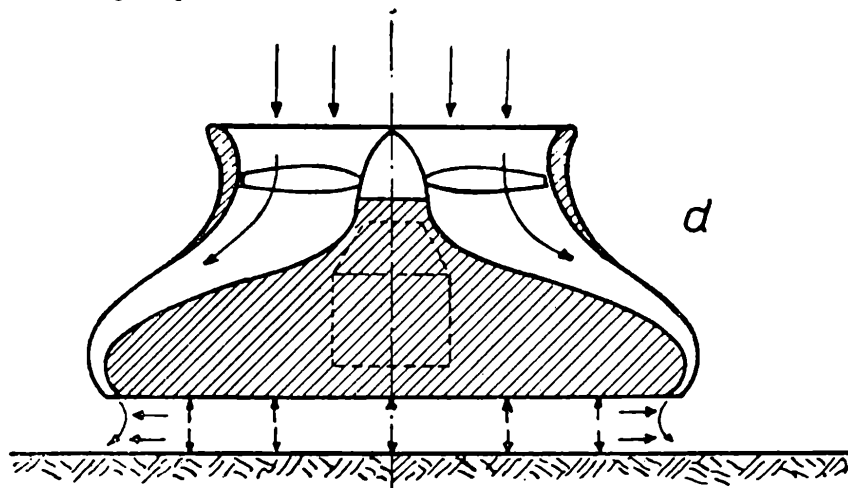
V poslední době se konají pokusy s „letadly“, u nichž kromě v z n o s n é s í l y, vznikající reakcí proudu trysky, je též použito i tzv. vzdušného polštáře. „Letadlo“ je ve své spodní části provedeno ve tvaru desky, která je v nepatrné vzdálenosti nad zemí, jsou to jen centimetry nebo decimetry. Do středu desky je shora vháněn vzduch nebo spaliny, které vytékají na jejím obvodu do volné atmosféry. Pro „letadla“ bylo využito



Obr. 3c

několika způsobů vzdušného polštáře. V podstatě je možno rozeznávat tato provedení nosné vzduchové vrstvy:

- a) vzdušný polštář,
- b) vzduchová komora,
- c) labyrintové těsnění vzduchového polštáře,
- d) prstencová trysky.



Obr. 3d

Schematicky jsou tyto principy naznačeny na obr. 3. U všech strojů je proud vzduchu vyvozován v horní střední části a to buď dmychadlem, či rotorovými plochami, nebo „proudovým motorem“. Mezerou mezi základnou stroje a zemí uniká po obvodu základny mírně stlačený vzduch do volného prostoru.

V z n o s n á s í l a F (kp), kterou stroj je zvedán, je rovna součinu půdorysu plochy S' (cm²), určené obvodem plochy, jímž uniká vzduch do volné atmosféry s prostorem, v němž je přetlak Δp (kp/cm²) vzhledem k atmosféře, tj.

$$F = S' \Delta p$$

Poněvadž plocha je obvykle značně velká, stačí i pro poměrně velké síly jen nepatrný přetlak. Tak např. má-li se dosáhnout vznosné síly 1000 kp u stroje s plochou $S' = 100\,000$ cm², je potřebný přetlak

$$\Delta p = \frac{F}{S'} = \frac{1000}{100\,000} = 0,01 \text{ kp/cm}^2,$$

Tím, že se stroj zvedá, zvětšuje se vzdálenost desky od země a plyny mohou snáze unikát, čímž se snižuje přetlak. Tím se snižuje i vznosná síla a stroj přestane stoupat.

V případě a) musí se základna nalézat v malé vzdálenosti nad zemí, která musí být poměrně hladká, bez nerovností. Proto použití tohoto principu je velmi omezené; nad vodní hladinou, která není prakticky nikdy prostá nerovností, se principu nedá použít. Kromě toho uvidíme dále, že u proudění nad vodní hladinou vznikají další jevy, které zabráňují jeho použití. Tohoto principu bylo však použito u modelů, kterých má být použito pro vývoj nového typu železnice. Vozidlo se má pohybovat po kolejnici většího průřezu než je obvyklý. Na spodku vozidla je upravena jakási botka, která obepíná s malou mezerou kolejnici. Do této mezery se shora i z obou stran vhná vzduch, takže nedochází ke styku botky s kolejnicí, nýbrž mezi oběma vzniká vzduchový polštář, po němž při dopředném pohybu vozidlo klouže.

Plocha botky, na které působí tlak vzduchu, je malá, a proto k docílení dostatečného vztlaku musí být přetlak použitého vzduchu vyšší než v případech předešlých.

Provedení b) se vzduchovou komorou je v podstatě jednodušší, neboť odpadají jakékoliv vzduchovody a základna. Proud vzduchu uniká z komory po jejím obvodu. Výška štěrbin je větší než v předešlém případě. U skutečně pokusného stroje, kde bylo pro pohon ventilátoru použito motoru o výkonosti 200 k, který způsobil v komoře přetlak o výši asi 0,01 at, byla při vznášení výška štěrbin pouze 15 cm.

Labyrintové provedení c) nedoznalo pro svou složitost dosud ani v modelech většího rozšíření. U tohoto řešení je výhodné provedení přepážek z elastického materiálu, takže v případě nárazu na nerovnost terénu nemělo by dojít k žádnému poškození.

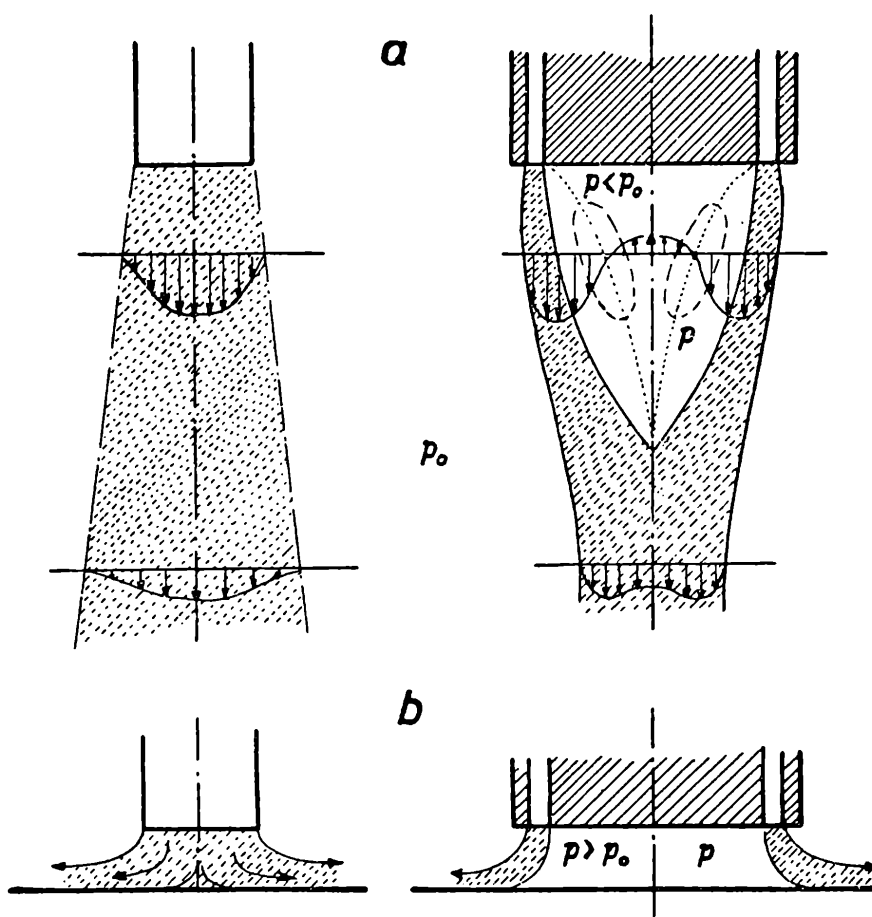
Největší zájem a výzkumné práce byly věnovány provedení s prsten-covou tryskou. Jednoduché kruhové trysky bylo použito pro tyto účely již dříve. Vhodnou zástavbou proudového motoru, u něhož výtok spalin směřoval svisle dolů, bylo dosaženo v několika případech dobrých vý-

sledků. Tyto stroje byly nazvány l é t a j í c í l o ŷ e, nebo l é t a j í c í p l a t f o r m y. Při jejich zkouškách se zjistilo, že na velikost tlaku působí mnoho okolností. Celkový vztlak kruhové nebo prstencové trysky se skládá z reakce způsobené proudícími plyny a síly, vzniklé působením tlaku plynů na základnu.

Tah T (kp) vznikající výtokem plynů z trysky je dán výrazem

$$T = m v,$$

kde m je hmota plynů vytékajících za 1 vteřinu tryskou, tj. váha plynů za 1 vteřinu dělená zemským urychlením, v jejich rychlost v m/s. Bude-li



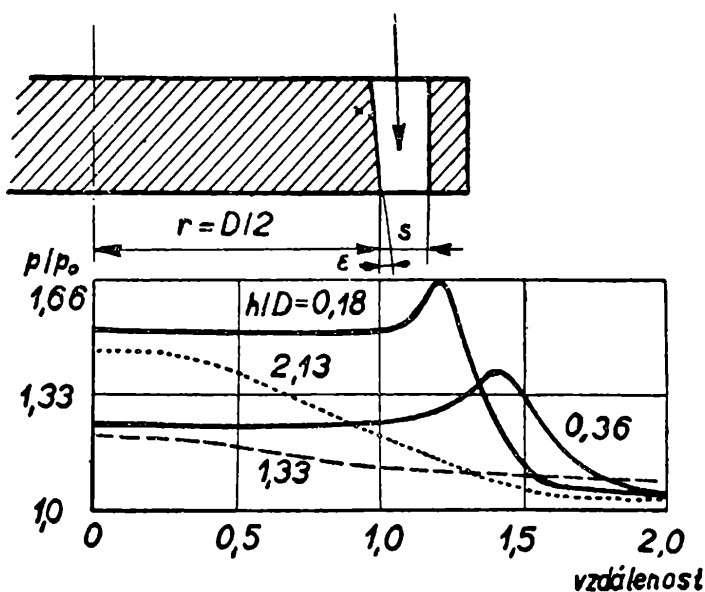
Obr. 4

se však tryska pohybovat proti směru unikajících plynů rychlostí v_0 (m/s), bude síla T dána výrazem

$$T = m (v - v_0).$$

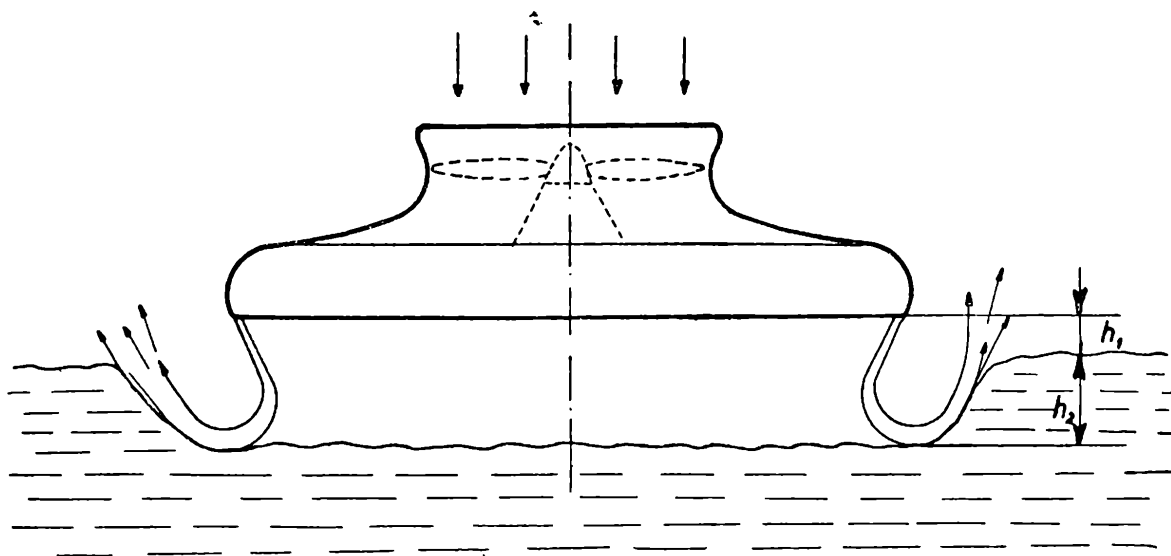
Rozdíl proudění u trysky kruhového a prstencového průřezu je patrný na obr. 4. Ve větší vzdálenosti trysky od země, tj. při volném výtoku plynů (případ a), projevuje se u kruhové trysky rozšíření proudu a u prstencové trysky zúžení průřezu. Srovnáme-li velikost tahu - v našem případě tedy vztlaku - u trysky kruhové a u trysky prstencové (jejichž výstupní průřezy jsou stejně veliké), zjistí se u výtoku z trysky prstencové

do volného prostředí vztlak asi o 10 až 20% menší. Velikost vztlaku je závislá na poměru šířky a průměru prstence. Byly proměřovány trysky o poměru šířky prstenu s k jeho průměru D v rozsahu $s/D = 0,01$ až $0,1$. Naopak nalézala-li se tryska blíže země, je jiné proudění a tím i jiné síly, než v pří-



Obr. 5

padě předešlém. U kruhové trysky se tah poněkud sníží, kdežto u prstencové se podstatně zvýší. To je způsobeno rozdílným tlakem p uvnitř tryskajících plynů. U prstencové trysky, ležící mimo vliv země, je tlak p menší než tlak okolního prostředí p_0 , a naopak, je-li tryska poblíž země, je $p >$



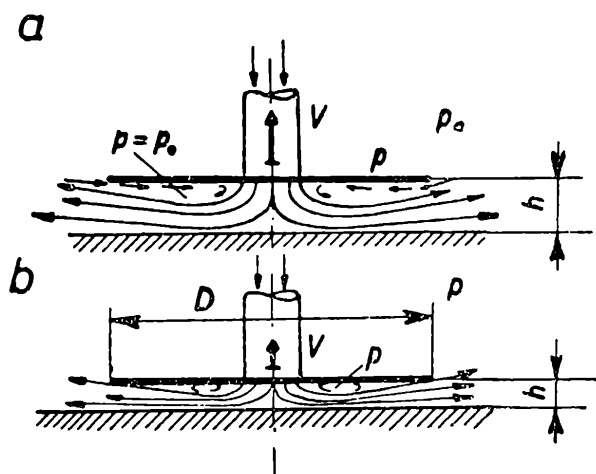
Obr. 6

$> p_0$. Velikost tlaků, resp. poměr p/p_0 v různé vzdálenosti od středu trysky (l/r) u určitého typu prstencové trysky ve vzdálenosti h od země, resp. při určitém h/D , kde D je průměr vnějšího obvodu trysky, je známa na obr. 5. Rozhodující na velikosti vztlaků prstencové trysky je však

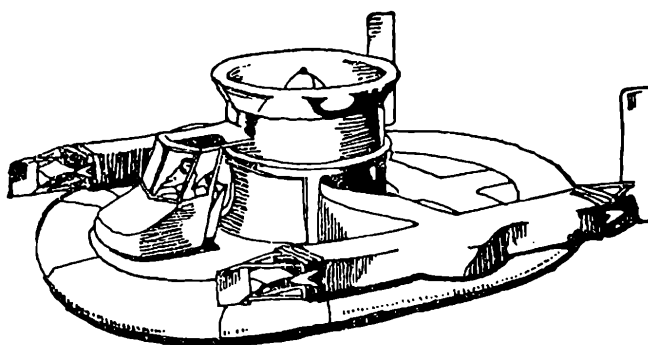
kromě poměru h/D i šířka proudu v mezikruží, úhel ε , pod kterým vytékají: plyny a pochopitelně i rychlost.

Z uvedeného přehledu některých výsledků z dosavadních výzkumů v tomto oboru vyplývá pro konstrukci stroje vznášejícího se nad mořem např. pro ještě dosti vhodný poměr $h/D = 0,2$ a při náhodných vlnách o výšce např. 5 m, by byl potřebný průměr základny 25 m. Konstrukční provedení takovéto trysky činilo by již značné obtíže. Poněvadž tlak plynů nad vodní hladinou vyvolá její deformaci, vzniká ztráta. Kromě toho vzniká i deformace tryskem plynů, což způsobí další ztrátu. Tvar deformované hladiny je naznačen na obr. 6.

Nevýhoda strojů vznášejících se na principu reakce v poněkud větších výškách je ta, že při vysazení motoru, tj. dodávce plynů, dojde k vážnějším nehodám, neboť tyto stroje nemají zatím možnost zmírnit pád. Je proto zvláště nevýhodné používat jich v dopravě. Uvedený nedostatek je podstatně menší u strojů využívajících výhradně vzdušného polštáře.



Obr. 7



Obr. 8

Výzkum v oboru těchto strojů přinesl mnoho zajímavého a ukázalo se, že je třeba se zabývat nejrozmanitějšími způsoby a kombinacemi proudění. U skutečných vznášejících se strojů (obr. 8) se obvykle používá některého z uvedených principů, tj. pevné nosné plochy tvaru trojúhelníka, nebo čtyřúhelníka, rotoru, nebo ventilátoru a některého druhu „trysky“. Většinou dochází k různým kombinacím a úpravám, které jsou vynuceny tím, že je třeba vytvořit místo pro osoby nebo dopravovaný náklad a pohonné motory se také musí vyřešit řídicí plochy, a to ať již v proudu vytékajících plynů, nebo vně na povrchu letadla.

Každé z provedení těchto strojů dosahuje lepších nebo horších vztlakových sil, neboť jak již bylo uvedeno, jsou ovlivněny mnoha činiteli. Z obr. 7 je patrné, že větší vzdálenosti plochy od země, tj. při větším h/D , radiálně proudící plyny mezerou u okraje desky mohou způsobit v horní části mezery proudění opačného směru. Tímto prouděním může se pod desku nasávat vzduch z okolí, takže na tuto desku síla nepůsobí. Je-li

h/D na př. 0,5, nedovolí vytékající plyny nasávání vnějšího vzduchu pod desku. V některých místech může nastat víření, čímž vznikne podtlak a na desku vlivem rozdílných tlaků působí síla směřující dolů. O tuto sílu je pochopitelně zmenšen vztlak. Při laboratorních zkouškách se dosáhlo zlepšení tím, že pod desku bylo vloženo jakési síto, nebo rošt, jímž se zabránilo víření vzduchu a tím též vytvoření podtlaku.

Tento článek měl naznačit, jak hluboká je problematika v celém řešení a uskutečňování strojů, které se mají vznášet v malé výši nad zemí. I když bylo v mnohých případech dosaženo uspokojivých výsledků, je do určité míry nutné se dívat na tyto práce jako na věc módy, případně i značně fantastické projekty. To vše však vede k značnému zájmu o tyto stroje. Teprve další výzkum a zkoušky ukáží, který z popisovaných principů, případně některý další, dozná plného využití, praktického rozšíření a uplatnění.

I n ž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN, SMS, Praha:

Základní normály v elektrotechnice

Jako každé měření, tak také elektrická měření musí mít pevný základ, aby jejich výsledek byl spolehlivý a dostatečně přesný. V elektrotechnice jsou takovými základními prvky normály elektromotorické síly a normály elektrického odporu.

Pro řadu elektrických měření je základem neproměnné a přesně známé stejnosměrné napětí. Jako jeho zdrojů se užívá galvanických článků v takovém složení a v takové úpravě, aby jejich napětí mohlo být pokládáno za konstantní, nebo aby mohlo být za různých vnějších podmínek - např. při určité teplotě určeno s dostatečnou přesností.

Během doby bylo navrženo několik takových článků, ale většinou nevyhověly těmto podmínkám. I poslední normální článek Clarkův, sestavený v r. 1872, byl brzy nahrazen jiným typem normálního článku, navrženým r. 1892 Westonem v Newarku a používaným až dodnes.

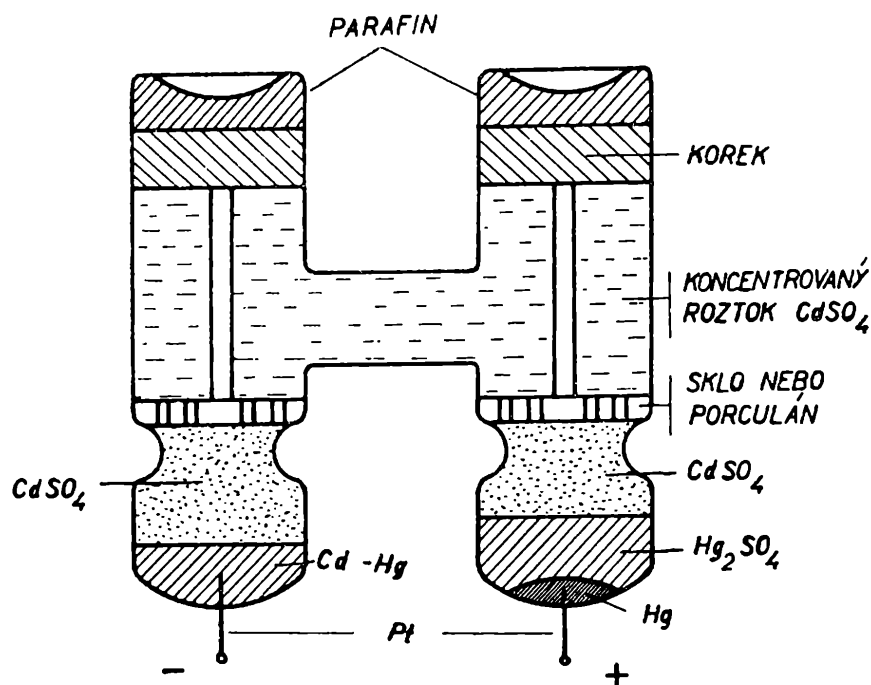
Westonův normální článek (obr. 1) je obdobou Clarkova článku. Negativní elektrodou je amalgam kadmia, nad nímž jsou krystaly síranu kademnatého CdSO_4 . Kladnou elektrodou je čistá rtuť Hg , pokrytá vrstvou síranu rtuťného Hg_2SO_4 , sloužícího jako depolarizátor. Také nad síranem rtuťným je vrstva krystalů síranu kademnatého.

Elektrolytem je tu nasycený roztok síranu kademnatého. Nadbytek krystalů $\text{CdSO}_4 + 8/3 \text{H}_2\text{O}$ udržuje elektrolyt stále ve stavu nasycenosti.

Z elektrod jsou vyvedeny platinové drátky, zatavené ve skle nádobky. Platinové vývody se nesmí stýkat s elektrolytem. Zúžení ramen nádobky

článku a skleněné nebo porculánové uzávěry nad elektrodami mají za-
mezit jejich pohybu při transportu článku. Obě ramena jsou nahoře
neprodyšně uzavřena parafinovými zátkami. Kromě toho se vyrábějí
tyto normální články v úpravě naznačené v obr. 2 (s obvyklými roz-
měry v mm), kde ramena nádoby jsou zatavena a elektrody nemají
ochranné uzávěry. Tento typ není tak vhodný pro dopravu jako typ
první, má však lepší elektrické vlastnosti. Místo skla užívá se dnes také
polystyrolu.

Mezinárodní hodnota elektromotorické síly Westonova článku byla
stanovena jako střední hodnota z více skupin článků, podle měření
provedených v r. 1910 ve Washingtonu, hodnotou 1,01865 V abs. (čili
1,01830 V int.) při teplotě 20° C. Dobře vyrobený článek nemá se od
této hodnoty odchýlovat při 20° C o více než $\pm 0,0001$ voltu. Skutečná
hodnota jeho napětí, ležící v těchto mezích, musí být určena měřením.



Obr. 1

Mnoha zkouškami bylo potvrzeno, že rozdíly teplotních koeficientů
normálních článků různé výroby jsou velmi malé. Proto na mezinárodní
konferenci v Londýně r. 1908 byla závislost napětí článku na teplotě
stanovena obecně rovnicí třetího stupně

$$E_{\vartheta} = E_{20} - 4,06 \cdot 10^{-5} (\vartheta - 20) - 0,95 \cdot 10^{-6} (\vartheta - 20)^2 + \\ + 1 \cdot 10^{-8} (\vartheta - 20)^3 \text{ voltů,} \quad (1)$$

kde ϑ značí teplotu (ve °C).

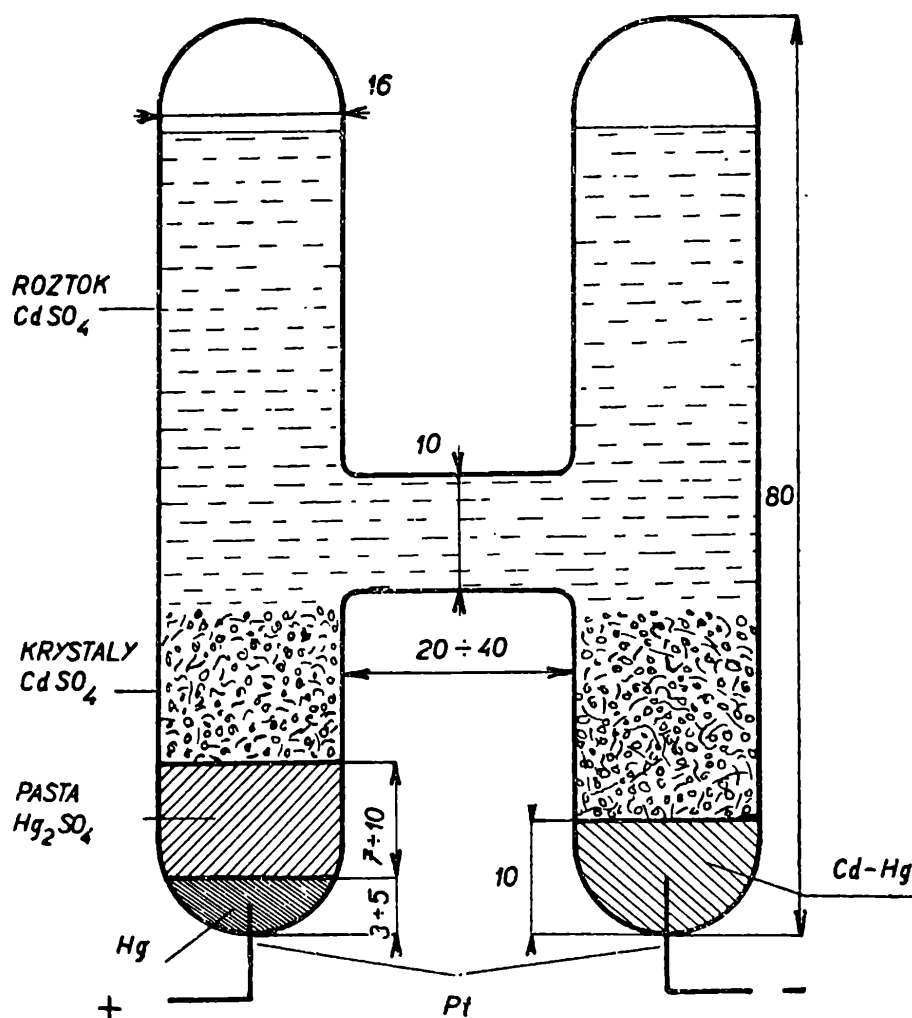
Této rovnice se používá, má-li se pro měření určit správná hodnota
napětí článku E_{ϑ} pro danou teplotu ϑ °C.

Westonův normální článek, vzhledem k tomu, že je vlastně obyčej-
ným galvanickým článkem, je citlivý na mnoho vnějších i vnitřních

vlivů, které působí na velikost nebo stálost jeho napětí. Tím jej mohou vyřadit dočasně nebo trvale z funkce základního normálu elektrického napětí. Jsou určité podmínky, které je třeba v provozu dodržovat. Je tedy nutno:

1. Nevystavovat článek zbytečným otřesům, vznikajícím např. jeho přenášením. Vznikají tím vnitřní pochody v článku, které ohrožují stabilitu jeho napětí a trvá vždy velmi dlouhou dobu (někdy až mnoho týdnů), než napětí článku dosáhne opět původní stálé hodnoty.

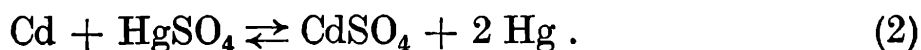
2. Nevystavovat článek náhlým a větším změnám teploty. Amalgam kadmia, tvořící zápornou elektrodu článku, je zde současně ve dvou



Obr. 2

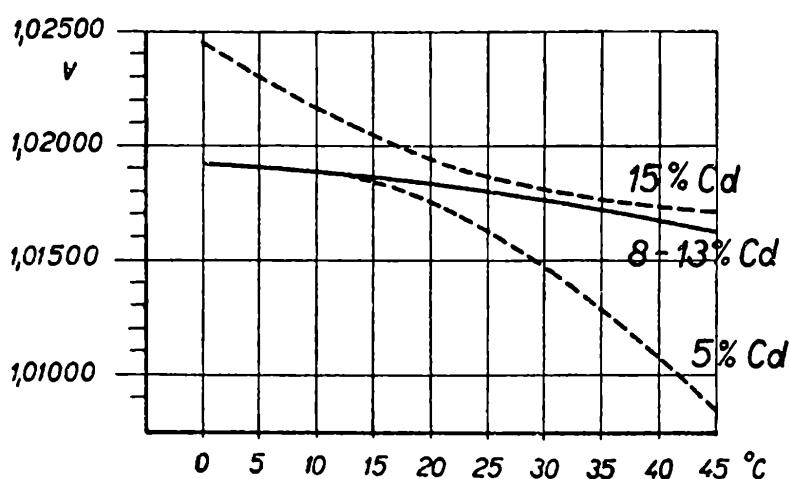
fázích, pevné a tekuté, což je podmínkou stálosti potenciálu elektrody vůči elektrolytu. Vzájemný poměr obou fází je funkcí teploty. Změna teploty vyvolá změnu tohoto poměru, která ovlivní výši napětí článku, aniž by byla možnost ji přesně definovat.

3. Neodebírat z článku větší proud než max. 10^{-5} , nebo raději 10^{-6} ampéru. Při odběru proudu probíhá v článku chemický pochod vyjádřený rovnicí



Nezávislost napětí článku na odebíraném proudu předpokládá dokonale zvratný děj podle rovnice (2). Toho se dá dosáhnout pouze užitím dokonale čistých chemikálií při výrobě článku. Odběrem většího proudu vznikají v článku polarizační zjevy, které vyvolávají velké změny napětí, a to rovněž nedefinovatelné a kromě toho obvykle trvalé.

Přesto, že byl Westonův článek dokonale prostudován, zůstávají ještě dnes některé vnitřní pochody nevyřešené. Depolarizátor Hg_2SO_4 tvoří s vodou hydroxyd rtuťný a volnou kyselinou sírovou, která zvyšuje kyselost elektrolytu a mění tak samovolně velikost napětí článku. Vyvolává však také vnitřní, nepřetržitě trvající ionizační pochody, jejichž vliv na elektromotorickou sílu článku není dostatečně prozkoumán. Vlivem teploty nastávají v záporné elektrodě vnitřní pochody a krystalizační změny v elektrolytu, které probíhají dlouhou dobu a jsou příčinou rozdílu skutečného napětí článku a napětí určeného pro danou teplotu z rovnice (1). Tento zjev se nazývá hystereze článku a byl po dlouhou



Obr. 3

dobu předmětem studia. Pro praktické měření vyplývá z toho podmínka vyčkat při náhlé změně teploty (např. při přenesení článku do místnosti s jinou teplotou) několik hodin na vyrovnaní napětí článku.

Elektromotorická síla negativní elektrody je různě závislá na teplotě podle obsahu kadmia v amalgamu (obr. 3). Z diagramu provedeného podle měření v berlínském ústavu měr je zřejmé, že nejmenší závislost má amalgam s obsahem 8 až 13 % kadmia. Proto byla přijata na Mezinárodní konferenci v Londýně r. 1908 pro obsah kadmia v amalgamu hodnota 12,5 %.

Průměrný teplotní koeficient Westonova článku je pro teploty v okolí 20° C asi 0,004 % pro 1° C. Skládá se z teplotních koeficientů obou elektrod, z koeficientu + 0,031 % u kladné elektrody a - 0,035 % u záporné. Z toho je zřejmé, že rozdíl teploty obou elektrod může do značné míry ovlivnit napětí článku a tím ohrozit přesnost měření. Proto je třeba při používání článku vyloučit možnost jeho jednostran-

ného zahřátí (např. teplem osvětlovacího tělesa, regulačního odporu ap.). Bylo zjištěno, že rozdíl teplot obou elektrod hodnoty $0,1^{\circ}\text{C}$ vyvolá takovou změnu elektromotorické síly článku, jako by se jeho teplota změnila o 1°C . Skutečné napětí článku liší se pak do značné míry od napětí vypočteného pro danou teplotu podle rovnice (1) a je příčinou chybného měření. Proto se ukládá článek při měření do dobrého termostatu, nebo má speciální konstruktivní úpravu, která zaručuje vyrovnanost teploty obou elektrod článku. Krukowsky navrhoval například umístit normální článek do Dewarovy nádoby, naplněné parafinem.

Tento nedostatek je dokonale odstraněn u normálních článků z poslední doby, u nichž bylo upuštěno od klasického tvaru nádoby písmene H. Obě elektrody jsou zde umístěny soustředně v nádobce válcovitého tvaru, takže u nich nemůže nastat větší teplotní rozdíl. Obě soustředné elektrody jsou shora kryty elektrolytickou diafragmou, která jednak zabraňuje jejich přímému dotyku, jednak jejich pohybu při transportu článku. Proto je článek velmi odolný i na otřesy.

Kromě normálního článku s nasyceným elektrolytem, kterého se všeobecně užívá jako normálu elektrického napětí, vyráběl se též standardní typ, u něhož byl elektrolyt nasycen při teplotě 4°C a neměl nad elektrodami zásobní krystaly síranu kademnatého. Hodnota jeho napětí odpovídá proto napětí normálního článku při 4°C podle rovnice (1), tedy hodnotě $1,0190\text{ V}$ abs. Nenasycený článek se však nehodí za normál elektrického napětí, poněvadž jeho elektromotorická síla není definovatelná s dostatečnou přesností a mění se během krátké doby až o $0,02\%$.

(Pokračování)

Matematické zábavy

Antonín Herman, prom. fyz., Brno:

Pravděpodobnost, náhodné a nenáhodné jevy ve Sportce

(Dokončení)

3. Pravděpodobnost výhry a kombinatorika

Zopakujeme si nyní některé základní pojmy z kombinatoriky, které budeme dále potřebovat. Především, co je *p e r m u t a c e*. Tři čísla a, b, c můžeme uspořádat celkem v šesti různých pořadích: $abc, acb,$

bac, bca, cab, cba . Obecně lze n čísel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ uspořádat v $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ pořadích. Každé z těchto pořadí se nazývá permutací, počet všech permutací se označuje $n!$ a nazývá se n faktoriálem. Je tedy $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, například $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Jinou úlohou z kombinatoriky je otázka, kolik různých uspořádaných skupin o m číslech lze vytvořit z n různých čísel, přičemž v každé skupině se vyskytuje každé z m čísel právě jednou. Takové skupiny m čísel z n čísel se nazývají *variace m-té třídy n prvků*. Jejich počet

$$V_m(n) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1).$$

Např. variace druhé třídy čtyř prvků a, b, c, d jsou $ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc$.

Rozsah článku nedovoluje dokazovat vzorce z kombinatoriky, o jejich odvození se může čtenář poučit třeba z učebnice J. Holubář, F. Hradecký, K. Hruša, *Algebra pro jedenáctý postupný ročník*.

Dalším důležitým pojmem z kombinatoriky je *kombinace*. Kombinace m -té třídy n prvků jsou skupiny m různých prvků z n různých prvků, přičemž nerozlišujeme skupiny lišící se pouze pořadím. Snadno si představíme, že shrneme-li vždy $m!$ variací m -té třídy n čísel, které se liší pouze pořadím oněch m čísel (a tvoří úplnou soustavu permutací m prvků), dostaneme tak $\frac{1}{m!} V_m(n)$ kombinací. Je tedy počet všech

$$\text{kombinací } C_m(n) = \frac{1}{m!} V_m(n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Číslo $C_m(n)$ se nazývá

kombinační číslo a označuje se též $\binom{n}{m}$. Např. kombinace druhé třídy čtyř prvků a, b, c, d jsou ab, ac, ad, bc, bd, cd .

Nyní můžeme stanovit pravděpodobnost výher jednotlivých pořadí.

$$\text{Ze 49 čísel lze vytvořit celkem } C_6(49) = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816 \text{ různých}$$

kombinací šesti čísel. To je počet všech možných různých sázenek. Pro výhru v 1. pořadí je příznivý pouze jeden tip, takže pravděpodobnost

$$\text{výhry v 1. pořadí je } \frac{1}{13\,983\,816} \sim 7,151 \times 10^{-8}.$$

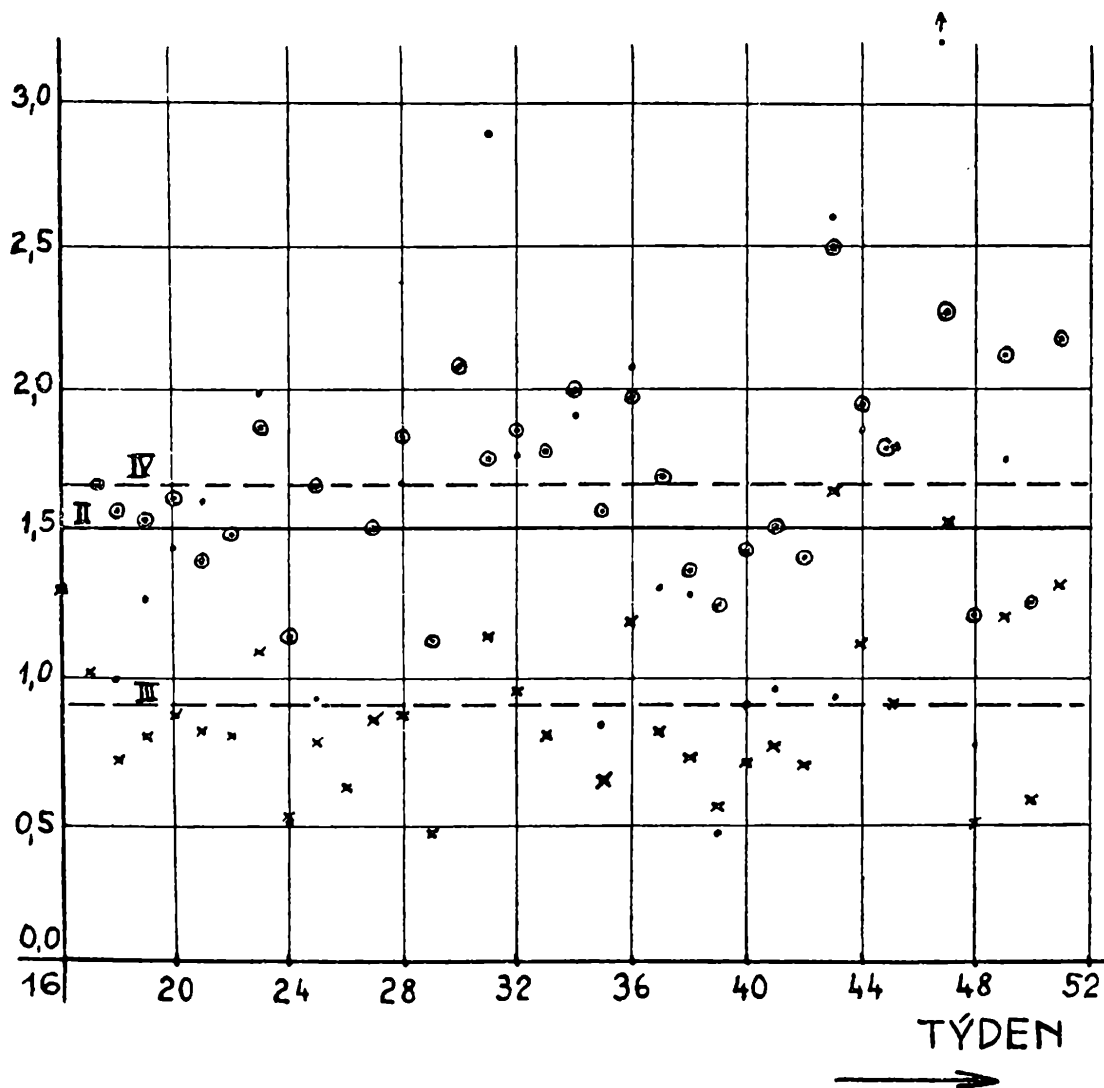
Na výhru v 2. pořadí je třeba uhádnout pět ze šesti tažených čísel.

$$\text{Je } C_5(6) = \frac{6!}{5!1!} = 6 \text{ kombinací pěti ze šesti tažených čísel. Pro každou}$$

tuto kombinaci možno přidat na sázence šesté číslo celkem $49 - 6 =$

= 43 způsoby. Je tedy $6 \cdot 43 = 258$ tipů příznivých pro 2. pořadí, takže pravděpodobnost výhry je jako poměr počtu příznivých a možných případů rovna $\frac{258}{13\,983\,816} \sim 1,845 \times 10^{-5}$.

Podobně pro výhru v 3. pořadí je $C_4(6) = \frac{6!}{4! 2!} = 15$ kombinací čtyř ze šesti tažených čísel. Zbývající dvě čísla lze na sázence přidat $C_2(43) =$



Obr. 1. Srovnání počtu výherců v různých pořadích. Údaj pro počet výher dělený počtem všech sázemek je označen ●, ×, ○, pro pořadí II., III., IV. a je 100 000, 1000, 100krát větší. Vodorovnými čarami jsou naznačeny celoroční průměry.

$= \frac{43!}{2! 41!} = 903$ způsoby, takže je celkem $15 \cdot 903 = 13\,545$ příznivých tipů. Pravděpodobnost výhry je $\frac{13\,545}{13\,983\,816} = 9,686 \times 10^{-4}$.

Pro výhru ve 4. pořadí je $C_3(6) = 20$ kombinací tří ze šesti tažených čísel. Zbývající trojice na sázence lze doplňovat $C_3(43) = 12\,341$ způ-

soby, takže počet příznivých tipů je $20 \cdot 12\,341 = 246\,820$. Pravděpodobnost výhry ve 4. pořadí je $\frac{246\,820}{13\,983\,816} = 0,01765$.

4. Psychologický činitel ve sportce

Vypočítali jsme, že je celkem 13 983 816 různých možných tipů. Ve skutečnosti je podáváno týdně jen asi 5 až 7 miliónů sázenek, z nichž některé mohou být shodné. Je proto přirozené, že počet výher je zpravidla v určitém pořadí menší než součin 13 983 816 krát pravděpodobnost výhry na jednu sázenku.

Na obr. 1 je zaznamenáno, jak kolísal poměrný počet výherců v 2., 3. a 4. pořadí během roku 1957 kolem průměrných hodnot. *P o m ě r n ý m p o č t e m v ý h e r c ů* tu rozumíme poměr počtu výher k počtu všech podaných sázenek. V 35 týdnech se 29krát stalo, že poměrné počty výherců v různých pořadích byly všechny tři buď současně nadprůměrné, nebo současně podprůměrné. Ve zbývajících 6 týdnech se dvakrát stalo, že se jedna z hodnot kryje s průměrem, zbývající dvě jsou buď současně nad ním nebo pod ním. V ostatních čtyřech týdnech se hodnoty příliš neliší od průměrů. Z toho lze usuzovat na to, že je to projevem jakéhosi systematického vlivu, že převážný počet sázejících volí svá čísla v každém týdnu ne náhodně, nýbrž podle určitých společných zásad. Jestliže však srovnáváme tažená čísla jednotlivých týdnů s většími počty výherců, nebo naopak tažená čísla týdnů s menšími počty výherců, nejsou tyto zásady na první pohled patrné. Je možné, že se uplatňuje různých takových zásad více a výsledkem je pozorovaný jev.

5. Opakování čísel v týdnech za sebou následujících

Neshodují-li se dva jevy, pak se mohou, ale nemusí vzájemně vylučovat. Příklad:

1. jev - bude vytaženo číslo 3 nebo 5;
2. jev - bude vytaženo číslo 4 nebo 5;
3. jev - bude vytaženo číslo 6 nebo 7 nebo 9.

Zde první a třetí jev se vzájemně vylučují, první a druhý nikoliv. Sloučíme-li dva nebo více jevů, které se vzájemně vylučují, například zde první a třetí jev, v jediný celkový jev, dostaneme pravděpodobnost výsledného jevu (zde: bude vytaženo 3, nebo 5, nebo 6, nebo 7, nebo 9) sečtením pravděpodobností obou jevů (zde: pravděpodobnost prvního jevu je $\frac{2}{49}$, pravděpodobnost třetího jevu $\frac{3}{49}$, pravděpodobnost výsledného jevu je $\frac{2}{49} + \frac{3}{49}$).

Jestliže pravděpodobnost jednoho jevu je p_1 , pravděpodobnost dru-

hého jevu $p_2, \dots$, pravděpodobnost n -tého jevu je p_n , pak pravděpodobnost, že při prvním tahu nastane první jev, při druhém tahu nastane druhý jev, při n -tém tahu nastane n -tý jev, je rovna součinu $p_1 p_2 \dots p_n$.

Je-li p pravděpodobnost, že jev nastane, je $(1 - p)$ pravděpodobnost, že jev nenastane, tj. jevu právě opačného.

Uvažujme nějaké určité číslo, třeba 8. Pravděpodobnost, že bude v určitém týdnu vytaženo jako první číslo je $\frac{1}{49}$. Pravděpodobnost, že jako první číslo nebude vytaženo, je $\left(1 - \frac{1}{49}\right)$. Pravděpodobnost, že bude vytaženo jako druhé číslo, rovná se součinu pravděpodobnosti, že nebude vytaženo jako první číslo a pravděpodobnosti, že bude vytaženo ze zbylých 48 čísel, tedy $\left(1 - \frac{1}{49}\right) \frac{1}{48} = \frac{1}{49}$. Pravděpodobnost, že číslo 8 bude vytaženo jako třetí, rovná se součinu pravděpodobnosti, že nebude vytaženo jako první, pravděpodobnosti, že nebude vytaženo jako druhé a pravděpodobnosti, že bude vytaženo ze zbylých 47 čísel, tedy $\left(1 - \frac{1}{49}\right) \left(1 - \frac{1}{48}\right) \frac{1}{47} = \frac{1}{49}$. Obdobně zjistíme, že pravděpodobnost, že zvolené číslo bude vytaženo jako čtvrté, páté, šesté se

$$\text{rovná } \left(1 - \frac{1}{49}\right) \left(1 - \frac{1}{48}\right) \left(1 - \frac{1}{47}\right) \frac{1}{46} = \frac{1}{49};$$

$$\left(1 - \frac{1}{49}\right) \left(1 - \frac{1}{48}\right) \left(1 - \frac{1}{47}\right) \left(1 - \frac{1}{46}\right) \frac{1}{45} = \frac{1}{49};$$

$$\left(1 - \frac{1}{49}\right) \left(1 - \frac{1}{48}\right) \left(1 - \frac{1}{47}\right) \left(1 - \frac{1}{46}\right) \left(1 - \frac{1}{45}\right) \frac{1}{44} = \frac{1}{49}.$$

Uvažovaných 6 jevů se vzájemně vylučuje, takže pravděpodobnost, že zvolené číslo bude vytaženo buď jako první, nebo jako druhé, nebo jako třetí, nebo ..., nebo jako šesté v jednom týdnu dostaneme sečtením jednotlivých pravděpodobností. Bude tedy pravděpodobnost, že libovolné určité číslo bude v určitém týdnu vytaženo rovna $\frac{6}{49}$.

Budeme-li nyní sledovat, kolikrát bude které číslo taženo během N za sebou následujících týdnů, označíme p_N^k pravděpodobnost, že nějaké určité číslo bude vytaženo celkem k krát. Z N týdnů lze nalézt $C_k(N)$ kombinací k úspěšných týdnů. Pravděpodobnost, že určitých k týdnů bude pro dané číslo úspěšných a zbývajících $(N - k)$ týdnů bude pro

ně neúspěšných, je $\left(\frac{6}{49}\right)^k \left(1 - \frac{6}{49}\right)^{N-k}$ Všech $C_k(N)$ kombinací dává

$$p_N^k = C_k(N) \left(\frac{6}{49}\right)^k \left(1 - \frac{6}{49}\right)^{N-k}$$

Ověříme si nyní tento výsledek na číslech vytažených během roku 1957. V tabulce 1 jsou v prvním sloupci hodnoty k , ve druhém sloupci čísla p_{35}^k , ve třetím sloupci násobky $49p_{35}^k$, ve čtvrtém sloupci je uvedeno, kolik čísel bylo v roce 1957 vytaženo k krát. Podle zákona velkých čísel mají se čísla ve třetím a čtvrtém sloupci od sebe málo lišit. Vidíme, že je tomu tak s odchylkou nejvýše tří jednotek, kterou lze dobře ospravedlnit poměrně malým počtem uvažovaných týdnů.

Tabulka 1

k	p_{35}^k	$49 p_{35}^k$	Četnosti opakování
1	0,0505	2,48	3
2	0,1179	5,82	8
3	0,1839	9,02	6
4	0,2052	10,06	9
5	0,1775	8,70	10
6	0,1239	6,07	8
7	0,0716	3,51	3

6. Závěr

Ukázali jsme na některých příkladech, jak se uplatňuje ve sportce zákon velkých čísel, který zde působí stejně jako jinde v živé i neživé přírodě. Přitom jsme si však povšimli, že se i zde může významně uplatňovat psychologický činitel. Podobně jako v marxistickém učení o vývoji společnosti, také zde se setkáváme s působením přírodních zákonů, které působí spolu se svobodným rozhodováním jednotlivců. Stejně jako v dějinách společnosti, ani zde jednání malé skupiny jednotlivců nemůže najednou úplně zvrátit přirozený běh událostí ve svůj prospěch. V tom můžeme vidět potvrzení správnosti materialistického světového názoru.

A. Kolman: Lenin a současná fyzika

Autor ukazuje, jak geniálně vyřešil V. I. Lenin krizi, která se ve fyzice objevila na přelomu 19. a 20. století. Připomíná, že tato krize je důsledkem neopakovatelného skoku, který lidské poznání provedlo při přechodu od světa předmětů normální velikosti (makrosvět) do světa nejmenších poznatelných částic (mikrosvět). Protože jevy mikrosvěta není možno bezprostředně chápat, tvrdili někteří fyzikové, že hmota neexistuje a že je pouze výtvorem ducha. To Lenin ve své práci „Materialismus a empirio-kriticismus“ vyvrátil a uplatnil v ní - vycházeje z prací Engelsových a Marxových — základní poučky dialektického materialismu, názory na hmotu a na fyzikální děje. Autor ukazuje, jak se tyto názory v dalším vývoji fyziky potvrdily. Během padesáti let lidé pronikli nejen do oblasti mikrosvěta, ale začínají pronikat i do oblasti megasvěta (svět mlhovin ležících mimo naši galaktickou soustavu mléčné dráhy). S tímto úspěchem Leninovy tvůrčí filosofie snad může soutěžit pouze předpověď nevyhnutelného zániku kapitalismu a vítězství socialistické revoluce jako vyššího společenského zřízení.

Autor pak uplatňuje Leninovy myšlenky na nové fyzikální poznatky a vykládá je z materialistického hlediska. Rozebírá zejména teorii relativity a důsledky z ní vyplývající, otázku konečnosti, nekonečnosti a neomezenosti vesmíru, které se často navzájem zaměňují, a ještě řadu dalších otázek. Shrnuje a hodnotí z materialistického hlediska zákonitosti přírody a uvádí dosti podrobně současná data o struktuře hmoty. Podává přehled dosud známých „elementárních částic“ a uvádí jejich základní vlastnosti. Zdůrazňuje jejich podvojný charakter tj., že se chovají současně jako částice i jako vlnění, a podává základní poznatky vlnové mechaniky a přehled současných znalostí o struktuře hmoty. Popisuje Bohrovův model atomu, vykládá základy kvantové fyziky, podává přehled elementárních částic a jejich vlastností, vysvětluje jejich vzájemné silové působení, jejich proměnitelnost a vlastnosti sil, které mezi nimi působí. V přehledu antičástic ukazuje, že předpoklad o možnosti tzv. antisvěta není v rozporu se základními poučkami dialektického materialismu o nevyčerpatelnosti a vnitřní protikladnosti hmoty. Uvádí snahy o vytvoření jednotné fyzikální teorie hmoty až do nejnovějšího stavu, který představuje Heisenbergova rovnice hmoty z roku 1958.

Autor řeší také otázku poměru matematiky a fyziky. Zavedení kvantové fyziky a statistických metod do fyziky, nemožnost přímého smyslového vnímání a představování elementárních částic často nutí fyziky, aby tyto částice zkoumali pomocí matematiky. Někteří fyzikové se ještě dnes domnívají, že výběr určité matematické teorie není diktován tím, že její pomocí získané výsledky jsou potvrzovány pokusem, ale její „elegancí“ a její „krásou“, což nepovažuje za správné. Již Lenin upozornil na to, že jednota přírody se projevuje v překvapující době diferenciálních rovnic, vztahujících se k různým oblastem jevů. Tyto obdoby umožnily provádět v přírodních vědách i v technice modelování jedné procesy procesy druhými a vznik kybernetiky, o jejíž podstatě vyšel v našem časopise podrobnější článek. Také mezi zákony fyziologických procesů a mezi zákony elektrodynamiky existují obdoby (analogie), na nichž jsou založeny automatické, tzv. analogové počítače a řídicí stroje, které řeší neobyčejně rychle a spolehlivě četné úkoly. Řídí stroje značně rychleji, než by to dokázal člověk.

Knihu vydalo Státní nakladatelství politické literatury v Praze v létě 1960. Kniha má 160 stran a 21 obrázků. Její cena je 21,50 Kčs za vázaný výtisk. Ač vlastně jde o knihu z filosofie přírodních věd, je psána neobyčejně jasně a srozumitelně a podává velmi dobrý a jasný přehled o současném stavu moderní, zejména jaderné fyziky.

Dr. K. Šoler

R. Girke, G. Sprockhoff: Experiment po kursu elementarnoj fiziki

Fyzikální pokusy ve škole, část I., přel. z něm. Physikalische Schulversuche, Učpedgiz, Moskva 1959, str. 262, obr. 273, tabulky. Cena 5,65 Kčs.

Uvedená kniha je překlad do ruštiny desetidílné práce německých autorů, představující praktickou příručku pro učitele fyziky o přípravě a provedení fyzikálních pokusů a demonstrací. V knize jsou v systematickém uspořádání popsány pokusy z každého oddílu fyziky. To umožňuje výběr vhodných demonstrací a laboratorních prací pro hodiny fyziky škol všech stupňů, podle jejich vlastních osnov a učebních plánů. Mnohé popsané pokusy vyhovují zcela zásadám polytechnického vyučování.

Kniha zahrnuje do 8 kapitol mechaniku pevných těles: I. Nářadí, nástroje, zařízení a materiály nutné pro demonstrace z mechaniky. II. Fyzikální veličiny a jejich měření. III. Základní fyzikální vlastnosti těles. IV. Statika pevného tělesa. V. Přímý postupný pohyb pev-

ného tělesa. VI. Energie, impuls, hybnost, ráz. VII. Rotační pohyb. VIII. Vlnění.

Celkem 217 pokusů z uvedených kapitol je doprovázeno 273 názornými obrázky. Každá kapitola je uvedena metodickou statí (stručný přehled zákonů, jednotek, definic atd.). Pokusy tvoří uzavřené celky, označené pořadovým číslem, jsou podle potřeby doplněny tabulkou, přehledem užitého materiálu, pomůcek a poznámkami, které rozbírají vedlejší otázky související s pokusem. Zvlášť jsou označeny pokusy, vhodné pro laboratorní cvičení.

Kniha je po stránce obsahové úměrná, metodicky dobře zpracovaná a bude vhodnou pomůckou pro naše učitele fyziky, kterým umožní zpestřit demonstrační část vyučování.

Zdeněk Weber, prom. fyzik, VUT, Brno.

Různé

Prof. inž. dr. František Kadeřávek 1885 — 1961

Prof. inž. dr. František Kadeřávek, doktor věd, nositel Řádu republiky, zemřel v Praze dne 9. února 1961.

Není tomu ani rok, kdy jsme své mladé čtenáře seznámili s životní prací profesora Kadeřávka u příležitosti jeho 75. narozenin.

Profesor Kadeřávek byl virtuózním vysokoškolským učitelem deskriptivní geometrie s polyhistorickými vědomostmi, přednášejícím poutavě vždy spatra, který nejen dovedl naučit svému předmětu, ale i získat k němu u svých posluchačů lásku. Tak vychoval generace techniků a středoškolských učitelů. Vzácným způsobem spojil vědeckou práci v geometrii s jejím technickým užitím zvláště ve stavitelství. Tento obor geometrie zůstane u nás trvale spojen s jeho jménem. Velká část jeho prací je poznamenána vřelým vztahem k dějinám a k výtvarnému umění.

