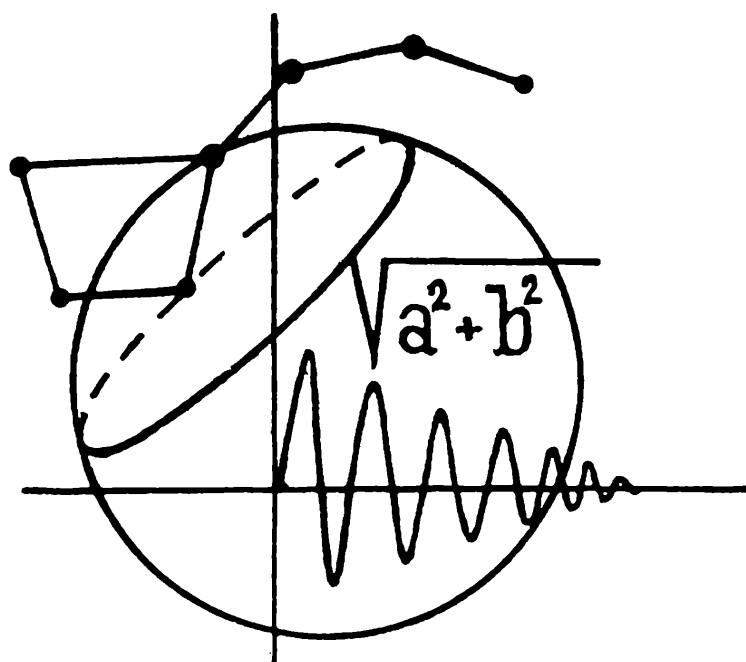


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 1

Toto číslo vyšlo 15. září 1959

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

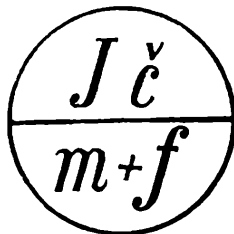
Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, KU, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, VŠP, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; Jiří Sedláček, kand. věd mat., ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

OBSAH

Redakce: Do ročníku 1959/60	1
Inž. J. Klír: Matematické stroje	1
O. Buchta: Grafické řešení kvadratické rovnice	8
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	13
Inž. J. Švástal: O stavitelském kreslení	17
Doc. dr. V. Havel: O metodě vynechání os	22
P. Schürer: Jak získáváme nízké tlaky	25
Inž. B. Šesták: O kovových krystalech.	28
B. Růžicková: Fotografická mapa oblohy.	31
Dr. V. Bumba: Proč se pozorují úplná sluneční zatmění	33
Úlohy k řešení	37
Řešení úloh z minulého ročníku	41
F. Komurka: Tvůrce moderních fotografických objektivů	45
Recenze.	46
Matematické zábavy	47
Redakční sdělení	48
Jmenný seznam vítězů VIII. roč. matematické olympiády	3. str. obálky
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu (Pokračování)	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-07776 Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

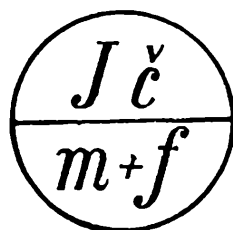
Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUcí REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER



ROČNÍK 38

1959-60

*Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury
za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.*

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelinek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

O B S A H

Úvodníky:

Chudý Jaroslav: Sovětská raketa na Měsíci	96
Menšík M., Setzer O.: Květen 1945	385
Redakce: Do ročníku 1959/60	1
Zuman P.: Československý vědec nositelem Nobelovy ceny	143

Matematika:

Berka Otto: Příspěvek k řešení kvadratických nerovností	49
Buchta Oldřich: Grafické řešení kvadratické rovnice	8
Buchta - Kowalski Oldřich: Přihrádkový princip	197
Brejcha Josef: Některé méně známé relace mezi goniometrickými funkcemi	97
Filip Josef: O jedné úloze z geometrie kružnic	193
Geryk Milan: Trinomická poučka	200
Geryk Radomír: O celočíselném řešení rovnice $y = \frac{x^2 - a}{b}$	241
Havlíček Karel: O komplexních číslech	145
Horák Stanislav: Jeřábková křivka	245
Horák Stanislav: Přibližné řešení některých transcendentních rovnic	337
Horák Stanislav: Jedna věta z planimetrie a její důsledky	434
Jůza Miloslav: Řešení jedné geometrické úlohy	298
Klír Jiří: Matematické stroje	1
Klír Jiří: Kybernetika	340
Klír Jiří, Čapla Vasil: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války	158, 203, 247
Koman Milan: Řešení jedné konstruktivní úlohy na maximum	167
Kowalski Oldřich: Malá věta Fermatova	246
Kraemer Emil: O analytické geometrii v rovině	13, 148, 437
Kuběnková Věra: Jednoduché statistické metody ve zdravotnictví	104, 152
Langr Josef: Problém dotýkajících se kružnic	57
Langr Josef: Harmonické body v trojúhelníku	386
Littmann Vítězslav: Řešení rovnice 5. stupně, jejíž dva páry kořenů jsou čísla opačná, různá od nuly	449
Mádle František: O Pascalově trojúhelníku	394, 441
Pech Jaroslav: Výpočet hodnot $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$ pomocí goniometrických rovnic	398
Riss Josef: Analogové matematické stroje	249
Růžicka Jiří: Úhloměr jako planimetr	162
Setzer Ota: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníka	300
Voráček Jan, Jančar Tomáš: O největších hodnotách některých funkcí	59, 100
Vyšín Jan: Úloha z městské dopravy	289
Vyšín Jan: O nejdelší úsečce, kterou lze umístit do daného obrazce	389, 444

Deskriptivní geometrie a rýsování

Drábek Karel: O dělicím poměru na přímce	304
Drs Ladislav: Konstrukce perspektivy z půdorysu a nárysu	209
Drs Ladislav: Některé vztahy mezi kosoúhlým promítáním a promítáním pravoúhlým na dvě kolmé průmětny	453
Filip Josef: Jedno z priestorových riešení Apolloniovej úlohy	62
Granát Luděk: Jednoduché zobrazovací metody	170, 213
Havel Václav: O metodě vynechání os	22
Kowalski Zdeněk: Jak pomáhá deskriptivní geometrie inženýru - projektantovi	400
Setzer Ota: Steinerovy úlohy	345, 405
Švatal Josef: O stavitelském kreslení	17, 68
Švatal Josef: Jak se čtou stavitelské výkresy?	256
Valešová Marie: Dvojpoměr	308

Fyzika:

Cochlar Jiří: Polovodičové triody (transistory)	114, 174
Dibelka Josef: Hallův jev	315
Dibelka Josef: Vedení elektrického proudu	317
Dvořák Jaroslav: Lékařský teploměr	117
Hauk W.: Vliv záření bohatého na energii	80, 128
Kodeš Jiří: Fyzikální výklad usměrňujícího účinku polovodičů	109
Kos Zdeněk: Ustálený výtok otvorem z nádoby	356
Koštal Rostislav - Chytilová Marta - Vlach Bohumil: Postupné a stojaté vlnění. Jednoduchý pohyb kmitavý. Určování chyb měření fyzikálních veličin	214
Lamparter Vilém: O rázu pružných koulí	176
Machalický Jiří: Skupenské přeměny vody	362, 417
Pazderák Jiří: Záznam televizního signálu na magnetofonový pás	456
Santholzer Vilém: Umělá radioaktivita z nukleárních zkoušek	412
Schürer Přemysl: Jak získáváme nízké tlaky	25, 82, 126
Šesták Bohdan: O kovových krystalech	28, 75, 122
Šindelář Václav: O zrcadlení stínů	350
Špelda Antonín: Fyzikální rozdílnosti a podobnosti lidského sluchu a zraku	321
Tomášek Zdeněk: O jednotkách tepla	352
Valenta Antonín: Magnetický záznam zvuku	420, 463

Astronomie:

Bumba Václav: Proč se pozorují úplná sluneční zatmění	33
Lepil Oldřich: 350 let dalekohledu v astronomii	368
Rajchl Jaroslav: Některé fyzikální děje probíhající při průletu meteorického tělíska zemskou atmosférou	470
Růžicková Blažena: Fotografická mapa oblohy	31
Sehnal Ladislav: Nové československé meteority	266

Různé:

Borůvka Otakar: O životě a díle českého matematika Matyáše Lercha	271
Gedei Ján: K matematické olympiádě v Rumunsku	270
Kodym Adolf: Kam až?	370
Komurka František: Tvůrce moderních fotografických objektivů	45
Komurka František: - Říman Evžen: Nové názory o nitru Země	275
Kotyk Josef: James Prescott Joule	88, 141, 183
Kotyk Josef: Christian Huygens	277
Kotyk Josef: Huygensova teorie světla	327
Menšík Miroslav: Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	obálka č. 1, 2, 4, 6—10
Menšík Miroslav: Sedmdesát pět let prof. Frant. Kadeřávka	474
Novák Josef: Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době	186, 235, 272
Redakce: Soutěž o nejlepší rys	144, 334, 374

Redakce: 85 let inž. dr. Josefa Langra	431
Setzer Ota: Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem	429
Vetter Quido: Bolyai János	371
Vitner Čestmír: Akademik E. Čech (1893—1960)	430
Votava Jiří: Matematická olympiáda v Rumunsku	188

Recenze:

Dubský Jaromír: Sedmý ročník Matematické olympiády	239
Dubský Jaromír: F. Balada, český příspěvek k světové historii matematiky	284
Menšík Miroslav: A. Zelený, Sbíрка matematických vzorců	47
Menšík Miroslav: F. Soukup, Elektrina slouží i škodí	286
Menšík Miroslav: J. Josif, Motocykl Jawa 50 - Pionýr	288
Šisler Miroslav: R. Zelinka, Šestý ročník Matematické olympiády	46
Šoler Kliment: J. Tůma, O umělé slunce	283
Šoler Kliment: J. Klepešta - J. Sadil, Vesmír	333
Šoler Kliment: Malý technický slovník naučný .	373
Šoler Kliment: L. Pekárek, Termonukleární reakce	432

Matematické zábavy:

Čulík Karel: Stará čínská hra	234
Čulík Karel: Úloha o jízdním řádu	332
Horák Stanislav: Zapomnětlivý prodavač	373
Karl H.: Kudy	47
Krňan František: Dámy na šachovnici	231
Menšík Miroslav: Máte dobrou představivost?	234, 425
Menšík Miroslav: Klempíř v rozpacích	332
Řešení hádanek	426
Setzer Ota: Hádanka	235
Setzer Ota: Početní hříčky	281
Setzer Ota: Matka - syn	333
Setzer Ota: Co způsobí jedna žena	426
Úlohy k řešení	37, 85, 133, 177, 227

Matematická olympiáda:

Jmenný seznam vítězů VIII. ročníku MO	obálka č. 1
Sedláček Jiří: Skončil osmý ročník MO	92
Úlohy IX. ročníku MO	93
Druhá část úloh I. kola IX. ročníku MO	237

Fyzikální olympiáda:

Výsledky Fyzikální olympiády Pražského kraje	95
I. ročník FO	obálka č. 3
Příklady pro FO	obálka č. 4—5
První ročník Fyzikální olympiády	214
Redakční sdělení	48, 288, 334, 384, 476

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—.
Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje
Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů.
Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství
v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

Do ročníku 1959/60

Přicházíme k vám - milí čtenáři - s prvním číslem Rozhledů matematicko-fyzikálních tentokráte hned na počátku školního roku.

Budeme vám opět přinášet články z matematiky, fyziky, astronomie, deskriptivní geometrie i z technického kreslení. Ještě více než v minulých ročnících se budeme zaměřovat k technickému užití jmenovaných oborů, abychom i tímto směrem podpořili vývoj našeho státu a vám pomohli při studiu v nové škole, která se přimkla k výrobní praxi. Také dospělí zájemci z řad učitelů a ostatních pracujících zde najdou podněty a teoretický podklad pro činnost ve svém zaměstnání.

Vítáme také s radostí stále častější odborné příspěvky mladých autorů a rádi jim v jejich činnosti poradíme.

Redakce

Matematika



Inž. Jiří Klír,
Výzkumný ústav matematických strojů, Praha:

Matematické stroje

1. Úvod

V současné době jsme svědky bouřlivého rozvoje vědy a techniky. Jsou získávány stále nové informace o zákonitostech dějů, které probíhají v přírodě. Kvalitativní a kvantitativní vyhodnocování získaných informací představuje stále složitější matematické problémy, na jejichž řešení musí vynaložit člověk mnoho duševní práce. Některé problémy jsou dokonce tak složité, že nejsou vůbec zvládnou-

telné obvyklými způsoby. Snaha po překonání těchto obtíží vedla ke konstrukci matematických strojů¹⁾, tj. strojů, které mechanizují duševní práci.

Během vývoje se vytvořil samostatný obor matematických strojů (resp. obor strojů na zpracování informací), který prodělává v současné době obrovský rozvoj a ovlivňuje stále více vývoj vědy a techniky. Vzhledem k důležitosti tohoto oboru chceme poskytnout čtenářům Rozhledů matematicko-fyzikálních sérii článků, ve kterých získají základní informace o matematických strojích. Tento článek je prvním z uvedené série a má za účel ukázat čtenářům rozdělení matematických strojů a obecné principy, na kterých jsou jednotlivé druhy založeny. Další články v tomto ročníku budou věnovány jednak historickému vývoji matematických strojů, jednak podrobnějšímu rozvedení jednotlivých otázek.

2. Obecný princip matematických strojů

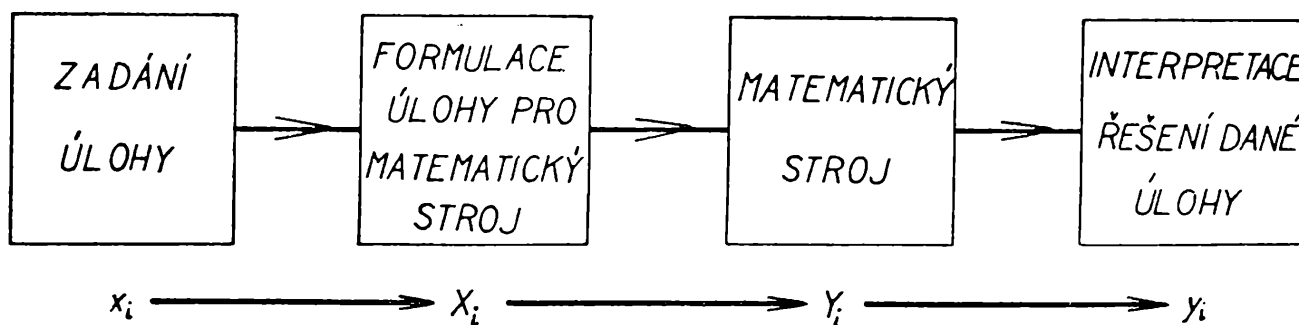
Obecný princip každého matematického stroje je v tom, že modeluje ve fyzikálním světě buď přímo danou matematickou úlohu (např. soustavu nějakých rovnic), nebo modeluje algoritmus vedoucí k řešení dané úlohy. Slovem *algoritmus* rozumíme přesný předpis o provedení jisté soustavy operací (např. základních operací aritmetických) v předepsaném pořadí pro řešení všech úloh daného typu. Jako příklad uveďme jednoduchý algoritmus pro řešení soustavy dvou lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

který je dán vztahy

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Tyto vztahy obsahují všechny potřebné informace o tom, jaké operace mají být provedeny a v jakém pořadí.



Obr. 1

Má-li být řešena nějaká úloha na matematickém stroji, musí tato úloha projít

¹⁾ Často se používá místo názvu „matematické stroje“ názvu „stroje na zpracování informací“. Oba pojmy nejsou zcela totožné. Pojem „stroje na zpracování informací“ je obecnější, neboť v sobě zahrnuje jak matematické stroje, které slouží k řešení matematických úloh, tak i stroje řešící jiné úlohy, např. překládání z jednoho jazyka do jiného, ovládání obráběcích strojů apod.

postupem znázorněným na obr. 1. Nejdříve je třeba najít pro danou úlohu vhodnou formulaci, přijatelnou pro uvažovaný matematický stroj. Znamená to v podstatě buď nalezení vhodného způsobu bezprostředního modelování dané úlohy ve fyzikálním světě podle možností příslušného matematického stroje, nebo nalezení takového algoritmu řešení této úlohy, který je pro daný stroj přijatelný. Poznamenejme předem, že algoritmy, které dobře vyhovují matematickým strojům jsou většinou jiné, než algoritmy používané člověkem pro řešení těchto úloh.

Je-li úloha zformulována, je třeba vložit všechny potřebné *informace* (tj. hodnoty dané úlohy, algoritmus a potřebné hodnoty nezávisle proměnných) do stroje. Přitom je třeba přiřadit matematickým veličinám x_i jisté fyzikální parametry X_i ve stroji. Toto vzájemné přiřazení se nazývá *vstupní zobrazení* nebo *kódování*, a je dáno jistým kódem.

Kód je předpis, podle kterého je určité matematické hodnotě x_i přiřazena jednoznačně hodnota jistého fyzikálního parametru X_i . Kódy mohou být dvojího druhu:

1. *Kódy analogové* jsou ty, u kterých je předepsán vztah mezi spojitě se měnící matematickou veličinou x_i a spojitě se měnícím fyzikálním parametrem X_i . Analogovým kódem je např. přiřazení hodnoty nezávisle proměnné x_i v intervalu $0 \leq x_i \leq 10$ natočení X_i jistého hřídele v intervalu $0 \leq X_i \leq \pi$ (v míře obloukové). V tomto případě by odpovídalo např. hodnotě $x_i = 2,38$ natočení příslušného hřídele o úhel $X_i = 2,38 \frac{\pi}{10} \doteq 0,747$ ($\doteq 43^\circ$).

2. *Kódy číslicové* jsou ty, u kterých je předepsán vztah mezi určitými konstantními hodnotami jisté matematické veličiny x_i a jistými fyzikálními stavy X_i . Číslicovým kódem je např. zobrazení všech dekadických číslic ($x_i = 0, 1, 2, \dots, 9$) na devíti očíslovaných vodičích tak, že pro $x_i = 0$ neprotéká elektrický proud žádným vodičem, pro $x_i = 1$ protéká prvním vodičem např. proud 1A, pro $x_i = 2$ protéká tentýž proud druhým vodičem atd.

Podle toho, jakého kódu je použito při vstupním zobrazení, rozdělujeme matematické stroje na stroje *analogové* a *čísllicové*. Oběma typům věnujeme v dalším textu samostatné kapitoly.

Vraťme se však nyní ještě k obr. 1. Když matematický stroj přijal všechny potřebné informace a zaznamenal je ve formě fyzikálních parametrů X_i , je schopen zpracovávat tyto informace podle zadaných požadavků. Konečným výsledkem je řešení dané úlohy ve formě fyzikálních parametrů Y_i . Abychom takového řešení mohli použít, je třeba jej interpretovat řečí pro nás srozumitelnou, tj. je třeba provést *výstupní zobrazení* (dekódování) fyzikálních parametrů Y_i na odpovídající veličiny matematické y_i .

3. Analogové matematické stroje

Analogové matematické stroje zpracovávají kvantitativní informace zobrazené v analogovém kódu. Abychom definovali přesněji pojem *analogový kód*, předpokládejme, že jistá matematická proměnná nabývá hodnot daných nerovnostmi

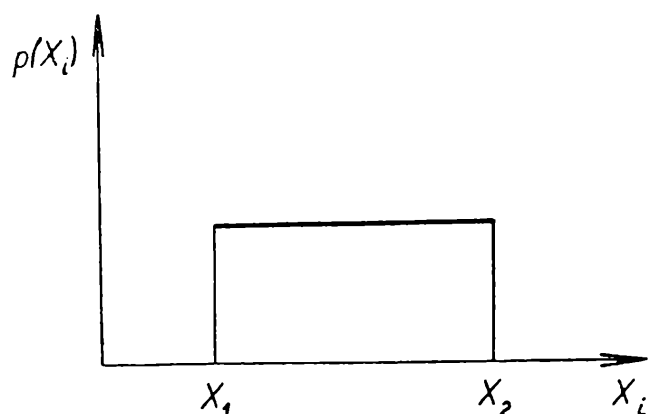
$$x_1 \leq x_i \leq x_2. \quad (1)$$

Tuto matematickou proměnnou zobrazíme nyní jistým fyzikálním parametrem X_i (např. velikostí el. proudu ve vodiči, velikostí natočení hřídele apod.), pro který platí nerovnosti

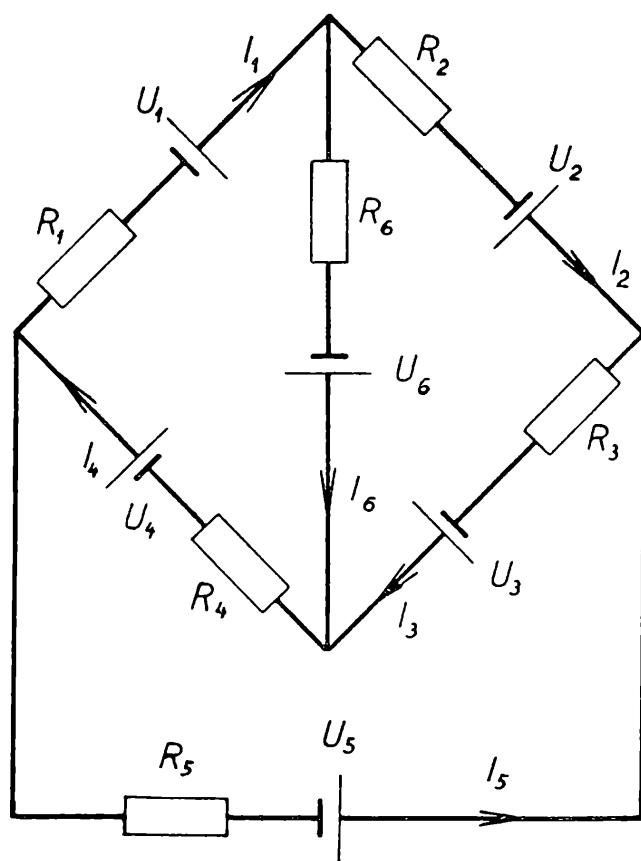
$$X_1 \leq X_i \leq X_2. \quad (2)$$

Zobrazení je analogové tehdy a jen tehdy, když fyzikální parametr X_i může nabývat spojitě všech hodnot uvažovaného intervalu, tj. když pravděpodobnost $p(X_i)$ všech hodnot X_i v intervalu $< X_1, X_2 >$ je stejná. Tato okolnost je naznačena graficky na obr. 2 v pravoúhlých souřadnicích.

Analogové matematické stroje jsou také někdy nazývány *fyzikálními modely* a zdá se, že tento název nejlépe vystihuje podstatu činnosti tohoto typu strojů. Analogový stroj řeší totiž danou matematickou úlohu tak, že je sám sestaven z takové fyzikální soustavy, jejímž matematickým popisem je daná úloha. Ukažme to na jednoduchém příkladě.



Obr. 2



Obr. 3

Představme si, že máme elektrické zařízení zapojené podle obr. 3. Chceme-li vypočítat jaké proudy protékají jednotlivými větvemi v závislosti na velikostech napětí a odporů, použijeme Kirchhoffovy zákony. Podle druhého Kirchhoffova zákona (součet elektromotorických sil v uzavřené smyčce je roven nule), dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - U_1 + R_6 I_6 - U_6 + R_4 I_4 - U_4 &= 0 \\ R_2 I_2 - U_2 + R_3 I_3 - U_3 - R_6 I_6 + U_6 &= 0 \\ R_1 I_1 + U_1 + R_2 I_2 - U_2 + U_5 - R_5 I_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Protože jsme vyčerpali již všechny elementy obvodu - máme však zatím pouze

tři rovnice pro šest neznámých $I_1 \div I_6$ - musíme zbývající tři rovnice získat pomocí prvního Kirchhoffova zákona (součet všech proudů do jistého uzlu přitékajících a z téhož uzlu vytékajících je roven nule; proudy přitékající uvažujeme kladně, proudy vytékající záporně).

Dostáváme:

$$\begin{aligned} I_4 - I_1 - I_5 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_6 &= 0 \\ I_2 + I_5 - I_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Řešením soustavy rovnic (3) a (4) můžeme již určit neznámé hodnoty proudů $I_1 \div I_6$ pro jisté konstantní hodnoty napětí $U_1 \div U_6$ a odporů $R_1 \div R_6$. Představme si nyní, že bychom tuto úlohu potřebovali řešit pro mnoho různých hodnot $U_1 \div U_6$ a $R_1 \div R_6$. To bychom mohli provádět např. dosazováním konkrétních hodnot do obecného řešení rovnic (3) a (4). Jak se však čtenář může přesvědčit, jsou obecné vzorce pro $I_1 \div I_6$ dosti složité a tudíž aritmetické výpočty by byly také dosti pracné. Kdyby potřebných výpočtů bylo mnoho, bylo by jistě vhodné zhotovit model uvažovaného zařízení, u kterého bychom mohli měnit podle potřeby hodnoty $U_1 \div U_6$ a $R_1 \div R_6$ a proudy v jednotlivých větvích bychom měřili ampérmetry. Tímto způsobem bychom mohli v krátkém čase získat velké množství různých řešení rovnic (3) a (4). Zařízení zkonstruované podle obr. 3 by představovalo vlastně jednoduchý analogový matematický stroj pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic o šesti neznámých typu (3) a (4).

V uvedeném příkladě jde o analogový stroj pro řešení úzce speciálního druhu matematických úloh. Vidíme např., že zařízení podle obr. 3 by nemohlo řešit ani obecnou soustavu lineárních algebraických rovnic o šesti neznámých, ale právě jen soustavu typu (3) a (4), kde rovnice (4) nejsou plně obecné.

Analogových modelů, schopných řešit pouze speciální úlohy, se používá často. Vedle nich však existují analogové stroje obecnější, kterých je možno použít pro řešení větší třídy matematických úloh. Jsou to např. stroje na řešení obecných soustav lineárních algebraických rovnic o n -neznámých (tzv. *lineární analyzátor*), stroje na řešení algebraických rovnic n -tého stupně, stroje na řešení obyčejných diferenciálních rovnic do n -tého řádu (tzv. *diferenciální analyzátor*) a mnohé jiné. Tyto obecnější stroje se skládají zpravidla z tzv. *operačních článků*, které tvoří samostatné jednotky, jež lze spolu vzájemně podle potřeby propojovat, a tím je docíleno pružného modelování. Nejdůležitějšími operačními články jsou:

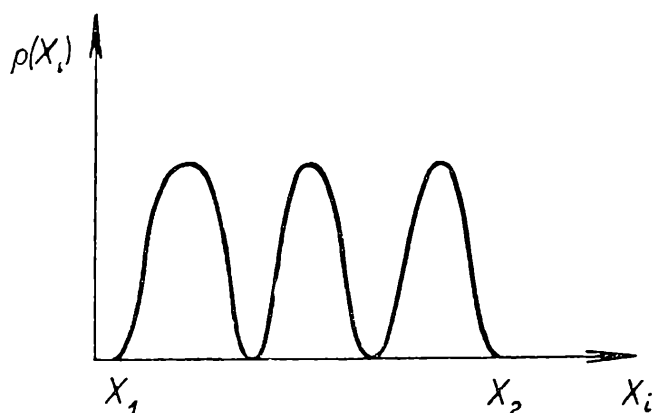
1. *Sčítač*, který modeluje fyzikálně součet (resp. rozdíl) dvou veličin.
2. *Integrátor*, který vytváří fyzikálně hodnotu omezeného integrálu.
3. *Generátor funkce* jedné nebo více nezávisle proměnných.

O charakteru operačních článků bude pojednáno podrobněji v jiném článku. Uvedme však ještě, že dosud užívané analogové stroje používají buď *m e c h a n i c k é h o* nebo *e l e k t r i c k é h o p r i n c i p u*.

4. Číslicové matematické stroje

Číslicové matematické stroje se vyznačují tím, že zpracovávají číselné informace zobrazené v číslicovém kódu. Číslicový kód je definován tím, že chceme-li zobrazit

matematickou proměnnou x_i v rozsahu daném vztahem (1) na jistý fyzikální parametr X_i v rozsahu daném vztahem (2), pak pravděpodobnost $p(X_i)$ výskytu jednotlivých hodnot X_i obsahuje dvě nebo více stejně velkých maxim, přičemž mezi každou dvojicí takových maxim je $p(X_i) = 0$ alespoň pro jedinou hodnotu X_i . Uvedené okolnosti jsou vyznačeny příkladem o třech maximech na obr. 4.



Obr. 4

Zpravidla se z čistě praktických důvodů užívá pouze dvou maxim funkce $p(X_i)$. Tátáž matematická veličina se pak zobrazuje na více fyzikálních prvků tak, že každé kombinaci stavů těchto prvků je přiřazena nespojitě jedna hodnota x_i . Použijeme-li např. jako základního prvku vodiče, který má dva fyzikální stavy (neprotéká, či protéká jím proud), pak můžeme všechny dekadické číslice $0 \div 9$ vyjádřit kombinacemi stavů na čtyřech takových vodičích. Označíme-li vodiče

např. A, B, C, D , stav, ve kterém neprotéká proud 0 a stav, ve kterém proud protéká 1, můžeme jedno z možných zobrazení vyjádřit tabulkou I. Tímto způsobem můžeme vyjádřit jeden řád dekadického čísla. Jestliže bychom chtěli vyjádřit v kódu vyznačeném na tab. I dekadické číslo o n rádech, potřebovali bychom k tomu $4n$ vodičů.

Tabulka I.

Dekadická číslice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Charakter číslicového kódu způsobuje, že způsob činnosti číslicových matematických strojů je naprosto jiný, než způsob činnosti analogových strojů. Zatímco analogové stroje modelují ve fyzikálním světě i vyšší matematické operace, jako integrování apod., modelují číslicové stroje zpravidla pouze čtyři základní

aritmetické operace, tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení. Toto omezení není však omezením pole působnosti číslicových strojů, neboť každou matematickou operaci je možno převést vhodným algoritmem na jistou posloupnost čtyř základních aritmetických operací (popřípadě i jen na sčítání a odčítání).

Číslicové matematické stroje je možno rozdělit takto:

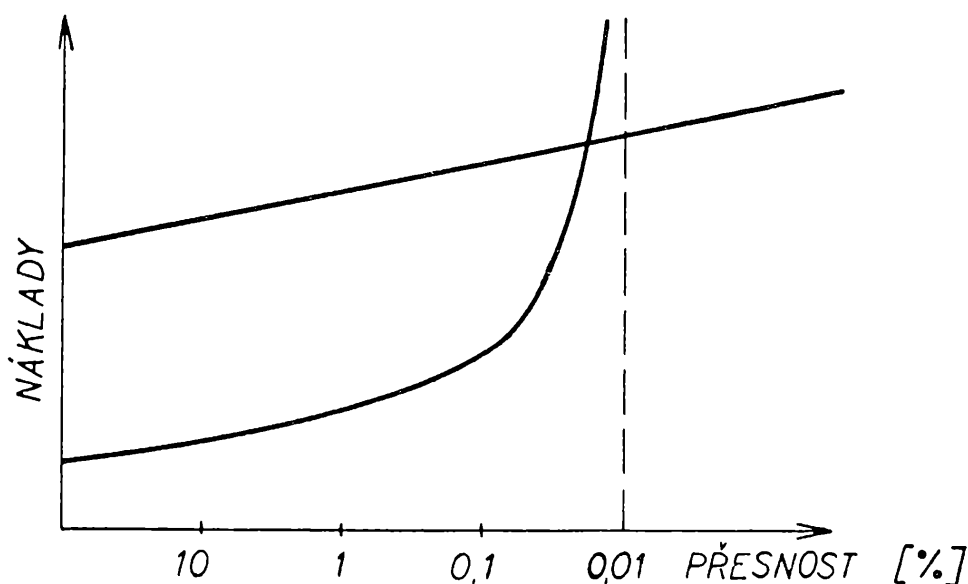
1. *Kalkulační stroje* slouží k provádění základních aritmetických operací s čísly, která se do nich v k l á d a j í r u č n ě, např. pomocí číslicové klávesnice.

2. *Stroje na děrné štítky* - slouží k rychlému zpracování čísel, která jsou vyděrována v jistém kódu do papírových, tzv. *děrných štítků*. Způsob, jakým mají být čísla v sadě děrných štítků zpracována, musí ručně nastavit osoba, která stroj obsluhuje. Základní souprava strojů na děrné štítky se skládá ze tří samostatných strojů. Jsou to:

a) *Třidič*, který slouží k třídění a řadění děrných štítků podle údajů v nich vyděrovaných.

b) *Tabelátor*, který čte informace z děrných štítků, tiskne je a provádí některé aritmetické operace.

c) *Děrovač*, který slouží k zaznamenání čísel na děrné štítky v daném kódu.



Obr. 5

Základní sada bývá doplněna někdy dalšími stroji. U nás vyrábí např. n. p. *A r i t m a* tzv. *kalkulační děrovač*, což je stroj, který čte samočinně informace vyděrované na štítcích (zpravidla vkládáme do stroje celou sadu štítků), provádí na nich aritmetické operace a výsledky děruje opět do štítků nebo je tiskne. Operace se nastavují ručně na o v l á d a c í d e s c e tak, že zpravidla pro jednu sadu štítků se nastaví jedna operace.

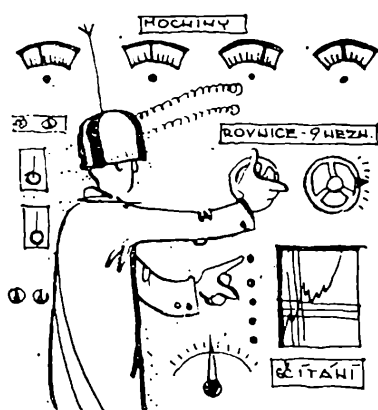
3. *Samočinné počítače*²⁾ jsou stroje, které samočinně provádějí veliké množství aritmetických operací, samočinně manipulují s čísly, s nimiž operují a samočinně upravují svůj pracovní postup.

²⁾ Výklad činnosti samočinných počítačů bude předmětem samostatného článku.

5. Srovnání analogových a číslicových strojů

G. A. Korn a T. A. Korn uvádějí ve své knize o elektronkových analogových matematických strojích zajímavé grafické srovnání číslicových a analogových matematických strojů z hlediska přesnosti a pořizovacích nákladů (obr. 5). Je vidět, že náklady na zhotovení číslicového stroje stoupají lineárně s požadavky na přesnost, takže teoreticky můžeme zhotovit číslicový stroj libovolně přesný. Analogové stroje mají naproti tomu přesnost omezenou v důsledku nezbytných výrobních tolerancí.

Číslicové stroje mají proti analogovým ještě tu přednost, že mohou být přizpůsobeny pro řešení libovolných matematických úloh, neboť u nich vždy jde o posloupnost základních aritmetických operací vyjádřenou daným algoritmem.



6. Závěr

Tento příspěvek má ten účel, že chce vysvětlit obecné principy analogových a číslicových matematických strojů a naznačit jejich rozdělení z některých hledisek. V dalších dvou číslech Rozhledů se zmíníme stručně o vzniku a historickém vývoji těchto strojů.

Oldřich Buchta, studující M. U., Brno:

Grafické řešení kvadratické rovnice

Čtenáři je jistě známo grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Tato konstrukce se zakládá na skutečnosti, že lineárním rovnicím o dvou neznámých odpovídají v souřadnicové rovině přímky.

V tomto článku uvedu dva způsoby grafického řešení kvadratické rovnice s reálnými kořeny. Při prvním z nich se využije analytické geometrie, při druhém způsobu se seznámíme s jednoduchým spojnicovým nomogramem.

Vyložíme nyní první způsob - analytický, který je založen na metodě tzv. *Lillova orthogonu*.

Pravoúhlá soustava souřadnic v rovině buď dána dvěma k sobě kolmými osami x a y se shodnými měřítky (obr. 1).

Mějme kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

V souřadnicové rovině určíme body $A(a, 0)$, $B(c, -b)$, kde čísla v závorkách znamenají x a y souřadnici bodu. Ze středu S úsečky AB opíšeme kružnici k o poloměru SA .

Chceme ukázat:

- a) má-li rovnice (1) imaginární kořeny, pak kružnice k neprotíná osu y ;
 b) má-li rovnice (1) dva různé reálné kořeny r, s , příp. kořen dvojnásobný, pak kružnice k protíná osu y ve dvou bodech U, V , různých nebo splývajících a y souřadnice těchto bodů jsou ar, as . Rčení, že kružnice k protíná nějakou přímku ve dvou splývajících bodech U, V znamená, že se této přímky dotýká v bodě $U \equiv V$.

Skutečně, souřadnice bodu S jsou rovny aritmetickým průměrům příslušných souřadnic krajních bodů A, B , tedy $\frac{a+c}{2}$; $-\frac{b}{2}$; čtverec poloměru kružnice k je

$$\overline{SA}^2 = \left(\frac{a+c}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4}.$$

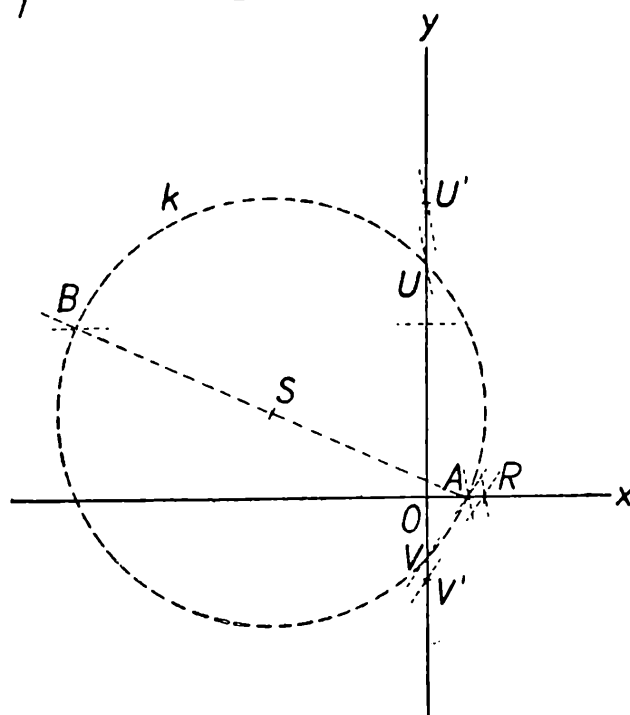
Kružnice k je tedy určena středem a poloměrem; její rovnice je

$$\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + b^2}{4}.$$

Položíme-li v této rovnici $x = 0$, dostaneme vzorec pro souřadnice průsečíků U, V s osou y :

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 &= \\ &= \frac{(a-c)^2}{4} + \frac{b^2}{4}, \\ \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - ac. \end{aligned}$$

Odtud



Obr. 1

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}. \text{ Poněvadž } r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ s &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

vidíme, že příslušné souřadnice jsou $y = ar, y = as$.

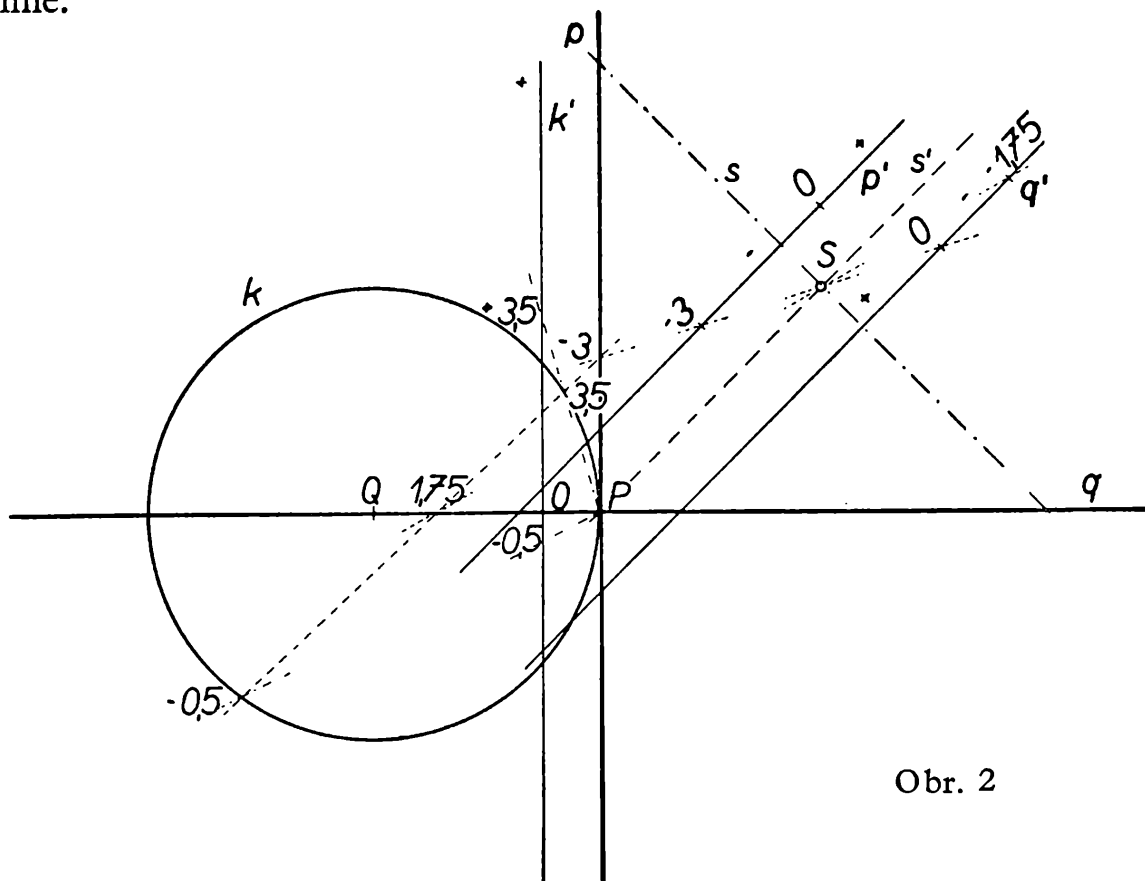
Kořeny r, s jsou buď reálné a pak existují reálné průsečíky, nebo jsou imaginární a pak kružnice k zřejmě neprotne osu y .

Je-li $a \neq 1$, získáme hodnoty r, s stejnolehlostí. Bodem $R(1,0)$ vedeme rovnoběžky s AU, AV a průsečíky U', V' s osou y mají pak y souřadnice rovny kořenům naší kvadratické rovnice.

Na obr. 1 je řešena kvadratická rovnice $0,8x^2 - 3x - 6,3 = 0$.

Řešení: $r = -1,5, s = 5,25$.

Při právě uvedené konstrukci jsme používali pravítka i kružítko; následující způsob řešení kvadratické rovnice pomocí *spojnicového nomogramu*¹⁾ je o to zajímavější, že je-li nomogram už jednou narýsován, vystačíme pro konstrukci kořenů dané rovnice pouze s měřítkem a jedním pravítkem. Tento způsob je na druhé straně prakticky méně přesný a dá se ho použít jen v jistých mezích, jak ještě uvidíme.



Obr. 2

Budeme postupovat takto:

Nejdříve udáme návod, podle kterého si čtenář sám narýsuje celý graf. Pak si na příkladě ukážeme jeho funkci, dále podáme nutná vysvětlení. Nakonec naznačíme důkaz správnosti našeho grafického řešení.

Obrázek si rýsujeme na list papíru většího sešitového formátu naležato. Asi uprostřed nákresny zvolme bod Q a z něj jako středu opišme kružnici k o poloměru 4 cm. Bodem Q vedme dále rovnoběžku q s delší stranou nákresny. Pravý koncový bod průměru q na kružnici k označme P (obr. 2). Bodem P vedme k přímce q kolmici p a ve vzdálenosti 1 cm vlevo další kolmici $k' \parallel p$. Od bodu P nanese vpravo na q 8 cm a nahoru na p také 8 cm. Nově získané body určují

¹⁾ O těchto nomogramech viz J. Chudý, Nomogramy, Rozhledy, roč. 37 (1959), č. 6, str. 248.

úsečku s , jejíž střed označíme S . Bod S leží zřejmě na symetrále s' úhlu přímek p, q . Vedme obě rovnoběžky s přímkou s' ve vzdálenosti 1 cm. Z nich bližší k bodu Q označíme p' a druhou q' .

Nyní na přímkách k', p', q' určíme body, které označíme týmiž znaky 0 (nula). Na přímce k' je nulou její průsečík s přímkou q . Na přímce p' je nula 1 cm vpravo od průsečíku s a na q' je nula 2 cm vpravo od průsečíku s úsečkou s . Dále volme kladný směr: Nahoře na přímce k' , vpravo na p' a vlevo na q' . Konečně na všech třech přímkách volme jednotku délky 1 cm. Tím jsme na přímkách k', p', q' určili shodná měřítka a na nich můžeme v mezích nákresny vynášet a opět odečítat libovolné reálné hodnoty. Tím je také hotov náš obrázek.

Poznamenejme nyní, že chceme-li řešit kvadratickou rovnici novým způsobem, musíme ji předně uvést na normovaný tvar $x^2 + px + q = 0$, což je vždy možné.

Mějme například rovnici $x^2 - 3x - 1,75 = 0$, tj. $p = -3, q = -1,75$ (obr. 2).

Na přímce p' vyneseme bod o souřadnici -3 a na q' bod o souřadnici $-1,75$. Bod na p' promítneme z bodu S na přímkou p a bod na q' promítneme rovněž z S na přímkou q . Body získané promítáním spojíme přímkou a určíme průsečíky této spojnice s kružnicí k . Tyto průsečíky promítneme z bodu P na přímkou k' . Souřadnice bodů získaných na k' dávají přesné hodnoty kořenů. V tomto případě $x_1 = -0,5, x_2 = 3,5$.

Tím jsme ukázali, jak se pracuje s naším aparátem a teď několik vysvětlení.

Na obr. 2 vidíme kružnici k a pět význačných přímek: p, p', q, q', k' . Z toho jen kružnice k a přímky p, q tvoří vlastní nomogram, kdežto přímky p', q', k' jsou pomocná měřítka.

Ukážeme nejprve souvislost částí nomogramu a pomocných měřítek. Uvažujme například přímky p' a p . Na přímce p' jsme určili rovnoměrné měřítko neboli rovnoměrnou stupnici. Na základě této stupnice je každému reálnému číslu přiřazen bod přímky p' a všechny body přímky p' jsou očíslovány reálnými čísly.

Nechť bod A' na přímce p' je označen číslem a . Bod A' se z bodu S promítá do bodu A přímky p . Tomuto bodu přiřadíme opět číslo a . Jestliže si myslíme všechny body přímky p' promítnuty do bodů přímky p z téhož bodu S (výjimku tvoří počátek 0, který se promítá do bodu v nekonečnu), dostáváme jednoznačné přiřazení bodů přímky p bodům přímky p' a tím také vzájemně jednoznačné přiřazení bodů přímky p reálným číslům, neboli přesně určené očíslování bodů přímky p reálnými čísly; nula je přiřazena nekonečně vzdálenému bodu přímky p . Tím jsme dostali na přímce p jakousi nerovnoměrnou stupnici, kterou v tomto zvláštním případě nazýváme *projektivní stupnicí* nebo *projektivní škálou*.

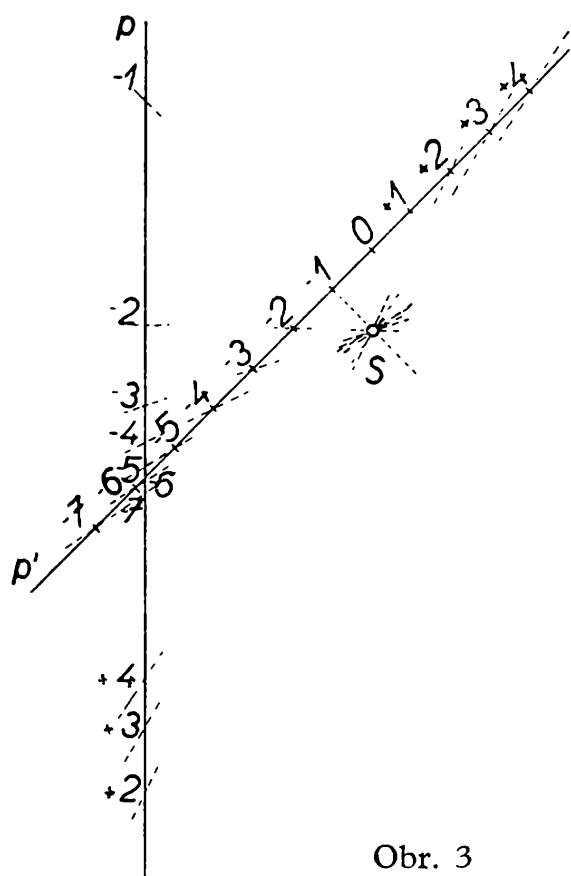
Názornou představu o této stupnici dostaneme, když si promítneme do p několik bodů přímky p' , které odpovídají celým číslům (obr. 3).

Podobně jsou také na přímce q a na kružnici k určeny jisté projektivní stupnice. V případě kružnice k mluvíme o křivé stupnici. Čtenář nechť si opět sestrojí několik bodů těchto stupnic.

Stupnici na q dostaneme promítáním měřítka na q' z bodu S , stupnici na k dostaneme promítáním měřítka na k' z bodu P .

Odtud již vidíme podstatu našeho spojnicového nomogramu: Mějme kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ s reálnými kořeny. Koeficient p je znázorněn jistým bodem projektivní stupnice na přímce p , koeficient q je znázorněn jistým bodem projektivní stupnice na přímce q . Spojnice těchto bodů, jak bude dokázáno, protíná kružnici k v bodech, které v její projektivní stupnici odpovídají kořenům x_1, x_2 .

Čtenář si teď může pomoci promítání na všech třech projektivních stupnicích očíslovat větší množství bodů, aby dostal dostatečně husté dělení. Může pak řešit kvadratické rovnice přímo nomogramem bez použití pomocných měřítek. Hodnoty, které nebude mít ve svých stupnicích vyznačeny, bude pak vynášet pomocí přibližné interpolace, jaké používáme při práci s logaritmickým pravítkem.



Obr. 3

Ještě několik technických poznámek k našemu nomogramu. Příklad uvedený v textu byl vhodně volen a proto příslušná konstrukce byla dosti přesná. Avšak vcelku jsou možnosti praktického použití dosti omezené. Jestliže rovnice má například velké kořeny, pak body kružnice odpovídající těmto kořenům jsou blízko P a nedají se dobře rozlišovat. Dále vznikají nepřesnosti, jsou-li oba kořeny dosti blízké a kružnice je protata přímkou v dosti blízkých bodech. Také pro p blízké k nule, nebo pro q blízké k jedničce vznikají potíže, neboť konstrukce vybíhá z nákresny. Je-li přímo $p = 0$, nebo $q = 1$, máme úlohu spojit bod jedné stupnice s nekonečně vzdáleným bodem druhé stupnice, tedy bodem jedné stupnice vedeme rovnoběžku s druhou stupnicí. V tomto případě již nevystačíme s jedním pravítkem.

Vcelku konstrukce vycházejí dobře, jsou-li splněny podmínky $-4 \leq p \leq 4$, $0 \leq p - 4q \leq 16$, zejména, když q je záporné.

V praxi se pro řešení kvadratických rovnic lépe osvědčují nomogramy, kde kružnice je nahrazena parabolou nebo hyperbolou. Větší přesnosti se také dosáhne volbou různého měřítka pro délky v různých intervalech. Tím se zde však nebudeme zabývat.

Naznačme teď analytický důkaz správnosti našeho grafického řešení; čtenář nechť si sám doplní detaily podle článků Doc. E. Kraemera, O analytické geometrii v rovině (Rozhledy, roč. 37 - 1959).

Volme osu x v přímce q , osu y v přímce p a jednotku 1 cm. Nechť X_1, X_2 jsou

bodů na k' , které mají na této přímce souřadnice x_1, x_2 , které vyhovují kvadratické rovnici $x^2 + px + q = 0$, $p \neq 0$, $q \neq 1$. Rovinné souřadnice bodů X_1, X_2 jsou $(-1; x_1), (-1; x_2)$. Promítnutím z bodu $P(0; 0)$ na kružnici k dostaneme

$$\text{body } M_1\left(\frac{-8}{1+x_1^2}; \frac{8x_1}{1+x_1^2}\right), M_2\left(\frac{-8}{1+x_2^2}; \frac{8x_2}{1+x_2^2}\right).$$

Rovnice kružnice k je totiž $x^2 + y^2 + 8x = 0$ a přímky PX_1, PX_2 mají rovnice $y = -x_1x, y = -x_2x$. Dále si napíšeme rovnici přímky M_1M_2 a upravíme ji na úsekový tvar $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Dostaneme $a = \frac{8}{x_1x_2 - 1} = \frac{8}{q - 1}$,

$b = \frac{8}{x_1 + x_2} = \frac{-8}{p}$. Přímky q, p jsou tedy prořaty přímkou M_1M_2 v bodech

$U\left(\frac{8}{q-1}; 0\right), V\left(0; -\frac{8}{p}\right)$. Dále body U, V se promítnou z bodu S na přímky q', p' do bodů U', V' . Provedme výpočet například pro bod V' . Platí $S(4; 4)$,

p' má rovnici $y = x + \sqrt{2}$ a SV má rovnici $y + \frac{8}{p} = x\left(1 + \frac{2}{p}\right)$, odtud V'

má souřadnice $\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + 4; \frac{p}{\sqrt{2}} + 4 + \sqrt{2}\right)$. Počátek na p má souřadnice $(4; 4 + \sqrt{2})$

a odtud zjistíme, že $OV' = p$. Přihlédneme-li k orientaci přímky p' , vidíme, že bod V má na ní souřadnici p . Podobnými výpočty zjistíme, že bod U' má na přímce q' souřadnici q . Obrátíme-li celý postup, vidíme, že má-li kvadratická rovnice reálné kořeny, lze je graficky sestavit dříve naznačeným způsobem a správnost celé konstrukce je tedy dokázána. Zejména je vidět, že přímka UV protíná reálně kružnici k . Nemá-li rovnice reálných kořenů, pak konstrukce selhává. Čtenář si sám rozmyslí, z jakého důvodu.

Poznamenejme, že v důkaze jsme zároveň odvodili výtvarný zákon pro naše projektivní stupnice.

Literatura:

V. Hruška: Počet grafický a graficko-mechanický, 1952, Praha.

Doc. Emil Kraemer, VŠP, Praha:

O analytické geometrii v rovině

(Pokračování)

Dosud jsme poznali, že každá přímka má v dané soustavě souřadnic rovnici $ax + by + c = 0$, ve které není zároveň $a = 0, b = 0$. Jako zvláštní případ této rovnice můžeme uvést rovnici $y = kx + q$ čili $kx - y + q = 0$ platící pro všechny přímky s výjimkou rovnoběžek s osou y , a rovnici $x = c$ platící pouze

pro rovnoběžky s osou y . Všimněme si ještě, jak můžeme napsat rovnici přímky p , která není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem.

Přímka a , která splňuje dvě právě uvedené podmínky, protíná osu x v bodě P , jehož druhé souřadnice je nula a jehož první souřadnici označujeme p a nazýváme ji *úsekem vyřatým přímkou p na ose x* ; je tedy $P(p, 0)$. Tato přímka a také protíná osu y , a to v bodě Q , jehož první souřadnice je nula a jehož druhá souřadnice se označuje q a nazývá se (jak už víme) *úsekem vyřatým přímkou a na ose y* ; je tedy $Q(0, q)$. Protože daná přímka a není rovnoběžná s osou y , má (podle věty 3) rovnici

$$y = kx + q. \quad (1)$$

Protože prochází bodem $P(p, 0)$ vyhovují jeho souřadnice $x = p, y = 0$ její rovnici (1), takže je

$$0 = kp + q.$$

Protože je $p \neq 0$, je $k = -\frac{q}{p}$, takže rovnice (1) zní

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$py = -qx + pq.$$

Protože je $p \neq 0, q \neq 0$, můžeme celou rovnici dělit číslem pq , takže po úpravě dostaneme výsledek

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

který můžeme vyslovit takto:

V ě t a 8. *Přímka, která protíná obě souřadnicové osy tak, že na nich vytíná úseky $p \neq 0$ (na ose x), $q \neq 0$ (na ose y), má rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.*

Abychom se mohli stručně vyjadřovat, nazýváme obvykle rovnici $ax + by + c = 0$ *obecným tvarem rovnice přímky*, rovnici $y = kx + q$ *tvarem směrnicovým* a rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ *tvarem úsekovým*.

Výsledky, k nimž jsme dosud dospěli, jsou pro analytickou geometrii tak základní, že je dobře si je trvale zapamatovat. Stručně je můžeme shrnout takto: V dané soustavě souřadnic můžeme rovnici přímky napsat v těchto tří základních tvarech:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{obecný tvar ,}$$

$$y = kx + q \quad \text{směrnicový tvar ,}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \text{úsekový tvar ,}$$

V obecném tvaru je vždy aspoň jedno z čísel a, b různé od nuly, v úsekovém tvaru je samozřejmě $p \neq 0, q \neq 0$. Přitom v obecném tvaru lze napsat rovnici každé přímky (proto ten název „obecný“), ve tvaru směrnicového rovnici každé přímky, která není rovnoběžná s osou y , a ve tvaru úsekovém pouze rovnici takové přímky, která neprochází počátkem a není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou.

Konečně je si nutno pamatovat, že ke každé lineární rovnici $ax + by + c = 0$, ve které není zároveň $a = 0, b = 0$, existuje v dané soustavě souřadnic jediná přímka, kdežto daná přímka má v dané soustavě souřadnic nekonečně mnoho rovnic; každá z nich je však h -násobkem kterékoli jiné ($h \neq 0$).

K těmto výsledkům připojíme nyní ještě řešení dvou základních úloh, které se vyskytují tak často, že je rozřešíme obecně (tj. nikoli na numerických příkladech).

V první úloze jde o napsání rovnice přímky, která prochází daným bodem $L(x_1, y_1)$ a má danou směrnici k . Podle věty 3 má tato přímka rovnici

$$y = kx + q, \quad (1)$$

ve které zatím neznáme číslo q . Protože bod L leží na této přímce, vyhovují jeho souřadnice $x = x_1, y = y_1$ její rovnici, tj. platí rovnice

$$y_1 = kx_1 + q$$

$$q = y_1 - kx_1.$$

Rovnice (1) tedy zní $y = kx + y_1 - kx_1$; obvykle ji píšeme ve tvaru

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku.

V ě t a 9. *Přímka, která prochází daným bodem (x_1, y_1) a má danou směrnici k , má rovnici $y - y_1 = k(x - x_1)$.*

Tak např. rovnice přímky procházející bodem $L(3; 4)$ a mající směrnici $k = -\frac{2}{3}$ je $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 3)$ čili $3y - 12 = -2x + 6$ čili $2x + 3y - 18 = 0$.

V druhé úloze jde o napsání rovnice přímky, která prochází dvěma různými danými body $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Je-li $x_1 = x_2$, je tato přímka rovnoběžná s osou y a má od počátku vzdálenost $|x_1|$; podle věty 4 má tedy rovnici $x = x_1$. Je-li však $x_1 \neq x_2$, není přímka rovnoběžná s osou y ; její rovnici bychom dovedli napsat podle věty 9, kdybychom vypočetli její směrnici k . To však je velmi jednoduché. Rovnice hledané přímky je

$$y = kx + q. \quad (1)$$

Protože dané body $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ leží na této přímce, vyhovují jejich souřadnice rovnici (1), tj. platí rovnice

$$y_1 = kx_1 + q$$

$$y_2 = kx_2 + q.$$

Odečteme-li první od druhé, dostaneme

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (2)$$

Podle věty 9 má tedy hledaná přímka rovnici

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Stačí však pamatovat si větu 9 a vzorec (2), tj. tuto větu:

V ě t a 10. Směrnice k přímky určené body (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , kde je $x_1 \neq x_2$, je $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Ukážeme si užití vět 9 a 10 na dvou příkladech, podle nichž lze pak řešit i příklady obdobné.

Příklad 5. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $P(1; -6)$ a je rovnoběžná s přímkou $5x - 12y + 7 = 0$.

Ř e š e n í. Rovnoběžné přímky mají touž směrnici; proto hledaná přímka bude mít takovou směrnici jako přímka $5x - 12y + 7 = 0$. Abychom zjistili směrnici této přímky, převedeme ji na směrnicový tvar $y = kx + q$, tj. v našem případě na tvar

$$\begin{aligned} 12y &= 5x + 7 \\ y &= \frac{5}{12}x + \frac{7}{12}, \end{aligned}$$

z něhož plyne, že má směrnici $k = \frac{5}{12}$. Podle věty 9 má tedy hledaná přímka rovnici

$$y - (-6) = \frac{5}{12} (x - 1)$$

$$\begin{aligned} 12y + 72 &= 5x - 5 \\ 5x - 12y - 77 &= 0. \end{aligned}$$

Příklad 6. Rozhodněte, který z bodů $A(3; -5)$, $B\left(-6; \frac{13}{2}\right)$ leží na přímce určené body $M(-2; 3)$, $N\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

Ř e š e n í. Rovnici přímky $p \equiv MN$ napíšeme podle věty 9, jakmile budeme znát její směrnici k . Podle věty 10 však je

$$k = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{2 - (-2)} = -\frac{7}{8}.$$

Podle věty 9 je tedy rovnice přímky $p \equiv MN$

$$y - 3 = -\frac{7}{8}(x + 2)$$

$$8y - 24 = -7x - 14$$

$$7x + 8y - 10 = 0. \quad (3)$$

Abychom rozhodli, zdali bod $A(3; -5)$ leží na přímce $p \equiv MN$, zjistíme, zda jeho souřadnice $x = 3, y = -5$ vyhovují její rovnici (3) nebo nikoli. Dosadíme-li $x = 3, y = -5$ do levé strany rovnice (3), dostaneme

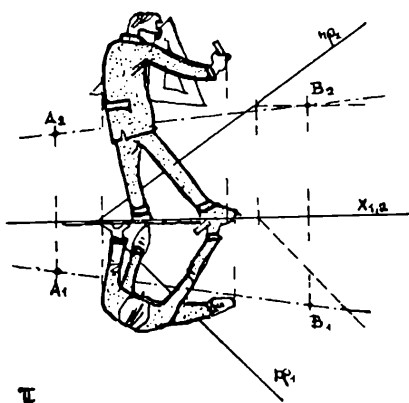
$$7 \cdot 3 + 8 \cdot (-5) - 10 = 21 - 50 \neq 0;$$

bod A tedy na přímce $p \equiv MN$ neleží. Dosadíme-li do levé strany rovnice (3) souřadnice bodu $B\left(-6; \frac{13}{2}\right)$, zjistíme, že je

$$7 \cdot (-6) + 8 \cdot \frac{13}{2} - 10 = -52 + 52 = 0;$$

to znamená, že bod B leží na přímce $p \equiv MN$.

(Pokračování)



Deskriptivní geometrie a rýsování

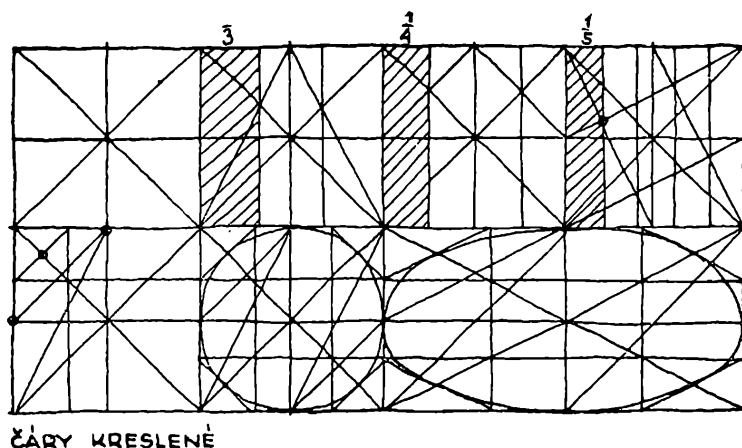
Inž. arch. Josef Švastal,
katedra pozemního stavitelství na FAPS, Praha:

O stavitelském kreslení

Moderní technika si žádá stále více technických odborníků, z nichž nejkvalifikovanější vychovávají naše vysoké školy. Z celkového počtu absolventů jedenáctiletých škol bylo přijato téměř 40 % na vysoké školy. V letošním roce studuje skoro 54 tisíc studentů na vysokých školách, při čemž na přírůstku studentů těchto škol se podílejí stále více školy technického směru.

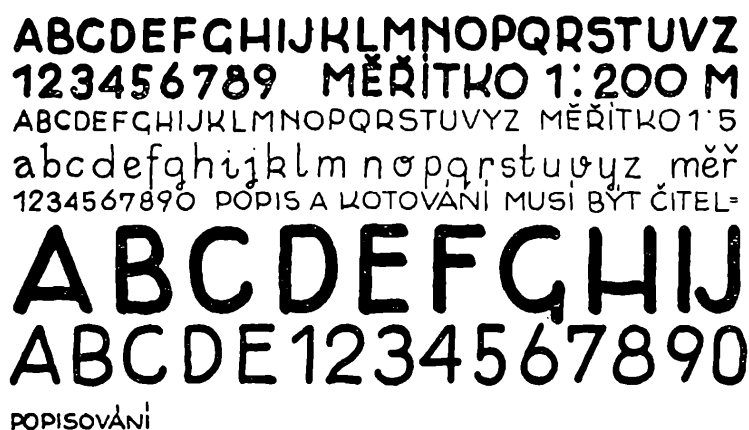
Převážná většina studentů studujících směr staveb občanských a staveb pro výrobu průmyslovou a zemědělskou na fakultě architektury a pozemního stavitelství přichází na vysokou školu s minimálními znalostmi zobrazování prostoru

a hmoty, i bez zkušeností a pohotovosti v grafickém podání. Pro ně je určen následující výklad o způsobu výuky stavitelského kreslení, které má získat a prohloubit technickou představivost a paměť studenta a umožnit mu po přiměřeně pilném cvičení získat potřebnou zručnost v kreslení technických představ i skutečností. Má ho také seznámit s pravidly, způsoby a normami z oboru provádění stavebních výkresů.



Obr. 1

Pro studenta, kterého vysoká škola vychovává pro budoucí technické povolání, je znalost kresebného záznamu jeho studijních poznatků naprosto nutná. Pomocí kresby je studentům přednášena řada technických předmětů, z nichž na prvním místě je stavitelství. Ve vyšších ročnících znalost kresby je přímo podmínkou dalšího studia, zejména v konstruktivním návrhu, kde je kladen již i značný nárok na rýsování a celé grafické podání stavebních výkresů s průběžným zhotovováním skic, zejména stavebních detailů.

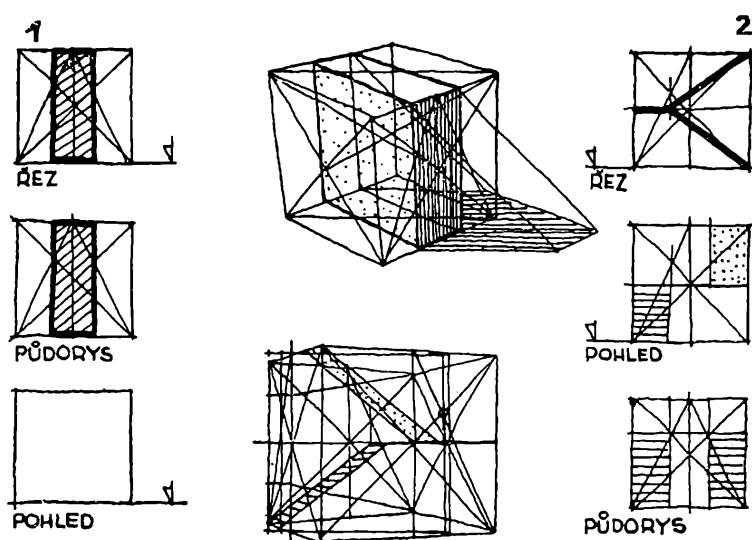


Obr. 2

Řada cvičení, která probíhá zároveň s přednáškami ze stavitelství, počíná výkladem o účelu stavitelského kreslení a o pomůckách k němu. Studentům je vysvětlen zásadní rozdíl mezi kresbou technika a výtvarníka. Pro technika je nutno ovládnout kresbu věcnou, popisující přesně hmotu či prostor, za použití jasné linie. Doplní-li se kresba barvou, je to tedy jen za účelem zdůraznění prostorovosti a skutečné barevnosti objektu. Základní technikou zůstává kresba perem

a tužkou na kreslicí a pauzovací papír. Cvičení čar přímých i křivek je aplikováno na geometrických úlohách, aby cvičení bylo zajímavé a je ukončeno návrhem jednoduchého ornamentu nebo rovinného předmětu, např. zábradlí, kresbou od ruky (obr. 1).

Důležitým doplňkem výkresu je popis. Po výkladu o druzích a užití různých písem je procvičováno písmo tvarově jednoduché, ale je dbáno hlavně čitelnosti jak jednotlivých písmen, tak celých textů. Převládá cvičení písmen svislých, která velmi vhodně a nerušivě doplňují stavební výkresy, ve kterých obvykle převládá soustava čar svislých a vodorovných. Nemenší péče je věnována tvaru a čitelnosti číslic, které jsou nedílnou a důležitou součástí kót na stavebních výkresech. Písmena i číslice je nutno nacvičit v psaní kótovacím perem i redisperem, v různých velikostech a tloušťkách (obr. 2). Normalizovaného písma se užívá ve stavitelství zatím jen na výkresech *typových podkladů*.¹⁾



Obr. 3. Zručnost v kreslení a zvládnutí prostorové představy se cvičí na studiích jednotlivých hmotných prvků kreslených od ruky v pravoúhlých průmětech: řez, půdorys a pohled. Užívá se částí nebo výřezů ze základní krychle. Představa je vždy doplněna prostorovou studií v krychli perspektivně nakreslené a kresba je případně doplněna osvětlením. V první studii bylo cvičeno vynětí hranolu ze základní krychle. Konstrukce, kterou byla oddělena vnitřní třetina čtverce se opakuje i v perspektivě krychle. V druhé studii je zakresleno dvouramenné schodiště.

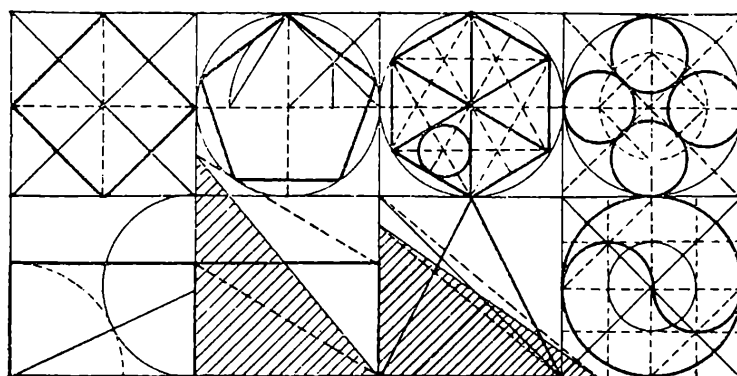
Pohotovost ve znázorňování hmot se cvičí kreslením stereometrických útvarů za pomoci kreslení krychle v poloze průčelné i neprůčelné v perspektivě, podle modelu i představy. Cvičení je rozvedeno tak, že se cvičí dělení krychle, řazení krychlí i kreslení kružnic do perspektivně zobrazených čtverců. Kreslí se průniky těles hranolovitých i rotačních, i komplikované útvary ve skladbě krychlí např. víceramenná schodiště nebo šroubovice (obr. 3).

Kreslení a kótování jednoduchých rovinných útvarů, vždy však majících vztah k některým stavebním prvkům, provádí se po vysvětlení příslušných zmenšují-

¹⁾ *Typové podklady* jsou soubory výkresů, sloužících k hromadné výrobě, např. obytných domů.

cích měřítek užívaných při rýsování stavebních výkresů, aby se zároveň procvičila pohotovost v jejich užívání. Rýsování čar tužkou i tuší s výkladem o významu čar plných, čárkovaných, čerchovaných atd. ve stavebních výkresech s kótováním a užitím poměrového měřítka, je přípravou k výkladu o zakreslování základních konstrukcí ve stavebních výkresech (obr. 4).

Aby závislost byla jasná a jednoznačná, je na jednoduchém příkladě cvičeno ortogonální promítání, užívané pro rýsování stavebních výkresů. Z tzv. axono-



ČARY RÝSOVANÉ

Obr. 4

metrického pohledu na předmět jsou odvozena pravidla pro zakreslení půdorysu; předmět je proříznut myšlenou vodorovnou rovinou, vedenou ve výši nad *parapetem okna*.²⁾ Plochy konstrukcí touto rovinou proříznuté se označí grafickou značkou určenou té které hmotě, nebo se obarví podle ČSN.³⁾ Všechny hrany pod rovinou řezu jsou kresleny plnou čarou. Hrany konstrukcí nad rovinou řezu se promítnou do půdorysu a rýsují se čárkovanou čarou. Obrys konstrukcí visutých (balkón, *zástřešek*,⁴⁾ římsa) se kreslí také čárkovaně do půdorysu, jsou-li v úrovni stropu nebo jeho součástí, nad rovinou řezu. Ve vyšším patře je táž konstrukce zakreslena plně; je pod rovinou řezu. Každá konstrukce se tedy kreslí nejvíce dvakrát. Pro řez platí pravidlo obdobné: předmět se prořízne svislou rovinou a plochy konstrukce rovinou proříznuté se opět graficky pojednají. Do řezu je však nepřípustné promítat hrany konstrukcí oddělené řezovou rovinou. Pohledy na předmět se kreslí plnou čarou (obr. 5).

V dalším cvičení se již přechází k velmi důležité partii, která svými přesnými zásadami klade na studenty značný nárok, a to k procvičení všech vztahů *modulového systému*⁵⁾ u nás užívaného. Modulový systém a závislost rozměrů stavebních

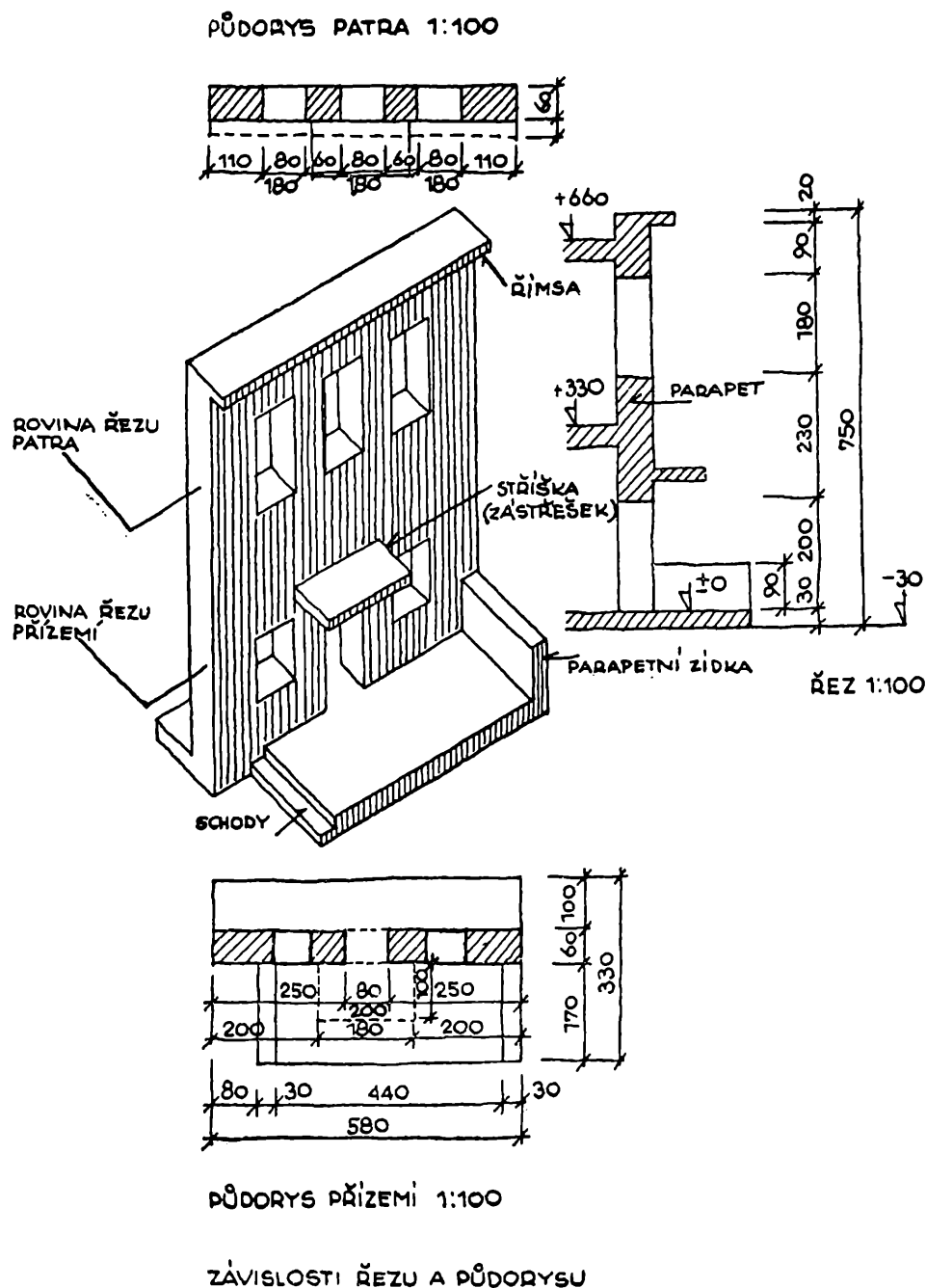
²⁾ *Parapet* je nízká zídka na místě zábradlí. Např. Karlův most má parapetní zídky, kdežto rampa Národního musea na Václavském náměstí má kamenné zábradlí s kuželkami. V našem případě užíváme stejného slova pro zdivo pod oknem (viz obr. 5).

³⁾ ČSN je značka československých norem, které jsou závaznými předpisy, např. pro kreslení výkresů určitého oboru. Ve stavitelství se užívalo ČSN 1104-1933 - *Úprava plánů v pozemním stavitelství*.

⁴⁾ *Zástřešek* je např. stříška před vchodem do budovy (viz obr. 5).

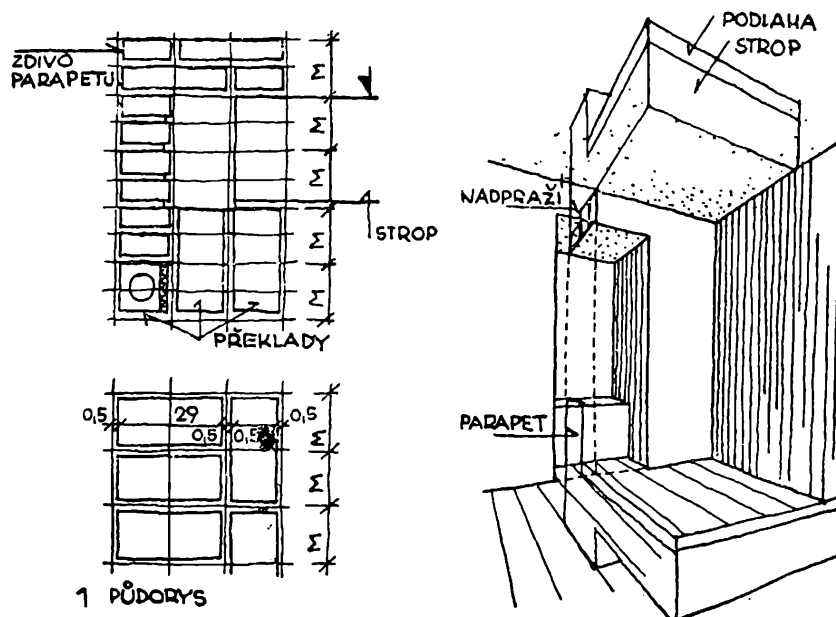
⁵⁾ *Modulový systém* je metoda, která pomocí prostorové modulové sítě stanoví zásady k určování rozměrů stavebních prvků, aby z nich bylo možno skládat díly stavby, např. zdi a stropy a z dílů stavbu celou.

prvků i dílů na něm, se cvičí jejich zakreslováním do modulové sítě v půdorysu a řezu, i rýsováním jednoduchého stavebního dílu v půdorysu a řezu. Prostorová názornost se zvyšuje nakreslením tohoto objektu v perspektivě nebo axonometrii (obr. 6).



Obr. 5. Představu o zakreslování půdorysů a řezů ve stavebních výkresech nám pomůže ujasnit tzv. axonometrický pohled na průčelí domu s dveřmi, okny, stříškou nad vchodem, římsou, schody a parapetní zídka. Půdorys je nakreslen tak, že vodorovnou rovinou vedenou ve výši oken je oddělena horní část domu a na spodní část se díváme. Proříznuté zdivo je vyšrafováno, hrany, které jsou pod rovinou řezu jsou nakresleny plně (parapetní zídka, schody, hrany parapetů v oknech), zatímco hrany konstrukcí nad rovinou řezu jsou do půdorysu promítnuty a zakresleny čárkovaně (nadpraží dveřního otvoru a obrys stříšky nad vchodem). Půdorys patra je proveden obdobně: čárkovaně je zakreslena římsa, plně je zakreslena stříška. Ve svislém řezu jsou také vyšrafovány proříznuté plochy a plně jsou nakresleny obrysy těch částí, které jsou v pohledu (např. parapetní zídka).

2 SVISLÝ ŘEZ OKENNÍM NADPRAŽÍM



Obr. 6. Do perspektivy koutu místnosti s okenním otvorem je zakreslen svislý řez okenním nadpražím, oknem, parapetem a stropem. Okenní nadpraží je sestaveno z prefabrikovaných překladů, které nesou strop a parapet následujícího patra. Na obrázku jsou vysvětleny dvě základní zásady modulového systému:

1. v půdorysu leží stavební prvek - cihla - v modulové síti uvnitř tak, že kolem něho k síti zbývá 0,5 cm;
2. ve svislém řezu leží stavební prvek - cihla, překlad - v modulové síti tak, že se jí dotýká horní plochou.

(Pokračování)

Plán velké bytové výstavby v příštích letech a nebyvalý rozvoj stavebnictví si zaslouží i vaši pozornost. Mnozí z vás přijdou s tímto oborem technické činnosti do přímého styku chvilkově na brigádách, nebo dokonce celoživotně, stane-li se stavebnictví vaším povoláním. V školských učebnicích je převážně věnované místo strojnickému kreslení, proto vás zde chceme alespoň informativně seznámit se stavitelským kreslením, s jeho názvoslovím i s problémy, které se liší od kreslení strojnického.

Redakce

Doc. Dr. Václav Havel, VŠT, Brno:

O metodě vynechání os

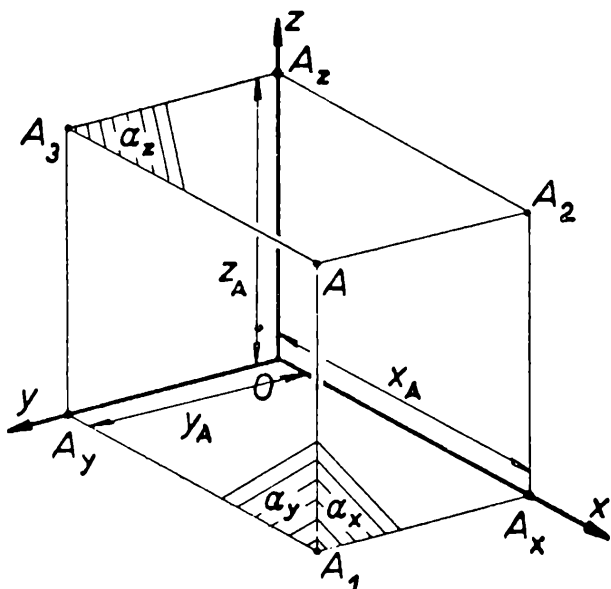
1. *O souřadnicích.* Patu kolmice spuštěné z bodu A k dané rovině (přímce) nazveme též kolmým průmětem bodu A do dané roviny (přímky).

Mějme orientované přímky x, y, z (osy souřadnic), které jsou navzájem kolmé a jdou týmž bodem O (počátkem). K bodu A v prostoru sestrojme kolmé průměty A_x, A_y, A_z do os x, y, z a orientované vzdálenosti $x_A = OA_x, y_A = OA_y, z_A = OA_z$ nazveme *souřadnicí* x, y a z bodu A (obr. 1). Zvolíme-li naopak reálná čísla a_1, a_2, a_3 , pak lze sestrojit jediný bod A v prostoru tak, že $x_A = a_1, y_A = a_2, z_A = a_3$.

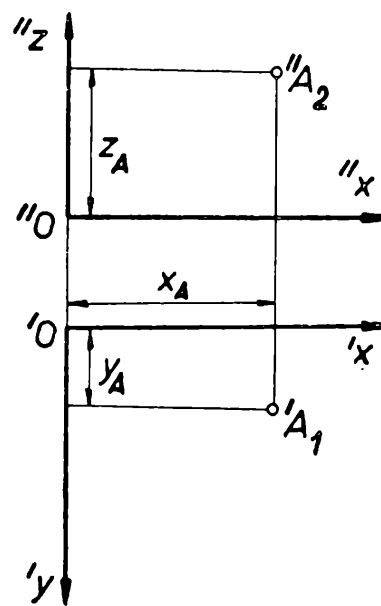
Jak sestrojíme takový bod A ? Sestrojíme jej takto: Nejprve stanovíme body A_x, A_y, A_z na osách x, y, z tak, aby orientované vzdálenosti OA_x, OA_y, OA_z byly právě a_1, a_2, a_3 . Potom proložíme bodem A_x rovinu α_x kolmou k ose x , bodem A_y rovinu α_y kolmou k ose y a bodem A_z rovinu α_z kolmou k ose z ; roviny $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ se protnou v hledaném bodě A .

Přísluší tedy ke každému bodu A v prostoru trojice souřadnic x_A, y_A, z_A a naopak lze každou trojici reálných čísel považovat vždy za trojici x_A, y_A, z_A souřadnic jednoznačně určeného bodu A v prostoru.

2. O *sduženém přemístění*. Do dané roviny - náčrtu - přemístíme nejprve rovinu xy do polohy $'x'y$ a potom rovinu xz do polohy $''x''z$; při tom dbáme toho, aby $'x, ''x$ byly souhlasně orientované rovnoběžky a aby $'y, ''z$ ležely při nesouhlasné orientaci na téže přímce. Hovoříme o sduženém přemístění rovin xy, xz do náčrtu (obr. 2).



Obr. 1



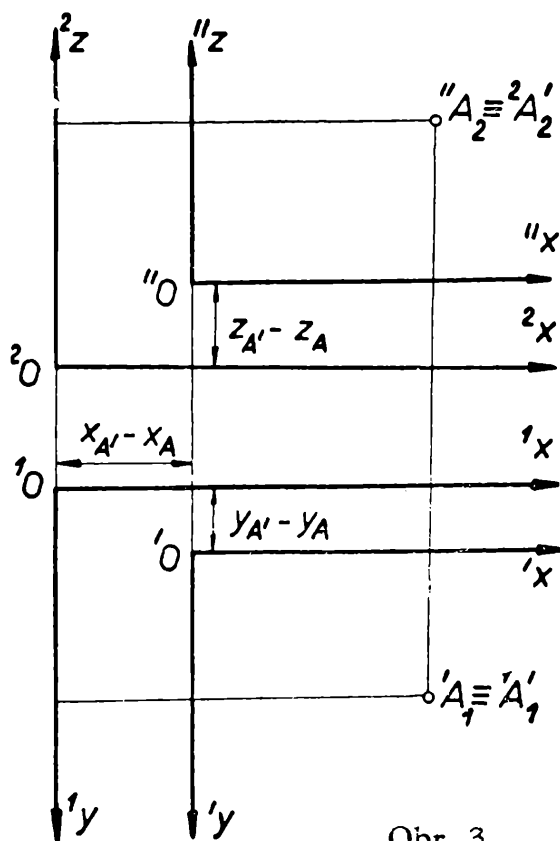
Obr. 2

Libovolnému bodu A o souřadnicích x_A, y_A, z_A přísluší kolmý průmět A_1 do roviny xy a kolmý průmět A_2 do roviny xz . Body A_1, A_2 mají souřadnice $x_A, y_A, 0$, resp. $x_A, 0, z_A$. Při přemístění rovin xy, xz do náčrtu přejdou body A_1, A_2 do nových poloh $'A_1, ''A_2$ v náčrtu.

Protože body A, A_1, A_2 leží v téže rovině kolmé k ose x , leží body $'A_1, ''A_2$ na téže přímce kolmé k přemístěným polohám osy x . Ty přímky v náčrtu, které jsou kolmé k $'x, ''x$, nazývají se ordinály. Leží tedy $'A_1, ''A_2$ vždy na společné ordinále.

3. O *dvojici sdužených přemístění*. Provedme nyní přemístění rovin xy, xz do sdužených poloh v téže náčrtu dvakrát po sobě. Při prvním sduženém přemístění přejdou roviny xy, xz do poloh $'x'y, ''x''z$, body A_1, A_2 do poloh $'A_1, ''A_2$. Při druhém sduženém přemístění (opakujeme: do téže náčrtu) přejdou roviny xy, xz do poloh $^1x^1y, ^2x^2z$ a body A_1, A_2 do poloh $^1A_1, ^2A_2$ (obr. 3).

Je-li tedy A libovolný bod v prostoru, pak mu lze přiřadit odpovídající bod A' tak, že $'A_1 \equiv {}^1A'_1$, $''A_2 \equiv {}^2A'_2$. Souřadnice x_A, y_A, z_A bodu A' snadno stanovíme na základě souřadnic x_A, y_A, z_A daného bodu A . Vidíme při tom, že rozdíl x souřadnic bodů A, A' je rovný vzdálenosti přímek $'y, {}^1y$, rozdíl y souřadnic bodů A, A' je rovný vzdálenosti přímek $'x, {}^1x$ a konečně rozdíl z souřadnic bodů A, A' je rovný vzdálenosti přímek $''x, {}^2x$; důležité je, že bod A byl l i b o v o l n ý m bodem v prostoru. Z toho pak vyplývá důležitý závěr: Jsou-li ke všem bodům A v prostoru přiřazeny podle předešlé konstrukce odpovídající body A' , pak úsečky AA' jsou navzájem posunuté, tj. jsou navzájem rovnoběžné, souhlasně orientované a stejně dlouhé.



Obr. 3

Známe-li tedy pro každý bod U nějakého prostorového útvaru U přemístěné polohy bodů U_1, U_2 , aniž bychom znali polohy přemístěných os (polohu ordinál pokládáme přitom ovšem za známou), pak je poloha útvaru U v prostoru určena až na posunutí. Teprve dodatečnou volbou přemístěných os určíme polohu útvaru U jednoznačně.

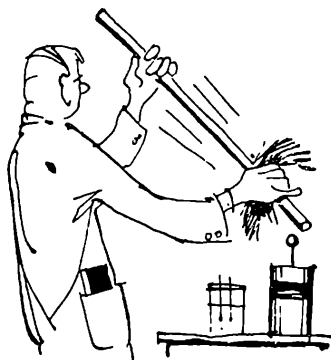
Určení útvaru U až na posunutí je pro praxi zpravidla postačující, neboť často jde o to stanovit pouze rozměry útvaru a nezáleží již tolik na tom, kde je útvar U právě umístěn.

4. *Souvislost s kolmým promítáním na dvě k sobě kolmé průmětny.* Přemístěním rovin xy, xz (půdorysny a nárysny) do sdružené polohy v náčrtu zabývá se kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (jinak zvané též Mongeovo promítání, podle

slavného francouzského geometra Gasparda Monge, který žil ve druhé polovině 18. století).

Výsledek, k němuž jsme dospěli, dovoluje pak vyšetřovat přemístěné kolmé průměty do půdorysny a nárysny (tj. přemístěné půdorysy a nárysy), je-li znám pouze směr ordinál, aniž je známa poloha přemístěných os. Hovoříme proto o *metodě vynechání os* (безосный метод).

Na metodě vynechání os spočívá dnešní pojetí výkladu Mongova promítání na mnohých vysokých školách technických v Sovětském svazu. Doporučujeme čtenáři, který má o věc hlubší zájem, aby se o tom blíže poučil ve výborné, začátečníku dobře přístupné učebnici Четверухин-Левиский-Прянишникова-Тевлин-Федотов: Курс начертательной геометрии, Гостехиздат, Москва 1956, cena 9,55 Kčs, jejímž hlavním autorem je nestor sovětských pracovníků v deskriptivní geometrii, akademik N. F. Četvėruchin.



Fyzika

Přemysl Schürer, Praha:

Jak získáváme nízké tlaky

Ve čtvrtém čísle 35. ročníku Rozhledů se naši čtenáři dozvěděli o iontových vývěvách a v pátém čísle téhož ročníku se dočetli, jak měříme nízké tlaky. V tomto článku si povíme něco o historii získávání nízkých tlaků a o některých vývěvách včerejška i dneška.

Historie odčerpáního prostoru není příliš stará. Počíná v 17. století, kdy poznal Torricelli¹⁾, slavný žák Galileův, že rtuť (původně voda v pumpě, umístěné v jedné florentské studni) zaplňuje barometrickou trubicí ne ze strachu před prázdnotou (latinsky horror vacui), ale vlivem váhy atmosféry. Barometrický tlak je tedy pro vzduch obdobou hydrostatického tlaku v kapalině. Např. na dno moře působí váha vrstev vody, na povrch zemský působí váha vrstev vzduchu. Torricelli ukázal, že lze připravit prázdňý prostor - *vakuum*²⁾, když překonáme barometrický tlak.

V tomtéž století připravil odčerpáný prostor (pomocí hasičské stříkačky) magdeburský právník Otto von Guericke, který se jako starosta zasloužil jak o občany, tak i o město.³⁾

První odčerpávaný prostor byl dřevěný sud, nedostatečně těsný, takže se brzy opět naplnil vzduchem. Ani ponoření sudu pod vodu nepřineslo žádoucí výsledek; sud se po odčerpání vzduchu naplnil vodou. Dřevo se neosvědčilo.

Otto v. Guericke dal zhotovit měděný balón, který se však při odčerpávání za velkého hluku zploštil. Druhý balón, dokonale kulový, vydržel. Jsou známý další Guericckovy pokusy, jimiž udivoval a poučoval své spoluobčany i císaře.

Následujících 200 let však ničím neobohatilo tyto skromné poznatky vakuové fyziky. Až po vynálezu žárovky se začíná práce na tomto poli značně rozvíjet.

Zpočátku to byly pístové vývěvy, jimiž se dal připravit odčerpáný prostor. Na jakém základě pracují pístové vývěvy? Uvažujeme-li, že děj probíhá za stálé teploty (děj *isotermický*), můžeme použít Boyleova zákona, jenž říká, že součin tlaku a objemu určitého množství plynu je stálý a že se tedy také rovná součinu tlaku a objemu po provedené expanzi a kompresi, tedy

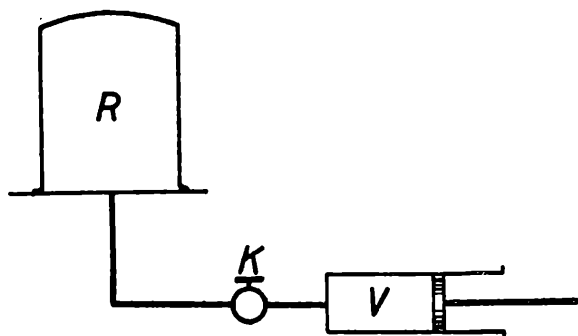
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (1)$$

¹⁾ Viz článek O. Lepila: J. E. Torricelli, Rozhledy m.-f., č. 10, roč. 1958.

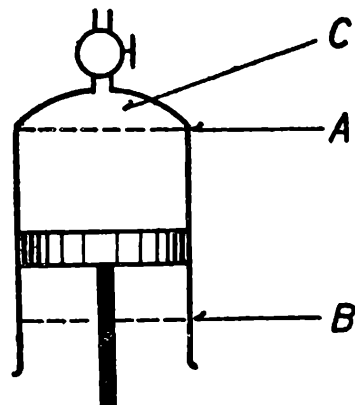
²⁾ Z lat. *vacuus* = prázdňý.

³⁾ Dostudoval práva v Leydenu, kde též poslouchal přednášky z užití matematiky a přírodovědy. Snad tam byl i Snell jeho učitelem.

Představme si recipient objemu $R \text{ cm}^3$, odčerpávaný pístovou vývěvou, mající mezi spodní a horní úvratí pístu objem $V \text{ cm}^3$ (obr. 1). Pokles tlaku pod recipientem bude způsoben zvětšením objemu o $V \text{ cm}^3$, když se píst bude pohybovat zleva doprava. Při tomto pohybu spojuje ventil K prostor recipientu R s prostorem vývěvy V . Při zpětném pohybu pístu, tj. zprava doleva, oddělí ventil K vývěvu od recipientu a vypustí stlačený vzduch z válce.



Obr. 1. Pístová vývěva vyčerpává recipient R . K ventil, V vývěva.



Obr. 2. Škodlivý prostor je prostor omezený pístem v horní úvrati a hlavou válce. A je horní úvrat pístu, B dolní úvrat pístu, C škodlivý prostor.

Po prvním cyklu se změní tlak pod recipientem z P_1 na P_2 , jak plyne z rovnice (1):

$$P_1 R = P_2 (R + V),$$

$$P_2 = \frac{R}{R + V} P_1.$$

Snadno zjistíme, že po n cyklech klesne tlak na

$$P_n = \left(\frac{R}{R + V} \right)^n \cdot P_1.$$

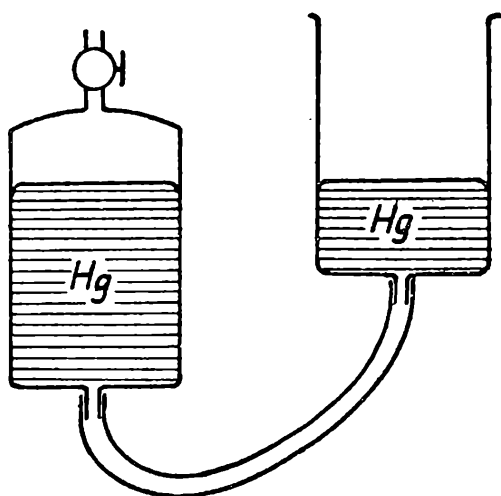
Po logaritmování této rovnice se dovíme, kolika cyklů je třeba ke snížení tlaku z hodnoty P_1 na P_n :

$$\log P_n - \log P_1 = n \log \left(\frac{R}{R + V} \right)$$

$$n = \frac{\log \frac{P_n}{P_1}}{\log \left(\frac{R}{R + V} \right)}.$$

Tento teoretický vzorec však neodpovídá přesně skutečnosti, neboť se při jeho odvození nebere zřetel na netěsnosti, na zpětný proud molekul a konečně na škodlivý prostor (obr. 2). Proto také nemůžeme docílit libovolně nízkého vakua

P_n provedením dalších n cyklů. Pozorujeme, že se tlak po jisté době ustálí na určité hodnotě, která se při dalším čerpání nezmění. Tuto hodnotu nazýváme *mezním tlakem*. Různé vývěvy dosahují různých mezních tlaků. Při mezním tlaku je množství plynu, které vývěva odčerpává, právě rovno množství, jež se vývěvou dostává zpět.



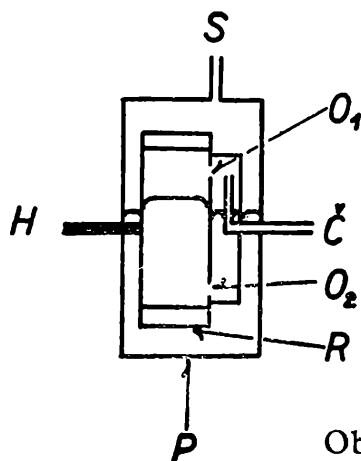
Obr. 3. Geisslerova vývěva. Píst je nahrazen rtutí, která vyplňuje škodlivý prostor.

Kromě mezního tlaku nás bude u každé vývěvy zajímat její *čerpací rychlost*, což je objem plynu, který vývěva odčerpá za jednotku času, například x litrů za vteřinu nebo $X \text{ m}^3/\text{hod}$.

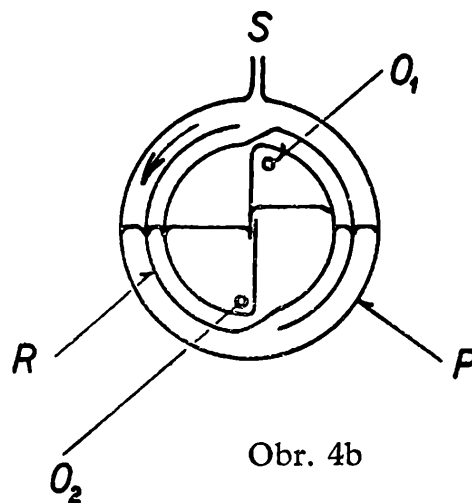
Myšlenku nahradit posuvný pohyb pístu pohybem kruhovým, mnohem výhodnějším (vyšší počet otáček, snadnější chod aj.) realizoval nikoli poprvé, ale nejúspěšněji *Gae*de. Sestrojil rotační rtuťovou vývěvu zajímavé konstrukce. Plášť vývěvy tvoří válcovou krabici s vodorovnou osou, naplněnou do poloviny rtutí (obr. 4).

Uvnitř se otáčí válcový rotor, sestávající ze dvou válcových komor, jak ukazuje příčný řez na obr. 4b.

Při rotaci ve směru šipky se střídavě vynořují otvory O_1 a O_2 , jimiž je nasáván plyn z čerpaného prostoru. Při dalším otáčení je plyn vytlačován rtutí mezi válcovými komorami až do předčerpávaného prostoru k otvoru S .



Obr. 4a



Obr. 4b

Obr. 4a. Gaedeho rtuťová rotační vývěva. Průřez proložený osou válce. O_1 , O_2 jsou otvory, jež se při rotaci vynořují nad hladinu rtuti a jimiž je nasáván čerpaný plyn z potrubí B . S je předčerpávací vývěva (olejovou rotační vývěvou), H hnací osa, P plášť vývěvy, R rotor, $Č$ potrubí od čerpaného prostoru.

Obr. 4b. Průřez kolmý na osu rotace.

Z obrázku 4 je zřejmé, že rozdíl hladin rtuti v rotační vývěvě neudrží barometrický přetlak, že tedy nižších tlaků lze dosáhnout při předčerpávání na tlak

20 až 30 milimetrů rtuťového sloupce. Docházíme tím k uspořádání, při kterém jsou zapojeny dvě vývěvy do série. Tímto způsobem se docílí nižších mezních tlaků u vícestupňových vývěv, např. u dvoustupňové rotační vývěvy.

Rtuťovou rotační vývěvou dosáhl Gaede tlaku řádu 10^{-5} mmHg při čerpací rychlosti jen několika desítek kubických centimetrů za vteřinu. Vývěvy tohoto druhu se dnes nepoužívají. V laboratořích i v továrním provozu se užívá rotačních olejových vývěv, jež se vyvinuly z Gaedeho rotační olejové vývěvy. Gaede ji konstruoval záměrně proto, aby jí užil jako pomocné vývěvy k rotační rtuťové vývěvě.

(Pokračování)

In ž. B o h d a n Š e s t á k, Fyzikální ústav ČSAV, Praha:

O kovových krystalech

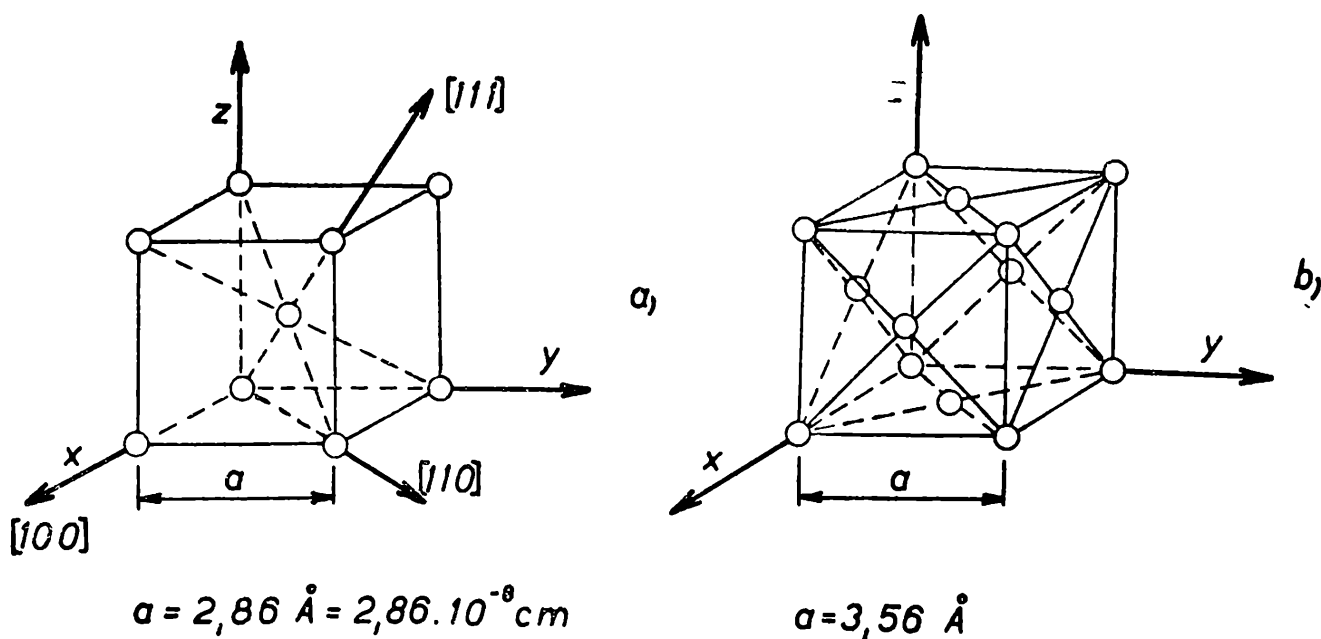
Kovy hrají v životě člověka významnou roli již několik tisíc let. Svou pevností, pružností, plastičností, elektrickou vodivostí, magnetickými a antikoročními vlastnostmi a žáruvzdorností nám umožňují velké stavby, výrobu výkonných strojů a motorů, stavbu letadel, i atomovou techniku. Jejich význam v budoucnu ještě dále vzroste, jakmile bude dán vědecký základ jejich výrobě a zpracování. Dosud je totiž metalurgie, vybudovaná na mnohaletých zkušenostech, stále ještě více uměním než moderní vědou; pracovní metodou výzkumu je zatím převážně hledání a zkoušení bez ucelených a dostatečně hlubokých teoretických základů. Následkem toho obrovské náklady vynakládané na technický výzkum kovů přinášejí poměrně malé výsledky. Východiskem z této situace je fyzikální studium základních vlastností kovů v rámci moderních fyzikálních teorií pevných látek. V tomto článku chceme ukázat významnou úlohu monokrystalů kovů při takovém studiu a všimnout si jejich přípravy i některých hlavních vlastností.

1. Základní pojmy

Řadou pozorování, např. ohybu rentgenového záření při průchodu kovem, bylo zjištěno, že kovy jsou látky krystalické. To znamená, že jejich atomy vytvářejí prostorové skupiny, které se periodicky opakují v trojrozměrném prostoru, čímž vzniká *atomová mřížka*. Přesně vzato tvoří mřížku kovů kladné ionty, což jsou atomy zbavené svých nejslaběji vázaných elektronů, které však zůstávají v jejich blízkosti a snadno se pohybují mřížkou. Kovový krystal je možno si pak zhruba představit jako prostorovou mřížku kladných iontů, ponořenou do jakéhosi „plynu“, vytvořeného záporně nabitými elektrony. Přitažlivé síly mezi kladnými ionty a zápornými elektrony udržují krystal pohromadě a vyrovnávají odpudivé síly mezi stejně nabitými částicemi. Mřížkou snadno se pohybující elektrony způsobují velikou elektrickou a tepelnou vodivost kovů. Velká elektrická vodivost a především její růst s klesající teplotou je charakteristická vlastnost kovů, odlišující je od ostatních pevných krystalických látek.

Základní skupině atomů, jejímž opakováním vzniká mřížka, říkáme *elementární*

buňka. Většina kovů krystaluje v soustavě krychlové (kubické) a v soustavě šesti-
rečné (hexagonální). Geometrické vztahy v krychlové soustavě jsou jednodušší
a proto si jí všimneme podrobněji. Na obr. 1a je nakreslena elementární buňka
kubická prostorově centrovaná. Vidíme, že ionty kovů jsou zde umístěny v rozích
krychle a v jejím prostorovém středu. Opakováním této skupiny atomů ve směru
os x , y , z vzniká atomová mřížka, např. α -železa (tato modifikace je stabilní od
nejnižších teplot až do 910°C), molybdenu, wolframu, sodíku apod. Jenom
délka hrany krychle, na obrázku vyznačená pro α -Fe, je pro jednotlivé kovy různá.
Podobně na obr. 1b je elementární buňka kubická plošně centrovaná s atomy v ro-
zích a uprostřed šesti stěn krychle. Tak jsou uspořádány ionty v krystalech mědi,
hliníku, niklu, γ -železa (modifikace stabilní v rozmezí teplot 910°C až 1400°C),
olova, stříbra, zlata aj. Prohlédneme-li si podrobně obrázek 1, zjistíme, že v krysta-
lové mřížce existují význačné směry, které označujeme *směrovými indexy*. V obr. 1a
je takto vyznačen směr hrany elementární buňky $[100]$, směr stěnové úhlopříč-
ky $[110]$ a směr prostorové úhlopříčky $[111]$. K těmto směrům jsou v krychlové
mřížce kolmé hlavní krystalografické roviny označované stejnými indexy, ale v ku-
latých závorkách, jimž říkáme v tomto případě *Millerovy indexy*.

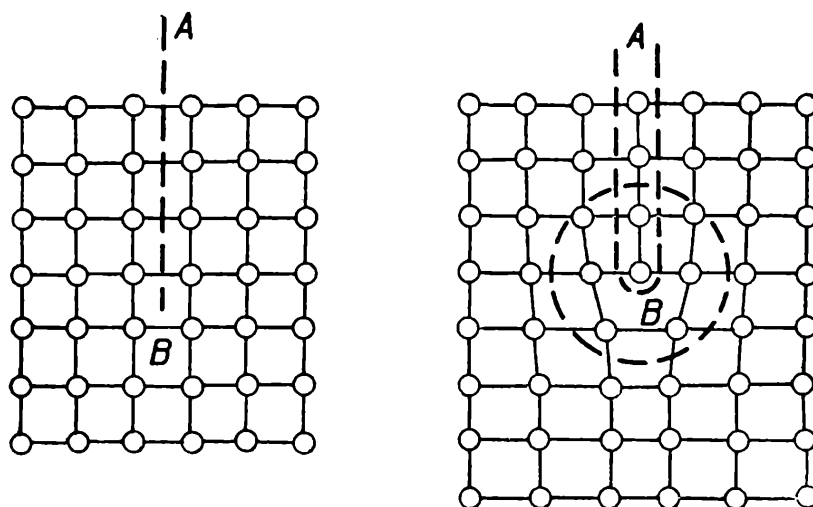


Obr. 1. a) Elementární buňka α -železa, kubická prostorově centrovaná. — b) Elementární buňka γ -železa, kubická plošně centrovaná.

Krystalická struktura kovů není na první pohled patrná, neboť při obvyklém způsobu výroby je kov složen z velikého množství malých krystalů s rozměry od několika setin mm do několika mm podle způsobu výroby a zpracování. Říkáme, že kov je *polykrystalický*. Čisté kovy, např. měď, hliník, obsahují stejné krystaly; slitiny, např. oceli, často krystaly různého druhu. V místech styku krystalů (v metalografii se jim zpravidla říká *zrna*) vytvářejí se *hranice*.

Krystalickou skladbu kovů můžeme dobře pozorovat mikroskopem zvětšujícím asi $100\times$, upraveným pro osvětlení shora, třeba na povrchu měkké oceli. Povrch připravíme broušením do roviny a vyleštíme na sukně, např. jemným kysličníkem hlinitým. Po několikaminutovém leptání povrchu v nitalu (1%-ní roztok kyseliny dusičné v lihu) pozorujeme pod mikroskopem síť hranic mezi jednotlivými krystaly.

Krystal je tedy základní formou kovu a prvním cílem fyzikálního studia kovů je stanovení jeho vlastností, které zpravidla závisí na směru, v němž je zjišťujeme. Proto je nemůžeme studovat na polykrystalickém kovu, kde mřížky jednotlivých krystalů spolu svírají různé úhly (říkáme, že krystaly jsou náhodně orientovány) a měření je zde přístupná jen výslednice vlastností jednotlivým krystalkům, ještě značně ovlivněná vlastnostmi hranic. Proto je pro fyziky nejvýš žádoucí kov ve



Obr. 2. Dislokace v prosté kubické mřížce. Kroužky jsou naznačeny atomy jedné z rovin (100). Prostorová mřížka vznikne opakováním stejně rozložených atomů ve směru kolmém k nákrese.

tvaru jediného krystalu, říkáme *monokrystalu*. Monokrystaly mají však také značný význam pro současnou metalurgii. Technický výzkum nových slitin je možno používáním monokrystalů zjednodušit, zrychlit a dosáhnout zvýšení jeho účinnosti. Na monokrystalech lze studovat vlastnosti kovů v různých krystalografických směrech; ani zde však nejsou poměry zcela jednoduché. Musíme ještě uvažovat vliv dokonalosti krystalu.

2. Poruchy krystalů

Fyzikové zjistili, že rozložení atomů ve skutečné, říkáme *reálné mřížce*, se vždy liší od *ideální mřížky* již popsané. Odlišnost obou mřížek vyjadřujeme zavedením různých typů poruch. Tato představa byla velikým pokrokem ve fyzice pevných látek, neboť se ukázalo, že poruchy mřížky přímo podmiňují mnohé vlastnosti kovů, např. pevnost, elektrovodivost, magnetické vlastnosti apod. Teoreticky vypočítaná pevnost krystalu železa s ideální mřížkou (bez poruch) je např. u železa $\approx 1000 \text{ kg/mm}^2$ několikrát větší než pevnost nejlepších známých ocelí. Dokonalé poznání a účelné ovládání těchto poruch během výroby je hlavní cestou

ke zdokonalení kovových materiálů a předpokladem budoucí výroby kovů s přesnými předem žádanými vlastnostmi.

Z našeho hlediska významné typy poruch kovových krystalů jsou: vakance, intersticiální atomy, cizí atomy a dislokace. *Intersticiální atomy* jsou ionty kovu v mezimřížkových polohách, kdežto poruchy vyvolané tím, že některá místa v mřížce jsou ionty neobsazena, nazýváme prázdná místa čili *vakance*. *Cizí atomy* v mřížce, čímž rozumíme atomy jiných prvků než základního kovu, jsou velmi důležitým typem poruch, neboť mění i při nepatrném množství vlastnosti krystalů, např. mechanické vlastnosti, elektr. odpor, fázové přeměny, rekrytalizaci aj. Jejich vliv lze podstatně zmenšiti, pracujeme-li s co nejčistšími kovy. Nejdůležitějšími poruchami kovového krystalu však jsou *dislokace*. Tato porucha je pro nejjednodušší případ znázorněna na obr. 2. Pro jednoduchost jsou tam zakresleny jenom atomy roviny (100) v kubické soustavě. V levé části obrázku je ideální dvourozměrná mřížka. Představme si, že ji rozřízneme podél čáry *A-B* a do vzniklého řezu vtlačíme řadu atomů. V okolí místa *B* se vysunou atomy ze svých normálních poloh, jak je vyznačeno v pravé části obrázku; říkáme, že v místě *B* je dislokace. Představíme-li si trojrozměrný krystal, vidíme, že příčné rozměry poruchy jsou malé, kdežto ve směru kolmém k nákrese je délka poruchy neomezena, proto je dislokace poruchou čarovou. Dislokace mají řadu zajímavých vlastností, mohou se např. velmi snadno pohybovat krystalem. Podrobněji se jimi v tomto časopise zabýval Dr. F. Kroupa v článku *Plastická deformace a poruchy v krystalech*, ročník 36, č. 5, str. 180.

Z uvedeného vyplývá, že při studiu monokrystalů získáváme výsledky ovlivněné jednak pravidelným rozložením atomů v mřížce, jednak poruchami této mřížky.

(Pokračování)



Co vidíme na nebi

Blažena Růžičková,

Astronomický ústav ČSAV, Ondřejov:

Fotografická mapa oblohy

Když koncem minulého století nastal rozvoj fotografie, začalo se uvažovat o jejím využití též v astronomii. Ukázalo se, že touto metodou je možno získat velmi dobré obrazy hvězd, a to i takových, které nebyly zjištěny vizuálně ani největšími dalekohledy. Fotografie tedy umožnila získat poměrně rychle věrný obraz značně rozlehlých oblastí oblohy a dala vznik přesnému mapování i takových oblastí, které jsou velmi hustě zaplněny hvězdami, jako např. Mléčná dráha.

Kolem r. 1880 se fotografické desky začaly běžně objevovat v obchodech. V té době bratři Paul a Prosper Henryovi na pařížské observatoři se specialisovali na broušení fotografických objektivů a brzy se jim podařilo ukázat, že je možno získat snímky oblastí hvězdné oblohy, na nichž hvězdy jsou dobře a věrně zobrazeny ve čtvercovém poli o straně 2° . Po půlhodinové expozici byly na snímku vykresleny hvězdy až do 15. hvězdné velikosti. Některé snímky z oblasti Mléčné dráhy obsahovaly asi 10 000 hvězd, jejichž polohy bylo možno přesně a pohodlně proměřit.

Výsledky bratrů Henryových způsobily, že se nová technika mezi astronomy rychle rozšířila. V r. 1887 se konal v Paříži první mezinárodní astronomický kongres, na kterém se sešli zástupci šestnácti národů. Zde bylo dohodnuto, že astronomové celého světa se spojí ke společné práci - k vytvoření fotografické mapy oblohy. Mapa měla být dokumentem o tom, jak vypadala obloha v r. 1900, aby budoucí generace měly možnost odhalit změny, které nastaly ve světě hvězd. Mapa měla obsáhnout hvězdy až do 15. hvězdné velikosti. Přesné souřadnice a velikosti všech hvězd zaregistrovaných v mapě měly být shrnuty ve fotografickém katalogu jakožto součásti celého díla. Velmi slabé hvězdy obsažené ve fotografickém katalogu by ležely daleko za dosažitelnou hranicí dosavadního nejúplnějšího vizuálního katalogu. Dílo by udávalo polohy asi 2 milionů hvězd.

Kongres v r. 1887 stanovil nejen konečný cíl práce, ale současně ukázal, kolik obtížných úkolů a problémů je potřeba rozřešit, než fotografická mapa a katalog dosáhnou konečných vyhovujících forem. Za tím účelem byl zřízen stálý výbor, který po následující léta zpřesňoval plány a koordinoval jednotlivé úseky činnosti.

Obrovská práce byla rozdělena mezi 18 observatoří vybavených stejným přístrojem - astrografe - podle konstrukce bratrů Henryových. Každé observatoři byla přidělena jedna zóna oblohy, v níž mělo být provedeno mapování.

Dílo pokračovalo během následujících sedmdesátilet ve zúčastněných zemích více či méně rychle. Přes mnohé potíže a liknavost, jež se během doby vyskytly, je dnes katalog prakticky dokončen. Fotografická mapa však nebyla publikována v původní formě, nýbrž samostatně jednotlivými zeměmi.

Prototyp astrografu, podle něhož bylo vybudováno 18 přístrojů v zemích, jichž se konvence týkala, byl dán do provozu bratry Henryovými v r. 1885. Sestává z astrografu a vizuálního dalekohledu pro tzv. pointaci nesených anglickou montáží. Astrograf má průměr objektivu 33 cm a ohniskovou dálku 3,43 m. Objektiv pointačního dalekohledu má průměr 25 cm a ohniskovou dálku 3,60 m.

Fotografie polí byla prováděna jednotným způsobem. Každá deska sestává ze tří půlhodinových expozic. Mezi expozicemi byla deska vždy posunuta tak, že tři obrazy každé hvězdy jsou uspořádány do rovnostranného trojúhelníka o straně rovné třem obloukovým vteřinám. Desky jsou čtvercového formátu o rozměrech $16\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ a každá odpovídá čtyřem čtverečním stupňům na obloze. Reprodukce desek se provedla na měď ve dvojnásobném zvětšení.

Pokud jde o katalog, byly např. pařížskou observatoří publikovány pravoúhlé souřadnice zóny mezi deklinací 17° a 25° v sedmi svazcích zároveň s údaji pro transformaci souřadnic na rovníkové. Osmý svazek obsahuje rovníkové souřadnice nejjasnějších hvězd (do 10. hv. vel.).

Proměřování desek se provádí na speciálních strojích. Polohy hvězd jsou dočítány s přesností mikronu.

Tato obrovská práce byla v minulých letech považována za nevhodnou a pochybenou z hlediska výsledků, které od ní mohly být očekávány. Jedna naděje zakladatelů fotografické mapy byla zničena již předem, a to v podstatě velikostí vesmíru. Řešení kosmologických problémů totiž nespočívá ve studiu hvězd do 15. hv. vel., které tvoří fotografickou mapu a katalog, ale ve studiu hvězd daleko slabších, počínaje 18. hv. vel. a v poslední době 24. hv. vel. Galaxie, které vyplňují velké dálky vesmíru, se jen v nepatrném množství objevují na deskách mapy. Další námitkou byla okolnost, že rychlý rozvoj a prohloubení výzkumu vesmíru byl podmíněn fotometrickými studiemi a ne měřením poloh hvězd.

V poslední době se ukazuje, že přes oprávněnost některých výhrad proti fotografické mapě se naskytá práci řada možností, jak ji využít a obhájit její smysl, právě tak jako jiným pracem z oboru poziční astronomie. Astrofyzikové dnes vidí, že všechny výzkumy vzdálených částí vesmíru spočívají na přesné etalonáži některých metod; ta však může být provedena jen zpracováním hvězd relativně blízkých. Zde tedy nachází fotografická mapa opodstatnění a stává se nejen užitečnou, ale dokonce nutnou, neboť nespolehlivé výchozí hodnoty vnášejí značnou nejistotu do kosmologických závěrů. Nejlepším příkladem pro to je nové přesnější stanovení vzdáleností mimogalaktických mlhovin, které se podstatně liší od dosavadních předpokladů.

Fotografický katalog je dnes nejlepším výchozím materiálem pro studium slabých hvězd. Staré fotografické desky jsou srovnávány s novými; tímto způsobem je možno stanovit vlastní pohyby hvězd. Pokud se toho týče, nemá velké dílo minulých let obdobu. Pro rychlý rozmach galaktického výzkumu je systematická práce s fotografickou mapou a katalogem nezbytná.

Mezinárodní program vytyčený v r. 1953 v Groningen v Holandsku obsahuje stanovení vlastních pohybů speciálně vybraných galaktických proměnných hvězd, jejichž studium má mimořádný význam z kosmologického hlediska. Služby fotografické mapy tu budou teprve náležitě oceněny. Některých fotografických desek již bylo použito při evidenci expanzních pohybů určitých blízkých hvězdných asociací. Bylo prokázáno mládí některých velmi jasných hvězd; někteří obři existují teprve několik miliónů let. Tímto způsobem poziční astronomie, ještě donedávna tak zavrhovaná, se ukázala nezbytným pomocníkem astrofyziky.

D r. V á c l a v B u m b a, astronomický ústav ČSAV, Ondřejov:

Proč se pozorují úplná sluneční zatmění

1. Jak vznikají úplná sluneční zatmění

Zdánlivé dráhy Měsíce a Slunce na obloze jsou vůči sobě vzájemně skloněny, dráha Měsíce svírá s ekliptikou úhel blízký 5° . Setkají-li se blízko průsečíků obou drah - *uzlů* - obě tělesa, to je v době, kdy je Měsíc v *n o v u*, dochází k *zatmění Slunce*. Měsíční disk zakrývá na dobu několika minut sluneční kotouč buď úplně -

nastává úplné sluneční zatmění, nebo částečně - vzniká zatmění částečné, ve zvláštním případě prstencové.

Měsíc osvětlený Sluncem vytváří v prostoru kužel plného stínu, jehož výška kolísá okolo hodnoty rovné vzdálenosti Měsíc — Země a rozbíhavý kužel polostínu o poloměru měřícím ve vzdálenosti Země již několik tisíc kilometrů. Při zatmění Slunce buď stínový kužel protíná povrch Země v nevelké elipse, jejíž menší průměr kolísá okolo přibližně 160 km, nebo se tento kužel zemského povrchu vůbec nedotkne, a pak v místě průsečíku osy kužele s povrchem je možno pozorovat prstencové zatmění Slunce - nezakrytá část slunečního povrchu září v podobě oslňujícího prstenu za tmavým měsíčním diskem. V místech, která zasahuje pouze kužel polostínu, pozoruje se částečné zatmění Slunce. Délka trvání zatmění závisí na velikosti plochy zasažené plným stínem na zemském povrchu a rychlosti pohybu této plochy po zemském povrchu (bývá blízká 1 km/s). Maximální možná doba trvání plného zatmění je $7\frac{1}{2}$ minuty, většinou však bývá dvakrát až třikrát kratší.

2. Význam zatmění pro astronomii

Úplná zatmění se stala jedinečností podívané, kterou poskytují i okolnosti, že na určitém místě zemského povrchu se vyskytují velmi zřídka (za posledních víc než tisíc let byla například v Praze pouze dvě taková zatmění, a to v letech 1415 a 1706) úkazem, působícím v dávných dobách otřesně na mysl lidí a tím i důležitou pomůckou dějepisců ke stanovení přesného data událostí spojených ve starých letopisech se zatměním.

Fakt, že tato zatmění mají velký význam pro astronomii, byl pochopen astronomy poměrně nedávno - zhruba v 17. století - a teprve od poloviny minulého století jsou pořádány výpravy k pozorování tohoto jevu, skýtajícího jedinečnou příležitost studovat vnější vrstvy sluneční atmosféry během té krátké doby, po kterou je zakryta jinak vše přezářující fotosféra. Změna pozorovacích programů výprav během této poslední stovky let je zajímavým dokumentem o vývoji astronomie a zejména sluneční astrofyziky i o změně názorů na jednotlivé útvary ve sluneční atmosféře.

Ještě na začátku minulého století se především určovala co nejpřesněji doba začátků i konců částečného i úplného zatmění, aby bylo možno srovnat pozorované časy s teoretickými, vypočtenými z teorií pohybu, zvláště Měsíce, a určit takovým způsobem změny pohybu, se kterými teorie nepočítala.

Teprve první fotografie zatmění, pořízené v roce 1860 ze dvou vzájemně dostatečně vzdálených míst dokázaly, že již dříve během zatmění pozorovaná korona, protuberance a chromosféra nejsou jevy v měsíční atmosféře, nýbrž že jsou to útvary náležející atmosféře sluneční. První spektrální snímky jednotlivých částí této atmosféry, pořízené poprvé až koncem minulého století, daly impuls k rychlému vývoji sluneční fyziky na přelomu století. V prvních desetiletích našeho století byly podnikány početné a nákladné výpravy za slunečními zatměními. K spektrografickým úkolům připojil se ještě ve dvacátých letech - po objevení se teorie relativity, která tvrdí, že světelný paprsek se uchyluje v gravitačním poli hvězdy v její blízkosti prochází - úkol, prověřit toto tvrzení.

Rozvoj metod dovolujících pozorovat sluneční atmosféru i mimo úplná zatmění způsobil, že úsilí výprav je nyní soustředováno pouze k některým problémům, které stále ještě bez zatmění (kdy vliv rozptýleného světla slunečního v zemské atmosféře je snížen na minimum) lze těžko řešit.

3. Moderní problémy řešené při slunečních zatměních

a) *Astrometrie*. Z původního hlavního bodu programu stal se zcela podružný úkol, protože existují mnohem přesnější metody, jak určit polohu Měsíce mezi hvězdami.

b) *Výzkum fotosféry*. Vzhledem k tomu, že z ubývání intenzity světla ke kraji slunečního disku (v bílém světle i v jednotlivých spektrálních oborech) je možné určovat fyzikální podmínky panující v hlubších vrstvách sluneční atmosféry - v tzv. f o t o s f é ř e, i dnes zůstává v programu výprav úloha: určit chod tohoto úbytku světla, zejména na samém kraji disku, těsně před tím, než Měsíc zakryje poslední úzký srpek fotosféry. Tato měření jsou velmi obtížná, protože během velmi krátké doby (řádově vteřiny) se intenzita slunečního světla změní o několik řádů. Na přesnosti provedených měření závisí i přesnost z těchto měření odvozeného modelu, zejména nejvyšších vrstev fotosféry.

c) *Výzkum chromosféry*, to je části sluneční atmosféry ležící přímo nad fotosférou. Tento výzkum se provádí prakticky pouze pomocí spektrografu. Snahou všech současných výprav je získat spektrum, pokud možno přístrojem s největší možnou disperzí i rozlišovací schopností i s co nejpresnější fotometrickou kalibrací, která by zajistila co nejdokonalejší zpracování pozorovacího materiálu. Účelem těchto studií je především opět získání úplnějších informací o fyzikálních podmínkách panujících v této části sluneční atmosféry, která podle nových názorů je složena z horkých a chladných oblastí zároveň se prolínajících. Důležité je ovšem i určení změn těchto podmínek s výškou. Doposud málo víme například o tom, jak se mění rychlosti turbulentních pohybů v chromosféře s výškou a podobně. Ze studia intenzity molekulárních pásů je možno určovat zejména teplotu přechodné oblasti mezi fotosférou a chromosférou, studují se zvláštní útvary (malé chromosférické výrůstky), nazvané s p i k u l e, hrající zřejmě významnou úlohu jako dodavatelé energie do vyšších vrstev sluneční atmosféry, do k o r o n y. Doposud prakticky neznáme podmínky panující v chromosféře nad slunečními skvrnami.

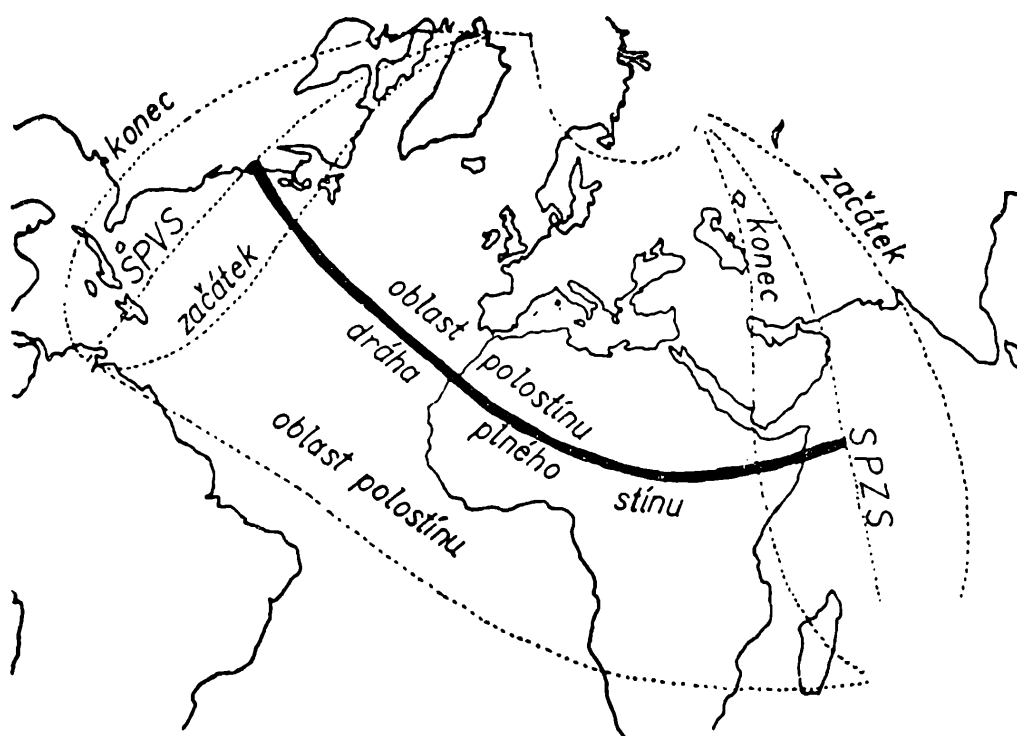
d) *Studium protuberancí*. Tato oblaka plynů vznášející se nad fotosférou jsou také málo probádána. Opět neúplně známe jejich teplotu, hustotu, ionizaci i mechanismus svícení, a ačkoliv je zřejmé, že jsou silně ovlivňována magnetickým polem, zejména slunečních skvrn, vůbec zatím nevíme, jakým způsobem se to děje.

e) *Studium vnitřní korony*. Získání snímků vnitřní korony, to je části vnější sluneční atmosféry prostírající se do vzdálenosti přibližně $\frac{1}{3}$ slunečního poloměru od kraje disku, bylo zatím v programu každé výpravy za slunečním zatměním. Tyto snímky se pořizovaly v integrálním, tj. bílém světle, i v různých barvách. Ukazuje se, že dnes je třeba úzce jednobarevných měření především v těch spektrálních oborech, ve kterých vnitřní korona září nejvíce (například ve světle

emisní čáry o vlnové délce 5303 Å). Dále je třeba měřit do jaké míry a v kterých oblastech je světlo korony polarizováno. Jedním z hlavních úkolů je totiž určit, jak v blízkosti, například protuberancí, jsou rozloženy ionty (to je atomy, které v podmínkách korony ztratily značnou část svých elektronů - jsou ve vysoké míře ionizovány) vysílající monochromatické světlo a v jaké míře se v blízkosti těchto útvarů světlo odráží od volných elektronů, působících jeho částečnou polarizaci.

Spektrální měření nás především informují kam až, do jaké vzdálenosti od kraje disku, svítí jednotlivé ionty kovů, a od které oblasti převládá rozptyl světla na elektronech a dále i na prachových částicích. Informují nás také ovšem o průběhu a změnách vysokých koronálních teplot (které dosahují hodnot přes milión stupňů) v jednotlivých částech korony.

Stejně jako v případě protuberancí je zřejmé, že magnetické pole Slunce i slunečních skvrn ovlivňuje tvar jednotlivých koronálních útvarů, avšak mechanismus tohoto působení magnetického pole na koronu dosud také neznáme. Proto je důležité studovat během zatmění i strukturu koronálních útvarů (paprsků, oblouků atp.) a především pak jejich změny s časem. Tato studia nám mohou dát i cenné informace o způsobu, jakým ze Slunce vyletují proudy nabitých částic - korpuskulí, působící například magnetické bouře a polární záře v zemské atmosféře.



Obr. 1. Mapa slunečního zatmění 2. října 1959. SPVS střed při východu Slunce, SPZS střed při západu Slunce.

f) *Studium vnější korony.* Tato oblast korony svítí už velmi slabě a proto je mnohem obtížnější ji pozorovat. Její pozorování jsou však velmi užitečná, protože nám hovoří o tom, jakým způsobem sluneční korona navazuje, přechází v zvířetníkové světlo, tedy informují nás o spojení sluneční atmosféry s meziplanetární hmotou.

g) *Pozorování pomocí radioteleskopů.* Protože různé části sluneční atmosféry září v oboru rádiových vln různých vlnových délek, jsou sluneční zatmění, i částečná, velmi vhodnou příležitostí k určení zejména polohy jednotlivých zdrojů záření (měsíční kotouč zakrývá nebo odkrývá postupně jednotlivé zdroje) ve sluneční atmosféře.

h) Stále ještě některé výpravy zařazují do svého programu úkol změřit *úchylku světla hvězd* v gravitačním poli Slunce, tak jak vyplývá z Einsteinovy teorie relativity, protože při těchto měřeních nebylo ještě dosaženo žádané přesnosti.

Závěr

Československé výpravy za slunečním zatměním byly doposud čtyři. Největší z nich byly podniknuty v roce 1936 do SSSR a současně do Japonska a v roce 1954 do SSSR. Obě tyto výpravy publikovaly svá zpracovaná pozorování. Byla připravována výprava, která by se zúčastnila pozorování letošního zatmění Slunce dne 2. října ve střední Africe, bohužel pro technické potíže se nedala uskutečnit. A tak nezbyvá než se těšit, že se československým astronomům podaří pozorovat některé z těchto příštích úplných slunečních zatmění (tabulka zahrnuje příštích šest let):

15. února 1961, které bude trvat 2,8 minuty a lze je pozorovat v jižní Evropě a SSSR,

4. února 1962, které bude trvat 4,1 minuty, probíhá Novou Guineou,

20. července 1963, které bude trvat 1,7 minuty, probíhá Aljaškou,

31. května 1965, které bude trvat 5,0 minut, probíhá Tichým oceánem.



Úlohy k řešení

Řešitelům

Jako každoročně zahajujeme tradiční soutěž v řešení úloh o ceny. Tentokrát jsme na přání řešitelů rozdělili příklady do skupin: a) matematika, b) fyzika, c) deskriptivní geometrie, a uveřejňujeme je najednou v tomto prvním čísle.

Řešení úloh pište čitelně perem nebo strojem po jedné straně papíru formátu A4, každou úlohu na zvláštní arch. V pravém dolním rohu každého listu uveďte plné křestní jméno i příjmení, jméno školy i třídu - pokud studujete - a vždy svou podrobnou adresu. Pracujte samostatně.

L h ů t a k odvedení těchto soutěžních úloh je d o 29. ú n o r a 1960. Řešení (nikoli jenom výsledky) zašlete na adresu **D o c. O t a S e t z e r, P r a h a 6, Z i k o v a 4.**

Matematika:

1. Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 o stejném poloměru r a jednom společném bodu O . Označíme S_1, S_2, S_3 středy těchto kružnic a P_{12} (P_{23}, P_{31}) další společný bod kružnic k_1, k_2 (k_2, k_3 ; k_3, k_1). Dokažte, že kružnice k'_1, k'_2, k'_3 opsané poloměrem r kolem bodů P_{23}, P_{13}, P_{12} mají též jeden společný bod O !

Josef Brejcha

2. Sestrojte trojúhelník, je-li dán rozdíl stran $a - b$, úhel γ a těžnice t_c vedená z bodu C !

Josef Glivický

3. Délka poloměru ρ kružnice k je dána libovolným lichým prvočíslem. Dokažte, že existují vždy tři různé pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran x, y, z jsou vyjádřeny celými čísly a jež jsou opsány kružnici k . Vyjádřete vzorcem délky jejich stran pomocí ρ !

Břetislav Fiala

4. Které dvojciferné číslo má tu vlastnost, že jím končí jeho dvojmoc?

✓

Stanislav Horák

5. Řešte soustavu rovnic

$$x^2 = ax + by$$

$$y^2 = bx + ay$$

Položte speciálně $a = n(n - 1) + 1, b = n(n - 1)$.

Stanislav Horák

6. Které úhly od 0° do 360° splňují rovnici

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x?$$

Stanislav Horák

7. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a úsečka MN délky $d \neq 0$, která neleží na žádné z přímk AB, BC, CA . Z bodů M, N spusťme kolmice na přímk BC do bodů M_1, N_1 . Podobně dostaneme na přímkách CA, AB body M_2, N_2 ; M_3, N_3 . Ostrý úhel přímk MN, AB označme α . Jak musíme tento úhel zvolit, aby součet $M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3$ byl co největší?

(Bez použití diferenciálního počtu.)

Stanislav Horák

8. Do obdélníka je vepsán čtyřúhelník o úhlopříčkách rovnoběžných se stranami opsaného obdélníka. Dokažte, že průsečíky úhlopříček obdélníka i čtyřúhelníka jsou symetrické podle tzv. analytického středu čtyřúhelníka! (Analytický střed čtyřúhelníka pólí spojnicí středů protilehlých stran čtyřúhelníka.)

Josef Langr

9. Vyhledejte všechna přirozená čísla n , která mají tuto vlastnost: Mezi čísla $1, 2, 3, \dots, n$ je právě 16 čísel soudělných s číslem n .

Jiří Sedláček

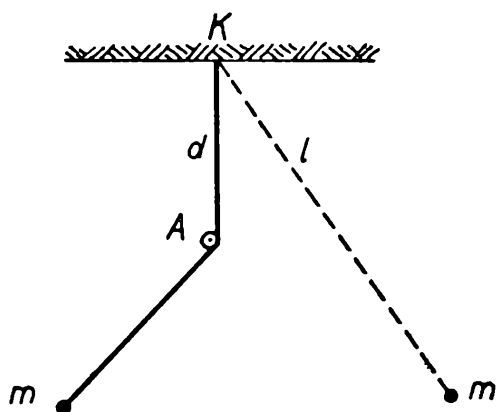
10. Obecnému trojúhelníku ABC o obsahu P a vnitřních úhlech α, β, γ je vepsána kružnice k_1 , do ní trojúhelník $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ s vepsanou kružnicí k_2 , do ní vepsán trojúhelník $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ atd. Určete obsah n -tého trojúhelníka $A_nB_nC_n$!

Ota Setzer

Fyzika:

1. Vlak, který se rozjížděl po vodorovné dráze $s = 360$ m po dobu $t = 1$ min., stoupá hned potom po nakloněné rovině. Lokomotiva táhne vlak stejnou silou při stoupání jako po vodorovné rovině. Vlak se pohybuje po nakloněné rovině rovnoměrně tou rychlostí, jakou měl na konci první minuty. Jaké je stoupání nakloněné roviny? (Stoupáním se rozumí poměr výšky nakloněné roviny k její délce, vyjádřený v %. Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte! Kladte $g \doteq 10$ m . s⁻².)

Evžen Říman



Obr. 1

2. Jak velkou dobu kyvu má kyvadlo znázorněné na obrázku 1? Délka nití je $l = 1,44$ m a vzdálenost $KA = d = 0,63$ m. Kladte přibližně $\sqrt{9,81} \doteq 3,14$.

Evžen Říman

3. Olověná krychle o hraně $a = 4$ cm má být ve vodě o hustotě $\rho_0 = 1$ g . cm⁻³ udržena zavěšením na dřevěné krychli. Jakou hranu a_1 musí mít tato krychle, je-li hustota dřeva $\rho_1 = 0,6$ g . cm⁻³ a hustota olova $\rho_2 = 11,8$ g . cm⁻³?

Evžen Říman

4. Akási fyzikálna veličina je daná vzorcom $x = \frac{m \cdot g \cdot h}{q \cdot U}$, kde m = hmota,

g = gravitačné zrýchlenie, h = výška, q = elektrické množstvo, U = elektrické napätie. Dosadením jednotiek, resp. prevedením na jednotky základné (tj. meter, kilogram, sekunda, ampér) zistíte, o ktorú veličinu ide.

Evžen Říman

5. Vodivá kulička poloměru $r = 15$ mm ve vakuu je nabitá na potenciál $V = 6\,000$ V. Za předpokladu, že v její blízkosti není těles, jež by rušila její elektrostatické pole, vypočítejte, jaká je intenzita jejího pole a) v těsné blízkosti jejího povrchu, b) ve vzdálenosti 20 cm od jejího středu, c) ve vzdálenosti 1 m od středu!

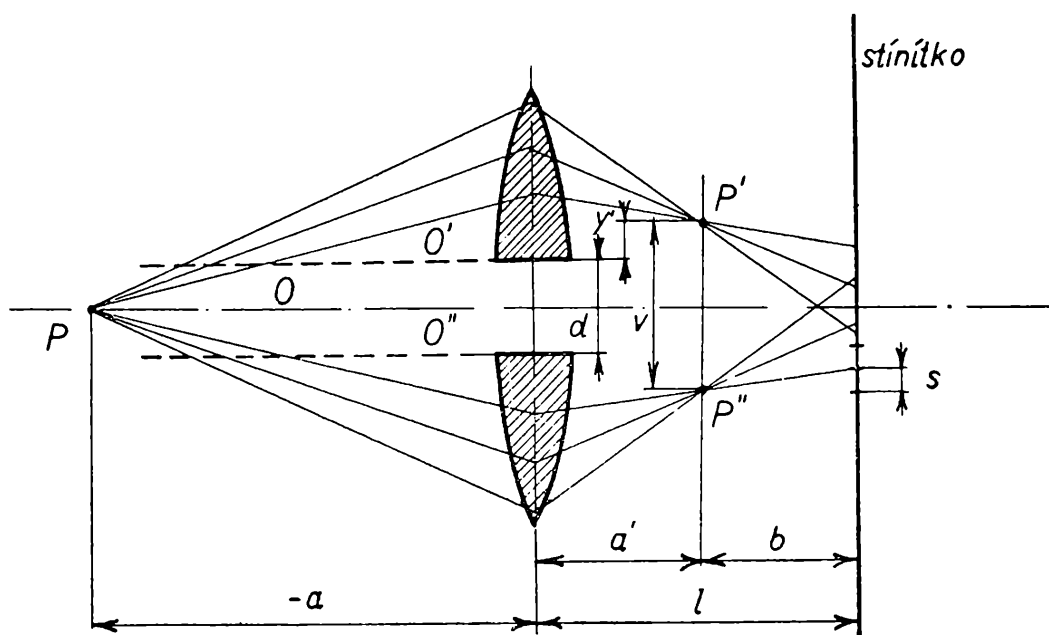
Václav Šindelář

6. Deskový kondenzátor má za izolační vrstvu skleněnou destičku tloušťky $d = 2 \text{ mm}$ a plochy $S = 300 \text{ cm}^2$. Kondenzátor nabijeme na napětí $V_1 = 100 \text{ V}$ a odpojíme jej od proudového zdroje. Máme vypočítat mechanickou práci, kterou je třeba vynaložit, chceme-li zcela odstranit skleněnou destičku z kondenzátoru. Tření přitom zanedbáváme, práci proti gravitačním silám neuvažujeme.

Václav Šindelář

7. Vedení z elektrárny, jež vyrábí stejnosměrný proud ke spotřebiteli, je z měděného drátu o průřezu $S = 2,5 \text{ mm}^2$. Délka dvou vodičové přípojky je $L = 49 \text{ m}$. V elektrárně je napětí $V = 120 \text{ V}$. Má-li být připojen u spotřebitele elektrický vaříč o výkonu $P_s = 600 \text{ W}$, jaký musí být jeho odpor? Měrný odpor vedení volte $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$.

Václav Šindelář



Obr. 2

8. Tenkou spojnou čočkou, jež má ohniskovou dálku $f = -50 \text{ cm}$, rozříznutou na dvě poloviny rovinou jdoucí optickou osou O , procházejí paprsky vycházející z bodového zdroje P . Uspořádání je zřejmé z obrázku 2. Obě poloviny čočky jsou od sebe vzdáleny o délku $d = 0,1 \text{ cm}$. Bodový zdroj je umístěn před čočkou na optické ose původní nerozříznuté čočky ve vzdálenosti $a = -300 \text{ cm}$ od původního středu čočky. Úlohou je vypočítat vzdálenost s mezi sousedními světelnými interferenčními proužky, jež se objeví na stínítku umístěném za čočkou ve vzdálenosti $l = 450 \text{ cm}$ od středu čočky. Zdroj vysílá monochromatické světlo vlnové délky $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Poznámka: Vzdálenost s mezi interferenčními proužky na stínítku vypočteme ze vztahu

$$s = \lambda \cdot \frac{b}{v},$$

kde λ značí vlnovou délku světla, b je vzdálenost stínítka od obrazové roviny a v vzdálenost obou obrazů vytvořených rozříznutou čočkou (viz obr. 2).

Václav Šindelář

Deskriptivní geometrie:

1. Jsou dány dvě různoběžky a , b a délka $h \neq 0$. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, jehož dvě sousední pobočné hrany leží v přímkách a , b a mají délku h .

Stanislav Horák

2. Je dána kulová plocha α , válcová plocha β , rovina ρ a ostrý úhel ω . Sestrojte přímku p tak, aby s rovinou ρ svírala úhel ω a dotýkala se přitom ploch α , β .

Stanislav Horák

3. Sestrojte elipsu, která je dána vrcholem A hlavní osy, ohniskem F a bodem L na elipse!

Miroslav Menšík

4. Narýsujte tuší pravouhlé průměty rotačního kužele, který leží v prvním oktantu, má vrchol v počátku, dotýká se půdorysny, nárysny i stranorysny, je-li dán bod $B(3; 1; 4)$ ležící v rovině jeho podstavy. Popis proveďte šablonou 5 mm!

Ota Setzer

Řešení úloh z minulého ročníku

Uveřejňujeme řešení prvních úloh z minulého ročníku. Autoři jednotlivých úloh všechna zaslaná řešení prohlédli, ocenili a navrhli redakci i řešení vhodná - třeba i po menší úpravě - k otištění. Další řešení otiskneme v příštích číslech tak, aby bylo možno soutěž uzavřít do konce kalendářního roku a rozhodnout i o odměnách.

Redakce

1. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ do kružnice k vepsaném jsou vedeny postupně z každého vrcholu k oběma protějším stranám kolmice, které svými patami určují přímku. Čtyři takto získané přímky procházejí jedním bodem F . Dokažte, že přímka spojující středy dvou protilehlých stran čtyřúhelníka protíná spojnicí středů zbývajících protilehlých stran v bodě E , jenž je středem úsečky FO , kde O je střed kružnice k .

Josef Langr

Řešila Marie Melicharová, 11d, JŠŠ J. K. Tyla v Hradci Králové:

Označme K , L , M , N středy stran AB , BC , CD , AD (v tom pořadí) čtyřúhelníka $ABCD$. $KLMN$ je rovnoběžník. Platí věta: Středy stran libovolného čtyřúhelníka jsou vrcholy rovnoběžníka. (Důkaz je proveden v Rozhledech, roč. 1959, str. 5.) Jeho úhlopříčky KM , LN se navzájem půlí.

Dokážeme-li, že $OLFN$ je rovněž rovnoběžník, pak se jeho úhlopříčky FO , LN navzájem půlí, a to v bodě E , jenž je středem úsečky FO .

Důkaz: Strany ON , OL čtyřúhelníka $OLFN$ leží na osách stran AD , BC

(v tom pořadí), poněvadž O je střed kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$. $ON \perp AD$, $OL \perp BC$.

F je střed kružnice opsané čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$ (viz článek Inž. Dr. Langra v Rozhledech, roč. 1958, str. 202/6), leží tedy na osách stran.

Strana A_1D_1 leží na přímce BC , strana B_1C_1 na přímce AD . Označme po řadě P , Q středy stran A_1D_1 , B_1C_1 . Uvažujme nyní čtyřúhelník B_1BCC_1 . Je to lichoběžník pravoúhlý, protože $B_1B \perp AD$, $CC_1 \perp AD$ a tedy i střední příčka $QL \perp AD$ a je osou strany B_1C_1 . Leží na ní bod F a $FL \perp AD$. Také čtyřúhelník AA_1D_1D je lichoběžník pravoúhlý, protože $AA_1 \perp BC$, $DD_1 \perp BC$ a tedy i střední příčka $NP \perp BC$ a je osou strany A_1D_1 . Leží na ní bod F a $FN \perp BC$.

Čtyřúhelník $OLFN$ je rovnoběžník, protože $OL \parallel FN$ a $ON \parallel FL$. Jeho úhlopříčky LN a FO se vzájemně půlí, a to v bodě E , který je středem úsečky FO a tedy i LN . LN je zároveň úhlopříčkou rovnoběžníka $KLMN$, jeho druhá úhlopříčka MK protíná LN v jejím středu, tj. v bodě E . Tím je dokázáno, že přímka, spojující středy dvou protilehlých stran čtyřúhelníka $ABCD$ protíná spojnici středů zbývajících protilehlých stran v bodě E , jenž je středem úsečky FO .

Podobně bychom provedli důkaz, kdyby byl bod O a tedy i F vně čtyřúhelníka $ABCD$, nebo kdyby bod O ležel na jeho jedné straně. Pak by bod F byl středem protilehlé strany.

2. Určete všechna reálná řešení rovnice

$$\sqrt{x+2} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \sqrt{x-1} = 2.$$

Jiří Sedláček

Řešila Marie Melicharová, 11d, JŠŠ J. K. Tyla v Hradci Králové:

Nejdříve najdeme ta čísla x , pro která má levá strana dané rovnice smysl. Musí platit $x-1 \geq 0$, čili $x \geq 1$. Dále musí být $x-2 \sqrt{x-1} \geq 0$, což lze převést na ekvivalentní tvar

$$(x-2)^2 \geq 0.$$

Této podmínce vyhovují všechna reálná čísla x , protože druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná. Levá strana dané rovnice má tedy smysl pro ta x , která vyhovují podmínce $x \geq 1$.

Umocníme obě strany dané rovnice na druhou:

$$x + 2 \sqrt{x-1} + 2 \sqrt{(x+2 \sqrt{x-1})(x-2 \sqrt{x-1})} + x - 2 \sqrt{x-1} = 4$$

Další úpravy:

$$2x + 2 \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$$

$$x + \sqrt{(x-2)^2} = 2$$

$$x + |x-2| = 2. \quad (1)$$

Úlohu rozdělíme na dva případy:

1. Je-li $x-2 \geq 0$, potom $|x-2| = x-2$. Rovnice (1) pak zní

$$x + x - 2 = 2$$

a má řešení

$$x = 2.$$

2. Je-li $x - 2 < 0$, potom $|x - 2| = -x + 2$ a rovnice (1) má tvar

$$x - x + 2 = 2.$$

Rovnici (1) tedy vyhovují všechna x , o kterých platí $x \leq 2$.

Za předpokladu $x \geq 1$ je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí (1). To znamená, že řešením dané rovnice jsou ta řešení rovnice (1), o nichž platí $x \geq 1$. Dané rovnici tedy vyhovují všechna čísla x vyhovující nerovnosti

$$1 \leq x \leq 2.$$

3. Určete počet sudých binomických koeficientů v posloupnosti

$$\binom{30}{0}, \binom{30}{1}, \binom{30}{2}, \dots, \binom{30}{30}.$$

Donát Rimaszombati

Řešil Bohuslav Diviš, 11c, JŠŠ v Praze 14 - Michli:

Nejprve dokážeme, že v posloupnosti $\binom{31}{0}, \binom{31}{1}, \binom{31}{2}, \dots, \binom{31}{31}$ jsou všechny členy liché. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Máme dokázat, že $\binom{31}{k}$ je pro všechna $0 \leq k \leq 31$ číslo liché.

Pro $k = 1$ je $\binom{31}{1} = 31$, tedy liché. Předpokládejme nyní, že číslo $\binom{31}{k}$ je liché a dokažme, že také číslo $\binom{31}{k+1}$ je liché.

$$\binom{31}{k+1} = \binom{31}{k} \cdot \frac{31-k}{k+1}.$$

Pro k sudé je tento výraz zřejmě lichý, protože dostáváme součin dvou lichých čísel dělený třetím lichým číslem, a to je vždy číslo liché.

Pro k liché upravme náš výraz takto:

$$\binom{31}{k+1} = \binom{31}{k} \cdot \frac{2^5 - (k+1)}{k+1}.$$

Nechť je $k+1$ dělitelné číslem 2^n , kde $1 \leq n \leq 4$. Potom platí $k+1 = a \cdot 2^n$, kde a je vhodné liché číslo.

$$\binom{31}{k+1} = \binom{31}{k} \cdot \frac{2^5 - a \cdot 2^n}{a \cdot 2^n} = \binom{31}{k} \cdot \frac{2^n \cdot (2^{5-n} - a)}{a \cdot 2^n} = \binom{31}{k} \cdot \frac{2^{5-n} - a}{a}$$

Dostali jsme tak opět liché číslo, protože součin lichých čísel je číslo liché a podíl lichých čísel je rovněž lichý. Tím jsme dokázali, že v posloupnosti

$$\binom{31}{0}, \binom{31}{1}, \binom{31}{2}, \dots, \binom{31}{31}$$

jsou všechny členy liché.

Protože platí $\binom{30}{1} + \binom{30}{2} = \binom{31}{2}$, musí být $\binom{30}{2}$ l i c h é číslo,

protože platí $\binom{30}{2} + \binom{30}{3} = \binom{31}{3}$, musí být $\binom{30}{3}$ s u d é číslo,

protože platí $\binom{30}{3} + \binom{30}{4} = \binom{31}{4}$, musí být $\binom{30}{4}$ l i c h é číslo atd.

Členy posloupnosti $\binom{30}{0}, \binom{30}{1}, \binom{30}{2}, \dots, \binom{30}{30}$ mají tedy střídavě liché a sudé hodnoty, počínaje lichou hodnotou $\binom{30}{0} = 1$.

Je proto sudých binomických koeficientů v dané posloupnosti právě 15.

4. a 10. Je dána rotační kuželová plocha a přímka p , která neprochází jejím vrcholem. Na přímce p najděte bod X tak, aby tečné roviny vedené z něho k dané ploše byly navzájem kolmé.

Stanislav Horák

Řešil Peter Preisler, 11a, JSS v Trenčíně:

R o z b o r: Danú úlohu rozložíme na dva kroky: 1. zostrojiť geometrické miesto bodov, aby dotykové roviny vedené týmito bodmi k danej kuželovej ploche boli na seba kolmé; 2. určiť priesečník tohto geometrického miesta s priamkou p .

1. Geometrické miesto bodov, z ktorých dotykové roviny vedené ku kuželovej ploche sú navzájom kolmé, je opäť kuželová plocha s tou istou osou a vrcholom, len s väčším vrcholovým uhlom ako daná. Túto kuželovú plochu zostrojíme tak, že necháme rotovať okolo osi priesečnicu dvoch ľubovoľných dotykových rovín navzájom kolmých.

K o n š t r u k c i a: Miesto kuželovej plochy budeme uvažovať rotační kužel. Priesečnicu dvoch navzájom kolmých dotykových rovín zostrojíme následovne: Volíme si ľubovoľnú dotykovú rovinu τ ku kuželovej ploche. Vo vrchole vztýčíme na túto rovinu τ kolmicu a priesečník tejto kolmice s rovinou základne označme Q . Z bodu Q vedeme dotykové priamky k podstave kužela a ich priesečníky zo stopou roviny τ označme P a R . (Nakoľko $PS = RS$, stačí uvažovať len jeden bod.) Bod P spojíme s vrcholom kužela a takto vzniklú priamku necháme rotovať okolo osi danej kuželovej plochy. Priesečníky priamky p so vzniknutou kuželovou plochou H sú hľadané body X .

D ô k a z: plynie z rozboru a konštrukcie.

D i s k ú z i a: Bod Q je vždy zostrojiteľný. Potom dotyčnice z bodu Q ku základne kužela má 1. 2 dotykové body, ak $\alpha < 90^\circ$, 2. 1 dotykový bod, ak $\alpha = 90^\circ$, 3. žiadny dotykový bod, ak $\alpha > 90^\circ$.

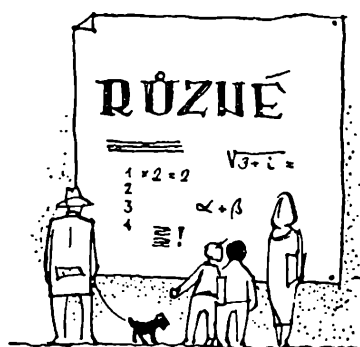
V prípade 1. existuje kuželová plocha H ; †

2. kuželová plocha H degeneruje v rovinu H_1 , ktorá je kolmá k osi kuželovej plochy a prechádza vrcholom V ;

3. kuželová plocha H neexistuje.

Potom 1. $\alpha < 90^\circ$, a) priamka p má s kuželovou plochou H dva priesečníky; úloha má dve riešenia;

- b) priamka p sa dotýka kuželovej plochy H ; úloha má jedno riešenie;
 c) riešenie neexistuje, priamka p nemá s kuželovou plochou žiadny spoločný bod.
2. $\alpha = 90^\circ$: a) Priamka p je rôznobežná s rovinou H_1 ; úloha má jedno riešenie;
 b) priamka p je rovnobežná s rovinou H_1 , ale v nej neleží; úloha nemá riešenie (bod X by bol nevlastným priesečníkom priamky p s rovinou H_1);
 c) priamka p leží v rovine H_1 , ale neprechádza vrcholom V ; úloha má nekonečne mnoho riešení.
3. $\alpha > 90^\circ$: úloha nemá riešenie.



Různé

Tvůrce moderních fotografických objektivů

Fotografický širokouhlý objektiv o velké světelnosti s ostrými obrysy prostými zkreslení je dílem dr. Paula Rudolfa, který tak umožnil rozmach maloformátových fotografických přístrojů. První fotografické objektivы kreslily ostře jen ve středu obrazu, nikoliv však na okrajích. To platilo o Voigtländerově objektivu, sestrojeném roku 1840 Petzva le m, právě tak jako o pozdějším jeho aplanátu, vyrobeném roku 1866 pro Steinheila. Dr. Paul Rudolf po studiích v Mnichově, Jeně a Lipsku, stal se asistentem profesora Abbeho v Jeně, jenž mu dopomohl ke vstupu do Zeissových závodů v Jeně. Když seznal nedostatky tehdejších fotografických objektivů, a p l a n á t ů, začal roku 1888 s výpočtem a n a s t i g m a t u, který po dvou letech ukončil. Výsledkem byl anastigmat o zorném poli 68° a světelnosti $1:6$ „P r o t a r“, který vykazoval korekci astigmatismu a zakřivení obrazu. Brzy po něm následoval další anastigmat „P l a n a r“ o světelnosti $1:3,6$, čili tzv. Gaussův typ. Pak následoval anastigmat „U n a r“ a po něm roku 1902 „T e s s a r“, zvláště ostře kreslící anastigmat o světelnosti $1:6,3$, jenž byl pak napodoben mnoha továrnami objektivů nejen v Německu, ale i v jiných státech. Po vytvoření reprodukcí objektivů „A p o p l a n a r u“ a „A p o - T e s s a r u“, odešel dr. Paul Rudolf do výslužby. Ale v roce 1918 překvapil ještě fotografický svět vysoce světelným sféroachromatickým anastigmatem „P l a s m a t e m“ a „K i n o - p l a s m a t e m“ $1:1$, který nebyl předstížen ani nejsvětelnějšími objektivy francouzskými a japonskými. Fotografickým objektivem pro maloformátové komory o světelnosti $1:2$ zakončil dr. Paul Rudolf svoji dráhu tvůrce moderních fotografických objektivů-anastigmatů, aniž se dočkal uplatnění své poslední práce v praxi vzhledem ke konku-

renční řevnivosti optických koncernů. Kvůli nim a jejich nedostatečnému pochopení pro včasnou aplikaci vědy ve výrobě, odešel předčasně do výslužby.