Po půl století neúnavně pracoval pro rozkvět Českého vysokého učení technického v Praze. Celou tu dobu - někdy za velmi těžkých podmínek - se věnoval všestranné péči o studující mládež. Profesor Kadeřávek nikdy nebyl úzce zaměřeným odborníkem, vždy však starostlivým otcem potřebných a především dobrým, skromným člověkem.

Všichni, kteří byli žáky profesora Kadeřávka, budou vždy vzpomínat na svého milovaného učitele.

Doc. Dr. M. Menšík

Několik rad našim čtenářům o vstupu na vysoké školy technických směrů

Velká část našich čtenářů bude letos maturovat a má se v nejbližší době rozhodnout o svém budoucím povolání. I když někde finanční důvody mluví pro okamžitý nástup maturantů do pracovního procesu a někteří rodiče je v tomto počínání i utvrzují, přesto většina abiturientů půjde na vysokou školu.

Plán rozvoje národního hospodářství počítá se zvyšováním počtu absolventů vysokých škol. Rostoucí mechanizace, elektrifikace, chemizace a automatizace našeho hospodářství bude stále více a více potřebovat vysokoškolsky školené odborníky, ponejvíce ovšem techniky. Proto je třeba volit na vysokých školách hlavně technické směry, kde pravděpodobnost přijetí je stále ještě větší než na některých úzce specializovaných humanitních směrech.

V mnohých případech bývá největší strach z matematiky. Žadatelé na techniky se obávají obtížnosti zkoušky z matematiky a fyziky. Je samozřejmé, že žák studující na 3. stupni matematiku a fyziku jen „dostatečně“, měl by na technice velké potíže, avšak jistě tu jde o studenta, který by se neosvědčil ani na tzv. „lehčích“ oborech. Naproti tomu výborní a průměrní žáci dojdou na technice svého uplatnění. Vždyť přijímací pohovor na většinu technik se omezuje jen na všeobecné otázky z matematiky a fyziky v rozsahu učiva jedenáctiletky. Příprava a zpracování maturitních otázek stačí k snadnému požadavků při pohovoru. Není třeba znát spoustu fakt, cennější je vždy logičnost úsudku a určité numerická zručnost v matematice, znalost hlavních fyzikálních zákonů a jednotek než mechanické odříkávání vzorců nebo vyjmenovávání součástí složitých strojů.

Absolventi průmyslových škol studovali matematiku dlouho před maturitou a fyziku měli jen v omezené míře. Bude proto dobře, když si od svých přátel na jedenáctiletce včas vypůjčí učebnice matematiky a fyziky z posledních tříd a zopakují si resp. doplní nejpodstatnější partie.

K přijetí na stavební fakulty (architekturu) není zkouška z kreslení. Deskriptivní geometrie je vykládána v 1. ročníku od začátku.

Nakonec uvedu adresy vysokých škol technického směru, na něž musí být zaslány přihlášky do konce března 1961.

Fakulty stavební: a) Praha 6-Dejvice, Žitná 4; b) Brno, Barvičova 83, c) Bratislava, Tolstého 1.

Fakulty strojní: a) Praha 2-Nové Město, Karlovo nám. 13; b) Liberec, Hájkova 6; c) Plzeň, Leninova 11; d) Brno, Úvoz 33; e) Bratislava, Mýtná, 34; f) Košice, Zbrojnická 7.

Fakulty elektrotechnické: a) Praha 2-Nové Město, Karlovo nám. 13; b) Plzeň, Nejedlého sady 14; c) Brno, Antonínova 1; d) Bratislava, Vazovova 1.

Fakulta jaderné a tech. fyziky: Praha 1-Staré Město, Břehová 7.
Vysoká škola báňská: Ostrava I, Dvořákova 7.
Vysoká škola báňská hornicko-hutnická: Košice, Švermova 3.
Vysoká škola chemicko-technologická: a) Praha 6-Dejvice, Technická 5;
b) Pardubice, ul. Slov. povstání 565
Vysoká škola dopravní: Žilina, Marx-Engelse B.
Vysoká škola zemědělská: a) Praha 6-Dejvice, Technická 3; b) Brno-Černé
pole, Zemědělská 1; c) Nitra, nám. 1. máje 1.
Vysoká škola lesnická a dřevařská: Zvolen, Štúrova 2.

Přihlášky žadatelů z pracovišť doporučuje závod, ze škol ředitelství.
Přejeme všem žadatelům na vysoké školy mnoho úspěchů při červno-
vých přijímacích pohovorech.

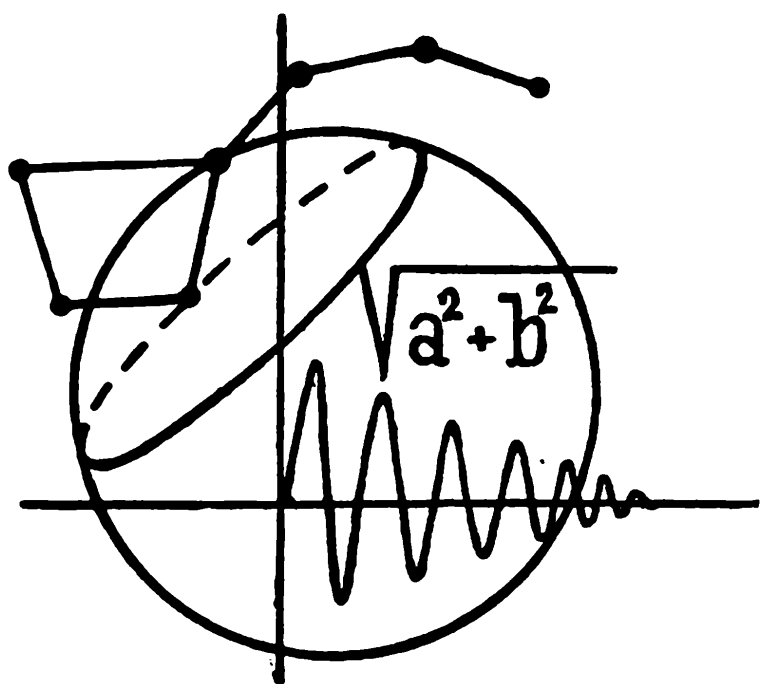
O. S.

Matematická olympiáda

*Dne 16. dubna t. r. se koná druhé kolo této soutěže, a to v kate-
gorii A, B, C v jednotlivých krajských městech; druhé kolo soutěže v ka-
tegorii D je pořádáno v okresních městech dne 23. dubna t. r. Závěrečné
III. celostátní kolo soutěže bude v Praze 20. května t. r.; nejlepší z vítězů
III. kola budou vysláni na III. mezinárodní matematickou olympiádu
do Budapešti. Žádáme čtenáře, aby na uvedená data laskavě upozornili
žáky a učitele.*

MATEMATICKO^{-VI}-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



8

ROČ. 39
1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 8

Toto číslo vyšlo 15. dubna 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

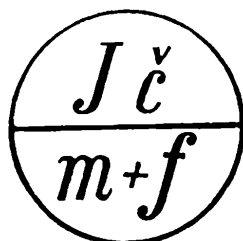
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

OBSAH:

E. Danielová: Kvadratická funkční síť	337
S. Horák: Použití Moivreovy věty	342
Inž. E. Kriegelstein: Úvod po diferenciálního počtu (Pokračování).	345
P. Staněk: Zkoušení materiálu zvukem a ultrazvukem.	356
Inž. L. Smrž: Základní normály v elektronice (Dokončení)	363
J. Pospíšil: Informace o úlohách třetího kola I. ročníku Fyzikální olympiády.	367
O. S.: Řešení úloh.	375
Dr. R. Plajner: Řešení Fibonacciho úlohy	377
Literární soutěž; JČMF	381
Recenze.	382
Šestibarevná krychle majora Mac Mahona	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*11162. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

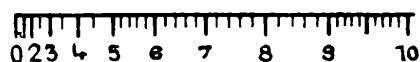
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Matematika

E m a D a n i e l o v á, PŠ, Bratislava:

Kvadratická funkčná sieť

Pre výhodné zobrazenie určitého druhu funkčných vzťahov s dvoma premennými zostrojujú sa rôzne funkčné siete. Tie funkčné siete, ktoré sa v praxi najčastejšie používajú, vydávajú sa tlačou vo veľkom náklade a možno ich kúpiť v obchodoch ako tzv. grafické papiere. Najbežnejšie druhy grafických papierov sú: papier milimetrový, logaritmický, semilogaritmický, sínusový apod.



Obr. 1

V tomto článku sa budeme zaoberať kvadratickou funkčnou sieťou, na ktorej ako uvidíme - sa výhodne zobrazujú niektoré kuželosečky v základnej polohe.

Základom kvadratickej funkčnej siete je kvadratická stupnica, ktorá je obrazom kvadratickej funkcie; preto si napred zostrojíme túto stupnicu. Potrebné hodnoty na jej zostrojenie si zostavíme do funkčnej tabulky (tab. 1); v poslednom stĺpci tejto tabulky sú hodnoty kvadratickej funkcie x^2 násobené modulom čiže grafickou jednotkou (ktorú sme v našom prípade zvolili $m = 0,5 \text{ mm}$) a zaokrúhlené na desiatky milimetrov. Na obr. 1 vidíme narysovanú kvadratickú stupnicu, ktorú dostávame tak, že na os ξ nanášame vždy od zvoleného počiatku hodnoty vypočítané v poslednom stĺpci tabulky.

Majme teraz pravouhlú súradnicovú sústavu, v ktorej na osi ξ a η nanesieme kvadratické stupnice; ak v koncových bodoch jednotlivých

dielikov týchto stupníc zostrojíme vždy rovnobežku s druhou súradnicovou osou, dostávame kvadratickú funkčnú sieť (obr. 2).

Tabulka 1.

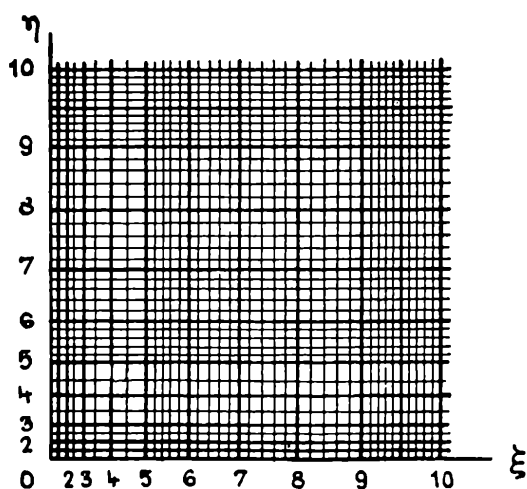
x	x^2	$\xi = m \cdot x^2$
0,0	0,00	0,0 mm
1,0	1,00	0,5 mm
2,0	4,00	2,0 mm
2,5	6,25	3,1 mm
3,0	9,00	4,5 mm
3,5	12,25	6,1 mm
4,0	16,00	8,0 mm
4,5	20,25	10,1 mm
10,0	100,00	50,0 mm

Pri zostrojovaní kvadratickej funkčnej siete v obr. 2 sme použili vzťahy

$$\xi = m \cdot x^2 \quad \eta = m \cdot y^2 \quad (1)$$

Ak použijeme tieto vzťahy, dostávame však iba jeden kvadrant kvadratickej siete - súradnice ξ , η môžu totiž nadobúdať iba kladné hodnoty. Ak chceme dostať všetky štyri kvadranty siete, použijeme vzťahy

$$\xi = \pm m \cdot (\pm x)^2 \quad \eta = \pm m \cdot (\pm y)^2, \quad (2)$$



Obr. 2

v ktorých súradnica ξ nadobúda kladné, resp. záporné znamienko vtedy, keď to isté znamienko má premenná x ; podobne je to aj so súradnicou η a premennou y .

Zobrazme teraz v kvadratickej funkčnej sieti kružnicu so stredom v počiatku súradnicového systému

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (3)$$

Napred skúmame ako sa zobrazí štvrtkružnica nachádzajúca sa v prvom kvadrante. V prvom kvadrante obidve premenné x aj y na-

dobúdajú iba kladné hodnoty, preto použijeme zobrazovacie vzťahy (2) v tvare

$$\xi = + mx^2 \quad \eta = + my^2 .$$

Po dosadení týchto vzťahov do rovnice (3) dostávame

$$\xi + \eta = mr^2 ,$$

alebo po vydelení výrazom mr^2

$$\frac{\xi}{mr^2} + \frac{\eta}{mr^2} = 1 \quad (4)$$

Rovnica (4) je rovnicou priamky, ktorá na osi ξ aj η vytína rovnaký úsek mr^2 (tento úsek nevynášame, ale jednoducho nájdeme na osiach body s kótou r). Z tejto priamky ostáva, pravda, v platnosti iba úsečka medzi polosami $+\xi$ a $+\eta$ ako obraz štvrtkružnice ležiacej v prvom kvadrante.

Podobne zobrazme štvrtkružnicu z druhého kvadrantu; tu premenná x nadobúda záporné hodnoty a premenná y kladné hodnoty preto použijeme zobrazovacie vzťahy (2) v tvare

$$\xi = - mx^2 \quad \eta = + my^2$$

Po vložení týchto vzťahov do rovnice (3) dostávame

$$-\xi + \eta = mr^2 ,$$

alebo po úprave

$$\frac{\xi}{-mr^2} + \frac{\eta}{mr^2} = 1 \quad (5)$$

Rovnica (5) je rovnicou priamky, ktorá na osi ξ vytína úsek $-mr^2$ a na osi η úsek $+mr^2$. Z tejto priamky ostáva v platnosti zas iba úsečka medzi polosami $-\xi$ a $+\eta$ ako obraz štvrtkružnice z druhého kvadrantu.

Podobne by sme zobrazili v kvadratickej sieti ďalšie štvrtkružnice. Na obr. 3 vidíme zobrazenú kružnicu (k) s polomerom $r = 7,4$.

Zobrazme ďalej v kvadratickej sieti elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

a hyperbolu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

Napred sa zaoberajme zobrazením oblúka elipsy, resp. hyperboly,

ktorý sa nachádza v prvom kvadrante. Pre prvý kvadrant používame zobrazovacie vzťahy (2) v tvare

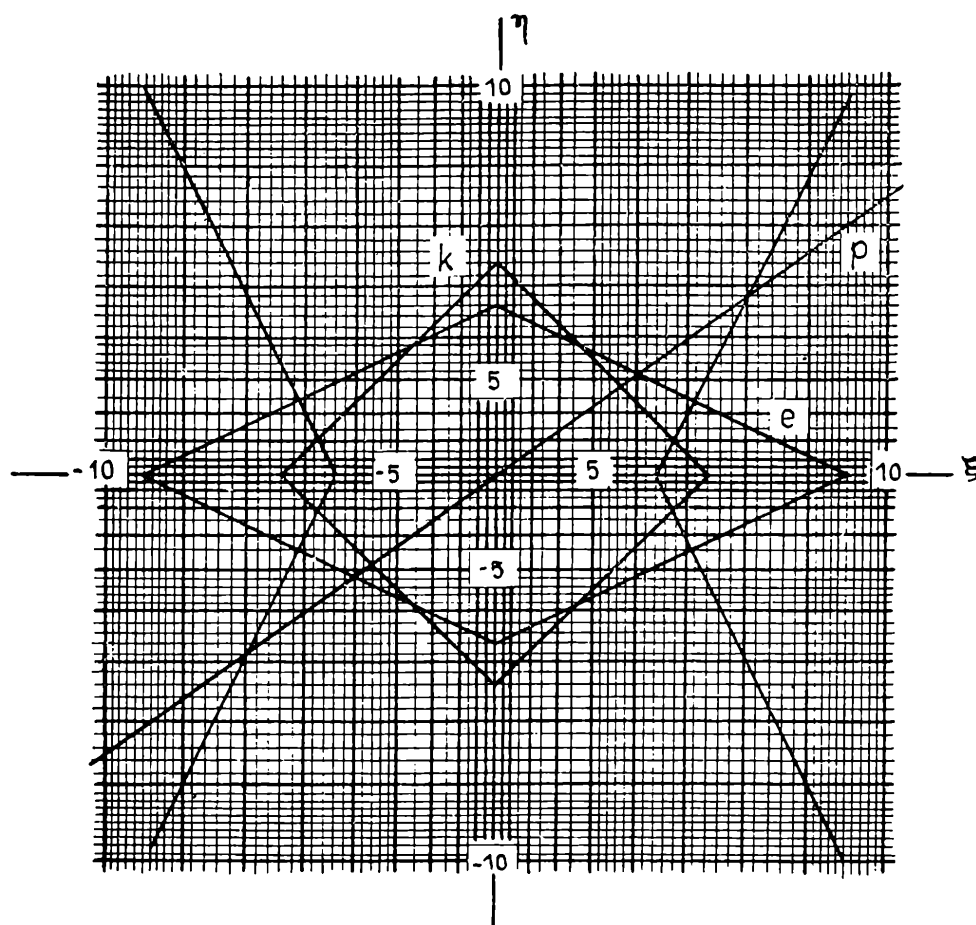
$$\xi = + mx^2 \quad \eta = + my^2 .$$

Dosadiac tieto vzťahy do rovnice (6), resp. (7) dostávame

$$\frac{\xi}{ma^2} + \frac{\eta}{mb^2} = 1 , \quad (8)$$

resp.

$$\frac{\xi}{ma^2} + \frac{\eta}{-mb^2} = 1 \quad (9)$$



Obr. 3

Rovnica (8) je rovnicou priamky, ktorá vytína na osi ξ úsek ma^2 a na osi η úsek mb^2 (úseky nevynášame, ale na osi ξ nájdeme bod s kótou a , na osi η bod s kótou b). Z tejto priamky ostáva v platnosti iba úsečka medzi polosami $+\xi$ a $+\eta$ ako obraz štvrtelipsy z prvého kvadrantu.

Podobne rovnica (9) znamená priamku vytínajúcu na osi ξ úsek ma^2 a na osi η úsek $-mb^2$. Z tejto priamky ostáva v platnosti iba úsečka medzi polosami $+\xi$ a $+\eta$ ako obraz oblúka hyperboly z prvého kvadrantu.

Obdobne ako v prípade kružnice zobrazili by sme aj tu postupne ďalšie oblúky elipsy a hyperboly z ostatných kvadrantov. Na obr. 3 vidíme zobrazenú elipsu (e)

$$\frac{x^2}{9,5^2} + \frac{y^2}{6,6^2} = 1$$

a hyperbolu (h)

$$\frac{x^2}{6,4^2} - \frac{y^2}{9,1^2} = 1.$$

Konečne zobrazme v kvadratickej sieti ešte priamku idúcu cez počiatok - napr. priamku (p)

$$y = \frac{7,6}{9} x. \quad (10)$$

Priamka (p) leží v prvom a treťom kvadrante. Pre zobrazenie bodov z prvého kvadrantu použijeme zobrazovacie vzťahy (2) v tvare

$$\xi = + mx^2 \quad \eta = + my^2$$

Vložením týchto vzťahov do rovnice (10) vychádza

$$\sqrt{\frac{\eta}{m}} = \frac{7,6}{9} \sqrt{\frac{\xi}{m}} \quad (11)$$

Ak umocníme rovnicu (11) na druhú a vynásobíme ju modulom m , dostávame

$$\eta = \left(\frac{7,6}{9}\right)^2 \cdot \xi \quad (12)$$

Keby sme zobrazili tú časť priamky, ktorá leží v treťom kvadrante, vyšla by nám zasa rovnica (12). To znamená, že priamka (p) idúca cez počiatok súradnicovej sústavy zobrazí sa v kvadratickej sieti zasa ako priamka, ale jej smernica bude tu kvadrátom jej pôvodnej smernice.

Určite teraz v kvadratickej funkčnej sieti na obr. 3 súradnice priesečníkov priamky (p) so zobrazenou kružnicou (k), elipsou (e) a hyperbolou (h), ďalej súradnice priesečníkov elipsy (e) s hyperbolou (h) a s kružnicou (k), ako aj hyperboly (h) s kružnicou (k). Pre kontrolu uvádzame súradnice priesečníkov, ktoré sa nachádzajú v prvom kvadrante:

$p \times k$	$x = 5,65$	$y = 4,77$
$p \times e$	$x = 6,04$	$y = 5,10$
$p \times h$	$x = 7,95$	$y = 6,71$
$e \times h$	$x = 7,10$	$y = 4,38$
$e \times k$	$x = 4,65$	$y = 5,75$
$k \times h$	$x = 6,75$	$y = 3,04$

Použití Moivreovy věty

Moivreovu větu (čti Moavrovu větu, dále již jen M. v.) jistě mnozí z vás znají. V matematice se jí často používá a my si v tomto článku ukážeme některá její použití. Nejprve si připomeneme její znění

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha. \quad (M)$$

Ve škole jste si ji dokázali pro n přirozené, ale dá se dokázat, že platí pro každé n reálné. V tomto článku budeme předpokládat, že n je kladné racionální číslo.

I. První použití je známé; goniometrické funkce úhlu dvojnásobného (trojnásobného, čtyřnásobného, ...) vyjádříme funkcemi úhlu jednoduchého. Máme například vyjádřit funkcemi jednoduchého úhlu $\sin 4\alpha$. Podle M. v. platí

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha.$$

Avšak podle binomické věty platí

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 &= \cos^4 \alpha + 4i \cos^3 \alpha \sin \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \\ &\quad - 4i \cos \alpha \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

Poslední dvě rovnice mají levé strany stejné a proto se sobě rovnají i pravé strany, tj.

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha &= \cos^4 \alpha + 4i \cos^3 \alpha \sin \alpha - \\ &\quad - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 4i \cos \alpha \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

Zde máme rovnost dvou komplexních čísel; víme, že dvě komplexní čísla se sobě rovnají tehdy a jen tehdy, když se sobě rovnají jejich reálné části i jejich imaginární části. Z toho plyne

$$\sin 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha.$$

Jako vedlejší výsledek dostáváme

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

II. Nyní si ukážeme, jak lze M. v. použít k určení součtu goniometrických řad. Máme například sečíst řadu

$$1 + \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha. \quad (1)$$

Součet této řady označíme s_{n+1} ; je tudíž

$$s_{n+1} = 1 + \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha. \quad (1')$$

K této řadě připojíme následující

$$c_{n+1} = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha. \quad (2')$$

Řadu (1') znásobíme imaginární jednotkou i a přičteme k ní řadu (2'):

$$c_{n+1} + i s_{n+1} = 1 + i + (\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \dots + (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Pro stručnost označme

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = z,$$

$$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = z^2 \text{ (podle M. v.)},$$

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = z^n \text{ (podle M. v.)}.$$

Můžeme tudíž psát

$$c_{n+1} + i s_{n+1} = i + (1 + z + z^2 + \dots + z^n).$$

Členy v závorce na pravé straně rovnice tvoří geometrickou řadu a tu můžeme sečíst. Obdržíme

$$\begin{aligned} c_{n+1} + i s_{n+1} &= i + \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \\ &= i + \frac{\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha - 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Abychom se zbavili imaginárního čísla ve jmenovateli, rozšíříme zlomek výrazem $\cos \alpha - 1 - i \sin \alpha$. Zlomek tím po známé úpravě nabude tvaru

$$\frac{1 + \cos n\alpha + i \sin n\alpha - [\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha] - (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)}.$$

V rovnici (3) máme opět rovnost dvou komplexních čísel a z toho vyplývá, že

$$s_{n+1} = 1 + \frac{\sin n\alpha + \sin \alpha - \sin(n+1)\alpha}{2(1 - \cos \alpha)}.$$

Jako vedlejší výsledek dostali bychom vzorec pro c_{n+1} .

III. Moivreovy věty lze použít i k řešení binomické rovnice¹⁾

¹⁾ Binom = dvojčlen, odtud název binomická rovnice a binomické věty. Binomická rovnice má obecně tvar $x^n = a$, kde a je libovolné komplexní číslo. Zde se omezujeme jen na případ $a = \pm 1$.

$$x^n = \pm 1$$

Řešení této rovnice provedeme na speciálním případě

$$x^6 = 1. \quad (\text{L})$$

Místo pravé strany rovnice můžeme napsat výraz

$$\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi,$$

kde k je libovolné celé číslo. Rovnice (L) nabude po dosazení tohoto tvaru

$$x^6 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi.$$

Na začátku tohoto článku jsme říkali, že M. v. platí i pro racionální čísla a proto můžeme psát

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[6]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/6} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}, \end{aligned} \quad (\text{A})$$

kde k je libovolné celé číslo. Abychom však dostali vesměs různé hodnoty x , stačí za k dosadit

$$0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

Kdybychom dosazovali postupně další přirozená čísla (6; 7; ...), nedostali bychom již nové hodnoty. Kořeny rovnice (L) sestavíme v přehlednou tabulku:

$$\begin{array}{ll} k_1 = 0, & x_1 = 1, \\ k_2 = 1, & x_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}, \\ k_3 = 2, & x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}, \\ k_4 = 3, & x_4 = -1, \\ k_5 = 4, & x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}, \\ k_6 = 5, & x_6 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}. \end{array}$$

Dosazením do rovnice (L) se snadno přesvědčíme, že čísla x jí vyhovují.

P o z n á m k a. Kdybychom měli rovnici

$$x^6 = -1,$$

položili bychom

$$-1 = \cos (2k + 1) \pi + i \sin (2k + 1) \pi$$

a kořeny by byly dány výrazem

$$\cos \frac{2k + 1}{6} \pi + i \sin \frac{2k + 1}{6} \pi,$$

kde $k = 0; 1; 2; 3; 4; 5$.

Obdobným způsobem bychom rozřešili rovnici

$$x^n = 1.$$

Její kořeny jsou

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

kde $k = 0; 1; 2; \dots, n - 1$.

Cvičení.

1. Užitím M. v. vypočtete

$\sin 2\alpha, \cos 3\alpha, \sin 5\alpha, \cos 5\alpha$.

2. Podle vzoru příkladu řešeného v textu sečtete řady

$$1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{\sin^n \alpha};$$

$$2 \cos \alpha + 2^2 \cos 2\alpha + 2^3 \cos 3\alpha + \dots + 2^n \cos n\alpha.$$

3. Řešte rovnice:

$$x^3 = -1; \quad x^6 = i \left(\text{dosadte } i = \cos (4k + 1) \frac{\pi}{2} + i \sin (4k + 1) \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x^8 = 1.$$

Inž. E d u a r d K r i e g e l s t e i n , PŠ, Praha:

Úvod do diferenciálního počtu

(Pokračování)

2. Limita funkce

Pojem limity funkce v bodě je jedním z nejdůležitějších pojmů diferenciálního počtu. Dříve než vyslovíme definici limity funkce v bodě, objasněme si tento nový pojem na příkladu.

P ř í k l a d 6. Mějme funkci $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, která je definována pro

všechna čísla kromě $x = 2$. Protože tedy nemůžeme do rovnice funkce dosadit $x = 2$, zkoumejme, co se děje s funkční hodnotou $f(x)$, jestliže nezávisle proměnnou x budeme volit z nějakého okolí bodu 2 čili ji-

nými slovy, bude-li se nezávisle proměnná x blížit číslu 2. Větu „nezávisle proměnná x se blíží číslu 2“ budeme zapisovat takto: $x \rightarrow 2$. Pro lepší přehlednost si sestavme tabulku.

Tabulka I.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,9	3,9	2,1	4,1
1,99	3,99	2,01	4,01
1,999	3,999	2,001	4,001
1,999 9	3,999 9	2,000 1	4,000 1

Z tabulky I je vidět, že pro hodnoty x , které se málo liší od čísla 2, se funkční hodnoty málo liší od čísla 4. Můžeme proto usuzovat, že pro $x \rightarrow 2$ bude $f(x) \rightarrow 4$. Abychom dokázali, že tomu tak je skutečně, zvolme si libovolné okolí bodu 2. Každé x z tohoto okolí můžeme psát ve tvaru $x = 2 + h$, kde h je vhodně zvolené číslo. Protože se chceme vyhnout číslu 2, budeme předpokládat $h \neq 0$. Dosadíme nyní do funkčního vztahu $x = 2 + h$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(2 + h)^2 - 4}{(2 + h) - 2} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{2 + h - 2} = \\ &= \frac{4h + h^2}{h} = \frac{h(4 + h)}{h} \end{aligned}$$

Protože jsme předpokládali $h \neq 0$, můžeme zlomek $\frac{h(4 + h)}{h}$ krátit

číslem h a dostaneme $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 + h$.

Odtud vidíme, že pro $x \rightarrow 2$, tj. když $h \rightarrow 0$ nabývá $f(x)$ hodnot stále bližších číslu 4, tj. $f(x) \rightarrow 4$.

Budeme říkat, že funkce $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ má v bodě $x = 2$ limitu rov-

nou čtyřem. Tento výrok zapíšeme takto:

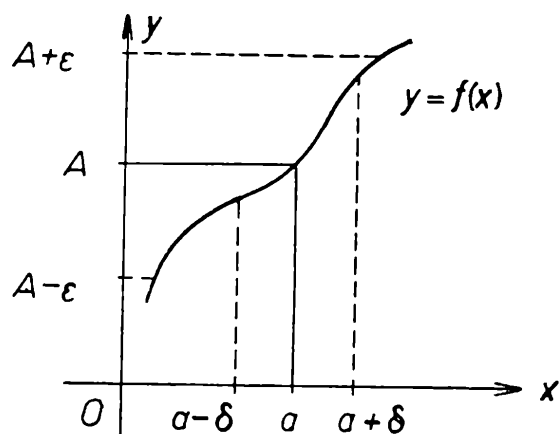
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Tento případ můžeme také vyjádřit takto: Zvolíme-li x z intervalu $(2 - \delta; 2 + \delta)$, avšak tak, že $x \neq 2$, bude příslušná funkční $f(x)$ ležet v intervalu $(4 - \varepsilon; 4 + \varepsilon)$ čili pro x , pro která platí $0 < |x - 2| < \delta$ je $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Nyní můžeme vyslovit definici limity funkce v bodě.

Definice 6. Funkce $f(x)$ má v bodě a za limitu A , jestliže k libovolně malému kladnému ε existuje takové kladné číslo δ , že pro $0 < |x - a| < \delta$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Píšeme pak

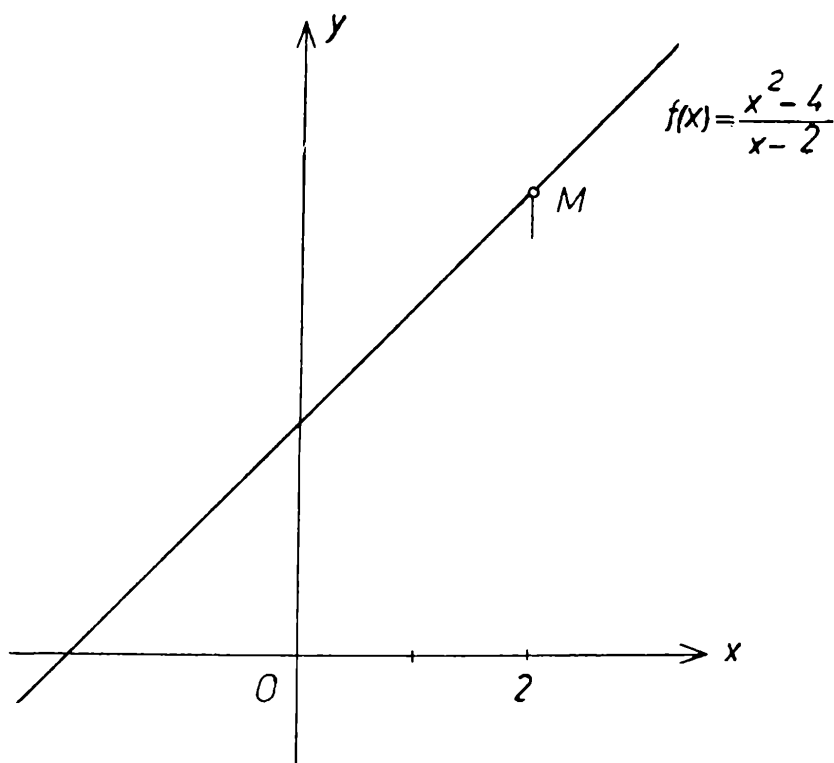
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$



Obr. 14

Pro větší názornost můžeme definici 6 doprovodit obrázkem (obr. 14).

Definice 6 předpokládá, že funkce $f(x)$ je definována v určitém okolí bodu a , nejvýše s výjimkou tohoto bodu a . To však nemá vliv na existenci limity v bodě a .

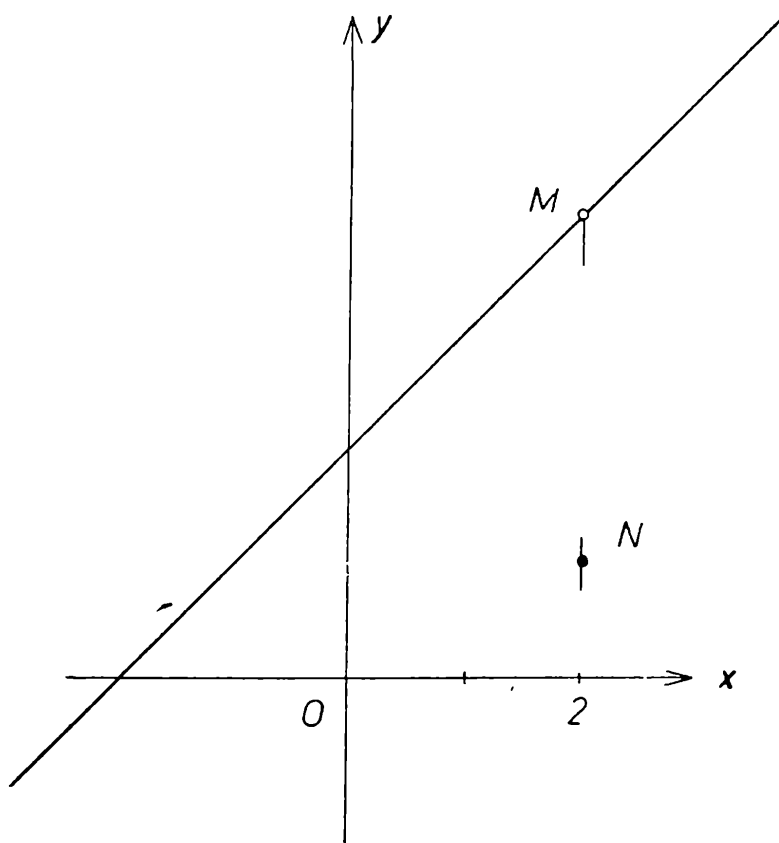


Obr. 15

Vraťme se ještě k našemu příkladu 6 a zobrazme graficky funkci $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (obr. 15).

Vidíme, že graf funkce $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ je totožný s grafem funkce $g(x) = x + 2$ pro všechna x , kromě $x = 2$. Pro $x = 2$ není funkce $f(x)$ definována, kdežto $g(2) = 4$. Grafem funkce $g(x)$ je celá přímka $y = x + 2$, kdežto grafem funkce $f(x)$ je táž přímka, z níž však byl vyňat bod $M(2; 4)$. V tomto bodě M je graf funkce $f(x)$ přerušen.

Říkáme, že funkce $g(x)$ je v bodě $x = 2$ spojitá, kdežto funkce $f(x)$ v bodě $x = 2$ spojitá není. Nespojitosť funkce $f(x)$ v bodě $x = 2$ je způsobena tím, že funkce $f(x)$ není v bodě $x = 2$ definována.



Obr. 16

Avšak i funkce definovaná pro všechna x může být v určitém bodě nespojitá. Např. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; $x \neq 2$ a $f(2) = 1$. Zobrazení graficky tuto danou funkci (obr. 16).

Vidíme, že daná funkce opět není v bodě $x = 2$ spojitá. Je to však způsobeno tím, že pro $x \rightarrow 2$ je $f(x) \rightarrow 4$, ale $f(2) = 1$. Limita funkce $f(x)$ v bodě $x = 2$ není rovna funkční hodnotě v bodě $x = 2$, tj. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

Můžeme vyslovit tuto definici spojitosti funkce v bodě:

Definice 7. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a , je-li v tomto bodě definována a existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a platí-li současně $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

To znamená, že funkce je v bodě a spojitá tehdy, je-li v bodě a definována a jestliže se limita funkce v bodě a rovná funkční hodnotě v bodě a .

Je-li funkce spojitá v každém bodě nějakého intervalu, je spojitá v tomto intervalu.

Ukažme si smysl předcházejících úvah na několika příkladech.

Příklad 7. Máme určit $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3)$ a rozhodnout, zda je funkce $f(x) = 2x + 3$ v bodě $x = -1$ spojitá.

Zvolme libovolně okolí bodu -1 , každé x z tohoto okolí můžeme psát ve tvaru $x = -1 + h$, kde $h \neq 0$. Dosadíme-li do funkčního vzta-
hu $2x + 3$, dostaneme

$$2(-1 + h) + 3 = -2 + h + 3 = 1 + h.$$

Odtud vidíme, že pro $x \rightarrow -1$, tj. pro $h \rightarrow 0$ nabývá funkce $f(x)$ hodnot, které se stále méně liší od čísla 1, tj. $f(x) \rightarrow 1$. Můžeme tedy říci, že $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1$. Protože $f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$, je rovno $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ je funkce $f(x) = 2x + 3$ v bodě $x = -1$ spojitá.

Příklad 8. Určeme $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 11x + 6}{x - 3}$ a k $\varepsilon = 0,01$, vyhledejme příslušné δ . Dosadíme-li do funkčního předpisu $x = 3 + h$, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{(3 + h)^3 - 11(3 + h) + 6}{(3 + h) - 3} &= \frac{27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 33 - 11h + 6}{h} = \\ &= \frac{h^3 + 9h^2 + 16h}{h} = \frac{h(h^2 + 9h + 16)}{h} = h^2 + 9h + 16. \end{aligned}$$

Protože pro $x \rightarrow 3$, tj. pro $h \rightarrow 0$ je $h^2 + 9h + 16 \rightarrow 16$, je

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 11x + 6}{x - 3} = 16.$$

Abychom k $\varepsilon = 0,01$ našli příslušné δ , musíme vlastně řešit nerovnost

$$\left| \frac{x^3 - 11x + 6}{x - 3} - 16 \right| < 0,01.$$

Výpočet upravme takto:

$$\frac{x^3 - 11x + 6 - 16x + 48}{x - 3} = \frac{x^3 - 27x + 54}{x - 3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^3 - 27 - 27x + 81}{x - 3} = \frac{(x^3 - 3^3) - 27(x - 3)}{x - 3} = \\
&= \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 27(x - 3)}{x - 3} = \\
&= x^2 + 3x + 9 - 27 = x^2 + 3x - 18.
\end{aligned}$$

Je tedy

$$|x^2 + 3x - 18| < 0,01,$$

tj.

$$-0,01 < x^2 + 3x - 18 < 0,01.$$

Znamená to tedy řešit dvě nerovnosti

$$x^2 + 3x - 17,99 > 0 \text{ a } x^2 + 3x - 18,01 < 0,$$

které musí platit současně. Nerovnosti lze upravit dále takto:

$(x - 2,999)(x + 5,999) > 0$ a $(x - 3,001)(x + 6,001) < 0$, kde iracionální kořeny příslušných kvadratických rovnic jsou přibližně vyjádřeny desetinnými čísly.

Celkový výsledek je pak

$$-6,001 < x < -5,999 \text{ nebo } 2,999 < x < 3,001$$

Okolí bodu 3 má tedy šířku 0,002 čili hledané $\delta \doteq 0,001$.

P o z n á m k a. Limita funkce v bodě se dá počítat ještě jiným, kratším způsobem. Není však úkolem tohoto informativního článku podávat vyčerpávající výklad. Poučení najdou zájemci v každé učebnici matematické analýzy.

Abychom mohli počítat limity funkcí, uvedeme následující větu:

V ě t a 1. *Jestliže je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pak platí:*

- a) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kA$;
- b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B$;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;
- d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je $B \neq 0$

Uvedená tvrzení věty 1 nebudeme dokazovat.

Připamatujeme-li si souvislost mezi limitou funkce v bodě a spojitostí funkce v bodě, můžeme vyslovit větu o spojitých funkcích.

V ě t a 2. *Jestliže jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě a , pak jsou v bodě a spojité také funkce $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ a $\frac{f(x)}{g(x)}$; tato poslední však za předpokladu $g(a) \neq 0$.*

Se spojitými funkcemi se setkáváme v teorii a v technické praxi velmi často. V kapitole 1 jsme si uvedli některé základní funkce; byly to tyto funkce:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^n, & f(x) &= \sin x, & f(x) &= \operatorname{tg} x, \\ f(x) &= a^x, & f(x) &= \cos x, & f(x) &= \operatorname{cotg} x, \\ f(x) &= \log_a x. \end{aligned}$$

Pro tyto funkce bychom mohli dokázat větu:

V ě t a 3. *Základní funkce jsou spojité v každém intervalu, v němž jsou definovány.*

Tato věta se nám dobře hodí pro počítání limit proto, poněvadž podle definice spojitosti je limita funkce v bodě rovna funkční hodnotě v témže bodě.

P ř í k l a d 9. Určeme $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{x+2}{x-3} \right)$. Protože pro $x = 1$ je $x+1 \neq 0$ a také $x-3 \neq 0$, můžeme limitu počítat podle věty 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{x+2}{x-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} - \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x-3)} = \frac{2}{2} - \frac{3}{-2} = 1 + 1,5 = 2,5. \end{aligned}$$

P ř í k l a d 10. Vypočtème limitu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}) = \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a^2a^{n-3} + aa^{n-2} + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}. \end{aligned}$$

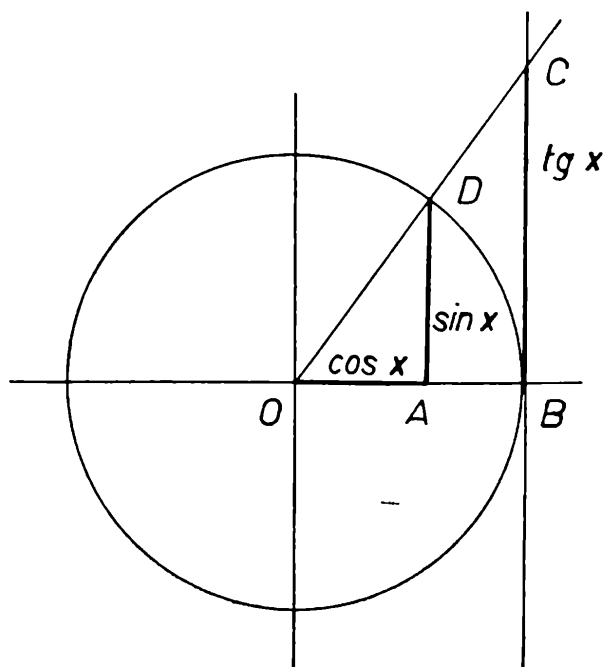
Abychom mohli vyšetřovat spojitost funkcí složitějších, než jsou funkce základní, uveďme si ještě větu o spojitosti složené funkce.

V ě t a 4. *Mějme složenou funkci $y = f(z)$, $z = g(x)$. Je-li funkce $z = g(x)$ spojitá v bodě x_0 a funkce $y = f(z)$ spojitá v bodě $z_0 = g(x_0)$, pak také funkce $y = f[g(x)]$ je spojitá v bodě x_0 .*

P ř í k l a d 11. Vyšetřme spojitost funkce $y = \cos(1 - x^2)$. Položme $y = \cos z$, $z = 1 - x^2$. Funkce $z = 1 - x^2$ je mnohočlen a je proto spojitá pro všechna x . Také funkce $y = \cos z$ je spojitá pro všechna z . Je tedy i daná funkce $y = \cos(1 - x^2)$ spojitá pro všechna x .

Příklad 12. Určeme body nespojitosti funkce $y = \cotg \frac{1}{x}$. Položme $y = \cotg z$, $z = \frac{1}{x}$. Funkce $z = \frac{1}{x}$ je spojitá pro všechna x kromě nuly. Funkce $y = \cotg z$ není spojitá v bodech $z_k = k\pi$, kde k je celé číslo (tj. 0; ± 1 ; ± 2 ; ...) Funkce $z = \frac{1}{x}$ nabývá hodnot $z_k = k\pi$ v bodech $x_k = \frac{1}{k\pi}$. Daná funkce $y = \cotg \frac{1}{x}$ není spojitá v bodě $x = 0$ a v bodech $x_k = \frac{1}{k\pi}$.

V dalších úvahách budeme potřebovat některé důležité limity, uvedeme si je proto bez důkazů již zde.



Obr. 17

Věta 5. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má limitu v bodě $x = 0$ a platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Sestrojme jednotkovou kružnici o středu O a zvolme $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (obr. 17).

Srovnávejme obsahy tří obrazců podle obr. 17:

1. Trojúhelník OAD má obsah $P_1 = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$.

2. Kruhová výseč OBD má obsah $P_2 = \frac{1}{2}x$.

3. Trojúhelník OBC má obsah $P_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Je zřejmé $P_1 \leq P_2 \leq P_3$, tj.

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Vynásobme tuto nerovnost číslem $\frac{2}{\sin x}$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

a přejděme k převráceným číslům

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x ,$$

čili psáno v obráceném pořadí

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

V poslední nerovnosti jsou tři funkce

$$g(x) = \cos x; f(x) = \frac{\sin x}{x}; h(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Pro limity funkcí $g(x)$ a $h(x)$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

a odtud usuzujeme, že také

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

V ě t a 6. *Posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentní a má za limitu číslo*

$$e = 2,718\,281\,828\,459 \quad \text{Platí tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Číslo e je základem tzv. *přirozených* čili *Napierových logaritmů*, které jsou definovány rovnicí (značíme $\lg$ na rozdíl od $\log$)

$$a = e^{\lg a}$$

S číslem e jste se již setkali, když jste probírali exponenciální funkci přirozenou, jež je dána rovnicí

$$y = e^x$$

V ě t a 7. *Funkce $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ má limitu v bodě $x = 0$ a platí*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

Ukažme si smysl předcházejících vět na příkladech.

P ř í k l a d 13. Vypočtěme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

Budeme počítat takto:

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Provedeme-li limitní přechod podle věty 1c, dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

Je tedy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$

P ř í k l a d 1 4. Máme určit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Danou funkci upravíme takto:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Provedeme-li limitní přechod, je zřejmé

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

P ř í k l a d 1 5. Určeme ještě $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$

Danou funkci nejprve upravíme:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \cdot \lg a} - 1}{x} = \lg a \cdot \frac{e^{x \cdot \lg a} - 1}{x \cdot \lg a}$$

Pak je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \lg a} - 1}{x \cdot \lg a} = \lg a \cdot 1 = \lg a.$$

Je tedy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a.$

Úlohy.

1. Určete následující limity: a) $\lim_{x \rightarrow -1} |x|$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x - 5}$

2. Vypočtete: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x-7} - \sqrt{x+1}}{x-8}$. (Návod. Rozšiřte zlomek $\frac{\sqrt{2x-7} - \sqrt{x+1}}{x-8}$ výrazem $\sqrt{2x-7} + \sqrt{x+1}$).

3. Určete $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^3 - 4x}$ (pokuste se rozložit čitatele a jmenovatele zlomku $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^3 - 4x}$ a pak krátit).

4. Vypočtete: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{5x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$;

5. Vypočtete tyto limity: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$.

6. Ve kterých bodech nejsou spojité tyto funkce: a) $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 - 3x}$;
b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$; c) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 1}$;
e) $f(x) = \cotg 2x$; f) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$; g) $f(x) = \frac{A}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}$
h) $f(x) = \frac{x - x^3}{1 - x^2}$

Výsledky.

1. a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 17. 2. a) -1 ; b) 6. 3. $-\frac{1}{2}$. 4. a) $-\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{2}$. 5. a) 3;
b) 1; c) $\frac{5}{4}$; d) $\frac{a}{b}$. 6. a) $\frac{2}{3}$; b) 2; 3; c) $x = 1$; d) Je def. pro všechna x ;
e) $k \frac{\pi}{2}$; f) $(2k + 1) \frac{\pi}{4}$; g) $(2k - 1) \frac{\pi}{4}$; h) $x = 1$; $x = -1$.

(Pokračování)

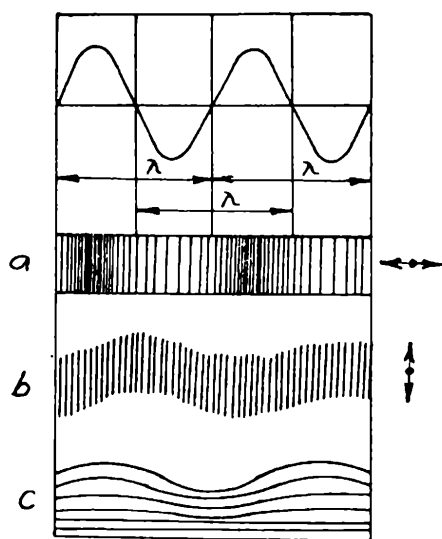
P e t r S t a n ě k, studující VUT, Brno:

Zkoušení materiálu zvukem a ultrazvukem

Článek pojednává o takové zkoušce materiálu, kdy k zjištění vnitřních vad nemusí dojít k porušení materiálu.

1. *Historický úvod.* První kdo přišel na myšlenku použití ultrazvuku pro kontrolu materiálu, byl sovětský fyzik Sokolov, který již r. 1929 pozoroval, že materiál s vnitřními vadami vykazuje značně horší propustnost ultrazvukových vln než materiál bez vady. V roce 1934 pak provedl praktické zkoušky.

Velký rozmach a rozvoj ultrazvukových metod nastal během druhé světové války a nezastavil se až do dneška.



Obr. 1. Vlny podélné (a), příčné (b) a povrchové (c).

2. *Princip metody.* Zkoušení materiálu ultrazvukem je založeno na známých vlastnostech ultrazvuku a to, že zvuková vlna postupuje materiálem s malou absorpcí a dále na odrazu ultrazvukových vln na rozhraní dvou prostředí. Jedno prostředí je materiál, druhé je vada v materiálu. Ze vzniklého zvukového stínu a z odraženého vlnění usuzujeme na polohu a velikost vady v materiálu.

3. *Teoretické základy.* Ke zkoušení materiálu ultrazvukem používáme několika druhů ultrazvukových vln. Jsou to vlny podélné, příčné a povrchové (obr. 1).

Podélné ultrazvukové vlny se šíří v látkách pevných, kapalných a plyných, kdežto příčné vlny se šíří jen v látkách pevných.

Použití těch, či oněch vln závisí zpravidla na tvaru zkoumaného předmětu a na místě kde chceme vadu zjistit, přičemž vadou rozumíme trhlinky, staženiny, zdvojení plechu apod.

Jako pro každé jiné vlnění platí i pro vlnění ultrazvukové základní vztah mezi délkou vlny λ , frekvencí ν , a rychlostí vlnění c :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Jelikož šíření ultrazvukových vln, jakožto mechanických kmitů je závislé na elastických vlastnostech materiálu, zavádíme proto pojem *akustický vlnový odpor* $\rho \cdot c$, kde ρ je spec. hmota (hustota) a c rychlost zvuku v prostředí.

Tento součin je pak charakteristický pro každé prostředí. Při průchodu ultrazvukových vln různými prostředími dochází na rozhraní těchto prostředí k odrazu a lomu. Část ultrazvukové energie prochází dál a část se jí odrazí a pro posouzení této okolnosti si zavádíme tzv. *součinitel odrazu*, který je definován vztahem:

$$R = \left(\frac{1 - m}{1 + m} \right)^2$$

kde

$$m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}$$

je poměr akustických odporů prostředí 1 a 2. Akustické odpory vad se hodně liší od okolního prostředí a proto se na jejich rozhraní odrazí téměř 100 % zvukové energie. Je-li $m = 1$ tzn., že se jedná o stejné akustické odpory, takže se žádná energie neodráží a tedy takové prostředí nelze indikovat. Akustické odpory $\rho \cdot c$ a rychlost podélných (c_L) a příčných (c_T) vln pro některé materiály jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1

Materiál	$c_L \cdot 10^{-5}$ cm/s	$c_T \cdot 10^{-5}$ cm/s	$\rho \cdot c \cdot 10^{-4}$ g/s cm ²	ρ g/cm ³
Ocel	5,85	3,23	450	7,7
Hliník	6,26	3,08	170	2,7
Měď	4,7	2,3	420	8,9
Olovo	2,16	0,7	250	11,4
Mosaz	3,8	2	310	8,1
Vzduch	0,33	—	0,004	0,0012

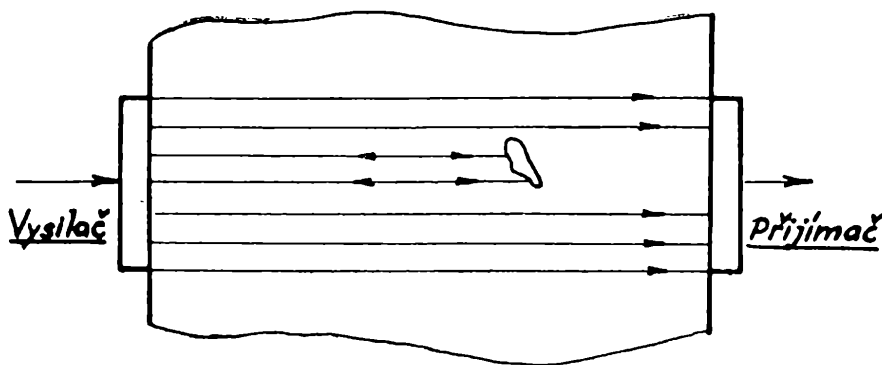
$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)} \cdot \frac{1}{(1 - 2\mu)}} \quad c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}};$$

E - modul pruž. v tahu; G - modul pruž. ve smyku; μ - Poissonova konstanta

Lom ultrazvukových vln na rozhraní dvou prostředí se řídí všeobecně známým *Snellovým zákonem*.

Při průchodu ultrazvukových vln materiálem dochází také ke ztrátě energie zvukových vln, což je zaviněno vnitřním třením kmitajících částic prostředí, lomem ultrazvukových vln na překážkách, jejichž rozměry jsou jen zlomkem délky vlny ($< \frac{\lambda}{2}$). Takovými překážkami mohou být např. zrna struktury a jelikož těchto zrn je hodně, velká část energie se rozptýlí uvnitř v materiálu. Rozptyl ultrazvukových vln závisí na velikosti frekvence. Čím je frekvence větší, tím je i rozptyl větší, což znamená, že ztráty jsou větší. S klesající frekvencí klesají i ztráty, ale i rozlišovací schopnost všech ultrazvukových metod a nelze zjistit vady malých rozměrů. Proto se musí frekvence volit taková, aby byla na hranici ještě přípustných ztrát energie.

4. *Zdroje ultrazvuku*. Ultrazvukové vlny pro ultrazvukové zkoušení materiálu získáme jednak užitím tzv. *magnetostrikce* nebo *piezoelektriny*.



Obr. 2. Metoda průchodová.

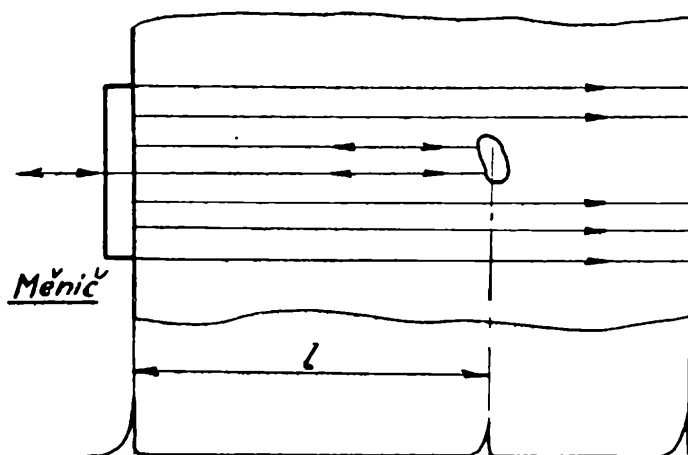
Magnetostrikce je jev, při kterém tyčinka z oceli, niklu nebo kobaltu mění v magnetickém poli svou délku nezávisle na směru pole. Jestliže je pak takováto tyčinka v magnetickém poli střídavé intenzity, mění se její délka periodicky. Když bude perioda vlastních kmitů souhlasit s periodou změny magnetického pole, dosáhne se maximální amplitudy. V případě, že jsou rozměry tyčinky malé, jest její kmitočet velký a tedy je i velká frekvence pole a nastane vyzařování ultrazvukových vln.

Jiným a daleko lepším zdrojem ultrazvuku jsou křemenné destičky. Křemen je totiž jedna z látek, u kterých se vyskytuje piezoelektrický jev. Tento jev vznikne tehdy, je-li krystal určité látky mechanicky deformován. Na povrchu tohoto krystalu se tvoří elektrické náboje. Tento děj je vratný, tzn., že když přivedeme na povrch krystalu elektrický náboj, nastane deformace krystalu, která je úměrná velikosti dodaného náboje. Náboj se přivádí na povrch destičky, kterou určitým způsobem získáme z krystalu, přes kovové desky, které připojíme ke zdroji elektrického napětí,

Jestliže přivádíme střídavé napětí, mění se tloušťka destičky periodicky. I zde se maximálních změn dosáhne, když frekvence napětí bude ve shodě s frekvencí vlastních kmitů destičky. Při určitých rozměrech destičky padnou vzniklé kmity do oboru ultrazvukových kmitů.

Přístroje na uvedených principech založené se nazývají *magnetostrikční* a *piezoelektrické generátory*.

5. *Metody zkoušení ultrazvukem.* *Metoda průchodová* (obr. 2) je metoda srovnávací, poněvadž srovnáváme množství prošlé zvukové energie pro materiál bez vady a s vadou. Za vadou totiž vzniká tzv. ultrazvukový stín, takže množství zvukové energie přicházející na přijímač je menší, než u materiálu bez vady. Křemenná destička přijímací sondy se rozkmitá a náboje vzniklé tímto rozkmitáním se registrují v měřicích přístrojích na ukazateli, který bývá doplněn optickým (barevná světla), případně akustickým (vysílaný tón) záznamem. Ultrazvukové vlny se vysílají buď spojitě nebo ve tvaru impulsů.



Obr. 3. Metoda odrazová.

Metoda odrazová (obr. 3) je nejpoužívanější metoda ultrazvukové defektoskopie. Její podstata spočívá v tom, že do zkoušeného předmětu se vysílají krátké ultrazvukové impulsy, které se odrážejí jednak na vadě v materiálu, jednak na povrchu předmětu. Délka impulsů je 10^{-6} s. Odražené vlny se vrátí buď, na tentýž měnič nebo na druhý měnič; pak mluvíme o jednosondovém nebo dvousondovém provozu. Jako indikátoru se užívá katodové trubice.

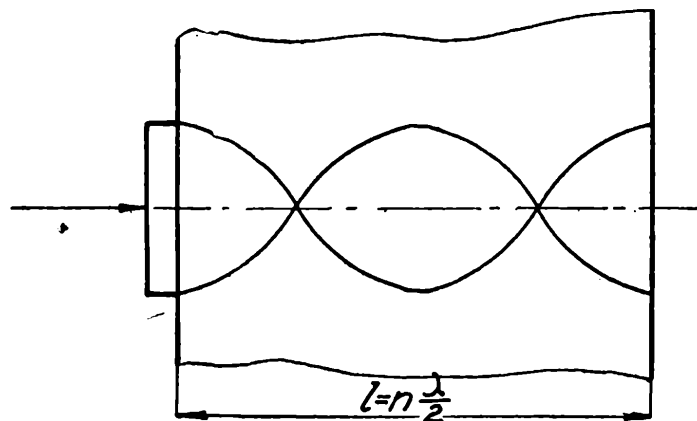
Dobu t , kterou urazí ultrazvukový paprsek než se zase vrátí k měniči můžeme vyjádřit vztahem:

$$t = \frac{2l}{c},$$

kde je c rychlost ultrazvukových vln v materiálu.

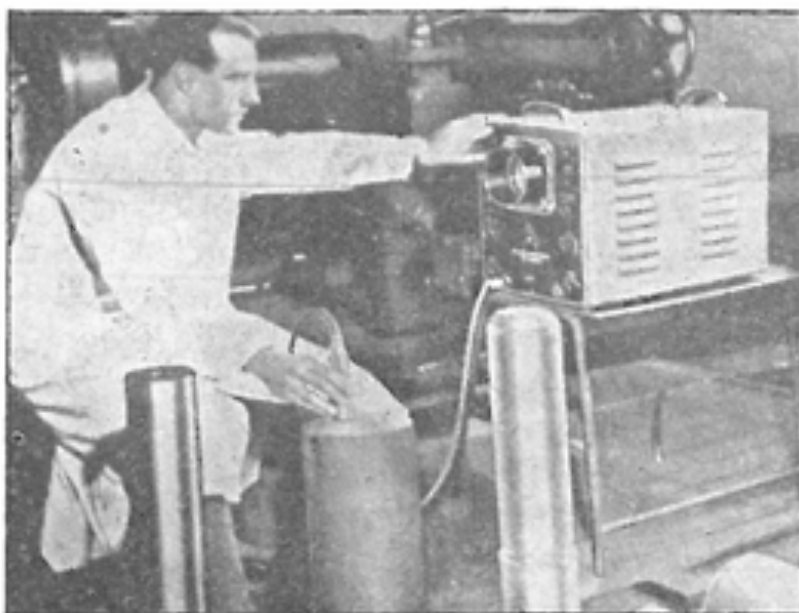
Tento jednoduchý vztah je podkladem pro určení polohy vady v materiálu.

M e t o d a r e z o n a n ě n í (obr. 4). Při této metodě se do zkoušeného předmětu vysílají ultrazvukové vlny, jejichž frekvence se buď ručně nebo automaticky mění. Když tloušťka zkoušeného předmětu l se rovná celému násobku poloviční délky vlny, utvoří se stojatá ultrazvuková vlna a tehdy se do materiálu dodává minimální množství



Obr. 4. Metoda rezonanční.

zvukové energie (materiál rezonuje). Toto minimální množství vysílané energie se indikuje buď oscilografem, nebo akusticky (sluchátky). Ustálený tón ve sluchátkách je charakteristický pro dobrý materiál. Zjištěná frekvence a známá rychlost c je nám podkladem pro určení tloušťky předmětu, nebo vhodně orientované vady, která musí být rovnoběžná s povrchem např. u zdvojení plechů.

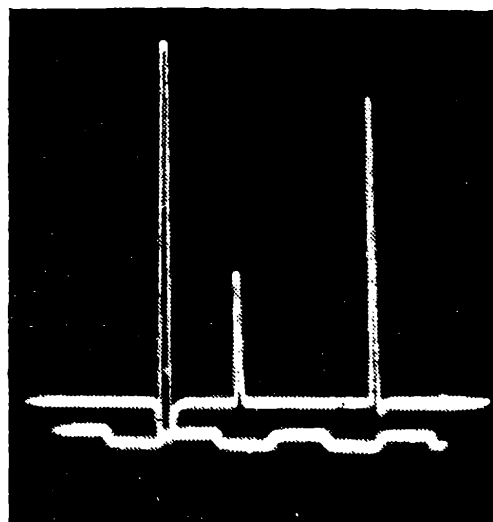


Obr. 5. Defektoskop UID 03 při provozu.

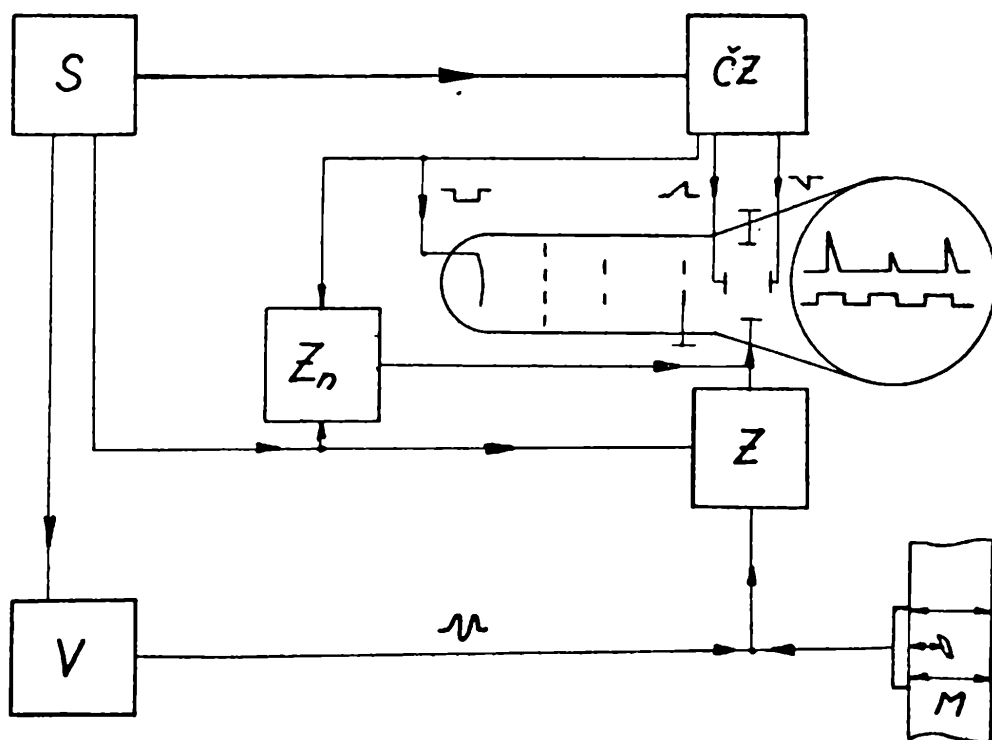
6. *Ultrazvukový impulsový defektoskop UID 03.* Ultrazvukový impulsový defektoskop UID 03 je československým výrobkem vyvinutým ve SVÚTT (Státní výzkumný ústav tepelné techniky) v Praze (obr. 5).

Defektoskop je určen pro kontrolu materiálu pomocí ultrazvukových impulsů vysílaných piezoelektrickým elementem. Impulsy se odrážejí od povrchu materiálu jakož i od jeho vnitřních vad, vracejí se na piezoelektrický element, který je transformuje na impulsy napěťové. Tyto impulsy jsou zesíleny a zobrazeny na stínítku indikační obrazovky. Hloubka materiálu se odečte podle časových značek (obr. 6). Přístroj může pracovat s jednou nebo se dvěma sondami a tudíž se používá jak pro metodu průchodovou tak i odrazovou. Hlavní jeho použití je však pro metodu odrazovou, která je citlivější.

U přístrojů podobné konstrukce je důležité znát tzv. „mrtvou zónu“, což jest určitá hloubka pod povrchem (sondou), ve které nelze vadu zjistit. Velikost této zóny je určena trváním vysílaného ultrazvukového impulsu. Po tuto dobu nemůže totiž defektoskop přijímat impulsy od-



Obr. 6. Poruchový impuls s časovými značkami.



Obr. 7. Blokové schéma impulsního ultrazvukového defektoskopu.

ražené od vad materiálu nebo jeho povrchu. Tato minimální hloubka se také řídí frekvencí ultrazvuku. U defektoskopu UID 03 je „mrtvá zóna“ při 5 MHz $4 \div 5$ mm (počítáno pro ocelový materiál a podélné

vlny). Velikost „mrtvé zóny“ bývá u přístrojů podobné konstrukce od několika mm až maximálně do 30 mm. V poslední době byl na základě zkušeností s přístrojem UID 03 vyvinut ještě dokonalejší přístroj, který má označení UID 04. Tento přístroj má podstatně menší hmotu (24 proti 32 kg) a rozměry, má větší jas obrazovky a další zlepšení.

Blokové schéma impulsního ultrazvukového defektoskopu je znázorněno na obr. 7.

Synchronizátor *S* jednak spouští periodicky v určité frekvenci vysílač *V* a jednak střídavě otvírá koncový stupeň zesilovače *Z* a zdroj časových značek Z_n , a dále rovněž spouští zdroj časové základny *ČZ*, který je připojen na destičky pro vodorovné vychylování. K vysílači *V* je připojen elektroakustický měnič, který transformuje vysokofrekvenční elektrické impulsy v impulsy ultrazvukové. Při nižších frekvencích ultrazvuku a silnějších součástech se používá delších impulsů - vysílá se větší energie. Trvání vysílaných impulsů je nastavitelné. Odražené ultrazvukové impulsy se přijímají na elektroakustickém měniči, který je opět transformuje v impulsy napěťové a zesilují se v zesilovači *Z*, jehož výstup je připojen na destičky pro svislé vychylování. Používaná indikační obrazovka je sestavena na principu vychylování elektronového paprsku v elektrickém poli. Její psací rychlost musí být dostatečná, aby impulsy trvající 10^{-6} s měly dostatečnou svítivost.

7. *Pokyny pro zkoušení.* Pro zkoušení ultrazvukem je důležité jaká je jakost povrchu materiálu a jaké se použije vazebné prostředí pro zprostředkování převodu ultrazvukové energie ze sondy do kontrolovaného materiálu. Čím je povrch jakostnější, tím je možné zjistit menší vady nebo dokonce i jednotlivá zrna struktury materiálu. Na jakosti povrchu také závisí použití vazebného prostředí. Používá se řídký strojní olej pro jakostní povrchy a hustý olej nebo vaselina pro hrubé povrchy.

8. *Zkouška zvukem.* Zkouška zvukem je velmi jednoduchý a laciný způsob kontroly materiálu. Do zkoušeného předmětu se uhodí kladívkem a podle získaného zvukového efektu se usuzuje na jakost předmětu. U materiálu dobrého bude získaný zvukový efekt jasný a čistý, kdežto u vadné součástky, kde jsou např. trhlinky, se dosáhne nečistého zvuku. Takto se běžně zkouší nákolky železničních souprav.

9. *Závěr.* Zkoušení materiálu ultrazvukem v litém stavu už je mnohem obtížnější, poněvadž dochází k velkému rozptylu ultrazvukové energie vlivem dendritické krystalizace a vycezenin, jako faktorů tuhnutí kovu, jakož i další nepříznivé jevy. Těmito okolnostmi se značně zmenšuje mezní tloušťka zkoušeného materiálu. Zkoušení materiálu ultrazvukem klade na pracovníka, který zkoušku provádí velké nároky na kvalifikaci jak po stránce teoretické tak i praktické, poněvadž zjišťujeme, že v materiálu jsou vady, ovšem tam, kde indikace jsou méně výrazné, mnohdy nevíme, zda máme materiál zmetkovat či nikoliv.

Tedy před výzkumem stojí velký a závažný úkol, určit ještě dovolené

indikace, pro ten či onen druh materiálu, které by byly ještě přípustné pro dobrou funkci součástí.

Závěrem je třeba jen říci, že ultrazvukové metody zkoušení materiálu se nesmí podceňovat, ovšem na druhé straně se nesmí zase přeceňovat, protože tak jako i jiné metody zkoušení materiálu mají své specifické výhody a nevýhody pro ten či onen druh a způsob zkoušení.

In ž. L a d i s l a v S m r ž, ÚN, SMS, Praha.

Základní normály v elektrotechnice

(Dokončení)

Druhým základním normálem v elektrotechnice je normál elektrického odporu, tvořící nejdůležitější část všech elektrických měřicích zařízení.

Roku 1860 navrhl jako jednotku odporu W. S i e m e n s odpor rtuťového sloupce délky 1 metr a průřezu 1 mm². Na Mezinárodní konferenci v Londýně r. 1908 byla tato mezinárodní jednotka definována jako odpor rtuťového sloupce délky 106,300 cm a průřezu 1 mm² za normálních podmínek. Od té doby byla jednotka odporu dlouho stanovena těmito rtuťovými normály, i když práce s nimi byla velmi obtížná.

Dnes se definuje absolutní jednotka odporu jinými elektrickými veličinami (indukčností a frekvencí) a pro praktické používání slouží výhradně kovové normály.

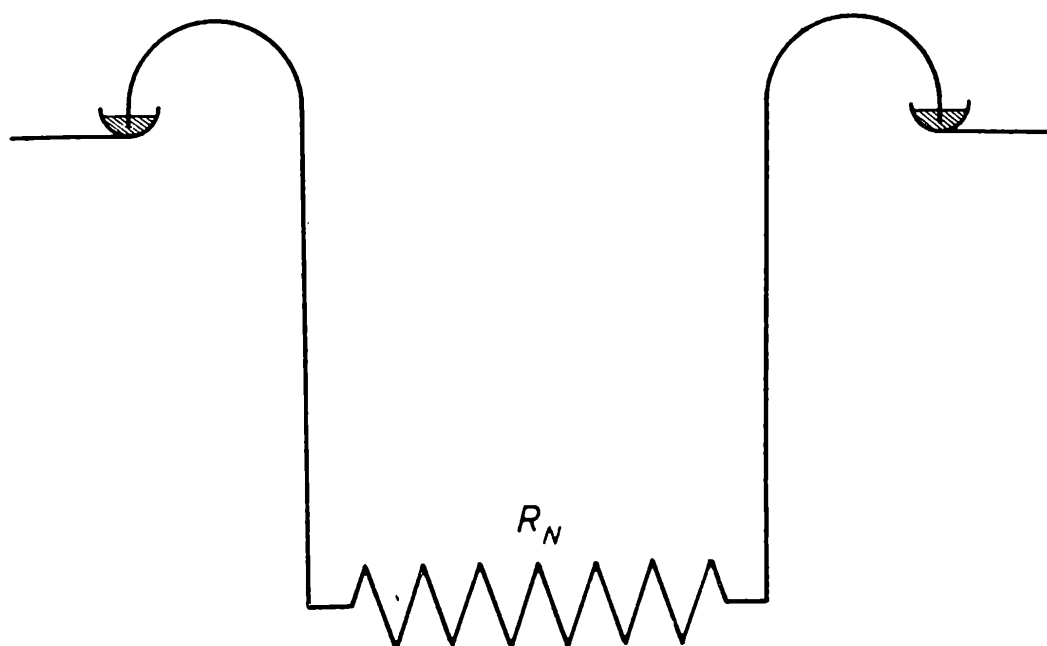
Na normály odporu jsou kladeny tyto základní požadavky:

1. Co nejmenší teplotní koeficient.
2. Vysoká časová stálost hodnoty odporu.
3. Co nejmenší možnost vzniku termoelektrických napětí při styku odporového materiálu s jinými kovy.

Prozatím nejlépe splňuje tyto podmínky manganin v obvyklém složení 86 % Cu, 12 % Mn a 2 % Ni. Jeho měrný odpor je dostatečně veliký, přibližně 0,43 Ω mm²/m, má malý teplotní koeficient a vykazuje velmi malé termoelektrické napětí ve styku s mědí, asi 1 μV na 1° C.

Jako většina slitin, jeví i manganin určitou časovou nestálost. Kdyby se použilo k výrobě odporových normálů čerstvě vyrobeného manganinu bez jakékoli další přípravy, měnila by se odporová hodnota velmi dlouho a zcela nepravidelně. Proto se provádí jeho umělé stárnutí při vysoké teplotě a jeho vhodné mechanické zpracování. Pro dosažení úplné regenerace a dostatečné homogenizace, potřebné k získání vnitřní stability slitiny, zdá se být optimální teplotou při umělém stárnutí 375° až 400° C. Vyšší teploty způsobují již vypařování manganu a vyžadovaly by zvláštních opatření při procesu umělého stárnutí.

Má-li odporový materiál normálu přímý styk se vzduchem, projevuje se u něho vliv vlhkosti, způsobující malou změnu jeho odporu. Systematickým studiem tohoto zjevu byla zjištěna příčina v hygroskopičnosti šelakového laku, jímž byly chráněny odporové cívky. Absorbací vody ze vzduchu nabývá lak na objemu, prodlužuje tím odporový drát a odpor normálu tak roste. Za nepříznivých okolností může tato změna délky odporového drátu přestoupit i mez pružnosti materiálu a tím může zůstat změna odporu trvalá. Proto se v poslední době používá uzavřené konstrukce odporových normálů, u nichž je odporová cívka uzavřena hermeticky v nádobce naplněné buď vhodným druhem oleje, nebo neutrálním plynem (např. dusíkem).



Obr. 4

Teplotní koeficient manganinu je malý, ale při přesném měření nemůže být zanedbána změna odporu normálu v závislosti na teplotě. K její definici užívá se pro méně přesná měření lineárního vztahu

$$R_{\vartheta} = a + b\vartheta, \quad (3)$$

případně pro teploty v okolí 20°C v úpravě

$$R_{\vartheta} = R_{20} [1 + \alpha (\vartheta - 20)], \quad (4)$$

pro náročnější měření pak vztahu kvadratického

$$R_{\vartheta} = a + b\vartheta + c\vartheta^2, \quad (5)$$

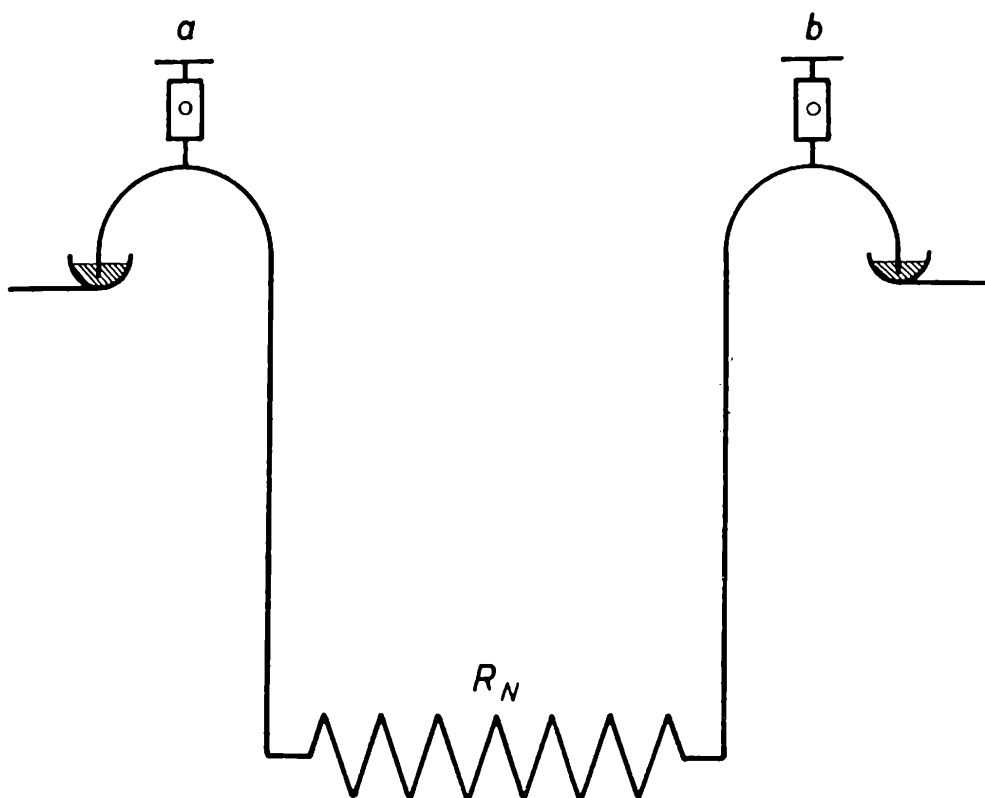
nebo pro teploty kolem 20° vztahu

$$R_{\vartheta} = R_{20} [1 + \alpha (\vartheta - 20) + \beta (\vartheta - 20)^2], \quad (6)$$

kde b , c , α , β jsou vesměs teplotní koeficienty, které musí být určeny měřením odporu za různých přesně definovaných teplot, a je pak hodnota odporu při 0°C ,

Konstruktivně lze odporové normály rozdělit na dvě hlavní skupiny, a to na odpory bez potenciálních svorek a odpory s potenciálními svorkami.

Prvý druh (obr. 4) má hodnotu odporu definovanou na koncích přívodních ramen. Tyto normály dovolují rychlou výměnu při měření a tvoření různých kombinací. Ramena musí být ukončena rovnou a dobře amalgamovanou plochou. Jejich odpor je obsažen v celkovém odporu normálu a závisí tedy i na výšce rtuti v nádobkách připojovacích kontaktů. Při malých hodnotách odporu nedá se tento přídavný odpor zanedbat, i když je řádu několika desettisícin ohmu. Poněvadž přívodní ramena jsou měděná, s velkým teplotním koeficientem, a ne-



Obr. 5

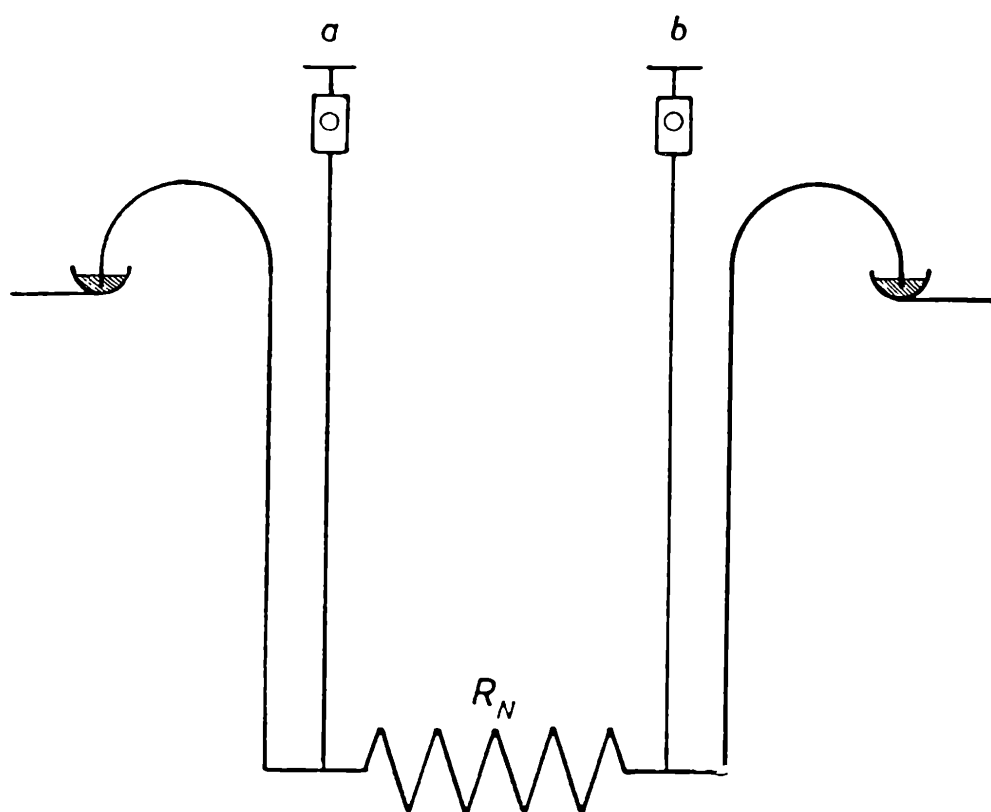
jsou ponořena v lázni termostatu, vznikají rozdílem teplot stejné chyby jako u teploměrů s vyčnívajícím rtuťovým sloupcem nad prostředí, jehož teplota se měří.

Odpory s potenciálními svorkami jsou mnohem přesnější a mohou být pokládány za prvořadě normály. Pokud jsou však potenciální svorky a, b umístěny na měděných ramenech (obr. 5), objevuje se zde podobný vliv rozdílu teploty ramen a odporové cívky, jako u prvního druhu normálů.

Proto je třeba, aby potenciální svorky byly připojeny přímo na konce odporové cívky B_n (obr. 6). To platí zvláště pro malé hodnoty odporů. Zde je jmenovitá hodnota odporu definována na koncích odporové cívky. Proto se především hodí pro ony měřicí metody, u nichž je měření odporu převedeno na měření úbytku napětí na jeho svorkách.

Je jisté, že by čisté kovy, především pak vzácné kovy, např. platina, byly výhodnějším materiálem pro odporové normály, poněvadž by měly neomezenou časovou stálost. Také první odporové normály, ještě před rokem 1860, byly hotoveny z čistých kovů. Překážkou je však jejich vysoký teplotní koeficient. Má-li být dosažena přesnost 1 mikroohmu u manganinových normálů, postačí znalost teploty na $1/100^\circ \text{C}$. U normálů z čistých kovů, jejichž teplotní koeficient je asi $4 \cdot 10^{-2}/1^\circ \text{C}$, bylo by třeba měřit teplotu pro dosažení stejné přesnosti na $4/10\,000^\circ \text{C}$, což není prakticky možné.

Proto byly hledány jiné slitiny, které by vykázaly lepší elektrické vlastnosti než má manganin. Především vedla k tomu snaha snížit



Obr. 6

teplotní koeficient odporu. Tak Linde a Thomas navrhli použít jako odporového materiálu slitin vzácných kovů. Thomas určil jako nejvýhodnější slitinu zlato-chrom, a to s 1,90 až 2,05 % chromu. Podle pokusů z poslední doby zdá se být nejprůzračnější obsah chromu 2,1 %. Nová slitina vykázala vysokou odporovou stálost ihned po skončení procesu umělého stárnutí. Specifický odpor slitiny je $0,33 \, \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$, termoelektrické napětí vůči mědi je asi $7 \, \mu\text{V}/1^\circ \text{C}$. Při náležitém termickém i mechanickém zpracování slitiny se dosáhlo prakticky nulového teplotního koeficientu.

I když zkušenosti se slitinou zlato-chrom byly dobré, převládá dnes názor, že manganin vykazuje nejlepší časovou stálost ze všech dosud známých odporových slitin. Podle mínění pracovníků Mezinárodního

úřadu pro míry a váhy v Paříži, není účelné hledat nový odporový materiál, který by nahradil manganin, ale je třeba podrobně prozkoumat vlastnosti manganinu a jiných slitin Cu-Mn a definovat co nejpřesněji jejich časový vývoj.

Studium těchto slitin s různým přídavkem křemíku, cínu, železa a germania dalo prozatím tyto výsledky:

1. Byl stanoven vliv přídavných látek a vliv mechanického i termického zpracování slitiny na elektrické vlastnosti a stabilitu manganinu. Na základě toho byla navržena slitina, jejíž složení zdá se být nejvýhodnější Mn 12 %, Ni 2 %, Fe 0,25 %, Si 0,1 %, zbytek Cu.

2. Elektrické vlastnosti slitin Cu-Mn, obsahující přídavek křemíku, cínu a germania, jsou velmi blízké vlastnostem manganinu. Podle poměru přimíšenin dá se dosáhnout kladného, nulového nebo záporného koeficientu teplotního a prakticky lineárního vztahu mezi teplotou a odporem. Zjistilo se, že slitiny, obsahující germanium, jsou zvláště výhodné pro realizaci odporových etalonů.

Dnešní měřicí technika klade stále větší požadavky na přesnost měření a proto se hledají nové cesty k nejpřesnějšímu definování základních elektrických veličin a k jejich nejspolehlivější realizaci.

Fyzikální olympiáda

J a r o s l a v P o s p í š í l, Olomouc

Informace o úlohách třetího kola I. ročníku Fyzikální olympiády

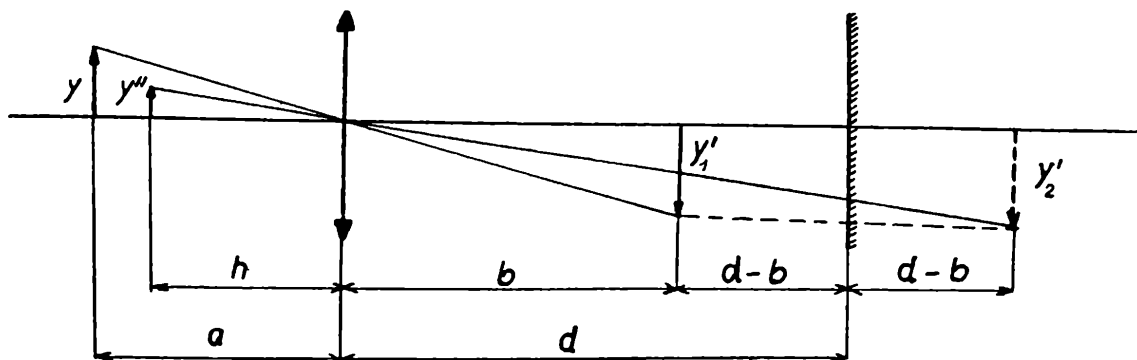
Vítězové krajských kol I. ročníku Fyzikální olympiády kategorie A byli pozváni na den 30. dubna 1960 do Prahy k účasti na celostátním kole této soutěže. V tomto kole bylo celkem 27 žáků úspěšných, z nichž 20 nejlepších bylo prohlášeno vítězi I. ročníku Fyzikální olympiády. Vítězové byli odměněni cenami.

Pro informaci čtenářů uvádíme texty zadaných úloh, které s příslušným řešením připravil ÚVFO.

Ú l o h a č. 1. Umístíme-li předmět velikosti y do vzdálenosti $a = 10$ cm před spojnou čočku a za čočku postavíme do vzdálenosti $d = 20$ cm od ní rovinné zrcadlo kolmo k optické ose čočky, vytvoří se na té straně čočky, na které se nachází předmět, skutečný obraz předmětu ve vzdálenosti $h = 6$ cm od čočky. Vypočítejte a) ohniskovou vzdálenost čočky, b) zvětšení obrazu.

Řešení. Čočka vytvoří obraz y'_1 předmětu y ve vzdálenosti b od čočky. Obraz vytvořený rovinným zrcadlem označme y'_2 . Obraz y' se stává předmětem pro spojnou čočku, která jej zobrazí v obraz y'' . Nastává tedy dvojí zobrazení čočkou. Pro každé zobrazení platí čočková zobrazovací rovnice. Dohodneme se na tom, že všechny vzdálenosti budeme počítat od středu čočky a že předmětové vzdálenosti budou kladné (záporné), bude-li předmět před (za) čočkou; obrazové vzdálenosti budou kladné (záporné), bude-li obraz za (před) čočkou.

Bude-li rozmístění předmětu, čočky a zrcadla podle obr. 1, pak podle znaménkové dohody platí: $a = 10$ cm, $h = -6$ cm.



Obr. 1

a) Pro první zobrazení platí čočková zobrazovací rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

z čehož

$$\frac{1}{b} = \frac{a-f}{af}$$

a

$$b = \frac{af}{a-f}$$

Protože $a = 10$ cm, dostaneme

$$b = \frac{10f}{10-f} \text{ [cm]}$$

Předmětovou vzdálenost pro druhé zobrazení čočkou označme p .

Z obr. 1 je vidět, že $p = 2d - b$. Dosazením za $b = \frac{10f}{10-f}$ a $d = 20$

a po úpravě dostaneme

$$p = \frac{50(8-f)}{10-f} \text{ [cm]}.$$

Pro druhé zobrazení v souladu se znaménkovou dohodou bude předmětová vzdálenost $p = -\frac{50(8-f)}{10-f}$ a čočková zobrazovací rovnice bude mít tvar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{h} = -\frac{1}{f}$$

Po dosazení za $p = -\frac{50(8-f)}{10-f}$ a $h = -6$ a po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici ve tvaru

$$7f^2 - 95f + 300 = 0.$$

Tato rovnice má kořeny

$$f_1 = \frac{60}{7}, f_2 = 5.$$

První kořen $f_1 = \frac{60}{7}$ dává $b_1 = 60$ [cm]. Kořen f_1 nevyhovuje, protože skutečný obraz y'_1 předmětu by se nacházel až za rovinným zrcadlem. Druhý kořen $f_2 = 5$ dává $b_2 = 10$ [cm], což vyhovuje, neboť skutečný obraz y'_1 vytvořený čočkou se nachází před zrcadlem.

Kořen $f_2 = 5$ cm je hledanou ohniskovou vzdáleností čočky.

b) Zvětšení je dáno vztahem

$$Z = \frac{y''}{y}.$$

Pro výpočet si do tohoto vztahu zavedeme vzdálenosti předmětu a obrazů od čočky a využijeme přitom rovnosti $y'_1 = y'_2 = y'$

$$Z = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = \left(-\frac{|h|}{|2d-b|}\right) \cdot \left(-\frac{|b|}{|a|}\right) = \frac{|b|h|}{|a(2d-b)|}$$

Znaménka mínus u poměrů vzdáleností plynou geometricky z toho, že předměty a obrazy jsou na opačných stranách optické osy.

Po dosazení dostaneme

$$Z = \frac{1}{5}.$$

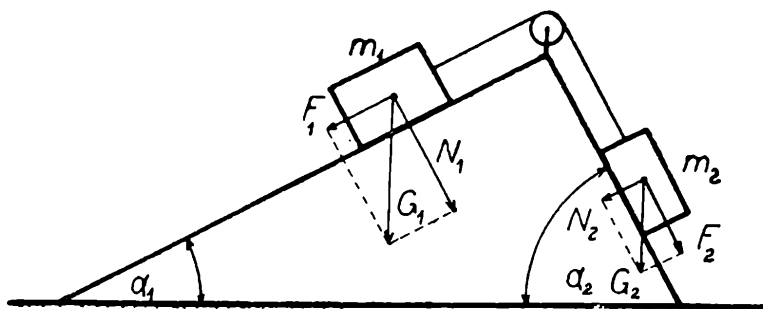
Protože platí $|Z| < 1$ a $Z > 0$, je skutečný obraz y'' , vytvořený spojnou čočkou, zmenšený a přímý.

Při opačném rozmístění předmětu, čočky, zrcadla, než je na obr. 1 a při chodu paprsku zprava doleva, je řešení analogické s předcházejícím. Také v tomto případě bude hledaná ohnisková délka spoje čočky $f_2 = 5$ cm a zvětšení $Z = \frac{1}{5}$.

Úloha č. 2. Dvě tělesa hmot m_1 a m_2 jsou přivázána k niti a položena na dvě šikmé roviny vzájemně k sobě kolmé, které svírají s vodorovnou rovinou úhly $\alpha_1 = 30^\circ$ a $\alpha_2 = 60^\circ$. Těleso hmoty m_1 leží na nakloněné rovině s úhlem α_1 , druhé je umístěno na nakloněné rovině s úhlem α_2 . Nit je vedena přes kladku, jejíž osa je rovnoběžná s průsečnicí obou rovin tak, že obě její části jsou rovnoběžné s příslušnými nakloněnými rovinami. Koeficient f tření na obou rovinách je stejný a má hodnotu $f = 0,1$.

A. Určete směr a zrychlení pohybu soustavy obou těles, jestliže $m_1 = m_2$.

B. Vyšetřete, jak velký musí být poměr $\frac{m_1}{m_2}$, aby se soustava obou těles pohybovala směrem dolů po nakloněné rovině a) s úhlem $\alpha_1 = 30^\circ$ b) s úhlem $\alpha_2 = 60^\circ$. Uvažujte i síly tření. Hmotu kladky i nitě zanedbejte. Za gravitační zrychlení dosazujte $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 2

Řešení. Předpokládáme, že těleso hmoty m_1 , které má váhu $G_1 = m_1 \cdot g$, leží na nakloněné rovině s úhlem α_1 , druhé těleso váhy $G_2 = m_2 g$ leží na nakloněné rovině s úhlem α_2 . Sílu tření na nakloněné rovině se sklonem α_1 označme T_1 a pohybovou složku váhy označme F_1 . Podobně na nakloněné rovině se sklonem α_2 označíme tření písmenem T_2 a pohybovou složku váhy písmenem F_2 .

Podle obr. 2 platí

$$F_1 = m_1 g \sin \alpha_1, F_2 = m_2 g \sin \alpha_2;$$

$$N_1 = m_1 g \cdot \cos \alpha_1, N_2 = m_2 g \cos \alpha_2, \quad (1a)$$

kde N_1 a N_2 jsou kolmé tlakové síly na nakloněné roviny.

Pro síly tření platí

$$T_1 = f \cdot N_1, T_2 = f \cdot N_2. \quad (1b)$$

A. Jestliže $m_1 = m_2 = m$, pohybuje se soustava těles směrem síly F_2 . Podle II. Newtonova zákona platí

$$F_2 - F_1 - T_1 - T_2 = 2ma, \quad (2)$$

Hledané zrychlení

$$a = \frac{F_2 - F_1 - T_1 - T_2}{2m}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahu (3) za síly vztahy (1a) a (1b), obdržíme

$$a = \frac{mg}{2m} [\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - f (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)].$$

Po zkrácení a vyčíslení dostaneme

$$a = \frac{10}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 0,1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right],$$

čili

$$a = 1,15 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2} \text{]}.$$

Soustava se bude pohybovat směrem síly F_2 a bude mít zrychlení $a = 1,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

B. a) Aby se soustava pohybovala směrem síly F_1 , musí platit

$$F_1 - F_2 - T_1 - T_2 > 0,$$

čili

$$m_1 g (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - m_2 g (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) > 0,$$

z čehož plyne, že

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1}.$$

Tedy

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{3} + 0,1}{1 - 0,1 \sqrt{3}},$$

tj.

$$\frac{m_1}{m_2} > 2,216,$$

čili

$$m_1 > 2,216 m_2.$$

Aby se soustava těles pohybovala směrem dolů po nakloněné rovině se sklonem α_1 , musí být m_1 větší než $2,216 m_2$.

b) Aby se soustava těles pohybovala směrem síly F_2 , musí platit

$$F_2 - F_1 - T_1 - T_2 > 0,$$

čili

$$m_2 g (\sin \alpha_2 - f \cos \alpha_2) - m_1 g (\sin \alpha_1 + f \cos \alpha_1) > 0 .$$

Z toho

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{\sin \alpha_2 - f \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + f \cos \alpha_1} ,$$

tedy

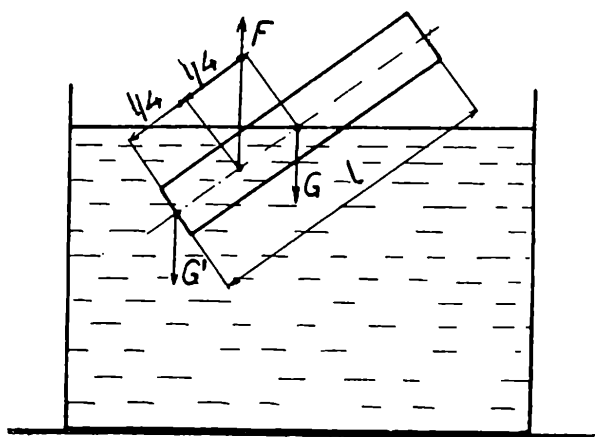
$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{\sqrt{3} - 0,1}{1 + 0,1 \sqrt{3}} ,$$

to je

$$\frac{m_1}{m_2} < 1,391 ,$$

čili

$$m_1 < 1,391 m_2 .$$



Obr. 3

Aby se soustava pohybovala s měrem dolů po nakloněné rovině se sklonem α_2 , musí být m_1 menší než $1,391 m_2$.

Úloha č. 3. Stejnorodá tyč všude stejného průřezu je na jednom konci zatížena závažím váhy G' tak, že plove v šikmé poloze ve vodě hustoty $\rho_0 = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a je ponořena právě polovinou své délky.

a) Jaký je poměr váhy G tyče a váhy G' závaží?

b) Jaká je hustota ρ materiálu, z něhož je tyč zhotovena?

Objem závaží G' je tak malý, že jeho vztlak ve vodě můžeme zanedbat.

Řešení. Ponořenou tyč délky l si můžeme představit jako jednozvratnou páku, jejíž osa otáčení je v těžišti tyče (obr. 3). Tyč je v rovnováze, to znamená, že podle momentové věty platí

$$- F \frac{l}{4} \cos \alpha + G' \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 ,$$

čili

$$- F \frac{l}{4} + G' \frac{l}{2} = 0 , \tag{1}$$

při čemž F je vztlak vody, G' váha závaží, $\frac{l}{4}$ a $\frac{l}{2}$ vzdálenosti půso-

bišť sil F a G' od osy otáčení, α je úhel, který svírá tyč s vodní hladinou. Vektorová přímka váhy tyče G prochází osou otáčení tyče, nemá proto váha tyče otáčivého účinku.

Ze vztahu (1) obdržíme

$$F = 2 G' \quad (2)$$

Plove-li pevné těleso na povrchu kapaliny, pak se jeho váha rovná váze kapaliny vytlačené jeho ponořenou částí. Platí tedy

$$F = G + G' \quad (3)$$

neboť vztlak se podle Archimedova zákona rovná váze vytlačené kapaliny. Z rovnic (2) a (3) vychází

$$G = G'$$

Platí tedy také, že

$$F = 2 G$$

Nyní můžeme odpovědět na otázky z textu úlohy:

$$\text{a) } \frac{G}{G'} = 1 .$$

Poměr váhy tyče a váhy závaží je roven jedné.

b) Při určení hustoty ρ materiálu tyče použijeme Archimedova zákona

$$F = S \frac{l}{2} \rho_0$$

kde S je průřez tyče.

Protože také platí $F = 2 G$, lze psát

$$S \frac{l}{2} \rho_0 = 2 S l \rho ,$$

z čehož

$$\rho = \frac{\rho_0}{4} . \quad (4)$$

Vyčíslíme-li vzorec (4), dostaneme

$$\rho = 0,25 [\text{g cm}^{-3}] .$$

Hustota materiálu tyče je $\rho = 0,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Ú l o h a č. 4. Měření odporu — praktická úloha. Odpor spotřebiče se často počítá užitím Ohmova zákona z naměřených hodnot napětí U a proudu J tak, že se napětí zjišťuje voltmetrem připojeným buď a) přímo na svorky spotřebiče, nebo b) na svorky zdroje.

A. Provedte měření a vypočítejte odpor daného spotřebiče přímo z hod-

not naměřeným způsobem a) i b). Vyjdou-li vám dvě různé hodnoty odporu R_1 a R_2 . Žádná z nich není správná. Vysvětlete?

Návod k měření:

1. Načrtněte zapojení obvodu pro oba uvedené způsoby měření.
2. Zapojte obvod nejprve podle jednoho z těchto náčrtků.
3. Při připojení zdroje změřte napětí U a proud J .

Naměřené hodnoty si zaznamenejte.

4. Obdobně podle odstavců 2. a 3. návodu provedte měření druhým způsobem.

5. Vypočítejte odpory R_1 a R_2 .

B. Velikost X odporu daného spotřebiče se dá vypočítat přesněji, přihlédneme-li k odporům ampérmetru a voltmetru, které vám pro použité rozsahy budou zděleny. Provedte výpočet.

C. Která z hodnot odporů R_1 a R_2 vypočítaných v úloze odstavce A je bližší hodnotě X určené podle odstavce B? Vysvětlete proč.

Ř e š e n í: Naměřené hodnoty proudu a napětí v případě a) označíme J_1 a U_1 , v případě b) J_2 a U_2 .

A. Odpory R_1 a R_2 vypočítané z naměřených hodnot jsou v případě

$$\text{a) } R_1 = \frac{U_1}{J_1}, \text{ v případě b) } R_2 = \frac{U_2}{J_2}.$$

Správné hodnoty odporů jsou v případě a) $X = \frac{U_1}{J_x}$ (obr. 4a),

v případě b) $X = \frac{U_x}{J_2}$ (obr. 4b), kde J_x je proud protékající odporem X

v případě a), U_x je napětí na odporu X v případě b).

Protože $J_x < J_1$, je $R_1 < X$; protože $U_x < U_2$, je $X < R_2$.

Platí tedy

$$R_1 < X < R_2.$$

B. V případě a) je

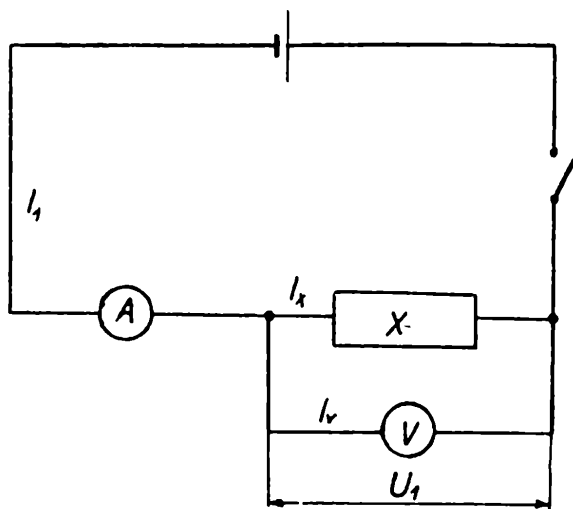
$$X = \frac{U_1}{J_x} = \frac{U_1}{J_1 - J_v} = \frac{U_1}{J_1 - \frac{U_1}{R_v}} = \frac{U_1 R_v}{J_1 R_v - U_1}.$$

V případě b) bude

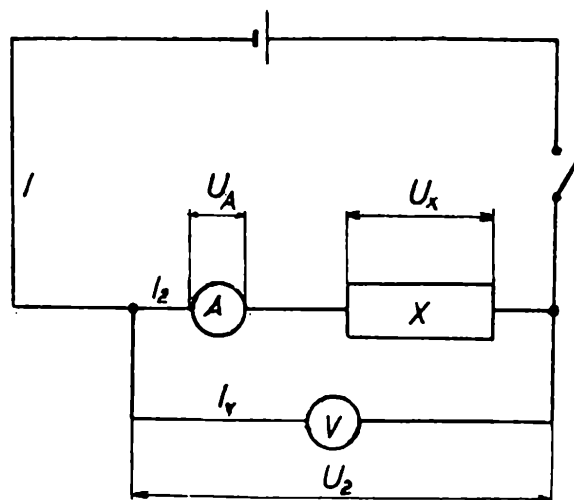
$$X = \frac{U_x}{J_2} = \frac{U_2 - U_A}{J_2} = \frac{U_2}{J_2} - R_A.$$

J_v je proud protékající voltmetrem V , R_v je odpor voltmetru při daném rozsahu voltmetru v případě a), U_A je napětí na ampérmetru A a R_A je odpor ampérmetru v případě b).

C. Jestliže R_v je mnohem větší než X , pak je J_v zanedbatelně malé vůči J_x , a proto je J_x téměř rovno J_1 . Potom je R_1 bližší k X než R_2 . Způsob a) tedy lépe vyhovuje pro měření malých odporů X .



Obr. 4a



Obr. 4b

Jestliže U_A [je] zanedbatelně malé vůči U_x , je U_x téměř rovno U_2 . Pak je R_2 bližší k X než R_1 . Způsob b) tedy lépe vyhovuje při měření velkých odporů X . Je-li totiž X mnohem větší než R_A , je také U_x mnohem větší než U_A .

Matematické zábavy

Řešení úlohy „Matka - syn“

z roč. 38, str. 333

V den desátých narozenin svého syna pravila matka:
„Když ses narodil, nebylo mi ještě 25 let. Za jak dlouho nejdříve se bude tvůj věk psát týmiž ciframi jako můj, avšak v obráceném pořadí?“

Řešil Emil Kraemer, žák JSŠ v Praze 6:

Matčino stáří při synově narození je x , matčino stáří v hledaném případě označme $10m + n$,

synovo stáří ve stejnou dobu je pak $10n + m$,

kde zřejmě $m > n$;

z předchozího plyne $x + 10n + m = 10m + n$,

$$x = 9(m - n) \quad (1)$$

Protože m, n jsou přirozená čísla, musí být x dělitelno 9 a přitom podle znění úlohy menší než 25. Této podmínce vyhovují hodnoty $x_1 = 9$, $x_2 = 18$, z nichž první je prakticky nemožná.

Po dosazení $x = 18$ do (1) dostáváme

$$m - n = 2 \quad (2)$$

Z rovnice (2) vyplývají pro stáří matky a syna tyto dvojice:

matka 20 31 42 53 64

syn 2 13 24 35 46

Synovým desátým narozeninám je nejbližší dvojice 31,13, tedy za 3 roky bude se synův věk psát týmiž ciframi jako matčin, ale v obráceném pořadí.

Správné řešení zaslala též s. *Eva Marunová, učitelka JSŠ v Kaplici.*

Řešení úlohy „Co způsobí jedna žena“

z roč. 38, str. 426

V podniku pracují muži a ženy. Kdyby jedna žena odešla do důchodu, bylo by celkové procento žen právě o jedno větší než kdyby byla nahrazena mužem. Kolik mužů a kolik žen má nyní podnik?

Řešil Dr. Miloslav Hlaváček, Náchod

Původní počet mužů je x , počet žen je y .

Po odchodu jedné ženy, není-li nahrazena mužem, činí zbývající ženy

$$\frac{y - 1}{x + y - 1} \cdot 100 \% ;$$

je-li nahrazena mužem, pak $\frac{y - 1}{x + y} \cdot 100 \%$ z celého obsazenstva.

Podle podmínky
$$\frac{y - 1}{x + y - 1} \cdot 100 = \frac{y - 1}{x + y} \cdot 100 + 1 ,$$

po úpravě $100(y - 1) = (x + y)(x + y - 1)$.

Protože činitel pravé strany $x + y - 1$ je větší než $y - 1$, musí zase druhý činitel $x + y$ být menší než 100. Čísla $x + y, x + y - 1$ jsou nesoudělná, proto činitelé sta, 4 a 25, musí být v nich obsaženy tak, že 25 je obsaženo v jednom a 4 v druhém z nich.

Jsou dvě možnosti:

I. $100(y - 1) = 76.75$, z čehož $y_1 = 58$, $x_1 = 18$,

II. $100(y - 1) = 25.24$, z čehož $y_2 = 7$, $x_2 = 18$.

Další správná řešení zaslali:

Vladimír Regner, abit. JŠŠ v Mladé Boleslavi, *Vladimír Wäter*, abit. JŠŠ v Nepomuku a *Josef Košíř*, abit. JŠŠ v Praze 10.

Částečná řešení zaslali:

Ivan Žembery, abit. JŠŠ v Bratislavě, Novohradská, *Antonín Vrba*, abit. JŠŠ v Přešticích, *Milada Dvořáková*, Brandýs nad L. a inž. *Jan Rataj*, Plzeň.

O. S.

Dr. Rudolf Plajner:

Řešení Fibonacciovy úlohy

B. A. KORDĚMSKIJ ožívuje ve své nedávno vydané knize „*Matematické prostoviky*“ (Mladá fronta, Praha 1957) na str. 276. úkol, který byl dán v roce 1225 skupinou matematiků znamenitému počtáři Leonardu Pisánskému, zvanému FIBONACCI (čti fibonači). Zněl takto: Najděte úplný čtverec, který zůstane úplným čtvercem, ať jej zvětšíme nebo zmenšíme o 5. Autor knihy uvádí, že FIBONACCI takové číslo po krátkém přemýšlení našel. Byl to zlomek

$$\frac{1\,681}{144}, \text{ čili } \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

neboť

$$\begin{aligned} \frac{1\,681}{144} - 5 &= \frac{961}{144}, \text{ jinak } \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \\ \frac{1\,681}{144} + 5 &= \frac{2\,401}{144}, \text{ čili } \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \end{aligned}$$

V dalším je pak proveden jistý způsob řešení, který podle autorových slov nahrazuje různá řešení algebraická, vedoucí v nejlepším případě k rovnici čtvrtého stupně s dvěma neznámými.

Pokusím se podat rozbor Fibonacciova úkolu, vhodný pro zájmové kroužky matematiky, z něhož vyplyne i jednoduché řešení.

a) Dokažme nejprve, že v oboru přirozených čísel nemá naše úkola řešení.

Kdyby hledané číslo x bylo číslo přirozené, pak by i

$$(x^2 - 5) = a^2, x^2, (x^2 + 5) = b^2$$

musela být čísla přirozená. Bylo by třeba vyhovět současně dvěma podmínkám

$$x^2 - a^2 = 5; b^2 - x^2 = 5.$$

Prvé podmínce $x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a) = 5$ 1 bylo by lze vyhovět jediným způsobem: $x = 3; a = 2$. Druhé podmínce

$$b^2 - x^2 = (b + x) (b - x) = 5 \quad 1$$

lze vyhovět v oboru přirozených čísel taktéž jediným způsobem $b = 3; x = 2$.

Poněvadž hledané číslo x nemůže mít současně dvě různé hodnoty, nemá Fibonacciova úloha řešení v oboru přirozených čísel. Totéž platí v oboru čísel celých.

b) Obrátíme tedy pozornost k číslům racionálním a budeme předpokládat, že hledané číslo x je v základním tvaru, tj. $x = \frac{m}{n}$ Podle znění úlohy musí se

$$\frac{m^2}{n^2} - 5 = \frac{m^2 - 5n^2}{n^2}, \frac{m^2}{n^2} + 5 = \frac{m^2 + 5n^2}{n^2}$$

čitatelé zlomků rovnat čtvercům přirozených čísel, takže

$$m^2 - 5n^2 = d^2, \quad m^2 + 5n^2 = h^2.$$

Čísla m, n, d, h , jsou celá čísla.

c) Z elementární teorie čísel jsou známy tyto tři věty:

1. Součet dvou čísel, souměrných k přirozenému číslu k , je $(k + q) + (k - q) = 2k$ vždy číslo sudé.
2. Rozdíl dvou čísel, souměrných k přirozenému číslu k , je $(k + q) - (k - q) = 2q$ rovněž číslo sudé.
3. Rozdíl čtverců dvou čísel, souměrných k přirozenému číslu k , je $(k + q)^2 - (k - q)^2 = 4kq$ toliknásobkem čísla $4k$, o kolik jednotek jsou souměrná čísla vzdálena od svého aritmetického průměru.