(Wissenschaft 12/1958)

Fr. Komurka



Recenze

Šestý ročník Matematické olympiády

Nedávno vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze v edici Pomocné knihy pro žáky brožuru *Šestý ročník Matematické olympiády*, kterou zpracoval *Rudolf Zelinka* se spolupracovníky. Brožura vyšla bohužel téměř o rok později, než se zamýšlelo, což bylo zaviněno tiskárnou, která se musela přednostně věnovat tisku učebnic.

Knížka obsahuje čtyři kapitoly. V první je kromě podrobné zprávy o průběhu soutěže též jmenovitý seznam členů ústředního výboru Matematické olympiády a předsedů krajských výborů Matematické olympiády. Druhá kapitola se zabývá výsledky jednotlivých kol soutěže. Jsou zde přehledy o počtu účastníků v jednotlivých krajích a kategoriích. Je také uvedeno pořadí nejlepších řešitelů ve všech kategoriích a pořadí vítězů šestého ročníku Matematické olympiády. V třetí kapitole hodnotí organizátoři soutěže výsledky z hlediska odborného a pedagogického. Zvláštní pozornost věnují problémům kategorie D určené žákům osmých tříd. Čtvrtá a poslední kapitola je nejrozsáhlejší, neboť obsahuje asi 185 stran. Jsou zde formulovány všechny úlohy jednotlivých kategorií a kol soutěže a zároveň jsou podána vzorová řešení (v českém nebo slovenském jazyce). Některé úlohy jsou řešeny několika způsoby. Jsou uveřejněna i zvláště pěkná řešení některých olympioniků se jménem, třídou a adresou školy příslušného řešitele.

Je možno říci, že význam brožury netkví jenom v tom, že informuje o celém průběhu šestého ročníku Matematické olympiády. Brožura se totiž jistě stane, podobně jako všech pět svazků věnovaných předcházejícím ročníkům olympiády, vhodnou pomůckou pro studenty, kteří se účastní nebo chtějí v budoucnu účastnit dalších ročníků soutěže. Protože je vlastně sbírkou náročnějších rozřešených úloh ze středoškolské matematiky, může být i materiálem pro zájmové kroužky na školách.

Knížka má 216 stran, 65 obrázků. Cena brož. výtisku je 5,60 Kčs.

Miroslav Šisler

Sbírka matematických vzorců

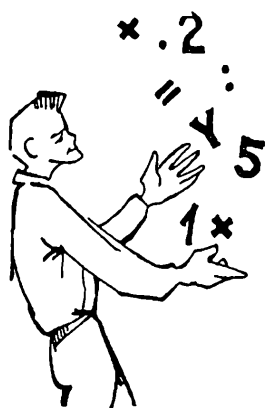
Ve Státním nakladatelství technické literatury v Praze vyšla v lednu 1959 příručka Antonína Zeleného: *Sbírka matematických vzorců*, 240 stran, 119 obrázků, 16 tabulek, cena 8,60 Kčs.

Publikace obsahuje přehlednou sbírku vzorců z elementární a vyšší matematiky v rozsahu látky probírané na výběrových i odborných školách a přibližně v prvním roce na vysokých školách technického směru.

Pro informaci uvedme názvy jednotlivých kapitol: 1. Matematické značky (symboly). 2. Algebra. 3. Posloupnosti a řady. 4. Funkce. 5. Rovnice. 6. Planimetrie. 7. Stereometrie. 8. Trigonometrie. 9. Analytická geometrie v rovině. 10. Analytická geometrie v prostoru. 11. Diferenciální počet. 12. Integrální počet.

Uspořádání vzorců s případným krátkým slovním doprovodem je velmi přehledné. V druhém vydání budou jistě drobné nesrovnalosti opraveny a někde text doplněn. Knížku doporučujeme všem studentům, kteří chtějí pokračovat ve studiu na technikách, právě tak jako učitelům a ostatním zájemcům o matematiku.

Doc. Dr. M. Menšík



Matematické zábavy

Kudy?

V této rubrice jsme otiskli v č. 4 na str. 192 pod názvem *Kudy?* tuto úlohu Dr. H. Karla („*Archimedes*“, č. 1/2 z února 1959, č. 646):

Turista přijde na rozcestí a ví, že jedna z cest vede do vesnice *A*, kam chce jít, a druhá cesta do vesnice *B*, kterou nechce navštívit. Na rozcestí stojí dva bratři, kteří si jsou velmi podobní, o nichž turista ví, že oba znají správnou cestu, že však jeden z nich vždy mluví pravdu a že druhý neustále lže. Turista nedovede však určit, který z nich lže a který mluví pravdu. Jak může jedinou otázkou, položenou jen jednomu z bratrů, zjistit správnou cestu, když tázaný smí na ni odpovědět jen buď „ano“ nebo „ne“?

Řešil Karel Kunc, studující MU, bytem v Znojmě:

Turista ukáže na jednu z cest a jednoho z bratrů se otáže:

„Říká váš bratr, že tato cesta vede do *A*?“ V případě záporné odpovědi dá se touto cestou, v případě kladné odpovědi druhou cestou.

O d ů v o d n ě n í : Předpokládejme, že i oba bratři o sobě vědí, že jeden stále lže, a druhý že vždy mluví pravdu, že tedy oba vědí, jak by na danou otázku

odpověděl druhý a že tedy turistova otázka má smysl. Rozlišujeme dva případy:

I. Předpokládejme, že turista ukázal na cestu vedoucí do A . V případě, že se otáže toho z bratří, který mluví pravdu, dostane odpověď „ne“. (Druhý, který lže, totiž o cestě tvrdí, že nevede do A a první bude mluvit pravdu právě tehdy, když to doslovně přetlumočí.)

V případě, že se otáže toho z bratří, který lže, dostane také odpověď „ne“. (Druhý, který mluví pravdu, říká, že cesta vede do A , první, který lže, zodpoví turistovu otázku nepravdivě právě tehdy, když prohlásí za správnou negaci bratrova výroku.)

II. Nechť turista ukázal na cestu vedoucí do B . Zcela obdobně jako v případě I. dostane odpověď „ano“ bez ohledu na to, zeptá-li se jednoho nebo druhého z bratrů.

Celkem tedy, ať se zeptá kteréhokoliv z obou, *dostane odpověď „ne“ právě tehdy, když ukázal na cestu do A , odpověď „ano“ právě tehdy, když ukázal na cestu do B .*

Správná řešení úlohy „Kudy?“ dále zaslali:

Josef D r k a l, 10a, JSŠ, Praha 16.

Jarmila H á b o v á, Veselí na Moravě.

Helena H a n s l i a n o v á, 10a, JSŠ, Hranice na Moravě.

Dr. Miloslav H l a v á č e k, JSŠ, Náchod.

Marie M e l i c h a r o v á, 11d, JSŠ, Hradec Králové.

Beňadik V a l u š i a k, Lipt. Lúžna, okres Ružomberok.



Redakce hovoří se čtenáři

- * Podle přání čtenářů i z praktických důvodů bylo rozhodnuto ukončit 37. ročník (1959) *Rozhledů* šestým číslem. První číslo 38. ročníku (1959/60) vychází nyní v září na počátku školního roku. Kdo si předplatil za 20 Kčs celý ročník 1959, obdrží za toto předplatné ještě čísla 1. až 4. nového ročníku (1959/60).
- * V. F., učitel v Č. B. Rádi uveřejníme zajímavá řešení, budou-li nám zaslána.
- * P. Š., studující, Příbor. Redakce nemá žádný vliv na včasné doručování časopisu.
- * Předplatné hromadné i od jednotlivců přijímají pouze poštovní doručovatelé, případně místní poštovní úřady. Poštovní novinová služba má v tomto směru výhradní monopol. Závady při objednávkách a v distribuci hlase nejdříve u svého doručovacího poštovního úřadu a teprve pak nám.
- * Redakce neprodává ani nezasílá jednotlivá čísla.
- * Žádáme autory, aby své příspěvky psali výhradně strojem a aby matematické symboly vpisovali do textu čitelně ručně.

Jmenný seznam vítězů VIII. ročníku matematické olympiády (šk. rok 1958/59)

P o ř a d í:

1. *Jiří Moudrý*, 11c tř., 1. jsš, Pardubice, ul. Slovenského povstání.
2. *Jiří Votava*, 11d tř., 14. jsš, Praha 12, ul. W. Piecka 2.
3. *Zdislav Kovařík*, 11a tř., jsš, Hodonín.
4. *Jiří Souček*, 10a tř., 21. jsš, Praha 16, Na Santošce 1.
5. *Karel Šmuk*, 11b tř., jsš, Ostrava VIII - Hladnov.
6. *Jaromír Fährnich*, 11b tř., 7. jsš, Praha 7, Štrossmayerovo nám.
7. *Jan Ježek*, 11c tř., 16. jsš, Praha 13 - Vršovice, Kodaňská 16.
8. *Bohuslav Diviš*, 11 tř., jsš, Praha 14 - Michle, Ohradní 5.
9. *Jitka Klánská*, 11b tř., 16. jsš, Praha 13 - Vršovice, Kodaňská 16.
10. *Ján Vojtko*, 11a tř., jsš, Holíč, Slovensko (okres Skalica).
11. *Petr Jiříček*, 11a tř., jsš, Ostrava I, Matiční 5.
12. *Štěpán Mikoláš*, 11a tř., jsš, Boskovice na Moravě.
13. *Jan Vlček*, 11 tř., jsš, Vimperk.
14. *Kamil John*, 11b tř., 14. jsš, Praha 12, tř. W. Piecka 2.
15. *Ri-Son-tek*, 11a tř., jsš, Brandýs n. Labem.
16. *Jiří Bičák*, 11d tř., 14. jsš, Praha 12, tř. W. Piecka 2.
17. *Marie Krčálová*, 11b tř., jsš J. K. Tyla, Hradec Králové.
18. *Anežka Nováčková*, 11b tř., jsš, Třebíč na Moravě.
19. *Petr Tomšů*, 3b ročník průmyslové školy strojní, Kopřivnice.
20. *Jan Henig*, 11b tř., jsš, Plzeň, ul. Pionýrů 2.

Redakce blahopřeje vítězům, z nichž většina je našimi čtenáři.

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

Organismus
organizace i organisace
orkán
ortodoxní
ortografie
osinek
Osiris (vyslov - sí-)
osmerý
osmičlenný
osmihranný
osmiúhelník
osmium

osmóza i osmosa
ostrohranný
osychati i osýchati
oškrabati i oškrábati
otáčka
ovál, 6. p. jedn. oválu i ovále
ovíjeti
oxydovati
ozařovač
ozón
ozónový
ožíhati

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Dr. Josef Šimek - dr. Josef Pírek - Josef Schejbal: Rýsování pro osmý ročník.
Pokusná učebnice. Str. 34, cena brož. výt. Kčs 0,65. K dostání ve Službě škole.

Prof. dr. Alois Urban a kolektiv: Deskriptivní geometrie pro jedenáctý ročník.
Pokusná učebnice. Str. 132, cena brož. výt. Kčs 3,55. K dostání ve Službě škole.

Dr. Josef Šimek a kolektiv: Geometrie pro osmý ročník.
Pokusná učebnice. Str. 74, cena brož. výt. Kčs 1,45. K dostání ve Službě škole
a v Obchodě drobným spotřebním zbožím.

Karel Hruša a kolektiv: Matematické a fyzikální tabulky pro devátý až jedenáctý ročník.

Pomocná kniha pro žáky. 8. nezměněné vydání. Str. 81, cena váz. výt. Kčs 5,—.
K dostání v Obchodě drobným spotřebním zbožím (Narpy), na venkově v prodejnách Jednoty.

Antonín Pospíšil - doc. dr. Miroslav Menšík: Technické kreslení.

Deskriptivní geometrie pro 2. ročník průmyslových škol stavebních. 5. vydání.
Str. 219, cena brož. výt. Kčs 8,30. K dostání v prodejnách n. p. Kniha.

Dr. Michal Harant - Emil Kraemer - Oldřich Lanta: Geometrie pro jedenáctý ročník.

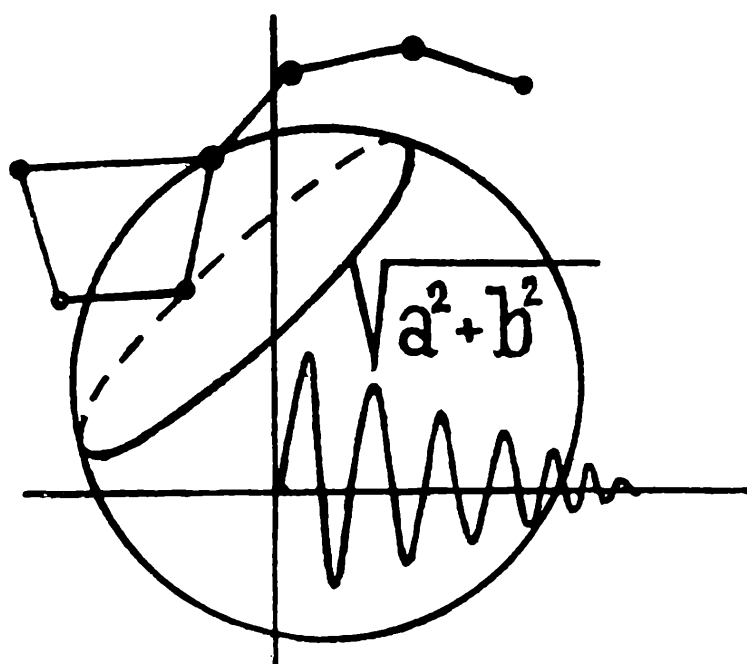
Pokusná učebnice. 1. vydání. Str. 123, cena brož. výt. Kčs 2,90.

Miroslav Voráček a kolektiv: Fyzika pro osmý ročník.

Pokusná učebnice. 1. vydání. Str. 175, cena brož. výt. Kčs 4,05.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



2

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 2

Toto číslo vyšlo 15. října 1959

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

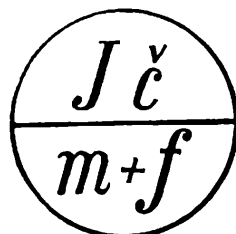
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; Jiří Sedláček, kand. věd mat., ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Žikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

OBSAH

O. Berka: Příspěvek k řešení kvadratických nerovností . . .	49
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	54
Inž. dr. J. Langr: Problém dotýkajících se kružnic	57
J. Voráček a T. Jančar: O největších hodnotách některých funkcí	59
J. Filip: Jedno z priestorových riešení Apolloniovej úlohy	62
Inž. J. Švastal: O stavitelském kreslení (Dokončení)	68
Inž. B. Šesták: O kovových krystalech (Pokračování)	75
Prof. dr. W. Hanle: Vliv záření bohatého na energii	80
P. Schürer: Jak získáváme nízké tlaky (Pokračování)	82
Úlohy k řešení	85
J. Kotyk: James Prescott Joule	88
J. Sedláček: Skončil osmý ročník Matematické olympiády	92
Úlohy IX. ročníku Matematické olympiády	93
Výsledky Fyzikální olympiády Pražského kraje	95
J. Chudý: Sovětská raketa na Měsíci	96
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06501 Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

Matematika

Otto Berka, JŠŠ, Gottwaldov:

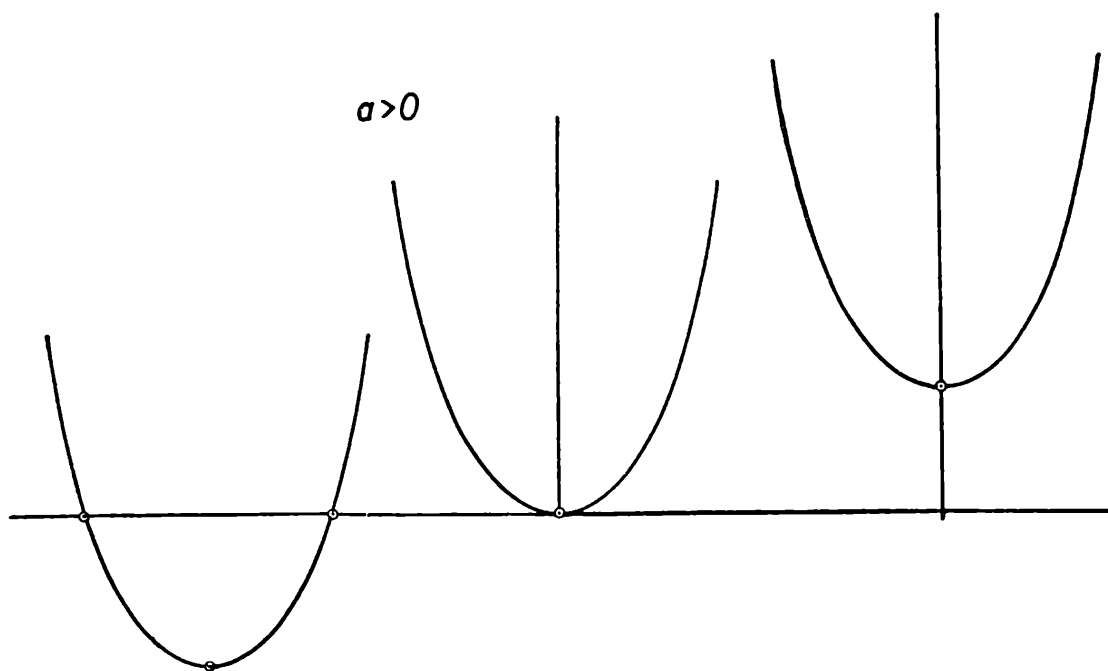


Příspěvek k řešení kvadratických nerovností

V 9. třídě se probírají kvadratické funkce jen ve velmi omezené míře. U těchto funkcí se určuje jejich obor a sestruje se graf. Avšak kvadratických funkcí tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

lze velmi výhodně užít při řešení kvadratických nerovností v 10. třídě.



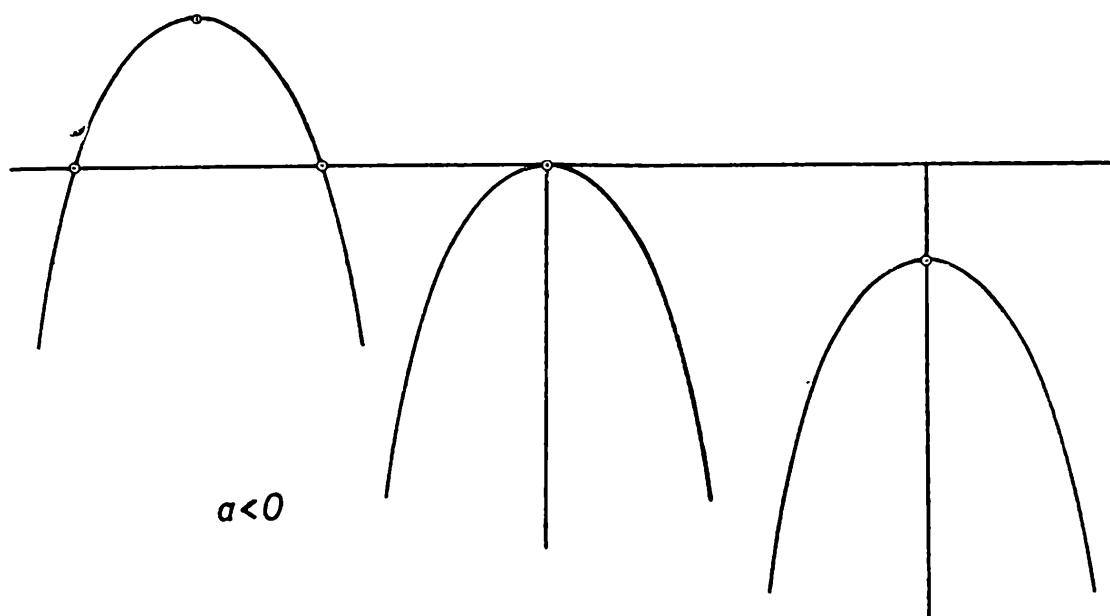
Obr. 1

Víme, že grafem funkce (1) je vždy parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y . Je-li ve funkci (1) $a > 0$, je parabola otevřena nahoru, je-li $a < 0$, je parabola otevřena dolů, přičemž mohou nastat tři případy:

- parabola má s osou x společné buď a) dva body (protíná ji),
- b) jeden bod (dotýká se jí),
- c) žádný bod (neprotíná ji)

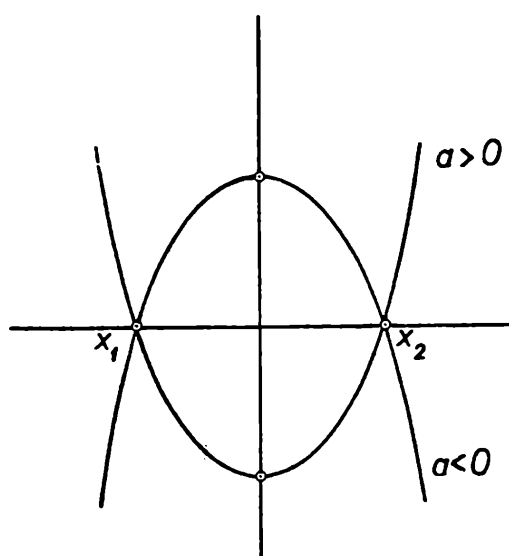
(viz obr. 1 a 2). X souřadnice průsečíků paraboly s osou x jsou vlastně kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \quad (2)$$



Obr. 2

Případy a), b), c) nastanou tehdy, jestliže rovnice (2) má po řadě:
dva reálné různé kořeny,
jeden dvojnásobný reálný kořen,
dva imaginární kořeny.



Obr. 3

A ještě jednu poznámku, než přistoupíme k vlastnímu řešení kvadratických nerovností.

Zvolme kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a > 0. \quad (3)$$

Násobíme-li ji číslem -1 , dostaneme

$$-ax^2 - bx - c = 0. \quad (4)$$

Řešíme-li rovnice (3) a (4), zjistíme, že obě mají shodné kořeny, ale jejich grafy jsou různé.

Graf funkce

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0,$$

je otevřený nahoru a graf funkce

$$y = -ax^2 - bx - c, \quad a > 0,$$

je otevřený dolů (obr. 3).

Jak nyní využijeme těchto elementárních znalostí při řešení kvadratických nerovností tvaru

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad a \neq 0. \quad (5)$$

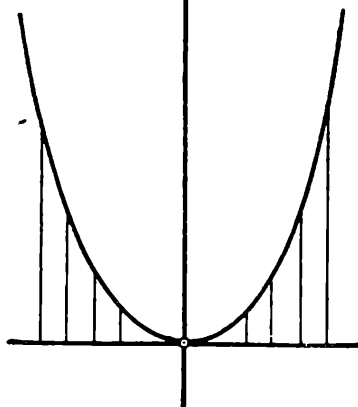
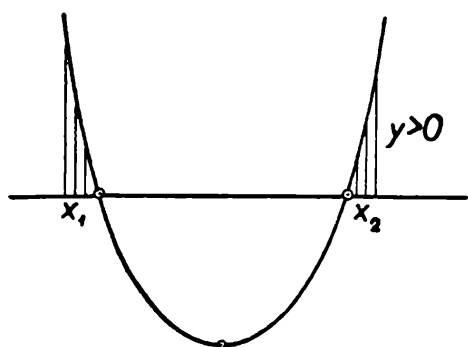
Uvažujme nerovnost

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a > 0. \quad (6)$$

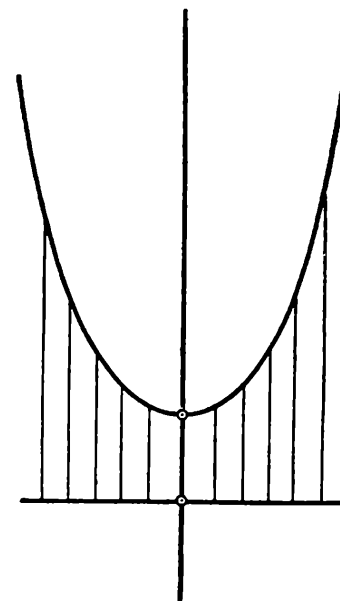
Levou stranu nerovnosti položíme rovnu nule a tuto rovnici řešíme. Její kořeny jsou

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

Obr. 4a



Obr. 4b



Obr. 4c

Víme již, že tyto kořeny jsou x souřadnice průsečíků grafu funkce $y = ax^2 + bx + c$ s osou x . Jelikož je $a > 0$, pak graf je parabola otevřená nahoru. Jestliže kořeny (7) jsou reálné různé, protíná parabola osu x ve dvou bodech (obr. 4a). Jelikož má být $ax^2 + bx + c > 0$, pak daná nerovnost je splněna pro všechna x , pro něž je (označení pořadí kořenů volme tak, aby $x_1 < x_2$)

$$x < x_1 \text{ a } x > x_2.$$

V případě, že ve vzorci (7) je $b^2 - 4ac = 0$, má rovnice jeden reálný dvojnásobný kořen x_1 a příslušná parabola se bude dotýkat osy x (obr. 4b). Pak nerovnost (6) je splněna pro všechna $x \neq x_1$. Jestliže ve vzorci (7) je $b^2 - 4ac < 0$, má rovnice imaginární kořeny, příslušná parabola neprotíná osu x , a proto nerovnost (6) je splněna pro všechna x (obr. 4c). Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a nerovnost (6) je obecně vyřešena.

Řešme nyní nerovnost

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a < 0. \quad (8)$$

V tomto případě nutno uvážit, že parabola příslušné rovnice bude otevřena dolů jako na obraze 2. Pak nerovnost (8) má toto řešení:

a) Jsou-li kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálné různé, pak řešením nerovnosti (8) jsou všechna x , pro něž $x_1 < x < x_2$ (obr. 5).

b) Má-li rovnice jeden reálný dvojnásobný kořen x_1 , pak nerovnost (8) není splněna pro žádné x .

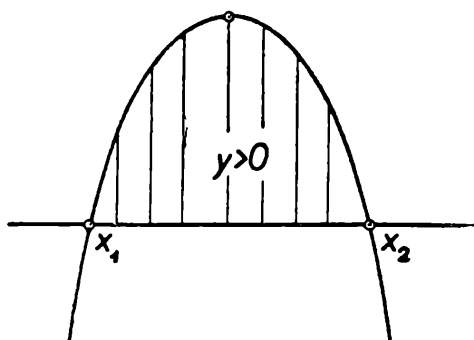
c) Nemá-li rovnice reálné kořeny, nerovnost (8) nesplňuje žádné x .

Máme-li řešit nerovnosti

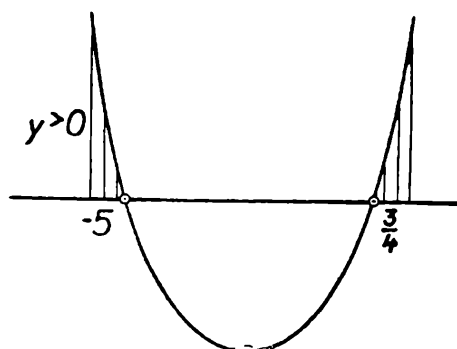
$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a < 0,$$

postupujeme úplně stejně jako v předcházejícím případě. Čtenář si jistě tuto úvahu provede sám.



Obr. 5



Obr. 6

Příklad 1. Pro která x je splněna nerovnost $4x^2 + 17x - 15 > 0$?
Položme

$$4x^2 + 17x - 15 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = -5.$$

Jelikož $4 > 0$, je grafem funkce

$$y = 4x^2 + 17x - 15$$

parabola otevřená vzhůru, která protíná osu x ve dvou bodech $x_1 = \frac{3}{4}$ a $x_2 = -5$ (obr. 6). Pak daná nerovnost je splněna pro všechna x , pro něž je $x < -5$ a $x > \frac{3}{4}$.

Příklad 2. Řešme nerovnost $-10x^2 + 9x + 9 < 0$.
Řešení:

$$-10x^2 + 9x + 9 = 0 \cdot (-1)$$

$$10x^2 - 9x - 9 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{5}.$$

Daná nerovnost je splněna pro $x < -\frac{3}{5}$ a $x > \frac{3}{2}$ (obr. 7).

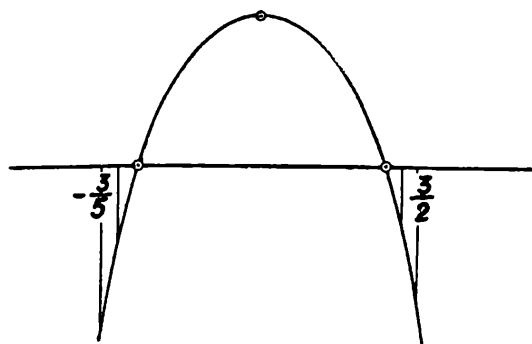
Příklad 3. Která x splňují nerovnost $4x^2 - 12x + 9 > 0$?

Řešení:

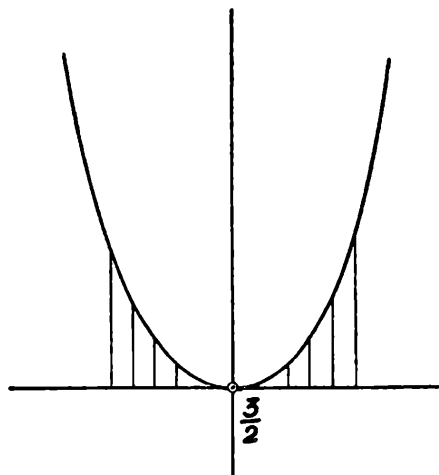
$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2}.$$

Dané nerovnosti vyhovují všechna $x \neq \frac{3}{2}$ (obr. 8).



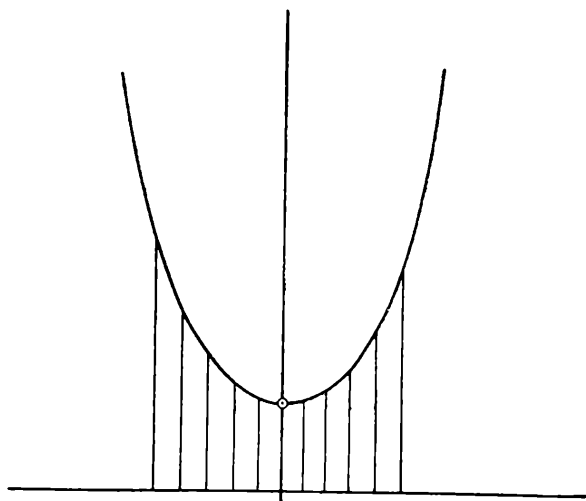
Obr. 7



Obr. 8

Příklad 4. Řešte nerovnost $3x^2 - 2x + 16 > 0$.

Na první pohled je zřejmé, že diskriminant příslušné rovnice je $D = 4 - 12 \cdot 16 < 0$. Graf neprotíná osu x , a jelikož je $3 > 0$, je parabola otevřená nahoru, a proto je nerovnost splněna pro všechna x (obr. 9).



Obr. 9

Příklad 5. Má-li být $3x^2 - 2x + 16 < 0$, pak tato nerovnost není splněna pro žádné x .

Jestliže si čtenář vyřeší ještě několik cvičení, pak jediný „problém“ při řešení kvadratických nerovností budou kořeny kvadratické rovnice. Obrazy kořenů na ose x , graf funkce a konečně vlastní vyřešení provede se již z paměti.

Cvičení: Pro která x jsou splněny nerovnosti:

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$,
2. $x^2 - 18x - 63 < 0$,
3. $-x^2 - x + 2 < 0$,
4. $x^2 + x - 6 > 0$,
5. $2x^2 - x - 3 > 0$,

6. $3x^2 - 2x - 3 < 0$,
7. $2x^2 - 3x - 16 > 0$,
8. $3x^2 - 2x - 10 < 0$,
9. $-x^2 - x + 2 > 0$,
10. $-x^2 + x > 0$.

O analytické geometrii v rovině

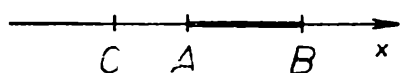
(Pokračování)

Dosud jsme poznali různé tvary rovnice přímky a naučili jsme se analyticky řešit některé polohové úlohy o přímkách. Nyní si všimneme metrických vztahů, týkajících se bodů a přímek, jako např. určení vzdálenosti dvou bodů, vzdálenosti bodu od přímky, výpočtu velikosti úhlu dvou přímek apod. Než k tomu přistoupíme, připomeňme si tyto dvě věci, které v dalším budeme potřebovat:

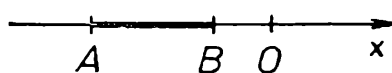
1. $|a| = a$, je-li $a \geq 0$;
 $|a| = -a$, je-li $a < 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$, neboť druhou odmocninou z nezáporného čísla rozumíme opět nezáporné číslo. Je tedy např. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ apod.

Základní metrickou úlohou analytické geometrie je *určení vzdálenosti dvou bodů*. Tuto úlohu rozřešíme nejprve pro body, které leží na některé ose souřadnic a teprve potom pro jakékoli dva body.

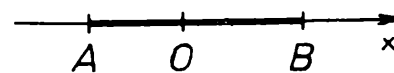
Předpokládejme tedy, že jsou dány dva různé body A, B , které leží na ose x ; pak mají souřadnice $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$. Přitom se omezíme nejprve na ten případ, že žádný z těchto bodů nesplývá s počátkem. Pokud jde o polohu bodů A, B vzhledem k počátku, jsou potom pouze tyto tři možnosti: 1. Oba body A, B leží uvnitř kladné části osy x (obr. 12). 2. Oba body leží uvnitř záporné části osy x (obr. 13). 3. Jeden leží uvnitř kladné části osy x a druhý uvnitř její části záporné (obr. 14).



Obr. 12



Obr. 13



Obr. 14

V prvním případě je vzdálenost AB bodů A, B pro polohu vyznačenou na obr. 12 rovna $OB - OA = x_2 - x_1 > 0$. Vyměníme-li označení bodů A, B , pak bude $AB = OA - OB = x_1 - x_2 > 0$. Oba případy můžeme vyjádřit tímto jediným vzorcem:

$$AB = |x_2 - x_1|. \quad (1)$$

Ve druhém případě je pro polohu bodů A, B , vyznačenou na obr. 13, vzdálenost $AB = OA - OB = |x_1| - |x_2| = -x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1 > 0$. Vyměníme-li označení bodů A, B , bude $AB = OB - OA = |x_2| - |x_1| = -x_2 - (-x_1) = x_1 - x_2 > 0$. Oba případy můžeme opět vyjádřit jediným vzorcem (1).

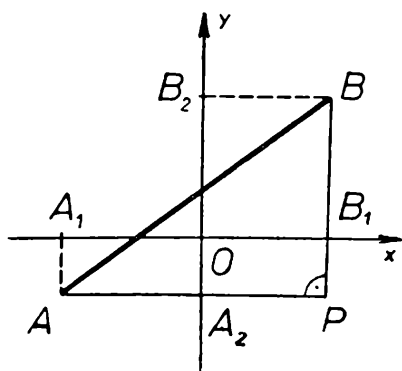
Ve třetím případě je podle obr. 14 vzdálenost $AB = OA + OB = |x_1| + x_2 = x_2 - x_1 > 0$. Vyměníme-li označení bodů A, B , bude $AB = OB + OA = |x_2| + x_1 = x_1 - x_2 > 0$. Oba případy vyjadřuje opět souhrnně vzorec (1).

Bude-li speciálně $A \equiv O$ (bod A splyne s počátkem), bude $x_1 = 0$, čili $x_2 - x_1 = x_2$, takže $|x_2 - x_1| = |x_2|$; zároveň je patrné, že $AB = OB = |x_2|$. Vzorec (1) je tedy správný i v tomto případě. Stejně se přesvědčíme, že platí i pro $B \equiv O$. Konečně je zřejmé, že vzorec (1) platí i pro případ, že body A, B splynou, neboť potom je $x_1 = x_2$, čili $x_2 - x_1 = 0$ a vzdálenost AB je také opravdu rovna nule.

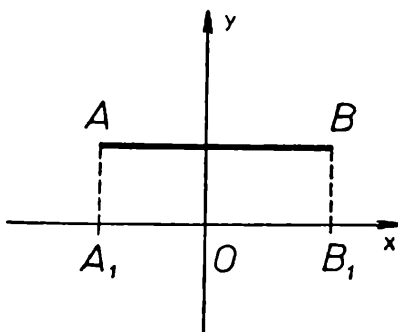
Došli jsme tedy k výsledku, že vzdálenost bodů $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$ ležících na ose x je vždy rovna $|x_2 - x_1|$. Obdobně vzdálenost bodů $A(0; y_1), B(0; y_2)$ ležících na ose y je $|y_2 - y_1|$. Platí tedy tato věta, kterou nazveme *pomocnou větou*:

Vzdálenost bodů $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$ ležících na ose x , je $AB = |x_2 - x_1|$. Vzdálenost bodů $A(0; y_1), B(0; y_2)$ ležících na ose y , je $AB = |y_2 - y_1|$.

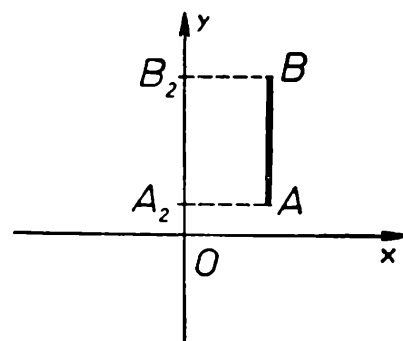
Nyní již snadno odvodíme vzorec pro vzdálenost libovolných dvou bodů $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Pak se snadno přesvědčíme, že tento vzorec zároveň zahrnuje i zvláštní případ, který jsme právě probrali. Stačí si tedy nakonec pro vzdálenost dvou bodů pamatovat vzorec jediný.



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Prozkoumejme nejprve případ, kdy body A, B jsou různé, a kdy přímka AB není rovnoběžná ani s osou x , ani s osou y (obr. 15). Bodem A vedme rovnoběžku s osou x , bodem B rovnoběžku s osou y a sestrojme jejich průsečík P ; potom je $P \neq A, P \neq B$. Pro pravoúhlý trojúhelník APB s přeponou AB platí podle věty Pythagorovy:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \quad (2)$$

Označme A_1, A_2 paty kolmic vedených bodem A na osy x, y a obdobně označme B_1, B_2 paty kolmic vedených bodem B na osy x, y . Neleží-li bod A na ose x (obr. 15), je obrazec APB_1A_1 obdélník, takže je $AP = A_1B_1$; leží-li bod A na ose x , je $A \equiv A_1, P \equiv B_1$, takže je opět $AP = A_1B_1$. Obdobně zjistíme, že je vždy $BP = A_2B_2$. Je tedy vždy

$$AP = A_1B_1, \quad BP = A_2B_2.$$

Podle toho a podle (2) je tedy

$$\overline{AB}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_2B_2}^2. \quad (3)$$

A_1B_1 je však vzdálenost bodů $A_1(x_1; 0), B_1(x_2; 0)$ ležících na ose x a A_2B_2

je vzdálenost bodů $A_2(0; y_1)$, $B_2(0; y_2)$ ležících na ose y . Podle pomocné věty, kterou jsme dříve odvodili, je tedy

$$A_1B_1 = |x_2 - x_1|, \quad A_2B_2 = |y_2 - y_1|. \quad (4)$$

Protože je $|a|^2 = a^2$ (např. $|3|^2 = 3^2$, $|-4|^2 = (-4)^2$ apod.), je podle (3) a (4)

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

čili

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5)$$

Tento vzorec jsme odvodili za předpokladu, že je $A \not\equiv B$ a že přímka AB není rovnoběžná ani s osou x , ani s osou y . Na první pohled však vidíme, že vzorec (5) platí i pro $A \equiv B$ (neboť pak je $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, takže ze vzorce plyne výsledek $AB = 0$, který je také skutečně správný) a snadno se přesvědčíme, že platí i pro případ $A \not\equiv B$, $AB \parallel x$, nebo $AB \parallel y$. V prvním případě (obr. 16) je totiž $y_2 = y_1$, takže na pravé straně vzorce (5) je

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Zároveň je zřejmé (obr. 16), že je $AB = A_1B_1$ a vzdálenost bodů $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ je podle pomocné věty opravdu rovna $|x_2 - x_1|$. Docela stejně zjistíme, že pro $A \not\equiv B$, $AB \parallel y$ (obr. 17) je

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|,$$

což je skutečně vzdálenost $A_2B_2 = AB$. Platí tedy vždy:

Věta 11. Vzdálenost dvou libovolných bodů $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ se vypočte podle vzorce

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Tak např. vzdálenost bodů $A(-3; -2)$, $B(-7; 1)$ je $AB = \sqrt{(-7 + 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Příklad 7. Jsou dány body $A(-3; 3)$, $B(5; -5)$. Určete bod C tak, aby ležel na ose x a aby obrazec ABC byl rovnoramenný trojúhelník se základnou AB .

Řešení: a) Protože vrchol C leží na ose x , má souřadnici $y = 0$; jeho první souřadnici označme x . Je tedy $C(x; 0)$. Podle dané podmínky je $AC = BC$, čili podle věty 11 je

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (0 + 5)^2}$$

$$x^2 + 6x + 18 = x^2 - 10x + 50$$

$$16x = 32$$

$$x = 2.$$

Zkouškou se přesvědčíme, že je $AC = BC = \sqrt{34}$. Hledaný bod je tedy $C(2; 0)$.

b) Je ovšem nutno zjistit, zda body A , B , C jsou skutečně vrcholy trojúhelníka,

tj. zjistit, zda bod C neleží náhodou na přímce AB . Bez narýsování obrázku to můžeme např. provést takto:

Podle věty 11 vypočteme velikost strany AB , tj. vzdálenost bodů A, B ; provedeme-li tento výpočet, dostaneme

$$AB = 8\sqrt{2}.$$

Kromě toho už víme, že je $AC = BC = \sqrt{34}$. Kdyby bod C ležel na přímce AB , pak by musil být středem úsečky AB (neboť $AC = BC$), tj. bylo by

$$AC + BC = AB,$$

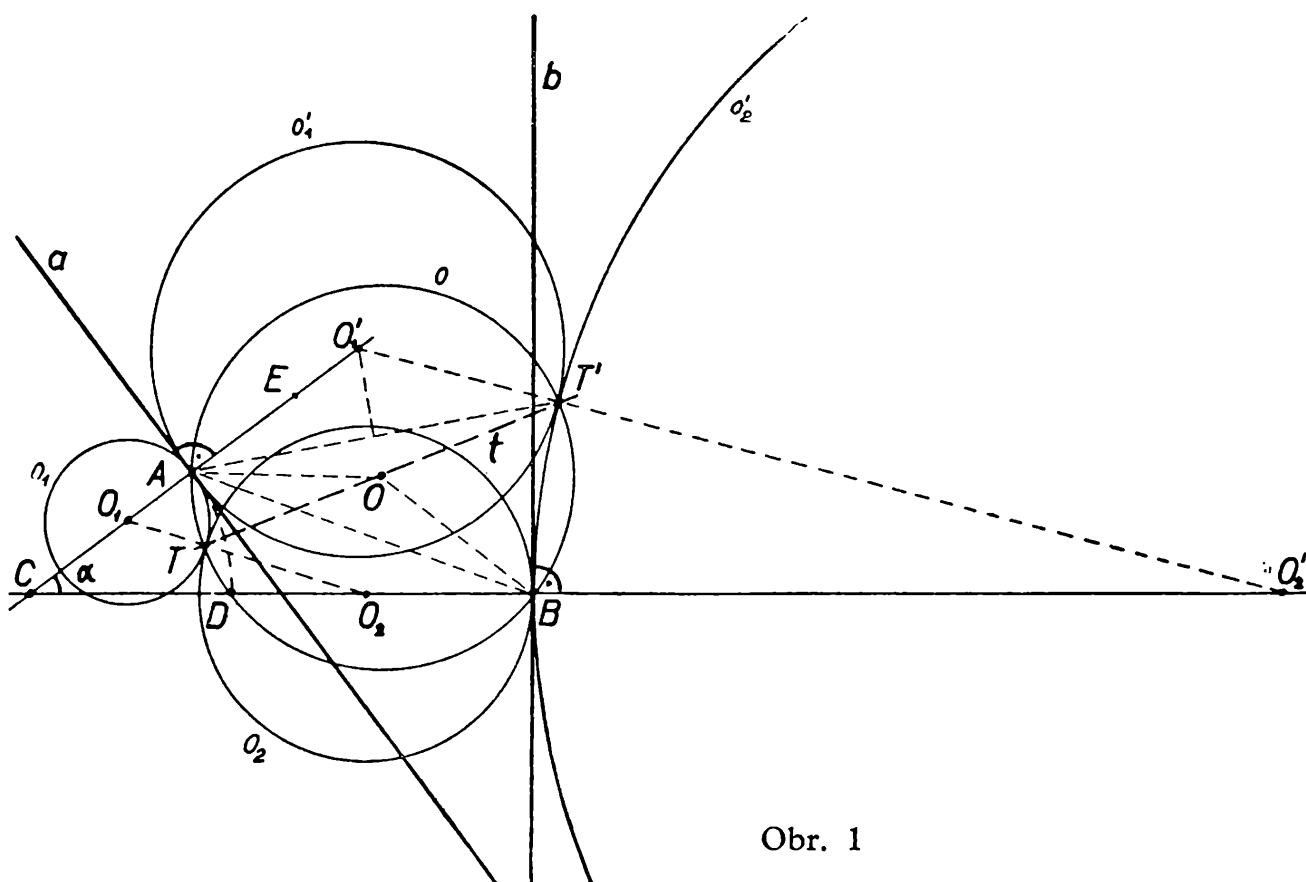
čili $2\sqrt{34} = 8\sqrt{2}$, čili $34 = 32$. Protože však je $34 \neq 32$, není bod C středem úsečky AB a neleží proto na přímce AB . Body A, B, C jsou tedy skutečně vrcholy rovnoramenného trojúhelníka se základnou AB .

(Pokračování)

Inž. dr. Josef Langr, Praha:

Problém dotýkajících se kružnic

V tomto článku naznačíme řešení jedné úlohy, která je zobecněním úlohy řešené v článku Dr. K. Havlíčka: O jedné úloze z geometrie kružnic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 35, str. 152–157, Praha 1957.



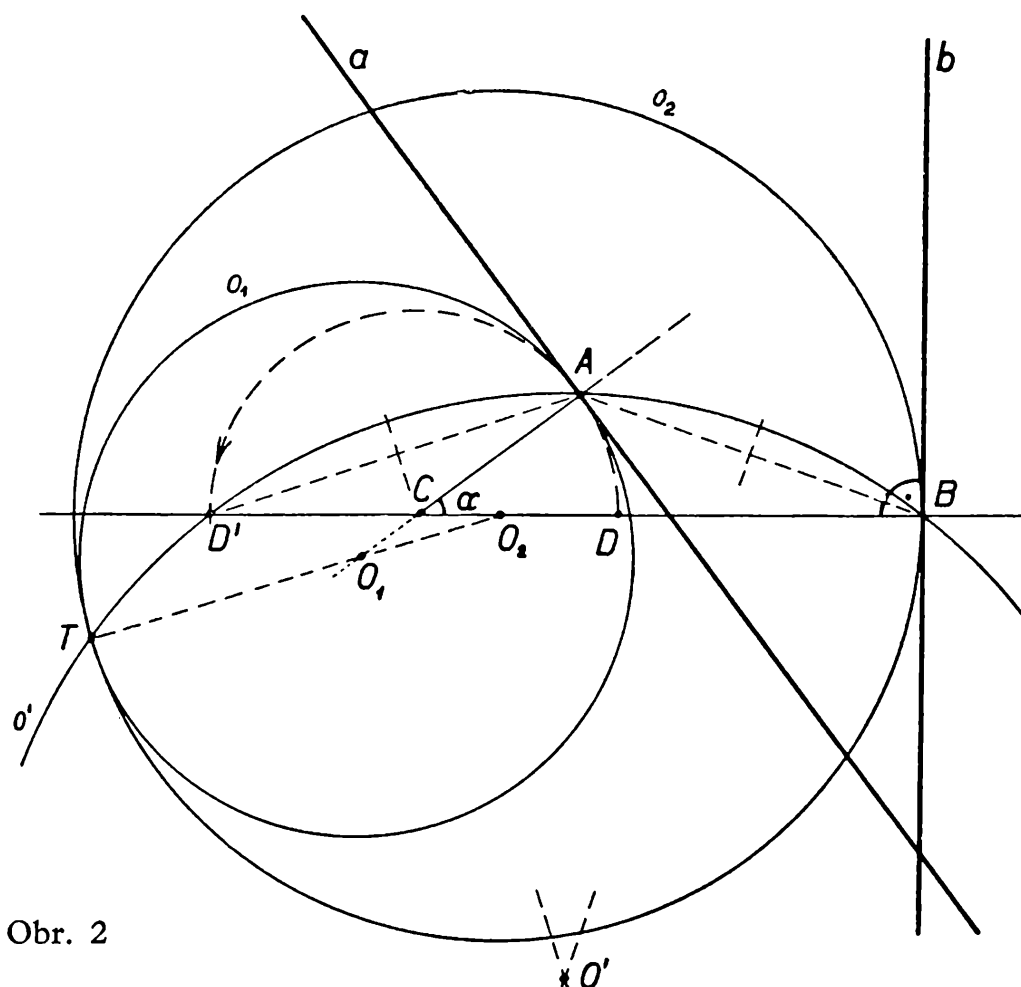
Obr. 1

Řešení zde podané je založeno na zcela jiném principu než ve zmíněném článku. Jde o tuto úlohu:

Sestrojiti dvě vzájemně se dotýkající kružnice o daném poměru poloměrů tak, aby jedna kružnice se dotýkala dané přímky a v jejím daném bodě A a druhá dané přímky b v jejím daném bodě B .

Vedme v bodech A a B kolmice k daným přímkám a průsečík těchto kolmic označme C (obr. 1). Na přímce BC určíme bod D tak, aby bylo $AC = CD$. Kružnice o opsaná trojúhelníku ABD prochází dotykovým bodem T obou hledaných kružnic. Střed této kružnice o označme O .

K důkazu opišme z libovolného bodu O_1 na AC kružnici o_1 poloměrem O_1A . Tato kružnice protne kružnici o mimo bod A ještě v bodě T . Spojnice O_1T vytne na BC bod O_2 , který je středem kružnice o_2 dotýkající se kružnice o_1 v bodě T a přímky b v bodě B ; neboť dokážeme, že je $O_2T = O_2B$. Je-li $\sphericalangle BCA = \alpha$,



Obr. 2

je zřejmě $\sphericalangle BDA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. To je však obvodový úhel v kružnici o a přísluší mu středový úhel $180^\circ + \alpha$ vnější a $\sphericalangle AOB = 180^\circ - \alpha$ vnitřní. Jsou proto ve čtyřúhelníku $ACBO$ protější úhly $\sphericalangle AOB$ a $\sphericalangle ACB$ výplňkové, a tedy i úhly $\sphericalangle OAC$ a $\sphericalangle OBC$ jsou výplňkové. Ze souměrnosti čtyřúhelníka (deltoidu) OAO_1T je zřejmé, že $\sphericalangle O_1TO = \sphericalangle O_1AO$ a proto také je $\sphericalangle O_2TO = \sphericalangle OAE$, kde E je libovolný bod na prodloužené straně CA za bod A . Protože úhly $\sphericalangle OAC$ a $\sphericalangle OBC$ jsou výplňkové, jak již víme, je zároveň $\sphericalangle OAE = \sphericalangle OBC$ a tedy $\sphericalangle OTO_2 = \sphericalangle OBO_2$. Proto $TO_2 = BO_2$ a je tudíž bod O_2 skutečně středem kružnice, která se dotýká přímky b v bodě B a kružnice o_1 v bodě T .

Poměr poloměrů hledaných kružnic je $O_1T : O_2T = \lambda = O_1A : O_2B$. Posunují-li se středy O_1, O_2 na přímkách AC a BC tak, že tento poměr zůstává nezměněn, pohybuje se bod T , který dělí úsečku O_1O_2 také v tomtéž stálém poměru λ , po přímce t . Důkaz je snadný a ponechávám jej čtenáři. Přímku t sestrojíme například na základě toho, že určíme její dva libovolné body. Přímka t , obsahující dotykový bod kružnic o_1 a o_2 , protne kružnici o v bodech T a T' , které nám dávají řešení, neboť osa spojnice TA protne AC ve středu O_1 kružnice o_1 a poloměru O_1A . Přímka O_1T protne pak BC v bodě O_2 , středu to druhé hledané kružnice o_2 o poloměru $O_2T = O_2B$. Druhý průsečík T' dá podobně druhý pár hledaných kružnic.

V obr. 1 byl určen bod D nanesením délky CA napravo od bodu C . V obr. 2 bylo naneseno CA nalevo od bodu C a získán tak bod D' . Kružnice o' opsaná trojúhelníku $D'AB$ o středu O' má obdobné vlastnosti jako kružnice o z obr. 1. Zvolíme-li na AC střed O_1 , a opíšeme-li z něho kružnici o_1 poloměrem O_1A , protne tato kružnice kružnici o' v bodě T , spojnice TO_1 seče BC v bodě O_2 , který je středem kružnice, jež se dotýká kružnice o_1 v bodě T a přímky b v bodě B .

Podobně při určování přímky t lze nanášet poloměry O_1A a O_2B na příslušné přímky AC a BC vždy dvěma různými směry. Všechna řešení dostaneme po vyčerpání všech těchto možných případů, z nichž každý řešíme způsobem podaným zde pro jeden z těchto případů. Podrobnou diskusi v tomto směru ponechávám čtenáři.

J a n V o r á č e k, VPŠ, Olomouc; T o m á š J a n č a r, SPN, Praha:

O největších hodnotách některých funkcí

1. Jsou-li dána dvě nezáporná čísla a_1, a_2 , nazýváme číslo

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

jejich aritmetickým průměrem a číslo

$$g = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

jejich geometrickým průměrem.

Z nerovnosti

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0$$

plyne úpravou

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} \geq a_1a_2,$$

takže po odmocnění (obě strany nerovnosti jsou nezáporné)

$$g \leq a. \quad (1)$$

Z důkazu této nerovnosti je vidět, že rovnost nastane právě v případě $a_1 = a_2$. Aritmetický průměr n nezáporných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ definujeme vztahem

$$a = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (2')$$

a jejich geometrický průměr vztahem

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad (2'')$$

Snadno vidíme, že z této definice plyne původně uvažovaný případ pro $n = 2$. Dokážeme nyní tuto větu:

V ě t a: *Nerovnost (1) platí i v případě, že a, g jsou definovány vztahy (2') a (2''). Rovnost nastane právě když je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.*

D ů k a z: Lehce se přesvědčíme, že pro

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n \quad (3)$$

platí v dokazovaném vztahu rovnost. Stačí tedy dokázat toto: Neplatí-li pro n nezáporných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ vztahy (3), platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} < \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

čili (je $g \geq 0$)

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n < \left[\frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \right]^n \quad (4)$$

Tato nerovnost je zřejmá, je-li některé z uvažovaných čísel rovno nule. Proto budeme v dalším předpokládati

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0.$$

Důkaz provedeme metodou matematické indukce na základě této pomocné nerovnosti: Je-li $a_1 < a < a_2$, je $a_1 a_2 < a(a_2 + a_1 - a)$. Platnost uvedeného vztahu snadno zjistíme, připomeneme-li si vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice. Je totiž

$$a(a_2 + a_1 - a) - a_1 a_2 = -a^2 + (a_1 + a_2)a - a_1 a_2 = -(a - a_1)(a - a_2) > 0.$$

Nerovnost (4) jsme dokázali pro dvě čísla. Předpokládejme nyní, že platí pro $n - 1$ čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Nechť a má stejný význam jako v (2'), takže platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = na. \quad (5)$$

Protože pro n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ neplatí (3), musí být aspoň jedno z nich $a_k > a$ a aspoň jedno z nich $a_p < a$. Kdyby totiž platilo např.: $a_1 \leq a, a_2 \leq a, \dots, a_n \leq a$, nemohlo by platit (5), neboť neplatí (3). Analogicky pro $a \leq a_1, a \leq a_2, \dots, a \leq a_n$. Protože označení čísel indexy můžeme provést libovolně, lze položit $a_p = a_1, a_k = a_2$. Tj. neplatí-li tyto vztahy, změníme očíslování daných čísel tak, aby platily, což zřejmě na podstatě věci nic nemění. Podle pomocné nerovnosti nyní platí

$$a_1 a_2 < a(a_2 + a_1 - a)$$

a označíme-li kladné číslo $a_2 + a_1 - a = b$, také

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_n < ab a_3 \dots a_n . \quad (6)$$

Pro $n - 1$ čísel $b, a_3, \dots, a_n$ platí nerovnost

$$b \cdot a_3 \dots a_n < \left[\frac{1}{n-1} (b + a_3 + \dots + a_n) \right]^{n-1} \quad (7)$$

podle výše učiněného předpokladu. Dále však je

$$b + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - a = (n-1)a$$

podle (5), takže ze (7) plyne

$$b a_3 \dots a_n < a^{n-1}$$

a z toho podle (6) také dokazovaná nerovnost (4).

2. Nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dá se použít k výpočtu maximálních hodnot mnoha funkcí. Je-li dáno n přirozených čísel $p_1, p_2, \dots, p_n$, můžeme právě dokázané nerovnosti použít na $p_1 + p_2 + \dots + p_n = q$ čísel

$$\underbrace{\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_1}{p_1}}_{p_1\text{-krát}}; \underbrace{\frac{x_2}{p_2}, \frac{x_2}{p_2}, \dots, \frac{x_2}{p_2}}_{p_2\text{-krát}}; \dots; \underbrace{\frac{x_n}{p_n}, \frac{x_n}{p_n}, \dots, \frac{x_n}{p_n}}_{p_n\text{-krát}},$$

kde $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_n \geq 0$. Dostáváme tak

$$\sqrt[q]{\left(\frac{x_1}{p_1}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{x_n}{p_n}\right)^{p_n}} \leq \frac{p_1 \frac{x_1}{p_1} + \dots + p_n \frac{x_n}{p_n}}{q}, \quad (8)$$

neboli

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \leq \frac{p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n}}{q^q} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^q. \quad (9)$$

Z této nerovnosti je patrné, že je-li předepsána hodnota součtu $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, nabývá součin na levé straně (9) podle věty z odstavce 1. maximální hodnoty pro

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \dots = \frac{x_n}{p_n}. \quad (10)$$

Právě odvozený výsledek můžeme snadno zobecnit i na případ, kdy čísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou kladná čísla racionální; v tomto případě označme:

$$p_1 = \frac{r_1}{s_1}, p_2 = \frac{r_2}{s_2}, \dots, p_n = \frac{r_n}{s_n}.$$

Nejmenší společný násobek čísel $s_1, s_2, \dots, s_n$ buď s a necht' dále platí

$$s = s_1 d_1 = s_2 d_2 = \dots = s_n d_n.$$

Potom lze psát podle pravidel pro počítání s exponentem racionálním:

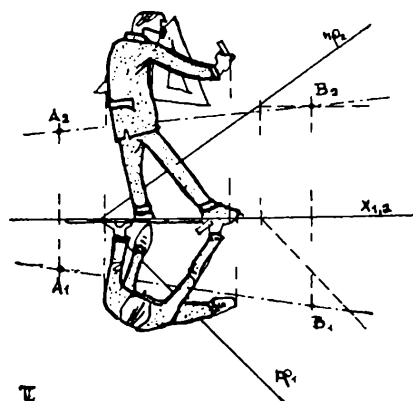
$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} = \sqrt[s]{x_1^{r_1 d_1} \cdot x_2^{r_2 d_2} \dots x_n^{r_n d_n}}.$$

Ve výrazu pod odmocninou jsou přirozené mocniny čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ a je-li tedy $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, nabývá součin maximální hodnoty podle první části tohoto odstavce pro

$$\frac{x_1}{r_1 d_1} = \frac{x_2}{r_2 d_2} = \dots = \frac{x_n}{r_n d_n}. \quad (11)$$

Platnost těchto vztahů je zřejmě ekvivalentní s platností vztahů, které obdržíme, vynásobíme-li všechny rovnosti (11) číslem s . Tím však dostaneme právě (10).

(Pokračování)



Deskriptivní geometrie a rýsování

Josef Filip, SVŠT, Bratislava:

Jedno z priestorových riešení Apolloniovej úlohy

Úloha známa pod menom Apolloniova znie: *V rovine sú dané tri kružnice a, b, c a máme zostrojiť kružnicu l , ktorá sa všetkých troch daných kružníc dotýka.*

Táto úloha bola riešená najrozmanitejšími spôsobmi. V tomto článku chceme podať ukážku, ako možno úlohu riešiť priestorovou interpretáciou, tj. tak, že daným útvarom v rovine - v našom prípade kružniciam a, b, c - priradíme vhodné priestorové útvary.

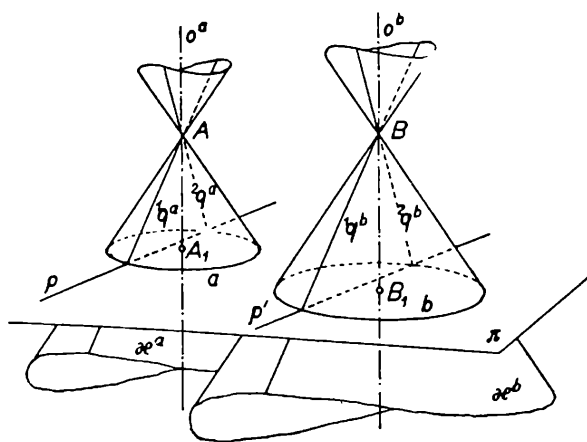
Prv ako prikrôčime k riešeniu vlastnej úlohy, vykonáme niekoľko predbežných úvah a z nich vyplývajúcich konštrukcií.

Nech je v rovine π daná kružnica a , ktorá má stred A_1 a polomer r . A nech je táto kružnica určujúcou kružnicou rotačnej kužeľovej plochy κ^a (obr. 1). Táto plocha má vrchol A na kolmici o^a vztýčenej na rovinu π v bode A^1 a má od bodu A_1 istú vzdialenosť, ktorá je zároveň vzdialenosťou bodu A od roviny π . Od vzdialenosti AA_1 závisí odchýlka α tvoriacich priamok plochy κ^{a1} od rovin π ,

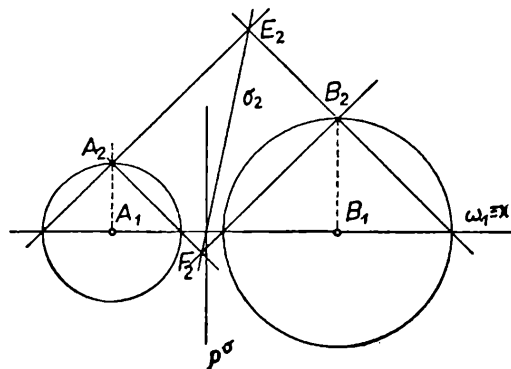
¹⁾ Tj. priamok, z ktorých každá prechádza vrcholom A a pretína kružnicu a .

lebo $\operatorname{tg} \alpha = AA_1 : r$. Keď zvolíme vzdialenosť $AA_1 = r$, bude odchýlka $\alpha = 45^\circ$ a každé dve tvoriace priamky plochy κ^a , ležiace s priamkou o^a v tej istej rovine, budú vzájomne kolmé. Avšak body, ktoré majú od bodu A_1 , resp. od roviny π , vzdialenosť r , sú dva $A, \bar{A}$. Každý leží v inom polpriestore oddelenom rovinou π a sú súmerne združené podľa roviny π . Jeden z nich A je vrcholom plochy κ^a a druhý $\bar{A}$ je vrcholom plochy $\bar{\kappa}^a$. Obe kužeľové plochy $\kappa^a, \bar{\kappa}^a$ sú symetrické podľa roviny π . Bod A_1 môžeme považovať za pravoúhlý priemet bodu A , resp. bodu $\bar{A}$, do roviny π .

Jednu z týchto plôch $\kappa^a, \bar{\kappa}^a$ priradíme kružnici a a zavedieme označenie, ktoré sme práve použili. Kružnici b ležiacej v rovine π priradíme rotačnú kužeľovú plochu κ^b (resp. plochu $\bar{\kappa}^b$), ktorá má vrchol B (resp. $\bar{B}$) na kolmici o^b vztýčenej na rovinu π v strede B_1 kružnice b a vzdialený od roviny π o polomer kružnice b .



Obr. 1



Obr. 2

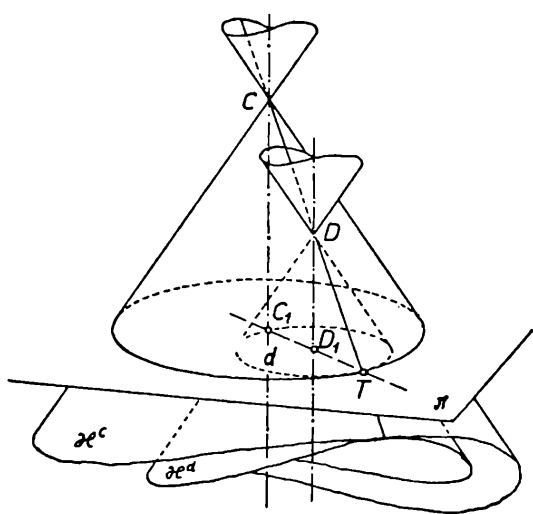
Všimnime si niektoré vzťahy medzi plochami κ^a, κ^b . Budeme hovoriť o dvojici κ^a, κ^b , ale čo dokážeme o tejto dvojici, bude zrejme platiť o každej dvojici rotačných kužeľových plôch, ktorých osi sú vzájomne rovnobežné a ktorých tvoriace priamky majú od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$. Každá tvoriaca priamka q^a plochy κ^a je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou q^b plochy κ^b . Každé dve tvoriace priamky $q^a \parallel q^b$, z ktorých jedna q^a náleží jednej a druhá q^b druhej kužeľovej ploche, majú spoločný nevlastný bod P_∞ (viď článok: K. Havlíček, *Nevlastné elementy v geometrii* v č. 1, roč. 35 - 1957 tohoto časopisu). Tak priamky ${}^1q^a \parallel {}^1q^b$ majú spoločný nevlastný bod ${}^1P_\infty$, priamky ${}^2q^a \parallel {}^2q^b$ bod ${}^2P_\infty$ atď. Všetky tieto nevlastné body ${}^1P_\infty, {}^2P_\infty, \dots$ ležia v nevlastnej rovine a vytvárajú v nej istú čiaru, ktorú nazývame nevlastnou kužeľosečkou k_∞ .

Možno dokázať, že okrem tejto nevlastnej kužeľosečky k_∞ majú plochy κ^a, κ^b spoločnú ešte vlastnú kužeľosečku h . Prieniková čiara každých dvoch plôch κ^a, κ^b sa teda skladá z dvoch častí: nevlastnej kužeľosečky k_∞ a vlastnej kužeľosečky h . V ďalšom budeme hovoriť len o vlastnej časti h prienikovej krivky.

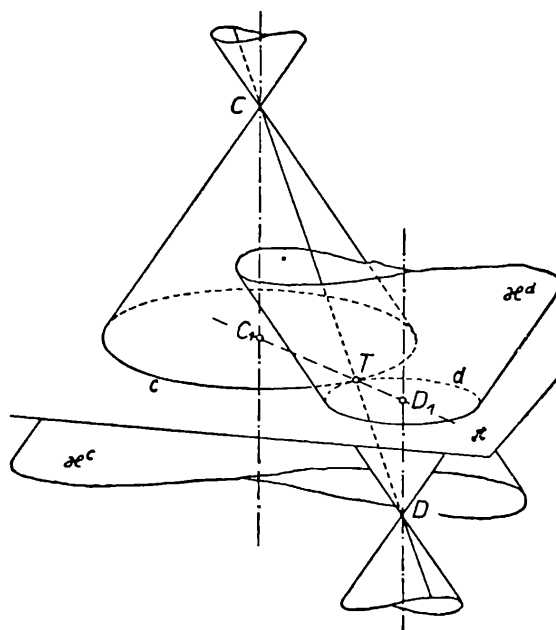
Každé dve plochy κ^a, κ^b , ktoré nemajú spoločnú os, majú jednu rovinu symetrie ω . Táto rovina obsahuje osi $o^a \parallel o^b$ oboch plôch a je zároveň rovinou symetrie prienikovej krivky h , ktorá teda leží v rovine $\sigma \perp \omega$ (obr. 2). Keď rovinu ω ,

ktorej priemet je priamka $\omega_1 \equiv A_1B_1$ zvolíme za novú priemetňu (druhú) a združíme ju s priemetňou π (ktorá je zároveň aj nákresňou) podľa základnice $x \equiv \omega_1$, môžeme jednoducho zostrojiť druhé priemety kužeľových plôch κ^a, κ^b i druhý priemet σ_2 roviny σ , ktorá obsahuje obom plochám κ^a, κ^b spoločnú kužeľosečku h . Obrisy druhých priemetov plôch κ^a, κ^b tvoria priamky prechádzajúce bodmi A_2, B_2 odchýlené od základnice o uhol $\alpha = 45^\circ$. Priemet σ_2 je priamka idúca priemetmi E_2, F_2 priesečníkov obrysových priamok. Jej stopa na nákresni π je priamka $p^e \perp x$ vedená priesečníkom $x \cdot \sigma_2$.

Pouvažujme ešte o tom, aké plochy κ^c, κ^d budú priradené kružniciam c, d , ktoré sa vzájomne dotýkajú (obr. 3a, b). Keď sa kružnice c, d dotýkajú v bode T , či znútra alebo zvonku, majú plochy κ^c, κ^d spoločnú tvoriacu priamku $CT \equiv DT$ a podľa nej sa obe plochy vzájomne dotýkajú. Rozdielny dotyk kružníc c, d (v prípadoch a, b) sa prejaví jedine v tom, že v prípade a) sú vrcholy C, D oboch plôch



Obr. 3a



Obr. 3b

κ^a, κ^b v tom istom polpriestore určenom rovinou π , teda body C, D nie sú oddelené bodom T a v prípade b) sú vrcholy C, D v opačných polpriestoroch a teda body C, D sú oddelené bodom T .

Obrátene, kužeľové plochy κ^c, κ^d , ktoré sa vzájomne dotýkajú pozdĺž tvoriacej priamky, pretínajú rovinu π , ktorá je kolmá na ich osi o^c, o^d a neprechádza ani jedným z bodov C, D , v kružniciach c, d . Tieto kružnice sa dotýkajú navzájom v bode T , ktorý je stopníkom ich spoločnej dotykovej tvoriacej priamky. Ak vrcholy oboch plôch κ^c, κ^d ležia vnútri toho istého polpriestoru oddeleného rovinou π , dotýkajú sa kružnice c, d znútra. Ak je vrchol každej plochy vnútri iného z oboch polpriestorov oddelených rovinou π , dotýkajú sa kružnice c, d zvonku.

Ujasníme si ešte, kedy nastane dotyk plôch κ^c, κ^d pozdĺž jednej tvoriacej priamky. K tomu je potrebné, aby bola splnená jediná podmienka: aby vrchol jednej plochy ležal na druhej ploche a nesplýval s jej vrcholom - teda aby vrchol D ležal na ploche κ^c , resp. vrchol $C \neq D$ na ploche κ^d . Dotyková priamka je potom

spojnica oboch vrcholov. Odôvodnenie je jednoduché. Nech je daná rotačná kužeľová plocha κ^c . Táto plocha pretína rovinu π v kružnici, ktorá má stred C_1 a polomer rovný vzdialenosti CC_1 . Ďalej nech je daná plocha κ^d tak, aby jej vrchol D ležal na ploche κ^c , ale nesplýval pritom s vrcholom C alebo s niektorým bodom kružnice c . Plocha κ^d pretína rovinu π v kružnici d , ktorá má stred D_1 a polomer rovný vzdialenosti $DD_1 \neq CC_1$. Priamka CD má od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$, je teda spoločnou tvoriacou priamkou a jej stopník T je spoločným bodom kružníc c, d . Bod T je zrejme priesečník priamok CD, C_1D_1 . Pretože priamka C_1D_1T ako stredná kružníc c, d je ich osou súmernosti, je bod T jediným spoločným bodom kružníc c, d . Keby totiž kružnice c, d mali okrem bodu T ešte druhý spoločný bod Q , museli by mať spoločný aj bod Q' symetrický s bodom Q podľa priamky C_1D_1 , teda vcelku tri body a to nie je možné. V dôsledku toho majú plochy κ^c, κ^d spoločnú jedinou priamku CDT (pravda, okrem nevlastnej kužeľosečky k_∞) a pozdĺž nej sa vzájomne dotýkajú.

Predstavme si teraz zase plochy κ^a, κ^b , ktoré sa nedotýkajú (asi tak, ako je znázornené na obr. 1) a ktoré sa teda pretínajú v istej krivke h . Keď zvolíme bod L na krivke h tak, aby neležal na rovine π a priradíme mu kužeľovú plochu κ^l , bude sa táto plocha dotýkať oboch kužeľových plôch κ^a, κ^b a rovinu π bude pretínať v kružnici l , ktorá sa bude dotýkať oboch kružníc a, b .

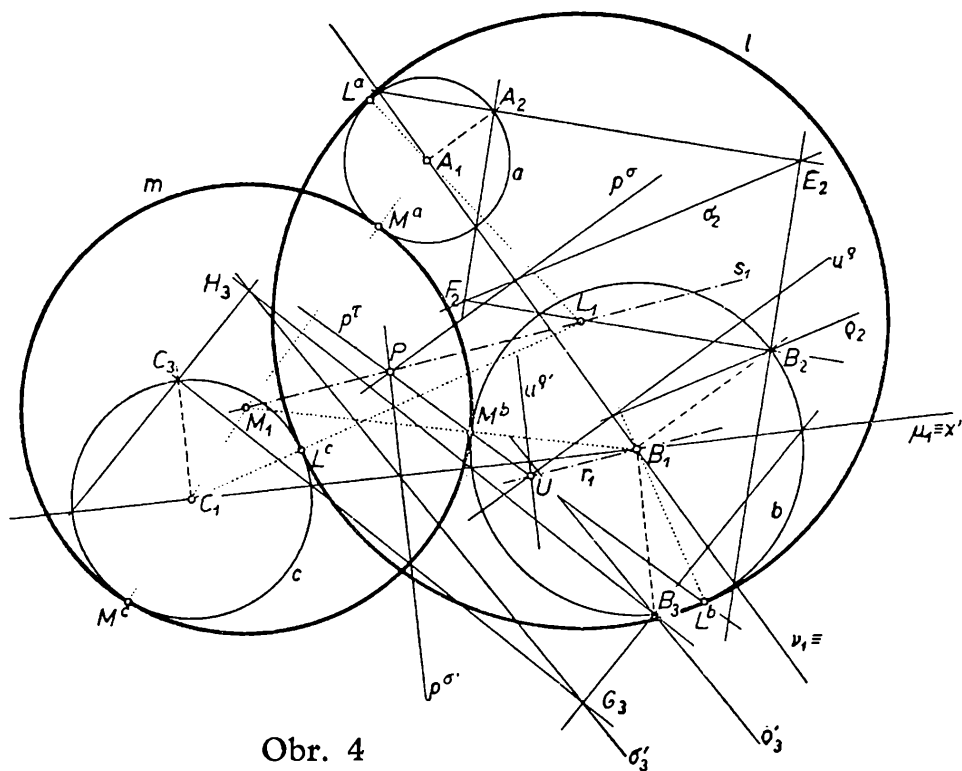
Teraz môžeme prikročiť k riešeniu úlohy, ktorú sme si dali: zostrojiť kružnicu l , ktorá sa dotýka troch daných kružníc a, b, c ležiacich v rovine π .

Kružniciam a, b, c priradíme rotačné kužeľové plochy $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ také, že trebárs plochy κ^a, κ^b majú vrcholy A, B v jednom polpriestore oddelenom rovinou π a plocha κ^c má vrchol C v polpriestore k tomuto opačnom (obr. 4). Zostrojíme kužeľovú plochu κ^l , ktorá sa všetkých troch plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ dotýka. Podľa výsledku našich úvah, ktoré sme práve vykonali, musí mať plocha κ^l vrchol L na všetkých troch plochách $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$. Spoločný bod L zostrojíme týmto spôsobom: Najprv ustanovíme spoločné body jednej dvojice plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$, trebárs dvojice κ^a, κ^b . Spoločné body plôch κ^a, κ^b vytvárajú kužeľosečku h , ktorá leží v istej rovine σ . Potom zostrojíme spoločné body inej dvojice, napr. dvojice κ^b, κ^c . Spoločné body plôch κ^b, κ^c vytvárajú kužeľosečku h' , ktorá leží v rovine σ . Spoločné body všetkých troch plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ ležia na priamke $s \equiv \sigma \cdot \sigma'$ spoločnej rovinám σ, σ' a to tam, kde priamka s pretína niektorú z plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$. Ak také priesečníky L, M priamky s napr. s plochou κ^b existujú, existujú dve kužeľové plochy κ^l, κ^m , ktoré sa dotýkajú všetkých plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ a rovinu π pretínajú v kružniciach l, m , ktoré sa dotýkajú všetkých troch kružníc a, b, c . Stredy týchto kružníc sú pravouhlé priemety L_1, M_1 bodov L, M do roviny π .

K o n š t r u k c i a: Úlohu vyriešime v pravouhlom priemete do roviny π , na ktorej ležia kružnice a, b, c dané svojimi stredmi A_1, B_1, C_1 a polomeri. Stredmi A_1, B_1 položíme rovinu $\nu \perp \pi$, ktorej priemet je priamka $\nu_1 \equiv A_1B_1$. Na rovine ν , ktorú združíme s nákresňou π podľa základnice $x \equiv \nu_1$, zobrazíme kužeľové plochy κ^a, κ^b podobne ako na obr. 2. Pretože vrcholy A, B plôch κ^a, κ^b ležia v tom istom polpriestore určenom rovinou π , ležia ich priemety A_2, B_2 v tej istej polrovine určenej priamkou x . Obrisy druhých priemetov plôch κ^a, κ^b tvoria priamky vedené bodmi A_2, B_2 a odchýlené od základnice x o uhol $\alpha = 45^\circ$.

Priesečníky E_2, F_2 týchto obrysových priamok (rôzne od bodov A_2, B_2) sú priemetmi dvoch bodov spoločných obom plochám κ^a, κ^b a ich spojnica σ_2 je druhý priemet roviny σ , ktorá obsahuje kužeľosečku h spoločnú plochám κ^a, κ^b . Z dôvodov, ktoré vysvitnú z ďalšieho, vedieme vrcholom B rovinu $\rho \parallel \sigma$, ktorej priemet $\rho_2 \parallel \sigma_2$ prechádza bodom B_2 . Na nákresni π zostrojíme stopy p^σ, u^e rovín σ, ρ . Sú to kolmice na základnicu x vedené priesečníkmi $x \cdot \sigma_2, x \cdot \rho_2$.

Ďalej vedieme stredmi B_1, C_1 priemetňu (tretiu) $\mu \perp \pi$ a združíme ju s nákrešou π podľa základnice $x' \equiv \mu_1 \equiv B_1C_1$. Zostrojíme na nej priemety plôch κ^b, κ^c . Priemety B_2, C_2 ich vrcholov sú oddelené základnicou x' , lebo vrcholy B, C sú oddelené rovinou π . Priemety obrysových priamok sa pretínajú v priemetoch G_3, H_3 dvoch bodov spoločných plochám κ^b, κ^c a ich spojnica σ'_3 je priemet roviny σ' , ktorá obsahuje kužeľosečku h' spoločnú plochám κ^b, κ^c . Vrcholom B vedíme zase rovinu $\rho' \parallel \sigma'$ a zostrojíme stopy $p^{\sigma'}, u^{e'}$ rovín σ', ρ' . Označíme $P \equiv p^\sigma \cdot p^{\sigma'}, U \equiv u^e \cdot u^{e'}$. Priesečnica $s \equiv \sigma \cdot \sigma'$ prechádza bodom P a je rovnobežná s priesečnicou $r \equiv \rho \cdot \rho' \equiv BU$. Jej priemet s_1 prechádza bodom P a je rovnobežný s priemetom $r_1 \equiv B_1U$.



Obr. 4

Zbýva zostrojiť priesečníky L, M priamky s s jednou z plôch $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$. V našom prípade bude výhodné zostrojavať priesečníky s plochou κ^b . Priamkou s a vrcholom B položíme rovinu τ a zostrojíme jej stopu p^τ na rovine π . Priamka p^τ ide zrejme stopníkom P priamky s a stopníkom U priamky r a pretína kružnicu b v bodoch L^b, M^b . Potom rovina τ pretína plochu κ^b v priamkach BL^b, BM^b . Ich priemety B_1L^b, B_1M^b pretínajú priemet s_1 v bodoch L_1, M_1 , ktoré sú stredmi dvoch kružníc dotýkajúcich sa všetkých troch daných kružníc.

Dostali sme dve riešenia danej úlohy, ale ľahko nahliadneme, že úloha má riešení viacej. Ďalšie riešenia dostaneme, keď k niektorej z daných kružníc pri-

radíme namiesto plochy κ plochu $\bar{\kappa}$ symetrickú s plochou κ podľa roviny π . Keby sme všetky plochy $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ nahradili plochami symetrickými $\bar{\kappa}^a, \bar{\kappa}^b, \bar{\kappa}^c$, nezískali by sme nové riešenie. K novým výsledkom vedú zo všetkých možných ôsmich kombinácií len tieto: $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$; $\bar{\kappa}^a, \kappa^b, \kappa^c$; $\kappa^a, \bar{\kappa}^b, \kappa^c$; $\kappa^a, \kappa^b, \bar{\kappa}^c$. Každá poskytne dve riešenia, takže úloha má osem riešení; na obr. 4 sú narysované iba dve.

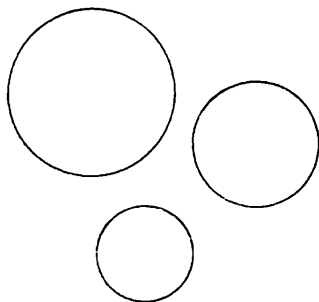
P o z n á m k y: 1. Všetkých osem riešení existuje len v prípadoch naznačených na obr. 5abc. V ostatných prípadoch je počet riešení menší, prípadne neexistuje riešenie vôbec.

2. Kružniciam roviny π sme priradzovali rotačné kužeľové plochy, ktorých tvoriace priamky mali od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$. Je zrejmé, že namiesto týchto plôch sme mohli použiť aj rotačné kužeľové plochy s inou odchýlkou tvoriacich priamok. Odchýlku 45° sme volili z praktických dôvodov, aby sme mohli pri konštrukcii rysovať pohodlne, rýchlo a pokiaľ možno presne.

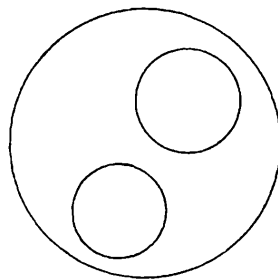
3. Metódou práve opísanou môžeme riešiť Apolloniovu úlohu v každom prípade aj vtedy, keď niektoré planimetrické konštrukcie zlyhávajú, ako napr. keď stredy daných kružníc ležia na tej istej priamke.

Niekedy hovoríme o zvláštnej Apolloniovej úlohe. Zvláštne prípady tejto všeobecnej úlohy nastanú vtedy, keď niektoré alebo všetky dané kružnice nahradíme bodmi alebo priamkami, prípadne niektoré bodmi a niektoré priamkami.

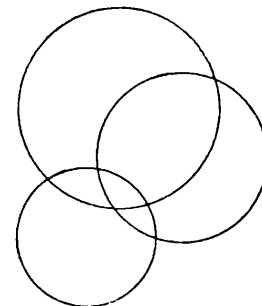
Keď označíme kružnicu písmenom k , bod B , priamku p , môžeme Apolloniovu úlohu, ktorú sme práve riešili, označiť symbolom (kkk) a jej zvláštne prípady symbolmi (kkB) , $(k kp)$, (kBB) , (kpp) , (kBp) , (BBB) , (BBp) , (Bpp) , (ppp) .



Obr. 5a



Obr. 5b



Obr. 5c

Keď bod B ležiaci na rovine π ponímame ako kružnicu s nulovým polomerom, môžeme mu priradiť jedinú rotačnú kužeľovú plochu κ^B , ktorá má vrchol B a tvoriace priamky odchýlené od roviny π o uhol $\alpha = 45^\circ$.

Keď priamku p ležiacu na rovine π ponímame ako kružnicu s nekonečne veľkým polomerom, môžeme jej priradiť niektorú z rovín $\kappa^p, \bar{\kappa}^p$, ktoré obsahujú priamku p a majú od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$.

Potom kružnici k , ktorá prechádza bodom B bude priradená kužeľová plocha κ^k s vrcholom K (resp. kužeľová plocha $\bar{\kappa}^k$ s vrcholom $\bar{K}$) a kužeľová plocha κ^B , ktoré sa vzájomne dotýkajú pozdĺž spoločnej tvoriacej priamky KB (resp. $\bar{K}B$).

Kružnici l , ktorá sa dotýka priamky p v bode B bude priradená kužeľová plocha κ^l s vrcholom L (resp. kužeľová plocha $\bar{\kappa}^l$ s vrcholom $\bar{L}$) a rovina κ^p (resp. $\bar{\kappa}^p$), ktoré sa vzájomne dotýkajú pozdĺž priamky LB (resp. $\bar{L}B$).

V tomto poňatí môžeme riešiť všetky zvláštne Apolloniove úlohy tou istou metódou, akou sme riešili všeobecnú úlohu.

Urobíme rozbor jednej z nich a to úlohy (*kBp*). V rovine π je daná kružnica a stredom A_1 a polomerom, bod B a priamka p . Máme zostrojiť kružnicu l , ktorá prechádza bodom B a dotýka sa priamky p i kružnice a . Predpokladáme, že dané útvary nie sú incidentné. Keby boli incidentné, patrila by úloha medzi tzv. *Pappove úlohy*, ktoré boli riešené v č. 8, roč. 35 tohoto časopisu.

Kružnici a priradíme kužeľovú plochu κ^a , bodu B kužeľovú plochu κ^B a priamke p rovinu κ^p . Ide o zostrojenie kužeľovej plochy κ^l , ktorá sa dotýka oboch kužeľových plôch κ^a , κ^B i roviny κ^p . Jej vrchol L musí ležať na oboch kužeľových plochách κ^a , κ^B i na rovine κ^p , je to teda ich spoločný bod. Bod L leží jednak v rovine σ , ktorá obsahuje kužeľosečku h spoločnú plochám κ^a , κ^B , jednak v rovine κ^p , teda na priesečnici $s \equiv \sigma \cdot \kappa^p$. A pretože musí ležať i na ploche κ^a , je v priesečníku priamky s s plochou κ^a . Také priesečníky (ak existujú) sú dva L , M a ich pravouhlé priemety do roviny π sú stredmi kružníc l , m , ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa priamky p i kružnice a . Keď rovinu κ^p nahradíme rovinou $\bar{\kappa}^p$, dostaneme (ak existujú) ďalšie dve riešenia.

Konstrukciu i diskusiu úlohy ponechávame čitateľovi, práve tak ako riešenie ostatných zvláštnych Apolloniových úloh.

Blížšie poučenie o tomto predmete nájde čitateľ v peknej knižke doc. J. Holubáře, *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, ktorá vyšla v zbierke „Cesta k vědě“ ako zväzok č. 47 (JČMF, Praha 1948). V tejto knižke je uvedený aj zoznam príslušnej odbornej literatúry. V našej literatúre nájde záujemca riešenie Apolloniovej úlohy okrem cit. knižky aj v knižke L. Seifert: *Cyklografie*, Kruh zv. 15, JČMF, Praha 1949.

Inž. arch. Josef Švástal, katedra pozemního stavitelství na FAPS, Praha:

O stavitelském kreslení

(Dokončení)

Po důkladném procvičení předchozích zásad se cvičí rýsování jednoduchého stavebního objektu v půdorysech, řezu a pohledu s konkrétním poukazem na zakreslování stavebních konstrukcí: zdí, otvorů, stropů, schodů, balkónů, říms podle zvyklostí, *Pokynů*⁶⁾ i ČSN. Výšky úrovní se značí v řezu výškovou kótou konstrukce a podlahy každého patra. S kótováním počínáme v přízemí, kde podlaha nebo konstrukce stropu pod podlahou je značena ± 0 . Směrem vzhůru připsujeme značky $+$, směrem dolů $-$. Značka ± 0 jako výchozí pro kótování je také

⁶⁾ „*Pokyny pro grafickou úpravu elaborátů třístupňové technické připravenosti stavebních projektů pozemních staveb*“, vydané Stavoprojektem (státní projektový ústav) v r. 1952, byly pokusem o jednotné vybavení stavebních výkresů, když zmíněná norma ČSN 1104—1933 zastarala.

označena výškou vztaženou k hladině mořské. V půdorysech píšeme výšky podlah do obdélníků, aby nedošlo k záměně s jinou kótou. V řezech kreslíme a popisujeme průběžné kóty vyjádřené v cm tak, abychom určili *konstruktivní výšku* (vzdálenost povrchů konstrukcí stropních dvou pater), *světlou výšku* (vzdálenost mezi podlahou a stropem), tloušťku stropu (tloušťku konstrukce a podlahy), výšku parapetu, okna a *nadpraží*.⁷⁾ Ve stavitelství dosud není kótování tak pevně ustáleno a jednotně prováděno jako např. ve strojnickém kreslení. Je to způsobeno i vývojem stavitelství v poslední době, které rychle přechází na průmyslovou výrobu. Z toho vyplynou i nové požadavky na zobrazování i kótování ve stavitelství.

Zdivo se v půdoryse zakresluje ve skladebných tloušťkách a značí se podle druhu cihel a kvality malty, okna i dveře ve skladebných rozměrech otvorů. Okna se kótují zlomkem, v němž čitatel značí šířku a jmenovatel výšku otvoru a připisuje se do závorky výška parapetu. Dveře se kótují na osu zlomkem: šířka/výška - což značí světlý otvor zárubně⁸⁾ - a zvlášť se kótuje otvor ve zdi na kótě střední zdi, nebo poloha dveří v příčce kótou k ose dveří. Stropy se zakreslují polohou nosných trámů, nejvhodněji u střední zdi, druh a tvar konstrukce se vyjádří sklopeným řezem, který je velmi důležitým pojmem představy, jak zakreslit do půdorysu nosné konstrukce, které jsou nad rovinou řezu. Sklopený řez konstrukce se sklápí směrem vzhůru nebo zprava a je vyznačen jako obrys geometrického tvaru konstrukce (obr. 7 a 8).

Schody se zakreslují hranami *podstupnic*,⁹⁾ *výstupní čarou*¹⁰⁾ s označením počtu a rozměru stupňů (výjimečně se píše výška/šířka). Stupně až po rovinu řezu - protíná rameno asi v šestém stupni - se kreslí plně, zbývající část ramene čárkovaně. Je možno kreslit i spodní rameno v pohledu. Balkóny a římsy se zakreslují podobně jako konstrukce stropní nad rovinou řezu, čárkovaně v půdorysu a sklopeným řezem.

Dosažená vyspělost v chápání hmot a prostorů je rozšiřována v řadě úloh samostatného charakteru: pergola,¹¹⁾ benzinové čerpadlo, železniční skladiště, budova zastávky veřejných dopravních prostředků, i větších objektů např. skupiny obytných domů nebo průmyslového objektu, vždy však tak, že situace, půdorys a řez bývá rýsován, ale prostorové zobrazení ať axonometrií nebo perspektivou, bývá kresleno a pojednáno. Pohled i perspektiva pro lepší pochopení barevnosti objektu

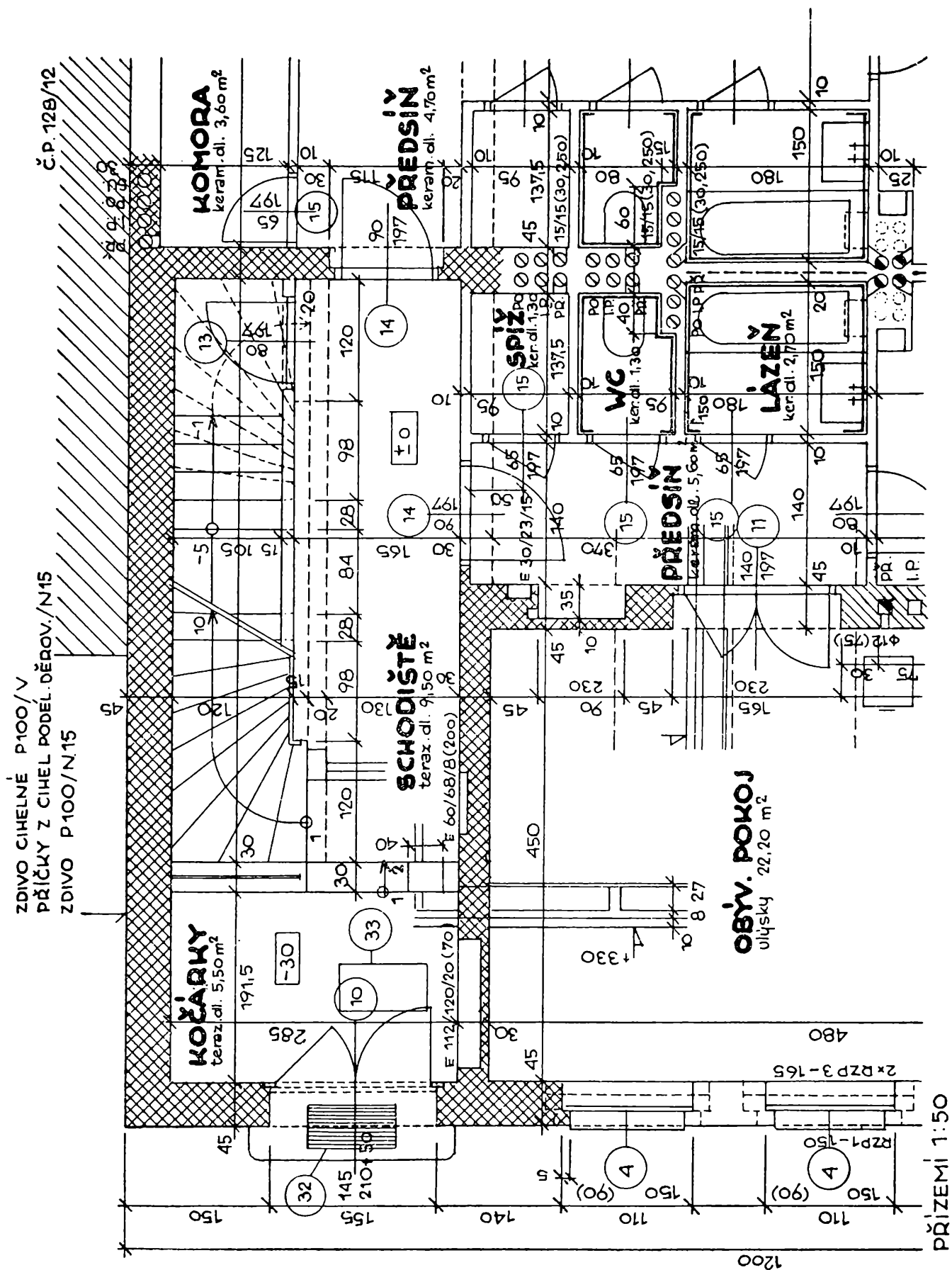
⁷⁾ *Nadpraží* je konstrukce nad oknem, která nese příslušný díl stropu a parapet hořejšího patra.

⁸⁾ *Zárubeň*, dnes obvykle ocelová, rámuje dveřní otvor a nese dveřní křídlo (část dveří, která se otvírá), pro které má těsnící drážku.

⁹⁾ *Schodiště* sestává z jednotlivých stupňů, po jejichž vodorovné ploše chodíme - to je *stupnice*. Svislou plochu stupně nazýváme *podstupnicí*.

¹⁰⁾ *Výstupní čára* určuje směr výstupu po schodišti. Schody točité jsou nejčastěji pravotočivé (chůze po nich se děje ve smyslu pohybu ručiček hodinových), poněvadž na nich lze i u stupňů kosých dodržet chůzi doprava, jak jsme dnes běžně z dopravy zvyklí chodit i jezdit.

¹¹⁾ *Pergola* je loubí obvykle z lehkého materiálu - dřeva - bez střechy, a je obrostlá popínavými rostlinami, jejichž zeleň tvoří stěny i strop.



Obr. 7. Část prováděcího výkresu (výkres v měřítku 1 : 50, podle kterého se na stavbě pracuje) zobrazuje přízemí obytného domu. Nejprve si projdeme dispozici, tj. vzájemnou skladbu místností: do domu vstoupíme dvoukřídlovými dveřmi širokými 145 cm, vysokými 210 cm s nadsvětlikem 50 cm vysokým (okénko nad dveřmi). Před vstupem je jeden

schod se zaoblenými rohy a v něm je zapuštěna rohož na čištění obuvi. Vstupní prostor je dvěma schody označenými čísly 1 a 2 a šipkou a parapetní zídkou se zábradlím, rozdělena na část vstupní a schodiště. Ve vstupní části označené KOČÁRKY je zakresleno zapuštění v podlaze pro rohožku. Je označeno číslem 33 v kroužku a znamená to, že podrobnost této rohožky se najde pod položkou 33 ve výkresu pro *přidruženou stavební výrobu* (PSV), která předmět výrobí a dodá. Pod nápisem KOČÁRKY je uveden druh podlahy (v našem případě: teracové dlaždice) a její množství určené v m². V druhé části tohoto prostoru (označeného SCHODIŠTĚ) je zakresleno pravotočivé *schodiště*⁹⁾ z přízemí do patra, a to hranami stupňů a *výstupní čarou*,¹⁰⁾ vzdálenou od zdi 40 cm, na níž jsou vyneseny rozměry stupňů 16,5/28 cm. V půdoryse ovšem vidíme jen šířky stupňů 28 cm. Stupně jsou kosé a na nejúžším místě aspoň 13 cm široké. Rameno schodů do patra je ukončeno řezem u desátého stupně a pod odříznutým ramenem je vidět schodiště ze sklepa do přízemí, jehož stupně jsou označeny -5 až -1. Stupně jsou očíslovány tak, že z přízemí nahoru jsou značeny + a z přízemí dolů -. Čárkovaně je dokresleno odříznuté rameno schodů do patra, končící posledním dvacátým schodem. Výškový rozdíl mezi oběma díly vstupního prostoru je označen čísly v obdélníčkách. Značka ± 0 určuje základní výšku přízemí, takže -30 značí výškový rozdíl o 30 cm dolů. Tento rozdíl je překonán dvěma schůdky po 15 cm. Ve zdi jsou vyznačeny *niky* (čti nyka) pro elektrické měřiče a pojistky. Údaj u velké niky pro elektroměry znamená: E... el. instalace, číselný údaj 112/120/20 (70) znamená rozměry niky v pořadí: šířka/výška/hloubka a údaj v závorce znamená výšku spodní hrany niky nad podlahou.

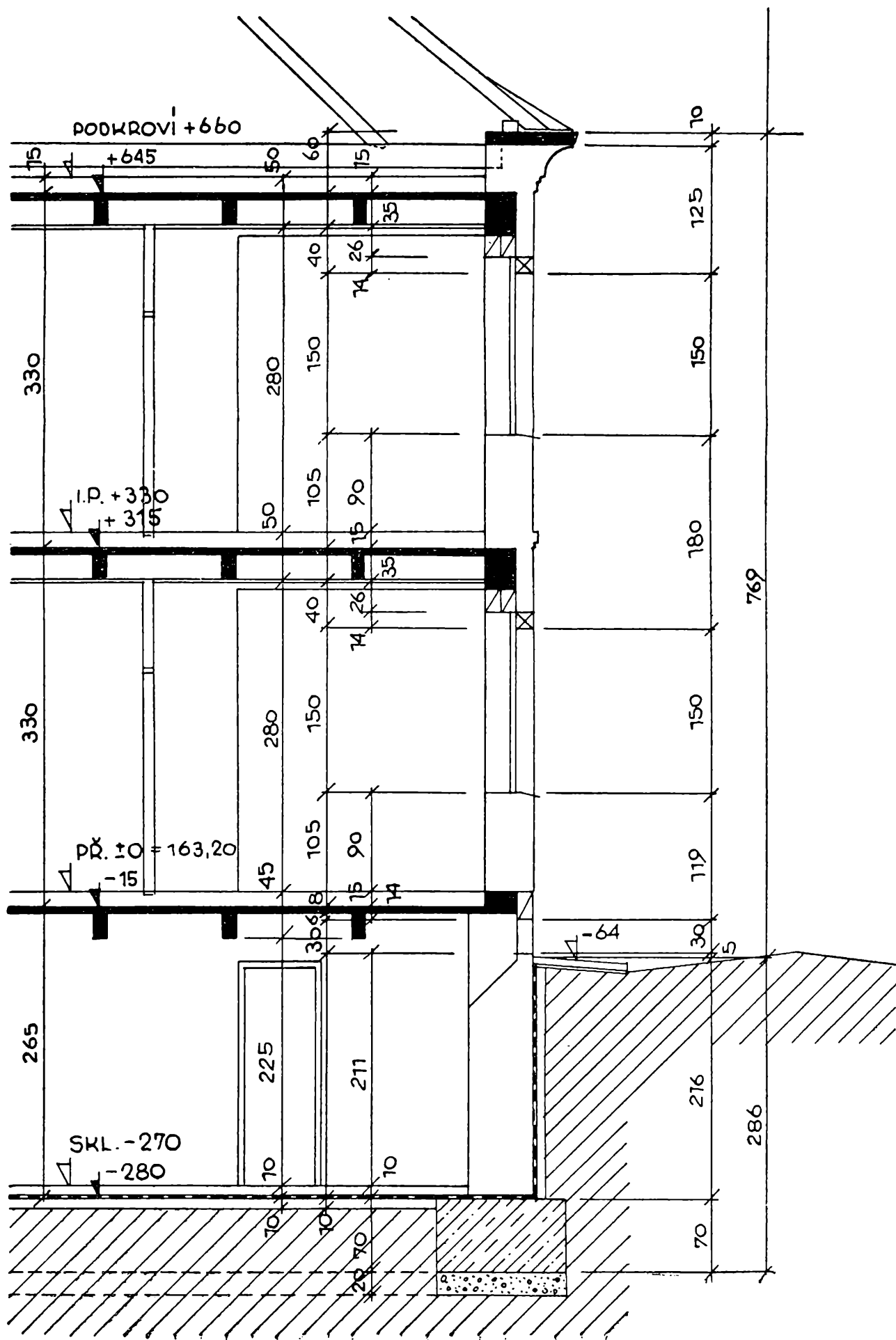
Z prostoru schodiště se vchází do předsíní bytů dveřmi 90 cm širokými a 197 cm vysokými, jednokřídlovými, zakreslenými tak, aby bylo vidět otvírání (oblouček) křídla. Tyto dveře jsou označeny pořadovým číslem 14, pod kterým se najdou ve výpisu PSV s udáním všech náležitostí vybavení (kliky, zámky, závěsy) a materiálu i povrchové úpravy (nátěry). Z předsíně jsou přístupny jednotlivé místnosti příslušenství: spíž, záchod (WC je značka pro splachovací zařízení) a lázeň, ve které je zakreslena vana, umývadlo a plynový spotřebič k ohřívání vody KARMA. Větrání těchto místností je do ventilací kruhového průřezu. Každé patro má svou ventilaci vyvedenou až na střechu a popis Po, Př., I. P. značí podlaží, ve kterém je zaústěna. Karma je napojena na komín, aby zplodiny spalování svítíplynu byly odvedeny. Každé patro má ovšem zase svůj komín. Tlustá čára po obvodu koupelny značí keramický obklad 150 cm vysoký. Z předsíně se vchází dvoukřídlovými dveřmi do obývacího pokoje a jednokřídlovými dveřmi do kuchyně. Nosné zdivo budovy je cihelné z obyčejných cihel na vápennou nebo nastavenou maltu (s přidáním cementu). Příčky jsou z cihel děrovaných na maltu cementovou. Příčka mezi lázněmi má zvukovou izolaci, vyznačenou přetřhanou čarou. Všechny otvory ve zdech jsou kótovány zlomkem šířka/výška, okna mají ještě údaj výšky parapetu (číslo v závorce). *Prefabrikáty* (stavební prvky, vyrobené továrně mimo stavbu), tvořící nadpraží okna jsou zakresleny čárkovaně v půdoryse nad oknem a popsány svými značkami, např. RZP 1-150, které určují druh prefabrikátu, jeho technické vlastnosti a délku.

Půdorys je ještě doplněn schématem stropních konstrukcí (čárkovaně zakreslené osy stropních trámů u střední zdi) a sklopeným řezem, který je doplněn kótami rozměrovými i kótou výškovou.

i jeho okolí bývají barveny a k zdůraznění prostorovosti a měřítko je vždy doplňována přírodní stafáží i siluetou lidské postavy (obr. 9 a 10).

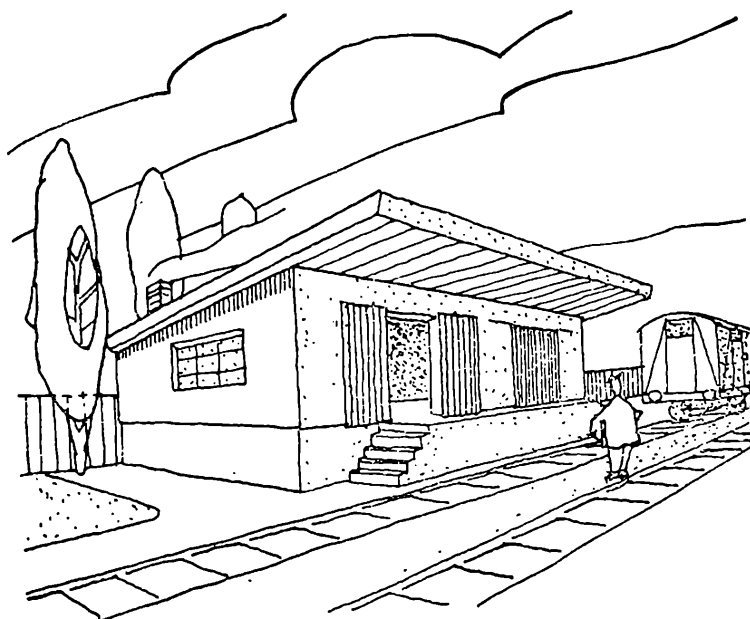
Všechny značky pro kreslení situace a značení *inženýrských rozvodů*¹²⁾ jsou probrány jedna po druhé a studenti si je kreslí a připisují významy, takže si je vtisknou v paměť spolu se všemi grafickými i barevnými značkami stavebních hmot a značkami pro zařizovací předměty a nábytek. Po této přípravě je možno přistoupit

¹²⁾ *Inženýrskými rozvody* nazýváme zařízení, která doplňují pozemní stavby a umožňují jejich obyvatelnost. Jsou to zařízení, která dodávají vodu, plyn, elektřinu a zařízení, která odvádějí odpadky - kanalizace. Souhrnně je také nazýváme veřejnými investicemi a včí-táme pak do nich ještě i úpravy ulic, náměstí, jejich osvětlení, odvodnění a sadovou úpravu.



ŘEZ 1:50

Obr. 8. Část svislého řezu budovou vysvětluje výškové poměry budovy, jejíž půdorys jsme již prošli. Stropy jsou železobetonové (v řezu vyznačeno černě), trám s deskou, podlahy 15 cm tlusté. Strop má podhled, který zakrývá trámy. Srovnej řez stropem nad přízemím se sklopeným řezem v půdorysu přízemí! Základ je z prostého betonu a vnější zeď je cihelná. Zemina kolem stavby je znázorněna jen schematicky. Budova je odizolována proti zemní vlhkosti vodorovnou a svislou izolací (kresleno tlustou přerušovanou čarou). Kótování řezu obsahuje všechny kóty dílčí i celkové. Základem kótování je úroveň přízemí ± 0 jako úroveň nulová, od níž kótujeme směrem vzhůru $+330$, nebo dolů -270 . Nulová úroveň je vztažena k nadmořské výšce 163,20 m n. m. Značky Př., Skl., I. P. jsou zkratkami přízemí, sklepa atd. *Konstruktivní výšky* jsou vzdálenosti povrchů konstrukcí stropních (330 cm mezi přízemím a I. patrem). *Světlá výška* je vzdálenost od podlahy pod strop 280 cm, *tloušťka stropu* je 50 cm, z čehož 35 cm připadá na *nosnou konstrukci* a 15 cm na *tloušťku podlahy*. Výška parapetu 90 cm je výška spodního okraje okna od podlahy a záklenek (konstrukce nad oknem) je 40 cm vysoký a je tvořen třemi prefabrikáty. Řez je ještě doplněn kótami oken zvenku a kótou výšky římsy nad chodníkem.



Obr. 9

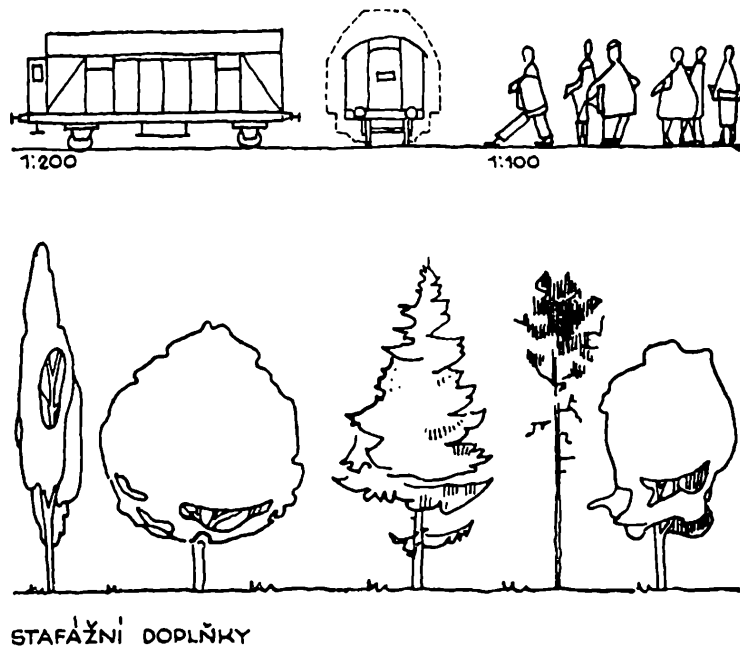
PERSPEKTIVA

k ucelené práci na jednoduché situaci se skupinou objektů (obr. 11). Jeden objekt se pak dále rýsuje ve všech *třech stupních připravenosti*¹³⁾ jako obvyklé stavební výkresy v příslušném měřítku s podrobnostmi, které tomu stupni náleží.

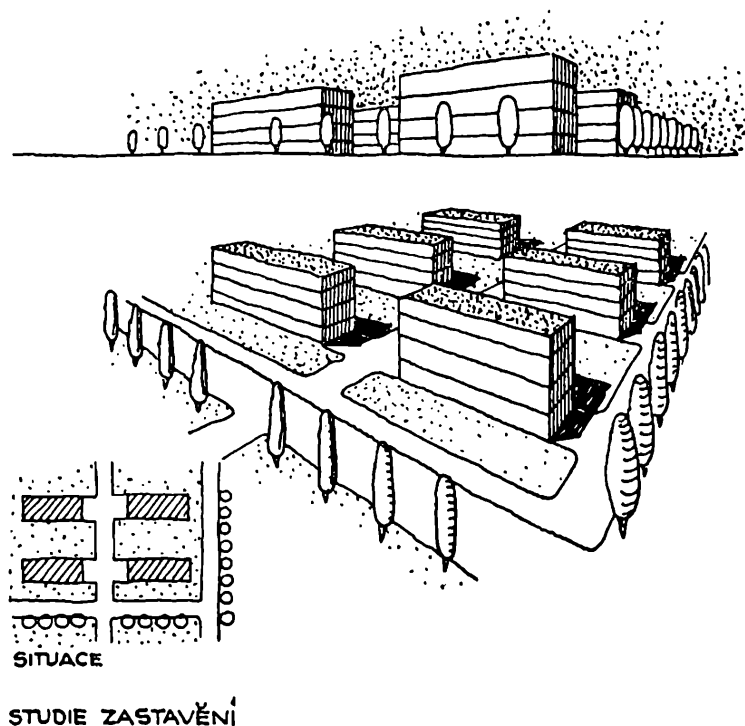
Na závěr cvičení je studentu uložena klauzurní práce, ve které na výkresech půdorysu a řezu stavebního objektu prokazuje znalosti ve stavitelském rýsování a popisování, a to tužkou i perem a na perspektivním zobrazení téhož objektu zručnost v kreslení, cit pro barvu, pochopení hmoty, prostoru a jejich proporcí.

Výsledkem práce v tomto předmětu je získání zručnosti v kreslení, zvládnutí základních znalostí v rýsování a grafické úpravě stavebních výkresů a získání znalostí kresby podle modelu i představy jako nutné přípravy pro další studium inženýrství pozemních staveb.

¹³⁾ *První stupeň* (viz vysvětlivku 5), dříve zvaný úvodní projekt, je jednoduchým grafickým znázorněním projektovaného objektu, na kterém se ověří účelnost i výtvarné působení i náklad na stavbu. *Druhý stupeň*, dnes již neužívaný, byl technickým projektem podrobněji určujícím dílo i cenu. *Třetí stupeň* je souhrn prováděcích výkresů tak podrobných, že se dílo podle nich realizuje a jsou doplněny výkresy detailů (podrobnosti důležitých a složitých dílů stavby), které jsou na úrovni dílenských výkresů.

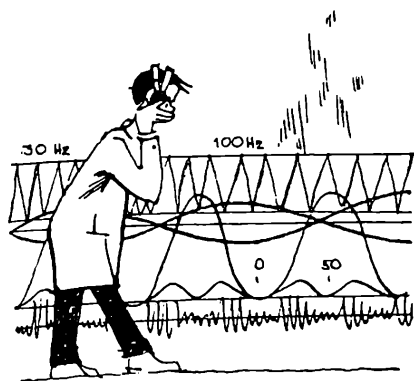


Obr. 10



Obr. 11

Obr. 11. Studie větších celků - továrních komplexů nebo zastavění sídlišť - se kreslí pomocí tzv. perspektivních sítí z nadhledu, který dává představu o tom, jak objekty jsou situovány (dolní obrázek) a z normálního pohledu z výše lidského oka (asi 160 cm nad zemí), který dává představu o tom, jak skupinu objektů uvidíme ve skutečnosti (horní obrázek). V naší studii je v horním obrázku výška oka zanedbána jako nepatrná k velikosti a rozloze zobrazované skupiny domů. Perspektivní sítě se podkládají pod průsvitný papír, na který se studie přímo kreslí.



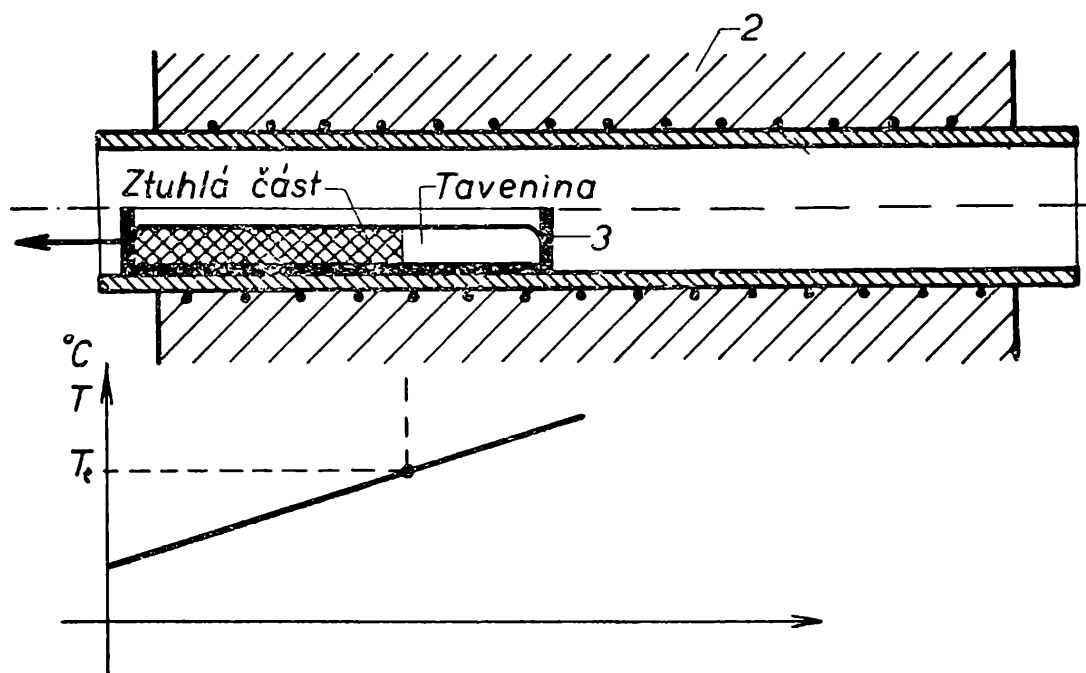
Inž. Bohdan Šesták,
Fyzikální ústav ČSAV, Praha:

O kovových krystalech

(Pokračování)

3. Příprava monokrystalů kovů

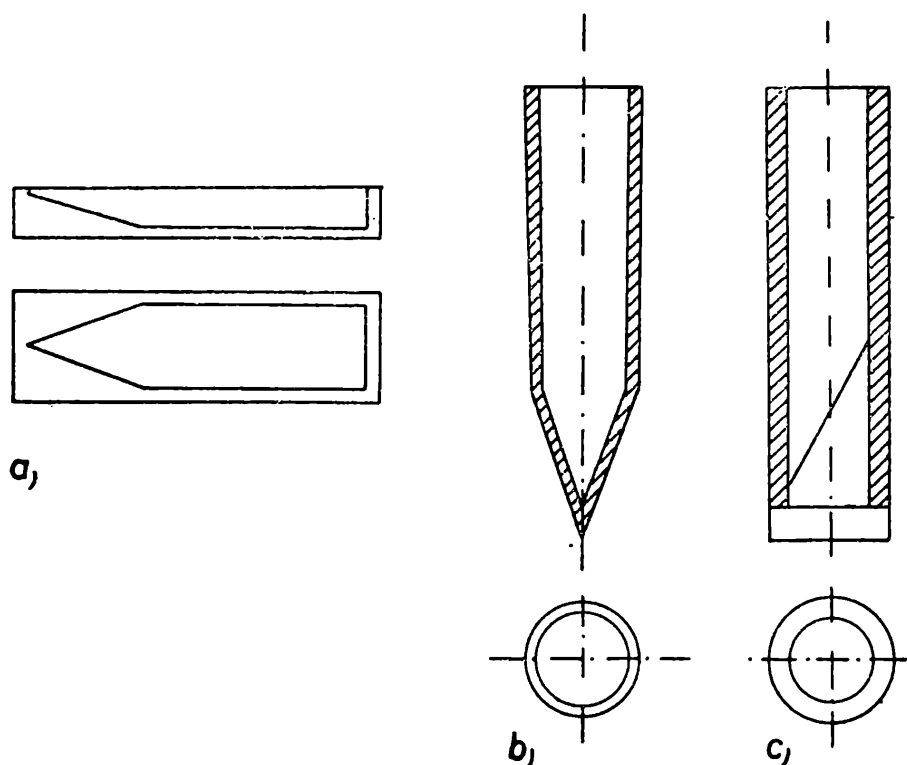
V posledních třiceti letech a zvláště po r. 1945 věnovali fyzikové velikou pozornost přípravě monokrystalů kovů, o čemž svědčí řada publikovaných prací. Díky tomuto úsilí bylo dosaženo ve fyzice kovů výsledků fundamentální vědecké ceny, které přispěly i k pokroku celé fyziky pevných látek. Monokrystaly kovů se připravují z páry, z taveniny a rekrystalizací v pevném stavu. Zatím nejšířší



Obr. 3. Úprava pro řízené tuhnutí taveniny. Elektrickou odporovou pecí 1) - žáruvzdorná trubka s topným vinutím, 2 - tepelná izolace) se dosáhne v kelímku 3 na obrázku naznačeného rozložení teploty a vytvoří se stabilní rozhraní mezi taveninou a ztuhlou částí. Posouváním kelímku ve směru šipky ztuhne postupně celý obsah kelímku.

uplatnění má příprava z taveniny, proto si jí všimneme podrobněji. Při jisté teplotě, kterou nazýváme *b o d e m t á n í*, kov ztrácí krystalickou stavbu a přechází v *taveninu* s vlastnostmi kapaliny. Při tom se spotřebuje jisté množství tepla, tzv. *s k u p e n s k é t e p l o t á n í*. Při opačném ději, nazývaném *t u h n u t í*, se stejné množství tepla uvolní. K dosažení plynulého tuhnutí je nutné odvádět toto teplo při teplotě tuhnutí a způsob, jakým se to děje, zcela určuje velikost a tvar krystalů tuhnoucího kovu. Pokusy bylo zjištěno, že tuhnutí probíhá dvěma

ději. Nejprve vznikají zárodky krystalů a k tomu je potřeba snížit teplotu poněkud pod bod tání, říkáme vytvořit *podchlazení*; potom při plynulém odvodu tepla zárodky rostou. Upravíme-li pro tuhnutí podmínky podle obr. 3, vytvoří se rovinné rozmezí mezi taveninou a ztuhlým kovem. V tavenině nevzniká podchlazení, a tedy ani zárodky nových krystalů. Je-li v sousedství taveniny kousek předem připraveného monokrystalu, dojde při vzájemném pohybu kelímku a pece postupným tuhnutím k jeho růstu, tavenina ztuhne a zvětší se původní krystal. V tomto uspořádání může ztuhnout v monokrystal celý obsah kelímku i bez vloženého *zárodečného krystalu*. Stačí upravit tvar kelímku podle obr. 4 tak, aby byl na jedné straně zašpičatělý. Tím se zmenší objem taveniny v místě, které na počátku tuhnutí má nejmenší teplotu, takže tam vznikne jen několik zárodků

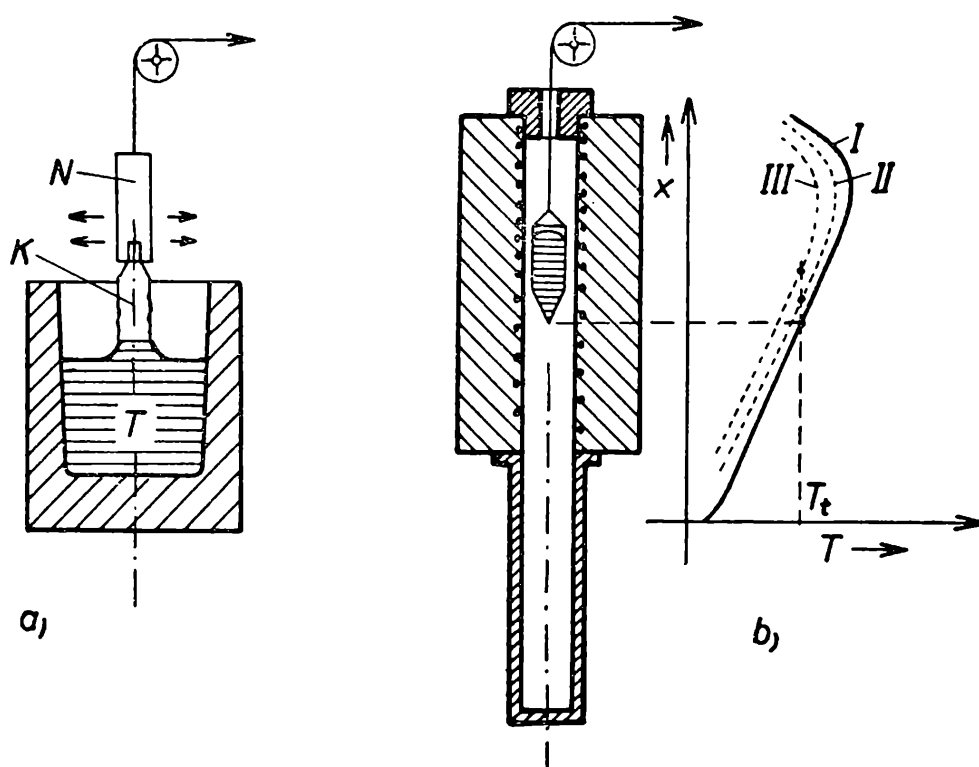


Obr. 4. Kelímky užívané k přípravě monokrystalů z taveniny bez zárodečného krystalu: a) kelímek tvaru lodičky pro přípravu ve vodorovném uspořádání, b) válcový tenkostěnný keramický kelímek pro svislé uspořádání, c) grafitový kelímek s odnímatelným dnem.

krystalu. Při dalším tuhnutí v uvedeném uspořádání již nové zárodky nevznikají a zvětšují se růstem jenom ty vzniklé na počátku. Některý z nich je nejvýhodněji orientován vzhledem ke směru růstu, takže během růstu rychle potlačí ostatní, takže většina taveniny ztuhne v monokrystal. V praxi je obtížné uskutečnit ideální rozložení teploty naznačené v obr. 3. Způsobem řešení tohoto požadavku se liší jednotlivé metody. Na obr. 5 jsou základní uspořádání, od nichž je odvozena většina dnes používaných způsobů.

Starší *způsob Czochralského* (tažením z taveniny) je upraven tak, že do roztaveného kovu v elektricky vytápěném kelímku se vnoří konec tyčky, někdy na konci opatřené tenkým otvorem, a po ztuhnutí malého množství kovu se tyč vhodnou konstantní rychlostí zvedá. Tyčka odvádí teplo, kov postupně tuhne za

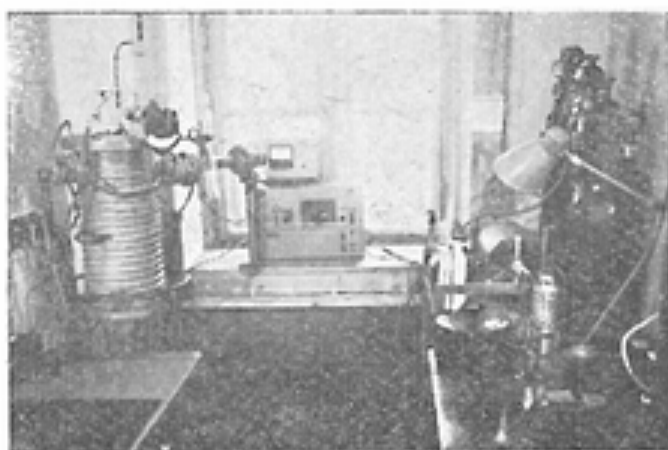
podmínek blízkých uvedeným shora. Tavenina v kelímku musí mít všude stejnou teplotu, poněkud větší než je bod tání. Při vhodné rychlosti zvedání se vytvoří několik milimetrů nad hladinou taveniny nepohyblivé rozhraní mezi taveninou a krystalem. Tímto způsobem se získá krystal zpravidla nepravidelného průřezu o tloušťce několika mm. Popsaný způsob je poměrně jednoduchý a často se používá pro nízkotavitelné kovy (Zn, Cd, Sn, Pb, Bi). Pro vysokotavitelné kovy je zařízení velmi obtížně řešitelné. Místo kovové tyče se používá k tažení též zárodečného krystalu, což má tu velikou výhodu, že velmi jednoduše vyrobíme krystal s mřížkou orientovanou žadáním způsobem k jeho ose. Tato metoda nabyla technického významu při přípravě krystalů polovodičů, především germania a křemíku.



Obr. 5. Příprava monokrystalů z taveniny: a) způsob Czochralskiho: T - tavenina, K - krystal, N - kovová tyč. Šipkami je naznačen odvod tepla. b) Způsob Bridgmanův s pohyblivým kelímkem, křivka I zobrazuje žádoucí rozložení teploty v ose pece. Tuto metodu je možno modifikovat ještě tak, že kelímek je pevný a pohybuje se pec, nebo kelímek i pec jsou pevné a snižuje se teplota v peci. Tímto způsobem se v ideálním případě mění průběh teploty podle křivky I , II a III a místo s teplotou bodu tuhnutí, postupuje vzhůru kelímkem.

Širší použití má způsob navržený *Bridgmanem* na základě prací *T a m m a n a*, *O b r e i m o v a* a *Š u b n i k o v a* (obr. 5b). V nakreslené úpravě klesá kelímek s roztaveným kovem svisle pecí. Lze však užít také úpravy vodorovné a v obou případech též takové, kde kelímek je pevný a pohybuje se pec. Žádaného průběhu teploty se dosáhne úpravou vinutí odporové pece. Někdy se teplo vznikající při tuhnutí odvádí ještě tyčí, na které stojí kelímek. Technické provedení takové aparatury je složitější především tehdy, je-li velká teplota tání kovů, z nichž máme připravit monokrystal. Ve Fyzikálním ústavu ČSAV bylo postaveno zařízení vhodné pro teploty do 1650°C , které stručně popíšeme (obr. 6). Podrob-

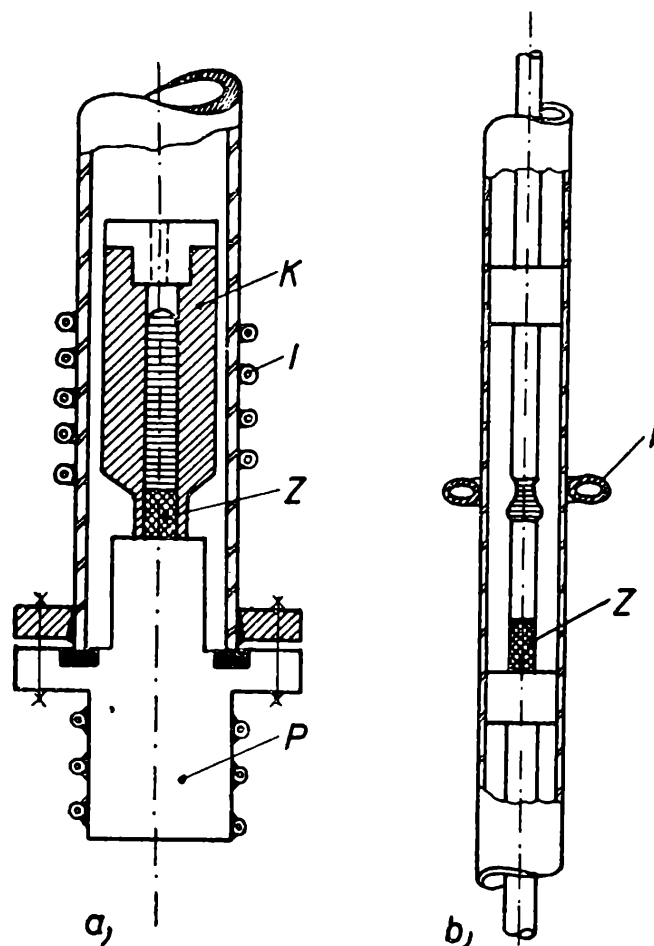
nější popis byl uveřejněn v Čs. časopisu fys. 7 (1957), str. 202. Hlavní částí zařízení je elektrická odporová pec, na obr. 6 vlevo. Pro uvedené teploty bylo užito topného vinutí z molybdenového drátu navinutého na trubce ze slinutého kysličníku hlinitého. Celek včetně tepelné izolace je umístěn uvnitř chlazeného kotle, který lze vyčerpat nebo naplnit dusíkem, argonem nebo vodíkem. To je nezbytné k ochraně topného vinutí i roztaveného kovu, aby při vyšších teplotách nenastala jejich oxydace. Uvnitř svisle uložené topné trubky stojí na molybdenové tyči kelímek, podle obr. 4b o průměru asi 20 mm, rovněž ze slinutého kysličníku hlinitého. Růst krystalu je vyvolán klesáním kelímku do spodní chladnější části pece. Rychlost snižování kelímku je možno měnit ovládáním elektromotoru posuvu v širokých mezích. Např. monokrystaly niklu jsou připravovány na tomto zařízení rychlostí 15 mm za hod., kdežto monokrystaly mědi rychlostí 50 mm/hod. Průběh tavení se sleduje okénkem z křemenného skla ve vrchní části pece a tudy se také měří teplota optickým pyrometrem. Další součástí zařízení je vývěva, kterou se čerpá pec na tlak $1,5 \times 10^{-2}$ mm Hg a aparatura na čištění a sušení ochranných plynů. Vedle niklu jsou zařízením běžně vyráběny monokrystaly mědi v grafitových kelímcích a železa s přísadou křemíku v kelímcích ze slinutého kysličníku hlinitého. Přidáním křemíku do železa se zabrání fázovým přeměnám železa, takže příprava monokrystalů železa α z taveniny je možná.



Obr. 6. Zařízení k přípravě monokrystalů kovů z taveniny Bridgmanovým způsobem vypracované ve Fyzikálním ústavu ČSAV. Vlevo je elektrická odporová pec pro teploty do 1650 °C, vpravo je zařízení k čištění ochranných plynů. Uprostřed je měřič vakua a přístroj pro řízení rychlosti pohybu kelímku.

V popsané úpravě lze jen obtížně užít zárodečného krystalu. K tomu je výhodnější vodorovné uspořádání, kde je možno lépe pozorovat počátek tavení vloženého krystalu. Pro některé účely, hlavně pro vysoké teploty, je výhodný místo odporového ohřevu ohřev indukční, který přináší některé další možnosti. Na obr. 7a je svislá úprava k přípravě monokrystalů v grafitovém kelímcu s použitím zárodečného krystalu. Indukční cívka, umístěná vně křemenné trubky, je napájena proudem o kmitočtu několika set kc/s z vf. generátoru. Teplo vzniká ve stěně grafitového kelímku vířivými proudy, vyvolanými napětím indukovaným vnější cívkou. Při růstu krystalů se pohybuje indukční cívka směrem vzhůru. Přesnější řízení přívodu tepla při indukčním ohřevu dovoluje použít zárodeč-

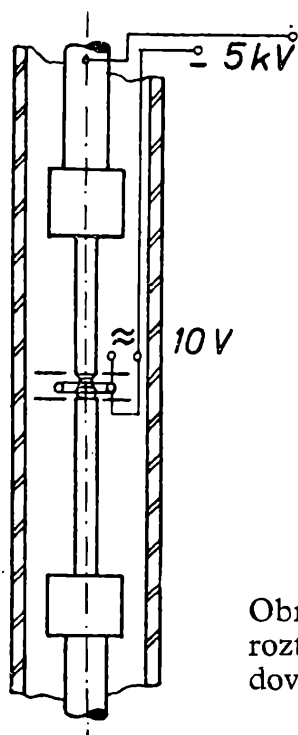
ného krystalu i ve svislé úpravě. Použitím indukčního ohřevu lze uplatnit v širší míře přípravu monokrystalů z taveniny bez kelímku. To je velmi výhodné, neboť se zabrání znečištění kovu kelímkem a dále je možno tavit kovy, pro něž není vhodný materiál na kelímky (např. kovy s nejvyšší teplotou tání, nebo kovy s velkou slučivostí jako Zr, Ti, U aj.). Dosáhneme toho úpravou podle obr. 7b s *letmou roztavenou zónou*. Materiál k tavení má tvar tyče v čelistech svisle upnuté. Je-li roztavená část dostatečně úzká, udrží se tavenina povrchovým napětím mezi tuhými částmi materiálu. Pohybem indukční cívky se postupně přetaví celá tyč.



Obr. 7. a) Příprava monokrystalů indukčním ohřevem v grafitovém kelímku *K* s použitím zárodečného krystalu *Z*, *I* - pohyblivá indukční cívka, *P* - vodou chlazená část odvádějící teplo z rostoucího krystalu.

b) Indukčním ohřevem vytvořená letmá roztavená zóna. Je naznačeno užití zárodečného krystalu *Z*, *I* - indukční cívka.

Několikerým přetavením vznikne zpravidla přímo monokrystal. Je možno velmi dobře také užití zárodečného krystalu upevněného v jedné čelisti, podle obr. 7b. Letmou roztavenou zónu lze vytvořit též bombardováním elektrony, podle obr. 8. Tímto zajímavým způsobem ohřevu byly vyrobeny uvedeným postupem monokrystaly kovů s největší teplotou tání, wolframu (3410°C), rhenia (3170°C), molybdenu (2625°C) aj. Polykrystalická tyčka z materiálu k tavení je opět umístěna svisle v trubici z křemenného skla, trvale čerpané vývěvou na tlak 10^{-4} až 10^{-5} mm Hg. Kolem tyče je závit wolframového drátu žhavený proudem z transformátoru na teplotu nutnou k emisi elektronů. Mezi vlákno a tavený materiál je



Obr. 8. Vytvoření letmé roztavené zóny bombardováním elektrony.

připojeno stejnosměrné anodové napětí několika kilovoltů. Celek pracuje jako dvouelektrodová elektronka, dioda. Elektrony vycházející ze žhavého vlákna (katody) jsou urychlovány velkým anodovým napětím a dopadají na anodu (tavená tyč), předávají jí svoji kinetickou energii, která se mění v teplo a působí roztavení kovu. Elektrony se ještě soustřeďují pomocnou elektrodou do úzkého svazku, aby roztavené pásmo bylo co nejúžší. Ztráty tepla jsou při tomto uspořádání minimální, neboť teplo vzniká jen v místě, kde má nastat tavení. Proto elektrický příkon 1 kW stačí k přípravě monokrystalů W nebo Rh o průměru 4 mm. (Pokračování)

Prof. dr. W. Hanle, Giessen:

Vliv záření bohatého na energii

„Záření bohaté na energii“ má dnes veliký význam vývojem fyziky záření a jaderné fyziky, zvláště pak odhalením štěpení uranu a jeho technického využití v jaderných reaktorech. V tomto článku bude pojednáno o vzájemném působení záření bohatého na energii s hmotou a o jeho technickém použití.

Jsou dva druhy záření, a to záření *k o r p u s k u l á r n í* - jako jsou proudící elektrony v elektronkách, nebo částice emitované radioaktivními látkami - a záření *e l e k t r o m a g n e t i c k é*, jako je světlo, rádiové vlny a rentgenové paprsky apod.

Nejdříve definujme pojem „záření bohatého na energii“. K tomu účelu byla stanovena jednotka energie obvyklá v atomové a jaderné fyzice. Žhavicí katodou emitované elektrony v elektronové lampě jsou urychleny elektrickým polem mezi katodou a anodou. Projdou-li napětím U , dosáhnou anody s pohybovou energií $\frac{m}{2}v^2 = eU$, kde m je hmota, v rychlost a e náboj elektronu. V atomové fyzice užíváme jako jednotky energie onu energii, kterou obdrží jeden elektron proletěním elektrickým polem s potenciálovým rozdílem jednoho voltu a nazýváme ji *e l e k t r o n v o l t* (eV). Přepočteno na jednotky obvyklé v elektrotechnice, je $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ wattsekund (joulů).

Energie, která váže nejvolnější elektrony elektronového obalu atomu, má několik eV; energie, která váže stavební kameny atomového jádra - protony a neutrony - obnáší několik miliónů eV (MeV).

Je-li energie částic řádově vyšší než energie, která váže volné elektrony atomu, nejméně 100 000 eV, nazýváme takové korpuskulární záření *záření bohaté na energii*.

Elektromagnetické záření má charakter vlnový. Velikost energie je $h \cdot \nu$, kde h je Planckova konstanta a ν je frekvence. Tab. 1 podává přehled celkového spektra

Druh paprsků			Délka vln	Kmitočet Hertz	Energie eV
Elektromagnetické vlny	Nízkofr.		– 10 000 km	$3 \cdot 10^1$	$12,4 \cdot 10^{-14}$
			– 1 000 km	$3 \cdot 10^2$	$\cdot 10^{-13}$
			– 100 km	$3 \cdot 10^3$	$\cdot 10^{-12}$
	Vysokofrekvenční	Dlouhé vlny	– 10 km	$3 \cdot 10^4$	$\cdot 10^{-11}$
		Střední vlny	– 1 km	$3 \cdot 10^5$	$\cdot 10^{-10}$
		Krátké vlny	– 100 m	$3 \cdot 10^6$	$\cdot 10^{-9}$
		Ultrakrátké vlny	– 10 m	$3 \cdot 10^7$	$\cdot 10^{-8}$
			– 1 m	$3 \cdot 10^8$	$\cdot 10^{-7}$
		Mikrovlny	– 10 cm	$3 \cdot 10^9$	$\cdot 10^{-6}$
			– 1 cm	$3 \cdot 10^{10}$	$\cdot 10^{-5}$
	Světlo	Infračervené	– 1 mm	$3 \cdot 10^{11}$	$\cdot 10^{-4}$
		Viditelné	– 100 μ	$3 \cdot 10^{12}$	$\cdot 10^{-3}$
		Ultrafialové	– 10 μ	$3 \cdot 10^{13}$	$\cdot 10^{-2}$
Ultrazářením, Roentgenovy pap. γ , - záření	Roentgenovy paprsky		– 1 μ	$3 \cdot 10^{14}$	$\cdot 10^{-1}$
			– 1 000 Å	$3 \cdot 10^{15}$	$\cdot 10^0$
			– 100 Å	$3 \cdot 10^{16}$	$\cdot 10^1$
			– 10 Å	$3 \cdot 10^{17}$	$\cdot 10^2$
		Gama-paprsky	– 1 Å	$3 \cdot 10^{18}$	$\cdot 10^3$
			– 0,1 Å	$3 \cdot 10^{19}$	$\cdot 10^4$
			– 0,01 Å	$3 \cdot 10^{20}$	$\cdot 10^5$
	Ultrazářením		– 1 X	$3 \cdot 10^{21}$	$\cdot 10^6$
			– 0,1 X	$3 \cdot 10^{22}$	$\cdot 10^7$
			– 0,01 X	$3 \cdot 10^{23}$	$\cdot 10^8$
			– 0,001 X	$3 \cdot 10^{24}$	$\cdot 10^9$

Tab. I

elektromagnetického záření. Také zde se označuje záření jako bohaté na energii, má-li nejméně 100 000 eV. Elektromagnetické paprsky bohaté na energii jsou tedy paprsky rentgenové a gama-paprsky.

Technicky důležité druhy paprsků bohatých na energii jsou rychlé elektrony, protony (vodíkové iony), alfa-částice (heliová jádra), zlomky štěpení při štěpení uranu, např. iony baria, neutrony, rentgenové a gama-paprsky. Lze je získat dnes již řadou způsobů.

Pro velké pokusy se zářením bohatým na energii nepřicházejí prakticky v úvahu rentgenové lampy běžného typu. Byly však zkonstruovány vysoce výkonné rentgenové lampy s otáčecí anodou a s vodním chlazením. Roentgenovy paprsky mají značnou pronikavost.

Jako zdroje rychlých elektronů máme k dispozici urychlovače částic a některé radioaktivní izotopy. Urychlovače mají velmi dobrou účinnost, ale vyžadují vysoké napětí. Milión voltů se dá ještě celkem jednoduše zvládnout, avšak pronikavost elektronů urychlených tímto napětím je poměrně malá. K výrobě takových napětí používá se transformátorů kaskádních; rezonančních a jiných. Lineárními urychlovači, ovšem technicky velmi nákladně, lze udělit elektronům energii 10 - i více - MeV.

Intenzivními zdroji záření bohatého na energii jsou jaderné reaktory, založené na štěpení uranu. Produkty štěpení, polotěžké částice, jsou vymršťovány velkou pohybovou energií (okolo 100 MeV), neutrony pak energií několika MeV. Neutrony jsou po zpomalení zachyceny ostatními jádry a vytvářejí při tom radioaktivní izotopy, které se rozpadají a vyzařují beta-paprsky (rychlé elektrony) a často i gama-záření. Štěpné produkty jsou samy zpravidla radioaktivní a rozpadají se rovněž na beta-záření a gama-záření. Takto se rozpadá asi 5 % štěpné energie jako záření neutronů bohaté na energii, gama-paprsky a beta-paprsky. Zvládnutím techniky jaderných reaktorů je možno dosáhnout stále více radioaktivních produktů štěpení ve velkém množství, jako např. caesium 137, vyzařující beta-paprsky a gama-paprsky s poločasem 33 roků. Za čas vytlačí přirozeně radioaktivní látky, vyzařující alfa nebo beta-paprsky, některé umělé radioizotopy.

(Pokračování)

P ř e m y s l S c h ü r e r, Praha:

Jak získáváme nízké tlaky

(Pokračování)

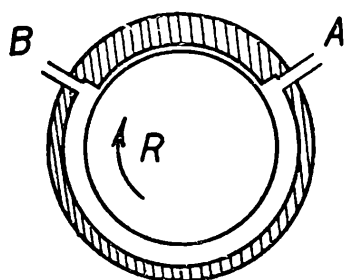
Rtuťová rotační vývěva, rotační olejová i všechny pístové vývěvy pracují na stejném principu; při každé otáčce se zvětší prostor, tím poklesne tlak, část plynu, jenž se rozpjal do vývěvy se vytlačí a znovu se čerpaný prostor zvětšuje. Na docela jiném způsobu čerpání je založena Gaedeho m o l e k u l á r n í v ý v ě v a (obr. 5). Zde jsou molekuly plynu, vstupující do vývěvy v místě *A*, strhovány rychle se otáčejícím válcovým rotorem *R* a unášeny až do místa *B*, kde se hromadí a odkud jsou odčerpávány pomocnou vývěvou.

K tomu je však třeba velmi přesného opracování a dodržení předepsaných rozměrů na tisíce milimetru. Nepatrné poškození přilehlých povrchů rotoru a pláště může vývěvu zcela znehodnotit.

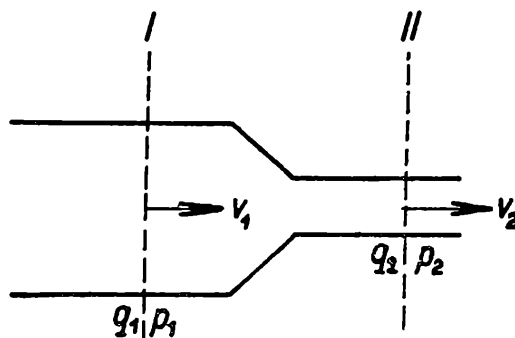
Čerpací rychlost molekulárních vývěv stoupá, zvyšujeme-li počet otáček rotoru a dosahuje hodnoty desítek litrů za vteřinu. Rotor koná několik tisíc otáček za minutu. Při zvlášť přesném provedení klesne mezní tlak až do oboru 10^{-7} mm rtuťového sloupce.

Molekulárních vývěv se však zřídka používá pro nákladnost provedení i pro jejich choulostivost.

Pro odčerpání prostoru na tlak několika milimetrů rtuťového sloupce můžeme použít vodní vývěvy. Nemá sice velkou čerpací rychlost, je však jednoduchá a proto hojně užívaná. Vysvětlíme si dále, jakým způsobem čerpá.



Obr. 5. Gaedeho molekulární vývěva. Molekuly plynu, vstupující do vývěvy v místě *A* potrubím od čerpaného prostoru jsou strhovány rotorem *R* do místa *B*, odkud jsou odčerpávány pomocnou vývěvou.



Obr. 6. Odvození podtlaku v kapalině, proudící zúženým potrubím. q_1 , q_2 jsou průřezy trubice v místě *I* a *II*; v rychlost proudící kapaliny, p hydrostatický tlak.

Představme si kapalinu, proudící trubicí podle obrázku 6. Jelikož platí

$$v_1 q_1 = v_2 q_2,^4)$$

zvýší se rychlost proudící kapaliny v místě *II* proti místu *I* tolikrát, kolikrát je q_1 větší než q_2 . Přírůstek kinetické energie kapaliny ve zúžené části se hradí z úbytku tlaku, který měla kapalina v širším průřezu:

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2).$$

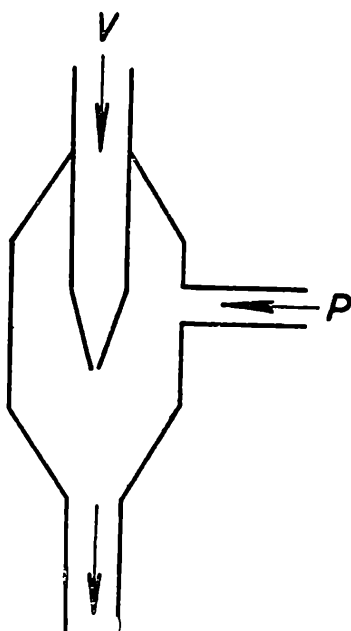
Tímto způsobem může dojít při značném zúžení průtokového průřezu k poklesu hydrostatického tlaku pod hodnotu tlaku barometrického, a spojíme-li průtokovou trubicí s okolní atmosférou, bude proudící kapalina nasávat vzduch (obr. 7a).⁵⁾

Zaměníme-li proud vody proudem páry rtuti a pozměníme-li poněkud uve-

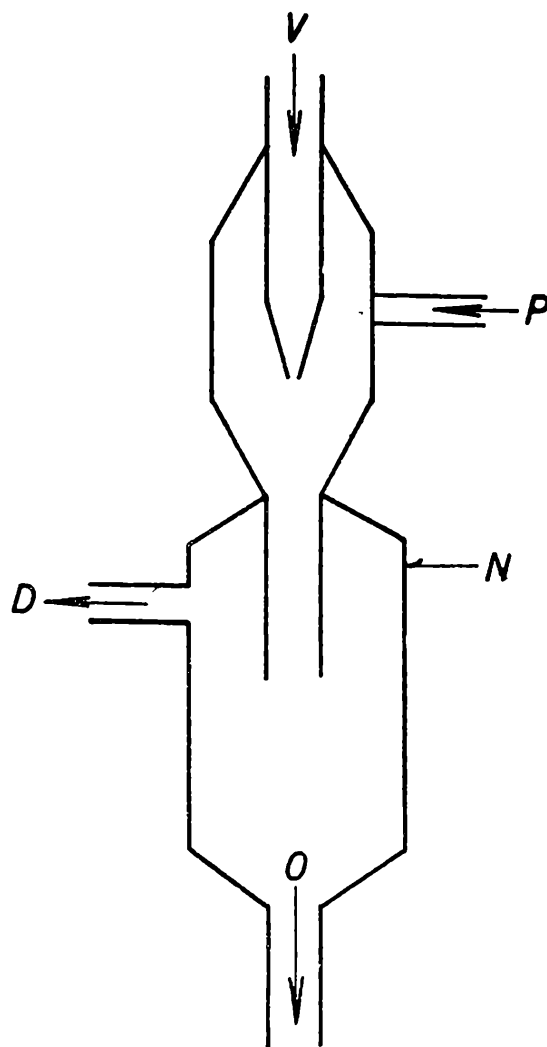
⁴⁾ Je to tzv. rovnice kontinuity, jež vyjadřuje, že množství nestlačitelné kapaliny vyteké za jednotku času z uzavřeného prostoru se rovná množství kapaliny, jež za stejný čas do prostoru vstoupilo.

⁵⁾ Připojíme-li další nádobku *N* (obr. 7b), kde by se vytékající voda shromažďovala a jen zvolna odtékala, bude se v této nádobce zhušťovat výše nasátý vzduch a celého zařízení lze použít též jako dmýchadla.

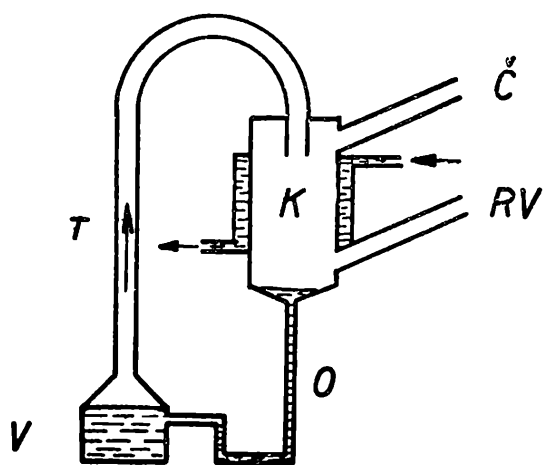
dené uspořádání, dostáváme tzv. vývěvu ejektorovou. Mezní tlak ejektorových vývěv sahá do oboru 10^{-2} až 10^{-4} mm Hg, čerpací rychlost je v jednotkách až desítkách litrů za vteřinu. Nyní se ejektorových vývěv používá jako pomocných k předčerpávání difúzních vývěv.



Obr. 7a. Vodní vývěva. Proud vody V saje plyn P .



Obr. 7b. Vodní vývěva též jako dmýchadlo. N je nádobka, připojená k vodní vývěvě O odtok vody, D přetlak nasátého plynu.



Obr. 8. Langmuirova kondenzační vývěva. Páry rtuť, tvořící se ve varníku V proudí trubicí T a v prostoru K kondenzují. $Č$ je potrubí od čerpaného prostoru, RV potrubí k rotační vývěvě a O trubička, kudy se vrací rtuť do varníku.

Difúzní vývěva byla sestrojena v době první světové války, současně, avšak nezávisle G a e d e m a L a n g m u i r e m. Podle obrázku 8 si snadno představíme její činnost; Ve varníku V se zahřívá rtuť, jejíž páry proudí trubicí T .

V prostoru K difundují do proudu páry molekuly plynu z čerpaného prostoru $\check{C}$. Jsou unášeny proudem páry do spodní části prostoru K , kde pára kondenzuje a odkud je plyn odčerpáván rotační vývěvou RV . Stěny válce K jsou chlazený tekoucí vodou. Zkondenzovaná rtuť se vrací trubičkou O zpět do varníku.

Langmuir považoval kondenzační proces za nejdůležitější a nazval svoji vývěvu „k o n d e n z a č n í“. Gaede kladl důraz na difúzi plynu do proudu páry a nazval vývěvu „d i f ú z n í“. Ačkoliv pozdější konstrukce vycházely z Langmuirova uspořádání, rozšířil se název, jež razil Gaede.

(Pokračování)



Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

5. Druhá umělá družice Země měla hmotu 508 kg. Pohybovala se rychlostí $8.7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočtete její kinetickou energii a určete, jakou rychlostí by se musely pohybovat:

1. střela o hmotě 10 kg,
 2. pětunové tryskové letadlo,
 3. nákladní vlak o celkové hmotě 2000 t,
- aby měly kinetickou energii stejně velkou jako druhá družice.

František Janáček

Řešil Zdeněk Kestřánek, XI. JŠŠ v Kamenici nad Lipou:

Druhá umělá družice Země měla hmotu $m = 508 \text{ kg}$. Při rychlosti $v = 8700 \text{ m/s}$ měla kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 508 \cdot 8700^2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \doteq 1,92 \cdot 10^{10} \text{ joulů}.$$

Máme-li nyní určit rychlost v_x tělesa o hmotě m_x takovou, aby mělo stejnou kinetickou energii jako umělá družice Země, musí platit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} m_x v_x^2, \\ m v^2 &= m_x v_x^2 \end{aligned}$$

a z toho

$$v_x = \sqrt{\frac{m v^2}{m_x}}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu postupně hmotu střely, letadla a vlaku, dostaneme hledané rychlosti.

$$\text{Hodnota } m v^2 \doteq 3,84 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

1. Rychlost střely:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3,84 \cdot 10^{10}}{10}} = 62 \text{ km/s} .$$

2. Rychlost letadla:

$$v_2 = \sqrt{\frac{3,84 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^3}} = 2,77 \text{ km/s} .$$

3. Rychlost vlaku

$$v_3 = \sqrt{\frac{3,84 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^6}} = 138,6 \text{ m/s} .$$

Aby měla jednotlivá tělesa stejnou kinetickou energii jako druhá umělá družice, musela by se pohybovat přibližně těmito rychlostmi:

Střela ($m = 10 \text{ kg}$) rychlostí 62 km/s, tedy 223 200 km/hod.

Letadlo ($m = 5 \text{ t}$) rychlostí 2,77 km/s, tedy 9972 km/hod.

Vlak ($m = 2000 \text{ t}$) rychlostí 138,6 m/s, tedy 499 km/hod.

Nejvyšší rychlosti dosahované těmito tělesy na Zemi jsou daleko nižší, tedy i jejich kinetická energie je podstatně menší než u druhé umělé družice Země.

6. Na telefonním číselníku je vyznačeno deset čísel od jedničky do nuly, přičemž spojnice středu číselníku s body příslušejícími krajním číslicím (1—0) svírají úhel asi 270° . Při vytočení jedničky až k zářezce natočí se volicí kolečko o úhel $\beta = 45^\circ$. Jaká je průměrná absolutní hodnota úhlové rychlosti ω , pohybu volicího kolečka, trvá-li vytočení čísla 49 173 celkem 5 vteřin. Druhou a další číslici začneme vytáčet ihned po předchozím zastavení volicího kolečka. Velikost úhlové rychlosti kolečka v obou smyslech otáčení předpokládejme stejnou.

Václav Šindelář

Řešil Josef Procházka, XIb JSS v Rychnově nad Kněžnou:

Pro úhlovou rychlost ω platí vzorec

$$|\omega| = |2\pi f|, \text{ neboli } |\omega| = 2\pi |f| \quad (1)$$

Frekvence f ve smyslu fyzikálním zde nabývá hodnot kladných i záporných; proto bereme f v absolutní hodnotě. Při řešení tedy jde prakticky o to, vypočítat f .

Při vytočení čísel 1, 2, 3, ..., 9, 0 až k zářezce se volicí kolečko natočí po řadě o úhly $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_9, \varepsilon_{10}$, pro které platí:

$$\varepsilon_1 = \beta = \frac{\pi}{4} ,$$

$$\varepsilon_2 = \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} ,$$

$$\varepsilon_3 = 2\alpha + \beta = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} ,$$

$$\varepsilon_9 = 8\alpha + \beta = 8 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} ,$$

$$\varepsilon_{10} = 9\alpha + \beta = 9 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4},$$

neboť úhel mezi dvěma sousedními čísly je $\alpha = 30^\circ$, tj. $\frac{\pi}{6}$ a úhel mezi jedničkou

a zarážkou je při vytáčení všech čísel neměnný a činí $\beta = 45^\circ$, tj. $\frac{\pi}{4}$.

Počítejme nyní úhel, o který se volicí kolečko natočí jen k zarážce při vytočení čísla 49 173.

Z předešlého vyplývá pro velikost úhlů ε_i (4,9,1,7,3):

$$\varepsilon_4 = 3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_7 = 6 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_9 = 8 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_3 = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{4}$$

Součet $\varepsilon_s = \varepsilon_4 + \varepsilon_9 + \varepsilon_1 + \varepsilon_7 + \varepsilon_3 = \frac{53}{12} \pi$.

Tím jsme vypočítali úhel natočení kolečka jen v jednom smyslu. Kolečko se však vždy otočí zpět do původní polohy; z fyzikálního hlediska má tento úhel opačné znaménko. Nám jde však jen o absolutní hodnotu proběhnutého úhlu.

Celkový úhel φ je pak $\varphi = |2\varepsilon_s|$, neboli $\varphi = 2\varepsilon_s$ a tedy $\varphi = \frac{53}{6} \pi$.

Pro frekvenci f nyní platí $f = \frac{\varphi}{2\pi t}$

Po dosazení dostáváme $f = \frac{\frac{53}{6} \pi}{2\pi \cdot 5}$, což je $|\bar{f}| = \frac{53}{60}$ otáček za s.

Vraťme se nyní k vzorci (1) a dosadíme za $|\bar{f}|$ vypočtenou hodnotu

$$|\bar{\omega}| = 2\pi \cdot \frac{53}{60}, \text{ neboli } |\bar{\omega}| = \frac{53}{30} \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 5,55 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

7. Jaká je nejmenší výška svislého rovinného zrcadla, aby osoba 170 cm vysoká se v něm viděla celá? b) Změní se rozměry zrcadla, jestliže osoba stojí na vyvýšeném stupni? c) Zjistěte zda-li a o kolik cm nutno změnit zavěšení zrcadla, jestliže se osoba přiblíží k zrcadlu anebo od něho vzdálí o 1 metr!