Vybereme-li proto z přirozených čísel taková, která budou souměrná k číslům tvaru a^2 (např. 9; 16; 81 atd.), tj. čísla $(a^2 + q)$ a $(a^2 - q)$, bude rozdíl jejich čtverců

$$(a^2 + q)^2 - (a^2 - q)^2 = (4a^2) \cdot q \quad (0)$$

vždy násobkem úplného čtverce.

d) Komu je tato vlastnost známa, ví, že má-li podle Fibonacciovy úlohy být číslo $m^2 - 5n^2 = d^2$, čili

$$m^2 - d^2 = 5n^2,$$

musí považovat čísla **m** a **d** za souměrná čísla, vzdálená o 5 jednotek od jejich středního členu, jímž bude podle (0) číslo $a^2 = \frac{n^2}{4}$

Můžeme tedy psát

$$m = a^2 + 5, d = a^2 - 5. \quad (1)$$

Jak se snadno přesvědčíme, je takových řešení nekonečné množství:

$n^2 = a^2$	m	d	$m^2 - d^2 = 5n^2$
4.9	14	4	$196 - 16 = 5.36$
4.16	21	11	$441 - 121 = 5.64$
4.25	30	20	$900 - 400 = 5.100$
4.36	41	31	$1681 - 961 = 5.144$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$(a^2 + 5)^2 - (a^2 - 5)^2 =$
$4 \cdot a^2$	$a^2 + 5$	$a^2 - 5$	$= 5 \cdot 4a^2$

e) Aby byla splněna i druhá podmínka Fibonacciova úkolu, musí též součet $(m^2 + 5n^2)$ dávat čtverec přirozeného čísla, tj.

$$m^2 + 5n^2 = h^2, \text{ čili}$$

$$h^2 - m^2 = 5n^2.$$

Správné řešení celého úkolu proto žádá současné splnění obou podmínek

$$m^2 - d^2 = (m + d) \cdot (m - d) = 5 \cdot 4a^2 \quad (2)$$

$$h^2 - m^2 = (h + m) \cdot (h - m) = 5 \cdot 4a^2 \quad (3)$$

Poněvadž $h > d$, je též

$$h + m > m + d. \quad (4)$$

Podíl rovnic (2) a (3) dá

$$\frac{(m + d) \cdot (m - d)}{(h + m) \cdot (h - m)} = 1 \quad (5)$$

$$\text{Z nerovnosti (4) vyplývá } \frac{m + d}{h + m} < 1.$$

Tato nerovnost spojená s rovnicí (5) dává

$$h - m < m - d. \quad (6)$$

Jak jsme uvedli ve vztazích (1), různí se čísla **m** a **d** o deset jednotek. Víme též z odst. c), že rozdíl souměrných čísel $(h - m)$ musí být číslo su-

dé, splňující podmínku $h - m < 10$. Upravíme-li podíl rovnic (2) a (3)

$$\frac{(m + d) \cdot (m - d)}{(h + m) \cdot (h - m)} = \frac{5 \cdot 4a^2}{5 \cdot 4a^2}$$

tak, aby činiteli $(m - d)$ na levé straně odpovídala na pravé straně jeho skutečná hodnota 10, pak můžeme s přihlédnutím k podmínkám (4) a (6) psát

$$\frac{(m + d) \cdot (m - d)}{(h + m) \cdot (h - m)} = \frac{2a^2 \cdot 10}{\frac{5}{2}a^2 \cdot 8}.$$

Z této úpravy je pak očividně zřejmé, že

$$h - m = 8, \quad \frac{m + d}{2} = a^2, \quad \frac{h + m}{2} = \frac{5}{4} a^2$$

Na základě tohoto výsledku můžeme nyní prohlásit, že rozdíl čtverců čísel **m**, **d**, vzdálených od středního členu **a**² o 5 jednotek, musí být roven rozdílu čtverců čísel **h** a **m**, vzdálených od jejich středního členu (aritmetického průměru) o 4 jednotky. Musí tedy střední člen vyšší dvojice čísel být o 9 jednotek větší než číslo **a**².

Vyjádríme-li tuto podmínku matematicky, obdržíme

$$\begin{aligned} m^2 - d^2 &= h^2 - m^2 \\ 5 \cdot 4a^2 &= 4 \cdot 4(a^2 + 9) \\ 5a^2 &= 4a^2 + 36 \\ a^2 &= 36, \end{aligned}$$

nebo ještě stručněji,

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}a^2 &= a^2 + 9 \\ \frac{1}{4}a^2 &= 9 \\ a^2 &= 36. \end{aligned}$$

Známe-li **a**², je tím Fibonacciův úkol vyřešen, neboť $n^2 = 4a^2 = 144$; $n = 12$; $m = a^2 + 5 = 41$; $d = a^2 - 5 = 31$; $h = m + 8 = 49$.

f) **Závěr.** Při věhlasu Fibonacciově je zcela jisté, že ovládal shora uvedené vlastnosti přirozených čísel. Předložený úkol se mu proto redukoval na tuto elementární úlohu:

Najděte čtverec, jehož pětinasobek se rovná čtyřnásobku téhož čtverce zvětšeného o devět.

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 4(x^2 + 9) \\ x^2 &= 36. \end{aligned}$$

Rovnici vyřešil Fibonacci jistě z paměti, čímž získal klíč k snadnému určení hledaných tří čísel. Lze proto souhlasit s poznámkou, uvedenou v úvodu tohoto příspěvku, že Fibonacci takové číslo po krátkém přemýšlení opravdu našel.

Jednota československých matematiků a fyziků (JČMF)

vypisuje k stému výročí svého založení

Veřejnou literární soutěž

jejímž cílem je získat články, náměty a scénáře, které by mohly být v rámci propagační kampaně jubilejního roku 1962 uveřejněny v matematických, fyzikálních, technických, učitelských, mládežnických, vědeckopopulárních a jiných časopisech, v týdenících a denním tisku, nebo použity v rozhlasu, televizi a filmu.

Do soutěže se přijímají dosud neuveřejněné rukopisy, které zpracovávají ve formě článků pro tisk nebo námětů a scénářů pro rozhlas, televizi a film:

1. Některý časový nebo tematický nebo místní úsek z dějin JČMF zejména po roce 1918, případně též ve formě osobní vzpomínky.

2. Význam matematických a fyzikálních věd a jejich užití pro rozvoj techniky nebo pro světový názor nebo pro kulturu, a to na základě konkrétních příkladů ze života.

Účast na soutěži není omezena a k účasti se zvou vedle členů JČMF zejména také učitelé, inženýři, technici a pracovníci výrobních odvětví, studenti vysokých škol a žáci všeobecně vzdělávacích a odborných škol a učilišť.

Rukopisy došlé do soutěže posoudí komise odborníků a přijaté rukopisy budou postupně užity v propagační kampani v r. 1962 podle své povahy. Autoři takto použitých rukopisů obdrží obvyklý autorský honorář a autoři deseti vybraných rukopisů obdrží vedle toho peněžité odměny ve výši 200 až 1500 Kčs. Rukopisy v soutěži nepřijaté se autorům vrátí.

Strojem psané rukopisy, jejichž rozsah nemá u článků pro tisk přesáhnout 10 normalizovaných stránek, je třeba zaslat ve dvojím vyhotovení spolu se jménem a adresou autora do 30. září 1961 na adresu: *Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha 1, Malá strana, Maltézské nám. 1.*

Český překlad Wienerovy Kybernetiky

Na sklonku srpna roku 1960 přednášel v Praze americký matematik *Norbert Wiener*, jehož jméno je spojeno s počátkem nového vědního oboru — *kybernetiky*. V poslední době čítáme často v denním tisku i v odborných časopisech o řízených pochodech v živé hmotě, společnosti, automatizovaných výrobních zřízeních a matematických strojích. Většina těchto článků bývá však bohužel jen přibližně informativní a mnohé se dokonce zaměřují jen na senzačnost výsledků.

Řada našich odborných, technických a vědeckých pracovníků přivítala proto jistě s povděkem český překlad dnes už klasické knihy N. Wienera, který pod názvem „*Kybernetika neboli řízení a sdělování v živých organismech a strojích*“ vyšel u nás o minulých prázdninách.

Název „Kybernetika“ zní na první pohled trochu podivně. N. Wiener a jeho spolupracovníci jej odvodili z řeckého slova *κυβερνητης*, což znamená „kormidelník“. Více než 10 let pracovala tato skupina v oboru regulační a sdělovací teorie ve strojích a v živých organismech a r. 1948 vyšlo první vydání Wienerovy knihy.

Osm kapitol, které tento spis obsahuje, předpokládá znalosti z diferenciálního a integrálního počtu a nebude tedy proto pravděpodobně přístupnou četbou pro všechny mladé čtenáře našeho časopisu. Na Wienerův spis zde však přesto chceme upozornit, a to zejména proto, že za přečtení stojí už obsáhlý úvod k této monografii, který na více než dvaceti stránkách popisuje historii vzniku kybernetiky během druhé světové války. Některé Wienerovy myšlenky z tohoto úvodu mají platnost daleko obecnější, než aby byly jen pouhou předmluvou speciální knihy. Jsou to zejména otázky specializace v různých vědních oborech a otázky spolupráce několika pracovníků z různých vědních oborů. Při dnešním stupni rozvoje vědy není totiž prakticky vůbec možné, aby se jednotlivec bez spolupráce s jinými odborníky dopracoval k nějakému důležitému objevu. Ze zkušenosti je známo, že někteří mladí lidé — studenti středoškolští i vysokoškolští — jsou nakloněni připisovat prameny vědeckých objevů spíše individuální genialitě než právě vysoce užitečné spolupráci vědeckých kolektivů.

Český překlad Wienerovy knihy vydalo (v poměrně malém nákladu 4200 výtisků) Státní nakladatelství technické literatury v Praze. Knihu přeložili O. Hanš, dr. J. Wehle a dr. Zd. Wünsch. Vázaný výtisk má 152 stran a stojí 8,90 Kčs.

C Sc. Jiří Sedláček

Jiří Sedláček: Nebojte se matematiky

Čs. společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí vydala ve Státním nakladatelství technické literatury jako 17. svazek polytechnické knihovny v řadě Co máte vědět, knížku kandidáta matematickofyzikálních věd *Jiřího Sedláčka* s názvem *Nebojte se matematiky*. Brožovaný výtisk o 172 stranách s 68 obrázky je za 5,50 Kčs.

Publikace je určena žákům a studentům našich středních škol, řešitelům matematické olympiády, učitelům osmiletých i jedenáctiletých středních škol, jakož i zájemcům o matematiku.

Již názvy kapitol: a) začínáme hrou; b) názor a klam; c) bavíme se o číslech; d) o mnohoúhelnících; e) geometrie bez pravítka; f) matematická paradoxa a hlavolamy; g) slovní úlohy s polytechnickým námětem, ukazují na mnohostrannost a zábavnost obsahu. Známé klasické úlohy, tzv. rekreační matematiky se tu střídají se zábavnými úkoly, jež přináší dnešní život. Autor pěkně ukazuje, že řada matematických hříček má hlubší význam a že některé zpočátku „zábavné“ úlohy vedou mnohdy k závažným problémům, jejichž řešení dává vznik celým novým odvětvím matematiky.

Je nesprávný názor mladých lidí, že matematika je samoučelná, že je to zbytečné zlo, které je překážkou jejich vstupu na vysokou školu. Matematika je naopak mohutným nástrojem, který usnadňuje práci v nejrůznějších oborech lidského podnikání, od činnosti inženýra, ekonomy až po práci zemědělce a lékaře.

Mladého čtenáře uvádíme systematicky do tajů matematiky zpravidla tím, že jej seznamujeme s jejími základy vědecky přesnou, ale bohužel často strohou formou. Právě tento suchý sloh a stručnost odradí nejvíce mladých adeptů matematiky. Proto se autor snaží nejprve lehkým slohem ukázat čtenáři na některé problémy, které nemají zdánlivě s matematikou nic společného, u snazších z nich podává řešení, u složitějších se spokojuje s udáním výsledků. Teprve potom vysvětluje, jak se z této „zábavy“ tvoří matematický problém nebo celé odvětví (např. topologie.)

Sedláčkova knížka se bude jistě velmi líbit a plně uspokojí čtenáře, kteří k její poutavé četbě mohou přistoupit opravdu s minimálním množstvím matematických znalostí.

S některými partiemi Sedláčkovy knížky seznámíme čtenáře na obálce Rozhledů.

Doc. O. Setzer

E. Aisberg: Škola televize

Naše kniha je překladem známého francouzského spisovatele technických knih, která vyšla v roce 1956 pod názvem: „Televize?... nic jednoduššího“ a byla od té doby přeložena do angličtiny, maďarštiny, němčiny, polštiny a španělštiny a je překládána do řady dalších jazyků. Česky byla vydána proto, že u nás nebyla kniha podobných vlastností k dispozici a zdá se, že plným právem, protože je to jedna z nejlepších populárních knih z tohoto oboru ve světové literatuře. Při tempu, kterým se u nás zavádění a využívání televize šíří, je pak velmi žádoucí, aby se zejména naše mládež se základy televize seznámila a k tomu jí kniha dává velmi dobrou příležitost. Kniha je dokladem toho, že první základní poznatky, jichž je třeba ke zvládnutí běžné televizní techniky a k úspěšné práci s televizními přístroji, je možno získat i bez hlubších matematických a podrobnějších fyzikálních znalostí, jež si pak ti, kteří toho budou jednou potřebovat, vždy mohou doplnit.

Velkou předností knihy je její svérázný, v technické literatuře málo obvyklý způsob výkladu ve formě rozhovoru mladého zájemce o televizi, který v ní získal nejběžnější praktické zkušenosti, se starším přítelem, televizním odborníkem. Oba přátelé uzavrou družbu a probírají společně postupně principy televize od jejího vysílání až k příjmu televizního obrazu, při čemž nezapomenou ani na dnes již aktuální otázku barevné televize, její podstatu a na její perspektivy. Vlastní výklad je při tom podán jasným a zajímavým způsobem. Oba přátelé nejen probírají principy televize, ale ke snadnějšímu pochopení některých jejích zařízení také konstruují generátor pilových kmitů a další přístroje, které jim slouží k poznání různých obvodů televizního přijímače a jež si může [podle uvedených údajů sestavit i čtenář. K pochopení a trvalejšímu zapamatování funkce různých zařízení autor často užívá podivuhodných přirovnání ze světa zvířat, lidí i ze světa techniky, která značně zvyšují názornost výkladu, a doprovází je často ještě vtipnými obrázky a karikaturami, které tento účinek ještě zvyšují.

Překlad knihy je bezvadný. Překladatel při tom přenáší děj do našeho prostředí, takže šíření televizního signálu v hornatém terénu vykládá na příkladě strýce Bořivoje žijícího v hlubokém šumavském údolí. Také při popisu televizních přístrojů popisuje naše televizní přijímače TESLA 4001 a MÁNES.

Kniha představuje opravdu zajímavou a při tom zároveň i poučnou četbu, v níž naleznou mnohé podněty ti, kdož již o televizi něco vědí, i ti, kdož o ní chtějí získat první informace. Vydalo ji Státní nakladatelství technické literatury v Praze v létě 1960. Má 252 stran, 385 technických obrázků a karikatur a vázaný výtisk stojí 16,80 Kčs.

K. Š o l e r

Šestibarevné krychle majora Mac Mahona

Ukázka z knížky J i ř í h o S e d l á č k a „Nebojte se matematiky“ (str. 27).

Hra majora Mac Mahona se skládá z třiceti stejně velkých krychlí, jejichž stěny jsou natřeny šesti barvami: každá krychle má jednu stěnu bílou, druhou modrou, třetí zelenou, čtvrtou žlutou, pátou červenou a šestou černou. Přitom se každé dvě krychle z této hry liší od sebe barvou stěn. Odmyslíme-li si totiž, že krychle jsou z nepropustného materiálu - čili předpokládáme-li, že jde jen o geometrické útvary - je možno každé dvě z těchto třiceti krychlí vhodným posunutím ztotožnit; při tomto posunutí však není možno dosáhnout, aby se spolu shodovaly barvy příslušných stěn.

Proč obsahuje hra právě třicet krychlí? Protože šest barev je možno právě třiceti způsoby rozvrhnout na stěny krychle tak, aby se každá dvě zbarvení od sebe lišila. Ověřme si to touto úvahou: Představme si krychli, která stojí před námi na stole. Některá ze šesti stěn musí být bílá (dejme tomu, že je to stěna spodní). Pro zbarvení protější (vrchní) stěny máme tedy pět možností (může být modrá, zelená, žlutá, červená, nebo černá). Zvolíme-li jednu z těchto pěti barev, zbývají ke zbarvení dalších čtyř („pobočných“) stěn ještě čtyři možnosti. Označíme-li tyto čtyři barvy A, B, C, D, zbývá rozhodnout, kolika způsoby je můžeme nanést na čtyři pobočné stěny. Některá z těchto stěn musí být pokryta barvou A; krychli můžeme na stole umístit tak, že barva A je na její přední stěně. Pro zbarvení zadní stěny jsou pak tři možnosti (barva B nebo C nebo D). Rozhodneme-li se pro některou z nich, zbývají ještě dvě poslední barvy X, Y a dvě pobočné stěny krychle (pravá a levá). Zbarvíme tedy buď pravou stěnu barvou X a levou stěnu barvou Y, nebo obráceně (máme celkem dvě možnosti).

Shrneme-li celou úvahu, vidíme, že jsme nejprve počítali s pěti možnostmi, z nichž každá se rozvětňuje na tři případy a každý z nich opět na dvě možná zbarvení. Počet různých zbarvení je tedy roven $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, jak jsme už shora uvedli.

Se soustavou třiceti Mac Mahonových krychlí je možno hrát různé hry, z nichž zde upozorníme na jednu, která je nejznámější.

Z třiceti krychlí zvolíme libovolně jednu, která se nazývá předloha. Ze zbývajících 29 krychlí máme vybrat osm a z nich složit velkou krychli obarvenou tak, jak je zbarvená předloha.

Nežádá-li se nic více, je úkol poměrně lehký. Mac Mahon však připojil ještě další požadavky na stavbu krychle z osmi krychlí základních. Žádal, aby se při skládání dotýkaly vždycky jen stěny stejně zbarvené. Má-li např. jedna ze základních krychlí horní stěnu bílou a klademe-li na ni další krychli, smí být dolní stěna této krychle opět pouze bílá.

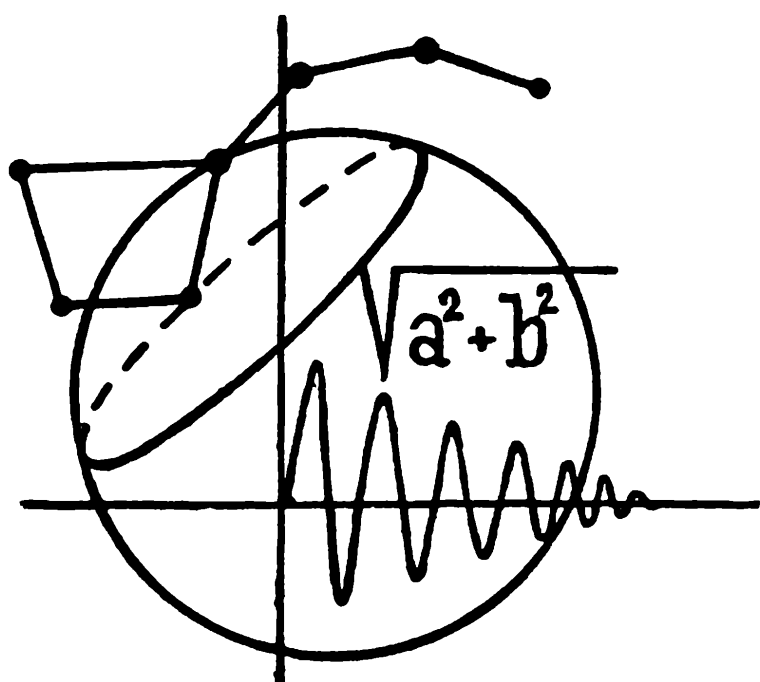
Je vidět, že jde o hru, k jejímuž pochopení nepotřebujeme žádné školské znalosti z matematiky. Byla ovšem vypracována teorie této hříčky, ale ta příliš neprospěje hráčům, kteří se touto kratochvílí skutečně baví. V této teorii se totiž v podstatě dokazuje, že úloha má řešení, avšak návody, jak k cíli dospět, jsou dosti složité. Hráč se však obejde bez teorie a po troše cviku si sám v jednotlivých případech ví s řešením rady.

Matematická olympiáda

III. celostátní a závěrečné kolo MO se koná v sobotu 20. května 1961 v Praze. Třetí mezinárodní matematická olympiáda bude ve dnech 8. až 15. července 1961 v Maďarsku.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



9

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 1960/61 - číslo 9

Toto číslo vyšlo 10. května 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

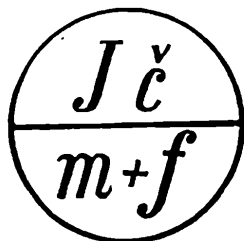
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

O B S A H :

Doc. J. Chudý: 40 let KSČ	385
S. Horák: O maximálním součinu čísel s konstantním součtem . . .	386
Inž. E. Kriegelstein: Úvod do diferenciálního počtu (Pokračování)	390
K. Kunc: Součty mocnin přirozených čísel	398
T. Medeková: Kružítkové pravítko	407
M. Hejný: Úpätница kružnice	410
Prof. dr. E. Kašpar: Fata morgána	415
Inž. J. Machalický: Úvahy nad vodní kapkou a paprskem	422
CSc. E. Říman: Kirchhoffovy zákony	425
CSc. J. Sedláček: Deset let Matematické olympiády	429
J. S.: O sedmi mostech města Královce	431



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-12*11170. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha:

40 let KSČ

V těchto dnech bude všechen náš lid slavit významné výročí v životě naší Komunistické strany Československa. Taková příležitost přímo nutí k zamyšlení se nad časově pravda krátkou, ale významnou historií KSČ.

Ustavení KSČ na sjezdu levice sociální demokracie v květnu 1921 bylo v podstatě důsledkem dosavadních revolučních snah dělnictva v našich zemích, jež se zvláště ostře začaly projevovat po VŘR a po našem osvobození. Dvacátá léta jasně ukázala nutnost existence strany, jež by byla schopna vést naši dělnickou třídu ve spolupráci s dělnictvem jiných zemí v boji za práva pracujícího lidu až k revolučnímu vítězství a k realizaci socialismu v naší zemi, strany, jež ve své politice vychází z vědeckého materialistického názoru v duchu velkých idejí Marxe a Lenina.

Listujeme-li stránkami čtyřicetileté historie KSČ vidíme, že gigantický zápas strany o pracujícího člověka nebyl snadný. V prvních letech musela se strana vypořádat s nemarxistickými vlivy ve vlastních řadách. Tyto vnitrostranické krize, způsobené skupinou Bubníka a později zejména Jílka a Bolena, odstranil V. sjezd strany v r. 1929, kdy v čelo strany byl povolán s. Gottwald.

Slova s. Gottwalda v parlamentě na adresu naší buržoazie jasně ukázala, že strana má pevné bolševické vedení, a politika strany v následujících letech, prosazující myšlenky proklamované v Gottwaldově parlamentní řeči, si získávala stále větší počet stoupenců.

V předválečných letech se pak strana orientovala na boj proti fašismu a jako jediná byla ochotna hájit naši samostatnost. Nebyla ale ještě dosti silná, aby zabránila tragickému osudu okupace. Postavila se však do čela boje našich národů za osvobození a byla hlavní silou odporu Hitlerovu fašismu v našich zemích. Proti ní byl také veden nejurputnější boj gestapa, který si vyžádal mnoho lidských životů z řad členů strany.

Po osvobození Sovětskou armádou byla pak strana díky své předválečné politice a bojem za války přímo předurčena, aby zaujala vedoucí místo v osvobozené republice. Boj strany však pokračoval i v letech po osvobození proti domácí reakci. Ta byla definitivně potřena při svém pokusu o puč v historických únorových dnech a našemu lidu byla otevřena cesta k socialismu. Dnes, po dovršení socialismu, jde náš pracující lid pevně a jednotně vpřed ke komunismu, veden nám tak drahou Komunistickou stranou Československa.

My, pracovníci v matematice a fyzice, se hrdě hlásíme k politice KSČ. Jsme jí vděční za to, že nám umožnila poznat vědecké učení Marxe, Engelse a Lenina; za to, že rozbila mythus o „objektivní“ a „nadtrždní“ vědě; za to, že otevřela dveře pracoven dosud uzavřených životu; za to, že nám umožnila poznávat vynikající sovětskou matematiku a fyziku a učit se od ní; za to, že umožnila vzdělání všem bez rozdílu. Jsme jí však, spolu se všemi pracujícími nejvíce vděční za to, že nám všem otevřela cestu k světlé budoucnosti, ke komunismu.

U vědomí si této obrovské práce KSČ, všech, kteří v boji strany položili své životy, u vědomí si důvěry strany i vůči nám, matematikům a fyzikům, snažme se ještě více a lépe než dosud obohacovat naše disciplíny, vychovávat naši mládež odborně i politicky. Slibme si, že učiníme vše, co je v našich silách, aby každý z nás přispěl svým dílem k realizaci onoho velkého cíle, který před nás strana klade: vybudování komunismu v naší zemi.

Matematika

Stanislav Horák, ČVUT, Praha:

O maximálním součinu čísel s konstantním součtem

Mějme pevné kladné číslo např. 10. Existuje nesčíslně mnoho dvojic kladných čísel, jejichž součet je právě 10. Takové dvojice jsou např.:

$$1, 9; 2, 8; 3,5, 6,5; 5, 5;$$

Obecně: jestliže jedno z čísel je x , je druhé $10 - x$, kde $0 \leq x \leq 10$.

Utvořme nyní součin čísel téže dvojice. Pro dvojice, které jsme napsali, jsou to tyto součiny:

$$9; 16; 22,75; 25; \quad \text{obecně } x \cdot (10 - x)$$

Vzniká otázka, která dvojice čísel má největší součin. Na ni odpovídá tato věta:

Budiž dáno libovolné kladné číslo a . Z dvojic čísel, jichž součet je a , má největší součin dvojice $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a$.

D ů k a z. Mějme libovolnou dvojici kladných čísel u, v , jichž součet je dané číslo a . Za předpokladu, že $u > v$, můžeme položit

$$u = \frac{1}{2}a + d, \quad v = \frac{1}{2}a - d,$$

kde d je nějaké kladné číslo, o němž platí $0 \leq d \leq \frac{1}{2}a$. Jejich součin je pak

$$s = u \cdot v = \frac{1}{4}a^2 - d^2.$$

Z této rovnice je ihned vidět, že součin s bude tím větší, čím menší bude číslo d . Ale nejmenší hodnota, kterou může d nabýt, je nula. Pro $d = 0$, obdržíme

$$u_0 = \frac{1}{2}a, \quad v_0 = \frac{1}{2}a.$$

Tím je věta dokázána. V dalším si ukážeme na příkladech, jak se této věty dá použít.

1. Pro který ostrý úhel φ je součin $\sin \varphi \cos \varphi$ maximální?

Náš součin upravujeme:

$$\sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)}.$$

Pod odmocnítkem máme součin dvou čísel, jichž součet je konstantní, rovný 1 a proto jejich součin je maximální, jestliže se oba činitele sobě rovnají; tedy

$$\sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi.$$

Odtud

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{tj. } \varphi = 45^\circ$$

Jestliže však součin pod odmocnítkem je maximální, je maximální i jeho druhá odmocnina a proto můžeme říci, že součin $\sin \varphi \cos \varphi$ nabude maximální hodnoty pro $\varphi = 45^\circ$.

2. Do dané kružnice poloměru r vepište obdélník maximálního obsahu (obr. 1).

V obr. 1 je narysována daná kružnice poloměru r a do ní je vepsán obdélník $ABCD$. Délku strany AB označme x a délku strany BC označme y . Přitom $0 < x < 2r$. Z obrázku ihned vyčteme, že $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$.

Obsah obdélníku $ABCD$ je

$$p = x \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

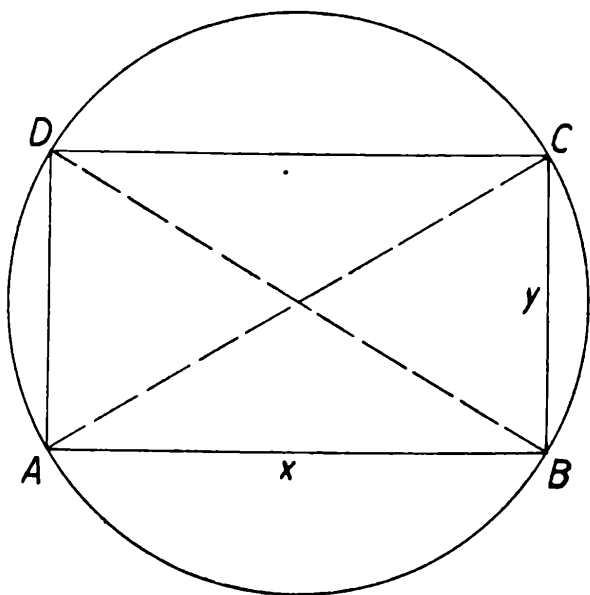
Tomuto vzorci dáme tento tvar:

$$p = \sqrt{x^2 \cdot (4r^2 - x^2)}.$$

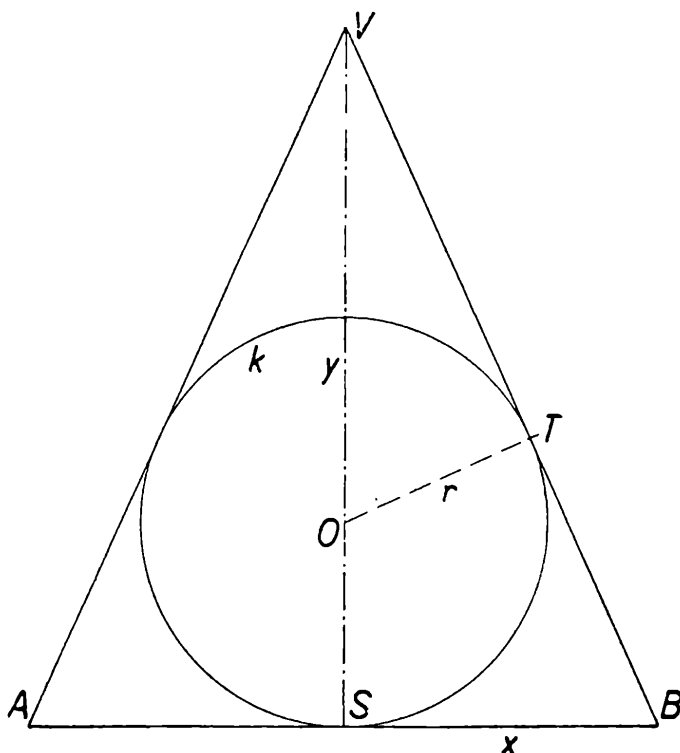
Pod odmocnítkem je součin dvou čísel, jichž součet je $4r^2$, je tedy roven konstantě a můžeme použít odvozené věty:

$$x^2 = 4r^2 - x^2, \text{ tj. } x = r \sqrt{2}.$$

V tomto případě přejde hledaný obdélník ve čtverec. Můžeme proto říci: Do kružnice lze vepsat nesčíslně mnoho obdélníků a jeden čtverec; čtverec má pak mezi všemi těmito pravoúhelníky největší obsah.



Obr. 1



Obr. 2

3. Dané kulové ploše poloměru r opište rotační kužel minimálního objemu (obr. 2).

Dané kulové ploše opište zatím libovolný rotační kužel. V obr. 2 je sestrojen jeho osový řez; je jím rovnoramenný trojúhelník ABV . Rovina tohoto řezu protne danou kulovou plochu v hlavní kružnici k , která je vepsána trojúhelníku ABV . Poloměr podstavy kužele označme x a výšku y . O těchto veličinách platí $x > r$, $y > 2r$. Jestliže T je bod dotyku kružnice k a strany BV a O je střed kružnice k , jsou trojúhelníky BSV , OTV podobné a proto

$$x : y = r : VT$$

Avšak

$$VT = BV - BT = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

Dosadíme-li do předešlé úměry, obdržíme

$$x : y = r \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - x).$$

Odtud se dá vypočítat

$$y = \frac{2 x^2 r}{x^2 - r^2}$$

Pro objem V rotačního kužele platí

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{2}{3} \pi r \frac{x^4}{x^2 - r^2}$$

Koeficient $\frac{2}{3} \pi r$ je konstantní a nemá na proměnnost objemu V vliv.

Má-li být proto objem V minimální, musí být zlomek $\frac{x^4}{x^2 - r^2}$ minimální. To však znamená, že převrácená hodnota tohoto zlomku, tj. zlomek $\frac{x^2 - r^2}{x^4}$ musí mít hodnotu maximální. Abychom mohli použít naší věty, je nutno upravit tento zlomek takto:

$$\frac{x^2 - r^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{r^2}{x^2} \right) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2}{x^2} \left(1 - \frac{r^2}{x^2} \right) \right].$$

Výraz $\frac{1}{r^2}$ je konstanta, kterou nemusíme uvažovat. V lomené závorce je pak součin dvou čísel, jejichž součet je konstanta. Tudíž podle naší věty jejich součin bude maximální, jestliže si budou oba činitelé rovní. To nás vede k rovnici

$$\frac{r^2}{x^2} = 1 - \frac{r^2}{x^2}, \text{ z čehož } x = r \sqrt{2}.$$

Máme odpověď: Jestliže poloměr podstavy opsaného kužele je $r \sqrt{2}$, je jeho objem minimální.

Cvičení.

1. Sestrojte obdélník maximálního obsahu, je-li dán součet s tří jeho stran.

Návod: Strany obdélníka označme x, y . O nich platí $2x + y = s$. Obsah obdélníka je $p = xy = 2 \left[x \left(\frac{s}{2} - x \right) \right]$.

2. Uvnitř strany AB ostroúhlého trojúhelníka ABC je bod M , z něhož jsou spuštěny kolmice na strany AC , BC ; paty těchto kolmic označíme K , L . Při jaké poloze bodu M má trojúhelník KLM maximální obsah?

Návod: Označme $AM = x$, $BM = y$ a pak platí $x + y = c = AB$. Potom $KM = x \cdot \sin \alpha$, $LM = y \cdot \sin \beta$. Úhel $\sphericalangle LMK = 180^\circ - \gamma$. Pro obsah p trojúhelníka KLM platí $p = \frac{1}{2} LM \cdot KM \cdot \sin \widehat{LMK} = \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cdot x(c - x)$.

3. Do daného trojúhelníka ABC vepište obdélník maximálního obsahu. (O trojúhelníku ABC předpokládejme, že je ostroúhlý; není-li, pak vrchol pravého či tupého úhlu je při vrcholu C .)

Návod: Stranu KL žádaného obdélníka $KLMN$, která leží na AC , označme x , druhou stranu označme y . Trojúhelníky ABC , NMC jsou podobné.

4. Danému obdélníku, jehož strany mají délky a , b , opište obdélník maximálního obsahu.

Návod: strany hledaného obdélníka označme x , y a necht strana a svírá se stranou x úhel φ . Pak platí $x = a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi$, $y = a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi$.

5. Je dán obdélník $ABCD$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník AKL - kde K (L) leží na prodloužení strany AB (AD) za bod B (D) - minimálního obsahu.

Návod: Označme $AB = a$, $BC = b$, $AK = x$, $AL = y$. $\triangle AKL \cong \triangle BKC$ a z toho $y = \frac{bx}{x - a}$. Dále podle vzoru př. 3 v textu.

Inž. E d u a r d K r i e g e l s t e i n, PŠ Praha:

· Úvod do diferenciálního počtu

(Pokračování)

3. Derivace

Budiž dána funkce $y = f(x)$ spojitá v nějakém intervalu a zobrazme ji graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic (obr. 18).

Na grafu funkce zvolme bod $A [a; f(a)]$ a bod $B (a + h; f(a + h))$. Směrnice přímky AB je

$$k_1 = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

kde h je přírůstek nezávisle proměnné, $f(a + h) - f(a)$ je přírůstek funkce.

Bod A budiž pevný, bod B necht se po grafu funkce $y = f(x)$ blíží neomezeně bodu A , až přímka AB přejde v tečnu grafu v bodě A .

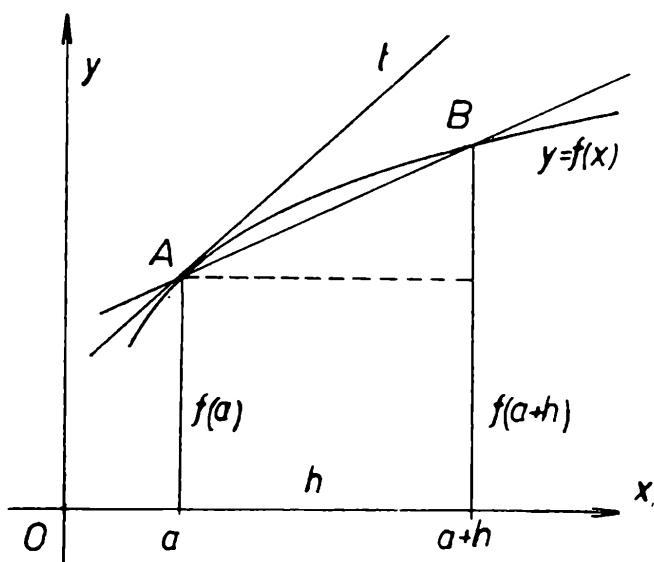
Budeme-li chtít určit rovnici této tečny, budeme muset znát její směrnici; ta však bude existovat tehdy, bude-li existovat limita

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tato limita pokud existuje je v matematice velmi důležitá. My jsme si ukázali v naší úvaze jeden její význam - a to geometrický.

Vysvětleme si ještě i význam fyzikální. Uvažujme pohyb bodu P po přímce, pohyb nechť je dán rovnicí $s = f(t)$, kde s (dráha) je funkcí času t . Za čas t , resp. $t+h$ proběhne bod P dráhu $f(t)$, resp. $f(t+h)$ do poloh P_t , resp. P_{t+h} (obr. 19).

Dráha mezi okamžiky t a $t+h$ je dána rozdílem $f(t+h) - f(t)$. Průměrnou rychlostí mezi těmito okamžiky nazýváme podíl $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$.



Obr. 18



Obr. 19

Limitu tohoto podílu při $h \rightarrow 0$ nazýváme pak okamžitou rychlostí pohybu v okamžiku t a označujeme ji v ; je tedy

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Definice 8. Nechť je funkce $f(x)$ definována v bodě a a jeho okolí. Jestliže existuje $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, nazýváme ji derivace funkce $f(x)$ v bodě a a označujeme ji $f'(a)$.

Poznámka.

Pro označení derivace funkce užíváme kromě symbolů $f'(x)$ a y' také $\frac{dy}{dx}$ nebo $\frac{df(x)}{dx}$. Oba poslední symboly jsou velmi vhodné zejména tehdy,

mluvíme-li o derivaci funkce $f(x)$ podle některé proměnné. Znamená tedy symbol $\frac{df(x)}{dx}$ derivaci funkce $f(x)$ podle proměnné x .

Můžeme proto říci, že derivace funkce je limitou poměru přírůstku funkční hodnoty k přírůstku argumentu, tj. k přírůstku nezávisle proměnné.

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém vnitřním bodě nějakého intervalu, říkáme, že funkce $f(x)$ má *derivaci v tomto intervalu*.

P ř í k l a d 16. Budiž dána křivka o rovnici $y = 2x^2$. Máme určit rovnici její tečny v bodě $T(1; 2)$. Směrnici tečny v bodě T určíme jako hodnotu derivace v tomto bodě.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+2h+h^2-1)}{h} = \\ &= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Hledaná směrnice $k = f'(1) = 4$.

Rovnice tečny v bodě $T(1; 2)$ pak je

$$y - 2 = 4 \cdot (x - 1),$$

$$t \equiv 4x - y - 2 = 0.$$

P ř í k l a d 17. Dráha při vrhu svislém vzhůru je dána vzorcem $s = ct - \frac{g}{2} t^2$. Vypočtěme okamžitou rychlost při tomto pohybu.

$$\begin{aligned} v = s' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - 0,5g(t+h)^2 - (ct - 0,5gt^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch - gth - 0,5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (c - gt - 0,5h) = c - gt, \end{aligned}$$

což je výsledek známý z fyziky.

V dalším si ukážeme jak je výhodné užít derivace ke studiu funkce v bodě nebo v jistém intervalu. Dosud jsme zkoumali např. spojitost funkce na základě definice 7. Nyní vyslovíme větu, která nám umožní rozhodnout snadněji o spojitosti v bodě případně v intervalu.

Věta 8. *Má-li funkce $f(x)$ derivaci v bodě a , je v tomto bodě spojitá.*

Provedme důkaz této věty. Protože funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

a tedy také

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

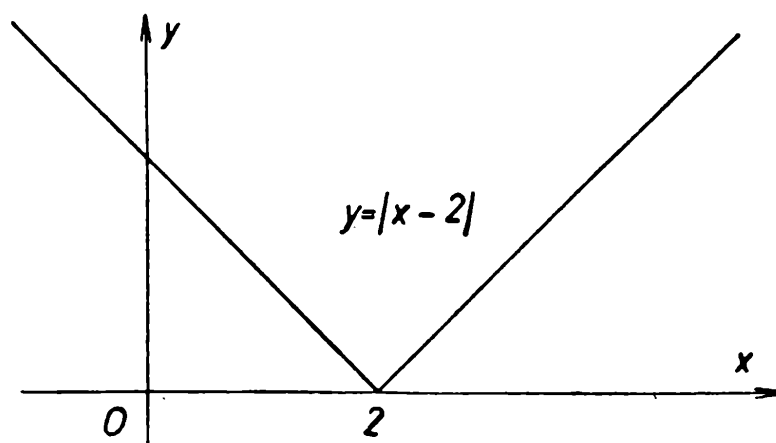
To ale znamená, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - \lim_{h \rightarrow 0} f(a) = 0,$$

tj.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a),$$

tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a . Uvedená věta 8 se však nedá obrátit. Funkce může být v bodě spojitá a nemusí mít v něm derivaci.



Obr. 20

Příklad 18. Ukážeme si, že funkce $f(x) = |x - 2|$ je v bodě $x = 2$ spojitá, ale nemá v něm derivaci (obr. 20):

$$f(2+h) = |2+h-2| = |h|; f(2) = 0.$$

$$\text{Pro } h > 0 \text{ (tj. } |h| = h) \text{ je } \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1;$$

$$\text{pro } h < 0 \text{ (tj. } |h| = -h) \text{ je } \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

Tyto výsledky říkají, že naše funkce nemá v bodě $x = 2$ derivaci; má, jak říkáme, *derivaci zprava* (pro h blížící se k nule zprava - kladnými hodnotami) rovnou 1 a *derivaci zleva* rovnou -1 . Aby funkce měla derivaci ve smyslu definice 8, musely by derivace zprava i derivace zleva mít stejnou hodnotu.

Abychom ukázali, že naše funkce je spojitá v bodě $x = 2$, použijeme definice 7. Protože

$$\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0 \text{ a } f(2) = |2 - 2| = 0,$$

je naše funkce spojitá v bodě $x = 2$; nemá v něm však derivaci.

P ř í k l a d 19. Určeme rovnici tečny ke křivce $y = \sqrt[3]{4 - 3x}$ v bodě $x_1 = 1$.

Najdeme $y_1 = \sqrt[3]{4 - 3 \cdot 1} = 1$.

Směrnici tečny v $x_1 = 1$ najdeme pomocí derivace:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{4 - 3(1 + h)} - \sqrt[3]{4 - 3 \cdot 1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 3h} - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 - 3h} - 1)(\sqrt[3]{1 - 3h} + 1)}{h(\sqrt[3]{1 - 3h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 3h - 1}{h(\sqrt[3]{1 - 3h} + 1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt[3]{1 - 3h} + 1} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Je tedy hledaná tečna

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1),$$

čili

$$t \equiv 3x + 2y - 5 = 0.$$

Věty o derivacích

Počítání derivací funkcí na základě definice 8 by bylo příliš zdlouhavé a proto si uvedeme řadu vět, podle nichž se dají derivace počítat velmi snadno.

Věta 9. Derivace konstantní funkce $f(x) = c$ je v každém bodě rovna 0. Důkaz je velmi jednoduchý.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Věta 10. Je-li n přirozené číslo, pak pro libovolné x má funkce $f(x) = x^n$ derivaci

$$f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. Je-li $n = 1$ je $f(x) = x$ a derivace je

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Podle věty 10 je $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$. Je tedy vidět, že pro $n = 1$ je věta 10 správná.

2. Budeme nyní předpokládat, že věta 10 platí pro nějaké přirozené číslo n a dokážeme, že také platí pro $n + 1$, tj. že za uvedeného předpokladu $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ bude také $(x^{n+1})' = (n + 1) \cdot x^n$.

Předpokládejme, že platí

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1}$$

a hledejme

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{n+1} - x^{n+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)(x + h)^n - x \cdot x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x[(x + h)^n - x^n] + h(x + h)^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (x + h)^n = \\ &= x \cdot n \cdot x^{n-1} + x^n = n \cdot x^n + x^n = (n + 1) \cdot x^n \end{aligned}$$

Tím je věta 10 dokázána.

Poznámka 1. Dá se dokázat, že věta 10 platí pro libovolný reálný mocnitel n pro ta x , pro něž je funkce $f(x) = x^n$ definována. Důkaz však provádět nebudeme a ukážeme si opět užití věty 10 na příkladech.

Poznámka 2. Snadno bychom také dokázali, že pro derivaci funkce $f(x) = a \cdot x^n$ platí $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$. Důkaz proveďte sami!

P ř í k l a d 20. Máme určit derivaci funkce $f(x) = 3x^8$:

$$f'(x) = 3 \cdot 8 \cdot x^7 = 24x^7$$

P ř í k l a d 21. Derivujme funkci $f(x) = \frac{5}{x^{2,7}}$.

Danou funkci napíšeme nejprve jako mocninu se záporným mocnitelem $f(x) = 5 \cdot x^{-2,7}$. Derivace pak je

$$f'(x) = 5 \cdot (-2,7) \cdot x^{-3,7} = -\frac{13,5}{x^{3,7}}.$$

P ř í k l a d 22. Máme-li vypočítat derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{7 \sqrt[6]{x^5}}$,

napíšeme ji opět jako mocninu $f(x) = \frac{3}{7} x^{-\frac{5}{6}}$. Pak je

$$f'(x) = \frac{3}{7} \left(-\frac{5}{6} \right) x^{-\frac{11}{6}} = -\frac{5}{14 \cdot \sqrt[6]{x^5}} = -\frac{5 \cdot \sqrt[6]{x}}{14x^2}$$

Nyní si dokážeme tři věty pro derivaci součtu, součinu a podílu dvou funkcí.

Věta 11. Necht funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace $f'(x)$ a $g'(x)$. Pak funkce $F(x) = f(x) + g(x)$ má derivaci $f'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Důkaz provedeme takto: Budiž $F(x) = f(x) + g(x)$. Pak platí

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Věta 11 se dá zobecnit pro libovolný konečný počet sčítanců a lze ji vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' &= \\ = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x). \end{aligned}$$

Příklad 23. Derivujme funkci $f(x) = 3x^2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3x}} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x^3}$

Nejprve ji upravme takto:

$$f(x) = 3x^2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{8}{3}}$$

Pak je

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x + \frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{3} \cdot x \sqrt[3]{x}} - \frac{16}{3x^3 \sqrt[3]{x^2}} = \\ &= 6x + \frac{\sqrt[6]{108} \cdot \sqrt[3]{x}}{12x^2} - \frac{16 \sqrt[3]{x}}{3x^4} = \\ &= \frac{1}{12x^4} (72x^5 + x^2 \sqrt[6]{108x^3} - 64 \sqrt[3]{x}) \end{aligned}$$

P ř í k l a d 24. Abychom určili derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{4x}$ upravme ji nejprve takto:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{4x} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^{-1}.$$

Derivace pak je

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^{-2} = \frac{x^2 - 1}{4x^2}.$$

P ř í k l a d 25. Máme vypočítat obsah trojúhelníka, který omezuje tečna křivky $y = 0,5 \cdot x^3$ v bodě $x_1 = -2$ s osami souřadnic. Nejprve určíme rovnici tečny k dané křivce, známe-li dotykový bod $T(-2; -4)$ a směrnici k_1 , kterou určíme derivací. Je $y' = 1,5 \cdot x^2$ a tedy $k_1 = y'_1 = 1,5 \cdot (-2)^2 = 6$.

Rovnice tečny je

$$y + 4 = 6(x + 2),$$

čili

$$6x - y + 8 = 0.$$

Z rovnice tečny určíme úseky na osách souřadnic vyřazením tečnou, tj.

$$q = 8 \text{ a } p = -\frac{4}{3}.$$

Obsah trojúhelníka pak je

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Věta 12. Jestliže funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace $f'(x)$ a $g'(x)$, pak také součin $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ má derivaci a platí $F'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &= [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]. \end{aligned}$$

Pak je

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&= f'(x) g(x) + f(x) g'(x),
\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 26. Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x^3 + x - 1)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 - 2x - 3)'(x^3 + x - 1) + (x^2 - 2x - 3)(x^3 + x - 1)' = \\
&= (2x - 2)(x^3 + x - 1) + (x^2 - 2x - 3)(3x^2 + 1) = \\
&= 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2x + 2 + 3x^4 - 6x^3 - 9x^2 + x^2 - 2x - 3 = \\
&= 5x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 6x - 1
\end{aligned}$$

Příklad 27. Určeme ještě derivaci funkce $f(x) = (x^2 - x^{\frac{1}{2}}) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$.

Funkci nejprve upravíme na tvar $f(x) = (x^2 - x^{-3}) (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}})$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x + 3x^{-4})(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}}) + (x^2 - x^{-3}) \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \right) = \\
&= 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{7}{6}} - 2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{13}{6}} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} - \\
&\quad - \frac{1}{3} x^{-\frac{13}{3}} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} x^{-\frac{7}{2}} - \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3} x^{-\frac{13}{3}} = \\
&= \frac{5}{2} x \sqrt{x} + \frac{5}{2} \frac{\sqrt{x}}{x^4} - \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{10}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^5} = \\
&= \frac{5 \sqrt{x}}{2x^4} (x^5 + 1) - \frac{5 \sqrt[3]{x^2}}{3x^5} (x^5 + 2).
\end{aligned}$$

(Dokončení)

Karel Kunc, studující university, Brno:

Součty mocnin přirozených čísel

Při řešení některých úloh je třeba umět určit součet prvních n členů dané posloupnosti čísel. V mnoha případech lze tuto úlohu převést na

určení součtu prvních n členů posloupnosti prvních, druhých, třetích, nebo vyšších mocnin přirozených čísel. Úkolem tohoto článku proto bude najít metodu, která by nám umožnila určit součet prvních n členů posloupnosti k -tých mocnin celých nezáporných čísel, kde k může být libovolné celé nezáporné číslo.

Zavedeme si nejprve nový pojem, který nám bude v dalším užitečný.

D e f i n i c e. Výraz (funkci) tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_k$ jsou daná komplexní čísla, nazýváme *polynomem proměnné x* . Čísla $a_0, a_1, \dots, a_k$ nazýváme *koefficienty polynomu*. Ve zvláštním případě, kdy všechny koefficienty jsou reálná čísla, mluvíme o *reálném polynomu*. Je-li $a_k \neq 0$, říkáme, že polynom je *stupně k -tého*.

Tak např. výraz $6n^5 + \frac{1}{4}n^4 - 2n^3 + \frac{1}{17}n - 1$ je polynom pátého

stupně. Je to polynom proměnné n .

Uvedeme jednu větu o polynomech, kterou budeme v dalším výkladu potřebovat.

V ě t a 1. Jsou-li $f(x), g(x)$ dva polynomy stupně nejvýše k -tého, a platí-li $f(x) = g(x)$ pro více než k hodnot proměnné x , jsou si rovny koefficienty u stejných mocnin x .

Tak např. jsou-li dány dva polynomy

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k \end{aligned}$$

a víme-li, že rovnice $f(x) = g(x)$ platí pro více než k čísel (např. pro každé přirozené číslo), můžeme z toho usoudit, že platí $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$.

Důkaz této věty nebudeme provádět, čtenář jej najde v každé učebnici algebry.

Nyní přistoupíme k vlastnímu předmětu článku.

Součet k -tých mocnin prvních n nezáporných celých čísel označme symbolem $S^{(k)}(n)$, kde $k > 0$ je celé číslo, tj.

$$S^{(k)}(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k \quad (1)$$

Pro $k = 0$ ¹⁾ definujme symbol $S^{(0)}(n)$ vztahem

$$S^{(0)}(n) = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0. \quad (1a)$$

Pro dané k je $S^{(k)}(n)$ funkcí proměnné n , pro dané n je funkcí proměnné k .

¹⁾ Případ $k = 0$ jsme nemohli zahrnout do obecné definice, protože 0^0 není definováno.

V ě t a 2. Pro $S^{(k)}(n)$ platí rekurentní vzorec

$$S^{(k)}(n) = \frac{1}{k+1} \left[(n+1)^{k-1} - 1 - \binom{k+1}{2} S^{(k-1)}(n) - \right. \\ \left. - \binom{k+1}{3} S^{(k-2)}(n) - \dots - \binom{k+1}{k} S^{(1)}(n) - \binom{k+1}{k+1} S^{(0)}(n) \right]; \quad (2)$$

$$S^{(0)}(n) = n. \quad (3)$$

D ů k a z. Mocninu h^{k+1} každého čísla můžeme psát ve tvaru $[1 + (h-1)]^{k+1}$. Užitím binomické věty obdržíme odtud pro $h = n+1, n, n-1, \dots, 1$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \dots + \\ + \binom{k+1}{k} n^1 + \binom{k+1}{k+1} n^0, \\ n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + \binom{k+1}{1} (n-1)^k + \binom{k+1}{2} (n-1)^{k-1} + \dots + \\ + \binom{k+1}{k} (n-1)^1 + \binom{k+1}{k+1} (n-1)^0, \\ (n-1)^{k+1} = (n-2)^{k+1} + \binom{k+1}{1} (n-2)^k + \binom{k+1}{2} (n-2)^{k-1} + \dots + \\ + \binom{k+1}{k} (n-2)^1 + \binom{k+1}{k+1} (n-2)^0, \quad (4)$$

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} 1^1 + \\ + \binom{k+1}{k+1} 1^0$$

$$1^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} 0^k + \binom{k+1}{2} 0^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} 0^1 + \binom{k+1}{k+1} 0^0.$$

Sečteme-li tyto rovnice, dostaneme po úpravě

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S^{(k)}(n) + \binom{k+1}{2} S^{(k-1)}(n) + \dots + \\ + \binom{k+1}{k} S^{(1)}(n) + \binom{k+1}{k+1} S^{(0)}(n).$$

Odtud vypočteme $S^{(k)}(n)$ a dostaneme rovnici (2).

Rovnice (3) je evidentní

$$S^{(0)}(n) = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = n,$$

Pomocí uvedeného rekurentního vzorce je již možno počítat $S^{(k)}(n)$ pro libovolné přirozené k . Výpočet je však značně zdlouhavý. Chceme-li např. vypočítat $S^{(4)}(n)$, musíme nejprve vypočítat $S^{(1)}(n)$, potom $S^{(2)}(n)$ a $S^{(3)}(n)$ a teprve potom dostaneme po pracné úpravě vzorec pro $S^{(4)}(n)$. Bude proto užitečné, najdeme-li nějakou jednodušší metodu pro výpočet $S^{(k)}(n)$.

V ě t a 3. $S^{(k)}(n)$ lze vyjádřit reálným polynomem proměnné n stupně $k + 1$.

D ů k a z úplnou indukcí: 1. Pro $k = 0$ je věta správná. Podle (3) je $S^{(0)}(n) = n$, je tedy reálným polynomem proměnné n stupně 1. 2. Nechť je věta správná pro $S^{(1)}(n)$, $S^{(2)}(n)$, $\dots$ $S^{(k-1)}(n)$. Pak $S^{(k)}(n)$ je součtem polynomů proměnné n , stupňů 0, 1, 2, $\dots$ k a polynomu proměnné n , stupně $k + 1$ [výrazu $(n + 1)^{k+1}$], je tedy polynomem proměnné n stupně $k + 1$.

D ů s l e d e k v ě t y 3. Věta 3. nám neříká nic o tom, jak vypočítat koeficienty polynomu $S^{(k)}(n)$. Ukážeme si však na příkladě, že lze této větě k jejich určení využít.

P ř í k l a d 1. Určete $S^{(2)}(n)$.

Ř e š e n í. Podle věty 3. je $S^{(2)}(n)$ polynom třetího stupně v proměnné n . Existují tedy čísla a_0, a_1, a_2, a_3 tak, že pro každé n celé nezáporné platí

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2. \quad (5)$$

Rovnice (5) platí tedy také pro $n = 0, 1, 2, 3$. Dosazujeme-li tato čísla do rovnice (5), dostáváme po řadě rovnice

$$\begin{aligned} a_0 &= 0^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 &= 0^2 + 1^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Soustava (6) představuje soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých a_1, a_2, a_3 ($a_0 = 0$):

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ 2 a_1 + 4 a_2 + 8 a_3 &= 5 \\ 3 a_1 + 9 a_2 + 27 a_3 &= 14. \end{aligned} \quad (6a)$$

Tato soustava má jediné řešení $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Tedy

$$\begin{aligned} S^{(2)}(n) &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem by bylo možno určit koeficienty polynomu $S^{(k)}(n)$ pro libovolné k . Při vyšších mocninách by však tento způsob byl opět dosti zdoluhavý a pracný. Kdybychom např. chtěli určit jen $S^{(6)}(n)$, znamenalo by to vypočítat druhé, třetí, ... sedmé mocniny všech přirozených čísel od 1 do 7, určit součty $1^6 + 2^6$, $1^6 + 2^6 + 3^6$, ..., $1^6 + 2^6 + \dots + 7^6$ a provádět úpravy se soustavou sedmi rovnic o sedmi neznámých. Proto odvodíme ještě jeden způsob výpočtu koeficientů polynomu $S^{(k)}(n)$, který bude podstatně jednodušší. Výsledek je obsažen v této větě:

V ě t a 4. Pro každou dvojici nezáporných celých čísel n, k platí $S^{(k)}(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{k+1} n^{k+1}$, přičemž čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ jsou určena rovnicemi

$$\begin{aligned} - \binom{k+1}{1} a_{k+1} &= -1 \\ - \binom{k}{1} a_k + \binom{k+1}{2} a_{k+1} &= 0 \\ - \binom{k-1}{1} a_{k-1} + \binom{k}{2} a_k - \binom{k+1}{3} a_{k+1} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} - \binom{2}{1} a_2 + & + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-2} a_{k-1} + \\ & + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} a_k + (-1)^k \binom{k+1}{k} a_{k+1} = 0 \\ - \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{2} a_2 + & + (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} a_{k-1} + (-1)^k \binom{k}{k} a_k + \\ & + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} a_{k+1} = 0 \\ a_0 &= 0. \end{aligned}$$

D ů k a z. Snadno se přesvědčíme, že věta je správná pro $k = 0$. V tomto případě totiž (7) dává $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, takže $S^{(0)}(n) = n$, což souhlasí s dříve dokázaným vztahem (3).

Buď $k > 0$ celé. Nechť polynom $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{k+1} n^{k+1}$ vyjadřuje součet řady $0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k$. (Existence vhodných čísel $a_0, \dots, a_{k+1}$ je zaručena větou 3.) Pak tedy platí

$$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{k+1} n^{k+1} = 0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k \tag{8}$$

pro každé celé nezáporné n . Pro každé přirozené n pak platí též

$$f(n-1) + n^k = f(n), \tag{9}$$

tj.

$$a_0 + a_1(n-1) + a_2(n-1)^2 + \dots + a_{k+1}(n-1)^{k+1} + n^k = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_{k+1}n^{k+1} \quad (9a)$$

Rozepíšeme-li rovnici (9a) s použitím binomické věty, dostaneme

$$\begin{aligned} a_0 & \left[(-1)^0 \binom{0}{0} \right] + \\ + a_1 & \left[(-1)^0 \binom{1}{0} n + (-1)^1 \binom{1}{1} \right] + \\ + a_2 & \left[(-1)^0 \binom{2}{0} n^2 + (-1)^1 \binom{2}{1} n + (-1)^2 \binom{2}{2} \right] + \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} + a_k & \left[(-1)^0 \binom{k}{0} n^k + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} n^2 + \right. \\ & \left. + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n + (-1)^k \binom{k}{k} \right] + \\ + a_{k+1} & \left[(-1)^0 \binom{k+1}{0} n^{k+1} + (-1)^1 \binom{k+1}{1} n^k + \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k-1} n^2 + (-1)^k \binom{k+1}{k} n + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} \right] + n^k = \\ & = a_{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0. \end{aligned}$$

Rovnice (9b) platí pro každé přirozené n . Použijeme-li věty 1, tj. srovnáme-li koeficienty u stejných mocnin n , plyne z platnosti (9b) platnost soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (-1)^0 \binom{k+1}{0} a_{k+1} &= a_{k+1} \\ (-1)^0 \binom{k}{0} a_k + (-1)^1 \binom{k+1}{1} a_{k+1} &= a_k - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (-1)^0 \binom{2}{0} a_2 + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} a_k + \\ + (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k-1} a_{k+1} &= a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^0 \binom{1}{0} a_1 + (-1)^1 \binom{2}{1} a_2 + \quad + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} a_k + \\
& \quad + (-1)^k \binom{k+1}{k} a_{k+1} = a_1 \\
& (-1)^0 \binom{0}{0} a_0 + (-1)^1 \binom{1}{1} a_1 + (-1)^2 \binom{2}{2} a_2 + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} a_k + \\
& \quad + (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k+1} a_{k+1} = a_0.
\end{aligned}$$

Po úpravě odtud dostaneme (prvou rovnici, která je splněna identicky, vynecháváme)

$$\begin{aligned}
& - \binom{k+1}{1} a_{k+1} = -1 \\
& - \binom{k}{1} a_k + \binom{k+1}{2} a_{k+1} = 0 \\
& - \binom{k-1}{1} a_{k-1} + \binom{k}{2} a_k - \binom{k+1}{3} a_{k+1} = 0
\end{aligned}
\tag{10a}$$

$$\begin{aligned}
& - \binom{3}{1} a_3 + \quad + (-1)^{k-3} \binom{k-1}{k-3} a_{k-1} + \\
& \quad + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} a_k + (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k-1} a_{k+1} = 0 \\
& - \binom{2}{1} a_2 + \binom{3}{2} a_3 + \quad + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-2} a_{k-1} + \\
& \quad + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} a_k + (-1)^k \binom{k+1}{k} a_{k+1} = 0 \\
& - \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{2} a_2 - \binom{3}{3} a_3 + \quad + (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} a_{k-1} + \\
& \quad + (-1)^k \binom{k}{k} a_k + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} a_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Koeficienty polynomu $f(n)$ tedy vyhovují soustavě (10a), tj. prvním $k+1$ rovnicím soustavy (7). Platnost poslední rovnice soustavy (7) dokážeme dosazením $n=0$ do (8).

D ů s l e d e k v ě t y 4. Soustava (7) je již dostatečně jednoduchá, aby z ní koeficienty polynomu $S^{(k)}(n)$ bylo možno počítat bez dalších úprav. Kombinační čísla určíme nejsnáze z Pascalova trojúhelníku.

Příklad 2. Určete $S^{(4)}(n) = 0^4 + 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

Řešení. $S^{(4)}(n) = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5$.

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
 \end{array}$$

Koeficienty $a_1, \dots, a_5$ určíme z rovnic

$$\begin{aligned}
 -5a_5 &= -1 \\
 -4a_4 + 10a_5 &= 0 \\
 -3a_3 + 6a_4 - 10a_5 &= 0 \\
 -2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5 &= 0 \\
 -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Dostaneme $a_1 = -\frac{1}{30}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Tedy } S^{(4)}(n) &= 0^4 + 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \\
 &+ \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5 = \frac{1}{30}[-n + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5].
 \end{aligned}$$

Použití součtů mocninných řad $S^{(k)}(n)$ ukážeme na dvou příkladech.

Příklad 3. Určete součet řady $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$.

Řešení. Z toho, že n -tý člen je možno psát ve tvaru $n^3 + 3n^2 + 2n$, plyne, že stejně je možno psát i ostatní členy. Tedy

$$\begin{aligned}
 S &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \\
 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + \dots + n^3 + 3n^2 + 2n = \\
 &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 3[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 2[1 + 2 + \dots + n] = S^{(3)}(n) + 3S^{(2)}(n) + 2S^{(1)}(n).
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li za $S^{(3)}(n)$, $S^{(2)}(n)$, $S^{(1)}(n)$ příslušné vzorce - jejichž výpočet jsme odvodili v předchozím textu - dostáváme po úpravě

$$S = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Další příklady tohoto druhu najde čtenář ve cvičení na konci článku.

Příklad 4. Určete momenty setrvačnosti soustavy n hmotných bodů vzhledem k osám o_1, o_2 . Všechny hmotné body mají stejnou hmotu m a jsou rozloženy ve stejných (neproměnných) vzdálenostech d na přímce p jdoucí průsečíkem os ($p \perp o_1, \angle o_1 o_2 = \alpha$).

Řešení. Momentem setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k dané ose rozumíme výraz $K = mr^2$, kde m je hmota hmotného bodu a r jeho vzdálenost od osy. Momentem setrvačnosti soustavy hmotných bodů (vzhledem k dané ose) pak rozumíme součet momentů setrvačnosti (vzhledem k téže ose) jednotlivých hmotných bodů. Vzhledem k ose o_1 je moment setrvačnosti

$$K_1 = md^2 + m(2d)^2 + \dots + m(nd)^2 = md^2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \\ = md^2 S^{(2)}(n) = \frac{md^2 n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o_2

$$K_2 = m(d \sin \alpha)^2 + m(2d \sin \alpha)^2 + \dots + m(nd \sin \alpha)^2 = \\ = md^2 \sin^2 \alpha (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \\ = md^2 \sin^2 \alpha S^{(2)}(n) = \frac{md^2 \sin^2 \alpha \cdot n(n+1)(2n+1)}{6} = K_1 \sin^2 \alpha.$$

Cvičení.

1. Vypočtete $S^{(1)}(n)$, $S^{(2)}(n)$, $S^{(3)}(n)$, $S^{(4)}(n)$.

2. Určete součty

a) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n \cdot (n+2) \cdot (n+4),$

b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 16 + \dots + n \cdot (n+1)^2,$

c) $4 \cdot 5 + 9 \cdot 10 + 16 \cdot 17 + \dots + (n+1)^2 [(n+1)^2 + 1].$

3. Vypočtete sílu, kterou je v kapalině o hustotě ρ nadlehčována pyramida sestavená z 50 krychlí o hranách $a, 2a, \dots, 50a$.

4. Součástky jsou naskládány do pyramidy o obdélníkové základně. Nejnižší vrstva má rozměry $35 \cdot 18$ součástek, další $34 \cdot 17$ s., atd. Horní vrstva má rozměry $22 \cdot 5$ součástek. Určete počet součástek v pyramidě.

Výsledky.

2. a) $\frac{1}{4} n(n+1)(n+4)(n+5),$

b) $\frac{1}{12} n(n+1)(3n^2 + 11n + 10),$

c) $\frac{1}{30} (6n^5 + 45n^4 + 140n^3 + 225n^2 + 184n).$

3. $375\,625 \cdot a^3 \rho g.$

4. 3 296 kusů.

Deskriptivní geometrie

Tatiana Medeková, Bratislava:

Kružítkové pravítko

Riešenia mnohých konštruktívnych úloh planimetrie a deskriptívnej geometrie možno často previesť pomocou rôznych mechanizmov a rysovacích pomocok.

V knihe N. T. Čuvikov: *Преобразование ортогональных проекций*, ktorá vyšla v nakladateľstve Sovietskaja nauka v Moskve r. 1957, na str. 163—170, je popísaná zaujímavá pomôcka, s ktorou by som chcela čitateľov Rozhľadov zoznámiť. Rysovacia pomôcka je veľmi jednoduchá na zhotovenie, žiaci by si ju mohli sami spraviť v školskej dielni na hodinách polytechnickej výchovy a v zaujímavých krúžkoch potom riešiť geometrické úlohy s použitím tejto pomôcky. Možno ňou nahradiť pravítko, kružítko i trojuholníkové pravítko. Nazvime túto rysovaciu pomôcku kružítkové pravítko. N. T. Čuvikov nazýva ju „oborotnaja linejka“.

Popíšem najprv kružítkové pravítko (obr. 1) a potom naznačím niekoľko úloh aj so spôsobom ich riešenia pomocou opísanej rysovacej pomôcky.

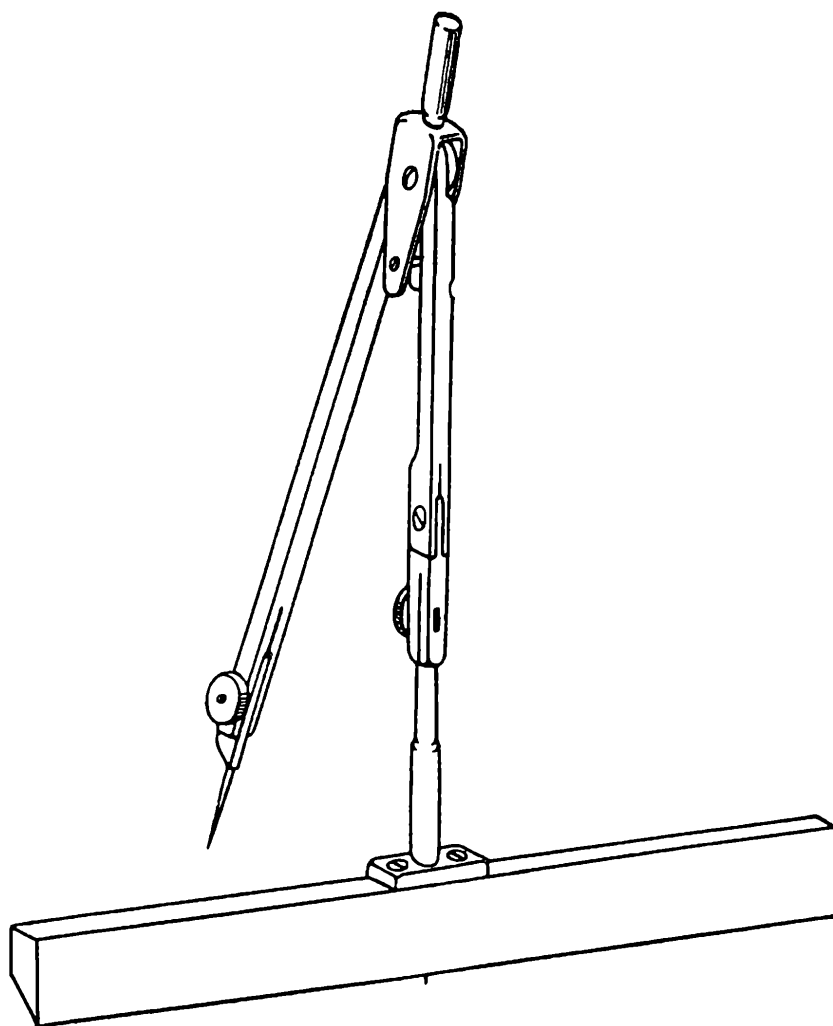
Potrebujeme pravítko lichobežníkového profilu a dĺžky asi 25 cm, ak chceme rysovať na formát A_3 (na formát A_1 dĺžka 35 cm). Do stredu pravítka vloží sa ihla, ktorá vystupuje z tej hrany pravítka, podľa ktorej sa rysuje, asi $1\frac{1}{2}$ — 1 mm. Je vhodné v ose ihly zvoliť počiatok merítka a na obe strany na pravítko naniesť alebo vyryť pravidelné ryhy na vzdialenosť dielkov merítka. K pravítku nad ihlou, kde šírka plochy pravítka je asi 7 mm, primontuje sa dvoma závitmi nôžka, ktorej voľný koniec možno upevniť do kružítkového miesta tužkového alebo vyťahovacieho dielca. Keď ideme rysovať, vložíme do kružítkového takto pripravené pravítko, ale dáme pozor na to, aby pravítko bolo kolmé k rovine oboch nožík kružítkového. Zabezpečíme to napr. pomocou dvoch kolmíc, narysovaných na papieri.

Popíšem spôsob riešenia niekoľkých úloh. Ihlu kružítkového budeme označovať písmenom a , ihlu pravítka písmenom b . Ich počiatočná poloha pri riešení úlohy bude bez indexu, ďalšie polohy podľa poradia budú označené indexami 1, 2, 3,

1. ú l o h a. Viest bodom A priamku, rovnobežnú s danou priamkou p (obr. 2).

R i e š e n i e: Ihla a položí sa na bod A a pravítko priložíme k priamke p . Ihla b určí tým na priamke p jeden bod, b . Ak vymeníme vzájomne polohu oboch ihliel, pričom polomer zachováme, môžeme hľadanú priamku rysovať priamo podľa pravítka.

2. ú l o h a. Narysovať dotyčnice kružnice, idúce daným bodom M (obr. 3).

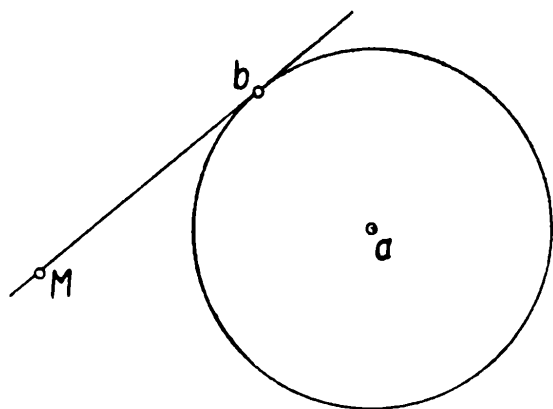


Obr. 1

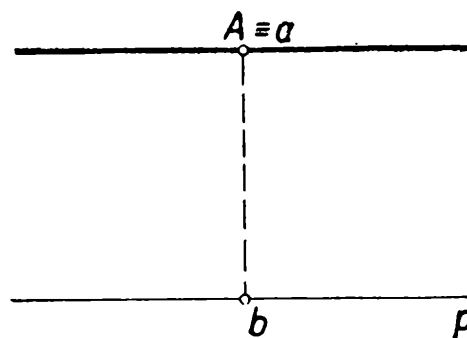
R i e š e n i e. Kružítkové pravítko roztvoríme tak, aby vzdialenosť medzi ihlami bola rovná veľkosti polomeru. Ihlu a položíme do stredu danej kružnice a otočíme kružítko do takej polohy, aby pravítko prechádzalo cez bod M . Pravítko určí hľadanú dotyčnicu a ihla b bod dotyku.

3. ú l o h a. Zostrojiť tretí priemet bodu K do roviny ν (kolmej na os x) v danom smere s (obr. 4).

Riešenie. Bod K je určený svojimi priemetmi K_1, K_2 . Priesečník osi x s rovinou tretej priemetne ν je bod $N_{1,2}$. Hrot ihly a priložíme do bodu $N_{1,2}$ a pravítkom vedieme cez priesečník ($s_2 = \nu_2$) $\equiv K'_2$ rovnobežku s osou k . Kružítkové pravítko otočíme okolo ihly a o 180° tak, aby nová poloha

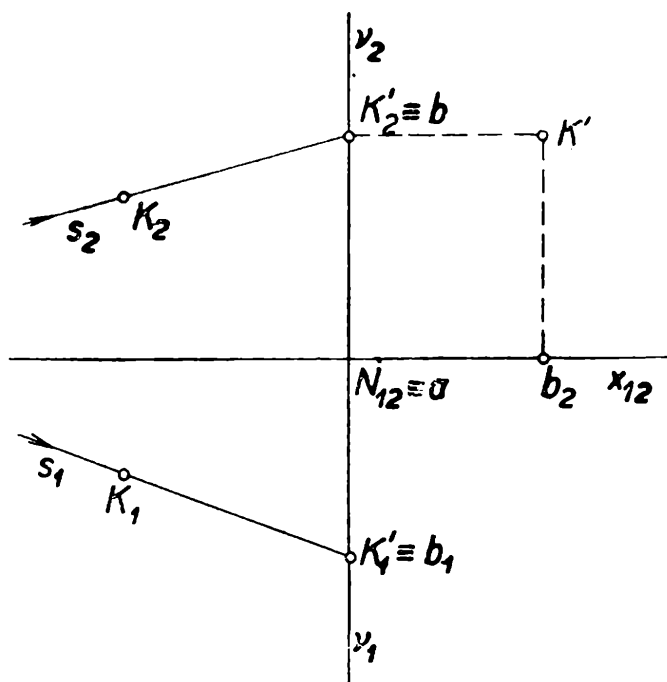


Obr. 2

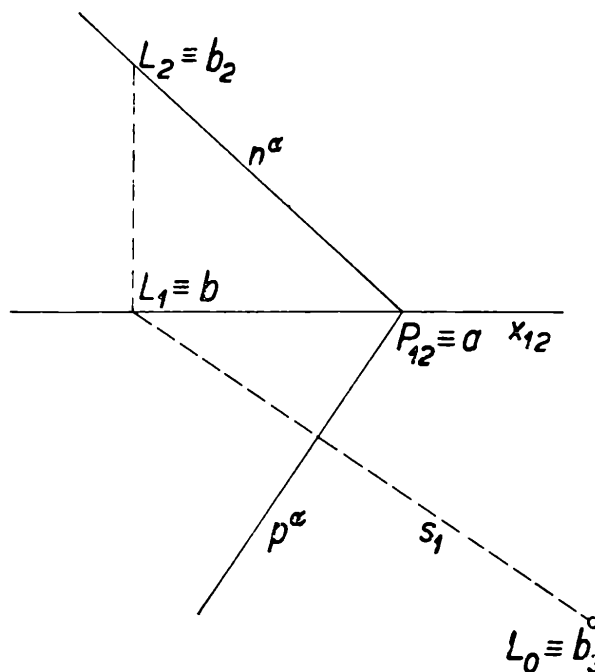


Obr. 3

b_1 , ihly b splynula s bodom K'_1 , čím odmeriame vzdialenosť priemetu K' od nárysne. Novým otočením okolo a ale len o 90° prejde b_1 do b_2 a pravítko dostaneme do takej polohy, že môžeme podľa neho preťať prv narysovanú rovnobežku s osou x v hľadanom bode K'



Obr. 4



Obr. 5

4. úloha. Otočiť rovinu α do priemetne okolo niektorej stopy (obr. 5)

Riešenie. Rovina α je daná stopami p_1^α a n_2^α . Priesečník stôp je bod $P_{2,1}$. Otočíme rovinu α okolo stopy p_1^α do pôdorysnej roviny π . Správime to tak, že na stope n^α zvolíme ľubovoľný bod L a ten otočíme

okolo osi p^α do roviny π . Rysovanie konštrukcie pomocou kružítkového pravítka je nasledovné: Ihlu a položíme do bodu $P_{1,2}$, ihlu b kdekkoľvek na os x . Pravítkom vyznačíme priemety bodu L . Potom okolo a otočíme kružítkové pravítko tak, aby nová poloha b_1 ihly b kružítkového pravítka ležala na stope p_1^α a pravítko prechádzalo cez bod $L_1 \equiv b$. Pozdĺž pravítka nakreslíme priamku s_1 (pôdorysný priemet spádovej priamky bodu L). Pomocou otočenia okolo ihly a odmeriame vzdialenosť $L_2 P_{1,2}$, ihla b prejde do polohy b_2 a ihlu b ďalej otočíme okolo ihly a tak, aby na priamke s zaujala polohu b_3 , čím ihla b_3 vyznačí otočený bod L . Spojnica bodu $P_{1,2}$ a otočeného bodu L_0 je otočená stopa n_0 .

Týchto málo príkladov poukazuje na výhody rysovania pomocou kružítkového pravítka. Počet rysovacích pomôcok je minimálny, čo zaručuje lepšiu presnosť nákresu.

Je možné nájsť mnohé ďalšie úlohy z planimetrie i z deskriptívnej geometrie, ktoré možno riešiť a narysovať kružítkovým pravítkom, bez použitia iných rysovacích pomôcok.

M i l a n H e j n ý , ČVUT, Praha:

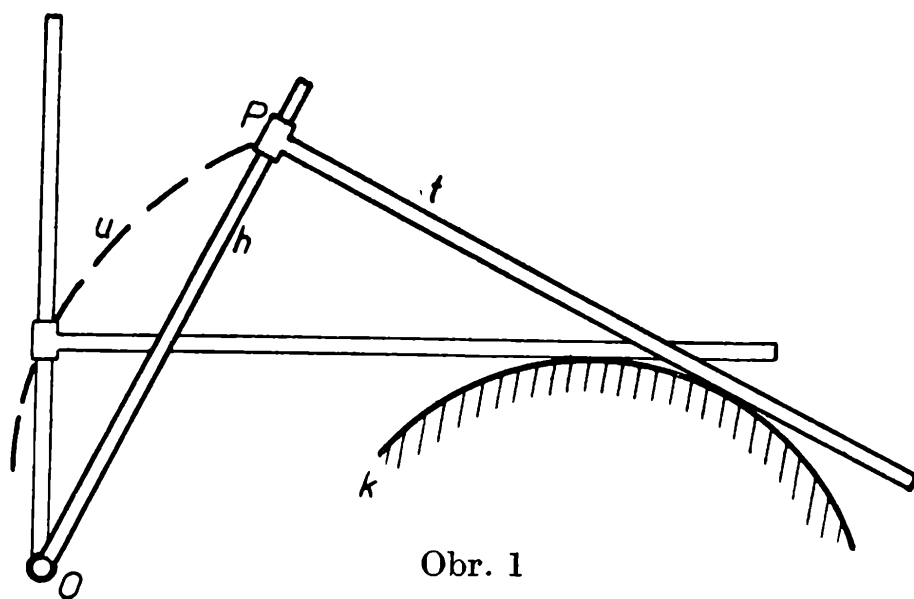
Upätница kružnice

Začnime s názorným príkladom. Tyč h je jedným svojím koncom pevne prichytená na hriadeli (ose) o , okolo ktorej sa môže voľne otáčať. Druhá tyč t je nasunutá na tyč h a môže sa pozdĺž tejto pohybovať. Uhol, ktorý obe tyče zvierajú, sa pri pohybe tyčí nemení a je pravý. Teraz môžeme oprieť tyč t o podperu k kruhovitého tvaru. Označme spojku oboch tyčí písmenom P . Keď začneme tyčou h točiť okolo hriadele o , bude tyč t klzať po tyči h a zároveň bude šmýkať po podpere k . Spojka P vytvorí pri tomto pohybe istú dráhu, ktorú označíme u . Na priloženom obrázku 1 je tučne vytiahnutá počiatočná poloha celej sústavy a slabo je nakreslená jedna z prebiehajúcich polôh. Krivka u je naznačená čiarkovanou čiarou. Pretože polohou spojky P je už poloha celej sústavy (tj. oboch tyčí) úplne určená, stačí vyšetrovať krivku u . Tento článok je venovaný práve vyšetrovaniu krivky u . Upresnime si napred nahodené pojmy.

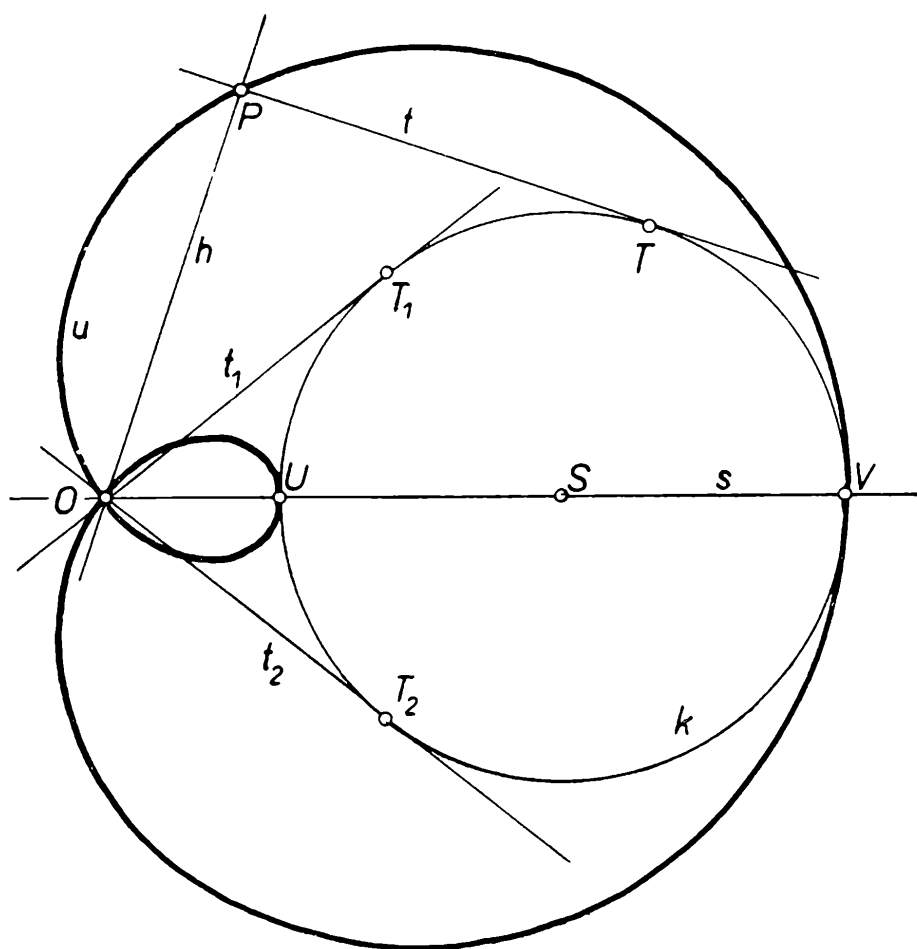
Buď daná kružnica k opísaná zo stredu S polomerom r ; ďalej buď daný bod o . Nech t je dotyčnica ku k a P päta kolmice h spustenej z bodu O na dotyčnicu t . Geometrickým miestom bodov P (pre všetky možné polohy dotyčnice t) je krivka u (obr. 2, 3 a 4).

Krivku u nazývame ú p ä t n i c o u k r u ž n i c e k a b o d u O . Bod O nazývame p ó l o m ú p ä t n i c e u . Tvar krivky u závisí od vzájomnej polohy kružnice k a pólu O . Čitateľ môže porovnať obrázky 2,

3, 4. Na prvom z nich leží pól O zvonka kružnice k , na druhom leží O na k a na poslednom leží O vnútri k . Tučne vyrysovaná úpätnica má na kaž-



Obr. 1

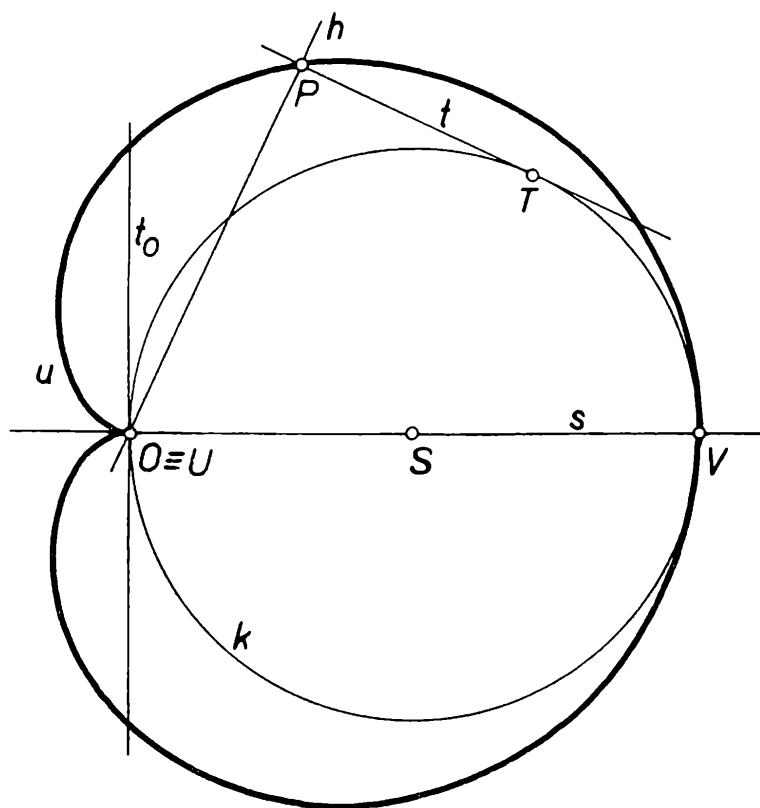


Obr. 2

dom obrázku iný tvar. Dokonca samotná kružnica k sa môže stať svojou úpätnicou. Čitateľ sám zistí, kedy tento prípad nastáva. Aká je preň vzájomná poloha bodu O a kružnice k ?

Kružnica k je súmerná podľa každej priamky, ktorá prechádza jej stredom S . Preto musí byť úpätnica súmerná podľa spojnice s bodov O a S . Prípád, že body O a S splynú, vylúčime. Celá dotyčnica t , s výnimkou dotykového bodu T , leží zvonka kružnice k . Bod P leží na t . Nemôže teda v žiadnom prípade ležať bod P vnútri k . P leží na k jedine vtedy, keď P splynie s T . Potom splynú i priamky h a TS , čiže P leží na s . Takéto body sú vždy práve dva. Sú to priesečníky priamky s a kružnice k , ktoré označíme U, V . Môžeme napísať zhrnutie:

Úpätnica u kružnice $k(S; r)$ a bodu O je krivka súmerná podľa priamky OS . Všetky jej body ležia zvonka kružnice k , iba oba priesečníky U, V kružnice k a priamky OS ležia na kružnici k .



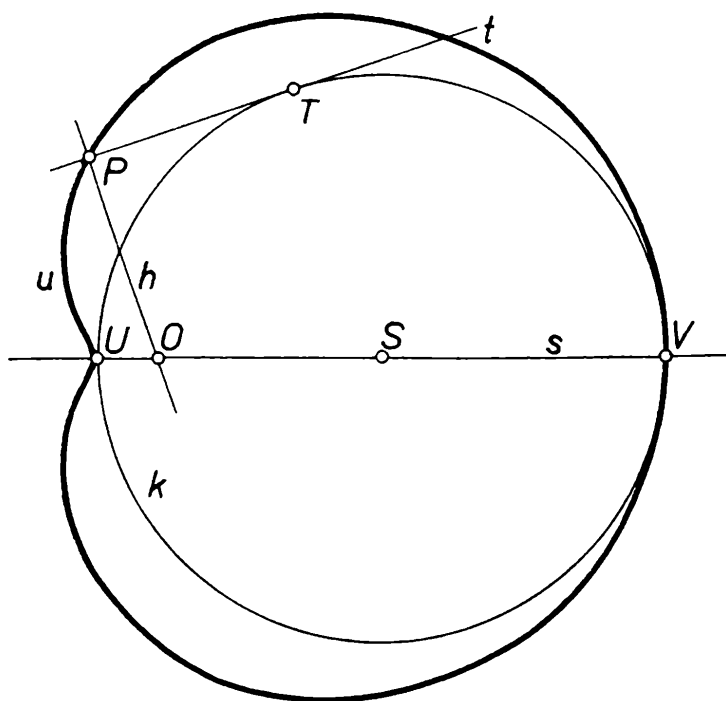
Obr. 3

Keď bod O leží vnútri kružnice k (obr. 4) nemôže, podľa predošlého, ležať na úpätnici. Ak bod O leží zvonka k (obr. 2), možno ním viesť ku k dve rôzne dotyčnice t_1 a t_2 . Päty kolmíc spustených z O na dotyčnice t_1 a t_2 splynú s bodom O . Je teda bod O (v tomto prípade) bodom úpätnice u a to v istom zmysle bodom „dvojnásobným“. V poslednom prípade (obr. 3) leží O na k a existuje jediná dotyčnica t_0 vedená z bodu O ku k . Pre túto opäť päta P_0 splynie s bodom O . Aj v tomto prípade je bod O bodom úpätnice u . Zhrnutie:

Pól úpätnice u leží na úpätnici ak leží zvonka, alebo na kružnici k . Pól ktorý leží vnútri kružnice k neleží na úpätnici.

Nakoniec si ukážeme jednu veľmi zaujímavú vlastnosť úpätnice. Mimo zavedeného už označenia, označíme (obr. 5): stred úsečky OS písmenom D , polovičnú dĺžku úsečky OS písmenom d , kružnicu so stredom D a polomerom d označíme j . Nech h je ľubovoľná priamka idúca bodom O . Ak je h sečnica kružnice j , označíme jej druhý priesečník písmenom L . Ak je h dotyčnicou kružnice j , položíme $L \equiv O$. Nech t a t' sú dve rôzne dotyčnice kružnice k kolmé na priamku h . Podľa Táletovej vety je uhol OLS pravý a preto štvoruholník $LSTP$ (a aj štvoruholník $LST'P'$) je obdlžnikom. Je $LP = ST = r$; $LP' = ST' = r$. Dochádzame tak ku druhej možnej definícii nami vyšetrovanej krivky:

Buď D stred a d polomer kružnice j . Buď ďalej O pevný bod kružnice j a r daná dĺžka. Buď L ľubovoľný bod kružnice j a P, P' dva body priamky OL (ak $O = L$, potom P, P' sú dva body dotyčnice idúcej bodom O (kruž-



Obr. 4

nici j), vzdialené od bodu L o r . Geometrické miesto bodov P a P' je krivka u , ktorá je úpätnicou kružnice $k(S; r)$ a pólu O , pričom bod S je diagonálne protíľahlý bod k bodu O v kružnici j .

Krivky zavedené poslednou definíciou sa nazývajú P a s c a l o v ý m i z á v i t n i c a m i, podľa francúzskeho matematika a filozofa Blaise Pascala (1623—1662¹⁾.

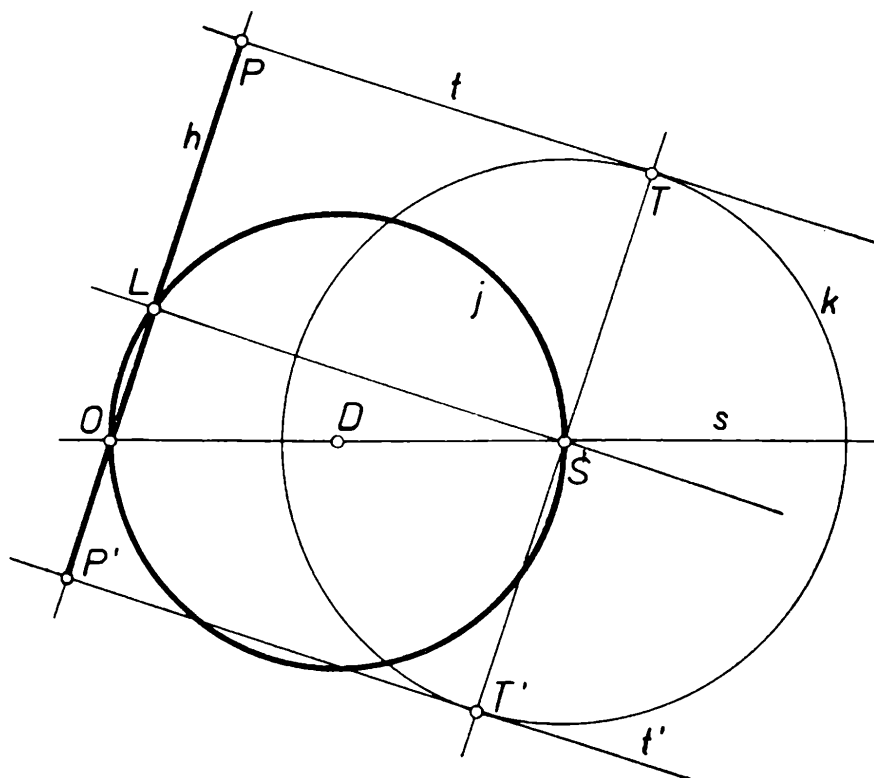
Krivka nakreslená na obrázku 3 má ešte zvláštne meno. Vzhľadom k jej tvaru ju nazývame s r d c o v k o u, či k a r d i o i d o u²⁾. Bod O voláme p ó l o m z á v i t n i c e, číslo r jej p a r a m e t r o m. Zhrnutie:

¹⁾ čítaj: Bléz Paskal

²⁾ kardina = srdce (grécky)

Úpätnica u kružnice $k(S; r)$ vzhľadom ku pólu O , je Pascalovou závitnicou kružnice j (zostrojenej nad priemerom OS) a pólu O , pričom parameter je rovný číslu r . Tvar krivky je typu podľa obrázku 2, 3 či 4 podľa toho či je dĺžka úsečky väčšia, rovnaká alebo menšia ako parameter r .

Srdcovka je zvláštnym prípadom Pascalovej závitnice. Pascalová závitnica je zvláštnym prípadom úpätnice. V tomto článku sme sa oboznámili iba s úpätnicami kružnice, tj. s Pascalovými závitnicami. Keby sme



Obr. 5

miesto kružnice vzali inú krivku, dostali by sme i rôzne tvary úpätníc. Čitateľ oboznámený s kuželosečkami sa môže pokúsiť o vyšetrenie úpätnice kuželosečky vzhľadom ku jej ohnisku. Výsledkom bude vrcholová kružnica (pri elipse a hyperbole), a vrcholová priamka (pri parabole).

Pojem úpätnice v obecnom pojatí zaviedol nemecký geometer Jacob Steiner³⁾ v roku 1838. Čitateľ sa s týmto menom stretol už vo ôsmom a deviatom čísle minulého ročníka v článku doc. Setzera.

LITERATÚRA:

Stanislav Horák: Kardioida, Rozhledy 1957, číslo 6, str. 247.

Doc. dr. Miroslav Menšík: Základy kinematické geometrie, Rozhledy 1957, číslo 5, str. 202.

Čeněk - Medek: Kurs deskriptivnej geometrie II., str. 20.

³⁾ čítaj: Jakob Štajner

Prof. dr. Emil Kašpar, KU, Praha:

Fata morgána

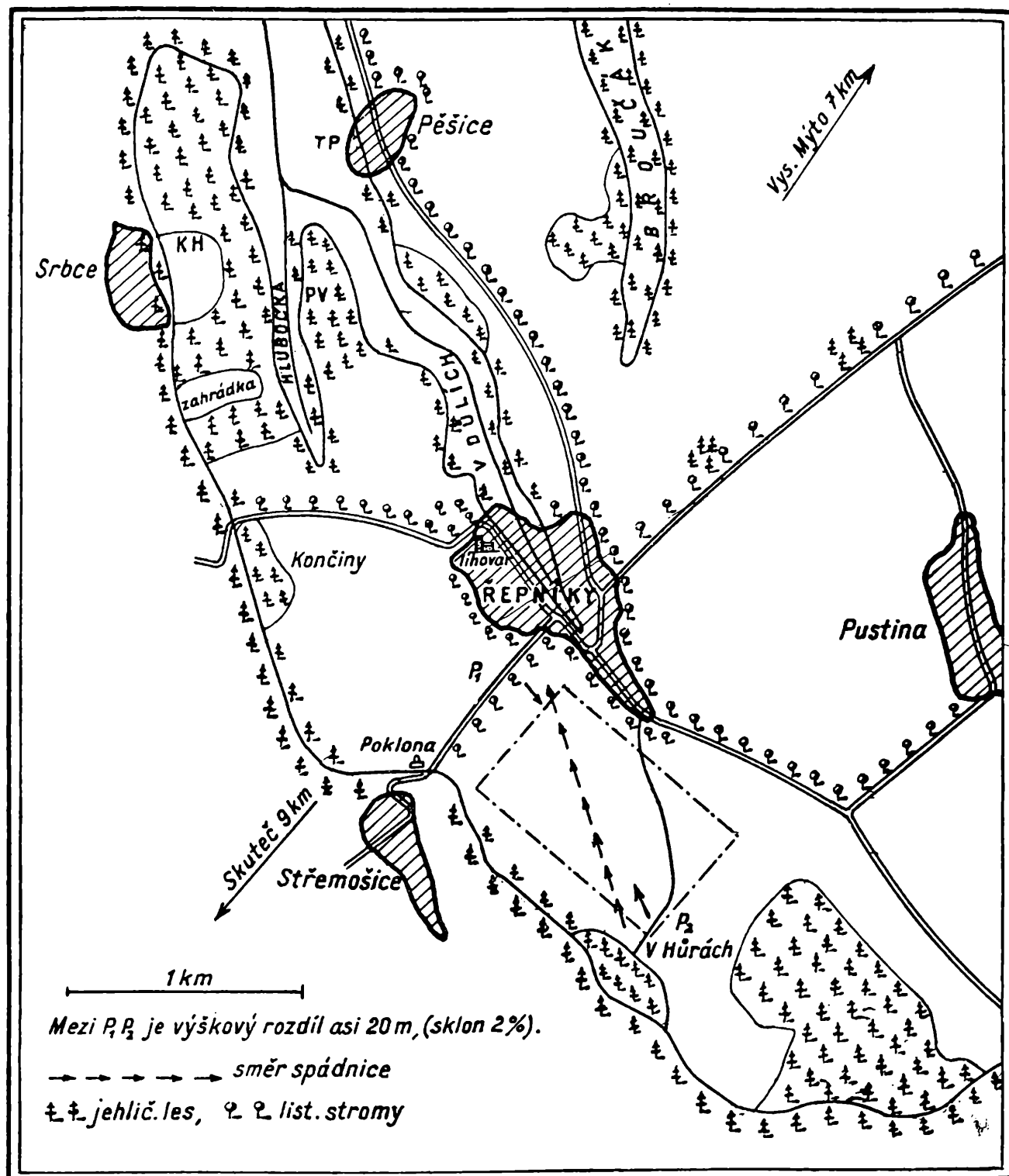
Za slunného bezvětrného počasí je možno často pozorovat v našich krajích nad asfaltovými silnicemi zrcadlení vzduchu. Toto zrcadlení je však jen nepatrné a je způsobeno tím, že se přízemní vrstvy vzduchu silně ohřívají od povrchu rozpálené vozovky. Ve velkém měřítku je však u nás fata morgána vzácným jevem. Často však byly pozorovány značné jevy zrcadlení ve vzduchu v letních a podzimních měsících r. 1959 v nejbližším okolí mé rodné obce *Řepníky*¹⁾. Tyto jevy vzbudily velkou pozornost a zprávy o nich se záhy rozšířily. Jako vždy u vzácných úkazů, tak i tehdy byly zprávy o řepnické „fatě morgáně“ zkreslovány a zveličovány. Do okolí vesnice se sjíždělo mnoho motoristů, dokonce byly i autobusové zájezdy, takže před západem slunce, kdy se zrcadlení ve vzduchu objevovalo zvláště zřetelně a nejčastěji, byla silnice od Řepník k obci Střemošicům (viz obr. 1) přeplněna pozorovateli, dychtivě čekajícími na „fatu morgánu“. Diváci, ať už se dočkali nebo nedočkali, byli zpravidla zklamáni.

Jako u všech vzácných přírodních jevů, vyskytly se i tentokrát pověrečné výklady. Pokusíme se o vysvětlení jevu, který bývá vykládán nesprávně, nebo při nejmenším nepřesně, a to i dokonce ve školních výkladech.

Při řepnickém jevu zrcadlení ve vzduchu pozorovali očití svědkové na obzoru přímou vodorovnou čáru, pod kterou se leskla, „vodní hladina“. Tato čára byla v malé výši, přibližně asi ve výši očí stojícího pozorovatele.

¹⁾ *Řepníky* (asi 400 obyvatel) leží ve východních Čechách v okrese Chrudimském, přibližně uprostřed mezi Vysokým Mýtem a Skutčí. Obec a její okolí je v průměrné nadmořské výši 450 m na náhorní rovině křídové tabule, která ohraničuje polabskou nížinu na jihovýchodě od Pardubic. Tato vrchovina je dobře viditelná na jihu od železniční trati úseku Pardubice–Choceň. Pro zajímavost uvádím, že tato vrchovina ukrývá též stopy hradu Vratislav, na němž r. 1108 zahájil Přemyslovec Svatopluk vyvražďování Vršovců. V Řepníkách se narodil Jan Sobotka (1862–1931), profesor matematiky na Karlově universitě.

Někdy se však musil pozorovatel shýbnout k zemi, aby čáru pozoroval. Pozorovatelé považovali často tuto čáru za „šnúru na prádlo“ a vypravovali, že na této šnúře „viselo a ve větru se pohybovalo prádlo“, že viděli



Obr. 1

„moře s lesknoucí se rozčeřenou hladinou“. Jeden z pozorovatelů viděl řepnický lihovar, jak „byl vzhůru nohama a stál na komíně“, jiný viděl „silniční zábrany proti sněhu“, které ve skutečnosti v okolí obce nejsou,

jiný viděl „chalupy“ atd. Pozorovatelé s velkou fantazií, nebo snad vtipálkové viděli „zámořské lodi, oázy, palmy, stádo velbloudů, stádo slonů“.

*Fata morgána*²⁾ se vyskytuje často v horkých nebo polárních krajinách, tj. tam, kde jsou příznivé podmínky pro vznik velkých a zpravidla neobvyklých teplotních rozdílů ve vodorovných vrstvách vzduchu. Fysikální podstatou zrcadlení je zakřívování světelných paprsků vlivem lomu na vrstvách, které mají různý index lomu: teplejší vrstva má index lomu menší než vrstva chladnější, proto při přechodu do ní nastává lom od kolmice. Zakřívování dráhy světelného paprsku se vysvětluje takto: Procházel-li světelný paprsek z jednoho tělesa do druhého a liší-li se indexy lomu světla látek obou těles, pak se paprsek při přechodu z jednoho prostředí do druhého láme, tj. jeho směr se při přechodu do druhého prostředí náhle změní (není-li dopad na rozhraní kolmý). Změna směru paprsku za jinak stejných okolností je tím větší, čím se indexy lomu obou prostředí víc od sebe liší. Je-li změna indexu lomu malá, je i změna směru paprsku malá. Jestliže si nyní představíme prostředí, v němž se index lomu s polohou mění spojitě (např. mění-li se v tekutině index lomu spojitě s hloubkou), tu se také změna směru paprsku děje spojitě. Dráha paprsku má pak tvar křivky.

V učebnicích se uvádějí pokusy, jimiž je možno ukázat zakřivení dráhy světelného paprsku. Vladimír Novák ve své *Fysice II* (JČMF, Praha, 1921 r. str. 853) uvádí pokus tento³⁾: Do poloviny skleněné vany tvaru kváдру se nalije 10% roztok želatiny a když tato ustydne; přidá se navrch tentýž roztok, v němž se ještě rozpustí cukr. Difúzí obou tekutin mizí postupně ostré rozhraní obou látek a vznikne prostředí, jehož index lomu se směrem nahoru plynule mění přibližně od 1,35 do 1,65. Necháme-li dopadat na bočnou stěnu vany úzký rovnoběžný světelný svazek pod vhodným úhlem dopadu (šikmo dolů téměř vodorovně), postupuje svazek prostředím v souměrném oblouku tak, že z protější stěny vychází pod stejným úhlem, pod nímž dopadal na stěnu vstupní (obr. 2). — Podobné pokusy uvádějí i jiné vysokoškolské učebnice fyziky. *Grimsehl*⁴⁾ uvádí jednodušší úpravu pokusu, ale poněkud náročnější na experimentátorovou obratnost. Do velké skleněné vany se nalije voda a na ni velmi opatrně líh slabě zbarvený fluorescenciem. Mezi oběma kapalinami se vytvoří zřetelné rozhraní. Svazek světla, který dopadá šikmo na rozhraní, se láme tak, že úhel paprsku s kolmicí dopadu v lihu je menší než úhel lomu paprsku ve vodě, neboť líh má větší index lomu ($N \doteq 1,36$) než voda

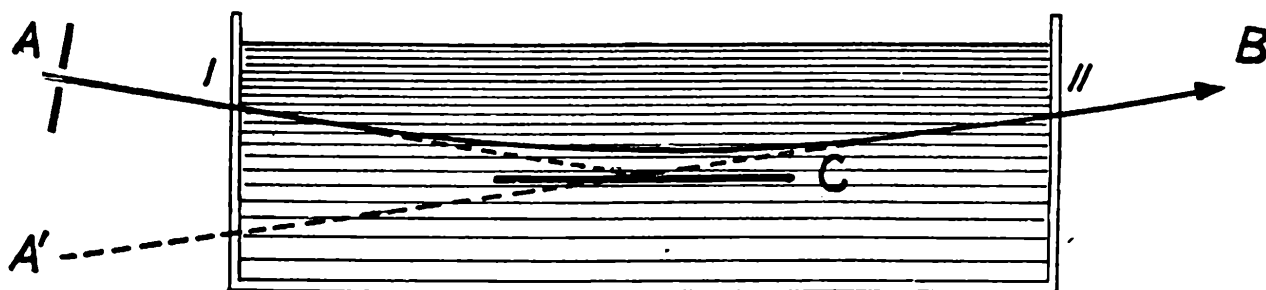
²⁾ Arabské slovo *famurgan* značí vybájenou vílu, která projevuje svou kouzelnou moc zrcadlovými jevy ve vzduchu. *Fata morgána* se nazývá vlastně jev, při kterém vzniká zrcadlení ve vyšších vzduchových vrstvách.

³⁾ Novákův popis pokusu není přesný, proto uvádíme opravený popis. Na zmíněném místě uvádí Novák i příklady různých forem zrcadlení ve vzduchu, jak byla pozorována v přírodě.

⁴⁾ *Grimsehl E.*, Lehrbuch der Physik I, Lipsko-Berlín 1923, str. 988 a násl.

($N \doteq 1,33$). Necháme-li kapalinu stát delší dobu v klidu, pak difúzí zmizí ostré rozhraní a vytvoří se opět vrstva směsi, v níž index lomu spojitě roste směrem nahoru. Rovnoběžný úzký svazek světla vnikající ze strany do této vrstvy se zakřivuje opět tak, že dutá strana je obrácena nahoru (obr. 2). Chod svazku je v roztoku obarveném fluoresceinem velmi dobře patrný. Svazek opouští nádobu v místě II, tak jako by nastal úplný odraz na vodorovném zrcadle umístěném v místě C.

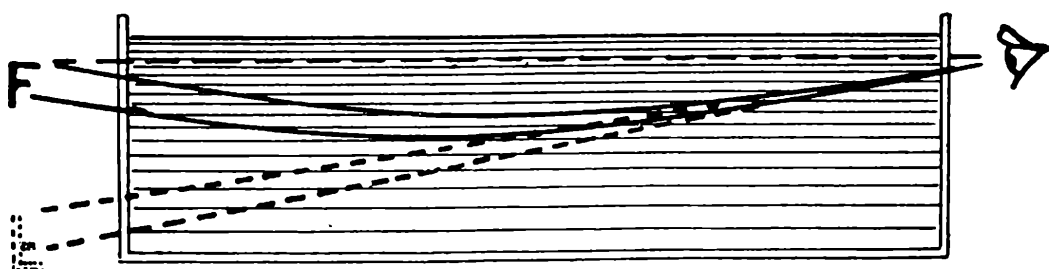
Dívá-li se pozorovatel ze strany výstupu proti chodu vystupujícího svazku z vany, pak vidí jednak přímo předmět, jednak jeho obrácený



Obr. 2

obraz (obr. 3). Vzniká dojem, jako by se předmět zrcadlil na vodorovné zrcadlíkové rovině umístěné v prostředí.

Mohou však nastat ještě složitější jevy. Jestliže svítící bod B leží ve vrstvě tekutiny, ve které se index lomu mění s výškou, pak se může stát, že dva úzké svazky s_1 a s_2 , vycházející z bodu B , se lámou tak, že se sbíhají v jednom bodě B' (obr. 4). Je-li oko pozorovatele v místě B' , pak vidí obraz bodu B zdvojený a to v místech B_1 a B_2 , tak jako by nastal odraz na zrcadlech Z_1 a Z_2 . V přírodě byly skutečně pozorovány jevy dvojího obrazu, někdy ještě složitější, při nichž byly pozo-

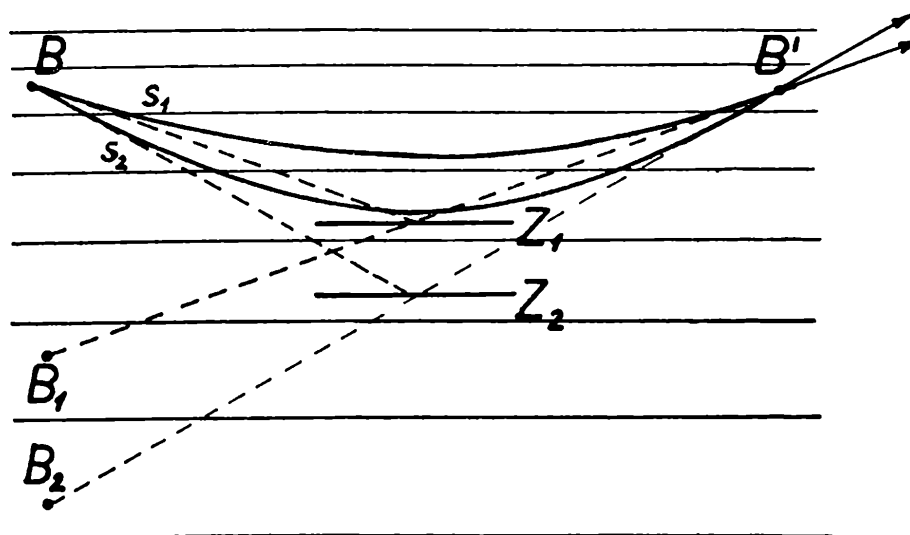


Obr. 3

rovány tři a více obrazů téhož předmětu současně. Výklad těchto složitých odrazů není jednoduchý a vymyká se rozsahu našeho článku.