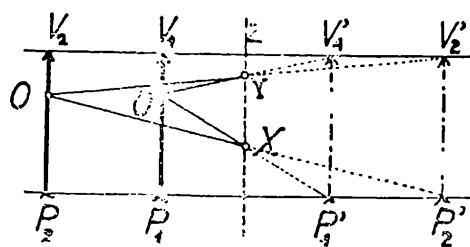
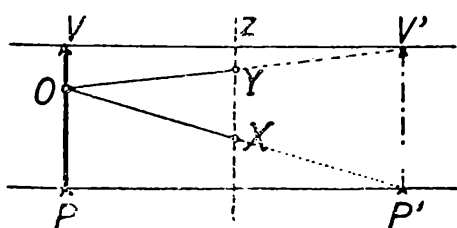
Evžen Říman

Řešil Zdeněk Kestřánek, XI. JŠŠ v Kamenici nad Lipou:

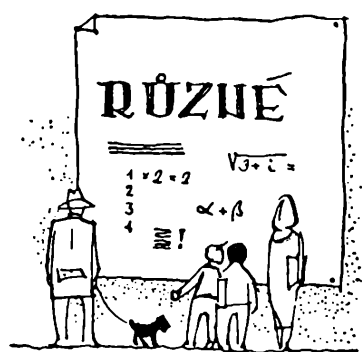
a) Je známo, že v rovinném zrcadle je obraz souměrně sdružen s předmětem podle roviny zrcadla. Zobrazme na obr. 1 rovinné zrcadlo přímkou z , osobu 170 [cm] vysokou jako úsečku VP libovolně vzdálenou od rovinného zrcadla. Oko této osoby budiž v bodě O (v patřičné vzdálenosti od bodu V). Obrazem úsečky VP bude úsečka $V'P'$, souměrně položená podle osy z . Aby se osoba viděla v rovinném obraze celá, musí její oko O vidět i patu P' i vrchol V' obrazu. Příslušnými paprsky jsou úsečky OP' , OV' , jež protnou zrcadlo z v bodech X

a Y . Úsečka XY je proto nejmenší hledaná výška svislého rovinného zrcadla, aby se v něm osoba viděla celá. Jelikož je $PM = P'M$, $VN = V'N$, kde M , N jsou středy úseček PP' a VV' , platí: $P'X = PX$ a $V'Y = VY$. Je tedy XY , střední příčkou trojúhelníka $P'OV'$, takže $XY = \frac{1}{2} P'V' = \frac{1}{2} PV = 85 \text{ [cm]}$ je nejmenší svislý rozměr zrcadla, v němž se osoba 170 [cm] vysoká vidí celá.

b) Stojí-li osoba na vyvýšeném stupni výšky h , bude zase její obraz souměrný podle z . Všechny body osoby i jejího obrazu (tj. O , P , V , P' , V') se zvednou ve svislém směru o délku h , rovněž úsečka XY se posune ve svislém směru o h (tj. o vyvýšení stupně), ale její délka zůstane nezměněna. Lze říci: Vystoupí-li osoba na vyvýšený stupeň, rozměry zrcadla se nezmění, ale zrcadlo musíme zavěsit o tolik výše, o kolik jsme vystoupili.



c) Přibližuje-li se nebo vzdaluje osoba od rovinného zrcadla, zůstávají body X a Y vždy na téměř místě (pokud výška oka a výška osoby zůstává nezměněna), neboť XY je stále střední příčkou trojúhelníka $OP'V'$, jehož vrchol (oko) je vždy ve stejné vzdálenosti od zrcadla z , jako základna $P'V'$ (obraz). Z toho plyne: Při přibližování ani vzdalování osoby od zrcadla, se rozměry zrcadla nemění ani netřeba měnit jeho zavěšení. (Obr. 2.)



Různé

Josef Kotyk, JŠŠ, Pardubice:

James Prescott Joule

„Je třeba si osvojit minulost, abychom směleji šli k budoucnosti,“ napsal sovětský spisovatel Konstantin Fedin. V dějinách fyziky vzpomínáme proto na badatele, kteří zasáhli úspěšně do jejího vývoje, na průkopníky nových názorů, nových metod a vědeckého pokroku. Jedním z nich je také význačný anglický fyzik Joule, jeden ze zakladatelů mechanické teorie tepla.

James Prescott Joule (čti: Džejms Preskot Džaul) se narodil před 140 lety, dne 24. prosince 1818 v Salfordu u Manchesteru. Byl původně sládkem; záhy se však oddal přírodním vědám, zvláště fyzice. Ačkoliv byl samoukem, vydával již od

svých 20 let vědecká pojednání, jež nalézáme v předních časopisech té doby. V letech 1884 až 1887 byla jeho díla vydána souborně v Londýně pod názvem *Scientific papers of James Prescott Joule* (Sebrané spisy Jouleovy). Těše se z dosažených a vědeckým světem uznávaných úspěchů, strávil Joule podzim svého plodného života ve svém rodišti, kde dne 11. října 1889 zemřel.

O Jouleově velmi rozsáhlé badatelské činnosti nyní pojednáme v několika státech.

I. Ekvivalence práce a tepla

Svou vědeckou činností dal Joule podnět k tomu, že pojem práce byl účelně rozšířen na všechny obory fyziky. K jeho počtě byla proto jednotka práce v soustavě MKS nazvána jeho jménem. Práce 1 joule se vykoná, působí-li síla 1 newton po dráze 1 m v souhlasném směru.¹⁾ Její velikost a souvislost s jinými jednotkami práce udávají vztahy $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergů}$, $1 \text{ kpm} = 9,81 \text{ joule}$.

Jednotkami práce vyjadřujeme také schopnost hmoty konat práci, neboli energii²⁾ hmoty. Měříme ji prací, která musela být vykonána, aby hmota energie nabyla, nebo prací, kterou hmota může vykonat, než přejde do původního stavu. Obojí měření vede k témuž výsledku. Energie nemůže vzniknout z ničeho, ani zaniknout, ztratit se. Kdykoliv se zdá, že se energie ztrácí, přechází ve skutečnosti z hmoty na hmotu, nebo se mění v energii jiného druhu. O všech těchto proměnách platí známý obecný zákon (princip) zachování energie: *Úhrnné množství energie se při průběhu přírodních dějů zachovává.*

Nejstarší neúplná vyjádření tohoto zákona se týkala jen mechanických dějů. Pokud však běží o děje čistě mechanické, lze potvrdit,³⁾ že věta o zachování energie vychází jako pouhý důsledek pohybových rovnic mechaniky a nepřináší nových poznatků. První krok k jejímu zobecnění a rozšíření na všechny fyzikální děje byl učiněn teprve tehdy, když i pojem energie byl rozšířen na vše, co je mechanické práci ekvivalentní. Ukázalo se - a stalo se tak zejména zásluhou Jouleovou - že druhem energie je např. také „fluidum caloricum“ (lat. calor = teplo), zvláštní „látka“, jež nemá hmoty ani váhy, do ohřívajícího tělesa vstupuje a při jeho ochlazení z něho opět vyběhne, přechází samovolně z těles teplejších na chladnější, má snahu rozložit se na tělese tak, aby teplota byla všude stejná apod. Tak se předpokládalo.

Tyto představy o teple nebyly ovšem správné,⁴⁾ neboť odporují zkušenosti a zjištěným skutečnostem. Od objevu ekvivalence tepla a me-

¹⁾ Časopis *Věda a technika mládeži* vypsál v roč. 1958 soutěž, v níž jedna úloha (viz čís. 12, str. 359, úl. 6) žádá zpracovat správné vystižení pojmu 1 joule obrázkem. Sledujte ji!

²⁾ Řecky *energeia* = schopnost činnosti. Ve fyzice použil výrazu *energie* poprvé roku 1807 (nikoli ovšem ihned v dnešním přesném významu) angl. lékař Thomas Young (čti Jang; 1773–1829). Učebnice fyziky pro 9. roč. uvádí na str. 91 F. Young, což zároveň opravuji.

³⁾ Viz např. Trkal: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, 1956, čl. 14, str. 48 a 49.

⁴⁾ Upozorňuji však, že silou zvyku užíváme stále názvosloví zavedeného fluidovou teorií. Říkáme např., že teplo přechází z míst o vyšší teplotě na místa teploty nižší, mluvíme o sdílení tepla apod. Toto vyjadřování je totiž jednoduché a názorné.

chanické práce, kterou roku 1842 skoro současně a nezávisle na sobě vyslovili Němec Mayer⁵⁾ a Angličan Joule, vede k principu přeměny a zachování energie⁶⁾ již přímá cesta. Klasická měření Jouleova, vykonaná v letech 1843 až 1870, poskytla důkazu ekvivalence tepla a mechanické práce zároveň potřebný a spolehlivý experimentální základ.

Zkušenost nás přivádí k poznání, že teplo se vyvíjí vždy, kdykoli těleso překonává při pohybu tření, či jiné pasivní odpory vznikající pohybem. Práce sil, jež udržují pohyb tělesa, se přitom ztrácí. Ekvivalentem této ztracené práce podle principu ekvivalence tepla s mechanickou prací musí být teplo, jež vzniká přemáháním odporových sil. Je-li tomu tak, je množství tohoto tepla přímo úměrné ztracené práci a nezávisí na tom, jakého původu jsou síly, které pohyb tělesa brzdí. Nechť běží při pohybu o jakékoli pasivní odpory, vzniká za stejné množství ztracené práce A vždy stejné množství tepla Q . Jinými slovy: Poměr $\mathcal{J} = \frac{A}{Q}$ musí mít vždy hodnotu stejnou. Aby to potvrdil, konal Joule od roku 1843 četné a rozmanité pokusy, jimiž přispěl k vybudování moderní mechanické teorie tepla.

Při jednom z nich brzdil pád tělesa (závaží) mechanismem, jenž uváděl v pohyb lopatky, které se otáčely v kalorimetru naplněném rtutí. Závaží viselo na šňůře, jež vedla přes pevnou kladku a byla otočena kolem svislé osy nesoucí lopatky. Pro jednoduchost předpokládejme, že závaží je voleno tak, aby klesalo rovnoměrně. Jeho energie pohybu se tedy nemění. Klesne-li při váze G kp do hloubky h metrů, vykoná práci $A_1 = G \cdot h$ kpm. Opakuje-li se tento děj k -krát, vykoná práci $A = k \cdot A_1 = k \cdot G \cdot h$ kpm. Zároveň se m kg kapaliny o specifickém teple c ohřeje z teploty t_1 na teplotu t_2 , k čemuž se spotřebuje teplo $Q = c \cdot m \cdot (t_2 - t_1)$ kcal. Z rovnice $A = \mathcal{J} \cdot Q$, neboli $k \cdot G \cdot h = \mathcal{J} \cdot c \cdot m \cdot (t_2 - t_1)$, lze pak určit konstantu $\mathcal{J} = \frac{A}{Q}$, jež udává množství mechanické práce, kterou je třeba vynaložit, abychom získali jednotku tepla a které se říká *mechanický ekvivalent tepla*.

Užívající jednotek energie, definovaných mezinárodní energetickou konferencí roku 1930, přijali jsme pro tuto veličinu hodnotu 427 kpm/kcal,⁷⁾ Joule našel však z velkého počtu pečlivých měření toliko 424,9 kpm/kcal. Příčinou nepřesnosti bylo, že práce tíže se ztrácela také mimo kalorimetr, třením v ose kladky, i v ose nesoucí lopatky a nedokonalou ohebností šňůry. Tření v kalorimetru zvětšil Joule tím, že do něho vložil pevné stěny se zářezy, jimiž procházela ra-

⁵⁾ Julius Robert von Mayer (1814–1878) byl k myšlence rovnomocnosti práce a tepla přiveden náhodou, když jako loďní lékař plul na Jávě a s překvapením uslyšel od kormidelníka, že voda rozbouřeného moře je vždy teplejší než v moři klidném. Dalším bádáním dospěl pak k jasné souvislosti práce a tepla.

⁶⁾ Propracoval jej Hermann von Helmholtz (1821–1894), rovněž lékař, v pojednání *Über die Erhaltung der Kraft (= Energie)*, jež bylo uveřejněno roku 1847.

⁷⁾ Za nej přesnější byla považována hodnota 426,80 kpm/kcal. (Valouchovy tabulky, 13. vyd., 1949, str. 205.) Viz však také pozn. 8 a poznámku na konci článku.

mena otáčejících se lopatek a protlačovala rtuť. Když nahradil rtuť v kalorimetru vodou, vyplynuly z dvou sérií vykonaných pozorování výsledky 425,0 kpm/kcal a 426,3 kpm/kcal. Joule se pokusil mimo to brzdit pád závaží třením otáčející se kovové desky, přitlačené k stejné desce pevné a dospěl k hodnotám 425,6 kpm/kcal a 426,7 kpm/kcal.

Aby zkontroloval tyto výsledky (tato pečlivost by mohla být klasickým příkladem jedině správného vědeckého postupu), stlačil Joule při jiných pokusech vzduch hustilkou, stanovil teplo Q , jež stlačením vzniklo, i kompresní práci A a ukázal, že poměr $\mathcal{J} = \frac{A}{Q}$ na velikosti komprese nezávisí a že jeho hodnota souhlasí v mezích pozorovacích chyb s výsledky dříve nalezenými.

Dodám ještě, že moderní kalorimetrická měření užívají metod elektrických, jež poskytují výsledky v joulech. Při přepočítávání kalorie však shledáváme, že hodnota závisí na výsledcích měření, jež udávají specifické teplo vody mezi teplotami 14,5 °C a 15,5 °C v joulech. V SSSR je tato nevýhoda odstraněna tím, že kalorie je definována vztahem 1 cal = 4,182 joulů⁸); tato hodnota odpovídá však spíše kalorii 20stupňové než tzv. Maxwellově kalorii 15stupňové u nás běžné.

Čtenáři by mohli ještě poznamenat, že také stroje vykonávají přeměnu energie v práci. Např. parní stroje získávají mechanickou práci z tepla; bylo by tedy jistě možné a snad i vhodné vykonat na nich příslušná měření. Taková měření byla vskutku provedena, ukázalo se však, že jsou obtížnější a méně přesná⁹) než v případech, kdy se mechanická práce mění v teplo, a proto bylo od nich upuštěno.

Poznámka. Upozorňuji, že podle rezoluce Mezinárodní konference pro míry a váhy z roku 1949 bude jednotkou tepelného množství napříště 1 joule; specifická tepla budou udávána v joulech na kilogram a stupeň apod. V podrobnostech odkazuji čtenáře na novou československou normu ČSN 01 1301 zv. *Veličiny, jednotky a značky ve fyzice* (vyd. SÚVN, Praha).

Cvičení:

Při laboratorní práci použili žáci široké skleněné trubice délky 1 m, na obou koncích uzavřené, a v ní 2 kg rtuti o specifickém teple $0,033 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grad}}$. Když se teplota s okolím vyrovnala a byla naměřena, otočili trubicí 50krát ve svislé rovině. Shledali, že teplota rtuti se během trvání pokusu zvýšila o 7,1 °C. Předpokládejte, že trubice byla tepelně dokonale izolována a určete mechanický ekvivalent tepla.

(Pokračování)

⁸) Ve Valouchových tabulkách (13. vyd., 1949) jsou na str. 205 jednotky tepla přepočítávány na jednotky mechanické práce vztahem 1 cal = 4,1855 joulů. Dnes klademe, užívající ekvivalentů toliko jako převodních vztahů, směnný kurs definitoricky takto: 1 cal = 4,1867 joule.

⁹) Připomínám např. Hirnova měření v letech 1860 a 1861. Získané výsledky činily 420 až 432 kpm/kcal.

Skončil osmý ročník Matematické olympiády

Žákovské matematické soutěže mají v Československu bohatou tradici: Vždyť J e d n o t a č s. m a t e m a t i k ů a f y z i k ů už od svého založení pečovala o zvyšování úrovně vyučování v matematice tím, že ve svých časopisech uveřejňovala matematické, fyzikální a deskriptivní úlohy určené našim studentům. Snaha, aby se úroveň soutěžících soustavně zvyšovala a aby matematická soutěž obsáhla co nejširší okruh řešitelů, vedla před více než osmi lety naše školské a vědecké pracovníky k myšlence pořádat každoročně pro žáky našich středních škol zvláštní soutěž zvanou *Matematická olympiáda* (MO). Na organizaci soutěže, která během uplynulého školního roku 1958—59 procházela už svým osmým ročníkem, se každoročně podílí ministerstvo školství a kultury spolu s Matematickým ústavem Československé akademie věd a Ústředním výborem Československého svazu mládeže. Protože počet řešitelů MO jde každým rokem do tisíců, nemohla by se takováto akce vůbec konat, kdyby nebylo obětavé práce velké řady školských pracovníků v celé naší republice; ti totiž opravují žákovská řešení, organizují soutěž v krajích a okresích a pořádají besedy a zájmové kroužky pro účastníky MO.

Čtenáře našeho časopisu nemusíme jistě příliš seznamovat s organizačním řádem MO, vždyť se v uplynulých ročnících o této soutěži na stránkách *R o z h l e d ů* častěji psalo a řadu našich čtenářů najdeme též v seznamech úspěšných řešitelů MO.

Všimněme si nyní ve stručnosti průběhu posledního, osmého ročníku naší soutěže. V první polovině školního roku 1958—59 řešili žáci úlohy prvního kola MO a kvalifikovali se tak pro účast v kole druhém. Výběr řešitelů do druhého kola provedly pro kategorie A, B, C krajské výbory MO, pro kategorii D, v níž soutěží žáci osmých tříd, pak okresní výbory MO. Pro vyšší kategorie (A, B, C) bylo druhé kolo uspořádáno v krajských městech v neděli 12. dubna 1959, kategorie D měla své druhé kolo v jednotlivých okresích v neděli 26. dubna 1959. Podle organizačního řádu MO má druhé kolo charakter školní písemné práce s pedagogickým dozorem krajských nebo okresních výborů MO. Pro kategorie B, C, D druhým kolem celá soutěž končí, pro úspěšné řešitele z kategorie A (v níž soutěží studenti nejvyšších tříd jedenáctiletých a odborných škol) pokračuje ještě třetím kolem. Toto závěrečné kolo MO se konalo v Praze v sobotu 23. května 1959 a bylo k němu pozváno 76 nejlepších řešitelů z celé republiky. Sobotní dopoledne bylo věnováno vlastní soutěži, zatímco odpoledne vyplnila tradiční už beseda s účastníky třetího kola a s širší školskou a mimoškolskou veřejností. Beseda se konala (podobně jako v uplynulých letech) ve velké posluchárně Matematického ústavu Karlovy university v Praze II., Ke Karlovu 3; zahájil a řídil ji akademik J o s e f N o v á k, předseda Ústředního výboru Matematické olympiády. Naši studenti vyslechli referát prof. dr. J o s e f a M e t e l k y o elektronkových počítačích strojích z hlediska matematiky a referát prof. dr. V á c l a v a P l e s k o t a o významu matematiky pro technické studium. Živá rozprava, která

pak následovala, musela být asi v 17 hodin přerušena, neboť mladí olympionikové měli program i na sobotní večer. Po společné večeři navštívili divadelní představení v Ústředním divadle československé armády.

Z účastníků třetího kola vybral Ústřední výbor MO dvacet nejlepších, kteří byli prohlášeni vítězi osmého ročníku a byli odměněni diplomem a hodnotnými cenami. Také v jednotlivých krajích a okresech byly uděleny diplomy a ceny; řešitelé je dostali podle rozhodnutí krajských a okresních výborů MO (po dohodě s odborem školství a kultury rady KNV nebo ONV).

Závěrem chceme říci, že se o MO zajímá stále širší veřejnost. Není to přitom jen veřejnost školská a rodičovská, nýbrž zprávy o naší soutěži přináší i denní tisk a Československý rozhlas. Tak např. pražský list „Večerní Praha“ přinesl v dubnu a v květnu dvě zprávy o MO na pražských školách (25. dubna a 23. května 1959). Informace o naší olympiádě pronikají i do zahraničí: Tak např. sovětský časopis *Matematika v škole* (1958, čís. 3, str. 80–83) přinesl obsáhlý článek J. M. G a j d u k a o MO v ČSR a také západoněmecký časopis *A r c h i m e d e s*, určený středoškolským studentům, si všímá našich soutěží v dvojstránkovém příspěvku (1959, čís. 1, str. 11–12).

Úlohy IX. ročníku Matematické olympiády

Uveřejňujeme první trojici úloh I. kola letošního devátého ročníku Matematické olympiády. Řešení prvních tří úloh odevzdají žáci svému učiteli matematiky do 19. prosince 1959.

Prosíme čtenáře, aby upozornili referenty MO na školách na texty těchto úloh. Leták s úlohami bude vytištěn v druhé polovině měsíce října t. r. Zařazení žáků do jednotlivých kategorií provede referent MO spolu s učitelem matematiky a po dohodě s předsedou krajského nebo okresního výboru MO.

Kategorie A

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2}{a+b+c}.$$

2. Jsou dány dvě různoběžné roviny P, Q o průsečnici p ; v rovině P je dán bod A a v rovině Q je dán bod C , přičemž žádný z bodů A, C neleží na přímce p .

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$), jemuž lze kružnici vepsat, a to takový, aby bod B ležel v rovině P a bod D v rovině Q .

3. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř úsečky je dán pohyblivý bod M ; nad úsečkami AM, BM jako stranami sestrojíme dva čtverce $AMCD, BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině vytyčené přímkou AB . Těmto čtvercům opišeme kružnice; ty se vedle bodu M protínají ještě v dalším bodu N .

- a) Dokažte, že přímky AE, BC procházejí bodem N .
- b) Dokažte, že přímka MN prochází určitým pevným bodem.
- c) Vyšetřte geometrické místo středů úseček, které spojují středy obou uvažovaných čtverců.

Kategorie B

1. Určete všechna reálná čísla x , pro která platí:

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1$;

c) $\sqrt{x + \sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$.

(Přitom odmocnina má smysl jen pro nezáporná čísla.)

2. V rovině je dán trojúhelník ABC . Uvnitř úsečky AC sestrojte bod X a uvnitř úsečky BC bod Y tak, aby platilo:

(1) $XY \parallel AB$,

(2) obvod trojúhelníka CXY je roven obvodu lichoběžníka $ABYX$.

3. Buď dáno přirozené číslo n . Dokažte:

a) Jestliže je číslo n sudé, potom je číslo $3^n + 63$ dělitelné číslem 72.

b) Jestliže je číslo $3^n + 63$ dělitelné číslem 72, potom je číslo n sudé.

Kategorie C

1. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle PCQ$ a bod V . Sestrojte trojúhelník ABC , jehož vrchol A leží na polopřímce CP a jehož vrchol B leží na polopřímce CQ , a to takový, že bod V je průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka.

Má-li mít úloha řešení, je třeba, aby bod V měl vzhledem k danému úhlu $\sphericalangle PCQ$ určitou polohu; rozlište jednotlivé případy a konstrukci hledaného trojúhelníka proveďte pro každý případ zvlášť.

2. Pravidelný čtyřboký hranol o podstavné hraně velikosti a (v cm) a výšce velikosti v (v cm) má tu vlastnost, že číslo udávající jeho povrch (v cm^2) je rovno číslu, které udává jeho objem (v cm^3); přitom a, v jsou přirozená čísla.

Najděte všechny takové hranoly a vypočítejte k nim příslušná čísla a, v .

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , který má tu vlastnost, že ho lze přímkou p vedenou jedním z jeho vrcholů rozdělit na dva trojúhelníky, které jsou oba rovnoramenné.

Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka ABC , a to vzhledem k tomu, kterým z bodů A, B, C byla přímka p vedena.

Kategorie D

1. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC o odvěsnách $CA = CB = 2$ dm. Kolem každého jeho vrcholu opišeme kružnici o poloměru 1 dm. Oblouky těchto kružnic oddělí z trojúhelníka ABC tři kruhové výseče a z trojúhelníku zbude obrazec, jehož obsah označíme x .

Vypočítejte, kolik procent je číslo x z obsahu daného trojúhelníka.

2. Kolika způsoby je možno napsat číslo 99 jako součet tří různých prvočísel? (Přitom nehledíme na pořádek sčítanců.)

3. Je dán dutý úhel $\sphericalangle PAQ$ a úsečka velikosti d .

Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na polopřímce AP a jehož vrchol D leží na polopřímce AQ , přičemž víme, že součet velikostí úhlopříček AC , BD je roven číslu d . Má úloha vždycky řešení? (Viz učebnici: Dr. J. Pírek, Geometrie pro 8. roč., SPN, vyd. z r. 1958, str. 25, př. 16.)

Výsledky Fyzikální olympiády Pražského kraje

Ve školním roce 1958/59 uspořádala Jednota čs. matematiků a fyziků, odbočka v Praze, spolu s Krajským pedagogickým ústavem v Praze - ÚNV, pro žáky 10. a 11. postupného ročníku škol v Pražském kraji Fyzikální olympiádu, která měla za účel budit zájem žáků o fyziku a studium přírodních i technických věd.

První kolo FO končilo 15. dubna 1959. V něm měl každý účastník soutěže vyřešit nejméně osm z dvanácti daných úloh (jež byly rovněž uveřejněny v minulém ročníku Rozhledů) s prospěchem aspoň dobrým.

Prvého kola soutěže se účastnilo celkem 229 řešitelů z 29 škol. Z toho bylo 26 jedenáctiletých středních škol pražských, 1 průmyslová škola (Vyš. prům. škola strojnická, Praha 1, Masná) a 2 jedenáctileté střední školy mimopražské (Brandýs n. L. a Klatovy).

Do druhého kola postoupilo 24 účastníků kategorie A a 23 účastníků z kategorie B, z nichž však 3 se ke konečné soutěži nedostavili. Druhé kolo FO se konalo v neděli 17. května 1959 v budově elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze 2, Karlovo nám. Po uvítání účastníků předsedou pražské odbočky JČMF prof. dr. J. B. Slavíkem byly zadány žákům v obou kategoriích 4 příklady k řešení a po jejich odevzdání vyslechli účastníci přednášku dr. Oldřicha Taraby o užití ultrazvuku, doprovázenou pokusy, promítáním diapozitivů a filmu. V závěru soutěže byl žákům oznámen výsledek druhého kola. Knižními a věcnými cenami bylo odměněno 15 úspěšných účastníků kategorie A a 8 z kategorie B.

Soutěž splnila svůj úkol, vzbudila značný zájem žáků a podala cenné zkušenosti o znalostech žáků i jejich nedostatcích. Mnohé z příkladů byly řešeny zcela odlišnými a často vtipnými obraty, jež však někdy vedly k chybným výsledkům. Některá řešení ukazují, že na mnohých školách se neřeší fyzikální úlohy (pokud možno) o b e c n ě a nepočítá se s rozměry fyzikálních veličin. Hlavně u příkladů prvního kola žáci často dosazovali do výrazů a rovnic hodnoty veličin v různých soustavách. Rozlišení hmoty a váhy stále žákům dělá potíže. Ve druhém kole nepříjemně překvapilo, že žáci desátých tříd nedovedou použít základní rovnici dynamiky $F = m a$, což svědčí o úplném nepochopení Newtonových pohybových zákonů.

Politováníhodné nepochopení smyslu soutěže projevili účastníci školy, kde celé desítky žáků zaslaly zcela nesamostatně pracovaná řešení, opsaná z téže předlohy. Je pochopitelné, že takové nesamostatné práce byly zásadně ze soutěže vylučovány.

Tyto nemilé případy jsou ovšem daleko vyváženy radostnou a snaživou prací ostatních soutěžících. - Jednota československých matematiků a fyziků zamýšlí ve školním roce 1959/60 uspořádat Fyzikální olympiádu v celostátním měřítku. Neopomeneme v Rozhledech čtenáře přesně informovat. Evžen Říman

Sovětská raketa na Měsíci

Sovětská raketa vypuštěná 12. září 1959 dosáhla měsíčního povrchu v neděli 13. září 1959 ve 22 hod. 02 min. 24 vt. SEČ (tj. 14. 9. v 00 hod. 2 min. 24 vt. moskevského času).

Jiří V. Svoboda

Dorůstá

Ještě hodinu, půl, ještě deset minut, pět . . . Měsíci, co ty víš! Ještě chvíli - a již dosáhne na tebe tenhle naš lidský svět.	Dosáhne. Dosáhl. 22 hodiny, 2 minuty, 24 vteřiny. A ta dvacátá pátá vteřina je chvíle, kdy velkooké dítě prvně dosáhlo na kliku a otevřelo dveře, za nimiž cosi velikého začíná.	Dveře vesmíru jsou otevřené a na měsíc dopadla lidská slova z jitřní šestiny země. Dál svítí měsíc, svítí do nachova. (Úryvek z básně)
--	---	---

Snad jen opravdu básník je schopen vyjádřit slovy ono vzrušení, jež se zmocnilo celého světa v dychtivém očekávání výsledku vypuštění sovětské rakety na Měsíc. Myslím, že nikdy hlas moskevské rozhlasové stanice nezněl z tolika přijímačů jako v onen historický okamžik, kdy raketa dopadala na měsíční povrch. Připomeňme si dnes aspoň některá fakta z průběhu letu rakety.

Let rakety trval asi 36 hodin a skládal se ze dvou úseků. V první části, trvající několik minut, byla raketa hnána motory jednotlivých stupňů, jež v okamžiku vypnutí motoru poslední části udělily raketě rychlost o něco větší než je parabolická rychlost. Pro tento úsek bylo třeba vymyslet a zkonstruovat složitý systém řízení, který, ve spojení s počítačimi stroji na Zemi, zaručil dodržení nutných počátečních parametrů dráhy pro druhý úsek letu. V něm nastal již volný, neřízený let po téměř hyperbolické dráze. Představu o míře přesnosti na konci prvního úseku poskytují třeba tyto skutečnosti: Odchylka jen o 10 m/s, tj. o 0,1 % od vypočtené hodnoty rychlosti, vede k odchylce místa dopadu již o 2500 km (průměr měsíce je 3476 km). Odchylka vektoru rychlosti od stanoveného směru o jednu úhlovou minutu má za následek změnu místa dopadu o 200 km. Během volného letu se rychlost působením zemské gravitace zmenšovala asi až na 2 km/s, kdy působením měsíční gravitace znovu vzrůstala až na 3,3 km/s v okamžiku pádu na Měsíc.

Vyslání rakety na Měsíc nemá však jen obrovský vědecký význam, který v tomto článku nelze vůbec hodnotit. Umístění státních znaků Sovětského svazu mezi *M o ř e j a s u* a *M o ř e k l i d u* téměř symbolicky podtrhuje snahu Sovětského svazu o zajištění míru na celém světě, snahu, jež v minulých dnech byla znovu jasně celému světu prokázána cestou s. Chruščova do Spojených států a návrhem odzbrojení předneseným v OSN.

Dosažení Měsíce raketou vyrobenou rukama sovětských lidí v každém z nás znovu utvrzuje přesvědčení, že cesta pravdy a pokroku, zvolená socialistickou částí světa, je jediné správná.

Jaroslav Chudý

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

Padesáterý	piezometr
pájedlo i pájidlo	plamének i plamínek
pájka	planetárium
paládium	planetoid
panchromasie i panchromázie	planisféra
panoráma, 2. p. panoramatu (stř.), nebo	plánograf
panorámy (ž)	plasma i plazma
panoramatický	plató (nesklonné)
panorámový	Plejády
papila	plnicí (např. pero)
pára, parou (např. plnou), jinak párou	plnicí (kdo plní)
paradox	plochý, plošší
parafin i parafín	plus, plusu (muž. i stř.)
paralaxa, paralaktický	plutonium
paralela	počítací
paralelní	počítač
parciální	počítadlo
parník	poddimensovati i poddimenzovati
parojem	pohrouziti i pohroužiti
parostrojní	pól
pás, pásu, pásový (např. traktor)	polára
pasát	polarimetr
pasíva	polarisace i polarizace
pasivní i pasívní	polarisátor i polarizátor
pausa i pauza	polarita
pausovací i pauzovací (např. papír)	polarograf
pentaedr	polokruh i půlkruh
pentagon	polokulatý i půlkulatý
pentoda	polonium
percentuální	polooblouk i půloblouk
perihélium	polyedr
perioda	polygon, polygonní
periskop	polygonální
pérko (pružina)	polymer
permeabilita	polynom
permutace	polytechnický
pero i péro, 2. p. per	polytechnisace i polytechnizace
perokresba	popularisace i popularizace
pérování	porcelán
peroxyd	porosita i porózita
perpetuum mobile	pórovitý
perspektiva, perspektivní	porózní, porézní i porosní, porésní
pěťadvacet	positiv i pozitiv
pěťapůl i pět a půl	positivní i pozitivní
pěťapůlkrát	positron i pozitron
pětice	potápěč
pětičlenný	potaš
pětisetletý	potenciál
pětistovka	pozice i posice

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Emil Kraemer, František Hradecký, Vítězslav Jozífek: Sbíрка řešených úloh z matematiky pro 6.—8. ročník.

Při volbě příkladů se autoři snažili o to, aby vybrali úlohy, jež se v dosavadních sbírkách nevyskytovaly vůbec, nebo v malém rozsahu. Za každým řešeným příkladem je připojen nejméně jeden příklad neřešený, který se počítá analogicky. Pomůcka poslouží učitelům osmiletých středních škol i žákům pedagogických škol a pedagogických institutů k prohloubení učiva matematiky.

Str. 243, cena brož. výt. Kčs 7,50. K dostání ve Službě škole.

Rudolf Zelinka - inž. Jan Chramosta, Vítězslav Jozífek: Geometrie pro čtyřleté zemědělské technické školy.

Učební text pro všechny obory zemědělských technických škol. 3. upravené vydání.

Str. 215, cena váz. výt. Kčs 7,80. K dostání v propagačním a knižním podniku ÚSSD.

RNDr. Alois Mazurek - RNDr. Stanislav Láška: Fyzika

Učební text pro II. ročník průmyslových škol chemických. 3. upravené vydání.

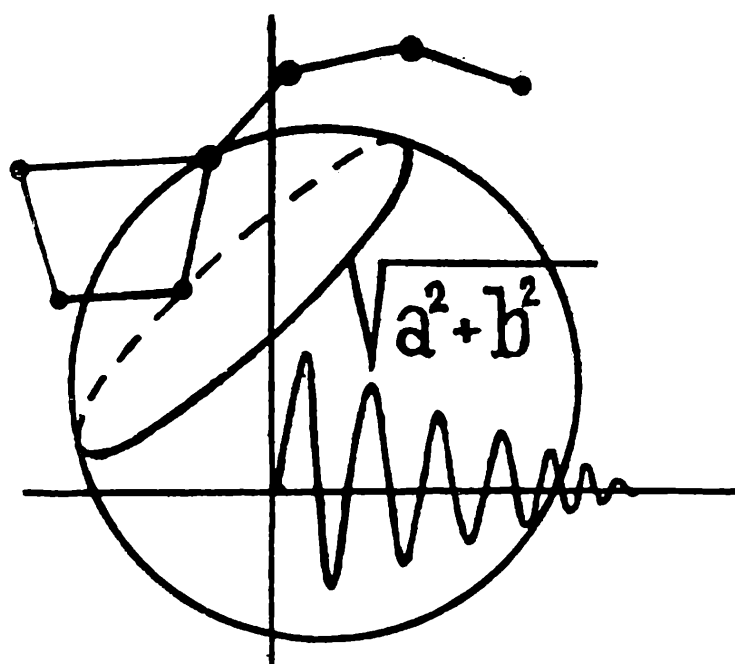
Str. 277, cena brož. výt. Kčs 10,90. K dostání v n. p. Kniha.

František Kubíček - dr. Tadeáš Gajdoš - dr. Bohumil Sobotka: Matematika pro 3. a 4. ročník průmyslových škol s mimořádnými způsoby studia. 1. vydání.

Str. 445, cena brož. výt. Kčs 12,30. K dostání v prodejnách n. p. Kniha.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



3

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 3

Toto číslo vyšlo 15. listopadu 1959

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

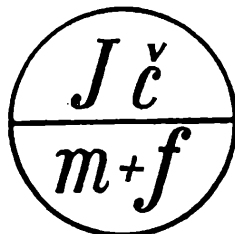
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelinek, MŠK, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; Jiří Sedláček, kand. věd mat., ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

O B S A H

Dr. J. Brejcha: Některé méně známé relace mezi goniometrickými funkcemi	97
J. Voráček a T. Jančar: O největších hodnotách některých funkcí (Dokončení)	100
V. Kuběnková: Jednoduché statistické metody ve zdravotnictví	104
Inž. J. Kodeš: Fyzikální výklad usměrňujícího účinku polovodičů	109
J. Cochlar: Polovodičové triody (transistory)	114
J. Dvořák: Lékařský teploměr	117
Inž. B. Šesták: O kovových krystalech (Dokončení)	122
P. Schürer: Jak získáváme nízké tlaky (Dokončení)	126
Prof. dr. W. Hanle: Vliv záření bohatého na energii (Dokončení)	128
Řešení úloh	133
J. Kotyk: James Prescott Joule (Pokračování)	141
P. Zuman: Československý vědec nositelem Nobelovy ceny	143
Soutěž o nejlepší rys	144
I. ročník Fyzikální olympiády	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06571 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Höning.

Matematika

Josef Brejcha, VUT, Brno:

Některé méně známé relace mezi goniometrickými funkcemi

V známém vzorci pro součet n členů geometrické posloupnosti

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

položme za x komplexní číslo $x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Po dosazení vychází za současného použití Moivreovy věty:

$$1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] = \frac{1 - r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}{1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

Rozšíříme-li zlomek na pravé straně výrazem

$$1 - r \cos \varphi + ir \sin \varphi,$$

obdržíme po snadné úpravě:

$$\begin{aligned} & 1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + \\ & + r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] = \\ & = \frac{1 - r \cos \varphi - r^n \cos n\varphi + r^{n+1} \cos(n-1)\varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + \\ & + i \frac{r \sin \varphi - r^n \sin n\varphi + r^{n+1} \sin(n-1)\varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \end{aligned}$$

Oddělením reálných a imaginárních částí rozpadá se poslední vztah na dvě rovnice, a to:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & 1 + r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \dots + r^{n-1} \cos(n-1)\varphi = \\ & = \frac{1 - r \cos \varphi - r^n \cos n\varphi + r^{n+1} \cos(n-1)\varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots + r^{n-1} \sin (n-1) \varphi = \\ = \frac{r \sin \varphi - r^n \sin n\varphi + r^{n+1} \sin (n-1) \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}. \end{aligned}$$

Ježto n je konečné přirozené číslo, platí tyto vztahy pro každou hodnotu r . Klademe-li $r = 1$ a užijeme-li známých relací

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \beta - \cos \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned}$$

nabude pravá strana rovnice $\alpha)$ tvaru

$$\frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi \cos \frac{1}{2} (n-1) \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}.$$

Podobně užitím vzorců $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cotg \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha - \sin \beta =$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

nabude pravá strana rovnice $\beta)$ tvaru

$$\frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi \sin \frac{1}{2} (n-1) \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}.$$

Zavedeme-li nyní označení

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\varphi &= 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos (n-1) \varphi, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\varphi &= \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin (n-1) \varphi, \end{aligned}$$

obdržíme z rovnic $\alpha)$, $\beta)$ známé relace

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi \cos \frac{1}{2} (n-1) \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k\varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi \sin \frac{1}{2} (n-1) \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}. \quad (2)$$

Klademe-li do rovnice (2) 2φ místo φ a uvažíme-li, že platí $\sin k2\varphi = 2 \sin k\varphi \cos k\varphi$, vychází

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k\varphi \cos k\varphi = \frac{\sin n\varphi \sin (n-1)\varphi}{2 \sin \varphi}. \quad (3)$$

Ze známých rovnic

$$\sin^2 k\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k\varphi,$$

$$\cos^2 k\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2k\varphi,$$

kam za k klademe postupně $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ a vzniklé relace sečteme, najdeme s ohledem na rovnici (1):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 k\varphi = \frac{n}{2} - \frac{\sin n\varphi \cos (n-1)\varphi}{2 \sin \varphi}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 k\varphi = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\varphi \cos (n-1)\varphi}{2 \sin \varphi} \quad (5)$$

Budiž nyní r libovolné číslo, α a φ libovolné úhly. Do identity

$$\cos r(\alpha + k\varphi) = \cos r\alpha \cos kr\varphi - \sin r\alpha \sin kr\varphi$$

kladme zase $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ a vzniklé rovnice sečteme.

Vychází:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos r(\alpha + k\varphi) = \cos r\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos kr\varphi - \sin r\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sin kr\varphi \quad (6)$$

a podobně

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin r(\alpha + k\varphi) = \sin r\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \cos kr\varphi + \cos r\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sin kr\varphi. \quad (7)$$

S ohledem na známé vzorce

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \text{ jakož i na vztahy (1) a (2) určíme:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos r(\alpha + k\varphi) &= \cos r\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos kr\varphi - \sin r\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sin kr\varphi = \\ &= \cos r\alpha \frac{\sin \frac{1}{2} nr\varphi \cos \frac{1}{2} (n-1)r\varphi}{\sin \frac{1}{2} r\varphi} - \sin r\alpha \frac{\sin \frac{1}{2} nr\varphi \sin \frac{1}{2} (n-1)r\varphi}{\sin \frac{1}{2} r\varphi} = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} nr\varphi [\cos r\alpha \cos \frac{1}{2} (n-1)r\varphi - \sin r\alpha \sin \frac{1}{2} (n-1)r\varphi]}{\sin \frac{1}{2} r\varphi} = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} nr\varphi \cos r[\alpha + \frac{1}{2} (n-1)\varphi]}{\sin \frac{1}{2} r\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Zcela analogicky platí:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin r(\alpha + k\varphi) = \frac{\sin \frac{1}{2} nr\varphi \sin r[\alpha + \frac{1}{2} (n-1)\varphi]}{\sin \frac{1}{2} r\varphi}. \quad (9)$$

Všechny dosavadní rovnice platí pro každý úhel φ . Položme nyní speciálně

$$\varphi = \frac{2\pi}{n};$$

pak bude $\sin \frac{1}{2} n\varphi = \sin \pi = 0$, $\sin n\varphi = \sin 2\pi = 0$; tím rovnice (1) až (5) nabudou tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos k \frac{2\pi}{n} &= 0, & \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin k \frac{2\pi}{n} &= 0, \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin k \frac{2\pi}{n} \cos k \frac{2\pi}{n} &= 0, \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin^2 k \frac{2\pi}{n} &= \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos^2 k \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Nechť nyní ve vzorcích (8) a (9) znamená r celé číslo; po substituci $\varphi = \frac{2\pi}{n}$

vznikne v čitateli faktor $\sin r\pi = 0$, ve jmenovateli faktor $\sin \frac{r\pi}{n}$, který je od nuly tehdy různý, není-li číslo r násobkem čísla n . Za předpokladu tedy, že r je celé číslo a není násobkem čísla n , platí:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos r \left(\alpha + k \frac{2\pi}{n} \right) &= 0, \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin r \left(\alpha + k \frac{2\pi}{n} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Je-li však $r = hn$, h libovolné číslo celé, pak v rovnicích (6) a (7) je $\cos kr\varphi = \cos kh \cdot 2\pi = 1$, $\sin kr\varphi = \sin kh \cdot 2\pi = 0$ a vychází za předpokladu, že r je násobkem n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos r \left(\alpha + k \frac{2\pi}{n} \right) &= n \cos r\alpha, \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin r \left(\alpha + k \frac{2\pi}{n} \right) &= n \sin r\alpha. \end{aligned}$$

Jan Voráček, VPŠ Olomouc; Tomáš Jančar, SPN, Praha:

O největších hodnotách některých funkcí

(Dokončení)

3. Využijeme nyní znalostí, získaných v předešlých odstavcích k řešení několika příkladů:

Příklad 1. Nádobu s vertikálními stěnami výšky h stojí na vodorovné ro-

vině. Z nádoby vytéká kapalina otvorem vzdáleným o x od horního okraje nádoby. Jaké musí být x , aby vzniklý vodní paprsek dopadl co nejdále od stěny nádoby? (Víme, že rychlost vytékající kapaliny je $v = \sqrt{2gx}$, odpor vzduchu zanedbáváme.)

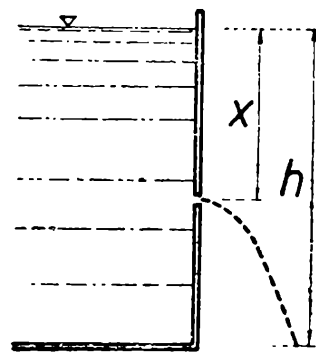
Řešení: Pohyb kapaliny se skládá z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru výtoku a z volného pádu na základní rovinu. Dráha volného pádu, kterou musí kapalina urazit do dopadu na základní rovinu, je $h - x$ a podle známého vzorce pro volný pád je (obr. 1)

$$h - x = \frac{gt^2}{2},$$

kde t znamená čas. Z této rovnice plyne

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} (h - x)}$$

pro dobu trvání pohybu. Za tento čas však urazí část vodního paprsku rovnoměrným přímočarým pohybem dráhu



Obr. 1

$$s = vt = \sqrt{2gx} \sqrt{\frac{2}{g} (h - x)} = 2 \sqrt{x(h - x)}$$

Úkolem je nalézt x tak, aby s byla maximální. Pišme tedy

$$s = 2 (x)^{\frac{1}{2}} (h - x)^{\frac{1}{2}}$$

Jelikož $x + h - x = h$ má, podle předchozího, s maximální hodnotu pro

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{h - x}{\frac{1}{2}},$$

neboli

$$x = \frac{h}{2},$$

kapalina tedy dopadne nejdále od stěny nádoby, bude-li výtokový otvor v polovině výšky stěny.

Příklad 2. Který ze všech pravoúhlých rovnoběžníků obvodu $4a$ má maximální obsah?

Řešení: Polovina obvodu je $2a$, takže označíme-li jednu ze stran rovnoběžníka x , bude druhá strana $2a - x$. Pro obsah P potom vychází:

$$P = x(2a - x).$$

Protože $x + 2a - x = 2a$, bude P maximální pro

$$x = 2a - x ,$$

neboli

$$x = a .$$

Hledaný rovnoběžník je tedy čtverec o straně a .

P ř í k l a d 3. Vodní kapka počáteční hmoty m_0 padá pod účinkem gravitační síly, přičemž se stejnoměrně vypařuje tak, že úbytek hmoty je přímo úměrný času (koeficient úměrnosti je k). Po kolika vteřinách od počátku pádu bude mít kapka maximální kinetickou energii a jak velká bude tato energie? (Odpor vzduchu zanedbáváme.)

Ř e š e n í : Úbytek hmoty je přímo úměrný času, takže je dán vztahem

$$\Delta_m = kt .$$

Hmota kapky za t vteřin od počátku pádu tedy bude

$$m = m_0 - kt .$$

Za čas t nabude kapka při volném pádu rychlosti (g = gravitační zrychlení)

$$v = gt .$$

Pro kinetickou energii W kapky po t vteřinách od počátku pádu tedy vychází

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (m_0 - kt) (gt)^2$$

Tento výraz můžeme upravit na tvar

$$W = \frac{g^2}{2k^2} (m_0 - kt) (kt)^2$$

Protože $m_0 - kt + kt = m_0$, bude součin vpravo maximální pro

$$m_0 - kt = \frac{kt}{2} ,$$

z čehož potom vychází pro t

$$t = \frac{2m_0}{3k} .$$

Dosazením do vzorce pro W snadno vypočteme maximální hodnotu W :

$$W_{\max} = \frac{2m_0^3 g^2}{27k^2}$$

Vodní kapka tedy nabývá maximální kinetické energie $\frac{2}{27} \frac{m_0^3 g^2}{k^2}$ ergů po $\frac{2}{3} \frac{m_0}{k}$ vteřinách volného pádu.

P o z n á m k a : Pro konstantu k vychází fyzikální rozměr $(k) = \frac{g}{\text{sec}}$. Odpovídá to fyzikálnímu smyslu této konstanty?

Příklad 4. Obvod rovnoramenného trojúhelníka je $2p$. Jaké musí být jeho strany, aby objem kužele vytvořeného rotací trojúhelníka kolem výšky na základnu byl maximální?

Řešení: Označíme-li ramena trojúhelníka a a základnu x , plyne ihned vztah

$$2a + x = 2p,$$

neboli

$$a = \frac{2p - x}{2}.$$

Pro objem vzniklého rotačního kužele pak máme: (Poloměr podstavy $r = \frac{x}{2}$).

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{1}{3} \pi \frac{x^2}{4} \sqrt{\frac{(2p - x)^2 - x^2}{4}}$$

(Délku výšky lehko vypočteme užitím Pythagorovy věty.) Úpravou zlomku pod odmocnítkem dostáváme:

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{x^2}{4} (p^2 - px)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a další úpravou}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(p^2 - \frac{x}{2} \cdot 2p\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (2p)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{p}{2} - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi \sqrt{p}}{12} x^2 (p - x)^{\frac{1}{2}}$$

Platí $x + p - x = p$ a součin tedy bude maximální pro

$$\frac{x}{2} = \frac{p - x}{\frac{1}{2}},$$

$$\text{z čehož} \quad x = \frac{4p}{5}.$$

Pro ramena rovnoramenného trojúhelníka potom vychází

$$a = \frac{3p}{5}.$$

Hledaný rovnoramenný trojúhelník obvodu $2p$ bude tedy mít základnu délky $\frac{4}{5}p$ a ramena délky $\frac{3}{5}p$.

Příklad 5. Z válcové klády o průměru d se má zhotovit trám tvaru hranolu. Jaké je třeba zvolit rozměry trámu, aby jeho pevnost v ohybu byla maximální? (Pevnost v ohybu trámu je přímo úměrná součinu šířky a čtverce výšky.)

Řešení: Označíme-li x šířku a y výšku trámu, jde o zjištění takového x , pro které součin xy^2 nabývá maximální hodnoty. Z Pythagorovy věty plyne

$$y = \sqrt{d^2 - x^2},$$

takže uvažovaný součin nabývá tvaru

$$x(d^2 - x^2).$$

Upravíme-li jej na tvar

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} (d^2 - x^2)$$

vidíme, že $x^2 + d^2 - x^2 = d^2$ a součin bude tedy maximální pro

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = d^2 - x^2.$$

Pro šířku x dostáváme z toho úpravou

$$x = \frac{d\sqrt{3}}{3}.$$

Ú l o h a : Najděte jednoduchou konstrukci x , které by se dalo užít v praxi.

C v i č e n í : 1. Výkon Peltonovy turbíny je přímo úměrný součinu $u(v - u)$, kde u je proměnná obvodová rychlost turbíny a v je konstantní rychlost vodního paprsku. Pro jaké u je výkon turbíny maximální?

$$u = \frac{1}{2} v$$

2. Řemen může přenášet výkon P až do velikosti

$$P = k \left(Tv - \frac{\omega v^3}{g} \right),$$

kde T je pevnost řemene v tahu, ω jeho specifická váha, v rychlost, k a g číselné konstanty. Při které rychlosti přenáší řemen maximální výkon?

$$\left[v = \sqrt[3]{\frac{gT}{3\omega}} \right]$$

V ě r a K u b ě n k o v á, prom. mat. Výzk. ústav organizace zdravotnictví, Praha:

Jednoduché statistické metody ve zdravotnictví

Matematická statistika, přestože je jedním z nejmladších odvětví matematiky, našla si již cestu do různých jiných vědních oborů, kterým pomáhá k hodnocení jejich závěrů a k potvrzování nových teorií. V biologii a v lékařství je taková pomoc skutečně důležitá, protože závěry, ke kterým vědečtí pracovníci dojdou na základě pozorování a výzkumů, nelze prakticky jiným způsobem dokázat. Zkoumáme-li například působení určitého léku na různé osoby, nemůžeme nikdy předem vyloučit všechny vedlejší vlivy, které by mohly působit na zdravotní stav a eventuálně zkreslit naše závěry. V ostatních vědách, například ve fyzice, se s těmito těžkostmi nesetkáváme tak často, protože obvykle můžeme vedlejší pod-

mínky, které by mohly mít na výsledek pokusu vliv, vyloučit tím, že je ponecháme konstantní (např. teplotu, vlhkost vzduchu apod.). V biologii a tím spíše v lékařství to možné není, protože jednak neznáme všechny faktory, které mohou mít na reakci člověka vliv, jednak nedovedeme vyloučit ani ty vlivy, o kterých víme. Přes tyto potíže je třeba i v lékařství vyslovovat teorie, které mají obecnou platnost. Obvykle je lékaři vyslovují intuitivně na základě svých pozorování a svých znalostí. Tato metoda však v sobě skrývá určité nebezpečí. Člověk, který je o něčem přesvědčen, si více všímá případů, které mu jeho závěry potvrzují, ale které přitom nemusí být vždy průkazné. Proto se stalo nezbytným potvrzovat takové závěry metodami matematické statistiky. Při složitých problémech vyžaduje tento úkol pomoci matematika. Při většině úvah však existují jednoduché metody, kterých může každý vědecky pracující lékař k potvrzení svých závěrů používat sám. Ukážeme si několik těchto jednoduchých metod.

Skupinu prvků, v našem případě osob, na kterých si chceme ověřit platnost vyslovené teorie, nazýváme *s o u b o r*. Nemůžeme ovšem sledovat soubor celý, tj. všechny osoby vůbec, ale pouze jeho vybranou část - *s o u b o r v ý b ě r o v ý*. Vždy se snažíme, aby výběrový soubor svým složením se příliš nelišil od souboru všech osob (např. aby v něm nebyli pouze lidé jedné věkové skupiny), abychom mohli získané výsledky skutečně zevšeobecnit na celou populaci. Vlastnosti, které nás u zkoumaných prvků zajímají, nazýváme *z n a k y*. Znaky mohou být buď *k v a n t i t a t i v n í*, (dají se měřit, např. věk, váha) nebo *k v a l i t a t i v n í* (jednoduše je měřit nelze, např. barva). Nejjednodušším kvalitativním znakem je *z n a k a l t e r n a t i v n í*, tj. takový, který nabývá pouze dvou navzájem se vylučujících hodnot (např. muž - žena, očkovan - neočkovan). Ukážeme si několik jednoduchých metod, používaných pro znaky tohoto druhu.

Nejjednodušší a nejčastěji používané typy úloh, zabývajících se alternativními znaky, vedou ke *č t y ř p o l o v é t a b u l c e*. Čtyřpolová tabulka má svůj název od toho, že data, která chceme hodnotit, se dají zapsat do tabulky, skládající se ze čtyř polí a okrajových součtů. Uvedeme si příklad čtyřpolové tabulky. Než se zavedlo očkování proti chřipce, bylo nutno průkazně ověřit hodnotu tohoto očkování. Proto bylo u části zaměstnanců čtyř pražských nemocnic provedeno pokusně očkování. Po přechodu infekční vlny bylo zjištěno, kolik osob onemocnělo ze skupiny očkovaných a kolik ze skupiny neočkovaných. Výsledky byly uvedeny takto:

Tab. 1

	počet osob		celkem
	očkovaných	neočkovaných	
onemocnělo	26	84	110
neonemocnělo	750	389	1139
celkem	776	473	1249

Přesto, že svou strukturou je tato tabulka velice jednoduchá, můžeme pomoci ní odpovědět na různé druhy otázek:

1. V tabulce jsou zachyceny hodnoty ze dvou různých souborů (v naší tabulce 1 očkovaní a neočkovaní) a nás zajímá, zda se tyto dva soubory od sebe významně liší ve výskytu znaku, který sledujeme (v tab. 1 onemocnění chřipkou). Hodnotíme, zda pozorovaný rozdíl ve výskytu sledovaného znaku vybočuje z mezí, které mohou být ještě způsobeny náhodnými odchylkami. Tomuto postupu říkáme *testování homogenity*.

2. Před provedením pokusu jsme vyslovili určitou teorii o složení zkoumaného souboru a provedením pokusu si chceme tuto domněnku potvrdit. Hodnotíme tedy významnost rozdílu napozorovaných hodnot od teoretického předpokladu, a vyjde-li tento rozdíl dostatečně malý, takže ho můžeme považovat za nevýznamný, považujeme hypotézu za potvrzenou. Tomuto postupu říkáme *testování dobré shody*.

3. V pozorovaném souboru sledujeme dva kvalitativní znaky a chceme se přesvědčit, zda mezi nimi existuje nějaký vztah, zda se změnou jednoho znaku nastává pravidelně určitá změna znaku druhého. Tomuto vztahu mezi dvěma znaky říkáme *korelace* neboli *závislost*, a proto uvedenému postupu říkáme *testování závislosti*.

Ukážeme si všechny tyto pohledy na čtyřpolovou tabulku na názorných příkladech, spolu se způsobem výpočtu. Abychom se mohli vyjadřovat stručněji, přepíšeme si tabulku pomocí obecných čísel:

Tab. 2

a	b	a + b
c	d	c + d
a + c	b + d	a + b + c + d = N

1. Testování homogenity.

Vezměme si příklad, uvedený v tab. 1. Podle znaku „očkování“ se rozpadá základní soubor pozorovaných osob na dva soubory: soubor očkovaných a soubor neočkovaných. Naším úkolem je přesvědčit se, zda nemocnost ve skupině očkovaných byla skutečně menší než ve skupině neočkovaných, abychom mohli tvrdit, že očkování má žádaný výsledek. Tento závěr si můžeme ověřit několika způsoby.

a) *Pomocí procent*. Spočítáme nejprve % onemocnělých osob a to jak v souboru očkovaných (toto % si označíme p_1), tak v souboru neočkovaných (p_2). Obecně má tento výpočet tvar:

$$p_1 = \frac{100 a}{a + c}, \quad p_2 = \frac{100 b}{b + d}$$

Pro náš případ dostaneme:

$$p_1 = \frac{26 \cdot 100}{776} \doteq 3,35, \quad p_2 = \frac{84 \cdot 100}{473} \doteq 17,76.$$

Na první pohled je zřejmé, že p_1 se od p_2 dosti liší. To ovšem ještě neznamena, že je rozdíl prokázán. Mohlo by se totiž také stát, že by očkování sice nemělo žádný účinek, ale náhodou by se do skupiny neočkovaných dostalo více osob, které snadno podlehnou infekci, čímž by také bylo % onemocnělých ve skupině neočkovaných větší, ale závěr o účincích očkování by byl špatný. Proto si musíme ověřit, že pozorovaný rozdíl je tak velký, že by nemohl být způsoben pouze náhodnými odchylkami ve vlastnostech osob, vybraných do skupiny očkovanych (nebo neočkovaných). Postupujeme tak, že předpokládáme, že ve skutečnosti je % onemocnělých v obou souborech stejné (že tedy očkování účinek nemá), a zjišťujeme, zda se naše napozorované výsledky od tohoto předpokladu liší více, než by se dalo vysvětlit náhodným kolísáním. Tvrdíme tedy vlastně, že soubor očkovanych a neočkovaných jsou dva náhodné výběry z téhož základního souboru, který má % onemocnělých rovno % onemocnělých ze všech zkoumaných osob, tj. v našem příkladě $p_0 = \frac{110 \cdot 100}{1249} = 8,81$, obecně

$$p_0 = \frac{100(a+b)}{N}$$

Vlastní test nyní spočívá v tom, že spočteme výraz

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{a+c} + \frac{p_0 q_0}{b+d}}, \quad (1)$$

který se nazývá směrodatná odchylka rozdílu; kde q_0 značí % prvků, které nemají sledovaný znak, neboli $q_0 = 100 - p_0$. V našem příkladě je q_0 % osob, které chřipkou neonemocněly a rovná se 91,19.

Směrodatná odchylka je obecně charakteristika, která určuje, do jaké míry jsou pozorované hodnoty znaku rozptýleny kolem jejich střední hodnoty (průměru). V souboru, který nazýváme normální, leží 95 % hodnot souboru v intervalu mezi střední hodnotou a $\pm$ dvojnásobkem směrodatné odchylky. Toho použijeme v tomto testu.

Skutečný rozdíl procent $p_1 - p_2$ dělíme touto směrodatnou odchylkou a dostaneme hodnotu, o níž se dá dokázat, že má tzv. normální (Gaussovo) rozložení, které je podrobně tabelováno. Ukážeme si graf tohoto rozložení (obr. 1).

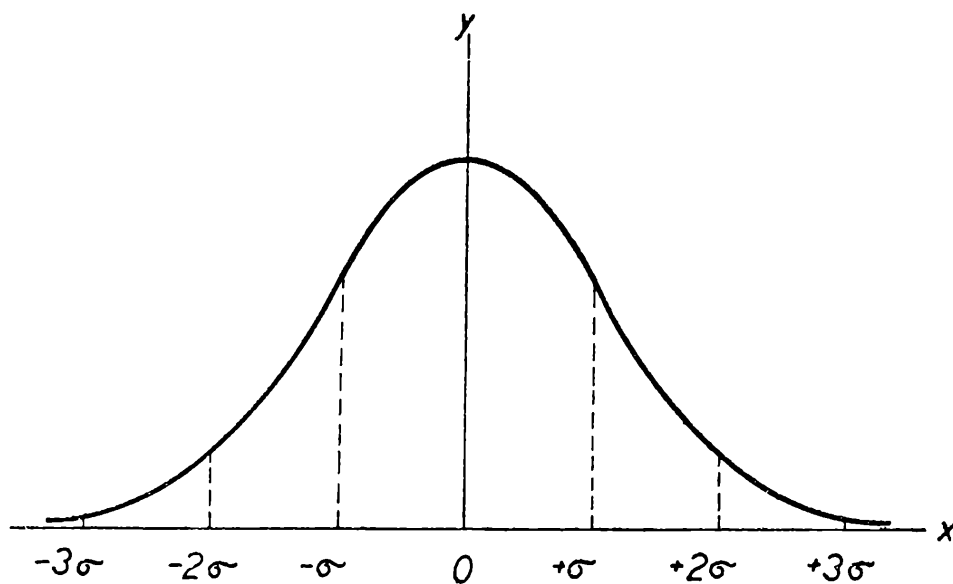
Na ose x (základně) je vyneseno měřítko, kde za jednotku je zvolena směrodatná odchylka, na ose y jsou takové hodnoty, že plocha mezi hodnotou $+n\sigma$ a $-n\sigma$ udává pravděpodobnost, že při náhodném výběru z uvažovaného teoretického souboru dostaneme hodnotu, lišící se od teoretické hodnoty méně než o $n\sigma$. Z toho je zřejmé, že křivka musí být souměrná. Její hodnoty jsou sice tabelovány podrobně, ale pro náš případ stačí, známe-li několik bodů, které jsou na grafu zvlášť

vyznačeny. Protože plocha uvnitř celé křivky je 100 %, pak pravděpodobnost, že při náhodném výběru bychom dostali výsledek, lišící se od teoretické hodnoty právě o $n\sigma$ nebo ještě více, dostaneme, odečteme-li od 100 % hodnotu tabelovanou pro číslo n . Tato hledaná pravděpodobnost (značíme ji P) je: pro

$$\frac{p_1 - p_2}{\sigma_1} = \pm 1 \dots P = 32 \% ,$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\sigma_1} = \pm 2 \dots P = 5 \% ,$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\sigma_1} = \pm 3 \dots P = 0,3 \% .$$



Obr. 1

Nejstručněji tedy stačí říci: vyjde-li nám rozdíl % větší než dvojnásobek směrodatné odchylky rozdílu, může se takový výsledek objevit náhodně pouze v 5 % případů, což lze již považovat za významný rozdíl. Vyjde-li větší než trojnásobek směrodatné odchylky, může takový případ nastat pouze ve 3 případech z 1000, což je rozdíl vysoce významný, a musíme zamítnout předpoklad, že by oba soubory pocházely z téhož základního souboru, pokud jde o sledovaný znak. Pro náš případ tedy dostaneme:

$$p_1 = 3,35, \quad p_2 = 17,76, \quad p_1 - p_2 = -14,41, \quad p_0 = 8,81, \quad q_0 = 91,19,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{8,81 \cdot 91,19}{776} + \frac{8,81 \cdot 91,19}{473}} = \sqrt{2,74} \doteq 1,65,$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\sigma_1} = -14,41 : 1,65 \doteq 8,7$$

Rozdíl je tedy vysoce významný, neboť je větší než ± 3 a předpoklad, že nemocnost očkovaných se od nemocnosti neočkovaných neliší, musíme zamítnout. (Pokračování)

Fyzika

Ing. Jiří Kodeš, katedra fyziky fakulty elektrotechnické, Praha:

Fyzikální výklad usměrňujícího účinku polovodičů

Dříve než si vyložíme usměrňující účinky polovodičových diod, promluvíme stručně o vlastnostech polovodičů a jejich *typech* n a p .

Vlastnosti polovodičů: Jednou z nejdůležitějších fyzikálních konstant, která charakterizuje elektrické vlastnosti pevných látek, je měrná vodivost σ . Podle její hodnoty, jež se mění v širokých mezích, zhruba od 10^{-15} až $10^5 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$, lze pevné látky rozdělit do tří skupin:

1. kovy $\sigma = 10^4$ až $10^5 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$,
2. polovodiče $\sigma = 10^2$ až $10^{-8} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$,
3. izolanty $\sigma = 10^{-10}$ až $10^{-15} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$.

První odlišnost mezi polovodiči a ostatními dvěma skupinami je tedy hodnota vodivosti. Avšak rozhodující fyzikální vlastností, která odlišuje kovy od nekovů, je tepelná závislost jejich elektrické vodivosti při teplotách blízkých absolutní nule. Klesá-li teplota kovů k absolutní nule, tj. $T \rightarrow 0 \text{ °K}$, pak jeho vodivost neobyčejně vzrůstá, čemuž říkáme „kov se stává *supravodivý*“.

U látek nekovových je tomu právě naopak: S klesající teplotou klesá prudce i jejich měrná vodivost. A právě tato vlastnost je směrodatná pro posouzení, zda uvažovaná látka je polovodičem nebo izolantem.

Polovodičem nazveme takovou látku, která se při vyšších teplotách stane značně vodivější než v blízkosti absolutní nuly.

Izolant pak je látka, jejíž elektrická měrná vodivost je malá, i za značně vysokých teplot.

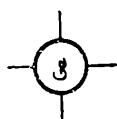
Ostrou hranici mezi jednotlivými druhy pevných látek ovšem nelze stanovit.

Abychom vyložili, proč je polovodič vodivý, uvedme stručně základní poznatky o stavbě krystalů. Krystal má své atomy pravidelně seskupené do tzv. *krystalické mříže*. Vazbu mezi jednotlivými atomy polovodičů zprostředkují valenční (obvodové) elektrony, obíhající okolo jader atomů. Tak například germanium je čtyřmocný prvek, což znamená, že vazbu v krystalické mříži způsobují čtyři elektrony. Atomové číslo germania je $Z = 32$, čili okolo jádra germaniového atomu obíhá 32 elektronů, z nichž 28 je pevně vázáno k jádru a 4 zbývající tvoří valenční vazbu. Izolovaný atom germania je znázorněn na obr. 1a. Z chemie je známo, že valenční elektrony hrají důležitou roli při chemických a fyzikálních procesech v pevných látkách. Na obr. 1b je znázorněna vazba v germaniovém krystalu. Takový krystal se chová jako dokonalý izolant. Připojíme-li k němu elektrické napětí, pak tímto krystalem nebude pro-

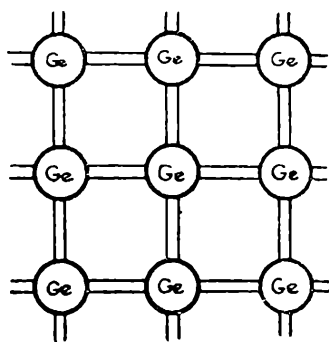
tékat proud, protože uvnitř neexistují volné elektrony, které by vedení elektriny zprostředkovaly.

Sledujme, co se stane, nahradíme-li jeden atom krystalové mříže germania některým pětímocným prvkem, např. arsenem As. Jelikož arsen je pětímocný a germanium čtyřmocný prvek, zúčastní se vazby čtyři z pěti arsenových valenčních elektronů. Pátý elektron arsenu zůstává volný, vazby se neúčastní a je jen velmi slabě poután k jádru. Připojíme-li na krystal elektrické pole, pak tento pátý elektron se začne pohybovat (obr. 2). Celým krystalem, který je takto uměle znečištěn, teče proud elektronů, majících záporný (negativní) náboj. Vodivost je zde tedy způsobena negativními nositeli elektrického náboje a proto takový polovodič nazýváme typ n (od slova negativní).

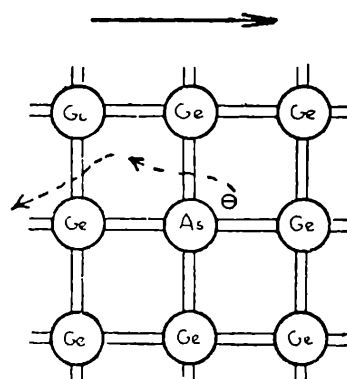
Odlišný případ nastane, nahradíme-li atom krystalové mříže germania třímocným prvkem např. In. Indium má tři valenční elektrony, které se všechny účastní vazby v krystalické mříži, ale čtvrtá vazba zůstává nevyplněná, volná. Vzniká tzv. *díra*. Připojíme-li k takovému krystalu elektrické pole, pak valenční elektron sousedního germaniového atomu může opustit svou vazbu a přeskočit na volné místo, kde dříve elektron chyběl, takže „díra“ se objeví na jiném místě (obr. 3).



Obr. 1a. Izolovaný atom germania.



Obr. 1b. Krystalická mříž germaniového krystalu.



Obr. 2. Polovodič typu n .

Proud je tedy způsoben děrami, majícími kladný (pozitivní) náboj. Proto takový polovodič nazýváme typ p (od slova pozitivní).

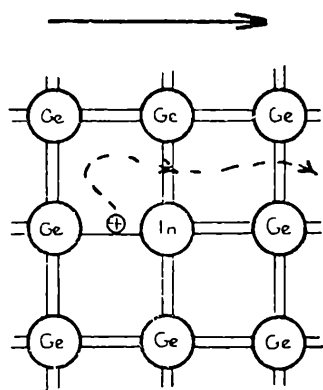
Usměrňující účinky. Odpor polovodiče může v určitém uspořádání záviset na velikosti a směru elektrického napětí. Na tomto principu jsou založeny *suché usměrňovače*, kterých se používá k přeměně střídavého proudu na stejnosměrný. V této skupině usměrňovačů jsou známy selénové a kuproxové usměrňovače.

Účelem tohoto článku je seznámit čtenáře s novými druhy usměrňovačů, kde je použito hlavně germania a křemíku, tj. polovodičů, které právě v posledních letech se stále více uplatňují ve sdělovací elektrotechnice, a to jednak jako usměrňovače, čili tzv. *plošné diody*, jednak jako *tranzistory*, tj. *plošné triody*.

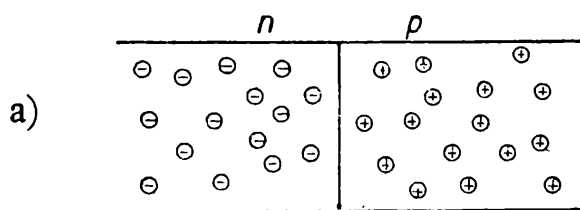
Funce germaniových a křemíkových plošných diod se zakládá na usměrňujících schopnostech tzv. $p - n$ přechodu. Již bylo vyloženo, že takový druh polovodiče, ve kterém je přenos proudu způsoben pohybem záporných nositelů náboje - elektronů - se nazývá n typ, a je-li přenos proudu zprostředkován pohybem

kladných nositelů náboje, tj. „děr“, nazývá se p typ. Jsou-li oba tyto typy polovodičů vzájemně izolovány, neexistuje v nich žádný prostorový náboj. A právě na principu styku těchto dvou druhů polovodičů s rozdílnou vodivostí jsou založeny plošné diody.

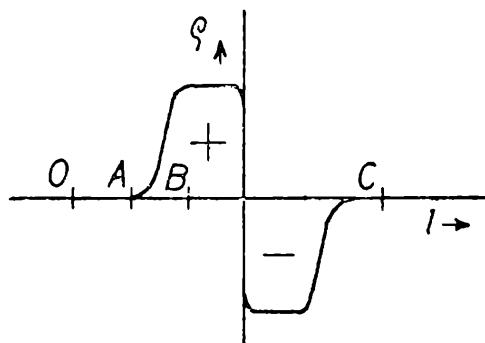
Uvažme, co nastane, jestliže k sobě přitiskneme oba typy polovodičů (obr. 4a), mající odlišný druh vodivosti. Volné elektrony počnou z oblasti n -polovodiče pronikat (difundovat) do oblasti p . Vznikne tak proud elektronů jedním směrem a proud „děr“ opačným směrem. Tento přesun nositelů náboje má za následek, že ony části polovodiče, jež byly původně elektricky neutrální, se začnou nabíjet a to: p -oblast záporně, kdežto n -oblast kladně. V blízkosti dotyku tím vzniká



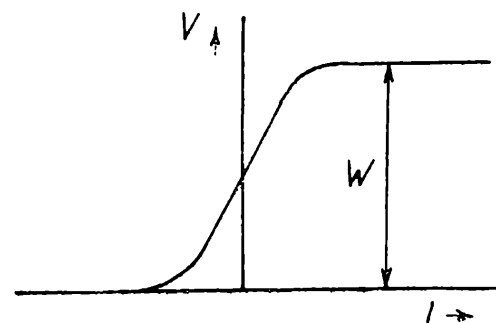
Obr. 3. Polovodič typu p .



a)



b)



c)

Obr. 4a. $p - n$ přechod.

Obr. 4b. Průběh hustoty elektrického náboje v přechodu.

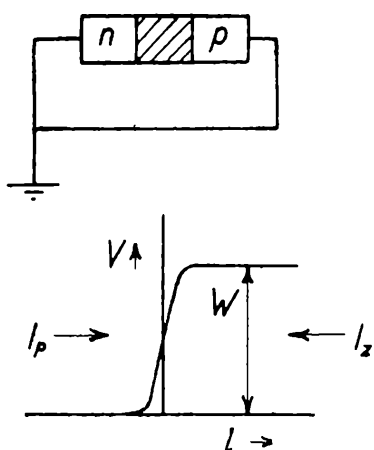
Obr. 4c. Průběh potenciálu v přechodu.

prostorový náboj ρ , jehož rozdělení - v závislosti na délce polovodiče - je zobrazeno na obr. 4b. Tento prostorový náboj vytvoří určitý potenciálový rozdíl, který roste tak dlouho, pokud trvá přechod nositelů a ustane tehdy, až vzniklý potenciál bude tak veliký, že nepustí již žádný elektron z jedné a díru z druhé strany. Vznikne tak rovnováha prostorového náboje. Vzniklý potenciálový rozdíl na přechodu nazýváme *potenciálová bariéra*. Průběh potenciálu v oblasti přechodu je na obr. 4c. Tento diagram současně udává množství energie, kterou musí nabýt díra nebo elektron, aby mohly existovat v libovolné vzdálenosti od přechodu.

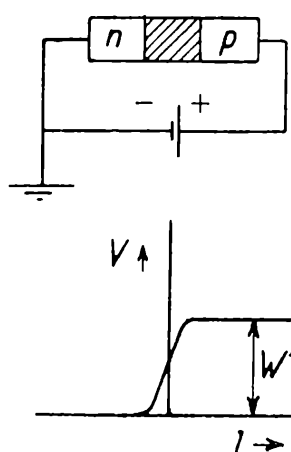
Představme si (obr. 4b), že kdesi v místě O n -oblasti se nalézá elektron. Tento elektron se pohybuje neuspořádaným pohybem podobně jako molekula při Brow-

nově pohybu. Mysleme si, že máme elektron upevněn na niti a táhneme jej ve směru kladné osy x od bodu O do bodu A . Jelikož uvnitř n -oblasti, kde pohyb elektronu sledujeme, neexistuje žádný prostorový náboj, nepotřebuje elektron získat žádnou energii, aby tuto vzdálenost překonal. Do místa A by se elektron dostal vlivem neuspořádaného pohybu uvnitř krystalické mříže za určitou dobu. Sledujme nyní další pohyb, a to z bodu A do B . Nyní jsme elektron již dostali do prostoru n -oblasti, kde je rozložen kladný prostorový náboj, kterým je elektron přitahován. Na druhé straně přechodu v oblasti p je záporný prostorový náboj, jehož účinky se jeví též v místě B . Čím více se budeme s elektronem blížit k hranici přechodu, tím silněji bude naň působit záporný prostorový náboj v oblasti p . K tomu, abychom mohli elektronem pohybovat, budeme mu muset dodat nějakou energii, a to tím větší, čím blíže se dostáváme k záporně nabitě oblasti p . Maximální energii získá elektron tehdy, až přejde do libovolného bodu C oblasti p . Velikost této energie lze určit z potenciálového rozložení (obr. 4c). Abychom přemístili elektron z oblasti n do p , musíme dodat elektronu určitou energii, jejíž velikost je dána výškou W potenciálové bariery. V hloubce p -oblasti na pohyb elektronu nebudeme muset vynaložit již žádnou energii, elektron se bude pohybovat opět neuspořádaně.

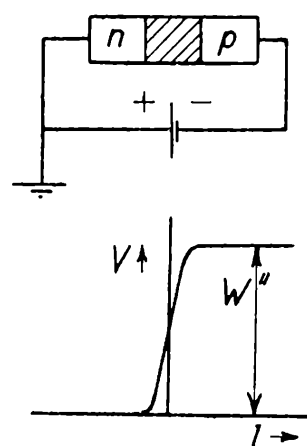
Za pokojové teploty, tj. asi 300°K , získá jen velmi malý počet elektronů dostatečně velkou energii k překonání bariery o výšce W . Tyto elektrony vytvoří proud, mající směr z n do p -oblasti, který nazýváme *přední proud* I_p . Současně však také v p -oblasti existují elektrony, které se mohou libovolně pohybovat a některé z těchto elektronů mohou „spadnout“ z potenciálové bariery zpět do oblasti n . Nazvěme tento proud *zpětným proudem* a označme I_z (obr. 5). Za dané



Obr. 5. $p - n$ přechod bez napětí.



Obr. 6. $p - n$ přechod polarizovaný v propustném směru.



Obr. 7. $p - n$ přechod polarizovaný v závěrném směru.

teploty a nepřítomnosti vnějšího rozdílu potenciálu jsou si oba proudy I_p a I_z rovny. Sledujme pomocí diagramu na obr. 5, co nastane, přiložíme-li na diodu potenciál podle obr. 6. Vlivem přivedeného vnějšího napětí se sníží potenciálová bariéra a daleko více elektronů může za dané teploty přejít z oblasti n do p . Je totiž $W' < W$. To znamená, že přední proud I_p je daleko větší než v prvním

případě, kdežto zpětný proud I_z zůstává konstantní. Přiložené napětí nemá totiž vlivu na elektrony, nalézající se v oblasti p . Přední proud I_p tedy se vzrůstajícím napětím stoupá, jak ukazuje pravá strana obrázku 9 (pro kladná napětí).

Jiný případ nastane, přiložíme-li na diodu napětí opačné polaroty (obr. 7). Vlivem vnějšího napětí se potenciálová bariera zvýší, takže daleko méně děr může přestoupit barieru W'' nežli v prvním případě. Je totiž $W'' > W$. Je-li přivedené napětí dostatečně veliké, tu přední proud I_p je zanedbatelný a veškerý proud tekoucí diodou je tvořen proudem zpětným I_z , který je ve všech třech případech konstantní. Závislost proudu I_z na napětí je na levé straně obr. 9 (pro záporná napětí).

Zcela obdobný výklad jak jsme provedli pro elektrony, by byl pro kladné nositele, tj. díry. Celkový proud, který lze měřit, je dán součtem proudu děrového a elektronového. Z teoretických úvah plyne pro proud tekoucí přechodem následující vztah, jenž dobře souhlasí s pokusem:

$$I = (e^{\frac{qV}{kT}} - 1) I_s,$$

kde q = náboj elektronu ($1,6 \cdot 10^{-19}$ C),

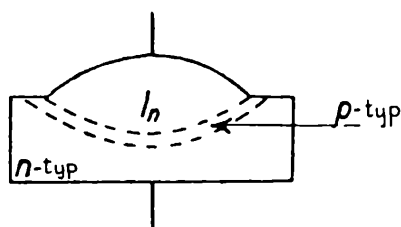
V = přiložené napětí (V),

k = Boltzmannova konstanta ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J deg $^{-1}$),

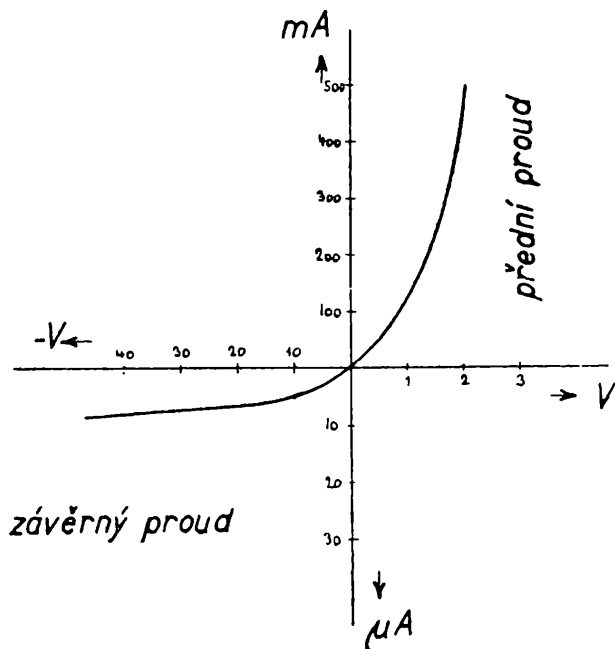
T = absolutní teplota (°K),

I_s = saturační proud (μA).

Kladné hodnoty napětí přísluší proudu v předním směru a záporné hodnoty přísluší proudu v závěrném směru.



Obr. 8. Tvar skutečného $p - n$ přechodu.



Obr. 9. Průběh voltampérové charakteristiky germaniové diody (závěrný a propustný proud).

Tento zidealizovaný výklad usměrňujícího účinku $p - n$ přechodu postačí pro pochopení celého zjevu. Obrátme se nyní k výkladu o konstrukci těchto diod (obr. 8). V praxi není dioda vytvořena dotykem dvou druhů polovodičů, nýbrž $p - n$ přechod se docílí různým technologickým postupem. Část monokrystalu, který je vodivosti n , je znečištěn např. antimonem, který vytvoří v místě styku

přechod mezi vodivostí n a p , takže se vytvoří potenciálová bariéra několika desetin voltu; připojeným vnějším napětím lze tuto bariéru buď zvyšovat, nebo snižovat. Přivedeme-li tedy na diodu střídavé napětí, pak v jednom směru dioda propouští proud dobře, kdežto v druhém směru jen nepatrně.

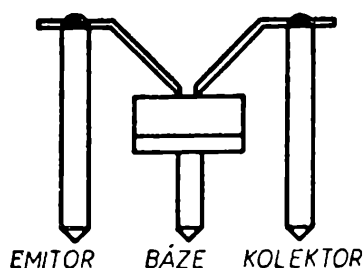
Výhoda usměrňovačů typu $p - n$ spočívá v tom, že přechod je proveden uvnitř monokrystalu, takže bariéra je velmi dobrá. Proti dosud používaným usměrňovačům selénovým a kuproxovým snese germaniová nebo křemíková dioda až 1000krát větší proudové zatížení na 1 cm^2 , má až 10krát větší závěrné napětí a pracuje s účinností skoro 50 %, kdežto selén má účinnost jen 38 %.

Jiří Cochlar, studující ČVUT, Poděbrady:

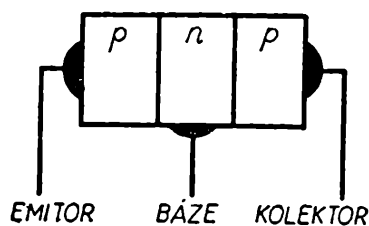
Polovodičové triody (transistory)

Úvod

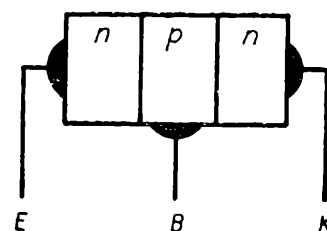
Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře se základními vlastnostmi *transistorů*, tzv. *polovodičových triod*.



Obr. 1a. Schéma hrotového transistoru.



Obr. 1b. Schéma plošného transistoru typu pnp .



Obr. 1c. Schéma plošného transistoru typu nnp .

Výhoda transistorů oproti běžně používaným vakuovým elektronkám spočívá zejména: v malých rozměrech transistorů s prakticky nekonečnou dobou života (více než 100 000 hodin v provozu); pro napájení a funkci transistoru jsou potřeba malé výkony; odpadá žhavení, které je nutné pro funkci vakuových elektronek. Po mechanické stránce jsou transistory odolnější než vakuové elektronky.

První typ transistoru, tzv. *hrotový transistor* (schéma na obr. 1a), byl vynalezen Bardeenem a Brattainem v roce 1948. Po mnohých pokusech a výzkumech byl Shockleyem roku 1949 předpověděn a v roce 1951 také skutečně realizován nový typ transistoru - *transistor plošný* (schematicky na obr. 1bc), jehož vlastnosti jsou většinou výhodnější než u transistoru hrotového.

Nejprve si vysvětlíme principy funkce transistorů, přičemž budeme užívat názvů uvedených na obr. 1abc.

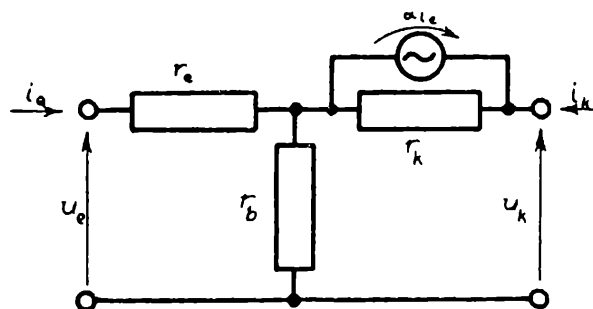
Mezi kolektorem a bází je připojeno vnější stejnosměrné napětí U_k tak, aby byl kolektor vůči bází polarisován v závěrném směru. Pak má dioda kolektor-báze, odmyslíme-li si na chvíli emitor, velký odpor (řádově 100 k Ω) a teče přes ni malý proud, řádově 10^{-5} A podle typu transistoru. Označíme jej I_{k_0} (zbytkový proud

kolektoru). Nyní mezi emitor a bázi připojíme stejnosměrné napětí U_e v propustném směru. Proud emitoru označíme I_e . Tento proud je uskutečňován nositeli nábojů, a to podle typu polovodiče báze buď dírami¹⁾ nebo volnými elektrony, při čemž jejich polarita je taková, že jsou přitahovány ke kolektoru vlivem el. pole vyvolaného napětím U_k . Tento proces bude podrobněji vysvětlen v dalších odstavcích. Na cestě přes oblast báze některé nositele nábojů rekombinují a tím se neutralizují, většina však dospěje ke kolektoru a proud jimi vzniklý se přičítá k proudu I_{k_0} . Změníme-li proud emitoru, změní se i celkový proud kolektoru I_k . Označíme ΔI_e změnu emitorového proudu a ΔI_k příslušnou změnu proudu kolektoru při konstantním napětí U_k . Pak veličinu α definovanou vztahem:

$$\alpha = \frac{\Delta I_k}{\Delta I_e} \quad (1)$$

nazýváme *statickým proudovým zesilovacím činitelem* a představuje ve skutečnosti, jaká část proudu emitoru se dostane až na kolektor. Z předešlého vyplývá, že pro I_k platí:

$$I_k = I_{k_0} + \alpha I_e. \quad (2)$$



Obr. 2. Náhradní schéma plošného transistoru.

Veličina α může mít podle typu transistoru různou velikost. Za předpokladu, že všichni nositelé nábojů dojdou od emitoru ke kolektoru, bylo by $\alpha = 1$. Pak změna proudu emitoru by byla rovna změně proudu kolektoru. Pro plošné transistory je vždy $\alpha < 1$. Bývá obvykle $\alpha = 0,85 + 0,99$. U hrotových transistorů je $\alpha > 1$ vlivem okolností, jež budou dále vysvětleny. Obvykle dosahuje zde velikosti 2 až 8. Je nutno vysvětlit, proč plošný transistor zesiluje, když změna proudu emitoru je větší než změna proudu kolektoru, což plyne z (1) pro $\alpha < 1$. Transistor je schopen zesílit napětí a výkon i proud. Abychom mohli vysvětlit tento jev, je nutno se seznámit s *náhradním schématem transistoru*, tj. schématem, které se skládá obecně z impedancí (tj. ohmických odporů, kondenzátorů a indukčností) a z tzv. vnitřních zdrojů proudu, případně napětí, které po funkční a elektrické stránce nahrazuje uvažovaný prvek, v našem případě transistor. Toto schéma je na obr. 2. Vidíme, že se skládá

¹⁾ Viz článek Ing. B. Šesták, O kovových krystalech, Rozhledy, č. 1, 2, 3 roč. 1959/60. Ing. J. Kodeš, Fyzikální výklad usměrňujícího účinku polovodičů, Rozhledy, č. 3, roč. 1959/60.

z odporu r_e , což je odpor přechodu emitor-báze, odporu r_b , což je odpor báze a z odporu r_k , který je tvořen odporem přechodu kolektor-báze. Vliv proudu emitoru na proud kolektoru je respektován zařazením vnitřního proudového zdroje, jehož proud je roven αi_e a který je zapojen paralelně k odporu r_k , na němž průtokem tohoto proudu vytváří napětí rovno $\alpha i_e r_k$. Jelikož budeme uvažovat pouze nízké kmitočty přiváděných signálů, neuvádím v náhradním schématu kapacity přechodů a jejich vliv.

Malá písmena i_e, i_k, u_e, u_k v náhradním schématu přísluší střídavým hodnotám proudů a napětí, zatím co velká písmena I, U , ponecháme pro označení stejnosměrných proudů a napětí. Je nutné si uvědomit, že hodnoty r_e, r_b a r_k se v závislosti na U_k a U_e mohou měnit, ovšem tímto problémem se nebudeme zabývat. Typické hodnoty pro odpory náhradního schématu plošných transistorů jsou: $r_e = 10 - 30 \Omega$

$$r_b = 150 - 850 \Omega$$

$$r_k = 0,8 - 1,5 \text{ M}\Omega .$$

Z obr. 2 vyplývá:

$$u_e = (r_e + r_b) i_e + r_b i_k \quad (3)$$

$$u_k = (r_b + \alpha r_k) i_e + (r_k + r_b) i_k . \quad (4)$$

Nyní spočteme výkony v obvodu emitoru (N_e) a v obvodu kolektoru (N_k). Platí

$$N_e = u_e \cdot i_e = (r_e + r_b) i_e^2 + r_b i_k i_e . \quad (5)$$

Z výrazu (1) plyne: $\Delta I_k = \alpha \Delta I_e$. Malé střídavé proudy i_e a i_k můžeme uvažovat jako malé změny ΔI_e a ΔI_k kolem nějaké hodnoty I_e a I_k dané vnějším napětím U_e a U_k . Pak platí

$$i_k = \alpha i_e , \quad (6)$$

což dosadíme do (5) a dostaneme:

$$N_e = i_e^2 [r_e + r_b (1 + \alpha)] . \quad (7)$$

Obdobně pro N_k dostaneme ze vztahů (4) a (6)

$$N_k = i_e^2 [\alpha r_b (1 + \alpha) + 2\alpha^2 r_k] . \quad (8)$$

Nyní srovnáme velikost N_e a N_k

$$\frac{N_k}{N_e} = \frac{i_e^2 [\alpha r_b (1 + \alpha) + 2\alpha^2 r_k]}{i_e^2 [r_e + r_b (1 + \alpha)]} = \frac{\alpha r_b (1 + \alpha) + 2\alpha^2 r_k}{r_e + r_b (1 + \alpha)} . \quad (9)$$

Aby transistor zesiloval, musí být výraz (9) větší než jedna, tj. musí platit

$$\alpha r_b (1 + \alpha) + 2\alpha^2 r_k > r_e + r_b (1 + \alpha) ,$$

z čehož plyne po snadné úpravě

$$r_k > \frac{r_e + r_b (1 - \alpha^2)}{2\alpha^2} . \quad (10)$$

O správnosti vztahu (10) se přesvědčíme touto úvahou:

Platí (viz typické hodnoty prve uvedené):

$$r_k > r_e + r_b .$$

Dále platí

$$1 > 1 - \alpha^2 .$$

Z těchto vztahů plyne

$$r_k > r_e + r_b (1 - \alpha^2) \quad (11)$$

Obdobně je též

$$2\alpha^2 > 1 . \quad (12)$$

Ze vztahů (11) a (12) již snadno dokážeme platnost vztahu (10) a tudíž výkon v emitorovém obvodu transistorů je menší než v kolektorovém. Pro naše úvahy jsme předpokládali nulový odpor zdroje střídavého proudu i_e (signálu) a nulový odpor zátěže, tj. všechen výkon se spotřeboval v samotném transistoru. Jestliže zapojíme na výstup transistoru nějakou zátěž, pak se část výkonu spotřebuje v této zátěži (užitečný výkon uvádějící v činnost např. reproduktor) a část se změní v transistoru v teplo. Též vnitřní odpor zdroje signálu ovlivní zesílení transistoru, ovšem ve většině případů zůstane hodnota poměru $\frac{N_k}{N_e}$ větší než jedna a transistor bude přiváděný signál zesilovat.

(Pokračování)

J a r o s l a v D v o ř á k , ÚN, SMS, Praha:

Lékařský teploměr

Před časem jedna reportáž v našem rozhlasu začínala slovy: *Ž á d n ý u č e n ý s n e b e n e s p a d l .* Bylo v ní hovořeno o lékařském teploměru, který se před nedávnými lety z iniciativy několika jednotlivců začal vyrábět v kraji uměleckého skla, broušených křišťálových váz a ozdob, skleněných figurek i jiných uměleckých výrobků, a to v Železném Brodě, v první československé továrně na lékařské teploměry a laboratorní sklo. Z těžkých začátků, vyplněných neustálými zkouškami, zlepšovatelem úsilím a přeškolováním foukačů uměleckých figurek, vyrůstá v dovedných rukou železnobrodských sklářů malý, ve zdravotních střediscích, nemocnicích i v každé domácnosti nepostradatelný „měřicí přístroj“, který je ve zdravotnictví nedocenitelnou pomůckou.

Již dávno před vynalezením teploměru znali lékaři pojem horečky, chorobného zdravotního stavu, při němž si lékaři všímali především kvality a síly tepu, teploty kůže apod. Hippokrates zkoušel teplotu kůže tím, že na ni kladl ruku a podle svého pocitu usuzoval na horečku mírnou, případně horečku pálivou. Tento způsob subjektivního zjišťování horečnatého stavu se udržel ještě dlouho po tom, kdy byl vynalezen teploměr. Teprve, když vývoj v oboru měření teploty dospěl stadia, kdy byl zhotoven skutečně spolehlivý přístroj k objektivnímu měření teplot, upustilo se od subjektivního zjišťování tělesné teploty podle teplotního pocitu lékaře.

Za prvního vynálezce teploměru je označován Galileo Galilei (roku 1592/3 nebo 1611/12). Jsou však uváděna i jiná jména, jako Drebbel, Santorio a jiní. Přírodopytci a lékaři se po staletí snažili zdokonalit teploměr a tak v různých časových údobích odpovídala ovšem konstrukce, tvar a použitý materiál teploměru vyspělosti techniky. Původně to byl teploměr otevřený - vzduchový (obr. 1), u něhož údaje závisely nejenom na teplotě, nýbrž i na tlaku vzduchu. Nemocný buď do teploměru vdechoval, nebo jej po určitou dobu držel v rukou. Příštího dne se provedla zkouška nová a podle toho, jak voda v témže čase za jinak stejných podmínek klesla nebo stoupla, se usuzovalo na teplotní změnu. Postupem doby přišlo se na to, že se teploměr musí přikládat na zcela určité místo těla, že měření musí trvat určitou dobu, aby se dosáhlo srovnatelných výsledků a že se měření musí po dobu nemoci opakovat vždy po jistých intervalech - třeba za 24 hod., nebo v určitou denní dobu. Při zachování těchto podmínek se stala termometrie cennou pomůckou diagnostiky a kontroly léčení.



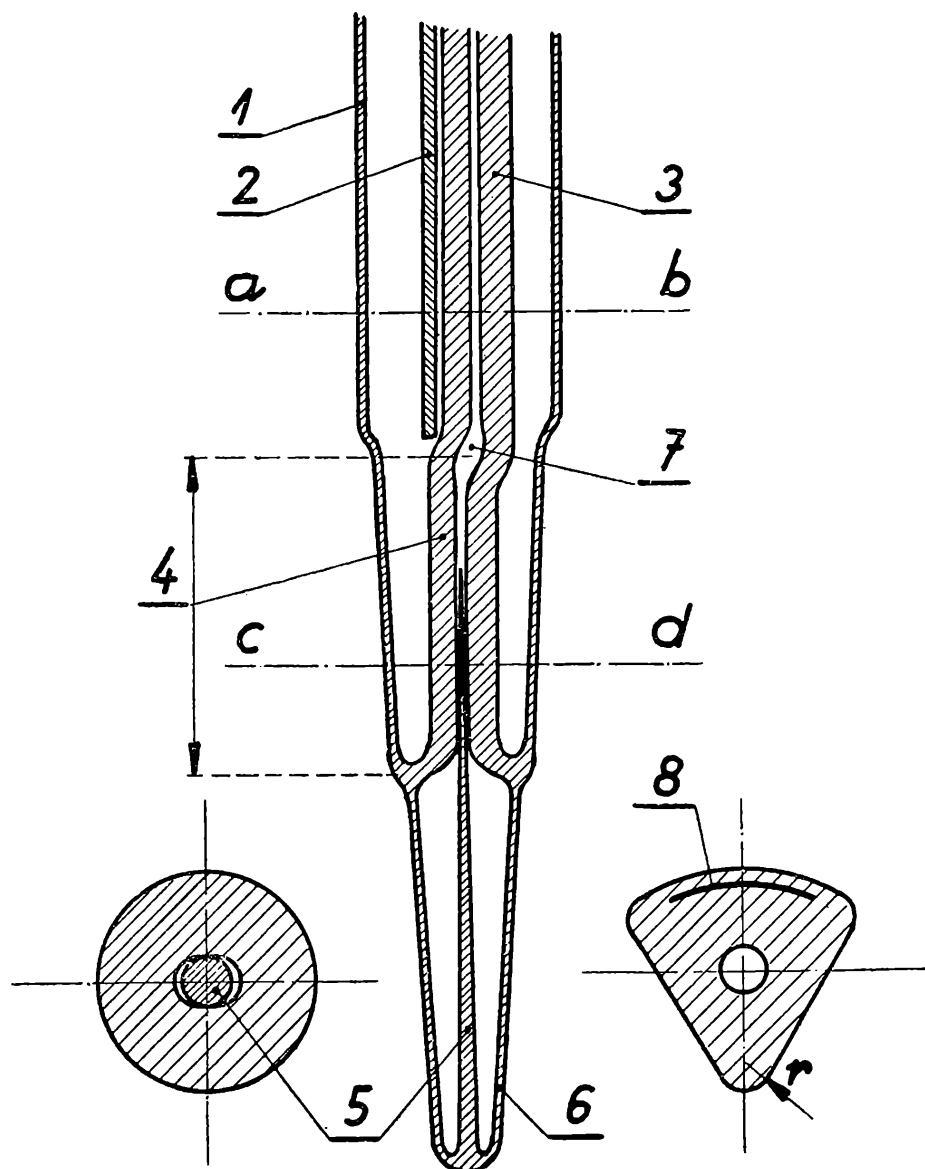
Obr. 1

Vraťme se však ke konstrukčnímu vývoji. Otevřený teploměr byl později pozměněn na uzavřený a voda byla nahrazena vinným lihem a konečně rtutí. Velké úsilí o zdokonalení teploměru vyvíjeli Italové v polovině 17. stol. Potíže činily skleněné trubice, které nebyly kalibrovány a proto rozdělení na stupně nebylo spolehlivé. Základními body pro tyto teploměry byly teplota sněhu nebo ledu a nejvyšší letní horko ve Florencii. Tato teplota nebyla však veličinou stálou a nebylo ji možno uměle získat. Teploměry neměly ještě nad uzavřeným lihem vzduchoprázdňý prostor.

Dalším pokrokem v zdokonalení teploměrů bylo kalibrování trubic kapkou rtuti. Zkoušelo se mnoho látek, které se v celém potřebném úseku teplotním roztahují pokud možno co nejstejněměrněji, které mají co možná nejnižší bod tuhnutí, které měly co možná nejvyšší bod varu, vhodné povrchové napětí a byly dobrými

vodiči tepla. Zvláštní potíže vyplynuly při stanovení základních, pevných bodů. Zpočátku byl jako jeden z pevných bodů stanoven bod mrznutí vody. Brzy se shledalo, že teploty tajícího ledu, sněhu a mrznoucí vody mohou být značně rozdílné proto, že voda nebo sníh nebyly zcela čisté, obsahovaly mechanické nečistoty a hlavně soli. Byla proto navržena za nulový bod teplota hlubokých sklepů, kde se neprojeví znatelné kolísání teploty během roku, dokonce i během staletí. Za horní pevné body se braly teploty rozpouštějícího se másla, zdravého lidského těla a varu vody.

Bylo-li dosaženo jednoty ve volbě jednoho nebo dvou pevných bodů, vyvstalo opět mnoho neshod, jak rozdělit stupnici. Tyto rozmanité možnosti vedly k tomu, jak udával holandský fyzik *van Schwinden* (1778), že bylo rozeznáváno již 71 rozličných teploměrů s různým dělením stupnice. Dnešní dělení teploměrných stupnic je spojeno s jmény *Fahrenheit*, *Reaumur* a *Celsius*.



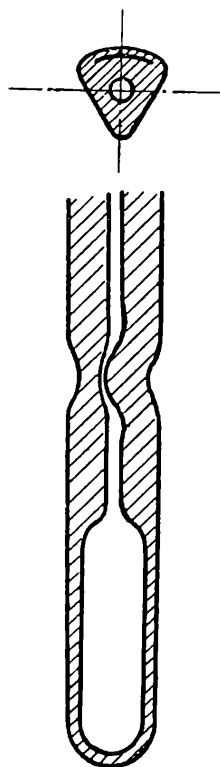
Obr. 2. Řez kapilárou prismatickou *a — b*. Řez kapilárou nástavnou *c — d*. 1. Obalová trubice, 2. stupnice, 3. prismatická kapilára, 4. nástavná kapilára, 5. skleněný vlásek maximálního zařízení, 6. jímka se rtutí, 7. spojovací váček kapilár, 8. barevné pozadí.

Jen stručně byl popsán staletý vývoj teploměru, než bylo dosaženo dnešního značně dokonalého měřicího přístroje, jehož základem je stupnice Celsiova.

Lékařský teploměr je sice malé měřicí zařízení, avšak výrobně velmi složité. Při jeho výrobě setkáváme se s velkým počtem důmyslných operací, pozůstávajících z titěrné, přesné a nadmíru pečlivé práce. Existují dva druhy lékařských teploměrů: *maximální* a *rychl oběžný*. Maximální teploměr je takový, který po změření tělesné teploty podrží dosaženou teplotu aniž poklesne,

byl-li vyjmut z prostředí, v němž teplota byla měřena. Rychloběžný teploměr může měřit teplotu jedinečně jeho ponecháním v měřeném prostředí.

Maximální lékařský teploměr má zvláštní zařízení zv. *m a x i m á l n í*, jež umožní, aby rtuť ohřátím mohla v kapiláře stoupnout. Při ochlazování nesmí toto zařízení dovolit pokles rtuti o více než o 1 desetinu stupně. Takových zařízení je několik druhů. Nejběžnější zařízení je tzv. *v l á s k o v é* (obr. 2). Na dně jímky teploměru, která tvoří zásobník rtuti, je zataven jemný skleněný mírně kuželový vlásek, který zasahuje do nastavné kapiláry s otvorem oválného průřezu. Vsunutím vlásku do oválné dutiny nastavné kapiláry se vytvoří dva měsíčky po stranách vlásku, jemného profilu o celkové ploše cca 0,001507 mm². Čím je velikost měsíčků větší, tím snadněji lze rtuťový sloupec srazit dolů; říkáme, že *t e p l o m ě r* je *m ě k k ý*. Jsou-li měsíčky tak malé, že se rtuť jimi těžko při srážení vrací do baňky, jde o *t e p l o m ě r y t v r d é*. Z toho důvodu je nutno tyto nastavné kapiláry mikroskopicky zkoušet a třídit. Vybírány jsou pak jen takové, které skýtají nejlepší podmínky jak stoupání, tak při srážení rtuti.



Obr. 3

Zahřátím se rtuť v jímce roztáhne a zvýšený tlak vytlačí určité množství rtuti z jímky zmíněnými měsíчковými průřezy a nastavnou kapilárou do druhé části kapiláry s barevným pozadím (proužkem), která má otvor kruhového průřezu (řez a-b); sama však je kapkového (trojúhelníkového) průřezu, tvořícího jakési prisma. Prismatický průřez kapiláry způsobuje, že tenký sloupec rtuti (0,06 až 0,08 mm) v kapiláře se jeví rozšířený a snadno čitelný; zvětšení je dáno poloměrem *r*. Tím, jak rtuť přemáhá odpor vzniklý ve vláskovém uzávěru maximálního zařízení, postupuje do kapiláry nikoliv plynule, nýbrž skáče - stoupá trhaně.

Jiný druh maximálního zařízení, zv. *Z e g r e t t i h o*, je vhodný zvláště pro teploměry tyčinkové, tj. bez obalové trubice. Je proveden tak, že kapilára je v místě nad jímkou zahřáta při výrobě tak, až sklo se dostane do stavu tvárného

a promačknutím dutiny kapiláry se vytvoří jakási smyčka. Zúžení kapilární dutiny ve smyčce, (která již sama je nepatrného průřezu) se vytvoří „uzávěr“, který zabrání samovolnému zpětnému průchodu (klesání) rtuti (obr. 3). Tohoto způsobu maximálního zařízení se používá u sovětských teploměrů tyčinkových i obalových.

K dokonalému poznání lékařského teploměru je třeba uvést, že každý teploměr má mít stupnici kreslenou individuálně, pro každý teploměr zvlášť, a to podle vnitřního průměru (světlosti) kapiláry (tzv. stoupavosti kapilární trubice). Průměr kapilárních trubic je cca 0,06 až 0,08 mm. Stoupavost kapilárních trubic se zkouší

ponořením jednoho konce svazku kapilár do nádoby s lihem (kapaliny smáčejí stěny); podle toho, jak je velký průřez otvoru kapilární trubice, vystoupí líh v kapiláře více či méně vysoko. Je-li průměr větší, vystoupí méně, než když je průměr menší. Přitom hraje roli ovšem i povrchové napětí. Tak v trubici, jejíž průměr je 1 mm, vystoupí voda do výše asi 30 mm a v trubici o průměru 0,1 mm vystoupí voda do výše 300 mm. Líh v trubici o průměru 1 mm vystoupí do výše 12,18 mm. Povrchové napětí líhu je menší než u vody, proto elevace je menší. Elevaci vody můžeme ovšem snížit např. přidáním několika kapek líhu.

Jestliže kapalina nesmáčí stěny, např. rtuť, zůstává povrch kapaliny v trubici níže než je volný povrch kapaliny v okolí; to je tzv. *k a p i l á r n í d e p r e s e*.

K plnění lékařských teploměrů se používá rtuti. Rtuť byla zvolena proto, že nejlépe vyhovuje svou teplotní roztažností, dobrým vedením tepla a svou neprůhledností. Roztažnost je téměř rovnoměrná jako u plynů. Délka stupnice připadající na 1 stupeň je přímo závislá na množství rtuti v jímce, tj. se zvětšením jímky se prodlouží i dělení, při téže kapiláře.

Sklo použité k výrobě teploměrů musí být řádně technologicky zpracováno. Před dělením stupnice je nutno odstranit z teploměru všechno napětí ve skle. To se docílí postupným a dlouho trvajícím chlazením, kterému se říká *u m ě l ě s t á r n u t í*. Teploměr rychle vyrobený, který neprodělal proces umělého stárnutí, vykazuje dodatečně chyby zaviněné smrštěním skleněných částí, které byly při výrobě nejvíce zahřívány - tedy hlavně jímka.

Kromě značky výrobní bývají na zadní straně stupnice teploměru různé poznámky a značky. Tak např. poznámka: „maxima 1/10° — 1 minuta“, vyjadřuje, že takový teploměr má maximální zařízení a nejmenší dílek na stupnici značí jednu desetinu stupně. Označení 1 minuta znamená rychlost reagování daného teploměru při běžném měření teploty. Teploměr má po době měření trvající 1 minutu ukázat správnou teplotu.

Od normálního lékařského teploměru maximálního se liší *t e p l o m ě r r e k t á l n í*. Ten se vyznačuje tím, že konec jímky rtuťové je zakončen kuličkou; užívá se hlavně k zjišťování tělesné teploty dětí v otvoru řitním. Jiný druh dětského teploměru je *t e p l o m ě r r y c h l o b ě ž n ý*, který má charakter teploměru technického, tj. nemá maximální zařízení a proto se musí odečítat, pokud je ještě vložen na měřené místo. Shodně s maximálním teploměrem lékařským se vyrábí i *t e p l o m ě r v e t e r i n á r n í*. Liší se pouze tím, že červeně na něm je vyznačena teplota 38 °C, zatím co běžný lékařský teploměr má červené označení u teploty 37 °C.

Jakou důležitost přikládala vláda Československé republiky správné funkci lékařského teploměru vysvětluje ze skutečnosti, že vydala zákon č. 112 ze dne 10. června 1937, jímž nařizuje, že každý teploměr, který ve zdravotnictví slouží k zjišťování teploty lidského těla, musí být úředně zkoušen a ověřen. Úředním zkoušením byla pověřena měrová služba, nyní Úřad pro normalisaci - Správa měrové služby (ÚN, SMS). Těsnou spoluprací tohoto úřadu s výrobcem bylo docíleno v poměrně krátké době žádoucích výsledků, hlavně co do kvality, tj. co do přesnosti a správnosti těchto měřicích přístrojů. Ověření je provedeno vyleptáním (vpálením) úřední značky na zadní stranu obalové trubice.

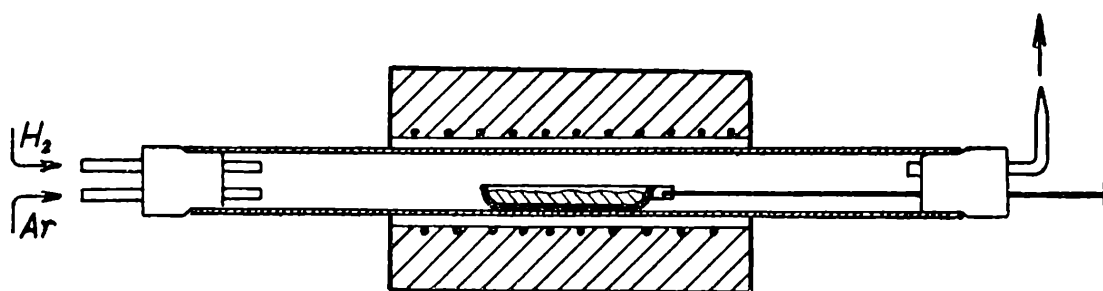
O kovových krystalech

(Dokončení)

Polykrystalický kov je možno přeměnit v monokrystal také rekrystalizací nebo využitím fázové přeměny. Tyto způsoby mají význam především tehdy, když krystaly nelze připravit z taveniny pro fázové přeměny v tuhém stavu, ale jsou vhodné i v jiných případech, např. k získání monokrystalů ve tvaru tenkých pásků, nebo drátů, nebo chceme-li se vyhnout použití vysokých teplot, kdy hrozí větší nebezpečí znečištění kovu. Uplatněné fyzikální děje jsou však složité a zatím nedostatečně prozkoumané, takže výsledek mnoho závisí na zkušenosti. Rekrystalizací rozumíme děje, které probíhají v plasticky deformovaném kovu při žíhání (primární rekrystalizace), nebo za zvláštních okolností v kovu nedeformovaném (sekundární rekrystalizace). Při tom vznikají zárodky nových krystalů, které rostou, až se setkají a nahradí původní krystalovou strukturu. Toho využíváme k výrobě monokrystalů tak, že se snažíme podobně jako při přípravě z taveniny, aby vznikl jeden nebo málo zárodků, které rostou bez vzniku dalších. Toho se dosáhne vhodným rozložením teploty při žíhání. Polykrystalický materiál, nejčastěji tvaru pásku nebo tyče, se plasticky deformuje nejlépe protažením v trhačím stroji, nebo i válcováním, o 1—5 %. Pak se žihá při teplotě potřebné k rekrystalizaci (pro železo 700—850 °C) v peci s teplotou rozloženou podle obr. 3; vzorek je vůči peci nepohyblivý a teplota se pomalu zvyšuje. Dokonalejší je žíhání za pohybu vzorku pecí podobně jako u Bridgmannovy metody, jenže zde postupuje materiál opačně z nižší teploty do vyšší. Tak byly úspěšně připraveny monokrystaly hliníku, mědi, železa α a jeho slitin s kubickou prostorově centrovanou mřížkou, také wolframu, molybdenu aj. Obdobným způsobem žíhání při teplotě fázové přeměny v tuhém stavu se v ojedinělých případech také dosáhne vzniku jediného zárodku nové fáze, který roste a přemění celý vzorek v monokrystal. Tak byly připraveny monokrystaly uranu α i β a krystaly železa α ve tvaru tenkých drátů.

V poslední době má neobyčejný význam příprava monokrystalů kovů z par. Ukázalo se totiž, že mřížka takto připravených krystalů se blíží mřížce ideální. Dosud vyrobené krystaly těchto vlastností jsou velmi malé, mají tvar dlouhých tenkých vláken s průměry několika μ , až několika set μ a délkou několika desetin mm, až několika cm. V naší literatuře se často nazývají *w h i s k e r y*, z anglického *w h i s k e r s* (čti hviskrs), což značí *v o u s y*. K jejich výrobě se jen zřídka užívá přímo kovových par získaných vypařováním kovů. Zatím nejlepší monokrystalická vlákna mědi, stříbra, železa, niklu, kobaltu, platiny a zlata, délky až 50 mm, byla získána redukcí par halových sloučenin (jodidů, bromidů a chloridů) těchto kovů vodíkem za vysoké teploty, zařízením podle obr. 9. To je také princip aparatury používané ve Fyzikálním ústavu ČSAV k přípravě whiskerů Cu, Co a Fe. Je pravděpodobné, že zdokonalením přípravy kovových krystalů z par se získá materiál s velmi dokonalou atomovou mřížkou a že jeho studium přispěje k objasnění základních vlastností kovů.

Zmínili jsme se již, že mezi hlavní poruchy reálných krystalů patří také atomy nečistot. Ty působí i v nejmenších množstvích mnoho fyzikálních zjevů v krystalech, např. ztrátu plastických vlastností při nízkých teplotách, stárnutí po deformaci nebo po zakalení, což je zhoršení mechanických vlastností vlivem času, zvětšení elektrického odporu, zvětšení koercitivní síly apod. Chceme-li studovat tyto zjevy, nebo je vyloučit, musíme mít krystaly bez nečistot. Prvým předpokladem toho jsou čisté výchozí kovy. V poslední době byly připraveny kovy, jejich čistota se vyjadřuje několika váhovými díly nečistot v milionu váhových dílů kovu.

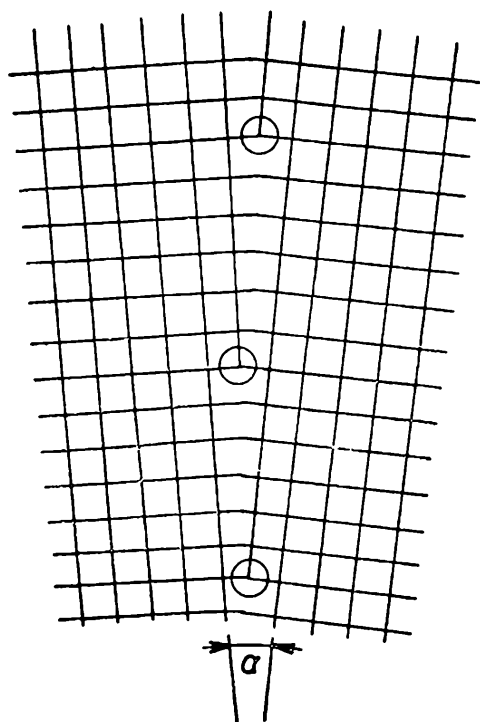


Obr. 9. Příprava kovových whiskerů. Halová sloučenina kovu je umístěna v lodičce a redukce vodíkem probíhá v trubce z průhledného křemenného skla vložené do elektrické odporové pece, při teplotě 600 až 900 °C. Whiskery rostou přímo v lodičce.

K čištění se používá metod chemických a hlavně fyzikálních, mezi něž především patří tavení ve vakuu a *zónové*, čili *pásmové tavení*, převzaté z techniky čištění polovodičů. Jeho princip spočívá na poznatku, že některé cizí atomy (nečistoty) se snáze rozpouštějí v tavenině než ve ztuhlém kovu. Tavíme-li materiál úzkou roztavenou zónou, např. podobně jako při přípravě monokrystalů letmou roztavenou zónou (častěji se používá vodorovná úprava s kelímkem tvaru lodičky), přecházejí nečistoty do roztavené části a spolu s ní putují na konec. Pochod se zpravidla několikrát opakuje a naposled ztuhlá část s nečistotami se odřízne. Čisté kovy jsou velmi drahé a mnohdy je obtížné stanovit jejich čistotu. Např. k zjištění čistoty dosud nejčistšího železa (méně než 13 v. d. nečistot v milionu v. d. železa) nejsou zatím k dispozici dostatečně citlivé analytické metody. Při přípravě monokrystalů je možno zabránit dodatečnému znečištění použitím kelímků z nejčistších materiálů, nebo ještě lépe pracovat bez nich a použitím velmi dobře přečištěných ochranných plynů, které se v kovu nerozpouštějí, např. argonu nebo helia. Pokud je to možné, dáváme přednost vysokému vakuu, kterého lze dosáhnout poměrně snadno moderními prostředky.

Zbývající dva druhy poruch, vakance a dislokace, můžeme v současné době mnohem méně ovládat než cizí atomy. Současný stav je takový, že hustotu dislokací v krystalech kovů dovedeme ovlivnit jejich přípravou jen v malém rozsahu. Výjimkou jsou whiskery, kde je počet dislokací malý. Ukazuje se, že i při ideálních podmínkách růstu krystalu z taveniny vzniká značný počet dislokací shlukováním vakancí. Prázdná místa vznikají při tuhnutí a je jich velké množství v blízkosti

rozhraní rostoucího krystalu a taveniny. Další dislokace vznikají vlivem napětí působených teplotními rozdíly mezi různými místy krystalu při růstu. Během růstu se vzájemným působením (interakcí) shlukují dislokace v řady a v krystalu tak vzniká mikrozzrnná struktura, někdy nazývaná *substrukturou*. Řady dislokací vytvářejí stěny dělící krystal na části, kterým říkáme *mikrozrna*, nebo *mozaikové bloky* a způsobují, že tyto části mají krystalografickou mřížku navzájem poněkud natočenou (obr. 10). Množství dislokací vytvořených při růstu určuje rozměry i vzájemné natočení těchto bloků. Představa o substruktuře kovových krystalů



Obr. 10. Řada rovnoběžných stejně od sebe vzdálených dislokací probíhající kolmo k nákresně v krystalu s kubickou mřížkou. Dislokace způsobují vzájemné natočení částí mřížky o úhel α .

byla vytvořena na základě studia ohybu rentgenova záření krystaly a později zpřesněna závěry plynoucími z teorie dislokací. V posledních letech se podařilo pozorovat v krystalech jednotlivé dislokace a také jimi vytvořené hranice mezi mozaikovými bloky, čímž byly přímo potvrzeny předchozí názory. Ve Fyzikálním ústavu ČSAV byl vypracován způsob zviditelnění dislokací na povrchu krystalů slitiny železa s přísadou křemíku, elektrolytickým leptáním v kyselině chromové. Postupuje se tak, že se podél dislokací záměrně vyloučí částice cementitu (karbidu železa Fe_2C), žíháním ve vodíkové atmosféře obsahující uhlík. Při leptání je vyleštěný povrch krystalu ponořen do elektrolytu a spojen s kladným pólem zdroje stejnosměrného napětí. V místech, kde dislokace protínají povrch, vzniknou důlky nebo brázdy podle úhlu, který svírá dislokační čára s povrchem, neboť cementit se za těchto podmínek leptání rychleji rozpouští než základní kov. Na obr. 11 je povrch krystalu Fe-Si s naleptanými dislokacemi při zvětšení $500\times$ a na obr. 12 při zvětšení $50\times$. Na prvním obrázku jsou dobře patrné jednotlivé důlky příslušné různě probíhajícím dislokacím, ve druhém jsou mozaikové bloky s hranicemi tvořenými dislokacemi. Z obrázku je možno zjistit, že jejich rozměry jsou řádově desetiny mm, měření rentgenovou difrakcí ukazují, že střední úhel mezi jejich mřížkami je asi $0^\circ 15'$. Obdobné poměry byly zjištěny také u monokrystalů připravených rekrytalizací. Z měření však vyplývá, že tyto krystaly obsahují o něco méně dislokací než při přípravě z taveniny. Částečně je to způsobeno tím, že při nižší teplotě potřebné k rekrytalizaci lze snáze dodržet správné rozložení teploty, úplné vysvětlení bude možné teprve lepším poznáním dějů při rekrytalizaci.

Whiskery připravené z páry jsou zatím jediné krystaly kovů, které dovedeme připravit s malým počtem poruch. Byly na nich proto pozorovány některé vlast-

nosti, které podle výsledků teoretických úvah přísluší ideální mříži. Např. byla změřena jejich pevnost asi 1000 kp/mm^2 , zatím co pevnost monokrystalů připravených z taveniny nebo rekrytalizací je asi $1000 \times$ menší. Bylo zjištěno, že se chovají pružně (elasticky) až do prodloužení několika % aj.



Obr. 11. Povrch krystalu slitiny Fe — 3,5 % Si s dislokacemi zviditelněnými elektrolytickým leptáním při zvětšení $500 \times$. Pořízeno autorem ve Fyzikálním ústavu ČSAV.



Obr. 12. Mikroskopický snímek stejného povrchu jako v obr. 11, ale při zvětšení $50 \times$.

Závěr

Závěrem můžeme říci, že již dovedeme připravit většinu kovů ve tvaru monokrystalů takřka libovolného tvaru; neumíme však dosud ovlivnit v dostatečné míře poruchy jejich mřížky. Vyřešení tohoto úkolu v budoucnu povede k novému hlubšímu poznání vlastností kovů a ovlivní rozhodujícím způsobem použití kovů v technice. Budeme moci předem vypočítat vlastnosti kovů a vyrobit kovy s nejrůznějšími žádanými vlastnostmi: kovy velmi pružné, nebo naopak tvárné v nejširším oboru teplot, kovy velmi pevné při nízkých i vysokých teplotách, kovy žáruvzdorné, antikorozní aj. Je třeba intenzivně hledat nové způsoby čištění kovů a dále prohlubovat metody bezkelímkového tavení. Požadavek krystalů s dokonalou mřížkou, popř. jistým způsobem porušenou atomovou mřížkou, je splnitelný podrobnějším studiem dějů na rozhraní krystalů a taveniny, pohybu atomů a vlivu poruch při rekrytalizaci a především podrobnějším poznáním zákonitostí při růstu z páry.

Ukázali jsme základní význam monokrystalů pro fyzikální studium kovů, i pro technický výzkum a pokrok současné metalurgie. Monokrystaly kovů se kromě

toho již také prakticky užívají. Uplatňují se vzrůstající měrou jako součásti aparatur v různých odvětvích fyziky, např. monokrystaly hliníku jako velmi světelné monochromátory rentgenových paprsků. K podobnému účelu se užívá i velkých krystalů mědi, olova a jiných kovů v neutronové fyzice; užívá se jich i ve speciálních ultrazvukových přístrojích. V nejbližší době jistě naleznou nová technická použití např. whiskery pro svoji neobyčejnou pevnost a zajímavé magnetické vlastnosti.

Při přípravě monokrystalů jsou též získávány nové poznatky o tuhnutí a krystalizaci kovů. Tyto poznatky jsou velmi cenné pro současnou metalurgii, která mimo jiné usiluje o přesné řízení tuhnutí a krystalizace oceli s cílem zlepšit vlastnosti lité oceli a vyřešit plynulé lití oceli do tyčí.

Literatura vhodná k dalšímu studiu:

K a š p a r - Š m í d - E c k s t e i n: M o n o k r y s t a l y. SNTL 1957. Kniha pojednává o teorii a přípravě nekovových a částečně i kovových monokrystalů.

P í š e k a d r u z í: N a u k a o m a t e r i á l u I. Nakladatelství ČSAV, Praha 1957. Kniha pojednává všeobecně o struktuře a vlastnostech kovů, má spíše technické zaměření.

Š e s t á k: P ř í p r a v a m o n o k r y s t a l ů k o v ů. Čs. čas. fyz. 7 (1957), 413. Referát obsahuje podrobnosti o přípravě monokrystalů s řadou odkazů na původní literaturu.

P o k r o k y f y z i k y p e v n ý c h l á t e k I I. Nakladatelství ČSAV, Praha 1955. Dvě práce v tomto sborníku jednájí přístupným způsobem o poruchách krystalové mřížky.

Z cizí literatury doporučujeme:

К у з н е ц о в В. Д.: К р и с т а л л ы и к р и с т а л л и з а ц и я. Moskva 1954. Kniha obsahuje mnoho údajů o vlastnostech a přípravě krystalů, různých látek a též kovů.

B a r r e t t: S t r u c t u r e o f m e t a l s. New York 1952. (Český překlad se připravuje.) Kniha pojednává o struktuře a vlastnostech kovů z fyzikálního hlediska.

P ř e m y s l S c h ů r e r, Praha:

Jak získávám nízké tlaky

(Dokončení)

Do dnešní doby bylo sestrojeno mnoho pozměněných typů difúzních vývěv. Vedle rtuti se užívá jako pracovní látky též olejů (nebo i parafinu), jež mají nízká napětí nasycených par. Difúzní vývěvy dosahují mezního tlaku 10^{-5} až 10^{-6} mm Hg, při zvlášť pečlivém provedení v laboratorním provozu až 10^{-9} mm Hg. Čerpací rychlosti mají podle své velikosti až 1 000 litrů za vteřinu, obvykle však do 100 litrů za vteřinu. Potřebují předčerpání pomocnou vývěvou, nejčastěji rotační, jež může pracovat proti barometrickému tlaku.

Snížení tlaku v uzavřeném prostoru se dá docílit nejen vývěvami, z nichž některé byly probrány, ale také tzv. g e t r o v á n í m. G e t r je látka, která pohltí a trvale upoutá značné množství plynu. Upoutání plynu nastává třemi způsoby,

jež obvykle probíhají zároveň, a to adsorpcí, absorpcí a chemisorpcí. Tyto tři děje experimentálně rozlišit činí značné potíže.

Adsorpci si můžeme představit jako přilnutí molekul plynu v tenké vrstvě na povrchu pevné látky vlivem mezimolekulárních přitažlivých sil.

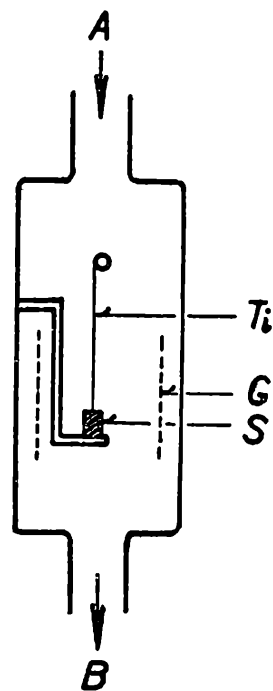
Absorpci nazýváme děj, při němž molekuly plynu pronikají do nitra látky a jsou pohlcovány celým objemem - plyn se v látce rozpouští. V případě adsorpce i absorpce můžeme zachycené plynné molekuly opět uvolnit a vypudit z látky zvýšením teploty: odplyňování ve vakuových pecích.

Jinak je tomu při chemisorpci. Tehdy vytvářejí plynné molekuly s tuhou látkou nové chemické sloučeniny, jež mají být u dobrého getru stabilní. Ve vakuové technice se využívá chemisorpce například u odpařitelných getrů nebo u titanových vývěv.

Jedním z nejstarších absorpčních getrů je dřevěné uhlí, kterého se používá také ve filtrech plynové masky. Z odpařitelných getrů je to například kovové baryum, jež se vypaří a jeho páry před kondenzací a během kondenzace i po usazení pohlcují značný objem přítomného plynu. Připomeňme si tmavé lesklé zrcátko na skleněné baňce elektronky. To je vypařený getr, jakých se zhusta užívá v takovýchto odtavených vakuových systémech. Getr zde má dvojí úlohu: jednak sníží po odčerpání a odtavení baňky dosažený tlak⁶⁾ a potom pohlcuje (adsorbovaný a absorbovaný) plyn, jenž se postupně uvolňuje z různých součástí vakuového systému.

Getrovací schopnosti titanu je využito u titanových vývěv, patřících k nejmladším. Na obrázku 9 je znázorněna první titanová vývěva, jež byla konstruována r. 1954 R. G. Herbem a jeho spolupracovníky. Titanový drátek se odvíjí zvláštním zařízením a spouští se do grafitové píčky *S*, kde se titan taví a vypařuje. Kovové páry reagují před kondenzací a během kondenzace s molekulami plynu a vytváří s nimi stabilní sloučeniny, kondenzující na stěnách. Kromě toho se molekuly plynu adsorbují na opětně napařovanou vrstvičku kovového titanu na stěnách vývěvy.

Ionizační systém, umístěný uvnitř vývěvy, pracuje nám známým způsobem adsorpce (na záporně nabitě povrchy) těch iontů, jejichž molekuly se neslučují s vypařovaným titanem (jsou to hlavně inertní plyny).



Obr. 9. Herbova titanová vývěva. *A* je vstupní otvor od čerpaného prostoru, *B* předčerpávání pomocnou rotační vývěvou, *G* mřížky ionizačního systému, *Ti* titanový drátek, *S* grafitová píčka.

⁶⁾ Tento tlak není obvykle příliš nízký. Čerpání na čerpacím stojanu je prováděno jen krátkou dobu velmi úzkou trubičkou, což nestačí k vyčerpání na dostatečně nízký tlak, potřebný pro zdárnou činnost a dlouhou životnost elektronky.

Vysoká aktivita roztaveného titanu činí však potíže při výběru vhodného materiálu pro tavící a vypařovací píčku. Grafit se dosud osvědčil nejlépe, ale po určité době se píčka rozpadá a je nutno ji vyměnit, což je hlavní nevýhodou vývěvy. V poslední době bylo vynaloženo mnoho práce a důmyslu na zdokonalení těchto vývěv a některé osvědčené typy jsou dnes již vyráběny sériově.

Titan například se vypařuje z měděné kulovité anody, zahřívané bombardováním elektrony, nebo roztavený titan vzlíná po molybdenovém sloupku a odtud se vypařuje. Při vhodném uspořádání elektrod se dá použít titanové vývěvy zároveň jako manometru. Různými způsoby je také řešeno přivádění titanového vlákna k žhavému povrchu, na němž se titan vypařuje.

Titanových vývěv se používá pro odčerpávání velkých objemů, např. mohutných urychlovačů. Podle způsobu provedení dosahují různých čerpacích rychlostí, 1 000 až 10 000 litrů za vteřinu a mezních tlaků řádu 10^{-7} až 10^{-9} mm Hg. Spotřeba titanu činí několik desítek miligramů za hodinu.

Titanové vývěvy jsou hospodárnější⁷⁾ než vývěvy difúzní a dá se očekávat, že je v budoucnu nahradí na mnoha úsecích vakuové techniky.

Prof. Dr. W. Hanle, Gissen:

Vliv záření bohatého na energii

(Dokončení)

Velká energie záření bohatého na energii vyvolává mnohé jiné účinky než jen ohřátí, poněvadž jeho energie je vyšší, než střední pohybová energie molekul, která je při teplotě 10 000 °C pouze 1 eV.

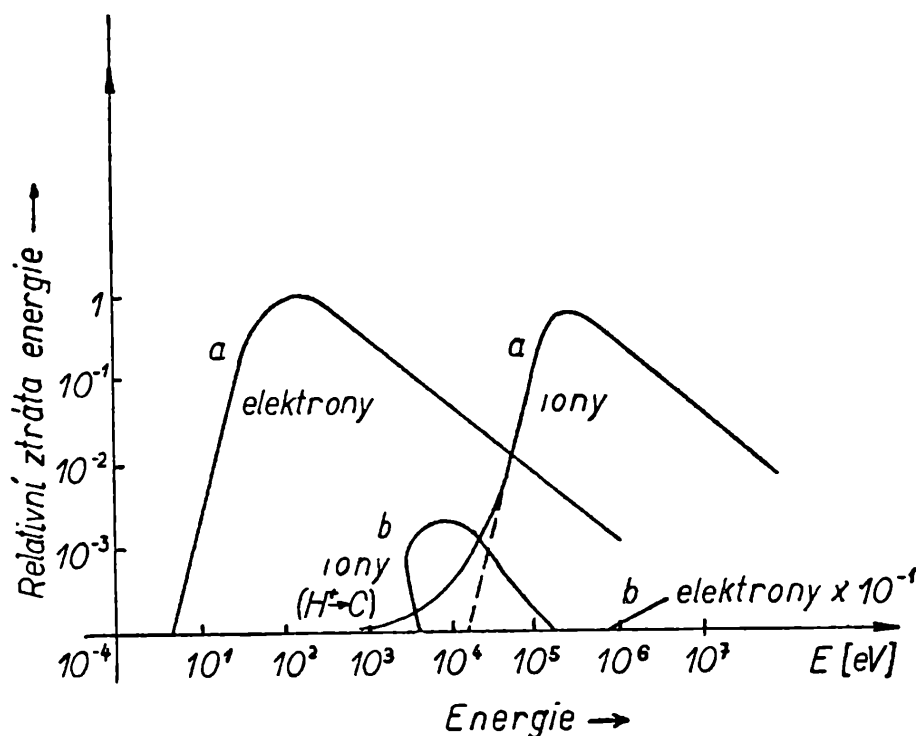
Při srážce rychlých částic s atomy vzniknou rázy pružné a nepružné. Při rázu pružném se přenáší na částici jen pohybová energie, jako u koulí na kulečnicku, podle mechanických zákonů. Při rázu nepružném je zasažená částice ionizována nebo disociována. Pouze těžké částice, protony, neutrony a produkty štěpení přenášejí energii pružnými rázy; elektrony většinou jen rázy nepružnými. Obr. 1 dává přehled ztrát energie elektronů a ionů při průchodu hmotou. Neutrony mohou přenášet energii pouze pružnými rázy, poněvadž jim chybí elektrický náboj. Zasažená jádra, resp. iony, jsou zasaženy rázy nepružnými a pružnými. Rentgenové a gama-paprsky působí druhotně jimi uvolněnými elektrony ve hmotě.

Obr. 2 znázorňuje schematicky rozdílný vliv různých druhů záření. Ztráty energie nepružným rázem (ionisování, buzení) jsou označeny kroužky. K buzení, resp. ionisování, je zapotřebí energie několika 10 eV. Jeden elektron o energii 1 MeV vyrobí tedy asi 10^5 dvojic ionů.

⁷⁾ Titanové vývěvy mají mimo jiné tu velkou přednost, že po uvedení do provozu můžeme předvakuový stupeň (rotační vývěvu) vypnout, což při difúzních vývěvách nelze obvykle učinit.

Často následují po primární reakci sekundární děje jako transformace energie difúzí, vyzařováním a zpětnou absorbcí, nebo přemísťováním energie přes mnoho molekul.

Nejjednodušší sled základních procesů je při průchodu záření bohatého na energii plyny. Nejdůležitější měřicí přístroj pro toto záření - p o č í t a c í t r u b i c e - je založen na ionizování právě tak, jako ionizační komora. Velká citlivost jaderně-fyzikálních metod je dána tím, že počet vyrobených ionů jednou



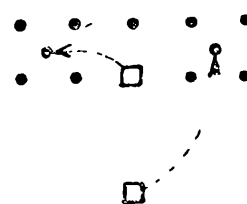
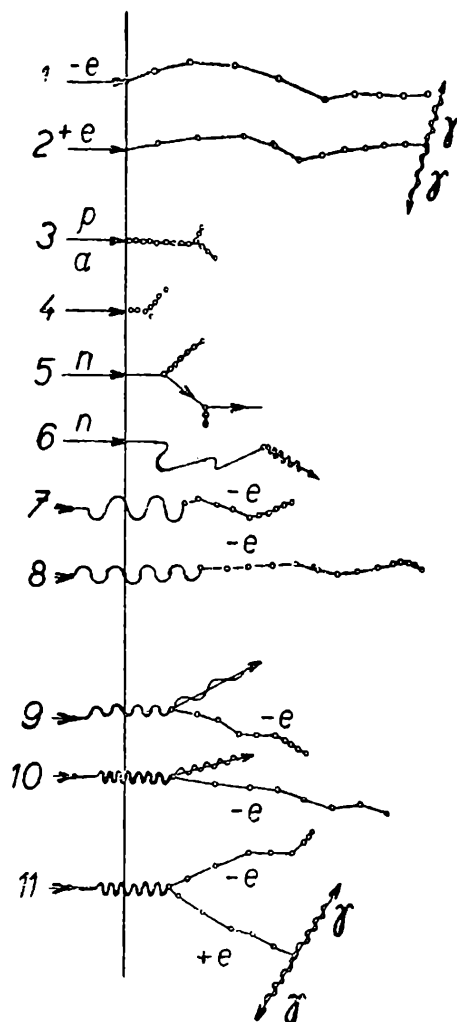
Obr. 1. Relativní ztráta energie na jednotku dráhy elektronů a ionů a) vzbuzením a ionizováním, b) chybným umístěním při pružných rázech.

jedinou rychlou částicí postačí k důkazu její existence a často také k měření energie pohybu a záření. Na ionizování je též založeno určení jednotky dávky rentgenového záření. Dnes ještě často používanou jednotkou dávky je 1 rentgen (r), tj. takové množství rentgenové energie, které vyrobí v 1 cm³ vzduchu za normálních podmínek 8×10^9 dvojic ionů, čili 8×10^{-6} wattsec na 1 gram. Nově se používá pro všechny druhy záření jednotky 1 rad, což je absorbované záření 10^{-5} wattsec na 1 g substance.

Ve vodě a vodním roztoku způsobuje záření bohaté na energii radioanalýzu. Znalost radioanalýzy je důležitá pro typy jaderných reaktorů, ve kterých se používá vody, resp. těžké vody, jako moderátoru, nebo jako chladicí látky. Je však nutná krajní čistota a katalytické odstranění vytvořených produktů rozkladu.

U kovů, pro značný počet volných elektronů, jsou nepružné rázy spojené s ionizací. Zajímají nás proto jen pružné rázy na stavební kameny mřížky. Poněvadž je podíl ztráty energie pružnými rázy malý (obráz. 2), dozrají kovy změny jen při velkých dávkách záření, a to jen vlivem neutronů, zatím co elektrony jsou prakticky neúčinné. Těžké částice vyrájí stavební kameny mřížky z jejich normálních míst. Tyto se pak uloží mezi body mřížky a vzniká tak zvané F r e n k e l o v o c h y b n é u s p o ř á d á n í (obráz. 3).

Současně vznikají ponejvíce prázdná místa, nepadne-li ostřelují částice právě do volného místa. Poněvadž s klesající rychlostí těžkých částic stoupá počet pružných rázů, je na konci jejich drah stále větší počet poruch mřížky. Přivedená energie může místně vést ke krátkodobému zvýšení teploty nad bod tavení. Obr. 4 znázorňuje v takových případech očekávanou změnu mřížky.



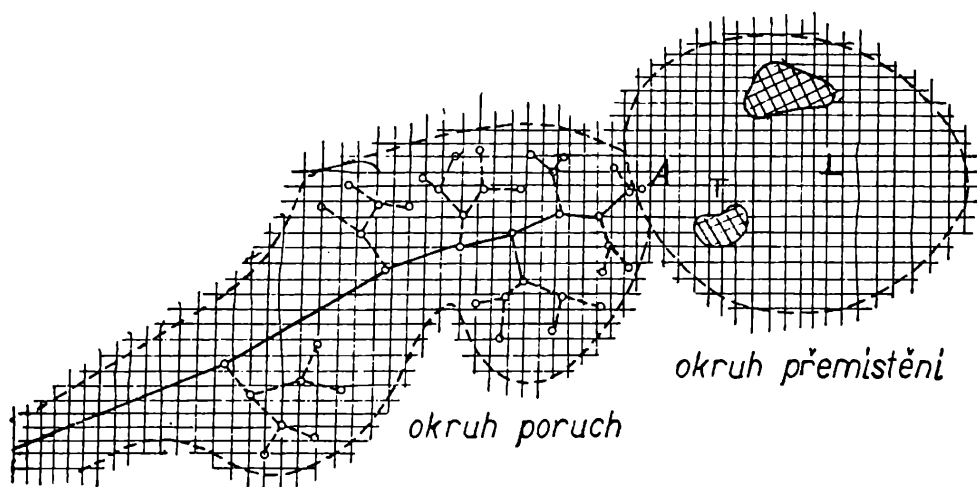
Obr. 3. Chybné uspořádnání podle Frenkela: Mezimřížkové atomy a díry v mřížce jsou ve stejné koncentraci.

Obr. 2. Schematické zobrazení vlivu rychlých částic a tvrdých kvant při průchodu hmotou. Čára o-o-o-o značí buzení a ionizování podél drah nabitých částic. 1. záporná částice (rychlý elektron, $-e$); 2. kladná b-částice (rychlý positron, $+e$); 3. proton, nebo α -částice; 4. těžká částice; 5. rychlý neutron (odražená jádra o); 6. pomalý neutron (zachycení jádrem o); 7. měkké rentg. paprsky (fotoefekt). Tvrdé rentg. paprsky: 8. fotoefekt, 9, 10) (Comptonův efekt). Gama-paprsky: 10); 11) (tvoření dvojic).

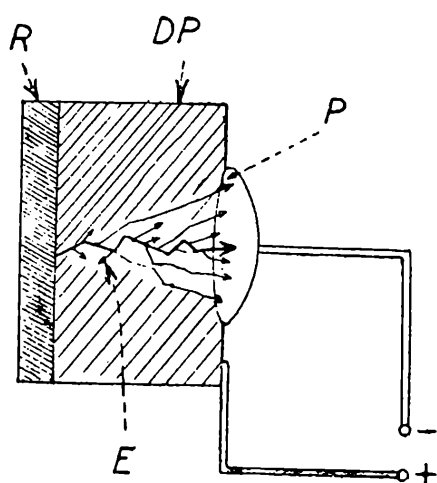
Změny v mřížce se makroskopicky projevují změnou vlastností pružných a elektrických. Tak např. uhlíková ocel zkřehne a zvýší se elektrický odpor. U čistých kovů je ovšem změna odporu velká, jen při nízkých teplotách. Větší změna odporu vzniká u slitin změnou uspořádání částic, což lze dokázat rentgenograficky. Poněvadž je možno docílit takové změny jiným způsobem jednoduššeji a levněji, nemá ozařování kovů proti dále uvedeným izolátorům technický význam.

Téměř všechny vlastnosti grafitu jsou ovlivněny zářením bohatým na energii,

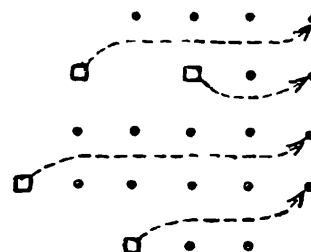
Ozařováním neutrony klesá hustota a stoupá elektrický odpor. Tyto průzkumy jsou zvláště důležité pro průmysl, zabývající se výrobou reaktorů, neboť většina jaderných reaktorů obsahuje nyní grafit jako moderátor, nebo jako stavební hmotu.



Obr. 4. Schematické znázornění vlivu záření ve dvoudimenzionální mřížce (podle Brinkmanna).



Obr. 5. R = radioaktivní materiál, DP = deska z polovodiče, P = přívod jako u transistorů, E = aktivovaný elektron uvolní dalších 200 000 elektronů. Pokusná baterie atomová podle Radio Corporation.



Obr. 6. Chybné uspořádání podle Schottky: Atomy putují na povrch krystalu zanechávající mezery v mřížce (volná místa).

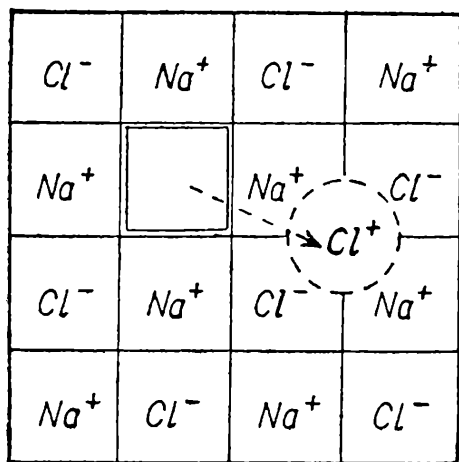
V polovodičích, jako je např. germanium, zvyšuje se při ozáření vodivost vlivem ionizace. Ozářením germaniových usměrňovačů vzniká napětí, kterého lze použít při konstrukci atomových baterií. Skládají se z germaniového usměrňovače a z vrstvy radioaktivního stroncia, získaného v reaktoru (obr. 5).

Výkon takovýchto baterií je velmi malý. Tento způsob je však zajímavý, poněvadž jde o přímé využití atomové energie (nikoliv přes tepelné zařízení).

Trvalé změny v pevných tělesech jsou způsobeny těžkými částicemi. Neutrony nebo alfa-částice vytvářejí Frenkelovy defekty a díry.¹⁾ Tím se mění elektrický odpor. I zde je vliv při nízké teplotě řádově vyšší než při teplotě místnosti, při které nastává již v nejkratší době zotavování. Beta-částice (elektrony) působí zprvu pohybovou energií. Největší část energie se však spotřebuje k ionizování, což vede ke zvýšení vodivosti jen v době ozařování.

Ionizování anorganických sloučenin má často za následek světélkování (radio-luminescenci). Použití světélkování, vzniklého působením alfa-částic na sulfid zinku u číselníku hodinek, je všeobecně známo.

Nejčastěji se zachytí část elektronů uvolněných ionizací na chybných místech mřížky, z nichž jsou odstraněny teprve přivedenou energií (tepelným pohybem); při čemž vznikne vyzařování (fosforeskování). Při zvýšení teploty následuje rychlejší vyzařování; vyzařuje se i energie nahromaděná v místech hluboko ležících. Obr. 6 znázorňuje příklad tzv. Schottkyho prázdného místa. Elektrony, zapadlé do prázdných míst hluboko ležících, projevují se změnou absorpce a luminiscence četných anorganických sloučenin a skel. U ionových krystalů přičítá se část absorpce tomu, že aniony mohou být zářením bohatým na energii mnohonásobně ionizovány. Přitom obdrží kladný náboj, jsou odraženy okolními kationy, putují na místo mezi řádky mřížky a tvoří tak Frenkelův defekt (obr. 7). Také



Obr. 7. Frenkelův defekt jako důsledek vícenásobného ionizování anionu.

kationy mohou být samozřejmě odraženy a mohou putovat mezi řádky mřížky.

Těžké částice (neutrony a iony) vytvářejí např. v kovech pružnými rázy Frenkelovy defekty. Čím jsou silnější vazbové síly ionů sloučeniny, tím je tato odolnější proti vyzařování částic. Tvořením Frenkelových defektů snižuje se hustota křemene. Těžké částice též ovlivňují elektrickou vodivost; např. u CdS nejdříve alfa-částice snižují vodivost, při silnějším ozáření ji zvyšují.

Také četné organické látky světélkují vlivem paprsků bohatých na energii. Chemie záření je zvláště důležitá pro průmysl umělých hmot. Velmi zajímavé

jsou biologické vlivy záření bohatého na energii. U bramborů a cibule je schopnost klíčení při ozáření 1000 r zmenšena, při 20 000 r zamezena, takže lze brambory udržet takto ještě po 18 měsících čerstvé a hladké. Ozářením dávkou 10 000 r je zničena rozplozovací schopnost škůdců. Bakterie jsou ničeny dávkou 106 r, což může mít význam pro studenou sterilizaci farmaceutických výrobků.

¹⁾ Viz článek: Ing. J. Kodeš, Fyzikální výklad usměrňujícího účinku polovodičů, Rozhledy, č. 3, roč. 1959/60,

Jak bylo v úvodu řečeno, jsou jaderné reaktory zdrojem intenzivního záření bohatého na energii. Možno počítat s tím, že technické využití tohoto záření dosáhne stejně velkého významu, jako získávání energie v jaderných reaktorech.

Pro naše čtenáře přeložil a upravil
Ing. M. Müller

Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

8. Výraz $\frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, kde a, b, c značí délky stran a t_a, t_b, t_c délky těžnic libovolného trojúhelníka, má vždy touž hodnotu. Určete ji! Podobně určete hodnotu výrazu $\frac{t_a^4 + t_b^4 + t_c^4}{a^4 + b^4 + c^4}$.

Oldřich Kowalski-Buchta

Řešil Ivan Zoc, XIe, 16. žSŠ v Praze 13:

Podle kosinové věty platí pro strany trojúhelníka:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \dots bc \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \dots ac \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \quad (2)$$

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - 2 \cdot \frac{ac}{2} \cos \beta \quad (3)$$

$$t_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{bc}{2} \cos \alpha \quad (4)$$

$$t_c^2 = \frac{c^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \frac{ac}{2} \cos \beta. \quad (5)$$

Po dosazení (1), (2) do příslušných rovnic (3) (4) (5) a po úpravě dostaneme

$$t_a^2 = \frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{4} \quad (3')$$

$$t_b^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4} \quad (4')$$

$$t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \quad (5')$$

Poměr $\frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$ je stálý pro libovolné strany a, b, c trojúhelníka.

Zdvojnásobněním rovnic (3'), (4'), (5') dostáváme:

$$t_a^4 = \frac{a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 8b^2c^2}{16} \quad (6)$$

$$t_b^4 = \frac{4a^4 + b^4 + 4c^4 + 8a^2c^2 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2}{16} \quad (7)$$

$$t_c^4 = \frac{4a^4 + 4b^4 + c^4 + 8a^2b^2 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2}{16} \quad (8)$$

Sečtením rovnic (6) (7) (8) plyne:

$$t_a^4 + t_b^4 + t_c^4 = \frac{9}{16} (a^4 + b^4 + c^4)$$

Proto vždy $\frac{t_a^4 + t_b^4 + t_c^4}{a^4 + b^4 + c^4} = \frac{9}{16} = \text{konst.}$

12. Do sklepa o dvou místnostech bylo zavedeno z bytu elektrické vedení, a to tak, že každá místnost byla osvětlena jednou žárovkou, která se rozsvěcovala nebo zhasínala vlastním vypínačem. Když se začalo osvětlení používat, ukázaly se tyto závady:

a) Když byly zapnuty obě žárovky najednou, svítila každá mnohem slaběji, než když byla rozsvícena jen jedna z nich;

b) 15wattová žárovka svítila v kterékoli z obou místností dost jasně (ale slaběji než v bytě), kdežto 100wattová žárovka se ve sklepe vůbec nerozsvítila. Vysvětlete!

Jarmila Dlouhá

Řešení autorčino:

Obě závady způsobuje značný odpor ve vedení z bytu do sklepa, ať už jakéhokoliv původu (příliš dlouhé, tenké vedení; nalomený drát, špatné kontakty, vedení přes jiný spotřebič aj.).

a) Při správném zapojení je $U_{AB} = U_{CD} = U_0$, tedy obě žárovky jsou zapojeny na napětí sítě U_0 . Označíme-li jejich odpory R_1 a R_2 , protéká první žárovkou proud $I_1 = \frac{U_0}{R_1}$ a druhou žárovkou proud $I_2 = \frac{U_0}{R_2}$.

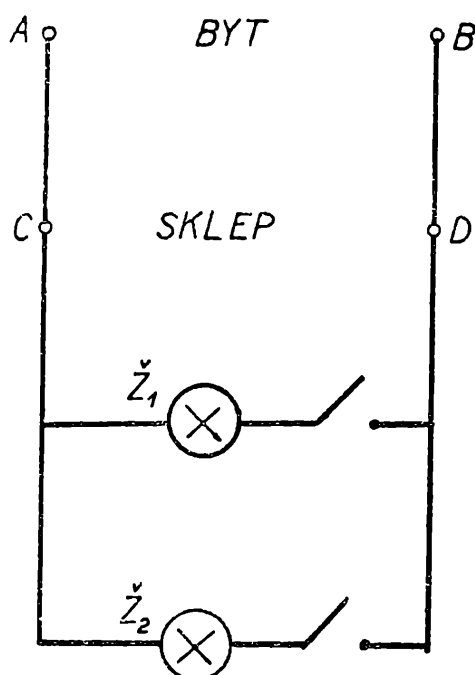
Při takovém zapojení by obě žárovky svítily naplno.

b) Při skutečném zapojení je $U_{CD} = U_{AB} - R I$, kde R je odpor vedení z bytu do sklepa a I je proud, který jím protéká. Je tedy vždy při zapnutí některé žárovky $U_{CD} < U_{AB}$, a proto žárovkou protéká menší proud, než jaký je nutný k úplnému rozžhavení vlákna žárovky. Tento proud je při zapnutí jen žárovky Z_1

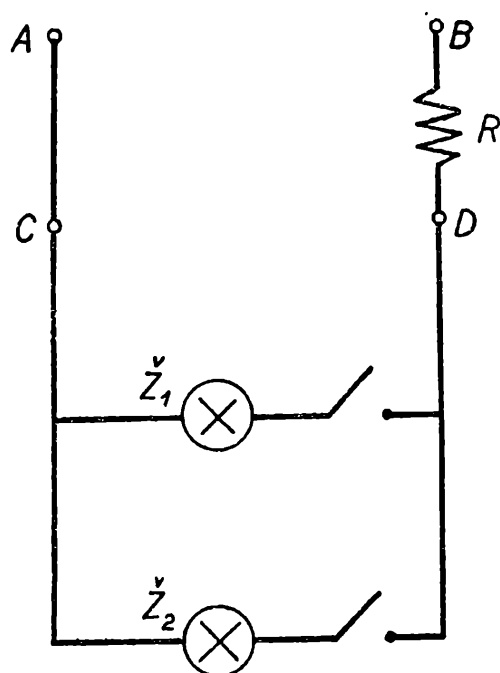
$$I'_1 = \frac{U_0}{R + R_1} \Rightarrow I'_1 < I_1 ;$$

při zapnutí jen žárovky $\check{Z}_2$

$$I'_2 = \frac{U_0}{R + R_2} \Rightarrow I'_2 < I_2 .$$



Obr. 1. Správné zapojení by mělo vypadat takto.



Obr. 2. Ve skutečnosti však vypadá zapojení takto.

Musí tedy svítit při uvedeném zapojení každá ze žárovek ve sklepě slaběji než v bytě.

Jsou-li zapnuty obě žárovky, protéká prvou z nich proud

$$I''_1 = \frac{U_0}{R_1} \left(1 - \frac{R}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) = \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$$

a druhou žárovkou $I''_2 = \frac{U_0 R_1}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$

Dokážeme, že $I''_2 < I'_1$; $\frac{U_0 R_2}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2} < \frac{U_0}{R + R_1}$

$$\frac{U_0}{R + R_1 + \frac{R R_1}{R_2}} < \frac{U_0}{R + R_1} ,$$

protože $\frac{R R_1}{R_2} > 0$, je tato nerovnost správná.

Podobně se dá dokázat, že $I_2'' < I_2'$.

Je tedy vidět, že při současném osvětlení oběma žárovkami protéká každou z nich menší proud, než svítí-li jen jedna z nich, a proto svítí obě žárovky slaběji.

Nyní ukážeme, že odpor vedení způsobuje i druhou závadu.

Vypočteme, jakou část proudu odebírá žárovka ve skutečném zapojení, proti proudu, který jí má správně téci (uvažujeme zapnutí jen jedné žárovky):

$$\eta = \frac{I_2'}{I_1} = \frac{\frac{U_0}{R + R_1}}{\frac{U_0}{R_1}} = \frac{R_1}{R + R_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_1}}$$

Označme hodnotu tohoto poměru pro 15 wattovou žárovku indexem 15 a pro 100 wattovou indexem 100 (těchže indexů použijeme i pro hodnoty odporu) a porovnejme jeho hodnotu.

Musíme tedy rozhodnout, který ze vztahů

a) $\eta_{15} > \eta_{100}$, b) $\eta_{15} = \eta_{100}$, c) $\eta_{15} < \eta_{100}$
je správný.

Předpokládejme, že platí $\eta_{15} > \eta_{100}$ a prozkoumejme, je-li to ve shodě se skutečností:

$\eta_{15} > \eta_{100}$ znamená, že

$$\frac{1}{1 + \frac{R}{R_{15}}} > \frac{1}{1 + \frac{R}{R_{100}}}$$

a tedy

$$1 + \frac{R}{R_{100}} > 1 + \frac{R}{R_{15}}.$$

Z toho plyne

$$\frac{R}{R_{100}} > \frac{R}{R_{15}}$$

a

$$R_{15} > R_{100}.$$

Protože výkon žárovky je nepřímo úměrný odporu, má silnější žárovka menší odpor než slabší žárovka, tj. $R_{100} < R_{15}$. Výsledek našeho výpočtu je ve shodě s tímto tvrzením. Vztah b), resp. c) by vedl k výsledku $R_{15} = R_{100}$, resp. $R_{15} < R_{100}$, což by odporovalo tomuto tvrzení.

Vidíme tedy, že ze vztahů a), b) a c) je správný vztah $\eta_{15} > \eta_{100}$, tedy u 100 wattové žárovky proud nestačí na rozžhavení.

13. Zjistěte graficky i počtem chod paprsků a vzdálenost obrazu a jeho velikost, je-li předmět výšky $y = 25$ [mm] postaven ve vzdálenosti $a = 20$ [mm] od vrcholu vypuklého zrcadla, jehož ohnisková délka jest $f = -30$ [mm].

Evžen Říman

Řešil Břetislav Fiala, učen ZUŠ Tesla v Pardubicích, závod MIKA:

Pro kulová zrcadla platí zrcadlová rovnice $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, pomocí které určíme vzdálenost b obrazu od vrcholu zrcadla

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{a - f}{af}, \text{ takže}$$

$$b = \frac{af}{a - f} = \frac{20 \cdot (-30)}{20 - (-30)} = -12 \text{ [mm]}$$

Obraz je zdánlivý ve vzdálenosti 12 [mm] za zrcadlem. Velikost obrazu y' se určí podle vztahu

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{3}{5}, \text{ takže}$$

velikost obrazu je $y' = y \cdot Z = 25 \text{ [mm]} \cdot \frac{3}{5} = 15 \text{ [mm]}$.

Obraz je vzpřímený (neboť $y' > 0$), zdánlivý (neboť $b < 0$) a zmenšený (neboť $Z < 1$).

Graficky řešila Daniela Hýblová, XIb, 1. řSŠ v Olomouci:

Víme, že $r = 2f$, což znamená, že poloměr křivosti zrcadla je $r = 6$ [cm].

Pro chod paprsků platí:

1. Paprsek rovnoběžný s osou se odráží, jako by vycházel z ohniska F ;
2. paprsek, který směřuje do ohniska F , je po odrazu rovnoběžný s osou;
3. paprsek směřující do středu křivosti S se odráží opačným směrem.

Paprsky z bodu X vycházející, vytvoří po odrazu rozbíhavý svazek a protly by se až na svém prodloužení za zrcadlem. Proto vzniká pouze zdánlivý obraz X' bodu X (resp. zdánlivý obraz y' předmětu y).

Rozdíly mezi grafickým a početním řešením si vysvětlíme tím, že zrcadlo má malý poloměr křivosti vzhledem k výšce předmětu a proto paprsky vycházející z krajních bodů předmětu, nelze považovat za nulové. Zrcadlová rovnice však platí jen pro paprsky nulové.

(Poznámka redakce: Přesný souhlas početního a grafického řešení se obdrží tím, že v grafu necháme paprsky odrážet se od vrcholové tečny (místo zrcadla samého).

14. Dokažte, že pro každé x platí nerovnost

$$5 + 8 \cos x + 4 \cos 2x + \cos 3x \geq 0.$$

D. S. Mitrinović

v knize: Vážnije nejednakosti (Beograd 1958, str. 50)

Řešil Petr Tomšů, III. PŠ v Kopřivnici:

Upravujeme levou stranu L dané nerovnosti:

$$\begin{aligned} L &= 5 + 8 \cos x + 4(2 \cos^2 x - 1) + 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos^3 x + 8 \cos^2 x + \\ &+ 5 \cos x + 1 = 4 \cos^3 x + 4 \cos^2 x + 4 \cos^2 x + 4 \cos x + \cos x + 1 = \\ &= 4 \cos^2 x \cdot (\cos x + 1) + 4 \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1) = \\ &= (\cos x + 1)(4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1) = (\cos x + 1)(2 \cos x + 1)^2. \end{aligned}$$

Protože $-1 \leq \cos x \leq 1$, je vždy $\cos x + 1 \geq 0$ a

$$(2 \cos x + 1)^2 \geq 0, \text{ pro každé } x \text{ je } L \geq 0, \text{ cbd.}$$

Rovnost nastane právě tehdy, je-li buď

a) $\cos x = -1$, tj. $x = (1 + 2k)\pi$ (k celé), nebo

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$, tj. $x = (\frac{1}{3} + k) \cdot 2\pi, (\frac{2}{3} + k) \cdot 2\pi$, (k celé).

15. Jaký je součet všech možných součinů utvořených vždy ze dvou různých čísel vybraných z přirozených čísel $1, 2, 3, \dots, n$?

Késedi Ferenc (Budapest)

v časopise Középiskolai Matematikai Lapok 1958, str. 126, př. 898

Řešil Petr Jiříček, XIa, JŠŠ v Ostravě:

Násobíme každým číslem ostatní čísla dané množiny a vzniklé součiny sečteme. Protože každý součin je v tomto součtu dvakrát, dělíme výsledek dvěma, takže hledaný součet S je:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [1 \cdot (2 + 3 + \dots + n) + 2 \cdot (1 + 3 + 4 + \dots + n) + 3(1 + 2 + 4 + \\ &+ \dots + n) + \dots + n(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)] = \\ &= \frac{1}{2} [1(1 + 2 + 3 + \dots + n) - 1^2 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) - 2^2 + \\ &+ 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) - 3^2 + \dots + n(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n^2]. \end{aligned}$$

Po vytknutí faktoru $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ a úpravě dostaneme

$$S = \frac{1}{2} [(1 + 2 + 3 + \dots + n)(1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)].$$

Použitím známých součtů

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

získáme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{1}{2^4} [3n^2(n+1)^2 - \\ &- 2n(n+1)(2n+1)] = \frac{1}{2^4} [n(n+1)(3n^2 + 3n - 4n - 2)] = \\ &= \frac{1}{2^4} n(n+1)(3n^2 - n - 2). \end{aligned}$$

Rozkladem kvadratického trojčlenu získáme výsledek

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)(n-1)(3n+2).$$

16. Řešte soustavu rovnic

$$xy + 2xz + 3yz = -6$$

$$x^2y^2 + 4x^2z^2 - 9y^2z^2 = 36$$

$$x^3y^3 + 8x^3z^3 + 27y^3z^3 = -216$$

Biczó Géza (Budapest)

v časopise Középiskolai Matematikai Lapok 1958, str. 26, př. 832

Řešil Břetislav Fiala, učen ZUŠ Tesla, Pardubice, závod MIKA:

V dané soustavě položíme $xy = a$, $2xz = b$, $3yz = c$:

$$a + b + c = -6 \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 36 \quad (2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -216 \quad (3)$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 - c^2, \text{ tj.}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 - c^2.$$

Odtud $c^2 + ab + ac + bc = 0$, tj. $(a + c) \cdot (b + c) = 0$

a tedy buď $a = -c$ a z (1) $b = -6$ (A)

nebo $b = -c$ a z (1) $a = -6$ (B)

Nalezené hodnoty vyhovují vskutku rovnicím (1) a (2) a též rovnici (3), jak se přesvědčíme dosazením. Ze substitučních rovnic dostáváme

(A): $xy = -3yz$

$$2xz = -6$$

α) pro libovolné $y \neq 0$ je $x = -3z$, $2x^2 = 18$, $x = \pm 3$, $z = \mp 1$

β) pro $y = 0$ je $xz = -3$ čili $z = -\frac{3}{x}$, kde x je libovolné $\neq 0$.

(B): $2xz = -3yz$

$$xy = -6$$

α) pro libovolné $z \neq 0$ je $2x = -3y$, $2x^2 = 18$, $x = \pm 3$, $y = \mp 2$;

β) pro $z = 0$ je $xy = -6$ čili $y = -\frac{6}{x}$, kde x je libovolné $\neq 0$.

Řešení dané soustavy jsou tedy tyto trojice x, y, z :

x	y	z	pro
$+3$	y	-1	libovolné y
-3	y	1	libovolné y
x	0	$-\frac{3}{x}$	libovolné $x \neq 0$
3	-2	z	libovolné z
-3	2	z	libovolné z
x	$-\frac{6}{x}$	0	libovolné $x \neq 0$

21. Ocelový drát o zanedbatelné hmotě je opatřen závažím, jehož hmota je $m = 54,5$ [g] a svisle upevněn. Silou $F = 0,15$ váhového kilogramu se závaží vychýlí z rovnovážné polohy o délku $y = 3$ [cm]. Určete dobu kmitu T .

Evžen Říman

Řešil: Bohuslav Diviš, XIc, JSS v Praze 14:

Označme délku kyvadla l . Vychýlíme-li závaží z rovnovážné polohy o délku y , rozkládá se váha závaží na dvě složky F_1 a F_2 . Složka F_2 se ruší pevností závěsu a drátu. Druhá složka F_1 má směr tečny kruhového oblouku a uvádí kyvadlo do pohybu směrem k rovnovážné poloze. Musí tedy platit

$$F_1 = F = G \sin \alpha = m g \sin \alpha .$$

Při malých úhlech můžeme $\sin \alpha$ nahradit přímo úhlem α v radiánech. Potom je

$$\sin \alpha \doteq \alpha = \frac{y}{l} , \text{ takže } F = m g \frac{y}{l} , \text{ z čehož } l = \frac{m g y}{F} .$$

Pro dobu kmitu kyvadla platí známý vzorec, do něhož dosadíme za

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m y}{F}} .$$

Dané veličiny převedeme do soustavy MKSA: $m = 5,45 \cdot 10^{-2}$ [kg], $F = 0,15$ [kp] = $0,15 \cdot 9,81$ [N]; $y = 3$ [cm] = $3 \cdot 10^{-2}$ [m]. Po dosazení vyjde

$$T = \frac{2\pi}{30} [\text{s}] = 0,209 [\text{s}]$$

Řešil Petr Tomšů, III. PS v Kopřivnici, který zaslal kromě hořejšího řešení ještě druhé řešení za předpokladu, že jde o kmitavý pohyb ve směru svislém (což text příkladu rovněž připouští):

Kmitá-li závaží jako na pružině (ve směru svislém), pak pro dobu kmitu platí $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, kde m je hmota zavěšeného závaží, k = konstanta pružiny, jež je číselně rovna síle způsobující jednotkovou výchylku, tedy $k = \frac{F}{y}$.

Považujeme drát za pružinu a předpokládejme, že počítáme v mezích Hookova zákona a že drát je dostatečně dlouhý, aby absolutní prodloužení bylo skutečně $y = 3$ cm. Pak dosazením do hořejšího vzorce máme ihned

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{my}{F}}.$$

Různé

Josef Kotyk, JSŠ, Pardubice:

James Prescott Joule

(Pokračování)

V úvodní části jsem pojednal o ekvivalenci práce a tepla a o obsahu první hlavní věty termodynamické.¹⁾ Shledali jsme, že v podstatě běží o princip přeměny a zachování energie. Neznáme dosud fyzikální zjev, o němž bychom museli říci, že tento princip porušuje. Všechny dosud známé zákony fyziky jsou s ním v úplném souhlasu.

Nyní přibereme v úvahu další důležitý druh energie.

II. Jouleovo teplo

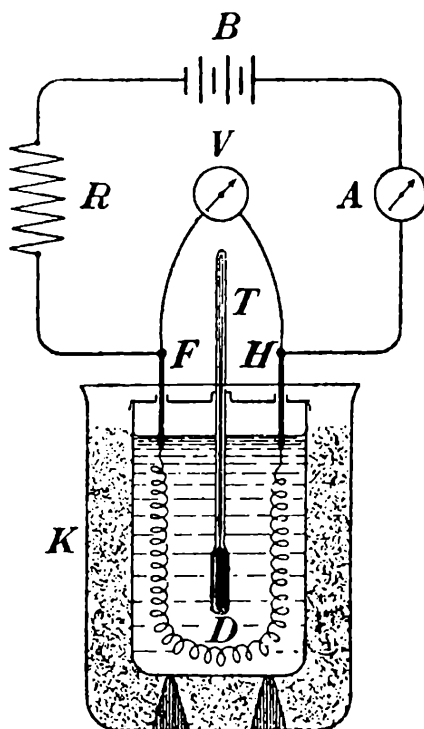
V letech 1840 a 1841 se Joule zabýval studiem přeměny elektrické energie v energii tepelnou. Teplo, jež vzniká elektrickým proudem ve vodiči, nazýváme proto zpravidla *teplem Jouleovým*.

Nemá-li proudovodič pohyblivých částí, v nichž by docházelo k přeměně elektrické energie v energii mechanickou (pohybovou), spotřebuje se práce proudu jen na překonání odporu vodiče a všechna elektrická energie se ve vodiči mění v energii tepelnou. Tento děj sledoval Joule také kvantitativně jednoduchým pokusem:

Do kalorimetru (obr. 1) nalil odvážené množství m gramů nevodivé kapaliny (destilované vody, oleje aj.) a zjistil teploměrem T její teplotu t_1 . Do ní vložil

¹⁾ Viz také můj článek o M. Planckovi, zejména jeho část I. „Termodynamika“, Rozhledy, roč. 36, čís. 5, str. 232 až 234.

kovovou spirálu, např. konstantanový drát D , jehož konce F , H spojil s voltmetrem V a s póly baterie B . Do vedení vepnul také ampérmetr A a reostat R . Když spojil proud, shledal, že kapalina v kalorimetru se zahřívala. Joule měřil jednak napětí U voltů (potenciální rozdíl v bodech F , H), intenzitu proudu I ampérů a dobu τ s, po kterou procházel, jednak teplo Q cal, jímž se dané množství kapaliny o specifickém teple c zahřeje z teploty t_1 na teplotu t_2 . Dělíme-li množství tepla $Q = cm(t_2 - t_1)$ cal,²⁾ vyvinutého při pokusu, prací proudu $A = U \cdot I \cdot \tau$



Obr. 1

voltampérsekund $= U \cdot I \cdot \tau$ wattsekund $= U \cdot I \cdot \tau$ joulů, dostaneme *tepelný ekvivalent mechanické práce*, jenž udává množství tepla, které odpovídá jednotce práce. Označuje se $K = \frac{Q}{A}$ a je převrácenou hodnotou mechanického ekviva-

lentu tepla $\mathcal{J} = \frac{A}{Q}$. Pokusem a přímým měřením Joule shledal, že jeho hodnota je veličinou stálou a činí přibližně 0,24 cal/joule.³⁾ Jinými slovy: *P r á c e 1 j o u l e j e e k v i v a l e n t n í (rovnomocná, rovnocenná) t e p l u 0,24 c a l.*

Tím byl zjištěn důležitý konstantní činitel *zákona Jouleova*,⁴⁾ jenž zní: *Množství Jouleova tepla, vzniklého ve vodiči elektrickým proudem, je přímo úměrné napětí*

²⁾ Tzv. vodní hodnotu kalorimetru a teploměru nebereme zatím v úvahu. Viz také Cvičení 1.

³⁾ Přesnější hodnota (viz Valouchovy tabulky) je 0,23892 cal/joule.

⁴⁾ Nezávisle na Jouleovi objevil tento zákon také ruský akademik Emilij Chriatianovič Lenc (1804–1865), bývá proto v novější době nazýván *zákonem Joule-Lencovým*.

na vodiči, intenzitě proudu a době, po kterou proud procházel. Nezávisí na směru proudu.

Vzorec $Q = 0,24 \cdot U \cdot I \cdot \tau$ (cal; V, A, s), jímž lze zákon Jouleův zapsat, patří k nejdůležitějším v elektrotechnice.

P o z n á m k y :

1. Pokusy o závislosti Jouleova tepla lze výhodně provádět užitím ponorného vaříče.

2. Prochází-li elektrický proud nestejnoměrně zahřátým vodičem (jeho teplota není všude stejná), a souhlasí-li směr elektrického proudu se směrem proudu tepelného, vybavuje se ve vodiči kromě obyčejného tepla Jouleova další množství tepla; je-li směr elektrického proudu opačný než směr proudu tepelného, teplo se ve vodiči pohlcuje. (Zjev Thomsonův.)

3. Prochází-li elektrický proud spojem dvou různých kovů, vybavuje se v místě spoje při určitém směru proudu kromě obyčejného tepla Jouleova další množství tepla; při opačném směru proudu se v témž místě teplo pohlcuje. (Zjev Peltierův.)

C v i č e n í :

1. Při přesnějších kalorimetrických měřeních přihlížíme též k tzv. *vodní hodnotě kalorimetru* (viz učebnici fyziky pro 10. roč., 1954, str. 14). Vyložte, jak upravíme v tom případě výpočet tepelného ekvivalentu mechanické práce!

2. Při laboratorní práci použili žáci napětí 80 V a shledali, že proudem intenzity 1,3 A, jenž procházel $7\frac{3}{4}$ min, se 1 kg vody v kalorimetru zahřál o $11,8^\circ$. Stanovte tepelný ekvivalent práce!

3. Srovnajte (podle běžných cen) náklady, kterých je třeba k zahřátí 30 l vody teploty 10°C do varu, užijeme-li a) briket o spalném teple 4800 cal/g, b) světelného proudu, c) proudu motorového!

4. Určete poměr Jouleových tepel vzniklých v každém z dvou vodičů, jejichž odpory jsou R_1 a R_2 , spojíme-li je a) v serii (za sebou), b) paralelně (vedle sebe)!

(Dokončení)

Československý vědec nositelem Nobelovy ceny

V malebném malostranském zákoutí, v historickém domě, který nyní slouží části Polarografického ústavu Československé akademie věd, je pracovna jeho ředitele, akademika J. Heyrovského. Tento skromný a svědomitý vědec je prvním československým občanem, jemuž byla udělena Nobelova cena. Akademiku J. Heyrovskému bylo toto nejvyšší uznání, které může světová vědecká veřejnost projevit, přiznáno za jeho objevy polarografie a oscilografické polarografie. Nositel Nobelovy ceny za chemii za rok 1959, zakladatel polarografie, akademik J. Heyrovský, je nesporně hodným této pocty. Nejen, že objevil nové elektrochemické metody, významné pro teorii a praxi, ale sám věnoval celý svůj život vysvětlování chování rtuťové kapkové elektrody, která tvoří základ těchto metod, studiu dějů na ní probíhajících a jejího praktického použití. Jen tomu lze děkovat, že většina podstatných přínosů

v teorii polarografie pochází od akademika Heyrovského, jeho spolupracovníků a žáků. Přiznání Nobelovy ceny akademiku Heyrovskému je i uznáním celé československé polarografické školy. O rozšíření polarografických metod v teorii i praxi svědčí, že za 37 let od jejího vzniku bylo uveřejněno na celém světě přes 10 000 původních vědeckých prací, pojednávajících o této metodě.

Vysoké uznání akademiku J. Heyrovskému naplňuje jistě radostí všechny československé vědecké a vysokoškolské pracovníky i studující, kteří se snad jednou jimi stanou. Život akademika Heyrovského, naplněný cílevědomou a usilovnou prací, může být dobrým příkladem všem mladým lidem. Spolu s nimi tedy blahopřejeme akademiku Heyrovskému a přejeme mu do další práce plné zdraví a další úspěchy.

P. Zuman

Soutěž o nejlepší rys

V desátém prosincovém čísle Rozhledů vypsalí jsme loňského roku soutěž o nejlepší rys, abychom podpořili mezi studenty zájem o rýsování i abychom zvýšili jeho kvalitu.

Během školního roku 1958/59 zaslaly nám rysy do soutěže tyto školy: JSŠ a OSŠ Aš (28 kusů), JSŠ Bratislava - Palisády (12), JSŠ Bratislava - Vazovova (19), OSŠ Brno - Náměstí 28. října (1), JSŠ Český Těšín (10), JSŠ Chotěboř (10), JSŠ Nový Hrozenkov (5), JSŠ Ostrava I - Maticní (3), OSŠ Ostrov nad Ohří (6), 1. JSŠ Praha 1 - Hellichova (13), 1. JSŠ a OSŠ Ústí nad Labem (50), JSŠ Vrchlabí (9) a JSŠ Znojmo - Komenského nám. (13). Dále průmyslová škola elektrotechnická, Pardubice (8) a učňovská škola - MH 045 Kadaň (2).

Děkujeme všem učitelům i žákům za zaslané rysy. Komise, sestávající z prof. inž. J. Kochmana, doc. E. Kraemera, doc. dr. M. Menšíka a doc. O. Setzera je posoudí a výsledek oznámí v příštím čísle.

Současně vypisujeme znovu tuto soutěž pro školní rok 1959/60. Rysy provedené tuší na námět geometrický nebo technický (tematicky zapadající do osnov deskriptivní geometrie nebo rýsování a na odborných školách do technického kreslení) zasílejte spolu s přípisem školy, kde budiž uvedeno jméno žáka - autora, učitele i školy do 1. července 1960 na adresu redakce: Praha 6, Zikova 4.

I. ročník Fyzikální olympiády

Ve školním roce 1959/60 bude probíhat I. ročník soutěže Fyzikální olympiády (FO). Soutěž je určena pro žáky škol středních a odborných a bude probíhat ve třech kategoriích:

Kategorie	A	B	C
Ročník střední školy	11,12	10	9
Ročník odborné školy	4	3	2,1

Účast v kategorii pro vyšší třídu může povolit žák z nižší třídy vyučující učitel fyziky.

Soutěž pořádá ministerstvo školství a kultury za spolupráce Jednoty čs. matematiků a fyziků a Československého svazu mládeže. Soutěž řídí Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚVFO) s Krajskými výbory fyzikální olympiády (KVFO). Organizační řád FO je uveřejněn ve Věstníku MŠK.

Ústřední výbor FO pro první ročník soutěže byl ustaven 29. října 1959 a předsedou je RNDr. Bedřich Havelka, profesor přírodovědecké fakulty university Palackého v Olomouci.

Soutěž v kategoriích B, C bude mít dvě kola, v kategorii A tři kola.

V průběhu I. kola mají účastníci soutěže za úkol v době od listopadu 1959 do konce února 1960 řešit 9 úloh a prostudovat samostatně jedno fyzikální téma, jehož text uveřejníme v příštím čísle.

Za úspěšného řešitele bude považován ten žák, který dobře rozřeší alespoň 6 úloh.

Uveřejňujeme texty úloh I. kola letošní soutěže FO. Řešení prvních tří úloh odevzdejte svému učiteli fyziky nejpozději do 15. XII. 1959, dalších tří úloh do 30. I. 1960 a posledních tří úloh do 29. II. 1960.

Řešení každé úlohy pište na samostatný list formátu A4, obrázky rýsujte rovněž na zvláštní list papíru. V záhlaví každého řešení uveďte své jméno, třídu, školu s adresou a označení kategorie, v níž soutěžíte.

Blížší podrobnosti vám sdělí váš učitel fyziky, u kterého se také přihlaste do soutěže.

Těšíme se, že se vám bude soutěž líbit a že se jí zúčastníte v hojném počtu. Přejeme vám v soutěži mnoho zdarů!

Texty úloh

Kategorie A

1. Ze sovětské meziplanetární stanice byla fotografována odvrácená strana Měsíce objektivy o ohniskových vzdálenostech 200 mm a 500 mm.

a) Z jaké nejmenší vzdálenosti by bylo možno objektivem o kratší ohniskové vzdálenosti zachytit celý měsíční kotouč ($r = 1\,738$ km) na šířku kinofilmu (24 mm).

b) Jak velký obraz by dal z téže vzdálenosti druhý objektiv při fotografování Moskevského moře, jež má poloměr asi 300 km?

2. Dva bodové náboje $Q_1 = -4\mu\text{C}$ a $Q_2 = 5\frac{1}{3}\mu\text{C}$ jsou od sebe vzdáleny $d = 0,5$ m. Jak velká je intenzita pole v bodě M_3 , jenž je vzdálen od náboje Q_1 o délku $d_1 = 3$ dm a od náboje Q_2 o délku $d_2 = 4$ dm? Jak velkou práci vykoná náboj $Q = 4\mu\text{C}$, jestliže se přemístí ze středu S úsečky Q_1Q_2 do bodu M_3 ? Dielektrikem je vzduch ($\epsilon_r = 1$).

3. Dvě vodivé kruhové desky o poloměru $r = 1$ m jsou proti sobě umístěny ve vzdálenosti $d = 1$ dm v prostředí relativní permitivity $\epsilon_r = 9$. Desky leží ve vodorovných rovinách. Spodní je nabitá nábojem $Q = 10^{-4}$ C, horní nábojem $Q' = -Q$. Mezi deskami

se vznáší nabitá vodivá kulička hmoty 1 g, jejíž objem je zanedbatelně malý (takže netřeba uvažovat nadlehčení podle Archimedova zákona). Jak velký je náboj q kuličky, jestliže ani nestoupá, ani neklesá? Kdybychom desky od sebe vzdálili, aniž bychom změnili náboje, klesla by kulička, anebo by se přitáhla k horní desce? (Gravitační zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Rozptyl silokřivek při okrajích desek zanedbejte! Řešte nejprve obecně!)

4. Proud ze zdroje o napětí U se větví. Jedna větev obsahuje dané odpory R_1 a R_4 a prochází jí daný proud I_1 . Druhá větev obsahuje dané odpory R_2 a R_3 .

a) Určete celkový výkon zdroje. Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $I_1 = 0,15 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 60 \Omega$.

b) Určete elektromotorickou sílu zdroje, je-li vnitřní odpor zdroje $R_i = 0,8 \Omega$.

5. Elektrickým vařičem pro napětí $U = 220 \text{ V}$ o účinnosti $n = 80 \%$ byla zahřívána olověná koule. (Měrné teplo olova je $c = 0,03 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, skupenské teplo tání je $l = 6,0 \text{ kcal kg}^{-1}$, počáteční teplota $\vartheta_0 = 20^\circ \text{C}$.) Po době $t = 7 \text{ min}$ ohřívání veškeré olovo roztálo. (Teplota tání olova je $\vartheta_1 = 1690^\circ \text{C}$.) Jak veliký byl proud protékající vařičem? (Kladte přibližně $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ joule}$; řešte obecně!)

6. Jak velkou vzdálenost d proběhne částice katodového záření v homogenním elektrickém poli intenzity $E = 150 \text{ V m}^{-1}$ než se zastaví, jestliže vstoupí do tohoto pole s počáteční rychlostí $v_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}$ ve směru siločar. Je dán náboj částice $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a její hmotnost $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Řešte nejprve obecně!

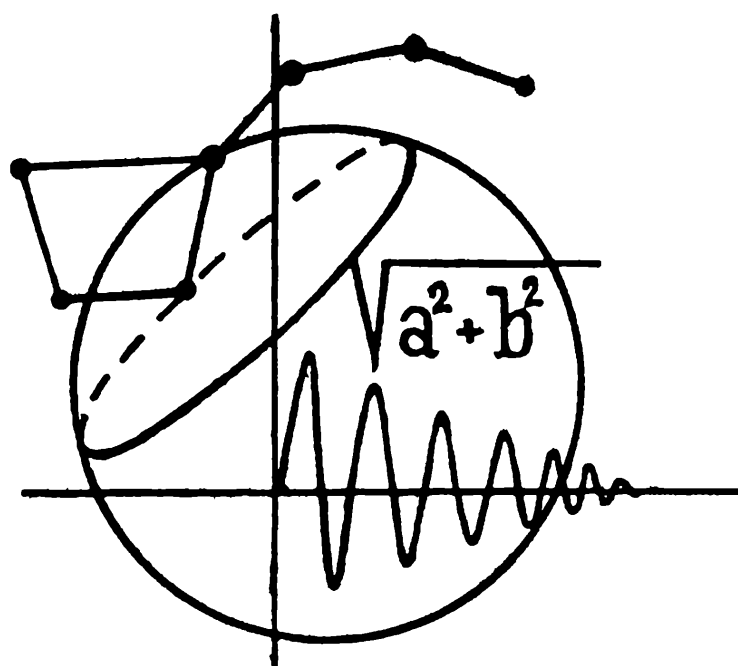
7. Jak veliké indukované napětí vznikne mezi dvěma vodivými, rovnoběžně ve stejné výši nad zemským povrchem napjatými dráty, vzdálenými od sebe o délku $d = 2 \text{ m}$, jestliže se po nich pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ vodivá tyč. Dána horizontální složka zemského magnetismu $H = 16 \text{ A m}^{-1}$ a inklinace $i = 63^\circ$. Řešte nejprve obecně!

8. Elektrolýza vody byla prováděna proudem $I = 0,3 \text{ A}$ po dobu $t = 30 \text{ min}$. Určete objem vyloučeného vodíku při teplotě $\vartheta = 20^\circ \text{C}$ a tlaku $p = 750 \text{ Tor}$! Dáno: hustota vodíku při teplotě $\vartheta_0 = 0^\circ \text{C}$ a tlaku $p_0 = 760 \text{ Tor}$ jest $\delta_0 = 8,96 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$, hmotnost jednoho kilomolu vodíku je $\alpha = 1,008 \text{ kg}$; Faradayův náboj pro 1 kilomol jednomocného prvku je $N = 9,65 \cdot 10^7 \text{ As}$.

9. Odpor R spotřebiče se často počítá z hodnot napětí U a proudu I , naměřených voltmetrem a ampérmetrem zařazenými do obvodu. Při trvale zapojeném ampérmetru lze zapojit voltmetr a) přímo ke svorkám spotřebiče, b) přímo ke svorkám zdroje. V obou případech je hodnota R vypočítaná z naměřených hodnot nesprávná. V případě a) je menší, v případě b) je větší než skutečná. Přesvědčte se měřením. Vysvětlete. Výsledky obou měření zaznamenejte. Požádejte svého učitele fyziky, aby vám udal vnitřní odpory R_V a R_A užitých voltmetru a ampérmetru. Pomocí těchto hodnot a z hodnot naměřených v případech a) a b) vypočítejte správnou hodnotu odporu spotřebiče.

MATEMATICKO-FYZIKALNI

rozhledy



4

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 4

Toto číslo vyšlo 20. prosince 1959

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

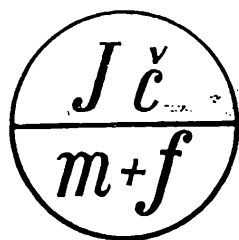
Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; Jiří Sedláček, kand. věd mat., ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

O B S A H

Doc. dr. K. Havlíček: O komplexních číslech	145
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	148
V. Kuběnková: Jednoduché statistické metody ve zdravotnictví (Dokončení)	152
Inž. J. Klír a inž. V. Čapla: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války	158
J. Růžicka: Úhloměr jako planimetr	162
M. Koman: Řešení jedné konstruktivní úlohy na maximum	167
L. Granát: Jednoduché zobrazovací metody	170
J. Cochlar: Polovodičové triody - transistory (Dokončení)	174
V. Lamparter: O rázu pružných koulí	176
Řešení úloh z minulého ročníku	177
Udělení cen	183
J. Kotyk: James Prescott Joule (Dokončení)	183
J. Novák: Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době	186
J. Votava: Matematická olympiáda v Rumunsku	188
Recenze	190
S. Vávra: Jedno „kouzlo“ s čísly	191
Fyzikální olympiáda, příklady (Pokračování)	3. str. obálky
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06651 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

Matematika

Doc. dr. Karel Havlíček, Karlova universita, Praha:

O komplexních číslech

Přemýšleli jste někdy o tom, co je například $\sqrt{i}$? Písmeno i znamená zde pochopitelně imaginární jednotku $i = \sqrt{-1}$.¹⁾

Ke komplexním číslům jste přistoupili ve škole proto, že odmocňování reálných čísel není možno v oboru reálných čísel vždycky provést. Ale podobný krok jste učinili již před tím při přechodu od racionálních čísel k číslům reálným. Zopakujme si to trochu.

Víte, že sečteme-li dvě racionální čísla, dostaneme zase číslo racionální. Stejně je tomu i s ostatními základními početními úkony; součet, rozdíl, součin i podíl dvou racionálních čísel je vždycky zase racionální číslo. U podílu ovšem předpokládáme, že dělitelem není nula. Teprve při vyšším úkonu početním, totiž při odmocňování, nevystačíme vždycky s racionálními čísly. Někdy je ovšem výsledkem odmocňování racionálního čísla zase racionální číslo, např. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, ale všeobecně to neplatí. Dobře známým příkladem je tu $\sqrt{2}$. Na našich školách se žákům celkem bez námahy dokazuje,²⁾ že $\sqrt{2}$ není racionální číslo, čili že neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala číslu 2. Ale protože už při nejjednodušších praktických úkolech nutně potřebujeme počítat s $\sqrt{2}$ a s jinými podobnými čísly, nezbyvá nám, než přidat k racionálním číslům další čísla; znáte je pod jménem čísla iracionální. Nebudeme si je zde blíže popisovat,³⁾ uvědomíme si pouze, že množinu čísel racionálních rozšířili jsme přidáním iracionálních čísel na nový obor, totiž na obor čísel reálných. Množina reálných čísel se tedy skládá z čísel racionálních a z čísel iracionálních.

S reálnými čísly počítáte běžně ve škole a proto víte, že množina reálných čísel má podobné vlastnosti jako množina racionálních čísel. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou reálných čísel je opět reálné číslo; zase tedy při provádění čtyř základních výkonů početních s reálnými čísly nevybočíme z množiny reálných čísel. Ale při odmocňování to vázne podobně jako u racionálních čísel. Tak jako

¹⁾ Poznámka redakce: Tento symbol není však identický se symbolem $\sqrt{a}$ pro $a \geq 0$; nelze tudíž na něj aplikovat všechna pravidla pro počítání s odmocninami z nezáporných čísel. Symbolem $i = \sqrt{-1}$ se vlastně definuje nové číslo i , pro které platí $i^2 = -1$.

²⁾ Viz Algebru pro devátý postupný ročník.

³⁾ Viz o tom blíže ve zmíněné učebnici Algebry pro devátý postupný ročník.

jsme při odmocňování racionálních čísel nevystačili s racionálními čísly, nevystačíme při odmocňování reálných čísel s čísly reálnými. Pokud je $a \geq 0$, je $\sqrt{a}$ číslo reálné. Ale při odmocňování záporného čísla není výsledkem číslo reálné. Víme přece, že pro $x = \sqrt{a}$ je $x^2 = a$, takže je-li x reálné číslo, je $a \geq 0$. Proto zavádíme komplexní čísla. Přidáme k reálným číslům nejdříve číslo

$$i = \sqrt{-1}.$$

Množinu všech čísel tvaru

$$a + bi, \quad (1)$$

kde a, b jsou reálná čísla, nazveme množinou komplexních čísel. Čísla tvaru (1) nazývají se *k o m p l e x n í č í s l a*; reálná čísla jsou mezi nimi zahrnuta případem $b = 0$, jak víte ze školy.⁴⁾

Stručně shrneme: Chceme-li odmocňovat racionální čísla, musíme zavést do matematiky další čísla, totiž čísla reálná; chceme-li odmocňovat i tato reálná čísla, musíme znovu obor čísel rozšířit, což činíme zavedením čísel komplexních.

Je přirozené pokračovat v tomto procesu dál a ptát se, jaké výsledky a starosti nám přinese odmocňování komplexních čísel. Ptáme se především, jestli odmocnina z komplexního čísla bude vždycky zase komplexní číslo, nebo jestli budeme nuceni pro odmocňování komplexních čísel zavést nějaký nový druh čísel podobně, jako jsme to viděli v předcházejících případech čísel racionálních a reálných.

Odpověď na tyto otázky nám podává ještě naše střední škola, a to v partii o binomických rovnicích. Binomické rovnice jsou uvedeny na konci učebnice Algebry pro nejvyšší ročník. Je však možné, že si toho studenti sami dost nevšimli, nebo že si neuvědomili souvislost binomických rovnic s výše naznačenou problematikou. Proto si toho všimneme trochu zde.

Hledejme nejdříve $\sqrt{i}$ a označme ji (jako neznámou hodnotu) písmenem x . Jde tedy o řešení rovnice

$$x = \sqrt{i},$$

čili o řešení binomické rovnice

$$x^2 - i = 0. \quad (2)$$

Její řešení si může čtenář najít pomocí výše citované učebnice Algebry pro jedenáctý postupný ročník; je tam založeno na Moivreově poučce. Ale řešení lze určit i jinak, jak čtenáři našich „Rozhledů“ měli příležitost poznat již dříve.⁵⁾ Důležité však je, že teorie binomických rovnic nám zaručuje, že rovnice (2) *má řešení v oboru komplexních čísel*. Můžeme tedy vyjít z faktu, že existuje komplexní číslo, jehož druhá mocnina je rovna číslu i . Jeho výpočet vám nebude dělat potíže; zvláště citovaný už Musilův článek poskytuje metodu, která vede rychle k cíli. Dostanete

$$\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i). \quad (3)$$

⁴⁾ Komplexní čísla jsou zavedena na začátku učebnice Trigonometrie pro desátý postupný ročník.

K tomuto výsledku je třeba připojit poznámku. Nezapomeňme, že definici odmocniny komplexního čísla jsme dosud nepodali. Tím jsme se trochu prohřešili, neboť jsme s ní již pracovali. Ale jak můžeme pracovat s pojmem, který vlastně neznáme? Vysvětlení je nasnadě: nepracovali jsme zde vůbec s odmocninou komplexního čísla, hledali jsme jen řešení rovnice (2). Na základě toho jsme si dovolili zápis vzorce (3) i bez definice odmocniny $\sqrt{i}$. Tento zápis je v souhlase s pojmem odmocniny z komplexního čísla, zaváděné v matematice až při studiu vyšších partií, kterým se obvykle vyučuje na vysokých školách. Nebudeme zde tuto definici podávat, spokojíme se upozorněním, že na rozdíl od definice odmocniny v oboru reálných čísel je odmocnina v oboru komplexních čísel definována vlivem tzv. teorie funkcí komplexní proměnné tak, že připouští dvojí číselnou hodnotu a nikoli jen jednu, jak jste na to zvyklí ze školy v oboru reálných čísel.

Po této poznámce pokračujeme v úvahách o odmocňování komplexních čísel. Je-li a libovolné komplexní číslo, pak podle toho, co jsme už řekli, je jeho odmocninou každý kořen binomické rovnice

$$x^2 - a = 0. \quad (4)$$

Tato rovnice má vždycky řešení v oboru komplexních čísel, jak se přesvědčíte na příslušném místě několikrát už citované učebnice. Vidíme tedy, že *při odmocňování komplexních čísel vystačíme s komplexními čísly*. Sledujeme-li tento cíl, nemusíme už obor komplexních čísel dál rozšiřovat. To je důležitá vlastnost množiny komplexních čísel, vlastnost, jakou nemá množina racionálních, ani reálných čísel. Tato vlastnost vyrůstá z jiné obecnější vlastnosti množiny komplexních čísel. Uveďme si ji.

Myslete si libovolnou algebraickou rovnici n -tého stupně. To je rovnice tvaru

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (5)$$

kde $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$ je přirozené číslo. Na levé straně této rovnice je tedy mnohočlen n -tého stupně v x . Předpokládejme, že $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou libovolná komplexní čísla (ovšem s podmínkou $a_0 \neq 0$). Slavný matematik K. F. Gauss (1777—1855) dokázal, že vždycky existuje (aspoň jedno) komplexní číslo, které je kořenem právě popsané rovnice (5), tj. že vyhovuje rovnici (5), dosadíme-li je tam za x . Tím objevil důležitou matematickou větu, která se od těch dob nazývá *fundamentální* (tj. základní) *věta algebry*. Nemůžeme ji zde dokazovat, protože by to vyžadovalo dlouhou přípravu. Zájemce najde důkazy např. v knize akademika Vladimíra Koříňka: *Základy algebry*, str. 354—361 a str. 476—479 (nakladatelství Československé akademie věd, II. vydání, Praha 1956). Věta o existenci řešení binomické rovnice (4) je tedy speciálním případem Gaussovy fundamentální věty algebry, protože rovnice (4) je zvláštním případem rovnice (5).

Nemůžeme-li zde v teoretických úvahách pokračovat, pokuste se ověřit si platnost fundamentální věty algebry aspoň na řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty; dobře vám při tom poslouží návody obsažené v citovaných člancích M. Valešové a St. Musila.

⁵⁾ Viz M. Valešová: *Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty* (Rozhledy, roč. 35, str. 145—150, Praha 1957) a St. Musil: *Poznámka k řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty* (Rozhledy, roč. 36, str. 299—303, Praha 1958).

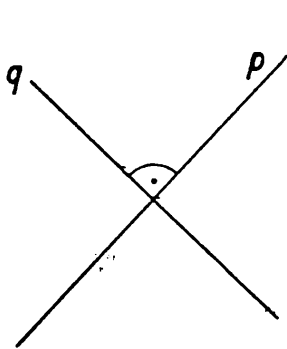
O analytické geometrii v rovině

Vzorce pro vzdálenost dvou bodů, který jsme odvodili v minulém článku (věta 11), použijeme nyní k výpočtu odchylky dvou přímek.

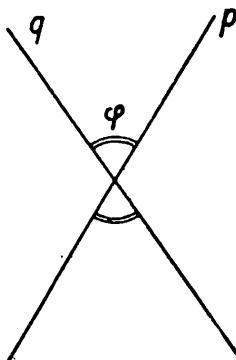
Dvě různoběžky p, q rozdělí rovinu, v níž leží, na čtyři duté úhly. Tyto úhly jsou buď všechny pravé (obr. 18) nebo (obr. 19) dva jsou ostré (shodné) a dva tupé (a opět shodné). Velikost kteréhokoli z těchto ostrých nebo pravých úhlů označujeme $\sphericalangle pq$ a nazýváme ji *odchytkou přímek p, q* nebo též pouze *úhlem přímek p, q* . Odchytku dvou rovnoběžek p, q pokládáme za rovnou nule a označujeme ji rovněž $\sphericalangle pq$. Pro odchylku (úhel) φ libovolných dvou přímek p, q tedy platí

$$0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

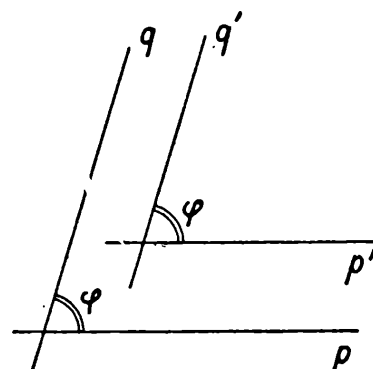
Z planimetrie známe pak tuto větu: Je-li $p' \parallel p, q' \parallel q$, potom $\sphericalangle p' q' = \sphericalangle p q$ (obr. 20).



Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20

Chceme-li tedy vypočíst odchylku dvou přímek p, q v analytické geometrii, můžeme vést počátkem souřadnic O přímky $p' \parallel p, q' \parallel q$ a počítat odchylku $\sphericalangle p' q'$. Proto v dalším textu *budeme předpokládat, že přímky p, q jejichž odchylku máme vypočíst, procházejí už počátkem soustavy souřadnic.*

Jestliže jedna z daných přímek splývá s osou y (označujeme ji p), a jestliže druhá přímka q nesplývá s osou y , pak jsou dvě možnosti:

1. Přímka q prochází prvním kvadrantem (obr. 21), resp. splývá s osou x .
2. Nebo přímka $q \not\equiv x$ prochází druhým kvadrantem (obr. 22).

V prvním případě platí pro směrový úhel α přímky q vztah $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ a odchylka $\sphericalangle pq = \varphi = 90^\circ - \alpha$. V druhém případě je $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ a odchylka $\sphericalangle pq = \varphi = \alpha - 90^\circ$.

Oba vzorce můžeme vyjádřit jedinou formulí

$$\varphi = |\alpha - 90^\circ|.$$

Přitom úhel α je obvykle určen vztahem $\operatorname{tg} \alpha = k_2$, kde k_2 je směrnice přímky q .

Zbývá tedy odvodit vzorec pro odchylku φ dvou přímek p, q pro případ, kdy

žádná z nich není rovnoběžná s osou y . Potom každá má určitou směrnici; označme k_1 směrnici přímky p a k_2 směrnici přímky q . Jde nyní o to, jak se pomocí směrnic k_1, k_2 vyjádří odchylka $\varphi = \sphericalangle pq$.

Předpokládejme nejprve, že přímky p, q jsou různoběžné, takže je

$$k_1 \neq k_2. \quad (1)$$

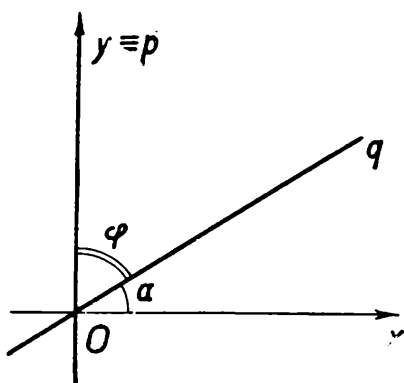
Protože přímky p, q procházejí počátkem, mají podle věty 1 rovnice $y = k_1 x$, $y = k_2 x$. Určeme nyní na nich body P, Q tak, aby měly společnou souřadnici $x = 1$; z rovnic přímek pak plyne, že je

$$P(1, k_1), Q(1, k_2).$$

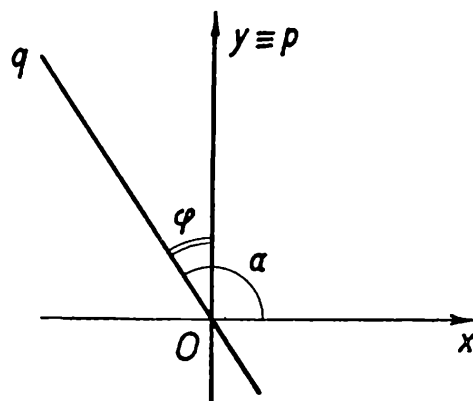
Podle (1) je $P \neq Q$; zároveň je jasné, že žádný z bodů P, Q nesplývá s počátkem O . Proto body O, P, Q jsou vrcholy trojúhelníka, jehož vnitřní úhel $\sphericalangle POQ$ označme φ' (obr. 23, 24).

Z trigonometrie víme, že pro trojúhelník OPQ platí *kosinová věta*:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \varphi' \quad (2)$$



Obr. 21



Obr. 22

Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů (věta 11) však je

$$\overline{PQ}^2 = (1 - 1)^2 + (k_2 - k_1)^2 = k_2^2 - 2k_1k_2 + k_1^2$$

$$\overline{OP}^2 = (1 - 0)^2 + (k_1 - 0)^2 = 1 + k_1^2$$

$$\overline{OQ}^2 = (1 - 0)^2 + (k_2 - 0)^2 = 1 + k_2^2.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (2), dostaneme

$$-2k_1k_2 = 2 - 2\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)} \cos \varphi',$$

takže je

$$\cos \varphi' = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}. \quad (3)$$

Přitom jmenovatel zlomku ve formuli (3) je vždy kladný. Protože φ' je vnitřní úhel trojúhelníka, je

$$0^\circ < \varphi' < 180^\circ. \quad (4)$$

Je-li $1 + k_1 k_2 < 0$, je podle (3) $\cos \varphi' < 0$ a tedy vzhledem k podmínce (4) $90^\circ < \varphi' < 180^\circ$ (obr. 24). Zároveň odchylka φ přímek p, q je $\varphi = 180^\circ - \varphi'$, takže

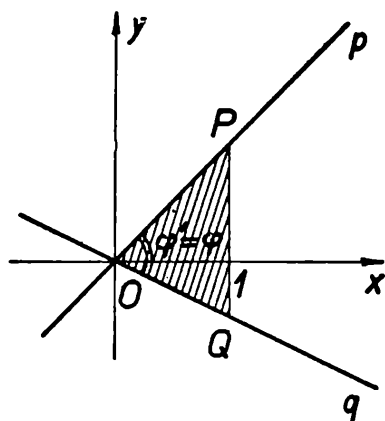
$$\cos \varphi = \cos (180^\circ - \varphi') = -\cos \varphi', \text{ tj. podle (3)}$$

$$\cos \varphi = \frac{-(1 + k_1 k_2)}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}. \quad (5)$$

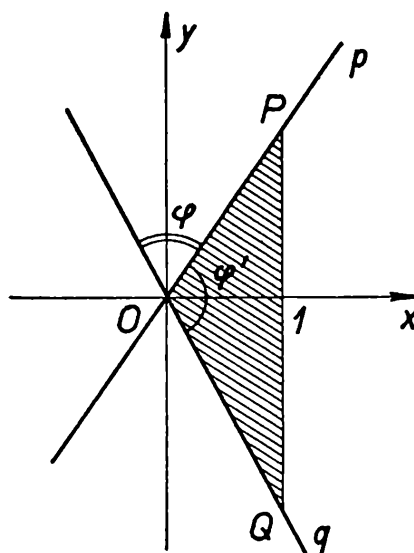
Protože $1 + k_1 k_2 < 0$, je $-(1 + k_1 k_2) = |1 + k_1 k_2|$. Formulí (5) můžeme tedy psát takto

$$\cos \varphi = \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}. \quad (6)$$

Je-li $1 + k_1 k_2 \geq 0$, je $\cos \varphi' \geq 0$; protože však platí (4), je $0^\circ < \varphi' \leq 90^\circ$. V tomto případě je zároveň $\varphi = \varphi'$ (obr. 23), takže formule (3) udává přímo $\cos \varphi$. Protože je však zde $1 + k_1 k_2 = |1 + k_1 k_2|$, platí opět vzorec (6).



Obr. 23



Obr. 24

Zjistili jsme tedy, že pro $k_1 \neq k_2$ (p, q jsou různoběžky) se odchylka daných přímek vypočte podle vzorce (6). Je-li nyní $k_1 = k_2$, jsou přímky p, q rovnoběžné a tedy jejich odchylka $\varphi = 0^\circ$. Dosadíme-li zároveň do (6) místo k_2 všude k_1 , dostaneme

$$\cos \varphi = \frac{|1 + k_1^2|}{\sqrt{(1 + k_1^2)^2}}. \quad (7)$$

Protože je $1 + k_1^2 > 0$, je $|1 + k_1^2| = 1 + k_1^2$, $\sqrt{(1 + k_1^2)^2} = 1 + k_1^2$. Podle (7) pak vyjde, že $\cos \varphi = 1$ čili $\varphi = 0^\circ$. Vzorec (6) platí tedy i pro $k_1 = k_2$. Tak jsme dostali tento výsledek:

V ě t a 12. *Odchylku (úhel) φ dvou přímek, které mají směrnice k_1, k_2 , vypočteme podle vzorce*

$$\cos \varphi = \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}.$$

Je-li $p \perp q$ (čili $\varphi = 90^\circ$), je $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$ čili podle vzorce z věty 12 je $1 + k_1 k_2 = 0$, tj. $k_1 k_2 = -1$.

Obráceně, je-li $k_1 k_2 = -1$, je $1 + k_1 k_2 = 0$ čili $\cos \varphi = 0^\circ$, tj. $\varphi = 90^\circ$. Platí tedy tento výsledek:

V ě t a 13. Jsou-li dvě přímky o směrnících k_1, k_2 vzájemně kolmé, je $k_1 k_2 = -1$. Obráceně, je-li $k_1 k_2 = -1$, jsou dané přímky vzájemně kolmé.

Vzorec pro odchylku φ dvou přímek se často uvádí pomocí $\operatorname{tg} \varphi$. Protože však pro $\varphi = 90^\circ$ není $\operatorname{tg} \varphi$ definováno, platí tento vzorec pouze pro $\varphi \neq 90^\circ$, tj. pro

$$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ \quad (8)$$

Budiž tedy splněna podmínka (8). Potom je $\cos \varphi \neq 0$, takže je

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$$

Podle vzorce z věty 12 je pak

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}{|1 + k_1 k_2|^2} - 1.$$

Ale $|1 + k_1 k_2|^2 = (1 + k_1 k_2)^2$, takže je

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2) - (1 + k_1 k_2)^2}{(1 + k_1 k_2)^2}. \quad (9)$$

Snadno zjistíme, že čitatel posledního zlomku je

$$k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2 = (k_1 - k_2)^2.$$

Podle (9) je proto

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \left(\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right)^2$$

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Podle (8) je však $\operatorname{tg} \varphi \geq 0$, takže $|\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} \varphi$. Tak dostáváme tento výsledek:

V ě t a 14. Odchylku (úhel) $\varphi \neq 90^\circ$ dvou přímek, které mají směrnice k_1, k_2 , vypočteme podle vzorce

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Je-li $\varphi = 90^\circ$, je podle věty 13 výraz $1 + k_1 k_2 = 0$, takže věty 14 nelze skutečně použít.

Poznámka. Z věty 14 a z toho, co jsme právě uvedli, plyne tento postup při výpočtu odchylky dvou přímek se směrnici k_1, k_2 :

Vypočteme nejprve výraz $1 + k_1 k_2$. Je-li rovný nule, jsou (podle věty 13) dané přímky k sobě kolmé. Je-li $1 + k_1 k_2 \neq 0$, vypočteme odchylku φ podle věty 14. (Pokračování)

Jednoduché statistické metody ve zdravotnictví

(Dokončení)

b) *Pomocí χ^2 testu.* Vezmeme si stejný příklad jako při minulé metodě. Chceme se opět přesvědčit, zda můžeme rozdíl v nemocnosti očkovaných a neočkovaných považovat za významný. Pro tento účel předpokládáme, že součty jak řádků, tak sloupců jsou pevné a zkoumáme, zda za tohoto předpokladu je ve skupině očkovaných (1. sloupec) významně méně případů onemocnění než ve skupině neočkovaných (2. sloupec). Výpočet je formálně jednoduchý; spočteme výraz

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc)^2 \cdot N}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}, \quad (2)$$

což v našem případě je:

$$\chi^2 = \frac{(26 \cdot 389 - 84 \cdot 750)^2 \cdot 1249}{110 \cdot 1139 \cdot 776 \cdot 473} \doteq 75,963$$

Postup odvození tohoto vzorce: O k r a j o v é (tzv. marginální) součty, tj. $a + c$, $b + d$, $a + b$, $c + d$, považujeme za pevně dané, a předpokládáme dále, že rozložení uvnitř tabulky je již rovnoměrné. Spočítáme za těchto předpokladů pravděpodobnosti, s jakou budou jednotlivé případy rozloženy uvnitř tabulky.

V 1. sloupci je prvků $a + c$, jejich relativní četnost v celém souboru tedy $\frac{a + c}{N}$,

v prvním řádku $\frac{a + b}{N}$, a v prvním okénku tabulky, kde jsou prvky z prvního řádku

a prvního sloupce současně, je tedy pravděpodobnost každého prvku $\frac{a + c}{N} \cdot$

$\frac{a + b}{N}$. Protože předpokládáme uvnitř tabulky rovnoměrné rozložení, má

každý prvek touž pravděpodobnost, že se dostane do 1. okénka, a výsledná očekávaná relativní četnost tedy je $N \cdot \frac{a + c}{N} \cdot \frac{a + b}{N}$, což jest $\frac{(a + c)(a + b)}{N}$.

Tuto očekávanou relativní četnost označíme α .

Obdobně dostaneme:

$$\beta = \frac{(a + b)(b + d)}{N},$$

$$\gamma = \frac{(a + c)(c + d)}{N},$$

$$\delta = \frac{(b + d)(c + d)}{N}$$

Nyní spočteme rozdíly těchto relativních četností a skutečných četností pozorovaných. Dostaneme:

$$\begin{aligned} a - \alpha &= \frac{aN - (a + b)(a + c)}{N} = \frac{aN - a^2 - ab - ac - bc}{N} = \\ &= \frac{a(N - a - b - c) - bc}{N} = \frac{ad - bc}{N}, \end{aligned}$$

a obdobně:

$$b - \beta = \frac{bc - ad}{N}, \quad c - \gamma = \frac{cb - da}{N}, \quad d - \delta = \frac{da - cb}{N}.$$

Nyní každý z těchto rozdílů povýšíme na druhou a vydělíme očekávanou hodnotou, součet těchto výrazů dává již hledanou charakteristiku χ^2 .

Protože $(a - \alpha)^2 = (b - \beta)^2 = (c - \gamma)^2 = (d - \delta)^2 = \frac{(ad - bc)^2}{N^2}$, můžeme ze všech sčítanců vytknout výraz $\frac{(ad - bc)^2}{N^2}$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(ad - bc)^2}{N^2} \left[\frac{1}{\frac{(a + b)(a + c)}{N}} + \frac{1}{\frac{(a + b)(b + d)}{N}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{(a + c)(c + d)}{N}} + \frac{1}{\frac{(b + d)(c + d)}{N}} \right] \end{aligned}$$

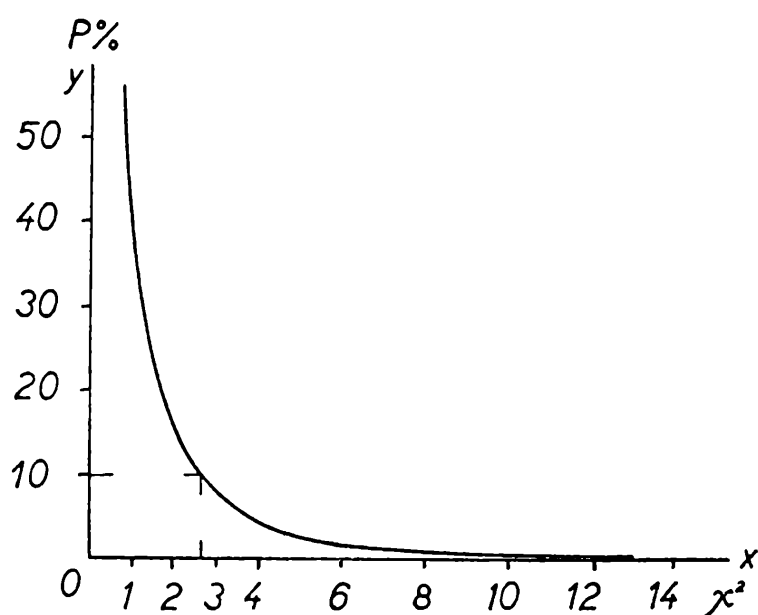
Výraz v závorce upravíme tím, že složené zlomky převedeme na jednoduché a sečteme. Dostaneme:

$$\begin{aligned} &\frac{N(b + d)(c + d) + N(a + c)(c + d) + N(a + b)(b + d) + N(a + b)(a + c)}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \\ &= \frac{N(bc + cd + bd + d^2 + ac + c^2 + ad + cd + ab + b^2 + ad + bd + a^2 + ac + ab + bc)}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \\ &= \frac{Na(a + b + c + d) + b(a + b + c + d) + c(a + b + c + d) + d(a + b + c + d)}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \\ &= \frac{N(a + b + c + d)(a + b + c + d)}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \frac{N^3}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}, \end{aligned}$$

a vzorec pro χ^2 má tedy tvar:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(ad - bc)^2}{N^2} \cdot \frac{N^3}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} = \\ &= \frac{N(ad - bc)^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}. \end{aligned}$$

Je dokázáno, že tento výraz χ^2 má typické rozložení, zvané χ^2 r o z l o ž e n í, které je opět podrobně tabelováno. χ^2 rozložení vzniká jako součet čtverců veličin s normálním rozložením. Má-li tento součet n sčítanců, říkáme, že máme χ^2 rozložení o n s t u p ň í c h v o l n o s t í. V praxi znamená počet stupňů volnosti počet polí v tabulce, ve kterých můžeme v nich uvedený počet případů (dále stručněji zvaný č e t n o s t) libovolně stanovit, aby ještě zůstaly zachovány pevné okrajové součty. V čtyřpolové tabulce je počet stupňů volnosti zřejmě roven 1, neboť udáme-li např. v tab. 2 četnost a , pak ostatní hodnoty již můžeme spočítat pomocí okrajových součtů (b jako součet prvního řádku minus a , c pomocí součtu prvního sloupce minus a , d pomocí b či a a ostatních součtů). Proto pro čtyřpolovou tabulku stačí znát χ^2 rozložení pouze o 1 stupni volnosti; toto rozložení má tvar patrný z obr. 2, kde na ose x jsou naneseny hodnoty χ^2 a na ose y jim odpovídající pravděpodobnosti.



Obr. 2

Hodnoty, které potřebujeme, jsou prakticky pouze tyto:

pravděpodobnost	10 %	5 %	2 %	1 %	0,1 %
χ^2	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827

Správný postup je tento: Nejprve stanovíme pravděpodobnost, s jakou chceme mít určeno, zda oba zkoumané soubory mohou být z téhož základního souboru. Zvolíme-li pravděpodobnost 5 %, najdeme v tabulce hodnotu 3,841, což znamená - za předpokladu, že odchylky od teoretické hodnoty jsou pouze náhodné - že můžeme v 5 % případů očekávat hodnoty χ^2 větší nebo rovné číslu 3,841. Čím

více nám tedy záleží na tom, abychom se nedopustili omylu, tím menší % zvolíme. Pak vypočteme hodnotu χ^2 podle vzorce (2) a hledáme v tabulce, mezi kterými dvěma hodnotami tato vypočtená hodnota leží. Leží-li napravo od hodnoty, příslušné ke zvolenému procentu (kterému říkáme *h r a n i c e v ý z n a m n o s t i*), zamítneme předpoklad, že jsou oba soubory náhodnými výběry z téže základní populace, pokud jde o sledovaný znak. Pokud vypočtená hodnota χ^2 leží nalevo od zvolené hranice významnosti, předpoklad náhodnosti zamítnout nemůžeme a musíme tedy připustit, že pozorovaný rozdíl v četnostech vznikl náhodou.

Vraťme se nyní k našemu příkladu. Zvolme hranici významnosti 1 %. U této hodnoty najdeme v tabulce $\chi^2 = 6,635$. Naše vypočtené $\chi^2 = 75,963$ je tedy daleko vyšší a můžeme předpokládat, že nemohla tato odchylka vzniknout náhodně.

Protože rozložení χ^2 se mění spojitě, ale tabelováno je pouze v nespojitých hodnotách, zniká chyba, která je u větších souborů zanedbatelná, ale u malých je již značná. Proto v případech, kdy je některá z četností v čtyřpolové tabulce menší než 5, musíme použít metody χ^2 s Yatesovou korekcí pro spojitost:

$$\chi_y = \frac{\left(|ad - bc| - \frac{N}{2} \right)^2 \cdot N}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}, \quad (3)$$

kde $|ad - bc|$ čteme absolutní hodnota z $ad - bc$ a znamená to, že za tento výraz bereme buď $ad - bc$ nebo $bc - ad$ tak, aby výsledek byl kladný, tj. odečítáme vždy menší číslo od většího.

Ukážeme si na příkladu, že v případech, kdy je některá četnost malá a výsledek je blízko zvolené hranice významnosti, vede metoda bez korekce k významnému výsledku, ale přesnější výpočet ukáže, že pozorovaný rozdíl mohl vzniknout náhodně.

Příklad: Z nedonošených dětí, ošetřovaných během jednoho čtvrtletí v určitém kojeneckém ústavu, zdravotníci pozorovali rozdíl v úmrtnosti hochů a dívek. Zajímalo je, zda lze tento rozdíl považovat za náhodný, či zda má nějakou objektivní příčinu. Zjistili, že z ošetřovaných dětí bylo:

Tabulka 3

	hochů	dívek	celkem
z nich zemřelo	11	1	12
nezemřelo	82	49	131
celkem	93	50	143

Metodou bez korekce (které ovšem nesmíme použít, protože jedna z tabelovaných hodnot je 1) bychom dostali: $\chi^2 = \frac{(11 \cdot 49 - 1 \cdot 82)^2 \cdot 143}{12 \cdot 131 \cdot 93 \cdot 50} = 4,09$.

Tato hodnota je za 5 % hranicí významnosti. Při správném výpočtu pomocí Yatesovy korekce dostaneme: $\chi^2_y = \frac{(|49 \cdot 11 - 1 \cdot 82| - 71,5)^2 \cdot 143}{93 \cdot 50 \cdot 12 \cdot 131} = 2,91$

Tento výsledek je menší než 5 % hranice významnosti a musíme tedy připustit, že rozdíl v úmrtnosti hochů a dívek vznikl jen náhodou.

2. Testování dobré shody.

Před provedením pokusu jsme vyslovili určitou hypotézu, kterou si chceme pokusem potvrdit. Příklad: Byl objeven nový druh léku, o kterém se předpokládalo, že bude účinnější než dosud používaný přípravek. Pro potvrzení této teorie byl 25 pacientům podán nový lék a podle zkušeností s lékem starým bylo spočteno, kolik z 25 pacientů by se uzdravilo starou metodou (viz sloupec 3, tab. 4). Výsledky byly tyto:

Tabuška 4

	nový lék	starý lék	celkem
uzdraveno	10	6	16
neuzdraveno	15	19	34
celkem	25	25	50

Další postup při výpočtu je obsažen v tab. 5:

Tabulka 5

	pozorované hodnoty (nový lék . . . A)	teoret. hodnoty (starý lék . . . B)	$A - B$	$(A - B)^2$	$\frac{(A - B)^2}{B}$
uzdraveno	10	6	4	16	2,67
neuzdraveno	15	19	-4	16	0,84
celkem	25	25	0	0	3,51

Součet posledního sloupceku je hledaná hodnota χ^2 , kterou hodnotíme stejně jako v minulém případě. Zvolíme-li 5 % hranici významnosti, zjistíme, že tato hodnota je menší, a musíme tedy předpokládat, že pozorovaný rozdíl mohl ještě vzniknout pouze náhodou a nikoliv tím, že lék má větší účinnost.

Na rozdíl od ostatních metod zde uvedených, které platí pouze pro čtyřpolovou tabulku, můžeme tohoto postupu použít pro porovnání skutečných a teoretických hodnot pro tabulku o libovolném počtu řádek. Sloupce ovšem mohou být pouze dva, hodnoty zjištěné a předpokládané. Postup výpočtu je zcela stejný jako při dvou řádcích, pouze výsledná hodnota platí pro vyšší počet stupňů volnosti (při n řádcích je počet stupňů volnosti $n - 1$), takže se nemůžeme spokojit hodnotami χ^2 zde uvedenými, ale musíme použít tabulky χ^2 rozložení, kterou najdeme ve všech větších statistických příručkách.

3. Testování závislosti.

Na rozdíl od případů 1. a 2., kdy jsme porovnávali mezi sebou dva soubory, máme v tomto případě soubor jediný, ale u každého prvku sledujeme dva znaky. Zajímá nás, zda jsou tyto znaky na sobě závislé, zda tedy se změnou jednoho znaku můžeme očekávat pravidelně též změnu znaku druhého. Ukážeme si to opět na příkladu závislosti barvy očí s barvou vlasů, podle tab. 6.

Tabulka 6

barva vlasů	barva očí		celkem
	světlá	tmavá	
světlá	150	90	240
tmavá	50	70	120
celkem	200	160	360

Chceme-li se přesvědčit, zda mezi těmito dvěma znaky existuje závislost, předpokládáme pro výpočet, že tato závislost neexistuje, že tedy při pevně daných okrajových součtech je rozdělení četností v tabulce rovnoměrné. Použijeme pak vzorce (2) za předpokladu, že jsou četnosti v tabulce dosti velké. Je-li některá z nich menší než 5, použijeme vzorce (3) s korekcí pro spojitost. V našem případě použijeme vzorec (2) a dostaneme: $\chi^2 = 14,06$. Zvolíme hranici významnosti 5 %. Protože vypočtená hodnota χ^2 je větší než hodnota χ^2 při 5% hranici, považujeme významnost za prokázanou. Tím ovšem není naprosto nic řečeno o velikosti této závislosti, protože při dostatečně velikém materiálu prokážeme i velice malou závislost. Na otázku, do jaké míry jsou znaky na sobě závislé, odpovídají jiné statistické metody, které již není možno v tomto článku uvádět.

Literatura:

Jar. Janko, Statistické tabulky, ČSAV 1958.

Václav Myslivec, Statistické metody zemědělského a lesnického výzkumnictví, ČSAZV 1957.

Erna Weber, Grundriss der biologischen Statistik, Jena 1956.

Inž. Jiří Klír, aspirant ČSAV a inž. Vasil Čapla, Praha:

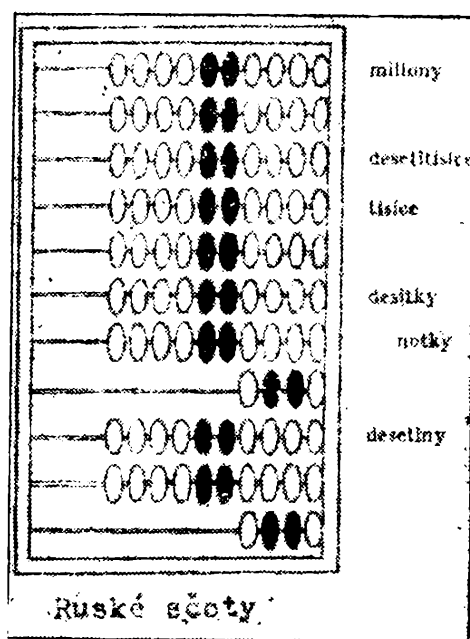
Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války

1. Úvod

Tímto příspěvkem pokračujeme v serii článků o matematických strojích. Chceme v něm seznámit čtenáře se vznikem a vývojem strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války, tj. přibližně do doby, kdy se obor strojů na zpracování informací začal formovat jako odvětví vědní. Pro ujasnění základních pojmů odkazujeme čtenáře na předcházející článek [1].

2. Nejstarší počítací pomůcky

Jeden z nejstarších způsobů počítání je počítání na prstech. Tohoto způsobu používají ještě v současné době např. Papuanové v Nové Guineji. Při počítání ohýbají prsty a říkají: „Be, be, be, be, be, ibon-be“ (ruka). Pak ohýbají prsty druhé ruky a zase počítají: „Be, be, be, be, be, ibon-ali“ (dvě ruce). Pak počítá Papuán stejným způsobem prsty na obou nohou a dále prsty na rukou a nohou jiného člověka.



Obr. 1

V uvedeném případě jde o používání pětkové číselné soustavy. Z historie jsou však známy případy používání i jiných soustav, jako např. soustavy dvojkové, dvanáctkové, dvacítkové a dalších. Nejrozšířenější se stala konečná soustava desítková, které nyní běžně užíváme.

První skutečná počítací pomůcka pro sčítání vznikla asi 3000 let před n. l. v Číně pod názvem „suan-pan“. Tato pomůcka používala pětkové soustavy a

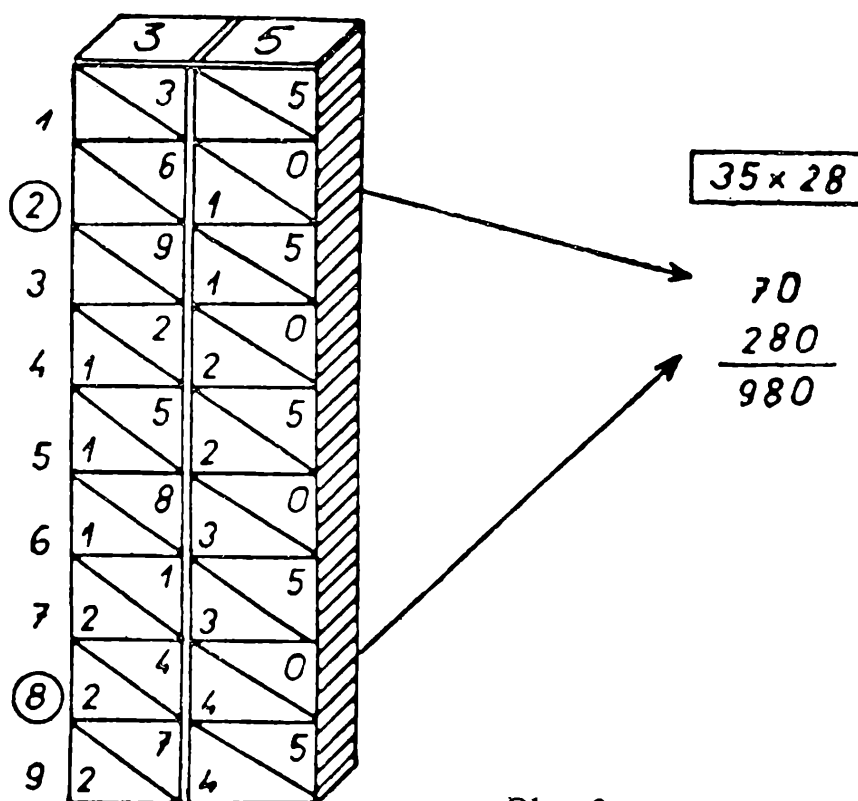
byla později přejata pozměněně Japonci pod jménem „soro-ban“ a Rusy pod názvem „sčot“. Sčoty (viz obr. 1) používají ovšem desítkové číselné soustavy a je známo, že na nich ještě dnes počítají v SSSR s úžasnou rychlostí.

Jak zjistil nedávno akademik Fr. Lexa, používali ve starověku Egypťané matematických tabulek, pomocí kterých vystačili při aritmetických výpočtech se zna-

lostí sčítání, odčítání a násobení dvěma. Jsou známy též počítací pomůcky zvané „abakus“, kterých používali Řekové a Římané.

V první čtvrtině 17. století byly vynalezeny v Anglii dvě matematické pomůcky, založené na dvou úplně odlišných principech. Je to především *l o g a r i t m i c k é p r a v í t k o*. Nápad sestavit logaritmickou stupnici měl profesor Oxfordské university E. Gunter (1581—1626), který jej veřejnosti předložil roku 1620, tedy 6 let po uveřejnění Neperovy práce o logaritmech. Sestrojení vlastního logaritmického pravítka, které prací Gunterovou bylo velmi usnadněno, připisuje se různým autorům (Neper, Augsre, Wingatte a jiní).

Druhou pomůckou jsou tzv. *N e p e r o v y k o s t i č k y* (bacilli Neperianes), které vynalezl skotský matematik John Neper (1550—1617) již koncem 16. století, avšak popsány byly až roku 1617. Každé dekadické číslici A přísluší



Obr. 2

zvláštní Neperova kostička rozdělená do devíti obdélníkových políček. Do těchto políček je postupně od shora dolů zapsána posloupnost čísel $A, 2A, \dots, 9A$ způsobem vyznačeným na obr. 2, na kterém je též na příkladě ukázáno, jakým způsobem se pomocí Neperových kostiček převádí násobení na sčítání. Matematik Schott (1604—1666) z Würzburgské university uložil Neperovy kostičky do skřínky, která se blíží tvaru některých dnešních druhů kalkulaček. V této skřínce byly kostičky uloženy na deseti válcích pro čísla $0, 1, \dots, 9$. Pomocí pák, umístěných na přední straně skřínky, se válce otáčely. Skříňka byla pokryta deskou se skulinami nad jednotlivými válci, kterými bylo možno vidět příslušné číslo násobence. Další podobné uspořádání Neperových kostiček provedl matematik Leupold roku 1717, který místo válců použil hranolů s větší podstavou, na kterých umístil Neperovy kostičky těsně vedle sebe.

3. První počítací stroje

Byla to zpravidla vždy praktická potřeba, která dala podnět vynálezům k zhotovení různých počítacích strojů. Tak také vznikl první sčítací stroj, který sestrojil v roce 1642 francouzský filosof a matematik Blaise Pascal (1623—1662) (čti Paskal) jako devatenáctiletý muž, když se snažil pomoci svému otci při výpočtech, spojených s prací výběrčího daní v Normandii. Tehdejší francouzská měna se skládala z denárů, solů a liber; 12 denárů se rovnalo 1 solu a 20 solů tvořilo 1 libru. Proto první ozubené kolečko Pascalovy sčítačky mělo 12 zubů, druhé 20 zubů a ostatních 8 koleček bylo po 10 zubech. Otáčením koleček se provádělo sčítání. Vykonalo-li některé kolečko jednu celou otáčku, pak při dalším jeho pohybu se pomocí automatického páčkového mechanismu provedl přenos na

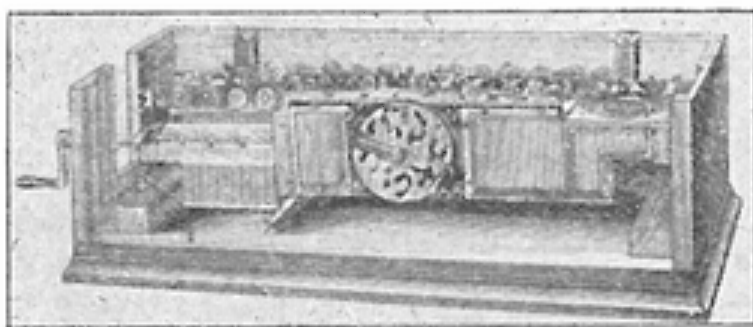


Obr. 3

sousední kolečko, odpovídající vyššímu řádu. Na základě královského patentu, který byl Pascalovi udělen v roce 1649, bylo vyrobeno asi 50 takových sčítaček. Některé z nich se nacházejí nyní v muzeích v Paříži, Londýně, Drážďanech a jinde (viz obr. 3).

Na zdokonalení Pascalovy sčítačky se podílelo mnoho významných matematiků, hodinářů a techniků. K nim patří např. hodinář Ludvíka XIV. Grillet (1678), dále Lépine (1725), Hillerin de Boistissandeau (1730) a jiní. Avšak větší konstrukční změnu učinil v tomto stroji až Gersten, profesor matematiky z Giessenu, který svůj stroj předvedl roku 1735 v Royal Society v Londýně.

Velkého pokroku v konstrukci počítačích strojů docílil německý filosof a matematik Wilhelm Leibnitz (1646—1716), který již roku 1671 navrhl stroj, schopný nejen sčítat a odčítat, ale též násobit a dělit. Roku 1672 přijel Leibnitz do Paříže, kde hledal mechaniky, kteří by jeho projekty mohli realizovat. Tam se teprve dozvěděl o Pascalově stroji, který v této době prováděl jen sčítání a odčítání. Výsledkem cesty byl první, ještě nedokonalý model stroje, který Leibnitz předvedl 1. února 1673 na schůzi Royal Society v Londýně. Spolu s Leibnitzovým strojem byl předváděn též stroj Angličana Morelanda, který však prováděl pouze sčítání a odčítání. Leibnitzův stroj byl velmi oceněn a Leibnitz sám byl jednomyslně zvolen členem Royal Society. Aby svůj stroj ještě lépe zdokonalil, obrátil se Leibnitz r. 1774 na pařížského mechanika Oliviera. Zlepšený stroj byl předváděn 9. ledna 1675 ve Francouzské akademii věd. Hned po předvedení objednal francouzský ministr financí Colbert u Leibnitze dva takové stroje, které však nebyly dodány, neboť Leibnitz si byl vědom některých závad svého stroje. Obrátil se proto na několik významných matematiků se žádostí o zdokonalení stroje. Avšak přes veškeré snahy se nedočkal zdokonalení svého počítačového stroje, přestože na stavbu modelů věnoval asi 24 000 tolarů.



Obr. 4

Leibnitzův stroj používal válcových ozubených kol se stupňovitě uspořádanými zuby a posuvným zařízením na nastavování čísel. V podstatě se tohoto způsobu užívá i u některých dnešních kalkulaček. Později bylo zjištěno, že hlavní závada Leibnitzova stroje spočívala (kromě nedostatečného provedení jemných součástí) v tom, že místo určené pro přenos z nižšího řádu do vyššího bylo příliš malé. Jeden z Leibnitzových strojů (viz obr. 4) se nachází od roku 1879 v Hannoveru.

Profesor matematiky Poleni vydal roku 1709 spis, kde popsal konstrukci svého počítačového stroje. Stroj byl uváděn do pohybu pomocí závaží a kyvadla. Když Poleni zjistil, že jeho stroj je ještě nedokonalý, zničil jej. Počítací stroj vykonávající čtyři základní aritmetické operace sestrojil v roce 1778 würtemberský farář a jemný mechanik Philipp Matthäus Hahn (1739—1780). Hahnovy stroje je možno vidět v muzeích ve Stuttgartu a v Drážďanech.

Celkem možno říci, že 18. století nepřineslo mnoho pro vývoj počítačích strojů. Pozornosti zasluhuje pouze teoretická práce J. Rowninga z roku 1770, ve které je po prvé naznačena a rozebrána možnost strojového řešení algebraických rovnic vyšších stupňů. Pro nedokonalý stav strojírenství nebylo však možno naznačené myšlenky realizovat. Práce Rowningova byla proto kritiky hodnocena jako teoreticky zajímavá, ale bez praktického užití.

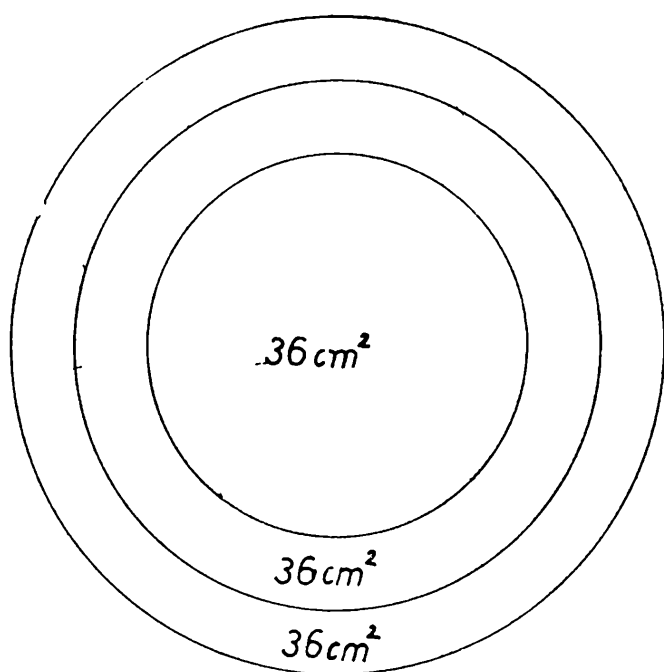
(Pokračování.)

Úhloměr jako planimetr

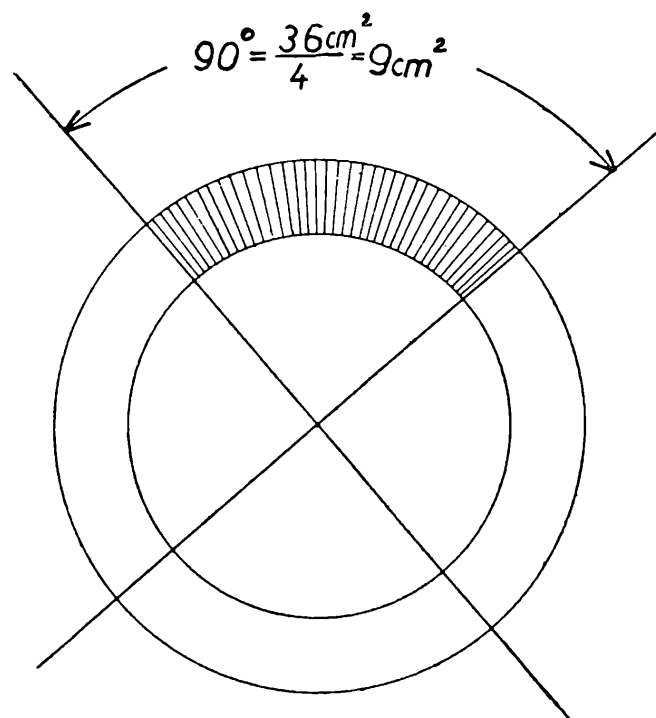
Potřebujete-li určovat plochy nepravidelných obrazců, a nemáte-li k dispozici planimetr (tj. přístroj k určování obsahu) ani průsvitný milimetrový papír, doporučuji kruhový úhloměr.

Samozřejmě, že je nutno kruhový úhloměr řádně přizpůsobit, chceme-li ho používat jako planimetru. A o to právě jde. Vždyť za několik úvah, trochu počítání a rýsování můžete získat velmi užitečnou, přesnou a vtipnou pomůcku.

Představte si, že bychom narýsovali na průsvitný papír řadu soustředných kruhů tak, že nejmenší kruh by měl plochu například 36 cm^2 a každý následující plochu o 36 cm^2 větší. Vznikla by nám tím celá řada mezikružích různých šířek, ale stejných ploch 36 cm^2 (obr. 1).



Obr. 1

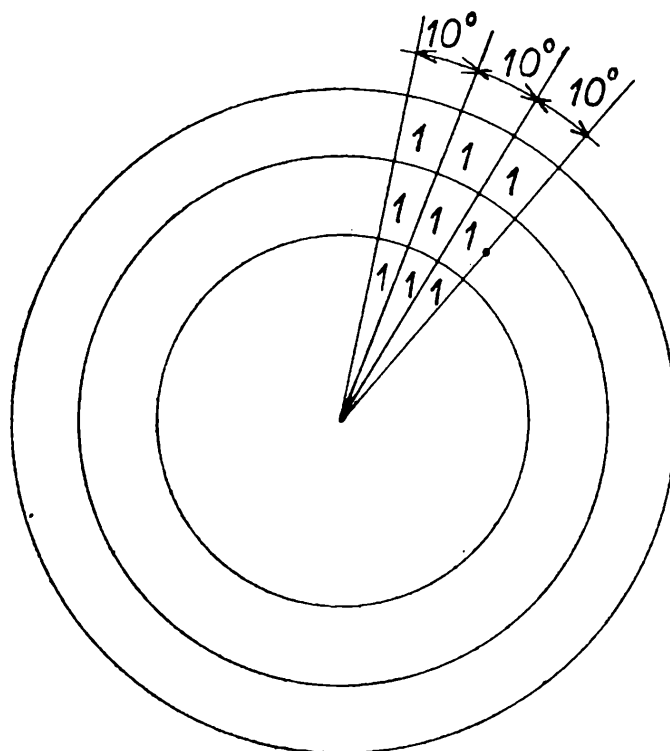


Obr. 2

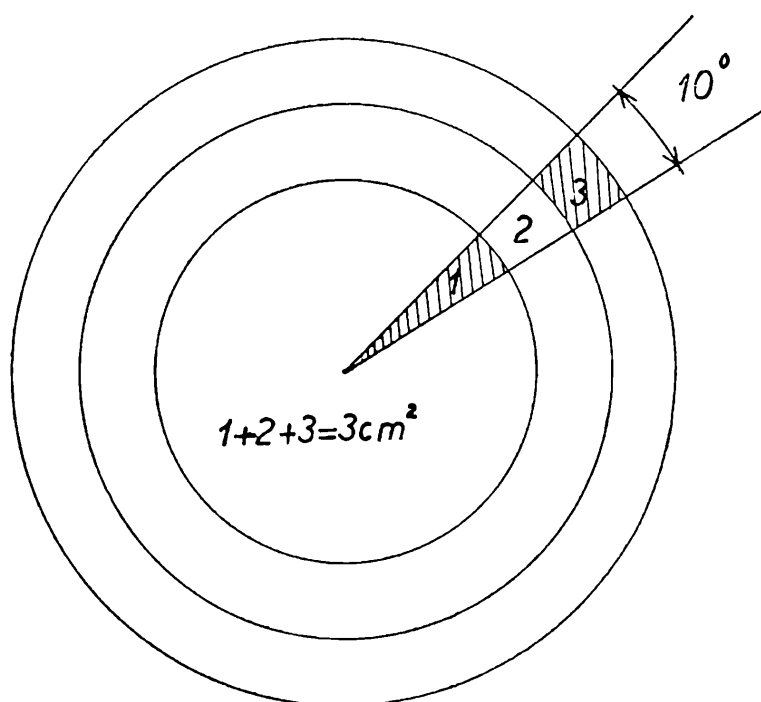
✚ Kdybychom rozdělili výkres soustředných kruhů na čtyři stejné díly (po 90°), získali bychom výseky mezikružích, jejichž plochy by byly shodné, rovnající se čtvrtině celé plochy mezikružích, tedy 9 cm^2 (obr. 2). Dalším dělením celého obrazce na desetistupňové výseky získali bychom výseky mezikružích o shodných plochách, a to $\frac{36 \text{ cm}^2}{36}$, tj. 1 cm^2 (obr. 3). Kdybychom pod narýsované soustředné čtyři kruhy nakreslili výseč mezikružích tří kruhů, svírající úhel 10° , je celková plocha této výseče 3 cm^2 (obr. 4).

Vyznačíte-li čárkami na obvodě výkresu rozdělení celého obvodu kruhu po 10° proti směru hodinových ručiček, upevníte-li výkres ve středu kruhu špendlíkem,

jste u jádra věci. Stačí nyní jen označit mimo kruhový obrazec nulu stupňového dělení čárkou a otáčet kruhem (ve směru hodinových ručiček) tak, že prvé otočení je tak velké jako vzdálenost „střední čáry“ prvního mezikruží, ohraničující obrazec (10°). Počáteční bod točení označte si přiložením špendlíku, takže hrot „projede“



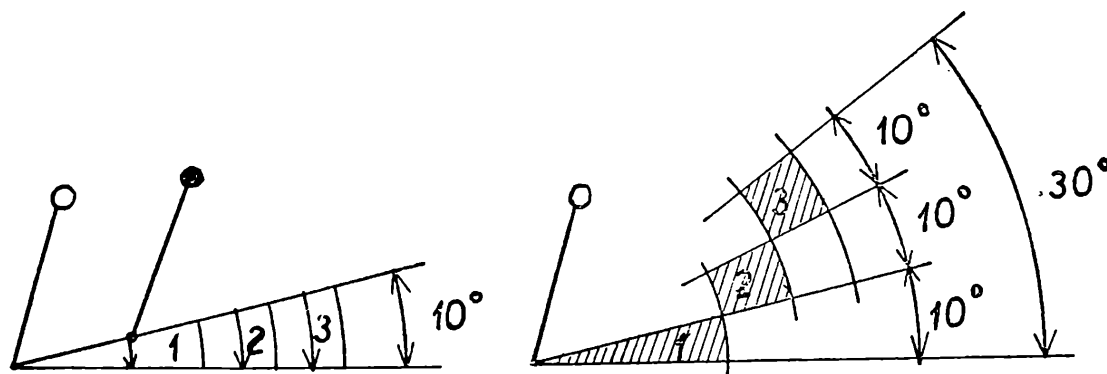
Obr. 3



Obr. 4

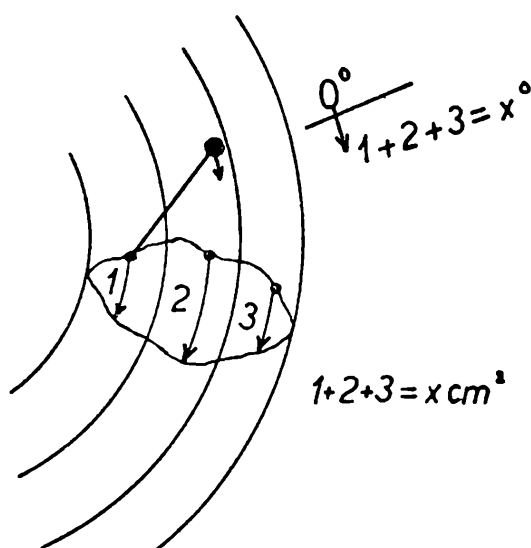
celou dráhu střední čáry mezikruží, omezené průsečíky obvodu dané plochy. Další otočení je stejně velké jako délka střední čáry druhého mezikruží. Třetí otočení určuje délku střední čáry třetího mezikruží. Při posledním otočení bude

čára označující původně 0° dělení kruhu ukazovat na 30° . Jelikož každých 10° výseče určuje plochu 1 cm^2 , sečetli jsme vlastně plochu na 3 cm^2 (obr. 5).



Obr. 5

Obecně tedy platí totéž jako při sčítání na milimetrovém papíře. Stačí rozdělit mezikruží, tedy sestavit mezikruží o plochách 18 cm^2 , označit je slabě a planimetr je hotov. Obecná plocha se zjišťuje velmi jednoduše. Planimetr se přiloží na plochu tak, aby jeho silně označená mezikruží se dotýkala krajů plochy. Ve středu se kruhový planimetr zajistí připíchnutým špendlíkem, označí se nulový bod pod čarou a pak se „sčítá“. Sčítá se od vnitřního mezikruží k vnějšímu po slabých čarách mezikruží točením planimetru ve směru hodinových ručiček. Dráhu jednotlivých sčítacích částí mezikruží vyznačujeme špendlíkem nebo hrotem tužky (obr. 6).



Obr. 6

Chceme-li tedy adaptovat kruhový úhloměr na planimetr, je nutné ho opatřit řadou soustředných kružnic. Chceme-li si dokonce sestavit samostatný planimetr i úhloměr, musíme nejprve sestavit úhlovou stupnici.

Volíme-li plochu základního kruhu a jednotlivých mezikruží 36 cm^2 , pak, jak již bylo řečeno, odpovídá plocha 10° výseče kteréhokoliv mezikruží ploše 1 cm^2 .

Je tedy potřeba rozdělit kruh, tj. plných 360° na 36 dílů, abychom získali deseti-
stupňové úseky kruhu. Takové dělení kruhu dá se provést mnoha způsoby.
Vyloučíme-li možnost použití úhloměru a chceme-li úkol provést zcela samo-
statně, nezbývá než volit vhodnou velikost obvodu kruhu, který budeme dělit na
36 dílů (po 10°). Jelikož máme v úmyslu nahradit délku obvodu řadou 36 sečen,
musíme dbát toho, aby velikost sečen nebyla příliš velká. Zvolme proto délku
sečny 2 cm. Z jednoduché rovnice, vyjadřující obvod kruhu ($o = 2\pi r$), můžeme
pak vypočítat i příslušný poloměr kruhu, který rozdělíme na 36 dvoucentimetro-
vých dílů. Protože jsme zvolili $o = 72$ cm, platí:

$$72 = 6,82 r, \text{ tedy } r = 11,46 \text{ cm.}$$

Rýsujete-li přesně, zjistíte, že difference není viditelná. Chyba, které jste se
totiž vědomě dopustili tím, že jste zaměnili délku oblouku za délku sečny, je
zcela mimo dosah přesnosti rýsování. Rozdíl délky oblouku a sečny vyjadřuje
vzorec:

$$o - x = \frac{o^3}{24 r^2} - \frac{o^5}{1920 r^4} \dots \text{atd.}^1).$$

Ve vzorci, z něhož se uvažuje jen jeho první člen, značí o délku oblouku,
 x délku sečny, a r poloměr kružnice. Pro náš případ platí: $o = 2$ cm, $r = 11,46$ cm.
Rozdíl je tudíž:

$$\frac{2^3}{24 \cdot 11,46^2} = \frac{8}{3152} \doteq 0,0025 \text{ cm.}$$

Chyba v našem případě je tedy 0,0025 cm!

Máme-li takto sestrojený úhloměr, doplníme ho o jeho planimetrovou část tak,
že narýsujeme řadu kruhů ploch 36, 54, 72, 90 cm² ... Je proto nutno vypočítat
velikosti poloměrů příslušných kruhů.

Platí:

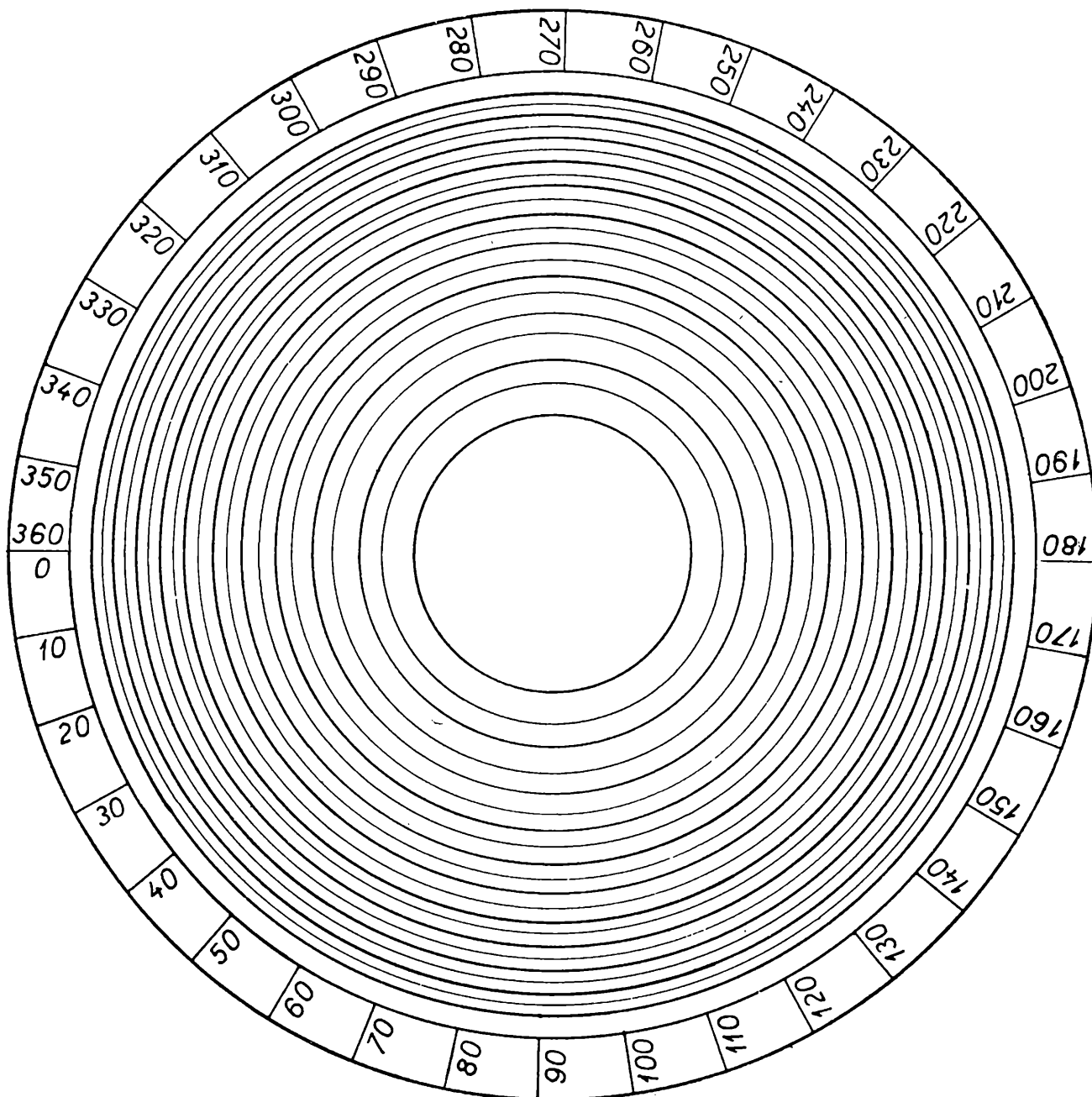
$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{36}{\pi} \doteq 11,459; & r_1 &\doteq 3,38 \text{ cm} \\ r_2^2 &= \frac{54}{\pi} \doteq 17,188; & r_2 &= 4,15 \text{ cm} \\ r_3^2 &= \frac{72}{\pi} \doteq 22,918; & r_3 &\doteq 4,79 \text{ cm} \\ r_4^2 &= \frac{90}{\pi} \doteq 28,648; & r_4 &\doteq 5,35 \text{ cm} \\ r_5^2 &= \frac{108}{\pi} \doteq 34,377; & r_5 &\doteq 5,86 \text{ cm} \\ r_6^2 &= \frac{126}{\pi} \doteq 40,107; & r_6 &\doteq 6,33 \text{ cm} \\ r_7^2 &= \frac{144}{\pi} \doteq 45,836; & r_7 &\doteq 6,77 \text{ cm} \end{aligned}$$

¹⁾ Vzorec lze odvodit použitím vyšší matematiky.

$$r_8^2 = \frac{162}{\pi} \doteq 51,566; \quad r_8 \doteq 7,18 \text{ cm}$$

$$r_9^2 = \frac{180}{\pi} \doteq 57,295; \quad r_9 \doteq 7,57 \text{ cm}$$

$$r_{10}^2 = \frac{198}{\pi} \doteq 63,025; \quad r_{10} \doteq 7,94 \text{ cm}$$



Obr. 7

$$r_{11}^2 = \frac{216}{\pi} \doteq 68,754; \quad r_{11} \doteq 8,29 \text{ cm}$$

$$r_{12}^2 = \frac{234}{\pi} \doteq 74,484; \quad r_{12} \doteq 8,63 \text{ cm}$$

$$r_{13}^2 = \frac{252}{\pi} \doteq 80,214; \quad r_{13} \doteq 8,95 \text{ cm}$$

$$r_{14}^2 = \frac{270}{\pi} \doteq 85,943; \quad r_{14} \doteq 9,27 \text{ cm}$$

$$r_{15}^2 = \frac{288}{\pi} \doteq 91,67; \quad r_{15} \doteq 9,57 \text{ cm}$$

$$r_{16}^2 = \frac{306}{\pi} \doteq 97,40; \quad r_{16} \doteq 9,87 \text{ cm}$$

$$r_{17}^2 = \frac{324}{\pi} \doteq 103,13; \quad r_{17} \doteq 10,15 \text{ cm}$$

$$r_{18}^2 = \frac{342}{\pi} \doteq 108,86; \quad r_{18} \doteq 10,42 \text{ cm}$$

$$r_{19}^2 = \frac{360}{\pi} \doteq 114,59; \quad r_{19} \doteq 10,70 \text{ cm}$$

$$r_{20}^2 = \frac{378}{\pi} \doteq 120,32; \quad r_{20} \doteq 10,96 \text{ cm}$$

$$r_{21}^2 = \frac{396}{\pi} \doteq 126,05; \quad r_{21} \doteq 11,23 \text{ cm}$$

Tím by byl kruhový planimetr v podstatě hotov. Postačí již jen vykreslit označení úhlů (proti hodinovým ručičkám) a vyříznout celý výkres v kruhu o poloměru 12 cm (obr. 7). Aby úhlová stupnice byla vyznačena přímo na obvodu, označí se čárkou, která je spojnicí středu kruhů s dělicím vyznačením 10° bodů na obvodě kruhu poloměru 11,46 cm. Případné další dělení na stupně provede se odměřováním.

P o z n á m k a. Obrázky pro tisk byly dvojnásobně zmenšeny, proto např. plocha kruhu, označená na obrázku jako 36 cm^2 , má ve skutečnosti velikost jen 9 cm^2 .

M i l a n K o m a n, odb. as. P. I., Praha:

Řešení jedné konstruktivní úlohy na maximum

Úloha. Jsou dány tři body A, B, C , které neleží v přímce. Sestrojte přímku c , procházející bodem C tak, aby měla od bodů A, B maximální součin vzdáleností.

Než přistoupíme k vlastnímu řešení, uvedeme několik přípravných úvah.

V článku Stanislava Horáka, Mocnost bodu ke kružnici (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 35, č. 1) je dokázána věta:

A. V elipse (v hyperbole) platí: součin vzdáleností ohnisek od libovolné tečny (tečny nebo asymptoty) je roven dvojmuči velikosti vedlejší poloosy.

Tuto větu, resp. dvě věty, vyslovíme a dokážeme obecněji:

B. Budtež dány dva různé body E, F a číslo $b > 0$. Potom množina všech přímek neprotínajících úsečku EF a majících od bodů E, F stálý součin vzdáleností rovný b^2 , je množina tečen elipsy s ohnisky E, F a velikostí vedlejší poloosy b .

D ů k a z. První část tvrzení je obsažena ve větě A. Zde stačí tedy naopak dokázat: Jestliže přímka a neprotíná úsečku EF a má od bodů E, F součin vzdáleností rovný b^2 , potom je přímka a tečnou elipsy s ohnisky E, F a velikostí vedlejší poloosy b .

Z daných předpokladů je ihned vidět, že existuje právě jedna elipsa, která má ohniska E, F a danou přímku a za tečnu. Označme velikost vedlejší poloosy této elipsy b_1 . Podle věty A má přímka a součin vzdáleností od obou ohnisek E, F rovný b_1^2 . Tento součin je však podle předpokladu roven b^2 , tzn. $b_1 = b$. Odtud plyne ihned uvedené tvrzení.

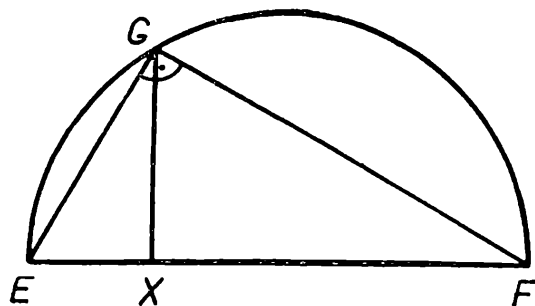
C. Budtež dány dva různé body E, F a číslo $b > 0$. Budiž M množina všech přímek protínajících úsečku EF a majících od bodů E, F stálý součin vzdáleností rovný b^2 . Potom

a) je-li $2b < EF$, je M množina tečen a asymptot hyperboly s ohnisky E, F a velikostí vedlejší poloosy b ;

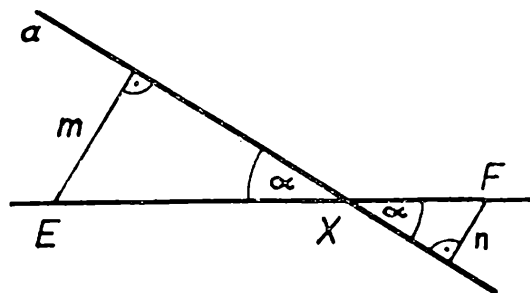
b) je-li $2b = EF$, skládá se množina M z jediné přímky, osy úsečky EF ;

c) je-li $2b > EF$, je množina M prázdná.

Nejdříve dokážeme dvě pomocné věty:



Obr. 1



Obr. 2

Budiž X vnitřní bod úsečky EF . Potom součin $EX \cdot FX$ je maximální, právě když je bod X středem úsečky EF .

D ů k a z. Buď EFG pravoúhlý trojúhelník s přeponou EF a necht' bod X je patou výšky vedené z bodu G na přeponu EF (obr. 1). Podle Eukleidovy věty je $EX \cdot FX = \overline{GX}^2$. Protože bod G leží podle Thaletovy věty na kružnici opsané nad průměrem EF , je zřejmé, že velikost úsečky GX (a tedy i součin $EX \cdot FX$) je maximální, právě když bod X je středem úsečky EF .

Necht' přímka a protíná úsečku EF . Potom součin vzdáleností přímky a od bodů E, F je maximální, právě když je přímka a osou úsečky EF .

D ů k a z. Necht' přímka a protíná úsečku EF v bodě X . Buď α odchylka přímek a, EF (obr. 2). Pro součin vzdáleností přímky a od bodů E, F zřejmě platí $m \cdot n = EX \cdot FX \cdot \sin^2 \alpha$. Tento součin je zřejmě maximální, právě když je současně jak součin $EX \cdot FX$, tak $\sin^2 \alpha$ maximální. To nastane jedině v případě, že X je středem úsečky EF a $\alpha = 90^\circ$.

D ů k a z věty C. Tvrzení b) c), plyne ihned z uvedených pomocných vět. Stačí tedy dokázat a). První část tohoto tvrzení je opět obsažena ve větě A. Zde proto dokážeme pouze: Jestliže přímka a protíná úsečku EF a má od bodů E, F součin

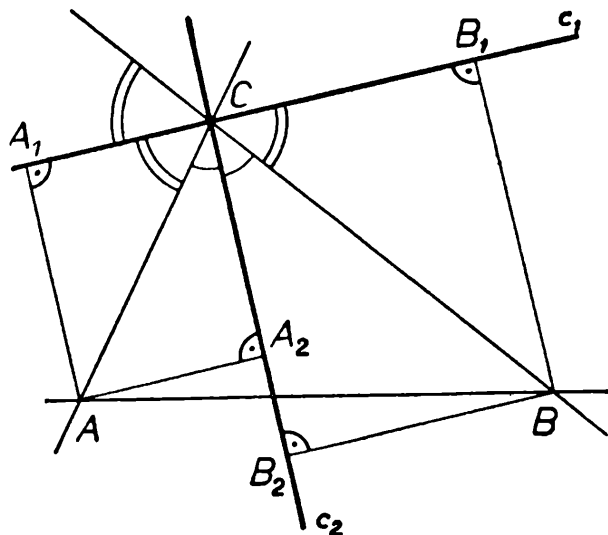
vzdáleností rovný b^2 , kde $0 < 2b < EF$, potom je přímka a tečnou, nebo asymptotou hyperboly s ohnisky E, F a velikostí vedlejší poloosy b .

Protože $2b < EF$, není přímka a podle výše uvedené věty osou úsečky EF . Existuje tedy právě jedna hyperbola s ohnisky E, F a mající přímku a za tečnu nebo asymptotu. Další část důkazu je analogická s důkazem věty B.

Řešení dané konstruktivní úlohy.

Rozbor. Buď c hledaná přímka a $m \cdot n = b^2$ její součin vzdáleností od bodů A, B . Potom je zřejmě podle B a C přímka c buď tečnou kuželosečky K s ohnisky A, B a velikostí vedlejší poloosy $|b|$, nebo osou úsečky AB .

Nechť c je tečnou vedenou bodem C ke kuželosečce K . Protože bodem C nelze vést přímku, která by měla od bodů A, B větší součin vzdáleností než b^2 , je zřejmě bod C vnitřním bodem všech kuželoseček, které mají ohniska A, B a velikost vedlejší poloosy větší než $|b|$. Nemůže být tedy bod C vnějším bodem kuželosečky K , ale přímo bodem této kuželosečky; tzn. přímka c je tečnou kuželosečky



Obr. 3

s ohnisky A, B procházející bodem C . Takové kuželosečky mohou existovat dvě (elipsa a hyperbola). V obou případech však tečna v bodě C je osou vnějšího úhlu průvodičů bodu C , tj. v případě elipsy osou vnějšího úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C a v případě hyperboly osou vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C .

Nechť c je osou úsečky AB . Potom je podobně jako v předcházejícím případě c osou vnitřního $\triangle ABC$ při vrcholu C .

V každém případě je tedy hledaná přímka buď osa c_1 vnějšího úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C , nebo osa c_2 vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C . Označme A_1, B_1 , resp. A_2, B_2 , paty kolmic vedených po řadě z bodů A, B na přímku c_1 , resp. c_2 (obr. 3).

Je-li nyní $\sphericalangle ACA_1 > \sphericalangle ACA_2$, je $AA_1 > AA_2$, $BB_1 > BB_2$. Potom $AA_1 \cdot BB_1 > AA_2 \cdot BB_2$, tedy hledaná přímka je nutně osa c_1 .

Analogicky se zjistí, je-li $\sphericalangle ACA_1 < \sphericalangle ACA_2$, je hledaná přímka osa c_2 . Je-li konečně $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle ACA_2$, pak obě přímky c_1 a c_2 vyhovují podmínkám dané úlohy.

Ihned se zjistí, že $\sphericalangle ACA_1 > \sphericalangle ACA_2$, právě když je $\sphericalangle ACB$ ostrý, tj. právě když bod C leží vně kružnice k , opsané nad průměrem AB . Podobně $\sphericalangle ACA_1 < \sphericalangle ACA_2$, právě když bod C leží uvnitř kružnice k a $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle ACA_2$, právě když bod C leží na kružnici k .

Konstrukce. Jestliže bod C nepatří vnitřku kružnice k , je hledaná přímka osa vnějšího úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C . Jestliže bod C nepatří vnějšku kružnice k , je hledaná přímka osa vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu C .

Důkaz konstrukce. Protože úloha je řešena užitím množin přímek dané vlastností, plyne důkaz přímo z rozboru.

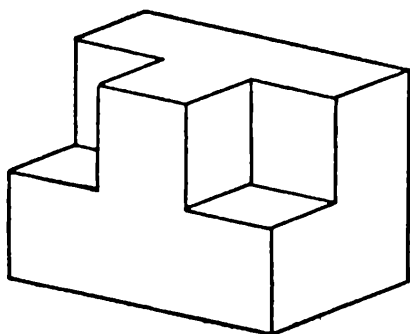
Diskuse. Jestliže bod C leží na kružnici k , opsané nad průměrem AB , má úloha dvě řešení, ve všech ostatních případech má řešení jedno.

Deskriptivní geometrie a rýsování

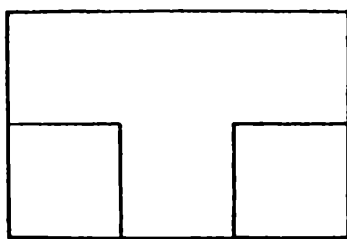
L u d ě k G r a n á t, ČVUT, Praha:

Jednoduché zobrazovací metody

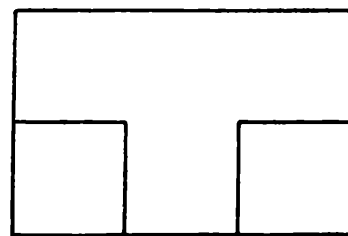
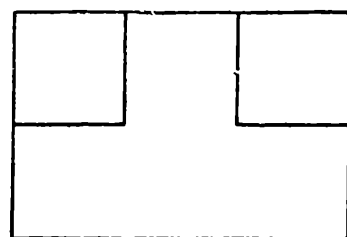
Často potřebujeme sestavit n á z o r n ý o b r á z e k nějakého předmětu. Zobrazení dávající vjem nejbližší tomu, jak předměty vidíme, dostaneme, použijeme-li vhodně voleného středového promítání. Konstrukce tohoto druhu jsou však často dosti složité a proto zobrazujeme daný předmět v mnohých případech raději pomocí rovnoběžného promítání.



Obr. 1a



Obr. 1b

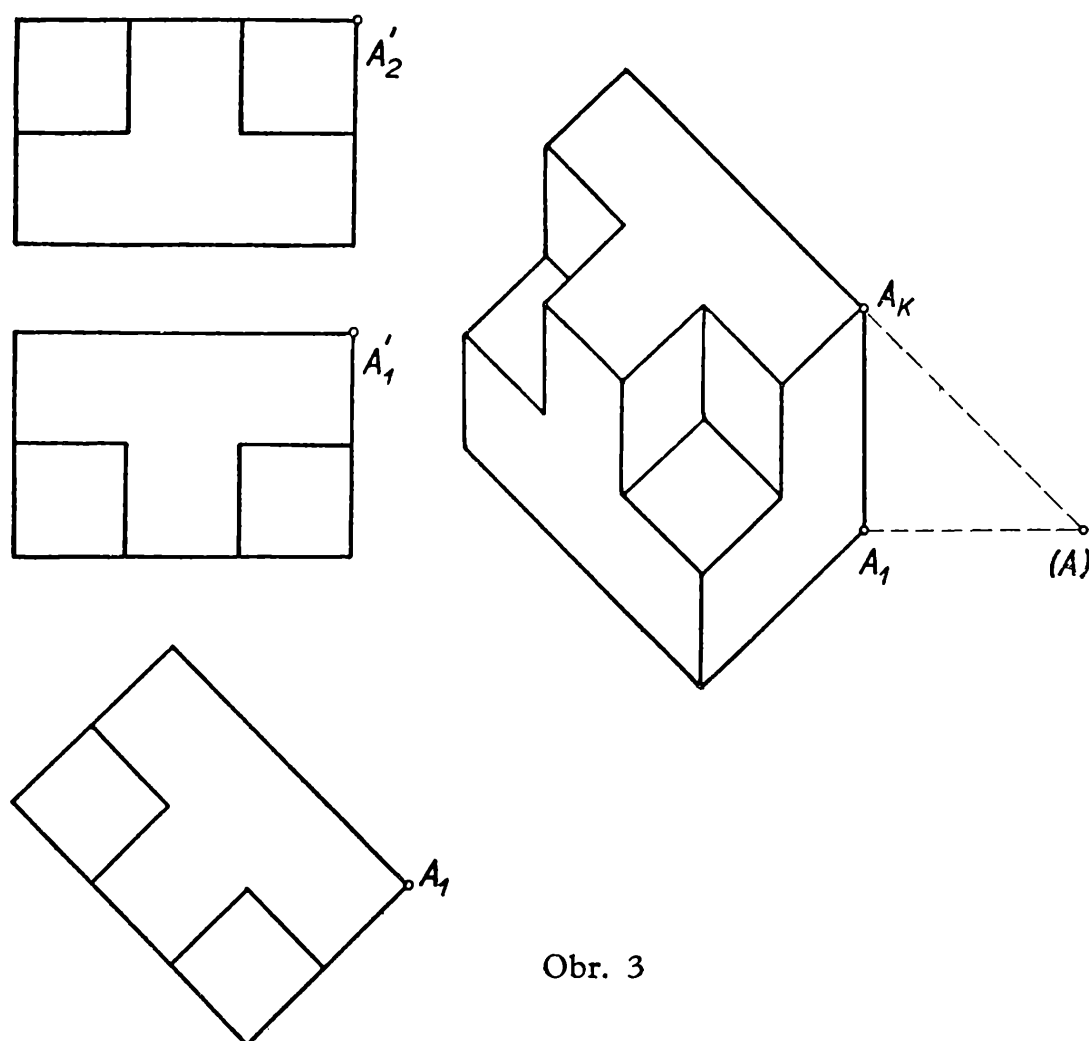


Obr. 2

Zobrazovaný předmět umísťujeme většinou tak, že leží na nějaké vodorovně umístěné rovině, kterou označíme π . Nejjednodušší obraz daného předmětu dostaneme jako jeho pravoúhlý průmět do π , tj. půdorys daného předmětu. Toto promítání nám pak připomíná pohled na předmět z velké výšky. Podívejme se

například na těleso na obr. 1a. Z jeho půdorysu 1b si nemůžeme učinit dobrou představu, jak vypadá příslušný předmět ve skutečnosti. Dostali jsme **n e n á z o r n ý o b r a z** daného předmětu.

K tomuto průmětu pak připojujeme zpravidla ještě další průmět a to na rovinu ν , která je kolmá k π a na kterou promítáme opět pravouhle. Je-li rovina ν v průčelné poloze, označujeme příslušný průmět jako nárys a ν jako nárysnu. Zde již můžeme dostat názornější obraz, který odpovídá asi pohledu ve vodorovném směru na daný předmět z dálky. Avšak ani průměty tohoto druhu nedávají často ještě dosti názorné obrazy, a to ani ve spojení se sdruženými s nimi půdorysy - viz obr. 2. Sdružený nárys a půdorys neurčuje též vždy jednoznačně



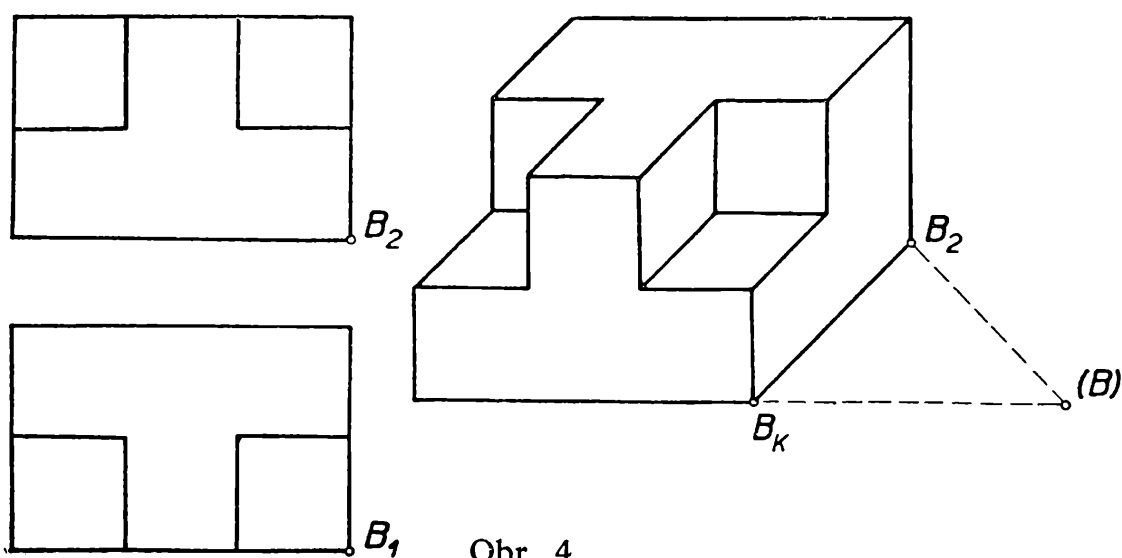
Obr. 3

útvár v prostoru, i když jde jen o elementární tělesa, nebo tělesa z nich složená. (Viz cvičení na konci tohoto článku!) Důvod, proč užíváme sdruženého nárysu a půdorysu tkví v snadnosti řešení prostorových úloh v pravouhlém promítání na dvě k sobě kolmé průmětny.

Abychom dostali názornější obrazy předmětu, můžeme postupovat např. tak, že buď zvolíme jiný směr promítání, tj. místo pravouhlého promítání uijeme **k o s o ú h l é h o p r o m í t á n í**, nebo si zvolíme novou, obecně položenou průmětnu. Předpokládejme, že těleso je dáno půdorysem a nárysem, případně ještě dalšími údaji. Chtějme nyní sestavit jeho kosoúhlý obraz.

Zvolíme-li rovinu π za průmětnu, na kterou budeme kosoúhle promítat, můžeme postupovat takto: Půdorys tělesa se zobrazí nezkresleně, průměty výšek pak můžeme nanášet v libovolném směru a případně je zkracujeme. Obvykle rýsuje výšky svisle, a aby jejich průměty nesplývaly s žádným důležitým směrem půdorysu, natočíme vhodně půdorys. Nezkracujeme-li pak ještě úsečky nanášené na výšky, nazýváme příslušný druh zobrazení *vojenskou perspektivou*. Viz obr. 3, kde vlevo dole je zakreslen vhodně natočený půdorys a vpravo vojenská perspektiva tělesa daného oběma průměty. A_1 značí tam půdorys bodu A , A_k jeho kosoúhlý průmět a $A_k(A)$ sklopený obraz promítacího paprsku bodu A kolem A_1A_k .

Zvolíme-li nákresnu za průmětnu, na kterou kosoúhle promítáme, pak se zobrazí nezkresleně nárys tělesa a přímky kolmé k nárysně můžeme rýsovat v libovolném směru a případně zkracovat. Volíme-li je pod úhlem 45° k svislému směru a příslušné úsečky na nich nezkracujeme, pak dostáváme tzv. *kavalírní perspektivu*. Viz obr. 4, kde B_2 je nárys bodu B , B_k jeho kosoúhlý průmět a



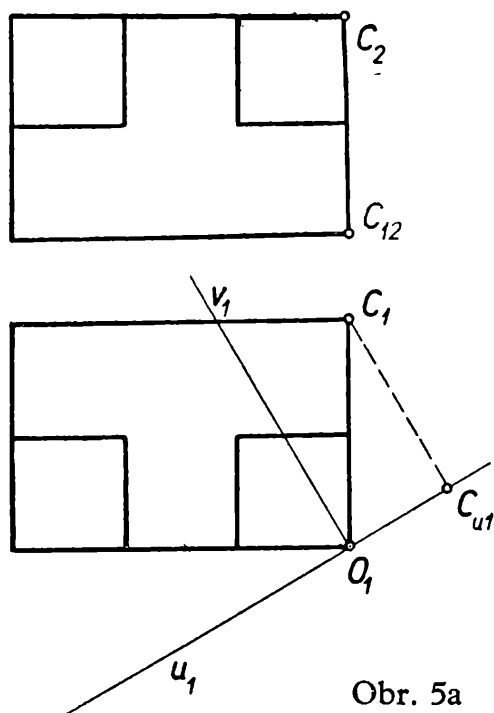
$(B) B_k$ sklopený promítací paprsek bodu B kolem B_2B_k . Název vznikl od toho, že se v ní zobrazovaly tzv. kavalíry v pevnostech.

Aby náš vjem při pohledu na průměty těles v kosoúhlém zobrazení byl co nejlepší, je třeba správně stanovit směr našeho pohledu. Má to být směr promítacího paprsku, tj. spojnice některého bodu v prostoru neležícího v průmětně s jeho průmětem.

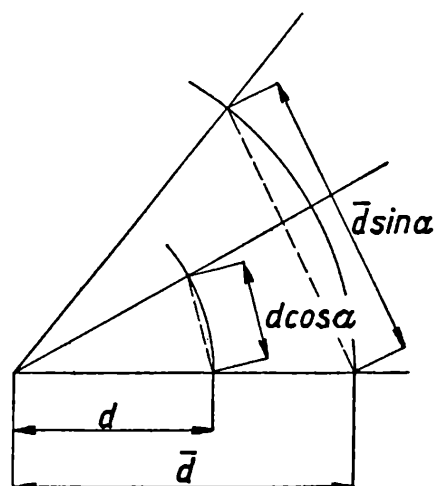
Vojenská perspektiva se hodí spíše pro přehledné pohledy např. skupin staveb nebo rozmístění strojů v tovární hale apod., kdežto kavalírní perspektiva pro zobrazování jednotlivých těles.

Další možností pro získání názorného obrazu předmětu je, jak bylo uvedeno, volba obecně položené průmětny. Zde uvedu jen jednu jednoduchou metodu. Mějme dán opět půdorys a nárys tělesa a průmětnu, která s první průmětnou svírá ostrý úhel. Její průsečnici s průmětnou π si označme u (viz obr. 5a) a nějakou její přímku kolmou na u si označme v . Úsečky rovnoběžné s u se zobrazí do úseček nezměněné velikosti. Proložme nyní přímkou v promítací rovinu. Ta nám

protne π v přímce v_1 . Úsečky rovnoběžné s v_1 délky d (viz obr. 5b) se promítají do úseček o délce $d \cdot \cos \alpha$, kde α je úhel průmětny s půdorysnou π . Svislé úsečky o délce d se promítají do úseček $d \cdot \sin \alpha$. Když nyní známe, jak se zkracují úsečky

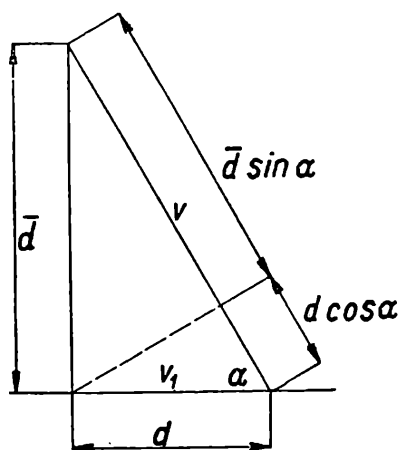


Obr. 5a

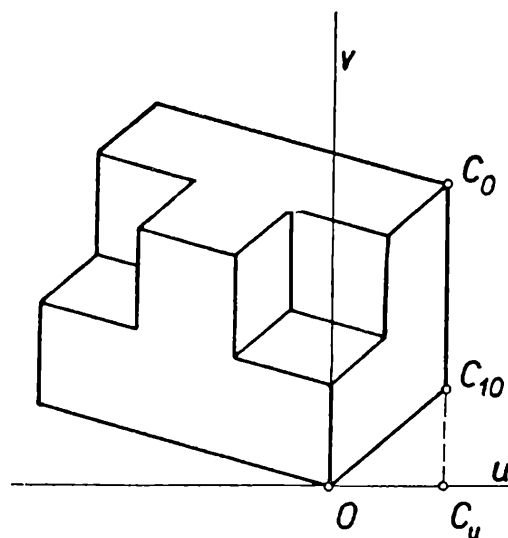


Obr. 5b

důležitých směrů, sestojíme nejprve redukční úhly (viz obr. 5c) pro příslušné zkracování a můžeme přistoupit k sestrojování obrazu daného předmětu. Narýsujeme vodorovně základní přímku u a kolmo k ní přímku v (viz obr. 5d). Chce-



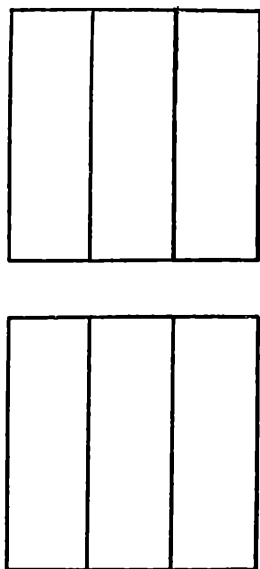
Obr. 5c



Obr. 5d

me-li sestrojiti např. obraz C_0 bodu C , spustíme v půdoryse kolmici z C_1 na u_1 , její patu označíme C_{u1} . Od průsečíku O přímek u a v nanese-
me úsečku $OC_u = O_1C_{u1}$ na přímku u a ve svislém směru od bodu C_u úsečku $C_uC_{10} = C_{u1}C_1 \cdot \cos \alpha$ a od jejího koncového bodu úsečku $C_{10}C_0 = C_{12}C_2 \cdot \sin \alpha$, vše v přísluš-

ném smyslu. K sestrojení délek úseček $C_{u1}C_1 \cdot \cos \alpha$ a $C_{12}C_2 \cdot \sin \alpha$ používáme redukčních úhlů.



Obr. 6

Autor této metody, profesor vídeňské techniky, dr. W. Wunderlich, nazval ji „Stechzirkelaxonometrie“ (der Stechzirkel = odpichovátko), protože při jejím provádění se používá hojně odpichovátko. Výhodou této metody je přehlednost, úspora čar a postačující přesnost.

Cvičení. V uvedených zobrazovacích metodách zobrazte tělesa, jejichž nárys a půdorys vidíte na obr. 6! Některá řešení budou uvedena v příštím čísle Rozhledů.

Fyzika

Jiří Cochlar, studující ČVUT, Poděbrady:

Polovodičové triody (transistory)

(Dokončení)

Nyní si podrobněji vysvětlíme, jak dochází k přechodu nositelů nábojů od emitoru ke kolektoru.

a) *Transistor plošný* typu *pnp* (obr. 3).

Předpokládejme, že v emitorové oblasti *p* je koncentrace děr značně větší než koncentrace elektronů v oblasti *n*, čehož můžeme v praxi dosáhnout vhodnou volbou příměsí nečistot. Pak bude proud emitorovým přechodem tvořen hlavně z děr. Tyto díry (kladné náboje) budou přitahovány záporně nabitým kolektorem a budou k němu přecházet oblastí báze. Protože jich část během průchodu touto oblastí zrekombinuje, bude počet děr, které dojdou ke kolektoru menší, než počet děr vystoupivších z emitoru, což je jeden z důvodů, proč je u plošných transistorů vždy $\alpha < 1$. Druhým důvodem je, že proud emitoru je vždy tvořen i elektrony, které se nezúčastní proudu kolektoru. Proto se snaží výrobci transistorů do-

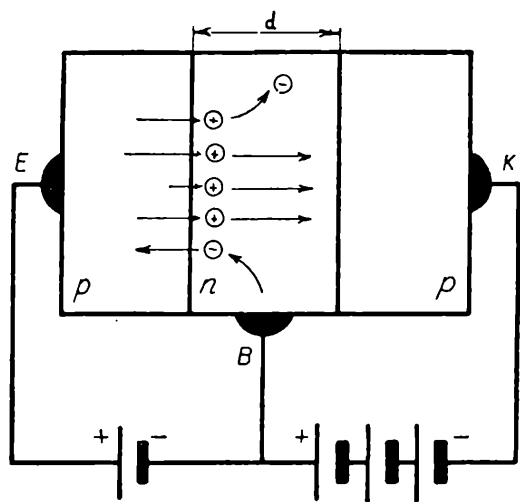
sáhnout co možno největšího poměru $\frac{I_e^+}{I_e^-}$, kde I_e^+ je proud emitorového pře-

chodu způsobený dírami a I_e^- je proud způsobený elektrony. Též zmenšení vzdálenosti *d* (obr. 11) zvyšuje α , protože se sníží rekombinace procházejících děr. Zmenšení *d* má též vliv na schopnost transistoru zesilovat signály s vyšší frekvencí.

V případě že uvažujeme transistor typu *npn*, změní se polarita všech napájecích napětí a nositelem proudu od emitoru ke kolektoru budou elektrony; princip činnosti však zůstává týž.

b) *Transistor hrotový* (obr. 4).

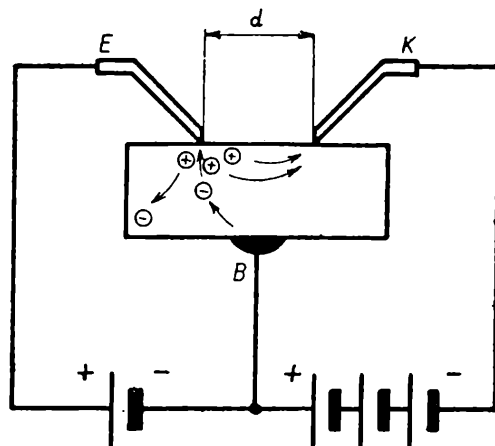
Hrotový transistor se skládá z germania s vodivostí typu *n* a dvou kovových hrotů, které se jej dotýkají ve vzdálenosti *d*. Hroty volíme z takového kovu, aby byl proud v přechodu emitor-polovodič uskutečňován převážně dírami. Tyto díry pak obdobně jako u plošného transistoru přecházejí ke kolektorovému hrotu. U hrotových transistorů však bylo naměřeno α větší než jedna. Vzniklo mnoho teorií, které se snaží tento jev vysvětlit. Nejvíce je rozšířena teorie, která předpokládá, že při *f o r m o v á n í k o l e k t o r u* (pochod, při němž se kolektorem hrotového transistoru nechají procházet silné, krátké impulsy el. proudu) vzniknou pod hrotem kolektoru vrstvy polovodiče se střídajícím se typem vodivosti, které způsobují zesílení proudu. Tyto vrstvy vznikají pravděpodobně přechodem částic kovu hrotu vlivem impulsů silného proudu do polovodiče, kde působí jako akceptory. Podrobnější zpracování tohoto problému je v literatuře (1).



⊕ DÍRA

⊖ VOLNÝ ELEKTRON

Obr. 3. Činnost plošného transistoru.



Obr. 4. Činnost hrotového transistoru.

Na závěr je možno říci, že plošné transistory se ukázaly v provozu spolehlivější než hrotové, jejich vlastnosti jsou příznivější a proto těžiště výroby a dalšího vývoje se přiklání k transistorům plošným. Jediná výhoda hrotových transistorů - schopnost zesilovat vyšší kmitočty než transistory plošné - je s vývojem technologie výroby odstraňována. Již dnes můžeme říci, že budoucnost patří transistorům plošným.

Pokud by se čtenář více zajímal o praktické použití transistorů v různých obvodech, nalezne příklady různých zapojení v literatuře (4), kterou je možno si opatřit též v překladu do ruštiny; teoretické zpracování obvodů s transistory je v literatuře (3). Teorie usměrňovacího přechodu *p — n*, eventuálně kov-polovodič, je dosti podrobně uvedena v literatuře (1) a praktické použití polovodičových diod, triod a ostatních polovodičových prvků: termistorů, fotočlánků, fototransistorů apod. je v literatuře (2). Stručný přehled způsobů výroby transistorů

a jiných polovodičových zařízení je v literatuře (3). Rovněž vyšla řada článků o problematice polovodičů v odborných časopisech.

Literatura:

- (1) Ing. Dr. Jan Tauc, Krystalové diody a triody.
- (2) I. P. Petrov, Poluprovodnikovyye pribory.
- (3) G. V. Cholujanov, Polovodiče.
- (4) R. P. Turner, Transistors Theory and Practice.

Vilém Lamparter, PSŠ, Brno:

O rázu pružných koulí

V 6. sešitě předloňských Rozhledů (ročník 1957) byl článek Ing. Dr. Václava Šindeláře: O rázu těles. Ing. Dr. Šindelář odvodil výsledné rychlosti po rázu. Jsou-li hmoty obou koulí m_1, m_2 a jejich rychlosti před rázem c_1 a c_2 , po rázu jsou rychlosti těchto koulí v_1 a v_2 . Autor odvodil rychlosti po rázu za předpokladu zachování hybnosti po rázu a za předpokladu zachování energie pohybové po rázu. Dostal tím dvě rovnice o dvou neznámých, jednu lineární a druhou kvadratickou.

Stejného výsledku o rychlostech po rázu dosáhneme, užijeme-li představy, že ráz sestává ze dvou fází: v první dohoní rychlejší koule kouli pomalejší, narazí na ni. Tím se obě zdeformují, okamžik se pohybují společnou rychlostí u , potom nastává restituce tvarová (deformace se vyrovnají). Předpokládejme, že rychlejší je koule první $c_1 > c_2$. Potom ztratí rychlejší koule nárazem na pomalejší rychlost z původní hodnoty c_1 na u , tedy ztráta rychlosti činí $c_1 - u$. Avšak při vyrovnání deformace odrazí se první koule od druhé zpět a dostane tím impuls zpět, stejný jako prve; ztrácí tedy dvojnásobek $(c_1 - u)$.

$$v_1 = c_1 - 2 \cdot (c_1 - u) = c_1 - 2c_1 + 2u = 2u - c_1. \quad (1)$$

Druhá koule nárazem rychlejší koule zvětší svou rychlost z c_2 na u ; získá tedy rychlost $u - c_2$. Po druhé vzroste její rychlost, když vyrovná svou deformaci, odrazí se vpřed:

$$v_2 = c_2 + 2 \cdot (u - c_2) = c_2 + 2u - 2c_2 = 2u - c_2. \quad (2)$$

Tyto rovnice nám umožňují vypočítat výsledné rychlosti po rázu, vypočteme-li okamžitou společnou rychlost u . Také zde platí zachování hybnosti před rázem a po rázu:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = (m_1 + m_2) u, \quad (3)$$

$$\text{z toho } u = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Zde platí také zákon o zachování energie pohybové po rázu. Přesvědčíme se o tom, dosadíme-li do rovnic (1) a (2) hodnotu u , vypočtenou v rovnici (3).

$$v_1 = \frac{2m_1c_1 + 2m_2c_2}{m_1 + m_2} - c_1 = \frac{m_1c_1 + m_2c_2 - m_2c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2}.$$

Tuto rovnici můžeme upravit na tvar odvozený Dr. Šindelářem:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1c_1 + m_2c_2 - m_2(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \\ v_1 &= \frac{2m_1c_1 + 2m_2c_2}{m_1 + m_2} - c_2 = \frac{2m_1c_1 + 2m_2c_2 - m_1c_2 - m_2c_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1c_1 + m_2c_2 - m_1(c_2 - c_1)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

11. Jaká je celková kinetická energie plného válcového kotouče ze dřeva, valícího se po vodorovné rovině rychlostí $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? Průměr kotouče je $d = 0,5 \text{ m}$, tloušťka $l = 0,1 \text{ m}$, hustota $\rho = 5 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaký je poměr kinetických energií translačního (posuvného) a rotačního pohybu? Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k rotační ose je $J = \frac{1}{8} md^2$, kde m značí jeho hmotu.

Václav Šindelář

Řešil Fiala Břetislav, učeň ZUŠ Tesla Pardubice, závod MIKA:

Energie pohybu posuvného je $W_{\text{transl.}} = \frac{1}{2} mv^2$. Daná rychlost v (posuvná) se při valení rovná obvodové rychlosti na poloměru $r = \frac{d}{2}$. Pak energie pohybu rotačního je

$$W_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot J = \frac{1}{8} md^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{8} m4r^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} mv^2.$$

Poměr kinetických energií

$$\frac{W_{\text{transl.}}}{W_{\text{rot.}}} = \frac{\frac{1}{2} mv^2}{\frac{1}{4} mv^2} = 2.$$

Celková kinetická energie W_c je dána součtem obou energií

$$W_c = W_{\text{transl.}} + W_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{4} mv^2 = \frac{3}{4} mv^2$$

$$W_c = \frac{3}{4} mv^2 = \frac{3}{4} \pi \frac{d^2}{4} l \cdot \rho v^2 = \frac{3}{16} \pi \rho \cdot ld^2 v^2 [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2}]$$

$$W_c = \frac{3}{16} \pi \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 0,1 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2 = \frac{150}{16} \pi \doteq 29,45 [J].$$

17. Jsou dány dva různé body M, N a dvě mimoběžky a, b , z nichž žádná neprochází body M, N . Sestrojte různoběžné a k sobě kolmé přímky m, n tak, aby m procházela bodem M a protínala přímku a a aby n procházela bodem N a protínala přímku b .

Stanislav Horák

Řešila Marie Melicharová, 11d, JŠŠ J. K. Tyla v Hradci Králové:

Bod M a přímka a určují rovinu ρ . V této rovině musí ležet přímka m . Podobně bod N a přímka b určují rovinu σ a v ní musí ležet přímka n . Průsečík R přímek m, n je pak na průsečnici rovin ρ, σ . Poněvadž $m \perp n$, leží bod R také na kulové ploše opsané nad průměrem MN . Tato kulová plocha je totiž geometrické místo průsečíků kolmých různoběžek, z nichž jedna prochází bodem M a druhá bodem N . Hledané přímky pak procházejí bodem R . Z této úvahy potom plyne řešení: Sestrojíme průsečnici rovin ρ, σ a pak sestrojíme průsečíky této průsečnice s kulovou plochou nad průměrem MN .

D i s k u s e. Jestliže žádný z bodů M, N není na průsečnici r rovin ρ, σ , má úloha dvě různá řešení, když ρ, σ jsou různoběžné a současně jejich průsečnice má s kulovou plochou společné dva různé body.

Úloha má jediné řešení, jestliže roviny ρ, σ jsou různoběžné a jejich průsečnice r je tečnou kulové plochy.

Úloha nemá žádné řešení, jestliže roviny ρ, σ jsou různoběžné a jejich průsečnice nemá s kulovou plochou žádný společný bod nebo jestliže roviny ρ, σ jsou rovnoběžné.

Předpokládejme dále, že body M, N jsou na průsečnici r . Potom a) jestliže $a \perp r$, nebo $b \perp r$ neexistuje žádné řešení. b) Jestliže žádný z těchto případů nenastane, pak úloha má dvě různá řešení, při čemž jedna z přímek m, n splyne s r .

18. Jaká je hustota platino-iridiové slitiny, z níž je zhotovena kopie mezinárodního prototypu hmoty (vážíci 0,999 999 98 kg), má-li prototyp tvar válce s průměrem $d = 39$ mm a výškou $h = 39$ mm? Určete též hmotová a objemová procenta obou kovů ve slitině! Hustoty obou kovů volte:

$$\rho_{\text{Pt}} = \rho_1 = 21,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\rho_{\text{Ir}} = \rho_2 = 22,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Václav Šindelář

Řešení autorovo:

Hustota platino-iridiové tyče etalonového válce je

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1}{4,659 \cdot 10^{-5}} \doteq 21,464 \cdot 10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}],$$

$$\text{kde } V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = 46,5893 [\text{cm}^3] \doteq 4,659 \cdot 10^{-5} [\text{m}^3].$$

Pro další část úlohy určíme nejprve hmoty obou složek v prototypu ze vztahu

$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{M - m_1}{\rho_2},$$

z čehož

$$m_1 = \frac{V\rho_1\rho_2 - M\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{4,659 \cdot 10^{-5} \cdot 21,4 \cdot 10^3 \cdot 22,4 \cdot 10^3 - 1 \cdot 21,4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} =$$

= 0,935 2 kg. To je hmota platiny; hmota iridia bude pak

$$m_2 = M - m_1 = 0,0648 \text{ [kg]} = 6,48 \cdot 10^{-2} \text{ [kg]}$$

Hmotová procenta obou kovů ve slitině jsou

$$\text{pro Pt} \quad \frac{m_1}{M} = 93,52 \% , \quad \text{pro Ir} : \frac{m_2}{M} = 6,48 \%$$

Dále určíme objemy obou složek:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{93,52 \cdot 10^{-2}}{21,4 \cdot 10^3} = 4,370 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]},$$

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{6,48 \cdot 10^{-2}}{22,4 \cdot 10^3} = 0,289 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^3\text{]}$$

Objemová procenta obou kovů ve slitině jsou

$$\text{pro Pt} \quad \frac{V_1}{V} = 93,79 \% , \quad \text{pro Ir} \quad \frac{V_2}{V} = 6,21 \%$$

20. Jsou dány dvě rovnoběžky a, b ($a \not\parallel b$) a přímka q s nimi mimoběžná. Na přímce q najděte bod Q té vlastnosti, že roviny Qa, Qb jsou navzájem kolmé.

Stanislav Horák

Řešil Jan Zvánovec, 10b, 15. JŠŠ v Praze 12:

Roviny Qa, Qb se protínají v přímce p . Poněvadž tyto dvě roviny jsou navzájem kolmé, leží průsečnice p na rotační válcové ploše, na níž přímky a, b jsou diametrálně protilehlé (tj. souměrně sdružené podle osy válcové plochy). Tato rotační válcová plocha je geometrickým místem průsečnic rovin vzájemně kolmých, z nichž jedna prochází přímkou a a druhá přímkou b . Bod Q je pak průsečík přímky q s touto rotační válcovou plochou.

Jestliže přímka q má s válcovou plochou společné dva různé body, má úloha dvě různá řešení (dva páry rovin k sobě kolmých); jestliže přímka q má s válcovou plochou jediný společný bod, má úloha jediné řešení. Jestliže posléze přímka q nemá s válcovou plochou žádný společný bod, nemá úloha žádné řešení.

22. Nákladní auto, jehož hmota i s nákladem je 9 tun, jede rychlostí 30 [km/hod] po silnici, jejíž stoupání je 4 %. Určete výkon motoru zanedbávající tření a odpor prostředí. (Výkon udejte v [kW] a [k]!)

Evžen Říman

Řešil Peter Preisler, XIa, JSS v Trenčíně:

Stúpanie v procentách je stonásobok pomeru výškového rozdielu k vodorovnej vzdialenosti. Keď označíme úhel stúpania α , je $\operatorname{tg} \alpha = 0,04$. Pre malé úhly platí $\operatorname{tg} \alpha \doteq \operatorname{arc} \alpha \doteq \sin \alpha$.

Váha nákladného auta $G = mg$ sa rozkladá na naklonenej rovine na dve zložky a motor auta premáha z nich zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou, čiže

$$F_1 = G \sin \alpha = mg \sin \alpha .$$

Hľadaný výkon je součin síly F_1 a rychlosti v , čiže

$$P = F_1 \cdot v = mgv \sin \alpha .$$

Ak dosadíme (súst. MKSA) $m = 9\,000$ [kg], $v = 30 \left[\frac{\text{km}}{\text{hod}} \right] = \frac{25}{3} [\text{ms}^{-1}]$ obdržíme hľadaný výkon

$$\begin{aligned} P &= 9 \cdot 10^3 [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{ms}^{-2}] \cdot \frac{25}{3} [\text{ms}^{-1}] \cdot 0,04 = 29420 [\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}] = \\ &= 29,4 [\text{kW}] = 40 [\text{k}], \text{ pretože } 1 [\text{k}] = 735,5 [\text{W}] . \end{aligned}$$

25. V řadě $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ je součet s_n prvních n členů dán vzorcem $s_n = 6 - na_n$. Dokažte:

$$\text{a) } s_n = \frac{6n}{n+1} ; \quad \text{b) } a_n = \frac{6}{n(n+1)} ; \quad \text{c) } (n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} .$$

Stanislav Horák

Řešili Bohuslav Diviš, abs. 18. JSS v Praze 14 a Petr Tomšů, PSS v Kopřivnici: Poněvadž

$$s_n = 6 - na_n ,$$

musí podle tohoto vzorce být

$$a_1 = 6 - a_1 ,$$

$$a_1 + a_2 = 6 - 2a_2 ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6 - 3a_3 ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 6 - na_n .$$

Sečtením všech těchto n rovnic obdržíme

$$na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \dots + a_n = 6n - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \dots - na_n .$$

Po úpravě dostaneme

$$(n+1)(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = 6n$$

a odtud

$$s_n = \frac{6n}{n+1} .$$

b) Dosadíme-li právě vypočtenou hodnotu do vztahu $s_n = 6 - na_n$, obdržíme po kratší úpravě

$$a_n = \frac{6}{n(n+1)}.$$

c) Vzhledem k danému platí

$$s_1 = a_1 = 6 - a_1$$

a z toho $a_1 = 3$. Podle daného platí

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 6 - na_n$$

a z toho

$$a_n(n+1) = 6 - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) = 6 - s_{n-1}.$$

Ale

$$s_{n-1} = 6 - (n-1)a_{n-1}$$

a po dosazení do předešlého obdržíme po kratší úpravě

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1},$$

což bylo dokázat.

26. Vypočtete:

a) Jakou úhlovou rychlost ω (v radiánech) má elektromotor, změříme-li otáčkoměrem na jeho hřídeli, že počet otáček za minutu je $n = 1400 \text{ min}^{-1}$.

b) Jaké otáčky n a jakou úhlovou rychlost ω mají kola vozidla, pohybujícího se rychlostí $v = 80 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$. Průměr kol je $d = 60 \text{ cm}$.

c) Jaká je úhlová rychlost naší Země jednak kolem vlastní osy, jednak kolem Slunce, pokládáme-li oběžnou dráhu Země za kruhovou? Skutečná oběžná dráha je eliptická, od kruhové se však jen málo liší.

Václav Šindelář

Řešil Zdeněk Kestřánek, abs. JSS v Kamenici nad Lipou:

a) Úhlovou rychlost ω vypočítáme ze vztahu

$$\omega = 2\pi f [\text{radián} \cdot \text{s}^{-1}], \text{ kde}$$

f je počet otáček (frekvence) za vteřinu.

Číselný výpočet:

$$\omega = 2\pi f = \frac{6,28 \cdot 1400}{60} \doteq 6,28 \cdot 23,33 \doteq 146,5 [\text{radián} \cdot \text{s}^{-1}].$$

Úhlová rychlost elektromotoru je $146,5 [\text{radián} \cdot \text{s}^{-1}]$.

b) Za 1 [hod] ujede vozidlo vzdálenost $s = 80 [\text{km}]$. Počet otáček při rovnoměrném pohybu stanovíme tak, že vypočítáme, kolikrát je obvod kola $o = \pi d [\text{m}]$ v této vzdálenosti s obsažen.

Úhlovou rychlost vypočteme opět ze vzorce

$$\omega = 2\pi f \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}, \text{ kde}$$

f je počet otáček (frekvence) za vteřinu.

$$\begin{aligned} \text{Číselný výpočet: } n &\doteq \frac{80\,000}{3,14 \cdot 0,6} \text{ [otáček} \cdot \text{hod}^{-1}\text{]} \doteq 42\,462 \text{ [otáček} \cdot \text{hod}^{-1}\text{]} \doteq \\ &\doteq 707,7 \text{ [otáček} \cdot \text{min}^{-1}\text{]} \doteq 11,8 \text{ [otáček} \cdot \text{s}^{-1}\text{]} \doteq 74,1 \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}. \end{aligned}$$

Kola vozidla se otočí za vteřinu asi 12krát. Úhlová rychlost kol je asi 74,1 [radián · s⁻¹].

c) Výpočet úhlové rychlosti Země kolem vlastní osy:

Určíme ji ze vzorce

$$\omega = 2\pi f,$$

kde $f = \frac{1}{T}$ (T je doba otočení).

Tedy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}.$$

$$\text{Číselný výpočet: } \omega = \frac{6,28}{86\,164} \doteq 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}.$$

Přitom bereme za dobu otočení o plných 360° hvězdný den, který je roven 86 164,09 sekund středního slunečního času (pozn. autora).

Úhlová rychlost naší Země kolem vlastní osy je asi $7,29 \cdot 10^{-5}$ [radián · s⁻¹].
Výpočet úhlové rychlosti oběhu Země kolem Slunce:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}.$$

$$\begin{aligned} \text{Číselný výpočet: } T &= 365 \text{ d} + 5 \text{ h} + 48 \text{ min} + 46 \text{ s} + 20 \text{ min} \doteq 31\,558\,149,5 \text{ [s];} \\ \omega &\doteq 1,990\,98 \cdot 10^{-7} \text{ [radián} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}. \end{aligned}$$

Za dobu otočení Země kolem Slunce bereme hvězdný rok, který je o 20 minut středního slunečního času delší než rok tropický, rovný 365 dní 5 hodin 48 minut a 45,82 sekund (stř. slun. času - pozn. autora).

Úhlová rychlost naší Země kolem Slunce je asi $1,99098 \cdot 10^{-7}$ [radián · s⁻¹].

★ ★ ★

Řešení zbývajících úloh uveřejní redakce v lednovém čísle ročníku 1960 spolu s úplným seznamem řešitelů.

Upozorňujeme znovu, že řešení úloh z 38. ročníku (1959/60) je třeba zaslat nejpozději do 29. února 1960 na adresu výkonného redaktora: Doc. Ota S e t z e r, Praha 6, Žikova 4.

Udělení cen

Přihlížejíc k jakosti i počtu správně rozřešených příkladů z 37. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních (1959), rozhodla se redakce udělit knižní odměny těmto řešitelům:

Za matematiku a deskriptivní geometrii:

- V I. pořadí: Marii Melicharové, 11.d JSS J. K. Tyla v Hradci Králové,
Zdeňku Kestřánkovi, 11. JSS v Kamenici nad Lipou a
Bohuslavu Divišovi, 11.c JSS v Praze-Michli.
- V II. pořadí: Petru Tomšů, 3.b PŠ v Kopřivnici,
Daniele Hýblové, 11.b JSS v Olomouci a
Břetislavu Fialovi, ZUŠ Tesla v Pardubicích.

Za fyziku:

- V I. pořadí: Petru Tomšů, 3.b PŠ v Kopřivnici,
Janu Zvánovcovi, 10.b JSS v Praze 12 a
Daniele Hýblové, 11.b JSS v Olomouci.
- V II. pořadí: Marii Melicharové, 11.d JSS J. K. Tyla v Hradci Králové,
Zdeňku Kestřánkovi, 11. JSS v Kamenici nad Lipou a
Josefu Procházkovi, 11.b JSS v Rychnově nad Kněžnou.

Obzvláště cenný je úspěch Jana Zvánovce, žáka desáté třídy. Knižní ceny budou odměněným řešitelům zaslány poštou.

Různé

Josef Kotyk, JSS, Pardubice:

James Prescott Joule

(Dokončení)

Slyšeli jsme již, jak Joule, původně sládek, vstoupil do dějin vědy jako jeden ze zakladatelů¹⁾ novodobé teorie tepla. Podle této teorie je teplo kinetickou (pohybovou) energií molekul látky, která je nositelkou tepelných úkazů. Nazýváme ji proto také kinetickou neboli mechanickou teorií tepla. V této stati pojednám o tom, jak ji Joule propracoval a roku 1851 použil ji zejména pro plyny.²⁾

III. Kinetická teorie plynů

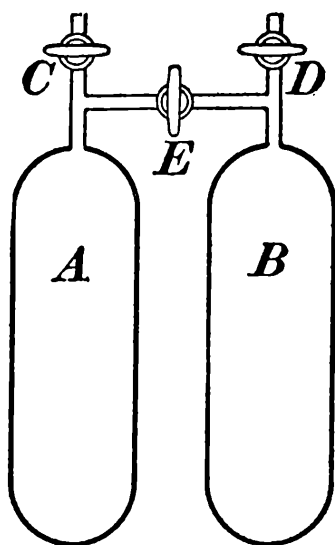
Nechť je dána hmotná soustava, na níž lze pozorovat změnu teploty, tlaku, objemu, případně i jiných veličin. Její stav se tedy mění. Působí-li na ni např.

¹⁾ První, kdo vystoupil s pochybnostmi o správnosti fluidové teorie tepla, byl geniální ruský fyzik a chemik Michail Vasiljevič Lomonosov (1711–1765), jenž podal již roku 1748 první (ač ještě neúplnou) formulaci principu o zachování energie.

²⁾ K podrobnějšímu studiu doporučuji čtenářům spisek prof. dr. Frant. Závisky „Kinetická theorie plynů“.

jen zemská tíže (obecněji síly zv. konzervativní), součet kinetické a potenciální energie se nemění. Působí-li na ni ještě např. tření (obecněji síly zv. nekonzervativní), je úbytek součtu obou energií roven práci, kterou soustava proti nim vykoná. V termodynamice se vliv konzervativních sil zpravidla zanedbává. Energie soustavy závisí pak jen na veličinách, které nejsou v žádném vztahu k jejímu okolí. Zdůrazňujeme-li, že závisí jen na jejím vnitřním stavu a na venek nebývá na první pohled patrná, nazýváme ji **vnitřní energií soustavy**.

Když **Joule** studoval vnitřní energii plynu, vyšetřoval její závislost na základních stavových veličinách (objemu, teplotě a napětí) plynu. Dokázal, že vnitřní energie dokonalého³⁾ plynu závisí toliko na jeho teplotě. Uspořádání klasického⁴⁾ pokusu **Jouleova** znázorňuje obr. 2.



Obr. 2

Dvě nádoby *A*, *B*, uzavřené kohoutky *C*, *D*, jsou spojeny trubicí s kohoutkem *E*, který je rovněž uzavřen. V nádobě *A* je silně stlačený plyn určitého napětí a určité teploty, v nádobě *B* je vakuum. Přístroj je ponořen do kalorimetru s vodou. Když se teploty vyrovnaly, byl otevřen kohoutek *E* a plyn počal proudit z *A* do *B*. Rozepjal se na větší objem a jeho napětí se snížilo. Teplota se v nádobě *A* klesala, v *B* stoupala, až nastala rovnováha a rozdíly teplot se zase vyrovnaly. Zároveň se ukázalo, že se nezměnila teplota plynu v obou nádobách, ani teplota vody v kalorimetru.⁵⁾ Z toho plyne, že soustava složená z nádob *A*, *B* a z plynu,

nepřijala ani nevydala žádné teplo. Nevykonala však ani žádnou vnější práci, poněvadž stěny nádob se nepohnuly. Vnitřní energie soustavy se proto nezměnila. Joule shledal, že pouhá změna objemu plynu nemá vliv na jeho vnitřní energii.

Vnitřní energie plynu nezávisí na jeho objemu, ani na jeho napětí, nýbrž jen na teplotě plynu.

Podle představ kinetické teorie plynů je vnitřní energie plynu ve skutečnosti kinetickou energií jeho molekul, která je přímo úměrná absolutní teplotě plynu. Vnitřní energie plynu je proto rovněž přímo úměrná absolutní teplotě plynu.

Společně s **W. Thomsonem**⁶⁾ vypracoval Joule v letech 1852 až 1862 me-

³⁾ Dokonalé, neboli ideální plyny jsou velmi vzdáleny stavu, v němž začínají kapalnět. Přesně řečeno: Dokonalých plynů ve skutečnosti není. Běží toliko o aproximaci vlastností plynů skutečných.

⁴⁾ Málo je známo, že jej provedl také již **G a y - L u s s a c** (1778—1850), autor známých zákonů pro roztažnost a rozpínavost plynů.

⁵⁾ Viz Poznámky, a).

⁶⁾ Jouleův efekt bývá proto někdy nazýván také obšírněji zjevem **Joule-Thomsonovým**. Viz též článek „K 50. výročí úmrtí Williama Thomsona“ v Rozhledech 1958, čís. 6, str. 287 a 288.

to du k zjištění termodynamických rozdílů skutečných plynů a plynů dokonalých. Ustálený proud plynu nechal procházet trubicí, která byla na jednom místě ucpána pórovitou zátkou. Touto překážkou byl proud plynu škrcen. Těsně před ní i za ní bylo proudění složité (na tomto místě se jím nemůžeme zabývat), ve vzdálenostech poněkud větších byl však pohyb molekul plynu pravidelný. Dokonalý plyn projde škrticím zařízením beze změny teploty; skutečné plyny se chovají však jinak. Při průchodu zátkou tlak plynu klesne, plyn se rozpíná a mění také svou teplotu. Je-li trubice v místě, kde je proud plynu škrcen, i v jeho blízkosti tepelně izolována, nemá soustava se svým okolím žádného styku, takže teplo ani nepřijímá ani nevydává.⁷⁾ Tepelný obsah plynu se tedy škrcením plynu nemění.⁸⁾ Plyn koná v tom případě práci jen na útraty své vnitřní energie. J o u l e shledal, že teploty skutečných plynů se škrcením změny a měřil rozdíl teplot plynu před překážkou a za ní. Konstatoval a měřil ochlazení u vzduchu, kyslíku, dusíku, kysličníku uhličitého a jiných plynů. Pro tlaky nepřiliš vysoké našel, že pokles teploty je úměrný poklesu tlaku. Pomocí tohoto tzv. J o u l e o v a e f e k t u (zjevu) můžeme velikým rozdílem tlaků dosáhnout velmi značného snížení teploty. Jestliže např. vzduch teploty $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ je škrcen tak, že jeho tlak klesne s 200 atm na 1 atm, klesne jeho teplota na $-44,6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kdyby původní teplota vzduchu činila $-90\text{ }^{\circ}\text{C}$, klesne na $-189\text{ }^{\circ}\text{C}$. Při teplotě $-193\text{ }^{\circ}\text{C}$ a za tlaku 1 atm mění vzduch své skupenství a kapalní. Jouleův efekt nabyl proto velikého významu, když Linde⁹⁾ na něm založil zvláštní metodu ke zkapalňování plynů.

Poznámky: a) P o z n á m k a k J o u l e o v u p o k u s u (obr. 2). Jestliže se plyn adiabaticky rozpíná do vakua, jeho vnitřní energie se nemění, objem plynu však vzrůstá a jeho teplota musí proto klesat. Tato změna se nedala zjistit metodou, které používal Joule, neboť tepelná kapacita vzduchu byla při jeho pokusu vzhledem k tepelné kapacitě vody a kalorimetru tak malá, že snížení teploty soustavy spadalo do mezí pozorovacích chyb.

b) P o z n á m k a k J o u l e o v u e f e k t u. Při Jouleově pokusu (obr. 2) je vnější práce plynu vždy rovna nule. Při škrcení plynu překážkou je tomu jinak. Mysleme si po obou stranách překážky v místech, kde proudění plynu již není rušeno, písty, které se pohybují s plynem. Úhrnná práce plynem vykonaná může být kladná nebo záporná. Plyn se může škrcením ochlazovat, avšak i oteplovat.

Teplotu, při níž Jouleův efekt vymizí, nazýváme i n v e r z n í t e p l o t o u plynu. Inverzní teplota vzduchu leží mezi $300\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $400\text{ }^{\circ}\text{C}$. Inverzní teploty některých plynů jsou však velmi nízké, např. $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro vodík, ještě nižší pro helium apod. Je-li počáteční teplota plynu nižší než jeho teplota

⁷⁾ Běží o děj zv. a d i a b a t i c k ý (řec. a = ne, diabaino = procházím), a to po stránce vylíčených okolností s t a c i o n á r n í.

⁸⁾ Toto tvrzení lze dokázat za předpokladu, že zanedbáme kinetickou energii proudícího plynu. K její změně tedy rovněž nepřihlížíme. Do jaké míry je tento předpoklad oprávněn, ověřil J o u l e pro rychlost proudění 2,5 m/s. Pro korekci teploty dostal hodnotu jen $0,003^{\circ}$. Poněvadž měříme rozdíl teplot po obou stranách překážky, je vliv kinetické energie na výsledky měření ve skutečnosti ještě menší.

⁹⁾ K a r l v o n L i n d e, profesor techniky v Mnichově, sestrojil roku 1895 přístroj, jímž lze provádět zkapalňování vzduchu ve velkém množství.

inverzní, plyn se škrcením ochlazuje; jestliže jeho teplota je vyšší než inverzní, jeví se Jouleův efekt oteplením plynu. Toto oteplení Joule vskutku konstatoval u vodíku. Stejně se chová helium, neón a jiné plyny; i ty lze však škrcením ochladit, je-li jen jejich počáteční teplota dostatečně nízká.

Kinetická teorie plynů vykládá Jouleův efekt tím, že se spotřebuje nebo získá vnitřní energie při překonávání přitažlivých sil mezi molekulami plynu.

Cvičení:

1. Vnitřní energie plynu má hodnotu poměrně velikou. Vyložte, proč!
2. Vnitřní energie plynu závisí pouze na jeho okamžitém stavu, nikoli na jeho minulosti, nebo na tom, jak se plyn do přítomného stavu dostal. Vysvětlete!

Josef Novák, asistent ČVUT, Praha:

Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době

Každý z nás jistě sledoval s velikým zájmem četná dobrodružství, která prožíval pan Matěj Brouček při svém výletu do 15. století. Všichni jsme se obdivovali tomu, jak mistrně dovedl Svatopluk Čech svým barvitým vyprávěním přiblížit nám tehdejší revoluční dobu. Možná, že nás podnítil i k různým otázkám o práci našich předků ve vědních oborech, zvláště pak v matematice a o jejím rozsahu a úrovni vzhledem k ostatnímu světu.

Udělejme si v dalších řádcích malý výlet do oněch dob a podívejme se na matematiku u nás před více než 500 lety. Povězme si o Křišťanovi z Prachatic, jednom z prvních a nejzasloužilejších učitelů matematiky na universitě v Praze, jehož práce nám dá nejlepší odpověď na mnohé otázky.

| Křišťan se narodil v Prachaticích asi v roce 1368. Studoval na universitě v Praze a jako dvacetiletý se stal bakalářem čili kandidátem mistrovství.

Bakalářství bylo tehdy prvním stupněm akademické hodnosti a bylo uděleno po složení přísných zkoušek. K bakalářské zkoušce mohl být zapsán jen ten, kdo vyhověl stanoveným podmínkám. Musil se představit fakultě a prokázat, že je dobrých mravů, že odposlouchal předepsané přednášky a mistrům za ně zaplatil příslušné poplatky. Zkoušky se konaly za předsednictví děkana fakulty, zkoušejícími byli čtyři mistři.

O rok později složil Křišťan zkoušku mistrovskou a stal se mistrem svobodných umění.

| Tato hodnost, udělovaná na fakultě svobodných umění a na fakultě teologické, byla rovnocenná hodnosti doktorské, která byla udělována na fakultě právnické a lékařské. Mistr mohl na universitě přednášet, byl však přijat za profesora fakulty zpravidla teprve za několik let.

| Křišťan byl již v roce 1392 profesorem svobodných umění a v následujících letech zastával řadu významných akademických funkcí. Byl dvakrát děkanem fakulty svobodných umění a dvakrát rektorem university.

V tehdejších náboženských sporech stál Křišťan jasně na straně Husově, ať jako kazatel, nebo později jako farář. Byl upřímným přítelem Husovým a pokud je

známo, rozuměl mu nejlépe ze všech jeho přívrženců. Zůstal s ním ve styku i v dobách, kdy byl Hus vypovězen z Prahy. Když byla z nařízení arcibiskupství v pražských kostelích vyhlášována klatba na Husa, odepřel Křišťan ve svém kostele tak učinit. Toto veřejné vystoupení na Husovu podporu bylo jednou z příčin, že byl Křišťan zvolen mistry své fakulty rektorem university, přes odpor fakulty teologické. To se psal rok 1412.

Opravdovost přátelství, které pojilo Křišťana s Husem, dosvědčuje i to, že Křišťan neváhal navštívit v Kostnici svého uvězněného přítele. Svou návštěvou způsobil Husovi velikou radost. Sám však byl zajat a propuštěn až na Zikmundovu přimluvu.

Po smrti Husově se Křišťan změnil. Nastoupil konzervativní směr a stal se odpůrcem rostoucího radikalismu v Praze. V této souvislosti byl i dvakrát vypovězen z Prahy, podruhé v roce 1427 a to na dva roky.

Po svém návratu do Prahy nabyl zase vlivu a v roce 1433 byl znovu zvolen rektorem. V době jednání s basilejským poselstvem o smír s církví, přistoupil Křišťan spolu s několika mistry na kompaktáta, ačkoliv byla krátce předtím na sněmu zamítnuta. Tato skupina mistrů se však vyslovila pro kompaktáta nejen za sebe, ale za celou universitu, přes nesouhlas mistrů stojících na straně Rokycanově. Tak se stalo, že universita přistoupila na kompaktáta již v roce 1434, tedy dva roky před jejich všeobecným uznáním. Snad se Křišťan domníval, že jeho rozhodnutí prospěje universitě, jejíž působení v těchto bouřlivých dobách bylo velmi omezené. Nebylo klidu ani času na bádání a učitelskou činnost, a to mělo nutně nepříznivý vliv i na učení matematickým vědám na universitě.

V roce 1437 Křišťan z Prachatic zemřel.

O Křišťanovi se tvrdí, že měl neobyčejné vědomosti a že byl tehdy jedním z nejučenějších mužů v Čechách. Byl nejen výtečným matematikem a hvězdářem, ale i lékařem a teologem. Zabýval se rovněž astrologií, jak bývalo tehdy zvykem a proslul prý i v tomto směru. Mnoho význačných osobností domácích i cizích se ho dotazovalo a žádalo o radu. Dokonce prý v roce 1433 předpovídal brzkou smrt polskému králi Vladislavovi, který v následujícím roce skutečně zemřel.