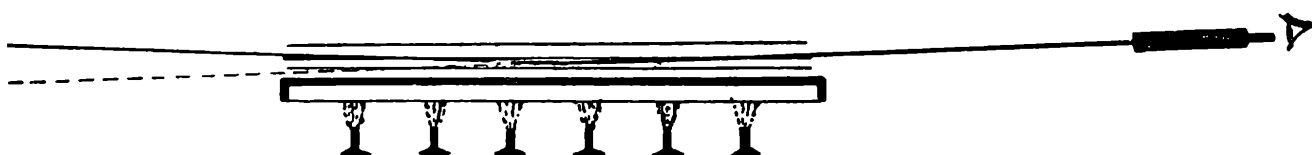
Tak jako při pokusech podle obr. 2 jsou jevy zrcadlení způsobeny tím, že index lomu je v různých výškách ve vrstvách tekutiny různý, stejně je tomu při zrcadlení ve vzduchu. Za vhodných okolností se nižší vrstvy vzduchu prohřejí od povrchu Země, jsou pak opticky řidší, tj. mají menší index lomu než vrstvy chladnější nad nimi. To se

stává zejména za úplného bezvětří, ozařuje-li Slunce povrch Země, který záření značně absorbuje a silně se zahřeje. Jsou to např. krajiny bez rostlinného porostu, nebo v menším měřítku temná vrstva vozovky silnice. Od zahřátého povrchu se silně zahřeje též přízemní vrstva vzduchu. Index lomu vzduchové vrstvy se pak mění s výškou nad povrchem Země podobně jako u pokusů, které jsme právě popisovali, až snad na to, že změna indexu lomu není tak velká. Jestliže pak těmito vrstvami prochází svazek světla ve směru, který se málo



Obr. 4

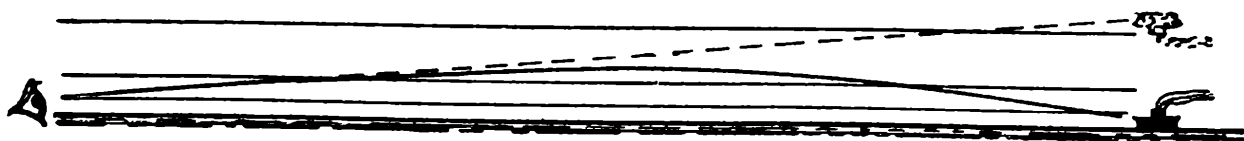
liši od vodorovného, jeho dráha se zakřivuje. Je-li směr paprsků takový, že po dosažení nejnižšího místa se paprsky vracejí opět šikmo nahoru, nastává zdánlivě úplný odraz a horká vrstva vzduchu působí dojem lesklé zrcadlící hladiny. Vzduch přitom není absolutně klidný, proto není ani obraz klidný a pozorovateli se zdá, jako by se předměty, popř. obloha zrcadlily na rozlehlé vodní hladině. Ten dojem je tak silný, že nezkušení cestovatelé na pouštích mohou tomuto klamu skutečně podlehnout.



Obr. 5

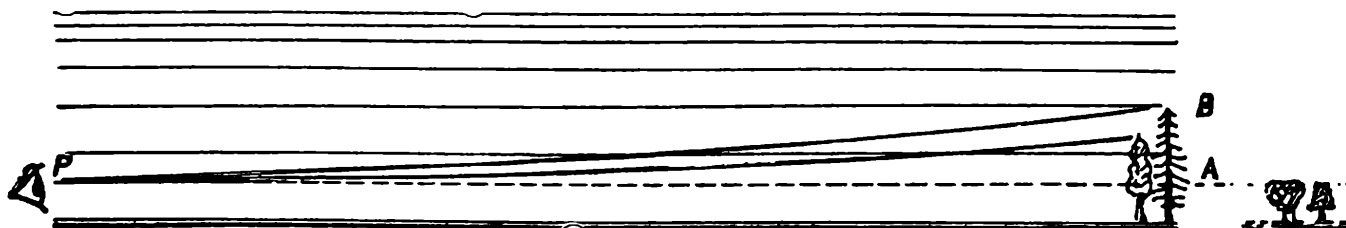
Zrcadlení ve vzduchu můžeme též demonstrovat pokusem. K tomu účelu zahříváme traverzu tvaru U, asi 1 m dlouhou, ve vodorovné poloze, např. řadou plynových hořáků (obr. 5). Potom je možno pozorovat zrcadlový obraz předmětu, na který se díváme dalekohledem podél horního okraje železa. Tento pokus se provádí též v různých jiných obměnách.

Zrcadlení ve vzduchu nastává v přírodě i tehdy, ohřejí-li se vrstvy vzduchu, které jsou ve větší výšce, více než vrstvy přízemní. Tento jev nastává ve vyšších zeměpisných šířkách, kde je povrch Země velmi chladný. Mohli bychom jej demonstrovat pokusem podle obr. 2, jestliže bychom obrátili pořadí vrstev: napřed nalejeme do nádoby vrstvu želatiny s cukrem a po ustydnutí přilejeme roztok čisté želatiny. V tomto případě nastává „totální odraz“ na vrchních vrstvách. V polárních šířkách lze na moři někdy pozorovat ve vzduchu obrácené obrazy vzdálených lodí. Vznikají zakřivováním dráhy paprsků způsobem, který je vyznačen v obr. 6.



Obr. 6

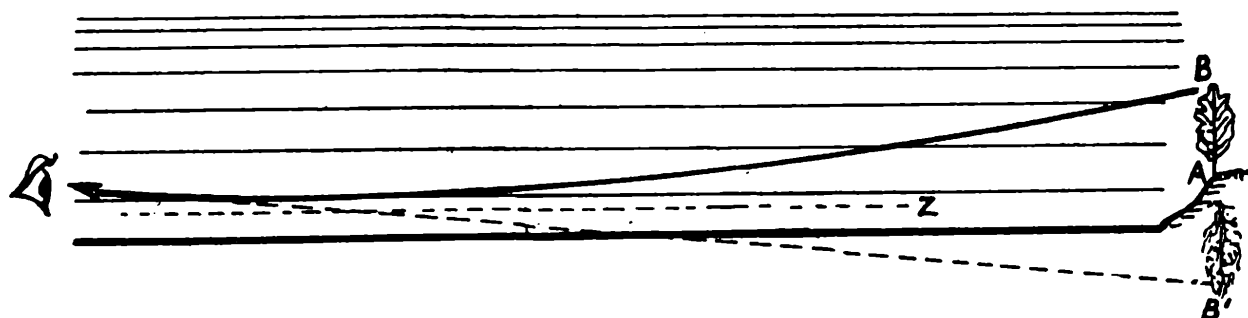
A nyní k výkladu jevů zrcadlení, které byly pozorovány v okolí Řepník. Především je nutno upozornit, že nejde o jevy, které by snad byly pozorovány pouze v nynější době. Starší obyvatelé vypravují o jevu, který často pozorovali ze svých záhumenek a polí a jež označovali slovy „rovnají se lesy“. Při tomto jevu se zdály lesy, které jsou na obzoru, jako by sestřiženy podle vodorovně položeného pravítka. Úkaz „rovnání lesů“ by nasvědčoval tomu, že jde o prohřívání vrstev vzduchu jako při normální fatě morgáně. Při tomto úkazu jsou přízemní vrstvy vzduchu teplejší a paprsky, které jdou šikmo dolů, se



Obr. 7

lámou od kolmice. Chod paprsků je schematicky znázorněn v obr. 7. Předpokládáme, že při tom plochy téže teploty jsou vodorovné a rovnoběžné s povrchem země. Pak paprsky, které postupují vodorovně ve výši našeho oka, nejsou zakřiveny. Jsou to paprsky v rovině PA . To je ona „šňůra na prádlo“, o které mluví nynější pozorovatelé. Z míst, která jsou výše než bod A , přicházejí do oka paprsky, mající dráhu zakřivenou. Protože dráhy paprsků jsou vypouklé směrem dolů, přicházejí do oka pozorovatelů ve směru, který je velmi blízký směru PA . To znamená, že pozorovatel vidí části předmětů, které jsou ve sku-

tečnosti nahoře mezi místy $A-B$, deformovány velmi přibližně do polohy A . Je-li na obzoru les, pak jsou v obraze, který je pozorován z místa P , vrcholy stromů zdánlivě deformovány do polohy A , v krajině pak do vodorovné přímky, procházející místem A . Při větších teplotních rozdílech je změna indexu lomu s výškou větší a pak se může stát, že z bodu B přichází paprsek do oka ne ve vodorovném směru, nýbrž poněkud zdola, tak jako by přicházel z místa B' (obr. 8). Pozorovatel pak vidí neklidný zrcadlový obraz, jako by se předmět AB zrcadlil ve vodní hladině.



Obr. 8

Je samozřejmé, že ve skutečnosti jde o jev velmi složitý, neboť prohrátí vrstev vzduchových není pravidelné. Do oka nepřicházejí z téhož bodu jen paprsky v jednom směru, rozdělení hustoty vzduchu a tím i lámavosti vrstev vzduchových - i na téže místě - se neustále mění, a proto vzniká dojem rozčeřené vodní hladiny, i jiných úkazů, jako zavěšeného prádla, což pravděpodobně nebylo nic jiného než neostře převrácené obrazy kontur krajiny na obzoru ap.

Úkazy zrcadlení ve vzduchu v Řepníkách od srpna do října 1959 byly proto tak časté a zřetelné, že vzbudily velkou pozornost, že v té době byly totiž mimořádně příznivé povětrnostní podmínky. Po dlouhé týdny byl nepatrný nebo téměř žádný pohyb vzduchu, trvale slunečné počasí apod. Podstatným činitelem pro vznik zrcadlení je jistě i zvláštní krajinný útvar. Řepnický katastr je na náhorní rovině, která je ohraničena prudkými svahy asi 60 m vysokými a je zbrázděná údolím „V důlich“, na jehož počátku je rozložena obec (viz obr. 1) a dále lesnatými údolími „Hlubočkami“ a „Broučáku“. Fata morgána byla pozorována na místech, která mají ráz téměř rovné tabule o rozloze o něco menší než 1 km² s velmi mírným sklonem k SSZ. Sklon tabule je asi 2%. Místo vzniku zrcadlení je na obr. 1 vyznačeno čerchaným rámečkem. Zrcadlení ve vzduchu bylo pozorováno nejčastěji při východu i při západu slunce a to směrem od vsi k lesům „V hůrách“, ale též z jiných míst obráceným směrem ke vsi. K vytvoření příznivých atmosférických podmínek přispívá i ta okolnost, že severní „odtoková“ strana řepnického katastru je vroubena vysokými lesy a v hlavě hlavního údolí „V důlich“ je obec, která má dosti husté stromoví. A protože

i boky strání planiny jsou porostlé lesem až k hornímu okraji, vzniká tu útvar velmi ploché a mělké mísy, v němž je proudění vzduchu v přízemních vrstvách značně brzděno.

Konečně je nutno opět zdůraznit, že pozorování jiných objektů, než které se vyskytují v dohledné vzdálenosti od místa pozorování, jako námořních lodí, oáz, palmových hájů, stád slonů nebo velbloudů, tanků ap., patří do říše výmyslů nebo přebujelé fantazie. Ani v Arábii, v Africe a jinde na pouštích nebo na mořích nemůže být pozorováno nic, co by nebylo v dohledné vzdálenosti od pozorovatele. Je ovšem možné, že jsou pozorovány obrazy předmětů a objektů, které jsou vzhledem k pozorovateli pod obzorem, např. za překážkou (zvlněným terénem), nebo za zakřiveným povrchem Země (na moři). Při zrcadlení ve vzduchu totiž můžeme pozorovat předměty „za rohem“ tak, jako třeba můžeme vidět za roh nebo za zeď pomocí vysunutého zrcadla. Fata morgána může být a také byla fotografována. Není tedy správné mínění, které se při řepnických jevech též objevilo, že tyto jevy nelze fotografovat, ježto prý jsou neskutečné. Zrcadlení ve vzduchu může být fotografováno stejně dobře jako kterýkoli jiný obraz v zrcadle. Bohužel, nepodařilo se mně získat snímky řepnické faty morgány, které by byly velmi cenným podkladem pro přesnější fyzikální výklad jevu.

A nakonec ještě poznámku pro čtenáře Rozhledů. V Řepníkách se připravuje dne 2. září 1962 slavnostní odhalení pamětní desky k stému výročí narození prof. Jana Sobotky. Není vyloučeno, že příroda překvapí návštěvníky oslav i vzácnou podívanou na zrcadlení vzduchu.

Inž. Jiří Machalický, ČVUT, Praha:

Úvahy nad vodní kapkou a paprskem

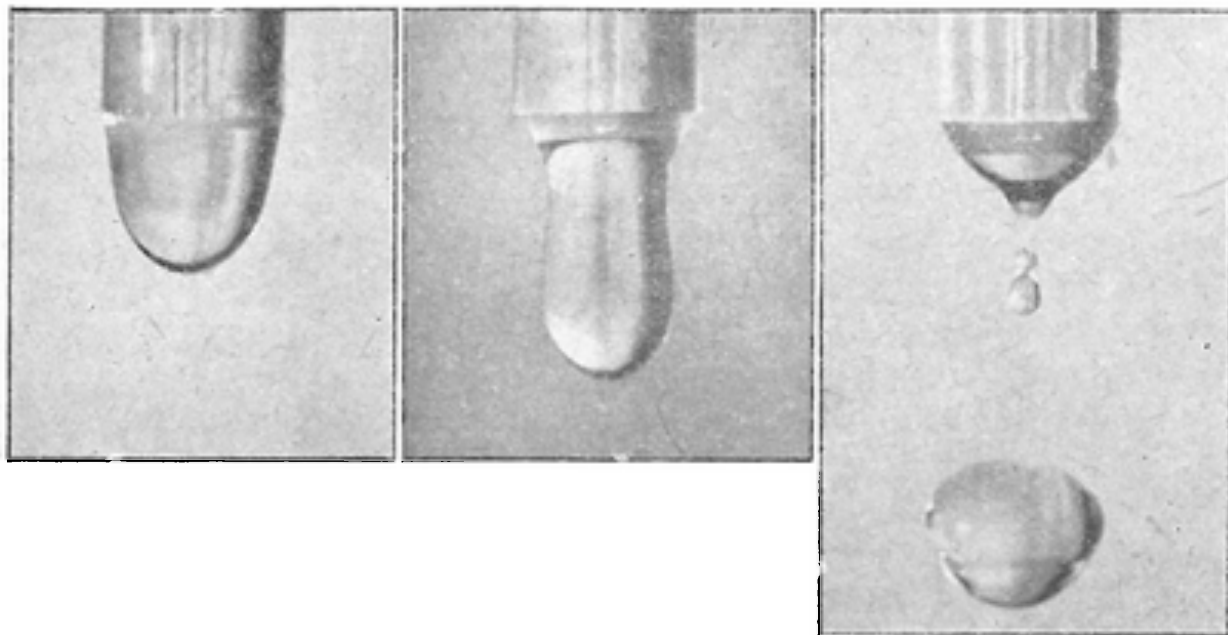
V tomto článku si vzal autor za úkol přivést čtenáře ke krátké úvaze o tvoření a oddělování vodních kapek, o tvaru vodního paprsku a praktických aplikacích těchto zajímavých fyzikálních jevů.

Při prvním pozorování „od oka“ si všimneme zajímavé okolnosti, že totiž časové intervaly, ve kterých nastává odtržení kapky, jsou stejné (když se ovšem během pozorování nezmění tlak nebo jiné podmínky, které mají na odkapávání vliv).

Abychom zachytili tvar kapek, použili jsme fotografického aparátu. V obr. 1 jsou patrné tři fáze tvoření kapky. Skleněná silnostěnná trubička, ze které odkapává voda, má vnitřní poloměr $r = 0,24$ mm, vnější $R = 3$ mm.

Teoreticky studovali tvar kapek při výtoku z kapiláry s kruhovým otvorem Lohnstein a Rayleigh. Jejich výpočty vedou ke vztahu pro objem kapek

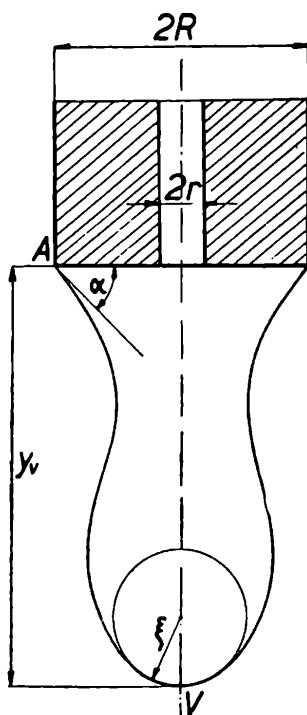
$$V = \pi a^2 R \left[\sin \alpha + \frac{R \left(y_v - \frac{a^2}{\xi} \right)}{a^2} \right], \quad (1)$$



Obr. 1a

Obr. 1b

Obr. 1c



Obr. 2

kde $a^2 = \frac{2\sigma}{\rho g}$, ρ je hustota kapaliny, σ povrchové napětí, g tíhové zrychlení, R vnější poloměr kapiláry, y_v vzdálenost vrcholu kapky od čela kapiláry, ξ poloměr křivosti vrchlíku v bodě V , α je odchylka tečny výtvárné křivky v bodě A od vodorovné roviny.

Hmotu kapky tedy určíme ze vztahu

$$M = \rho V \quad (2)$$

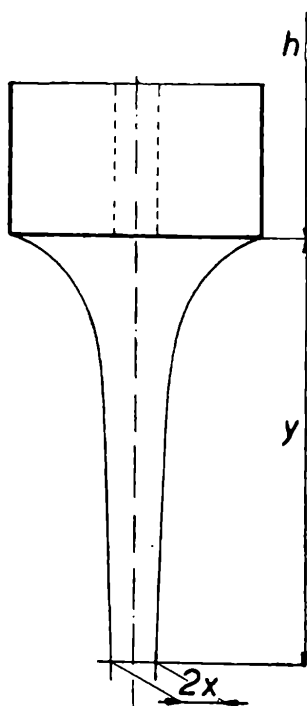
Ve vztahu (1) jak patrně vystupuje povrchové napětí, to zn., že se při tomto jevu uplatňují kapilární síly.

Podrobnějším rozbořem se dá ukázat,

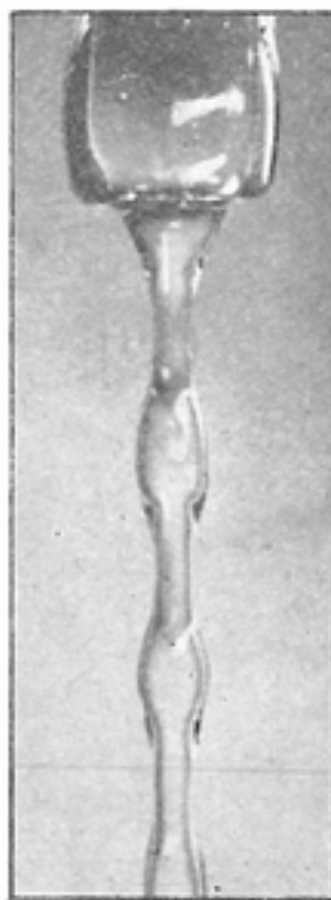
že tyto síly mají rozhodující vliv na tvar kapek. Protože voda má velké povrchové napětí, je tento vliv právě u vodních kapek velmi dobře patrný.

Na zákonitostech odkapávání je založena řada různě modifikovaných metod určení povrchového napětí kapalin. Těmto metodám říkáme kapkové.

Při poněkud větší výtokové rychlosti vytéká voda tenkým pramenkem. Na první pohled je patrné, že průřez proudu není všude stejný (obr.3). Pokuste se stanovit rovnici výtvarné křivky tohoto paprsku. K výpočtu použijte Bernoulliovy rovnice a rovnice kontinuity. Vliv kapilárních sil zahrňte do výpočtu za zjednodušujícího předpokladu, že element paprsku tvoří válcová plocha o poloměru x ; pak lze kapilární tlak vyjádřit Laplaceovým vztahem $p_K = \frac{\sigma}{x}$. Nepřímá závislost kapilárního tlaku na po-



Obr. 3



Obr. 4

loměru je příčinou toho, že ve spodní části se souvislý paprsek účinkem kapilárních sil přeruší a roztrhne se v drobné kapičky.

Zákonitosti výtoku kapalin jsou velmi důležité v řadě technických odvětví. Zde však jde zpravidla o výtok kapaliny pod vysokým tlakem ze zvlášť upravených trysek. V některých případech se snaží konstruktér volit tvar trysky tak, aby vytékající paprsek zůstal souvislý (např. u tzv. hydromonitorů určených k hydromechanizaci zemních a důlních prací, u protipožárních paprsků, vodních paprsků Peltonových turbin atd.). Jindy naopak se snažíme, aby se paprsek co nejdříve roztrhl v drobné

kapičky. Tomuto fyzikálnému ději se říká „atomizace“ a setkáváme se s ním např. při vstřikování paliv v naftových motorech, při rozprašování vody a ochranných látek v zemědělství, při hašení mlhou atd.

Tvar a stabilita takového paprsku závisí na mechanických vlastnostech kapalin, zejména na vazkosti a povrchovém napětí, ale také na výtokové rychlosti, tvaru trysky, obsahu rozpuštěných plynů, odporu vzduchu a ještě na jiných okolnostech.

Na obr. 4 přinášíme snímek vodního paprsku vytékajícího ze skleněné trubičky s eliptickým průřezem.

Tak jsme se od úvah nad kapkami a paprsky kapalin dostali k aktuálním problémům novodobé techniky. Znovu se tu potvrzuje, že i zdánlivě bezvýznamné jevy mohou, jsou-li dokonale poznány, přinést člověku užitek v jeho tvořivé práci.

P ř í k l a d.

Proměřením zvětšeného snímku kapičky (obr. 1c) byly zjištěny při odkapávání vody kapilárou tyto rozměry:

$2R = 0,6 \text{ cm}$	vnější průměr kapiláry
$y_v = 0,98 \text{ cm}$	vzdálenost vrcholu V kapky od čela kapiláry
$\xi = 0,145 \text{ cm}$	poloměr křivosti kapky ve vrcholu
$\alpha = 45^\circ$	odchylka tečny výtvarné křivky u čela kapiláry od vodorovné roviny

S t a n o v t e hmotu kapičky (výsledek $M = 0,083 \text{ g}$).

C S c. E v ž e n Ě í m a n, ČVUT, Praha:

Kirchhoffove zákony

G. K i r c h h o f f (žijící od roku 1824 do 1887) rozšířil Ohmov zákon na vodivé cesty skladající se z viacerých vetví (v ktorých môže byť zapojené viac zdrojov prúdu) tj. na tzv. zložené okruhy (alebo zložené obvody¹⁾). Pravidlá, ktoré zistil, sa nazývajú K i r c h h o f f o v e z á k o n y.

Naučme sa riešiť prúdy v zložených obvodoch. Také sú nielen v každom rozhlasovom a televíznom prístroji, ale všade, kde je zapojených viac zdrojov.

Príklad zloženého obvodu je na obr. 1. Miesta (na obr. F a C), v ktorých sa prúd rozvetvuje, nazývame u z l y. V uvedenom zapojení (aj v nasledujúcich) budú odpory označené obdĺžnikmi, pri ktorých je vy-

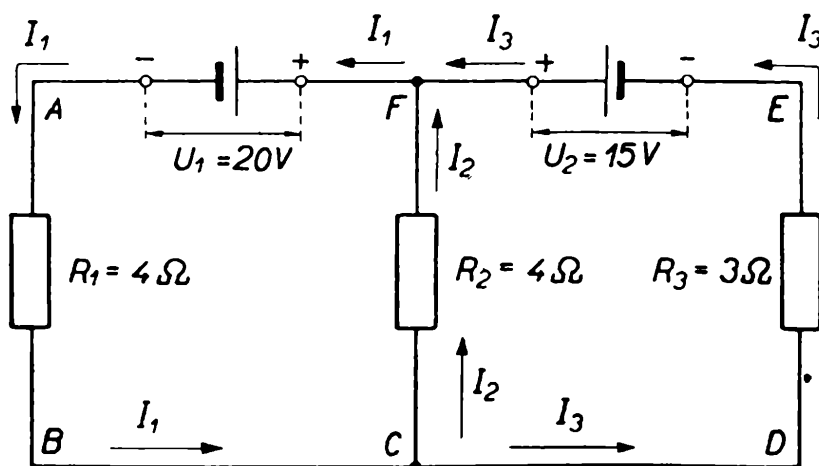
¹⁾ Slovo „o k r u h“ užívame stále len vtedy, ak ide o uzavretý obvod, tj. uzavretú cestu elektrónov.

značená hodnota odporu napr. $R_1 = 4 \Omega$ a zdroje prúdu (články, akumulátory a pod.) dvoma rovnobežnými úsečkami, z ktorých kratšia a hrubšia značí pól záporný, dlhšia a tenšia pól kladný.

Zákony Kirchhoffove, ktoré sú základom výpočtov akýchkoľvek zložených obvodov a sietí, sú vlastne dôsledkom Ohmovho zákona a princípu zachovania energie. Ich dôležitosť vzrastá tým, že ich možno (patrične doplnených) užiť aj pre striedavé okruhy.

I. zákon (v e t a u z l o v á): *Algebraický súčet prúdov, zbiehajúcich sa v uzle, je rovný nule.* Matematicky $\Sigma I = 0$. Pritom označujeme prúd do uzla vchádzajúci znamienkom kladným a prúd z uzla vychádzajúci znamienkom mínus.

Zákon je samozrejímavý; vraví vlastne, že množstvo elektriny, ktoré do uzla priteká, je rovné množstvu, ktoré z uzla odteká („koľko pritečie, toľko odtečie“) teda elektrina sa chová podobne jako nestlačitelná kvapalina.



Obr. 1. Schéma zapojenia k príkladu 1.

V našom príklade (obr. 1) priteká do uzla C prúd I_1 a odtekajú prúdy I_2 a I_3 , tj. $I_1 = I_2 + I_3$, čo možno písať aj anulované vo tvare $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. (Ďalší postup viď v príklade 1!)

II. zákon (v e t a o k r u h o v á; česky sa často nazýva v e t a s m y č k o v á) znie: *Súčet ohmických napätí* (tj. súčinov z odporu R a prúdu I) *je v ľubovoľnom (uzavretom) okruhu rovný súčtu elektromotorických síl²⁾* (tj. vnútorných napätí zdrojov tam zapojených). Matematicky $\Sigma R I = \Sigma U_e$ ³⁾.

P o s t u p: 1. Šípkami vyznačíme smery pohybu elektrónov (nezáleží na tom, či správne alebo nie).

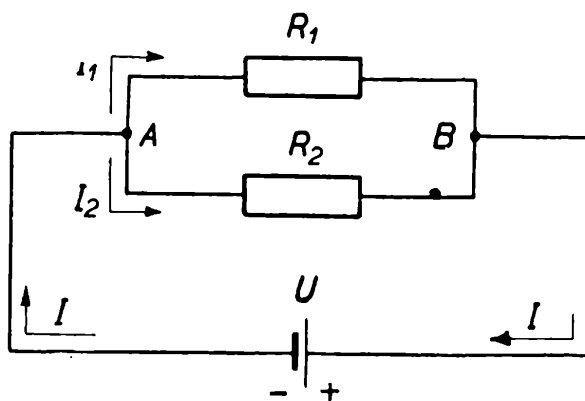
²⁾ Miesto názvu „elektromotorická sila“ by bolo vhodnejšie užívať „elektromotorické napätie“ (Emna). V ďalšom píšeme stručne „emsa“.

³⁾ Symbol Σ (veľké grécke písmeno „sigma“) sa užíva v matematike aj fyzike ako značka pre s ú č e t .

2. Pre uzol užijeme vetu I, pričom označíme prúdy do uzla vchádzajúce znamienkom $+$, z uzla vychádzajúce znamienkom mínus („koľko pritečie, toľko odtečie“).

3. Vyjdime od ľubovoľne zvoleného bodu a postupujme po uzavretom okruhu. Použijeme vetu II a píšeme súčiny $R \cdot I$ ako kladné, ak smer elektrónov súhlasí so smerom postupu; ako záporné, ak šípku naznačený smer je opačný než smer, ktorým postupujeme. Na pravej strane vznikajúcej rovnice píšeme emsu so znamienkom $+$ (resp. $-$), ak narazíme pri svojom postupe *najprv* na $+$ (resp. $-$) pól zdroja. Príklad to osvetlí:

Príklad 1.: Určte prúdy I_1 , I_2 , I_3 v zapojení, ktorého schéma je na obr. 1, kde U_e , tj. emsy zdrojov sú $U_1 = 20$ [V], $U_2 = 15$ [V]; vnútorné odpory zdrojov sú zanedbateľné. V jednotlivých vetvách sú zapojené odpory $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$.



Obr. 2. Schéma zapojenia k príkladu 2.

Riešenie: 1. Predpokladajme, že smer elektrónov pri I_1 je od A k B ; vkreslime šípky. Smer pre I_2 zvolíme zdola nahôr, tj. od C k F . Smer pre I_3 od D k E .

2. Pre uzol C platí podľa I. vzťah (1). tj. $I_1 - I_2 - I_3 = 0$; pre uzol F podobne $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$, dostávame teda túže rovnicu, takže ju nepotrebuje písať.

3. Máme celkom tri uzavreté okruhy: Podľa vety II platí

$$\text{pre ľavý okruh } ABCFA \quad 4 I_1 + 4 I_2 = 20, \quad (2)$$

$$\text{pre pravý okruh } CDEFC \quad -4 I_2 + 3 I_3 = -15, \quad (3)$$

$$\text{pre veľký okruh } ABCDEFA \quad 4 I_1 + 3 I_3 = -15 + 20. \quad (4)$$

Vzniknuté 4 rovnice (z ktorých jedna je závislá) riešime:

$$\text{Ex (1)} \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \quad (2) \Rightarrow 4(I_2 + I_3) + 4 I_2 = 20,$$

takže po úprave máme

$$2 I_2 + I_3 = 5 \quad (2')$$

Rovnicu (2') násobíme činiteľom 2 a sčítajme s rovnicu (3)! Dostaneme tak $5 I_3 = -5 \Rightarrow I_3 = -1 \text{ [A]}$. Znamienko mínus naznačuje, že skutočný smer pohybu elektrónov je opačný, než sme predpokladali. Je teda vidno, že vyriešené korene daných rovníc nám samočinne kontrolujú správnosť smerov.

$$\text{Ex (2')} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} (5 - I_3) = \frac{1}{2} (5 + 1) = 3 \text{ [A]} ;$$

Ex (1) $\Rightarrow I_1 = I_2 + I_3 = 3 - 1 = 2 \text{ [A]}$. Tým je daná úloha vyriešená.

Pokúste sa tento príklad vyriešiť obecné.

P r í k l a d 2. Pomocou Kirchhoffových zákonov určte celkový prúd I a čiastočné prúdy I_1, I_2 v zapojení podľa obr. 2, ak napätie zdroja $U = 30 \text{ [V]}$ a paralelne sú zapojené odpory $R_1 = 20 \Omega, R_2 = 25 \Omega$.

R i e š e n i e: Prvý zákon dá pre uzol A vzťah

$$I - I_1 - I_2 = 0 . \quad (1)$$

Pre okruh: zdroj bod A - odpor R_1 bod B - zdroj dá druhý zákon vzťah⁴⁾

$$I \cdot 0 + R_1 I_1 = U \quad \text{teda } R_1 I_1 = U \quad (2)$$

Podobne pre okruh: zdroj bod A odpor R_2 - bod B zdroj dostávame

$$I \cdot 0 + R_2 I_2 = U \quad \text{teda } R_2 I_2 = U \quad (3)$$

Pre okruh: bod A - odpor R_1 bod B - odpor R_2 - bod A , v ktorom nie je zapojený žiadny zdroj, bude podobne

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 , \quad (4)$$

kde mínusové znamienko vzniklo tým, že postupujeme proti šípke (viď postup, krok 3). Táto rovnica však nie je už potrebná.

$$\text{Ex (2)} \Rightarrow I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{30 \text{ [V]}}{20 \Omega} = 1,5 \text{ [A]} ,$$

$$\text{Ex (3)} \Rightarrow I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{30 \text{ [V]}}{25 \Omega} = 1,2 \text{ [A]}$$

Potom (1) dá $I = I_1 + I_2 = 2,7 \text{ [A]}$.

(Pokračování)

⁴⁾ Pretože odpor vodiča od zdroja k uzlom je zanedbateľný, píšeme v príslušných rovniciach $R = 0$.

Deset let Matematické olympiády

Matematické soutěže mají v Československu dlouholetou tradici: Jednota čs. matematiků a fyziků, která bude v roce 1962 vzpomínat stého výročí svého založení, věnovala totiž po dlouhá desetiletí velkou pozornost právě studentským soutěžím z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie. Rozhledy matematicko-přírodovědecké (jak se dříve jmenoval náš časopis) otiskovaly pravidelně rubriku „Úlohy o ceny“ a seznamy úspěšných řešitelů, kteří byli odměňováni knižními cenami. Tato tradice soutěží žije ostatně v našem časopise dodnes, i když má už po deset let velmi vážného konkurenta v celostátní matematické soutěži, která je známá pod názvem *M a t e m a t i c k á o l y m p i á d a*.

Školní rok 1960—61 je tedy jubilejním, desátým ročníkem Matematické olympiády (MO), a to je jistě příležitost, aby učitelé a školští pracovníci, kteří soutěž organizují, zhodnotili zevrubněji všechnu vykonanou práci. Odborný tisk i časopisy a noviny přinášejí k tomuto malému jubileu články a referáty. Rozhledy matematicko-fyzikální sledují MO už po několik ročníků tím, že jednak uveřejňují texty zadaných úloh, jednak přinášejí seznamy úspěšných olympioniků a zprávy o průběhu soutěže. Deset let, které uplynuly od vzniku československé MO, chceme připomenout svým mladým čtenářům právě tímto článkem.

Snahy o zlepšení vyučování matematice vedly před deseti lety některé školské a vědecké pracovníky k myšlence, aby se uspořádala celostátní matematická soutěž pro studenty výběrových škol. Již v letech 1949, 1950 a 1951 uspořádali učitelé Olomouckého a Ostravského kraje v krajském měřítku matematické soutěže a rovněž školští pracovníci na Slovensku připravovali na školní rok 1951—52 podobnou soutěž. Bezprostřední podnět k uspořádání celostátní MO dal akademik *Eduard Čech*, který navrhl, aby byl ustaven přípravný výbor MO. Tento výbor se skutečně roku 1951 sešel a projednal podmínky soutěže s tehdejším ministerstvem školství, věd a umění a s Československým svazem mládeže. Zkušenosti s obdobnou soutěží v Polsku totiž ukázaly, že je účelné, aby se vedení soutěže ujal nejvyšší školský orgán, který by soutěž hmotně zajistil. Na organizaci soutěže se podílel od počátku také Ústřed-

ní ústav matematický (nynější Matematický ústav ČSAV) a soutěž od jejího prvního ročníku řídil Ústřední výbor MO, jehož prvním předsedou byl *prof. dr. František Vyčichlo*.

Ve školním roce 1951—52 probíhal tedy na našich výběrových školách první ročník MO, přičemž zásady, podle nichž se soutěž pořádala, se poněkud lišily od nynějšího organizačního řádu, který je jistě alespoň v hrubých rysech znám našim mladým čtenářům. Soutěž byla rozdělena pouze do dvou kategorií a účastnili se jí studenti tehdejších gymnasií a odborných škol. Také účast soutěžících na olympiádě nebyla tak masová, jak jsme na to zvyklí z pozdějších ročníků. Pro zajímavost uvádíme, že prvního kola se tehdy účastnilo celkem 1003 řešitelů, kteří zastupovali 139 škol; z nich bylo v prvním kole 166 řešitelů úspěšných. Do druhého kola postoupili všichni úspěšní řešitelé, přičemž ve vyšší kategorii obstálo tehdy 47 účastníků, v nižší pak 30 účastníků. V kole třetím se tehdy setkala 47 studentů z celé republiky, přičemž velmi dobře se umístili zejména účastníci ze Slovenska. Podrobnější informace o organizaci soutěže i o úlohách, které byly tehdy zadány, nalezne čtenář v knížce *P r v n í r o č n í k m a t e m a t i c k é o l y m p i á d y*, kterou napsali *Jan Vyšín* a *Rudolf Zelinka* a kterou roku 1953 vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze. Za touto knížkou následovala pak řada brožur, které informovaly naši širší školskou a matematickou veřejnost o jednotlivých ročnících MO; tyto brožury připravuje každoročně kolektiv autorů vedený *Rudolfem Zelinkou*, jednatelem Ústředního výboru MO.

Počínaje druhým ročníkem soutěže stojí v čele Ústředního výboru MO akademik *Josef Novák*. Ročník třetí přinesl do soutěže významnou novinku: olympiáda byla rozšířena i na žáky s povinnou školní docházkou. Soutěž má od třetího ročníku čtyři kategorie (A, B, C, D), přičemž v kategorii D jsou zařazeni žáci osmých tříd. Ukázalo se, že právě kategorie D zaznamenala veliký příliv řešitelů do olympiády, neboť už ve školním roce 1953—54, kdy tato kategorie vznikla, soutěžilo zde 7600 žáků, kteří vypracovali asi 90 000 řešení. Je pochopitelné, že právě tato „nejnižší“ kategorie dává organizátorům soutěže každým rokem nejvíce práce a že také výběr úloh pro tyto soutěžící je nejobtížnější. Vždyť jde o to, abychom mezi naší mládeží získali co nejširší okruh zájemců o vážnější studium matematiky. Na organizaci kategorie D se od jejího založení podílejí okresní výbory MO, které za osm let nashromáždily velkou řadu zkušeností a připomínek k soutěži, jak o tom svědčí články uveřejňované v časopise *M a t e m a t i k a v e š k o l e*.

O MO se často mluví na odborných poradách učitelů a školských pracovníků a úměrně s tím, jak každoročně vzrůstal počet řešitelů, zvětšoval se i zájem rodičů i širší veřejnosti o tuto soutěž. O olympiádě píše každým rokem nejen všechny naše matematické časopisy, ale sle-

duje ji i denní tisk a jména vítězů soutěže oznamuje v posledních letech také čs. rozhlas. Rovněž zahraniční matematikové jsou o naší soutěži poměrně dobře informováni. Odborné časopisy v SSSR, Polsku, Rumunsku a Maďarsku přinesly zprávy o naší olympiádě a také tisk v Německé spolkové republice ocenil nedávno velkou účast našich studentů na soutěži a otiskl výběr z našich olympijských úloh. Z iniciativy rumunských matematiků byla už po dva roky uspořádána v Rumunsku mezinárodní MO, na kterou jsme i my vyslali několik svých zástupců. Studenti, kteří se úspěšně umístili v československé MO, ukázali tu, že jejich schopnosti snesou srovnání i na mezinárodním poli.

Za deset let prošly naší olympiádou desetitisíce československých žáků a studentů a na organizaci soutěže se obětavě podílela dlouhá řada učitelů a školských pracovníků. Pro mnohého mladého člověka byly právě olympijské příklady prvním podnětem a příležitost k tomu, aby se začal vážněji zabývat studiem matematiky, mnohého studenta pak olympiáda ovlivnila, když se rozhodoval o svém budoucím vysokoškolském studiu a pro naše hospodářství, školství i pro vědecké ústavy získala tak naše soutěž za deset let mnoho mladých inženýrů, učitelů i vědeckých pracovníků.

Přejeme Matematické olympiádě do dalšího desetiletí, aby se úspěšně rozvíjela, neboť to jistě přinese prospěch jak našemu školství, tak celé naší mladé matematické generaci.

J i ř í Š e d l á č e k, CSc Praha

O sedmi mostech města Královce

Ukázka z knížky Jiřího Šedláčka „Nebojte se matematiky“ (str, 79)

Většina čtenářů se už jistě setkala s úkolem nakreslit daný obrázek (domeček, lidskou postavu nebo ornament) jedním tahem. Přitom se požaduje, abychom každou čarou probíhali jen jednou. Je samozřejmé, že obrázek, který chceme nakreslit, musí být „souvislý“: mezi každými dvěma body náčrtku musí být možné spojení po čarách. Tak např. čtyři úsečky, jimiž je tvořen obvod čtverce, představují souvislý obrázek, kdežto např. dvě soustředné kružnice souvislý obrázek netvoří. Budeme se tedy zde zabývat jen souvislými obrázky, jaké jsou např. znázorněny na obr. 1 a 2. Pokusíme-li se jedním tahem nakreslit pětiúhelník i se všemi jeho úhlopříčkami (obr. 1), uvidíme, že se nám to podaří velmi snadno, zatímco na pohled „jednodušší“ čtverec s úhlopříčkami (obr. 2) se nám jedním tahem nakreslit nepodaří. V čem je důvod? Nežli na tuto otázku odpovíme, podívejme se trochu do historie. Úloha o kreslení obrázků jedním tahem je stará asi 250 let. Nebyl to nikdo jiný než slavný Leonhard Euler, který se už kolem roku 1736 zabýval konstrukcemi obrázků jedním tahem. V jeho práci byla tato úloha oděna v proslulý problém sedmi mostů města Královce (nynějšího Kaliningradu).

V Královci měli v Eulerově době ostrov a řeka tekoucí kolem něho byla překlenuta sedmi mosty, jak ukazuje obr. 3. Směr toku řeky je zde naznačen šipkami, ostrov je označen písmenem A, levý břeh je B, pravý břeh C a prostor mezi oběma rameny řeky (v pravé části obrázku) je D. Těžko se dá dnes

zjistit, koho tehdy napadla žertovná úloha, zda je možno přejít všech těchto sedm mostů po řadě tak, abychom každý most přešli jenom jednou a abychom přitom žádný most nevynechali. Snad někdo z veselých kumpánů, kteří se v pokročilejších hodinách nočních vraceli po mostech domů, a ten se stal bezděčně autorem známé úlohy. Řada řešitelů se jistě pokoušela uvedený úkol splnit, ale žádnému se řešení nedařilo. Hádanka se dostala i k sluchu Eulerovu a tím okamžikem se stal ze žertu královeckých kumpánů vážný matematický problém.

Odmysleme si z úlohy všechny podružné detaily, abychom snáze našli odpověď. Místo každé z oblastí A, B, C, D volme v rovině bod (označený příslušným písmenem). Protože z ostrova A vedou na břeh B dva mosty, spojme body A, B dvěma oblouky (nebo lomenými čarami). Také na břeh C se dostaneme z ostrova po dvou mostech, takže ve schematickém obrázku nakreslíme opět dva oblouky mezi A a C. Prostor D spojuje s ostrovem jediný most, takže mezi A, D nakreslíme jediný oblouk. Všimněme si, že mezi břehy B a C není žádné (přímé) spojení po mostě, takže body B, C nebude spojuvat žádný oblouk. Provedeme-li takovou konstrukci i pro zbývající dvojice BD a CD, dostaneme výsledek znázorněný tenčími čarami na obr. 4. Kdyby bylo možno projít všechny mosty tak, jak to je popsáno v otázce, musel by se obrázek 4 (vlastně jeho slaběji vytažená část) dát nakreslit jedním tahem.

Věnujme tedy pozornost slaběji vytažené části z obr. 4, kterou samostatně vyneseme do obr. 5. Uvidíme, že obr. 5 není možno nakreslit jedním tahem. V příspěvku, který předložil r. 1736 Petrohradské akademii věd, dokázal Euler, že úloha o sedmi mostech města Královce není řešitelná, že tedy není možno oněch sedm mostů obejít tak, jak si to hádanka žádá. Ale nejen to: Euler formuloval ve své práci poučku, podle níž ihned zjistíme, zdali se určitý obrázek dá nakreslit jedním tahem, nebo nikoli. S touto poučkou se zde seznámíme. Na obrázcích 1, 2 a 5 upoutávají naši pozornost body, z nichž vycházejí aspoň tři čáry. Na obr. 1 jsou to jednak vrcholy pětiúhelníka, jednak průsečíky jeho úhlopříček (celkem tedy 10 takových bodů). Tyto body nazveme *v r c h o l y o b r á z k u*; také bod, z něhož vychází právě jedna čára, budeme nazývat vrcholem (vrcholem je tedy např. koncový bod určité úsečky.) Počet čar, které v daném obrázku z nějakého jeho vrcholu vycházejí, nazývá se *s t u p e ň* tohoto vrcholu. Tak např. na obr. 1 je 10 vrcholů ú a všechny jsou stupně čtvrtého.

Nyní tedy je možno už vyslovit poučku o kreslení obrázků jedním tahem:

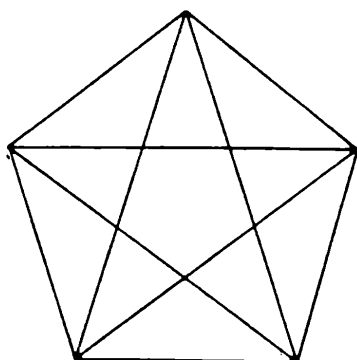
Nutná a postačující podmínka k tomu, aby bylo možno daný souvislý obrázek nakreslit jedním tahem, je podmínka, aby tento obrázek obsahoval právě dva vrcholy lichého stupně, nebo aby neobsahoval žádný takový vrchol.

V prvním případě začne tah v jednom z oněch dvou vrcholů lichého stupně a v druhém z nich skončí; v druhém případě může tah začít ve kterémkoli bodě obrázku a v témž bodě končí. To je tedy důvod, proč úloha o sedmi mostech města Královce není řešitelná. Prohlédneme-li totiž na slaběji vytaženou část na obr. 4, vidíme, že tam jsou čtyři vrcholy lichého stupně.

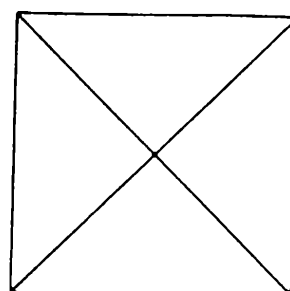
Pozorný čtenář si jistě všiml, že v úloze o kreslení obrázků jedním tahem není vůbec podstatné, zdali čáry (oblouky), které kreslíme, jsou rovné nebo křivé, dlouhé nebo krátké. Kdybychom např. na obr. 1 nahradili úsečky třeba kruhovými oblouky, nic se tím nezmění na zkoumané vlastnosti: Deformovaný obr. 1 je opět možno nakreslit jedním tahem, kdežto deformovaný obr. 2 nelze jedním tahem sestrojít. Tato úloha totiž patří do oddílu matematiky, který se v posledních desetiletích zvláště intenzívně rozvíjel a který se nazývá *t o p o l o g i e*. Topologie (podle staršího názvu *a n a l y s i s s i t u s*) studuje tedy zcela nové vlastnosti geometrických útvarů, než na které je čtenář asi zvyklý ze školy; mohli bychom ji stručně charakterizovat jako „geometrii bez pravítka“.

(Obrázky na třetí stránce obálky)

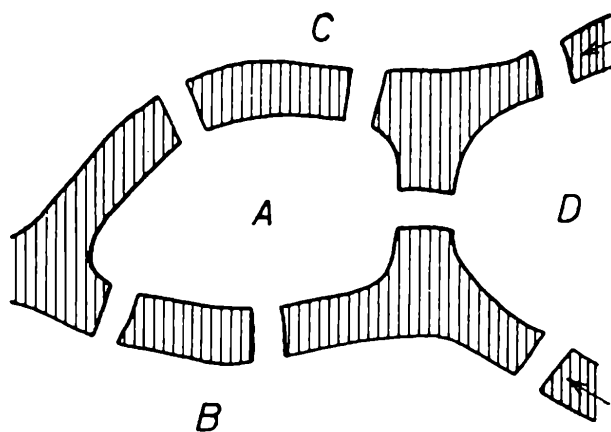
Obrázky k článku „O sedmi mostech města Královce“.



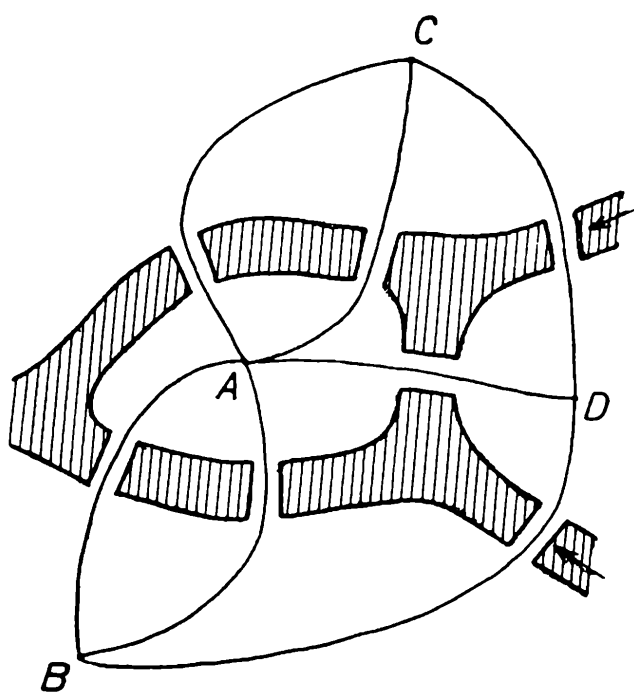
Obr. 1



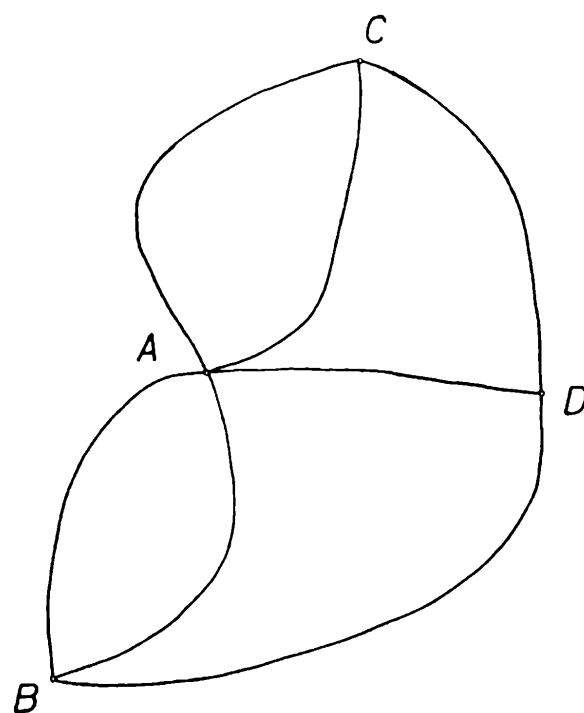
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



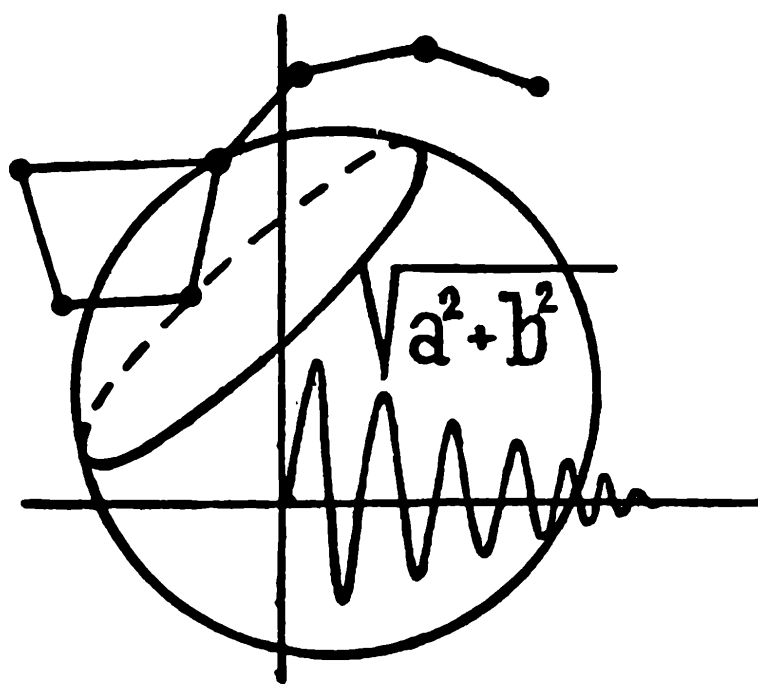
Obr.

12. duben 1961

Při redakční uzávěrce se dovídáme o historické události, že první člověk obletěl v raketě naši Zemi. Blahopřejeme sovětským vědcům a technikům k jejich světovému úspěchu. Opět kolektivní práce tisíců jedinců slavila triumf.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



10

ROČ. 39

1960-61

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Ročník 39 - 1960/61 - číslo 10

Toto číslo vyšlo 10. června 1961

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

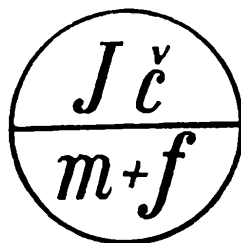
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚN, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Na bojišti 3, tel. 22 52 86

OBSAH :

Inž. E. Kriegelstein: Úvod do diferenciálního počtu (Dokončení).	433
E. Kasková: Další řešení jedné úlohy MO	442
K. Drábek: Několik úloh o parabole s daným parametrem	447
Inž. Z. Kos: Průtok potrubím.	454
Inž. Dr. V. Šindelář: Něco o definici tlaku	460
C. Sc. E. Říman: Kirchhoffovy zákony (Dokončení)	463
M. Smetanová: Československo bude mít dvoumetrový dalekohled.	470
Recenze.	474
Redakční sdělení	476



) 2

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-16*11251. Návrh obálky: inž. arch. Karel Schmied. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1961.

Matematika

Inž. Eduard Kriegelstein, PŠ Praha:

Úvod do diferenciálního počtu

(Dokončení)

Věta 13. Jestliže jsou $f'(x)$ a $g'(x)$ derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a je-li ještě $g(x) \neq 0$ má také podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ derivaci a platí

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Důkaz: Označme $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Pak je

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h g(x)g(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Big] = \\
& = \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g'(x)} [f'(x) g(x) - f(x) g'(x)] = \\
& = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

jak se mělo dokázat.

P ř í k l a d 28. Určeme derivaci funkce $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x - 3)(x^3 - 1) - (2x^2 - 3x + 5)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2} = \\
&= \frac{4x^4 - 3x^3 - 4x + 3 - 6x^4 + 9x^3 - 15x^2}{(x^3 - 1)^2} = \\
&= \frac{-2x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 4x + 3}{(x^3 - 1)^2}.
\end{aligned}$$

P ř í k l a d 29. Máme určit rovnici tečny ke křivce o rovnici $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$ v bodě $x_1 = 3$. Souřadnice $y_1 = \frac{15}{8}$.

Směrnice tečny je - jak již víme - rovna derivaci dané funkce v bodě x_1 . Je tedy

$$y' = \frac{5(x^2 - 1) - 5x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{5x^2 - 5 - 10x^2}{(x^2 - 1)^2} = - \frac{5(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

a směrnice

$$y'_1 = - \frac{5(3^2 + 1)}{(3^2 - 1)^2} = - \frac{50}{64} = - \frac{25}{32}.$$

Hledaná tečna má rovnici

$$y - \frac{15}{8} = - \frac{25}{32} (x - 3),$$

$$32y - 60 = -25x + 75,$$

$$25x + 32y - 135 = 0.$$

Nyní dokážeme větu o derivaci složené funkce.

Věta 14. Budiž $y = f(z)$, kde $z = g(x)$ složená funkce. Má-li funkce $z = g(x)$ derivaci v bodě x a má-li dále funkce $y = f(z)$ derivaci v odpovídajícím bodě z , má derivaci také složená funkce $y = f[g(x)]$ a vypočteme ji podle vzorce

$$y' = [f(g(x))]' = f'(z) \cdot g'(x).$$

Abychom větu 14 dokázali, předpokládejme, že existuje

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+k) - f(z)}{k} \text{ a } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

My máme vypočítat $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h}.$

Budiž $g(x+h) - g(x) = k$, odtud $g(x+h) = g(x) + k = z + k$. Vidíme, že přírůstku h nezávisle proměnné x odpovídá přírůstek k funkční hodnoty funkce $z = g(x)$. Protože existuje derivace $g'(x)$, je funkce $g(x)$ spojitá a platí tedy $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$. Je tedy $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$.

Zlomek $\frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h}$, jehož limitu máme určit, upravme

takto:

$$\begin{aligned} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} &= \frac{f(z+k) - f(z)}{h} = \frac{f(z+k) - f(z)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \\ &= \frac{f(z+k) - f(z)}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Určíme-li nyní limitu, dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} &= \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+k) - f(z)}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(z) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že při počítání derivace složené funkce podle proměnné x musíme nejprve správně určit pomocnou proměnnou z , pak vypočítat derivaci dané funkce podle pomocné proměnné z a násobit ji derivací pomocné proměnné z podle nezávisle proměnné x .

Poznámka. Věta 14 nepozbývá platnosti i když $k = 0$.

Příklad 30. Vypočteme derivaci funkce $y = (x^4 - 1)^5$.

Zde je $z = g(x) = x^4 - 1$ a $y = f(z) = z^5$. Derivace pak je

$$y' = f'(z) \cdot g'(x) = 5z^4 \cdot 4x^3 = 5(x^4 - 1)^4 4x^3 = 20x^3 (x^4 - 1)^4$$

P ř í k l a d 3 1. Máme-li určit derivaci funkce $y = \sqrt[4]{(1 - x^2)^3}$, položíme $z = g(x) = 1 - x^2$ a $y = f(z) = z^{\frac{3}{4}}$. Derivace je

$$\begin{aligned} y' &= f'(z) g'(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} (-2x) = - \frac{3x}{2 \sqrt[4]{1 - x^2}} = \\ &= - \frac{3x \sqrt[4]{(1 - x^2)^3}}{2 (1 - x^2)}. \end{aligned}$$

P ř í k l a d 3 2. Budiž $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. Položme $z = g(x) = x + x^{\frac{1}{2}}$ a $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Derivace je

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{(2\sqrt{x} + 1) \sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x}}}{4x(x + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{(2\sqrt{x} + 1) \sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x}} (x - \sqrt{x})}{4x(x^2 - x)} = \\ &= \frac{x(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) \sqrt{x + \sqrt{x}}}{4x^2(x - 1)}. \end{aligned}$$

Přistupme nyní k určení derivací goniometrických funkcí.