Křišťan z Prachatic byl pilným spisovatelem, zabývajícím se řadou oborů. Zachovaly se jeho práce z matematiky, astronomie a medicíny. Nás bude zvláště zajímat jeho matematický spis *Algorithmus prosaicus*, který byl napsán kolem roku 1400. Budeme se jím později zabývat podrobněji.

Podívejme se nyní na přednášky z matematických věd, které se konaly na fakultě svobodných umění. Přednášela se aritmetika podle Sacroboscova¹⁾ spisu, který byl psán latinsky a ve verších (pro snadnější zapamatování početních pravidel). Z geometrie byla přednášena planimetrie podle prvních šesti knih Euklidových, dále Sacroboscovo pojednání o kouli a konečně spis neznámého autora o základech sférické trigonometrie. Uvedené poslední dva spisy byly jakousi přípravou k astronomii.

Doba, po kterou se mělo z těchto spisů přednášet, byla přesně stanovena, stejně tak jako poplatky, které musil student za tyto přednášky zaplatit. Tak např. arit-

¹⁾ Jan de Sacrobosco, anglický hvězdář a matematik, přednášel v Paříži. Zemřel roku 1256.

metika se přednášela 3 týdny a stála něco přes půl pražského groše. Přednášky z Euklidových knih byly vymezeny na půl roku a student za ně musil zaplatit 8 grošů.

Jaké požadavky z matematiky byly kladeny na bakaláře a mistry? Hodnosti bakaláře svobodných umění mohl nabýt jen ten, kdo složil zkoušku z aritmetiky a z pojednání o kouli. Mistr pak musil znát zbývající přednášenou látku z matematiky.

Matematické učení mělo u nás dobrou úroveň již před založením pražské university. Také zde se dostávalo od počátku matematickým vědám značné péče, takže srovnání obsahu přednášek na jiných universitách koncem 14. století bylo pro naši universitu velmi příznivé. Vždyť se mohla nejméně rovnat vyspělé pařížské Sorbonně a předčila např. universitu v Kolíně n. R., kde se konaly přednášky jen ze 3 Euklidových knih, na rozdíl od 6 knih v Praze. Dobře nám dokresluje tento stav také ta skutečnost, že tehdejší úroveň naší university bylo dosaženo v Lipsku až na začátku 16. století.

Chceme-li si učinit představu o obsahu přednášek z aritmetiky v té době, bude nejlépe, jestliže se podíváme na obsah uvedeného Křišťanova latinského spisu *Algorithmus prosaicus*. Nejdříve si však vysvětleme tajemný název spisu.

Na rozdíl od Sacroboscova díla je Křišťanův spis psán v próze a autor se o tom zmiňuje již v titulu. Spis pojednává o základních početních výkonech podle indických metod, spočívajících na desítkové poziční soustavě. Tato soustava vybudovaná Indy znamenala ohromný pokrok v matematice, neboť umožnila jednoduché napsání libovolně velikého čísla pomocí deseti číslic. Zmíněné indické metodě se dostalo názvu *algorithmus*, který zůstal zachován až do dnešní doby, i když v poněkud rozšířeném smyslu.²⁾ Název *algorithmus* se odvozuje od polatinštělého jména arabského matematika Al-Chováresmího († 840). Ten napsal učebnici o počítání indickými metodami, s kterou se pak Evropa seznámila v latinských překladech. Stoupenci těchto nově pronikajících metod se nazývali *algoritmikové*; *abacisté* byli přívrženci počítání na počítadle, zvaném *abakus*, jež se stalo podkladem jejich počtářského umění. Počítání na abaku se ve zdokonalené formě udrželo v některých početnicích až do 16. století a bylo nazýváno počítání *na línách*. U nás se vyskytuje také v nejstarší české početnici Ondřeje Klatovského, vydané roku 1530.

(Pokračování.)

Jiří Votava, studující, Praha:

Matematická olympiáda v Rumunsku

Letos poprvé se konala Mezinárodní matematická olympiáda, na níž byly srovnány výsledky, jichž bylo dosaženo při různých národ-

²⁾ Algoritmem nazýváme nyní každé složitější početní pravidlo.

ních olympiádách. Popud k této akci dal výbor rumunské olympiády. Proto se tato soutěž konala v překrásném rumunském městě Stalin. Sjeli se tam 17 a 18letí matematici ze sedmi zemí tábora míru. V čele československé delegace byl jednatel naší olympiády s. Zelinka a osm členů bylo vybráno z vítězů III. kola letošního osmého ročníku naší olympiády.

Do Rumunska jsme odletěli 21. července. Přijely také delegace SSSR, Polska, Bulharska, Rumunska, Maďarska, NDR. Všechny delegace měly po osmi delegátech, jen Sovětský svaz 4. Delegáti byli vítězi národních olympiád svých zemí. Pouze v Bulharsku a NDR, kde se dosud olympiáda nekonala, byli účastníci vybráni jinými způsoby. V SSSR se nekoná olympiáda v celostátním měřítku, nýbrž je v různých městech samostatná, např. v Moskvě, v Leningradu, v Ordžonikidze a jinde. Do Rumunska byla vyslána delegace z Moskvy.

Vlastní řešení, jehož se účastnilo 52 olympioniků (z toho šest děvčat), začalo v pátek 24. července. Po úvodním proslovu byly rozdány obálky, obsahující tři společné příklady z algebry a trigonometrie v jazyce každého účastníka:

1. Dokažte, že zlomek $\frac{21n + 4}{14n + 3}$, v němž n je přirozené číslo, nelze zkrátit.

(Zadalo Polsko.)

2. Pro která reálná čísla x platí:

$$a) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2},$$

$$b) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1,$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2.$$

Přitom odmocnina má mít smysl jen pro nezáporné číslo. (Zadalo Rumunsko.)

3. Pro číslo x platí rovnice $a \cdot \cos x + b \cos x + c = 0$, kde a, b, c jsou daná reálná čísla. Napište rovnici druhého stupně, kterou splňuje příslušné číslo $\cos 2x$. Výsledek výpočtu užitě na příkladě, kde $a = 4, b = 2, c = -1$. (Zadalo Maďarsko.)

Příštího dne byly rozdány obálky s příklady z geometrie:

1. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána jeho přepona $c = AB$, přičemž víme, že těžnice příslušná k přeponě je rovna střední geometrické úměrné obou odvěsen. (Zadalo Maďarsko.)

2. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř úsečky je dán pohyblivý bod M ; nad úsečkami AM a BM jako stranami sestrojíme dva čtverce $AMCD, BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině vytyčené přímkou AB . Těmto čtvercům opišme kružnice; ty se vedle bodu M protínají ještě v dalším bodu N .

a) Dokažte, že přímky AE, BC procházejí bodem N .

b) Dokažte, že přímka MN prochází určitým pevným bodem.

c) Vyšetřete geometrické místo středů úseček, které spojují středy obou čtverců. (Zadalo Rumunsko.)

3. Jsou dány dvě různoběžné roviny P, Q o průsečnici p ; v rovině P je dán bod A a v rovině Q je dán bod C , přičemž žádný z bodů A, C neleží na přímce p .

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$), jemuž lze kružnici vepsat, a to takový, aby bod B ležel v rovině P a bod D v rovině Q . (Zadalo ČSR.)

První den dopadl pro nás velmi dobře, neboť polovina účastníků získala plný počet bodů, tj. 20 (za první příklad bylo maximálně 5 bodů, za druhý 8, za třetí 7 bodů každý den); průměrně jsme získali 16,5 bodu. Druhý den jsme se však velmi pohoršili; zvláště druhý a třetí příklad vyřešili jen někteří a tak jsme dosáhli průměrně 8,5 bodu. Je ironií osudu, že třetí geometrický příklad, jenž byl jediný ze soutěžních příkladů navržen vedoucím naší delegace, vyřešili pouze dva českoslovenští olympionici.

Slavnostní zakončení olympiády, vyhlášení vítězů a předání cen bylo v úterý 28. 7. v Bukurešti. Byly uděleny 3 první ceny, 3 druhé ceny, 5 třetích cen a 10 čestných uznání. Dosáhli jsme velikého úspěchu proto, že Diviš se stal absolutním vítězem olympiády (získal plný počet bodů). Kromě našeho Divíše a jednoho účastníka z SSSR, který získal 3. cenu, dostali další 1. až 3. ceny Rumuni a Maďari. My jsme obdrželi ještě čtyři čestná uznání. Diviš před celým shromážděním promluvil jménem všech účastníků olympiády. Kromě toho hovořil také do rumunského rozhlasu.

Umístění jednotlivých delegací v soutěži lze vyjádřit body, které získaly (SSSR měl jen 4 delegáty, je proto počítán dvojnásobek):

Rumunsko	Maďarsko	SSSR	ČSR	Bulharsko	Polsko	NDR
249	233	222	192	131	119	40

Nelze popisovat všechno, co jsme v Rumunsku viděli a jak jsme tam žili. Zmíním se jen o tom, že nás Rumuni přijali přátelsky, že se nejen pořadatelé, ale i členové rumunské delegace ujali úkolů hostitele, starali se o nás, působili jako tlumočníci při našich hovorech s obyvatelstvem a všestranně o nás pečovali. Tradice mezinárodní olympiády, úspěšně započatá v městě Stalinu, potrvá i v příštích letech. Napřesrok se bude olympiáda konat pravděpodobně v Československu. Je proto nyní na našich matematicích, aby se připravili nejlepšími výsledky v naší olympiádě na mezinárodní soutěž a v létě se pak stali pečlivými hostiteli všech našich zahraničních přátel.

Recenze

Čeněk Kohlman: Geometrie

Kniha vyšla jako 4. svazek II. řady Polytechnické knihnice, 253 stran, vydalo SNTL 1959, cena 10 Kčs.

V předmluvě se dočítáme, že kniha je určena pro širší okruh čtenářů a pře-

sahuje rámeček osnov geometrie pro JŠŠ. Je to vhodná příručka pro opakování látky z geometrie a předpokládá její znalost.

Knihy má tři části: Planimetrii, Stereometrii a Trigonometrii.

V dalším je uvedeno, kde přesahuje látka rámeček JŠŠ. V planimetrii jsou uvedeny: Věta Ceva, Menelaova, Desarguesova a Eulerova a dále pojem chordály, potenčního bodu, pólu a poláry. Ve stereometrii je to část obsahující Guldinovo pravidlo. V trigonometrii nejsou zavedeny vztahy pro komplexní čísla ve tvaru (a_1, a_2) , jako v učebnicích. Navíc je zavedena věta tangentová, vzorce Cagnoliové, řešení trojúhelníka tečnového, tetivového a dvojstředového.

Knížka neobsahuje odvozování a důkazy. Hodí se pro žáky JŠŠ pro kontrolu a přehled základních poznatků z geometrie a pro opakování před maturitními zkouškami, za předpokladu, že některá nedopatření a nesrovnalosti budou v příštím vydání opraveny.

Karel Špaček, 1. JŠŠ Praha 1.

Matematické zábavy

Stanislav Vávra, stud. VŠP, Praha:

Jedno „kouzlo“ s čísly

Napište nějaké trojčíselné číslo. Vedle napište číslo, které dostanete z prvního tak, že vyměníte navzájem první a třetí cifru (obrátkíte je). Od většího z obou čísel odečtete menší. Rozdílem je trojčíselné číslo. Pod ně napište číslo, které vznikne opět vzájemnou výměnou první a třetí cifry rozdílu. Obě poslední čísla sečtete a ve čtyřčíselném čísle, které vám vyjde, oddělíte dvě poslední cifry. Teď si vezměte třeba knihu L. Aškenázyho: *Dětské etudy*, najděte stránku označenou číslem, které vám vyšlo jako druhé dvojčíslí a odpočítejte tolik řádek shora, kolik udává první dvojčíslí čtyřčíselného čísla. Řádka, ke které jste došel, začíná větou: „Jakáž pomoc - jeli jsme s Královými sekat trávu“.

Takovým způsobem se obvykle zadává uvedené číselné kouzlo. Účastník si zvolí třeba číslo 623. Jeho zápis pak vypadá takto:

$$\begin{array}{r} 623 \quad 326 \\ - 326 \\ \hline 297 \\ 792 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Na straně 89 v *Dětských etudách* pak opravdu nalezne na desáté řádce předpovězenou větu, ačkoliv „kouzelník“ zvolené číslo nezná a počítání neviděl. Kouzlo je působivé a „kouzelníkovi“ stačí, aby si zapamatoval číslo 1089 a přede v zvolené knize (nemusí to být právě *Dětské etudy*) nalezl příslušnou větu. Málokdy však bývá „kouzelníkovi“ známo, že při volbě některých čísel kouzlo nevyjde (účastník nedostane číslo 1089).

Na otázku, která trojciferná čísla může účastník volit, dává odpověď algebraický rozbor:

Zvolené trojciferné číslo vyjádříme obecně ve tvaru $100x + 10y + z$, kde x, y, z jsou cifry, $x \neq 0$. Číslo s vyměněnými ciframi je pak $100z + 10y + x$. Rozlišíme tři případy: 1. $x > z$, pak první číslo je větší než druhé;

2. $x < z$, pak první číslo je menší než druhé;

3. $x = z$, pak první číslo se rovná druhému a jejich rozdíl

$$100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99x - 99z \quad (1)$$

je roven nule. Třetí případ tedy musíme z úvah vyloučit. Kouzlo je neproveditelné např. pro čísla 121, 353, 707 atd. Předpokládejme dále, že $x \neq z$ (vyloučili jsme tím $9 \cdot 10 = 90$ čísel) a nechť je $x > z$. Odčítání můžeme formálně zapsat ve schématu

$$\begin{array}{r} xyz \\ - zyx \\ \hline abc \end{array}$$

Určíme cifry a, b, c . Protože je $z < x$, je $c = 10 + z - x$. Desítku, kterou jsme přičetli k menšenci, připočteme také k menšiteli (druhou cifru menšitele zvětšíme o 1) a $b = 10 + y - (y + 1) = 9$. Opět musíme připočíst jednotku k první cifře menšitele. Potom $a = x - (z + 1) = x - z - 1$. Aby byl rozdíl trojciferné číslo, musí být $a \neq 0$, tedy $x - z \neq 1$. V opačném případě, tj. např. pro čísla 514, 645, 998 atd., vyjde rozdíl vždy 99. Předpokladem $x - z \neq 1$ vylučujeme z dalších úvah $8 \cdot 10 = 80$ trojciferných čísel, jak se může čtenář přesvědčit. Rozdíl $100a + 10b + c$ je číslo

$$100 \cdot (x - z - 1) + 10 \cdot 9 + (10 + z - x), \quad (2)$$

které je samozřejmě rovno číslu v rovnici (1). Když vyměníme navzájem první a třetí cifru ve (2), dostaneme trojciferné číslo

$$100 \cdot (10 + z - x) + 10 \cdot 9 + (x - z - 1), \quad (3)$$

které upravíme: $100 \cdot (10 + z - x) + 10 \cdot 9 + (x - z - 1) = 1000 + 100z - 100x + 90 + x - z - 1 = 1089 + 99z - 99x$. Součet čísel (2) a (3) je pak číslo 1039, které vyjde nezávisle na volbě x, y, z .

Je-li $x < z$, odečteme od druhého čísla číslo první (zvolené), jinak postup je stejný. Přibude jen podmínka $z - x \neq 1$, která vyloučí dalších 80 čísel, jako čísla 819, 172, 566, 405 ap., z čísel volitelných.

Závěrem: „Kouzlo“ se podaří jen tehdy, zvolíme-li trojciferné číslo $100x + 10y + z$, vyhovující vztahům

$$|x - z| \neq 1, \quad x \neq z.$$

Ve skutečnosti účastníci volí (spíše z psychologických důvodů) skoro vždy vhodná čísla. Aby se „kouzelník“ vyvaroval případných neúspěchů, je třeba zeptat se po provedení odčítání, vyšlo-li trojciferné číslo a po sečtení, vyšlo-li čtyřciferné číslo, dále při uvádění každého jiného „kouzla“ s čísly se řídit zásadou: Nepředvádět žádné „kouzlo“, jehož teoretický základ neznám a o němž nevím, platí-li použitá číselná vlastnost obecně.

Příklady pro Fyzikální olympiádu

(Pokračování)

Kategorie B

1. Pozorovatel prováděl pokus ve zdviži. Na přesný pérový siloměr zavěsil kouli o hmotě 1 kg.

a) V okamžiku, kdy se zdviž začala pohybovat, pozoroval, že siloměr ukázal 1,1 kp; jak velkým zrychlením se dala zdviž do pohybu a kterým směrem to bylo, nahoru nebo dolů?

b) Kolik by ukázal siloměr, kdyby se zdviž začala pohybovat stejným zrychlením, ale obráceným směrem, než vyjde v a)?

c) Jak velkým zrychlením a kterým směrem by se začala pohybovat zdviž, kdyby siloměr ukázal 0?

2. Rybář, jehož hmota je 70 kg, je na loďce stojící klidně na jezeře. Rybář jde po loďce směrem k její přídi 4 m a zastaví se. Do jaké vzdálenosti od výchozího místa na hladině se při tom posune, jestliže hmota loďky i s rybářem se rovná 200 kg? Tření loďky o vodu zanedbejte.

3. Z trámů o výšce 12 cm se má zhotovit prám, určený k převozu nákladu o váze $G = 1200$ kp. Bude použito borového dřeva o měrné váze $s = 0,4$ p/cm³. Určete

a) nejmenší objem trámů, který by uvedený náklad unesl;

b) objem trámů, ponoří-li se prám do dvou třetin své výšky.

Oprava: V příkl. 5., kat. A budiž $\vartheta_1 = 327$ °C. V příkl. 8., kat. A budiž $\vartheta_0 = 8,96 \cdot 10^{-2}$ kg m⁻³.

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

pravoúhlý
precisovati i precizovati
primární
prismatoid i prizmatoid
probádatelný i probadatelný
probádati
problém
problematický
procentní, tříprocentní, 3procentní, 3%ní
procentuální
progresivní i progresivní
projektivní
promile
pronik
proposice i propozice
propulse i propulze
propulsivní i propulzivní
protiproud
proton
provisorní i provizorní
provisorium i provizorium
průlinčitý

průnik
pružina i zpružina
předehřev i předhřev
předpjatý (např. beton)
přepínací
přepočítací
přepólovati
přerýsovati
přeřazení i přeřadění
přesýpací
převíjeti
přijímač
příklad, kupříkladu, i ku příkladu, (zkrat. kupř.); například i na příklad (zkrat. např.)
přímočarý
připínáček
přípočísti, přípočetl, přípočtený
přiřazovati i přiřadovati
přísáti se
půldruhého i půl druhého
půliti, rozk. pul!
půlkruh i polokruh

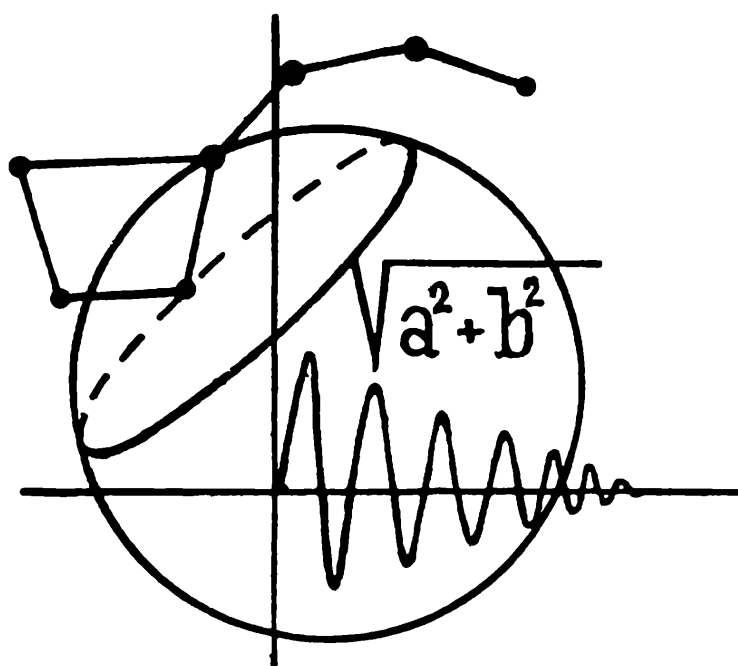
půlotáčka
 pulsovati
 Pythagoras, -ra i -ry
 Racionalisace i racionalizace
 radiální
 radián
 radiant
 radiátor
 rádio
 radioaktivita
 radioamatér
 radioaparát
 radiofonní
 radiografie
 radiogram
 radioisotop i radioizotop
 radiolog
 radiolokace
 radiometr
 radionavigace
 radiotechnika
 radiotelefon
 radiotelegraf
 radioterapie
 rádiový
 radium i rádium
 rádius, 2. p. rádia
 rádiusvektor
 radon (prvek)
 rafinér
 rafinerie
 rajón
 -ramenný (ve složeninách)
 rasance i razance
 ráž i ráže

reagens, stř. r. nesklonné, č. mn. reagentia
 reaktivní
 reaktor
 realisace i realizace
 Réaumur
 receptura
 recipient
 reciprocita, reciproční
 reciproký
 redisový
 reflex
 reflexe, reflexivní i reflexivní
 reformátor
 refrigerátor
 regenerátor
 regulární
 regulátor
 regulérní
 rekonstruovati, -struují
 rektascence i rektascenze
 rektifikace
 relativismus
 relativní
 relé (neskl.), reléový
 reliéf, reliéfní
 remanentní
 rentgen (přístroj)
 rentgenolog
 rentgenové paprsky i Roentgenovy paprsky
 rentgenovati
 reostat
 repulsivní i repulzivní
 repulsní i repulzní
 reserva i rezerva
 residuum i reziduum

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy

5



ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 5

Toto číslo vyšlo 15. ledna 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

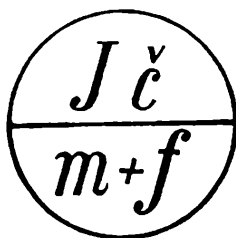
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelinek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

O B S A H

J. Filip: O jedné úloze z geometrie kružnic	193
O. Buchta - Kowalski: Přihrádkový princip	197
Inž. M. Geryk: Trinomická poučka	200
Inž. J. Klír a inž. V. Čapla: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války (Pokračování)	203
Inž. L. Drs: Konstrukce perspektivy z půdorysu a nárysu	209
L. Granát: Jednoduché zobrazovací metody (Dokončení)	213
Prof. dr. R. Košťál, dr. M. Chytilová, dr. B. Vlach: Postupné a stojaté vlnění	214
Jednoduchý pohyb kmitavý	219
Určování chyb měření fyzikálních veličin	223
Řešení úloh z minulého ročníku	227
Seznam řešitelů	230
Děc. dr. F. Krňan: Dámy na šachovnici	231
MM: Máte dobrou představivost?	234
KČ: Stará čínská hra	234
OS: Hádanka	235
J. Novák: Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době (Pokračování)	235
Úlohy IX. ročníku Matematické olympiády (Dokončení)	237
Recenze	239
Příklady pro Fyzikální olympiádu (Dokončení)	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06010 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hönl.

Matematika



Josef Filip, Bratislava:

O jednej úlohe z geometrie kružnic

Pod týmto titulom bola v dvoch článkoch uverejnených v č. 4, roč. 35 (str. 152) a č. 6, roč. 36 (str. 255) tohoto časopisu dvojakým spôsobom vyriešená úloha:

Sú dané dve rôznobežné priamky u, v . Na priamke u je daný bod M a na priamke v bod N tak, aby $M \neq N$. Zostrojte dve rovnako veľké kružnice tak, aby jedna z nich sa dotýkala priamky u v bode M , druhá priamky v v bode N a aby sa obe kružnice dotýkali navzájom. Koľko je riešení?

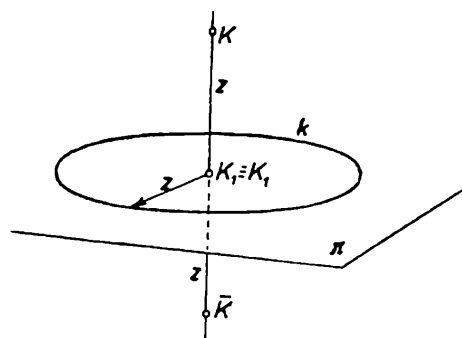
V tomto článku chceme podať ešte ukážku priestorového riešenia tejto úlohy. Vynecháme prípad, kedy body M, N sú od priesečníka P priamok u, v rovnako vzdialené - v tomto prípade je riešenie veľmi jednoduché a budeme riešiť úlohu za predpokladu, že $PM \neq PN$.

Najprv predložime niekoľko jednoduchých úvah a z nich vyplývajúcich konštrukcií.

Nech je daná priemetňa π a mimo nej bod K . Zostrojme pravouhlý priemet K_1 bodu K do roviny π ; je to päta kolmice spustenej z bodu K na rovinu π . Veľkosť úsečky KK_1 je vzdialenosť bodu K od priemetne π a nazýva sa kóta z bodu K , $KK_1 = z$.

Priradme teraz v rovine π bodu K kružnicu k opísanú z bodu K_1 polomerom jeho kóty z (obr. 1). Každému bodu K v priestore bude týmto spôsobom priradená v rovine π určitá kružnica k , ktorej stred je pravouhlý priemet K_1 bodu K a ktorej polomer sa rovná kóte z bodu K . Bodu, ktorý leží na rovine π , je priradená kružnica s nulovým polomerom, teda bod sám.

Obrátene každej kružnici k na rovine π nech je priradený bod K ležiaci na

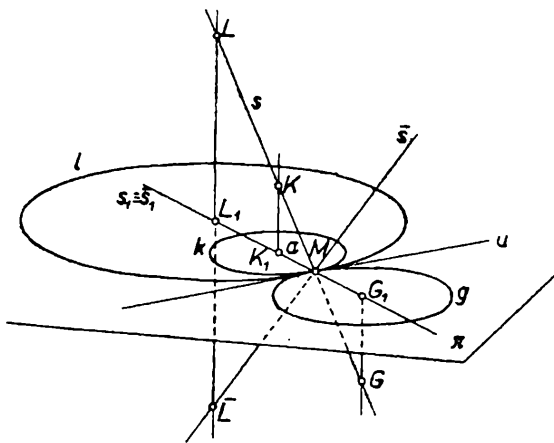


Obr. 1

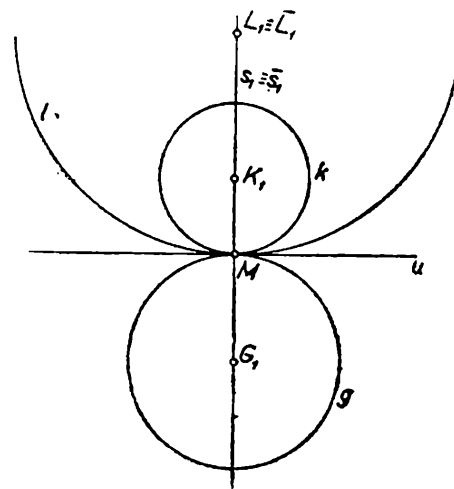
kolmici vztýčenej v strede K_1 kružnice k na rovinu π a vzdialený od roviny π o polomer kružnice k . Vieme, že bod tejto vlastnosti nie je jeden, ale že sú také body dva K, K a že sú súmerne združené podľa roviny π . Ich kóty sa líšia len znamienkom.

Spojme bod K s ľubovoľným bodom M kružnice k priamkou $s \equiv KM$ (obr. 2). Pretože je $KK_1 \perp K_1M$ a $KK_1 = K_1M$, je trojuholník KK_1M pravouhlý rovno-ramenný a priamka s má od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$.

Pýtajme sa, aká kružnica je priradená ľubovoľnému bodu L priamky s . Jeho pravouhlý priemet L_1 leží na priamke $s_1 \equiv K_1M$, trojuholníky LL_1M, KK_1M sú podobné a teda $L_1L = L_1M$. Kružnica l priradená bodu L teda prechádza bodom M a dotýka sa v ňom kružnice k . Pretože bod L bol na priamke s zvolený ľubovoľne, platí to o každom bode priamky s , zrejme aj o bodoch, ktoré ležia v opačnom polpriestore, ako napr. bod G .



Obr. 2a



Obr. 2b

■ Každému bodu L priamky s , ktorá má od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$, je priradená na rovine π kružnica l , ktorá má stred L_1 na priemete s_1 priamky s a prechádza jej stopníkom M . Všetky kružnice l sa vzájomne dotýkajú v bode M a majú spoločnú dotyčnicu u , ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku s aj s_1 .

Keby sme k priamke s zostrojili priamku $\bar{s}$ symetrickú s priamkou s podľa roviny π , boli by jej bodmi $\bar{K}, \bar{L}, \bar{G}, \dots$ súmerne združeným s bodmi $K, L, G, \dots$ priradené tie isté kružnice $k, l, g, \dots$.

Obrátene súhrnu kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky u v jej bode M , je priradená niektorá z priamok $s, \bar{s}$, ktoré prechádzajú bodom M , sú kolmé na priamku u a odchýlené od roviny π o uhol $\alpha = 45^\circ$. Na obr. 2b je zobrazená situácia v pravouhlom premietaní do roviny π .

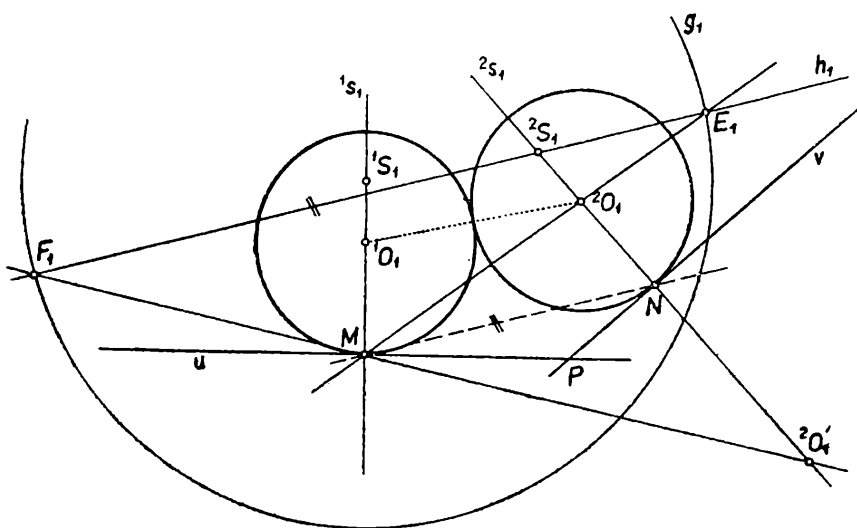
Prikročme teraz k riešeniu našej úlohy.

Nech sú na rovine π dané rôznobežné priamky u, v , na priamke u bod M a na priamke v bod N , tak, aby $M \neq N$ (obr. 3). Predpokladajme, že sa nám už podarilo zostrojiť kružnicu ${}^1k \equiv ({}^1O_1; r)$, ktorá sa dotýka priamky u v bode M a

kružnicu ${}^2k \equiv ({}^2O_1; r)$, ktorá sa dotýka priamky v v bode N a že sa tieto zhodné kružnice vzájomne dotýkajú. Kružnici 1k podľa toho, čo sme uviedli vyššie, je priradený bod 1O , ktorý leží na jednej z priamok ${}^1s, {}^1\bar{s}$ idúcich bodom M kolmo na priamku u a odchýlených od roviny π o uhol $\alpha = 45^\circ$. Na obr. 3 sme zvolili priamku 1s .

Podobne kružnici 2k je priradený bod 2O , ktorý leží na priamke 2s idúcej bodom N kolmo na priamku v a odchýlenej od roviny π o uhol $\alpha = 45^\circ$.

Uvedomme si, akú vlastnosť majú body ${}^1O, {}^2O$ na priamkach ${}^1s, {}^2s$. Pretože kružnice ${}^1k, {}^2k$ majú rovnaký polomer r , majú body ${}^1O, {}^2O$ rovnaké kóty (veľkosti r) a ich spojnica je rovnobežná s rovinou π . Pretože sa kružnice ${}^1k, {}^2k$ dotýkajú (zvonku), rovná sa veľkosť úsečky ${}^1O{}^2O$ dvojnásobku ich polomeru, ${}^1O{}^2O = 2r$. Vzdialenosť bodov ${}^1O, {}^2O$ je teda dvakrát väčšia ako ich vzdialenosť od roviny π .



Obr. 3

Pokladajme na chvíľu jeden z bodov ${}^1O, {}^2O$ - trebárs bod 1O - za pevný a hľadáme bod 2O . Všetky body 2O , ktoré s bodom 1O omeďujú úsečky rovnobežné s rovinou π a rovné dvojnásobku ich vzdialenosti od roviny π , ležia v rovine $\pi' \parallel \pi$ na istej kružnici g , ktorá má stred 1O na priamke 1s a polomer rovný dvojnásobku vzdialenosti rovín π, π' .

A teraz si predstavme, že sa bod 1O pohybuje po priamke 1s . S ním sa posunuje aj rovina π' , ktorá sa od roviny π buď vzdialuje alebo sa k nej približuje. A s rovinou π' sa pohybuje aj kružnica g , ktorá však pritom mení svoj polomer tak, aby sa tento polomer stále rovnal dvojnásobku vzdialenosti roviny π' od roviny π . Pri prechode bodu 1O bodom M splynú rovina π' s rovinou π a kružnica g majú v tomto mieste nulový polomer stotožní sa s bodom M .

Keby kružnica g mala stály polomer, vytvorila by pri svojom pohybe kruhovú valcovú plochu s osou 1s . Pretože však kružnica g pri pohybe mení svoj polomer úmerne k vzdialenosti svojej roviny π' od pevnej roviny π (resp. od bodu M tejto roviny), vytvorí kruhovú kužeľovú plochu κ , ktorá má vrchol v bode M , os v priamke 1s a ktorej určujúca kružnica g leží v rovine $\pi' \parallel \pi$ a má polomer dvakrát väčší ako vzdialenosť týchto rovín. Plocha κ je množina všetkých bodov 2O .

Bod 2O je teda na ploche κ a pretože má byť aj na priamke 2s , je v priesečníku priamky 2s s plochou κ .

Bod 1O je potom na priamke 1s a má tú istú kótu ako bod 2O . Zostrojením bodov 1O , 2O je vlastne úloha rozriešenná.

K o n š t r u k c i u prevedieme v pravouhlom priemete na rovinu π (obr. 3). Priemet 1s_1 je kolmica vztýčená na priamku u v bode M a priemet 2s_1 je kolmica na priamku v v bode N . Na priamke 1s_1 zvolíme ľubovoľný bod ${}^1S_1 \neq M$. Je to priemet bodu 1S , ktorý má s ohľadom na to, že odchýlka priamky 1s je $\alpha = 45^\circ$, kótu rovnú veľkosti úsečky 1SM . Bod 1S nech je stredom kružnice g . Jej priemet je kružnica g_1 opísaná z bodu 1S_1 polomerom $2 \cdot {}^1S_1M$. Kružnica g a bod M určujú kužeľovú plochu κ . Priesečníky priamky 2s s plochou κ zostrojíme tak, že priamkou 2s a bodom M položíme rovinu ω a zostrojíme priamky, v ktorých vrcholová rovina ω pretína plochu κ . Za tým účelom ustanovíme na priamke 2s bod 2S , ktorý má tú istú kótu ako bod 1S a leží teda v rovine $\pi' \parallel \pi$, ktorá obsahuje kružnicu g . Jeho priemet 2S_1 zostrojíme, keď urobíme ${}^2S_1N = {}^1S_1M$. Bodom 2S vedieme stopu h roviny ω na rovine π' . Táto stopa je rovnobežná s priamkou MN , lebo priamka MN je stopa roviny ω na rovine π . Priamka h pretína kružnicu g v bodoch E, F . Rovina ω pretína plochu κ v priamkach ME, MF a na nich ležia hľadané priesečníky ${}^2O, {}^2O'$ priamky 2s s plochou κ .

Priemet ${}^2O_1 \equiv ME_1$. 2s_1 je stredom kružnice 2k . Stred 1O_1 kružnice 1k na priamke 1s_1 dostaneme, keď urobíme ${}^1O_1M = {}^2O_1N$. Pritom nie sme na pochybách, na ktorú stranu od bodu M máme úsečku 1O_1M na priamku 1s_1 naniesť, lebo vieme, že body ${}^1O, {}^2O$ majú rovnaké kóty a že ich spojnica je rovnobežná s rovinou π .

Keď k druhému priesečníku ${}^2O'$ priamky 2s s plochou κ zostrojíme podobným spôsobom bod ${}^1O'$ na priamke 1s , získame v priemetoch ${}^1O'_1, {}^2O'_1$ stredy novej dvojice kružníc ${}^1k', {}^2k'$, ktoré sú druhým riešením. Na obr. 3 je narysované len prvé riešenie.

Keby sme namiesto priamok ${}^1s, {}^2s$ zostrojili priamky k nim symetrické ${}^1\bar{s}, {}^2\bar{s}$ podľa roviny π , nedostali by sme žiadny nový výsledok. Kružnice, ku ktorým by sme dospeli konštrukciou práve opísanou, by boli totožné s kružnicami ${}^1k, {}^2k; {}^1k', {}^2k'$, ktoré sme už zostrojili.

Keď však namiesto priamok ${}^1s, {}^2s$ zvolíme priamky ${}^1s, {}^2\bar{s}$ alebo ${}^1\bar{s}, {}^2s$, dostaneme ďalšie dve riešenia - kružnice ${}^1k'', {}^2k''; {}^1k''', {}^2k'''$. Úloha má vždy štyri riešenia.

P o z n á m k y : Pri riešení úlohy sme použili priamky ${}^1s, {}^2s$, ktoré mali od roviny π odchýlku $\alpha = 45^\circ$. Čitateľ ľahko nahliadne, že veľkosť odchýlky nie je podstatná, podstatné je na veci to, že odchýlky oboch priamok ${}^1s, {}^2s$ od roviny π sú rovnaké, pravda menšie ako 90° . Odchýlku $\alpha = 45^\circ$ sme volili z praktických dôvodov, najmä preto, aby sme zjednodušili výklad. Pri zmene odchýlky priamiek ${}^1s, {}^2s$ ostane konštrukcia taká istá.

Je samozrejmé aj to, že namiesto plochy κ s vrcholom v bode M a osou v priamke 1s sme mohli s rovnakým výsledkom použiť kužeľovú plochu κ' s vrcholom N a osou 2s .

Úloha, ktorú sme práve riešili, je zvláštnym prípadom všeobecnejšej úlohy, ktorá by znela: Sú dané rôznobežné priamky u, v . Na priamke u je daný bod M a na priamke v bod N tak, aby $M \neq N$. Zostrojte dve kružnice ${}^1k, {}^2k$, ktorých polomery sú v pomere $m : n$, keď jedna z nich 1k sa dotýka priamky u v bode M , druhá 2k sa dotýka priamky v v bode N a obe kružnice sa dotýkajú navzájom

a) zvonku, b) znútra. Pomer $m : n$ je daný v základnom tvare, takže m, n sú celé nesúdeliteľné čísla.

Riešenie tejto všeobecnej úlohy len naznačíme, prevedenie konštrukcie ponecháme čitateľovi.

Nech sú v rovine π dané priamky u, v s bodmi M, N ($M \neq N$) a nech je daný pomer $m : n$.

Bodom M zostrojíme priamku $^1s \perp u$, ktorej odchýlka α_1 je daná vzťahom $\cotg \alpha_1 = m$ ($\alpha_1 < 90^\circ$). Podobne bodom N vedieme priamku $^2s \perp v$, aby jej odchýlka α_2 vyhovovala podmienke $\cotg \alpha_2 = n$ ($\alpha_2 < 90^\circ$). Ďalej zostrojíme kruhovú kužeľovú plochu κ , ktorá má vrchol M , os na priamke 1s a ktorej určujúca kružnica g leží v rovine $\pi' \parallel \pi$ vedenej vo vzdialenosti jednotkovej úsečky od π . Polomer kružnice g sa rovná v úlohe a) $m + n$ jednotkovým úsečkám, v úlohe b) $|m - n|$ jednotkovým úsečkám. Jednotková úsečka môže byť zvolená ľubovoľne. Potom zostrojíme (ak existujú) priesečníky $^2O, ^2O'$ priamky 2s s plochou κ . Na priamke 1s zostrojíme bod 1O , ktorého kóta sa rovná kóte bodu 2O . Priemety $^1O_1, ^2O_1$ bodov $^1O, ^2O$ sú stredy kružníc $^1k, ^2k$, ktoré sme mali zostrojiť.

Z druhého priesečníku $^2O'$ priamky 2s s plochou κ by sme odvodili tým istým spôsobom druhé riešenie úlohy. Keby sme namiesto dvojice priamok $^1s, ^2s$ zvolili dvojicu $^1s, ^2s$ alebo dvojicu $^1s, ^2s$, kde priamky $^1s, ^2s$ sú symetrické s priamkami $^1s, ^2s$ podľa roviny π , dostali by sme (ak existujú) ďalšie dve dvojice kružníc, ktoré sú tretím a štvrtým riešením úlohy.

Oldřich Buchta - Kowalski, Brno:

Příhrádkový princip

Čtenáři jistě znají tuto matematickou hádanku:

Dá se předpokládat, že každý člověk má na hlavě méně než 120 000 vlasů. Rozhodněte, zdali existují v Brně dva lidé, kteří mají v téže chvíli stejný počet vlasů.

Poněvadž víme, že Brno má mnohem více než 120 000 občanů (má jich přes 320 000), rozhodneme o uvedeném tvrzení snadno touto úvahou:

Každému občanu v Brně přiřadíme číslo, které udává počet jeho vlasů v daném okamžiku. Toto číslo bude obsaženo v mezích od 0 do 119 999. Kdyby v té chvíli měli dva různí lidé vždy různý počet vlasů, přiřadili bychom každé z našich 120 000 čísel nejvýše jednomu občanu. Tak bychom však přidělili nejvýše 120 000 občanům jejich čísla a na některé osoby by se jistě nedostalo. Tím by byl náš předpoklad sporný a musíme tedy připustit, že skutečně v každém okamžiku mají jistí dva lidé v Brně stejný počet vlasů.

Povšimněme si, že tato úvaha má čistě existenční charakter a neříká nám nic konkrétního o jednotlivých osobách. Nemůže rozhodnout o tom, zdali právě čtenář má v Brně (nebo v Praze) svého dvojníka, nebo o tom, zdali vůbec existuje v Brně člověk, který má např. 50 000 vlasů.

Logického závěru, ke kterému jsme došli v našem příkladě, se používá v nejrozličnějších matematických úsudcích. V němčině se tato forma nazývá „S c h u b-

fachschluss“, a my jí budeme říkat *příhrádkový princip*. Abstraktní formulace tohoto principu, dostačující pro naše účely, zní asi takto:

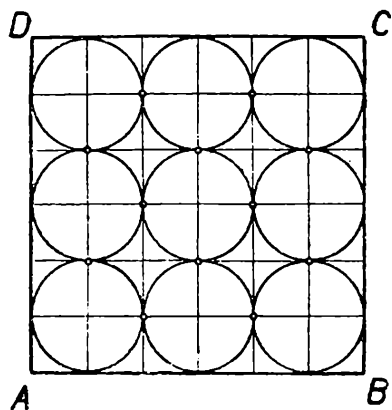
Mějme n tříd nějakých předmětů a nechť ze souhrnu těchto n tříd je vybráno $m > n$ předmětů. Pak aspoň dva z těchto m předmětů jsou vybrány z téže třídy.

Poznámka: Obecněji se dá tvrdit, že je-li za stejných předpokladů $m > k \cdot n$ pro jisté přirozené k , pak lze mezi m vybranými předměty najít $k + 1$ předmětů, které jsou vybrány z téže třídy.

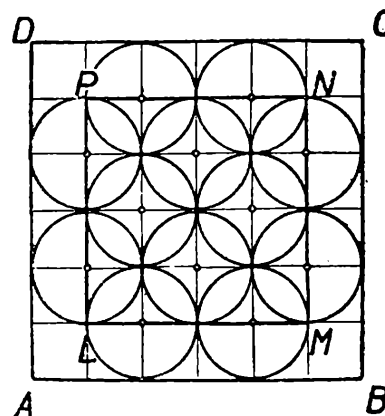
Jakým způsobem se nyní aplikuje toto obecné pravidlo na naši úlohu?

Všechny obyvatele Brna lze rozdělit do 120 000 tříd tímto způsobem: Je-li k celé číslo v mezích od 0 do 119 999, pak do k -té třídy zahrneme všechny občany, kteří mají v dané chvíli k vlasů. Jestliže nyní ze souhrnu všech tříd, tj. ze souhrnu všech obyvatel Brna vybereme např. 320 000 občanů, pak aspoň dva jsou vybráni z téže třídy, tedy mají stejný počet vlasů.

Třídy předmětů, o kterých se mluví ve formulaci příhrádkového principu, mohou mít různý charakter podle druhu úlohy. To se ukáže v následujících příkladech.



Obr. 1



Obr. 2

Příklad 1. Buď dáno 9 přirozených čísel, z nichž žádné není dělitelno pěti. Ukažte, že rozdíl aspoň dvou z nich je dělitelný deseti.

Důkaz. Jestliže přirozené číslo a není dělitelno pěti, pak jeho poslední cifra může nabývat právě jedné z osmi hodnot: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Rozdělme všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelna pěti, do osmi tříd. Do první třídy dáme všechna čísla končící jednotkou, do druhé třídy čísla končící dvojkou atd., konečně do osmé třídy všechna čísla končící devítkou. Našich devět čísel je vybráno ze souhrnu těchto osmi tříd, musí tedy být mezi nimi dvě taková, která jsou vybrána z téže třídy a končí proto stejnou cifrou. Rozdíl těchto dvou čísel má však na posledním místě nulu, je tedy dělitelný deseti.

Příklad 2. Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_5$ všechna menší než 7, žádné z nich není celým číslem.

Dokažte, že mezi padesáti body $[a_i, b_k]$ (kde $i = 1, 2, \dots, 10; k = 1, 2, \dots, 5$) existují aspoň dva takové, že jejich vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

(Úloha II. kola kat. A z 2. ročníku Matematické olympiády.)

D ů k a z. Všechny body $[a_i, b_k]$ leží uvnitř čtverce, jehož strany leží jednak v souřadnicových osách, jednak na rovnoběžkách, které jsou vedeny s osami v kladných polorovinách ve vzdálenosti 7. Tento čtverec o straně 7 lze rozdělit pomocí dalších rovnoběžek s osami na 49 jednotkových čtverců (nakreslete si obrázek). Všechny body většího čtverce jsou tak rozděleny do 49 tříd (body na stranách jednotkových čtverců zde patří více třídám současně, což je však nepodstatné). Poněvadž 50 bodů $[a_i, b_k]$ je vybráno ze souhrnu těchto tříd, musí z nich aspoň dva náležet téže třídě, tedy témuž jednotkovému čtverci.

Každý bod na stranách tohoto jednotkového čtverce má aspoň jednu souřadnici rovnu celému číslu, proto musí oba vybrané body A, B padnout dovnitř čtverce. Sestrojíme-li uvnitř čtverce bod O takový, že přímky AO, BO jsou rovnoběžné se stranami čtverce a tedy s osami, platí $AO < 1, BO < 1$ a $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} < \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Tím je důkaz proveden.

P ř í k l a d 3. Na obr. 1 je uvnitř čtverce $ABCD$ o straně 6 umístěno 9 kruhů, každý o průměru 2. Tyto kruhy se po dvou dotýkají celkem ve 12 bodech A_i na obrázku vyznačených kroužky. Každý bod A_i je tedy společný dvěma kruhům. Jestliže ve čtverci $ABCD$ umístíme jiných 9 kruhů vesměs o průměru 2 (mohou se vzájemně částečně překrývat), nemusí žádný z bodů A_i být společným bodem dvou kruhů. Ve čtverci $ABCD$ lze totiž umístit dokonce 12 kruhů k_i tak, že každý bod A_i náleží právě jednomu kruhu k_i , je totiž jeho středem. (Viz obr. 2.)

Ukážeme však, že jakkoliv bychom v našem čtverci umístili 13 kruhů o průměru 2, bude vždy aspoň jeden z bodů A_i společný dvěma kruhům.

Snadno vidíme, že kruhy k_i sestavené na obr. 2 pokrývají čtverec $LMNP$, tj. že každý bod tohoto čtverce o straně 4 náleží aspoň jednomu kruhu k_i . Čtenář nechť si to dokáže podrobně. Všechny body čtverce $LMNP$ jsou takto rozděleny do 12 tříd - třídy jsou zde společné části kruhů k_i a čtverce $LMNP$. Nezáleží opět na tom, že jistá část bodů leží ve více třídách současně.

Je-li teď ve čtverci $ABCD$ umístěno 13 kruhů o průměru 2, náleží jejich středy B_j čtverci $LMNP$. Podle přihrádkového principu náleží aspoň dva středy, např. B_1, B_2 , téže třídě, tedy témuž kruhu k_i . Pak vzdálenost bodů B_1, B_2 od bodu A_i je nejvýš 1 a bod A_i je proto společným bodem těch kruhů, které mají středy B_1, B_2 .

Ú l o h y.

1. Za předpokladu, že věk brněnského občana nepřesahuje 100 let, ukažte, že aspoň 9 brněnských občanů se narodilo ve stejný den (viz poznámku).

2. Je dáno $n + 1$ kladných čísel ne větších než jedna. Dokažte, že mezi nimi existují aspoň dvě taková, že jejich rozdíl má absolutní hodnotu menší než $\frac{1}{n}$,

kde n je dané přirozené číslo. (Úloha II. kola kat. B z 2. ročníku Matematické olympiády.)

Návod: Rozdělte úsečku $< 0, 1 >$ číselné osy na n shodných úseček. Do téže třídy dáme všechny vnitřní body některé úsečky a její pravý koncový bod.

3. Jsou dány dvě skupiny navzájem různých přirozených čísel, z nichž každé je menší než dané číslo n .

Dokažte, že jestliže společný počet členů obou skupin je aspoň n , pak v jedné i ve druhé skupině je možno najít po jednom čísle tak, že jejich součet se rovná n . (Úloha maďarské MO.)

Návod: Označte a_i čísla jedné skupiny, b_j čísla druhé skupiny a ukažte, že mezi všemi čísly a_i , $n - b_j$ existují dvě stejná.

Inž. Milan Geryk, Brno:

Trinomická poučka

Známa binomická poučka podává návod, jak rozepsat n -tou mocninu dvojčlenu $a + b$. Obdobně řeší trinomická poučka otázku, jak rozepsat n -tou mocninu trojčlenu $a + b + c$. Budeme se nyní zabývat trinomickou poučkou. Naší úlohou tedy je úprava výrazu $(a + b + c)^n$. Použijeme dvakrát po sobě binomické poučky. Dostaneme tak rovnice

$$\begin{aligned}
 (a + [b + c])^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot [b + c] + \dots + \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot [b + c]^m + \\
 &+ \dots + \binom{n}{n} [b + c]^n, \quad (a + b + c)^n = \\
 &\quad \binom{n}{0} a^n + \\
 &\quad + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot \binom{1}{0} b + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot \binom{1}{1} c + \\
 &\quad + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot \binom{2}{0} \cdot b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot \binom{2}{1} bc + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot \binom{2}{2} c^2 + \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot \binom{m}{0} b^m + \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot \binom{m}{1} b^{m-1} \cdot c + \\
 &+ \quad + \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot \binom{m}{l} b^{m-l} \cdot c^l + \quad + \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot \binom{m}{m} c^m + \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{1} b^{n-1} \cdot c + \dots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n} \cdot c^n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Všechny členy na pravé straně rovnice (1) jsou tvaru

$$K_{i,j,k} \cdot a^i b^j c^k, \tag{2}$$

kde $K_{i,j,k}$ je trinomický koeficient s indexy i, j, k , nabývajícími hodnot 0, 1, 2, ..., n , přičemž platí

$$i + j + k = n. \tag{3}$$

Počet členů na pravé straně rovnice (1) je právě

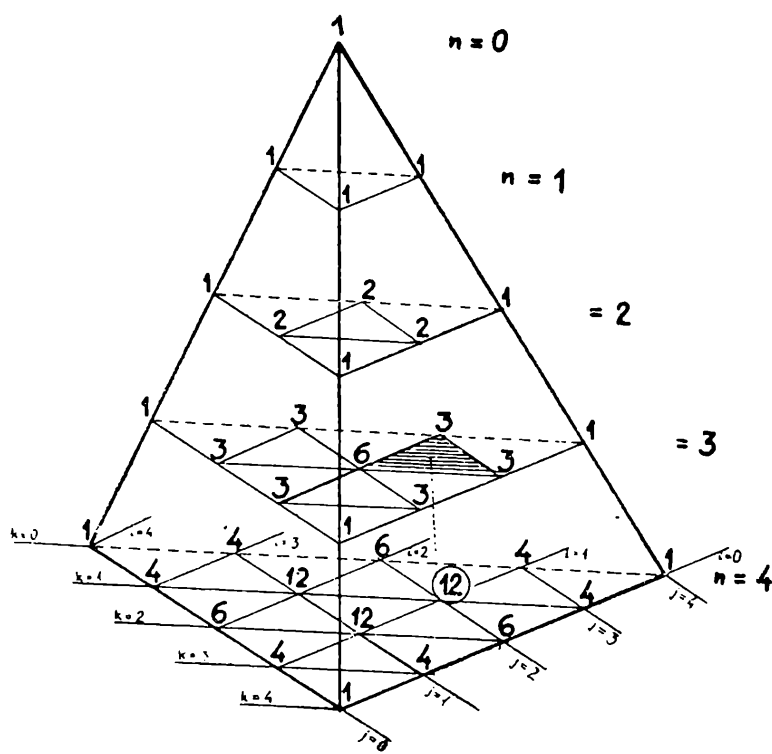
$$z = 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \binom{n + 2}{2}. \quad (4)$$

Trinomické koeficienty $K_{i,j,k}$ určíme několika způsoby.

1. Podle obecného členu, který je podtržen v rovnici (1), je koeficient u $a^i b^j c^k$

$$K_{i,j,k} = \binom{n}{n-i} \cdot \binom{n-i}{k}, \quad (5)$$

což zjistíme dosazením $i = n - m$, $j = m - l$, $k = l$ do koeficientu $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{l}$ v obecném členu rovnice (1). Například koeficient u $a^4 b^2 c^3$ je $K_{4,2,3} = \binom{9}{5} \cdot \binom{5}{3} = 126 \cdot 10 = 1260$.



Obr. 1

2. Úpravou vzorce (5) s přihlédnutím k podmínce (3) odvodíme

$$K_{i,j,k} = \frac{n!}{(n-i)! i!} \cdot \frac{(n-i)!}{(n-i-k)! k!} = \frac{n!}{i! j! k!}. \quad (6)$$

Připomeňme, že výraz $0!$ se podle definice rovná 1.

3. Užijme trinomického čtyřstěnu, který je obdobou Pascalova trojúhelníka. Tři hrany trinomického čtyřstěnu jsou tvořeny jedničkami a tři stěny Pascalo-
vými trojúhelníky (viz obr. 1). Každému n zde odpovídá celý trojúhelník trino-
mických čísel. Například u $a^4 b^2 c^3$ je koeficient $K_{4,2,3} = 12$ (v obr. 1 je označen
kroužkem).

Trinomická poučka se dá formálně zapsat takto:

$$(a + b + c)^n = \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ (i+j+k=n)}}^n \frac{n!}{i! j! k!} a^i b^j c^k; \quad (7)$$

symbol Σ značí přitom součet všech $\binom{n+2}{2}$ členů typu $\frac{n!}{i! j! k!} a_i b_j c_k$, kde i, j, k nabývají všech hodnot $0, 1, 2, \dots, n$ s dodržením podmínky (3).

P ř í k l a d : $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$.

Uveďme ještě několik zajímavostí. Trinomický čtyřstěn má tyto vlastnosti:

1. Platí relace

$$K_{i,j,k} = K_{i-1,j,k} + K_{i,j-1,k} + K_{i,j,k-1}. \quad (8)$$

Podle vzorce (6) přepíšeme pravou stranu

$$P = \frac{(n-1)!}{(i-1)! j! k!} + \frac{(n-1)!}{i! (j-1)! k!} + \frac{(n-1)!}{i! j! (k-1)!}.$$

Po úpravě dostaneme

$$P = \frac{(n-1)!}{i! j! k!} (i + j + k) = \frac{(n-1)! n}{i! j! k!} = \frac{n!}{i! j! k!},$$

což je opět podle vzorce (6) levá strana rovnice (8), kterou jsme tím dokázali.

Relace (8) znamená, že koeficient v rovině příslušné číslu n je součtem tří sousedních koeficientů v rovině příslušné číslu $n-1$. Například číslo $K_{1,2,1} = 12$ je součtem čísel $K_{0,2,1} = 3$, $K_{1,2,0} = 3$, $K_{1,1,1} = 6$; na obrázku je tento vztah znázorněn tečkovanou spojnicí těžiště trojúhelníka $3-3-6$ s bodem 12.

2. Vzhledem k vzorci (6) platí komutativní zákon pro i, j, k :

$$K_{i,j,k} = K_{j,i,k} = K_{k,i,j} = \dots,$$

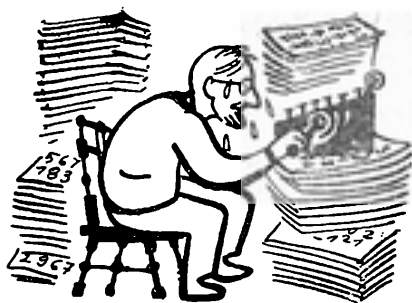
což se v čtyřstěnu projeví pro každé n symetrií podle všech os jednotlivých stran.

3. Součet všech trinomických koeficientů v rovině příslušné číslu n je

$$s_n = 3^n. \quad (9)$$

Tento vzorec plyne z rozepsání výrazu $(1 + 1 + 1)^n$ podle trinomické poučky. Je totiž $1^k = 1$, takže

$$3^n = (1 + 1 + 1)^n = \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ (i+j+k=n)}}^n \frac{n!}{i! j! k!} \cdot 1^i \cdot 1^j \cdot 1^k = \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ (i+j+k=n)}}^n \frac{n!}{i! j! k!} = s_n$$



Inž. Jiří Klír, aspirant ČSAV
a inž. Vasil Čapla, Praha:

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války

(Pokračování)

Na rozdíl od 18. století, bylo 19. století pro obor strojů na zpracování informací velmi významné. Největších úspěchů docílil anglický filosof a matematik Charles Babbage (čti Čarls Bebič), kterému věnujeme samostatnou kapitolu.

4. Charles Babbage

Charles Babbage se narodil 26. prosince 1792 v Totnes v Devonshire v Anglii. Od roku 1810 studoval na universitě v Cambridge (čti Kembridž) a později v letech 1829—1839 působil na této universitě jako profesor matematiky. V místnostech spolku matematiků Analytical Society v Cambridge, jehož zakladatelem byl Babbage, vznikla u něho v roce 1812 myšlenka sestrojít počítačový stroj. Vypracoval plán stavby mechanického stroje pro výpočet a tisk hodnot polynomů a sestrojil malý prototyp tohoto stroje, který nazval „Differential Engine“ (čti Diferenčl Endžin). Na stroji bylo možno vypočítávat čísla pouze na 8 desetinných míst. Babbage měl v úmyslu postavit ještě podobný stroj s kapacitou na 20 desetinných míst. Se stavbou započal roku 1820, avšak nikdy ji nedokončil, přesto, že Britská vláda věnovala na zhotovení tohoto stroje asi 17 000 liber. Roku 1833 byly přerušeny práce spojené s výstavbou stroje a v roce 1842 se Babbage definitivně vzdal plánu na jeho dokončení. Část stroje byla ovšem již postavena a nachází se nyní v Science Museum v Londýně (viz obr. 5).



Obr. 5

Švéd Georg Scheutz, povzbuzen samotným Babbagem, sestrojil se svým synem Edvardem prototyp podobného stroje s kapacitou čtrnácti desetinných řádů. Stroj byl úspěšně předváděn roku 1843 ve Švédské akademii věd a později též v Paříži a v Londýně.

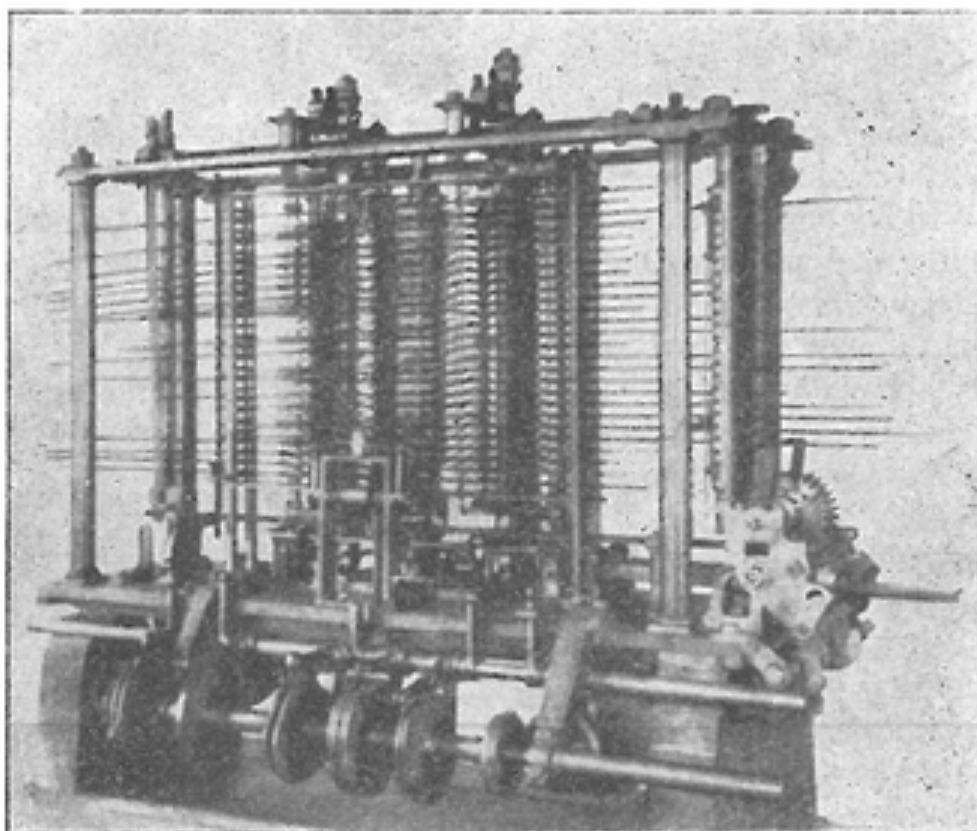
Proč se Babbage vzdal myšlenky dokončit svůj velký stroj „Differential Engine“ s kapacitou na 20 desetinných řádů, je patrné z jeho dalekosáhlých plánů na sestrojení velkého samočinného počítače.

Původní myšlenka velkého, plně automatického a obecně použitelného počítačového stroje napadla Babbage asi v roce 1834 až 1835, když se při styku s jistým francouzským vědeckým ústavem seznámil s organizačním schématem výpočet-

ního střediska. Zjistil, že toto schéma je v podstatě jednoduché, a že by se dalo modelovat strojem.

Svůj nový stroj Babbage nazval „Analytical Engine“ (čti Analytikl) a chtěl jej zhotovit opět na mechanickém principu. Stroj se měl skládat z pěti částí:

1. Paměť pro čísla (store) o obsahu 1000 čísel o 50 dekadických číslicích.
2. Operační jednotka (mill), která měla provádět čtyři základní aritmetické operace s čísly v dekadické soustavě.
3. Řadič (Babbage neužíval zvláštního názvu), který měl vybírat požadovaná čísla z paměti, zajistit provedení požadované operace nad těmito čísly v operační jednotce a výsledek zavést do správného místa v paměti.
4. Vstupní jednotka na vkládání programu a čísel za pomoci děrných štítků.



Obr. 6

5. Výstupní jednotka, která měla být opatřena tiskacím zařízením podobným tomu, které mají dnešní tabulátory.

Z uvedeného soupisu základních částí stroje je vidět, že stroj „Analytical Engine“ se v základních rysech velmi podobá moderním samočinným počítačům.

Babbage chtěl, aby operační jednotka prováděla sčítání na všech řádech současně, neboť kdyby přenos měl být postupný pro 50 míst, bylo by zapotřebí velké doby pro sčítání. Zdá se, že na vyřešení otázky současného přenosu spotřeboval Babbage mnoho času. Rychlost operační jednotky s použitím současného přenosu odhadoval takto:

60 sčítání za minutu,

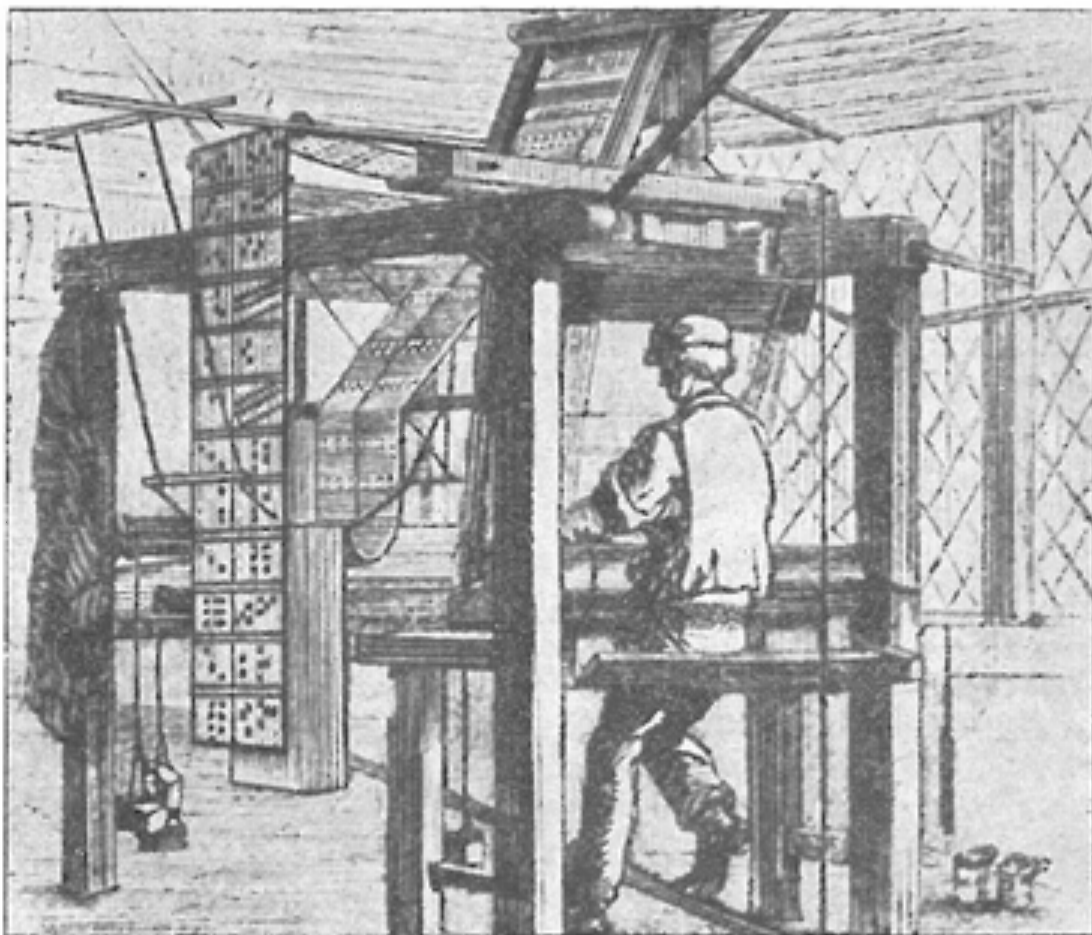
1 násobení dvou čísel o 50 dekadických číslicích za minutu,

1 dělení čísla o 100 dekadických číslicích číslem o 50 číslicích za minutu.

Fotografii části operační jednotky Analytical Engine uvádíme na obr. 6.

Při řešení řadiče použil Babbage zkušeností z textilního průmyslu, kde postup práce na Jacquardově (čti Žakarově) tkalcovském stavu byl asi od roku 1804 řízen prostřednictvím sledu instrukcí, vyděrovaných do plechových štítků (viz obr. 7).

Charles Babbage zemřel v roce 1871. Za svého života se houževnatě snažil dovést své dílo do konce; obětoval na to mnoho finančních prostředků. Podařilo se mu však uskutečnit jen nepatrnou část svého projektu a to zejména proto, že tehdejší strojírenství nebylo natolik vyspělé, aby mu mohlo dodat všechny potřebné součástky. Je zajímavé, že v době, kdy Babbage navrhoval svůj stroj, bylo již zná-



Obr. 7

mo elektromagnetické relé, které vynalezl Henry v roce 1835. Relé se ovšem původně používalo ve funkci telegrafního zesilovače a teprve mnohem později byla objevena jeho schopnost vytvářet logickou funkci.

Je však nepochybné, že pokusy Ch. Babbage vedly k významnému rozvoji jemné mechaniky v Anglii. Jeho syn H. P. Babbage pokračoval ve stavbě počítače svého otce a podařilo se mu udělat pokrok, pokud jde o stavbu sčítacího mechanismu. Nedokončený počítač „Analytical Engine“ se nyní nachází v Science Museum at South Kensington v Londýně.

O Babbageově vynálezu se dozvěděl celý svět. Babbage byl středem pozornosti

mnoha odborných a významných osob, které jej navštěvovaly a žádaly o vysvětlení jeho vynálezu. Babbage sám napsal knihu poznámek o své práci a o svých pokusech, kterou nazval „*Passages from the Life of the Philosopher*“. Několik kapitol této knihy je věnováno oběma strojům, avšak uvedené myšlenky nejsou podrobné a systematické.

Roku 1840 byl Babbage pozván italskými matematiky do Turina na přednášku o svém vynálezu. Mezi posluchači byl přítomen také mladý profesor matematiky Vojenské akademie v Turíně L. F. Menabrea, který pořídil zápis přednášky, jež uveřejnil francouzsky v říjnu 1842 v Ženevě. Dcera Lorda Byrona, Ada Lovelace, která byla znamenitou matematickou, přeložila Menabreuův článek do angličtiny a doplnila jej svými vysvětlivkami, které byly třikrát tak dlouhé než samotný článek. Tak nepřímou byl uveřejněn popis Babbageova samočinného počítače v anglických časopisech. Později napsal H. P. Babbage, syn Ch. Babbage, knihu „*Babbage Calculating Engines*“, což je nejpodrobnější zdroj informací o myšlenkách Ch. Babbage.

5. *Vývoj kalkulačních strojů*

S tovární výrobou kalkulačních strojů začal Charles Xavier Thomas de Colmar v Paříži roku 1820. Stroje prováděly čtyři základní aritmetické operace; nebyly však ještě dokonalé.

Konstruováním počítačích strojů se v 19. století zabývali též mnozí hodináři. Tak např. hodinář A. Stern z Rubišova v Polsku postavil v letech 1810 až 1820 tři prototypy počítačích strojů, které byly poháněny hodinovým strojem. Sternovy stroje vykonávaly nejen čtyři základní aritmetické operace, ale též druhé odmocňování. V Rusku popsal Z. Sloninskij r. 1845 počítač stroj, na kterém bylo též možno provádět druhé odmocňování. Tento stroj byl poctěn Ruskou Akademií věd premií druhého stupně. Kapesní sčítačku sestrojil ruský pedagog Kummer r. 1874.

První dokonalý kalkulační stroj se však podařilo zhotovit teprve inženýru Expédice zásobování státními papíry v Petrohradě V. T. Odhnerovi v roce 1874, když použil originální myšlenky ozubených kol s proměnným počtem zubů. Odhnerův stroj se stal podkladem konstrukce malých páčkových kalkulačních strojů, známých např. pod značkami Odhner, Mira, Brunsviga, Thales, Walther aj. První výroba Odhnerových kalkulaček byla zahájena r. 1891 v Petrohradě.

Zvláštní sčítačku sestrojil r. 1878 akademik Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821 až 1894). Stroj měl na tehdejší dobu originálním způsobem vyřešen přenos, který se prováděl spojitě tak, že otáčky kolečka nižšího řádu zmenšeny desetkrát se přenášely na kolečko vyššího řádu. Tento stroj doplnil pak Čebyšev dalšími mechanismy pro násobení a dělení a sestavil tak v roce 1882 automatický kalkulační stroj klávesový, který je podkladem stavby strojů firmy Borroughs a firmy Merchant.

6. *Vznik a vývoj strojů na děrné štítky*

Hlavním podnětem pro vznik strojů na děrné štítky byly potíže, s kterými se setkávaly v 19. století zejména velké státy při zpracování materiálu sčítání lidu. První stroje na děrné štítky zkonstruoval dr. Hermann Hollerith. Stroje byly

dokončeny a vyzkoušeny v roce 1887 při zpracování materiálu statistiky úmrtnosti v Baltimore a bylo jich použito též při zpracování materiálu 10. sčítání lidu Spojených států amerických. Podkladem pro sčítání byl štítek (obr. 8), do kterého se příslušné údaje děrovaly pomocí ručního děrovače (obr. 9). První výpočtový stroj (viz obr. 10 a 11) se tvarem podobal malému pianinu. Skládal se ze tří částí:

1. Z dotekového lisu, který byl umístěn v místě, které by odpovídalo konci

klávesnice pro pravou ruku u pianina a sloužil k uzavírání elektrických obvodů. Obsahoval isolační štítkové lůžko tvořené sadou mističek se rtutí, odpovídajících děrným místům štítku. Horní část lisu tvořila pohyblivá destička s odpérovanými kontaktními špičkami.

2. Ze 40 ciferníkových počítadel ovládaných elektromagnety a upevněných v místě, odpovídajícímu horní přední stěně u pianina.

3. Z třídící skřínky umístěné odděleně, která obsahovala 24 přihrádek uzavřených klapkami ovládanými elektromagnety.

Za účelem dalšího výzkumu výroby a komerčního využití Hollerithova vynálezu byla založena společnost Tabulating Machine v New Yorku. Nedovedla však vyvinout dokonalejší stroje a proto roku 1911 převzala vývoj a výrobu Hollerithových strojů nová společnost International Business Machines Corporation (IBM) v New Yorku, která později velmi zdokonalila jednotlivé stroje.

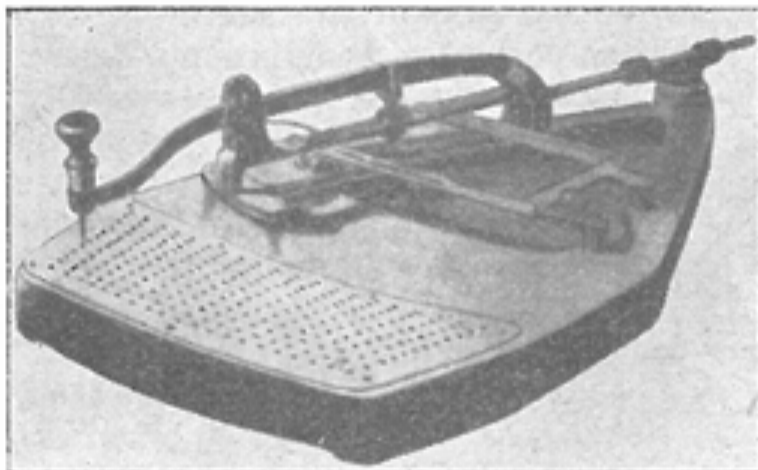
Protože v začátcích nebyly Hollerithovy stroje ještě dokonalé, hledal vedoucí Statistického úřadu Spojených států amerických konstruktéry, kteří by sestavili dokonalejší soupravu děrnoštítkových strojů. Volba padla na inženýra Jamese Powerse (čti Džejms Pavrse). Na základě Powersových konstrukcí bylo zhotoveno 300 děrovačů a odpovídající počet třídičů a tabulátorů, kterých bylo použito pro zpracování materiálu 12. sčítání lidu Spo-

Věk	Stav	Povolání	Právní stav
do 5 let	svobodný	prum. dělník	protest.
6 10 let	ženatý	zem. dělník	katol.
11 20 let	rozvedený	obch. zam.	indovský
21 30 let	Počet dětí	ved. úředník	protest. z
31 40 let	1 dítě	služba	Měsíční příjem
4 50 let	2 děti	volná povol.	do 100 \$
51 60 let	3 děti	prosvol.	do 200 \$
61 70 let	4 děti	Štátní občanství	do 500 \$
71 80 let	5 dětí	ano	přes 500 \$
81 a více let	6 a více dětí	ne	

Obr. 8

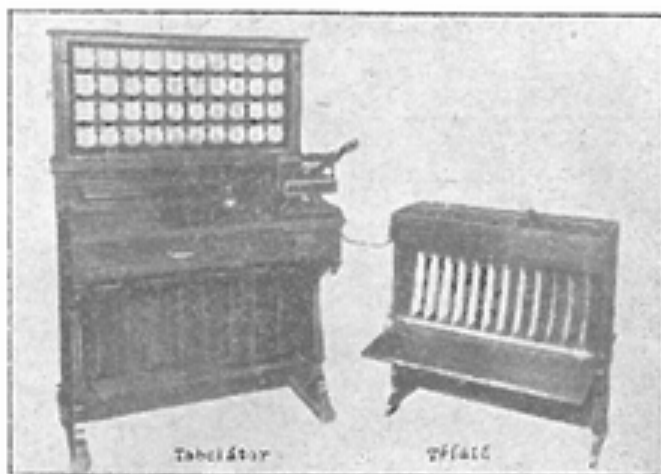
jených států amerických. Protože Powers neměl tolik finančních prostředků, aby sám mohl vyrábět děrnoštítkové stroje své vlastní konstrukce, založil společnost Powers Accounting Machine. Roku 1911 zkonstruoval Powers první horizon-

tální třídič a písíci tabulátor, což znamenalo jistý předstih před technickým vývojem strojů IBM.

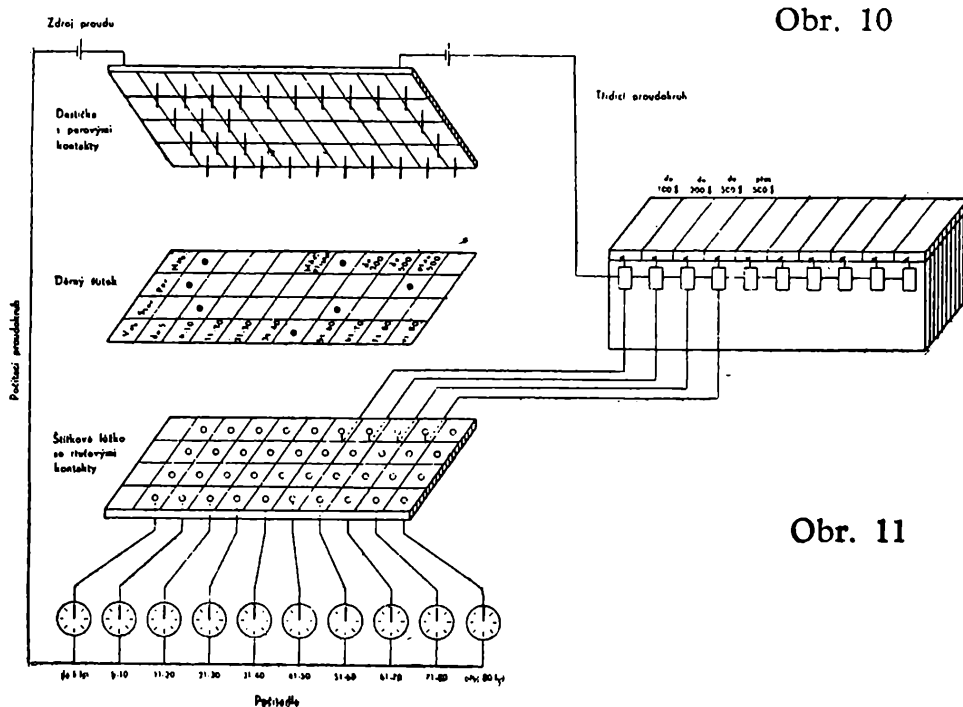


Obr. 9

Velký konkurenční boj se společnostmi IBM byl příčinou založení kapitálově silné společnosti Remington Rand, které se zúčastnilo 20 firem. Název společnosti byl převzat od známého výrobce pušek a později šicích a psacích strojů. Nově založená společnost Remington Rand převzala v roce 1927 další vývoj a výrobu Powersových strojů. V r. 1913 byla jedna souprava Powersových strojů před-



Obr. 10



Obr. 11

vedena v Londýně. Po předvedení byla instalována u pojišťovací společnosti The Prudential Assurance, která začala později vyrábět v licenci ve své továrně v Croydonu vlastní stroje soustavy Powers. Zde byl postaven např. první alfanumerický tabulátor. Později se Powersova společnost ve Spojených státech dohodla s anglickou společností o společné výměně patentů a technické dokumentace a o zřízení prodejny Powersových strojů ve Francii. V Paříži byla založena akciová společnost SAMAS, což je zkrácený název firmy Société Anonyme des Machines a Statistiques. Teprve roku 1929 byla v Anglii zřízena oficiální firma Powers-Samas Accounting Machines. Část jejich podílů převzala firma Remington Rand a tím si zajistila vliv na vývoj a výrobu strojů soustavy Powers v Anglii.

Roku 1910 byla založena v Německu společnost Deutsche Hollerith Maschinen-gesellschaft (zkratka Dehomag), která vyráběla Hollerithovy stroje. Kromě toho byla založena v Německu sesterská společnost Powers, která ve spolupráci s firmou Siemens vyráběla Powersovy stroje. Roku 1931 byla založena v Paříži společnost Compagnie des Machines BULL, která vyráběla stroje na děrné štítky zvláštní konstrukce podle odkoupených patentů norského vynálezce Frederika Bulla. V SSSR bylo započato s výrobou děrnostítkových strojů v r. 1929.

(Dokončení)

Deskriptivní geometrie



Inž. Ladislav Drs, FAPS, Praha:

Konstrukce perspektivy z půdorysu a nárysu

Názorné obrazy předmětů získáváme v deskriptivní geometrii mnoha způsoby. Strojní a stavební detaily zobrazujeme v (kosoúhlé) axonometrii nebo v kosoúhlém promítání, větší celky - hlavně stavby - zobrazujeme v perspektivě. Existuje mnoho metod, jak sestavit perspektivu. Ukážeme v dalším jednoduchou konstrukci perspektivy z půdorysu a nárysu, jejíž další výhoda spočívá v tom, že ji můžeme snadno zmechanisovat.

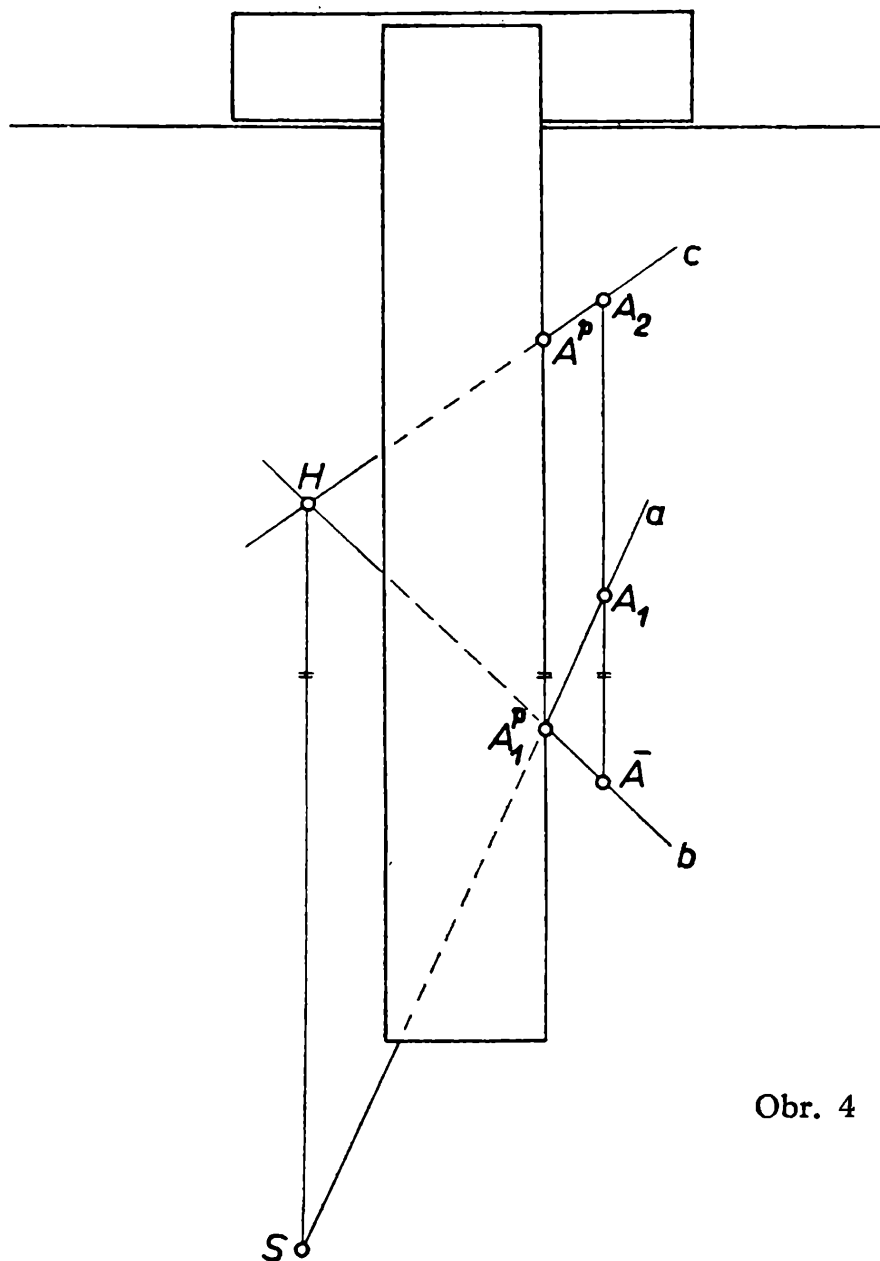
Budiž dán půdorys a nárys objektu ω (obr. 1). Nárysně ν říkáme *perspektivní průmětna*, půdorysně π *základní rovina*. Jejich průsečnice, osa x je *základnice* $z \equiv x$. Zvolme bod O (oko), jímž se na daný objekt díváme. Nárysem O_2 vedená rovnoběžka h s x je *horizont*, bod O_2 je *hlavní bod perspektivy* H , $H \equiv O_2$. Vzdálenost bodu O od ν je *distance* d perspektivy, $d = H_1O_1$. Vzdálenost bodu O od π je *výška oka* v , $v = HH_1$, volíme ji obyčejně rovnu 1,60 m. Sestrojíme bod S na

přímce O_1O_2 (*hlavní vertikála*) tak, aby délka HS byla rovna délce H_1O_1 . Průmět objektu ω z bodu O do v je *perspektiva* ω^p objektu ω . Tuto perspektivu získáme dále vyloženým postupem. Důkaz provádět nebudeme, překračoval by rámec vašich znalostí.

Konstrukce perspektivy A^p bodu A daného půdorysem A_1 a nárysem A_2 :

1. Perspektiva A_1^p bodu A_1 je průsečík přímek SA_1 a $H\bar{A}$, kde $\bar{A}$ je průsečík přímky A_1A_2 se základnicí z .

2. Perspektiva a^p svislé přímky $a \equiv A_1A$ je kolmice k základnici z vedená bodem A_1^p .



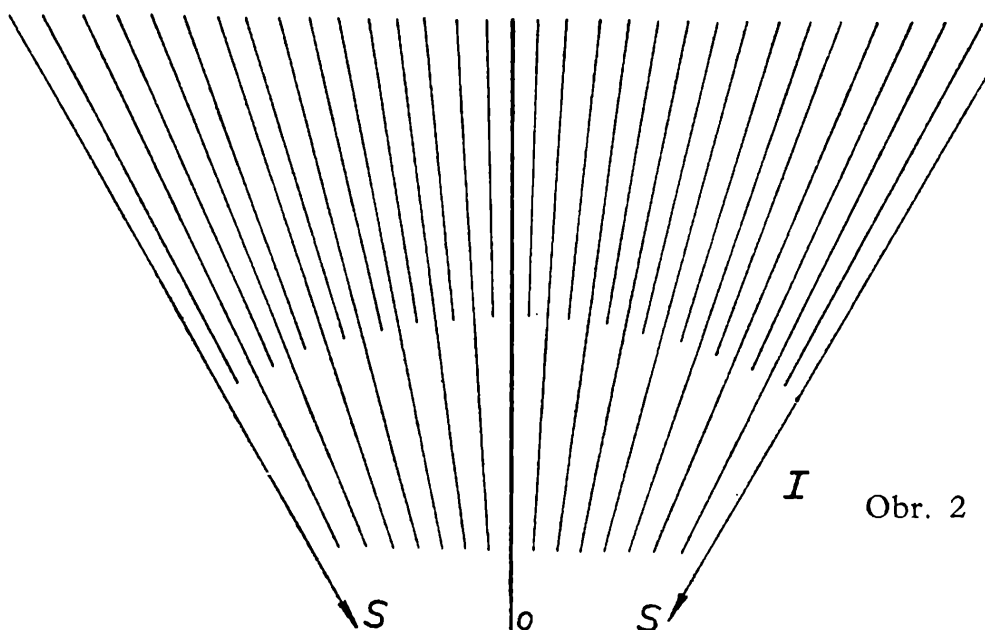
Obr. 4

3. Perspektiva A^p bodu A je průsečík přímek a^p a HA_2 .

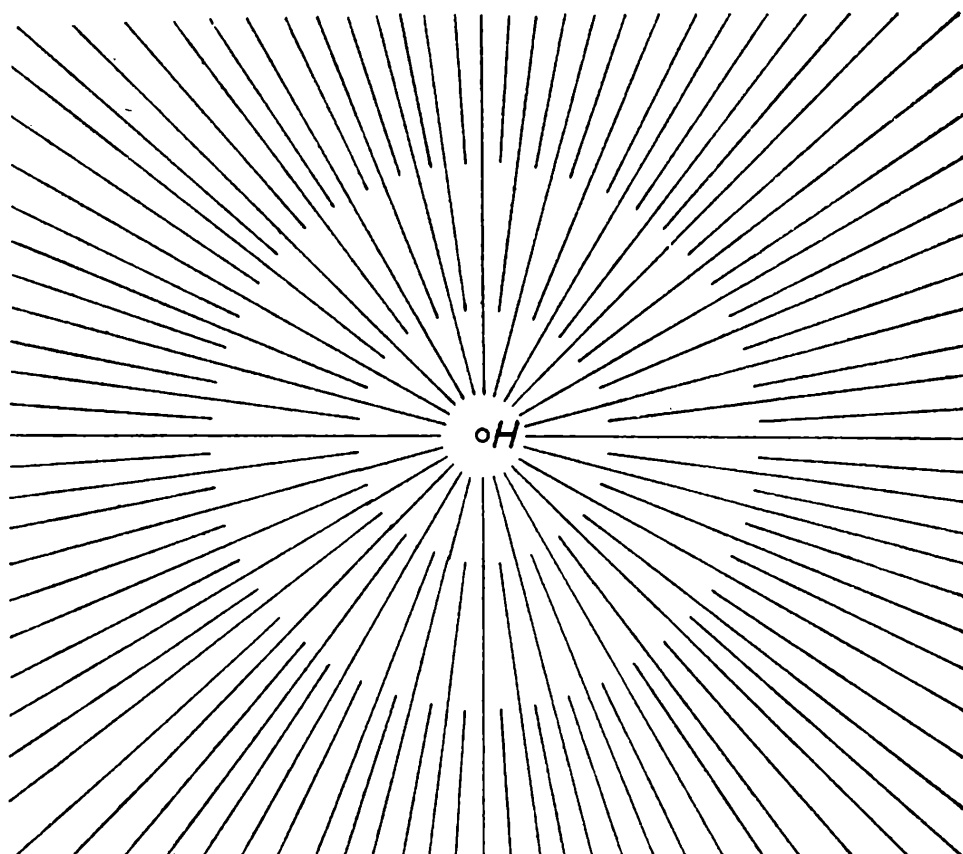
Budiž N nevlastní bod¹⁾ na přímce l , resp. k v π , resp. rovnoběžné s π ; $l \parallel k$.

¹⁾ Pojem nevlastního bodu je podrobně vysvětlen v článku doc. dr. K. Havlíčka „Nevlastní elementy v geometrii“, Rozhledy 1957, str. 19. Nevlastní bod je nekonečně vzdálený bod přímky.

$N_{1\infty}$ je nevlastní bod přímky l_1 , resp. k_1 , $N_{2\infty}$ nevlastní bod přímky l_2 , resp. k_2 , $k_2 \parallel z$. Podlé předchozí konstrukce je $SN_{1\infty} \parallel k_1$, $HN_{2\infty} = h$, $HN_{\infty} = h$, tj. bod $N_1^p \equiv N^p$ leží na h . Z toho plyne: průměty nevlastních bodů základní roviny π



Obr. 2



Obr. 3

II

jsou body přímky h , čili: průmět nevlastní přímky roviny π je přímka h . Bod N^p se nazývá *úběžník* přímky l , resp. k , přímka h je *úběžnice* základní roviny π . Rovnoběžky l , k se tedy zobrazí jako různoběžky se společným úběžníkem na horizontu h .

The diagram illustrates a complex geometric structure, likely a crystal lattice or a mechanical model, viewed from an isometric perspective. A central rectangular prism is shown with various points and lines labeled. Key labels include:

- $a_1 \equiv A_1$ and A_2 at the top left corner.
- a_2 and h along the vertical axis.
- $H \equiv O_2$ at the center of the prism.
- A_1^p and A_2^p at the bottom left corner.
- $\bar{A}$ and H_1 along the bottom horizontal axis.
- $L_1 \equiv L_2 \equiv L_1^p \equiv L^p$ at the bottom right corner.
- $l_2 \equiv x \equiv z \equiv v_1$ and $\bar{N}_\infty$ along the bottom right axis.
- $N_1 \equiv N_1^p$ and $N_2 \equiv N_2^p$ at the top right corner.
- $k_1 \equiv l_1$ and k_2 along the top right axis.
- k^p and $k_1^p \equiv l_1^p \equiv l_1^p$ along the top right axis.
- S and O_1 at the bottom center.
- v and v_1 along the bottom center axis.

The diagram uses solid lines for the main structure and dashed lines for auxiliary construction lines. The labels are in a mix of standard and superscripted letters, indicating different states or components of the structure.

Oba výsledky můžeme použít pro kontrolní konstrukce.

1. Sestrojíme na průhledném papíře rastr I (obr. 2), tvořený svazkem přímek uvnitř šedesátistupňového úhlu. Lidské oko obsáhne totiž objekty, které leží

uvnitř tak zvaného *zorného kužele*, tj. rotačního kužele se středem O , osou OH a s vrcholovým úhlem 60° . Přímký rastru narýsujeme pokud možno hustě a pravidelně. Střed svazku umístíme do bodu S a rastr tak, aby půdorys zobrazovaného objektu ležel uvnitř rastru a aby osa o rastru splynula s hlavní vertikálou. Když se to nepodaří, zvětšíme distanci, tj. snížíme bod S . Body vně rastru by totiž při distanci, která by byla zvolena příliš malá, dávaly obraz, který by nepůsobil dobře prostorově.

2. Narýsujeme rastr II (obr. 3), též na průhledném papíře, tvořený svazkem přímek. Přímký opět rýsujeme co možno hustě a pravidelně. Střed svazku umístíme do bodu H .

3. Otočíme rýsovací prkno tak, aby hrana příložníku určovala svislice (obr. 4).

Oba rastry položíme na daný půdorys a nárys a přes ně napneme průhledný papír, na který rýsujeme perspektivu takto:

Jestliže bod A_1 leží na přímce a rastru I, bod $\bar{A}$ na přímce b rastru II a bod A_2 na přímce c rastru II, pak $A_1^p = a \times b$, bodem A_1^p vedeme užitím příložníku svislici a^p , $a^p \times c = A^p$.

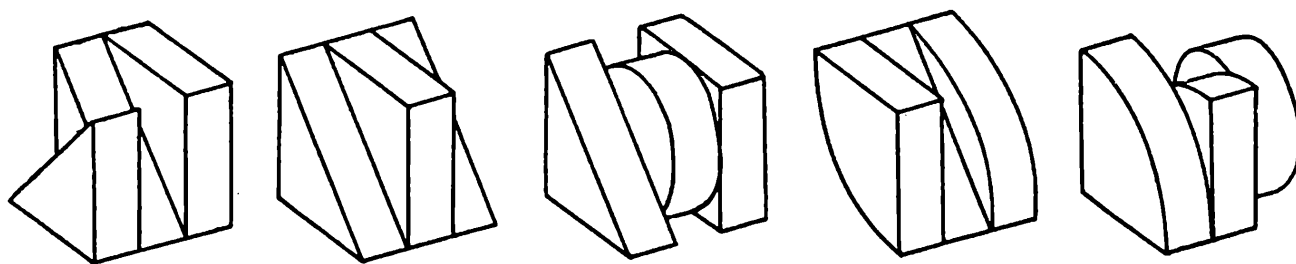
Nárys předmětu v perspektivní průmětně nebývá obvykle dán, ale známe-li z souřadnice bodů objektu, pak bod A_2 zjistíme snadno, je-li nula měřítka příložníku na základnici z , neboť $\bar{A}A_2 = z_A$.

Zařízení, které mechanizuje konstrukci perspektivy se nazývá *perspektograf*. Perspektografy byly konstruovány ve velmi rozmanitém provedení a jsou více méně složité. U nás se na příklad vyrábí Salnerův perspektograf. Náš právě popsaný „perspektograf“ je jednoduchý, neboť nevyžaduje žádné zvláštní zařízení. Stačí jednou provždy sestrojít rastry I a II.

L u d ě k G r a n á t, ČVUT, Praha:

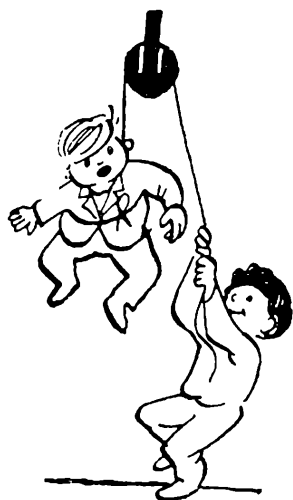
Jednoduché zobrazování metody

Dokončení)



Obr. 7

Řešení cvičení k článku L. Granáta „Jednoduché zobrazovací metody“ v minulém čísle Rozhledů. Další řešení si můžete sestrojít sami. Pokud je třeba sestrojít zobrazení kružnice, která neleží v průmětně, ani není s ní rovnoběžná, můžeme si zobrazit průměr rovnoběžný s průmětnou a průmět k němu kolmý a použít příčkové konstrukce bodů elipsy.



Fyzika

První ročník Fyzikální olympiády

V minulém čísle jsme uveřejnili příklady pro I. kolo FO. Nyní uveřejňujeme ještě pro účastníky I. kola témata k samostatnému prostudování. Účastníci v kategorii A prostudují článek „Postupné a stojaté vlnění“, v kategorii B článek „Jednoduchý pohyb kmitavý“, v kategorii C článek „Určování chyb měření fyzikálních veličin“.

Látku dobře prostudujte, neboť při výběru příkladů do II. kola FO bude k ní také přihlíženo. Autory článků jsou prof. dr. Rostislav Košťál, Brno, dr. Marta Chytilová, Praha a dr. Bohumil Vlach.

Postupné a stojaté vlnění

Kategorie A

I.

V tomto článku navazujeme na základní pojmy vlnění postupného i stojatého, které jsou vyloženy v učebnici fyziky pro 10. roč. JSS. Budeme se podrobněji zabývat postupným a stojatým vlněním v řadě bodové.

Řadu bodovou si představujeme jako přímku složenou z hmotných bodů, z nichž sousední působí na sebe navzájem pružnými silami. *Postupná rychlost vlnění* je číselně rovna vzdálenosti, do které vlnění postoupí za 1 sekundu; označme ji c . Pak za dobu T jednoho kmitu postoupí vlnění do vzdálenosti délky vlny λ . Pro ni platí

$$\lambda = cT \quad \text{nebo} \quad \lambda = \frac{c}{f}, \quad (1)$$

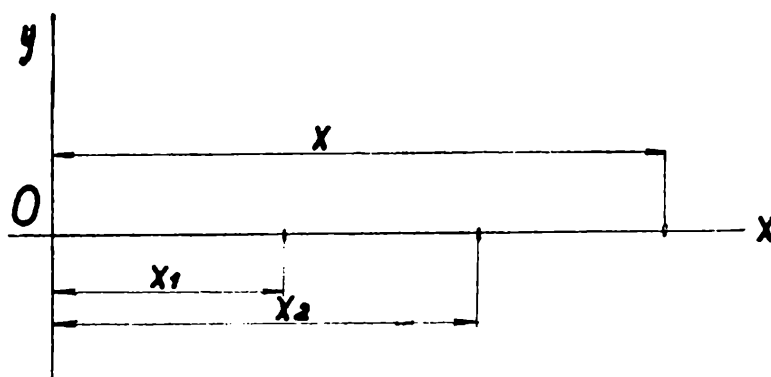
kde f je frekvence vlnění. Při postupném vlnění, ať příčném nebo podélném, kmitají všechny body se stejnou frekvencí, stejnou amplitudou, ale obecně s různou fází. Body, které mají vzdálenost $k \cdot \lambda$ (k je přirozené číslo), kmitají vždy v téže fázi. Jest tedy λ nejkratší vzdálenost dvou bodů kmitajících ve stejné fázi. Např. vzdálenost dvou sousedních vrchů (nebo dvou sousedních dolů) u příčného vlnění je rovna λ , vzdálenost dvou sousedních zhuštění (nebo dvou sousedních zředění) u podélného vlnění je rovna λ .

Jestliže rozkmitávaný bod vykonává pohyb s výchylkou $y = A \cdot \sin \omega t$, postoupí tato výchylka v řadě bodové do vzdálenosti x od rozkmitávaného bodu za dobu $t_1 = \frac{x}{c}$. Stav v tomto bodě je vždy týž, jaký byl v bodě rozkmitávaném před dobou t_1 , a tedy pro výchylku y_1 v tomto bodě platí

$$y_1 = A \sin \omega (t - t_1) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) = \\ = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Přitom bereme x vždy kladně ve směru šíření vlnění.

Vlnění je charakterisováno třemi konstantami: amplitudou A , dobou kmitu T a délkou vlny λ ; rychlost vlnění jest pak určena rovnicí (1).



Obr. 1/A

Jestliže jsou v bodové řadě dva zdroje vlnění, z nichž se šíří vlnění oběma směry, pak v části bodové řady mezi oběma zdroji se šíří vlnění proti sobě, vně pak stejným směrem. V každém bodě se obě vlnění skládají - interferují - a vznikne vlnění s výchylkou rovnou vektorovému součtu výchylek obou vlnění.

II.

Nyní vyšetříme matematicky skládání dvou vlnění v bodě ve vzdálenosti x od počátku. Prvé vlnění vychází z bodu ve vzdálenosti x_1 a druhé z bodu ve vzdálenosti x_2 od počátku. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že obě vlnění mají stejnou amplitudu A , stejnou dobu kmitu T , stejnou délku vlny λ a že začínají se stejnou fází (nulovou); u příčného vlnění předpokládáme ještě, že výchylky obou vlnění jsou v téže rovině. Pak v bodě o souřadnici x , která splňuje podmínku $x > x_2 > x_1$ (obr.1/A), jsou výchylky jednotlivých vlnění

$$y_1 = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - x_1}{\lambda} \right),$$

$$y_2 = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - x_2}{\lambda} \right).$$

Za daných předpokladů je výchylka výsledného vlnění vyjádřena algebraickým součtem obou výchylek

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} \right) \cdot \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad (2)$$

(při výpočtu výchylky y jsme použili vzorce:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}) .$$

Činitel $\cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$ je stálý, a proto jej zahrneme do amplitudy. Je tedy amplituda výsledného vlnění $2A \cdot \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$ a nezávisí na souřadnici x , nýbrž na vzájemné vzdálenosti obou zdrojů. Amplituda dosáhne maximální hodnoty $2A$, když platí

$$\left| \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \right| = 1 ,$$

tj.

$$\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = k\pi$$

čili

$$x_2 - x_1 = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}$$

Výsledná amplituda bude nulová (vlnění se zruší), když bude platit

$$\left| \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \right| = 0 ,$$

tj.

$$\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

čili

$$x_2 - x_1 = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} .$$

Výsledné vlnění je podle rovnice (2) opět vlnění postupné o téže době kmitu T , téže délce vlny λ a o amplitudě $2A \cdot \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$; jeho zdánlivý zdroj je uprostřed mezi oběma zdroji. Amplituda vlnění bude mít maximální hodnotu $2A$, když vzájemná vzdálenost obou zdrojů bude rovna sudému násobku poloviny

délky vlny; amplituda bude nulová (vlnění se zruší), když vzájemná vzdálenost obou zdrojů bude rovna lichému násobku poloviny délky vlny.

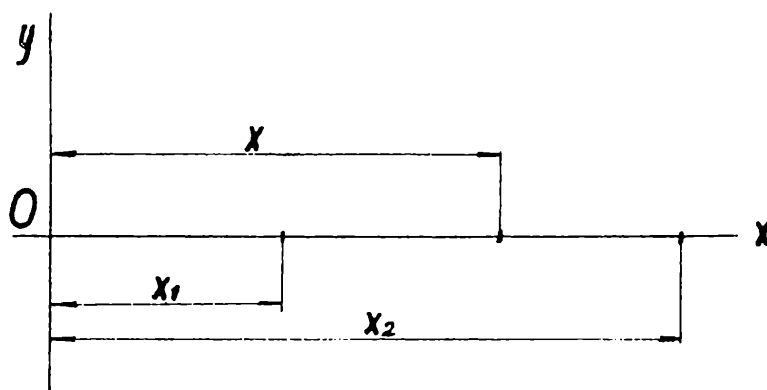
III.

Nyní vyšetříme skládání obou uvedených vlnění v bodě o souřadnici x , která splňuje podmínku $x_1 < x < x_2$ (obr. 2/A).

Pak pro výchylky jednotlivých vlnění platí

$$y_1 = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - x_1}{\lambda} \right),$$

$$y_2 = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2 - x}{\lambda} \right).$$



Obr. 2/A

Za daných předpokladů je výchylka výsledného vlnění vyjádřena opět algebraickým součtem obou výchylek

$$y = y_1 + y_2 = 2 A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \cdot \cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} \quad (3)$$

Poněvadž $x_2 - x_1$ jest konstantní, je činitel $\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right)$ na sou-

řadnici x zvoleného bodu nezávislý a je jen funkcí času. Činitel $\cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda}$

je na čase nezávislý a mění se se souřadnicí x , proto jej zahrneme do amplitudy. Výsledný pohyb můžeme považovat za vlnění s amplitudou

$$2 A \cdot \cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda}, \text{ závislou na souřadnici } x.$$

Amplituda dosáhne maximální hodnoty A_2 v těch bodech, pro jejichž souřadnice x je splněna podmínka

$$\cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} = 1 ,$$

tj.

$$2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} = k\pi$$

čili

$$x - \frac{x_1 + x_2}{2} = k \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{4} . \quad (4)$$

Tyto body kmitají s maximální amplitudou a nazýváme je kmitny. Poloha jedné kmitny x' je určena vztahem (4); polohu nejbližší další kmitny x'' dostaneme, když do výrazu (4) dosadíme $k + 1$ místo k :

$$x'' - \frac{x_1 + x_2}{2} = (k + 1) \frac{\lambda}{2} ,$$

$$x' - \frac{x_1 + x_2}{2} = k \frac{\lambda}{2} ,$$

$$x'' - x' = \frac{\lambda}{2} .$$

Je tedy vzdálenost dvou sousedních kmiten $\frac{\lambda}{2}$.

Vlnění se zruší v těch bodech, pro jejichž souřadnice x je splněna podmínka

$$\cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} = 0 ,$$

tj.

$$2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} ,$$

čili

$$x - \frac{x_1 + x_2}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{4} . \quad (5)$$

Z rovnice (5) se stejným způsobem jako z rovnice (4) vypočte, že vzdálenost

dvou sousedních uzlů je $\frac{\lambda}{2}$. Z rovnic (4) a (5) je vidět, že vzdálenost uzlu a sousední kmitny je $\frac{\lambda}{4}$.

Ze vztahu (3) je vidět, že všechny body mají amplitudy v mezích od 0 do $2A$.

Poněvadž znaménko výrazu $\cos 2\pi \frac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{\lambda}$ se mění, když souřadnice x projde uzlem, je znaménko tohoto výrazu v úseku mezi dvěma uzly stálé. Proto všechny body mezi dvěma sousedními uzly kmitají se stejnou fází; body ve dvou sousedních polovinách vlny, vymezených uzly, kmitají s opačnou fází.

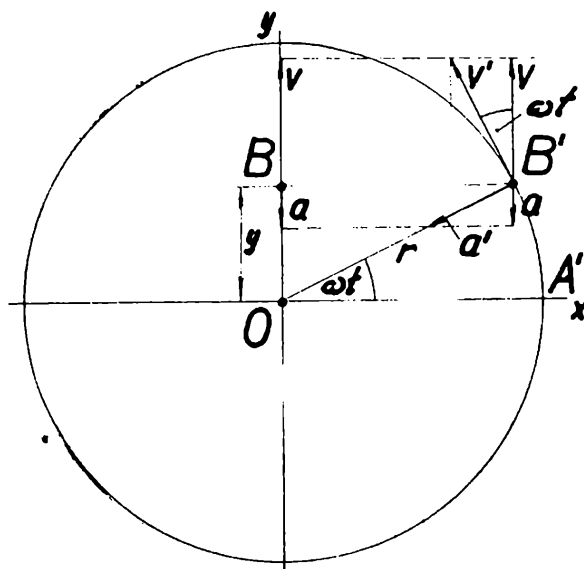
Vlnění, u něhož vznikají uzly a kmitny, nazýváme *vlnění stojaté*. Vlnění stojaté tedy vzniká, když proti sobě postupují v bodové řadě dvě vlnění o stejné amplitudě a stejné frekvenci.

Kategorie B

Jednoduchý pohyb kmitavý

1. Úvod

Průmětem rovnoměrného pohybu po kružnici do libovolného jejího průměru dostaneme *jednoduchý pohyb kmitavý* neboli *pohyb harmonický*.



Obr. 1/B

Připomeňme si proto nejdříve základní vztahy pro rovnoměrný pohyb po kružnici. Poloměr kružnice označme r , postupnou rychlost v' , úhlovou rychlost ω , dostředivé zrychlení a' , oběžnou dobu T a frekvenci f . Pak platí

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v' = r\omega, \quad a' = r\omega^2 = \frac{v'^2}{r}.$$

Nechť kružnice se středem v počátku pravoúhlé souřadnicové soustavy je dráhou rovnoměrného kruhového pohybu (obr. 1/B). Promítněme nyní tento rovno-

měrný kruhový pohyb na osu y . Střed kružnice nazýváme *rovnovážnou polohou* jednoduchého kmitavého pohybu. Počáteční polohu bodu obíhajícího po kružnici zvolme na ose x v bodě A' . Průmět bodu A' na osu y je v bodě O . Za dobu t opíše průvodič r úhel ωt a pohybující se bod dostane se z polohy A' do polohy B' . Průmět bodu B' do osy y je bod B . Vzdálenost $OB = y$ nazýváme *výchylkou* kmitavého pohybu; pro ni platí podle obr. 1/B

$$y = r \cdot \sin \omega t. \quad (1)$$

Největší výchylka je tedy r ; nazývá se *rozkmít* neboli *amplituda* kmitavého pohybu.

Průmět vektoru rychlosti v' pohybu po kružnici do osy y je vektor rychlosti kmitavého pohybu v . Z obr. 1/B je vidět, že

$$v = v' \cdot \cos \omega t = r \omega \cdot \cos \omega t.$$

Průmět vektoru zrychlení a' do osy y dává vektor zrychlení a kmitavého pohybu. Z obr. 1/B je vidět, že vektor zrychlení kmitavého pohybu má velikost $a = a' \sin \omega t$; poněvadž má opačný směr než výchylka, píšeme

$$a = -a' \cdot \sin \omega t = -r \omega^2 \cdot \sin \omega t.$$

Poněvadž $r \cdot \sin \omega t = y$, jest

$$a = -\omega^2 y. \quad (2)$$

Dostali jsme tak rovnici pro zrychlení kmitavého pohybu, kterou vyjádříme slovy: Při jednoduchém kmitavém pohybu je zrychlení přímo úměrné výchylce z rovnovážné polohy a je opačného směru než výchylka. Není tedy u harmonického pohybu zrychlení stálé, nýbrž se zvětšuje s výchylkou od rovnovážné polohy a směřuje stále k rovnovážné poloze. Význam konstanty úměrnosti $-\omega^2$ vysvětlíme později.

Pohyb z rovnovážné polohy do maximální výchylky, odtud zpět do rovnovážné polohy, pak do maximální výchylky na opačné straně a zpět do rovnovážné polohy nazýváme *kmit*. Doba potřebná k vykonání jednoho kmitu nazývá se *doba kmitu* T . Z obrázku a z matematického odvození je vidět, že doba kmitu T je rovna oběžné době příslušného pohybu po kružnici. Proto *kmitočet* neboli *frekvence* $f = \frac{1}{T}$

kmitavého pohybu se rovná frekvenci příslušného pohybu po kružnici.

Poněvadž se kmitavý pohyb opakuje za dobu T a poněvadž funkce sinus se opakuje s periodou 2π , musí platit

$$y = r \cdot \sin \omega (t + T) = r \cdot \sin (\omega t + 2\pi);$$

z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi, \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \end{aligned}$$

Tato veličina se nazývá *kruhová frekvence* kmitavého pohybu a její číselná hodnota se rovná úhlové rychlosti příslušného pohybu po kružnici. Je tedy konstanta

úměrnosti v rovnici (2) druhou mocninou kruhové frekvence se záporným znaménkem.

Zjistíme-li při nějakém pohybu, že jeho zrychlení je přímo úměrné výchylce a je opačného směru než výchylka, tj. $a = -ky$, pak jde o pohyb kmitavý a konstanta úměrnosti k je rovna druhé mocnině kruhové frekvence

$$k = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (3)$$

Z tohoto vztahu lze určit dobu kmitu kmitavého pohybu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}. \quad (4)$$

V dalším si všimneme dvou důležitých jednoduchých kmitavých pohybů.

2. Pohyb tělesa zavěšeného na pružině

Na pružinu délky d_0 zavěšujeme tělesa o různé hmotě m ; přitom předpokládáme, že hmota pružiny je zanedbatelná vzhledem k hmotám m . Kdyby těleso nebylo zavěšeno, padalo by volným pádem se zrychlením g , protože na ně působí jeho váha $F = mg$. Délku pružiny zatížené tělesem o hmotě m označme d . Shledáme, že prodloužení pružiny $d - d_0$ je přímo úměrné váze zavěšeného tělesa, a proto platí vztah

$$F = K(d - d_0).$$

Konstanta úměrnosti K se nazývá *tuhost pružiny*. Tuhost pružiny

$$K = \frac{F}{d - d_0}$$

rovná se číselně síle, která způsobuje jednotkové prodloužení pružiny. Poněvadž je při prodloužení pružiny těleso v klidu (v rovnovážné poloze), působí na ně směrem dolů jeho váha a směrem vzhůru stejně velká síla pružnosti. Proto platí rovnice

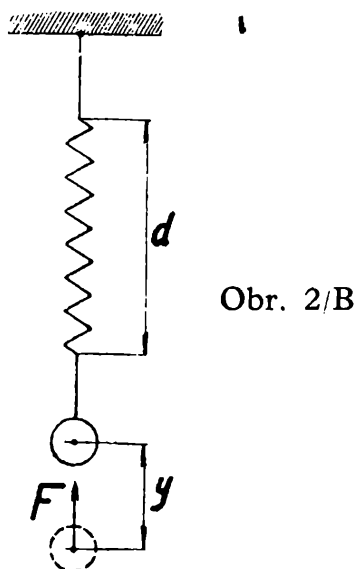
$$mg = K(d - d_0).$$

Vychýlíme-li těleso z rovnovážné polohy o délku y směrem dolů (obr. 2/B) působí na ně směrem vzhůru, tj. opačným směrem než je směr výchylky, síla pružnosti

$$F = -Ky.$$

Tato síla udělí hmotě tělesa m podle 2. pohybového zákona zrychlení $a = \frac{F}{m}$,

a proto $a = -\frac{K}{m}y$



Poněvadž veličiny K i m jsou při pohybu konstantní, je zrychlení pohybu přímo úměrné výchylce a má opačný směr než výchylka. Koná tedy těleso zavěšené na pružině jednoduchý pohyb kmitavý a podle vztahu (3) platí

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K}{m}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Doba kmitu tělesa zavěšeného na pružině je tedy přímo úměrná druhé odmocnině jeho hmoty a nepřímo úměrná druhé odmocnině tuhosti pružiny.

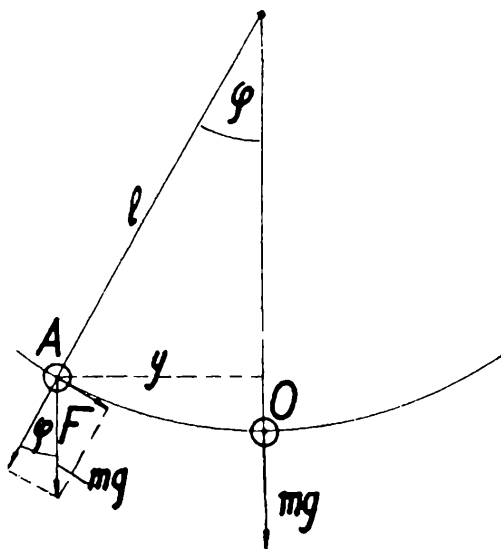
3. Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je hmotný bod zavěšený na vlákně neproměnné délky, jehož hmota je zanedbatelně malá vzhledem k hmotě bodu. V rovnovážné poloze se váha hmotného bodu ruší pevností závěsu. Vychýlíme-li kyvadlo z rovnovážné polohy o úhel φ , působí na ně svisle dolů váha mg . Váhu mg rozložíme na dvě složky, z nichž jedna má směr vlákna a druhá je k němu kolmá (obr. 3/B). Složka ve směru vlákna se ruší pevností závěsu a pohyb způsobuje jen druhá složka

$$F = -mg \cdot \sin \varphi,$$

která má opačný směr než výchylka. Podle obr. 3/B je

$$\sin \varphi = \frac{y}{l},$$



Obr. 3/B

kde y je vzdálenost vychýleného hmotného bodu od vlákna v rovnovážné poloze. Síla F uděluje hmotě m zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = -g \cdot \sin \varphi = -\frac{g}{l} y$$

Poněvadž veličiny g a l jsou konstantní, je zrychlení přímo úměrné výchylce y a má opačný směr než výchylka. Působením této síly koná hmotný bod pohyb kmitavý, a proto musí podle (3) platit

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5)$$

Doba kmitu matematického kyvadla nezávisí na jeho hmotě.

Poněvadž zrychlení má směr síly F , tj. směr tečny kružnice, a poněvadž výchylku y měříme vzdáleností pohybujícího se bodu od vlákna v rovnovážné poloze, je pohyb matematického kyvadla jednoduchý kmitavý pohyb jen tehdy, pokud kruhový oblouk OA můžeme zaměnit polotětivou y . Volíme-li úhel φ menší než 5° , je skutečná doba kmitu nanejvýš o 0,1 % větší než doba kmitu vypočtená podle vzorce (5).

Kategorie C

Určování chyb měření fyzikálních veličin

Fyzikální veličiny měříme buď přímo, nebo je určujeme výpočtem z jiných naměřených veličin. Probereme přímé měření. Naměřená hodnota veličiny se vždy o něco liší od hodnoty skutečné. Rozdíl obou hodnot nazýváme *chybou měřené veličiny*. Tuto chybu nemůžeme nikdy určit; naším úkolem je určit její pravděpodobnou velikost.

Chyby měření rozdělujeme na soustavné a nahodilé.

1. Chyby soustavné

Chyby soustavné vznikají buď z nedokonalosti měřicí metody, nebo z chyby užitého přístroje nebo z nedokonalosti práce pozorovatele.

Když určujeme např. rychlost zvuku ve vzduchu měřením v trubici, dopouštíme se chyby, poněvadž předpokládáme, že rychlost zvuku uvnitř trubice je táž jako na volném prostranství; to však nesouhlasí zcela se skutečností. V tom spočívá chyba metody. Na chybu metody usuzujeme z naměření téže veličiny různými metodami.

Chyby přístroje jsou způsobeny jeho technickou nedokonalostí. Např. teploměrná stupnice, nanesená na sklo brzy po zhotovení, se smrští a teploměr udává hodnoty vyšší. Chyby přístrojů odstraňujeme srovnáním s přístroji dokonalejšími; z tohoto srovnání si pořizujeme pro přístroj korekční tabulku, případně graf.

Osobní chyba pozorovatele se projevuje např. tím, že od sluchového nebo zrakového vjemu uplyne určitá doba do vykonání příslušného úkonu. Na osobní chyby usuzujeme z výsledků měření provedených několika pozorovateli.

Soustavné chyby bývají poměrně stálé.

2. Chyby nahodilé

Chyby nahodilé se projevují tím, že opakovaná měření se vždy od sebe poněkud liší; příčiny jejich vzniku neznáme. Při čtení na měřítku mohou nahodilé chyby souviset např. s tím, že se nedíváme kolmo na stupnici, nebo že se během měření změnila teplota měřeného předmětu nebo měřítka. Při měření mikrometrem může vzniknout chyba tím, že šroub při jednotlivých měřeních nestejně dotáhneme. Tyto chyby odstraňujeme opakováním měření. Z naměřených hodnot určujeme *pravděpodobnou hodnotu měřené veličiny*.

3. Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny

Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny vyložíme na měření mikrometrem.

Při měření délky mikrometrem sevřeme měřený předmět čelistmi mikrometru a přečteme hodnotu (na tisícinu milimetru). Měření opakujeme n -krát (např. desetkrát); přitom zjistíme, že naměřené hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ nejsou stejné. Správná hodnota x bude pravděpodobně mezi krajními naměřenými hodnotami. Správnou hodnotu x neznáme a z měření určíme nejvyšší hodnotu pravděpodobnou $\bar{x}$. Rozdíl $\bar{x} - x_k$ se nazývá *odchylka měření*. Předpokládáme, že kladné odchylky jsou stejně pravděpodobné jako odchylky záporné. Proto součet kladných odchylek musí být co do velikosti roven součtu záporných odchylek. Tedy součet všech odchylek musí být roven nule

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n) = 0. \quad (1)$$

Z toho vypočteme pravděpodobnou hodnotu $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Tato hodnota $\bar{x}$ je tedy aritmetickým středem naměřených hodnot.

Abychom nemuseli v čitateli vypisovat všechny členy, napíšeme jen jeden, který označíme x_k . Součet členů vyznačíme tím, že před x_k napíšeme velké řecké písmeno Σ (sigma). Abychom vyznačili, že index k probíhá všechna přirozená čísla od 1 do n , přepíšeme pod znak $k = 1$ a nad znak n , tedy

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$$

Označme sčítance v rovnici (1) obecně $\bar{x} - x_k = \Delta_k$.

Střední odchylku jednotlivého měření nemůžeme počítat jako aritmetický střed jednotlivých odchylek, poněvadž jejich součet je nulový. Proto vypočteme součet druhých mocnin odchylek

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = (\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2,$$

který budeme značit prostě $\Sigma \Delta^2$.

Každé měření je zatíženo nějakou chybou. Pro nás je důležité, jakou chybou je zatížen aritmetický střed naměřených hodnot. Počtem pravděpodobnosti se odvodí, že tato chyba - říkáme jí *střední chyba aritmetického středu* - je dána vztahem

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n(n-1)}}$$

Odvození $\bar{\delta}$ pro obtížnost neprovádíme.

Poněvadž hledaná veličina může být až o $\bar{\delta}$ větší nebo menší než aritmetický

střed $\bar{x}$, připisujeme k $\bar{\delta}$ znaménko $\pm$, hledaná veličina $x = \bar{x} \pm \bar{\delta}$ je tedy v mezích

$$\bar{x} - \bar{\delta} \leq x \leq \bar{x} + \bar{\delta}.$$

Střední chybu aritmetického středu $\bar{\delta}$ počítáme jen na jedno místo. Aritmetický střed, k němuž tato chyba přísluší, píšeme jen po to místo, které je postiženo chybou; další místa vynecháme. Když např. $\bar{x} = 3,854\,27\text{ cm}$, $\bar{\delta} = \pm 0,002\text{ cm}$, píšeme $x = 3,854\text{ cm} \pm 0,002\text{ cm}$. Naopak vypočteme-li $\bar{\delta} = \pm 0,01\text{ cm}$ a má-li aritmetický střed $\bar{x}$ měřené délky hodnotu přesně 20 cm, musíme psát $x = 20,00\text{ cm} \pm 0,01\text{ cm}$.

Při zpracování naměřených hodnot postupujeme takto:

1. Určíme aritmetický střed $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.
2. Určíme všechny odchylky $\Delta_k = \bar{x} - x_k$.
3. Pro kontrolu výpočtů v bodě 1 a 2 odchylky sečteme (při správném výpočtu musí platit $\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0$).
4. Určíme příslušná Δ_k^2 .
5. Určíme $\sum \Delta^2$.
6. Vypočteme střední chybu aritmetického středu podle vzorce:

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}}.$$

7. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta}.$$

4. Stanovení chyby měření z kladných odchylek

Uvedený způsob výpočtu chyb lze nahradit jednodušším způsobem, u něhož použijeme jen součtu kladných odchylek $\sum \Delta_+$. Pak dostáváme pro střední chybu aritmetického středu (uvádíme bez odvození)

$$\bar{\delta} = \pm \frac{5 \sum \Delta_+}{2n \sqrt{n-1}}.$$

Výsledky obou způsobů výpočtu se liší od sebe jen nepatrně.

Při tomto způsobu zpracování naměřených hodnot postupujeme takto:

1. Určíme aritmetický střed $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$
2. Určíme všechny kladné odchylky $\Delta_{k+} = \bar{x} - x_k$.
3. Sečteme tyto kladné odchylky $\sum \Delta_+$.
4. Vypočteme střední chybu aritmetického středu podle uvedeného vzorce.

5. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta}.$$

5. Příklad na výpočet chyby měřené veličiny

Dotykovým měřítkem byla měřena délka válečku d desetkrát. Měření a výpočet výsledku zapíšeme takto:

d_k cm	Δ_k cm	Δ_k^2 cm
5,39	− 0,003	0,000 009
7	+ 17	289
41	− 23	529
0	− 13	169
39	− 3	9
8	+ 7	49
9	− 3	9
8	+ 7	49
7	+ 17	289
9	− 3	9
$\bar{d} = 5,387$	$\begin{array}{r} + 48 \\ - 48 \\ \hline \Sigma \Delta_k = 0 \end{array}$	$\Sigma \Delta_k^2 = 0,001 410$

$$\bar{\delta} = \pm \sqrt{\frac{0,001 410}{90}} \text{ cm} = \pm \sqrt{0,000 016} \text{ cm} = \pm 0,004 \text{ cm},$$

$$d = 5,387 \text{ cm} \pm 0,004 \text{ cm}.$$

Je tedy d v mezích

$$5,383 \text{ cm} \leq d \leq 5,391 \text{ cm}.$$

Použijeme-li pro výpočet jen kladných odchylek, dostáváme

$$\bar{\delta} = \pm \frac{1}{12} 0,048 \text{ cm} = \pm 0,004 \text{ cm}.$$

6. Chyba absolutní a relativní

Chybu vypočtenou v předcházejícím odstavci nazýváme chybou absolutní. K posouzení měření má větší význam chyba relativní, tj. poměr absolutní chyby $\bar{\delta}$ a veličiny $\bar{x}$. Relativní chybu r vyjadřujeme obvykle v procentech, $r = \frac{\bar{\delta} \cdot 100}{\bar{x}}$.

Např. pro $a = 58,2 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$ je relativní chyba

$$r = \frac{0,4 \cdot 100}{58,2} = 0,7 \% \text{ (menší než } 1 \% \text{);}$$

pro $b = 0,019 \text{ mm} \pm 0,002 \text{ mm}$ je relativní chyba

$$r = \frac{0,002 \cdot 100}{0,019} = 10,5 \% \text{ (větší než } 10 \% \text{).}$$

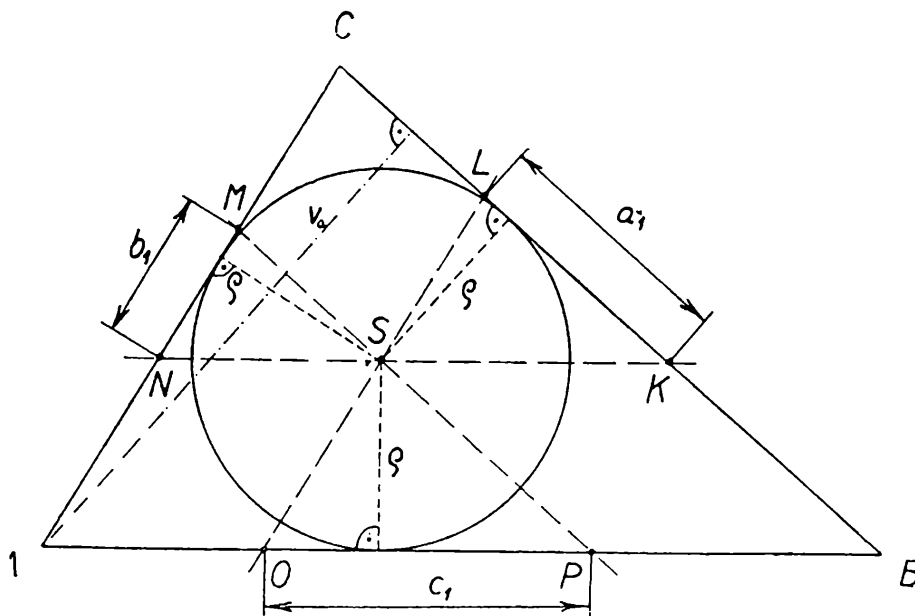
Relativní chyby ukazují, že první měření bylo přesnější než druhé, ačkoliv v prvním případě je absolutní chyba 40 cm a v druhém jen 0,002 mm. Snažíme se vždy měřit aspoň tak, aby relativní chyba byla menší než 1 %. U přesných měření žádáme, aby klesla pod 0,1 %, příp. na hodnotu ještě menší.



Úlohy k řešení

Řešení úloh z minulého ročníku

9. Rovnoběžky se stranami trojúhelníka vedené středem kružnice jemu vepsané vytínají na stranách a, b, c úseky a_1, b_1, c_1 . Dokažte, že $a_1 : b_1 : c_1 = a^2 : b^2 : c^2$.
Josef Langr



Obr. 1

Řešil Břetislav Fiala, učeň ZUŠ Tesla v Pardubicích:

V obr. 1 označíme $KL = a_1$, $MN = b_1$, $OP = c_1$, v_a, v_b, v_c jsou výšky na strany a, b, c , S je střed a ρ je poloměr vepsané kružnice.

Vzhledem k rovnoběžnosti příček plyne, že $\triangle KLS \sim \triangle SMN \sim \triangle PSO \sim \triangle BCA$; z podobnosti trojúhelníků obdržíme

$$a_1 = a \cdot \frac{\rho}{v_a}, \quad b_1 = b \cdot \frac{\rho}{v_b}, \quad c_1 = c \cdot \frac{\rho}{v_c} \text{ a odtud poměr}$$

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{a}{v_a} : \frac{b}{v_b} : \frac{c}{v_c}.$$

Výšky trojúhelníka ABC vyjádříme na základě jeho obsahu P :

$$v_a = \frac{2P}{a}, \quad v_b = \frac{2P}{b}, \quad v_c = \frac{2P}{c}, \text{ takže hledaný poměr je}$$

$$a_1 : b_1 : c_1 = \frac{a^2}{2P} : \frac{b^2}{2P} : \frac{c^2}{2P} = a^2 : b^2 : c^2,$$

čímž je důkaz proveden.

19. Buď dáno n -ciferné přirozené číslo, kde n není násobkem dvojky ani pětky. Pak buď toto číslo samo je násobkem čísla n , nebo vynecháním vhodných krajních cifer dosáhneme toho, že číslo sestavené ze zbylých cifer při zachování jejich pořádku, je násobkem čísla n . Dokažte! (Uvědomte si přitom, že nula je násobkem každého přirozeného čísla.)

Oldřich Kowalski

Řešení autorovo:

Pišme dané číslo M ve tvaru $M = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$, kde $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ jsou číslice čísla M .

Uvažujme čísla: $M_1 = a_n$, $M_2 = a_{n-1} \cdot 10 + a_n$, $M_{n-1} = a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \dots + a_n$, $M_n = M$.

a) Je-li některé z čísel M_i dělitelno číslem n , je tvrzení dokázáno, neboť stačí z čísla M vynechat prvních $(n-i)$ číslic, aby vzniklo M_i , což je násobek n .

b) Není-li žádné z čísel M_i dělitelno n , dává každé z těchto n čísel po dělení číslem n některý ze zbytků $1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Musí tedy aspoň dvě z vypsanych čísel dávat stejný zbytek po dělení číslem n . Necht' jsou to čísla $M_q > M_r$ ($1 \leq r < q \leq n$). Jejich rozdíl $M_q - M_r$ je číslem n dělitelný: $M_q - M_r = 10^r (a_{n-q+1} \cdot 10^{q-r-1} + \dots + a_{n-r})$.

Podle předpokladu jsou čísla n a 10^r nesoudělná, proto číslo v závorce je dělitelné číslem n . Číslo $M_q - M_r$ vzniklo z čísla M vyškrtnutím $n-q$ prvních číslic a r posledních číslic. Tím tvrzení dokázáno.

23. Sestrojte trojúhelník, daný součtem stran $a + c$, $b + c$ a úhlem γ .

Josef Glivický

Řešil Karel Diviš, JŠŠ Praha 14.

1. Rozbor: Necht' je trojúhelník ABC řešením dané úlohy. Potom platí, že $\sphericalangle ACB = \gamma$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Na prodloužení úsečky CA za bod A

sestrojíme bod A_1 takový, že $AB = AA_1$, na prodloužení úsečky CB za bod B sestrojíme bod B_1 , aby $AB = BB_1$. V trojúhelníku A_1B_1C platí, že $\sphericalangle A_1CB_1 = \gamma$, $A_1C = AC + AB = b + c$, $B_1C = BC + AB = a + c$. Trojúhelník A_1B_1C je tedy dán podle věty sus. Předpokládejme

$$B_1C \geq A_1C \text{ to jest } a + c \geq b + c, \text{ nebo } a \geq b. \quad (1)$$

Danou úlohu lze převést na úlohu: V rovině je dán svou polohou trojúhelník A_1B_1C . Uvnitř strany A_1C sestrojte bod A a uvnitř strany B_1C sestrojte bod B tak, aby platilo $A_1A = AB = B_1B$.

Ve stejnolehlosti o středu A_1 a koeficientu $\lambda = \frac{A_1C}{AA_1}$ přísluší bodu A bod C , bodu B bod E , který leží na polopřímce A_1B za bodem B , při čemž platí $\frac{A_1E}{A_1B} = \frac{A_1C}{AA_1} = \lambda$, bodu B_1 bod F , který leží na polopřímce A_1B_1 za bodem B_1 , při čemž $\frac{A_1F}{A_1B_1} = \frac{A_1C}{AA_1} = \lambda$. Čtyřúhelník A_1FEC je tedy stejnohlelý se čtyřúhelníkem A_1B_1BA v dané stejnolehlosti. Je tedy $A_1C = CE = EF = b + c$.

Veďme bodem E rovnoběžku m s přímkou A_1B_1 a označme D průsečík přímek B_1C , m . Obrazec B_1FED je rovnoběžník a proto je $B_1D = EF = A_1C = b + c$. Ze vztahu (1) plyne, že bod D padne buď dovnitř úsečky $B_1C = a + c$ anebo je $D \equiv C$. Toho užijeme při konstrukci bodu E .

2. Konstrukce: Předpokládáme platnost vztahu (1). Z daných prvků sestrojíme trojúhelník A_1B_1C tak, že $\sphericalangle A_1CB_1 = \gamma$, $A_1C = b + c$, $B_1C = a + c$. Na polopřímce B_1C sestrojíme bod D tak, že $B_1D = A_1C = b + c$. Bodem D vedeme přímku m rovnoběžnou s A_1B_1 a dále opíšeme kružnici k ($C, b + c$). Označme E společný bod přímky m a kružnice k a to onen, který padne dovnitř poloroviny ρ opačné k polorovině B_1CA_1 . Dále sestrojíme bodem E přímku n rovnoběžnou s B_1C a označme F průsečík různoběžek A_1B_1 , n . Ve stejnolehlosti o středu A_1 a koeficientu $\lambda = \frac{A_1C}{AA_1}$ přísluší bodu E průsečík B přímek A_1E , B_1C . Bod A přísluší v této stejnolehlosti bodu C a bodu F přísluší bod B_1 . Trojúhelník ABC jest pak řešením dané úlohy.

3. Důkaz: Čtyřúhelník A_1FEC je stejnohlelý se čtyřúhelníkem A_1B_1BA . Ze vztahu $A_1C = CE = EF$ vyplývá vztah $A_1A = AB = BB_1$.

4. Diskuse: Dokažme si, že úloha má jen jedno řešení. Uvažujme nejdříve o případě, že $a + c > b + c$, to jest $a > b$. Řešení bude existovat vždy, jestliže bude existovat bod E v polorovině ρ . Ten existuje, jakmile je $A_1C + B_1D > B_1C$ čili $2(b + c) > a + c$. V polorovině ρ však existuje pouze jeden bod E , tedy také jediný bod A jediný bod B a jediný trojúhelník ABC .

Předpokládáme-li, že $b + c > a + c$, to jest $b > a$, pak podmínka řešitelnosti jest $2(a + c) > b + c$.

Celkem podmínky řešitelnosti úlohy jsou:

$$2(a + c) > b + c > \frac{1}{2}(a + c), \quad 0^\circ < \gamma < 180^\circ.$$

V případě, že $a + c = b + c$, to jest $a = b$, jest pomocný čtyřúhelník A_1FEC rovnoramenným lichoběžníkem.

24. Jsou-li v trojúhelníku ABC středy stran A_0, B_0, C_0 , paty jeho výšek A_1, B_1, C_1 a plochy vzniklých trojúhelníků $AB_1C_0 = P'_1, AB_0C_1 = P''_1, BC_1A_0 = P'_2, BC_0A_1 = P''_2, CA_1B_0 = P'_3, CA_0B_1 = P''_3$, dokažte, že platí

$$P'_1 \cdot P'_2 \cdot P'_3 = P''_1 \cdot P''_2 \cdot P''_3.$$

Josef Langr

Řešil Bohuslav Diviš, XI C, JŠŠ v Praze 14:

Při obvyklém značení platí v trojúhelníku: $2P = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta$.

Potom

$$\begin{aligned} 8 \cdot P'_1 \cdot P'_2 \cdot P'_3 &= AB_1 \cdot AC_0 \cdot \sin \alpha \cdot BC_1 \cdot BA_0 \cdot \sin \beta \cdot CA_1 \cdot CB_0 \cdot \sin \gamma = \\ &= c \cdot \cos \alpha \cdot \frac{c}{2} \cdot \sin \alpha \cdot a \cdot \cos \beta \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \beta \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \gamma = \\ &= \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4} \cdot \frac{a^2 \sin 2\beta}{4} \cdot \frac{b^2 \sin 2\gamma}{4} = \frac{a^2 b^2 c^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin 2\gamma}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot P''_1 \cdot P''_2 \cdot P''_3 &= AC_1 \cdot AB_0 \cdot \sin \alpha \cdot BA_1 \cdot BC_0 \cdot \sin \beta \cdot CB_1 \cdot CA_0 \cdot \sin \gamma = \\ &= b \cdot \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot c \cdot \cos \beta \cdot \frac{c}{2} \cdot \sin \beta \cdot a \cdot \cos \gamma \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \gamma = \\ &= \frac{b^2 \sin 2\alpha}{4} \cdot \frac{c^2 \sin 2\beta}{4} \cdot \frac{a^2 \sin 2\gamma}{4} = \frac{a^2 b^2 c^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin 2\gamma}{64} \end{aligned}$$

Tedy

$$P'_1 \cdot P'_2 \cdot P'_3 = P''_1 \cdot P''_2 \cdot P''_3.$$

Seznam řešitelů úloh z ročníku 1959

1

Nejdříve jsou uvedena čísla příkladů správně vyřešených, v závorce jsou příklady s menšími nedostatky; nesprávná řešení neuveřejňujeme vůbec.

Petr Bálek, X.a, JŠŠ, Chrudim, př. 8, 15, 17, 23—25, (9, 13, 14); Bohuslav Diviš, XI.c, JŠŠ, Praha-Michle, př. 2, 3, 5, 6, 8, 9, 15, 18, 21—26, (14, 16, 17, 19, 20); Anna Dočekalová, XI.a, JŠŠ, Český Brod, př. 15, 18; Břetislav Fiala, ZUŠ, Tesla, Pardubice, př. 1, 2, 4—6, 8—11, 13—18, (3, 7); Alexandr Glivický, X., JŠŠ, Prostějov, př. 8; Miroslava Haklová, XI.a, JŠŠ, Praha 6, př. 3, 5, 11, 13, 15, 22, 26, (8, 14, 18); Daniela Hýblová, XI.b, JŠŠ, Olomouc, př. 2, 5, 8, 11, 13, 14, 16, 20—24, 26, (3, 4, 6, 7, 9, 17, 18, 25); Jiří Jindra, IX., JŠŠ, Brno,

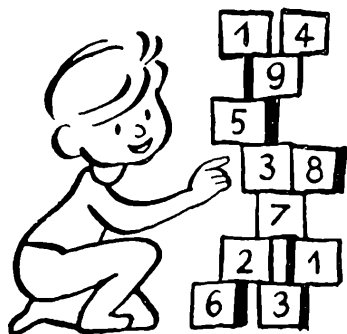
př. (25, 26); *Petr Jiříček*, XI.a, JSS, Ostrava I, př. 2, 15; *Zdeněk Kestřánek*, XI., JSS, Kamenice n. L., př. 1, 2, 5, 7, 8, 11, 13—17, 20, 22—24, 26, (3, 4, 9, 18, 21, 25); *Marie Melicharová*, XI.d, Hradec Králové, př. 1—6, 8—11, 14—18, 22—24, (7, 13, 20, 21, 25, 26); *Jan Mráz*, XI.a, JSS, Přerov, př. 5, 6, 8, 24, (3, 9, 13, 20, 26); *Jiří Otýpka*, XI., JSS, Kadaň, př. 5, 6, 14, 18, (4, 7, 17); *Jan Palán*, abs. JSS, Praha 12, př. 2, 3, 11, 15, 17, (4, 7—9, 14, 16); *Ludmila Pospíšilová*, XI.c, JSS, Gottwaldov, př. 5, 6, 13, (8, 9); *Peter Preisler*, XI.a, JSS, Trenčín, př. 2—5, 7, 8, 12—15, 20, 22, (6, 9); *Jan Pretel*, X.d, JSS, Praha 12, př. 5, 9; *Josef Procházka*, XI.b, JSS, Rychnov n. Kněžnou, př. 2, 4, 5, 6, 8, 11, 17, 22, 24, (3, 7, 9, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 26); *Oldřich Renner*, X.a, JSS, Český Brod, př. (16); *Vladimír Scheybal*, Horní Jelení, př. 5, 8, 11, 13, 15, 17, 24, 25, (1, 3, 4, 6, 14, 18, 20, 26); *Vilém Srovnal*, XI.d, JSS, Ostrava, př. 20, 22, 24; *Libuše Strmisková*, XI.c, JSS, Gottwaldov, př. (8, 9); *Petr Tomšů*, 3.b, PŠ, Kopřivnice, př. 2, 5—8, 11, 13, 14, 17, 20—22, 25, (1, 3, 4, 9, 16, 18, 23, 24, 26); *František Vosika*, XI., JSS, Kamenice n. Lipou, př. 3, 5, 8, 13, (4, 14); *Ivan Zoc*, XI.e, JSS, Praha 13, př. 2, 5, 6, 8, 14, 15, 24, (3, 9, 12, 13, 16, 21—23, 25, 26); *Jan Zvánovec*, X.b, JSS, Praha 12, př. 2, 5, 6, 8, 11, 13, 15, 20, 22, 26, (7, 9, 18, 21).

Mimo soutěž zaslali řešení soudruzi *Rudolf Gröschl*, Olomouc, př. (23) a *Vítězslav Littman*, Beroun, př. (23).

Letošním našim řešitelům

V úloze 6 (z fyziky) volte dielektrikum skla $\epsilon = 7$. V příkladu 8 (z fyziky) má být $\lambda = 500 \text{ m}\mu$. Správné znění příkladu 2 (z deskriptivní geometrie) je: Je dána kulová plocha α , kruhová válcová plocha β , rovina ρ , rovina σ a ostrý úhel ω . Sestrojte přímku p tak, aby s rovinou ρ svírala úhel ω , dotýkala se přitom ploch α , β a byla rovnoběžná s rovinou σ .

Matematické zábavy



Doc. Dr. František Krňan, Bratislava:

Dámy na šachovnici

☞ Dámy pri šachovej hre, ako je známe, sa pohybujú vo smere riadkov, stĺpcov a vo smeroch priečných - diagonálnych. V týchto smeroch aj vybíjajú cudzie figúrky. Položme si otázku: Je možné na šachovnici umiestniť 8 dám tak, aby sa

nemohli vzájomne vybiť? Ak je to možné, nesmie byť v žiadnom riadku, v žiadnom stĺpci a v žiadnom diagonálnom smere viac ako jedna.

Aby sme svoje úvahy a výsledky mohli jednoducho a prehľadne zachytiť, priradíme každej konfigurácii ôsmych dám 8-ciferné číslo, v ktorom cifry znamenajú, na koľkom poli, zdola rátajúc, sa dáma nachádza. Pritom prvá, druhá, . . . , ôsma cifra znamená umiestnenie dámy v prvom, druhom, . . . , ôsmom stĺpci odľava.

Podmienku, aby na tom istom riadku, prípadne stĺpci, nebolo viac dám, možno ľahko splniť. Je to fakticky podmienka pre ten zjav, aby sa 8 veží nemohlo vzájomne vybiť. Konfigurácia: 27184563¹⁾ spĺňa túto podmienku a spĺňa ju každá konfigurácia, vyjadrená takým 8 ciferným číslom, v ktorom každá z cifier 1 až 8 sa vyskytne len raz. Možno teda 8 veží na šachovnici umiestniť tak, aby sa nemohli vzájomne vybiť, na toľko spôsobov, koľko čísiel možno z 8 ciferného čísla 12345678 vytvoriť pozmenením poradia - permutovaním. Počet možností je $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$. Len málo konfigurácií spĺňa aj diagonálnu podmienku.

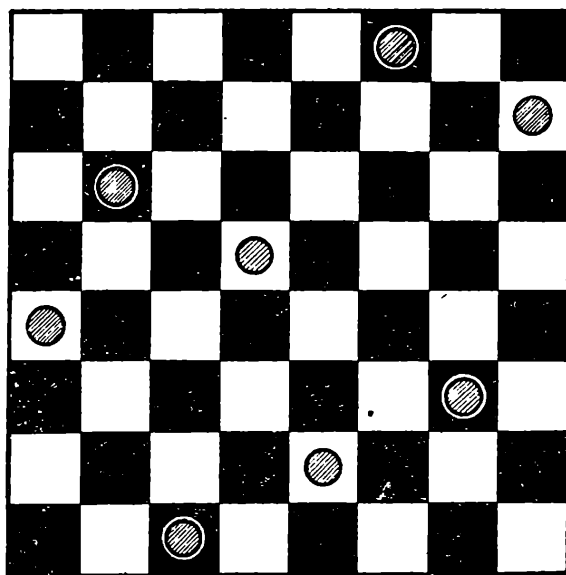
Úlohu o ôsmych dámach na šachovnici uverejnil prvý raz dr. Nauch v Leipziger Illustrierte Zeitung z 1. júna 1850. On sám uverejnil 22. septembra 1850 v tom istom časopise prvé riešenie.

Medzitým počul o tomto probléme aj geniálny matematik Karl Fridrich Gauss a rozoberal ho v korešpondencii s astronómom Schumacherom z Altony. Gauss

našiel napred 76 spôsobov a pozdejšie, po úplnom rozbere úlohy v š e t k ý c h 92 spôsobov riešenia. Pozdejšie roku 1861 rozoberal úlohu aj taliansky matematik Bellavitis; našiel tie isté 92 spôsoby riešenia ako Gauss. V roku 1869 prejednal problém francúzsky matematik Lionnet v Nouvelles Annales de Mathematiques. V decembri 1874 riešil problém Glaisher v Cambridge (vo Phil. Magazine) aj pre prípady, kde na „šachovniciach“ o 5×5 , 6×6 a 7×7 poliach, nachodí sa 5, 6, 7 dám. Konečne obsírne pojednania problému vydal August Pein, vo svojej práci: Aufstellung von n Königen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern (Leipzig 1889). Tam sú podrobne uvedené všetky riešenia do $n = 10$.

Hoci je počet riešení pomerne veľký, predsa sa skusmo ťažko hľadajú. Pravdepodobnosť, že náhodne zvolený prípad bude spĺňať aj podmienku diagonálnu je $92 : 40\,320 = 1 : 438$. Pre vyhľadanie všetkých riešení je nutná dômyselná a systematická práca.

Ak má určitá konfigurácia spĺňať aj diagonálnu podmienku, nesmie byť v konfigurácii rozdiel dvoch cifier (v absolutnej hodnote, t. j. bez ohľadu na znamienko)



Obr. 1

¹⁾ Takéto 8 ciferné číslo budeme v ďalšom nazývať konfigurácia.

byť taký, ako rozdiel poradových čísiel patričných cifier. V konfigurácii 27184365 tomu nie je tak, nakoľko napr. dáma 2. stĺpca (na 7. poli) je na tej istej diagonále, ako dáma 5. stĺpca (na 4. poli), lebo rozdiely $2 - 5$ a $7 - 4$ sú čo do absolútnej hodnoty rovnaké. Aj dáma 6. stĺpca je na tej istej diagonále. Obdobne zistíme, že na jednej diagonále sú aj dámy 5. a 7. stĺpca a dámy 7. a 8. stĺpca.

Z 8. cifier možno utvoriť, ako je známe, $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ rozdielov (brané absolútne).

Teda pri rýdze matematickom riešení museli by sme pri každej konfigurácii preskúmať 28 rozdielov.

Ak zistíme jedno riešenie, možno nasledujúce tri zistiť pootočením šachovnice o pravý uhol a ďalšie 4 zrkadlením šachovnice (zrkadlo postavíme zvisle za šachovnicu). Na obr. 1 je znázornené jedno riešenie: konfigurácia 26174835.

Pootočením šachovnice o 90° v zmysle proti hodinovým ručičkám, dostaneme postupne ďalšie 3 riešenia: 64285713, 46152837, 68241753 a zrkadlením ďalšie 4 riešenia: 73825164, 35714286, 53847162 a 31758246. Cifry vzniknuté zrkadlením konfigurácie ľahko zistíme doplnením cifier základných konfigurácií do 9 (lebo v zrkadlenej konfigurácii sú polia rátané od hora). Povšimnite si, že otočením o 180° a zrkadlením pozmeňuje sa konfigurácia len v tom zmysle, že cifry píšeme v obrátenom poriadku: z 26174835 dostávame 53847162. Pootočením o 90° v zmysle otáčania hodinových ručičiek a zrkadlením vznikne konfigurácia, v ktorej cifry udávajú, na koľkom mieste bola cifra 1, 2, 3, ..., 8. Z 26174835 napr. dostávame 31758246.

Popísaným spôsobom postupujeme, ak zo základného riešenia máme jednoduchým spôsobom, čiste mechanicky zistiť ďalších 7 riešení.

Počet riešení je presne 92. Toto číslo nie je deliteľné číslom 8. Nemôže teda každé základné riešenie dávať 7 ďalších. Ako sa zistilo, jestvuje 11 základných riešení, z ktorých každé, tu vyloženým spôsobom dáva 7 ďalších, teda spolu $11 \cdot 8 = 88$ riešení a jedno jediné, z ktorého plynú len 3 nové riešenia. Je to konfigurácia 46827135. Presvedčte sa, že je tomu tak!

Nemienim rozoberať problém ďalej. Je už starý vyše sto rokov. Ale iste sa mnohí z čitateľov doteraz o ňom nedomysleli a možno si na ňom vyskúšajú svoj dôvtip a trpezlivosť.

S touto úlohou bezprostredne súvisí ďalšia: Ak určité pole obsadíme dámou, koľkorakým spôsobom možno umiestniť ďalších 7 dám, aby sa nemohli vzájomne vybiť?

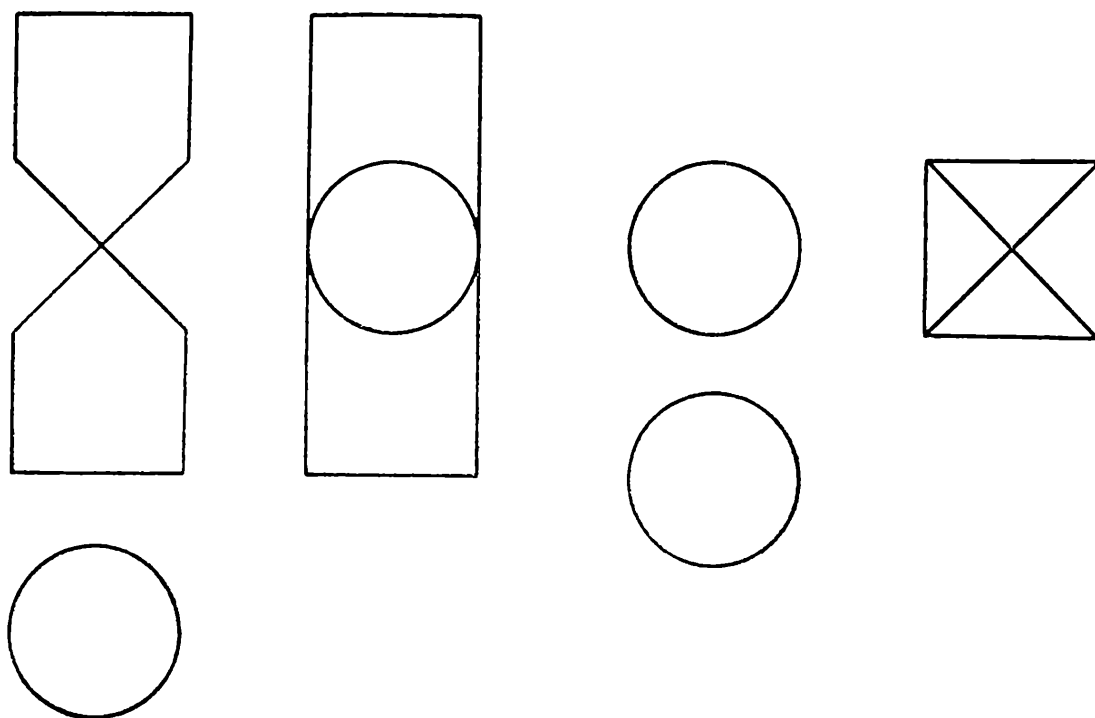
O dámach na šachovnici jestvujú aj iné zaujímavé úlohy. Možno napr. 4. dámami obsadiť všetky polia šachovnice až na dve: napr. 1) b4 a f8, 2) b3 a g8, 3) g1 a g8. Tretiu úlohu možno dokonca riešiť dvoma spôsobmi. Problém ôsmych dám a problém štyroch dám sú akési protipóly - extrémne prípady. Nemožno predsa umiestniť na šachovnici viac než 8 dám, aby sa vzájomne nevybíjali. Obsadiť ale všetky polia šachovnice až na dve štyrmi dámami, je zase najúspornejší spôsob obsadenia polí. Uvedené dve polia v prípadoch 1 a 2 ležia na diagonále v prípade 3 na jednom stĺpci. Ak na ktorékoľvek z týchto polí umiestníme piatu dámu, už sú obsadené všetky polia šachovnice.

V článku uvedené úlohy sú omnoho ťažšie, ako by sa na prvý pohľad zdalo. Skúste milí čitatelia ich riešiť! Prajem Vám mnoho trpezlivosti:

Máte dobrú predstavivosť?

Nakreslete alebo narýsujte názorný obrázok telies daných na obr. 1 a 2 vždy pŕdorysem, nárysem a bokorysem. Řešení zašlete redakci Rozhledů do 29. února na adresu Praha 6, Zikova 4. Jména správných řešitelů otiskneme v příštím čísle.

M. M.



Obr. 1

Obr. 2

Stará čínská hra

Již před staletími se hrávala v Číně tato hra: Libovolný počet kamenů si rozdělí dva hráči na několik hromádek, z nichž některé mohou obsahovat i stejný počet kamenů. Hra postupuje tak, že hráči střídavě odebírají kameny. Hráč může při jednom tahu odebrat kameny vždy jen z jedné hromádky, ale v libovolném počtu, tzn. nejméně jeden, nejvýše celou hromádku. Vyhrává ten hráč, který bere poslední, čili prohrává ten, který - je-li na něm řada - nemá již co brát.

Myslíte, že při této hře záleží na náhodě, nebo lze nalézt postup, který vede vždy k vítězství? Záleží na tom, kdo začíná? Zkuste si zahrát tuto hru se svým přítelem, obsahují-li hromádky např. a) 3, 5, 7 kamenů, b) 1, 2, 5, 6 kamenů.

Podají-li se vám nalézt správný postup pro tyto dva případy, pokuste se hru zahrát i s jinými počty kamenů v jednotlivých hromádkách.

Nakonec si položte tuto obecnou úlohu:

Je dáno n hromádek s těmito počty kamenů: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Máte možnost volby 1. tahu pro sebe nebo pro soupeře. Jak musíte postupovat, abyste vyhrál? (Tento postup je vždy možný.) Správné řešení této obecné úlohy zašlete do 29. února 1960 redakci, která pak otiskne správné řešení.

K. Č.

Hádanka

Ve francouzském časopisu „Facteur X“ byla v říjnovém čísle 1959 uveřejněna vtipná úloha o hodinách. Redakce Rozhledů úlohu rozšířila a zpřesnila a podává ji v tomto znění:

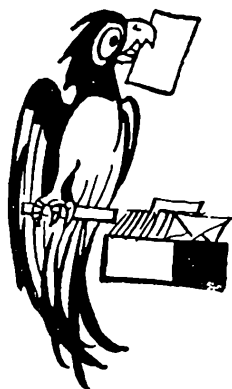
Kostel, radnice a hvězdárna jsou v téže přímce. Chodec, jdoucí stále touž rychlostí, vyjde od kostela, když na radnici tluče právě 10 hodin, přijde k radnici, když na kostele tluče $1\frac{1}{2}$ 11, přijde k hvězdárně, na níž hodiny ukazují 10,40 hod., vrátí se k radnici právě, když je na ní 10,50 hod. a když dojde ke kostelu, dává hvězdárna signál 11,15 hod.

Co můžete z daných údajů říci o příslušných vzdálenostech a o hodinách, jejichž chod je jinak pravidelný? S rychlostí zvuku přitom nepočítejte:

Řešení, pokud možno logickými úvahami (bez rovnic) zašlete do redakce nejpozději do 29. února 1960. Nejlepší otiskneme.

O. S.

Různé



Josef Novák, asistent ČVUT, Praha:

Křístán z Prachatic a matematika v jeho době

(Pokračování)

Po tomto vysvětlení se tedy podívejme na obsah Křišťanova spisu. Jsou v něm popsány tyto tehdy užívané početní výkony: Čítání, sčítání, odčítání, půlení, zdvojnásobení, násobení, dělení, progrese a odmocňování 2 a 3. Po těchto početních výkonech v celých nezáporných číslech následuje výklad o zlomcích, který je ovšem nedokončen, neboť další část rukopisu chybí.

V rukopisu nalézáme na okrajích a mezi řádky mnoho poznámek i řešených příkladů, což svědčí o častém používání i jinými osobami.

Zabývejme se nyní blíže některými početními úkony a všimněme si zajímavostí v Křišťanově zpracování.

V úvodním čítání, nebo-li numeraci, se vysvětluje psaní čísel římskými a arabskými číslicemi. Tehdy užívané arabské číslice se nelišily od své dnešní podoby s výjimkou 4, 5 a 7. Pro ně bylo užíváno těchto znaků (obr. 1):

4.... ४, 5.... ٥, 7.... ٧

Obr. 1

		3	5	8
2	0 6	1 0	1 6	
4	1 2	2 0	3 2	
6	1 8	3 0	4 8	
88	0	6	8	

Tab. 1

1	2	3	4	...
2	4	6	8	...
3	6	9	12	...
4	8	12	16	...
	⋮	⋮	⋮	...

Tab. 2

Jistě nás udiví, že půlení a zdvojnásobení jsou uvedeny jako zvláštní početní výkony, i když vzápětí se objevuje násobení a dělení. Je nutné říci, že během doby se počet základních početních výkonů měnil. U Indů nalézáme např. v prvních staletích našeho letopočtu čtyři základní početní výkony: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Ve 12. století k tomu ještě přistupuje umocňování a odmocňování 2 a 3. V Evropě se ve středověku učilo uvedeným devíti výkonům. Půlení a zdvojnásobení se dostaly jako zvláštní početní výkony do evropské matematiky prostřednictvím Arabů a uchovaly se někde až do 17. století. V praxi byly někde používány ještě déle při násobení; půlením násobence a zdvojnásobením násobitele bylo násobení pak vhodně převáděno ve sčítání. V některých německých pohraničních obcích v Čechách se učilo na obecných školách násobení tímto způsobem ještě koncem minulého století.