Věta 15. Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$.

Vypočtěme derivaci y' na základě definice.

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

Je na první pohled patrné, že jsme k výpočtu $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ po-

užili věty 5.

P ř í k l a d 33. Chceme-li vypočítat derivaci funkce $y = \sin 2x$, položíme $z = g(x) = 2x$ a $y = f(z) = \sin z$. Pak je

$$y' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x.$$

Věta 16. Funkce $y = \cos x$ má derivaci $y' = -\sin x$.

Důkaz: $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Derivaci funkce $y = \cos x$ vypočteme jako derivaci složené funkce $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

P ř í k l a d 34. Určeme derivaci funkce $y = \cos^2 x$.

$$y' = 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \cdot \sin x = -\sin 2x.$$

Věta 17. Funkce $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$ mají derivace v každém bodě, v němž jsou definovány a platí

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Důkaz provedeme tak, že vyjádříme $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Pak je

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{cotg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

P ř í k l a d 35. Derivujme funkci $y = \operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1(1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = - \frac{2}{(1+x)^2 \cos^2 \frac{1-x}{1+x}} \end{aligned}$$

P ř í k l a d 36. Derivaci funkce $y = \frac{5}{3} \operatorname{cotg}^5 \frac{x}{3}$ vypočteme takto:

$$y' = \frac{5}{3} \cdot 5 \cdot \operatorname{cotg}^4 \frac{x}{3} \cdot \left(- \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} \right) \cdot \frac{1}{3} = - \frac{25}{9} \frac{\operatorname{cotg}^4 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}.$$

Věta 18. Derivace funkce $y = e^x$ je $y' = e^x$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} y' = (e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

P ř í k l a d 37. Chceme-li derivovat funkci $y = 3^{\sin 2x}$, upravme ji na tvar $y = e^{\lg 3 \cdot \sin 2x}$ a derivujme jako složenou funkci:

$$y' = e^{\lg 3 \cdot \sin 2x} \cdot \lg 3 \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2 \cdot \lg 3 \cdot \cos 2x \cdot 3^{\sin 2x}.$$

Věta 19. Derivace funkce $y = \lg x$ je $y' = \frac{1}{x}$.

Důkaz této věty provádět nebudeme a ukážeme si, jak se jí užívá.

P ř í k l a d 38. Derivujme funkci $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

P ř í k l a d 39. Máme-li vypočítat derivaci funkce $y = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, budeme opět postupovat jako u složené funkce.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\cos x}$$

P ř í k l a d 40. Určeme derivaci funkce $y = \log x$ (dekadický logaritmus). Víme, že $\log x = \lg x \cdot \log e$ a proto

$$y' = (\log x)' = (\lg x \cdot \log e)' = \log e \cdot (\lg x)' = \log e \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log e}{x}.$$

Úlohy

Určete derivace těchto funkcí:

$$1. \text{ a) } f(x) = (3x - 1)(4x^2 - 5x + 6); \text{ b) } f(x) = (1 - \sqrt{x}) \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right); \text{ c) } f(x) = \left(2x^2 - \frac{3}{x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x^4} \right)$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \frac{2x + a}{3x - a}; \text{ b) } f(x) = \frac{x^5}{6 - x}; \text{ c) } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 4};$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{10}; \text{ b) } f(x) = \sqrt[3]{1 - 5x + 10x^2}; \text{ c) } f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x}} \quad \text{d) } f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \text{e) } f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \lg(2x + 3); \text{ b) } f(x) = \lg_3(2x^2 + 5x + 6); \\ \text{c) } f(x) = \lg \lg x; \text{ d) } f(x) = \log \log x; \text{ e) } f(x) = \lg x^2; \\ \text{f) } f(x) = \lg^2 x; \text{ g) } f(x) = \lg^2 x^2.$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2}); \text{ b) } f(x) = \lg(2x + \sqrt{4x^2 + 5}); \\ \text{c) } f(x) = \lg \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}; \quad \text{d) } f(x) = \lg \sqrt{x^2 + 9} + \frac{3}{x^2 + 9};$$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt[4]{\lg x}.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = e^{2x} \quad \text{b) } f(x) = e^{3x+4}; \quad \text{c) } f(x) = 3^{4x^2} - 5x + 6; \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{4^x}; \quad \text{e) } f(x) = 7^{1-\sqrt{x}}$$

$$7. \text{ a) } f(x) = 2^x e^x; \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \\ \text{d) } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \sin 4x; \quad \text{b) } f(x) = 2 \cos(2x - 1); \quad \text{c) } f(x) = \operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}; \\ \text{d) } f(x) = \operatorname{cotg}^2 \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$9. \text{ a) } f(x) = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \text{b) } f(x) = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right); \\ \text{c) } f(x) = \lg \sin x; \text{ d) } f(x) = \cos \lg x; \text{ e) } f(x) = e^{\operatorname{tg} x}; \\ \text{f) } f(x) = 3^{\operatorname{cotg} x}.$$

10. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^2 - x - 1$, které jsou rovnoběžné s přímkou $x + y - 1 = 0$.

11. Na křivce $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x - 9$ určete body, v nichž tečny jsou rovnoběžné s přímkou $4x - 2y + 3 = 0$.

12. V kterém bodě křivky $y = \sin x$ svírá její tečna s osou x úhel a) 30° b) 150° ?

13. Jaký úhel svírají tečny křivek $y = \sqrt{3x}$ a $y = \frac{x^2}{3}$ v jejich průsečíku?

14. Určete rovnici tečny a normály (normála je kolmice na tečnu v dotykovém bodě) ke křivce $y = 2 - 4x + x^2$ v bodě $x_1 = 3$.

15. Dráha při vrchu svislém vzhůru je vyjádřena rovnicí $s = ct - \frac{g}{2}t^2$.

Je-li $c = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ vypočtete: a) dráhu uraženou za 5 vteřin; b) rychlost na konci páté vteřiny; c) za jak dlouho dosáhne těleso nejvyššího bodu.

Výsledky

$$1. \text{ a) } 3x^2 - 38x + 23; \quad \text{b) } \frac{\sqrt[4]{x}}{12x^2} (9 - 3\sqrt{x} - 8x \sqrt[12]{x^5} - 14x \sqrt[12]{x^{11}})$$

$$\text{c) } \frac{1}{x^8} (4x^9 + 4x^5 + 9x^4 - 21).$$

$$2. \text{ a) } -\frac{5a}{(3x-a)^2}; \quad \text{b) } \frac{2x^4(15-2x)}{(6-x)^2}; \quad \text{c) } \frac{x^2-4x+1}{(2x^2-3x+4)^2};$$

$$\text{d) } -\frac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x^2})^2}$$

$$3. \text{ a) } 10(4x-3)(2x^2-3x+1)^9; \quad \text{b) } \frac{5(4x-1)}{2\sqrt{1-5x+10x^2}};$$

$$\text{c) } \frac{(4x^3-3x\sqrt{x}-1)\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{6x(x^3-1)}; \quad \text{d) } \frac{3x-2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}; \quad \text{f) } -\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$4. \text{ a) } \frac{2}{2x+3}; \quad \text{b) } \frac{4x+5}{(2x^2+5x+6)\lg 3}; \quad \text{c) } \frac{1}{x\lg x}; \quad \text{d) } \frac{\lg e}{x\lg x};$$

$$\text{e) } \frac{2}{x}; \quad \text{f) } \frac{2\lg x}{x}; \quad \text{g) } \frac{4\lg x^2}{x}$$

$$5. \text{ a) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{b) } \frac{2}{\sqrt{4x^2+5}}; \quad \text{c) } \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{d) } \frac{x(x^2+3)}{(x^2+9)^2}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[4]{\lg x}}{4x \cdot \lg x}$$

$$6. \text{ a) } 2e^{2x}; \quad \text{b) } 3e^{3x+4}; \quad \text{c) } (8x-3)3^{4x^2-5x+6};$$

$$\text{d) } -\frac{\lg 4}{4^x}; \quad \text{e) } -\frac{\lg 7}{2\sqrt{x}} 7^{1-\sqrt{x}}$$

$$7. \text{ a) } 2^x e^x \lg 2; \quad \text{b) } \frac{2e^x}{(e^x-1)^2}; \quad \text{c) } \frac{e^x-e^{-x}}{2}; \quad \text{d) } \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

8. a) $4 \cos 4x$; b) $-4 \sin (2x - 1)$; c) $\frac{2}{(x+1)^2 \cos^2 \frac{x-1}{x+1}}$;
- d) $\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2 \sin^2 \frac{2x}{x^2-1}}$.
9. a) $\frac{1}{\sin x}$; b) $\frac{1}{\cos x}$; c) $\cotg x$; c) $-\frac{\sin \lg x}{x}$; e) $\frac{e^{\lg x}}{\cos^2 x}$;
- f) $-\frac{3^{\cotg x} \cdot \lg 3}{\sin^2 x}$
10. $x + y + 1 = 0$.
11. $T_1(3; 1,5); T_2(2; -\frac{1}{3})$.
12. a) $\pm 0,96 + 2k\pi$ [např. $T_1(0,96; 0,82)$];
 b) $\pm 2,19 + 2k\pi$ [např. $T_2(2,19; 0,82)$].
13. V bodě $x_1 = 0$ je úhel tečen 90° ; v bodě $x_2 = 3$ je úhel tečen $48^\circ 35'25''$.
14. $t \equiv 2x - y - 7 = 0$; $n \equiv x + 2y - 1 = 0$.
15. a) $1\,127,375 \text{ m}$; b) $200,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $t \doteq 25,5 \text{ s}$.

E m a K a s k o v á, Lázně Bělohrad:

Další řešení jedné úlohy MO

Jedná se o úlohu č. 3 kat. A z I. kola VIII. ročníku MO; text úlohy zněl:

Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány velikosti výšky v_c , těžnice t_c , a osy úhlu u_c .

Pro řešitele Matematické olympiády byl tento příklad tvrdým oříškem, jak ukázala většina podaných řešení.

Autorské řešení užívalo bodu, ve kterém se protíná osa strany c s osou úhlu $\sphericalangle ACB$ a který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Jen málo řešitelům se podařilo objevit a dokázat tuto vlastnost, která vede k jednoduchému řešení dané úlohy i k snadné diskusi. V 5. čísle časopisu *Matematika ve škole* uveřejnil jiné řešení s. I m r i c h K o m a r a. Při rozboru úlohy užil tam pěkně fokálních vlastností elipsy a její normály, při konstrukci pak afinního vztahu mezi elipsou a kružnicí sestavenou nad její hlavní osou jako průměrem.

Chci zde podat ještě jiné řešení žákům dostupné, protože je založeno na znalostech základního učiva matematiky pro jedenáctileté střední školy.

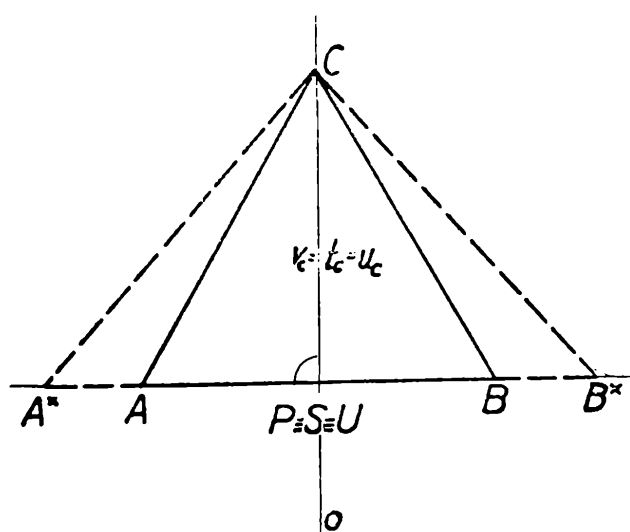
V trojúhelníku, který je řešením úlohy, platí buď $AC = BC$ nebo $AC \neq BC$.

a) Kdyby mělo platit $AC = BC$, musely by dané prvky splňovat podmínku vyplývající z vlastností rovnoramenného trojúhelníka

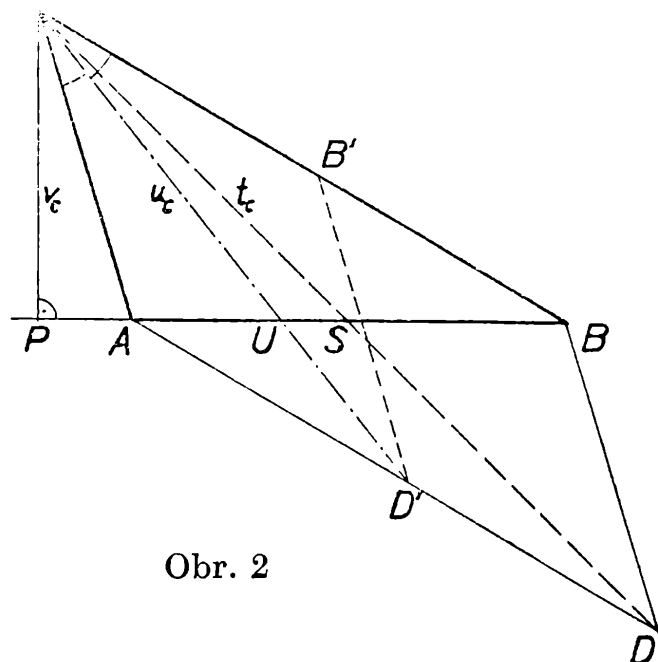
$$v_c = t_c = u_c \quad (\text{I})$$

Úloha by potom měla nekonečně mnoho řešení, neboť velikost stran $AC = BC (> v_c)$ lze zvolit libovolně (obr. 1).

b) Dříve než přistoupíme k rozboru úlohy v případě, že dané prvky nesplňují podmínky (I), takže v trojúhelníku ABC nemůže platit $CA =$



Obr. 1



Obr. 2

$= CB$, sledujeme prvky v_c, t_c, u_c v trojúhelníku ABC , v němž $AC < BC$ (obr. 2, popř. 3). Budiž $CP = v_c, CS = t_c, CU = u_c$.

Protože $AC < BC$, platí také $AP < BP$, takže $S \neq P$; musí být proto splněna nerovnost $v_c < t_c$.

Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ADBC$ a sestrojme také rovnostranný rovnoběžník (kosočtverec nebo čtverec) $AD'B'C$ (D' uvnitř úsečky AD , B' uvnitř úsečky CB - obr. 2 a 3). Osa úhlu $\sphericalangle ACB$ je úhlopříčka CD' . Protože bod D' je vnitřním bodem strany trojúhelníka ADC , jsou i všechny vnitřní body úsečky CD' vnitřními body tohoto trojúhelníka. Proto i bod U je vnitřním bodem úsečky AS , která je těžnicí trojúhelníka ADC .

Bod U je však také vnitřním bodem úsečky PS , což je bezprostředně patrné v případě znázorněném na obr. 2, kde pata výšky P leží na

polopřímce opačné k polopřímce AB . V případě znázorněném na obr. 3, kde bod P je vnitřním bodem úsečky AS , lze dokázat uvedené tvrzení touto úvahou:

Protože $AC < BC$, platí, že $\sphericalangle ACP < \sphericalangle BCP$. Dále je

$$\sphericalangle ACU = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} (\sphericalangle ACP + \sphericalangle BCP)$$

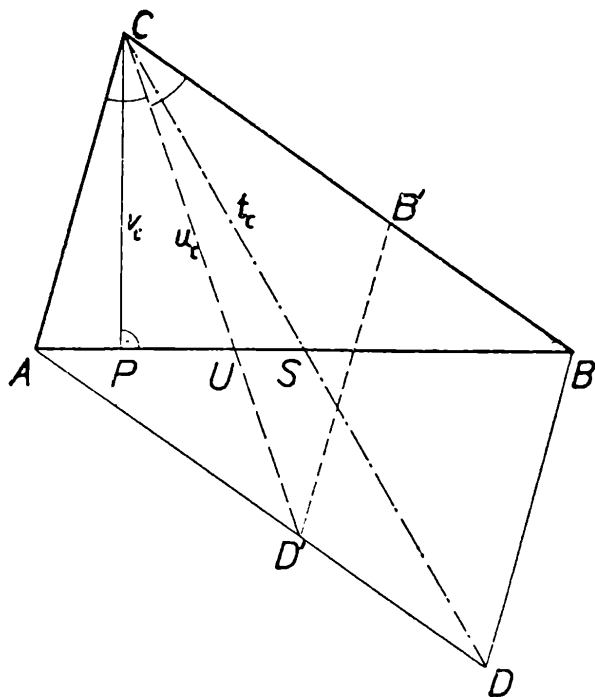
a proto

$$\sphericalangle ACU > \sphericalangle ACP$$

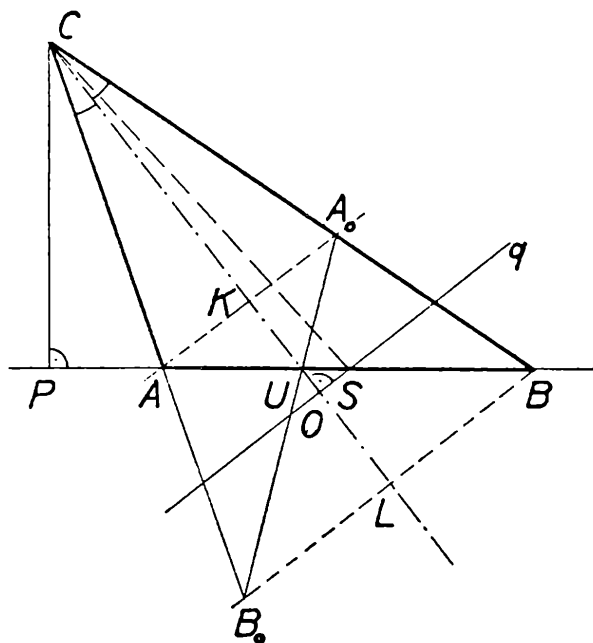
Proto také leží bod U mimo úsečku AP a je tedy uvnitř úsečky PS .

Z á v ě r. Na přímce AB jsou vyšetřované body nutně v pořadí P, U, S .

Protože v trojúhelníku lze provést vzájemnou záměnu pojmenování vrcholů A, B bez vlivu na velikost a polohu úseček CU, CS, CP , je uspořádání bodů P, U, S vztahem platným v každém trojúhelníku ABC , v němž platí $CA \neq CB$.



Obr. 3



Obr. 4

V tomto uspořádání je obsažena též podmínka, kterou musí splňovat dané prvky, má-li být řešením úlohy trojúhelník ABC , ve kterém by platilo $AC \neq BC$. Tato podmínka zní

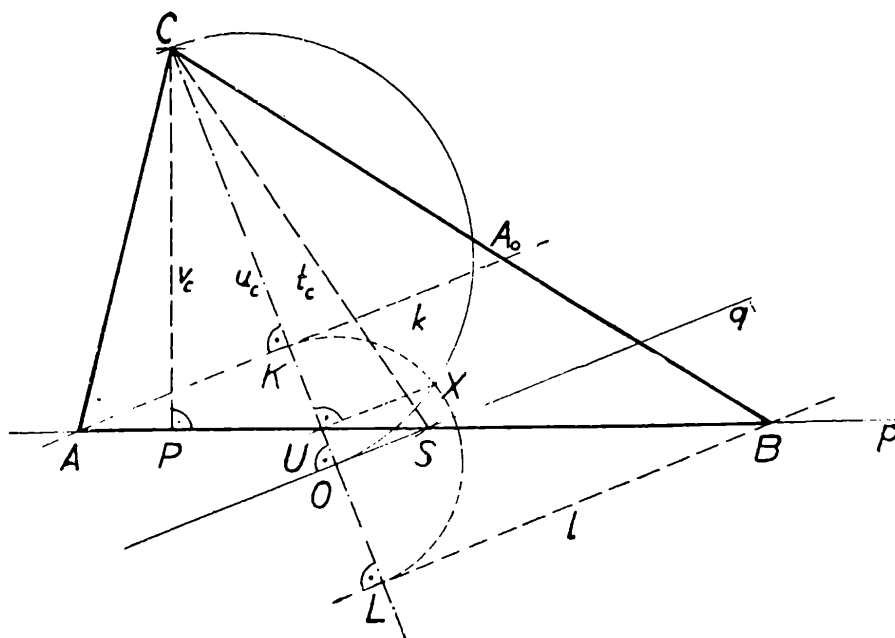
$$v_c < u_c < t_c. \quad (\text{II})$$

Přistupme nyní k vlastnímu rozboru úlohy.

R o z b o r. Předpokládejme, že úlohu řeší trojúhelník ABC , jehož popis je uspořádán tak, že platí $AC < BC$. Sestrojme trojúhelník A_0B_0C souměrně sdružený k trojúhelníku ABC podle osy ležící v přímce CU . Vznikne tak čtyřúhelník AA_0BB_0 (obr. 4), který je zřejmě rovnora-

$$\frac{UK}{UL} = \frac{AA_0}{BB_0} \text{ (ze stejnolehlosti se středem } U \text{) ,}$$

$$\frac{AA_0}{BB_0} = \frac{CK}{CL} \text{ (ze stejnolehlosti se středem } C) ,$$

$$\frac{UK}{UL} = \frac{CK}{CL}. \quad (1)$$


Označme $x = OK = OL$ poloviční výšku lichoběžníka AB_0BA_0 a dále $n = OU$ velikost známé úsečky na ose lichoběžníka. Potom

$$UK = x - n, \quad UL = x + n,$$

$$CK = CU + UO - OK = u_c + n - x,$$

$$CL = CU + UO + OL = u_c + n + x.$$

$$\frac{x - n}{x + n} = \frac{u_c + n - x}{u_c + n + x}$$
$$x^2 = n(n + u_c),$$

tj.

$$OK^2 = OL^2 = OU \cdot OC \quad (2)$$

Ze vztahu (2) lze použitím Euklidovy věty sestrojít úsečku $OK = OL$. Z nalezených středů K, L obou základů snadno pak už sestrojíme pomocný lichoběžník AB_0BA_0 a tím i hledaný trojúhelník ABC .

K o n s t r u k c e (obr. 5). Na přímce p , na kterou chceme umístit stranu $AB = c$, zvolíme patu P výšky v_c . V jedné z polovin určených přímkou p sestrojíme $PC \perp p$, $PC = v_c$. Dále ve shodě s podmínkou (II) sestrojíme $CU = u_c$, $CS = t_c$, při čemž ovšem dbáme také na dodržení pořadí $P U S$. Zřejmě tedy je třeba sestrojít t_c i u_c v téže poloovině vzhledem k hranici PC . Volba opačné poloviny by vedla k řešení souměrně sdruženému.

Bodem S vedeme přímkou $q \perp CU$. Dostaneme průsečík $O \equiv q \cdot CU$. Úsečku OC učiníme přeponou pravoúhlého trojúhelníka OCX , ve kterém je bod U patou výšky UX . Platí o něm tedy

$$OX^2 = OU \cdot OC.$$

Přeneseme potom na osu UC $OK = OL = OX$ a takto nalezenými body K, L na přímce CU vedeme přímky k, l rovnoběžné s přímkou q . Jejich průsečíky A, B s přímkou p jsou vrcholy hledaného trojúhelníka ABC .

D ů k a z k o n s t r u k c e. V sestrojeném trojúhelníku ABC je CP skutečně výškou v_c , CS je těžnicí t_c , neboť $SA = SB$ (bylo totiž $OK = OL$). Protože při konstrukci byl uskutečněn vztah $OU = \frac{OK^2}{OC}$, platí tam také

$$\frac{UK}{UL} = \frac{OK - OU}{OK + OU} = \frac{OK - \frac{OK^2}{OC}}{OK + \frac{OK^2}{OC}} = \frac{OC - OK}{OC + OK} = \frac{CK}{CL}$$

Ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle AUK \sim \triangle BUL$ vyplývá $\frac{UK}{UL} = \frac{AK}{BL}$

a ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle CA_0K \sim \triangle CBL$ opět $\frac{CK}{CL} = \frac{A_0K}{BL}$,

takže je $\frac{AK}{BL} = \frac{A_0K}{BL}$. Proto $AK = A_0K$ a tedy i

$$\sphericalangle ACK = \sphericalangle A_0CK \equiv \sphericalangle BCK.$$

Polopřímka $CK \equiv CU$ je osou úhlu $\sphericalangle ACB$ v sestrojeném trojúhelníku.

D i s k u s e. Je-li splněna podmínka (II), tj. $v_c < u_c < t_c$, lze uvedenou konstrukci vždy provést, takže existuje právě jeden trojúhelník

vyhovující dané úloze s nestejně velkými stranami vycházejícími z vrcholu C .

Je-li splněna podmínka (I), tj. $v_c = u_c = t_c$, řeší danou úlohu nekonečně mnoho trojúhelníků rovnoramenných.

Není-li splněna podmínka (I) ani (II), nemá daná úloha řešení.

P o z n á m k a. Uvedenou konstrukci i její odůvodnění lze velmi jednoduše odvodit z vlastností úplného čtyřrohu AA_0BB_0 , v němž body $CUKL$ tvoří tzv. harmonickou čtveřinu, tj. $\frac{CK}{UK} : \frac{CL}{UL} = -1$. Protože bod O je středem úsečky KL , je vztah (2) rovností běžně užívanou v syntetické geometrii a odvozovanou metodami geometrie projektivní. V článku jsou však tyto vztahy vedoucí k jednoduchému řešení úlohy odvozeny elementárním způsobem.

Deskriptivní geometrie

K a r e l D r á b e k, ČVUT, Praha:

Několik úloh o parabole s daným parametrem

Připamatujme si nejdříve některé známé vlastnosti paraboly (viz např. učebnici Deskriptivní geometrie pro 9. post. ročník jedenáctiletých středních škol).

Tečna t paraboly v jejím bodě T je přímka, která má s parabolou společný jeden bod (a všechny ostatní body této přímky jsou vzhledem k parabole vnější body). Normála n paraboly v jejím bodě T je přímka kolmá na tečnu v bodě T . Pro tečnu t v bodě T (a obdobně pro normálu n v témž bodě T) platí známý vztah, že je osou příslušného úhlu průvodičů (obr. 1). Přitom tečna pólí tzv. vnější úhel průvodičů, tj. úhel, který obsahuje vrchol A paraboly, příp. k němuž vrcholový úhel obsahuje tento bod, kdežto normála pólí tzv. vnitřní úhel průvodičů, který je vedlejším úhlem k předešlému a neobsahuje proto v žádném případě vrchol paraboly.

Označíme-li V průsečík tečny t s osou o paraboly, T_1 patu kolmice spuštěné z bodu T na její osu o a U průsečík normály n s osou o , nazýváme pak délku T_1V subtangentou paraboly a délku T_1U pak její subnormálou.

Vlastnost subtangenty, které často při konstrukcích paraboly používáme, je vyjádřena známou větou:

Subtangenta paraboly je půlena jejím vrcholem.

Jestliže nyní úsečku FF_0 (tj. vzdálenost ohniska F paraboly od přímky řídící d) označíme p a nazveme *parametrem* paraboly, pak pro každou subnormálu platí věta:

Subnormála paraboly má konstantní délku rovnou parametru.

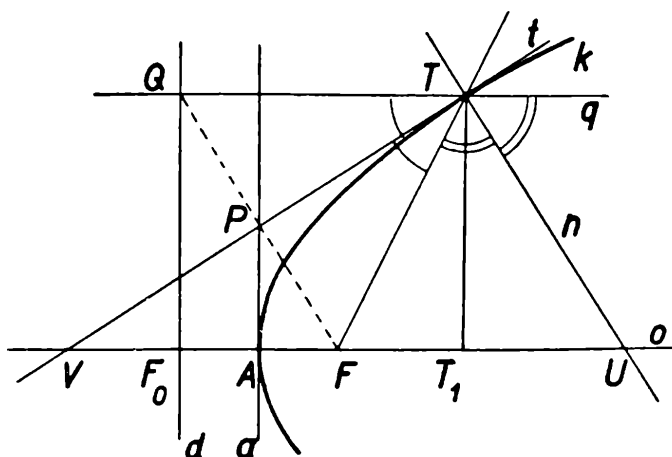
D ů k a z (obr. 1). $\Delta TT_1U \cong \Delta QF_0F$ (ssu)

a tedy $T_1U = FF_0 = p$.

V dalším se budeme zabývat úlohami o parabole, při čemž jedním z určujících prvků bude parametr p .

Ú l o h a 1. *Parabola je dána tečnou t , osou o a parametrem p .*

R o z b o r. Z obr. 1 plyne, že je třeba sestrojít pravoúhlý trojúhelník TT_1U (s pravým úhlem při vrcholu T_1) tak, aby jeho odvěsna T_1U délky p ležela v ose o , přepona TU byla kolmá k tečně t a vrchol T byl na přímce t .



Obr. 1

K o n s t r u k c e. Stanovme pomocný pravoúhlý trojúhelník $T'T_1'U'$ (s pravým úhlem při vrcholu T_1') tak, že odvěsna v ose o je $T_1'U' = p$ přepona $T'U'$ je kolmá k t (obr. 2). Tento trojúhelník je shodný s hledaným trojúhelníkem TT_1U , kde T je bod dotyku tečny t a paraboly. Proto posuneme sestrojený trojúhelník $T'T_1'U'$ rovnoběžně směrem osy o tak, aby bod T' se stal bodem T na přímce t . Pomocí věty o subtangentě určíme vrchol paraboly

a tečnu vrcholovou, její ohnisko F pak jako průsečík kolmice v bodě P (kde P je průsečíkem dané tečny t a vrcholové tečny a) k tečně vrcholové s osou o (nebo nanesením úsečky rovné polovině parametru na polopřímku VA od bodu A).

D ů k a z plyne z konstrukce, neboť sestrojená parabola splňuje podmínky naší úlohy.

D í s k u s e. Řešení úlohy vždy existuje, pokud je přímka t různoběžná s osou o paraboly. Víme však, že to je podmínka pro to, aby přímka byla tečnou paraboly,¹⁾ neboť neexistuje tečna paraboly, která by byla s její osou rovnoběžná. Existují dvě řešení středově souměrná podle bodu V (tj. průsečíku tečny t a osy o hledané paraboly), neboť je možno sestro-

¹⁾ V dalším budeme vždy mlčky při diskusích předpokládat, že tečna t hledané paraboly je osou s o různoběžná.

jit dva trojúhelníky $T'T_1U'$, $T''T_1U''$ středově souměrné podle zvoleného bodu T_1 na ose o .

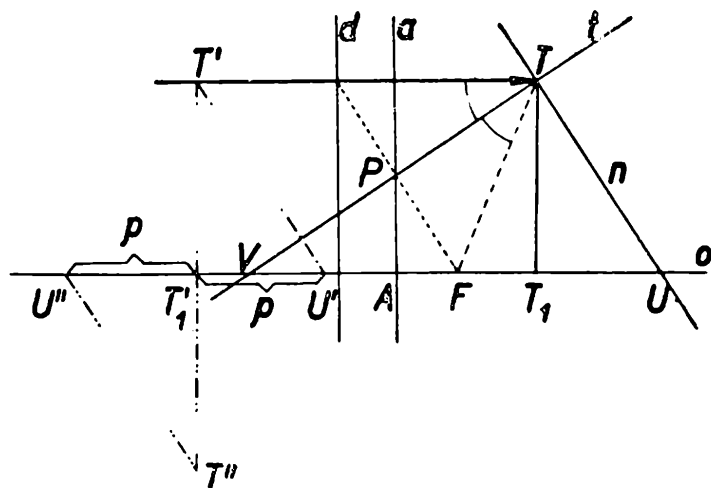
Ú l o h a 2. Parabola je dána tečnou t s bodem dotyku T , směrem osy so_p (tj. přímkou rovnoběžnou s osou o paraboly) a parametrem p .

R o z b o r je stejný jako v úl. 1.

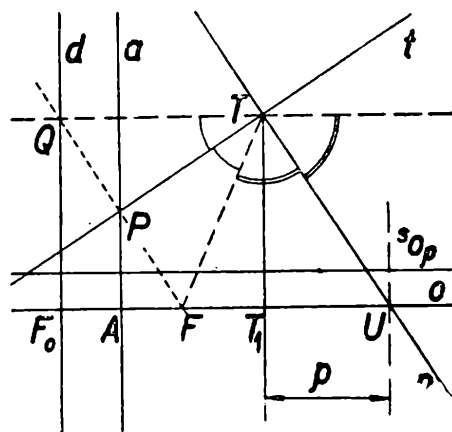
K o n s t r u k c e (obr. 3). Pro hledaný pravoúhlý trojúhelník TT_1U známe velikost odvěsny $T_1U = p$ protilehlé k vrcholu T , pro druhou odvěsnu a přeponu potom přímky, které je obsahují. Je totiž $TT_1 \perp so_p$, $TU \perp t$. V přímce T_1U dostáváme osu paraboly, jejíž další konstrukce je táž jako v úl. 1.

D ů k a z plyne z popsané konstrukce.

D i s k u s e. Protože lze sestavit dva trojúhelníky požadované vlastnosti středově souměrné podle bodu T , existují dvě paraboly středově souměrné podle bodu T , které řeší naši úlohu.



Obr. 2



Obr. 3

Ú l o h a 3. Parabola je určena bodem M , osou o a parametrem p .

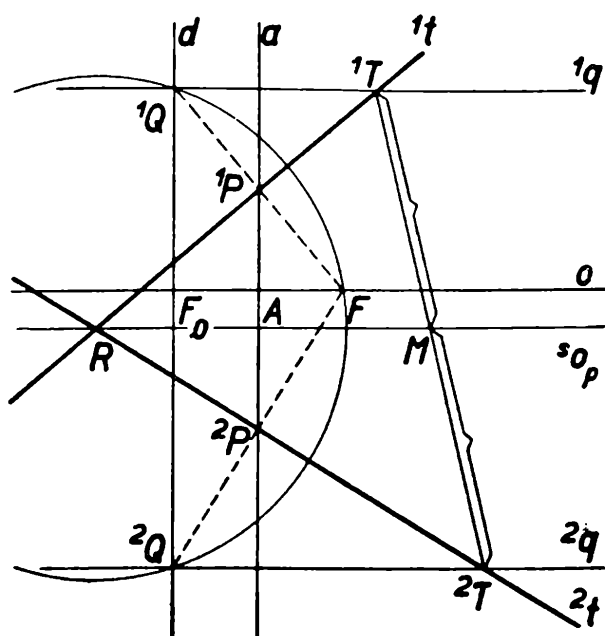
Řešení úlohy proveďte si sami jako cvičení (použijte k tomu vztahu o subnormále paraboly) a zvláště rozhodněte o počtu možných řešení a o jejich vzájemné poloze.

Než přistoupíme k dalším úlohám, všimneme si toho, že každé dvě různé paraboly k , k' se stejným parametrem p jsou vždy (přímo) shodné, tj. že buď posunutím směrem AA' (kde A je vrchol první paraboly k , A' je vrchol druhé paraboly k') o úsečku AA' se parabola k ztotožní s parabolou k' (polopřímky AF , $A'F'$ jsou v tomto případě rovnoběžné a stejně orientované), nebo se obě paraboly ztotožní posunutím směrem AA' o délku AA' a otočením kolem bodu A' o úhel určený polopřímkami AF , $A'F'$ (polopřímky AF , $A'F'$ jsou různoběžné a jsou-li rovnoběžné, pak jsou opačně orientované). V případě, že $A \equiv A'$, odpadá uvedené posunutí.

Odvodíme si nyní větu, které později použijeme:

Spojnice průsečíku R tečen 1t , 2t v bodech 1T , 2T paraboly se středem M tětivy ${}^1T{}^2T$ je rovnoběžná s osou o paraboly.

D ů k a z. Sestrojíme k parabole (určené ohniskem F a přímkou řídící d) obě tečny 1t , 2t z (vnějšího) bodu R (obr. 4). K tomu užijeme kružnice o středu v daném bodě R , která prochází ohniskem F naší paraboly. Tato kružnice obsahuje oba k ohnisku F podle příslušné tečny souměrné sdružené body 1Q , 2Q , které musí být zároveň také na přímce řídící d . Potom přímky $^1t \perp ^1QF$, $^2t \perp ^2QF$, jdoucí bodem R , jsou hledanými tečnami. Body dotyku 1T , příp. 2T , jsou na přímce $^1q \parallel o$ bodem 1Q , příp. na přímce $^2q \parallel o$ bodem 2Q . Protože $^1Q^2Q \perp ^1q \parallel ^2q \parallel o$, je kolmice $^s o_p$ z bodu R na přímku řídící d rovnoběžná s osou o paraboly a zároveň je osou souměrnosti pásu určeného oběma rovnoběžkami 1q , 2q . Z tohoto důvodu každá úsečka, která má jeden svůj koncový bod na přímce 1q a druhý na přímce 2q , je touto osou souměrnosti půlena. Tedy zvláště prochází zmíněná přímka $^s o_p$ také půlicím bodem M tětiny $^1T^2T$ paraboly.



Obr. 4

Spojnice $RM \equiv ^s o_p$ protíná parabolu v bodě T , který je středem úsečky RM , ve kterém tečna t je rovnoběžná s tětinou $^1T^2T$.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z rovnoběžného průmětu paraboly určené tečnou vrcholovou s vrcholem a dvěma body souměrně sdruženými podle její osy (kdy dostáváme tedy zobecnění věty o subtangentě paraboly), nebo z tzv. lichoběžníkové konstrukce²⁾.

Ú l o h a 4. Parabola je dána dvěma body 1T , 2T , směrem osy $^s o_p$ a parametrem p .

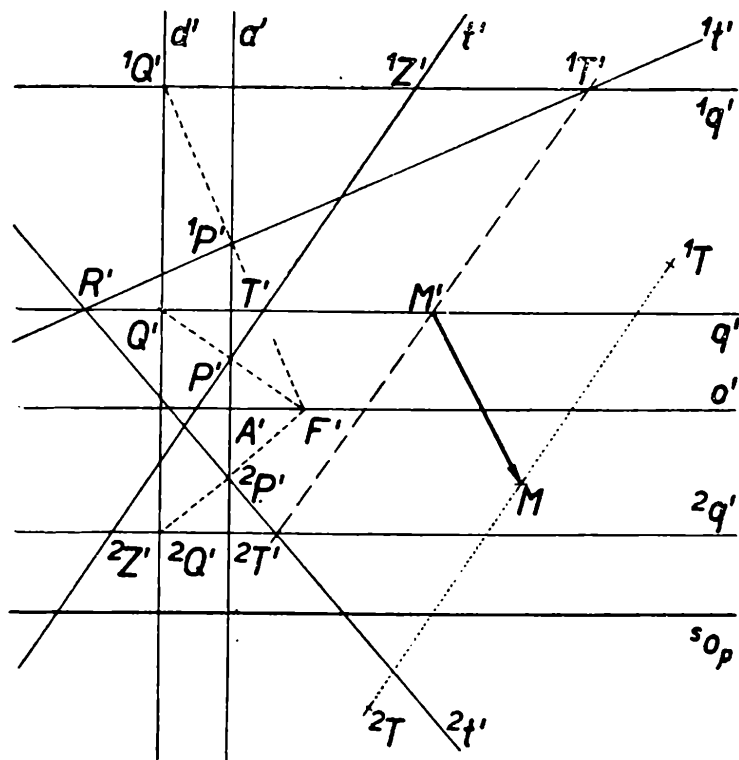
R o z b o r. Sestrojíme-li tečnu $t \parallel ^1T^2T$ s bodem dotyku T , pak spojnice daných bodů 1T , 2T s bodem R na přímce jdoucí středem M tětiny $^1T^2T$ rovnoběžně s osou o paraboly, pro který platí $RT = TM$, jsou tečny 1t , 2t v obou uvažovaných bodech.

K o n s t r u k c e. Určíme pomocnou (a shodnou) parabolu k' s osou o' rovnoběžnou s osou o hledané paraboly (obr. 5). K parabole k' sestrojíme tečnu t' rovnoběžnou s přímkou $^1T^2T$ a stanovme na ní také bod dotyku T' . Mysleme si na chvíli, že už jsme sestrojili k tečně t' s bodem dotyku T' k parabole k' odpovídající tečnu t s bodem dotyku T k parabole k . Podle výše uvedeného, tečna t protíná rovnoběžky 1q , 2q body 1T , 2T s osou o paraboly v bodech 1Z , 2Z , pro které platí $T^1Z = T^2Z = M^1T = M^2T$. Proto pro body $^1Z'$, $^2Z'$ jim na tečně t' odpovídající platí obdobně $T'^1Z' =$

²⁾ Viz např. str. 300 v knize Kounovský-Vyčichlo, Deskriptivní geometrie, ČSAV, Praha 1959, 5. vydání.

$= T'^2Z' = M^1T'$. Přímky ${}^1q' \parallel {}^2q' \parallel o'$, sestrojené body ${}^1Z', {}^2Z'$ obsahují body ${}^1T', {}^2T'$ paraboly k' . Jejich určení je snadné, neboť je-li ${}^1Q'$, příp. ${}^2Q'$, průsečík přímky ${}^1q'$, příp. ${}^2q'$, s řídící přímkou d' pomocné paraboly k' , pak kolmice sestrojená průsečíkem ${}^1P'$, příp. ${}^2P'$, tečny vrcholové a' se spojnici ${}^1Q'F'$, příp. ${}^2Q'F'$ k této spojnici, je tečnou ${}^1t'$, příp. ${}^2t'$, paraboly k' v bodech ${}^1T', {}^2T'$. Potom stačí zřejmě posunout parabolu k' směrem ${}^1T'^1T'$ pro velikost posunutí ${}^1T'^1T'$ (čímž lze získat pro hledanou parabolu k z vrcholu A' paraboly k' přímo její vrchol A , příp. i další tečny s body dotyku).

D ů k a z je opět důsledkem provedené konstrukce.



Obr. 5

D i s k u s e. Pomocnou parabolu k' lze volit dvojím způsobem po určení její osy o' a ohniska F' a to tak, že úsečka určená vrcholy A', A'' obou těchto parabol je ohniskem F' půlena. Proto získáme dvě řešení úlohy, která jsou středově souměrná podle bodu M (tj. středu úsečky omezené oběma danými body ${}^1T', {}^2T'$).

Ú l o h a 5. Parabola je dána dvěma tečnami ${}^1t, {}^2t$, směrem osy so_p a parametrem p .

R o z b o r a k o n s t r u k c e. Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka PAF v obr. 1. V tomto trojúhelníku je přepona PF kolmá k tečně t , odvěsna AF leží v ose o paraboly a je $AF = \frac{1}{2}p$, odvěsna PA leží v tečně vrcholové a . Sestrojíme-li pravoúhlé trojúhelníky $P'A'F'$ (s pravým úhlem při vrcholu A') tak, že vrchol P' je na tečně t , odvěsna $P'A'$ je rovnoběžná s tečnou vrcholovou a , druhá odvěsna $A'F'$ má délku $\frac{1}{2}p$ a přepona $P'F'$ je kolmá k tečně t (obr. 6), pak geometrické místo vrcholů

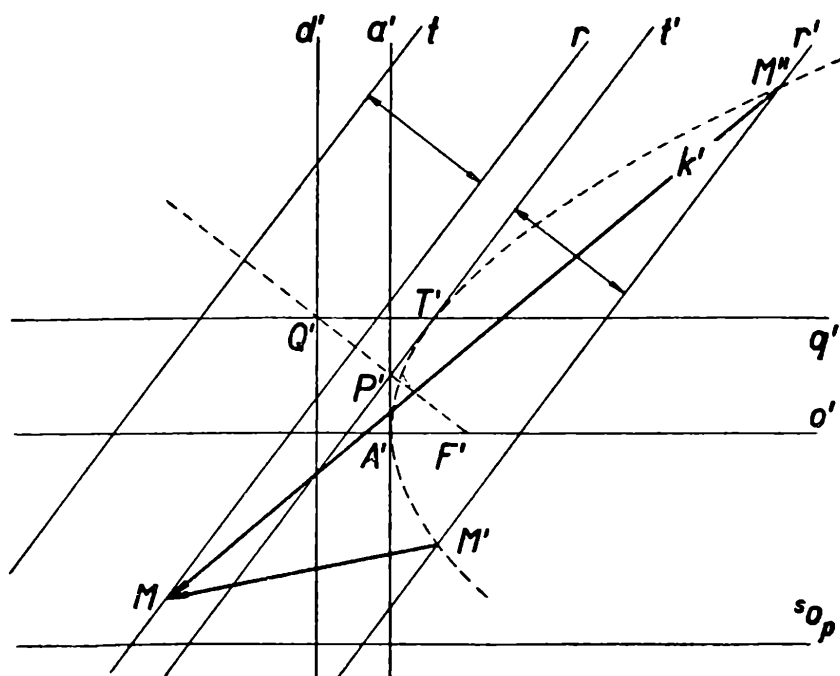
Důkaz plyne z popisu konstrukce a z vlastností trojúhelníka QF_0F , příp. trojúhelníka PAF (viz znovu obr. 1).

Úloha 6. Parabola je dána tečnou vrcholovou a , tečnou t a parametrem p .

V obou posledních úlohách, které si provedte sami jako cvičení, je zřejmý dán ještě směr osy hledané paraboly v kolmici k tečně vrcholové a . Při řešení úlohy 6 můžete použít postupu vyloženého v úl. 5; v úl. 7 použijte k sestrojení ohniska F (ohniskové) definice paraboly. Rozhodněte zejména opět o počtu řešení a jejich vzájemné poloze.

Rozbor a konstrukce. Protože úloha by byla vyřešena nalezením bodu dotyku T na dané tečně t (hledanou parabolou lze pak již

D ů k a z (jako ve všech našich úlohách) je zase důsledkem popsané konstrukce.



D i s k u s e . Pro zvolenou parabolu k' dostáváme za našeho (nutného) předpokladu o tečně t sestrojované paraboly k (a tedy o tečně t' zvolené pomocné paraboly k') vždy dva průsečíky M' , M'' rovnoběžky r' s parabolou k' . Existují tedy dvě řešení, která jsou vzájemně posunutá směrem tečny t o délku $M'M''$. Jiných řešení není, neboť i kdybychom zvolili pomocnou parabolu souměrnou podle ohniska F' k dříve určené parabole, bylo by možno ukázat, že řešení vzniklá pomocí této nové paraboly jsou totožná s nalezenými řešeními pomocí paraboly k' .

453

Inž. Zdeněk Kos, ŘVR, Praha:

Průtok potrubím

Jednou ze základních hydraulických úloh, se kterou se setkáváme při návrhu vodohospodářských staveb v inženýrské praxi, je řešení průtoku potrubím. Při návrhu potrubí - vedle materiálu je nejdůležitější určit plochu jeho příčného řezu, profilu. Výrobci potrubí je produkují v určitých profilech a úkolem návrhu je na základě výpočtů určit, který profil je pro daný případ nejvýhodnější.

Průtok potrubím se děje za dvou odlišných podmínek. Buď je voda v potrubí pod tlakem, voda zcela vyplňuje potrubí, a kdybychom navrtali potrubí, voda z něho bude tryskat ven; nebo se jedná o beztlakové potrubí čili vlastně o uzavřený kanál, kde voda zcela potrubí nevyplňuje, a kdybychom potrubí navrtali v jeho nejvyšší části, voda vytékat nebude. Pro oba případy platí však v podstatě stejné rovnice.

První z nich je *rovnice kontinuity* čili *spojitostní*. Vyjadřuje skutečnost, že při proudění potrubím se zachovává velikost hmoty. Dále uvažujeme ustálené proudění kapaliny, čili že v daném průřezu proteče za jednotku času též objem zv. *průtočný objem*. Potom pro dva profily na určitém potrubí platí:

$$Q_1 = Q_2 \text{ [m}^3\text{/s] ,} \quad (1)$$

kde jsou Q_1 průtočný objem v průřezu 1, Q_2 průtočný objem v průřezu 2.

Dalším důležitým hydraulickým pojmem, který budeme při výpočtu proudění v potrubí potřebovat, je *průtočný průřez*, což je plocha vnitřního řezu, která vznikne na rovině kolmé na směr střední rychlosti příslušného úseku. Při válcovém potrubí, což je nejčastější tvar potrubí, je rovina průtočného průřezu kolmá na směr povrchových přímk. Střední rychlost v daném průřezu je pak definována vztahem:

$$v = \frac{Q}{S} \left[\text{m/s} = \frac{\text{m}^3\text{/s}}{\text{m}^2} \right] , \quad (2)$$

kde jsou v střední rychlost [m/s], S plocha průřezu [m²] a Q průtočný objem

[m³/s]. Dosadíme-li z rovnice (2) do rovnice (1), dostáváme pro ustálený průtok rovnici spojitostní ve tvaru

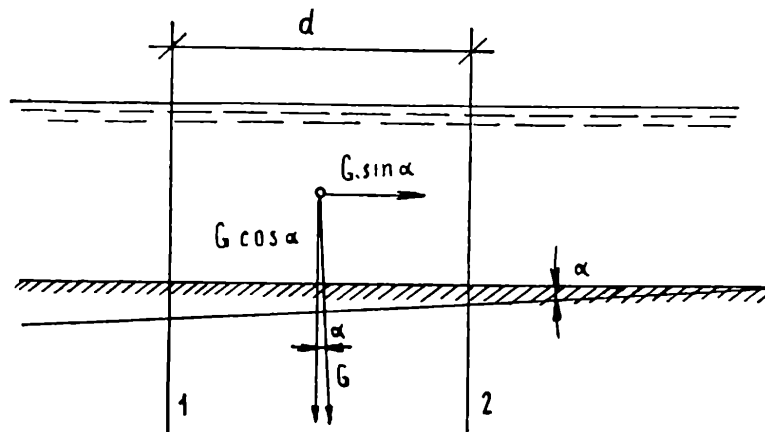
$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2, \quad (3)$$

kde hodnoty s indexem 1 platí pro první průřez a hodnoty s indexem 2 pro druhý.

Dále se budeme zabývat beztlakovým potrubím. Vedle rovnice (3) budeme pro výpočet potřebovat rovnici Chezyho (čti čéziho), kterou si odvodíme.

Aby voda v beztlakovém potrubí byla v pohybu, je třeba, aby toto potrubí klesalo pod určitým spádem I (převyšujícím většinou 1 ‰). Pro další úvahy si představme hranol, vyjmutý z proudící kapaliny a dosahující až k hladině, a určíme podmínky jeho rovnováhy (obr. 1).

Rovnováha nastává za podmínek obdobných pohybu tělesa na nakloněné rovině, protože hydrostatické tlaky na stěny tělesa se vzájemně ruší.



Obr. 1

Jako hnací síla zůstává jediné složka váhy ve směru svahu

$$G \sin \alpha \doteq G \operatorname{tg} \alpha = G \cdot I, \quad (4)$$

pokud je úhel α dostatečně malý, což při pohybu vody v beztlakovém potrubí platí téměř bez výjimky. Proti pohybu působí tření T na styku kapaliny a potrubí. Podmínky rovnováhy vyjadřuje vztah:

$$G \cdot I = T. \quad (5)$$

Váhu G vypočteme jako součin objemu hranolu o ploše průřezu S , délce d a měrné váhy γ :

$$G = \gamma \cdot S \cdot d. \quad (6)$$

Kapalina v určitém průřezu se dotýká potrubí podél tzv. *omočeného obvodu* o , což je součet všech délek v určitém průřezu, které tvoří rozhraní mezi kapalinou a potrubím. Mezi profily 1 a 2 (obr. 1) se pak kapalina dotýká podél plochy $o \cdot d$. Tření T je úměrné jednak této ploše - a jak bylo četnými pokusy zjištěno - dvojnásobku střední rychlosti v . Tak dostáváme pro velikost tření T závislost

$$T = k \cdot o \cdot d \cdot v^2. \quad (7)$$

Dosadíme-li rovnice (7) a (6) do rovnice (5), je

$$\gamma \cdot S \cdot d \cdot I = k \cdot o \cdot d \cdot v^2 \quad (8)$$

a po úpravě

$$\frac{S}{o} \cdot I = \frac{k}{\gamma} v^2. \quad (9)$$

V hydraulice je zvykem poměr $\frac{S}{o}$ značit R a nazývat jej *hydraulický poloměr*.

Zavedením tohoto pojmu dostáváme

$$R \cdot I = \frac{k}{\gamma} v^2. \quad (10)$$

Z této rovnice vyjádříme střední rychlost v a dosadíme

$$\frac{k}{\gamma} = c, \quad (11)$$

kde c je tzv. *rychlostní součinitel*. Pak dostáváme rovnici ve tvaru, jak ji r. 1775 odvodil Chezy

$$v = c \cdot \sqrt{R \cdot I} \quad (12)$$

Slovně vyjádřená tato rovnice říká, že střední rychlost v průřezu je úměrná rychlostnímu součiniteli c a odmocnině ze součinu hydraulického poloměru R a spádu I .

Rychlostní součinitel závisí na materiálu potrubí, resp. na jeho drsnosti a hydraulickém poloměru R . Pro jeho výpočet byla odvozena řada vzorců. Z nich uvádíme vzorec *Manningův*

$$c = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad (13)$$

kde n je součinitel drsnosti. Velikost součinitele je uvedena v následující tabulce:

Tabulka 1.

Materiál potrubí (beztlakového) resp. kanálu	n
hoblovaná dřeva, dobře hlazená omítka	0,010
drsná prkna	0,012
kvádrové nebo dobře spárované cihelné zdivo	0,013
betonové kanály v dobrém stavu	0,014
zdivo z lomového kamene	0,017
starý beton	0,020

Při praktickém použití hledáme hodnoty rychlostního součinitele v tabulkách či nomogramech. Např. pro $n = 0,014$ a různé hodnoty R nabývá c v rovnici (13) následujících hodnot:

Tabulka 2.

R	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50
c	58,4	59,1	59,7	60,3	60,8	61,3	61,8	62,3	62,8	63,2	63,6
R	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,10
c	64,6	65,6	66,5	67,3	68,1	68,8	69,5	70,2	70,8	71,4	72,6
R	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,20	2,40
c	73,6	74,6	75,6	76,4	77,2	78,0	78,8	79,5	80,2	81,5	82,7
R	2,60	2,80	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00				
c	83,8	84,8	85,8	88,0	90,0	91,8	93,4				

Jak se těchto rovnic a tabulek používá při výpočtech v inženýrské praxi, si uvedeme na příkladě.

Máme určit průtok beztlakovým potrubím obdélníkového průřezu za těchto podmínek: Šířka potrubí je $b = 2,50$ m, hloubka vody $h = 1,50$ m, spád dna $I = 0,0012$. Potrubí je betonové, např. krytý betonový kanál. Máme určit kapacitu tohoto potrubí (obr. 2).

$$S = b \cdot h = 2,50 \cdot 1,50 = 3,75 \text{ m}^2,$$

$$o = b + 2h = 2,50 + 2 \cdot 1,5 = 5,50 \text{ m},$$

$$R = \frac{S}{o} = 3,75 : 5,50 = 0,682 \text{ m},$$

c určíme podle tabulky 2. (pro beton drsnosti $n = 0,014$) interpolací pro $R = 0,682$ m hodnotu, $c = 66,8$. Podle rovnice (12) a (2)

$$v = c \sqrt{R \cdot I} = 66,8 \sqrt{0,682 \cdot 0,0012} = 1,91 \text{ m/s},$$

$$Q = S \cdot v = 3,75 \cdot 1,91 = 7,16 \text{ m}^3/\text{s}$$

Kdyby byl naopak dán průtok Q a měli bychom navrhnout profil kanálu, resp. beztlakového potrubí obdélníkového tvaru, museli bychom tento úkol řešit zkusmo tak, že bychom podle zkušeností navrhli přibližně jeho profil a uvedeným způsobem posoudili, zda kapacita navrženého potrubí (čili jeho průtočný objem) trochu převyšuje požadované Q . Výpočet bychom museli provádět tak dlouho, až bychom dosáhli shody. Abychom se vyhnuli těmto obtížím a složitým výpočtům při potrubích či kanálech jiných tvarů profilu, byla vypracována řada metod grafických a polografických (např. Vítek: Spojnicové nomogramy pro grafické řešení hydraulických rovnic).

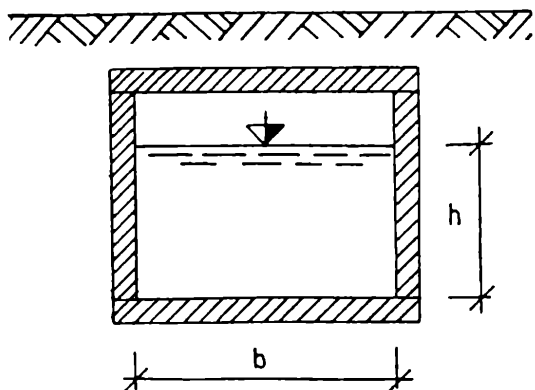
Při výpočtech tlakových potrubí postupujeme obdobně, pouze při výpočtech rychlostního součinitele používáme jiných hodnot. Při tlakovém potrubí není však rozhodující spád dna potrubí, nýbrž spád energetické hladiny v potrubí. Tento pojem si musíme blíže vysvětlit.

Při pohybu ideální kapaliny platí zákon zachování energie

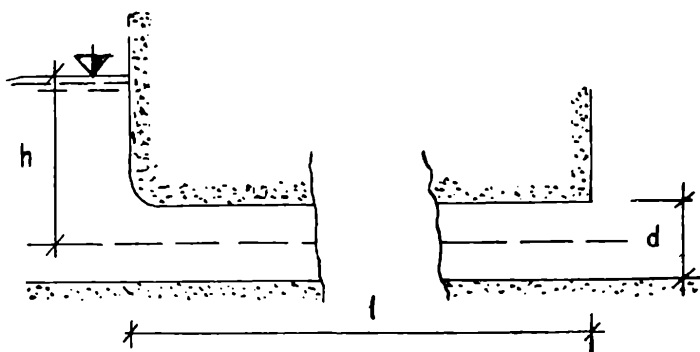
$$E_k + E_p = \text{konstanta} , \quad (14)$$

čili součet energie kinetické E_k a energie potenciální E_p je stálý. Ve skutečnosti při pohybu skutečné kapaliny se však část energie nezvratně přeměňuje na energii tepelnou a z hlediska mechanické energie se projevuje jako ztráta Z . Proto, srovnáme-li energie ve dvou profilech 1 a 2, je nutno tyto ztráty započítat (směr pohybu kapaliny od profilu 1 k profilu 2)

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} + Z . \quad (15)$$



Obr. 2



Obr. 3

Vyjádříme-li, za předpokladu, že hydrostatické tlaky na profil 1 a 2 jsou stejné, tyto energie pomocí hmoty m , zrychlení tíže zemské g , rychlosti v a výšky nad srovnávací hladinou h , dostáváme:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 + m g z \quad (16)$$

a dělením

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z . \quad (17)$$

Poměr ztráty mechanické energie, vyjádřený jako výška z a vzdáleností profilů 1 a 2 d je tzv. *spád energetické hladiny* I_e

$$I_e = z : d . \quad (18)$$

P ř í k l a d: Vodní nádrž se vypouští betonovým potrubím a průměru $d = 1,0$ m (obr. 3). Je třeba vypočítat kapacitu tohoto potrubí za předpokladu, že maximální hladina nad osou potrubí může dosáhnout výšky $h = 2,2$ m. Délka vypouštěcího potrubí je $l = 25$ m. Vtok do potrubí je

řešen výhodně hydraulicky, takže ztrátu vtokem není třeba uvažovat. V úvahu bereme pouze ztrátu na výšce energetické hladiny, vzniklou třením. Určíme je podle rovnice (12), kam dosadíme za rychlostní součinitel Manningův vzorec (13) a za spád I spád čáry energie I_e :

$$v = c \sqrt{R \cdot I_e} = \frac{1}{n} \cdot R^{1/6} \cdot R^{1/2} \cdot I_e^{1/2} = \frac{1}{n} R^{2/3} \cdot I_e^{1/2}$$

vypočteme-li z této rovnice I_e , dostáváme

$$I_e = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 R^{4/3}} \cdot v^2 \quad (20)$$

a ztráta z na délce l je

$$z = l \cdot I_e = \frac{l}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 R^{4/3}} v^2 \quad (21)$$

Pro starší beton je $\frac{1}{n} = 65$, pro kruhové potrubí je hydraulický poloměr

$$R = \frac{S}{o} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4} = \frac{1,0}{4} \quad (22)$$

Předpokládáme, že se celá výška $h = 2,2$ m spotřebuje na vyvinutí rychlosti a na překonání ztráty třením. Kdyby nebylo ztráty třením, platila by rovnice *Toricelliova*

$$v = \sqrt{2gh} \quad h = \frac{v^2}{2g}, \quad (23)$$

která vyjadřuje, že kapalina při výtoku pod výškou h nabude stejné rychlosti jako těleso, padající volným pádem z téže výšky. Uvažujeme-li též ztráty třením, je výška h součtem plynoucím z výšky rychlostní $v^2/2g$ a ztrátové z :

$$h = \frac{v^2}{2g} + z. \quad (24)$$

Rovnici (24) bychom rovněž dostali z rovnice (17) dosazením $v_1 = 0$, $h_1 = h$, $v_2 = v$, $h_2 = 0$. Do rovnice (24) dosadíme z rovnice (21):

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 R^{4/3}} \cdot v^2 = \left(\frac{1}{2g} + \frac{l}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 R^{4/3}} \right) v^2. \quad (25)$$

Dosazením dostáváme

$$2,2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 9,81} + \frac{25}{65^2 \cdot 0,25^{4/3}} \right) v^2 = (0,051 + 0,0376) v^2 = 0,0886 v^2$$

$$\text{Z toho } v = \sqrt{\frac{2,2}{0,0886}} = \sqrt{24,8} = 4,8 \text{ m/s}$$

$$\text{a průtok } Q = S \cdot v = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{\pi 1,0^2}{4} \cdot 4,8 = 3,76 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Při návrhu potrubí bychom opět postupovali tak, že bychom profil odhadli a tento přibližný návrh uvedeným způsobem posoudili a výpočet opakovali tak dlouho, až bychom dosáhli shody. Lépe však je používat k tomu účelu sestavené tabulky a grafy.

Nakonec se zmíníme o některých případech užití výpočtu profilu potrubí v praxi. Setkáme se s ním při návrhu a posuzování kanalizačních stok a propustků, vodovodních potrubí, tlakových potrubí vodních elektráren vypouštěcích potrubí vodních nádrží a rybníků, potrubí pro závlahu zemědělských pozemků postřikem, obtokových štol při stavbě přehrad, ropovodů, potrubí pro dopravu tekutých průmyslových materiálů atd.

Uvedli jsme dva praktické příklady výpočtu potrubí. V praxi jsou však výpočty potrubí daleko rozmanitější. Je třeba posuzovat nejen průtokový objem Q , ale i rychlost v , spád I nebo I_e , tvar a velikost profilu, materiál potrubí tak, aby byly pro daný případ nejen hydraulicky správné, ale i ekonomicky výhodné. Proto se musí navrhovat potrubí, která by nejen dobře sloužila svému účelu, ale byla i co nejlevnější a zároveň náklady při provozu staveb, na něž má potrubí vliv, byly co nejmenší.

Inž. dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Něco o definicích tlaku

Rozvoj měřicí techniky ve všech důležitých oborech podmiňuje vývoj techniky všeobecné, zavádění nových a pokrokových výrobních procesů (zvláště je zde důležité hledisko automatizace), vzrůst kvality výrobků aj. Měření slouží všem odvětvím národního hospodářství a jeho důležitost zvláště vyniká v současné době, kdy jsme svědky úžasného rozmachu našeho průmyslu. Bez přesného a spolehlivého měření nemůže se obejít ani výzkum v nejrůznějších vědních oborech. Potud v krátkosti o důležitosti měřicí techniky, o níž bychom mohli ovšem hovořit mnohem déle a obsažněji.

Měřicí technika jako aplikovaná praktická fyzika měla by se více uplatňovat i v obsahu tohoto časopisu. Domnívám se, že je vhodné postupně probírat problematiku měření hlavních fyzikálních veličin a to zvláště s ohledem na běžnou technickou praxi. Jistě by se našla řada pracovníků, kteří by mohli do takové tematické řady přispět svými zkušenostmi.

Budu se v některém z příštích čísel zabývat problematikou měření *tlaku*. Pokládám proto za vhodné v krátkosti zopakovat některé definice týkající se této veličiny.

Tlakem rozumíme sílu rovnoměrně plošně rozdělenou, působící kolmo na uvažovanou plochu a dělenou velikostí této plochy.

Podle definice platí tedy vztah

$$p = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

kde F značí celkovou (tzv. tlakovou) sílu působící na uvažovanou plochu a

S značí velikost této plochy (vlastně její plošný obsah).

Tlak značíme obecně p . Podle definice je rozměr tlaku $F \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ (při tom je zřejmě symbolické označení vystupujících veličin: F - síly, M - hmoty, L - délky, T - času).

Ze vztahu (1) je patrné, že *tlak* je vlastně *součinitelem úměrnosti* mezi tlakovou silou působící na nějakou plochu a mezi velikostí této plochy. O tlaku bez dalšího bližšího zpřesnění hovoříme obvykle jen tehdy, je-li příslušná tlaková síla na vyšetřované ploše skutečné nebo jen myšlené rozložena spojitě. V případě styku dvou pevných těles není ve stykové ploše síla, kterou na sebe obě tělesa vzájemně působí, zpravidla rozložena spojitě - v tom případě hovoříme o *měrném tlaku* (viz dále). Tato podmínka spojitého rozložení síly je zhruba splněna (nepřihlížíme-li k zrnitému - molekulárnímu složení hmoty) při vzájemném styku pevných látek a tekutin, v tekutinách, případně ve stykové ploše dvou nemísících se kapalin. Protože podle kinetické teorie tepla je tlak způsoben nárazy pohybujících se molekul, musí být vztažná plocha [viz rovnici (1)], přihlížíme-li ke vlastní podstatě tohoto fyzikálního jevu, řádově mnohokrát větší, než „průřez“ molekul, abychom mohli o spojitém rozložení zhruba hovořit.

Je-li tlaková síla F na vyšetřované ploše (velikosti S) rozložena nerovnoměrně (i když spojitě) je výrazem (1) určen v takovém případě *střední tlak* $\bar{p}$. Protože je tlak v takovém případě funkcí polohy místa, musíme použít jiného vztahu, chceme-li určit příslušný *místní tlak* p :

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (2)$$

Zde značí ΔF malou tlakovou sílu působící na malou plošku ΔS .

Místní hodnota tlaku má obdobný význam jako např. okamžitá rychlost v případě nerovnoměrného pohybu apod. O tom bylo již pojednáváno v našem časopise a to v ročníku 1958, č. 6, str. 267 až 270.

Je-li tlak obecnou funkcí času

$$p = f(\tau),$$

je časová změna tlaku $\dot{p}$ v nějakém místě dána limitou

$$\dot{p} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta \tau}, \quad (3)$$

kde Δp značí malý přírůstek tlaku v malém časovém intervalu $\Delta \tau$.

Je-li v čase τ_0 místní tlak p_0 , pak v libovolném čase τ je okamžitý místní tlak určen vztahem

$$p = p_0 + \sum_{\tau_0}^{\tau} \dot{p} \Delta \tau \quad (4)$$

Měrným tlakem (někdy se tento název používá pro obecný pojem tlaku) p_m rozumíme zpravidla tlakovou sílu dělenou celkovou plochou, na níž tlaková síla působí, na které však není rozložena ani spojitě, ani rovnoměrně. To přichází v úvahu při styku dvou pevných těles, vzhledem k nedokonalosti jejich styku. Měrný tlak tak vlastně představuje střední tlak ve stykové ploše. Platí tedy obdobný vztah jako (1).

Barometrickým tlakem b rozumíme aerostatický tlak ovzduší obklopujícího Zemi.

Podtlakem nazýváme tlak menší než barometrický. Velký podtlak se nazývá někdy *vakuum* (ač vakuum přesněji vzato znamená vlastně dokonale prázdný prostor, v němž by byl tlak roven nule). Někdy se k pojmu vakuum připojuje přívlastek jako *nízké, střední, vysoké vakuum* apod., jenž má řádově roztrždit stupně evakuace. Čím je vyšší vakuum, o tím nižší (absolutní) tlaky se jedná.

Přetlakem nazýváme kladný rozdíl nějakého tlaku p a okamžitého tlaku barometrického b :

$$\Delta p = p - b. \quad (5)$$

Absolutním tlakem nazýváme rozdíl nějakého tlaku a tlakové nuly („absolutního vakua“), tedy jeho absolutní hodnotu

$$p_{abs} = p - 0. \quad (6)$$

Podle nově připravované terminologické normy přísluší přístrojům měřícím jakýkoliv tlak obecně název *tlakoměr*. Ty se dále dělí na *manometry*, přístroje pro měření přetlaků a *vakuumetry*, určené pro měření podtlaků a vakua. Přístroje pro měření malých podtlaků nazývají se také *tahoměry* (podle měření komínových tahů). Pro úzký tlakový obor

barometrického tlaku jsou určeny *barometry*. *Manovakuometry* jsou vhodné pro úzký obor přetlaků i podtlaků v okolí barometrického tlaku. Tlakový rozdíl měříme *diferenčními tlakoměry* je-li totiž jedním z tlaků, jejichž diferenci měříme, barometrický tlak, jedná se pak prostě o manometry, protože přetlak je také tlakovou diferencí.

O různých typech tlakoměrů, jichž je velké množství, budeme hovořit později. Kromě speciálních typů pracuje většina tlakoměrů podle *metody kompenzační*. Měřený tlak je kompenzován tlakem vyvozovaným vlastním měřicím systémem. Známe-li pak tlak kompenzační, známe při dosažení tlakové rovnováhy i tlak měřený.

C S c. E v ž e n Ě í m a n, ČVUT, Praha:

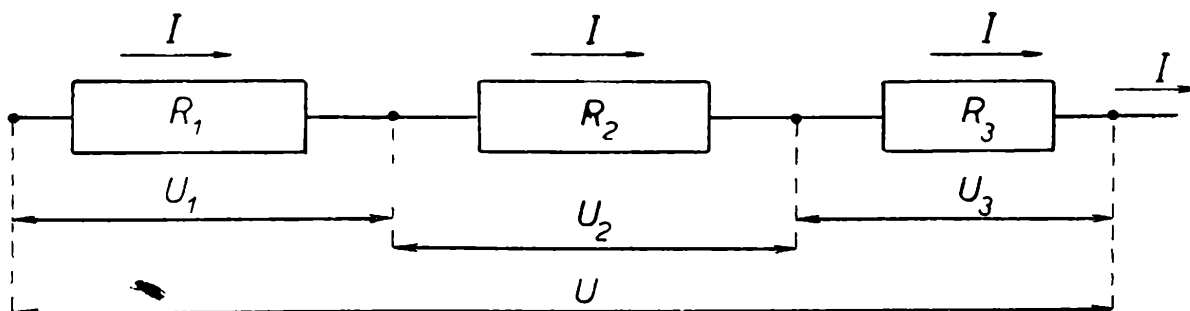
Kirchhoffove zákony

(Dokončenie)

Spojovanie odporov

Dôsledkom Kirchhoffových zákonov sú pravidlá o zapojovaní odporov, ktoré je možno zapojiť buď *sériovo* (tj. za sebou) alebo *paralelne* (tj. vedľa seba):

Ak je niekoľko vodičov s odpormi R_1, R_2, R_3



Obr. 3. Odporý zapojené v sérii.

zapojených v s é r i i
(tj. za sebou)

vtedy *každým vodičom tečie rovnaký prúd I* (obr. 3).

Preto (podľa II. Kirchhoffovho zákona) platí

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I, \quad (\alpha)$$

zapojených p a r a l e l n e
(tj. vedľa seba)

vtedy *na každom odpore je rovnaké napätie U* (obr. 4).

Preto platia vzťahy

$$U = R_1 I_1, U = R_2 I_2, U = R_3 I_3, \quad (\beta)$$

slovami: *V okruhu je súčet ems rovný súčtu ohmických napätí* (tj. súčinov z odporu a intenzity prúdu).

Podľa Ohmovho zákona pre úsek prúdovodiča možno vyjadriť napätia medzi koncami každého z vodičov R_1 , R_2 , resp. R_3 vzťahmi

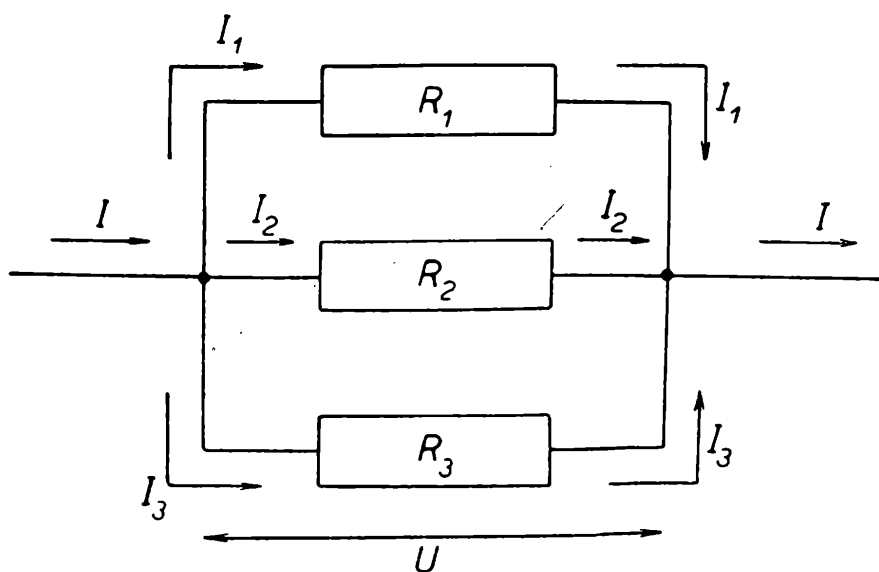
$$U_1 = R_1 I, U_2 = R_2 I, U_3 = R_3 I. \quad (\gamma)$$

z ktorých možno si vypočítať prúdy idúce jednotlivými vodičmi:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, I_3 = \frac{U}{R_3}. \quad (\delta)$$

Podľa I. Kirchhoffovho zákona: Výsledný prúd pritekajúci do uzla musí sa rovnať súčtu všetkých prúdov, ktoré z uzla odtekajú, tj.

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$



Obr. 4. Odporý zapojené paralelne.

Dáme tieto rovnice do poměru a máme

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 I : R_2 I : R_3 I \quad (\gamma_1)$$

a po krátení pravej strany veličinou I dostávame

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3. \quad (\varepsilon_1)$$

Nahradíme v rovnici (α) na pravej strane súčiny $R_1 I$, $R_2 I$ podľa (γ) veličinami U_1 , U_2 atď.,

dostaneme

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \quad (\eta_1)$$

takže v našom prípade

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \\ &= U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (\gamma_2) \end{aligned}$$

Dáme rovnice (β) do poměru a dostaneme

$$I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} \quad (\varepsilon_2)$$

Rovnici (η_1) ľavej strany odpovedá samozrejme I , tj. veta Kirchhoffova

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (\eta_2)$$

Označme výsledný odpor celého sériového zapojenia písmenom R_s , vtedy podľa Ohmovho zákona platí pre celý okruh

$$U = R_s I \quad (\kappa)$$

čo porovnaním so vzťahom (α) dá rovnicu pre nás najdôležitejšiu

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 = \Sigma R_k \quad (\mu)$$

Vyjadrieme teraz dokázané vzťahy vetami. Najdôležitejší výsledok dáva vzťah (μ) , ktorý vraví

Celkový odpor R_s vodičov zapojených sériovo (za sebou) sa rovná súčtu ich odporov.

Slovné vyjadrenia ostatných dokázaných vzťahov sú:

(η_1) Pri spojení sériovom sa sčítajú *napätia*.

(ϵ_1) Napätia medzi koncami vodičov zapojených v sérii sú v pomere ich *odporov*.

Pri spojení sériovom (za sebou) sčítajú sa odpory a napätia: *p r ú d* je vo všetkých odporoch rovnaký; *c e l k o v é n a p ä t i e*

Označme písmenom R_p výsledný odpor celého paralelného zapojenia, vtedy podľa Ohmovho zákona platí pre celý okruh

$$U = R_p I, \text{ z čoho } I = \frac{1}{R_p} U \quad (\lambda)$$

čo porovnaním so vzťahom (γ_2) dá rovnicu pre nás najdôležitejšiu

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \Sigma \frac{1}{R_k}$$

Vyjadrieme teraz dokázané vzťahy vetami. Najdôležitejší výsledok dáva vzťah (λ) , ktorý vraví¹⁾

Reciproká hodnota výsledného odporu R_p vodičov zapojených paralelne (tj. vedľa seba) sa rovná súčtu recipročných hodnôt jednotlivých odporov.

(η_2) Pri spojení paralelnom sa sčítajú *prúdy*.

(ϵ_2) Prúdy v jednotlivých vodičoch zapojených paralelne sú v pomere recipročných hodnôt ich odporov (tj. v pomere *vodivosti* týchto vodičov).

S ú h r n

Pri spojení paralelnom (vedľa seba) sčítajú sa recipročné hodnoty odporov (tj. vodivosti) a prúdy; *n a p ä t i e* na každom z od-

¹⁾ Ak zavedieme pojem „*v o d i v o s ť*“ = recipročná hodnota odporu“, môžeme túto vetu povedať vo tvare: „Výsledná vodivosť vodičov zapojených paralelne sa rovná súčtu vodivostí jednotlivých vodičov“.

rozdeli sa na jednotlivé vodiče
v pomere ich o d p o r o v.

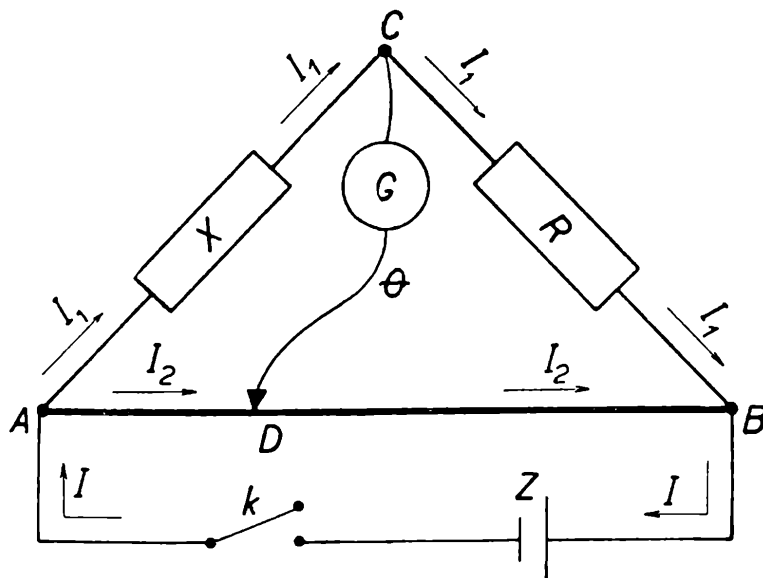
porov je rovnaké; celkový p r ú d
rozdeli sa do jednotlivých vodi-
čov v pomere ich v o d i v o s t í.

Pr í k l a d 3.: Meranie odporu metódou W h e a t s t o n e o v h o mostu (viď pripojené schéma obr. 5). Medzi body A, C zapojíme neznámy odpor X , medzi C, B známy odpor (kolíčkový reostat). Medzi A, B je 1 m dlhý drôt (manganinový), všade rovnakého prierezu S a merného odporu ϱ . K bodu C pripojíme citlivý galvanometer G a dotykový bod D (na dróte AB) meníme tak dlho, až galvanometer G ukáže nulovú výchylku. Ak nazveme vzdialenosti $AD = a$, $DB = b$, potom platí

$$X : R = a : b .$$

a) Dokažte! b) Vypočítajte číselne pre $X = 410 \, \Omega$, $a = 656 \, \text{mm}$, $b = 344 \, \text{mm}$!

Riešenie I.: Podľa vety o úbytku napätia platí



Obr. 5. Schéma zapojenia Wheatstoneovho môstku.

$$U_{AC} = U_A - U_C = I_1 X, \quad (1) \quad U_{CB} = U_C - U_B = I_1 R, \quad (3)$$

$$U_{AD} = U_A - U_D = I_2 \varrho \frac{a}{S}, \quad (2) \quad U_{DB} = U_D - U_B = I_2 \varrho \frac{b}{S} \quad (4)$$

Pretože výchylka galvanometra je nulová, musia body C a D mať ten istý potenciál, čiže $U_C = U_D$; následkom toho sú ľavé strany rovníc (1) a (2) rovnaké a podobne tiež ľavé strany rovníc (3) a (4); preto sa aj pravé strany musia sebe rovnať. Z toho plynie

$$I_1 X = I_2 \varrho \frac{a}{S}$$

$$I_1 R = I_2 \varrho \frac{b}{S},$$

ktorých delením vznikne

$$\frac{I_1 X}{I_1 R} = \frac{I_2 \varrho \frac{a}{S}}{I_2 \varrho \frac{b}{S}},$$

čiže

$$\frac{X}{R} = \frac{a}{b},$$

čo sa malo dokázať.

Riešenie II.: Z druhého zákona Kirchhoffovho platí pre ľavý okruh $ACDA$ vzťah

$$X I_1 + 0 - R_{AD} I_2 = 0$$

a pre pravý okruh $CBDC$ vzťah

$$R I_1 - R_{DB} I_2 = 0$$

(Na pravých stranách sú nuly, pretože nemáme v okruhu žiadnu emsu.)
Delením oboch rovníc dostaneme

$$\frac{X}{R} = \frac{R_{AD}}{R_{DB}} = \frac{\varrho \frac{a}{S}}{\varrho \frac{b}{S}} = \frac{a}{b},$$

kde sme dosadili

$$R_{AD} = \varrho \frac{a}{S} = \varrho \frac{b}{S}.$$

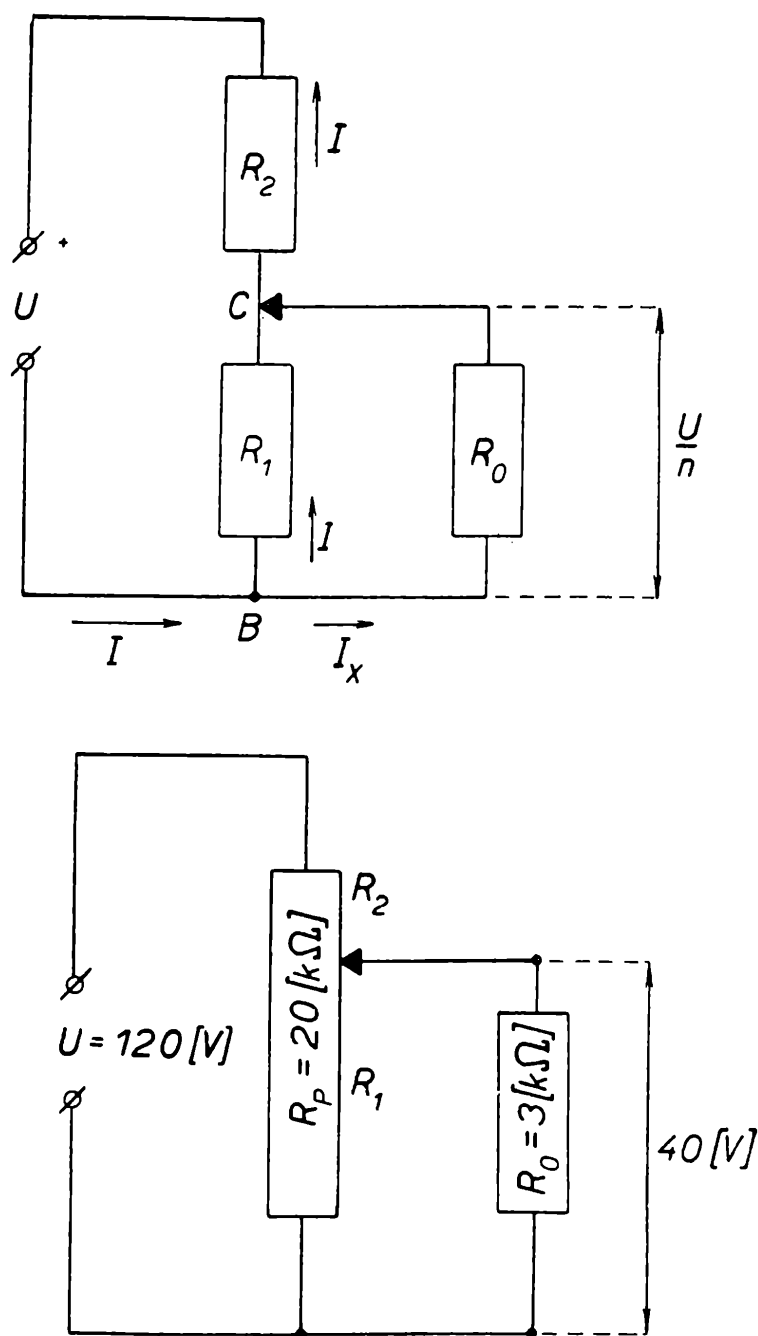
Číselne: Po dosadení daných hodnôt vyjde $X = 410$ ohmov.

Poznámka: Metóda Wheatstoneovho mostu má tú veľkú výhodu, že na zistenie hľadaného odporu netreba mať ani presný voltmeter, ani ampérmeter.

Wheatstoneov most možno užiť nielen na meranie odporov, ale aj kapacít a indukčností a konečne tiež ako elektrický odporový teplomer (pre vysoké aj nízke teploty), pretože z veľkosti nameraného odporu X môžeme usudzovať na jeho teplotu, ak poznáme odpor pri 0°C . Na tom sa zakladá tzv. **bolometer**: Tenká kovová fólia (vyrezaná vo tvare meandra) je na jednej strane pokrytá sadzami a vloží sa ako odpor X na to miesto v spektre, ktorého žiarenie skúmame. Začiernená strana pohltí žiarenie, ktoré tam dopadne, fólia sa zohreje a vzrast teploty, ktorý odmeriame, je teda mierou dopadajúcej žiarivej energie.

Príklad 4.: Potenciometer zapojený (viď obr. 6ab) na

zdroj napätia $U = 120 \text{ V}$ má celkový odpor $R_p = 20\,000 \, \Omega$. Na aké veľké časti R_1 a R_2 je tento odpor R_p rozdelený posuvným dotykom C , ak v odbočke odporu $R_0 = 3000 \, \Omega$ je napätie $U_x = 40 \text{ V}$, tj. len $n = 3$ krát menšie.



Obr. 6a, b. Schéma zapojenia potenciometra.

Riešenie: Rátajme obecné, kladúc $U_x = \frac{U}{n}$ a pomocou Kirchhoffových zákonov. Dotykový bod C rozdelí odpor R_p na dve časti R_1 , R_2 , takže platí

$$R_1 + R_2 = R_p \quad (1)$$

Dané zapojenie (obr. 6a) možno teda nahradiť zapojením podľa obr. 6b.

KZ II (čítaj Kirchhoffov zákon druhý) dáva pre ľavý okruh (obsahujúci zdroj U a neznáme odpory R_1 a R_2) vzťah

$$R_1 I_1 + R_2 I = U \quad (2)$$

a pre pravý okruh (s odpormi R_0 a R_1 a žiadnym zdrojom napätia)

$$R_0 I_x - R_1 I_1 = 0. \quad (3)$$

Pre uzol B (alebo C) dáva Ohmov zákon vzťah

$$I = I_1 + I_x. \quad (4)$$

Na odpore R_0 je napätie $U_x = \frac{U}{n}$, takže podľa Ohmovho zákona je

$$R_0 I_x = \frac{U}{n} \quad (5)$$

V týchto piatich rovniciach je 5 neznámych veličín- a to: R_1 , R_2 , I , I_1 , I_x ; usilujme sa eliminovať všetky neznáme okrem R_1 (pretože ich nepotrebuje vedieť), a to urobíme takto:

$$\text{Ex (1)} \Rightarrow R_2 = R_p - R_1 \quad (1a); \quad \text{Ex (5)} \Rightarrow I_x = \frac{U}{n R_0}. \quad (5a)$$

Ex (3) $\Rightarrow R_0 I_x = R_1 I_1$, čo následkom (5) dá

$$R_0 I_x = R_1 I_1 = \frac{U}{n}, \quad (3')$$

z čoho

$$I_1 = \frac{U}{n R_1} \quad (3a)$$

Dosadením (3a) a (5a) do (4) dostaneme

$$I = \frac{U}{n R_1} + \frac{U}{n R_0} = \frac{U}{n} \cdot \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1} \quad (4a)$$

Dosadením (3'), (1a) a (4a) do (2) máme rovnicu

$$\frac{U}{n} + (R_p - R_1) \frac{U}{n} \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1} = U$$

ktorú možno deliť veličinou U a po odstránení zlomkov a úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$R_1^2 - R_1 (R_p - n R_0) - R_0 R_p = 0, \quad (6)$$

ktorá dosadením daných číselných hodnôt (počítajme v kiloohmoch, aby sme nemali veľké čísla) $R_0 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_p = 20 \text{ k}\Omega$ dá

$$R_1^2 - 11 R_1 - 60 = 0. \quad (6')$$

Riešením rovnice (6') obdržíme korene

$$R_1 = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 240}}{2} = \frac{11 \pm 19}{2} = \begin{matrix} 15 \\ -4 \end{matrix}$$

Najdený záporný koreň -4 nemá fyzikálneho smyslu (pretože ohmický odpor nemôže byť záporný), ostáva len $R_1 = 15 \text{ k}\Omega$, teda

$$R_2 = R_p - R_1 = 5 \text{ k}\Omega.$$

P o z n á m k a: Príklad sa dal riešiť aj bez Kirchhoffových zákonov len pomocou viet o zapojovaní odporov (paralelne a v sérii) a pomocou Ohmovho zákona.

Astronomie

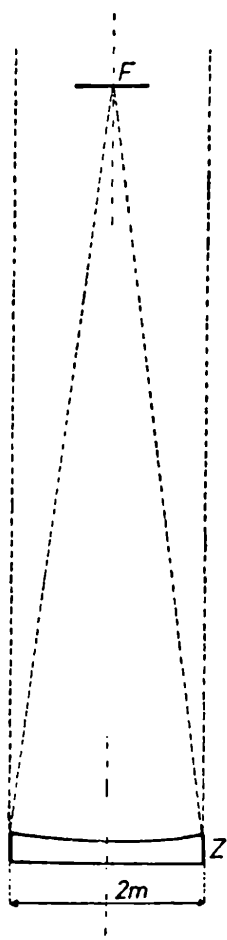
Marie Smetanová, AU, Ondřejov:

Československo bude mít dvoumetrový dalekohled

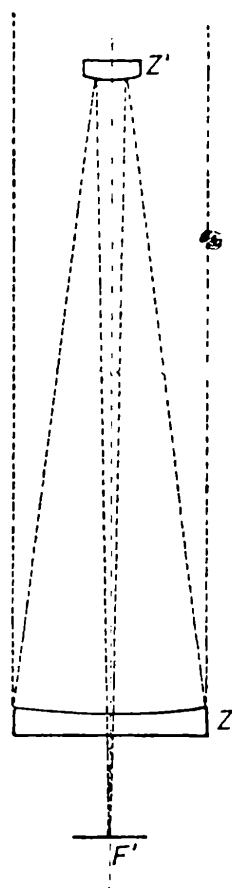
Ondřejovská observatoř, která je naší největší hvězdárnou, patří již dnes v některých oborech své činnosti mezi významná střediska astronomického výzkumu. Je zde nyní v činnosti sluneční spektrograf, zřejmě nejlepší přístroj svého druhu na světě. Mimořádných úspěchů bylo dosaženo též při studiu meteorů a vysoké atmosféry Země. Méně příznivé byly však možnosti ve stelární astronomii, v odvětví, které se zabývá zkoumáním hvězd a hvězdných soustav. Astronomové totiž postrádali přístroj, který je pro moderní práci v tomto oboru nezbytný dostatečně mohutný dalekohled. Pracovníci Astronomického ústavu ve spolupráci s presidiem ČSAV připravili proto návrh na výstavbu velkého zrcadlového dalekohledu. Návrh byl schválen vládou ČSSR v dubnu r. 1959. Tímto rozhodnutím získají naši hvězdáři dalekohled, který bude patřit co do rozměrů mezi deset největších na světě. Dalekohled o průměru zrcadla 200 cm byl objednan u Zeissových závodů v Jeně (NDR).

Proč potřebují astronomové tak velký přístroj? Současná technika umožnila hvězdářům „dohlédnout“ hluboko do vesmíru, odkud k nám

přichází světlo hvězd i mlhovin velmi zeslabeno. Kromě toho je třeba studovat stále podrobněji i „blízké“ okolí naší Země sluneční soustavu - kam již dnes pronikají kosmické rakety a meziplanetární stanice. Pro optická pozorování, jak známo, lze používat dvou typů dalekohledů, a to dalekohledů čočkových - refraktorů a zrcadlových reflektorů. Přitom hvězdářům záleží především na množství světla, které dalekohled zachytí, čili pokud možno na největší ploše objektivu nebo zrcadla. U refraktorů však nelze z technických důvodů konstruovat objektivy o průměru větším než 1 m, zatím co u zrcadel nebylo dosaženo hranice technických možností. Pracuje již reflektor o průměru 5 m a uvažuje se o stavbě ještě mohutnějších teleskopů. Reflektory mají proti čočkovým dalekohledům i řadu optických předností: odrazná



Obr. 1a



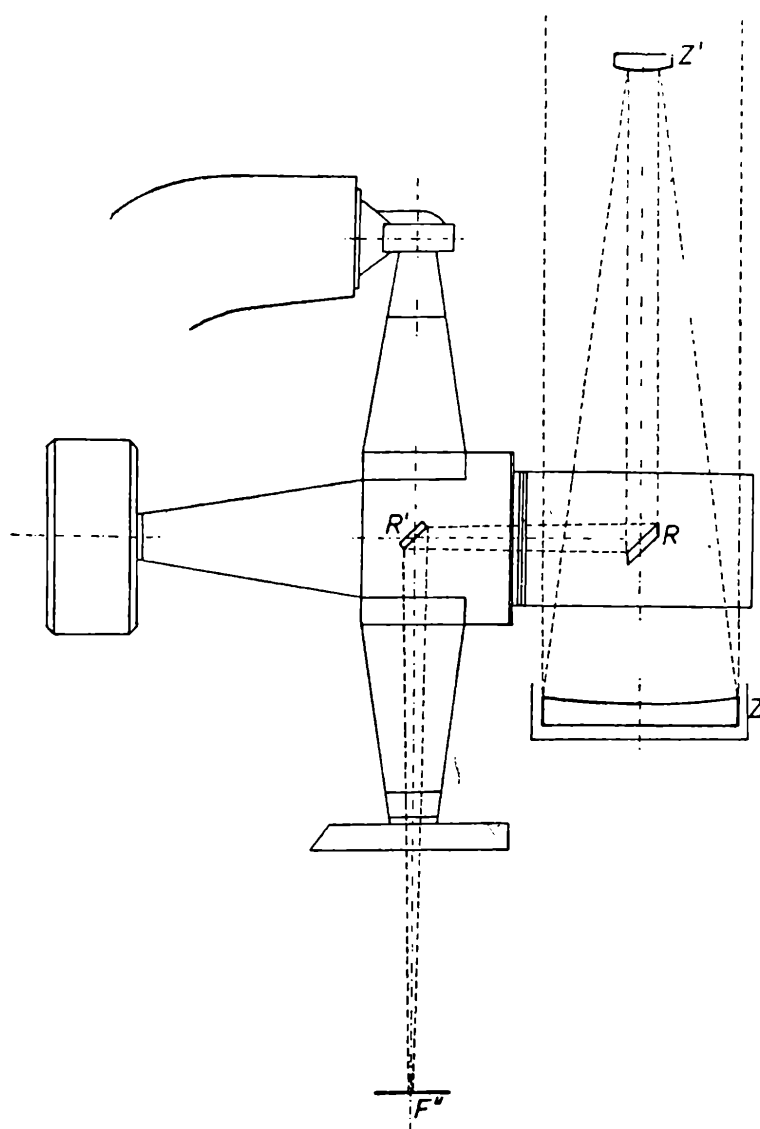
Obr. 1b

plocha zrcadla téměř nepohlcuje ultrafialové záření, takže lze sledovat světlo vesmírných těles i v tomto významném oboru spektra, dále reflektory nemají barevnou vadu, což je velmi výhodné jak pro přímé fotografování oblohy, tak i pro spektroskopii. U reflektorů lze poměrně jednoduše měnit ohniskovou vzdálenost soustavy v širokých mezích, což neobyčejně zvyšuje univerzálnost dalekohledu. Zrcadlové teleskopy mají i některé nevýhody, zejména menší kvalitu obrazu mimo optickou osu (v porovnání s refraktory). Užitečné zorné pole československého reflektoru budem mít např. průměr jen asi $0,2^\circ$.

Jak bude konstruován náš reflektor? Hlavní zrcadlo bude vybroušeno do parabolického tvaru a pohlínkováno ve vakuové aparatuře tak, že vrstvička hliníku bude mít tloušťku jen asi $7/10\,000$ mm. Zrcadlo bude složitým způsobem upevněno v jakési „míse“, a to tak, aby v žádné poloze dalekohledu nemohlo dojít k nežádoucím průhybům nebo defor-

macím, jež by podstatně zhoršily kvalitu pozorování. U dalekohledu budou hvězdáři používat tří optických soustav (viz obr. 1, chod světelných paprsků je čárkován). V tzv. primárním ohnisku F ($f = 9$ m) bude umístěna fotografická kazeta pro přímé fotografie oblo-

hy, nebo hranolový spektrograf s menší rozlišovací schopností (obr. 1a). Bude-li do cesty paprskům postaveno pomocné hyperbolické zrcátko Z' (obr. 1b), dostaneme tzv. systém Cassegrainův. Paprsky po odrazu od zrcadla Z' projdou otvorem ve středu hlavního zrcadla Z a soustředí se v ohnisku F' ($f = 25$ m). Otvar v hlavním zrcadle nezhoršuje kvalitu obrazu, paprsky, které by tam dopadaly přímo, jsou v tomto případě odcloněny zrcadlem Z' . V ohnisku F' bude opět buď fotografická kazeta, nebo mřížkový spektrograf, nebo fotoelektrický

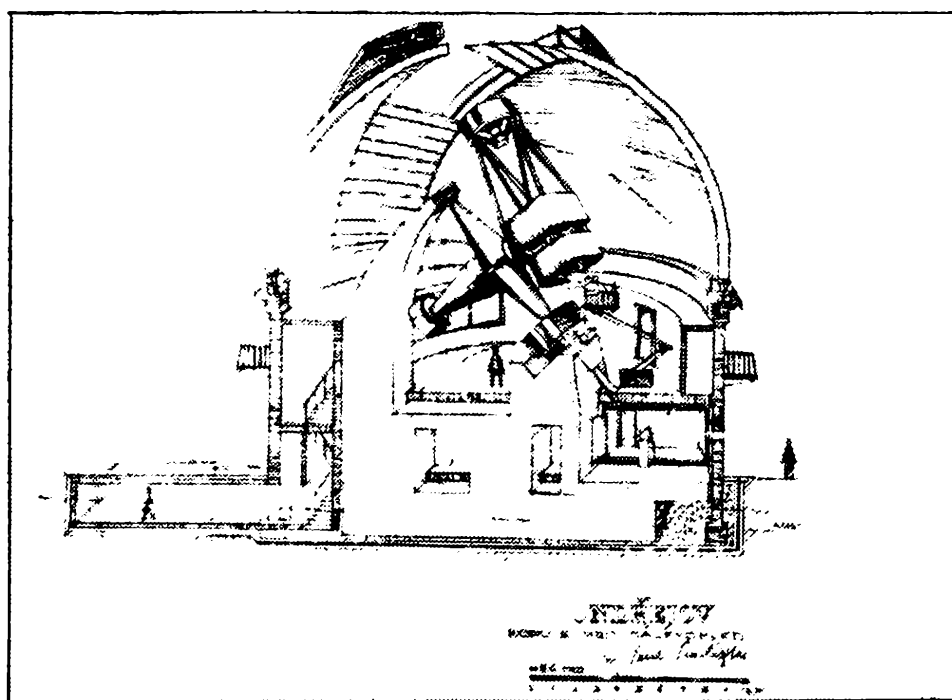


Obr. 1c

fotometr. Tímto fotometrem lze velmi přesně měřit jasnosti hvězd. Konečně třetí systém, tzv. coudé, užívá ještě dalších odrazných zrcadel R , R' (obr. 1c), pomocí nichž je svazek paprsků vrhán do zvláštní místnosti pod zemí, kde je udržována stálá teplota a kde je v ohnisku F'' ($f = 58$ m) umístěn mřížkový spektrograf pro detailní studium hvězdných spekter. Výhodou této soustavy coudé je poloha ohniska F'' ,

které je neměnné při libovolném nastavení dalekohledu. Jak jste si jistě všimli, při konstrukci teleskopu není vůbec počítáno s možností pozorování očima, jak jsme na to zvyklí u běžných dalekohledů, k nimž jsou dodávány celé sady okulárů pro různá zvětšení. V současné době je však vizuální pozorování u dalekohledů zatlačeno do pozadí a představa astronoma, který probdí noc s očima u dalekohledu, patří již minulosti. U dvoumetrového dalekohledu bude značná část práce naprosto zmechanizována a zautomatizována. Pozorovatel bude jen kontrolovat, zda celé zařízení pracuje bez závad.

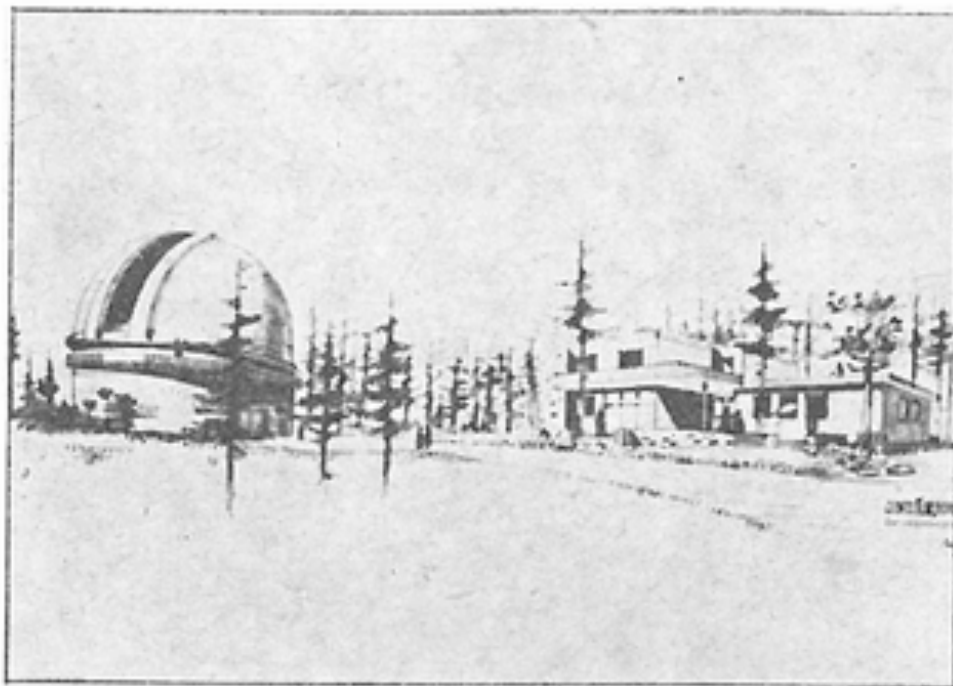
Dalekohled bude mít trubkový tubus a bude umístěn v kopuli o průměru 21 m a výšce 22 m (tedy vyšší než šestiposchodový dům). Pohled na konstrukci dalekohledu ukazuje schematický obr. 2 a celkový pohled na kopuli je na obr. 3.



Obr. 2

Současně s přípravou konstrukce dalekohledu v Jeně započaly příslušné práce přímo v Ondřejově. Nejprve bylo zapotřebí nalézt nejvhodnější místo pro vlastní stavbu, což je u tak mohutného zařízení složitý a odpovědný úkol. Bylo třeba zkoumat únosnost půdy, aby se vyloučilo nebezpečí posuvu nebo sesedání podkladu, podrobně studovat meteorologické podmínky a kvalitu obrazu na předběžně vybraných místech. Po celý rok shromažďovali ondřejovští pracovníci jednotlivé údaje, na jejichž základě bylo jako nejvhodnější místo pro výstavbu zvoleno návrší Kubětiny, asi 1 km severně od nynější observatoře. V prostorách staveniště se provádějí některé úpravy, především zalesnění blízkého okolí, aby byla odstíněna rušivá světla a vytvořily se příznivé klimatické podmínky. Rovněž se staví příjezdová silnice.

Vlastní kopule bude dokončena v r. 1964 současně s transformační stanicí, vodovodem a jinými pomocnými stavbami tak, aby v r. 1965 mohli technici Zeissových závodů instalovat vlastní dalekohled. Ve spolupráci s nimi budou muset naši stavbaři a astronomové vyřešit ještě řadu složitých otázek, neboť na žádnou stavbu nebyly u nás dosud kladeny takové požadavky jako v tomto případě.



Obr. 3

Němečtí odborníci získali ovšem velké zkušenosti při stavbě dvoumetrového dalekohledu pro Německou akademii věd, který byl dokončen v říjnu 1960. Stavba tohoto dalekohledu trvala celkem 12 let, což samo svědčí o obtížích, s nimiž se naši přátelé v NDR museli vypořádat. Díky jejich průkopnické práci, díky pochopení vlády naší republiky, dostanou tak naši hvězdáři za pět let přístroj, který podstatně rozšíří možnosti pracovníků při studiu vesmíru.

Recenze

J. Legras: Praktické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic

Vydalo SNTL 1960, 192 stran, 75 obrázků, 8 tabulek. Přeložil Mg. Mat. Vl. Malý. Váz. 19,80 Kčs.

Kniha je určena inženýrům, zejména strojním a elektrotechnickým,

pracovníkům ve výzkumu, fyzikům a posluchačům vyšších semestrů technických fakult. Uvádí většinou běžné metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, se zvláštním zřetelem k praktickému numerickému výpočtu, bez příliš obsáhlého matematického aparátu.

Úvodní kapitola se zabývá některými obecnými vlastnostmi parciálních diferenciálních rovnic. Další kapitola je věnována parabolickým rovnicím (vedení tepla, difúze), třetí až pátá Laplaceově rovnici (potenciál, stacionární vedení tepla), šestá kapitola se zabývá vlnovou rovnicí (kmitání) a sedmá některými rovnicemi s více než dvěma proměnnými. V každé kapitole uvádí autor metody, vhodné k řešení uvažovaného typu rovnic, např. pro rovnici pro vedení tepla uvádí metodu separace proměnných (Fourierovu metodu) a metodu sítí (diferenční metodu). Pokud jde o Laplaceovu rovnici, věnuje autor třetí kapitolu přípravě jejího řešení, analytickým funkcím.

Důkazy konvergence nejsou uváděny, ani formulovány (bez důkazu) postačující předpoklady. To je ve shodě s autorovou snahou podat technikům účinné metody bez velkého teoretického aparátu. Možná, že autor tuto snahu poněkud přehnal. U Laplaceovy rovnice mohla být uvedena alespoň věta o maximu, která je účinná i pro numerický výpočet. Na str. 40 je třeba upozornit na to, že nevhodnou volbou k je při numerickém výpočtu možno dospět k libovolně nerozumným výsledkům. V každém případě je velkým nedostatkem knihy, že neobsahuje Laplaceovu transformaci (operátorový počet), důležitou pro strojní a zejména elektrotechnické inženýry, jimž je v první řadě kniha určena. Také variační metody mají v strojních a elektrotechnických aplikacích své uplatnění.

Na druhé straně je třeba upozornit na jasnost a přístupnost výkladu a na stálý zřetel na řešení prakticky důležitých problémů. Jsem proto přesvědčen, že i přes uvedené nedostatky bude kniha našim technikům velmi platnou pomůckou. Ježto může být užitečná učitelům-technikům odborných škol a vynikajícím studentům, provedli jsme její recenzi i v našem časopisu.

Doc. dr. Karel Rektorys

Imre Pál: Deskriptívna geometria videná priestorove

Naši žáci si často stěžují na to, že si nemohou nebo neumí dobře představit v prostoru konstrukce, které dělají v deskriptivní geometrii zejména v Mongeově promítání případně v kótovaném promítání. Odstranění tohoto nedostatku je hlavním cílem knihy a řekněme hned,

že se to podařilo dokonale za pomoci anaglyfů pečlivě vypracovaných po konstruktivní stránce i užitých barev. Zdařilé je též celkové uspořádání výkladu a k tomu příslušných anaglyfů. Na lichých stránkách je totiž proveden potřebný výklad (bez důkazů výjimka je pouze u věty Quételetovy-Dandelinovy) s konstrukcemi v použitém druhu promítání a na sudých (protějších) stránkách jsou k tomu patřící anaglyfické obrázky. Tuto knihu lze tedy považovat za objemnou sbírku modelů a může proto její prostudování pomoci při zvyšování představitivosti potřebné nejen v deskriptivní geometrii, ale také v technické praxi i ostatní práci.

Obsahem se kniha příliš neliší od požadavků naší školy druhého cyklu. Po krátkém úvodu o základech stereometrie následuje podstata knihy zabývající se Mongeovým promítáním, v němž jsou provedeny všechny základní úlohy, dále řezy na hranolech, jehlanech, kruhových válcích a kuželích a na ploše kulové. Sem je také vsunuta zmínka o afinitě a (středové) kolineaci v rovině. Není zapomenuto ani na osvětlení a průniky základních hranatých a oblých těles. Další odstavce obsahují většinou rozšíření látky a to o rotační plochy (zvláště zborcený rotační hyperboloid), o některé v praxi užívané zborcené plochy a o plochy šroubové. V kótovaném promítání po výkladu základních konstrukcí jsou uvedeny hlavně aplikace na zemní práce a řešení tektonických poruch. Závěr tvoří sestrojování názorných obrázků pomocí axonometrie (pravoúhlé i kosoúhlé) a lineární perspektivy.

Kniha vyšla ve Slovenském vydavatelstvu technické literatury v Bratislavě (1960, 1. vyd., str. 200, obr. 284, anaglyfů 235, cena váz. Kčs 19,—). Je přeložena z maďarštiny a byla vytištěna v Budapešti. Aby naši čtenáři dostali tuto potřebnou knihu brzo do ruky, byly převzaty z originálu všechny obrázky s označením lišícím se od našeho a byl podle toho upraven i text, to však nemůže při pozorném čtení ovlivnit výhody, které kniha nesporně má.

K a r e l D r á b e k

Redakční sdělení

Náš spolupracovník Dr. O. Hönig byl jmenován zasloužilým učitelem. Redakce mu k tomuto vyznamenání blahopřeje.

Středisko technické literatury v Praze

Státní nakladatelství technické literatury otevřelo před dvěma měsíci v Praze I, Spálená ul. 51, **S t ř e d i s k o t e c h n i c k é l i t e r a t u r y**. Doporučujeme svým čtenářům toto nové zařízení, dovolující lepší spojení čtenářů s autory i s nakladatelstvím.

Denně projde Střediskem technické literatury na tři sta návštěvníků. Valná část si již sem navykla chodit studovat knihy a časopisy. Také výstava technické literatury se těší velké pozornosti. Návštěvníci se zastavují u panelu, kde jsou uvedena zajímavá čísla. Tak jenom Státní nakladatelství technické literatury za dobu svého trvání, tj. od roku 1953 do roku 1960, vydalo 5356 titulů knih v počtu 14 418 000 výtisků. V současné době vydává 44 časopisů v celkovém nákladu 20 540 000 výtisků. Během druhé pětiletky bylo vydáno jenom pro dělníky a mistry 1474 knih v nákladu 5 875 000 vydavatelských archů, tj. téměř 60 % veškeré produkce. Současná produkce Státního nakladatelství technické literatury je větší, než kolik činila veškerá produkce technické literatury za šedesát předválečných let.

Středisko technické literatury je též domovem **K l u b u č t e n á ř ů t e c h n i c k é l i t e r a t u r y**. Klub má již na 27 000 členů. Soutěže „Každý člen nejméně jednoho nového člena“ se zúčastnilo na 7500 členů. Magnetofon vyhrál Vlad. Volník z Břestu, 2. cenu - gramoradio Ant. Lehečka, snímací kameru Admiry Ján Peniaško z Nováků atd. Již rozmístění těchto cen ukazuje, že Klub má členskou základnu po celé republice.

Upozornění předplatitelům

Doporučujeme všem předplatitelům, aby si u Poštovní novinové služby prodloužili předplatné Rozhledů na další rok ještě před prázdninami. Často se totiž stává, že čtenáři, kteří zaplatili předplatné až v září, nedostanou první číslo našeho časopisu. Proto žádáme zejména ředitelství škol, aby - pokud možno - provedli laskavě nábor nových čtenářů ještě koncem června, nejpozději však v prvním týdnu v září.

Předplatné přijímá poštovní doručovatel nebo přímo Poštovní novinová služba na poštovním úřadu vašeho bydliště. Redakce předplatné nepřijímá. Případné stížnosti na nesprávné doručování nám zašlete písemně.

Oprava: V článku „R o d o k m e n p r v k ů“ v čísle 5. letošního ročníku Rozhledů si laskavě opravte nesprávnou formulaci a tvrzení:

Na str. 209, 12. řádek zdola má být „Uvolněná energie“ místo „Vzniklá energie“.

Na str. 210 jest správné znění posledních čtyř řádků toto:

Je vidět, že klidová hmota částic vstupujících do reakce je větší než klidová hmota částic v reakci vznikajících. To znamená, že úbytek hmoty je souběžně doprovázen přírůstkem energie podle Einsteinova vztahu $W = mc^2$.

(Srovnej: Drška, Klimeš, Slavík: Základy atomové fyziky, str. 321.)