Násobení se provádělo několika způsoby. Ve spisu je uveden příklad tzv. mřížkového násobení. Jeho princip spočívá v tom, že se částečné součiny sčítají ve směru úhlopříčky čtverců pomocné šachovnicové sítě. Tyto čtverce jsou roz-

děleny úhlopříčkou ve dva trojúhelníky, do nichž se pak vepíše desítka, resp. jednotka každého částečného součinu. Ukážeme si toto násobení na příkladu $358 \times 246 = 88\,068$ (tab. 1).

Při této metodě počtář znalý malé násobilky dosazoval pouze mechanicky do příslušných políček a z paměti nemusil nic počítat. Činila-li mu potíže násobilka (a tak tomu bylo velmi často), použil tabulek násobení. Těmto tabulkám, které byly v tehdejší době cennou pomůckou, věnoval i Křišťan velkou pozornost. Ve svém rukopisu uvádí jednu tradiční čtvercovou tabulku pro malou násobilku (tab. 2). Dále pak trojúhelníkovou tabulku pro násobení do 20×20 (tab. 3). Tabulka v tomto rozsahu a tvaru byla jednou z prvních. Pro větší přehlednost jsou jednotlivé sloupce psány střídavě černě a červeně.

(Dokončení)

1	2						
2	4	3					
3	6	9	4				
4	8	12	16	5			
19	38	57	76			20	
20	40	60	80			400	

Tab. 3

Druhá část úloh I. kola IX. ročníku MO

(Řešení odevzdejte do 29. února 1960.)

Kategorie A

4. Je dána rovnice $x^2 - 6(k-1)x + 9(k^2 - 2) = 0$ o neznámé x , přičemž je k dané reálné číslo.

Určete všechna čísla k , pro něž má daná rovnice alespoň jeden nezáporný kořen, který je nejvýše roven číslu 1.

5. Je daná reálná funkcia reálnej premennej x

$$y = \sqrt{x-2} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} \sqrt{x-1}$$

Nájdite všetky x , pre ktoré má táto funkcia zmysel; ďalej ukážte, že pre $x \geq 2$ sa funkcia rovná konštante. Potom načrtnite graf danej funkcie.

6. Řešte soustavu rovnic

$$\sin(x - \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0,$$

$$\sin(x + \alpha) + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha$$

o neznámých x, y , přičemž α je dané reálné číslo.

Kategorie B

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána jeho přepona $c = AB$, přičemž víme, že tečnice příslušná k přeponě je rovná střední geometrické úměrné obou odvěsen.

5. Vypočítejte všechna reálná čísla x , která splňují nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$$

6. Je daný dutý uhol $\sphericalangle PCQ = \gamma$ a kružnica $k \equiv (S, r)$, ktorá sa dotýka priamok CP, CQ v bodoch P, Q .

Vnútri úsečiek CP, CQ zostrojte po rade také body A, B , že priamka AB je dotyčnicou kružnice k , pričom platí $AB = c$, kde c je dané kladné číslo.

Urobte diskusiu riešiteľnosti úlohy vzhľadom na dané čísla c, r, γ .

Kategorie C

4. Je daný výraz $V = (x + y)^2(x - y) + (y + z)^2(y - z) + (z + x)^2(z - x)$, kde x, y, z sú reálne čísla.

Výraz V rozložte na súčin výrazov, ktoré sú v číslach x, y, z prvého stupňa a nájdite všetky trojice čísel x, y, z , pre ktoré je $V = 0$.

5. V obrázku značí různé rovnoběžky m, n břehy průplavu, jehož podélnou osou je přímka $p \parallel m$. Po obou různých březích leží místa A, B , která jsou spojena cestou $AMNB$ (tj. lomená čára), přičemž platí:

(1) $MN \perp p$;

(2) body M, N leží pořadě na přímkách m, n ;

(3) $AM = BN$.

Proveďte konstrukci cesty z A do B , jestliže jsou dány přímky $m \parallel n$ a body A, B jako v obr. 1 a rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

6. Jestliže je číslo p různé od čísel $-1, 0, 1$, potom rovnice

$$\frac{p(x-1) + p^2 - x}{p(x-1) - p^2 + x} = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$$

o neznámé x má vždycky jediné řešení; dokažte a rozhodněte, jak je tomu s řešením této rovnice v právě uvedených výjimečných případech.

Potom řešte tyto úlohy: Vypočítejte číslo p tak, aby daná rovnice měla kořen: a) $x = 5$; b) $x = -3$ a rozhodněte, je-li to možné.

Kategorie D

4. Turistického zájazdu sa zúčastnilo 286 zamestnancov podniku; mali k dispozícii autobusy jednak s 19 sedadlami, jednak so 17 sedadlami (riadič autobusu ani jeho sedadlo sa v úlohe neuvažujú).

Vypočítajte, koľko autobusov každého z oboch druhov sa pre zájazd použilo, ak všetky sedadlá boli obsadené.

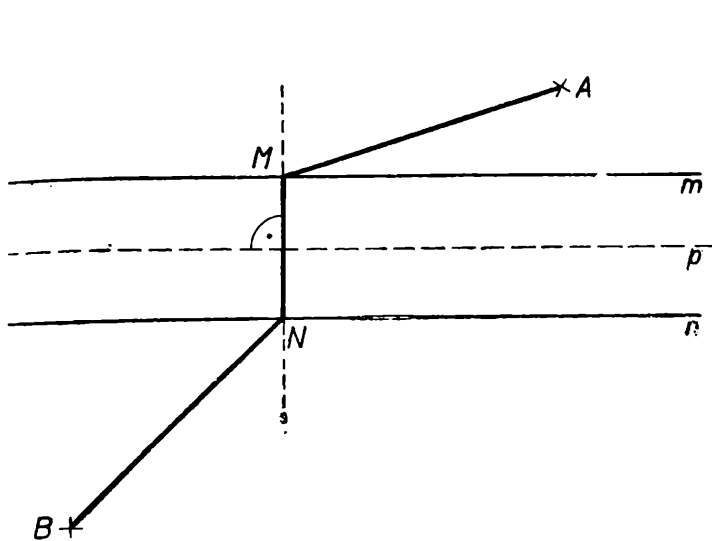
5. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle APM = 45^\circ$; na prodloužení úsečky $PA = 4$ cm za bod A je dán bod B , přičemž je $PB = 14$ cm (obr. 2).

Užitím osové souměrnosti sestrojte na polopřímce PM body X, Y tak, aby o čtyřúhelníku $AXYB$ platilo:

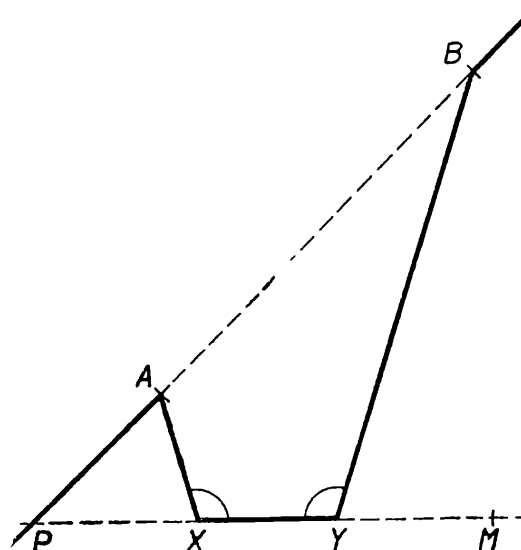
$$(1) \sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB;$$

$$(2) XY = 3 \text{ cm}.$$

Poznámka: Obrázek, který dostaneme, můžeme považovat za plán řezu terénu svislou rovinou ρ . Přitom je PA řezem šikmého rovinného svahu a PM řezem vodorovné roviny; čtyřúhelník $AXYB$ je řezem průkopu ve svahu. Průkop vede kolmo k rovině ρ , jeho stěny mají stejné sklony a jeho vodorovná stěna má danou šířku atd.



Obr. 1



Obr. 2

6. Je dán zlomek

$$Z = \frac{[x(p+q) + pq + 1]^2 - [x(pq+1) + p + q]^2}{(p+q)^2 - (pq+1)^2}$$

kde p, q jsou daná čísla.

a) Jestliže každé z čísel p, q je různé od čísel 1, -1, potom má zlomek Z smysl a po zkrácení je vidět, že nezávisí na žádném z čísel p, q ; proveďte.

b) Vypočítejte všechna čísla x , pro která je $Z = 0$.

c) Vypočítejte všechna čísla x , pro která je Z záporné číslo.



Recenze

Sedmý ročník Matematické olympiády

Upozorňujeme všechny své čtenáře, že letos je v prodejnách n. p. Kniha o čtvrt roku dříve než loni brožurka „SEDMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY“. Tato publikace, která vychází letos v SPN a to od zahájení celostátní matematické soutěže už po sedmé, je určena žákům 8. až 11. ročníků škol vše-

obecně vzdělávacích a všem čtyřem ročníkům škol odborných. Obsahuje povšechné zhodnocení VII. ročníku Matematické olympiády a vzorná řešení všech soutěžních příkladů, z velké části upravená podle samostatných řešení úspěšných olympioniků.

Účel knížky je pomocný a současně i propagační. Podporuje zájem nově nastupujících řešitelů, a pomáhá všem soutěžícím, postupujícím do vyšších kategorií soutěže. Činí to tak, že předkládá vzory řešení příkladů sedmého ročníku soutěže, které mají být průpravou k úspěšnému zahájení a absolvování jejího nového ročníku. Současně poskytuje tato knížka všem zájemcům potřebné návodné instrukce o organizaci celé soutěže, které jsou nutné pro bezpečné zvládnutí tohoto úkolu.

Celou publikaci zpracoval s pomocí velkého počtu pomocníků zkušený autor všech dosavadních ročníků, jednatel ústředního výboru MO, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze, s. R u d o l f Z e l i n k a.

Své dílko rozdělil na čtyři samostatně motivované celky:

I. č á s t popisuje stručně administrativní rámec soutěže, zařazení jednotlivých ročníků středních i výběrových škol do kategorií, pořadatele soutěže jak z ústředního výboru MO v Praze, tak v jednotlivých krajích, přehled všech kol, kategorií a dat, v kterých sedmý ročník olympiády probíhal, až po závěr a vyhlášení vítězů tohoto ročníku.

Ve II. č á s t i je zpráva o výsledcích jednotlivých kol soutěže, s přehlednými tabulkami účastníků prvního i druhého kola ve všech čtyřech kategoriích a s výčtem úspěšných řešitelů v kategoriích B a C. Konečně je tu zachycena i celková účast v posledním (III.) kole soutěže a zapsáno i dvacet vítězných olympioniků v pořadí uspořádaném podle kvality jednotlivých řešení a popis cen, které jim byly v závěru slavnostně předány.

III. č á s t vypisuje a stručně zdůvodňuje změny organizačního řádu soutěže.

IV. Těžiště celé brožury je však v její poslední, č t v r t é č á s t i, která zachycuje podrobně řešení jednotlivých soutěžních úloh, kategorií A počínaje a D konče. Úlohy zařazuje systematicky i podle kol, tj. I., II. a III. kolo v kategorii A a I. a II. kolo v kategoriích B, C a D. Tato nejdůležitější a nejobsáhlejší partie knížky je u konstruktivních úloh doplněna přesně provedenými, přehlednými a velmi instruktivními obrázky, které - jako již i v minulých ročnících olympiády - provedl s. V l a s t i m i l M a c h á č e k z Pedagogického institutu v Praze. Řešení jednotlivých soutěžních příkladů byla asi z třetiny přeložena do slovenštiny s. docentem dr. M i l a n e m K o l i b i a r e m z Komenského university v Bratislavě. U úloh, jejichž řešení má více možných alternativ, je také otištěno více vzorných řešení (z nichž zpravidla některá i v jazyku slovenském). Brožurka je tentokrát opatřena opravdu pěknou a dobře komponovanou obálkou v modrozeleném základním tónu podle návrhu akad. malíře J a r o m í r a J a r k o v s k é h o, takže bude i vkusným doplněním každé knihovny. Jsou to tedy vedle ostatních i estetické důvody, pro které můžeme toto dílko všem účastníkům olympiády i zájemcům o ni vřele doporučit. Jeho cena je 4,95 Kčs.

jd

Příklady pro Fyzikální olympiádu

(Dokončení)

4. V trubici dlouhé $l = 70$ cm, postavené zataveným koncem dolů, je sloupec vzduchu uzavřen shora sloupцем rtuti o výšce $h = 20$ cm. Rtuť dosahuje až k hornímu okraji trubice. Trubicí opatrně obrátíme; část rtuti vyteče.

- Jak vysoký sloupec rtuti zůstane v trubici, je-li barometrický tlak 750 mm Hg?
- Za jaké podmínky vyteče rtuť z trubice úplně?

5. Na vodorovné desce stolu stojí nádoba naplněná vodou do výše 160 cm. Ve stěně jsou svisle pod sebou dva otvory, vzdálené od sebe $d = 40$ cm. Vodní paprsky, vytryskující z těchto otvorů, dopadají na totéž místo stolu. Jak hluboko pod povrchem vody je horní otvor?

6. Určete hustotu směsi, která obsahuje $m_1 = 4$ g vodíku a $m_2 = 32$ g kyslíku při teplotě $t = 7$ °C a při tlaku 700 mm Hg. (Potřebné údaje vyhledejte v tabulkách.)

7. Kovové proužky, zinkový a železný, silné 2 mm, jsou při teplotě 0 °C dlouhé $l_0 = 50$ cm.

- Při které teplotě se délky obou proužků liší o 1 mm?
- Jsou-li proužky položeny na sobě a na obou koncích snýtovány, jak velký je vnitřní poloměr kruhového oblouku, vytvořeného při této teplotě snýtováním proužkem? (Délku každého proužku vztahujte na jeho podélnou osu.)

8. Ve vysokotlakém parním kotli se spotřebuje 30 m³ vody. Do kotle se přivádí pod tlakem voda 130 °C, která vře při 200 °C. (Skupenské teplo varu vody při 200 °C je 465 kcal/kg.) Kolik se spálí pod kotlem uhlí, vydá-li 1 kg uhlí při spalení 4 500 kcal a je-li účinnost spalování 60 %?

9. Určete hustotu benzenu užitím Archimedova zákona pomocí ponorného tělíska. Popište a vysvětlete postup měření!

Kategorie C

1. Míč je vržen od okraje balkónu vysoké budovy svisle vzhůru tak, že při cestě zpět mine okraj balkónu za 2 vteřiny od okamžiku vyhození.

a) Vypočítejte maximální výšku míče nad okrajem balkónu a počáteční rychlost s jakou byl vržen!

- Jak velkou rychlostí mine padající míč okraj balkónu?
- Jaká je poloha a rychlost míče na konci 3. vteřiny po počátku pohybu?

2. Těleso padá volným pádem. Po t_1 vteřinách je za ním z téže výše svisle dolů vrženo druhé těleso rychlostí v . Druhé těleso mine těleso první za dobu t_2 od počátku vrhu. Odpor vzduchu zanedbáváme, gravitační zrychlení $g = 10$ m/s².

- Jak velkou rychlostí v bylo druhé těleso vrženo?
- V jak velké vzdálenosti od výchozího bodu se tělesa minula?
- Za jakou dobu od počátku vrhu budou tělesa od sebe vzdálena o s_0 ?

Řešte obecně a pak pro zvláštní případ $t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s a

- $s_0 = 20$ m,
- $s_0 = 200$ m.

3. Rybář sedící v loďce na rybníku přitahuje k sobě dlouhým lanem druhou loďku s nákladem stálou silou 5 kp. Loďka s rybářem má hmotu 250 kg, loďka s nákladem má hmotu 500 kg.

a) Jak velká bude rychlost první a druhé loďky vzhledem k břehům rybníka po pěti vteřinách od okamžiku, kdy rybář začal táhnout lano?

b) Jak velkou rychlostí se přibližují loďky k sobě v tomto okamžiku?

Odpor vody a vzduchu zanedbáváme.

4. Jak velkou stálou silou by působil raketový motor, který by uvedl raketu hmoty 12 tun za půl minuty z klidu do pohybu o rychlosti 3,8 km/s? Jak vysoko by za tuto dobu vyletěla raketa při svislém letu? (Nepřihlížíme k úbytku hmoty spalováním pohonných látek, k odporu prostředí a ke změně gravitačního zrychlení s rostoucí výškou.)

5. Automobil o hmotě 1 500 kg se blíží ke křižovatce rovnoměrným pohybem rychlostí 45 km/hod.

a) Na křižovatce zasvítí červená. Na jaké nejkratší dráze zastaví řidič auto maximální brzdící silou 1000 kp?

b) Na křižovatce svítí zelená. Kolik vteřin před křižovatkou musí začít řidič brzdit maximální brzdící silou 1000 kp, aby projel křižovatkou rychlostí 10 km/hod.?

6. Startovací rychlost letadla je 108 km/hod. Této rychlosti dosáhne za 12 vteřin. Jak velký je průměrný výkon motoru letadla při rozletu, je-li hmota letadla 1960 kg a koeficient tření 0,05?

7. Železná a hliníková koule mají stejný objem 1 dm³.

a) Jak velká je potenciální energie každé z nich, jsou-li ve výši 5 m nad zemí? Jak velkou kinetickou energii a rychlost bude mít každá z nich při dopadu na zem volným pádem z této výšky?

b) V jaké výši nad zemí musí býti železná koule, aby měla stejnou potenciální energii jako hliníková koule ve výši 10 m nad zemí? Jak velkou rychlost a jak velkou kinetickou energii mají koule při dopadu z těchto výšek volným pádem na zem?

c) Obě koule jsou ve výši 10 m nad zemí. Železná koule volně padá. Jak velkou rychlostí musíme vrhnout hliníkovou kouli svisle dolů, aby obě tělesa měla při dopadu stejnou kinetickou energii?

Ve všech případech zanedbáváme odpor prostředí. Hustota železa je 7,78 kg/dm³, hliníku 2,58 kg/dm³.

8. Trámec 140 cm dlouhý, vážící 16 kp, je 10 cm od konců *A*, *B* podepřen ve vodorovné poloze na dvou hranách vzájemně rovnoběžných a kolmých k délce trámu. V bodech *C*, *D*, *E*, *F* (*AC* = 20 cm, *AD* = 40 cm, *AE* = 60 cm, *AF* = 90 cm) působí na něj svislé síly $F_1 = 14$ kp, $F_2 = 10$ kp, $F_3 = 20$ kp, $F_4 = 15$ kp. Vypočítejte, jak velké síly působí v opěrných bodech?

9. Podle jedné fantastické domněnky, uveřejněné před časem v novinách, jsou Marsovy měsíce Foibos a Deimos (Strach a Hrůza) umělými družicemi. Deimos má průměr 8 km a hmotu $5,4 \cdot 10^9$ tun. (Kdyby byl umělou družicí z aluminia, měl by tloušťku stěn asi 10 m.)

a) Jak velkou rychlostí obíhá Deimos, urazí-li kruhovou dráhu o poloměru 24 000 km za $5/4$ našeho dne?

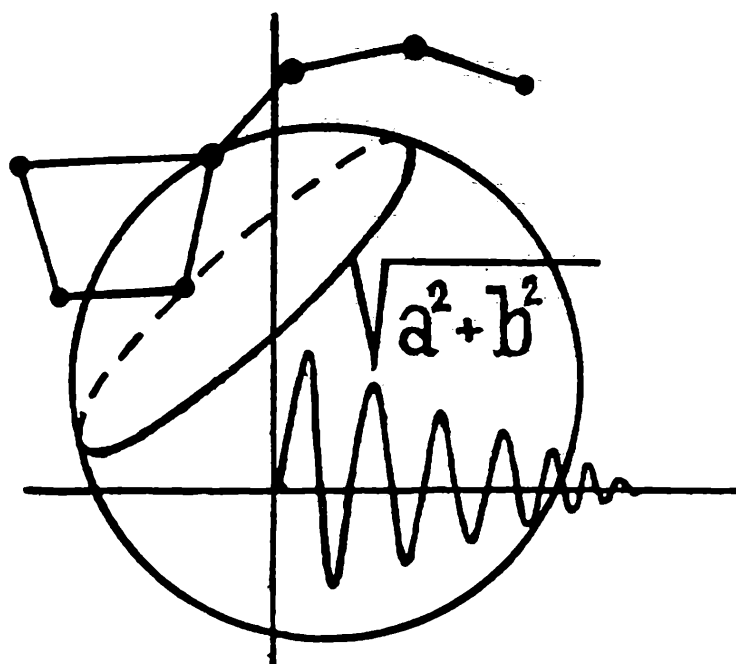
b) Jak velkou stálou silou by musel být Deimos uváděn z klidu v pohyb po dobu našich 365 dní, aby dosáhl uvedené rychlosti?

c) Kolik raketových motorů s tahem 1 000 000 kp by se k tomu muselo použít?

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy

6



ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 6

Toto číslo vyšlo 15. února 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

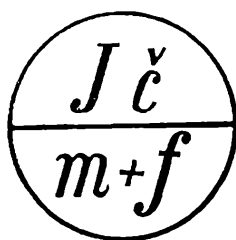
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelinek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

O B S A H

R. Geryk: O celočíselném řešení rovnice $y = \frac{x^2 - a}{b}$	241
S. Horák: Jeřábková křivka	245
O. Kowalski: Malá věta Fermatova	246
Inž. J. Klír a inž. V. Čapla: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války (Dokončení)	247
Inž. J. Riss: Analogové matematické stroje	249
Inž. J. Švastal: Jak se čtou stavitelské výkresy?	256
CSc. L. Sehnal: Nové československé meteority	266
J. Gedei: K Matematické olympiádě v Rumunsku	270
Prof. dr. O. Borůvka: O životě a díle českého matematika Matyáše Lercha	271
J. Novák: Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době (Dokončení)	272
F. Komurka a E. Říman: Nové názory o nitru Země	275
J. Kotyk: Christian Huygens	277
Doc. O. Setzer: Početní hříčky	281
Recenze	283
Redakční sdělení	288
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06036 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hönl.

Matematika



Radomír Geryk, Brno:

O celočíselném řešení rovnice $y = \frac{x^2 - a}{b}$

I. Budeme se zabývat otázkou, pro která celá čísla x je výraz

$$y(x) = \frac{x^2 - a}{b} \quad (1)$$

celým číslem při daných celých číslech $b \neq 0, a$.

Definice. Nazveme řešením tohoto problému, stručně řešením, každé celé číslo x , pro které $y(x)$ je celým číslem. Množinu všech řešení nazveme obecným řešením.

Věta 1. Nechť x_0 je řešením. Pak je řešením také $x_0 + \lambda b$ pro libovolné celé číslo λ .

Důkaz. Výraz

$$\frac{(x_0 + \lambda b)^2 - a}{b} = \frac{x_0^2 + 2\lambda b x_0 + \lambda^2 b^2 - a}{b} = \frac{x_0^2 - a}{b} + 2\lambda x_0 + \lambda^2 b$$

je celým číslem pro každé celé číslo λ , neboť x_0 je řešením. To ovšem znamená, že $x_0 + \lambda b$ je řešením pro každé celé λ .

Věta 2. Nechť x_0 je řešením. Pak k němu existuje právě jedno řešení x_1 , ležící v intervalu $< 0, |b| - 1 >$, pro něž $\frac{x_0 - x_1}{b}$ je celé číslo.

Důkaz. Poněvadž x_0 je řešením, je podle věty 1. řešením každé z čísel

$$\dots x_0 - 3b, x_0 - 2b, x_0 - b, x_0, x_0 + b, x_0 + 2b, x_0 + 3b, \dots \quad (2)$$

Interval $< 0, |b| - 1 >$ obsahuje $|b|$ po sobě jdoucích celých čísel, proto právě jedno z čísel (2) padne do něho. Nechť je to číslo $x_1 = x_0 - \lambda_0 b$. Pak

$$x_0 - x_1 = x_0 - (x_0 - \lambda_0 b) = \lambda_0 b, \text{ tj. } \frac{x_0 - x_1}{b} = \lambda_0 \text{ je celé číslo.}$$

Bezprostředním důsledkem věty 2. jsou následující dvě věty.

Věta 3. Neexistuje-li řešení v intervalu $< 0, |b| - 1 >$, neexistuje žádné řešení.

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Necht' rovnice (1) má aspoň jedno řešení a žádné v intervalu $< 0, |b| - 1 >$. Poněvadž řešení existuje, musí podle věty 2. existovat také řešení v intervalu $< 0, |b| - 1 >$, což je spor.

Věta 4. Každé řešení lze vyjádřit ve tvaru $x_1 + \lambda_0 b$, kde x_1 je řešením v intervalu $< 0, |b| - 1 >$, λ_0 celé číslo.

Důkaz. Buď x_0 libovolné řešení. Podle věty 2. k němu existuje právě jedno řešení x_1 z intervalu $< 0, |b| - 1 >$, pro něž $\frac{x_0 - x_1}{b}$ je celým číslem. Existuje tedy celé číslo λ_0 tak, že $x_0 - x_1 = \lambda_0 b$, tj. $x_0 = x_1 + \lambda_0 b$. Proto libovolné řešení x_0 lze napsat ve tvaru $x_1 + \lambda_0 b$.

Těmito větami je zároveň určen početní postup. Stanovíme hodnoty $y(x)$ ze vztahu (1) pro všechna celá x z intervalu $< 0, |b| - 1 >$

$$y(0) = \frac{-a}{b}, \quad y(1) = \frac{1^2 - a}{b}, \quad y(2) = \frac{2^2 - a}{b}, \dots, y(|b| - 1) = \frac{(|b| - 1)^2 - a}{b};$$

zjistíme, které z nich jsou celými čísly. Necht' jsou to právě čísla $y(j_1), y(j_2), \dots, y(j_\nu)$. Pak obecným řešením jsou všechna čísla tvaru

$$j_1 + \lambda_1 b, j_2 + \lambda_2 b, \dots, j_\nu + \lambda_\nu b,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ proběhnou všechna celá čísla.

Z věty 1. totiž plyne, že tato čísla jsou řešením, a podle věty 4. nemůže jiné řešení existovat. Není-li žádné z čísel $y(0), y(1), \dots, y(|b| - 1)$ celé, podle věty 3. řešení neexistuje.

Pro usnadnění numerických výpočtů dokážeme ještě tuto větu:

Věta 5. Necht' x_0 je řešením. Pak také $|b| - x_0$ je řešením.

Důkaz. Výraz

$$\frac{(|b| - x_0)^2 - a}{b} = \frac{|b|^2 - 2|b|x_0 + x_0^2 - a}{b} = \frac{x_0^2 - a}{b} - 2\frac{|b|}{b}x_0 + b$$

je celým číslem, neboť x_0 je řešením a $\frac{|b|}{b}$ je celé číslo. Proto $|b| - x_0$ je řešením.

Pro početní postup z věty 5. plyne, že stačí vypočítat hodnoty $y(0), y(1), \dots, y(\mu)$, kde μ je celé číslo, pro něž

$$\frac{|b| - 1}{2} \leq \mu < \frac{|b| + 1}{2}.$$

Příklad. Najděte všechna celá čísla x , pro která je výraz $\frac{x^2 - 9}{16}$ celým číslem.

Řešení. Stačí vypočítat hodnoty $y(0), y(1), \dots, y(\mu)$, kde $\frac{16-1}{2} \leq \mu < \frac{16+1}{2}$, tj. stačí vypočítat $y(0), \dots, y(8)$.

$$y(0) = \frac{-9}{16}, \quad y(1) = \frac{1-9}{16} = -\frac{8}{16}, \quad y(2) = \frac{4-9}{16} = -\frac{5}{16},$$

$$y(3) = \frac{9-9}{16} = 0,$$

$$y(4) = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}, \quad y(5) = \frac{25-9}{16} = 1, \quad y(6) = \frac{36-9}{16} = \frac{27}{16},$$

$$y(7) = \frac{49-9}{16} = \frac{40}{16}, \quad y(8) = \frac{64-9}{16} = \frac{55}{16}.$$

Celými čísly jsou $y(3), y(5)$ a podle věty 5. $y(16-3) = y(13)$ a $y(16-5) = y(11)$. Všechna řešení v intervalu $<0, 15>$ tedy jsou 3, 5, 11, 13, obecné řešení tvoří všechna čísla tvaru $3 + 16\lambda_1, 5 + 16\lambda_2, 11 + 16\lambda_3, 13 + 16\lambda_4$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ proběhnou všechna celá čísla. Jsou to čísla $\pm 3, \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 19, \pm 21, \pm 27, \pm 29, \pm 35, \dots$

Příklad. Dokažte, že výraz $x^2 + 1$ není pro žádné celé x dělitelný šesti!

Řešení. Kdyby existovalo celé x takové, že $\frac{x^2 + 1}{6}$ by bylo celé číslo, musel by být některý z výrazů $y(0), y(1), \dots, y(\mu)$, kde $\frac{5}{2} \leq \mu < \frac{7}{2}$, tj. některý z výrazů $y(0) = \frac{1}{6}, y(1) = \frac{2}{6}, y(2) = \frac{5}{6}, y(3) = \frac{10}{6}$ celým číslem. Poněvadž tomu tak není, žádné celé číslo x s požadovanou vlastností neexistuje.

II. Našimi úvahami jsme vlastně vyřešili i jiný úkol, a to: K daným celým číslům $b \neq 0, a$ najít všechna celá čísla y taková, že výraz $by + a$ je čtvercem celého čísla x :

$$by + a = x^2. \quad (1a)$$

Rovnice (1) a (1a) jsou identické. Když x_0 je řešením úlohy I., pak $y(x_0) = \frac{x_0^2 - a}{b}$ a tedy i čísla

$$y(x_0 + \lambda b) = \frac{(x_0 + \lambda b)^2 - a}{b} = \frac{x_0^2 - a}{b} + 2\lambda b x_0 + \lambda^2 b = y(x_0) + 2\lambda x_0 + \lambda^2 b \quad (3)$$

pro každé celé λ splňují úkol II. Snadno nahlédneme, že když všechna řešení prvního úkolu byla

$$j_1 + \lambda_1 b, j_2 + \lambda_2 b, \dots, j_\nu + \lambda_\nu b,$$

druhý úkol splňují právě čísla

$$y(j_1 + \lambda_1 b), y(j_2 + \lambda_2 b), \dots, y(j_\nu + \lambda_\nu b)$$

a tedy podle vztahu (3) právě čísla

$$y(j_1) + 2\lambda_1 j_1 + \lambda_1^2 b, y(j_2) + 2\lambda_2 j_2 + \lambda_2^2 b, \dots, y(j_\nu) + 2\lambda_\nu j_\nu + \lambda_\nu^2 b, \quad (4)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ proběhnou všechna celá čísla. Jestliže pro daná celá čísla a, b neexistuje řešení první úlohy, neexistuje ani řešení úlohy druhé.

Příklad. Určete všechna celá čísla y , pro která $15 + 7y$ je čtvercem celého čísla!

Řešení. $15 + 7y = x^2, y = \frac{x^2 - 15}{7}.$

Najdeme všechna x , pro něž $\frac{x^2 - 15}{7}$ je celým číslem.

$$\mu = 3, \quad y(0) = -\frac{15}{7}, \quad y(1) = -2, \quad y(2) = -\frac{11}{7}, \quad y(3) = -\frac{6}{7}.$$

Tedy $y(1)$ a $y(7-1) = y(6) = 3$ jsou všechna celá čísla pro x z intervalu $<0;6>$. Všechna hledaná y jsou proto podle (4) $-2 + 2\lambda_1 + 7\lambda_1^2, 3 + 12\lambda_2 + 7\lambda_2^2$,

kde λ_1, λ_2 proběhnou všechna celá čísla. Jsou to:

$$-2, 3, 7, 22, 30, 55, 67, 102, 118, 163, \dots$$

Všimněte si, že všechna tato čísla jsou již určena prvním výrazem, dosazujeme-li postupně $\lambda_1 = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$, a tedy druhý výraz se zdá být zbytečný. Není to náhoda. Pro $j_\alpha = b - j_\beta$ totiž platí rovnost $y(j_\alpha + \lambda_\alpha b) = y(j_\beta + \lambda_\beta b)$, když $\lambda_\beta = -1 - \lambda_\alpha$. Zdůvodnění je snadné; z rovnice (1) je vidět, že $y(x) = y(-x)$. Potom

$$y(j_\alpha + \lambda_\alpha b) = y(-j_\alpha - \lambda_\alpha b) = y(b - j_\alpha + [-1 - \lambda_\alpha]b) = y(j_\beta + \lambda_\beta b).$$

To v našem příkladě znamená, že dosazením $\lambda_2 = -1 - \lambda_1$ do výrazu $3 + 12\lambda_2 + 7\lambda_2^2$ dostaneme $-2 + 2\lambda_1 + 7\lambda_1^2$, to je, dosadíme-li do výrazu $-2 + 2\lambda_1 + 7\lambda_1^2$ postupně hodnoty $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$, dostáváme stejná čísla, jako když do výrazu $3 + 12\lambda_2 + 7\lambda_2^2$ dosazujeme postupně hodnoty $-1, 0, -2, 1, -3, 2, -4, \dots$

Pro početní postup v úkolu II. z toho plyne, že není nutno stanovit všechny výrazy (4), ale stačí utvořit je pro $j_1, j_2, \dots, j_\mu$, kde μ má stejný význam jako v úkolu I., tj. μ je celé číslo, pro něž $\frac{|b| - 1}{2} \leq \mu < \frac{|b| + 1}{2}$.

Příklad. Přesvědčte se, že $2 + 3y$ není pro žádné celé y čtvercem celého čísla!

Řešení. $2 + 3y = x^2, y = \frac{x^2 - 2}{3}, \mu = 1, y(0) = -\frac{2}{3}, y(1) = -\frac{1}{3}.$

Výraz $2 + 3y$ není čtvercem celého čísla pro žádné celé y , neboť žádné z čísel $y(0)$, $y(1)$ není celým číslem.

III. Čtenáři ponecháváme vyšetření tohoto úkolu: Stanovit všechna celá čísla x , pro něž je celým číslem výraz

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b}, \quad (5)$$

kde $b \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou celá čísla, n přirozené číslo.

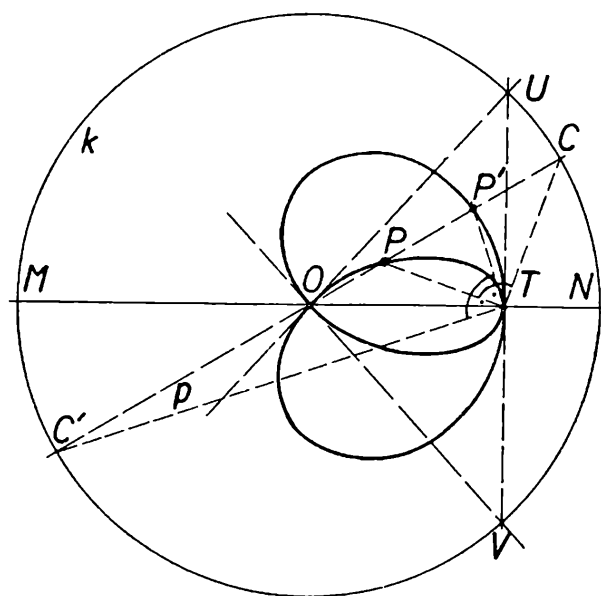
Čtenáři se přesvědčí, že pro určení všech řešení tohoto úkolu platí zcela analogicky věty 1., 2., 3. a 4., avšak věty 5. lze užít jen v případě, že číselník výrazu (5) obsahuje pouze sudé mocniny x .

Stanislav Horák, odb. as. ČVUT, Praha:

Jeřábková křivka

Matematika a zvláště geometrie se v našem národě těšila vždy značné oblibě. V 2. polovině 19. stol. pronikl svými pracemi z geometrie trojúhelníka a studiem rovinných křivek prof. *Václav Jeřábek*. V západních zemích (Francie, Belgie), kam posílal některé své práce, nazvaly jeho jménem zvláštní body v trojúhelníku. Známa je *Jeřábekova hyperbola* a *Jeřábekova křivka* (v německé literatuře die Jeřabeksche Kurve). O jejím sestrojení se tu zmíníme.

Je dána kružnice $k \equiv (O; r)$ a na jejím pevném průměru MN je dán bod $T \neq O, M, N$ (obr. 1). Sestrojme libovolný průměr $p \neq MN$ a jeho krajní body označme C, C' . K přímce TC sestrojme v bodě T kolmici a její průsečík P s průměrem p je bodem Jeřábkovy křivky. Podobně z bodu C' obdržíme bod P' jako další bod této křivky. Ihned je patrné, že průměr MN je její osou souměrnosti.



Obr. 1

Jeřábekova křivka je znázorněna ve vedlejším obrázku. V bodě O má tzv. dvojnásobný bod (má v něm dvě různé tečny, sama sebe v něm protíná) a v bodě T se sama sebe dotýká. Je čtvrtého stupně; to znamená, že má s přímkou společné nejvýše čtyři různé body. Její rovnice je v proměnných x, y čtvrtého stupně.

Bez důkazu ještě uvedeme konstrukci tečen v dvojnásobném bodě O . V bodě T sestrojme kolmici k průměru MN . Ta protne kružnici k v bodech U, V . Jejich spojnice s O jsou žádané tečny.

Cvičení. 1. Sestrojte Jeřábkovu křivku tak, aby její tečny v dvojnásobném bodě O byly k sobě kolmé. Dáno O, r .

2. Sestrojte Jeřábkovu křivku, jestliže jsou dány:

- bod T a body P, P' , které leží na přímce jdoucí bodem O ;
- dvojnásobný bod O , bod P a tečna t v bodě T . Při diskusi tohoto případu zjistíte, že nemusí existovat řešení.

Oldřich Kowalski, M. U., Brno:

Malá věta Fermatova

Jednou ze zajímavých a přitom dosti známých pouček elementární teorie čísel je tzv. *malá věta Fermatova*¹⁾ pro prvočísla:

a) Je-li p prvočíslo a n přirozené číslo nesoudělné s p , pak je číslo $n^{p-1} - 1$ dělitelno prvočíslem p .

Poněkud v obecnějším tvaru dá se tato poučka vyslovit takto:

b) Je-li p prvočíslo a n libovolné přirozené číslo, pak je číslo $n^p - n$ dělitelno prvočíslem p .

Dokážeme nejprve tvrzení b) a pak ukážeme, jak odtud plyne tvrzení a). Fermatova věta se dokazuje obvykle pomocí pojmu číselné kongruence. Zde chci ukázat jiný elementární důkaz, který se opírá o binomickou poučku.

Buď m přirozené číslo a p prvočíslo. Pak podle binomické poučky platí:

$$(m+1)^p = m^p + \binom{p}{1} m^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} m + 1$$

Ukážeme, že každé z kombinačních čísel $\binom{p}{k}$, kde $k = 1, 2, \dots, p-1$ je celé číslo dělitelné prvočíslem p . Podle definice je

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

počet kombinací k -tého řádu z p prvků, tedy celé číslo. V hořejším zlomku je proto čísel dělitelný jmenovatelem. Protože jsme předpokládali $k \leq p-1$, je každé z čísel $1, 2, \dots, k$ nesoudělné s prvočíslem p a tedy i jejich součin; $1 \cdot 2 \dots k = k!$ je nesoudělný s prvočíslem p . Odtud je $k!$ dělitelem součinu $(p-1)\dots(p-k+1)$, tedy $\frac{(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$ je celé číslo a $\binom{p}{k}$ je

dělitelno prvočíslem p , což jsme chtěli ukázat.

Odtud vidíme, že číslo

$$(m+1)^p - m^p - 1 = \binom{p}{1} m + \dots + \binom{p}{p-1} m$$

je dělitelno prvočíslem p .

¹⁾ Pierre de Fermat (vyslov ferma), slavný francouzský matematik (1601–1665).

Je-li nyní dáno přirozené číslo n a prvočíslo p , pak podle toho, co jsme právě dokázali (položíme-li postupně $m = 0, 1, \dots, n - 1$), platí:

$$1^p - 0^p - 1 \quad \text{je dělitelno } p$$

$$2^p - 1^p - 1 \quad \text{je dělitelno } p$$

$$(n - 1)^p - (n - 2)^p - 1 \quad \text{je dělitelno } p$$

$$n^p - (n - 1)^p - 1 \quad \text{je dělitelno } p$$

Zřejmě též součet všech čísel napsaných vlevo je dělitelný p ; tento součet je však, jak vidíme, roven číslu $n^p - n$. Tím je tvrzení b) dokázáno.

Je-li p prvočíslo a n přirozené číslo nesoudělné s p , pak podle tvrzení b) je $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ dělitelno p , poněvadž však p a n jsou nesoudělná, musí být druhý faktor součinu, tj. $n^{p-1} - 1$, dělitelný prvočíslem p . Tím je dokázáno i tvrzení a).



Inž. Jiří Klír, aspirant ČSAV
a inž. Vasil Čapla, Praha:

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací od nejstarších dob až do počátku druhé světové války

(Dokončení)

7. Vývoj analogových strojů

Myšlenku analogového řešení diferenciálních rovnic popsal jako první známý anglický fyzik William Thomson (lord Kelvin) ve dvou článcích uveřejněných v roce 1876. Myšlenka byla založena na vhodném spojení mechanických integrotů, jejichž vynálezce byl bratr lorda Kelvina-James Thomson.

První skutečný diferenciální analyzátor byl dohotoven až roku 1911 v Petrohradě mechanikem R. M. Vetcerem podle návrhu a pod vedením akademika A. N. Krylova. Myšlenka stavby stroje se zrodila u Krylova již v roce 1887, když se seznámil s pracemi lorda Kelvina. Kompletní návrh stroje, který sloužil k řešení obyčejných diferenciálních rovnic do 4. řádu s proměnnými koeficienty, byl dokončen v roce 1904.

Základem moderních mechanických diferenciálních analyzátorů se stal stroj Američana Vannevara Bushe, dokončený v roce 1930 a popsáný v klasickém článku [2] z roku 1931.

První analogová zařízení pro řešení Laplaceovy rovnice zkonstruoval leningradský profesor S. A. Geršgorin. První zařízení bylo mechanické a bylo dokončeno r. 1925, druhé z roku 1929 mělo formu elektrické sítě.

Vedle analogových strojů na řešení diferenciálních rovnic, byly sestavovány

již v 19. století též stroje na řešení algebraických rovnic. Roku 1840 rozpracoval L. L. C. Lalanne již dříve uveřejněnou myšlenku J. B. Bérarda z r. 1810 o řešení algebraických rovnic vážením. R. 1873 navrhl A. B. Kempe stroj pro stanovení reálných kořenů algebraických rovnic s reálnými koeficienty. Později roku 1880 navrhl Frank T. Freeland podobný stroj s možností stanovení i reálných složek komplexních kořenů. Myšlenky Kempeho realizoval až roku 1912 T. H. Blakesley. Téhož roku popsal R. F. Muirhead zvláštní stroj založený na Lagrangeově grafické metodě z roku 1795 a podobný stroj pro řešení soustav lineárních rovnic. Zvláštní model schopný určování i komplexních kořenů zhotovil ve Francii roku 1887 Felix Lucas. Činnost stroje, spočívající na rozprostření elektrického proudu ve velkém vodiči, popsal Lucas v serii článků v roce 1888.

Vývoj strojů na řešení algebraických rovnic byl ve skutečnosti mnohem složitější, než jak jsme jej popsali v předchozím odstavci. Z důvodu omezení rozsahu článku jsme se zmínili jen o nejdůležitějších okolnostech, a proto vážnější zájemce odkazujeme na podrobnou práci [3].

8. Ostatní stroje

První stroj na řešení logických úloh zkonstruoval r. 1883 profesor archeologie a historie umění na Princetonské universitě Alan Marquard (1853—1924). Stroj byl mechanický a použitelný do čtyř logických proměnných. Roku 1885 navrhl Marquard nový stroj, používající elektromagnetů (viz práce [4]).

Roku 1909 se setkáváme po Babbageovi s dalším projektem samočinného počítače, který vymyslel P. E. Ludgate. Ke stavbě stroje však nedošlo. Téhož roku předvedl Torres y Quevedo z Madridu svůj vynález, spočívající ve spojení psacího stroje s kalkulačkou.

Základní matematickou teorii číslicových počítačů vytvořil Angličan A. M. Turing (1912—1954) v klasickém článku [5] z roku 1936. Turing definoval novou třídu číslicových počítačů skládajících se z nekonečné papírové pásky a operačního zařízení, které má konečný počet stavů a je schopné číst informace z jistého místa pásky, jiné informace na pásku zaznamenávat a páskou posouvat o jedno místo vpravo nebo vlevo. V každém okamžiku je operační zařízení v jistém stavu a čte informaci z nějakého místa pásky. Další operace je vždy stanovena podle příslušného stavu a podle přečtené informace a sestává buď v zapsání nové informace na pásku, nebo v posunutí pásky o jedno místo doprava nebo doleva.

Na základě dlouholetých zkušeností s reléovými obvody ve spojovací technice, vzniká v několika posledních letech před 2. světovou válkou nový obor, teorie reléových obvodů, který má nesmírný vliv na další vývoj číslicových strojů na zpracování informací a především samočinných počítačů.

Ve Spojených státech se zabývali myšlenkou vybudování samočinného počítače dr. Howard Aiken z Harvardské university již přibližně od roku 1930, kdy vytvořil základní koncepci stroje. K vlastní stavbě stroje, který byl reléový, došlo však až v roce 1937.

V Německu začal se stavbou samočinného počítače inženýr Konrád Zuse dokonce již v roce 1935. Stroj byl reléový s mechanickou kolíčkovou pomětí. Oba samočinné počítače, Aikenův a Zuseho, byly dokončeny až za druhé světové války.

9. Závěr

V popisovaném období do 2. světové války mají největší převahu stroje mechanické, popřípadě stroje mechanické s elektrickým pohonem. Menší skupinu strojů tvoří v tomto období stroje reléové a některé analogové stroje čistě elektrické. Elektronické stroje nebyly dosud známy.

Celé popisované období představuje jakousi předehru k vytvoření vlastního oboru strojů na zpracování informací podložené teoretickou základnou.

Literatura:

- [1] Klír J.: Matematické stroje. Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 1, roč. 1959/60.
- [2] Bush V.: The Differential Analyzer a New Machine for solving Differential Equation. Journal of the Franklin Institute, 212, 1931, str. 447—488.
- [3] Frame J. S.: Machines for Solving Algebraic Equation. Mathematical Tables and other Aids to Comp., 1, 1945, str. 337—353.
- [4] Mays W.: The first Circuit for an Electrical Logic-Machine. Science, 118, 1953, str. 281—282.
- [5] Turing A. M.: On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. math. Soc., 24, 1936, str. 230—265.

In ž. J o s e f R i s s, aspirant ČSAV, Praha:

Analogové matematické stroje

1. Všeobecně

Už v úvodní stati tohoto cyklu [viz článek (8)] získal čtenář přehled o základních rozdílech mezi *a n a l o g o v ý m i* a *č í s l i c o v ý m i* matematickými stroji. V této části se podíváme hlouběji do oblasti analogových strojů.

Nejobecnější vlastností všech analogových zařízení je, že zobrazují matematickou veličinu jako hodnotu nějakého fyzikálního parametru, která se může měnit v určitém intervalu spojitě v závislosti na hodnotě zobrazované veličiny. Podle toho, jakého fyzikálního parametru používáme k zobrazení, můžeme tato zařízení třídit takto: *m e c h a n i c k á* (parametry jsou zpravidla délka, úhel, síla, rychlost, zrychlení), *e l e k t r i c k á* (napětí, proud, frekvence, fázový posuv, čas), *e l e k t r o m a g n e t i c k á* (napětí, proud, magnetický tok) a jejich kombinace. Každého principu se používá pro některou z jeho výhod v těch aplikacích, kde je tato vlastnost nejvíce žádoucí: přesnost u mechanických zařízení, rychlost u většiny elektrických zařízení, jednoduchost, levnost, malá váha ap. Často je možno provést dané zařízení více způsoby.

Ze zásadní odlišnosti zobrazení matematické veličiny v analogových a číslicových strojích vyplývá i různé pole použití obou druhů. V oblasti počítačů se stroje číslicové osvědčují především tam, kde je třeba provádět výpočty na nespojitých (čili tzv. diskretních) hodnotách nějakých veličin, kde se požaduje značná přesnost a rychlost výpočtu, nebo kde je příprava úlohy pro číslicový stroj jednodušší.

Analogové stroje mají naproti tomu uplatnění hlavně tam, kde je možno výpočet „modelovat“, tj. postavit pomocí stroje fyzikální soustavu, kterou lze popsat rovnicemi, jaké máme řešit a kde nám nevadí omezená přesnost analogových strojů. Pokud se týče rychlosti, řešení na analogovém stroji je obvykle pomalejší než vlastní výpočet na rychlém číslicovém počítači. To však nemusí vždy znamenat nevýhodu analogových strojů, protože příprava úlohy - tzv. *programování* - pro číslicový stroj může trvat mnohem déle než pro analogový.

Přesnost u analogových strojů je omezena přesností výroby součástí a chybami měření fyzikální veličiny, která zobrazuje matematickou veličinu. Výrobní přesnost součástí je obvykle asi 0,1 %. Přesnější součásti, kolem 0,01 % nebo i více (např. součásti precizního Bush-Caldwellova mechanického diferenciálního analyzátoru na MIT v USA), jsou nesmírně nákladné a choulostivé. Naproti tomu u číslicového počítače se dá dosáhnout přesnějšího výsledku (pokud to není omezeno možnostmi výpočtové metody, nebo přesností zadání výchozích hodnot) buď zvětšením rozsahu stroje, nebo déle trvajícím výpočtem. Náklady na docílení vyšší přesnosti výsledku než asi 1 % až 0,1 % jsou tedy u číslicových strojů podstatně nižší.

Mimo oblast řešení matematických úloh mají analogové stroje další velké pole použití tam, kde je třeba modelovat chování složitých fyzikálních soustav, jako např. automatické řízení letadla, rozvodné systémy o vysokém napětí, regulační obvody ap. V takových případech nás leckdy nezajímají přesné hodnoty proměnných veličin systému v závislosti na čase nebo jiném parametru, ale potřebujeme k posouzení vlastností systému znát hrubé průběhy těchto veličin při různých vstupních nebo rušivých průbězích. Takové nahrazování skutečných soustav zařízeními, která se chovají *analogicky* tj. *podobně*, má v technice velký význam. Je nezbytné k vyšetřování chování obvodů, jejichž některé členy není možno zkoušet přímo, protože to je nebezpečné (kotle, regulované soustavy v chemickém průmyslu, tepelná zařízení, reaktory), nebo příliš drahé (rozvodné sítě), dále tam, kde nějakou část obvodu teprve navrhujeme a hledáme její nejvhodnější nastavení, aby obvod jako celek splňoval dané požadavky co nejlépe. V prvním případě použijeme *simulátoru* (simulace znamená předstírání), zařízení, které bude v obvodu nahrazovat onu část, již nemůžeme zapojit a které má vstup i výstup uzpůsoben tak, aby simulátor konal v obvodu tutéž funkci jako nahrazená část. Při návrhu nového zařízení se pro stanovení optimálních (tj. nejvýhodnějších) hodnot konstant obvodu užívá *analogového modelu* dotyčného procesu, na němž parametry obvodu měníme tak dlouho, až dosáhneme uspokojivého výsledku. Jak simulátory, tak modely mohou být buď speciální stroje, nebo se k tomu účelu může použít počítačů.

Je samozřejmé, že k tomu, aby bylo možno nějaké zařízení nahradit simulátorem nebo modelem, je nutno, aby se obojí za těchto podmínek chovalo podobně. Přesněji řečeno, obojí musí být popsáno stejnými rovnicemi (algebraickými i jinými), i když nás tyto rovnice třeba nezajímají. V různých oborech fyziky skutečně existují jevy, které lze vyjádřit stejnými vztahy. Nejobvyklejší a nejsnáze pochopitelné jsou analogie mechanicko-elektrické; např. mechanický člen, slo-

žený ze setrvačné hmoty, z pružiny, která vrací hmotu do klidové polohy a z tlumiče pohybu se chová podobně jako seriový rezonanční obvod RLC (tj. obvod rezonanční obsahující odpor ohmický, indukční i kapacitní). Navzájem analogické veličiny jsou srovnány v tab. I.

Veličina mechanická	elektrická
hmota m	indukčnost L
konstanta direkt. síly pružiny D	inverzní kapacita $\frac{1}{c}$
konstanta tlumení B	elektrický odpor R
mechanický posuv x	proud i
rychlost v	změna proudu s časem $\frac{di}{dt}$ ¹⁾
síla F	změna napětí s časem $\frac{du}{dt}$ ¹⁾

Tab. I. Mechanicko-elektrické analogie.

Jsou známy ovšem i jiné analogie a to elektricko-hydraulické, pneumatické, tepelné, magnetické. Na základě těchto podobností je možno modelovat danou fyzikální soustavu prostředky, které jsou levné, pohotové, snadno ovladatelné ap.

Analogie mají velký význam také u takových soustav, které zasahují do více než jedné oblasti fyziky, např. při řešení kmitající části reproduktoru, kde se vyskytují mechanické, elektrické a magnetické veličiny, je možno celou soustavu převést na elektrické náhradní schéma, které lze snadno analyzovat.

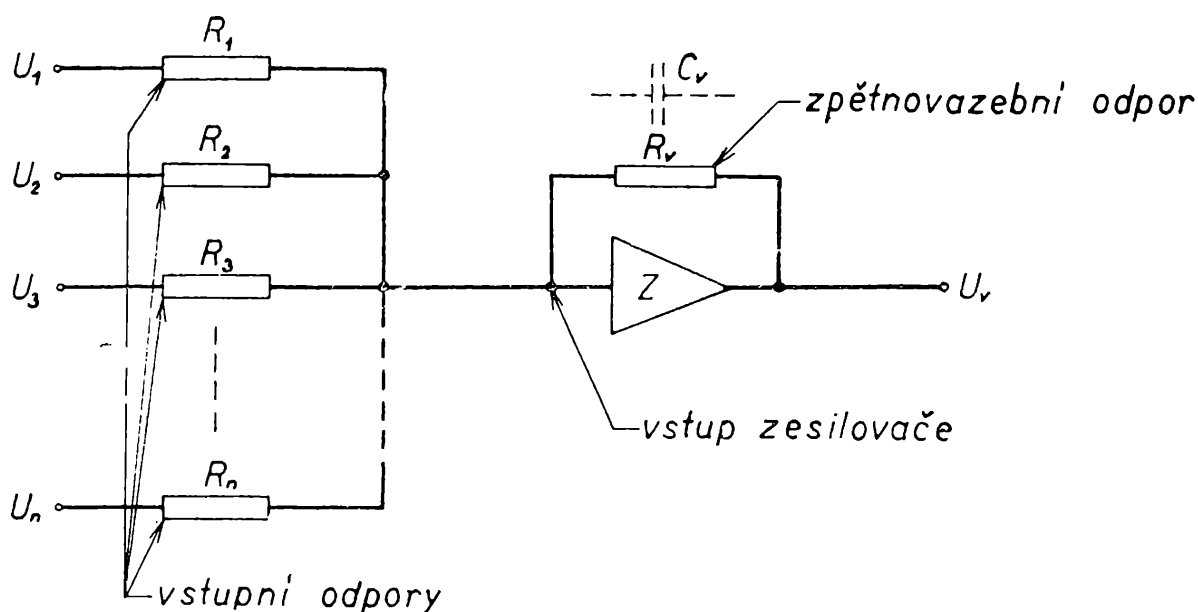
Je nutno dodat, že uvedené oblasti nejsou výlučně doménou analogových strojů. Zvláště v posledních letech se stírají dřívější hranice použitelnosti analogových a číslicových strojů, objevují se četná zařízení smíšená analogově-číslcová. Číslcová technika proniká hlavně pro svou rychlost a někdy i menší rozměry a váhu do oblasti automatické regulace, řízení obráběcích strojů atd. Objevují se nové problémy a je obtížné předpovědět vývoj do budoucna. Je ovšem jisté, že vždy bude existovat aspoň omezené množství aplikací, v nichž bude výhodnější užít analogových strojů.

¹⁾ Zhruba řečeno $\frac{di}{dt}$, resp. $\frac{du}{dt}$ jsou symboly pro limity poměrů změny proudu, resp. napětí podle změny času (tzv. derivace).

2. Analogové počítače

Zatím jsme uvažovali o analogových strojích v širším slova smyslu. Nyní se zaměříme na takové analogové matematické stroje, které slouží převážně k řešení matematických úloh.

Jednoduché příklady takových zařízení najdeme snadno; jsou to logaritmické pravítko, planimetr,²⁾ zařízení použitelná pro nesložitě úlohy, které se v praxi, hlavně technické, vyskytují dosti často. Jinou analogovou pomůckou jsou mechanizované nomogramy,³⁾ sloužící k rychlému výpočtu hodnoty funkce více nezávisle proměnných.



Obr. 1. Elektrický sčítací a integrační obvod.

Složitější stroje (počítače) jsou zpravidla určeny k řešení rovnic algebraických nebo tzv. diferenciálních a soustav těchto rovnic. Z prvních jsou zvláště důležité stroje pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic (tzv. *lineární analyzátory*) a pro řešení algebraických rovnic vyšších stupňů (*analyzátory polynomů*), druhé se nazývají *diferenciální analyzátory* a jsou to nejuniversálnější analogové stroje vůbec, protože jich lze použít i k řešení algebraických rovnic, i k jiným účelům. Pochopení jejich funkce vyžaduje vyšších znalostí matematiky.

Každý z těchto strojů potřebuje k řešení složitých úloh řadu samostatných prvků, které provádějí jednoduché matematické operace. Tyto prvky se potom navzájem spojují podle schématu, vypracovaného zvláště pro každou úlohu (tzv. *operační síť*).

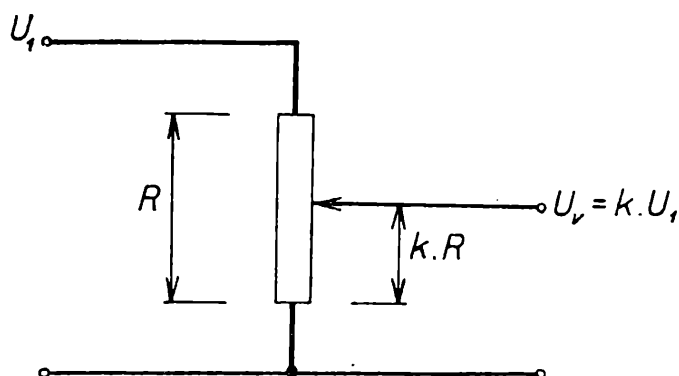
²⁾ Viz např. článek J. Růžičky: *Ú h l o m ě r j a k o p l a n i m e t r*, Rozhledy, roč. 38, č. 4.

³⁾ Viz např. J. Chudý: *N o m o g r a m y*, Rozhledy, roč. 37, č. 4, 5, 6.

Nejjednodušší z těchto stavebních kamenů jsou *sčítačky*. Mají dva vstupy x, y a jeden výstup z , mezi nimiž platí vztah

$$x + y = z .$$

Mohou tedy provádět součet nebo rozdíl obou vstupních veličin. V mechanických strojích se tato operace obvykle provádí *diferenciálem*, podobným známému zařízení stejného jména, používanému u automobilů. Elektronické stroje mají ke sčítání dvou nebo více napětí obvod s jedním operačním zesilovačem Z (je to zesilovač stejnosměrného napětí s vysokým ziskem a velkou stabilitou nuly), znázorněný schematicky na obr. 1.



Obr. 2. Elektrické násobení konstantou,

Protože zisk zesilovače je značně veliký, je i při prakticky dosažitelné maximální hodnotě U_v (která je asi 100 až 150 V) vstup zesilovače stále velmi blízko nuly napětí. Víme, že do vstupu zesilovače neteče téměř žádný proud. Proto je možno napsat podle 1. Kirchhoffova zákona rovnost proudů v bodě vstupu zesilovače:

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} + \dots + \frac{U_n}{R_n} = - \frac{U_v}{R_v} .$$

Zvolíme-li ještě

$$R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n ,$$

dostaneme

$$\frac{1}{R_n} (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n) = - \frac{U_v}{R_v}$$

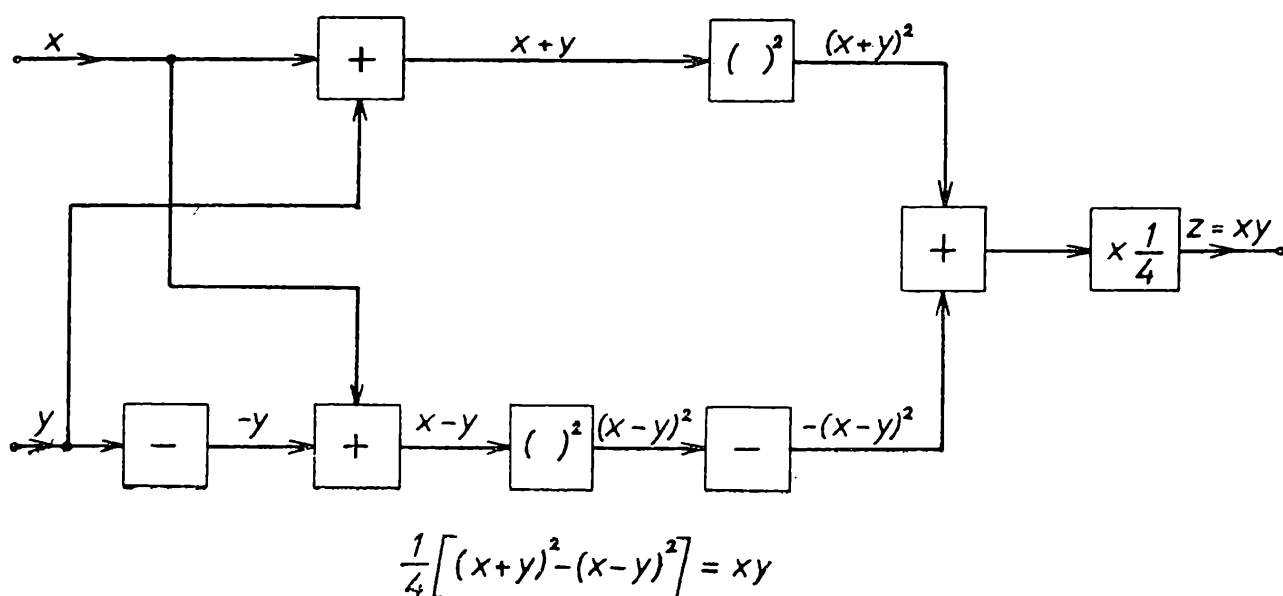
a tedy

$$U_v = - \frac{R_v}{R_n} (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n) .$$

Z tohoto výrazu je již patrné, že znázorněný prvek sečítá napětí, přiváděná na jeho vstupy.

Jiná jednoduchá operace je *násobení konstantou*. U mechanických strojů se provádí zavedením převodu mezi hřídeli. Operační síť je nutno navrhnout tak, aby žádná z konstant, kterými se násobí, nebyla v absolutní hodnotě větší než 1, protože by to znamenalo převod do rychla. U elektronických strojů se rovněž vyhýbáme konstantám, které neleží v intervalu $< -1, +1 >$, protože pro ně bychom potřebovali navíc po jednom zesilovači. Násobení konstantou, která je v absolutní hodnotě menší než 1, se provádí potenciometrem (obr. 2).

Z dalších algebraických operací je nejdůležitější *násobení dvou veličin*. U mechanických strojů nedělá potíže. Provádí se nejčastěji jako mechanizace úměry $X_1 = \frac{X_2 \cdot X_3}{X_4}$ pomocí podobnosti trojúhelníků. Mechanismu lze pak užít i pro



Obr. 3. Blokové schéma násobičky, používající generátorů kvadratické funkce.

dělení. V elektromechanických strojích se obvykle užívá buď potenciometru jako pro násobení konstantou (obr. 2), na němž jeden z činitelů je U_1 a druhý, rovněž proměnný, je k , nebo systému podobného stejnosměrnému motoru, jehož moment je úměrný součinu indukce v magnetickém obvodu a proudu tekoucího vinutím kotvy. U elektronických strojů bývají násobičky obtížným problémem. K dosažení vyšší přesnosti (0,1 %) a zároveň rychlosti je často třeba složitých elektronických obvodů. Nejčastěji se u těchto strojů provádí násobení pomocí generátorů kvadratické funkce, které dávají dvojnásobek vstupní veličiny a které jsou zapojeny podle blokového schématu na obr. 3.

Při řešení algebraických rovnic vyšších stupňů nebo jiných složitějších úloh, je nutno zavádět do stroje hodnoty různých, často experimentálně zjištěných funkcí nezávisle proměnné nebo i jiných veličin. Zařízení, kterými se to uskutečňuje, se nazývají *generátory funkce*. Obecně je generátorem funkce každý z dosud popisovaných elementů (sčítačka, násobička), ale v matematických strojích tak označujeme hlavně generátory složitějších funkcí. Pro některé funkce jedné pro-

měnné, které lze vyjádřit matematickým výrazem (algebraické funkce, úhlové funkce, atd.), je možno u mechanických strojů sestavit zařízení, která je modelují pomocí tzv. *integrátorů*.

Dosti širokou třídu funkcí jedné i více proměnných lze mechanizovat pomocí *kloubových mechanismů*, tj. systému táhel i klik. Pro funkce jedné a dvou proměnných lze užít *vaček*.

U elektrických strojů se obvykle užívá tzv. funkčních potenciometrů nebo potenciometrů s odbočkami, na nichž se nastaví žádaná funkce, nebo obvodů s odpory, pomocnými zdroji stejnosměrného napětí a usměrňovači (diodami), které nahradí předepsanou funkci krátkými lineárními úseky.

Velmi důležitou skupinu tvoří elementy, provádějící operace tzv. infinitezimálního počtu, což však přesahuje rámec našeho článku.

3. Závěr

Tento stručný nástin oboru analogových strojů nemůže čtenáři dát širší rozhled po jejich technice, stavbě a použití. Proto je vhodné upozornit na další prameny, z nichž je možno čerpat hlubší vědomosti. Souborné dílo o analogových strojích v češtině dosud neexistuje; jsme tedy odkázáni na práce časopisecké nebo cizí. Čtenáři, který snad zde něčemu neporozuměl, doporučujeme, aby si přečetl práci [1]. Pro pokročilejšího čtenáře, seznámeného se základy diferenciálního počtu a diferenciálních rovnic, doporučujeme práce [2], [3], [4]. Velmi dobrá souborná díla jsou [5], [6], [7]. Práce našich techniků a vědců je možno sledovat v každoročně vydávaných sbornících *Stroje na zpracování informací* a v časopisech *Slaboproudý obzor*, *Sdělovací technika* a *Automatizace*.

Literatura:

- [1] Křížek: Číslicové a analogové počítače ve vědě a technice. *Elektrotechnik* 1959, č. 1, 2, 3.
- [2] Kabeš: Analogové matematické stroje. *Slaboproudý Obzor* 1956, č. 6, str. 317—322; č. 7, str. 388—393.
- [3] Mirtes: Analogové počítače. *Slaboproudý Obzor* 1957, č. 6, str. 379—383.
- [4] Matzner: Elektronická analogová počítací zařízení. *Sdělovací technika* 1957, č. 7, str. 196—200.
- [5] G. Corn, T. Corn: D. C. Analog Computers. (V rus. překladu: *Elektronnyje modelirujuščije ustrojstva*.)
- [6] Kobrinskij: *Matěmaticeskije mašiny nepreryvnogo dějstvija*. Moskva 1954.
- [7] Soroka: *Analog Methods in Computation and Simulation*. 1957.
- [8] Klír J.: Matematické stroje. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 38, str. 1.

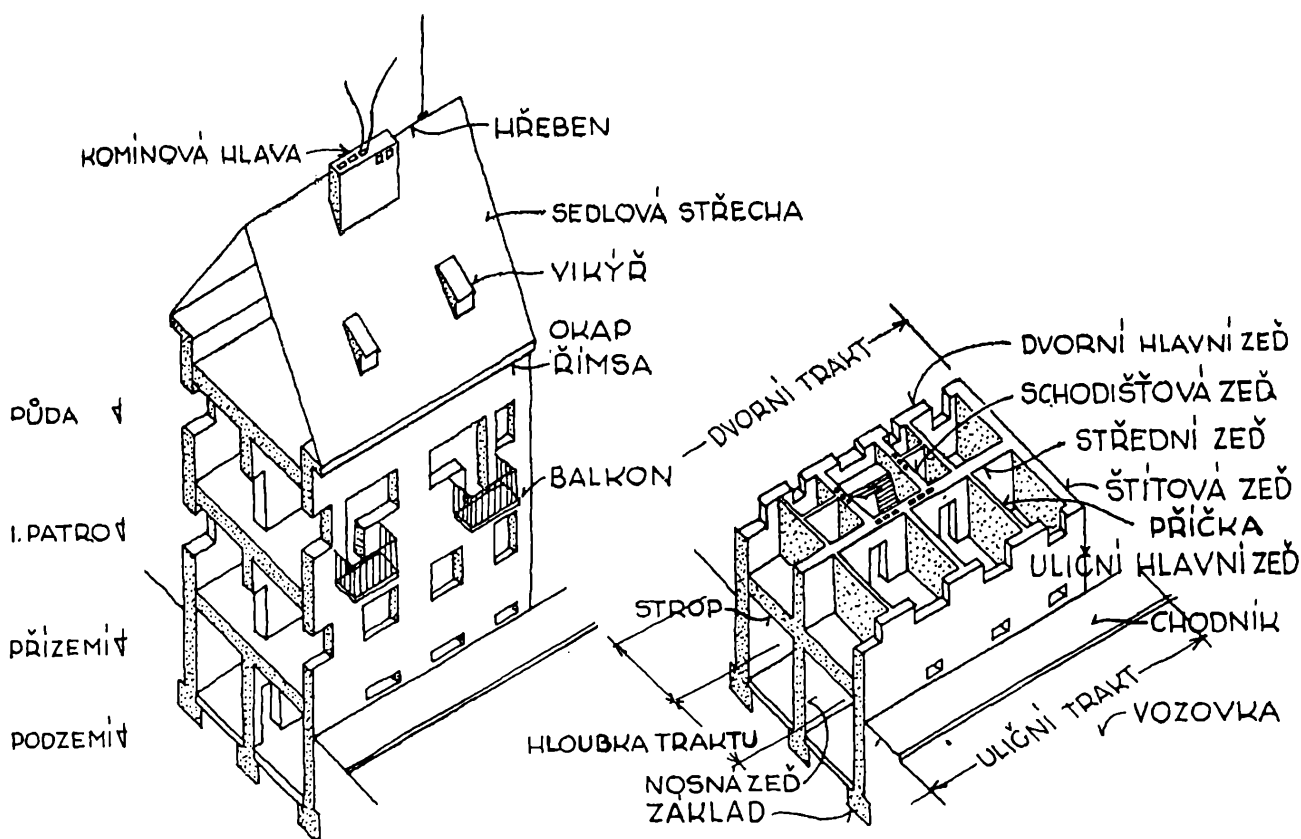
Deskriptivní geometrie



Ing. arch. Josef Švastal,
odb. as. katedry pozemního stav. na FAPS v Praze:

Jak se čtou stavitelské výkresy?

Všichni víme, jakou úlohu má a bude mít stavebnictví v budování naší socialistické společnosti. Víme také, jaké úkoly jsou na ně vloženy v oboru výstavby průmyslové, zemědělské a občanské. V úseku občanské výstavby - bytové výstavby - má stavebnictví do roku 1970 zajistit 1 200 000 bytů a tím v zásadě



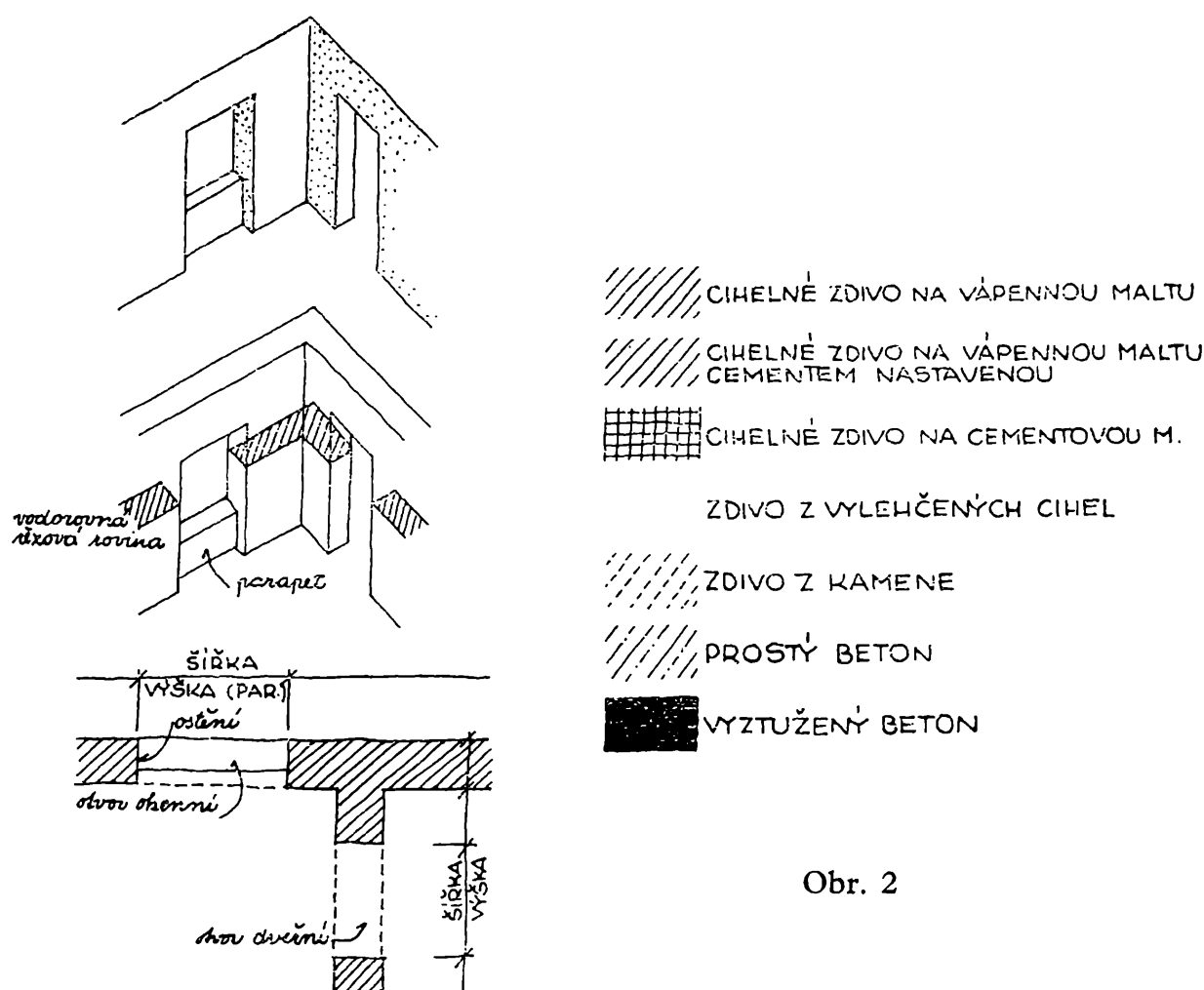
Obr. 1

likvidovat bytovou otázku u nás. Na této výstavbě se budou podílet odborníci z praxe i technici, kteří teprve začnou studovat stavitelství a svá studia zakončí tak, že se do výstavby ještě zapojí. Pro naše studenty středních škol, kteří se seznamují v polytechnické výchově s nejjednoduššími poznatky ze stavitelství,

je určen tento výklad, který je uvede do základního názvosloví a seznámí je s významem stavebního výkresu jako zobrazením technického díla pozemního stavitelství.

Na počátku podotýkám, že v rýsování stavebních výkresů existují dosud v podrobnostech se lišící způsoby, poněvadž není ještě vydána norma (ČSN),¹⁾ zavazující všechny projekční složky. Přidržíme se tedy běžně platných a užívaných způsobů navazujících na starou normu ČSN 1104-1933 a Pokyny²⁾ z roku 1952.

Nejprve se seznámíme s názvy jednotlivých částí stavby viditelných zvenku a zevnitř (obr. 1):



Obr. 2

Prostor budovy je omezen konstrukcemi svislými - zdmi a vodorovnými - stropy. Zdi jmenujeme podle polohy, které v budově zaujímají, vnější a střední zeď, nebo podle prostoru, který ohraničuje, schodišťová zeď, nebo podle přilehlého okolí, uliční, dvorní nebo sousední zeď.

Stropní konstrukce omezují prostor po výšce a dělí budovu v podlaží. Vrchní plocha stropu je upravena jako podlaha, kdežto zespod jsou trámy buď viditelné,

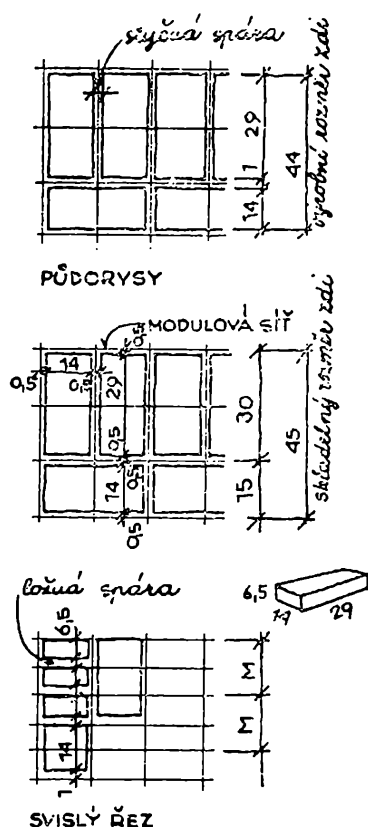
¹⁾ ČSN je značka čs. norem, které jsou závaznými předpisy, např. pro kreslení výkresů určitého oboru.

²⁾ „Pokyny pro grafickou úpravu elaborátů třístupňové technické připravenosti stavebních projektů pozemních staveb.“

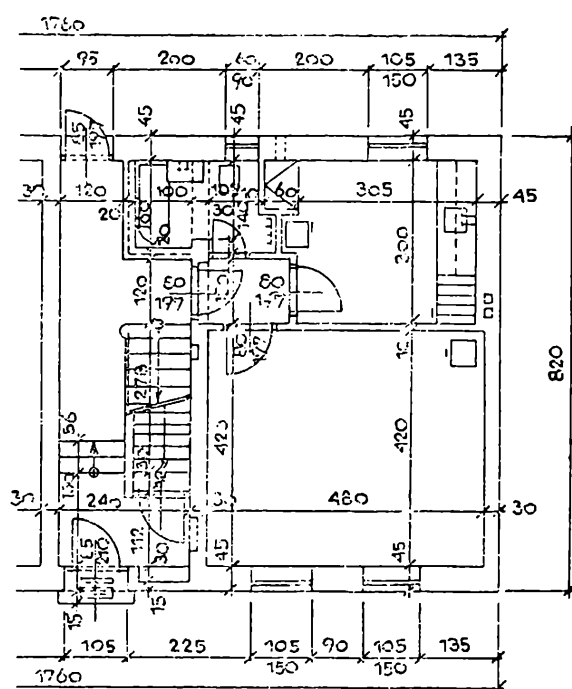
nebo jsou zakryty podhledem. Výšky podlaží se řídí účelem budovy. Užíváme dvou významů pro stanovení výšek: světlá výška (od podlahy k podhledu stropu) a konstruktivní výška (od podlahy k podlaží).

Budova je kryta buď střechou šikmou, sedlovou, valbovou nebo pultovou, nesenou dřevěným nebo betonovým krovem, nebo střechou plochou, která je zároveň stropem nad posledním patrem.

Výkresy, kterými zobrazujeme stavbu, jsou ortogonální průměty vodorovných řezů jednotlivými podlažími, svislých řezů a pohledů, kreslených v určitém zmenšení, při zachovávání určitých pravidel a s použitím symbolů, které nám představují zařizovací předměty. Půdorysy jednotlivých podlaží jsou zobrazení



Obr. 3



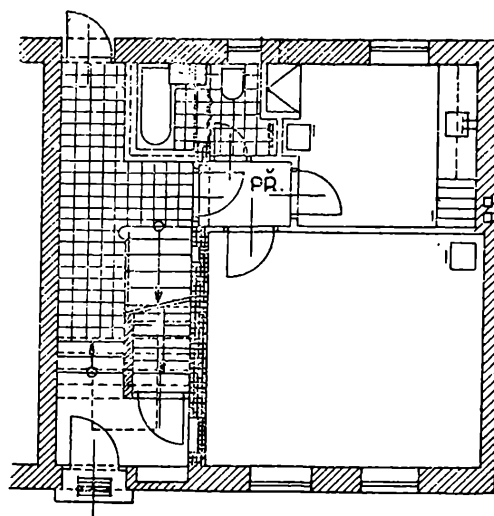
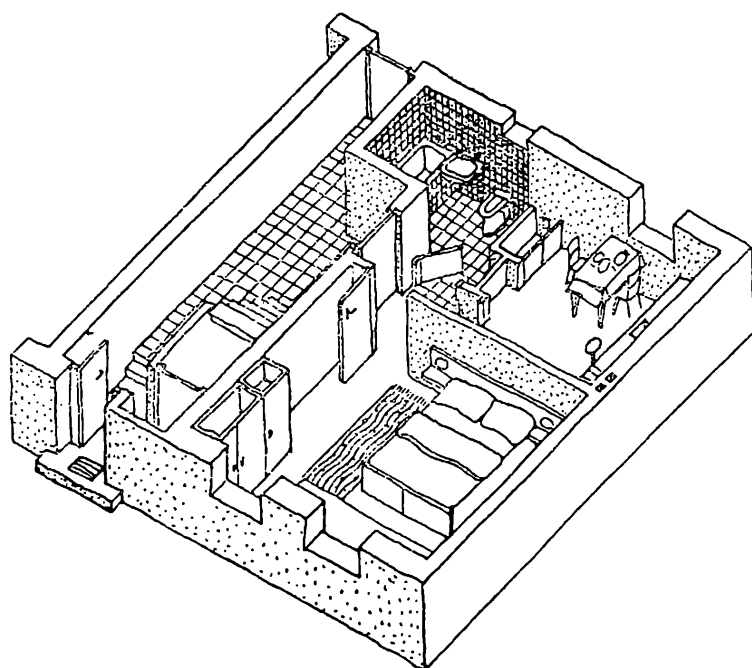
Obr. 4

myšlených vodorovných řezů, v nichž jsou zakresleny proříznuté svislé konstrukce, např. zdi a předměty ležící pod touto rovinou, která je vedena ve výši asi 120 cm nad podlahou tak, aby byly proříznuty okenní otvory (viz obr. 2 a 4). K rýsování půdorysů se užívá plné čáry asi 0,1 mm tlusté a jsou jí značeny: obrysy ploch svislých konstrukcí, všechny hrany v pohledu, symboly zařizovacích předmětů, kótovací čáry a šrafy. Hrany konstrukcí, které jsou nad rovinou řezu, značí se v půdorysu čárkovaně (obr. 2).

Druh zdiva se v půdoryse značí šrafováním příslušné plochy podle grafického značení v obr. 2, nebo zejména v rekonstrukčních výkresech je užíváno těchto barev: červené pro zdivo nové, šedé pro zdivo staré, žluté pro zdivo určené k vybourání, fialové pro beton, černé pro beton vyztužený, zelené pro kámen atd.

Tloušťky zdí se zakreslují v půdorysech ve skladebných rozměrech,⁶⁾ vyplývajících z našeho modulového systému³⁾ v násobcích 15 cm, tedy např. 15, 30, 45, 60 cm, užije-li se cihel normálního formátu.

Modulový systém koordinuje pomocí prostorové modulové sítě⁴⁾ jednotlivé rozměry stavby s rozměry a polohou stavebních prvků a zařízení, ze kterých je stavba sestavena. Výrobní rozměry⁵⁾ jsou určeny výrobě stavebních prvků a určují rozměry stavby v hrubé konstrukci. Skladebné rozměry⁶⁾ jsou směrodatné pro řazení prvků a dílů stavby v celek. V půdoryse (obr. 3) leží stavební prvek v modulové síti tak, že kolem něho zbývá $1\frac{1}{2}$ cm na styčnou spáru.⁷⁾ Ve svislém řezu (obr. 3) je umístěn tak, že horní líc leží na modulové síti a pod ním zbývá 1 cm na ložnou spáru.⁸⁾



nekótovaný stavební výkres odpovídající vedlejšímu prostorovému vyobrazení

Obr. 5

Rozměry konstrukcí, dílů a otvorů jsou určovány na stavebních výkresech podle zásady: kótují se ve skladebných rozměrech všechny rozměry konstrukcí tak, aby byly jednoznačně určeny velikostí svých geometrických tvarů a polohou k ostatním dílům.

³⁾ M o d u l o v ý s y s t é m je metoda, která pomocí prostorové modulové sítě stanoví zásady k určování rozměrů stavebních prvků, aby z nich bylo možno skládat díly stavby a z dílů celou stavbu a tím má umožnit zprůmyslnění stavební výroby, umožnit montážní způsob stavění a docílit tak zrychlení a zlevnění stavebnictví.

⁴⁾ Prostorová m o d u l o v á s íť je soustava tří pravoúhelníkových rovinných sítí navzájem kolmých, se vzdáleností jednotlivých přímek sítě rovné základnímu modulu $M = 15$ cm.

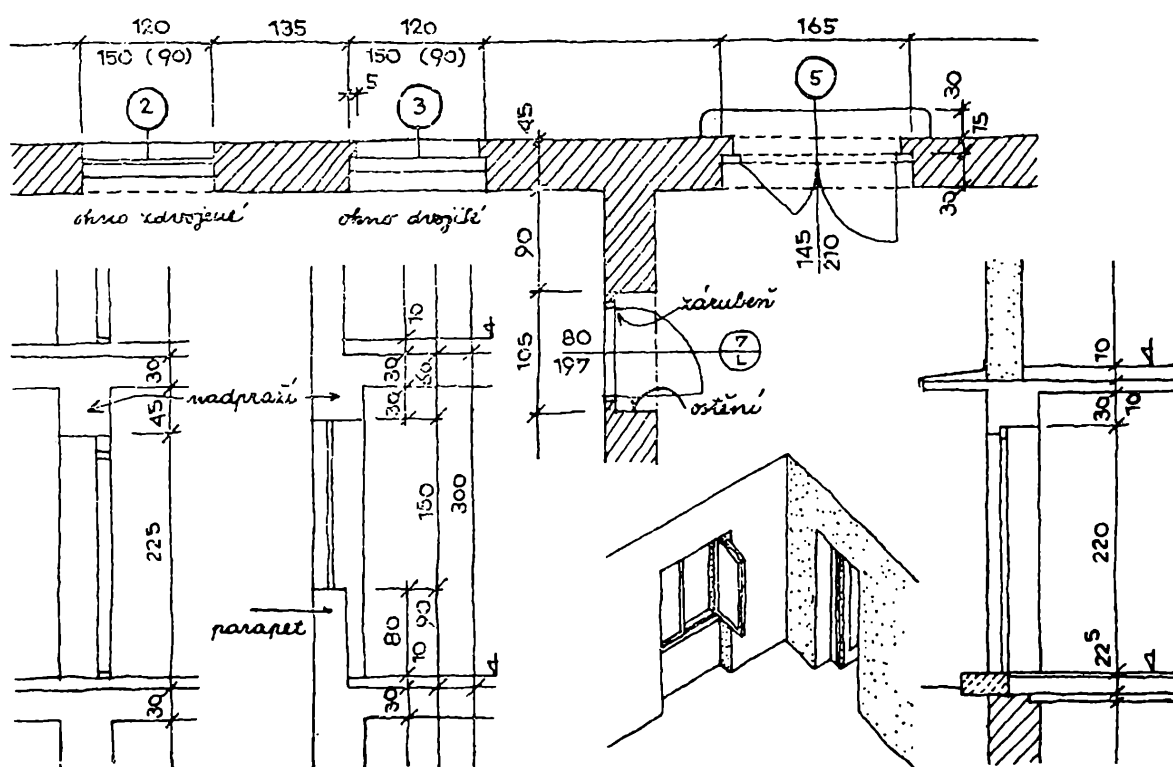
⁵⁾ Výrobní rozměr např. cihly je 14/29/6,6 cm.

⁶⁾ Skladebný rozměr téže cihly je 15/30/7,5 cm.

^{7), 8)} Jednotlivé cihly se spojují maltou v celek, v zeď. Mezera mezi cihlami je spára vyplněná maltou. Styčná spára je rovnoběžná se směrem tlaku (cihly se stýkají bokem). Ložná spára je kolmá ke směru tlaku (cihly v ní leží).

Délky zdiva jsou kótovány tzv. kótovací čarou, ohraničenou přetrhávku a nade-psáním čísla, které ve stavebních výkresech vyjadřuje délku zásadně v cm. Otvory ve zdech jsou kótovány zlomkem, v němž číselník značí šířku otvoru a jmenovatel výšku otvoru. Kóty jsou sestaveny v takový systém, který dovolí kontrolu součtu dílčích kót kótou celkovou. Vepsání číselných hodnot do kótovacího systému je prováděno ve dvou směrech a to popisem ve směru vodorovném a ve směru k němu kolmém z pravé strany. K popisování číslic i písmen užíváme obvykle kótovacích a redisových per, kterými od ruky píšeme svislá čísla i písmena jednoduchých a čitelných tvarů (obr. 4).

Přechod od představy skutečnosti k zakreslení ve stavebním výkrese provedte na následujícím prostorovém obrázku (obr. 5), ve kterém jsou konstrukce, tj. zdi, okna, dveře a zařizovací předměty: vana, umyvadlo, kamna, a také nábytek: postele, skříň, stůl se židlemi, zakresleny ve svém vzhledu a tvaru, a na stavebním



Obr. 6

výkresu, který odpovídá prostorovému vyobrazení, se zakreslením všech uvedených dílů stavby a symbolů zařizovacích předmětů, jak se do stavebních výkresů kreslí. Pohyblivý nábytek, který není součástí stavby se do výkresu nekreslí.

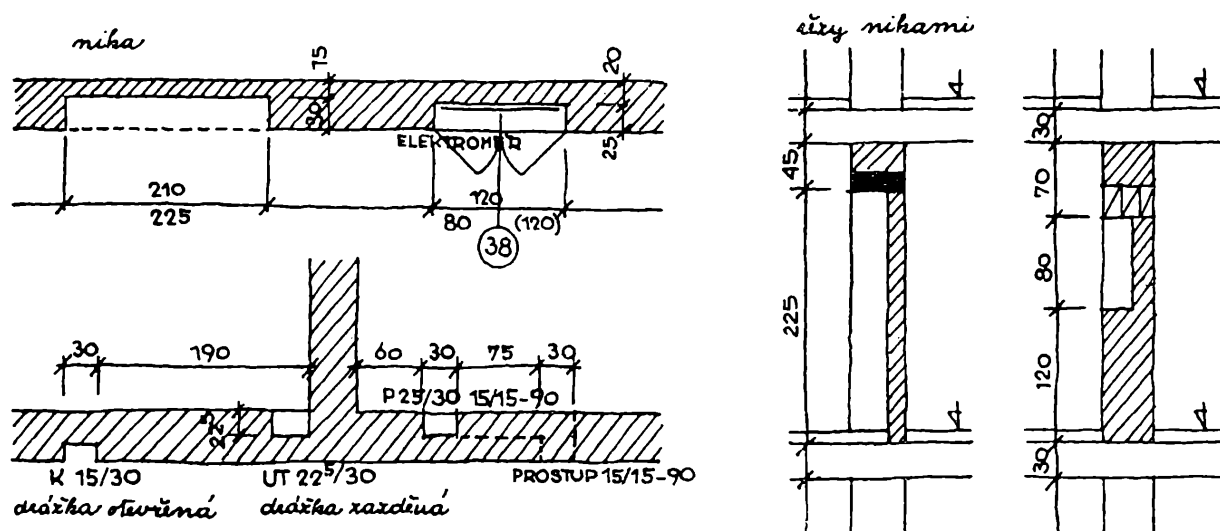
Zakreslování všech dílů stavby je pouze schematické, poněvadž v měřítku 1 : 100 a 1 : 50 není možno kreslit podrobnosti. Nahrazujeme skutečnost pouhými symboly dílů, konstrukcí a předmětů.

Měřítkem rozumíme poměr zmenšení výkresu proti skutečnosti. Např. prováděcí výkres⁹⁾ je kreslen v měřítku 1 : 50. Nejčastěji se užívá měřítek 1 : 200, 1 : 100, 1 : 50, 1 : 25 a měřítko je vždy napsáno na výkrese.

⁹⁾ Prováděcím výkresem nazýváme výkres tak podrobný, obvykle v měřítku 1 : 50, že se podle něho realizuje stavební dílo.

Zakreslování nejdůležitějších dílů si rozdělíme na prvky stavby a zařizovací předměty. Započneme otvorem a výplní tohoto otvoru - oknem. V půdorysu (obr. 6) je zakreslen ve zdi příslušný otvor s rovnou nebo zalomenou špaletou.¹⁰⁾ Tento otvor je kótován tak, že na kótovací čáře je napsána šířka otvoru (120 cm bez označení cm), pod kótovací čarou je napsána výška otvoru (150 cm) a v závorce výška parapetu¹¹⁾ (90 cm), kterou se rozumí výška spodního okraje okna od povrchu konstrukce stropu, tedy pod podlahu.

Do otvoru okenního kreslíme jednou čarou okno jednoduché (má jen jedno zasklení), dvěma čarami okno zdvojené (dvě zasklená křídla jsou spolu spojena a otvírají se najednou a oddělují se jen při čištění), nebo okno dvojité (se dvěma křídly, která se otvírají každé zvlášť). U zalomení ostění¹⁰⁾ - špalety - kótujeme otvor a výstupek pomocnou kótou. Tedy symbolem jedné čáry nebo dvou čar vyjadřujeme celou výplň otvoru. Přesné poučení o rozměru, druhu a tvaru, za-



Obr. 7

sklení a nátěru najdeme ve výpisu prvků PSV (přidružená stavební výroba) podle pořadového čísla umístěného na výkrese v tzv. „bublince“.¹²⁾

Druhá výplň otvoru ve zdi jsou dveře. V půdorysu (obr. 6) je kreslen otvor ve zdi, v něm zárubeň,¹³⁾ práh a křídlo dveří s vyznačením otvírání pomocí obloučku. Křídlo otevíráme o 90°, abychom se přesvědčili, že křídlem nebudeme narážet a že průchodu dveřmi nic nevádí. U dvoukřídlových dveří je značeno otevření jen o 45° toho křídla, které se běžně neotevírá. U dveří jsou kótovány dva prvky: vlastní otvor průchozí, tzv. světlá šířka (80 cm) a světlá výška (197 cm) a zednický

¹⁰⁾ Ostění neboli špaleta je boční plocha okenního nebo dveřního otvoru.

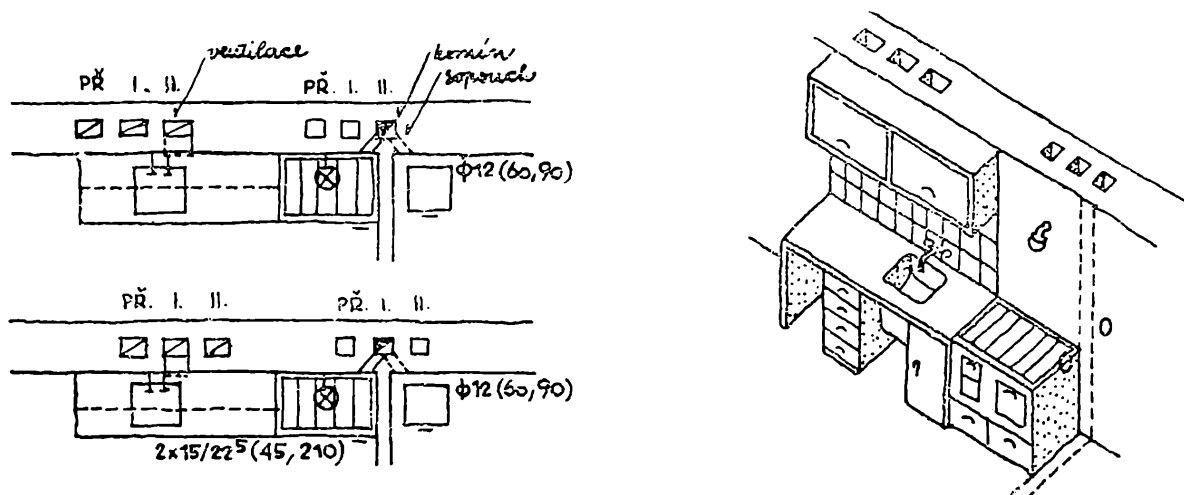
¹¹⁾ Parapetem nazýváme nízkou zídku do výšky prsou; zde se rozumí zdivo pod oknem.

¹²⁾ Je to odvolávka na podrobnost o předmětu zakresleném schematicky ve výkrese a značí se graficky kroužkem např. na ose dveří s vepsaným číslem, které značí položku podrobnosti.

¹³⁾ Zárubeň, dnes obvykle ocelová, rámuje dveřní otvor a nese dveřní křídlo.

otvor, ve kterém je zárubeň osazena (105 cm). Tento otvor má v půdorysu rozměr 105 cm a v řezu 225 cm, od konstrukce stropní až po nadpraží.¹⁴⁾ Je to proto, že otvor ve zdi pro dveře se zdí v nosné zdi v postupu stavby, ale zárubeň se osazuje až později do tohoto otvoru. Vstupní dveře do domu jsou zvláštní konstrukce v zalomeném ostění, aby byly chráněny před povětrností. Tyto dveře nemají prah, zatím co dveře v budově mají prahy tam, kde jsou různé podlahy v sousedních místnostech, nebo mezi místnostmi, z nichž jedna je vytápěna. Podrobné poučení, obdobné jako u okna, se dozvíme z výpisu PSV podle čísla v „bublince“,¹²⁾ tentokrát ještě doplněné písmenou P nebo L, které značí dveře pravé nebo levé, poněvadž na otvírání křídla dveří závisí tvar závěsů a zámku.

Uzavřeným otvorem je tzv. nika (obr. 7). Je to výklenek buď volný, nebo vyplněný vestavěnou skříní. Zakreslení je obdobné otvorům předešlým, kótována je tloušťka uzavírající zdi a hloubka niky, poloha a její rozměry: šířka (210 cm) a výška (225 cm). Menší niky např. výklenky pro osazení a uzavření elektroměrů, zakreslí se stejně, doplní se symbolem otvírání dvířek a kótuje se kromě šířky a výšky ještě parapet.



Obr. 8

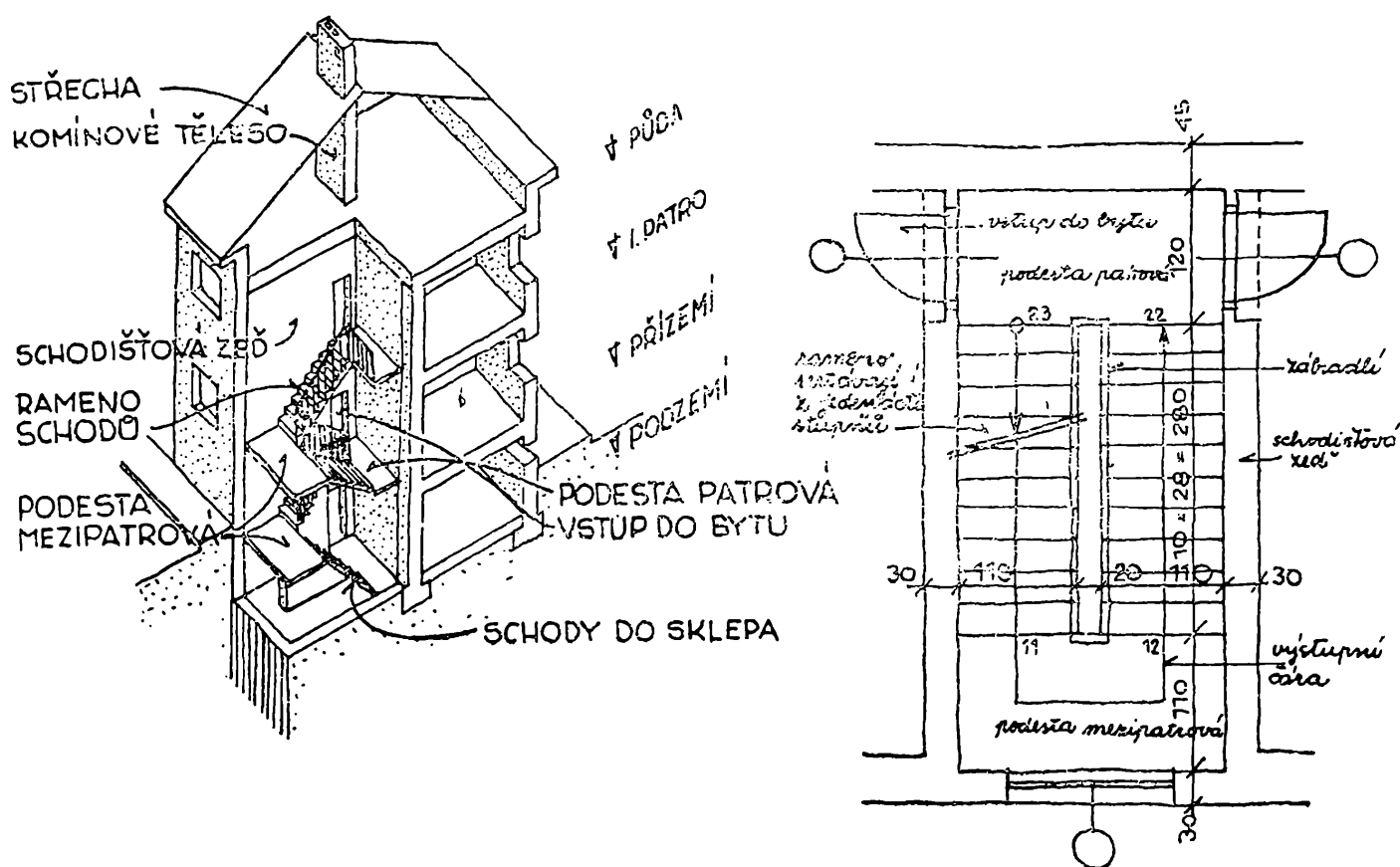
Drážky svislé pro potrubí (stoupačky a odpady) rozlišujeme podle konečné úpravy na zazděné a nezazděné, zakreslujeme je do tloušťky zdi, kótujeme jejich rozměr a vztahujeme jejich polohu. Připisujeme k nim zkratku názvu instalace, kterou jí povedeme, např. ÚT = ústřední topení. Vodorovné zalomení drážky je vyznačeno průběhem i délkou zalomení a je nutno připsat rozměr a výšku vodorovné části (obr. 7).

Komíny lokálního topení jsou průběžné dutiny, obvykle o rozměru 15/15 cm, vedené svisle zdí od sklepa nad střechu, kam odvádějí zplodiny hoření (obr. 8). Jsou zakresleny ve zdi svým tvarem, jejich poloha je okótována, rozměr jen tehdy, je-li jiný než 15/15 cm. Ke komínům se připsuje písmeno značící podlaží, pro které je komín určen (poněvadž každé patro musí mít svůj komín). Komín vyústěný v podlaží, které kreslíme, je navíc z poloviny začerněn a doplněn zakresle-

¹⁴⁾ N a d p r a ž í je konstrukce nad otvorem ve zdi, která nese příslušný díl stropu.

ním sopouchu,¹⁵⁾ jehož rozměr a výška je k němu připsána. Průběh komínů ve svislém řezu obvykle není zakreslen, nejde-li o složitý případ nebo neobvyklé uhýbání. Uhýbání užíváme v případě požadavku, aby byly sopouchy v patrech nad sebou.

Ventilace jsou zakreslovány a kótovány zcela obdobně, ale od komínů jsou odlišeny zakreslením úhlopříčky. Ventilace slouží k odvodu znehodnoceného vzduchu z umítnosti. Přiváděcí otvor je zpravidla u podlahy a odváděcí u stropu. Je zakresleno zaústění ventilace opatřené mřížkou a kótovány oba otvory a jejich parapety. Komíny a ventilace jsou vyvedeny nad střechu a ukončeny hlavou komínu, z níž komíny jsou vyvedeny ve směru svislém, ale ventilace ve směru vodorovném, aby do nich nemohlo pršet (viz komínovou hlavu na obrázku 1).



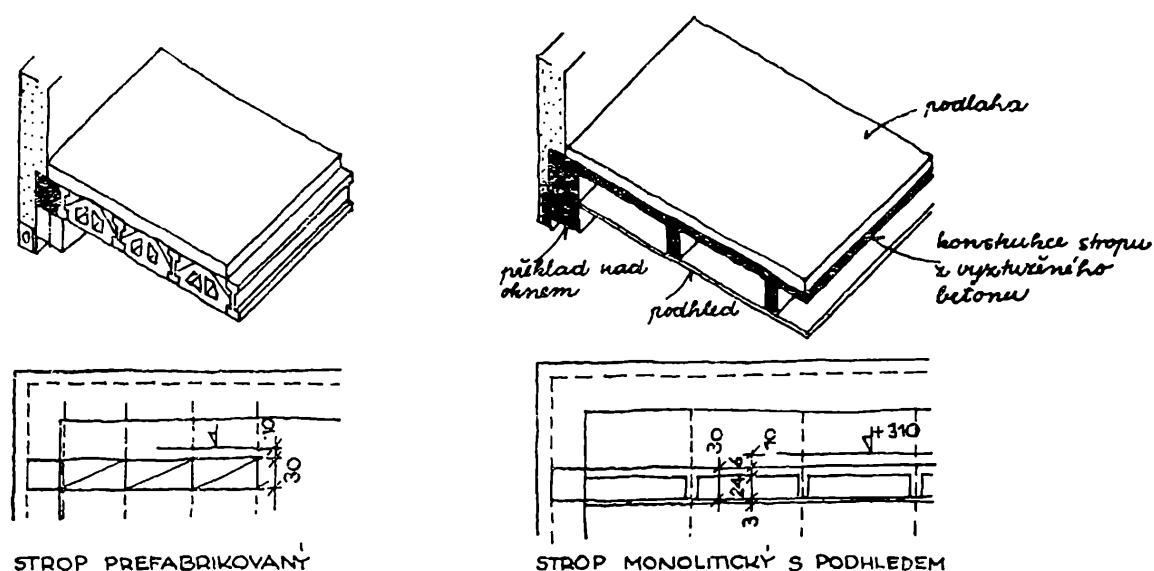
Obr. 9

Než přistoupíme k objasnění, jak je zakresleno schodiště v půdorysu a v řezu, je nutno se seznámit s názvy jednotlivých částí (obr. 9). Ve schodišti vystupujeme po stupních, jejichž vodorovnou plochu nazýváme stupnicí a svislou podstupnicí. Stupňů bývá v jednom rameni až 11. Ramena jsou mezi podestami - odpočívadly, takže z jednoho podlaží vystupujeme ramenem nástupním přes podestu mezipatrovou a ramenem výstupním na patrovou podestu podlaží vyššího. Zakreslení ve stavebních výkresech je opět provedeno na principu myšleného vodorovného řezu, který prořízne nástupní rameno ve výši asi šestého stupně. Tento řez je pro

¹⁵⁾ Sopouch je kruhová díra ve zdi do komína, do které se vsune plechová trouba od kamen.

názornost kreslen šikmo. Stupně pod rovinou řezu jsou kresleny plně, stupně nad rovinou řezu jsou kresleny do půdorysu čárkovaně. Neliší-li se v průmětu do půdorysu šířky stupňů a jejich poloha, kryje se i jejich zakreslení. Půdorys je doplněn výstupní čarou a zábradlím. V řezu, který vedeme zásadně tak, abychom jedno rameno prořízli a druhé viděli, kreslíme profil schodů, podhledový obrys, nosnou i krycí konstrukci ramen i podest, zábradlí a připsujeme počet a rozměr schodů (výjimečně: výška/šířka, např. $11 \times 17/28$ cm).

Konstrukcemi stropními (obr. 10) rozumíme vodorovné konstrukce oddělující podlaží, nesoucí na horním povrchu podlahu. Jsou různých druhů a to monolitické,¹⁶⁾ nebo prefabrikované.¹⁷⁾ V půdoryse jsou kresleny dvěma znaky, které se vzájemně doplňují a dávají představu o celé konstrukci. V půdoryse jsou kresleny osy trámů čárkovaně, (když má strop podhled) a půdorys je doplněn sklopeným řezem, tj. dílčím svislým řezem částí stropu, sklopeným do půdorysu směrem vzhůru nebo zprava do leva, který nám dá představu druhu, tvaru a velikosti stropní konstrukce a tloušťky podlahy.



Obr. 10

Zařizovacími předměty nazýváme díly stavby, jak pevně spojené se stavbou, tak i volné, ale které doplňují byt nebo společné prostory, aby byly schopny užívání. Jsou to z první skupiny vestavěné skříně a instalační předměty zdravotní techniky: vana, umyvadlo, klosetová mísa s nádržkou, dřez, radiátory a zařízení k opatřování teplé vody, el. bojler a plynové ohříváče. Přenosné, nebo alespoň volně přistavěné předměty, jsou obvykle kamna a to sporáky v kuchyni, kamna v koupelně a pokojích. Zakreslují se obvyklými značkami, vyjadřujícími tvar a velikost předmětu, způsob úpravy a osazení. Sem patří i zařízení prádelny a žehlírny.

V řadě za sebou jsou nakresleny (na obr. 11): vana (tlustá čára s označením

¹⁶⁾ Monolitický znamená z jednoho kusu; zde myšlena konstrukce z vyztuženého betonu, zhotovená na stavbě do bednění.

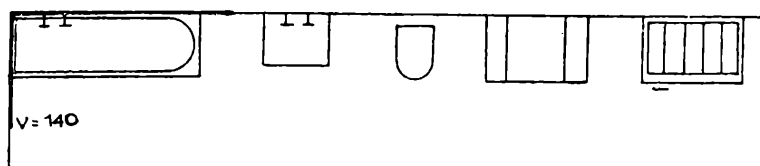
¹⁷⁾ Prefabrikované: továrně vyrobené a na stavbě jen osazené.

výšky v 140 značí obklad), umyvadlo, klosetová mísa, sporák plynový a sporák uhelný. Kuchyňská sestava s pracovním stolem, do něhož je zapuštěn dřez a skříňkami na nádobí nad stolem, je vyobrazena na obr. 8 v půdorysu i ve skutečnosti.

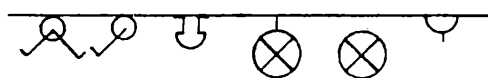
Z elektrické instalace nás budou zajímat při čtení výkresů hlavně polohy svítidel, zásuvek a vypínačů. Tyto předměty se zakreslují smluvenými značkami ve výkresech půdorysů na místech kde mají být umístěny, přičemž je zvykem, že zásuvka je 50 cm, vypínač 130 cm nad podlahou, v kuchyni však oba instalační předměty 140 cm nad podlahou.

Na obrázku 12 jsou nakresleny značky pro lustrový přepínač, vypínač, zvonek, nástěnné svítidlo, stropní svítidlo a zásuvku.

Střechy na budovách jsou buď ploché, které mohou být někdy přístupné, terasy, nebo častěji šikmé, sedlové nebo valbové, podle tvaru střešních rovin. Plochá střecha je kreslena jako pohled shora s vyznačením spádů střechy k okapům nebo vpustím dešťové vody, se zakreslením všech nástaveb na střeše, komínové hlavy, strojovny výtahu, event. zábradlí a dlažby terasy. Šikmé střechy jsou kresleny jako půdorys půdy, ve kterém je vyznačen obrys půdního zdiva, římsa a vodorovné nosné konstrukce krovu - pozednice, vaznice a kleštiny,¹⁸⁾ v řezu sloupky konstrukce a komínová tělesa, zatím co ostatní prvky, zejména šikmé - krokve - jsou značeny symbolicky čárkovaně jejich osami.



Obr. 11



Obr. 12

Představu o tom, jak budova leží vzhledem k ulici a sousedním domům, jaká je úprava okolí, trávníky, stromy, sklon terénu, rozměry ulic a jejich stoupání, a jaké jsou rozvody veřejných instalací - voda, plyn, elektřina, kanalisace - dá nám výkres situace, ve které jsou tyto náležitosti vyjádřeny smluvenými značkami, vysvětlenými v legendě přímo na výkrese.

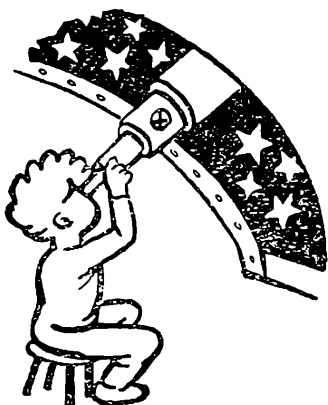
Celkovou představu o vnějšku budovy získáme z pohledu, který je nakreslen v příslušném měřítku. Jsou na něm vyznačeny všechny architektonické detaily členění a to sokl,¹⁹⁾ římsy, okna, balkony atd.

Jak bude budova vyhlížet v prostorovém začlenění do svého okolí, je zobrazeno v perspektivním nákrese.

Potud náš krátký informativní článek, který má usnadnit první krok ke studiu stavitelství - čtení výkresů. Vlastní studium konstrukcí, navrhování a výroba staveb, patří již na odbornou školu.

¹⁸⁾ Pozednice, vaznice, kleštiny, sloupky, krokve jsou názvy jednotlivých trámů krovu, majících nosnou funkci.

¹⁹⁾ Sokl je podezdívka; ochrana paty zdi i architektonický článek.



astronomie

Ladislav Sehnal,

kand. m.-f. věd, Astronomický ústav Ondřejov:

Nové československé meteority

Za jasných nocí můžeme na obloze spatřit nejen krásná seskupení velkého množství hvězd, ale při troše trpělivosti se nám jistě poštěstí uvidět i nějaký meteor. Lidově se meteorům říká „p a d a j í c í h v ě z d y“, ale ve skutečnosti nemají s hvězdami příliš mnoho společného a ani k nám nepřicházejí z takových ohromných dálek, v jakých jsou třeba i jen ty nejbližší hvězdy. Meteory jsou součástí meziplanetární hmoty a pohybují se kolem Slunce pod vlivem stejných zákonů, jakými se řídí oběh naší Země. Těchto drobných těles je ohromné množství, je jich tím více, čím jsou menší. Země potkává při svém oběhu kolem Slunce tato tělíska a dochází tak k častým srážkám, které obvykle končí shořením takového drobného tělesa v zemské atmosféře a to se pak také projeví světelným úkazem, „p a d á n í m m e t e o r ů“. Je-li takové těleso dosti velké, nestačí během krátké doby letu zemskou atmosférou shořet a zbytek jeho hmoty dopadne na zemský povrch. Tomuto zbytku meteoru pak říkáme *meteorit*.

A tak čas od času se na různých místech na zemi nalézají meteority a někdy se podaří nalézt i zbytky tělesa, které bylo spatřeno při letu zemskou atmosférou. Let takového velkého meteoru je velmi nápadný - náhlé rozjasnění na dobu několika vteřin, po němž obvykle následuje zvuk, podobný vzdálenému hřmění. Tak tomu bylo i 7. dubna loňského roku, kdy se ve 20 hod. 30 minut objevil nad Čechami velký meteor, jehož zbytky pak byly nalezeny v oblasti Kamýku n. Vlt. Tak byly československé nálezy meteoritů, jichž bylo dosud 22, obohaceny o další, velmi významné přírůstky. Z hlediska mineralogického nebo chemického patrně nebude znamenat tento meteorit nic podstatně nového, ale z hlediska astronomického je tento nález světovým unikátem, který znamená velmi podstatný přínos pro meteorickou astronomii.

Meteory se sledují v Astronomickém ústavu čs. akademie věd již řadu let nej-různějšími metodami: vizuálně (tj. pouhým okem), fotograficky i radarově. Nejlepší a nejpřesnější výsledky dává fotografická metoda, na níž je také na ondřejovské observatoři kladen hlavní důraz. Proto jsou každou jasnou a bezměsíčnou noc v provozu komory pro fotografování meteorů a součástí této fotografické stanice je i druhý systém fotokomor, umístěný v Prčici ve vzdálenosti asi 40 km od Ondřejova, neboť jedině fotografie meteoru ze dvou stanic umožňuje získat o něm všechny potřebné údaje. Tyto komory byly také v provozu právě 7. dubna 1958 a tak se podařilo vyfotografovat meteor, jehož zbytky pak byly nalezeny. Je to případ zcela ojedinělý a velmi důležitý, neboť dosud nemohly být zjištěny

spolehlivé astronomické údaje o žádném nalezeném meteoritu a meteorická astronomie tak dostala další velmi důležitý materiál.

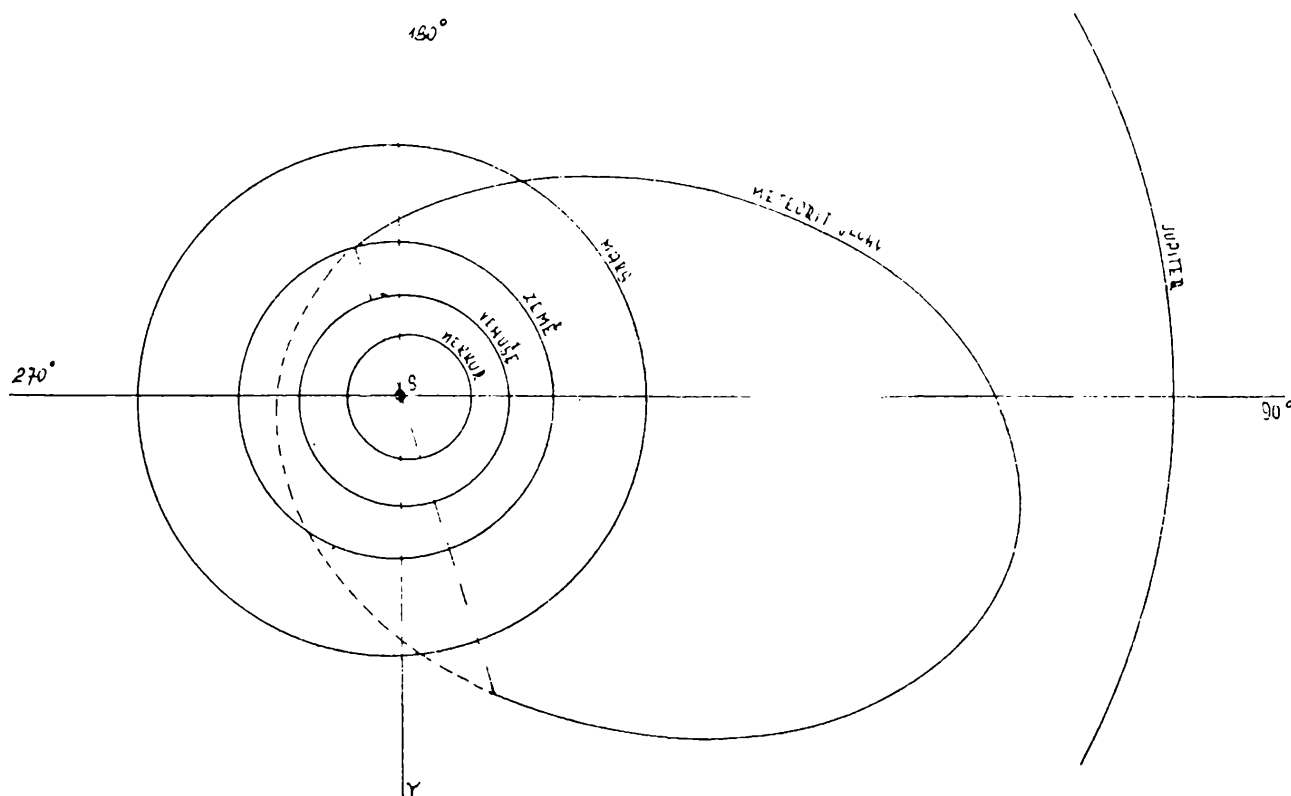
Začátek viditelné dráhy meteoru byl ve výši 97,8 km nad Jihlavou. Meteor letěl k zemi pod úhlem asi 45° a pohasl ve výšce 13 km nad oblastí Kamýka n. Vlt. Průmět této dráhy na zemský povrch je nakreslen na obr. 1. Je zde také nakreslena kružnice, omezující rozsah slyšitelnosti hluku, který let meteoru doprovázel. Má střed asi v polovině nakreslené dráhy, což naznačuje, že hluk pocházel ze střední části viditelné dráhy meteoru. Místa, v nichž byl hluk zaznamenán, byla zjištěna ze zpráv náhodných pozorovatelů, jichž se nám na výzvy v rozhlasu a v denním tisku sešlo asi 1000. Tyto zprávy nám přišly z nejruznějších blízkých i vzdálených míst, což dokazuje, že meteor byl dobře viditelný v celých Čechách a Moravě. Jeho záři bylo ovšem jistě možno spatřit i za hranicemi naší republiky, hlavně v Rakousku.



Obr. 1. Průmět dráhy meteoru na zemský povrch. Čerchovaná kružnice vymezuje okruh slyšitelnosti zvuku, spojeného s přeletem meteoritu.

Zprávy náhodných pozorovatelů byly pro nás velmi důležité; na našich fotografiích nebyl totiž zachycen konec světelné stopy meteoru, který byl již mimo dosah našich kamer. Avšak pro zjištění místa dopadu zbytku meteoru je znalost tohoto bodu podstatná, neboť po pohasnutí má již meteor rychlost poměrně malou, padá již dosti strmě k zemi a místo dopadu nemůže být příliš daleko od místa, které je pod bodem zhasnutí meteoru. A tento poslední viditelný bod dráhy meteoru jsme museli určit ze zpráv, které k nám postupně docházely. Z dopisů však jsme nemohli potřebné údaje získat a byli jsme nuceni osobně vyslechnout pozorovatele z míst, blízkých konci dráhy meteoru a zajít s nimi na místo, odkud oni sami pozorovali a tak zjistit bod pohasnutí. Tak jsme mohli již poměrně přesně omezit území, na které mohl případný zbytek meteoru dopadnout a určit jej do oblasti mezi Příbram a Kamýk n. Vlt. V této oblasti jsme

navštěvovali postupně všechny obyvatele obcí, abychom si opatřili pokud možno co nejvíce informací. Při jedné takové návštěvě jsme byli upozorněni na nález podezřelého kamene v obci Luhy na Příbramsku a i když jsme nemohli předem vědět, zdali se jedná o meteorit, rozjeli jsme se ihned za nálezcem. A naše cesta nebyla marná. Rolník V. Vršecký našel na svém poli skutečně meteorit, který spadl po přeletu meteoru 7. dubna 1959. A tak již za necelý týden jsme měli v rukou meteorit o hmotě 4,5 kg, celistvý kamenný kus s vysokým obsahem železa, jehož povrch měl černou kůru o síle několika desetin mm, vzniklou tavením hmoty při průletu zemským ovzduším.



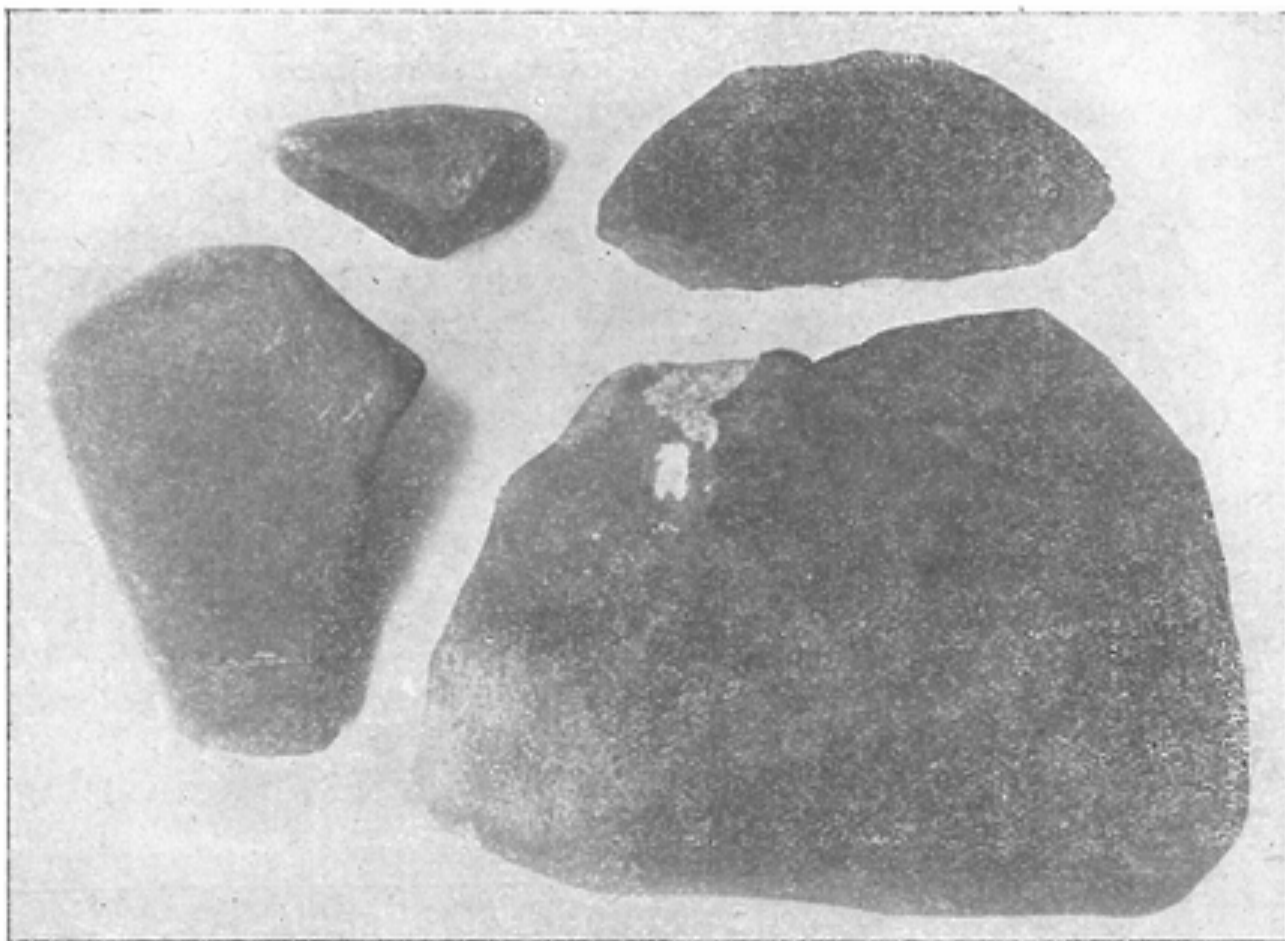
Obr. 2. Dráha meteoru ve sluneční soustavě, v rovině ekliptiky.

Byl to velký úspěch a zároveň i velmi dobré potvrzení našich výpočtů. Při dalším a podrobnějším zpracování snímků jsme zjistili na negativu, na němž byla zachycena větší část dráhy meteoru, a který byl při pohledu pouhým okem úplně černý, že z hlavní dráhy se oddělují další, slabší stopy. Meteor se tedy postupně rozpadal na několik menších částí, které pak byly na negativu vidět jako jednotlivé dráhy. Těchto menších stop bylo celkem 17 a všechny byly dostatečně silné, takže zde byla pravděpodobnost nálezů dalších meteoritů, neboť náš první meteorit odpovídal pouze jedné dráze na fotografii.

Uspořádali jsme proto dvě výpravy do oblasti Příbrami a Kamýku n. Vlt., abychom jednak sami pátrali přímo v terénu po meteoritech a hlavně abychom seznámili místní obyvatele s již nalezeným meteoritem, s jeho vzhledem a také s místy, kde by mohly být další meteority nalezeny. Naše snaha měla úspěch; postupně byly nalezeny ještě další tři meteority. V obci Velká na levém břehu Vltavy našel rolník A. Plavec meteorit o hmotě 80 dkg a v obcích Hojšín a Drážkov

byly nalezeny dva meteority o hmotě 42 a 10,5 dkg. Meteority, které jsou soustřeďovány ve sbírkách muzeí mají názvy podle míst, v nichž byly nalezeny. A tak máme v Československu nyní čtyři nové meteority: Luhy, Velká, Hojšín a Drážkov.

Na své objevitele čekají ovšem ještě další meteority a jejich nalezení není nijak beznadějně - některé z nich mohou vážit i půl kilogramu. Celková dopadlá meteorická hmota se dá z fotografií poměrně přesně zjistit; činí asi 9,5 kg, z čehož se tedy dosud našlo necelých 6 kg.



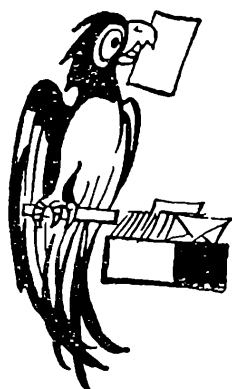
Obr. 3. Fotografie čtyř dosud nalezených meteoritů. Zprava doleva a shora dolů: meteorit „Drážkov“, „Velká“, „Hojšín“ a v pravém dolním rohu největší meteorit „Luhy“.

Hmota meteoru před vstupem do atmosféry byla asi 6 tun; většina této hmoty se tedy vypařila při letu ovzduším s počáteční rychlostí 20,9 km/s. Tuto rychlost si meteor zachovával velmi dlouho až ke konci své dráhy, kde byl velmi prudce brzděn. Dosud bylo možno dělat pouze dohady o tom, kolik hmoty zůstane zachováno při průletu tělesa zemským ovzduším při kosmických rychlostech - tato otázka má nyní bezprostřední význam pro astronautiku. A právě ta okolnost, že k nálezům meteoritů jsou přesné fotografie jejich letu ovzduším, umožňuje získat v tomto ohledu již kvantitativní údaje.

Z fotografií bylo možno získat přesnou rychlost meteoru nejen vzhledem k zemskému povrchu, ale i - při známém čase jeho přeletu - vypočítat rychlost meteoru vůči Slunci a z toho pak též určit přesně dráhu meteoru ve sluneční soustavě. Pro některé dosud nalezené meteority byly také vypočteny takové dráhy,

ale vzhledem k málo spolehlivým pozorováním byly tyto dráhy velmi nepřesné. Nyní bylo možno přesně zjistit, že dráha našeho meteoru ve sluneční soustavě byla elipsa, podobná drahám malých planetek, asteroidů, s poněkud větší výstředností a sklonem. Takovým drahám meteorů říkáme dráhy *p l a n e t k o v é h o t y p u* a je pravděpodobné, že naše meteority jsou tělesy, příbuznými s planetkami. Průmět dráhy meteoru na rovinu ekliptiky (tj. na oběžnou rovinu dráhy Země kolem Slunce) máme nakreslenu na obr. 2. Vidíme, že meteor se ve své dráze dostával až blízko k dráze Jupitera a zase naopak se přibližoval Slunci blíže než naše Země. Sклон jeho dráhy k ekliptice je 10° .

Zachycení pádu meteoritu přesnými fotografickými komorami je velkým úspěchem československé meteorické astronomie, neboť pomůže vyřešit mnohé, dosud sporné vědecké otázky. Práce, vynaložená při pátrání po meteoritu, byla tedy úspěšná a mnohdy byla i téměř dobrodružná. Zúčastnili se jí všichni pracovníci z oddělení pro výzkum meziplanetární hmoty z Astronomického ústavu v Ondřejově a práce vedl kand. m.-f. věd Zd. Cepelch. Výzkum, spojený s nálezem meteoritů ovšem dále pokračuje a také pátrání po dalších meteoritech není ještě skončeno.



Různé

K matematické olympiádě v Rumunsku

Jako doplněk tohoto článku nám sděluje učitel J á n G e d e i z JSŠ v Lučenci: Výsledok súťaže vyhlásil predseda Spolku, akademik Grigore C. Moisil slávnostne 28. júla 1959 v Bukurešti.

I. cenu získali: Bohuslav Diviš (Praha), Nicolescu Basarab (Ploesti, RLR), Juraj Csanak (Debrecín, MLR).

II. cenu získali: Bergthaler Cristian (Petrosani, RLR), Georghe Cesar (Buzau, RLR), Gábor Halász (Budapešť, MLR).

III. cenu získali: Brisca Virgil (Giurgiu, RLR), Bollobás Vojtech (Budapešť, MLR), Juraj Muszély (Budapešť, MLR), Toom Ondrej (Moskva, SSSR), Vrajitoru Mihai (Aiud, RLR).

Pochvalné uznanie dostali: Szász Domokos (Budapešť, MLR), Fedorev Viktor (Moskva, SSSR), Frolov Valerij (Moskva, SSSR), Ivan Konstantinov Titelnikov (Plovdiv, BLR), Karel Šmuk (Ostrava), Jiří Moudrý (Praha), Jiří Votava (Praha), Barbu Viorel (Iasi, RLR), Zdislav Kovařík (Hodonín), Jan Toke (Bialogard, PLR).

Súčasne s riešením súťažných úloh vedúci jednotlivých delegácií rokovali o týchto otázkach:

1. Zabezpečenie užšieho spojenia školy so životom.
2. Súčasné požiadavky technického pokroku v stredoškolskej matematike.
3. Zníženie preťažovania žiakov.

Prof. Dr. Otakar Borůvka, člen kor. ČSAV, Brno:

O životě a díle českého matematika Matyáše Lercha

Dne 20. února 1960 vzpomenu českoslovenští matematikové 100. výročí narozenin velkého českého matematika *Matyáše Lercha*. Při této příležitosti bude k jeho počtě odhalena na matematicko-fyzikální budově přírodovědecké fakulty v Brně pamětní deska, věnovaná za účasti průmyslu vysokými školami v Brně.

Život Matyáše Lercha je podobný životům, jimiž procházeli mnozí čeští vynikající lidé minulých generací, jenže snad ještě rozmanitější. Matyáš Lerch se narodil 20. února 1860 v Milínově u Sušice v jižních Čechách z chudých rodičů. V šesti letech, když měl začít chodit do školy, byl postižen těžkým úrazem na levé noze, jehož důsledkem pro celý život byla obtížná chůze o berli a později, po zlepšení, o holi. Obecnou školu¹⁾ začal navštěvovat teprve v 9 letech, po ní dokončil školu měšťanskou a pak studoval na reálném gymnasiu v Plzni a na reálce v Rakovníku, kde 13. července 1880 s vyznamenáním maturoval. V letech 1880—1884 studoval matematiku na vysokých školách v Praze a pak ještě strávil rok na studiích v Berlíně, kde tehdy působili vynikající matematikové světového jména, *Weierstrass*, *Kronecker* a *Fuchs*.

Další životní osudy Matyáše Lercha jsou velmi rozmanité a jejich podrobné vyličení by zabralo mnohem více místa, než mu zde můžeme věnovat.²⁾ Jenom stručně uvedme, že Lerch jako syn chudých rodičů žil po celou dobu svých studií v tísnivých poměrech a často zápasil s nedostatkem. Ani v prvních deseti letech po ukončení studií nebyl zbaven existenčních starostí, třebaže od r. 1886 byl vysokoškolským docentem a vyrůstal v matematika světové velikosti. Teprve rok 1896 přinesl Lerchovi oproštění od těchto starostí, neboť v tom roce, zásluhou francouzského matematika *Ch. Hermitea*, se stal profesorem matematiky na universitě ve Friburgu ve Švýcarsku. Po desetiletém působení v tomto městě se vrátil do vlasti, když byl jmenován profesorem na české technice v Brně. Tam pak působil 14 let. V r. 1920 po zřízení university v Brně přešel Lerch na její přírodovědeckou fakultu jako první profesor matematiky a stal se zakladatelem matematického ústavu této fakulty. Bohužel však na tomto místě mohl působit jenom krátkou dobu dvou let, neboť 3. srpna 1922 v Sušici zemřel ve věku 62 let. V Sušici byl též pohřben.

Matyáš Lerch představuje vynikajícího matematika světového jména z konce minulého a ze začátku tohoto století. Napsal 238 vědeckých matematických pojednání, která jsou uveřejněna ve 32 různých odborných časopisech našich i zahraničních, česky, francouzsky, německy, chorvatsky, polsky a portugalsky. Vý-

znamné mezinárodní pocty se Lerchovi dostalo v r. 1900, kdy mu byla udělena Velká cena pařížské akademie věd za vynikající vědeckou práci z oboru teorie čísel. Lerchova vědecká pojednání se týkají různých oborů matematiky, zejména matematické analýsy, teorie čísel a geometrie. Tato pojednání měla mnohdy podstatný vliv na další rozvoj světové matematiky. V dnešní matematické literatuře z celého světa se často shledáváme s Lerchovým jménem, neboť jsou jím pojmenovány mnohé Lerchovy objevy v matematice.

Zajisté mnozí z vás, mladí čtenáři, máte odvážné plány do života a snad se i tážete, jak se můžete stát slavnými matematiky. Nuže, s matematikou je to právě takové jako s jinými obory: Chcete-li vyniknout, musíte mít ke své práci nejvřelejší vztah, musíte v ní vidět nikoli obtížnou povinnost, nýbrž radostné zaměstnání.

Všimněte si, s jakou láskou mluví Matyáš Lerch jako 18letý student v dopise svému učiteli Emilu Seifertovi o svém studiu:³⁾ „... Weyrovy *Z á k l a d y* v y š š í g e o m e t r i e jsem pročetl až do involuce, o kteréž jsem sice začátky probral, avšak ustal jsem od dalšího studia jejího, byv vytržen ze studování koncem prázdnin velikonočních. Teď daří se mi dobře. Myslím, že budu moci objednat sobě Studničkovy *Základy* vyšší matematiky, čímž se dovrší blaženost má.“

Československá matematika je na Matyáše Lercha právem hrda. K jeho skvělým matematickým výkonům budou s obdivem vzhlízet ještě celé generace matematiků domácích i cizích.

J o s e f N o v á k, asistent ČVUT, Praha:

Křišťan z Prachatic a matematika v jeho době

(Dokončení)

Dělení bylo složité a jen velmi dobrý počtář je ovládal. Ukážeme si jeden způsob tehdy užívaného dělení, tzv. *dělení nad sebou*. Název vyplývá z postupu při výpočtu. Pro větší přehlednost rozložíme příklad $39285 : 45 = 873$ na jednotlivé kroky:

¹⁾ Tehdejší obecná škola odpovídala 1.—5. třídě dnešní střední školy, měšťanská škola 6.—8. třídě. Měšťanská škola připravovala žáky většinou pro manuální povolání. Přípravu ke studiu na vysokých školách obstarávala gymnasia, reálná gymnasia a reálky, kteréžto školy byly 7 až 8leté a přijímaly absolventy škol obecných; jejich úkoly převzaly nyní 6.—11. třídy jedenáctiletých středních škol. V našem společenském zřízení mizí znenáhla rozdíl mezi přípravou pro manuální povolání a vysokoškolská studia.

²⁾ Podrobné vyličení životních osudů Matyáše Lercha, jež představuje velmi zajímavou četbu, najde čtenář v článku L. F r a n k a „O životě profesora Matyáše Lercha“, který je uveřejněn v Časopise pro pěstování matematiky, sv. 78, 1953, str. 119—137.

³⁾ Tento citát je převzat ze zmíněného článku L. Franka. Lerch mluví o knize proslulých českých matematiků bratří E m i l a a E d u a r d a W e y r a : „Základové vyšší geometrie“ a o knize profesora F. J. S t u d n i č k y, který v té době působil na české universitě v Praze.

Dělitel se napíše pod číslice dělence nejvyšších řádů tak, aby byl obsažen v čísle nad ním napsaném (45 pod 392). Částečný podíl (8) se poznamená vpravo a zbytek se napíše nad dělence. Při výpočtu zbytku se však postupuje tak, že se příslušný násobek dělitele odečítá od dělence počínaje nejvyšším řádem. Aby počtář viděl které kroky ve výpočtu již provedl, škrtná ty číslice, s nimiž již pracoval. Tak se zbytek objeví v neškrtnutých číslicích nad dělencem. V naší sazbě jsou škrtnuté číslice z technických důvodů tištěny ležatě (tzv. kursivou).

V tabulkách Ia, Ib to vypadá takto: $8.4 = 32$, škrtnuta čtyřka ze 45, $39 - 32 = 7$, škrtnuto 39, zbytek 7 se napíše nad devítku z 39 (Ia), $8.5 = 40$, škrtnuta pětka ze 45, 72 (neškrtnutý zbytek) $- 40 = 32$, škrtnuta sedmička, nad ní napsána trojka ze 32; dvojka ze 32 napsána nad dvojku z 392, při čemž tato druhá dvojka škrtnuta. Po tomto dělení se napíše dělitel 45 o jedno místo doprava a předchozí výpočet se opakuje (tabulky II, III).

(Ia)	(Ib)	(II)	(III)
		1	1
	3	34	341
7	72	723	723
39285 8	39285 8	39285 87	39285 873
45	45	455	4555
		4	44

Jak se dostalo nevýhodné škrtnání číslic do výpočtu? Byl to následek převzetí indických početních metod. Indové totiž počítali na destičkách posypaných pískem a na nich počtář nepotřebné číslice snadno vymazával a psal na jejich místě nové. Tab bylo např. uvedené dělení pro Indy velmi úsporné, neboť na konec zbyl na destičce jen výsledek. Jak je vidět z našeho příkladu, byl však výpočet touto metodou na papíře velmi nepřehledný a jeho kontrola byla nesnadná.

Je zajímavé, že tento těžkopádný způsob dělení se udržel v početnicích až do začátku 19. století, a že mu byla dávána přednost před naším jednoduchým způsobem, který nacházíme již koncem 15. století.

Křišťan ve svém spisu uvádí určitý druh tzv. dělení pod sebou. Ten se liší od moderního dělení tím, že se píše pod dělenec mimo zbytky také částečné součiny a dělitel.

Seznámení se s aritmetickými a geometrickými řadami tvořilo obsah progresy. Byl zde udáván předpis pro částečný součet řady aritmetické, někdy i geometrické. Křišťan udává v progresi známý předpis pro částečný součet aritmetických řad, které jsou vytvořeny z posloupnosti všech přirozených, sudých a lichých čísel.

Dále pak Křišťan učí výpočet 2. a 3. odmocniny. V podstatě je postup stejný, jak jej provádíme nyní, ovšem provedení je zase složitější. V předpisu se říká, že je nutné nejdříve stanovit počet cifer daného odmocněnce; bude-li sudý, zahájí se odmocňování u dvou nejvyšších míst, bude-li lichý, u nejvyššího místa. Výsledek tohoto částečného odmocnění se poznamená vpravo a jeho druhá mocnina se sepíše pod odmocněnec a odečte; jeho dvojnásobek se napíše na další řádek ob jednu číslici doprava a bude dělitelem nadepsaného zbytku a další

číslice odmocněnce (I). Nalezený podíl bude další číslicí výsledku a po znásobení dělitelem se odečte od děleence. Pak se druhá mocnina podílu napíše na další řádek o jedno místo doprava a odečte se od odmocněnce. Tento postup se v dalším opakuje (II). Ukážeme si výpočet na příkladu $\sqrt[3]{119716} = 346$.

(I)	$\begin{array}{r} 2 \\ 119716 \\ 9 \\ \hline 6 \end{array}$	3	3^2 $3 \times 2; \quad 29 \quad 6 = 4$ 5
(II)	$\begin{array}{r} 4 \\ 2513 \\ 119716 \\ 9 \\ \hline 6 \end{array}$	346	3^2 $3 \times 2; \quad 29 \quad 6 = 4$ 5 6×4 4^2 $34 \times 2; \quad 411 \quad 68 = 6$ 3 68×6 6^2
	$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 16 \\ \hline 68 \end{array}$		
	$\begin{array}{r} 408 \\ \hline 36 \end{array}$		

Ve spisu jsou dále uvedeny pomocné tabulky 2. a 3. mocnin čísel od 1 do 9 v tehdy užívané formě:

1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Zde pak vzniká domněnka, že již tehdy byl znám způsob, kterého užívají ještě dnes někteří „zázrační počtáři“ při okamžitém nalezení třetí odmocniny čísla, které je ovšem třetí mocninou dvojciferného čísla.

Třetí mocnina takového čísla může být 4–6ciferné číslo. Z velikosti první, nejvýše trojciferné třídy dané mocniny, lze určit první cifru odmocniny tak, že najdeme k této třídě nejbližší nižší (nebo rovnou) třetí mocninu v tabulce uva-

žovaných čísel od 1 do 9. Příslušná odmocnina k této třetí mocnině je potom první cifrou hledaného čísla. Podle poslední cifry dané mocniny lze určit poslední cifru hledané odmocniny, neboť jak vidíme z tabulky, mají tam uvedené třetí mocniny vesměs různou poslední cifru.

Vyslovenou domněnku podporují dva příklady ze spisu:

$$\begin{array}{r} 226\ 981 = 61^3 ; \\ 6 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 262\ 144 = 64^3 \\ 6 \quad 4 \end{array}$$

V následujícím výkladu o zlomcích je uvedeno psaní zlomků, které se nelišilo od dnešního způsobu psaní. Bylo odvozeno od indického způsobu, ve kterém se ovšem nepsala zlomková čára; ta je pravděpodobně arabského původu. Obecně se začalo zlomkové čáry používat koncem 15. století. Všechny základní početní výkony se zlomky se prováděly podle pravidel, které se od dnešních podstatně neliší.

Stojí za zmínku, že počítání se zlomky bylo tenkrát považováno za nejsložitější část matematiky a bylo ovládáno jen učiteli a nejlepšími počtáři. Od těchto dob byl učiněn v matematice obrovský pokrok. Přesto však nezapomeňme na práce tehdejších matematiků, neboť rozvoj matematiky je výsledkem neúnavné a trpělivé práce mnoha generací vědců. Jejich spojenému úsilí můžeme vděčit za to, že nám dnes pomáhá matematika řešit ty nejsložitější problémy.

Literatura:

M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

J. Smolík: Matematikové v Čechách.

F. J. Studnička: O algorismu Křišťana z Prachatic. (Věstník Král. české spol. nauk, 1892.)

J. Tropfke: Geschichte der Elementar-Mathematik.

Q. Vetter: Šest století matematického a astronomického učení na universitě Karlově v Praze. (Věstník Král. české spol. nauk, 1952.)

František Komurka, Evžen Říman, Praha:

Nové názory o nitru Země

Sovětská badatelé, kteří v posledních letech dosáhli značných úspěchů při studiu velmi vysokých měrných tlaků, prozkoumali a zrevidovali dosavadní Goldsmithův názor o nitru Země, jak sděluje časopis Bergakademie, roč. 1959, č. 2.

Goldsmith a jiní badatelé přirovnávali nitro Země k tavicímu kelímku, v němž chemické prvky mají tytéž vlastnosti, jaké známe na povrchu zemském.

Podle A. F. Kapustinského a V. N. Ledochnikova zůstává Goldsmithův názor v platnosti jen pro obvodovou část zemské koule, kdežto v jejím nitru, kde působí tlaky mnoha set tisíců atmosfér, se fyzikální a chemické vlastnosti prvků podstatně mění.

Vylučovací princip Pauliho, platící pro možné volné dráhy elektronů v atomovém obalu, vede k zajímavým případům rozložení elektronů na jednotlivých drahách, jak se jeví např. u prvků stojících na počátku čtvrté periody Mendělejevovy tabulky:

Prvých 18 prvků (počínaje vodíkem) jsou vesměs prvky, jichž oběžné elektrony jsou rozloženy na drahách prvních tří slupek; tím jsou tedy vyčerpány první tři periody Mendělejevovy tabulky. Čtvrtá perioda začíná dvěma kovy a to 19 K (draslík) a 20 Ca (vápník), jež mají v okrajové slupce 1, resp. 2 elektrony, jak dokazují spektra těchto prvků. Nutno tedy¹⁾ předpokládat, že devatenáctý a dvacátý elektron obíhají již ve čtýřkvantové slupce po dráze označované ve fyzice 4s, ačkoliv možná dráha tříkvantové slupky (tj. dráha 3d) ještě je úplně prázdná, začíná ji obsazovat teprve další prvek skandium (21 Sc) a celkovým možným počtem 10 elektronů a je obsazena teprve prvkem 29 Cu (tj. měď).

Výzkumy sovětských badatelů ukazují, že při velmi vysokém tlaku přecházejí elektrony na dráhy k jádru bližší. Tak vápník (calcium 20 Ca) mění se za extrémně vysokého tlaku v „isocalcium“, tím, že jeho dva okrajové elektrony přejdou s vyšší dráhy 4s na bližší dráhu 3d, jež je za normálního tlaku úplně prázdná.

Avšak fyzikální a chemické vlastnosti závisejí na rozložení elektronů ve slupkách; přechodem dvou elektronů vápníku ze slupky čtyřkvantové na tříkvantovou se tedy změní chemická povaha tohoto „isomeru“ vápníku, a ten proto má v nitru Země zcela nové vlastnosti, odlišné od oněch, jaké známe na zemském povrchu.

Badatel R. Sterheimer odhaduje, že tlak potřebný na přechod vzdálenějších elektronů prvku cesia (55 Cs) na neobsazené dráhy nižší, obnáší asi 45 000 atmosfér; tento tlak je předpokládán v hloubce 100 km od povrchu zemského. U většiny prvků nastává taková změna ve vrstvách o hloubce 60 až 120 km, kteréžto vrstvy nazývají sovětsí badatelé „p e r i s f é r o u“.

Do hloubky 60 km mají tedy prvky své normální chemické vlastnosti. V hloubce 29 000 km začíná tzv. „c e n t r i s f é r a“, jejíž tlak se odhaduje na 1,4 miliónů atmosfér; zde všechny prvky nabývají vlastnosti kovů čili „metalísují se“, neboť jejich elektrony tvoří tzv. e l e k t r o n o v é p l a s m a.

A konečně v jádru Země, kde je tlak extrémně vysoký a teplota přesahuje 2 000 °C, je pásmo, kde i prvky jako vodík a křemík dostávají vlastnosti podobné vlastnostem železa a niklu, neboť za tohoto ohromného tlaku pojem prvku již ztrácí svůj význam.

I když tato teorie sovětských badatelů nevystihuje snad ještě bezvadně skutečný stav v nitru Země, přece vyhovuje mnohem lépe názorům, jež byly získány studiem vysokých tlaků. Logicky vysvětluje poměrně značnou průměrnou hustotu Země (asi 5,53 [g cm⁻³]), což vyplývá počtem z celkové hmoty Země $m = 6 \cdot 10^{24}$ (kg), jak ji vypočítáváme z gravitačního zákona.

Dosud byla tato značná hodnota hustoty vykládána neuspokojující domněnkou o železoniklovém jádru Země, které by však (hustota železa je 7,8, niklu 8,8 [g cm⁻³]) muselo mít neobvykle veliký poloměr, kdežto povrchová vrstva (křemíkovápnickový obal Země) by byla poměrně tenká.

¹⁾ Podrobnější poučení viz např.: Drška-Klimeš-Slavík, Základy atomové fyziky str. 116 anebo Zd. Horák, Úvod do molekulové a atomové fyziky, str. 232 a n.

Christian Huygens

Isaac Newton (1643—1727), slavný zakladatel klasické mechaniky,¹⁾ měl své předchůdce. Mezi ně patří také holandský fyzik Huygens, od jehož narození uplynulo loni 330 let.

Christian Huygens²⁾ byl vrstevník Newtonův. Narodil se v Haagu dne 14. dubna 1629. Veden zájmem o fyziku a technickou zručností, sestrojoval již jako desítiletý chlapec různé přístroje, jež jsou dodnes uloženy v holandských muzeích. I při studiu práv, zakončeném roku 1655 dosažením doktorátu, zabýval se přírodními vědami, a to s takovým úspěchem, že byl za své matematické a fyzikální práce již roku 1663 zvolen členem Royal Society.³⁾ V letech 1666 až 1681 žil v Paříži. Těšil se přízni ministra Colberta,⁴⁾ zaujímal zprvu vysoké postavení a byl také významným členem Académie des Sciences, až válka s Holanďany přispěla k tomu, že král Ludvík XIV. začal protestantům nedůvěřovat a po zrušení ediktu nanteského, jenž jim od roku 1598 zajišťoval svobodu svědomí, je i pronásledoval. To znechutilo Huygensovi další pobyt ve Francii a přimělo jej k návratu do vlasti. Jako fyzik světového jména zemřel ve svém rodišti dne 8. června 1695.

O významu životního díla Huygensova svědčí okolnost, že jeho souborné spisy jsou postupně vydávány v Haagu již od roku 1905.

K pozorování změn teploty užíval Huygens teploměrů, jejichž stupnice byly v té době libovolné, takže nebylo mezi nimi souhlasu. Každý teploměr ukazoval jiný počet stupňů. Tyto teploměry postačily přesto k tomu, aby se poznalo, že existují některé teploty neproměnné, např. teplota tání ledu a teplota varu vody, jež jsou při stálém tlaku rovněž stálé. Také Huygens se zabýval takovými úvahami. Když roku 1664 učinil anglický fyzik Boyle⁵⁾ teplotu tání ledu za normálního tlaku základním bodem stupnice, Huygens neváhal a učinil již roku 1665 podobně normální teplotu varu vody druhým základním

¹⁾ Název slavného Newtonova díla *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) je třeba podle Trkalovy Mechaniky hmotných bodů a tuhé tělesa (ČSAV, 1956) překládat (viz str. 46) slovy *Matematické základy teoretické fyziky*, jež doporučuji pozornosti a užívání čtenářů.

²⁾ Poznámka o výslovnosti. Jméno vyslovujeme buď *Hojch(e)ns* nebo jednodušeji *Hajchens*. Připomínám také, že ve starší literatuře bývalo psáno zpravidla *Huyghens*.

³⁾ V 17. století dochází k nové organizaci vědecké práce v učených společnostech, které zakládali panovníci. Tak vznikla roku 1662 *Royal Society* (čti: Rojal sosajety) v Londýně, r. 1666 *Académie des Sciences* (čti: Akademí dé siáns) v Paříži aj.

⁴⁾ Jean Baptiste Colbert († 1683) uplatnil v hospodářské politice Francie praktické zásady, které byly shrnuty v celek, nazvaný později *colbertismus* (systém merkantilistický).

⁵⁾ Robert Boyle (čti: Bojl; 1627—1691), od roku 1663 rovněž člen *Royal Society*, byl vynikajícím experimentálním fyzikem své doby. Závislost mezi tlakem a objemem téhož množství plynu při stálé teplotě označujeme jménem zákona Boyleova.

b o d e m t e p l o m ě r u. Na těchto dvou neproměnných teplotách zakládají se dosud užívané teploměry.

V této době mohl se Huygens vykáhati také již řadou úspěchů v m e c h a n i c e. Vyšetřiv zevrubně zákonitosti pohybu kyvadla, přizpůsobil roku 1657 fyzické kyvadlo k regulaci chodu hodin.⁶⁾ Připojil k soudobým hodinovým strojům kyvadlo jako regulátor chodu. Roku 1658 vydal spis *Horologium*, v němž uveřejnil svůj vynález kyvadlových hodin. Pozdější a obsáhlejší dílo *Horologium oscillatorium*, vydané v Paříži roku 1673, proslavilo Huygense teorií kyvadla matematického i fyzického, výkladem kyvadla reversního (převratného) a kyvadla cykloidálního,⁷⁾ jež vynalezl. Také mnohé názvy a odborné výrazy (např. střed kyvu fyzického kyvadla aj.) pocházejí od něho.

V letech 1674 a 1675 zlepšil Huygens konstrukci kapesních hodiněk, které byly známy a v Norimberce např. vyráběny již dříve. Také vynález setrvačnicku (zv. n e p o k o j) v kapesních hodinkách je dílem Huygensovým.⁸⁾

Ze vzorce pro dobu kyvu dospěl Huygens také k u r č e n í z r y c h l e n í z e m s k é t í ž e. Předpověděl z teoretických úvah závislost hodnot tíhového zrychlení na zeměpisné šířce, sledoval se zájmem zkušenosti, kterých náhodou nabyl francouzský astronom Richer, vyslaný roku 1671 pařížskou Akademií na severní pobřeží východní části Jižní Ameriky. Richer tehdy shledal, že se jeho kyvadlové hodiny, které šly v Paříži správně, v rovníkové Cayenne opožďovaly více než o 2 min. denně. (Viz Cvičení 1.) Neměl však tušení o příčině a zkrátil jejich kyvadlo asi o 2,8 mm; hodiny šly zase správně. Po návratu do Paříže však shledal, že se hodiny opět o více než 2 min. denně předbíhají. Musil tedy jejich kyvadlo právě o tolik prodloužit, oč je v Cayenne zkrátil. Poněvadž se změna nedala vysvětlit růzností teplot na obou pozorovacích místech, nebylo jiného výkladu, než že tíhové zrychlení je v Cayenne jiné než v Paříži a to menší, neboť kyvadlo tam kývalo pomaleji. Zeměpisná šířka Cayenne je asi 5° , Paříže asi $48^\circ 50'$, tíhové zrychlení tedy s r o s t o u c í z e m ě p i s n o u š í ř k o u v z r ů s t á. To souhlasilo s teoretickými závěry, které učinil Huygens, jenž také již věděl, že vzrůst hodnot tíhového zrychlení souvisí netoliko s odstředivou silou, nýbrž i se zploštěním Země.

Okolnost, že délka stupně blíže k rovníku je skutečně menší než blíže pólu, byla však potvrzena teprve později (v letech 1735 až 1744) přímým měřením poledníkového oblouku v Peru a v Laponsku.

⁶⁾ Také slavný Galileo Galilei (1564–1642), vedle Huygense další z předchůdců Newtonových, navrhoval, aby se isochronních kyvů kyvadla užilo k měření času.

⁷⁾ Jestliže se kružnice valí po pevné přímce (bez posouvání), opisuje její určitý bod křivku, zv. c y k l o i d a. Její rozmanité vlastnosti poznali kromě Huygense také Galileo Galilei, Blaise Pascal aj.

⁸⁾ Nezávisle na Huygensovi dopracoval se významných úspěchů v tomto směru také Robert Hooke (čti: Húk; 1635–1703), jenž se dostal svou činností s Huygensem i (Newtonem) do četných vědeckých a prioritních sporů. Čtenářům je znám Hookeův zákon elastické (pružné) deformace. (Viz učebnici fyziky pro 10. ročník, čl. 52 a 53.)

Cvičení:

1. Tíhové zrychlení v Paříži má hodnotu $g_1 = 980,96 \text{ cm/s}^2$, v Cayenne $g_2 = 978,14 \text{ cm/s}^2$. Vypočítejte, oč se v Cayenne za den zpožďovaly kyvadlové hodiny, které tam byly převezeny z Paříže, kde šly správně!

2. Určete délku vteřinového kyvadla v Praze ($g_1 = 981,09 \text{ cm/s}^2$). Oč by se za den zpožďovaly hodiny jím řízené na rovníku ($g_2 = 978,05 \text{ cm/s}^2$)?

* * *

Jednoduchým pokusem s kruhovým pohybem kyvadla dospěl Huygens ke vzniku *r o v n o m ě r n ě h o p o h y b u k r u h o v ě h o*. Takový pohyb konají např. částice tuhého tělesa, které se rovnoměrně otáčejí kolem osy. Je málo známo, že studiem otáčivého pohybu byl Huygens první přiveden k důležitému pojmu *m o m e n t u s e t r v a č n o s t i t ě l e s a v z h l e d e m k r o t a č n í o s e*, který rovněž zavedl pohotově do mechaniky.⁹⁾

Huygens pokračoval v pracích Galileiho a zobecnil jím do fyziky zavedený pojem zrychlení. Vyšetřiv zrychlení rovnoměrného pohybu kruhového, dospěl k výrazu $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, jenž bývá někdy nazýván přímo *z á k o n e m H u y g e n s o v ý m*¹⁰⁾ a našel věty o velikosti dostředivé síly. Spojením výsledků Huygensových s Keplerovými¹¹⁾ zákony pohybů planetárních vypočítal Newton, že dostředivé zrychlení a tím i velikost dostředivé síly, kterou působí Slunce na planetu, jsou nepřímo úměrné dvojmuči vzdálenosti obou těles. (Viz Cvičení 2.)

Tak vede Huygensovou činností přímá cesta od Keplera k Newtonovi, od zákonů, jež popisují, jak se planety pohybují, k výkladu, proč se tak pohybují, k Newtonovu zákonu gravitačnímu a k dalšímu rozvoji astronomie.

Newtonovým gravitačním zákonem byla do fyziky zároveň vnesena představa, že hmota může silou působit přímo do dálky (*a c t i o i n d i s t a n s*) a že není třeba, aby její účinek byl přenášen nějakým prostředím. Avšak již za života Newtonova setkávala se tato představa s odporem. Také Huygens vystoupil proti ní. Vysvětlit původ gravitace se v té době ovšem nepodařilo. Gravitační zákon se přes to výborně osvědčil v nebeské mechanice.

Huygens se s oblibou zabýval také *a s t r o n o m i c k ý m p o z o r o v á n í m*. K tomu účelu zhotovil si velmi vhodný *o k u l á r*, zv. *n e g a t i v n í*, složený z dvou ploskovypuklých čoček, jež nastavují dopadajícím paprskům zakřivené plochy. V literatuře bývá označován dosud *j m é n e m H u y g e n s o v ý m*. Je dokonale achromatisován pro všechny barvy.

⁹⁾ Učinil tak ve spise *H o r o l o g i u m o s c i l l a t o r i u m* (1673), jméno však pochází od Leonharda Eulera (1707–1783), člena Akademie věd v Petrohradě.

¹⁰⁾ Tohoto názvu užívaly zejména dřívější učebnice fyziky.

¹¹⁾ J o h a n n e s K e p l e r (1571–1630) žil a pracoval také v Praze. Jeho třemi slavnými zákony byl pohyb planet kolem Slunce popsán kinematicky. Viz učebnici astronomie (čl. 64), v podrobnostech pak můj článek v Rozhledech, roč. 27, čís. 4, str. 97 až 103.

Navazuje na práce Galileiho, jenž byl upoután jakousi potrojnou podobou *S a t u r n a* a na zprávy jiných badatelů, kteří spatřili na této planetě zjevy tehdy rovněž nevysvětlitelné. Pohotový Huygens připravil si sám objektiv o průměru 5,5 cm a ohniskové dálky 3 m, okulár ohniskové dálky 7 cm¹²⁾ a sestrojil dalekohled, jenž je dosud jako vzácná památka uchován ve sbírkách musea v Utrechtu. Jím roku 1656 pozoroval a po několikaletém zkoumání roku 1659 vysvětlil ve svém *S y s t e m a S a t u r n i u m*, že Saturn je obklopen podivuhodným plochým prstencem, který se v rovníkovém pásmu volně vznáší kolem planety. Podle polohy Země vzhledem k rovině Saturnova prstence můžeme jej spatřit více nebo méně otevřený. Značně nakloněn k rovině ekliptiky (tj. zemské dráhy) zůstává vždy rovnoběžný, bývá tedy dvakrát za oběžnou dobu Saturnovu¹³⁾ osvětlen na obrysovém kruhovém břitu a stává se téměř neviditelným; v jiných polohách je však velmi dobře viditelný. Jeho strukturu objasnil teprve roku 1896 ruský akademik A. A. Bělopol'skij, jenž dokázal, že Saturnův prstenec se skládá z velkého počtu drobných těles, která obíhají nezávisle kolem planety.

Málo se připomíná, že Huygens náležel také k předním filosofům své doby. Činně se podílel zvláště na vytvoření vědeckého světového názoru. Dokladem toho je jeho spis *K o s m o t h e o r o s*, v němž se odhodlaně postavil proti dosavadní představě o uzavřené sféře světové a dospěl k přesvědčení o mnohosti světů v nekonečném vesmíru, v němž Zemi a lidstvu není přisouzeno žádné výlučné postavení.¹⁴⁾ Podle Huygense existuje život i na jiných nebeských tělesech Zemi podobných a bezpochyby také rozumně myslícími bytostmi obývaných. Správnost těchto názorů potvrzuje i doba nejnovější.

O tom, jak Huygens zasáhl do vývoje fyzikálních teorií, zejména vědeckých názorů na podstatu světla, pojednám příště v článku *H u y g e n s o v a u n d u l a č n í* (vlnová) *t e o r i e s v ě t l a*.

Cvičení

1. Pomocí zákona Huygensova vypočítejte odstředivé zrychlení bodu na rovníku, víte-li, že poloměr Země $R = 6378 \text{ km}$ a hvězdný den $T = 23 \text{ hod. } 56 \text{ min. } 4 \text{ s}$.

Oč by se změnilo tíhové zrychlení na rovníku ($g = 978,05 \text{ cm/s}^2$), kdyby se Země přestala otáčet?

Jak by se to projevilo na váze těles?

Kolikrát rychleji musela by se Země otáčet, aby skutečné tíhové zrychlení na rovníku se rovnalo nule?

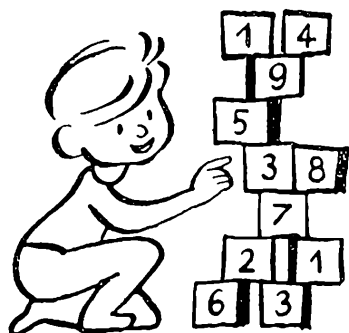
2. Užitím zákona Huygensova a 3. zákona Keplerova dokažte, že odstředivé zrychlení pohybu planety je nepřímo úměrné dvojmu její vzdálenosti od Slunce!

¹²⁾ Cituji *Oeuvres complètes de Christian Huyghens*, sv. XV, str. 11 a 23.

¹³⁾ Tj. asi každých 15 let, neboť oběžná doba Saturnova činí 29,457 72-tropických roků.

¹⁴⁾ Tuto smělou myšlenku musel ještě zaplatit v roce 1600 Giordano Bruno na Piazza Campo dei Fiori v Římě smrtí na hranici.

Matematické zábavy



Početní hříčky

V Korděmského knize „Matematické prostocviky“ se v odstavci 351 uvádějí zajímavé vlastnosti určitých skupin celých čísel. Vysvětleme si některé z nich.

a) Mezi dvojcifernými čísly existují dvojice, jejichž součin se nezmění, jestliže v obou činitelích změníme pořadí číslic, např. $36 \cdot 42 = 63 \cdot 24 (= 1512)$.

Jsou-li hledaná čísla $A_1 = 10x + y$, $A_2 = 10u + v$, „obrácená“ čísla $B_1 = 10y + x$, $B_2 = 10v + u$, (x, y, u, v značí číslice), pak jejich součiny mají být stejné

$$A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$$

$$(10x + y) \cdot (10u + v) = (10y + x) \cdot (10v + u)$$

neboli

$$100ux + 10uy + 10vx + vy = 100vy + 10vx + 10uy + ux,$$

z toho

$$99ux = 99vy$$

a po zkrácení

$$ux = vy.$$

Nalezneme-li jednociferná čísla u, x, v, y , která splňují poslední rovnici, snadno z nich vytvoříme dvojciferná čísla žádané vlastnosti. Pro náš případ je $x = 3$, $y = 6$, $u = 4$, $v = 2$. Pokuste se sami nalézt jiné podobné dvojice!

b) Někdy opět sestavujeme celá čísla do skupin (Korděmskij je nazývá „číselná souhvězdí“) o zajímavých vlastnostech.

Na daných „číselných souhvězdích“ o šesti číslech např. žádáme, aby součet prvních, resp. druhých mocnin tří z nich se rovnal součtu prvních, resp. druhých mocnin zbývajících tří čísel.

Převedeno do matematické řeči, hledáme taková celá čísla x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3 , pro něž platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

V letech 1750—1751 řešili tuto soustavu rovnic celými čísly slavní matematici Euler a Goldbach, žijící v tehdejší Petrohradě, nyníšším Leningradě.

Došli k výsledku:

$$\begin{aligned}x_1 &= a + c, & x_2 &= b + c, & x_3 &= 2a + 2b + c, \\y_1 &= c, & y_2 &= 2a + b + c, & y_3 &= a + 2b + c,\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou libovolná celá čísla;

např. pro $a = 2, b = 1, c = 3$ jest $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 9, y_1 = 3, y_2 = 8, y_3 = 7$;

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 18 = y_1 + y_2 + y_3 \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 122 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.\end{aligned}$$

Jiné řešení této úlohy je též od Eulera a Goldbacha a zní:

$$\begin{aligned}x_1 &= ad, & x_2 &= ac + bd, & x_3 &= bc, \\y_1 &= ac, & y_2 &= ad + bc, & y_3 &= bd,\end{aligned}$$

kde opět a, b, c, d jsou libovolná celá čísla; např. pro $a = 1, b = 3, c = 2, d = 4$ jest $x_1 = 4, x_2 = 14, x_3 = 6, y_1 = 2, y_2 = 10, y_3 = 12$;

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 24 = y_1 + y_2 + y_3 \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 248 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.\end{aligned}$$

Podle uvedených dvou návodů již snadno sestavíte libovolné množství „číselných souhvězdí“ o šesti číslech a dosazením se přesvědčte o správnosti obecných výsledků.

Za zmínku stojí i sedmiciferné „suhvězdí“:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_1 + y_2 + y_3 \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= y_1^3 + y_2^3 + y_3^3,\end{aligned}$$

jež získáme ze vztahů $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = 3a + 3b, x_4 = 2a + 4b, y_1 = 2a + b, y_2 = a + 3b, y_3 = 3a + 4b$ (a, b jsou opět celá čísla).

c) K nejpozoruhodnějším „číselným souhvězdím“ patří 1, 6, 7, 17, 18, 23 a 2, 3, 11, 13, 21, 22. Součty prvních až pátých mocnin prvních šesti uvedených čísel se rovnají součtům stejných mocnin druhých šesti čísel.

Označíme-li obecně $A_1 = a, A_2 = a + 4b + c, A_3 = a + b + 2c, A_4 = a + 9b + 4c, A_5 = a + 6b + 5c, A_6 = a + 10b + 6c, B_1 = a + b, B_2 = a + c, B_3 = a + 6b + 2c, B_4 = a + 4b + 4c, B_5 = a + 10b + 5c, B_6 = a + 9b + 6c$, pak identita

$$A_1^n + A_2^n + A_3^n + A_4^n + A_5^n + A_6^n = B_1^n + B_2^n + B_3^n + B_4^n + B_5^n + B_6^n$$

platí postupně pro $n = 1, 2, 3, 4$ a 5, přičemž za a, b, c můžeme zvolit libovolné celé číslo (v našem případě bylo zvoleno $a = b = 1, c = 2$).

Užívající výsledků z článku inž. Milana Geryka „Trinomická poučka“ na stránce 200 tohoto ročníku Rozhledů, pokuste se určit obecně součty S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 prvních až pátých mocnin čísel na levých stranách identit!

(Pro kontrolu uvádím první z těchto součtů $S_1 = 6a + 30b + 18c; S_2 = 6a^2 + 234b^2 + 82c^2 + 60ab + 36ac + 264bc; S_3 = 6a^3 + 2010b^3 + 414c^3 + 90a^2b + 702ab^2 + 54a^2c + 246ac^2 + 3366b^2c + 1986bc^2 + 792abc; \text{ atd.}$).

d) Máme-li n cifer $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a n jiných číslic $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, o nichž platí:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2,$$

lze dokázat, že

$$(10x_1 + y_1)^2 + (10x_2 + y_2)^2 + \dots + (10x_n + y_n)^2 = (10y_1 + x_1)^2 + (10y_2 + x_2)^2 + \dots + (10y_n + x_n)^2$$

Provedeme-li totiž naznačené výkony v závorkách, obdržíme:

$$100(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + 20(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = 100(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 20(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n).$$

Vidíme, že vzhledem k danému předpokladu je tato rovnice vždy splněna.

Protože např.

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2 = 77,$$

platí nutně i

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2 = 8957$$

nebo

$$42^2 + 58^2 + 63^2 = 36^2 + 85^2 + 24^2 = 9097$$

Je zřejmé, že základy uvedených mocnin jsou souměrné podle znaménka rovnosti.

e) Velmi zajímavá jsou i tato „číselná souhvězdí“

$$13 + 42 + 53 + 57 + 68 + 97 = 79 + 86 + 75 + 35 + 24 + 31$$

$$13^2 + 42^2 + 53^2 + 57^2 + 68^2 + 97^2 = 79^2 + 86^2 + 75^2 + 35^2 + 24^2 + 31^2$$

$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3 = 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3,$$

kde jednotlivé číslice mocněnců jsou souměrné podle rovnítka (např. 68, 86).

. Obdobně:

$$12 + 32 + 43 + 56 + 67 + 87 = 78 + 76 + 65 + 34 + 23 + 21$$

$$12^2 + 32^2 + 43^2 + 56^2 + 67^2 + 87^2 = 78^2 + 76^2 + 65^2 + 34^2 + 23^2 + 21^2$$

$$12^3 + 32^3 + 43^3 + 56^3 + 67^3 + 87^3 = 78^3 + 76^3 + 65^3 + 34^3 + 23^3 + 21^3$$

O. S.



Recenze

J. Tůma: O umělé slunce

Jan Tůma: O umělé slunce. Stran 142, obrázků 24. SNPL Praha 1959; cena 7,60 Kčs za brožovaný výtisk.

Autor pojednává o mírovém využití termonukleární reakce spočívající ve sdružování jader vodíku nebo jeho izotopů v jádra heliová. Reakce tato se stala

zejména po II. konferenci o mírovém využití jaderné energie konané v Ženevě v roce 1958 středem zájmu. Kniha je psána zcela populárně a shrnuje informace rozptýlené ve světovém tisku včetně materiálů z II. ženevské konference.

Po krátkém úvodu popisuje autor podstatu této reakce, líčí její zneužití ve vodíkové pumě a možnosti jejího mírového využití. Ukazuje, jak zejména sovětsí fyzikové Sacharov a Tamm uveřejněním zpráv o možnosti užít magnetických nádob na tepelnou izolaci žhoucí plasmy přispěli k urychlení rozvoje tohoto oboru na celém světě. Popisuje pak současné vodíkové projekty USA, Velké Británie i Sovětského svazu, zejména také možnost vodíkové reakce „za studena“ využívající mesoatomu vodíku. Končí plánovaným rozvojem termojaderné energetiky a uvádí různé možnosti využití termojaderné reakce. Na závěr uvádí perspektivy atomového věku, který bude plně využívat termojaderné reakce, ukazuje na možnosti jejího využití k úpravě povrchu naší zeměkoule i ke konstrukci umělých sluncí.

Kniha je psána velmi populárně, srozumitelně a podává svou látku zcela bez matematického aparátu. Obsahuje také dobré politické zhodnocení jednotlivých etap využívání jaderné energie a končí závěrem, že plné využití jaderné energie bude možné pouze v beztržní společnosti. Kniha se hodí velmi dobře pro naše učitele přírodních věd i pro mládež, která má o tento obor zájem, ale bude vyhovovat i širokému okruhu zájemců o tuto dnes i v nejbližší budoucnosti velmi časovou otázku.

K. Šoler

Český příspěvek k světové historii matematiky

V těchto dnech vyšla ve Státním pedagogickém nakladatelství již dávno očekávaná kniha dr. Františka Balady: *Z dějin elementární matematiky*. Tato publikace patří do edice *Pomocných knih pro učitele*, ale svým nevšedně poutavým obsahem zaujme jak laické zájemce ze řad odborně nezainteresované veřejnosti, tak i samotné žáky středních škol. Tyto historické výtahy byly totiž voleny především s ohledem na partie matematiky, na kterých je postaveno vyučování tomuto předmětu v našich školách. Jmenované dílo bylo autorem rozděleno na šest větších kapitol, z nichž každá obsahuje několik článků (až na kapitolu šestou), z nichž opět některé jsou ještě členěny na menší partie.

I. kapitola, pojednávající o matematice jako vědě, rozděluje celý její vývoj do tří velkých historických epoch.

II. kapitola se zabývá v deseti člancích výhradně aritmetikou. Ve zvláštních oddílech probírá podrobně číselné soustavy a jejich původ, různé formy zápisu čísel lišící se podle dob a zemí, základní početní výkony a vlastnosti přirozených čísel.

III. kapitola pojednává v devíti člancích jen o algebře a jejím historickém vývoji. Probírají se tu čísla záporná, mocnění, odmocňování a logaritmy. Samo-

statný větší celek shrnuje tu zajímavá fakta z historie rovnic s ukázkami jejich zápisu a řešení.

IV. k a p i t o l a se zabývá ve čtrnácti člancích vznikem a vývojem geometrie. Jednotlivé její články mluví o měření úhlů a délek, o planimetrických útvarech a metodách jejich vypočítávání, dále pak o stereometrii, goniometrii a trigonometrii.

V. k a p i t o l a podává přehled dějin české i slovenské matematiky a

VI. k a p i t o l a přehled ruské a sovětské matematiky.

Na z á v ě r jako část VII. je umístěn přehled použité literatury a část VIII. jmenný rejstřík, v němž jsou jednotlivé historické osobnosti seřazeny abecedně.

Spis dr. Balady je vůbec první českou publikací, která pojednává o historii matematiky opravdu novým a pokrokovým způsobem marxistického vědeckého pojetí. Každého čtenáře zaujme nejen zajímavostí, pestrostí a šířkou látky, kterou předkládá, ale i samotným způsobem autora podání a celkovou stavbou díla, které jsou hodnotné i po stránce čistě literární.

Pro všechny popisované klady upoutala kniha už v rukopise svého redaktora, recensenty a všechny, kteří s ní pracovali ještě dříve, než byla dána do tisku. Její náplň, kterou jsme tu jen zhruba obrysově shrnuli, naznačuje už v heslech velké rozpětí celého díla. Jakýmsi jeho jádrem, z něhož počala vyrůstat, jsou někdejší historické poznámky, které tvořily závěr jednotlivých metodických průvodců ke všem učebnicím matematiky z roku 1954. Na těchto statích pracoval tehdy spolu s dr. Baladou jeden z recenzentů pojednávaného díla, profesor dr. Karel K o u t s k ý. Z drobných historických fresek vzniklo však nakonec dílo široce rozvětvené a současně ucelené - dílo, které určitě prohloubí zájem o matematiku a doplní mnohé rozptýlené a těžko dosažitelné informace z nejrůznějších cizojazyčných pramenů. U nás je skutečně svého druhu prvotinou a jedinečným průkopnickým dílem v poválečné době v oboru dějin matematiky. Proto snad se o této knize tolik mluvilo a tolik po ní volalo již dlouho předtím, než se mohlo uskutečnit její vydání. Již sám fakt projevu takového zájmu o knihu zabývající se výlučně matematickou tematikou, je věcí záslužnou, neboť pomáhá popularizovat vědu, která stále ještě nebyla dost populární. A přece je matematika vědou dnes tak aktuální a možno říci vždy moderní, jsouc hybnou pákou a nepostradatelnou pomocnicí většiny ostatních věd. Její neustálý rozvoj je přece nejjistější zárukou neustávajícího technického pokroku - a proto také v éře socialismu je na matematiku kladen tak velký důraz. Všechny tyto příčiny způsobují, že vítáme tak radostně dílo, které činí matematiku poutavější a bližší vrstvám co nejširším.

Na závěr musíme se aspoň zmínit o grafické náplni knihy, která je u historické publikace zvláště důležitá pro svou dokumentující funkci. Ilustrační materiály vybrané odpovědně zkušeným autorem doplňují vhodně, názorně a po formální stránce velmi kvalitně text celého díla. Střídají se v něm reprodukce starých pramenů, historické mapky a zajímavé úlohy s reprodukcemi některých nejznámějších postav matematiků. Na tomto místě musíme promluvit i o vazbě publikace, která je doplněna velmi vkusným dvoubarevným přebalem, na němž je reprodukován gotický matematický motiv, dokreslující historickou náplň díla a zvyšující i jeho estetický účinek.

Publikace dr. Balady má 240 stran. Přitom cena i vázaného výtisku je jistě dostupná každému zájemci, neboť činí 12,50 Kčs. Brožovaná je za 9,10 Kčs. Jd

Inž. F. Soukup: Elektrina slouží i škodí

Copak je to za kluka, aby alespoň jednou nerozebral nebo neopravoval nějaký elektrický spotřebič nebo alespoň elektrickou zástrčku a nespálil přitom pojistku. Většina čtenářů ji také jistě někdy „opravila“ drátkem nebo pro jistotu dvěma i více drátky, aby více snesla. Vždyť každý chlapec - a někdy i dívka - nejpozději po první hodině fyziky jednající o elektřině se cítí povolán k těmto úkonům.

Nechceme abyste ztratili radost z podobné činnosti, ke které vás nyní do určité míry nabádá i polytechnizace ve škole, ale také nechceme, abyste ztratili přitom své zdraví, nebo dokonce i život.

Jako poutavý román si proto přečtete knížku *inž. Soukupa*, kterou vydalo letos SNTL. Má 214 stránek, stojí Kčs 7,50 a vyšla v řadě elektrotechnické literatury s určením všem uživatelům elektřiny, jak odborníkům tak i laikům.

Bude nejlépe, necháme-li raději promluvit samotného autora a ocitujeme jeden příklad ze skutečnosti, jichž najdete v knížce přes sedmdesát. Každý z nich je zakončen odborným rozbořem.

Úraz vrtačkou na malé napětí. V opravně aut byla revize elektrického zařízení. Kontrolní orgán mezi jiným vytýkal i to, že na dvorku vystaveném dešti se vrtá elektrickou ruční vrtačkou na napětí 220 V, což je v mokru a hlavně v montážní jámě pod vozem velmi nebezpečné. Nařídil proto zakoupit ruční elektrickou vrtačku na malé napětí, nebo aspoň pracovat s nynější vrtačkou jen v ochranných gumových rukavicích.

Vedoucí opatřil proto vrtačku na 24 V a jeden přenosný bezpečnostní transformátor 220/24 V.

Závodní údržbář pak dodal gumové šňůry a zapojil vrtačku.

Opravovalo se právě těžké nákladní auto a automontér vrtal cosi v kovové kabině na podlaze. Pracoval již s novou vrtačkou na 24 V, zapojenou přes přenosný transformátořek do zásuvky na zdi dvorku.

Zlobil se, že nová vrtačka má malý výkon a vrtání jde pomalu. Aby si prohlédl a přibrousil pořádně vrták, to ho nenapadlo. Tlačil na vrtačku čím dál, tím víc.

Šňůra od zásuvky k transformátoru ležela na zemi a pojednou překážela jinému mechanikovi, který ji nechtěl přejet železnými kolečky zdvihačeho zařízení.

Proto upozornil svého kamaráda, že šňůru přeloží na druhou stranu vozu a zastrčil ji do zásuvky na protější zdi.

Nic se tím zdánlivě nezměnilo a mechanik v kabině vrtal dál. Když však přijel nad auto jeřáb, aby zvedl vadný chladič (který byl již odpojen) a dopravil jej k opravě do klempířské dílny, utrpěl mechanik vrtající v kovové kabině vozu elektrický úraz v okamžiku, kdy řetěz háku se dotkl povrchu chladiče.

Jak mechanik ležel v kabině opřen o kovovou podlahu holým loktem levé ruky, projel elektrický proud s povrchu vrtačky jeho levou rukou a loktem do podlahy

kabiny a kostrou vozu, chladičem a jeřábem až do země. Každý jeřáb musí být totiž dokonale uzemněn! Úraz byl velmi bolestivý, ale na štěstí nebyl vážný. Celé osazenstvo závodu stálo však před nerozluštitelnou záhadou, jak mechanik mohl utrpět tak bolestný úraz od napětí 24 V.

Teprve přivolaný znalec vše řádně osvětlil. Údržbář předně špatně zapojil přenosný transformátor. Správně zapojil jen primární stranu 220 V tím, že železné jádro transformátoru spojil s nulovým ochranným vodičem. To odpovídalo přesně předpisům o ochraně nulováním. U vývodů 24 V se však zamyslel. Musí být spotřebič na 24 V také ještě nulován? Nebyl si zcela jist, řekl si tedy, že ochrana nulováním nemůže škodit, a proto i vrtačku na 24 V nuloval. Vzal rovněž trojpramennou šňůru a kostru vrtačky spojil třetí žilou s nulovanou kostrou transformátoru. Když pak jeden z mechaniků přemístil vidlici do zásuvky na protější zdi, neměl ani tušení, že tato zásuvka je špatně zapojená, protože má fázový vodič na ochranném kolíku. Tím nevědomky přivedl pomocí nulového ochranného vodiče plné napětí 220 V na kostru vrtačky 24 V.

Ani tehdy by mechanik nic necítil, kdyby teprve jeřáb neumožnil vadnému proudu cestu do země.

Rozbor. Případ je ukázkou toho, jak málo někteří elektroúdržbáři znají předpisy o ochraně před nebezpečným dotykem. Úraz zavinila vlastně nesprávně zapojená zásuvka 220 V, v níž byl zaměněn nulový vodič s vodičem fázovým. To se jistě nemělo stát a údržbář to měl dávno zjistit a opravit. Ale právě proto, že se taková věc stává častěji, nespolehají se předpisy raději v prostředí zvláště pro úraz nebezpečném, a hlavně u elektrického ručního náradí, na ochranu nulováním, ačkoliv je to jinak dokonalá a nejvíce rozšířená ochrana. Nařizují přímo ochranu malým napětím.

Ochrana malým napětím má tu velkou výhodu, že chráněný elektrický spotřebič je odděleným sekundárním vinutím transformátoru zcela izolován od rozvodné sítě. Spojovat takový spotřebič na 24 V ještě s nulovým vodičem, který je součástí elektrické sítě, je tedy nesmysl, protože tím zhoršujeme jinak spolehlivou ochranu malým napětím. Kromě toho při takovém spojení vytvořil vlastně údržbář u bezpečnostního transformátoru stejné nebezpečí, jako kdyby použil autotransformátoru. A používat autotransformátoru je předpisy zakázáno, zvláště pro snižování napětí.

Proto spotřebiče zapojené na malé napětí nesmíme již ani nulovat, ani zemnit. Kromě toho musíme používat takového spojovacího a vypínacího materiálu, jako by šlo o nízké napětí, např. 220 V.

Potud autor. Byli byste sami dovedli v tomto případě najít závadu? Knížku doporučujeme vám všem mladým „elektrotechnikům“ i vašim učitelům a ředitelstvím vašich škol. Měla by být zařaděna mezi povinnou školní četbu. Jen ilustrace v příštím vydání nechť jsou buď žertovné, nebo umělecké, nyní nejsou totiž ani jedno ani druhé.

Doc. Dr. Miroslav Menšík

J. Josíf a kol.: Motocykl Jawa 50-Pionýr

Říká se žertovně „co Čech to výzkumník“. Brzy se však bude doopravdy říkat „co Čechoslovák to motorista“, jak dosvědčují statistiky, v nichž se dočítáme v denním tisku o úspěchu výroby našich motorových vozidel.

A vás, mládež, opět nejvíce láká motocykl, jak tomu ostatně bylo i u vašich otců a dědů. Nejmenší z těchto našich výrobků Jawa 50, zvaný Pionýr 550 nebo 555 se právě většinou dostává do ruky vám nebo vašim trochu starším vrstevníkům. Někteří z vás snad nad ním ohrnují nos, ale „ono to“ jezdí, jak se našim dědům ani nezdálo.

Právě proto, že tento stroj většinou řídí mladí lidé bez zkušeností, je nutno, aby znali jak bezpečnostně-dopravní předpisy, tak stroj sám. Tomu druhému požadavku plně vyhovuje příručka nositele Řádu republiky J. Josífa a kolektivu *Motocykl Jawa 50-Pionýr*, kterou vydalo letos SNTL. Na 121 str. s 61 obrázky se dočtete vše, co je důležité pro údržbu stroje. Cena 9,90 Kčs.

Ostatně i ti, kteří nejsou dosud šťastnými majiteli Pionýra, si s prospěchem příručku přečtou a tak si prakticky zopakují příslušnou kapitolu z fyziky a dovědí se nad to mnoho podrobností, které se stále více stávají součástí všeobecného polytechnického vzdělání občana technicky vyspělého státu.

Doc. Dr. Miroslav Menšík.

Redakční sdělení



★ Ústřední výbor Fyzikální olympiády v Olomouci nás žádá o uveřejnění opravy příkladu 5., kat. A, jehož text je nutno takto doplnit: „olověná koule hmoty 880 g. Dále v závorce: řešte nejprve obecně!“

Příklady MO i FO neprocházejí odbornou recenzí, ani jazykovou úpravou redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních.

★ Konečnou zprávu o soutěži o nejlepší rys přineseme v č. 7.

★ Jedenáctileté školy v Lučenci a Rožnově. Vaše stížnosti na doručování časopisu jsme postoupili k dalšímu šetření.

Podle předběžných rozhovorů konaných na mezinárodní Matematické olympiádě loni v Rumunsku bylo dohodnuto, aby letošní mezinárodní MO se konala v SSSR. V roce 1962 se pravděpodobně uspořádá u nás v rámci 100. výročí založení JČMF.

Články týkající se MO zasílejte přímo na adresu: s. R. Zelinka, Matematický ústav ČSAV, Praha 2, Žitná 25; příspěvky k Fyzikální olympiádě na adresu: doc. dr. M. Laitoch, Olomouc, Lazecká 18.

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

resolventa i rezolventa	řidicí (přímka)
resonance i rezonance	řidicí (učitel)
resonátor i rezonátor	řiditelný
resonovati i rezonovati	řiditi
resorbovati	s sekunda ve složených značkách
resorpce	sáti
respektive	sbrousiti
respektivní	scintilace
respicient	sčítací
resultát i rezultat	sčítačka
resumé résumé (čti rezymé)	sčítanec
rešerše	sčítatel
retardace	sčítatelný
retina	sčítati i sečítati
retuš	sec sekans
revise i revize	sedlina
rezuvzdorný	sedm
risiko i riziko	sedmdesát
romboedr	sedmnáct
rotor	segment
rovnoramenný	seismograf i seizmograf
rovnostěnný	sekans (rod muž., nesklonné) i sekanta (rod žen.)
rovnostranný	sekunda
rovnoúhlý	selektivní
rozčtvrtiti	selen
rozebíráti i rozbíráti	sensibilace i senzibilace
rozezvučeti i rozzvučeti	septima
rozkmit	série, sériový
rozpůliti	setinný
rozpulovati i rozpůlovati	sexta
rozteč	sextant
rozvíjeti	sféra, sférický
rozvířiti	shodný
rozviřovati	schéma
rozvodní i rozvodný	schematický
rozzářiti	siemens-martinská pec
rozžhaviti	sigma (nesklonné)
rubidium	signál
rukojeť i rukověť	signalisace i signalizace
ruthenium	signum
různostranný	silokřivka
rýsovací	siloměr
rýsovadlo i rysovadlo	sinoida i sinusoida
rýsovna	sinový i sinusový
rytmus	sinusovka
řádka i rádek	síra, sírový
ředicí (tekutina)	skalár
ředící (kdo ředí)	

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Dr. Josef Šimek a kolektiv: Geometrie pro 8. ročník

Pokusný učební text pro dvanáctileté střední školy. Str. 79, cena brož. v. Kčs 1,65

Prof. dr. J. Metelka a kolektiv: Algebra pro 8. ročník

Pokusný učební text pro dvanáctileté střední školy. Str. 127, cena brož. v. Kčs 2,55

Inž. Eduard Kriegelstein a kolektiv: Matematika

Učební text pro průmyslové školy, III. díl. Str. 160, cena brož. výt. Kčs 3,90

Doc. Alois Hlavička a Josef Lampa: Fyzika

Přechodný učební text pro 9. ročník. Str. 179, cena váz. výt. Kčs 7,20

Vladimír Rudolf a kolektiv: Fyzika pro 11. ročník

Str. 233, cena brož. výt. Kčs 6,20

Dr. B. Vlach a dr. M. Chytilová: Fyzika.

Učební text pro zdravotnické školy. 3. vydání. Str. 243, cena brož. výt. Kčs 8,—.

Božena Motlíková - Karel Mareš: Matematika pro 7. ročník zvláštních škol.

Str. 210, cena váz. výt. Kčs 4,65. K dostání ve Službě škole.

J. Valenta a kol.: Obchodní počty pro I. a II. ročník učňovských škol. Učební obory: Prodavač 1501—1514, číšník 1552. Str. 164, cena brož. výt. 4,45.

Inž. J. Bartoš a kolektiv: Matematicko-technické tabulky pro odborná učiliště a učňovské školy strojírenských oborů.

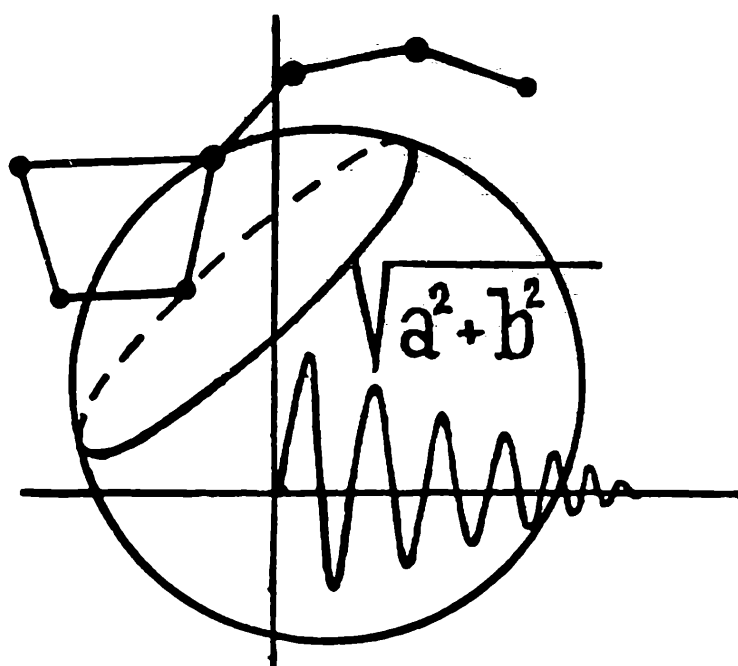
Str. 217, cena brož. výt. Kčs 6,50.

Doc. RNDr. M. Menšík - A. Pospíšil: Technické kreslení. Deskriptivní geometrie pro 1. ročník průmyslových škol stavebních.

5. nezměněné vydání. Str. 213, cena váz. výt. Kčs 10,20. V prodejnách Knihy.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



7

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 7

Toto číslo vyšlo 15. března 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

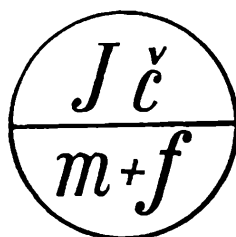
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

OBSAH

Doc. J. Vyšín: Úloha z městské dopravy	289
M. Jůza: Řešení jedné geometrické úlohy	298
Doc. O. Setzer: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníka	300
K. Drábek: O dělicím poměru na přímce	304
M. Valešová: Dvojpoměr	308
Dr. J. Dibelka: Hallův jev	315
Dr. J. Dibelka: Vedení elektrického proudu	317
A. Špelda: Fyzikální rozdílnosti a podobnosti lidského sluchu a zraku	321
J. Kotyk: Huygensova teorie světla	327
K. Č.: Úloha o jízdním řádu	332
M. M.: Klempíř v rozpacích	332
O. S.: Matka a syn	333
Recenze	333
Soutěž o nejlepší rys	334
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu (Pokračování)	
	3 str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06077 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

Matematika



Doc. Jan Vyšín, K. U., Praha:

Úloha z městské dopravy

V ročníku 1957 našeho časopisu (č. 1, str. 8) jsme uveřejnili v článku nazvaném *Problém křižovatky* jednu úlohu z městské dopravy, která vedla na řešení soustavy několika lineárních rovnic celými čísly. V tomto článku uvedeme jinou úlohu z městské dopravy, která vede na řešení nerovnosti nebo soustavy nerovností celými čísly; zároveň ukážeme, jak tato úloha, vybraná z praxe, je v podstatě jen jiným vyslovením ryze geometrického problému.

Úloha 1. *Určitou stanicí S elektrických drah projíždějí dvě trati, které označíme 1 a 2. Interval mezi dvěma za sebou následujícími vozy na trati 1 je i_1 minut, na trati 2 je i_2 minut. V určitý okamžik, např. ve 12 hodin, se sjedou ve stanici S vozy obou tratí. Chceme zjistit doby, v nichž projedou stanicí S vozy obou tratí s časovým rozdílem menším než d minut.*

Vzhledem k významu daných čísel i_1, i_2, d můžeme předpokládat, že jsou to čísla racionální; ale nejen to, protože se v praxi udávají intervaly nejvýše s přesností půl minuty, jsou i_1, i_2, d zlomky s jmenovatelem 2. Dokonce můžeme čísla i_1, i_2 i d pokládat za celá čísla. Kdyby totiž bylo např. $i_1 = 3,5, i_2 = 5, d = 1,5$, zvolili bychom za jednotku času „půlminutu“ a čísla i_1, i_2, d bychom nahradili čísly 7, 10, 3.

Obraťme se nyní k řešení úlohy 1. Vozy tratí 1, 2, které se sjely ve stanici S ve 12 hodin, označíme jako „nulté“. Dva vozy tratí 1, 2, které vyhovují podmínkám úlohy, nechť mají pořadí x_1, x_2 . Podle podmínky úlohy pak platí

$$|i_1 x_1 - i_2 x_2| < d. \quad (1)$$

Obráceně každé řešení nerovnosti (1) celými kladnými čísly x_1, x_2 dává pořadí dvou vozů, které vyhovují podmínce úlohy.

Označme δ největšího společného dělitele čísel i_1, i_2 ; pak rozdíl $i_1 x_1 - i_2 x_2$ nabývá všech hodnot, které jsou násobky čísla δ s celočíselnými koeficienty (nulu v to počítaje); jiných

hodnot rozdíl $i_1x_1 - i_2x_2$ nenabývá. Přitom ovšem předpokládáme, že proměnné x_1, x_2 nabývají všech možných celočíselných hodnot.

Toto tvrzení se snadno dokáže postupným dělením čísel i_1, i_2 , kterému se obvykle říká *Euklidův algoritmus*. Dělíme-li číslo i_1 číslem i_2 , dostaneme zbytek z_1 , který je menší než i_2 a je dělitelný číslem δ , neboť platí

$$i_1 = q_1 i_2 + z_1. \quad (2a)$$

Dělíme-li dále číslo i_2 číslem z_1 , dostaneme zbytek z_2 , který je menší než z_1 a je opět dělitelný číslem δ , neboť platí

$$i_2 = q_2 z_1 + z_2. \quad (2b)$$

Tak pokračujeme dále. Zbytky při postupném dělení se stále zmenšují a jsou vesměs dělitelné číslem δ . Poslední zbytek je roven nule, předposlední je δ . Jestliže dosadíme za z_1 z rovnosti (2a) do rovnosti (2b), odtud pak za z_2 do další rovnosti a tak pokračujeme dále, dostaneme vyjádření posledního nenulového zbytku δ ve tvaru

$$\delta = \alpha i_1 + \beta i_2, \quad (3)$$

kde α, β jsou čísla celá. Znásobíme-li rovnost (3) celým číslem, dostaneme na levé straně libovolný násobek čísla δ s celočíselným koeficientem, vyjádřený ve tvaru $i_1x_1 - i_2x_2$. Na druhé straně je zřejmé, že výraz $i_1x_1 - i_2x_2$ je vždy celočíselným násobkem čísla δ ; tím je dokázáno tvrzení, které jsme výše vyslovili.

Rozřešíme nyní úlohu 1 v numerickém příkladě, abychom objasnili vyložený postup. Dejme tomu, že intervaly na tratích 1, 2 jsou 3,5 min. a 5 min.; hledáme dvojice vozů, které projedou stanicí S s časovým rozdílem menším než 1 minuta.

Za jednotku času zvolíme půlminutu; pak je $i_1 = 2 \cdot 3,5 = 7$, $i_2 = 2 \cdot 5 = 10$, $d = 2$ a nerovnost (1) zní

$$|7x_1 - 10x_2| < 2. \quad (1')$$

Čísla 7, 10 jsou nesoudělná; je tedy $\delta = 1$. Euklidův algoritmus postupného dělení čísel i_1, i_2 je

$$\begin{aligned} 7 &= 0 \cdot 10 + 7, \\ 10 &= 1 \cdot 7 + 3, \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1, \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Podíly jsou $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$, zbytky jsou $z_1 = 7$, $z_2 = 3$, $z_3 = \delta = 1$, $z_4 = 0$. Postupným dosazováním dostaneme z rovností (4) vztah

$$7 = 2 \cdot (10 - 1 \cdot 7) + 1,$$

neboli

$$1 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10, \quad (3')$$

což je zvláštní případ vztahu (3).

Řešením naší úlohy jsou taková celá kladná čísla x_1, x_2 , pro která platí buď $7x_1 - 10x_2 = 0$ nebo $7x_1 - 10x_2 = 1$ nebo $7x_1 - 10x_2 = -1$.

Všecka celočíselná kladná řešení rovnice $7x_1 - 10x_2 = 0$ lze napsat ve tvaru

$$x_1 = 10t, \quad x_2 = 7t, \quad (5a)$$

kde t probíhá všechna přirozená čísla. Všecka celočíselná kladná řešení rovnice $7x_1 - 10x_2 = 1$ dostaneme z jednoho z nich; je to řešení $x_1 = 3, x_2 = 2$, které dává rovnost (3'). Pak platí

$$\begin{aligned} 7x_1 - 10x_2 &= 1, \\ 7 \cdot 3 - 10 \cdot 2 &= 1; \end{aligned}$$

odečtením druhé rovnosti od první dostaneme

$$7(x_1 - 3) = 10(x_2 - 2),$$

$$\text{tj.} \quad x_1 = 10u + 3, \quad x_2 = 7u + 2; \quad (5b)$$

kde u probíhá všechna nezáporná čísla (musí být $x_1 > 0, x_2 > 0$).

Nakonec zjistíme všechna celočíselná kladná řešení rovnice $7x_1 - 10x_2 = -1$; dostaneme je z řešení $x_1 = -3, x_2 = -2$, které vyplývá z rovnosti (3'). Obdobně jako v předchozím vyjde

$$x_1 = 10v - 3, \quad x_2 = 7v - 2, \quad (5c)$$

kde v probíhá všechna přirozená čísla.

Použitím vzorců (5a), (5b), (5c) sestavíme tabulku, která nám ukáže dvojice vozů, které vyhovují podmínce úlohy a projedou stanicí S mezi 12. a 13. hodinou.

t	u	v	x_1	$i_1 x_1$ (v min.)	x_2	$i_2 x_2$ (v min.)
—	0	—	3	10,5	2	10
—	—	1	7	24,5	5	25
1	—	—	10	35	7	35
—	1	—	13	45,5	9	45
—	—	2	17	59,5	12	60
2	—	—	20	70	14	70
—	2	—	23	80,5	16	80

Hledané vozy trati 1 projedou tedy stanicí S v 12,10 $\frac{1}{2}$, 12,24 $\frac{1}{2}$, 12,35, 12,45 $\frac{1}{2}$ a 12,59 $\frac{1}{2}$ hod., hledané vozy trati 2 projedou stanicí S v 12,10, 12,25, 12,35, 12,45 a v 13 hod.

Z předchozího výkladu a z postupu řešení numerického příkladu vyplývá tento závěr:

Úloha 1 má vždy nekonečně mnoho řešení; v každém případě jsou to dvojice vozů, které se setkají na stanici S . Mimo tato „triviální“¹⁾ řešení mohou existovat ještě další řešení (tj. dvojice vozů, které se nesetkají ve stanici S). Tato další „netriviální“ řešení existují jedině v tom případě, když největší společný dělitel δ čísel i_1, i_2 je menší než předepsaná časová difference d .

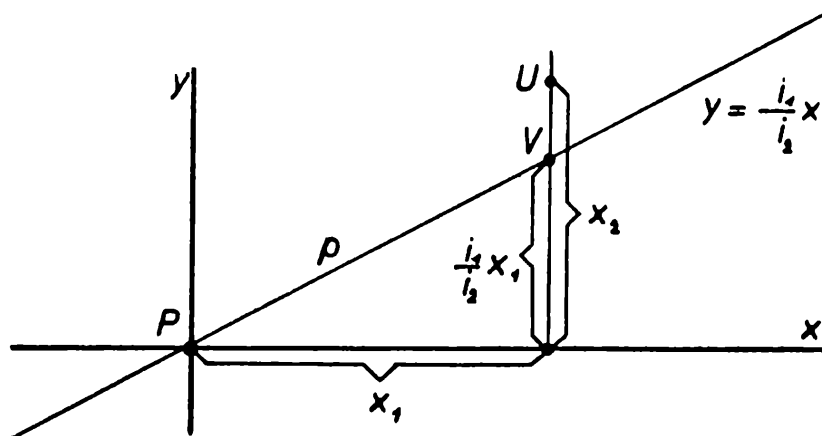
¹⁾ Triviální (latinsky) znamená všední, otrěpaný.

Tato další řešení vyhledáme pomocí Euklidova algoritmu způsobem, který byl ukázán na číselném příkladě.

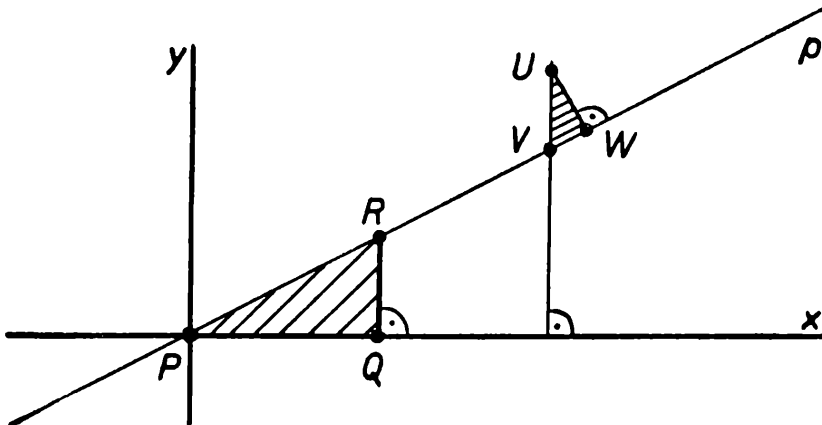
Řešíme-li např. úlohu 1 pro údaje $i_1 = 4,5$ min., $i_2 = 6$ min., $d = 1$ min. neboli v půlminutách $i_1 = 9$, $i_2 = 12$, $d = 2$, dostaneme jen triviální řešení, neboť je $\delta = 3 > 2 = d$. Jsou-li čísla i_1 , i_2 též jako v předchozím příkladě a je-li $d = 2$ min. = 4 půlminuty, má úloha i netriviální řešení.

Ukážeme nyní geometrický význam úlohy 1. Zvolme v rovině soustavu pravoúhlých souřadnic x , y a dělme nerovnost (1) číslem i_2 ; dostaneme

$$\left| \frac{i_1}{i_2} x_1 - x_2 \right| < \frac{d}{i_2}. \quad (6)$$



Obr. 1



Obr. 2

Levá strana nerovnosti (6) vyjadřuje vzdálenost bodu U o souřadnicích $[x_1, x_2]$ a bodu V o souřadnicích $\left[x_1, \frac{i_1}{i_2} x_1 \right]$ (obr. 1). Bod V leží na přímce p o rovnici

$y = \frac{i_1}{i_2} x$; její směrnice je kladné číslo $\frac{i_1}{i_2}$. Vypočteme vzdálenost bodu U od přímky p ; použijeme k tomu trojúhelníku UVW , kde W je pata kolmice vedené z bodu U na přímku p , a trojúhelníka PQR , jehož odvěsny mají délky $PQ = i_2$, $QR = i_1$ (obr. 2)²⁾. Přepona trojúhelníka PQR má délku $PR = \sqrt{i_1^2 + i_2^2}$.

²⁾ Bod U může ležet nad přímkou p nebo pod ní nebo na přímce p .

Označíme-li $m = UW$ hledanou vzdálenost, plyne z podobnosti trojúhelníků $\Delta PQR \sim \Delta UWV$ vztah

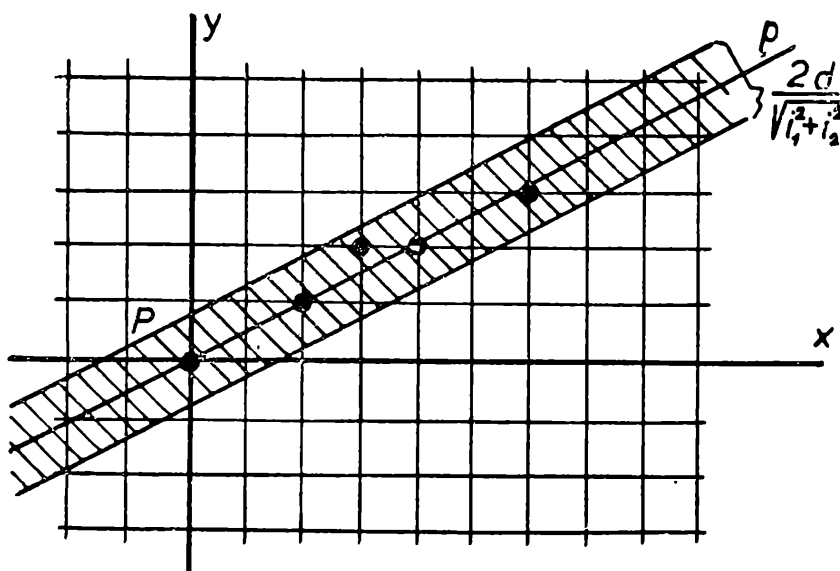
$$\frac{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}{i_2} = \frac{\left| \frac{i_1}{i_2} x_1 - x_2 \right|}{m}.$$

Odtud dostaneme snadno

$$m = \frac{|i_1 x_1 - i_2 x_2|}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}. \quad (7)$$

Nerovnost (1) je splněna jedině tehdy, platí-li

$$m < \frac{d}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}. \quad (8)$$



Obr. 3

Nerovnost (8) vyjadřuje, že bod U o celočíselných souřadnicích $[x_1, x_2]$, tzv. *mřížový bod*, padne dovnitř pásu roviny P , jehož osou je přímka p a jehož šířka je $\frac{2d}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}$. Úloha 1 se dá tedy geometricky vyslovit takto: Máme vyhledat

všecky mřížové body v rovině, které leží uvnitř pásu P a zároveň v I. kvadrantu (obr. 3).

Na obr. 3 jsou vyznačeny některé z těchto bodů.

V další části článku rozřešíme úlohu obdobnou k úloze 1, ale týkající se více tratí. Aby byl výklad konkrétní, zvolíme tři trati.

Úloha 2. *Určitou stanicí S elektrických drah projíždějí tři trati, které označíme 1, 2, 3. Intervaly mezi dvěma za sebou následujícími vozy těchto tří tratí jsou po řadě i_1, i_2, i_3 minut. V určitý okamžik, např. ve 12 hodin, se sjedou ve stanici S vozy všech tří tratí. Chceme zjistit doby, v nichž projedou stanicí S vozy všech tří tratí v intervalu kratším než d minut.*

Má-li být splněna podmínka úlohy, musí platit pro kterékoli dvě z tratí 1, 2, 3 nerovnost obdobná nerovnosti (1); dostaneme tedy

$$\begin{aligned} |i_1 x_1 - i_2 x_2| &< d, \\ |i_2 x_2 - i_3 x_3| &< d, \\ |i_3 x_3 - i_1 x_1| &< d. \end{aligned} \quad (9)$$

Obráceně, jsou-li přirozená čísla x_1, x_2, x_3 řešením soustavy (9), pak vozy s pořadími x_1, x_2, x_3 projedou stanicí S v intervalu kratším než d minut. Skutečně, projede-li stanicí S nejdříve vůz trati 1 a nakonec vůz trati 2 (nebo naopak), pak vyplývá z první nerovnosti (9), že celková doba průjezdu vozů všech tří tratí je menší než d minut.

Obdobné závěry lze učinit z druhých dvou nerovností (9), je-li při projíždění stanicí S pořadí tratí jiné.

Rozřešit úlohu 2 tedy znamená, najít všechna celočíselná kladná řešení soustavy nerovností (9).

Řešení úlohy 2 ukážeme jen na numerickém příkladě. Zvolíme tyto číselné údaje:

v minutách: $i_1 = 3,5, \quad i_2 = 5, \quad i_3 = 4, \quad d = 1,5;$

v půlminutách: $i_1 = 7, \quad i_2 = 10, \quad i_3 = 8, \quad d = 3.$

Abychom rozřešili první nerovnost (9), najdeme nejprve všechna celočíselná řešení rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 - 10x_2 &= 0, \\ 7x_1 - 10x_2 &= \pm 1, \\ 7x_1 - 10x_2 &= \pm 2. \end{aligned} \quad (10)$$

První tři rovnice jsme rozřešili již dříve; řešení byla dána vzorci (5a), (5b), (5c). Rozřešíme-li obdobně poslední dvě rovnice (10), dostaneme všechna celočíselná řešení nerovnosti první (9). Přehledně je vyjádříme vzorci:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10t, & x_2 &= 7t, \\ x_1 &= 10t + 3, & x_2 &= 7t + 2, \\ x_1 &= 10t - 3, & x_2 &= 7t - 2, \\ x_1 &= 10t + 6, & x_2 &= 7t + 4, \\ x_1 &= 10t - 6, & x_2 &= 7t - 4.^3) \end{aligned} \quad (11)$$

A. První vzorec (11) vyjadřuje, že vozy tratí 1, 2 projedou stanicí S v touž dobu $i_1 x_1 = i_2 x_2 = 70t$ (půlminut) po 12. hodině. Mají-li být splněny všechny podmínky úlohy 2, projede vůz trati 3 stanicí S v některé z těchto dob (po dvanácté hodině): $70t - 2, 70t - 1, 70t, 70t + 1, 70t + 2$ (půlminut); doba průjezdu vozu trati 3

³⁾ Proměnný parametr je na rozdíl od vztahů (5a), (5b), (5c) značen ve všech vzorcích (11) týmž písmenem t a probíhá všechna celá čísla.

se totiž nesmí lišit od doby $70t$ o více než 2 půlminuty, což vyjadřují druhá a třetí nerovnost (9). Pro x_3 dostáváme tedy tyto rovnice

$$\begin{aligned}8x_3 &= 70t, \\8x_3 &= 70t \pm 1, \\8x_3 &= 70t \pm 2.\end{aligned}$$

Rovnice $8x_3 = 70t \pm 1$ jsou neřešitelné celými čísly, neboť číslo $8x_3$ je dělitelné dvěma pro každé celé x_3 , číslo $70t \pm 1$ je však liché pro každé celé t .

Zbývající tři rovnice pro x_3 zkrátíme dvěma a dostaneme

$$\begin{aligned}4x_3 - 35t &= 0, \\4x_3 - 35t &= 1, \\4x_3 - 35t &= -1.\end{aligned}\tag{12}$$

Rovnice (12) rozřešíme s použitím vztahu

$$4 \cdot 9 - 35 \cdot 1 = 1.\tag{13}$$

Odečteme-li vztah (13) např. od druhé rovnice (12), dostaneme

$$4(x_3 - 9) = 35(t - 1),$$

a odtud

$$x_3 = 9 + 35u, \quad t = 1 + 4u\tag{14a}$$

kde u je číslo celé. Obráceně dá každé celé číslo u jedno celočíselné řešení x_3 , t druhé rovnice (12).

Jestliže znásobíme vztah (13) čísly 0, -1 a odečteme od první, resp. třetí rovnice (12), dostaneme obdobně řešení těchto rovnic

$$x_3 = 35u, \quad t = 4u,\tag{14b}$$

$$x_3 = -9 + 35u, \quad t = -1 + 4u.\tag{14c}$$

Ze vzorců (14a), (14b), (14c) dosadíme za t do prvních vzorců (11) a tak vyjde první skupina řešení nerovností (9):

$$\begin{aligned}x_1 &= 40u, & x_2 &= 28u, & x_3 &= 35u, \\x_1 &= 40u + 10, & x_2 &= 28u + 7, & x_3 &= 35u + 9, \\x_1 &= 40u - 10, & x_2 &= 28u - 7, & x_3 &= 35u - 9.\end{aligned}\tag{I}$$

Tak např. pro $u = 0$ dostaneme z druhé řádky (I) vozy pořadí 10, 7, 9, které projedou stanicí S v časech 12,35, 12,35 a 12,36 hod.

B. Obdobně postupujeme, vyjdeme-li z druhého vzorce (11). Tento vzorec vyjadřuje, že vozy trati 1, 2 projedou stanicí S v půlminutovém intervalu, a to v časech $i_2x_2 = 70t + 20$ a $i_1x_1 = 70t + 21$ (půlminut) po dvanácté hodině. Mají-li být splněny všechny podmínky úlohy 2, projede vůz trati 3 stanicí S v některé z těchto dob: $70t + 19$, $70t + 20$, $70t + 21$, $70t + 22$ (půlminut) po dvanácté hodině; doba průjezdu vozu trati 3 se totiž opět nesmí lišit od obou časů

$70t + 20$, $70t + 21$ o více než dvě půlminuty, což vyjadřuje druhá a třetí nerovnost (9). Pro x_3 dostáváme tedy tyto rovnice

$$8x_3 = 70t + 19,$$

$$8x_3 = 70t + 20,$$

$$8x_3 = 70t + 21,$$

$$8x_3 = 70t + 22.$$

První a třetí rovnice jsou neřešitelné, což si snadno dokážete jako v případě A. Zbývající dvě rovnice zkrátíme dvěma a dostaneme

$$4x_3 - 35t = 10,$$

$$4x_3 - 35t = 11. \quad (15)$$

Při řešení rovnic (15) použijeme opět vztahu (13). Jako v odstavci A dostaneme pro první rovnici (15) řešení

$$x_3 = 90 + 35u, \quad t = 10 + 4u, \quad (16a)$$

a pro druhou rovnici (15) řešení

$$x_3 = 99 + 35u, \quad t = 11 + 4u. \quad (16b)$$

Ze vzorců (16a), (16b) dosadíme za t do druhých vzorců (11) a tak vyjde druhá skupina řešení nerovností (9):

$$x_1 = 40u + 103, \quad x_2 = 28u + 72, \quad x_3 = 35u + 90,$$

$$x_1 = 40u + 113, \quad x_2 = 28u + 79, \quad x_3 = 35u + 99. \quad (II)$$

Za u můžeme dosazovat všechna celá čísla, pro něž vyjdou x_1, x_2, x_3 kladná. Tak např. pro $u = -2$ dostaneme z první řádky (II) pořadí vozů 23, 16, 20: tyto vozy projedou stanicí S v časech 13,20₅, 13,20 a 13,20 hod. Z druhé řádky (II) dostaneme pro $u = -2$ vozy pořadí 33, 23, 29, které projedou stanicí S v časech 13,55₅, 13,55 a 13,56 hod.

Stejným způsobem můžeme pokračovat, vyjdeme-li z třetího, čtvrtého a pátého vzorce (11). Pro pořadí hledaných trojic vozů dostaneme vzorce obdobné vzorcům (I), (II). Ve všech těchto vzorcích se vyskytuje jedna proměnná (u), za níž můžeme dosazovat libovolná celá čísla s tím jediným omezením, aby čísla x_1, x_2, x_3 byla celá kladná. Tak dostaneme všechna řešení naší úlohy.

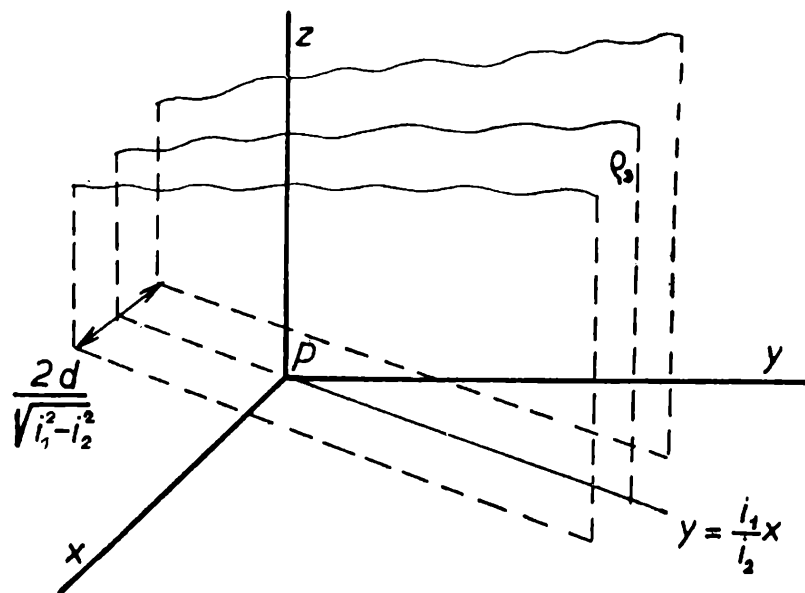
Za zmínku stojí ještě geometrický význam soustavy nerovností (9); je obdobný geometrickému významu nerovnosti (1). Nerovnost (1) vyjadřovala, že bod s celočíselnými souřadnicemi $[x_1, x_2]$ má od přímky p o rovnici $y = \frac{i_1}{i_2} x$ vzdá-

lenost menší než pevné číslo $\frac{d}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}$; jinak řečeno, že mřížový bod $[x_1, x_2]$ leží

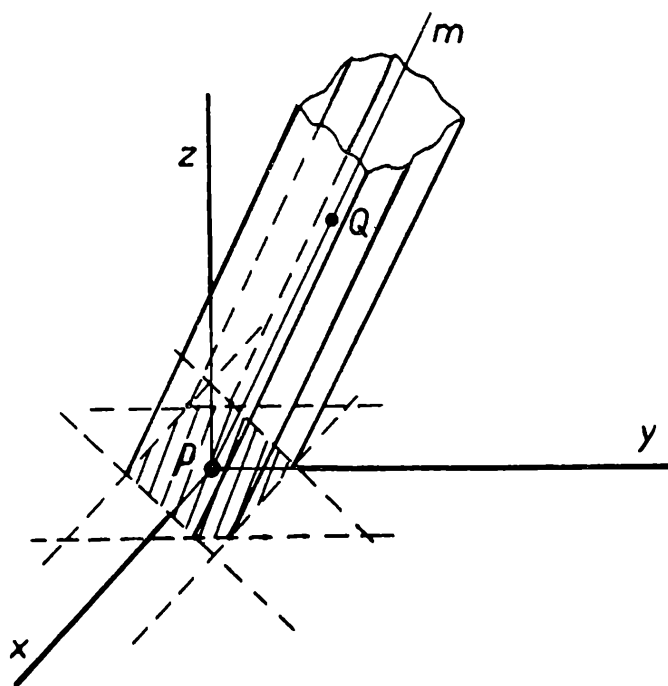
uvnitř pásu roviny, jehož osou je přímka p a jehož šířka je $\frac{2d}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}$.

Každé z nerovností (9) můžeme dát určitý geometrický význam i v trojrozměrném prostoru. Tak např. první nerovnost (9) uvedeme v souvislost s rovnicí

$y = \frac{i_1}{i_2} x$, která vyjadřuje v pravoúhlých souřadnicích v prostoru rovinu ρ_3 obsahující osu z (obr. 4). První nerovnost (9) pak splňují souřadnice všech mřížových bodů $[x_1, x_2, x_3]$, které leží uvnitř jisté vrstvy V_3 , jejíž rovinou souměrnosti je ρ_3 a která má šířku $\frac{2d}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}$ (obr. 4). Obdobný význam mají druhá a třetí ne-



Obr. 4



Obr. 5

rovnost (9): vyjadřují, že mřížový bod $[x_1, x_2, x_3]$ leží uvnitř vrstev V_2, V_1 , jejichž roviny souměrnosti ρ_2, ρ_1 obsahují po řadě osy y, x a které mají šířky $\frac{2d}{\sqrt{i_1^2 + i_3^2}}$, $\frac{2d}{\sqrt{i_2^2 + i_3^2}}$. Všecky tři roviny ρ_1, ρ_2, ρ_3 mají společnou jistou přímku m ; je to

spojnice počátku P a bodu Q o souřadnicích $[i_2i_3, i_3i_1, i_1i_2]$. Z toho lze snadno odvodit, že společnou částí čili průnikem všech tří vrstev V_1, V_2, V_3 je jistý *hranolový prostor* H . Geometrický význam úlohy 2 je tedy tento: Máme vyhledat všechny mřížové body v prostoru, které leží uvnitř hranolového prostoru H (obr. 5) a současně uvnitř prvního oktantu (je $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$).

Geometrická interpretace takových úloh, jako jsou úlohy 1 a 2, může mít i praktický význam: Umožňuje nám řešit tyto úlohy geometrickými prostředky, tj. graficky. Tato poznámka vás jistě nepřekvapí, vzpomenete-li si, jak se řeší na střední škole graficky některé jednoduché rovnice a nerovnosti.

Miloslav Jůza, KU, Praha:

Řešení jedné geometrické úlohy

Máme řešit tuto úlohu: *Na kolik částí je dělen prostor pěti rovinami?*¹⁾

Odpověď zřejmě závisí na tom, v jaké vzájemné poloze jsou dané roviny, například, jsou-li některé z nich rovnoběžné, procházejí-li všechny nějakou pevnou přímkou apod. V dalším budeme předpokládat, že roviny jsou v obecné poloze, to znamená, že žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné, že také žádné dvě jejich průsečnice nejsou rovnoběžné ani nesplývají, a že žádné tři jejich průsečnice neprocházejí jedním bodem.

Počet částí čtenář asi přímo neuhodne, neboť je dost těžké oněch pět rovin si představit. Budeme se tedy nejprve zabývat jednoduššími úlohami, které si snadno představíme. Tak především, jedna rovina dělí prostor na 2 části. Dvě roviny, které nejsou rovnoběžné, dělí prostor na 4 části. Tři roviny v obecné poloze dělí prostor na 8 částí. Snad si čtenář ještě představí i čtyři roviny. Čtyři roviny v prostoru, které jsou v obecné poloze, ohraničují jednu konečnou část - čtyřstěn - a několik nekonečných částí. Každá nekonečná část má se čtyřstěnem společnou buď stěnu, nebo hranu, nebo vrchol. Ale čtyřstěn má 4 stěny, 6 hran a 4 vrcholy. Tedy nekonečných částí je 14. Přidáme-li ještě sám čtyřstěn, vidíme, že 4 roviny v obecné poloze dělí prostor na 15 částí. Tedy 1 rovina dělí prostor na 2 části, 2 roviny na 4 části, 3 roviny na 8 částí, 4 roviny na 15 částí.

Zde není patrná žádná zákonitost, která by nám pomohla uhodnout, na kolik částí dělí prostor 5 rovin. Abychom nějakou zákonitost snáze našli, budeme vyšetřovat jednodušší úlohu a to, na kolik částí je dělena rovina n přímkami. Budeme opět předpokládat, že přímky jsou v obecné poloze, to znamená, že žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné a žádné tři z nich neprocházejí jedním bodem. Vidíme, že jedna přímka dělí rovinu na 2 části, 2 přímky na 4 části. Snadno také zjistíme (obr. 1), že 3 přímky dělí rovinu na 7 částí. Pro $n > 3$ už opět není počet částí na první pohled vidět.

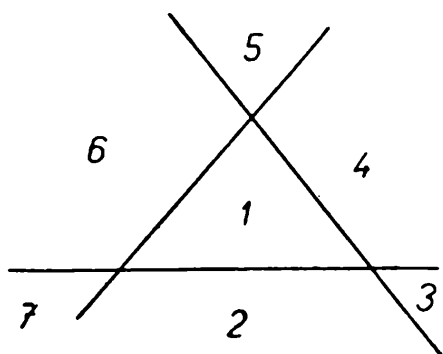
¹⁾ Úloha je vzata z knihy Polya: *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton, 1954. Kniha vyšla též v ruském překladě Поля: *Математика и правдоподобные рассуждения*, Москва, 1957. г.

Pro úplnost ještě spočteme, na kolik částí je dělena přímka n body. Je vidět, že jedním bodem je přímka dělena na 2 části, dvěma body na 3 části, třemi body na 4 části, čtyřmi body na 5 částí, obecně n body na $n + 1$ částí.

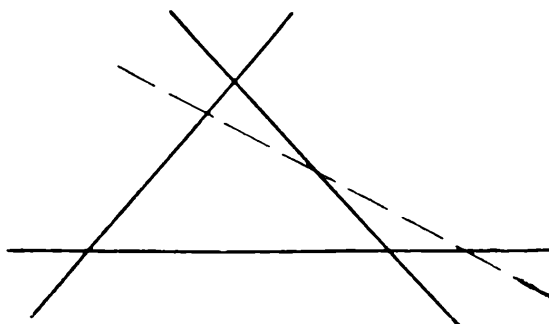
Všechny výsledky, které jsme dosud obdrželi, sestavíme si do tabulky:

Počet dělicích elementů	Počet částí při dělení		
	prostoru rovinami	roviny přímkami	přímky body
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
n			$\dots$ $n + 1$

Nyní již snadno zjistíme zákonitost. Každé číslo v tabulce je součtem dvou čísel v předcházejícím řádku, a to: čísla ve stejném sloupci a v sloupci napravo od něho. Zatím ovšem nevíme, zda se tato zákonitost zachová i pro další čísla, která v naší tabulce dosud nejsou. Jestliže se nám však podaří dokázat, že ano, pak snadno zjistíme, že 4 přímky dělí rovinu na 11 částí a že 5 rovin dělí prostor na 26 částí.



Obr. 1



Obr. 2

Zbývá tedy jen dokázat, že nalezená zákonitost se zachovává i pro čísla dosud v naší tabulce nenapsaná. Máme vlastně dokázat toto:

Označme A_n počet částí, na něž je dělena přímka n body, B_n počet částí, na něž je dělena rovina n přímkami v obecné poloze, C_n počet částí, na něž je dělen prostor n rovinami v obecné poloze. Potom

$$B_{n+1} = B_n + A_n,$$

$$C_{n+1} = C_n + B_n.$$

Dokážeme nejprve první vzorec. Mějme tedy v rovině $n + 1$ přímek v obecné poloze. Nakreslíme nejprve n z nich (viz obr. 2, kde je $n = 3$) a poslední přikreslíme čárkovaně.

Prvních n přímek dělí rovinu na B_n částí. Přibude-li přímka nakreslená čárkováně, počet částí se zvětší tím, že nová přímka některé části rozpůlí. Kolik bude takto rozpůlených částí? To zjistíme takto: Čárkováně nakreslená přímka protne ostatních n přímek v n různých bodech (průsečíků je skutečně n , neboť všech $n + 1$ přímek je v obecné poloze, takže přikreslená přímka není s žádnou jinou rovnoběžná, ani neprochází průsečíkem dvou jiných). Těchto n bodů dělí čárkováně nakreslenou přímku na A_n úseků. Každý tento úsek dělí jednu část roviny vyřatou původními n přímkami na dvě části. Celkem tedy ubude A_n částí a přibude $2A_n$ částí. Tedy celkový počet částí, na něž je rovina dělena všemi $n + 1$ přímkami, je

$$B_{n+1} = B_n - A_n + 2A_n = B_n + A_n.$$

Tím je první vzorec dokázán.

Podobně dokážeme vzorec $C_{n+1} = C_n + B_n$. Mějme tedy v prostoru v obecné poloze $n + 1$ rovin $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}$. Roviny $\rho_1, \dots, \rho_n$ dělí prostor na C_n částí. Přidáním roviny ρ_{n+1} se počet částí zvětší tím, že rovina ρ_{n+1} některé části rozpůlí. Máme zjistit, kolik bude takto rozpůlených částí. Roviny $\rho_1, \dots, \rho_n$ protnou rovinu ρ_{n+1} v n přímkách (neboť rovina ρ_{n+1} není rovnoběžná se žádnou se zbylých rovin). Tyto přímky jsou v obecné poloze - neboť žádné dvě průsečnice podle předpokladu nejsou rovnoběžné ani nesplývají a žádné 3 neprocházejí jedním bodem - a dělí tedy rovinu ρ_{n+1} na B_n částí. Každá z těchto částí dělí jednu část prostoru vyřatou rovinami $\rho_1, \dots, \rho_n$ na dvě části. Celkem tedy ubude B_n částí prostoru a přibude $2B_n$ částí. Tedy celkový počet částí, na něž je rovina dělena všemi rovinami $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$, je

$$C_{n+1} = C_n - B_n + 2B_n = C_n + B_n.$$

Takto jsou oba vzorce dokázány a naše úloha je tím řešena.

Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníka

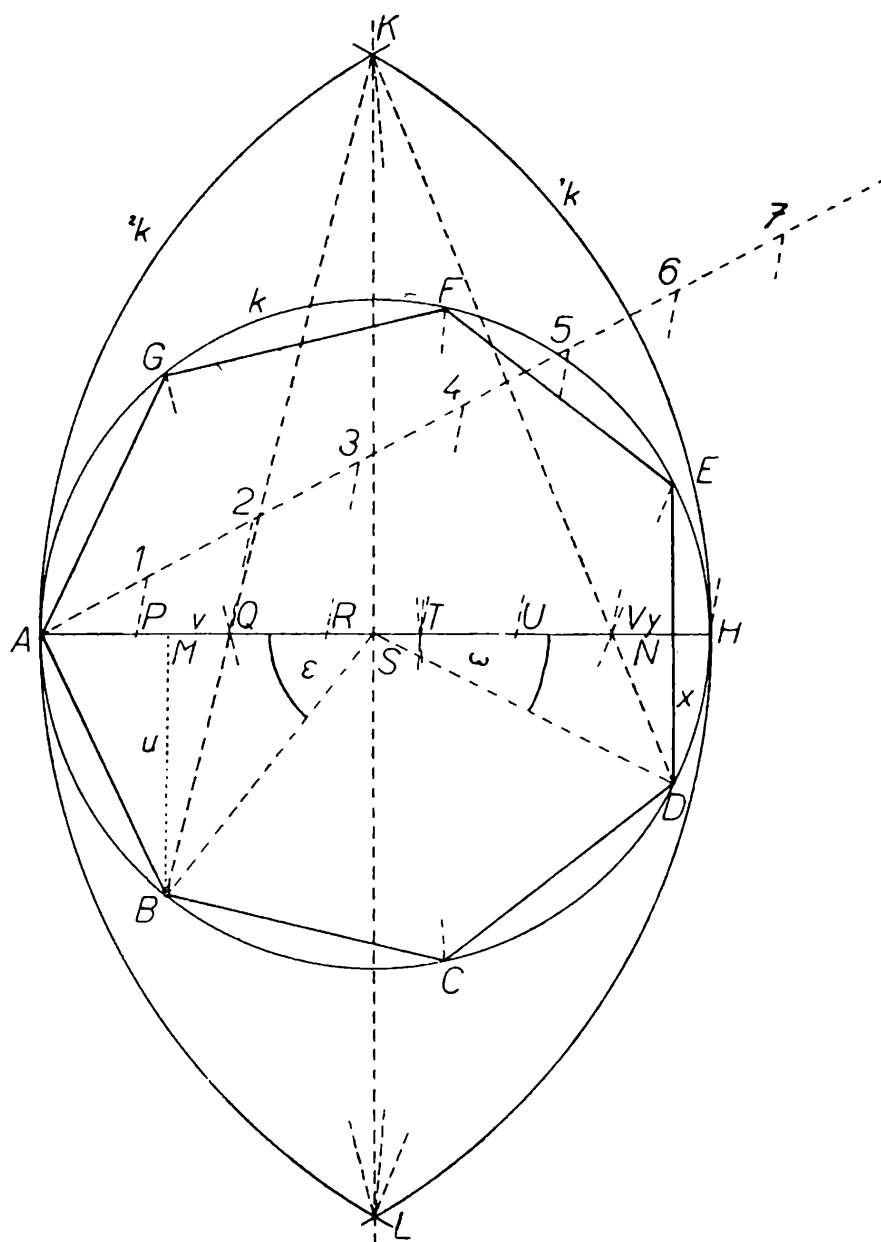
Úlohu, rozdělit obvod dané kružnice na n stejných dílů, můžeme přesně řešit euklidovskými (tj. pravítkem a kružítkem) jen pro některá n , např. pro $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots$. Naproti tomu pro některá jiná n , např. pro $n = 7, 9, 11, 13, \dots$ lze řešit tuto úlohu jenom přibližně, s větší či menší přesností.

V čínské učebnici technického kreslení se uvádí tato přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka $ABCDEFGH$ vepsaného do kružnice k o středu S a poloměru r (obr. 1):

Průměr AH dané kružnice rozdělíme body P, Q, R, T, U, V na 7 stejných dílů. Kruhové oblouky $^1k, ^2k$ o středech A, H a poloměru $2r$ se protínají v bodech K a L ($KL \perp AH$, $KS = LS = r \sqrt{3}$). Spojnice KQ, LQ protnou kružnici k v bodech B, G ; spojnice KT, LT v bodech C, F a konečně spojnice KV, LV v bo-

dech D, E , vrcholech pravidelného sedmiúhelníka $ABCDEFG$ vepsaného do kružnice k .

Určeme nyní chybu této přibližné konstrukce. Podle sestrojení jest $SV = \frac{5}{7} r$; z podobných trojúhelníků KSV a DNV vyplývá



Obr. 1

$$DN : NV = KS : SV$$

$$x : y = r \sqrt{3} : \frac{5}{7} r,$$

čili

$$y = \frac{5x}{7\sqrt{3}}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku SND platí Pythagorova věta:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{5}{7}r + y\right)^2 = x^2 + \frac{25}{49} \left(r + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$147 r^2 = 172 x^2 + 75 r^2 + 50 \sqrt{3} xr,$$

$$172 x^2 + 50 \sqrt{3} xr - 72 r^2 = 0,$$

$$86 x^2 + 25 \sqrt{3} xr - 36 r^2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice pro poměr $\frac{x}{r}$.

Odtud

$$\left(\frac{x}{r}\right)_{1,2} = \frac{-25 \sqrt{3} \pm \sqrt{14259}}{172}.$$

Označíme-li ω úhel NSD a vezmeme-li v horním výsledku jen znaménko $+$, dostáváme:

$$\sin \omega = \frac{-43,301\,27 + 119,411\,06}{172} = \frac{76,109\,79}{172} = 0,442\,498\,8.$$

Z toho $\omega = 26^\circ 15' 48,3''$.

Proti správné hodnotě $\omega_0 = \frac{\pi}{7} = 25^\circ 42' 51,4''$ se jeví rozdíl $\Delta = \omega - \omega_0 = 32' 56,9''$, což je velikost absolutní chyby. Relativní chybu určuje podíl $\frac{\Delta}{\omega_0}$,

který v našem případě činí $\frac{1976,9''}{92\,571,4''} = 0,021\,354$ a měří tudíž asi 2 %.

Zjistíme si ještě, jaké chyby jsme se dopustili při sestrojování strany AB .

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků BMQ a KSQ plyne

$$BM : MQ = KS : SQ$$

$$u : v = r \sqrt{3} : \frac{3}{7} r$$

$$v = \frac{u \sqrt{3}}{7}.$$

Napišeme opět Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník BMS :

$$r^2 = u^2 + \left(v + \frac{3}{7}r\right)^2.$$

Po menší úpravě dostaneme

$$26 u^2 + 3 \sqrt{3} ur - 20 r^2 = 0,$$

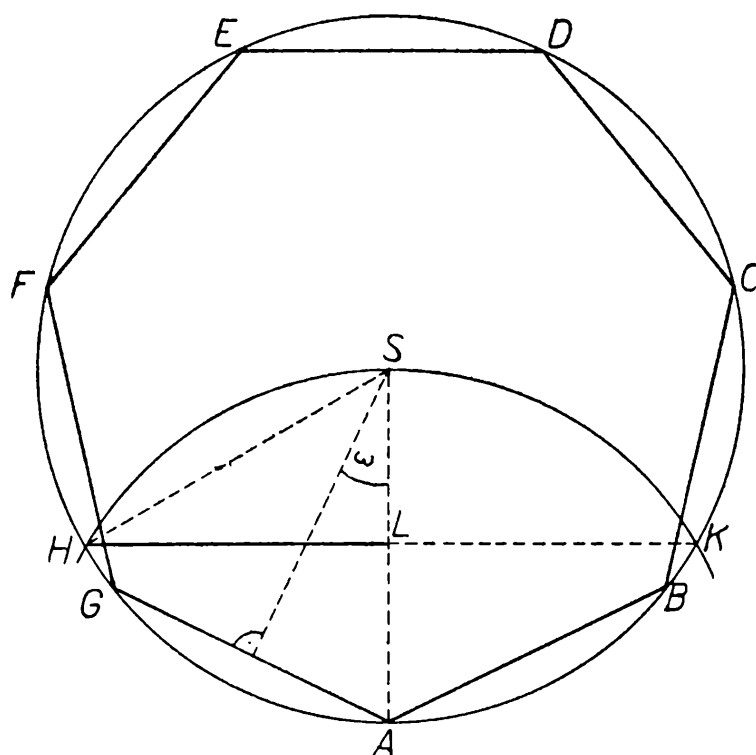
$$\text{z toho } \left(\frac{u}{r}\right)_{1,2} = \frac{-3 \sqrt{3} \pm \sqrt{2107}}{52};$$

$$\sin \varepsilon = \frac{-5,196\ 15 + 45,902\ 07}{52} = \frac{40,705\ 92}{52} = 0,782\ 806\ 2 ;$$

odtud $\varepsilon = 51^\circ 31' 5,6''$, což proti správné hodnotě

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{7} = 51^\circ 25' 42,8'' \text{ značí absolutní chybu } \Delta' = 5' 22,8'' \text{ a relativní chybu}$$

$$\frac{\Delta'}{\varepsilon_0} = \frac{322,8''}{185\ 142,8''} = 0,001\ 743\ 5, \text{ tedy necelé } 1\frac{3}{4}\text{‰} .$$



Obr. 2

U nás se zpravidla používá ke konstrukci pravidelného sedmiúhelníka přibližné konstrukce, uvedené na obr. 2. Délku jeho strany určíme jako výšku HL rovnostranného trojúhelníka AHS o straně rovné poloměru r .

Při této konstrukci jest

$$AG = HL = \frac{r}{2} \sqrt{3} = r \cdot 0,866\ 025\ 4$$

$$\sin \omega = \frac{AG}{2r} = 0,433\ 012\ 7$$

$$\omega = 25^\circ 39' 32,0'' .$$

Absolutní chyba jest $\Delta = -3' 19,4''$, relativní chyba

$$- \frac{199,4''}{92\ 571,4''} = -0,002\ 154, \text{ tedy } -0,2\text{‰} .$$

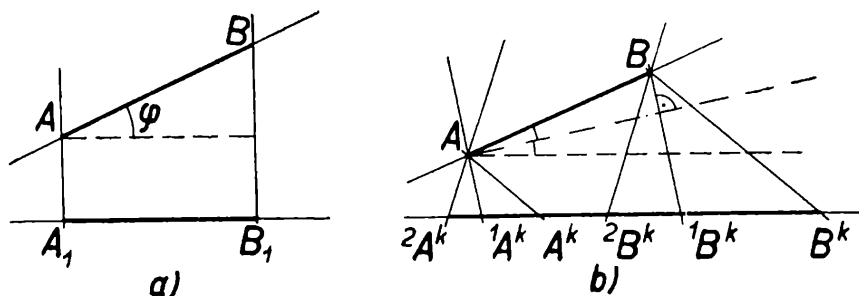
Deskriptivní geometrie



Karel Drábek, ČVUT, Praha:

O dělicím poměru na přímce

Zvolíme-li pevně určitou délkovou jednotku, pak je možno její pomocí určit vzdálenost každých dvou (vlastních) bodů v prostoru jako vzdálenost dvou bodů na přímce jimi určené. Víme však, že již při pravoúhlém promítání (např. Mongeově) je velikost průmětu A_1B_1 promítané úsečky AB závislá na kosinu úhlu φ , který svírá úsečka a její pravoúhlý průmět a je tedy průmět v tomto případě nejvýše roven skutečné velikosti dané úsečky (obr. 1a). V promítání kosoúhlém může být průmět A^kB^k úsečky AB dokonce i větší než úsečka sama, což závisí - jak snadno zjistíme - na úhlu směru kosoúhlého promítání vzhledem k ose úhlu sevřeného úsečkou a jejím kosoúhlým průmětem. Jen v případě, že směr promítání je k této ose kolmý, je průmět ${}^1A^k{}^1B^k$ úsečky délkově roven dané úsečce AB , jinak je ${}^2A^k{}^2B^k$ (nebo A^kB^k) menší (nebo větší) než úsečka AB (obr. 1b).



Obr. 1

Hledáme tedy pro rovnoběžné promítání jinou veličinu, která by se neměnila promítáním. K tomu zvolíme na dané přímce p dva základní body A, B (obr. 2). Abychom dosáhli jednoznačnosti při úvahách, které budeme provádět, zvolíme na přímce p kladný směr (v obr. 2 označený šipkou), tj. orientujeme danou přímku p . Vzdálenost dvou bodů A, B budeme potom považovat za kladnou, jestliže na přímce p postupujeme od bodu A (tzv. počátečního) do bodu B (zvaného koncovým) na úsečce AB ve zvoleném kladném směru. Tyto vzdálenosti nazveme orientovanými úsečkami a značíme je obyčejnou šipkou; v našem případě je tedy $\overrightarrow{AB}$ orientovaná úsečka AB .

Užitím orientovaných vzdáleností bodů přímky p definujeme po volbě zá-

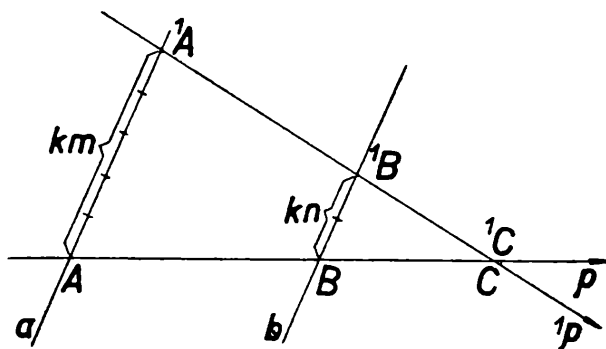
kladních bodů A, B pro každý bod C přímky p (s výjimkou dále uvedenou) číslo λ_C , které nazveme *dělicím poměrem bodu C vzhledem k základním bodům A, B* . Takto zavedená veličina, kterou příležitostně označíme též (ABC) , je rovna poměru (orientovaných) vzdáleností bodu C od bodů A, B , tj.

$$\lambda_C = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = (ABC).$$

Je tedy podle této definice dělicí poměr bodu ležícího mezi body A, B záporný, pro bod vně úsečky AB je dělicí poměr kladný a to pro bod na polopřímce AB za bodem B je hodnota dělicího poměru větší než jedna, pro bod na polopřímce BA za bodem A je tato hodnota menší než jedna.

P o z n á m k a : Za definici dělicího poměru bodu C vzhledem k základním bodům A, B lze vzít také podíl $\lambda_C = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$; pak je dělicí poměr bodu uvnitř

(vně) úsečky AB kladný (záporný). Tato okolnost nemá však žádného vlivu na další užití dělicích poměrů. Rovněž je z definice dělicího poměru bodu C k bodům A, B patrné, že na jeho hodnotu nemá vliv předchozí orientace dané přímky p .



Obr. 2

Všimněme si zvláštních hodnot dělicího poměru při základních bodech A, B . Především dělicí poměr bodu A je roven nule. Dělicí poměr bodu B neexistuje (není definováno dělení nulou), jestliže však sledujeme průběh dělicího poměru bodu C blížíícího se bodu B zleva, tedy bodu, který je uvnitř úsečky AB a má záporný dělicí poměr, vidíme, že jeho hodnota stále klesá, kdežto hodnota dělicího poměru bodu C blížíícího se bodu B na polopřímce AB zprava (tedy bodu s kladným dělicím poměrem) neustále vzrůstá. Pro rozlišení obou základních bodů nazýváme také někdy základní bod A prvním základním bodem ($\lambda_A = 0$), bod B pak druhým základním bodem (λ_B neexistuje). Snadno zjistíme, že dělicí poměr λ_S bodu S , který je středem dvojice základních bodů A, B je roven -1 . Jestliže bychom uvažovali bod C , který by se stále vzdaloval od bodu B na polopřímce AB (příp. od bodu A na opačné polopřímce), pak dělicí poměr takového bodu se stále blíží hodnotě $+1$.

S výjimkou bodu B existuje tedy ke každému bodu C orientované přímky p jediný dělicí poměr λ_C . Také obráceně pro každou hodnotu $\lambda_C \neq 1$ existuje na

přímce p jediný bod C , který má vzhledem k oběma základním bodům A, B předepsaný dělicí poměr λ_C . Konstrukci takového dělicího bodu C pro daný dělicí poměr $\lambda_C = \frac{m}{n}$ provedeme např. podle obr. 2, kde $\lambda_C = \frac{5}{2}$.

Základními body A, B sestrojíme rovnoběžky a, b a na ně nanese na přímku a ve zvoleném kladném směru délku rovnou m (nebo jeho k -násobku). Na přímku b v příslušném směru délku rovnou n (nebo témuž násobku jako pro hodnotu m). Sestrojený bod 1A na přímce a spojíme s obdobně stanoveným bodem 1B na přímce b přímkou 1p , kterou orientujeme např. směrem $\overrightarrow{{}^1A{}^1B}$, je-li přímka p orientována směrem $\overrightarrow{AB}$. Potom bod C , který je průsečíkem přímek $p, {}^1p$ má daný dělicí poměr, jak plyne z podobnosti obou trojúhelníků $AC{}^1A$ a $BC{}^1B$. Označíme-li bod C písmenem 1C jako bod přímky 1p , pak platí

$$(ABC) = ({}^1A{}^1B{}^1C).$$

Dělicí poměr bodu C vzhledem k základním bodům A, B je rovný dělicímu poměru rovnoběžného průmětu 1C vzhledem k průmětům ${}^1A, {}^1B$ obou základních bodů. Je tedy dělicí poměr bodu přímky p vzhledem ke zvoleným základním bodům *i n v a r i a n t n í* (čili neproměnný) při rovnoběžném promítání. Proto můžeme v rovnoběžném promítání požadované dělení dané úsečky MN v prostoru provádět přímo v příslušném průmětu.

Jestliže na orientované přímce p vedle bodů A, B zvolíme pevně ještě bod O a označíme $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}$ a obdobně pro každý bod $C \neq B$ přímky p píšeme $c = \overrightarrow{OC}$, lze dělicí poměr bodu C vyjádřit také tímto způsobem:

$$\lambda_C = \frac{c - a}{c - b} = \frac{a - c}{b - c} = (ABC).$$

Z tohoto vyjádření lze snadno ukázat, že k dané hodnotě $\lambda_C \neq 1$ existuje jediný bod C , neboť pro jeho vzdálenost c od pevného bodu O plyne

$$c = \frac{\lambda_C b - a}{\lambda_C - 1}.$$

Úloha 1. Kolik lze vytvořit dělicích poměrů z daných tří různých bodů A, B, C přímky p a jak jsou případně mezi sebou vázány?

Označme $\lambda_C = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$. Pak můžeme vytvořit ještě dalších pět

dělicích poměrů $(ACB), (BAC), (BCA), (CAB)$ a (CBA) , které můžeme vyjádřit pomocí prvního dělicího poměru λ_C :

$$(ACB) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CB}} = 1 - \lambda_C;$$

$$(BAC) = \frac{\vec{BC}}{\vec{AC}} = \frac{1}{\lambda_C};$$

$$(BCA) = \frac{\vec{BA}}{\vec{CA}} = \frac{\vec{BC} + \vec{CA}}{\vec{CA}} = 1 - \frac{1}{\lambda_C} = \frac{\lambda_C - 1}{\lambda_C};$$

$$(CAB) = \frac{\vec{CB}}{\vec{AB}} = \frac{1}{1 - \lambda_C}; \quad (CBA) = \frac{\vec{CA}}{\vec{BA}} = \frac{\lambda_C}{\lambda_C - 1}$$

Vidíme, že vždy dvě dvojice dělicích poměrů utvořených ze tří různých bodů A, B, C jsou reciproké, např. (ABC) a (BAC) , (ACB) a (CAB) , (BCA) a (CBA) a že tyto hodnoty odpovídají záměně obou základních bodů. Dělicí poměry dvojic (ABC) a (ACB) , (BAC) a (BCA) , (CAB) a (CBA) se doplňují na hodnotu rovnou $+1$; jsou to dvojice, ve kterých je zaměněn druhý základní bod s bodem původně určujícím dělicí poměr.

Úloha 2. Kdy se zmenší počet dělicích poměrů tří různých bodů A, B, C přímky p a jaké jsou hodnoty těchto poměrů?

Počet dělicích poměrů z úlohy 1 se zmenší např. tehdy, jestliže se budou rovnat dva z možných šesti dělicích poměrů. Jestliže tedy bude třeba

$$\lambda_C = 1 - \lambda_C, \text{ tj. } \lambda_C = \frac{1}{2},$$

budou pro takový bod C další možné dělicí poměry rovny jen 2 nebo -1 . Podobně z rovnosti jiných dvou dělicích poměrů dostaneme opět pouze hodnoty $\frac{1}{2}$, 2 a -1 . To znamená, že počet dělicích poměrů tří daných různých bodů A, B, C se redukuje na tři různé hodnoty jen tehdy, je-li jeden ze tří bodů středem dvojice druhých dvou bodů.

Úloha 3. Jaký je dělicí poměr bodu C vzhledem k základním bodům A, B , jestliže platí $BC = n \cdot AB$ (kde $n \neq 0$)?

Uvažujme bod C na polopřímce AB . Potom $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (n + 1) \vec{AB}$ a tedy $\lambda_C = \frac{n + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Jestliže bod C leží na opačné polopřímce k polopřímce AB (kde je stále $\lambda_C > 0$), pak $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (n - 1) \cdot \vec{AB}$ a tedy v tomto případě pro tři různé body A, B, C musí být $n > 1$ a dělicí poměr bodu C je $\lambda_C = \frac{n - 1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Vidíme tedy rozdíl v měření a porovnávání úseček na přímkách v prostoru, kdy pro všechna měření musíme mít zvolenu stále touž délkovou jednotku, kdežto při určování dělicích poměrů a jejich vzájemném porovnávání lze délkovou jednotku pro každou uvažovanou přímku zvolit jinou (pro danou přímku ovšem pak dále pevnou).

Dvojpoměr

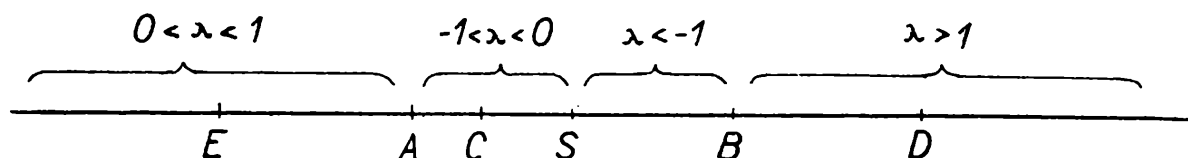
V planimetrii i analytické geometrii se pro tři body A, B, C ležící na přímce, zavádí pojem tzv. dělicího poměru bodu C vzhledem ke dvěma základním bodům A, B :

$$\lambda_c = \frac{AC}{BC}, \quad ^1)$$

kde AC a BC jsou délky orientovaných úseček. Připomeňme, že pro libovolnou orientovanou úsečku PQ je $PQ = -QP$.

Bod, ležící uvnitř úsečky AB , např. bod C (obr. 1), bude mít dělicí poměr záporný, neboť smysly AC a BC jsou navzájem opačné. Zvláště platí pro střed S úsečky AB : $AS = -BS$, tedy $\lambda_S = -1$. Body D, E , ležící vně úsečky AB , mají dělicí poměry kladné, neboť směr AD je souhlasný se směrem BD (stejně tak pro bod E). Protože $AD > BD$, je $\lambda_D > 1$; naopak $AE < BE$, proto $0 < \lambda_E < 1$. Každému bodu přímky AB , různému od A i B , je takto přiřazen určitý dělicí poměr. Pro úplnost uvedme ještě, jak vypadá λ_A a λ_B . Protože délka $AA = 0$, je $\lambda_A = \frac{AA}{BA} = 0$. Také vzdálenost $BB = 0$, tedy zlomek $\lambda_B = \frac{AB}{BB}$

by měl ve jmenovateli nulu; proto není vůbec definován. Hodnoty dělicího poměru bodů na přímce p jsou zachyceny přehledně na obr. 1. Odtud také vidíme, že dělicí poměr o velikosti 1 není prozatím přiřazen žádnému z bodů na přímce. Uvidíme později, kterému bodu přísluší toto $\lambda = 1$.



Obr. 1

Konstrukci bodu C o daném dělicím poměru λ_C vysvětlíme na příkladě: Na dané přímce AB najít bod, jehož $\lambda_C = -\frac{5}{3}$ (obr. 2). Body A, B vedeme libovolné rovnoběžky, na něž buď v souhlasném směru (je-li $\lambda_C > 0$) nebo v opačných směrech (při $\lambda_C < 0$) nanese v určitém měřítku úsečky, jejichž délky odpovídají čitateli a jmenovateli zlomku λ_C . Podle známé poučky o úměrnosti úseků, vyřazených na rovnoběžkách svazkem přímek, je $AA' : BB' = AC : BC = -\frac{5}{3}$.

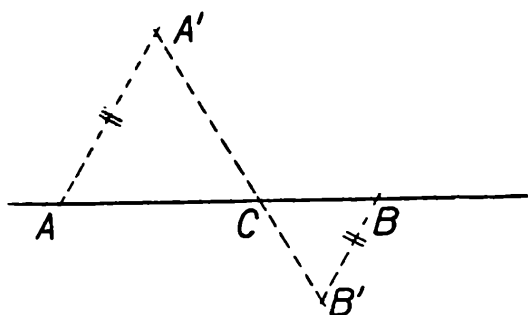
Pro čtyři body A, B, C, D , ležící na jedné přímce, můžeme definovat tzv.

¹⁾ Viz K. Drábek: O dělicím poměru na přímce, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 38, č. 7, str. 304.

dvojpoměr čtveřiny bodů A, B, C, D , který označíme symbolem $\delta = (ABCD)$, jako podíl dělicích poměrů $\lambda_C : \lambda_D$. Je tedy

$$\delta = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Je vidět: Leží-li body C i D oba uvnitř nebo oba vně úsečky AB , dvojpoměr $(ABCD)$ je kladný, neboť λ_C i λ_D mají totéž znaménko. V tomto případě říkáme, že dvojice AB a CD se neoddělují. Leží-li jeden z bodů C, D uvnitř a druhý vně úsečky AB , tj. jestliže dvojice AB a CD se oddělují, mají λ_C a λ_D znamení opačná, a tedy $(ABCD)$ je záporný. Rovněž tak vidíme, že hodnota dvojpoměru δ závisí zajisté na pořadí uvažovaných bodů. Čtenáři sami se mohou přesvědčit, že je celkem 24 možností, jak uspořádat skupinu 4 prvků (permutace), a že z těchto 24 možných dvojpoměrů je celkem pouze 6 navzájem různých. Důkaz toho provedeme, jestliže všech 24 možných dvojpoměrů vyjádříme pomocí podílů příslušných dělicích poměrů.



Obr. 2



Obr. 3

Příklad 1: Jsou dány body $A(3)$, $B(-1)$, $C(4)$, $D(0)$. Vypočtete dělicí poměry λ_C , λ_D a dvojpoměr $(ABCD)$ (obr. 3).

$$\lambda_C = \frac{4 - 3}{4 + 1} = \frac{1}{5}, \quad \lambda_D = \frac{-3}{1} = -3,$$

$$(ABCD) = \frac{1}{5} : (-3) = -\frac{1}{15}.$$

Příklad 2: Jak se změní dvojpoměr $(ABCD)$, zaměníme-li pořadí a) posledních dvou bodů, b) prvních dvou i posledních dvou bodů?

Označme
$$\delta = (ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Potom

$$\text{a) } (ABDC) = \frac{AD \cdot BC}{BD \cdot AC} = \frac{1}{\delta},$$

$$\text{b) } (BADC) = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC} = \delta.$$

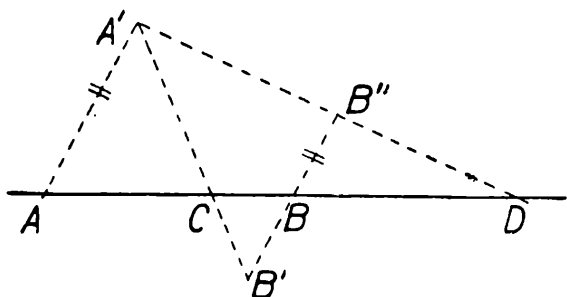
Všimněme si zvláště případu, kdy $\lambda_C = -\lambda_D$; tehdy má $(ABCD)$ hodnotu -1 . Takovou čtveřinu bodovou nazýváme *harmonickou čtveřinou bodovou*, nebo také říkáme, že se dvojice bodů AB, CD harmonicky oddělují.

Máme-li k danému bodu C nalézt jeho harmonicky přidružený vzhledem k A, B , použijeme již dříve zmíněné konstrukce bodu o daném dělicím poměru. Je-li

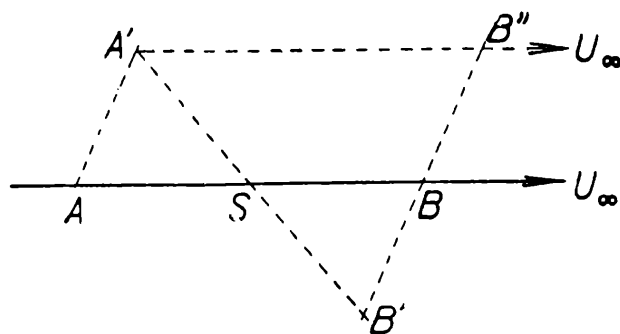
$(ABCD) = \frac{\lambda_C}{\lambda_D} = -1$, pak $\lambda_D = -\lambda_C$, takže při konstrukci postupujeme způsobem, který ukazuje obr. 4: Body A, B vedeme libovolné rovnoběžky a bodem C libovolnou přímkou s nimi různoběžnou, takže je protíná v bodech A' a B' . Na-

neseme-li vzdálenost BB' od bodu B opačně, dostaneme B'' a spojnice $A'B''$ protne přímkou AB v hledaném bodě D .

Hledejme pomocí této konstrukce přidružený harmonický bod ke středu S úsečky AB (obráz. 5). Zde je $AA' = -BB'$, trojúhelníky ASA' a BSB' jsou shodné. Protože na BB' máme nanést vzdálenost BB' opačně od bodu B , je $BB'' = AA'$, tedy spojnice AB'' je rovnoběžná s AB . O rovnoběžkách říkáme, že mají společný nevlastní bod (označme jej U_∞), který je dán směrem přímky AB i směrem $A'B''$ ²⁾. Body A, B, S, U_∞ tvoří tedy harmonickou čtveřinu, čili



Obr. 4



Obr. 5

$(ABSU_\infty) = -1$, což znamená $\frac{\lambda_S}{\lambda_{U_\infty}} = -1$. Protože však $\lambda_S = -1$, jak jsme ukázali již na začátku, musí $\lambda_{U_\infty} = 1$. Přiřazujeme tedy dělicí poměr o velikosti $+1$ nevlastnímu bodu přímky.

Můžeme též zavést pojem dělicího poměru a dvojpoměru ve svazku přímek (to je množina všech přímek v rovině, procházejících pevným bodem). Všimněme si obr. 6, kde na přímce p je dána čtveřina bodů A, B, C, D . Spojme tyto body po řadě s bodem M , neležícím na p (promítněme je z bodu M) a spojnice označme a, b, c, d . Zavedme také orientaci ve svazku M shodně s orientací přímky p takto: Za kladný smysl otáčení přímky kolem bodu M určíme ten smysl, jímž se přímka a otočí do polohy přímky b o dutý úhel α ($0 < \alpha < 180^\circ$).

Dělicí poměr přímky c vzhledem ke dvěma daným základním přímkám a, b definujeme jako podíl sinů úhlů $(ac), (bc)$:

$$\lambda_c = \frac{\sin \sphericalangle ac}{\sin \sphericalangle bc}.$$

²⁾ Viz K. Havlíček, Nevlastní elementy v geometrii, Rozhledy, roč. 1957, č. 1.

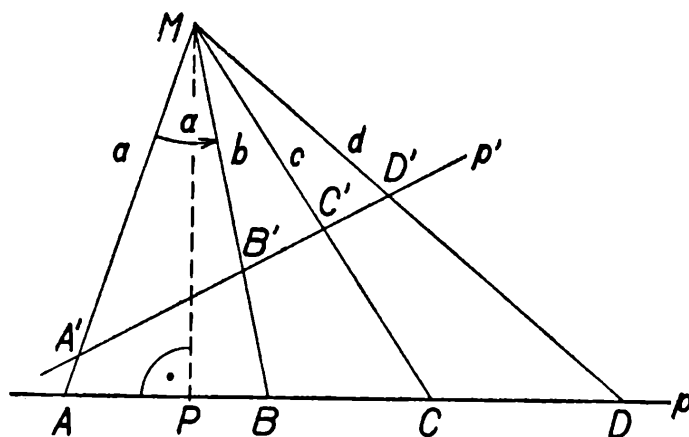
Zde zase záleží na orientaci, neboť víme, že $\sin \sphericalangle ab = -\sin \sphericalangle ba$. Podle toho např. přímka c , ležící uvnitř dutého úhlu přímek a, b má dělicí poměr záporný. Podobně přímka d , pro kterou $\lambda_d = \frac{\sin \sphericalangle ad}{\sin \sphericalangle bd}$, má dělicí poměr kladný.

Dvojpoměrem čtveřiny přímek ($abcd$) budeme rozumět opět podíl dělicích poměrů

$$\delta = (abcd) = \frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \frac{\sin \sphericalangle ac}{\sin \sphericalangle bc} : \frac{\sin \sphericalangle ad}{\sin \sphericalangle bd} = \frac{\sin \sphericalangle ac \cdot \sin \sphericalangle bd}{\sin \sphericalangle bc \cdot \sin \sphericalangle ad}.$$

Vedme ještě kolmici z bodu M na přímku p a její patu označme P . Jak známo, plochu trojúhelníka vypočteme jako $\frac{z \cdot v}{2}$ nebo $\frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$. V našem případě je tedy (i co do orientace, neboť ta je shodná na p i ve svazku M):

$$AC \cdot PM = AM \cdot CM \cdot \sin \sphericalangle ac, \quad BC \cdot PM = BM \cdot CM \cdot \sin \sphericalangle bc.$$



Obr. 6

Vyjádříme-li odtud AC, BC a stanovíme podíl těchto výrazů, dostáváme

$$\lambda_c = \frac{AC}{BC} = \frac{AM \cdot CM \cdot \sin \sphericalangle ac}{BM \cdot CM \cdot \sin \sphericalangle bc} = \frac{AM \cdot \sin \sphericalangle ac}{BM \cdot \sin \sphericalangle bc}.$$

Analogicky dostaneme srovnáním obsahů trojúhelníků ADM a BDM

$$\lambda_D = \frac{AD}{BD} = \frac{AM \cdot DM \cdot \sin \sphericalangle ad}{BM \cdot DM \cdot \sin \sphericalangle bd} = \frac{AM \cdot \sin \sphericalangle ad}{BM \cdot \sin \sphericalangle bd}.$$

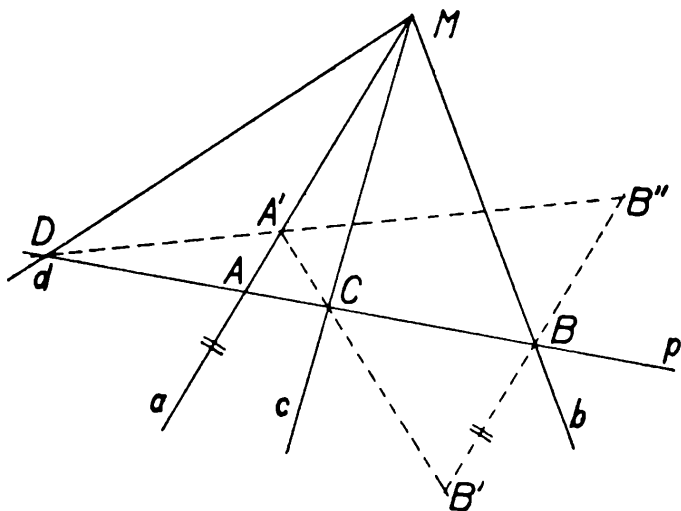
Stanovíme-li zde $\lambda_c : \lambda_D = (ABCD)$, máme:

$$(ABCD) = \frac{AM \cdot \sin \sphericalangle ac}{BM \cdot \sin \sphericalangle bc} : \frac{AM \cdot \sin \sphericalangle ad}{BM \cdot \sin \sphericalangle bd} = \frac{\sin \sphericalangle ac \cdot \sin \sphericalangle bd}{\sin \sphericalangle bc \cdot \sin \sphericalangle ad}.$$

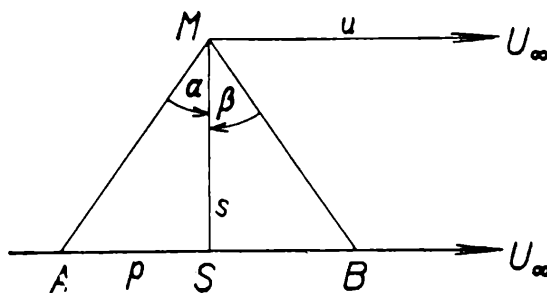
Platí tedy $\frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \frac{\lambda_c}{\lambda_d}.$

Vidíme úzkou souvislost dvojpoměru čtveřiny bodů A, B, C, D na přímce p a čtveřiny přímek a, b, c, d , jež vznikne promítnutím bodů A, B, C, D z pevného bodu M . Rovněž vidíme, že výraz pro $(abcd)$ závisí pouze na velikosti úhlů (ac) , (bc) , (ad) , (bd) . Kdybychom tedy prošli čtveřinu přímek a, b, c, d novou přímkou $p' \neq p$, obdržíme novou čtveřinu bodů A', B', C', D' , pro niž platí

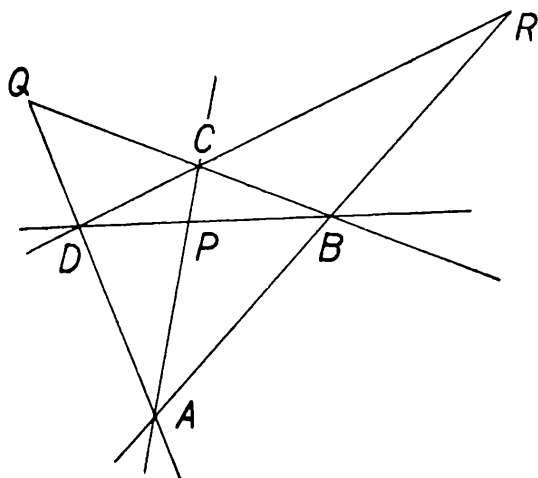
$$(A'B'C'D') = (abcd).$$



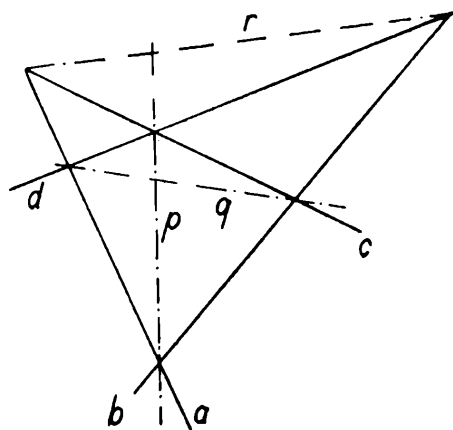
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9a



Obr. 9b

Protože též

$$(ABCD) = (abcd),$$

je

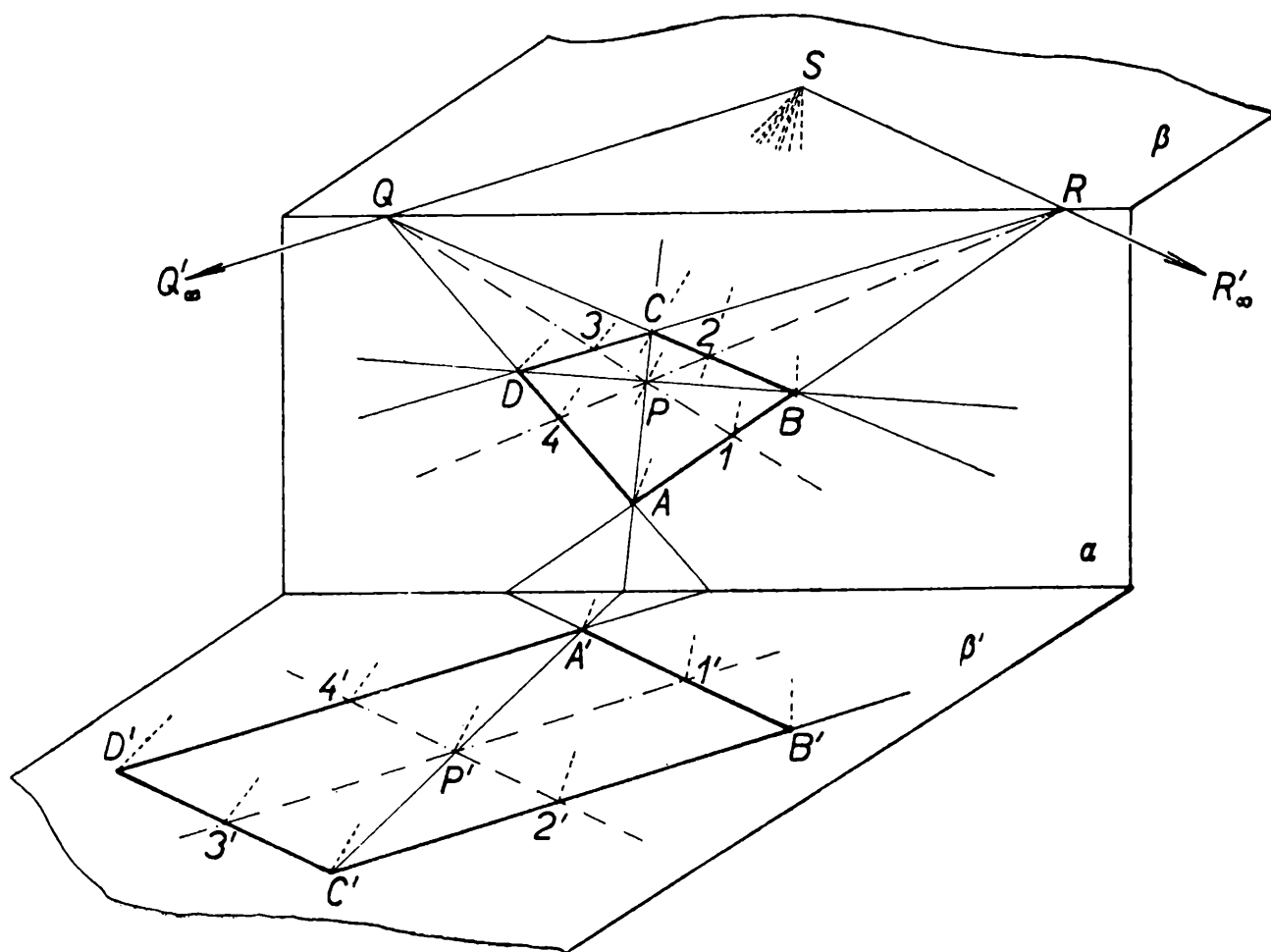
$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Tím jsme odvodili jednu důležitou vlastnost dvojpoměru, kterou shrnuje tzv. *věta Pappova*:

Středovým promítáním se hodnota dvojpoměru nemění.

P o z n á m k a: Připomeňme ještě harmonickou čtveřinu. Harmonická čtveřina přímek vznikne promítnutím libovolné harmonické čtveřiny bodů na přímce. Doplnění trojice přímek a, b, c na harmonickou čtveřinu můžeme tedy provést tak, jak ukazuje obr. 7. Přímky a, b, c protneme libovolnou přímkou p , neprocházející bodem M , čímž dostaneme body A, B, C . Čtvrtý harmonický bod D na p umíme sestavit konstrukcí, uvedenou dříve ($B'B'' \parallel a$; $BB' = -BB''$). Promítnutím D z bodu M dostáváme hledanou přímku d .

P o z n á m k a: Zvláštním případem harmonické čtveřiny přímek je taková, která vznikne promítnutím bodů A, B, S, U_∞ z bodu M , ležícího na kolmici k p ,



Obr. 10

procházející bodem S (obr. 8). Zde jsou přímky s a u vzájemně kolmé (ze známých důvodů - přímka u promítá nevlastní bod U) a úhly $\alpha = \beta$.

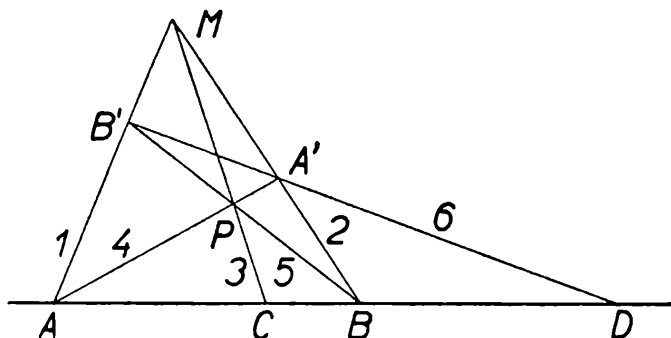
Zabývejme se nyní útvarem, který budeme nazývat *úplný čtyřroh* (obr. 9a). Je určen čtyřmi body A, B, C, D , z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. To jsou *vrcholy* úplného čtyřrohu. Vrcholy AB, BC, CD, DA jsou sousední, vrcholy AC, BD protější. Spojením všech možných dvojic vrcholů (sousedních i protějších) dostáváme celkem šest *stran* úplného čtyřrohu, které se kromě ve vrcholech protínají ještě v dalších třech bodech P, Q, R - *bodech diagonálních*.

Analogickým útvarem je *úplný čtyřstran* (obr. 9b), který je zadán pomocí čtyř

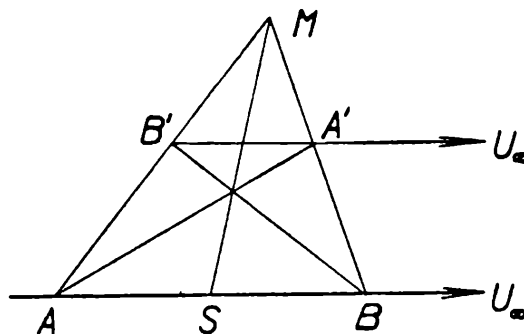
přímek, z nichž žádné tři neprocházejí jedním bodem. Tyto přímky nazýváme *stranami* úplného čtyřstranu, jejich průsečíky, jichž je šest, jsou jeho *vrcholy*. Spojnice vrcholů jsou kromě stran též *diagonály*.

Je vidět, že útvary úplný čtyřroh a úplný čtyřstran jsou příbuzné: Definici úplného čtyřstranu dostaneme z definice úplného čtyřrohu tak, že místo „bod“ říkáme „přímka“, místo „spojnice dvou bodů“ říkáme „průsečík dvou přímek“, místo „vrchol“ - „strana“ a opačně. Při takovém vztahu říkáme, že oba útvary jsou *duální*. Např. můžeme též říci, že přímka bodů $A, B, C, D, \dots$ je duální se svazkem přímek $a, b, c, d, \dots$ z obr. 6. Důležitou vlastnost, kterou oba útvary mají, dokážeme pouze pro jeden, např. pro úplný čtyřroh; nebude těžké, převést důkaz téže vlastnosti do duálního útvaru - úplného čtyřstranu.

Sledujte nyní dobře obr. 10: V rovině α máme úplný čtyřroh $ABCD$. Promítněme jej z bodu S (který neleží v rovině α) do roviny β' , jež je rovnoběžná s rovinou $\beta \equiv QRS$. Protože nyní spojnice SQ a SR jsou rovnoběžné s průmětnou β' , nemají body Q a R vlastní průměty v β' , tedy Q' a R' jsou body nevlastní. Proto také spojnice PR a PQ , těmito body procházející, se promítají do rovnoběžek se směry SR, SQ a procházejí průmětem P' bodu P . Protože také strany AB a CD



Obr. 11



Obr. 12

procházejí bodem R (podobně AD a BC procházejí bodem Q), jejich průměty do β' jsou též rovnoběžky se směrem SR (případně SQ). Je tedy průmětem úplného čtyřrohu $ABCD$ rovnoběžník $A'B'C'D'$. Že bod P' je jeho středem, vidíme z toho, že P' je průmětem bodu P , který je průsečíkem spojníc AC a BD úplného čtyřrohu $ABCD$, kterým odpovídají úhlopříčky rovnoběžníka $A'B'C'D'$ a ty, jak známo, se vzájemně půlí. O čtveřinách bodů např. na straně AB tohoto rovnoběžníka platí $(A'B'1'R') = -1$, neboť jsme ukázali, že střed úsečky a nevlastní bod přímky jsou harmonicky přidruženy vzhledem ke krajním bodům úsečky. Můžeme tedy podle věty Pappovy tvrdit, že i čtveřina $AB1R$ původního čtyřrohu je harmonická. Tytéž vztahy platí pro čtveřiny bodů na ostatních stranách úplného čtyřrohu. Shrňme nyní:

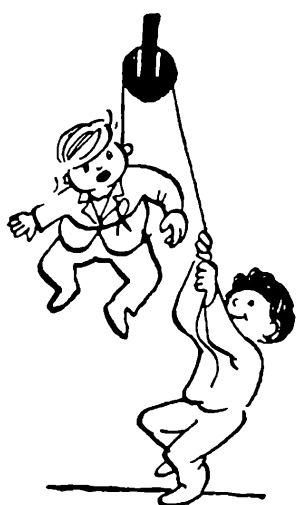
Sousední vrcholy úplného čtyřrohu, diagonální bod (ležící na jejich spojnici) a průsečík spojnice zbývajících dvou bodů diagonálních s danou stranou tvoří harmonickou čtveřinu.

P o z n á m k a: Obdobnou větu mohou sami čtenáři vyslovit pro úplný čtyřstran.

Uvedme ještě jednu konstrukci čtvrtého harmonického bodu, založenou na

vlastnosti úplného čtyřrohu, právě zjištěné (obr. 11). Body A, B, C promítneme z libovolného bodu M . Na spojnici CM zvolme opět libovolný bod P , jež spojme s body A, B , čímž získáme A', B' . Spojnice $A'B'$ již vytíná na p čtvrtý harmonický bod D . Tato konstrukce je výhodná proto, že se při ní obejdeme zcela bez měření a přenášení vzdáleností. Je třeba narýsovat pouze 6 přímek; postup je pro názornost v obrázku očíslován.

Připomeňme ještě nakonec: Je-li speciálně $C \equiv S$ střed úsečky AB , pak čtvrtým harmonickým bodem k bodu S vzhledem k AB je nevlastní bod přímky U_∞ . Z toho vyplývá, že spojnice $A'B'$ z předchozí konstrukce je rovnoběžná s AB . Obráceně - vyjde-li při této konstrukci v úplném čtyřrohu spojnice $A'B' \parallel AB$, pak bod S je středem úsečky AB .



Fyzika

Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha:

Hallův jev

Kolem elektrického náboje existuje vždy elektrické pole, které charakterizujeme buď vektorem intenzity E , nebo skalárním potenciálem U . Vztah mezi oběma veličinami udává rovnice

$$E = - \frac{\Delta U}{\Delta s} . \quad (1)$$

Intenzita pole rovná se spádu potenciálu ve směru, v němž potenciál klesá. Na jeden elektron umístěný v elektrickém poli působí elektrická síla

$$F_e = e \cdot E , \quad (2)$$

kde e je náboj elektronu.

Prochází-li vodičem elektrický proud, vzniká kolem vodiče magnetické pole, které je možno charakterizovat kvantitativně vektorem magnetické indukce B . Vektor B v určitém místě pole je určen silami, které působí kolmo na proudový element (tj. nepatrnou část) délky dl

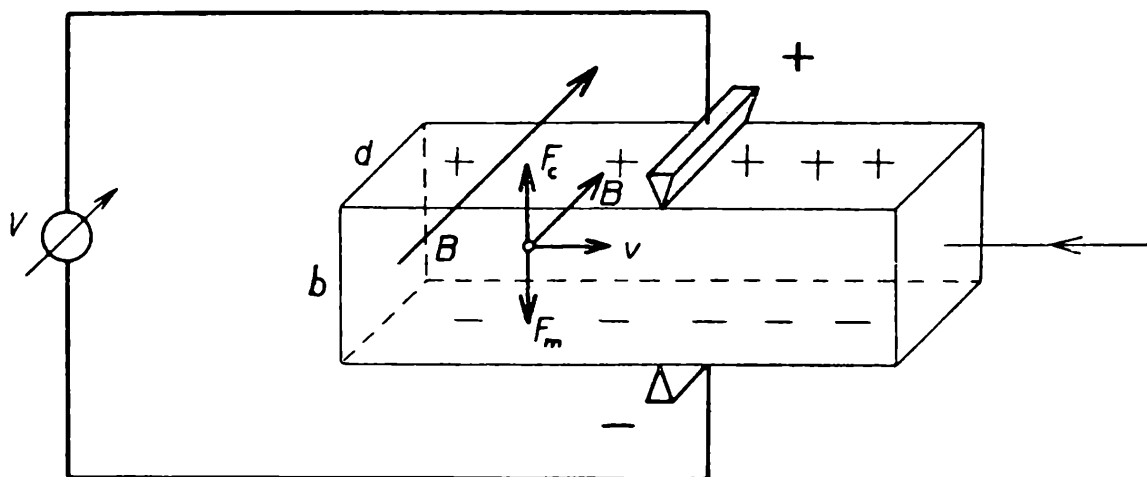
$$B = \frac{dF}{I \cdot dl} . \quad (3)$$

S použitím definice proudu $I = \frac{dQ}{dt}$ a vztahu, že $v = \frac{dl}{dt}$,¹⁾ možno pak psát, že na přímý vodič, který je postaven kolmo na siločáry, působí síla

$$F_m = B \cdot Q \cdot v.$$

Tato síla se nazývá *silou Lorenzovou*.

Na jeden elektron pohybující se rychlostí v , působí síla $F_m = e \cdot B \cdot v$. Uvažujme nyní vodič, který má tvar pravoúhlého pásku, tloušťky d , výšky b , kterým protéká elektrický proud I . Vodičem se pohybují elektrony rychlostí v (obr. 1). Na horní i dolní stěnu pásku umístíme souměrně elektrody (zpravidla nožové), které připojíme k citlivému voltmetru. Elektrody umístíme tak, aby voltmetrem neprocházel proud; pak jsou elektrody na dvou různých místech stejného potenciálu. Když vložíme pásek do magnetického pole indukce B tak, aby pole působilo kolmo na směr proudu (tedy i na rovinu pásku), vznikne mezi oběma elektrodami napětí. Na každý pohybující se elektron v pásku začne totiž působit síla $F_m = e \cdot B \cdot v$, která bude vytlačovat elektrony k jedné stěně vodiče. Tato



Obr. 1

část vodivého pásku začne mít přebytek elektronů, bude se nabíjet záporně. Opačná stěna se začne nabíjet kladně. Vlivem těchto opačných nábojů vznikne napříč vodiče elektrické pole, které se dá změřit z rozdílu potenciálů. Elektrické pole působí na elektron silou $F_e = e \cdot E$, kde E je intenzita elektrického pole. Podle rovnice (2) se intenzita pole rovná spádu potenciálu podél výšky pásku b , tedy

$$E = \frac{U}{b}, \text{ takže}$$

$$F_e = e \cdot \frac{U}{b}.$$

Ustálený stav nastane, když výsledná síla působící na elektron je nulová, tedy když $F_e = F_m$

$$e \cdot \frac{U}{b} = e \cdot B \cdot v$$

¹⁾ Označení dF , dQ , dt znamenají elementy veličin F , Q a času t .

$$U = B \cdot v \cdot b. \quad (4)$$

Úvahu jsme provedli pro jeden elektron. Předpokládejme, že v objemové jednotce je n elektronů a pohybují se průměrnou rychlostí v . Za čas t projde vodičem o průřezu S celkem $n \cdot S \cdot v \cdot t$ elektronů. Celkový náboj prošlých elektronů je $Q = n \cdot S \cdot v \cdot t \cdot e$. Z toho

$$v = \frac{Q}{S \cdot n \cdot e \cdot t},$$

ale

$$\frac{Q}{t} = I$$

a v našem případě

$$S = b \cdot d,$$

pak

$$v = \frac{I}{b \cdot d \cdot e \cdot n}.$$

Po dosazení do rovnice (4) je

$$U = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{B \cdot I}{d},$$

nebo

$$U = k \frac{B \cdot I}{d},$$

kde $k = \frac{1}{n \cdot e}$ je *Hallova konstanta*.

Působí-li na vodič magnetické pole indukce B kolmo na směr proudu, vznikne napětí, které je úměrno proudu I , indukce B a nepřímo úměrné tloušťce pásku.

Hodnota Hallovy konstanty je určena nábojem elektronu e a počtem volných nositelů elektrického proudu n v objemové jednotce. U vodičů, kde vodivost je způsobena elektrony, je Hallova konstanta záporná. Hallův jev umožňuje měření koncentrace volných nositelů proudu a dovoluje též určit znaménko nositelů.

Dr. J o s e f D i b e l k a, ČVUT, Praha:

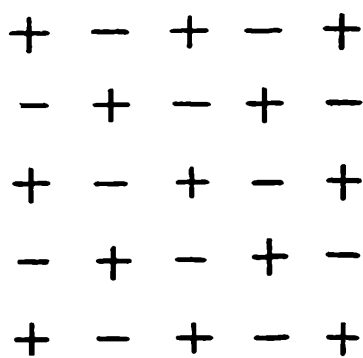
Vedení elektrického proudu

Vedení elektrického proudu ve vodičích je zprostředkováno nositeli elektrického proudu. V pevných látkách jsou nositeli elektrického proudu buď elektrony, nebo ionty. Podle druhů nositelů rozeznáváme vodivost iontovou, nebo elektro- novou.

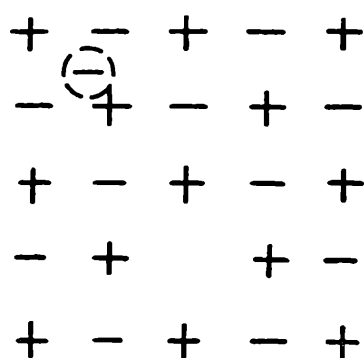
O typu vodivosti pevných látek, které mají většinou krystalickou strukturu, rozhoduje v první řadě vazba krystalů. Podle vazebních sil krystalů rozeznáváme zhruba 4 skupiny krystalů: kovové, iontové, valenční a molekulární.

U molekulárních krystalů zůstává povaha jednotlivých molekul zachována i v krystalové mřížce. Vazební síly molekulárních krystalů jsou poměrně malé a tyto krystaly mají většinou nízký bod varu i tání. Tyto látky nevedou elektrický proud, jsou to např. parafin, cukr aj.

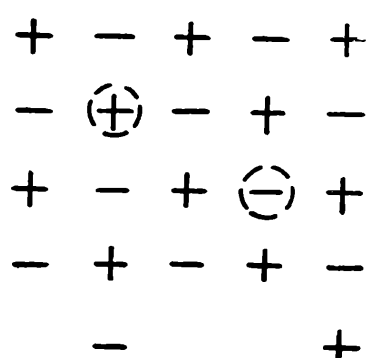
Krystaly s kovovou vazbou mají základní mřížku tvořenu kladnými ionty, které jsou rozloženy pravidelně. V neutrálním atomu mohou být jeden až dva valenční elektrony. Seskupí-li se dohromady řada neutrálních atomů, přiblíží se k sobě atomy na velmi malou vzdálenost, dráhy valenčních elektronů se začnou protínat, mezi valenčními elektrony vznikne silná odpuzivá síla, tyto se odtrhnou od svých mateřských atomů a vytvoří tzv. elektronový plyn a začnou se volně pohybovat mezi ionty. Z původně neutrálních atomů se tedy vytvořily kladné ionty a mrak odtržených valenčních elektronů. Mezi kladnými ionty a volnými elektrony vzniká silná přitažlivá síla, která dá vznik pevnému krystalu.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

V krystalové mřížce s kovovou vazbou je tedy kromě elektronů, které se nemohou volně pohybovat, ještě velké množství volně pohyblivých elektronů. Vložíme-li na kovový krystal elektrické napětí, uvedou se volné elektrony v pohyb vlivem elektrického pole, které se vytvoří uvnitř krystalu a vznikne elektrický proud. Protože tyto elektrony se mohou pohybovat volně po celém krystalu, je elektrická vodivost značná a mluvíme o elektronové vodivosti kovové. Elektronový plyn existuje v krystalu i při teplotě absolutní nuly - kovy jsou vodivé v celém teplotním rozsahu.

Z Hallovy konstanty¹⁾ je možno určit jednak množství nositelů elektrického proudu, tj. velikost koncentrace nositelů, jednak znaménko nábojů.

Iontovou vodivost elektrického proudu pozorujeme na iontových krystalech. Příkladem iontového krystalu je kuchyňská sůl (NaCl). Seskupí-li se řada atomů sodíku a chloru, pak vzájemným působením mezi těmito atomy v malých vzdálenostech předají atomy sodíku své valenční elektrony atomům

¹⁾ Viz Rozhledy, toto číslo, str. 317.

chloru a přemění se na kladné ionty, atomy chloru převezmou elektrony a přemění se na záporné ionty. Vzájemnou přitažlivostí mezi kladnými a zápornými ionty vznikne velmi stabilní iontový krystal. Síly, které drží krystal pohromadě, jsou síly elektrostatické, které se řídí zákonem Coulombovým. Takové vazbě se také říká *vazba heteropolární*. V iontovém krystalu nejsou volné elektrony a k odtržení elektronu od některého iontu by bylo potřeba značně velké energie. Neporušené iontové krystaly jsou tedy izolátory.

Dvojměrný obraz neporušené čtvereční mříže je znázorněn na obr. 1. Skutečné krystaly vykazují od neporušeného krystalu odchylky. Ionty vlivem tepelné energie jsou v kmitavém pohybu a vlivem tohoto pohybu se mohou přemístit z normální polohy (uzlové polohy) do polohy *meziuzlové - intersticiální*, jak je naznačeno na obr. 2. Tato porucha mříže se nazývá *poruchou* (defektem) *Frenkelovou*. Iont uvnitř krystalu může také opustit svoji normální polohu a může difundovat na povrch, kde se usadí v příslušné mřížkové poloze. Tyto poruchy se nazývají *Schottkyho defekty*.

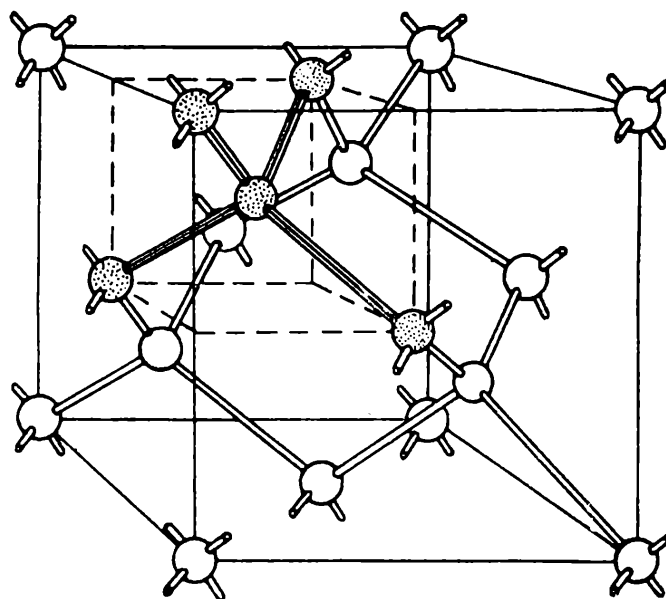
Vložíme-li nyní na krystal s Frenkelovým defektem vnější elektrické pole, uvedou se intersticiální ionty do pohybu a začnou putovat k příslušné elektrodě. Vznikne elektrický proud; nositelem elektrického proudu jsou ionty - iontová vodivost. I Schottkyho defekty dávají vznik iontové vodivosti.

Při iontové vodivosti je elektrický proud spojen s posunem hmoty, při elektronové vodivosti není možno pozorovat podobný přenos hmoty. Elektrický odpor kovů roste se vzrůstající teplotou. Při iontové vodivosti je tomu naopak. Se vzrůstající teplotou vzrůstá v mříži počet poruch, které podporují elektrickou vodivost.

Valenční krystaly jsou tvořeny vazbou *kovalentní*, *homopolární*. Jsou to například germanium, křemík, síra, fosfor, diamant aj. Vazební síly, které umožňují tuto vazbu, nejsou síly Coulombovy, neboť krystal je tvořen neutrálními atomy, ale jsou to tzv. *síly výměnné*. Vznik těchto sil a přesný výklad je možno provést jen pomocí kvantové mechaniky. Jestliže se přibližují dva stejné atomy, např. vodíku, zpočátku vzniká mezi atomy odpudivá síla, která roste se zmenšující se vzdáleností. Od určité vzdálenosti se však síla odpudivá přemění v sílu přitažlivou, což možno vysvětlit tím, že vnější elektrony si vymění navzájem místo (výměnné síly) a vypadá to tak, jako by elektrony obíhaly zároveň okolo obou jader. U vodíku, kde obíhá kolem jádra jeden elektron, dráha elektronu se podobá osmičce, takže elektron střídavě krouží kolem jednoho a pak kolem druhého jádra atomu. Látky s touto krystalickou strukturou mají elektronovou vodivost a patří do skupiny vodičů, které se označují jako *polovodiče*. Polovodiče tvoří rozsáhlou skupinu látek. Jejich elektrická vodivost je na přechodu mezi vodiči a izolátory. Všechny polovodiče se vyznačují tou vlastností, že jejich vodivost se stoupající teplotou roste, takže při absolutní nule by byly tyto látky dokonalými izolátory.

Mechanismus vedení u polovodičů ukážeme si např. u křemíku (Si). Křemík je čtyřmocný prvek a krystaluje v diamantové mříži (obr. 4). Diamantová mříž vznikne tehdy, jestliže ústřední atom je obklopen čtyřmi stejně vzdálenými atomy v rozích čtyřstěnu. Mezi dvěma sousedními atomy vzniká vazba způsobená *výměnnými silami valenčních elektronů* z obou atomů. Tak vlastně tvoří

4 valenční elektrony každého atomu pevnou vazbu se čtyřmi sousedními atomy. Atomy jsou pevně vázány kovalentní vazbou, kterou obstarávají právě tyto valenční elektrony. Jedné kovalentní vazby se zúčastní vždy dva elektrony, proto je každý valenční elektron vázán a bez dodání energie z vnějšku nemůže se tento účastnit mechanismu vedení elektrického proudu. Krystal je při nízkých teplotách izolátorem. Uvolníme-li však nějakým způsobem elektron z kovalentní vazby, chová se jako volný, v elektrickém poli se může pohybovat a tím přispívá k zvětšení elektrické vodivosti. Po uvolnění elektronu zůstává však „díra“ a ta také přispívá k elektronové vodivosti. K vytvoření páru elektron-díra je potřebí určité energie, kterou nutno dodat, aby se přerušila valenční vazba elektronů. Tato energie se zpravidla udává v elektronvoltech. Uvolněním elektronu z vazby dodáním vnější energie, vzniknou v krystalu polovodiče dva nositelé proudu:



Obr. 4

záporný (negativní n) elektron a kladná (pozitivní p) díra. Poněvadž je velmi malá pravděpodobnost, že uvolněný elektron by se mohl vrátit zpět na své místo, chová se jako volný elektron. Jestliže není v krystalu vytvořeno elektrické pole připnutím vnějšího zdroje, pohybují se chaoticky jak elektrony, tak i díry. Působením vnějšího pole nastane nejen uspořádaný pohyb elektronů, ale také uspořádaný pohyb děr, přičemž se díra posouvá právě opačným směrem než pohybující elektron. Vodivost chemicky čistého monokrystalu křemíku je tedy zároveň elektronová (typ n) i děrová (typ p), ale je poměrně malá. Vpravením cizích atomů do krystalové mříže možno zvýšit jeden typ vodivosti proti druhému a vytvořit tak polovodič jednoho typu vodivosti.

Nahradíme-li např. jeden atom křemíku v jeho krystalové mříži atomem pětimocného prvku (antimon, arsen), zůstává jeden valenční elektron nevázan. Tento elektron je slabě poután k vpravenému atomu, kterému se také říká nečistota, a tu stačí velmi malá energie k odtržení elektronu. Tím se zvýší koncentrace elektronů a křemík se stane vodičem typu n . Nečistota je v tomto případě tzv. d o n o r e m.

Vpravíme-li do krystalu mříže křemíku atom, který má méně o jeden valenční elektron než křemík (např. trojmocný bor nebo trojmocné indium), vznikne volné místo, které může obsadit elektron z okolí. Valenční elektron, který obsadí volné místo, zanechá po sobě díru. Trojmocný atom nečistoty vytvoří polovodič typu *p*. Přímíšeniny, které vyvolávají vodivost typu *p*, se nazývají **a k c e p t o r y**.

Počet koncentrace volných elektrických nábojů, i znaménko nábojů a tím i typ vodivosti, určuje se změřením Hallovy konstanty.

Antonín Špelda, VPŠ, Plzeň:

Fyzikální rozdílnosti a podobnosti lidského sluchu a zraku

Principy stavby lidského ucha a oka. Sluch a zrak, dva důležité smyslové orgány lidského těla, mají z fyzikálního hlediska mnoho podobného, ale v mnohém se zase od sebe podstatně liší.

Již sama anatomická stavba těchto orgánů je značně rozdílná. Hlavní součástí sluchového ústrojí je ústrojí Cortiho, umístěné na základní bláně v hlemýždi ve vnitřním uchu. Je to neobyčejně jemná soustava vlákenek, seřazených od nejdelších k nejkratším na spirálně se stáčející ploše, o úhrnné délce ne větší než 33 milimetrů. Vlákenka Cortiho ústrojí jsou napojena na buňky, v kterých vyúsťují konečky jemných větviček sluchového nervu. Ústrojí Cortiho si můžeme představit jako miniaturní harfu, na které však nejsou struny napjaty v rovině, nýbrž v prostorové závitnici. Každé z vláken reaguje - podle rezonanční teorie Helmholtzovy - na jeden určitý tón, na jednu akustickou frekvenci; současně se chvěje základní blána i jako celek. I v tomto způsobu rozechvění nacházíme jistou podobnost s harfou, neboť zazpíváme-li proti harfě tón určité výšky, také na ní se rozechvěje ta ze strun, která je na zpívání tón naladěna, tj. ta, která má stejnou výšku, stejný kmitočet a současně zní harfa (rezonanční skříň nástroje) jako celek.

V oku naproti tomu je hlavní součástí zrakového ústrojí kromě čočky množství čípků a tyčinek, uložených v oční sítnici, do které vyúsťuje zrakový nerv. Tyčinky jsou téměř necitlivé vůči barvám (zvláště vůči červené), čípky reagují na různé barvy velmi citlivě. Podle Youngovy-Helmholtzovy teorie jsou k čípkům napojena jemná nervová vlákna, která se řadí do tří základních skupin. Jedna ze skupin reaguje na podráždění červenou barvou, druhá na barvu zelenou, třetí na barvu modrofialovou. Jiné barevné odstíny v oku vznikají superpozicí (překládáním) těchto tří základních barev. Nejnovější výzkum ukazuje, že ještě lépe vyhovuje skutečnosti teorie čtyř složek, tj. čtyř základních skupin (pro barvu modrou, zelenou, žlutou a fialovou).

Jaké vlny vnímáme sluchem a zrakem? Druhy vln, na které reaguje lidské ucho a oko, jsou zcela odlišné povahy. Ucho je citlivé na proměnné tlaky, vyvolané střídavým zhuštěním (stlačením) nebo zředěním molekul vzduchu, popřípadě jiného

prostředí (nosiče), podléhá tedy silovému působení mechanické povahy, kdežto oko reaguje na elektromagnetické kmity, které nepotřebují ke svému šíření žádného nosiče a které se tvoří ve vnější sféře vzbuzených atomů a molekul.

Rozsah akustických kmitočtů, které dovede postřehnout lidské ucho, je kolem deseti oktáv (zhruba od 16 Hz do 17 000 Hz), rozsah kmitočtů elektromagnetického záření postihnutelného lidským zrakem je necelá jedna oktáva (přibližně od $4 \cdot 10^{14}$ c/s do $7,7 \cdot 10^{14}$ c/s). Příslušné vlnové délky slyšitelných tónů jsou (ve vzduchu) v přibližných mezích 2120 cm až 2 cm, délky viditelných optických vln jsou v rozpětí od 390 mμ do 750 mμ.

Zvláštnosti zvukového a optického vnímání. Ucho je v neustálém „provozu“, nemá ochranného zařízení proti hlukům, dorážejícím zvnějšku; potřebuje proto aspoň ve spánku klidné okolí. Oko se může chránit proti přílišné intenzitě světelného záření zavřením očních víček.

Přichází-li do ucha několik tónů o různých kmitočtech, vnímá sluchový orgán zpravidla každý tón samostatně, v oku se však tvoří při dopadu několika monochromatických vln (tj. vln o určité pevné frekvenci) vždy jediný výsledný barevný vjem. Má-li i ucho vnímat řadu tónů různých kmitočtů jako jediný tón, musí vznikat taková tónová řada v jediném zvukovém zdroji a jednotlivé tóny musí být v jistých, přesně stanovených intervalových i intenzitních poměrech vzhledem k tónu o nejnižší (základní) frekvenci. Tak je tomu např. při znění tónu na struně, tyči, v píšťale a podobně. Ve všech takových případech zní kromě základního tónu ještě řada částkových tónů o vyšších kmitočtech, ale uchem je vnímán tento soubor tónů jako jediný (složený) tón.

Bílé světlo a bílý hluk. Necht dopadají současně do oka všechna monochromatická světla od červené do fialové barvy. Superpozicí všech těchto barev přecházejících spojitě z jednoho barevného odstínu do druhého, tvoří se v oku výsledné světlo, které nazýváme bílým světlem.

Necháme-li dopadat do ucha současně všechny akustické frekvence od nejnižší do nejvyšší, vyvolávají příslušné akustické tlaky v uchu výsledný vjem hluku, z kterého nevyniká samostatně žádná frekvence. Takovému hluku říkáme analogicky podle bílého světla bílý (spojitý) hluk.

Akustické a optické spektrum. Světlo dopadající ze světelného zdroje můžeme analyzovat, rozkládat vhodným optickým zařízením jako je hranol, nebo optická mřížka. Podobně můžeme analyzovat libovolný zvuk vycházející z akustického vysílače v jeho jednotlivé složky různými analyzačními prostředky (akustická mřížka, akustický spektrometr). Když rozložíme složené dopadající světlo na jednotlivé složky, charakterizované frekvencí a intenzitou, vzniká optické spektrum. Analogicky lze získat akustické spektrum libovolného zvuku, sestávající z menšího nebo většího počtu jednotlivých tónů (frekvencí) o intenzitě jisté velikosti.

Je-li takových složek frekvenčně od sebe dosti rozdílných poměrně málo, vzniká spektrum čárové, ať optické nebo akustické. Obsahuje-li složené světlo nebo zvuk velký počet složek i různých, ale hustě vedle sebe navrstvených

frekvencích ve značně širokém frekvenčním pásu, nazýváme takové spektrum - optické i akustické - **s p e k t r e m s p o j i t ý m**.

Oko dovede rozeznat frekvence příslušející různým barvám, pokud dopadá od něho světlo monochromatické - jednobarevné. Je-li však obsaženo v dopadajícím světle více barev, nedovede oko jednotlivé barvy rozpoznávat, je špatným analyzátozem. Ucho naopak zase rozeznává poměrně snadno jednotlivé složky v souzvuku několika tónů, má tedy značně vysokou analyzační schopnost a analýzu provádí v překvapivě krátké době.

Práh pocitu a práh bolesti. Máme-li postřehnout paprsek monochromatického světla, nesmí jeho intenzita klesnout pod určitou nejnižší hodnotu - **p r a h o v o u i n t e n z i t u i_0** . Roste-li naopak intenzita ke stále větším hodnotám, vzniká v oku při dosažení určité meze i_m pocit **b o l e s t i v é h o p ř e s v ě t l e n í**, oko se automaticky přívahu světla uzavírá. Podobný úkaz můžeme pozorovat i při **a k u s t i c k ý c h j e v e c h**. Tón daného kmítočtu je slyšitelný jenom potud, pokud se jeho intenzita pohybuje uvnitř intenzitního intervalu $< I_0, I_m >$. Klesne-li intenzita zvuku pod prahovou hodnotu I_0 (**p r á h s l u c h o v é h o p o c i t u**), tón se stává neslyšitelným. Dosáhne-li naproti tomu hodnota akustické intenzity velikosti I_m , dostoupila k **p r a h u b o l e s t i v o s t i**, kůstky ve středním uchu se pod přílišným tlakem vychýlí bočně, v uchu vzniká nepřijemný, bolestivý pocit.

Ve vodě je práh sluchového pocitu pro tóny nad 300 Hz vyšší, pro tóny pod 300 Hz nižší než ve vzduchu, jak ukázala Wainwrightova měření v roce 1957.

Časový práh. K postřehnutí určitého světelného nebo zvukového děje nestačí splnit jenom podmínku, aby intenzita vstupující do smyslového čidla byla větší než prahová intenzita. Je ještě třeba, aby podráždění ve smyslovém orgánu trvalo jistou dobu $t \geq t_0$, kde t_0 je minimální doba - **č a s o v ý p r á h** - při které ještě jev právě postřehneme. Velikost doby t_0 klesá s rostoucí intenzitou podráždění a je obecně závislá i na frekvenci dopadajícího vlnění. Pro **a k u s t i c k é k m i t y** je časový práh v přibližných mezích od 15 do 100 milisekund, nejkratší pro střední akustické frekvence (500 až 4000 Hz). U **o k a** stačí při velkých světelných intenzitách (např. blesk) jen několik mikrosekund k postižení optického jevu, při malých intenzitách je časový práh větší.

Setrvačnost ucha a oka - počet impulsů postřehnutelných v sekundě. Vjem, který se vytvořil v našem smyslovém čidle, může sítnici podráždit na delší dobu i při krátkodobém trvání popudu. Označíme-li písmenem τ krátký časový interval, po který popud trval a symbolem T dobu, po kterou trval v smyslovém orgánu pocit podráždění, je vždy $T \geq \tau$; smyslové ústrojí jeví tedy jistou **s e t r v a č n o s t**. Je dobře známo, že u optických krátkodobých jevů je $T \approx 0,05$ až $0,1$ vteřiny, takže **o k o** dovede od sebe odlišit průměrně 10 až 20 různých světelných krátkodobých efektů ve vteřině. Se setrvačností oka při vnímání optických úkazů počítá film a televize, neboť při počtu obrázků větším než 12 až 20 za sekundu, splývají už jednotlivé obrazy spolu, tvoří se obraz spojitě postupující.

Také **u c h o** má jistou setrvačnost (odhaduje se přibližně na 50 milisekund) a dovede proto postřehnout ve vteřině jen omezený počet zvukových krátkodobých impulsů. Počet těchto impulsů je funkcí **k m i t o č t u a i n t e n z i t y**

a závisí také na tom, zda impulsy do ucha dopadající jsou všechny t é h o ž nebo r o z d í l n é h o kmitočtu. Při středních intenzitách ukázala má vlastní měření, že pro nízké frekvence (např. tónů klavíru) klesá zřetelnost rozlišování pod 50 % již při 8 až 9 signálech v sekundě, pro střední kmitočty (na téměř nástroji) při 19 signálech za sekundu a pro vysoké frekvence při 26 impulsích za vteřinu, pokud za sebou následovaly tóny r ů ž n ý c h výšek. U krátkodobých klavírních tónů t é ž e výšky se meze posouvaly poněkud níže, k hodnotám 6,18 a 22 signálů/s. U sinusového tónu, tvořeného elektroakustickým generátorem a přerušovaného prakticky bez setrvačnosti jsem zjistil pro frekvence 250 Hz, 500 Hz a 1000 Hz rozlišovací mez 20, 22 a 25 signálů ve vteřině.

Citlivost lidského sluchu a zraku - Purkyňův efekt. Jinou zajímavou společnou vlastností ucha a oka je různá c i t l i v o s t pro různé frekvence a závislost této citlivosti na i n t e n z i t ě dopadajícího záření.

Ucho je nejcitlivější ke středním akustickým frekvencím. Pro ně už postačují tlaky 10^{-3} až 10^{-4} mikrobaru na ušní bubínek, aby byl vyvolán akustický vjem; pro velmi vysoké a pro velmi nízké kmitočty stoupá prahový tlak až k 1 mikrobaru.

Oko má největší citlivost za normálního osvětlení pro barvu zelenou (vlnové délky kolem 520 m μ), směrem k červené a k fialové barvě klesá. Práh světelného pocitu se udává pro střední optické frekvence hodnotou jenom asi 10^{-6} luxu na 10 000 tyčinek v sítnici.

Zvětšuje-li se světelná intenzita, posouvá se křivka citlivosti poněkud k červenému konci spektra, při slabém osvětlení předmětů n a s t á v á posuv křivky citlivosti opačným směrem, k fialové barvě. Tento zajímavý úkaz pozoroval poprvé slavný český lékař a fyziolog Jan Evangelista Purkyně. Po něm je jev i v cizí odborné literatuře běžně označován. Purkyňův efekt si můžeme snadno demonstrovat, když pozorujeme sytě červený a sytě modrý papír za různého osvětlení. Při malých intenzitách se nám jeví modrý papír světlejší, za velkých intenzit zase naopak tmavší než papír červený. Úkaz je vyvolán tím, že za šera vnímáme světlo více tyčinkami, které jsou k červené barvě necitlivé, za jasného světla se děje vnímání převážně čípky.

Podobný úkaz můžeme pozorovat v akustice. Zní-li tón v y s o k é frekvence a nevelké intenzity, vnímáme jej jako tón jisté výšky. Zvýší-li se však značně intenzita tohoto tónu, pociťujeme jeho výšku poněkud v ě t š í než dříve. U tónů nízkých kmitočtů se zase při zvýšení intenzity s n i ž u j e subjektivně vnímaná jejich výška. Příčinou tohoto zajímavého úkazu je posuv basiální membrány jako celku při větších hlasitostech u hlubších tónů směrem k helikotremě (tj. k otvoru ve vrcholu hlemýždě) a tedy k místům, kde jsou v ústrojí Cortiho vlákna nejdelší („naladěná“ na hluboké tóny). U vyšších tónů je posuv směrem k okrouhlému okénku, neboli ke krátkým vláčkům Cortiho ústrojí.

Krytí (maskování) frekvencí. Velmi zajímavým úkazem, pozorovatelným při světelných a při zvukových dějích, je k r y t í (m a s k o v á n í) u r č í t ě h o k m i t o č t u j i n o u f r e k v e n c í.

Je-li vysílána optická nebo akustická vlna o frekvenci f a o intenzitě I_0 zprvu samostatně a potom současně s vlnou o kmitočtu $f' \neq f$ a o intenzitě $I' > I_0$, kryje (maskuje) kmitočet f' původní frekvenci f , když kryjící frekvence nabude

dostatečně vysoké intenzity I'_0 . Kdyby se nyní intenzita I_0 prvního tónu pozvolna zvyšovala tak, až by opět při jisté hodnotě I vynikla nad kryjící frekvenci f' , udával by nám poměr $\frac{I}{I_0}$ *stupeň krytí*. U akustických vln se uvádí jako stupeň

krytí poměr tlaků $\frac{p}{p_0}$, vázaný s poměrem příslušných zvukových intenzit vztahem

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0}}.$$

Jak potvrzují pokusy, je zvuková sinusová vlna nejvíce kryta akustickým kmitočtem f' blízkým k původnímu kmitočtu f , nebo k celistvému násobku frekvence f . Také u optických kmitočtů více kryjí určitou frekvenci kmitočty jí blízké, tj. kmitočty stejného barevného odstínu. Dokonaleji je tedy kryt např. odstín zelené barvy jiným odstínem zelené než určitým odstínem červené nebo fialové barvy.

Rozlišovací práh pro frekvenci. Jak ucho, tak oko může postřehnout ze spojitě řady vnímatelných frekvencí jenom jejich určitý konečný počet. Dejme tomu, že smyslové ústrojí vnímá jako samostatné dvě od sebe dostatečně vzdálené frekvence $f < f'$ (dva tóny různých výšek, nebo dva odlišné barevné odstíny). Zmenšujeme nyní šířku intervalu $f' - f$ až k mezi, kdy už smyslový orgán nerozezná od sebe kmitočty f, f' . Procentuální poměr tohoto mezného rozdílu k nižší dané frekvenci, tj. veličinu $p = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\%$, nazýváme *rozlišovacím*

prahem smyslového ústrojí pro frekvenci. Z pokusů plyne, že je tento poměr nejnižší pro střední vnímatelné frekvence. Ucho i oko tedy poměrně nejlépe rozlišuje kmitočty vprostřed vnímatelné oblasti; směrem k okrajovým kmitočtům mez rozlišovací schopnosti pro frekvenci stoupá. Velikost rozlišovacího prahu závisí také na tom, v jaké časové vzdálenosti po sobě následují obě uvažované frekvence. Řada kmitočtů, které dovede smyslový orgán postupně od sebe rozlišit, se nazývá *fyzilogickou* (tónovou nebo barevnou) *frekvenční řadou*.

Rozlišovací práh pro intenzitu. Ucho a oko může určit v popudu o jisté pevné frekvenci, ale s proměnnou intenzitou jenom konečný počet intenzitních stupňů. Jsou-li $I < I'$ od sebe dosti vzdálené intenzity, příslušné k téže akustické nebo optické frekvenci, a zmenšujeme-li zvolna interval $I' - I$, začne smyslové ústrojí vnímat při dosažení určité minimální meze uvedeného rozdílu obě intenzity jako totožné. Procentuální poměr této mezní difference $I' - I$

k nižší intenzitě I , tj. $q = \frac{I' - I}{I} \cdot 100\%$, je označován jako *rozlišovací*

práh pro intenzitu zvukového nebo optického záření. I u tohoto prahu byl experimentálně zjištěn jeho vzestup směrem k okrajovým intenzitám, tj. v oblastech příliš malých i příliš vysokých intenzit.

Přizpůsobivost (únava) ucha a oka. Působí-li zdroj záření po delší dobu na naše smyslové ústrojí s neproměnnou, dostatečně velikou intenzitou, může vyvolat *únavu* smyslového orgánu; smyslové ústrojí se daným podmínkám *přizpůsobuje* (adaptuje). Podle pokusů akustika Békésyho nezávisí

u ucha vyvolaná únava na kmitočtu dopadajícího záření, ale roste se vzrůstající intenzitou podráždění. Nechá-li se např. znít tón určité výšky s hladinou tlaku 100 decibelů (blízko prahu bolestivosti) po celou jednu minutu a pak se náhle prudce zeslabí, slyší pokusná osoba i po zeslabení tónu ještě určitou dobu tón hlasitější, než odpovídá skutečné, objektivně měřené hlasitosti tónu; sluchový orgán se unavil, adaptoval. Pokus lze obměnit také tak, že necháme znít tón pevné výšky s nezměněnou velkou intenzitou (např. při hladině tlaků 80 decibelů) po delší dobu (třeba pět minut). Ucho pokusné osoby vnímá s přibývajícím časem tón o stále slábnoucí hlasitosti, ačkoliv se původní intenzita za tu dobu vůbec nezměnila. Sluchové ústrojí si zvyklo, unavilo se. Podle pokusů, které provedl J. D. Hood, může adaptační pokles činit až 25 decibelů. Únava není vyvolána (podle Lawrence a Yantise) změnami v ústrojí Cortiho, nýbrž únavou centrálního nervstva.

Také o přizpůsobivosti oka se můžeme přesvědčit různými pokusy. Jednoduše si ověříme únavu oka, když se zadíváme na několik vteřin do intenzivního světla žárovky. Zahledíme-li se potom na stěnu s malým rovnoměrným osvětlením, spatřujeme na ní tmavší plošku s obrysy žárovky. Oko se díváním do silného zdroje unavilo; místo na sítnici, v kterém se vytvořil obraz svítící žárovky, není již při dopadu světla z málo osvětlené stěny tak citlivé jako jeho okolí, a vnímáme proto část plochy stěny tmavší, než ve skutečnosti je.

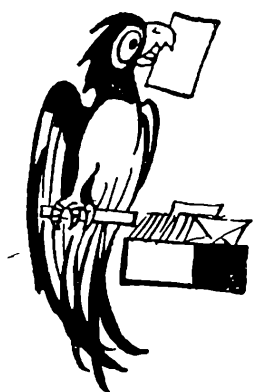
Prostorovost sluchového a zrakového vnímání. Velmi zajímavou společnou vlastností oka a ucha je *prostorové vnímání*. Díváme-li se oběma očima na předměty kolem sebe, odhadujeme dobře jejich vzdálenosti od oka, pokud nejde o předměty příliš daleké. Toto *prostorové vidění* je způsobeno tím, že se v pravém oku tvoří obraz pozorovaných předmětů poněkud odlišný od obrazu v oku levém. Osy obou očních soustav svírají spolu určitý úhel, nejsou tedy spolu rovnoběžné, pokud nehledíme do velké dálky. Proto vidíme pravým okem předměty více zprava, levým zleva. Zkušenost nás vede k tomu, že si oba obrazy promítáme do jednoho místa, v kterém se přes sebe neúplně překrývají - vidíme prostorově, stereoskopicky. V šeru, za malých intenzit, je prostorové vidění méně výrazné, neboť úhel očních os konverguje s poklesem intenzity k nule.

Podobně se při poslechu oběma ušima orientujeme o poloze zvukového tělesa v prostoru. Zde je zase toto *prostorové slyšení* (stereofonie) vyvoláno tím, že zvukové vlny přicházejí do levého a pravého ucha s určitým časovým zpožděním, neleží-li zvukový zdroj přímo v rovině kolmé ke spojnici obou uší. Zmíněná časová diference je tím větší, čím je zvukový zdroj více vysunut stranou od normálového směru ke spojnici uší. S rostoucí velikostí časového rozdílu roste i *fázový a dráhový posuv* obou zvukových paprsků. A právě velikost tohoto posuvu je měrou odhadu vzdálenosti a polohy zdroje vzhledem k pozorovateli. Lze snadno vypočítat, známe-li vzdálenost obou uší (přibližně 21 cm) a rychlost zvuku ve vzduchu, že časový interval mezi dopadem zvukové vlny do pravého a do levého ucha může nabývat hodnot od 0 až do 600 mikrosekund. Je-li ovšem perioda akustických kmitů kratší než maximum této doby (600 μ s), tj. je-li frekvence vysílaného tónu vyšší než 1600 Hz, nelze už určit polohu zdroje podle *fázového rozdílu*. V takových případech nám pomáhá v prostorové

orientaci stínové působení hlavy. Vysoké akustické frekvence se totiž šíří prakticky téměř přímočaře. Dopadá-li proto zvuk na naši hlavu ze zdroje vysunutého např. doleva z normálového směru ke spojnici uší, slyší levé ucho tón zdroje ve větší intenzitě než ucho pravé, do kterého přichází zvuková energie v důsledku téměř přímočarého šíření krátkých akustických vln oslabena; za hlavou se při pravém uchu vytvořil „akustický stín“. Právě tento intenzitní rozdíl mezi příjmem v levém a pravém uchu je měrou pro prostorové umístění zvukového zdroje.

Ochrana smyslových ústrojí na pracovišti. Nevhodné pracovní prostředí může oko i ucho trvale poškodit. Velký hluk v provozovnách bývá příčinou částečné nebo úplné hluchoty a různých nervových poruch. Příliš velké nebo příliš chabé osvětlení při práci snižuje zase podstatně citlivost zraku. Proto je nutno přesně dodržovat na pracovištích všechny hygienické předpisy chránící lidský sluch a zrak. Zvýší se tak zdravotní úroveň pracujících i efektivnost vykonané práce.

Jak bylo popsáno, má lidské ucho a oko četné společné fyzikální vlastnosti. Protože však fyziologická stavba i anatomické ustrojení obou smyslových orgánů je značně odlišné, setkáváme se při zjišťování fyzikální podstaty dějů probíhajících při sluchovém a optickém vnímání také s pochopitelnými diferencemi. Přesto nejsou analogie, které jsme v tomto článku uvedli, bez zajímavosti a tvoří pěknou ukázkou vzájemné dialektické souvislosti mezi nejdůležitějšími smyslovými orgány lidského těla - zrakem a sluchem.



Různé

Josef Kotyk, JŠŠ, Pardubice:

Huygensova teorie světla

Fyzika prošla ve svém vývoji obdobím, v němž se soudilo, že všechny fyzikální děje jsou v podstatě mechanické a že celá fyzika je podrobena zákonům mechaniky. Tak vznikla mechanistická fyzika. Také první pokusy o soustavný výklad dějů optických vycházely z analogií mechanických. Byli to opět známí vrstevníci Newtona a Huygense,¹⁾ kteří ukázali, že i světelné jevy lze takto popsat a vyslovili téměř současně první vědecké a ucelené teorie

¹⁾ O Newtonovi a jeho záslužné vědecké činnosti viz mé pojednání v *Rozhledech matematicko-přírodovědeckých*, roč. 26, čís. 1, o Huygensovi články v tomto ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních*, č. 6.

světla: Newton korpuskulární neboli emanační (výronovou) teorii, Huygens teorii undulační čili vlnovou.

Vývoj optiky se až do počátku 19. století v základě opíral o představu přímočarého šíření světla. Tato představa přivedla Newtona k myšlence téměř samozřejmé, že světlo je proudem malých částic neboli korpuskulí, jež vyletují ze zdroje ohromnou rychlostí na všechny strany a pohybují se průhledným stejnorodým okolím přímočaře a rovnoměrně. Světelný paprsek, základní pojem této teorie, není pak nic jiného než dráha světelné částice. Přesto se v dějinách fyziky porůznu - a to již od nejstarších dob - objevuje také domněnka, že světlo je povahy vlnivé. Je málo známo, že i Newton, ač autor a zastánce teorie korpuskulární, se jí ve své „Optice“ (1704) také již zabýval. Napsal: „Kameny padající na vodu uvedou ji do vlnivého pohybu. Všechna tělesa vyvolávají nárazem chvění vzduchu. Také světelné paprsky, dopadají-li na povrch tělesa a lomí se, nebo se odrážejí, budí kmity v lámovém nebo odrážejícím prostředí; ty se v něm šíří podobně jako kmity, jež způsobují ve vzduchu zvuk . . .“

Newton, veden hlubokou intuicí, se zřejmě pokoušel spojit oba názory. Huygens však byl a zůstal důsledným odpůrcem korpuskulární teorie. Čtenáře bude jistě zajímat, proč popíral existenci světelných částic. Zabýváje se paprskem jako drahou světelné částice, Huygens napsal: „Světelné paprsky si nepřekázejí. Vidíme-li svítící předmět, nemůže to být způsobeno přenosem hmoty, jež letí od něho k nám jako koule, nebo střely rozrážející vzduch . . .“ Huygens míní zřejmě známou zkušenost, že paprsky jdoucí od předmětů, ležících stranou od pozorovatele, protínají mnohokrát paprsky z předmětů umístěných před ním; tato okolnost nebrání však pozorovateli, aby viděl předměty, jež se nalézají před ním. Protínání světelných paprsků nepřekáží skutečně žádnému z nich v nezávislém šíření.

Ve svém slavném spise *Tractatus de lumine* (Pojednání o světle, 1690), jenž obsahuje základy undulační teorie světla,²⁾ vykládá Huygens, že světlo je vlnění, které se šíří od světelného zdroje na všechny strany asi tak, jako se šíří vlny zvukové od zdroje zvuku, nebo vlny na vodní hladině od místa, kam dopadl kámen. „Světlo se šíří jako zvuk kulovými plochami“ - píše doslovně „vlnami; nazývám tyto plochy vlnami pro jejich podobnost s těmi, jež můžeme pozorovat na vodní hladině, do níž byl hozen kámen“.³⁾

K tomu, co bylo pověděno, zbývá však doložit, jaký byl podmět slovesa „vlniti se“. Světlo je podle Huygense vlnivý pohyb jakéhosi nesmírně jemného a pružného prostředí, které bylo nazváno světelný éter. Huygens si jej představoval jako nevažitelný plyn, jenž vyplňuje celý vesmír a prostupuje všechnu hmotu i vzduchoprázdný prostor. Předpokládal, že se éter řídí zákony mechaniky a doufal, že podrobnější pochopení světelných dějů přispěje časem k lepšímu poznání záhadné látky, kterou nemůžeme svými smysly postřehnout a o jejíchž

²⁾ První pokusy o přímý důkaz vlnové teorie světla konal však teprve v polovině 18. století Michail Vasiljevič Lomonosov (1711–1765), zakladatel novodobé ruské fyziky a horlivý zastánce Huygensovy teorie.

³⁾ Viz Friš-Timoreva: Kurs fyziky, III, str. 11.

vlastnostech se proto přímým názorem nic nedovídáme. Další vývoj optiky však ukázal, že naděje Huygensovy se nesplnily.

Newtonově optice bylo snadné vyložit přímočaré šíření a odraz světla, neboť pro její světelné částice platí stejné rovnice jako pro vržené kameny. Lom světla vzniká podle ní přitažlivými silami na rozhraní dvou prostředí. Poněvadž hustším prostředím je světelná částice více přitahována než řidším, je rychlost světla v prostředí s indexem lomu větším než 1 podle Newtona větší než ve vakuu. Huygensovy výklady základních jevů světelných jsou složitější. Aby vyložil přímočaré šíření, odraz a lom světla, vytváří Huygens svůj slavný princip elementárních vln,⁴⁾ jejichž obalovou plochou vzniká výsledná vlna. Paprsek vždy k vlnoploše kolmý udává směr, kterým se vlnění šíří. Huygens uvedl svůj princip bez přesného důkazu. Poukazuje na jeho správnost, vyplývající zatím jen z výsledků získaných pokusně, odvedl svou metodu elementárních vln z zákona odrazu a zákona lomu rovinné vlny na rovinném rozhraní;⁵⁾ dospěl však k závěru, že v prostředí opticky hustším je rychlost světla menší než



Obr. 1

v prostředí řidším. To je výsledek právě opačný, než k jakému dospěl Newton. Newton se vyslovil proto o Huygensově teorii odmítavě. Jeho velká vědecká autorita přispěla zároveň k tomu, že Huygens našel jen málo přívrženců. Tak se stalo, že korpuskulární teorie světla došla všeobecného uznání, kdežto Huygensova teorie upadla téměř v zapomenutí. Teprve v polovině 19. století byl dřívější spor

obou teorií světla znovu oživen a konečně rozhodnut, když Foucault⁶⁾ stanovil metodou rotujícího zrcadla rychlost světla ve vodě a zjistil, že je menší než ve vzduchu (měří asi 225 000 km/s), jak to žádá teorie Huygensova.

Složitější než lom světla je úkaz tzv. dvojlomu, zjištěný poprvé při průchodu světla islandským vápencem. Erasmus Bartholinus⁷⁾ pozoroval v letech 1669 a 1670, že světelný paprsek, jenž dopadá kolmo na přirozenou stěnu jeho krystalu,⁸⁾ se obecně štěpí ve dva, takže písmo, pozorované krystalem dvojlomné látky, se jeví dvojité (viz obr. 1). Ve svém „Pojednání o světle“ vyložil Huygens dvojlom předpokladem, že jednomu paprsku (řádnému) odpovídá v krystalu

⁴⁾ Viz učebnici fyziky pro 10. ročník, čl. 108.

⁵⁾ Postup je vyložen v čl. 109 cit. učebnice; příslušné konstrukce jsou provedeny v obr. 103 a 104.

⁶⁾ Jean Bernard Léon Foucault (čti Fukó; 1819–1868) podal mj. roku 1851 také památný a přesvědčivý důkaz otáčení Země. V pařížském Pantheonu rozkýval na ocelovém drátě dlouhém 67 m kouli vážící 30 kg a shledal, že rovina kyvu se znatelně stáčela od severu přes východ k jihu. Přesnost jeho měření činila $\frac{1}{2}$ %.

⁷⁾ Erasmus Bartholinus, dánský fyzik, žil v letech 1625 až 1698.

⁸⁾ Islandský vápenc (chemicky uhličitán vápenatý CaCO_3) tvoří krystaly hexagonální (šesterečné) soustavy; z nich můžeme štípaním nabýt klenů omezených šesti kosočtverci s tupými úhly po $101^\circ 53'$.

vznik vlnoplochy kulové,⁹⁾ druhému paprsku (mimořádnému) přísluší však vlnoplocha tvaru rotačního elipsoidu. Huygensova domněnka byla v dalším vývoji fyziky skutečně potvrzena a vyhovuje i dnes představám o povaze světla a stavbě krystalů.

Okolnost teprve později zjištěná, že dvojlomem se světlo (a to zvláště dokonale) polarizuje, působila však Huygensově teorii světla zásadní obtíže. Huygens vyzdvihoval příliš analogie mezi vlněním světelným a zvukovým a předpokládal, že vlnění světelného éteru je jako vlnění každého plynu podélné. Podle těchto představ zůstává polarizace světla záhadnou. Proto Young a Fresnel,¹⁰⁾ kteří počátkem 19. století vzkřísili Huygensovu teorii světla k novému životu, přiklonili se k myšlence, že světlo je vlněním příčným. Polarizační úkazy jsou toho přímým důkazem. V obyčejném světle jsou zastoupeny všechny kmitové směry k paprsku kolmé; směr kmitů se zároveň ustavičně, nesmírně rychle, naprosto nepravidelně, nahodile mění. Dokonalou (lineární) polarizací se kmity usměrní tak, že se všechny dějí „učesány“ stále v téže paprskem položené rovině. Na základě takto pozměněné Huygensovy teorie vlnové, doplněné principem interference, podařilo se Youngovi a Fresnelovi vysvětlit všechny tehdy známé optické jevy.

Přes tyto úspěchy se optika nestala součástí mechaniky, nýbrž nauky o elektromagnetickém poli (Maxwellova¹¹⁾ elektromagnetická teorie světla). Tento vývoj nezůstal bez vlivu ani na názory na éter „Formou rozvoje přírodních věd je hypotéza“, napsal Engels. Hypotéza o existenci světelného éteru, který je jevištěm optických jevů a řídí se zákony mechaniky, prokázala. Huygensově teorii v jejích počátcích výtečné služby, umožnila její rychlý rozvoj; byla však sesazena s trůnu, neboť - se vyžila. Spekulace o vlastnostech světelného éteru utuchly. Předpoklady, že éter musí být vzhledem k vysokým kmitočetům světelným látkou abnormálně pružnou a vzhledem k pohybu nebeských těles zároveň látkou abnormálně řídkou, si zřejmě odporovaly. Nakonec se ukázalo, že se slovem éter stačí spojovat jen představu vakua a jeho optických, resp. elektromagnetických, vlastností.

A teorie světla? „Lidské poznání se vyvíjí po křivce velmi složité“, napsal rovněž Engels.¹²⁾ Další vývoj fyziky skutečně ukázal, že Huygensova představa o světle jako vlnění je jednostranná a nevystihuje vlastnosti světla tam, kde běží o vzájemné působení světla a hmoty. Např. při jevu fotoelektrickém (Stoletov 1888) ustupuje vlnivá povaha světla do pozadí, zřetelně pak vyniká jeho charakter

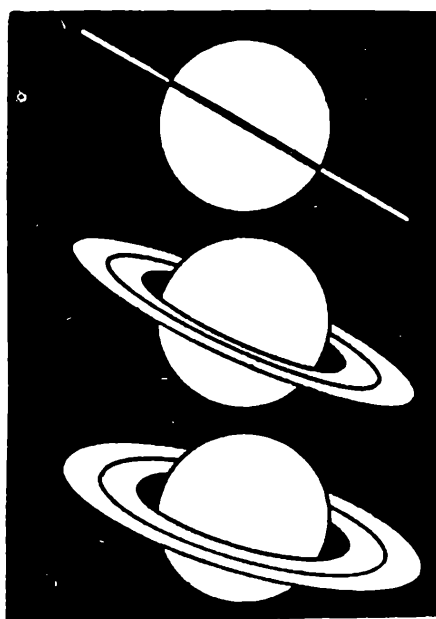
⁹⁾ Směr řádného paprsku, jenž splňuje Snelliův zákon lomu, lze sestrojit známou, Huygensovou konstrukcí lomeného paprsku, popsanou v učebnici fyziky pro 10. ročník v čl. 109, obr. 105.

¹⁰⁾ Thomas Young (čti Jang; 1773–1829), angl. lékař a Auguste Jean Fresnel (čti Frenel; 1788–1827), franc. inženýr, členové Royal Society, náleželi k nejhorlivějším zastáncům Huygensovy teorie. Zabývali se zejména delikátními jevy optickými, interferencí a difrakcí (ohybem), jimiž lze určit i vlnovou délku světla.

¹¹⁾ O Maxwellovi a jeho elektromagnetické teorii světla viz můj článek James Clerk Maxwell v Rozhledech, roč. 28, čís. 4, str. 65 až 67.

¹²⁾ Uvedené citáty jsou vzaty z knihy B. Engelse „Dialektika přírody“ (Svoboda, Praha 1950).

korpuskulární, kvantový. Kvantová teorie Planckova¹³⁾ znamená proto v něčem návrat k představám Newtonovým. Planckova univerzální konstanta $h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ erg/s se stala - podobně jako rychlost světla v teorii relativity - uzlovým bodem, kolem něhož se soustředily nejsložitější problémy moderní fyziky. S dialektického hlediska je takřka „na styčném bodě přetržitosti a spojitosti, určujíc vztah mezi znaky, které charakterizují částici a znaky, které charakterizují vlnu“.¹⁴⁾ Tato radikální změna v našich názorech, syntéza korpuskulárních a vlnových vlastností světla, potvrzuje správnost velikého principu dialektiky v přírodě, dialektickou jednotu protikladů, jež se projevuje v každém přírodním úkazu; potvrzuje jednotu pohybu hmoty v mnohotvárnosti jevů, jednotu procesu lidského poznávání přírody. Boj těchto protikladů tvoří vnitřní náplň procesu rozvoje.¹⁵⁾



Zmínku o Saturnově prstenci v článku J. Kotyka: Christian Huygens, na str. 280 minulého čísla Rozhledů matematicko-fyzikálních, doplňujeme tímto obrázkem, kde jsou zobrazeny tři různé pohledy na Saturn, jak se jeví při jeho různých polohách vzhledem k pozorovateli na Zemi (obr. 2).

Obr. 2

Cvičení.

1. Dokažte, že dráha světelné částice je nejkratší z lomených čar, jež spojují dva body, dané na téže straně roviny zrcadla, s některým jeho bodem, jestliže splňuje zákon odrazu!

2. Odvoďte zákon odrazu a zákon lomu (v tvaru Snelliově) podle korpuskulární teorie světla!

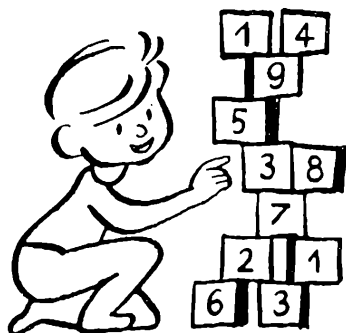
3. Světlo (viditelná část elektromagnetického spektra) zaujímá obor kmitočtů od $400 \cdot 10^{12}/s$ (krajní světlo červené) do $750 \cdot 10^{12}/s$ (krajní světlo fialové). Stanovte hranice oboru příslušných vlnových délek! Učiníte-li tak v mikrometrech ($1 \mu\mu = 10^{-6}$ mm), shledáte, že výsledky si můžeme velmi snadno zapamatovat!

¹³⁾ Viz můj článek o M. Planckovi v Rozhledech, roč. 36, zejména jeho část II, „Nauka o záření“, seš. 6, str. 285 až 287.

¹⁴⁾ Ze sovětské diskuse o základních filosofických otázkách fyziky. Viz sborník článků „Za materialistické pojetí moderní fyziky“ (Rovnost, Praha 1952), str. 263.

¹⁵⁾ Viz Dějiny VKS(b), Svoboda, Praha 1951, 11. vyd., str. 112.

Matematické zábavy



Úloha o jízdním řádu

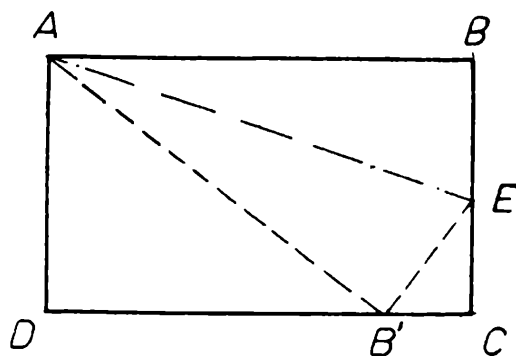
Pokladník podniku jezdil pravidelně elektrikou každý den s penězi do banky, odkud potom odcházel pěšky domů. Na konci měsíce mu bylo vždy jízdné podnikem uhrazeno podle předložených jízdenek.

Od podniku k bance vedly po téže trati linky č. 1, 2, 3 elektrických drah. Jezdily přesně podle jízdního řádu v pravidelných intervalech a to: číslo 1 a 2 v devíti-minutových a číslo 3 v osmnáctiminutových intervalech.

Pokladník nekončil práci pravidelně, ale použil vždy prvního vozu elektrické dráhy ze tří linek 1, 2, 3, který přijel na stanici. Po řadě měsíčních vyúčtování lístků zjistil ke svému překvapení, že poměr odevzdaných jízdenek z tratí číslo 1, 2, 3 jest $4 : 2 : 3$, že tedy počet lístků z trati s delším intervalem není nejmenší.

Dovedete podle uvedených údajů napsat jízdní řád všech tří linek mezi 15. a 16. hodinou, víte-li, že v 15,00 hod. vyjíždí od podniku vůz trati č. 2?

K. Č.



Obr. 1

Klempíř v rozpacích

Z plechového obdélníku $ABCD$ má klempíř odstříhnout trojúhelník ABE tak, aby při jeho přeložení (viz obr. 1) do polohy AEB' byl bod B' na okraji CD .

Jak nejrychleji vypočte délku BE , aby věděl, kudy má vést řez AE ? Pokuste se vypočíst tuto délku z paměti pro $AB = 15$, $BC = 9$!

M. M.

Matka — syn

V den desátých narozenin svého syna pravila matka: „Když ses narodil, nebylo mi ještě 25 let. Za jak dlouho nejdříve se bude tvůj věk psát týmiž ciframi jako můj, avšak v obráceném pořadí?“

O. S.

Jména těch, kdož zašlou do 10. dubna 1960 redakci správná řešení uvedených úloh, uveřejníme v některém čísle Rozhledů.



Recenze

J. Klepešta, J. Sadil: Vesmír

Publikace má 156 stran textu, 123 stran obrazových příloh. Orbis, Praha, 1959. Cena 23,— Kčs za vázaný výtisk.

Kniha, která vyšla ve sbírce „Malé atlasy přírodnin“, představuje malý obrazový atlas dokonalých fotografií planet, Slunce, komet atd. s doprovodným textem. Seznamuje čtenáře se vším podstatným, co dnes o vesmíru víme. Je to vlastně astronomie v kostce nebo ještě spíše malé obrazové kukátko do vesmíru. Čtenář tu najde výběr nejlepších současných fotografií Slunce, Měsíce, planet, hvězdokup a galaxií, zhotovených nejdokonalejšími astronomickými přístroji. Seznámí se slovem i obrazem s nejvýznačnějšími objekty, které lidské oko nebo citlivá fotografická deska mohou na obloze rozeznat, dočte se o všech nových poznatcích o vesmíru, zejména o planetách naší sluneční soustavy, přičemž se obrazová a textová část vhodně doplňují.

Kniha vyšla ve velmi vhodné dobu, kdy celý svět udivují obrovské poslední úspěchy sovětské vědy, vyslání rakety k Měsíci a zhotovení zdařilé fotografie jeho odvrácené části se Země neviditelné. Její autoři, předseda Měsíční sekce Čs. astronomické společnosti při ČSAV Josef Sadil a náš přední odborný pracovník Lidové hvězdárny na Petříně Josef Klepešta, zaručují vysokou úroveň knihy.

Kniha bude jistě dobrou informativní pomůckou pro naši širokou veřejnost, která projevuje o otázky v knize probírané stále rostoucí zájem. Bude cennou pomůckou i pro učitele našich všeobecně vzdělávacích škol a její žáky i pro osvětové pracovníky.

K. Šoler

Redakční sdělení



Soutěž o nejlepší rys.

Do soutěže bylo zasláno celkem 196 rysů a řada domácích cvičení, která však nebyla posuzována.

Třída 8. Rysů z této třídy bylo zasláno celkem málo a měly slabou úroveň, také rýsování bylo nepřesné.

Třída 9. Zvláště na rysech z této třídy se jevila slabá úroveň popisu i estetického vzhledu vůbec.

Třída 10. Práce žáků této třídy jeví se jako průměrná.

Třída 11. Zde byla předložena řada rysů s chybně nebo nepozorně řešenými příklady, mnohdy z tematiky neodpovídající osnovám. Grafické provedení bylo relativně horší než ve třídě 10.

Tematika příkladů. Příklady měly být voleny z látky předepsané osnovami. Jen u talentovaných žáků lze tuto mez mírně překročit, ale nemůže se tak dít pravidelně. Nemá význam rýsovat složitější příklady z technické praxe, jímž žák nerozumí a kde může být sveden neodborným vedením k chybným návykům. Ani zde nesmíme zapomínat na esteticky vyvážené uspořádání rysů.

Vytahování. Pěkný rys může být proveden také pouze tužkou. Aby však jeho provedení bylo bezvadné a homogenní, musí být rýsováno stále dobře hrocenou tužkou (číslo 3, 4) za pečlivého dodržování čistoty. Tato práce bývá náročnější než u vytahování tuší.

Při vytahování tuší nebylo u většiny rysů dbáno náležité přesnosti a drobná nedopatření nebyla odstraněna. Zvláště to platí o křivkách a jejich tečnách. Také pomocné konstrukce tužkové nebyly mnohde vygumovány. Volba tloušťky čar nebyla všude vhodná. Velmi slabé čáry i příliš tlusté jsou pro začátečníka velkým problémem a vyžadují zručnost, dobré náradí a dobrý rýsovací papír. Rys nesmí působit jednotvárným dojmem, a proto důležitost konstrukcí se musí projevit v tloušťce čar. Nezapomínejme, že osy čerchujeme. Tečkování je zbytečně pracné, a proto ho užíváme co nejméně, nikdy však k vytahování ordinál, tj. spojnic prvního a druhého průmětu bodu. Pomocné konstrukce ovšem vytahujeme, a to alespoň jednou, pokud se vícekrát opakují.

Užití barev při geometrických konstrukcích omezujeme na nejmenší míru. Jinak je tomu u příkladů z technické praxe tam, kde normy takového vybarvení vyžadují. Pokládání nebo pracnější stříkání, musí také vyhovovat estetickým požadavkům.

Na špatném rýsovacím papíru se čáry rozpíjejí, což posuzující vzali při klasifikaci v úvahu.

Popis. Všeobecně lze říci, že až na malé výjimky není věnována náležitá péče provádění popisu, a to jak po stránce věcné, tak po stránce grafického provedení i vkusu. Mezi soutěžícími byly extrémy: od příkladů, kde popis prakticky chyběl, až do příkladů s více než 150 písmeny popisu geometrických prvků. Ježto popis má v první řadě funkční cenu, nutno k popisu vybírat pouze podstatné části geometrického postupu a šetřit popisem u konstrukcí opakovaných, pokud je takové konstrukce vůbec nutno rýsovat. I přes nedokonalost náradí musíme žádat, aby popis provedený šablonou byl bezvadný. U žáků s kaligrafickým nadáním připouštíme i popis psaný ručně. Dbáme však, aby byl jednoduchý, esteticky vyhovující a na témže rysu uniformní. Vždyť například technická praxe stavební užívá pouze ručně psaného písma. Zde vám jistě poradí ústavní učitel kreslení. Také je důležité správné umístování písmen popisu, která nesmí být přetnuta konstruktivními čarami. Popis musí být čitelný z jedné strany, bez otáčení rysu. U kót však platí zvláštní předpisy uvedené v učebnicích.

Závěr. V krátkosti jsme vám zde uvedli závady vašich prací a názor vysokých škol technického směru na váš grafický projev. Žádný ze soutěžících rysů nevynikl nápadným způsobem. Doufáme, že v letos opakované soutěži bude úroveň rysů lepší, což je účelem této soutěže. Pamatujte, že všechny technické obory bezpodmínečně potřebují výkresy rýsované správně, přesně i úhledně.

Doc. E. Kraemer,

Doc. Dr. M. Menšík,

Doc. O. Setzer.

Inž. arch. Josef Švastal, ČVUT. Praha:

Rysy se stavební tematikou

Polytechnická výchova zavedená na středních školách se určitým dílem v rýsování a deskriptivní geometrii zabývá i stavitelstvím. Je ale nutno, aby dosáhla takové úrovně, aby byla schopna dát základní představy o vytváření a zobrazování prostorů objektů pro bydlení, zábavu i práci studentům JSŠ, kteří se rozhodnou pro jakékoliv povolání i těm, kteří budou ve stavebnictví pracovat, nebo stavitelství studovat ať na odborné nebo vysoké škole. Úkoly, které jsou vytýčeny v pětiletém plánu pro stavebnictví a socialistickou výstavbu v budoucnu, jsou takového rozsahu a politické důležitosti, že o nich studenti JSŠ musí vědět a jejich důsledky se zabývat. Polytechnická výchova na středních školách má být jedním z prvních seznámení nové generace stavebních odborníků a budovatelů s úkoly a prostředky stavebnictví.

Jedním z činů, kterými je sledováno rozšíření zájmu o polytechnickou výchovu

i ve stavitelství, byla soutěž v tomto časopise. Po prohlédnutí vašich rysů s tematikou ze stavitelství zaslaných do soutěže chtěl bych vám říci, že redakce si byla při tom plně vědoma potíží plynoucích z nedostatku pomůcek i literatury vhodných pro tento účel. Vím, že jste neměli ani vy ani vaši učitelé z čeho čerpat základní poučení nezbytná pro geometrické zobrazení stavebního díla. Proto byl v čísle 1. a 2. otištěn informativní článek „O stavitelském kreslení“, aby vaše pokusy byly bližší skutečnosti. Došlé rysy byly z části velmi amatérské v představě i zpracování, jiné byly pouhým okopírováním předloh, namnoze starých stavebních plánů. Relativně nejlepší a stavitelské skutečnosti nejbližší byl výkres, který zaslal Fr. Andrlé, 10. třída JSŠ v Chotěboři. Jeho výkres bude otištěn zároveň s výkresem téhož námětu, provedeného odborně s připojeným výkladem o nezbytných náležitostech jednoduchého stavebního výkresu.

Stavební dílo, zobrazené ve stavebním výkresu, je složitá závislost disposičního řešení půdorysu, aby plně odpovídalo nárokům života a práce, a podmínek nutných pro zabezpečení stavby po stránce stavební, konstruktivní, hospodářské i vzhledové. Není tedy možno, aby se polytechnická výchova na JSŠ týkající se stavitelství, omezila na vyrýsování půdorysu nějakého objektu podle předlohy (třeba i skutečného stavebního výkresu) jen za účelem splnění požadavku na grafickou práci. Nemůžeme proto souhlasit se zmíněným okopírováním plánů zastaralých dispoic činžovních domů, poněvadž tím se žádné znalosti nezískají.

Při výuce je především nutno začít s nacvičením kresby geometrických a stereometrických útvarů, aby byla zajištěna kresebná pohotovost studenta, jeho prostorová představivost, pak ovládnutí rýsovacího náčiní a nacvičení psaní jednoduchého ale čitelného a vkusného písma a číslic, aby byl zajištěn i dobrý grafický účín výkresu, který by i při nároku na estetickou hodnotu zajišťoval dokonalou čitelnost. K zvládnutí představy schematického zakreslení určitého detailu stavebního díla například dveří nebo celé zdi s dveřmi a okny, by mělo předcházet přímé měření stavebního díla pásmem a příručním svinovacím dvoumetrem a pak teprve následovat zakreslení v užívaném měřítku 1 : 50, event. 1 : 100. Zejména vhodné cvičení představivosti by mělo být prováděno na měření a zakreslení nejbližšího okolí, například učebny nebo bytu, nebo jednoduchých a velikostí účelu vyhovujících objektů, zejména na venkově. V každém cvičebním případě by se úloha neměla omezit jen na vyrýsování půdorysu, ale měla by být doplněna kótovaným řezem a také pohledem na objekt, třebaš bez znalostí a úplného pochopení konstrukcí překladů nad okny, stropů a schodiště. Zejména schodiště, které je zpočátku nejtíživ pochopitelné. Jen souvislost těchto tří průmětů dá studentu celkový obraz stavebního díla, které je prostorové i hmotové. Rozsah vyrýsování půdorysu, řezu a pohledu musí být úměrný představivosti studenta i jeho znalostem a snaze, a nemůže jít do podrobností v profesionálních stavebních výkresech obvyklých.

(Pokračování)

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

skandium
skica, skici
skioptikon
sklápěti
skontrolovati
skripta, rod stř., množ.
skutečný
solarisace i solarizace
solenoid
specialisace i specializace
speciálně
spínač
spirála
spočísti
spočítatelný
stabilisace i stabilizace
stacionární
stadium, -dia
standard
standardisace i standardizace
staniol
startér
stativ
stearin i stearín
stejnoramenný
stejnostranný
stereofonie
stereofotografie
stereofotogrammetrie
sterilisace i sterilizace
stigmatismus
stigmatizovati i stigmatizovati
stíhač
stíhačka
stínící (k stínění)
stínící (kdo nebo co stíní)
stínítko
stírač i stěrač
stoprocentní
stotisícina
stratosféra
stroncium, strontnatý
struktura
střadatel
sulfát
suma
sumární
surdický

suterén
svar (svařené části)
svářeč
sváreť
svíticí (k svícení)
svíticí (kdo nebo co svítí)
svítiplyn
symetrála
symetrie
synchronisace i synchronizace
synchronní
syntéza i synthesa
syntetický i synthetický
sypký
systém
systematický
šasi i chassis
šedesátinný
šepink
šestihran
šestihranný
šestistěn
šestistěnný
šestiúhelník
škála
škrťací (klapka)
šrafa
šrafovať
t tuna
tabelární
tabló i tablo
tabulátor
takzvaný i tak zvaný (tzv.)
talón
tangens (neskl.) i tangenta
tangenní i tangentový
tangentoidea
tára
tavící (např. pec)
tavící (kdo nebo co taví)
téci, tekou i tečou, tec i teč
technisace i technizace
telefon
teleobjektiv
televisace i televize
televizor i televizor
tellur i telur
téma i thema

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Petr Benda - Berta Danková - Josef Skála: Sbíрка maturitních příkladů z matematiky.

Obsahuje asi 1500 příkladů z algebry, planimetrie, stereometrie a trigonometrie. Poskytuje bohatý materiál k procvičování základního učiva a obsahuje i obtížnější úlohy, které poslouží prohloubení matematických znalostí schopnějších žáků. Příklady jsou uspořádány v menší celky, které v podstatě odpovídají maturitním otázkám. Sbíрка bude cennou pomůckou pro žáky nejvyšších tříd jedenáctiletých i pro další zájemce. Na konci knihy jsou uvedeny výsledky příkladů, případně návody na jejich řešení. Str. 140, cena váz. výt. Kčs 6.

Názvy a značky školské matematiky.

Zpracovala odborná komise při Jednotě československých matematiků a fyziků s přihlédnutím k připomínkám vědeckých a školských pracovníků a učitelů matematiky. Pomocná kniha pro učitele škol všeobecně vzdělávacích a odborných. Str. 74, cena váz. výt. Kčs 6.

Milan Kutilek - Květoslav Semerád - František Vencálek: Fyzika pro odborné školy.

Učebnice obsahuje základní učivo předepsané osnovami a to v maximálním rozsahu pro typy škol se čtyřmi vyučovacími hodinami týdně. Navazuje na látku fyziky, probíranou na osmileté střední škole. Str. 349, cena váz. výt. Kčs 12,60.

Dr. František Lehar - Jaroslav Vachek: Technická fyzika pro I. ročník odborných učilišť a učňovských škol.

Dvouleté učební obory. Str. 199, cena brož. výt. Kčs 5,80.

Dr. F. Lehar - J. Vachek - F. Vencálek: Technická fyzika pro I. a II. ročník tříletých učebních oborů odborných učilišť a učňovských škol.

Str. 303, cena váz. výt. Kčs 10,40.

Jaroslav Vagner a kolektiv: Fyzika pro 6. ročník.

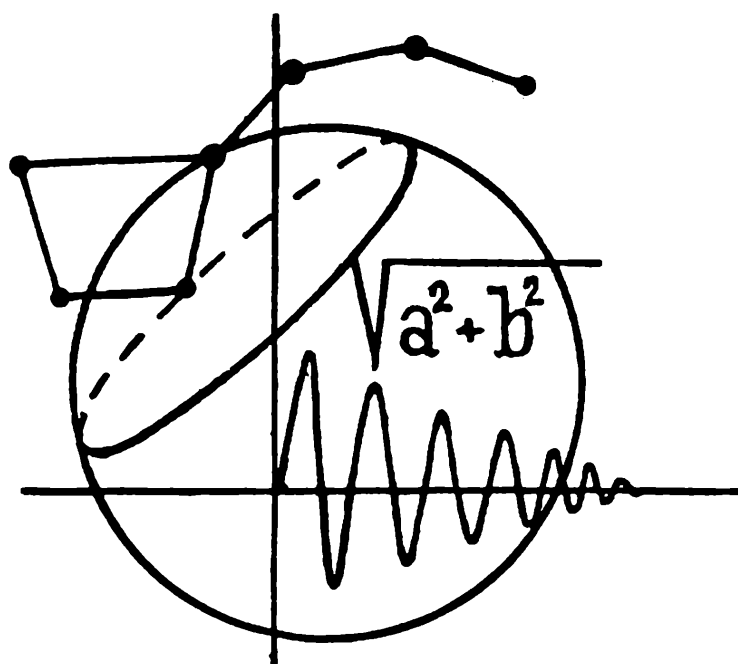
Pokusný učební text pro dvanáctileté střední školy. Str. 101, cena brož. výt. Kčs 2,20.

Václav Pelant a kolektiv: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť a učňovských škol zemědělských.

Str. 98, cena brož. výt. Kčs 2,30.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



8

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 8

Toto číslo vyšlo 4. dubna 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

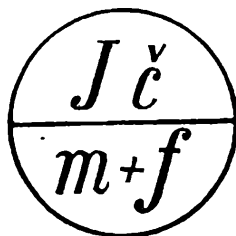
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

OBSAH

S. Horák: Přibližné řešení některých transcendentních rovnic	337
Inž. J. Klír: Kybernetika	340
Doc. O. Setzer: Steinerovy úlohy	345
Inž. dr. V. Šindelář: O zrcadlení stínů	350
Z. Tomášek: O jednotkách tepla	352
Inž. Z. Kos: Ustálený výtok otvorem z nádoby	356
Inž. J. Machalický: Skupenské přeměny vody	362
O. Lepil: 350 roků dalekohledu v astronomii	368
A. Kodym: Kam až?	370
Prof. dr. Q. Vetter: Bolyai János	371
SH: Zapomnětlivý prodavač	373
Recenze.	373
Redakční sdělení - soutěž o nejlepší rys	374
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-06119 Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Höning.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.



Matematika

Stanislav Horák, ČVUT, Praha:

Přibližné řešení některých transcendentních rovnic

Lineární a kvadratické rovnice, s nimiž jste se během svého studia seznámili, se dají vždy řešit pomocí vzorce. Rovnice složitější se zpravidla nedají řešit tak jednoduše; neexistuje tu obvykle vzorec pro kořeny rovnice. Spokojujeme se pak s přibližným výpočtem kořene, jehož přesnost je téměř vždy závislá na přesnosti tabulek, které máme k dispozici. V tomto článku si ukážeme řešení dvou takových rovnic; budou to tzv. rovnice transcendentní, jichž neznámá je argumentem logaritmické nebo goniometrické funkce. Postup, jehož při řešení použijeme, se dá uplatnit i při řešení jiných rovnic o jedné neznámé.

I. První z rovnic je

$$\frac{1}{x} - \log x = 0. \quad (1)$$

Této rovnici dáme tvar

$$\frac{1}{x} = \log x = y$$

a sestrojíme grafy funkcí (obr. 1)

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \log x.$$

Hodnotu hledaného kořene označme x_0 . Je to souřadnice x průsečíku M obou grafů. Z obr. 1 můžeme vyčíst dva důležité vztahy:

Jestliže $x > x_0$, potom výraz $z = \frac{1}{x} - \log x < 0$; jestliže $0 < x < x_0$, potom výraz $z = \frac{1}{x} - \log x > 0$. Z těchto dvou vztahů plyne věta, které v tomto odstavci I. stále užíváme:

Kladné číslo x je větší nebo menší než x_0 podle toho, zda výraz $z = \frac{1}{x} - \log x$ je záporný nebo kladný.

Obr. 1 praví, že hodnota kořene x_0 je blízká číslu $x_1 = 2,6$, což je první přibližná hodnota kořene x_0 . Dosadíme tuto hodnotu do levé strany rovnice (1); výsledek dosazení je

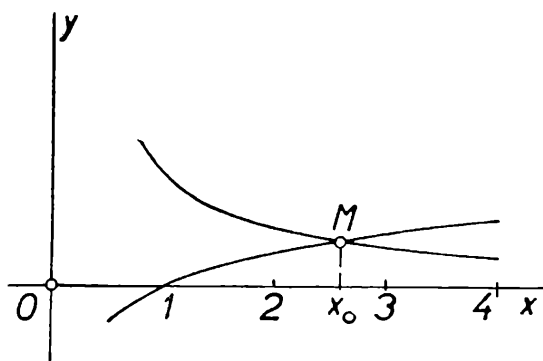
$$z_1 = 0,384\ 62 - 0,414\ 97 = -0,030\ 35 < 0.$$

Číslo z_1 je záporné a číslo $x_1 = 2,6$ je tudíž podle vyslovené věty větší než kořen x_0 . Zvolme si tedy číslo menší než 2,6, např. $x_2 = 2,5$ a dosadíme je do levé strany rovnice (1). Dostaneme

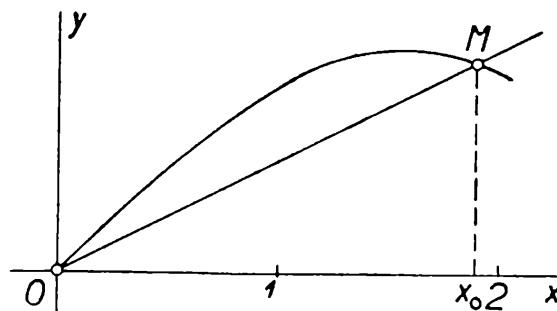
$$z_2 = 0,400\ 00 - 0,397\ 94 = 0,002\ 06 > 0.$$

Číslo 2,5 je tudíž podle vyslovené věty menší než hledaný kořen x_0 . Kořen rovnice (1) je proto někde mezi 2,5 a 2,6. To zapíšeme

$$2,5 < x_0 < 2,6.$$



Obr. 1



Obr. 2

Dále se postupuje tak, že za další přibližnou hodnotu kořene vezmeme aritmetický průměr čísel 2,5 a 2,6, tj. číslo

$$x_3 = \frac{2,5 + 2,6}{2} = 2,55.$$

Dosadíme-li toto číslo do levé strany rovnice (1), obdržíme

$$z_3 = 0,392\ 16 - 0,406\ 54 = -0,014\ 38 < 0.$$

Vidíme, že $z_3 < 0$ a z toho usuzujeme, že $x_3 > x_0$ a tudíž

$$2,5 < x_0 < 2,55.$$

Dále položíme

$$x_4 = \frac{2,5 + 2,55}{2} = 2,525$$

a dosadíme vlevo do (1). Výsledek dosazení je

$$z_4 = -0,006\ 22 < 0.$$

Z toho opět soudíme, že

$$2,5 < x_0 < 2,525 .$$

A nyní již stručně. Dále položíme

$$x_5 = 2,512\,5$$

a po dosazení obdržíme

$$z_5 = -0,002\,08 < 0 .$$

Tím jsme pro kořen dostali nové meze

$$2,5 < x_0 < 2,512\,5 .$$

A další postup by byl stejný:

$$x_6 = 2,506\,25 , \quad z_6 = 0,000\,13 > 0 ; \quad 2,506\,25 < x_0 < 2,512\,5 .$$

$$x_7 = 2,509\,37 , \quad z_7 = 0,000\,01 > 0 ; \quad 2,509\,37 < x_0 < 2,512\,5 .$$

$$x_0 \doteq 2,509\,37$$

Skutečná hodnota je poněkud větší.

II. Poněkud pracnější je řešení rovnice

$$\frac{1}{2} x - \sin x = 0 . \quad (2)$$

Triviální řešení je $x = 0$; chceme však řešení netriviální. Za tím účelem rovnicí (2) upravíme:

$$\frac{1}{2} x = \sin x = y$$

a narýsujeme graf funkcí (obr. 2)

$$y = \frac{1}{2} x , \quad y = \sin x .$$

Zde x značí obloukovou míru. V tabulkách je však míra stupňová. V tom tkví větší obtížnost řešení rovnice (2).

Kořen dané rovnice označme opět x_0 . Z obrázku (2) vyčteme:

Jestliže $x > x_0$, pak výraz $z = \frac{1}{2} x - \sin x > 0$; jestliže $0 < x < x_0$, pak výraz $z = \frac{1}{2} x - \sin x < 0$. Z těchto vztahů plyne věta, které v tomto odstavci II. stále užíváme:

Kladné číslo x je větší nebo menší než x_0 v soulase s tím, zda výraz $z = \frac{1}{2} x - \sin x$ je kladný nebo záporný.

Grafy obou funkcí se protínají v bodě M , jehož souřadnice $x_1 \doteq 1,8$, což ve stupňové míře odpovídá hodnotě $103^\circ 07' 56''$. Tím jsme dostali první přibližnou hodnotu kořene x_0 . Dosadíme-li ji do levé strany rovnice (2), obdržíme

$$z_1 = 0,9 - 0,973\,85 = -0,073\,85 < 0 .$$

Z toho usuzujeme, že $1,8 < x_0$. Zkusme dosadit číslo větší, např. $x_2 = 1,9$, což v míře stupňové odpovídá $108^\circ 51' 44''$. Dosadíme do levé strany rovnice (2) a dostaneme

$$z_2 = 0,003\,70 > 0 .$$

Ódtud vidíme - pouijeme-li vyslovené věty - že 1,9 leží napravo od x_0 a platí tudíž

$$1,8 < x_0 < 1,9 .$$

Jako další přibližnou hodnotu kořene vezmeme aritmetický průměr obou krajních hodnot; je to číslo $x_3 = 1,85$. V míře stupňové to odpovídá $105^{\circ}59'50''$. (Je to aritmetický průměr hodnot $103^{\circ}07'56''$ a $108^{\circ}51'41''$.) Dosadíme-li vlevo do (2), obdržíme

$$z_3 = - 0,036\ 27 < 0 .$$

Výsledek dosazení je záporný a proto

$$1,85 < x_0 < 1,9 .$$

Znovu bychom vypočetli aritmetický průměr čísel 1,85 a 1,9 a dosadili bychom jej vlevo do (2). Kdyby byl výsledek z dosazení kladný, získali bychom nový horní odhad pro x_0 menší než 1,9 a kdyby byl záporný, získali bychom nový dolní odhad pro x_0 větší než 1,85. Po určitém počtu kroků bychom dostali, že

$$x_0 \doteq 1,895\ 51, \text{ což odpovídá asi } 108^{\circ}36'16''$$

Přesná hodnota kořene je o něco málo menší.

A nakonec si povíme, v čem spočívá postup v obou případech. Jednotlivé kroky uvedeme v přehledu.

Budeme přitom předpokládat, že máme řešit rovnici $f(x) - g(x) = 0$.

1. Sestrojíme graf funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ a z něho vyčteme první přibližnou souřadnici x_1 společného bodu obou grafů.

2. Kořen x_0 sevřeme mezi dvě meze, tj. najdeme taková dvě čísla, že jedno z nich je menší a druhé větší než hledaný kořen x_0 .

3. Tyto meze stále zužujeme. To jsme prováděli tak, že jsme počítali aritmetické průměry vždy poslední získané horní a poslední získané dolní meze.

P o z n á m k a: Graf funkcí nemusí být narýsován přesně, ale pak první přibližná hodnota x_1 se nedá dosti přesně odhadnout a výpočet může trvat déle.

Na procvičení zkuste řešit rovnice:

$$x^5 - 3x - 3 = 0 ; \quad (x - 1)^2 - \log x = 0 ; \quad 2x - \operatorname{tg} x = 0 .$$

Inž. Jiří Klír, Výzkumný ústav matematických strojů, Praha:

Kybernetika

1. Úvod

Rozvoj současné vědy je charakterisován dvěma navzájem opačnými procesy, a to *d i s o c i a c í* čili dělením a *a s o c i a c í* čili spojováním. Podstata disociace spočívá v tom, že vědecké obory zahrnující původně velké oblasti jevů se

rozpadají postupně na řadu samostatných vědeckých oborů s dílčími oblastmi zkoumání. K dělení vědeckých oborů dochází ze dvou příčin:

1. Rozvoj věd přináší přesnější metody zkoumání, schopné odhalit podstatné rozdíly mezi některými jevy, které pro nedokonalost starších hrubých metod byly považovány za objekty téhož vědního oboru.

2. S rozvojem jistého vědeckého oboru roste množství vědeckých poznatků, které na jistém stupni je již tak veliké, že jeden člověk nestačí sám na to, aby si důkladně osvojil všechny tyto poznatky. Proto se část pracovníků specializuje pouze na určitou větev původního vědeckého oboru, čímž se tato větev stává samostatným vědeckým oborem.

Proces dělení vědeckých oborů je vidět např. na matematice, která v době Newtona existovala jako nedělitelná věda. Dnes představuje matematika řadu vědeckých oborů, např. matematickou analýzu, teorii čísel, topologii, matematickou logiku, nomografii, statistiku a další.

Druhým procesem charakterizujícím rozvoj současné vědy je asociace neboli spojování. Podstata asociace spočívá v tom, že srovnáváním výsledků dosažených novými dokonalejšími metodami v různých vědeckých oborech dochází k jedinému pohledu na různé jevy, které předtím neměly zdánlivě spolu nic společného a byly zkoumány různými vědeckými obory. Nový pohled si všímá společných vlastností těchto jevů a snaží se najít metodiku k jejich obecnému vyšetřování. Tak vzniká nový vědní obor, který spojuje výsledky několika oborů.

Názorným příkladem na asociaci vědních oborů je vznik obecné teorie vlnění, která udává obecnou metodiku k vyšetřování společných rysů různých jevů, např. z mechaniky, akustiky, elektrotechniky, optiky a jiných oborů. Jiným příkladem na asociaci vědních oborů v poslední době je vznik nového oboru nazvaného *kybernetika*, kterého si nyní blíže všimneme.

2. Předmět kybernetiky

Kybernetika je věda, která zkoumá z jediného obecného hlediska otázky řízení různých procesů v různých soustavách a předávání, neboli sdělování řídicích signálů uvnitř těchto soustav nebo mezi soustavami. Uvedené otázky byly dosud objekty zkoumání rozličných, více méně od sebe vzdálených vědních oborů. Mezi tyto obory patří především matematika, logika, obor strojů na zpracování informací, teorie sdělování, teorie automatické regulace, fyziologie, biologie, psychologie, psychiatrie, neurologie a lingvistika.

Kybernetika přinesla svým pojetím nové hledisko pro dělení fyzikálních či jiných procesů a soustav. Obecně se z tohoto hlediska rozlišují:

1. procesy a soustavy energetické,
2. procesy a soustavy kybernetické.

Energetickými procesy či soustavami rozumíme obecně ty, jejichž podstatnou veličinou je energie. Zpravidla se zabýváme otázkami přenosu nebo akumulace energie, přetváření energie jednoho druhu na jiný, využitím energie apod., a to u soustav neživých i živých.

V kybernetických soustavách je podstatnou veličinou signál, tj. jistý fyzikální

proces nesoucí i n f o r m a c i. Pojem „informace“ je ovšem v kybernetice pojímán daleko šířeji, než jak jsme zvyklí jej užívat v běžném životě.

Jako informace jsou uvažovány nejen např. zprávy v novinách, časopisech, jízdních řádech, telefonních seznamech, rozhlase apod., ale též např. signály procházející po nervových vláknech od smyslových orgánů do mozku člověka, povelové signály procházející po jiných nervových vláknech z mozku k pohybovým orgánům, vstupní hodnoty určité úlohy vkládané do matematického stroje, jakož i různé mezihodnoty a výstupní hodnoty představující řešení dané úlohy, signály vycházející od telefonního přístroje a přijímané zařízením automatické telefonní ústředny.

Kybernetika se zabývá všemi případy, kdy dochází k přenosu nebo uchování signálů, jejich zpracování, využití apod. V tomto smyslu je kybernetickou soustavou např. automatická telefonní ústředna, která ve formě signálů přijímá informace o požadovaném spojení a tyto informace zpracovává tak, že výsledkem je žádané spojení. Jiným příkladem kybernetické soustavy je matematický stroj, který přetváří informace z jedné formy na jinou. U živých organismů je kybernetickou soustavou mozek s celou nervovou soustavou. Nervová vlákna představují vodiče, po kterých jsou přenášeny elektrické signály od smyslových orgánů do mozku. Mozek je složitý orgán, který zpracovává velké množství přicházejících informací a vytváří tak informace nové, které vysílá opět po nervových vláknech do výkonných orgánů. Za kybernetickou soustavu je možno též pokládat např. jistý kolektiv lidí, neboť také tam dochází k vzájemnému sdělování informací.

Závěrem lze říci, že předmětem kybernetiky je studium živých organismů a neživých fyzikálních či jiných soustav z hlediska jejich schopností přijímání a uchování informací ve formě signálů, jejich zpracování a přenášení z jednoho místa na jiné, a konečně využití těchto signálů pro účely řízení jistých dějů, případně jiné využití.

3. Vznik a vývoj kybernetiky

Kybernetika je vědní obor velmi mladý, avšak její název není nový. Slovo *k y b e r n e t i k a* je převzato z řeckého jazyka, kde *k ý b e r n e t e s* znamená kormidelník. Poprvé použil tohoto slova již řecký filosof Platon ve smyslu vědy o řízení lodí. Později bylo slova *k y b e r n e t i k a* znovu použito roku 1843 známým francouzským matematikem, fyzikem a filosofem A. M. A m p è r e m. Ampère napsal knihu, ve které se snažil roztrždit všechno lidské vědění. Kromě jiného navrhl v této knize také novou vědu, kybernetiku, která se měla zabývat způsoby řízení společnosti. Název se však neujal a v podstatě se na něj zapomnělo. Teprve po více než sto letech zavedl opět tento název profesor matematiky Massachusettského technologického ústavu N o r b e r t W i e n e r ve své knize „C y b e r n e t i c s“ (viz [1]) z roku 1948. V této knize definuje Norbert Wiener kybernetiku jako „vědu o řízení a sdělování v živých organismech a strojích“ a rozvádí dosti podrobně příčiny, které způsobily vznik tohoto nového vědního oboru.

Wienerova kniha vzbudila velký ohlas v celém světě a byla předmětem mnoha příznivých i nepříznivých kritik. V současné době je kybernetika, až na řídké

výjimky, uznávána po celém světě a prodělává bouřlivý rozvoj. V mnoha zemích dochází pod vlivem idejí kybernetiky k plodné spolupráci odborníků z různých oborů; jsou pořádány mezinárodní konference o kybernetice atd. Také narůstá kybernetická literatura. Vedle původní Wienerovy knihy, která již vyšla v mnoha vydáních a byla přeložena do řady cizích jazyků, existuje již ve světové literatuře mnoho dalších prací věnovaných kybernetice.

4. *Hlavní směry v kybernetice*

Jak jsme již uvedli v úvodu, vznikla kybernetika asociací řady vědeckých oborů ze společného hlediska. Toto společné hledisko přináší kybernetice obrovskou oblast působnosti a zkoumání, která již v dnešní době je pro jedince těžko zvládnutelná. Proto se v kybernetice projevují tendence k disociaci, tj. k jejímu rozdělení na dílčí obory, vzájemně spojené obecnými předpoklady.

V současné době lze předpovídat rozdělení kybernetiky přibližně do těchto hlavních směrů:

1. teorie přenosu informace,
2. teorie zpracování informací,
3. teorie řízení.

Z uvedených složek kybernetiky je v současné době nejpodrobněji a nejsystematičtěji rozpracována teorie přenosu informace, která prakticky tvoří již samostatný obor v rámci kybernetiky.

Teorie přenosu informace studuje dvě základní otázky souvisící s přenosem informací ve formě signálů:

1. otázku vyjádření množství informace,
2. otázku kvality či správnosti informace.

Na základě matematického vyjádření množství informace jsou vyšetřovány různé sdělovací cesty (tzv. spojovací kanály) z hlediska jejich schopností přenášet informace. Důležitou složkou teorie informace je tzv. k ó d o v á n í, které se v podstatě zabývá hledáním vhodných způsobů zobrazení informací na signály v určitém spojovacím kanálu tak, abychom pokud možno minimálními prostředky zobrazili pokud možno co nejvíce informací. Jindy se opět snažíme přidat vhodné nadbytečné signály, které umožní určit nebo i odstranit chyby nahodile vzniklé při přenosu informace.

Teorie zpracování informací má svůj původ v oboru strojů na zpracování informací (bližší viz v článku [9]); dosud však nemá tak jednotné základy jako teorie informace. Všeobecně lze říci, že se zabývá způsoby či postupy přetváření informací z jednoho druhu na jiný a modelováním těchto postupů v různých fyzikálních soustavách.

Teorie řízení vyšetřuje takové soustavy, u kterých velké hmoty nebo energie jsou řízeny nebo ovládány pomocí nepatrných energií (signálů) nesoucích informaci. Zvláště důležité jsou tzv. automaticky řízené soustavy, které se skládají z řízeného objektu, systému řízení a zpětné vazby. Zpětná vazba slouží pro přenos signálů o stavu řízeného objektu do řídicího systému, který tyto informace přeměňuje v signály řídicí.

Jedním z typických projevů kybernetiky je modelování různých funkcí živých organismů neživými soustavami. Byly modelovány např. podmíněné reflexy (viz např. článek [6]) nebo homeostatické funkce živých organismů určené ke stabilizaci normálních životních podmínek organismů, tj. udržení správné teploty, tlaku krve, chemické struktury apod. Pozoruhodný model navrhl zakladatel oboru matematických strojů v ČSR doc. Dr. Inž. A. S v o b o d a z Výzkumného ústavu matematických strojů v Praze. Tento model se pohybuje, přičemž vyhledává vždy taková místa, která jsou pro jeho činnost nejpriznivější a vyhýbá se všem místům, která ruší jeho činnost normální. Můžeme říci, že takový model se chová podle téže vlastnosti, kterou u živých bytostí nazýváme pudem sebezáchovy.

5. Závěr

Závěrem poznamenejme, že podobně jako zavedení pojmu energie umožnilo pohlížet na různé přírodní jevy z jednoho hlediska a odstranilo celou řadu nepravdivých teorií, tak také zavedení pojmu informace vneslo jednotnost do pohledu na přírodní jevy, objasnilo řadu otázek a dalo vznik novým hypotézám. Zdá se, že vrcholným cílem kybernetiky je objasnění podstaty lidského poznání.

V tomto příspěvku jsme se mohli jen stručně dotknout hlavních otázek kybernetiky. Proto uvádíme seznam několika prací, ve kterých čtenář nalezne podrobnější informace. Pro začátek doporučujeme práce [5], [7], [10] a zejména práci [4], jejíž český překlad se připravuje. Pro hlubší studium je nejlépe použít prací [1], [2] a zejména [3]. Pro studium teorie přenosu informace doporučujeme podrobnou práci [8].

Literatura:

- [1] Wiener N.: *Cybernetics*. John Wiley + Sons, New York 1948. (Též ruský překlad: *Kibernetika*. Izdatel'stvo Sovětskoje radio, Moskva 1958.)
- [2] Wiener N.: *Cybernetics and Society*. Houghton Mifflin, Boston 1954. (Též ruský překlad: *Kibernetika i obščestvo*. Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva 1958.)
- [3] Ashby W. R.: *An Introduction to Cybernetics*. John Wiley + Sons, New York 1956. (Též ruský překlad: *Vvedeniye v kibernetiku*. Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva 1958.)
- [4] Poletajev I. A.: *Signal*. (O někotorych ponjatijach kibernetiki.) Izdatel'stvo Sovětskoje radio, Moskva 1958.
- [5] Solodovnikov V. V.: *Některé rysy kybernetiky*. SNTL, Praha 1958.
- [6] Klír J., Seidl L.: *Synthesa kybernetického modelu podmíněného reflexu*. *Slaboproudý obzor*, 20, 1959, čís. 1, str. 37—45.
- [7] Pustina F.: *Veselá abeceda kybernetiky*. *Sdělovací technika*, 1958, čís. 3, str. 87—93.
- [8] Goldman S.: *Information Theory*. Constable and Comp., Londýn 1953. (Též ruský překlad: *Teorija informacii*. Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva 1957.)
- [9] Klír J.: *Matematické stroje*. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, č. 1, roč. 38, str. 1.
- [10] Cossa P.: *La Cybernetique*. Paříž 1957. (Též ruský překlad: *Kibernetika*. Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva 1958.)



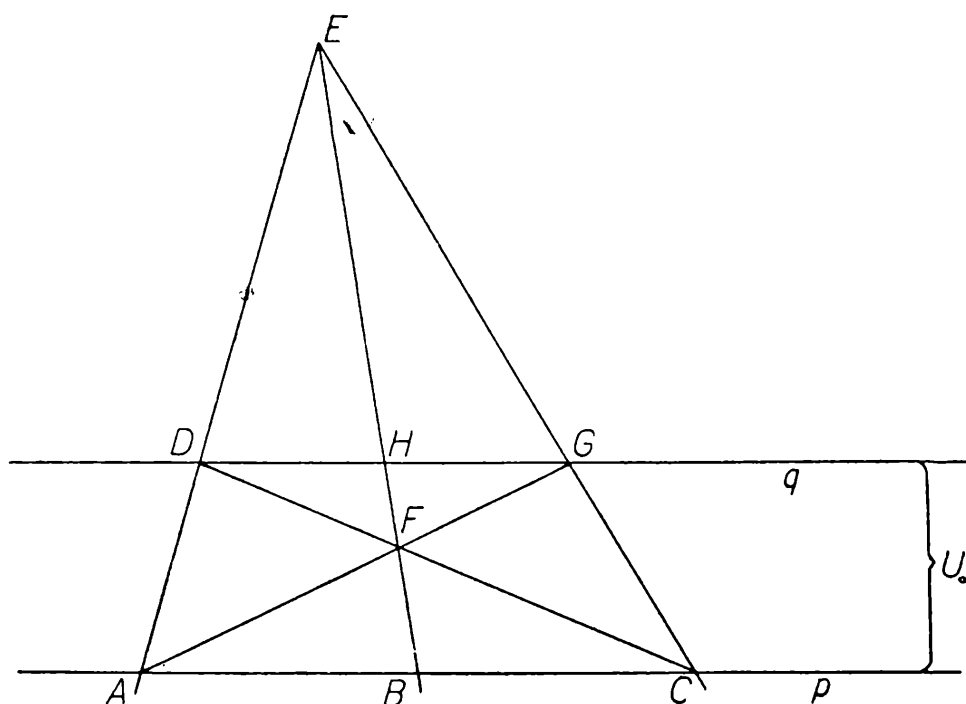
Deskriptivní geometrie

Doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha:

Steinerovy úlohy

Velmi zajímavou skupinu úloh řešených jen omezenými prostředky tvoří vedle mascheronských úloh¹⁾ tzv. úlohy Steinerovy.

Německý matematik Jacob Steiner (nar. 1796 v Utzenstorfu, zemř. 1863) sestavil tyto úlohy již v r. 1833 a pak byly uveřejněny znovu v malé knížce vydané v Lipsku r. 1895 pod názvem *Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Geometrické konstrukce pro-



Obr. 1

váděné pomocí přímky a pevné kružnice) s podtitulkem *als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung* (jako učební předmět na vyšších vyučovacích ústavech a k praktickému užití).

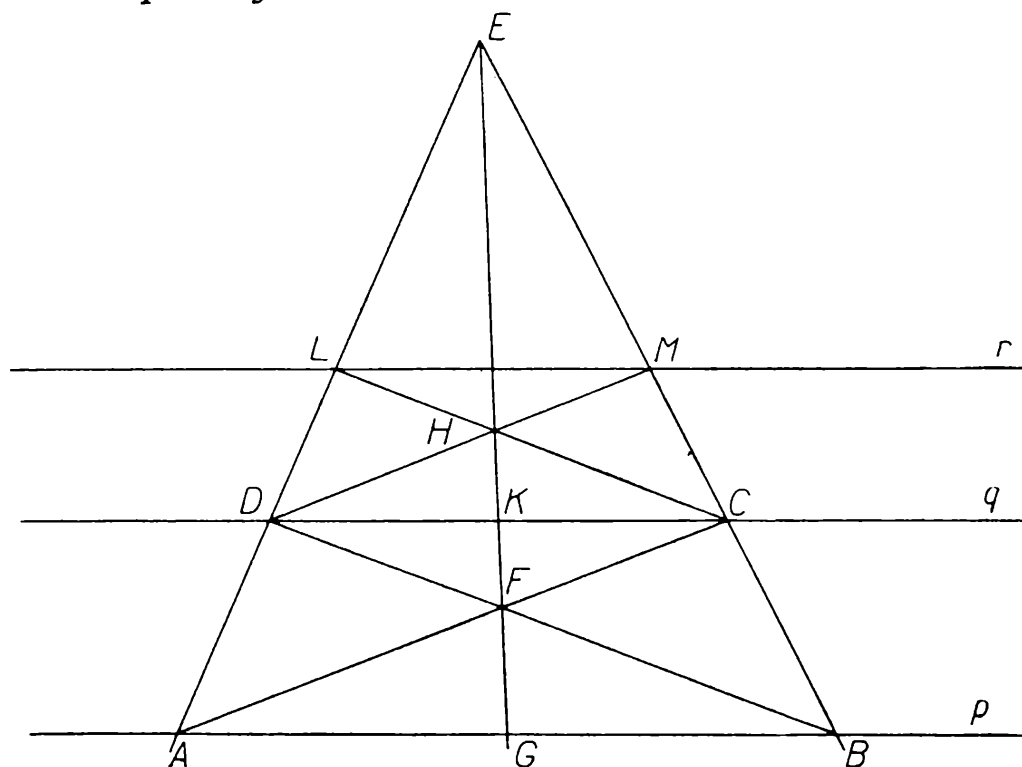
Jak již název říká, jde o úlohy, při nichž je dána v nákresně pevná narýsovaná kružnice a při nichž smíme pracovat jen s jedním pravítkem. Steiner dokázal, že

¹⁾ Viz O. Setzer, Vystačíme s kružítkem, Rozhledy mat.-fyz., roč. 37, str. 263.

každou euklidovskou úlohu (tj. úlohu, kterou lze řešit kružítkem a pravítkem) můžeme provést jen pravítkem, máme-li předem narýsovanou pevnou kružnici.

Z četných Steinerových úloh jsem vybral na ukázkou několik, při nichž je třeba znát jen ty geometrické vlastnosti, jež se na střední škole vykládají; ostatní byly již vysvětleny, např. o harmonické čtveřině v článku Marie Valešové²⁾ a o mocnosti bodu ke kružnici v článku S. Horáka.³⁾

Dříve než budeme řešit vlastní Steinerovy úlohy pomocnou kružnicí, provedeme několik *pomocných úloh*.



Obr. 2

Ú l o h a 1: Na přímce p jsou dány vedle sebe dvě stejně dlouhé úsečky $AB = BC$; bodem D ležícím mimo přímku p vedte pouhým pravítkem přímku $q \parallel p$! Při řešení úlohy použijeme této vlastnosti lichoběžníka $ACGD$:

Spojnice průsečíku E ramen lichoběžníka s průsečíkem F jeho úhlopříček půlí obě základny.

D ů k a z (obr. 1): Z věty o úměrnosti úseků na rovnoběžných příčkách svazku přímek o středu F plyne:

$$DH : HG = CB : BA . \quad (1)$$

Pro svazek o středu E zase platí:

$$DH : HG = AB : BC . \quad (2)$$

Přirovnáním úměr (1) a (2) o stejných levých stranách odvodíme, že $AB = BC$ a podle (1) též $DH = HG$, čímž je důkaz proveden.

²⁾ M. Valešová, *D v o j p o m ě r*, Rozhledy mat.-fyz., roč. 38, str. 308.

³⁾ S. Horák, *M o c n o s t b o d u k e k r u ž n i c i*, Rozhledy mat.-fyz., roč. 35, str. 14.

Ř e š e n í: Vlastní řešení úlohy 1 je již snadné. Daný bod D spojíme s body A , C , na prodloužené spojnici AD zvolíme bod E . Spojnice EB a DC se protnou v bodě F . Průsečík G přímek AF a EC je druhým bodem hledané rovnoběžky $q \equiv DG$.

Úloha 2: Jsou dány rovnoběžky $p \parallel q$; bodem L mimo ně ležícím vedte s nimi rovnoběžku r ! (Obr. 2)

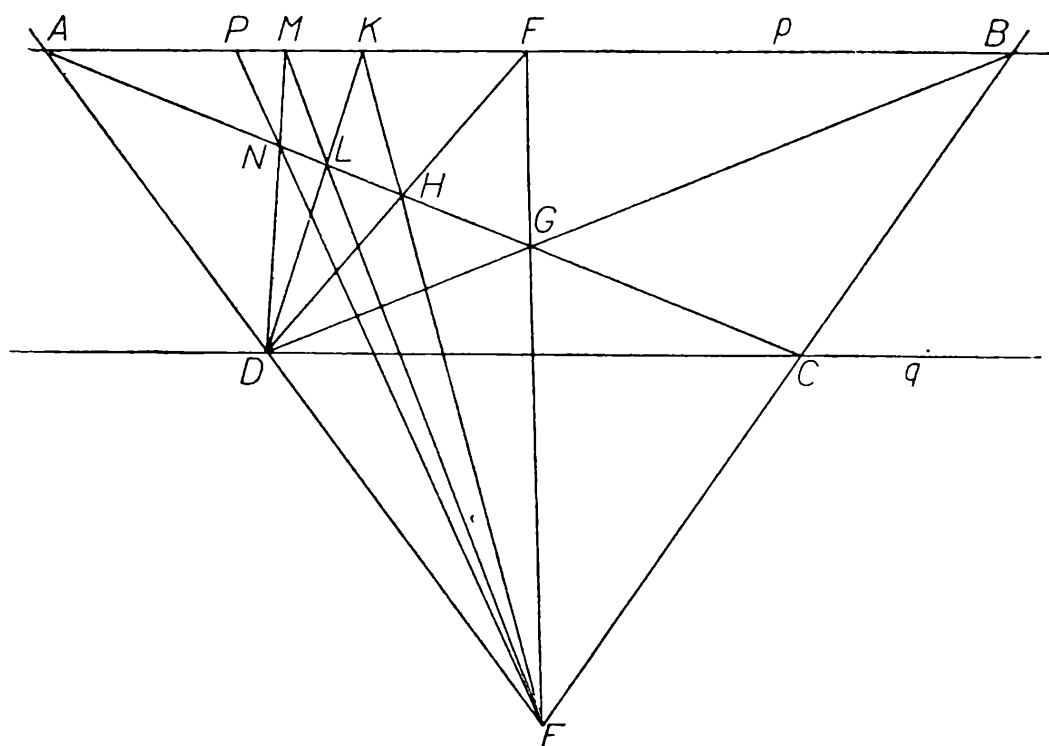
Úloha 3: Je dána úsečka AB na přímce p a přímka $q \parallel p$. Na přímce p naneste od daného bodu X úsečku $XY = AB$ (obr. 3).

D ů k a z: Z úměrnosti úseků na přímkách svazku mezi rovnoběžkami plyne $A'B' : AB = LA' : LA = SA' : SX$. Z trojúhelníka SXY odvodíme $SA' : SX = A'B' : XY$ a odtud $AB = XY$.

P o z n á m k a: Je zřejmé, že právě řešené úlohy 3 lze použít i k násobení úsečky AB celým číslem. Zvolíme-li bod $X \equiv B$, pak $AY = 2 \cdot AB$; najdeme-li touž konstrukcí bod Z , aby $YZ = BY = AB$, potom $AZ = 3 \cdot AB$ atd.

Ú l o h a 4: K úsečce AB ležící na přímce p sestrojte $\frac{AB}{n}$, je-li narýsována přímka $q \parallel p$ (obr. 4).

Ř e š e n í: Danou úlohu řešil francouzský dělostřelecký kapitán Charles Julien Brianchon⁴⁾ (čti Šarl Žylien Bryanšon, nar. 1783 v Sèvres) ve svém spise *Application de la théorie des transversales* (Užití teorie příček), vyšlém r. 1818 v Paříži. Brianchon používá vlastnosti úplného čtyřrohu $ABCD$ uvedené



Obr. 4

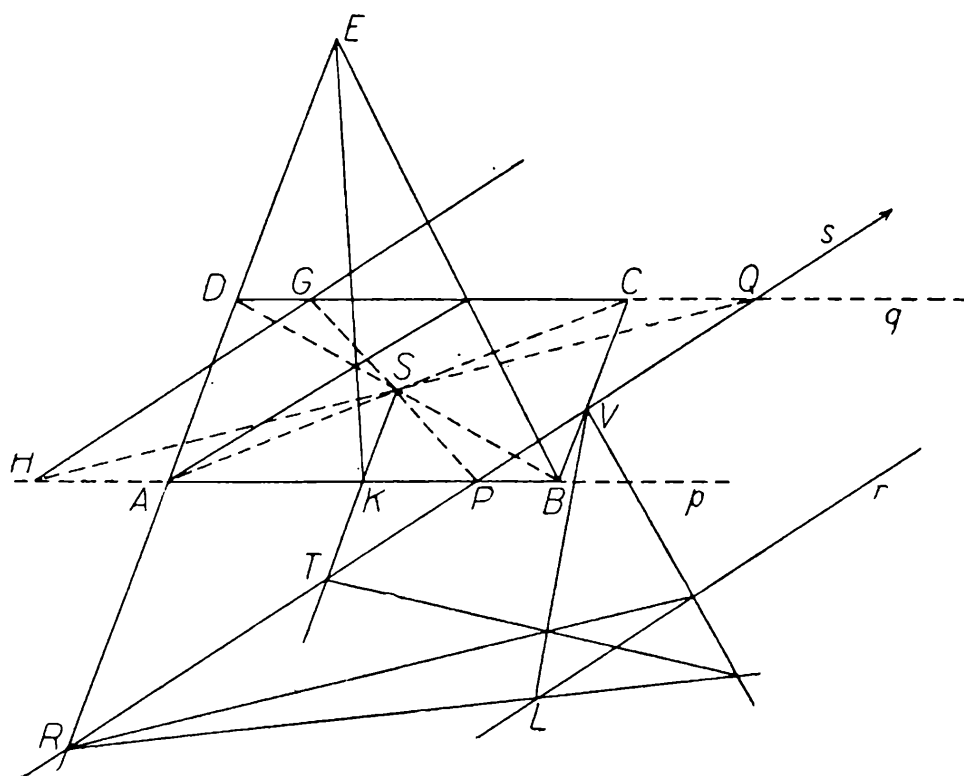
již v naší úloze 1. Podle toho byl v obr. 4 sestrojen bod F , aby $AF = FB = \frac{1}{2} \cdot AB$. Ve čtyřrohu $AFGD$ jest $(AFKB) = -1$, neboli $\frac{AF}{FK} = -\frac{AB}{FB}$, $\frac{AK}{FK} = -\frac{AB}{1/2 \cdot AB} = -2$, ale vzhledem ke vztahu $FK' = -KF$ jest $AK = 2 \cdot KF$, $AK = \frac{2}{3} \cdot AF = \frac{1}{3} \cdot AB$.

Ze čtyřrohu $AKHD$ bychom stejným postupem odvodili: $AM = \frac{1}{4} \cdot AB$ a dále ze čtyřrohu $AMLD$: $AP = \frac{1}{5} \cdot AB$.

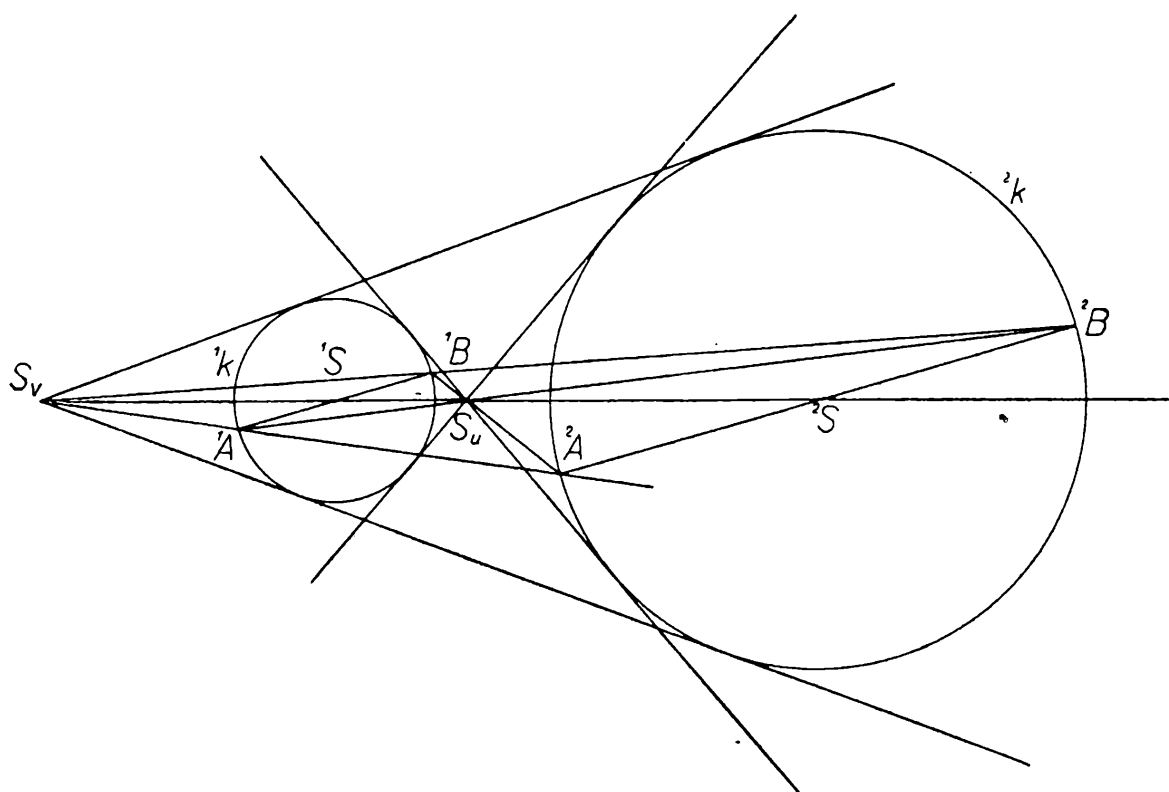
Tím jsme úlohu rozřešili pro $n = 5$ a jistě byste si ji podle uvedeného návodu vyřešili i pro každé větší celistvé n .

⁴⁾ Brianchon je též autorem známé věty o kuželosečkách, označované jeho jménem: V šestiúhelníku, který je opsán kuželosečce, protínají se spojnice protilehlých vrcholů v jednom bodě - Brianchonově. Větu uveřejnil r. 1806 v Journal de l'école polytechnique, sv. XIII.

Úloha 5: Je dán rovnoběžník $ABCD$; daným bodem L vedte pouhým pravitkem rovnoběžku s daným směrem s ! (Obr. 5)



Obr. 5



Obr. 6

Řešení: Střed S rovnoběžníka leží v průsečíku úhlopříček AC a BD . Přímka s protíná strany p , q našeho rovnoběžníka v bodech P , Q . Sestrojíme-li rovno-

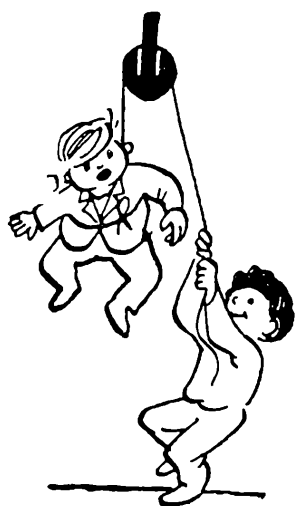
běžník $PQGH$ o straně PQ a středu S ($PS = SG$, $QS = SH$), pak nutně $HG \parallel PQ$. Podle předchozích úloh vedeme středem K úsečky AB spojnicí $SK \parallel DA$. Potom nutně $RT = TV$. Podle výsledku úlohy 1 již snadno vedeme bodem L rovnoběžku r se směrem s .

Ú l o h a 6: Ke dvěma kružnicím 1k (1S ; 1r), 2k (2S ; 2r) určete vnitřní i vnější střed stejnolehlosti S_u a S_v (obr. 6).

Ř e š e n í: Protože v stejnolehlosti jsou odpovídající si úsečky rovnoběžné, narýsujeme libovolným směrem v obou kružnicích odpovídající si průměry ${}^1A^1B \parallel {}^2A^2B$. Spojnice ${}^1A^2A$ a ${}^1B^2B$ protínají se ve vnějším středu stejnolehlosti S_v na středné ${}^1S^2S$, naproti tomu spojnice ${}^1A^2B$ a ${}^2A^1B$ určují na ${}^1S^2S$ vnitřní střed stejnolehlosti S_u . Ze vzniklého čtyřrohu ${}^1A^2A^2B^1B$ plyne, že body ${}^1S^2SS_vS_u$ tvoří harmonickou čtveřinu, čili $({}^1S^2SS_vS_u) = -1$.

Je také známo, že bod S_v je průsečíkem vnějších společných tečen (existují-li) a bod S_u průsečíkem vnitřních společných tečen obou kružnic (existují-li).

(Pokračování)



Fyzika

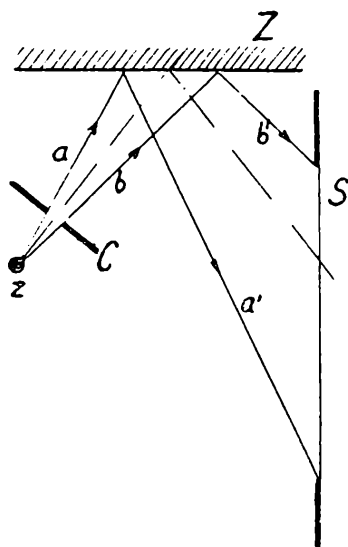
Inž. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha:

O zrcadlení stínů

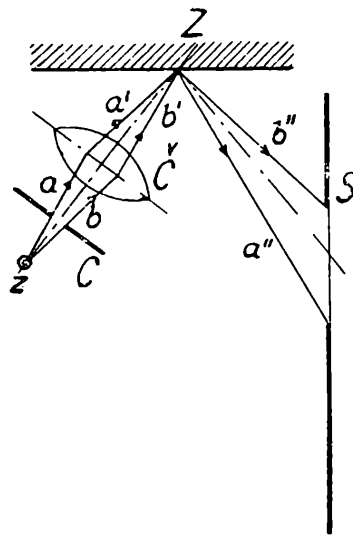
Popíši v krátkosti jednoduchý pokus s rovinným zrcadlem, týkající se zrcadlení stínů. Přes svoji jednoduchost je instruktivní při úvahách o zobrazování základním optickým zařízením. Nejprve trochu zopakujeme teorii, všem vám jistě známou.

Obraz libovolného předmětu v rovinném zrcadle je zdánlivý čili virtuální a nemůžeme jej zachytit na stínítko jako v některých případech u čoček, nebo i u dutých zrcadel. A přece se můžeme setkat s běžným promítacím zařízením, e p i d i a s k o p e m, v němž je zrcadlo použito a kterým můžeme v požadovaném zvětšení promítat na stínítko (promítací plátno) zpravidla rovinné předměty, jako fotografie, výkresy, diagramy apod. V tomto optickém zařízení slouží však zrcadlo jen k osvětlení předmětu, který chceme promítat a také k odrazu obrazového svazku paprsků vytvořeného předtím vlastní zobrazovací soustavou čočkovou. Svazek paprsků přicházející od zdroje přímo nebo přes nějakou optickou soustavu může tedy zrcadlo odrážet, přitom jej ovšem obrátí (zrcadlový obraz), jak je to schematicky nakresleno na obr. 1a, b. Kdyby mělo zrcadlo dokonalou (stoprocentní) odrazivost, měl by odrážený paprsek stejnou intenzitu jako pa-

prsek dopadající. Paprsky s rozličnými intenzitami dopadající na zrcadlo, byly by s týmiž intenzitami opět odráženy. S takovým případem, ovšem při ne zcela dokonalém odrazu, můžeme se setkat při promítání diapositivů přes zrcadlo.

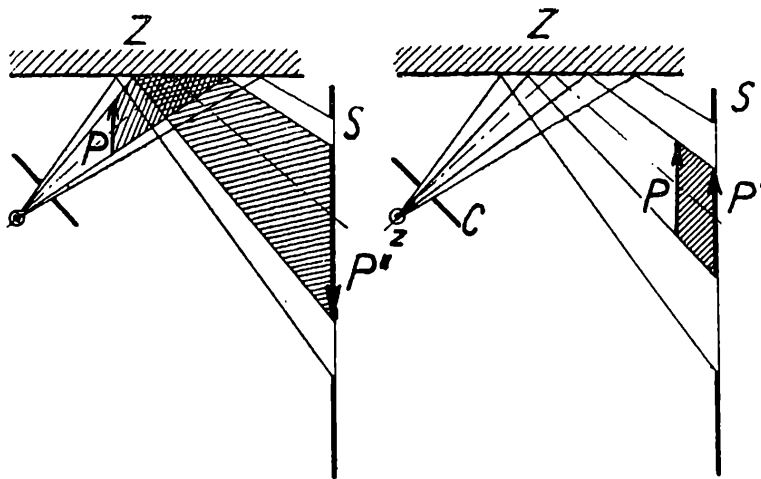


Obr. 1a

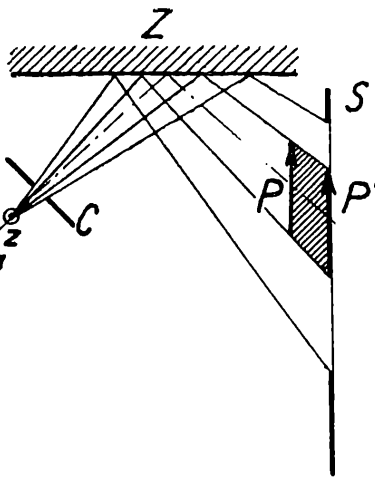


Obr. 1b

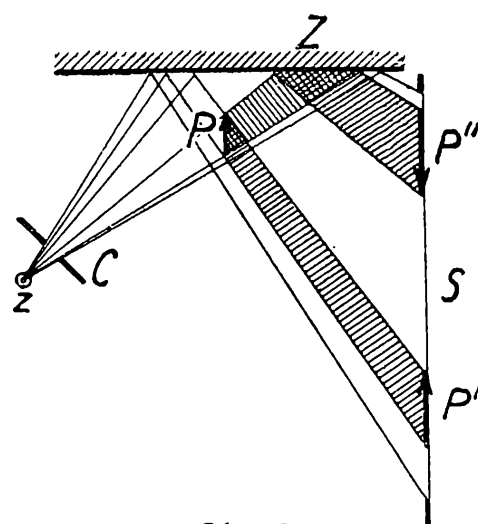
Přistupme nyní k popisu zmíněného pokusu, k jehož realizaci je zapotřebí světelného zdroje („bodového“) z , clonky C , zrcadla Z a stínítka S . Uspořádání je obdobné jako v obr. 1a, přitom však vložíme do cesty vysílanému svazku paprsků předmět P - znázorněný šipkou - za nímž se vytvoří „svazek stínu“ (obr. 2a).



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 3

Po odražení na zrcadle se stín promítne na stínítko. Přitom bude stínový (obrysový) „obraz“ vzhledem ke stínícímu předmětu obrácený. Nyní vložíme předmět do svazku odráženého zrcadlem (obr. 2b). Pak se nám vytvoří stínový „obraz“ přímý, nepřevrácený. Vložíme-li nyní předmět do promítacího prostoru tak, aby vhodně zasahoval jak do svazku dopadajícího, tak i odráženého, vytvoří se stínové „obrazy“ dva, jeden přímý a druhý převrácený (obr. 3). Oba takto vzniklé

stíny, vzájemně zrcadlově převrácené, jsou rozdílného původu, jak je zřejmé z obrázku. První (přímý) je stínem předmětu v odraženém světle, druhý (převrácený) je zrcadlovým „obrazem“ stínu předmětu. Je jistě jasné, že se v žádném případě nejedná o stín zrcadlového obrazu. Stíny nejsou také skutečnými obrazy předmětu, jsou omezeny pouze obrysovými paprsky, jež procházejí těsně kolem předmětu. Kdyby předmět byl pro světlo polopropustný, vytvořil by se místo úplného stínu příslušný, méně kontrastní polostín.

Zdeněk Tomášek, Brno:

O jednotkách tepla

1. Úvod

Snad si řeknete, že název tohoto článku má správně znít *O jednotce tepla*, neboť ze školy neznáme jinou jednotku než kalorii. Ale nadpis je správný; i když kalorie je nejznámější, není ani zdaleka jedinou jednotkou pro měření tepla. Od doby, kdy fyzikové poznali rozdíl mezi teplem a teplotou a naučili se teplo měřit, navrhli různí badatelé vedle kalorie ještě slušnou řádku jednotek dalších. Kromě toho byla obměňována i definice samotné kalorie, takže dnes máme - k malé radosti techniků - několik desítek různých tepelných jednotek, z toho pak na tučet kalorií. Je ovšem pravda, že velká většina z nich patří již minulosti a že leckterých jednotek nepoužíval ani sám navrhovatel; ale i tak jich žije v odborné literatuře a v praxi stále ještě značný počet. Je tedy samozřejmé, že tyto jednotky musí znát každý, kdo se chce vážně zabývat naukou o teple nebo technickým využitím tepla.

Nadměrné množství jednotek tepla ztěžuje orientaci a komplikuje výpočty. Jejich vývoj, kdysi úplně chaotický, směřuje proto v poslední době k odstranění tohoto stavu a k radikálnímu zjednodušení. To právě chceme ukázat v našem článku.

2. Jednotky vázané na vodu

Když se v 60. letech 18. století ujasnily základní kalorimetrické pojmy (hlavně zásluhou Blackovou) - a tak byl dán teoretický podklad pro kalorimetrická měření - ukázalo se nutné zvolit vhodnou jednotku tepla (množství tepla). Volba mezi různými návrhy nebyla těžká. Protože se jako kalorimetrické látky téměř výhradně používalo vody, zdálo se výhodné definovat jednotku tepla jako teplo, kterým se zahřeje gram vody o jeden stupeň (Celsia). Tato jednotka, zavedená Blackem, byla nazvána *kalorie* (cal) nebo *malá kalorie*.¹⁾ Tisíckrát větší jednotka se jmenuje *kilokalorie* (kcal) nebo *velká kalorie* (Cal).¹⁾

Uvedená definice vyhovovala tak dlouho, dokud se neukázalo, že teplo potřebné k zahřátí určitého množství vody o 1 °C při různých výchozích teplotách není přesně stejné. Na tuto skutečnost poukázal již r. 1831 Neumann; tím ovšem

¹⁾ Názvy *velká* a *malá* kalorie a značka Cal jsou zastaralé,

ztratila definice kalorie svoji jednoznačnost a bylo třeba ji doplnit údajem teploty a později i tlaku. Na návrh *Regnaultův* (čti reňoltův) byla zvolena počáteční teplota $0\text{ }^{\circ}\text{C}$; *Regnaultova kalorie* (cal_R) je tedy teplo, kterým se ohřeje 1 g vody z $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ na $1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Vedle Regnaultovy kalorie, v minulém století hojně užívané, zavedli *Bunsen*, *Schuller* a *Wartba* tzv. *střední kalorii* (cal),²⁾ definovanou jako setinu tepla potřebného k ohřátí 1 g vody z $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ na $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ za normálního atmosférického tlaku. Střední kalorie byla sice pro praktickou potřebu definována velmi výhodně, avšak stejně jako kalorie Regnaultova ustoupila další kalorii, navržené *Maxwellem*, již se používá dodnes.

Maxwellova kalorie (cal_{15}), zvaná též patnáctistupňová (dříve také *gramkalorie*), je dnes definována jako teplo, kterým se zahřeje 1 g vody (zbavené vzduchu) ze $14,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ na $15,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ při konstantním tlaku 1 normální atmosféry.³⁾ To je tedy kalorie, kterou známe ze školy. Není-li uvedeno jinak, rozumí se kalorii v běžné praxi právě ona.

Pro úplnost poznamenáváme, že byly navrhovány i jiné teplotní intervaly, např. od 4 ° do 5 ° nebo od 15 ° do 16 ° , ale v praxi se neujaly.

K Maxwellově kalorii jsou přímo připojeny další jednotky tepla, užívané ve Francii, totiž *thermie* (th) a *frigorie* (fr):⁴⁾

$$1\text{ th} = 1\,000\,000\text{ cal}_{15} = 1\,000\text{ kcal}_{15}\text{ (přesně)}, \quad (1)$$

$$1\text{ fr} = 1/1\,000\text{ th} = 1\,000\text{ cal}_{15} = 1\text{ kcal}_{15}\text{ (přesně)}. \quad (2)$$

Uvedenými jednotkami jejich výčet ani zdaleka nekončí. Pro anglicky mluvící země byla kalorie nepohodlná, protože tam se měří hmota v librách (lb)⁵⁾ a teplota ve stupních Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$).⁶⁾ Proto si tam zavedli vlastní jednotky tepla (bylo jich opět několik, podobně jako kalorií) s názvem *British Thermal Unit* (BTU, B. Th. U., B. th. u.). Používalo se však i jednotek vztažených na Celsiův stupeň, *Centigrade Thermal Unit* (CTU) a *Centigrade Heat Unit* (CHU). Protože tyto jednotky nejsou u nás užívány, nebudeme se o nich podrobněji šířit.

3. Teplo a energie

Poznali jsme řadu různých jednotek tepla. Protože však teplo není nic jiného než určitá forma energie, můžeme teplo jednoduše měřit také v obvyklých jednotkách energie (resp. práce), jako v joulech (J), kilopondmetrech (kpm), watt-hodinách (Wh), kilowatthodinách (kWh) atd. Z tohoto hlediska jsou tedy vlastně všechny zvláštní jednotky tepla (množství tepla, tepelné energie) víceméně zbytečné.

Proč se tedy hned od počátku neměřilo teplo v běžných jednotkách energie? Odpověď je jednoduchá: V době, kdy byla hledána jednotka tepla, nevědělo se

²⁾ Nazývala se také *průměrná* nebo *Bunsenova kalorie*.

³⁾ Normální atmosféra (atm) je tlak $101\,325\text{ N/m}^2$.

⁴⁾ U nás se názvu *frigorie* používá ve smyslu „záporné“ kalorie, např. k vyjádření pracovního efektu chladicích strojů.

⁵⁾ $1\text{ lb} = 0,453\,592\text{ kg}$.

⁶⁾ $1\text{ }^{\circ}\text{F} = 5/9\text{ }^{\circ}\text{C}$; přitom bod mrazu $0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$ a bod varu $100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$.

ještě, že teplo je energie. K tomuto objevu dospěla fyzika bezpečně až ve čtyřicátých letech minulého století; a i když ojediněle byla tato myšlenka vyslovována již dříve (Lomonosov), nebyla současně pochopena a uznána. Musíme také uvážit, že soustavy fyzikálních jednotek nebyly tehdy ještě vybudovány, dokonce že ani základní pojmy a veličiny mechaniky nebyly jasně a jednoznačně definovány. Když pak byla poznána ekvivalence tepla a energie - na čemž mají zásluhu hlavně R u m f o r d, M a y e r a J o u l e - byly zvláštní jednotky tepla již tak vžity, že jejich nahrazení obecnými jednotkami energie se nezdálo možné a koneckonců to tehdy ani nebylo nutné. Stačilo pouze znát převodní vztahy mezi jednotkami, abychom je mohli navzájem přepočítávat. Tyto převodní vztahy známe ostatně ze školy; zhruba platí

$$1 \text{ kcal} \doteq 4\,200 \text{ J} \doteq 427 \text{ kpm} . \quad (3)$$

Tato čísla musí být ovšem stanovena měřením, protože definice kalorie nijak nesouvisí s definicí joulu (resp. kpm, kWh atd.) a vztah obou jednotek není tedy předem znám.

A tu se začínají objevovat potíže. Protože žádné měření není nikdy úplně přesné, znamená to, že vůbec vlastně převodní vztah mezi kalorií (resp. ostatními jednotkami vázanými na vodu) a joulem (resp. ostatními obecnými jednotkami energie) neznáme a ani znát nemůžeme. Z téhož důvodu se dokonce převodní vztah, zjištěný jedním měřením liší, od vztahu získaného jiným měřením. Tak např. před 50 roky platil za bernou minci vztah $1 \text{ cal}_{15} = 4,187 \text{ J}$, kdežto dnes uznáváme

$$1 \text{ cal}_{15} = 4,185\,5 \text{ J} . \quad (4)$$

Závislost převodních vztahů na výsledcích měření je ovšem jak ve vědě, tak i v technické praxi krajně nežádoucí. Znehodnocuje přesná měření a výpočty, působí zmatek a mnohé omyly. K odstranění závad bylo proto již dávno navrženo přece jen zavést nové jednotky tepla, které nejsou vázány na vlastnosti vody, nýbrž na obecné jednotky energie.

4. Nové jednotky tepla

Nejvýhodnější jednotkou je bezesporu samotný joule, resp. i jednotky od něho přímo odvozené a již známé, jako watthodina ($1 \text{ Wh} = 3\,600 \text{ J}$), kilowatthodina ($1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J}$), resp. kilopondmetr ($1 \text{ kpm} = 9,806\,65 \text{ J}$). Joule jako jednotka tepla byl sice navrhován již dávno (český fyzik N o v á k jej doporučuje již r. 1896), ale teprve mezinárodní spolupráce tu přinesla své ovoce. Roku 1948 rozhodla Devátá generální konference pro míry a váhy, že jednotka tepla bude s konečnou platností joule. Také u nás je již zaveden joule jako jednotka tepla, a to československou státní normou ČSN 01 1301.⁷⁾ Kalorie a ostatní jednotky tepla, vázané na vodu, patří tedy již nenávratně minulosti.

⁷⁾ Normu ČSN 01 1301 Veličiny, jednotky a značky ve fyzice vydalo r. 1958 Vydavatelství Státního úřadu pro vynálezy a normalisaci v Praze. Norma platí pro vyučování, učebnice, učební texty a pomocné knihy na všech stupních a druzích škol.

Pro přiměřeně přechodnou dobu, než se nová jednotka vžije, je přípustné používat i jiných jednotek tepla, zejména *mezinárodní tabulkové kalorie* a *termochemické kalorie*. Tyto kalorie nejsou navázány na vodu, nýbrž na joule, takže nemají nevýhod, o nichž jsme hovořili v předchozí stati.

Mezinárodní tabulková kalorie (cal_{IT}) není vlastně jednotka docela nová; byla zavedena na návrh J a k o b ů v již r. 1929 a tvořila základ pro mezinárodní parní tabulky. Byla původně definována rovnicí

$$1 \text{ kW}_{\text{int h}} = 860 \text{ kcal}_{\text{IT}} \text{ (přesně) .} \quad (5)$$

$1 \text{ kW}_{\text{int h}}$ je značka mezinárodní kilowatthodiny, tj. 3 600 000 mezinárodních joulů (J_{int}), kterých se dříve používalo. Dnes je však zaveden tzv. *a b s o l u t n í j o u l e* (J),⁸⁾ který s mezinárodním joulem souvisí vztahem

$$1 J_{\text{int}} = 1,000 19 J.^9) \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6) se dá snadno vypočítat, že

$$1 \text{ cal}_{\text{IT}} = 4,186 84 J \quad (7)$$

Protože však vztah (6) musel být stanoven měřením a není proto znám přesně, přenáší se tato nejistota i do rovnice (7). Aby bylo možno přesně převádět cal_{IT} na J , byla r. 1956 stará definice (5) zrušena a nahrazena novou, podle níž

$$1 \text{ cal}_{\text{IT}} = 4,186 8 J \text{ (přesně).}^{10)} \quad (8)$$

Také *termochemická kalorie* ($\text{cal}_{\text{thermochem}}$) má svou historii. Zavedl ji v USA R o s s i n i a definoval ji rovnicí

$$1 \text{ cal}_{\text{thermochem}} = 4,183 3 J_{\text{int (NBS)}} \text{ (přesně) .} \quad (9)$$

$J_{\text{int (NBS)}}$ je mezinárodní joule amerického normalizačního úřadu National Bureau of Standards. Tento joule se poněkud jiší jak od „středního“ mezinárodního joulu J_{int} , tak i od absolutního joulu J . A tak ze stejných důvodů, jako u cal_{IT} , musela být i zde změněna definice, takže dnes definujeme

$$1 \text{ cal}_{\text{thermochem}} = 4,184 0 J \text{ (přesně) .} \quad (10)$$

V Sovětském svazu byli fyzikové těchto dodatečných změn ušetřeni; tam totiž definovali kalorii hned pomocí absolutního joulu:

$$1 \text{ cal}_{\text{SSSR}} = 4,182 J \text{ (přesně) .} \quad (11)$$

Pro úplnost uvádíme ještě, že se v literatuře vyskytuje také další kalorie (cal^+), definovaná tak, že univerzální plynová konstanta ideálního plynu je

$$R_0 = 1,896 \text{ cal}^+/\text{deg. mol}_{\text{Ch}} \text{ (přesně) .}^{11)} \quad (12)$$

Rovněž dříve zmíněné anglické jednotky BTU byly stejně jako staré kalorie

⁸⁾ *A b s o l u t n í j o u l e* se dnes nazývá prostě jen joule; je to tedy ta jednotka, kterou známe ze školy.

⁹⁾ V ČSN 01 1301 je nesprávně 1,000 11.

¹⁰⁾ V ČSN 01 1301 je nesprávně 4,186 7.

¹¹⁾ deg (dříve grad) je značka pro teplotní rozdíl 1 °C; mol_{Ch} je značka pro grammolekulu, vyjádřenou v chemické stupnici atomových vah (podrobnosti např. v učebnicích atomové fyziky).

vázány na vodu. Také sem zasáhl vývoj: byly vytvořeny nové jednotky BTU, napojené na mezinárodní a později na absolutní joule.

5. Závěr

Nadměrné množství jednotek tepla, z nichž jsme v našem článku uvedli jen ty nejdůležitější, je nežádoucí zjev. Podle mezinárodních dohod budou proto postupně nahrazeny obecnou jednotkou energie v soustavě MKSA, joulem. To přinese v praxi četné výhody: odpadne pracné přepočítávání a výpočty se zjednoduší. Odpadne i možnost různých omylů.

A nakonec stručný přehled:

$$1 \text{ cal}_{15} = 4,185 \text{ 5 J},$$

$$1 \text{ cal} = 4,189 \text{ 7 J},$$

$$1 \text{ cal}_{\text{IT}} = 4,186 \text{ 8 J (přesně)},$$

$$1 \text{ cal}_{\text{thermochem}} = 4,184 \text{ 0 J (přesně)},$$

$$1 \text{ cal}_{\text{SSSR}} = 4,182 \text{ J (přesně)}.$$

Tímto je též doplněn článek J. Kotyka, James Prescott Joule, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1959—60, č. 2, zvláště na str. 91, poznámka 8.

Red.

Inž. Zdeněk Kos, SÚTV, Praha:

Ustálený výtok otvorem z nádoby

Jedním ze zajímavých hydraulických problémů, s kterým jste se jistě již setkali, je výtok otvorem z nádoby. Určíme množství kapaliny, které vytéká z nádoby za různých podmínek.

Uvažujme nejjednodušší případ, tj. ten, kdy právě tolik vody do nádoby přitéká, jako odtéká. Potom dostáváme tzv. **ustálený výtok** otvorem z nádoby a tím se budeme dále zabývat. Předem můžeme říci, že množství kapaliny, které odtéká, bude asi záviset na výšce hladiny nad otvorem, na vlastnostech kapaliny, na tvaru a okrajích otvoru a jiných veličinách.

Než přistoupíme k vlastnímu výpočtu, musíme si něco říci o **konzervativním proudění** kapaliny vůbec. Tento pohyb je charakterizován **rovnicí kontinuity** čili spojitostí, která vyjadřuje fakt, že v průběhu proudění se zachovává hmota. Jestliže se zároveň nemění v daném průřezu veličiny s časem, jedná se o **ustálené proudění** kapaliny. Pro nestlačitelnou kapalinu (a voda je prakticky nestlačitelná) vyplývá při tomto proudění ze stále hustoty stálý měrný objem kapaliny a tudíž i průtočný objem, tj. objem kapaliny, dělený příslušným časem:

$$Q_1 = Q_2 [\text{m}^3/\text{s}], \quad (1)$$

kde jsou Q_1 průtočný objem, protékající průřezem 1, Q_2 průtočný objem, protékající průřezem 2.

Dále se musíme seznámit s důležitými hydraulickými pojmy a to průtočným průřezem a střední rychlostí. Pro názornost uvažujme pohyb kapaliny v potrubí. Pak průtočný průřez je plocha vnitřního světlého řezu, která vznikne na rovině kolmé na směr střední rychlosti příslušného úseku. Je-li potrubí válcové, pak je to rovina kolmá k povrchovým přímkám. Střední rychlost je průměrná rychlost v tomto průřezu, která je definována rovnicí:

$$v = \frac{Q}{S} \left[\text{m/s} = \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m}^2} \right], \quad (2)$$

kde jsou v střední rychlost [m/s], S plocha průřezu [m²] a Q průtočný objem [m³/s].

Dosazením z rovnice (2) do rovnice (1) plyne pro ustálený průtok rovnice kontinuity ve tvaru:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

kde je S_1 a v_1 plocha a rychlost v prvním průřezu; S_2 a v_2 plocha a rychlost ve druhém průřezu.

Druhou základní rovnicí, ze které v hydraulice vycházíme, je rovnice Bernoulliho (čti bernuliova):

$$\frac{v_i^2}{2g} + \frac{p_i}{sg} + z_i = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{sg} + z_0 = \text{konstanta}. \quad (4)$$

Ve vzorci jsou: g gravitační zrychlení [m/s²], s hustota kapaliny [kg/m³], v_i rychlost v průřezu i [m/s], p_i tlak v průřezu i [kp/m²], z_i výška nad zvolenou srovnávací rovinou neboli geodetickým horizontem [m], v_0 , p_0 , z_0 hodnoty rychlosti, tlaku a výšky v průřezu o .

Všimněme si, že sčítance v rovnici (4) mají rozměr délkový a protože je měříme ve směru svislém, nazýváme je výškami a to:

$\frac{v_i^2}{2g}$ je rychlostní výška [m²s⁻² · m⁻¹s² = m], $\frac{p_i}{sg}$ je tlaková výška [kp · m⁻² · kg⁻¹m³ · m⁻¹s² = kp · kg⁻¹ s² = m · kg · s⁻² · kg⁻¹s² = m] z_i je geodetická výška [m]. Číselné faktory v dimensionálních rovnicích neuvažujeme.

Rovnice Bernoulliho vyjadřuje fakt, že energie ideální kapaliny zůstává při proudění stálá. Celková energie se totiž rovná:

$$E = E_k + E_p, \quad (5)$$

kde značí E_k energii kinetickou a E_p energii potenciální. Dále platí:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2; \quad E_p = g m h, \quad (6)$$

kde je m hmota, v rychlost, g gravitační zrychlení a dále:

$$h = z + \frac{p}{sg} \quad (7)$$

je výška, kterou tvoří geodetická výška z a tlaková výška $\frac{p}{sg}$, tj. ekvivalentní výška sloupce kapaliny, do které by se zvedla volná hladina a vyrovnala tak tlak v uvažovaném místě. Snadno ji lze realizovat v tzv. otevřeném *p i e z o m e t r u*, tj. otevřené trubici, v níž může hladina vystoupit tak, až se tlak na hladinu vyrovná s atmosférickým tlakem, čili vytvoří se volná hladina (obr. 1).

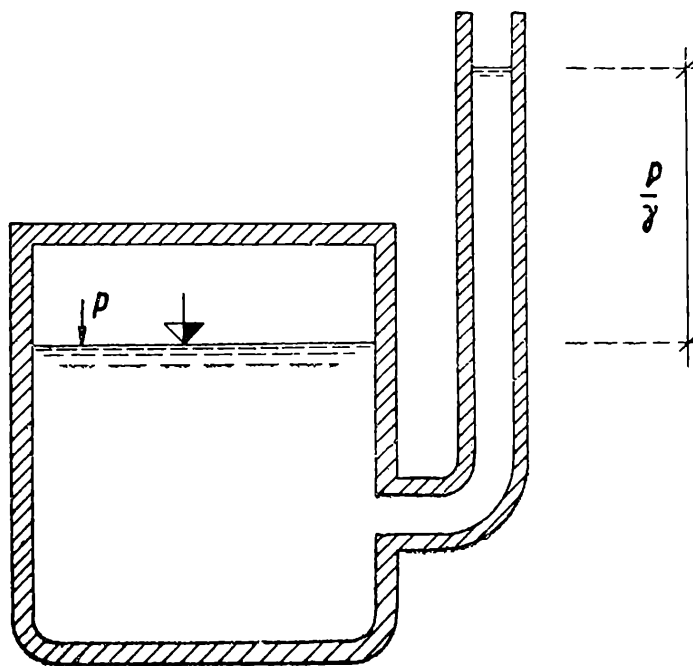
Dosazením rovnic (6) a (7) do (5) dostáváme:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + gm \left(z + \frac{p}{sg} \right) \quad (8)$$

a úpravou

$$\frac{E}{mg} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{sg} + z = \text{konstanta}, \quad (9)$$

což je tvar Bernoulliho rovnice jako součtu tří výšek: rychlostní, tlakové a geodetické.



Obr. 1

Vyzbrojení znalostí těchto dvou rovnic se pokusíme vyřešit ustálený výtok otvorem z nádoby.

Nejprve uvažujeme výtok otvorem ve dně (obr. 2). Napíšeme pro průřezy 1 a 2 rovnici Bernoulliovu a rovnici spojitostní:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{sg} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{sg} + z_2 \quad (10)$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Dosadíme $z_2 = 0$ (zvolili jsme geodetický horizont v úrovni dolejšího otvoru) a dosadíme z rovnice (11) do rovnice (10):

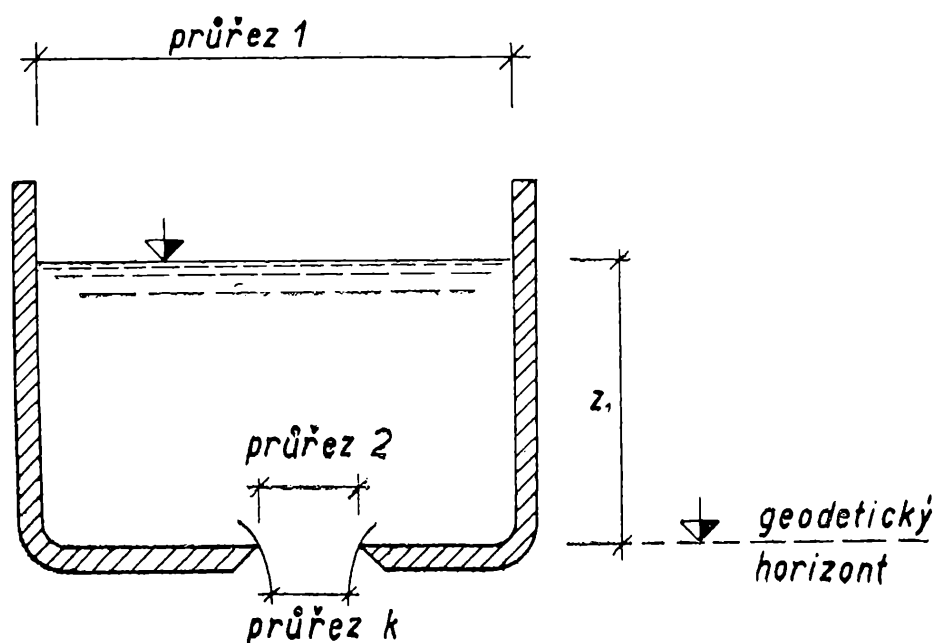
$$\frac{v_2^2}{2g} \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) = z_1 + \frac{p_1 - p_2}{sg} ; \quad (12)$$

dosadíme-li poměr průřezových ploch $\frac{S_2}{S_1} = n$ a upravíme, je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g \left(z_1 + \frac{p_1 - p_2}{sg}\right)}{1 - n^2}} . \quad (13)$$

Je-li měrný tlak p_1 na vtokový otvor S_1 stejný jako p_2 na výtokový otvor S_2 čili $p_1 = p_2$, platí:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gz_1}{1 - n^2}} \quad (14)$$



Obr. 2

Je-li vtokový otvor dostatečně velký proti výtokovému otvoru, je možno položit $n \doteq 0$, pak je:

$$v_2 = \sqrt{2gz_1} . \quad (15)$$

Tuto rovnici odvodil již Toricelli (1608—47), žák Galileiův (1564—1642) a proto je zvana rovnicí Toricelliovou.

Je-li naopak rozdíl geodetických výšek malý, ale jsou velmi rozdílné tlaky a

současně poměr ploch vtokového a výtokového otvoru je takový, že můžeme přibližně položit $n \doteq 0$, docházíme k přibližnému vzorci:

$$v_2 \doteq \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{sg}} = \sqrt{2 \frac{p_e}{s}}, \quad (16)$$

kde $p_e = p_1 - p_2$ je přetlak.

Když jsme takto stanovili rychlost ve výtokovém otvoru, snadno určíme výtokový objem ze vzorce:

$$Q_2 = S_2 v_2, \quad (17)$$

neboť S_2 můžeme změřit a v_2 vypočítat ze shora uvedených rovnic.

Když budeme konfrontovat takto zjištěné hodnoty s hodnotami, naměřenými při pokuse, (např. tak, že měříme čas, za který se naplní stanovený objem výtokem kapaliny), zjistíme určité odchylky. Množství naměřené bude menší než vypočtené. Je to zaviněno tím, že voda se nechová jako ideální kapalina a dochází ke ztrátám.

První ztráta vzniká třením a způsobuje úbytek výtokové rychlosti přibližně o 3 % (pro vodu). Proto opravujeme výtokovou rychlost opravným koeficientem $\varphi \doteq 0,97$ a rovnice (10) pro vodu zní:

$$v_k = \varphi \sqrt{2g z_1} \quad (18)$$

Další ztráta průtoku je zaviněna tím, že průtokový průřez v nejužším místě S_k se nerovná ploše otvoru ve dně S_2 , nýbrž je menší:

$$S_k < S_2 \quad (\text{obr. 2}). \quad (19)$$

Proudění se totiž děje v plynulých dráhách, jež mění spojitě svůj směr a proto pokračují ve zúžení čili kontrakci, i ve volném výtokovém paprsku. Poměr:

$$\frac{S_k}{S_2} = \alpha \quad (20)$$

nazýváme s o u č i n i t e l e m k o n t r a k c e, čili zúžení; jeho velikost závisí na řadě okolností, zejména na uspořádání a hranách výtokového otvoru. Při dokonalém zúžení a ostrohranném otvoru je $\alpha = 0,64$. Při výpočtech průtočného objemu musíme uvažovat obě tyto ztráty a je tudíž:

$$Q_k = S_k v_k = \alpha S_2 \varphi v_2 = \alpha \varphi S_2 v_2 = \mu S_2 v_2, \quad (21)$$

kde $\mu = \alpha \cdot \varphi$ je součinitel výtoku a pro $\varphi = 0,97$ a $\alpha = 0,64$ je $\mu = 0,62$. Pro jiné uspořádání má μ jiné hodnoty - například pro výtok pod stavidlem do volna je $\mu = 0,7$.

Dosud jsme uvažovali jen otvor ve dně. Je-li otvor ve svislé stěně, lze použít stejných vzorců, pokud je otvor dostatečně malý proti jeho hloubce pod hladinou. Když je největší vzdálenost okraje otvoru od jeho těžiště $x_{\max}$ menší, nebo rovna hloubce těžiště pod hladinou H_t , dělené čtyřmi, pak je výsledná chyba výpočtu menší než 1 %, tj. pro

$$x_{\max} \leq \frac{H_t}{4}. \quad (22)$$

Důkaz tohoto tvrzení vyžaduje znalosti vyšší matematiky a proto jej neuvádíme.

Závěrem si pomocí uvedených rovnic spočítáme praktický případ, výpočet výtoku pod stavidlem:

Je třeba vypočítat výtok vody pod stavidlem do volna podle obr. 3, obdélníkovým otvorem, pro šířku $b = 2,5$ m, výšku otvoru $a = 0,2$ m, hloubku vody $z = 2,0$ m.

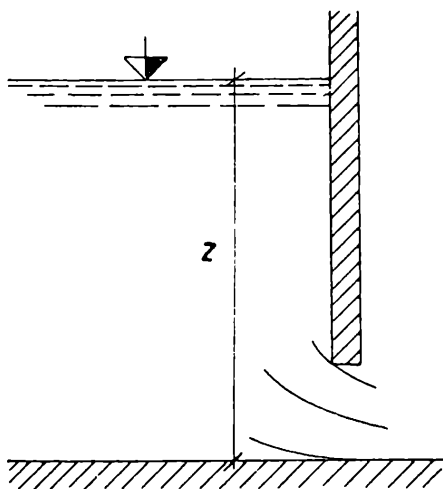
Zúžení výtokového paprsku nastává jen u hrany stavidla (součinitel výtoku $\mu = 0,7$); měrné tlaky na vtokový i výtokový průřez jsou stejné $p_1 = p_2$ (výtok se děje do volna) a zároveň plochu odtokového průřezu lze zanedbat proti přítokovému ($n \doteq 0$). Dále je splněna podmínka (22)

$$\frac{a}{2} \leq \frac{H_t}{4}, \text{ neboť } \frac{0,2}{2} < \frac{1,9}{4}, \text{ čili } 0,1 < 0,475, \text{ použijeme tudíž vzorce (15)}$$

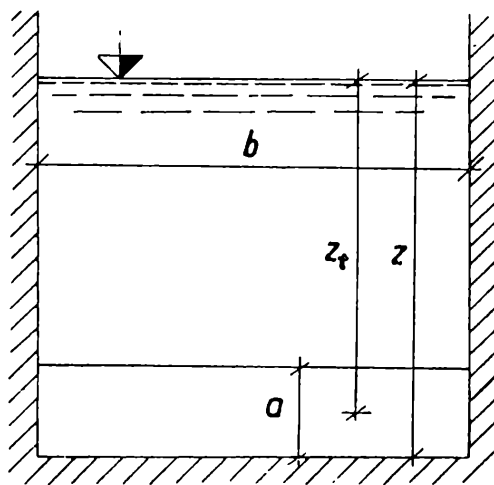
a (21) pro hloubku těžiště a dostáváme:

$$v_2 = \sqrt{2g z_t}; \quad Q = \mu S_2 v_2;$$

$$Q = \mu S_2 \sqrt{2g z_t} = 0,7 \cdot 2,5 \cdot 4,43 \cdot 1,9 \doteq 2,14 \text{ m}^3/\text{s}.$$



Obr. 3a



Obr. 3b

V tomto článku jsme se seznámili s jedním z jednodušších problémů hydrauliky a přece ve svých základech vyžadoval dosti složitý matematický aparát. Důsledky a praktické výpočty byly však poměrně jednoduché a snadno využitelné pro praxi. Tam, kde není možno shrnout do jednoduchých vzorců výsledky teoretických šetření, je nutno sestavit pro praktické použití nomogramy a tabulky, které umožní rychlé a dostatečně přesné výpočty. Tak se usnadní práce vodohospodářů, inženýrů a techniků, pro které jsou hydraulické výpočty jedním ze základních předpokladů navrhování a dimenzování hydrotechnických staveb a zařízení.

Skupenské přeměny vody

Stejně jako v přírodě, setkáváme se také ve fyzikální laboratoři s vodou ve všech třech skupenstvích. V tomto článku se budeme zabývat těmi vlastnostmi vody, které souvisí se změnami skupenství. Číselné údaje, které uvádíme o měřeních, platí pro destilovanou vodu, které se užívá skoro výhradně ve fyzikální laboratoři. V technické praxi se pak voda různým způsobem upravuje, aby neobsahovala rozpuštěné minerály a plyny, jež by při použití takové vody mohly působit nejruznější potíže.

Jednou z důležitých vlastností vody - stejně jako ostatních kapalin - je její schopnost *vypařovat se*. Představme si vodu v otevřené nádobě. Snadno bychom se mohli přesvědčit, že se voda vypařuje při každé teplotě; čím však je teplota vody vyšší, tím se voda vypařuje intensivněji. Vypařování si můžeme představit asi takto: Molekuly vody se pohybují různými směry a rychlostmi a mají tedy různé energie. Některé mají energii menší než střední energie, některé větší. Střední energie molekuly je úměrná teplotě vody. Jsou tedy při každé teplotě ve vodě molekuly, jejichž směr pohybu a rychlosti jsou takové, že stačí k překonání přitažlivých sil sousedních molekul a mohou tak uniknout z hladiny vody. Molekuly, které se takto vymanily z vody, tvoří páru. Je třeba podotknout, že tato pára je neviditelná. V atmosférickém vzduchu je vždy jisté množství vodních par, říkáme, že je vzduch vlhký. Energie, kterou musí mít molekula, aby mohla uniknout z vody určité teploty do vzduchu, je několikrát (5 až 15krát) větší než průměrná energie molekuly při této teplotě. Takových molekul je proto jen malý zlomek z celkového počtu molekul. Že z vody uniknou molekuly s největší energií, to se projeví ochlazením vody. Chceme-li teplotu vody udržet na stále výši, musíme ji ohřívat.

Je-li nádoba s vodou uzavřená, hromadí se „vypařené“ molekuly v nádobě v prostoru nad hladinou vody. Tyto molekuly při svém pohybu narážejí nejen na stěny nádoby, ale také na hladinu vody. Tak nastává opačný děj než vypařování - *kondenzace páry*. Množství molekul, pohlcených za určitou dobu, je (za jinak stejných podmínek) úměrné hustotě páry. Čím větší je hustota páry, tím více molekul kondenzuje. Když se vyrovná počet molekul vypařených za jednotku času s počtem zkondenzovaných molekul, nastane rovnovážný stav. Pára, která je v rovnováze s vodou, nazývá se *nasyčenou parou*; tlak nasycené páry se nazývá *tenzí páry*. Dá se ukázat, že tenze páry nezávisí ani na množství vody v nádobě, ani na množství páry; rovněž nezávisí na tom, je-li nad povrchem vzduch nebo jiný plyn (když ovšem s vodou chemicky nereaguje).

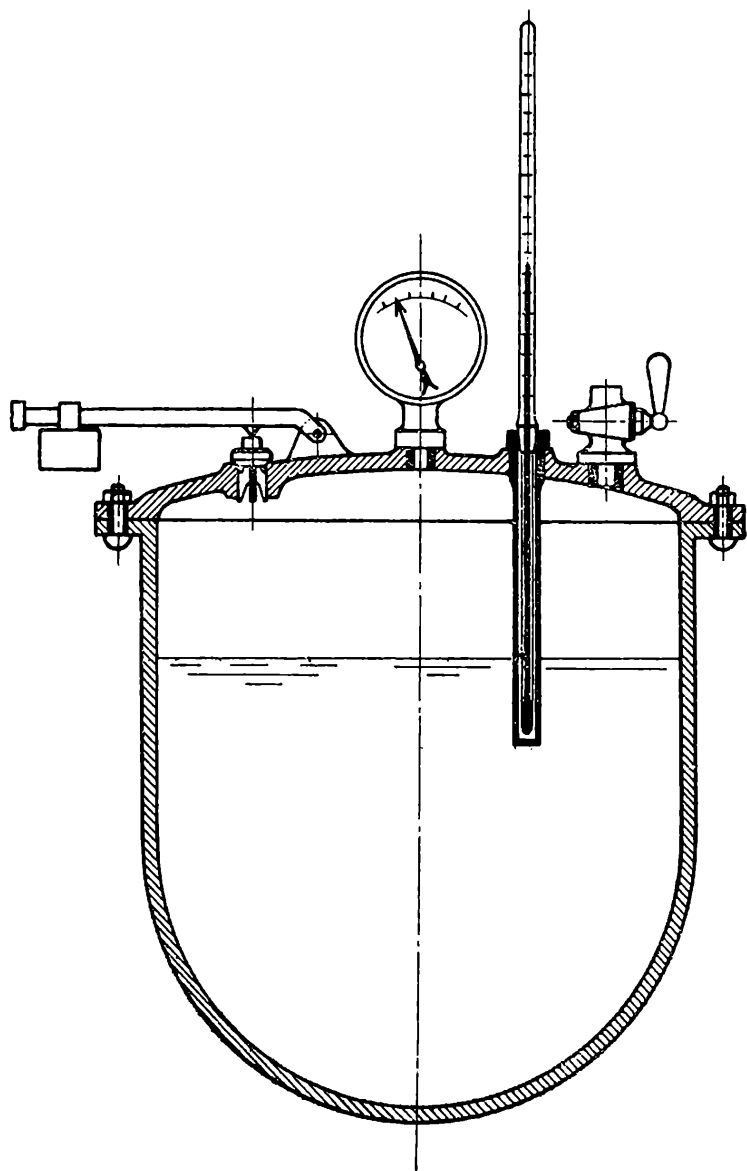
Tenze par závisí při rovinném povrchu (hladině) jen na teplotě.

Obecně závisí tenze par také na zakřivení povrchu. Tak např. nad drobnými kapkami je tenze par určena vztahem

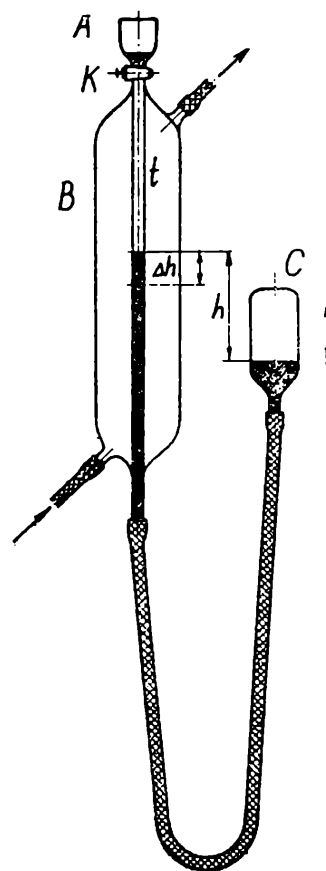
$$E = E_{rov} e^{\frac{2\sigma}{r} \frac{M}{\rho RT}},$$

kde E_{rov} je tenze par nad rovným povrchem při týchž podmínkách, σ je povrchové napětí, M je hmota kilogrammolekuly, ρ hustota nasycené páry při teplotě T a r znamená poloměr kapky.

Např. u kapek vody s poloměrem $r = 10^{-5}$ cm se zvýší tenze par na hodnotu $E = 765,49$ tor. Bod varu je pak vyšší o $0,174$ °C než bod varu vody s rovným povrchem. Toto zdánlivě nepatrné zvýšení podmiňuje různé tzv. metastabilní stavy (např. přesycení páry), jak o tom bude dále ještě zmínka.



Obr. 1a

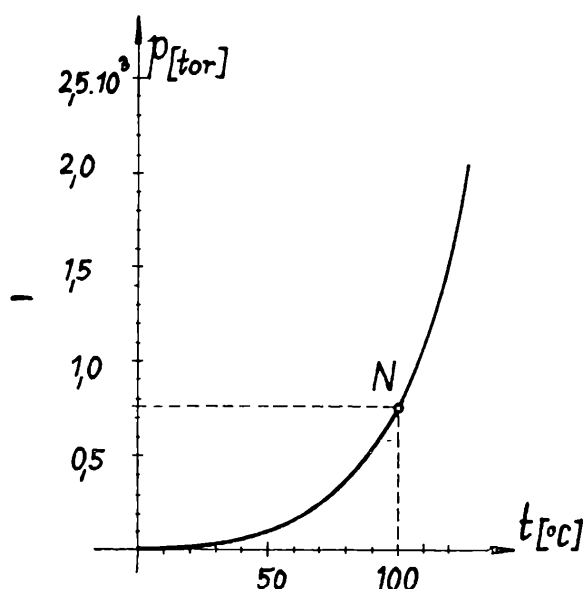


Obr. 1b

Tenze vodních par měřil první anglický inženýr James Watt (1736—1819) a to při teplotách pod normálním i nad normálním bodem varu. Později zkoumal tenze par různých kapalin anglický chemik John Dalton (1766—1844) a francouzský fyzik a chemik Henri Victor Regnault (čti reňol; 1810—1878). Při teplotách nad normálním bodem varu měřil Watt tenze vodních par pomocí Papinova¹⁾ kotlíku (viz obr. 1a), v němž se docílí pevným závěrem se záklopkou

¹⁾ Denis Papin (čti deny papén), francouzský fyzik (1647—1712).

varu při vyšších tlacích a teplotách. Při nižších tlacích než normálních lze tenze par stanovit v přístroji, schematicky znázorněném v obr. 1b. Ke skleněné trubici t , asi 1 m dlouhé, je nahoře přitaven kohout K , který se dále rozšiřuje v otevřenou nádobu A . Trubici t objímá další skleněná nádoba B , již proudí voda z termostatu. K spodnímu konci trubice t je připojena ohebná hadice s nádobou C , naplněnou rtutí. Zvedneme-li při otevřeném kohoutu K tuto nádobu do takové výše, že rtuť vystoupí v trubici až ke kohoutu a pak kohout zavřeme, vznikne při snížení nádoby C v trubici t vakuum. Vpustíme-li sem pak z jímky A malé množství vody, začne se voda rychle vypařovat. Po chvilce se utvoří mezi vodou a parou rovnováha. Tlakem páry se sloupec rtuti stlačí o délku Δh , která určuje tenzi par při teplotě $t = \text{konst.}$ (v torech). Výsledky měření při různých teplotách znázorníme diagramem v obr. 2a. Křivku znázorňující závislost bodu varu na tlaku, nazýváme



Obr. 2a

křivkou vypařování. Křivka vypařování končí pro všechny kapaliny v bodu K , který nazýváme kritický. Pro srovnání uvádíme v obr. 2b diagram ($p - T$) pro vodu a několik dalších látek. Kritický stav²⁾ je pro vodu určen:

$$p_K = 217,5 \text{ atm}, \quad t_K = 374^{\circ}\text{C},$$

kde p_K je kritický tlak a t_K kritická teplota.

Řekli jsme už, že voda se vypařuje při každé teplotě. Vypařování se však děje jen z volného povrchu (hladiny) vody. Od toho je třeba odlišit důležitý případ - v a r v o d y - kdy se pára vyvíjí v celém objemu vody a ve formě bublinek stoupá k hladině.

Var vody nastává při určité, stálé teplotě - bodu varu,³⁾ při níž tenze (napětí) par je rovna vnějšímu tlaku. Závislost bodu varu na tlaku je patrna z obr. 2 a, b.

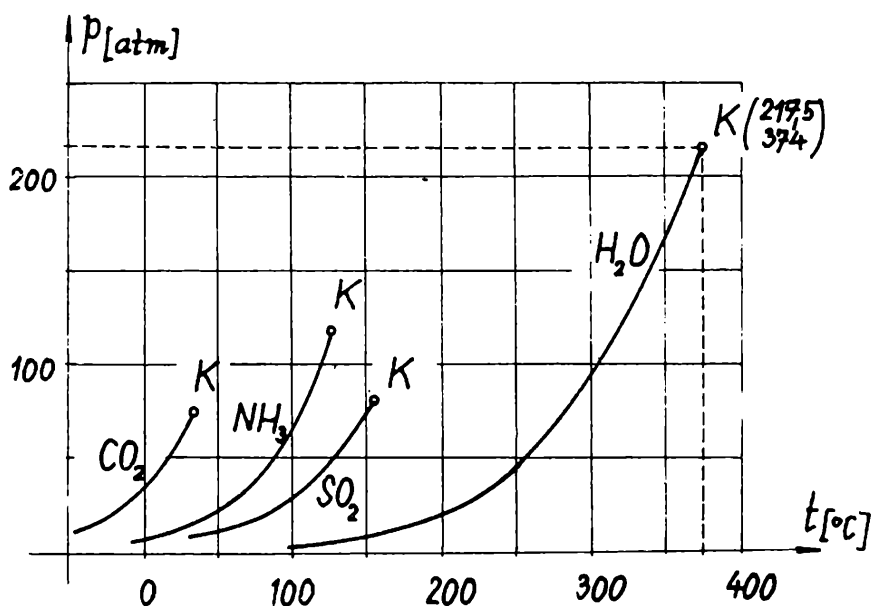
Normální bod varu je teplota, při níž se voda vaří za normálního tlaku (760 tor). V obr. 2 a je tento bod označen písmenem N . Teplota varu nemůže nabýt libovolných hodnot. V mezním případě může nabýt hodnoty, určené kritickým stavem soustavy voda - pára.

²⁾ Kritický stav objevil (u vody) r. 1822 francouzský badatel C a g n i a r d d e l a T o u r (čti kaňár d la túr; 1766—1859). Když měřil tenze par při vysokých teplotách, zjistil, že při teplotě 374°C mizí najednou rozhraní mezi kapalinou a parou a celý prostor zaujímáný oběma fázemi vody se vyplnil jednotnou látkou plynného skupenství. Označení „kritický stav“ zavedl irský fyzik T h o m a s A n d r e w s (čti tomas endrús; 1813—1885).

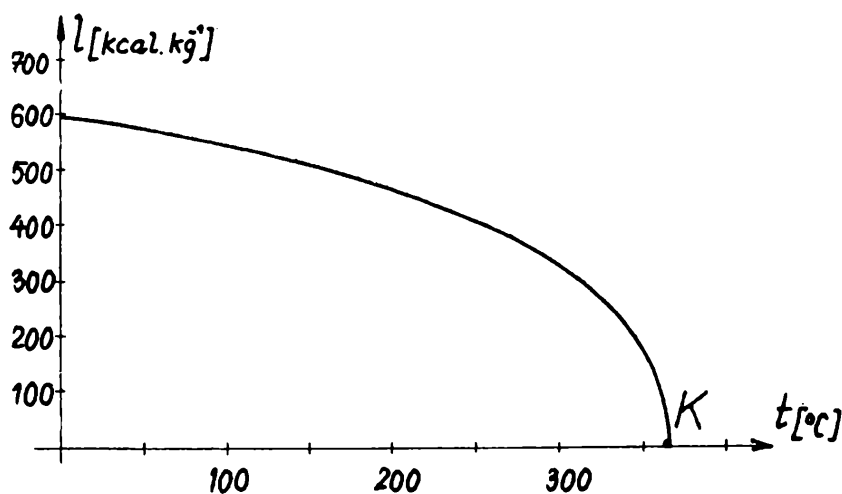
³⁾ Na tuto důležitou okolnost upozornil poprvé holandský fyzik C h r i s t i a n H u y g e n s (1629—1695), člen anglické vědecké společnosti „Royal Society“. Huygens a nezávisle na něm italský inženýr a profesor matematiky a filosofie v Pise C a r l o R i n a l d i n i pak navrhli, aby bod varu a bod mrazu vody byly zvoleny základními body teploměrné stupnice. Jejich návrh se však všeobecně ujal až asi po 50 letech.

Množství tepla Q , spotřebované k vypaření m kg vody dělené tímto množstvím, se nazývá v ý p a r n é t e p l o :⁴⁾

$$l = \frac{Q}{m} \text{ [kcal} \cdot \text{kg}^{-1}]$$



Obr. 2b



Obr. 3

Skupenské teplo závisí rovněž na tlaku (resp. na teplotě varu), jak je to patrné z obr. 3. Při kritickém stavu klesá výparné teplo k nule, neboť tu mizí rozdíl mezi oběma fázemi.

Zvýšení ΔT bodu varu v okolí teploty T , při zvýšení tlaku Δp , vypočítáme z tzv. Clapeyronovy rovnice

$$\Delta T = \frac{(v_2 - v_1) T}{l} \Delta p ,$$

⁴⁾ První správně definoval toto teplo a také je měřil anglický chemik Joseph B l a c k (čti žouzel blek; 1728–1799).

v níž v_2 je specifický objem páry, v_1 je specifický objem vody (obojí při teplotě T), T je absolutní teplota varu.

V okolí normálního bodu varu $T = 373\text{ °K}$ je při zvětšení tlaku $\Delta p = 1\text{ tor}$ ($1\text{ atm} = 760\text{ tor} = 1,013 \cdot 10^5\text{ Nm}^{-2}$)

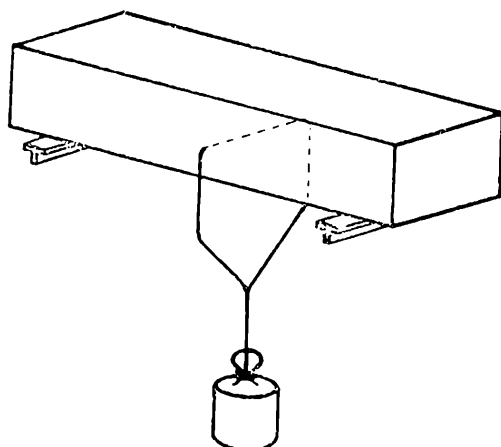
$$\Delta T = \frac{(v_2 - v_1) T}{l} \Delta p =$$

$$= \frac{(1,674 - 0,001) [\text{m}^3\text{kg}^{-1}] 373 [\text{°K}]}{539,7 [\text{kcal kg}^{-1}] 4186 [\text{J. kcal}^{-1}]} \cdot \frac{1,013 \cdot 10^5}{760} [\text{Nm}^{-2}] \doteq 0,037\text{ °K}$$

Tohoto výsledku můžeme užít k stanovení přibližné závislosti bodu varu na barometrickém tlaku b (v torech)

$$t \doteq 100 + 0,037 (b - 760).$$

Zajímavá je také změna skupenství kapalného v tuhé a opačně (voda $\leftrightarrow$ led). Podrobněji se touto změnou zabýval anglický fyzik Robert Boyle (1627—1691), jenž si také prvý všiml toho, že *led taje při stálé teplotě*, které dnes říkáme - b o d m r a z u (tání). Za tepelné izolace jsou voda a led v rovnováze. Kdybychom tuto



Obr. 4

soustavu ohřívali, bude přibývat vody, při ochlazování ledu - teplota soustavy však bude stále táž. Jak už jsme se zmínili, byla tato teplota zvolena jedním ze základních bodů teploměrné stupnice.

Bod tání závisí mírně na tlaku, kterému je vystaven tající led. R. 1849 zjistili bratři James a William Thomson (lord Kelvin), že při tlaku 8 atm taje led při teplotě asi o $\frac{1}{20}\text{ °C}$ nižší a při tlaku 17 atm o $\frac{1}{2}\text{ °C}$ nižší než při normálním tlaku. V diagramu $p - T$ na obr. 6 - je proto skupenská přeměna led - voda znázorněna mírně vlevo odkloněnou čarou.

Teplo Q , potřebné ke změně skupenství m kg vody, dělené tímto množstvím, nazýváme s k u p e n s k é t e p l o t á n í:

$$l = \frac{Q}{m}.$$

Voda má vysoké skupenské teplo tání $l = 79,67\text{ kcal/kg}^{-1}$, větší než většina ostatních látek. Pro srovnání uveďme např. skupenské teplo tání pro ethylalkohol 24,3, glycerin 42,0, benzen 30,4, rtuť 2,7, olovo 5,9.

Voda patří k několika málo látkám (olovo, zinek, cadmium), které mají v kapalném skupenství menší objem než v tuhém ($v_2 < v_1$). Proto dostáváme z Cla-

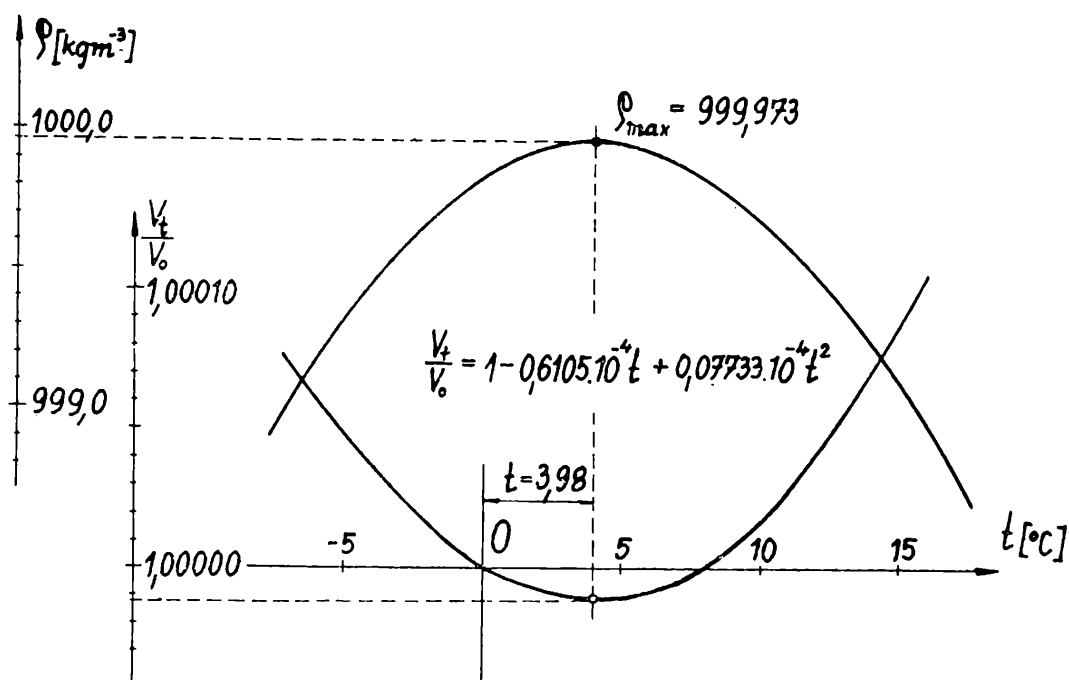
peyronovy rovnice při zvýšení tlaku $\Delta p = 1 \text{ atm}$ pro zvýšení teploty tání zápornou hodnotu

$$\Delta T = \frac{(v_2 - v_1) T}{l} \Delta p =$$

$$= \frac{(1,000\,12 - 1,090\,70) \cdot 10^{-3} \cdot 273}{79,7 \cdot 4186} 1,013 \cdot 10^5 = -0,007\,5 \text{ } ^\circ\text{K}.$$

Na tomto snížení je založen jev, který nazval Michael F a r a d a y (1791—1867) - *regelace* (tj. opětne zmrznutí) *vody* a celá řada dalších poznatků, např. vznik ledových kolejí ve sněhu za povozy, tání ledu pod bruslemi, sesouvání ledovců atd. Na obr. 4 je schematicky nakreslen pokus, kterým názorně ukázal regelaci vody profesor glasgowské university James B o t t o m l e y. Přes kvádr ledu je přehozena smyčka, na níž je zavěšeno závaží 10 až 20 kg. Čtenář si jistě sám domyslí průběh pokusu.

Pro vodu je charakteristická také *nepravidelnost* (anomálie) *při změně objemu s teplotou*.⁵⁾ Objem vody v závislosti na teplotě lze vyjádřit vztahem



Obr. 5

$$V_t = V_0 (1 - 0,610\,5 \cdot 10^{-4} t + 0,077\,33 \cdot 10^{-4} t^2).$$

(V_0 je objem při teplotě $t = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$.) S teplotou vzrůstající od $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ se nejprve objem zmenšuje, minima nabývá při teplotě $t = 3,98 \text{ } ^\circ\text{C}$, pak teprve vzrůstá, a to stále rychleji. Tato výjimka má velký význam v přírodě. Ochladuje-li se voda v řekách a rybnících studeným atmosférickým vzduchem, klesá ochlazená voda ke dnu a vyměňuje si místo s teplejší vodou ze spodních vrstev. Cirkulace však

⁵⁾ Toto odlišné chování vody objevil r. 1772 švýcarský geolog a meteorolog Jean André D e l u c (čti žán delyk; 1727—1817). Názorný pokus stanovení teploty, při níž má voda nejmenší objem, navrhl Benjamin R u m f o r d.

ustává, když teplota povrchových vrstev klesne pod 4°C . Pod touto teplotou má totiž menší hustotu než při 4°C (kdy dosahuje maximální hodnoty; viz diagram na obr. 5) a zůstává již při povrchu. Mrzne tedy od povrchu a pod ledem si udržuje stále teplotu kolem $+4^{\circ}\text{C}$.

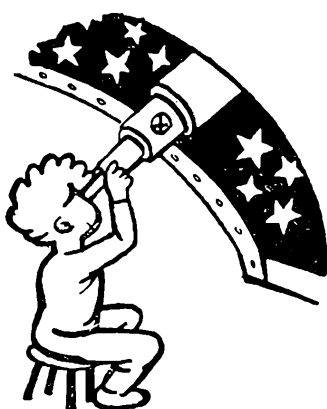
Ještě významnější je u vody velmi malá změna specifického tepla⁶⁾ s teplotou. Proto bylo vody užito k definici jednotky tepla - kalorie.

Kalorie je množství tepla, potřebné k ohřátí 1 gramu destilované vody ze $14,5$ na $15,5^{\circ}\text{C}$ - je to tzv. kalorie patnáctistupňová, či Maxwelllova.⁷⁾

S jednotkami energie v soustavě MKS souvisí vztahem vyplývajícím z mnohokrát opakovaných měření ekvivalentu tepla:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}, \quad 1 \text{ kcal} = 4,186 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

(Pokračování)



astronomie

Oldřich Lepil, DŠŠ, Gottwaldov:

350 roků dalekohledu v astronomii

V letošním roce vzpomínáme výročí, které se stalo mezníkem ve vývoji poznání vesmíru. V roce 1610 namířil slavný Galileo Galilei poprvé k noční obloze malý, devětkrát zvětšující optický přístroj dalekohled (obr. 1). Až do tohoto okamžiku byly jedinou pomůckou astronomů nejrůznější úhloměrné přístroje, kterými sledovali a proměřovali pohyb kosmických těles po nebeské sféře. Tato pozorování přinesla sice lidstvu Koperníkovu heliocentrickou soustavu a Keplerovy zákony nebeské mechaniky, ale nic neřekla o vlastnostech těles ve vesmíru. I ty nejjasnější planety se neozbrojenému oku jevily jako body, celkový počet viditelných hvězd byl malý a malé se zdály i rozměry vesmíru.

⁶⁾ Že k stejnému ohřátí je pro různé látky třeba jiného množství tepla, to seznal již Fahrenheit. Vysvětlení podal první Joséph Black. Přisoudil různým látkám různou jímavost pro teplo, či tepelnou kapacitu. Pojem specifické teplo zavedl r. 1784 finský chemik Jan Gadolin (1760–1852). Specifické teplo definujeme výrazem

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

v němž m je hmota tělesa, ΔQ množství tepla potřebného k ohřátí o Δt stupňů. Tepelná kapacita zavedená Blackem je dána součinem

$$K = mc$$

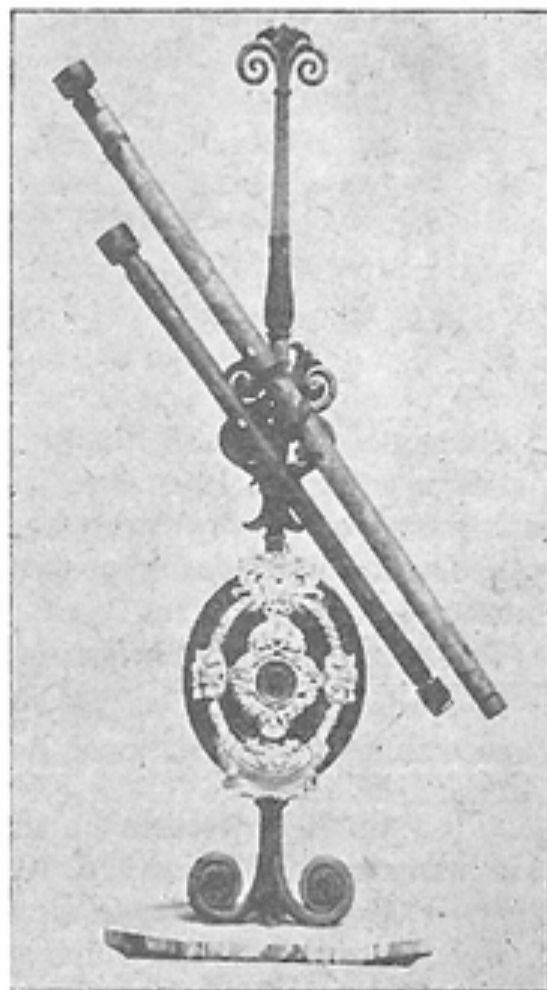
⁷⁾ James Clarc Maxwell (1831–1879), anglický fyzik.

První zprávy o dalekohledu máme z doby o několik let dříve. Již v roce 1604 byl v Holandsku sestroyen malý dalekohled, který se odtud zanedlouho rozšířil po Německu, Francii, Belgii a Itálii. Galileo se o vynálezu dověděl počátkem roku 1608 a aniž přístroj viděl, snažil se z kusých zpráv přijít na myšlenku celého zařízení. S pohotovostí génia uhodl nejen teoretické základy dalekohledu, ale i zásady jeho konstrukce. Prvními výsledky se pochlubil benátské šlechtě v srpnu následujícího roku a nabídl přístroj vládě benátské republiky jako výbornou vojenskou pomůcku, pomocí níž lze včas spatřit nepřátelské loďstvo.

Dalekohled, který Galilei použil k astronomickým pozorováním, sestrojil na podzim roku 1609. Spojná čočka tvořila objektiv a rozptylka okulár. Zvětšení prvních přístrojů nebylo nijak veliké, ale dalším zlepšením optické soustavy dosáhl zvětšení šedesátinásobného a nakonec více než tisícinásobného. Astronomická pozorování zahájil Galilei v prvních měsících roku 1610 a zakrátko nashromáždil takové množství nových poznatků o vesmíru, že se to snad nepodařilo jeho předchůdcům za celou dobu trvání astronomie.

Množství objevů přimělo Galileiho, aby v latinsky psaném spise s názvem *Sidereus nuntius* (Hvězdný posel) seznámil tehdejší učený svět se svým pozorováním. Rozsahem nevelký spis vyšel v březnu roku 1610. Jsou zde vypsány objevy horských útvarů a moří na Měsíci, složení mléčné dráhy z jednotlivých hvězd a objev Jupiterových měsíců. První tři měsíce spatřil Galilei 7. ledna a za tři dny potom objevil ještě čtvrtý. Hvězdný posel vzbudil v poměrně krátké době zasloužený obdiv všech povolaných učenců své doby.

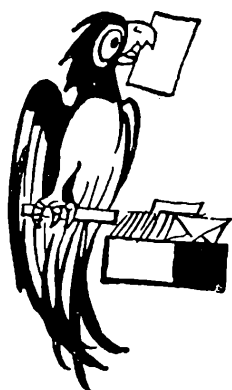
Řada skvělých objevů pokračuje. Dne 25. července zpozoroval Galilei ke svému překvapení, že se planeta Saturn objevuje se dvěma tělesy. Tento zajímavý úkaz sledoval až do roku 1613, avšak záhadu složitého tvaru Saturna nerozluštil. Připravil jen cestu k Huygensovu objevu Saturnova prstence v roce 1659. Když Galileo v červenci a srpnu prohlížel Slunce, objevil na jeho povrchu plno skvrn. Pustil se do jejich sledování. Zpozoroval, že se skvrny mění, tvoří a znovu zánikají a že se otáčejí spolu se Sluncem. Z toho určil rotaci Slunce a skvrny přisoudil jeho povrchu. Proti tomuto tvrzení vystoupila řada odpůrců, kteří byli ochotni připsat skvrny sklům dalekohledu, bludným hvězdám mezi Sluncem a



Obr. 1. Galileovy dalekohledy

Zemí, jen ne Slunci samému, které bylo symbolem božské čistoty. Bohatý rok byl ukončen pozorováním zatmění Měsíce a objevem fází planety Venuše, jenž znamenal významné potvrzení správnosti představ Koperníkových.

Galileo Galilei dal dalekohledem do rukou astronomů nejen důležitou pomůcku pro zkoumání vesmíru, ale jeho objevy, tímto přístrojem učiněné, se staly mohutnou oporou rodící se vědecké astronomie. Byly začátkem vítězného boje, který astronomie svedla s nevědomostí a nevědeckým tmářstvím církve, za právo vědecky zkoumat přírodu. A v tom je také největší význam výročí, jehož v tomto roce vzpomínáme.



Různé

— Adolf Kodým, Praha:

Kam až?

Pokusme se naznačit některé špičkové výkony v numerických výpočtech. Moderní matematické počítačí stroje mohou dát číselné výsledky mající i několik tisíc míst. Početní problémy, které dříve vyžadovaly mnohaletou práci nebo byly vůbec pro jednotlivce neproveditelné, vypočítávají v čase měřeném na pouhé minuty.

Tak např. byla vypočítána mocnina 2^{8191} (viz Scripta Mathematica, sv. XVII, 1951), odmocnina $\sqrt[3]{2}$ na 1544 desetinných míst, $\sqrt[3]{3}$ na 1316 desetinných míst (Proceedings of the national Academy of sciences of the USA, sv. 37, 1951), $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ na 709 desetinných míst a $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$ na 478 desetinných míst (Scripta Mathematica, sv. 18, str. 175, 1952). Největší známé prvočíslo bylo až do nedávna $2^{2281} - 1$ (Revista de Matemáticas Elementales, sv. IV, str. 45, 1955).

Byly a jsou vydávány velké mnohamístné tabulky nejen pro násobení (A. L. Crelle, Rechentafeln, Produkte bis 9999 mal 999, r. 1954), ale i pro logaritmování, a to např. dvacetimístné (A. L. Thompson, Logarithmica Britannica, Cambridge, 1924—1954), či dokonce na 52 míst (J. Peters und J. Stein, 52 stellige Logarithmen, Berlin, 1919). Také existují tabulky pro binomické koeficienty až do 200 (Royal Soc. Math. Tables, Cambridge 1954) a tabulky faktoriálů až pro 200! (H. S. Uhler, Exact values of the first 200 factorials, New Haven, 1944). Jak vypadá číslo 1000! vypočtené v r. 1956 (Scripta Mathematica, sv. XXI), nelze si ani představit.

A to vše jsou rekordy včerejška, které když ne dnes, pak určitě v krátké době budou překonány, zvláště bude-li to praktická potřeba vyžadovat.

Bolyai János

(15. 2. 1802 — 27. 1. 1860)

Koncem ledna vzpomínal celý matematický svět stého výročí smrti spoluobjevitele neeuklidovské geometrie Jánose Bolyaie. J. Bolyai se narodil v sedmihradské Kluži jako syn statkáře v Domáldu, malé obci u města Maros-Vásárhely. Jeho otec Farkas (Volfgang) Bolyai studoval v Německu a spřátelil se v Gotinkách s největším německým matematikem první poloviny XIX. století, o dva roky mladším Karlem Bedřichem Gaussem. Společným poutem obou přátel byla velká láska k matematice - Farkas Bolyai jako vynikající matematik byl povolán na místo profesora matematiky, fyziky a chemie na evangelickém reformovaném gymnasiu v Maros-Vásárhely. Napsal několik matematických děl, v nichž jsou náznaky myšlenek, které byly teprve v pozdějších dobách propracovány. Po celý život se Farkas Bolyai marně snažil dokázat slavný Euklidův axióm o rovnoběžkách. A zde leží kořen toho, čím se proslavil jeho syn János Bolyai (čti jánoš bojaj).

János Bolyai byl nadprůměrně nadaným dítětem se zvláštním sklonem k matematickým vědám. Chybou však byla přílišná láska rodičů k dítěti a otcův obdiv k jeho neobvyklému nadání. Tím podporoval jeho přílišné sebevědomí. Tyto okolnosti vypěstovaly v jeho povaze kazy, které byly příčinou mnohých strastí.

Přáním Farkase Bolyaie bylo, aby János se stal Gaussovým žákem. Když bylo chlapci 15 let, žádal Farkas Gauss, aby Jánose přijal na tři roky do své rodiny a usměrňoval jeho matematická studia. Gauss, který měl 4 děti a jehož manželka byla vážně nemocná, na tuto žádost neodpověděl. Když takto Farkasovy naděje ztroskotaly, získal Farkas pro syna podporu, která mu umožnila studovat nákladnou vojenskou inženýrskou akademii ve Vídni. János tu brzy vynikl, snášel však těžce přísnou vojenskou kázeň.

R. 1823 byl János Bolyai jmenován podporučíkem a sloužil v několika garnizónách, naposledy jako setník v Olomouci. V následujících dvou letech vypracoval první nárys neeuklidovské geometrie, v níž neplatí Euklidův rovnoběžkový axióm. Tento axióm v moderním tvaru tvrdí, že lze v rovině vést bodem ležícím mimo přímku jednu a to jedinou rovnoběžku. Tento axióm se liší od ostatních geometrických axiómů, jimiž Euklides (žil kolem r. 300 př. n. l.) počíná své slavné dílo „Základy“, které podává přesně vybudovanou soustavou geometrie a jež se stalo základem matematického vyučování až do XIX. století.

Tato odlišnost rázu rovnoběžkového axiómu způsobila, že již řeční matematici pochybovali o tom, že věta o rovnoběžce je axiómem, tj. poučkou na ostatních axiómech a poučkách nezávislou, z nich nedokazatelnou, ze skutečnosti odpozorovanou, nýbrž že ji lze logickými úvahami odvodit z jiných axiómů a již dříve dokázaných pouček. Proto se pokoušeli matematicové po dvě tisíciletí dokázat rovnoběžkový axióm, avšak marně. Vždy se ukázalo, že v důkaze je nějaká skrytá chyba.

János Bolyai byl původně veden myšlenkou dokázat Euklidův axióm nepřímou, totiž propracovat geometrii, kde tento axióm neplatí do všech důsledků, až by došel k výsledku, v němž by se kryl zřejmý spor. Na této myšlence lpěl po léta, avšak nepodařilo se mu takový spor najít. Při tom objevoval podivuhodné vlastnosti nové geometrie. Teprve pomalu přicházel k přesvědčení, že vpravdě objevil novou geometrii, v které není sporu a která by teoreticky mohla existovat.

Farkas Bolyai vydal r. 1832 latinský spis „Pokus uvést studující mládež do základů matematiky“, kde chtěl podat přísně logicky skloubenou soustavu této vědy a kde je mnoho nových myšlenek. K tomuto spisu byl připojen latinský dodatek, „Appendix“, z pera jeho syna Jánose, kde tento podal ve zhuštěném tvaru soustavu své nové geometrie. Farkas Bolyai v otcovské hrdosti poslal již r. 1831 první otisk Gaussovi s prosbou o posudek. Gauss odpověděl až po několika měsících, že jej „Appendix“ překvapil, neboť jsou v něm vysloveny myšlenky, k nimž Gauss došel již před 30 léty, které však nepropracoval a neuveřejnil jen proto, že by pro ně nebyl našel u současníků pochopení. János Bolyai byl těžce dotčen tím, že si Gauss osobuje prioritu objevu neeuklidovské geometrie. „Appendix“ nedošel povšimnutí v tehdejší matematice. Teprve když po Gaussově smrti (1855) byly vydávány Gaussovy dopisy, v nichž se Gauss pochvalně vyslovuje o „Appendixu“ a o pracích Lobačevského, vzal matematický svět na vědomí objev neeuklidovské geometrie a rozvinul tuto nauku v bohaté odvětví matematiky.

Tento neúspěch roztrpčil Jánose Bolyaie na celý jeho další život. R. 1832 střetl se prudký János s pruskými celníky tak ostře, že si tito stěžovali u rakouské vojenské správy a János Bolyai byl r. 1833 dán do výslužby s malou penzí setníka. Když dostal od otce r. 1848 Lobačevského spis „Výzkumy“, začal znovu horečně pracovat jednak na kritice tohoto spisu, jednak na důkladném vybudování své neeuklidovské geometrie. Avšak výsledkem toho při jeho náladovosti byly jen nedokončené rukopisy.

János Bolyai se cítil povolán zreformovat lidstvo. Poslední léta svého života věnoval vybudování nového náboženství, tzv. „nauky o všebláženosti“, založené na pravdě a lásce, kde by stála na předním místě věda a matematika, kdežto z umění připouštěl jen hudbu jakožto úzce souvisící s matematikou. Avšak ani tuto nauku nepropracoval a zanechal jen ve své pozůstalosti četné nedokončené náčrtky.

Po dlouhé těžké nemoci zemřel János Bolyai opuštěn. To byly osudy muže, matematicky výminečně nadaného, jemuž nerozumná výchova a nepochopení současnosti zabránily vykonat to, co slibovalo jeho skvělé nadání, muže, který jediným dílkem, svým „Appendixem“, se postavil mezi přední matematiky světa.

Literatura:

P. Stäckel: Wolfgang und Johann Bolyai, 1913.

F. Schmidt: Mitteilungen über Johann Bolyai. (Jahresber. d. D. Math.-Ver., 1897, str. 107—109.)

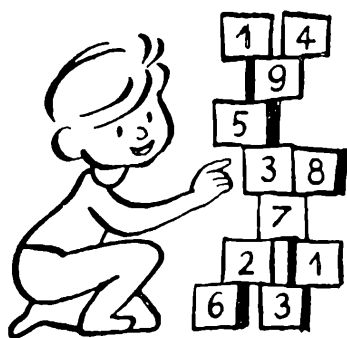
F. Schmidt: Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya. (Abh. zur Gesch. d. Math., 1898, str. 138—146.)

L. Schlesinger: Johann Bolyai. (Jahresber. d. D. Math.-Ver., 1903, str. 165—194.)

V. Varičák: Bemerkung zu einem Punkte in der Festrede L. Schlesingers' über Johann Bolyai. (Jahresber. d. D. Math.-Ver., 1907, str. 320—321.)

S. Wiesner: Zur Biographie Johann Bolyais. (Jahresber. d. D. Math.-Ver., 1920, str. 130—135.)

Matematické zábavy



Zapomnětlivý prodavač

Prodavač ovoce a zeleniny zapomněl doma závaží. Požádal proto svého kolegu v povolání, aby mu půjčil nějaká závaží. Ten mu však místo závaží dal čtyři různě těžké kameny a pravil: „Tyto kameny po řadě váží 1 kg, 3 kg, 9 kg a 27 kg. Můžeš proto pomocí nich navážít zboží, jehož váha je vyjádřena celým číslem od 1 kg do 40 kg.“

Čtenář se může nyní přesvědčit, že majitel kamenů mluvil pravdu. Je možné i sestavit tabulku, z níž by bylo patrné, jak by vážil 2 kg, 4 kg, 5 kg . . . , 39 kg.
S. H.



Recenze

Malý technický slovník naučný

B. Dobrovolný, K. Andrlík, A. Hoch: *Malý technický slovník naučný*. Stran 1012, obrázků 2154, hesel asi 8000. SNTL Praha 1959. Druhé přepracované vydání. Cena Kčs 77 za vázaný výtisk.

Slovník vysvětluje srozumitelnou formou základní teoretické pojmy z matematiky, fyziky, mechaniky, chemie, elektrotechniky i jiných technických oborů. Podává ve zhuštěné formě přehled technologií jednotlivých výrobních odvětví, především strojírenství a stavebnictví, jímž se u nás dnes věnuje největší zájem. Pro ty, kterým při studiu pomáhá více obrazotvornost a při vybavování představa, jsou ve slovníku uvedeny velmi četné náčrtky, kresby a vyobrazení.

Slovník podává rychlé a srozumitelné informace i poučení o technických problémech, s nimiž se nejčastěji setkáváme jak v praxi, tak i při studiu. Je velmi vhodnou pomůckou zejména pro polytechnické vyučování na všeobecně vzdělávacích školách, i na odborných školách průmyslových, ale bude velmi vhodnou pomůckou také pro širší veřejnost. Nové vydání by nemělo chybět ani v učitelské, ani v žákovské knihovně.

Knížka má pěknou úpravu, je vázána v plátně, opatřena praktickou lakovanou obálkou a má vhodný příruční formát.

K. Šoler

Redakční sdělení

Soutěž o nejlepší rys.



Inž. arch. Josef Švastal, ČVUT. Praha:

Rysy se stavební tematikou

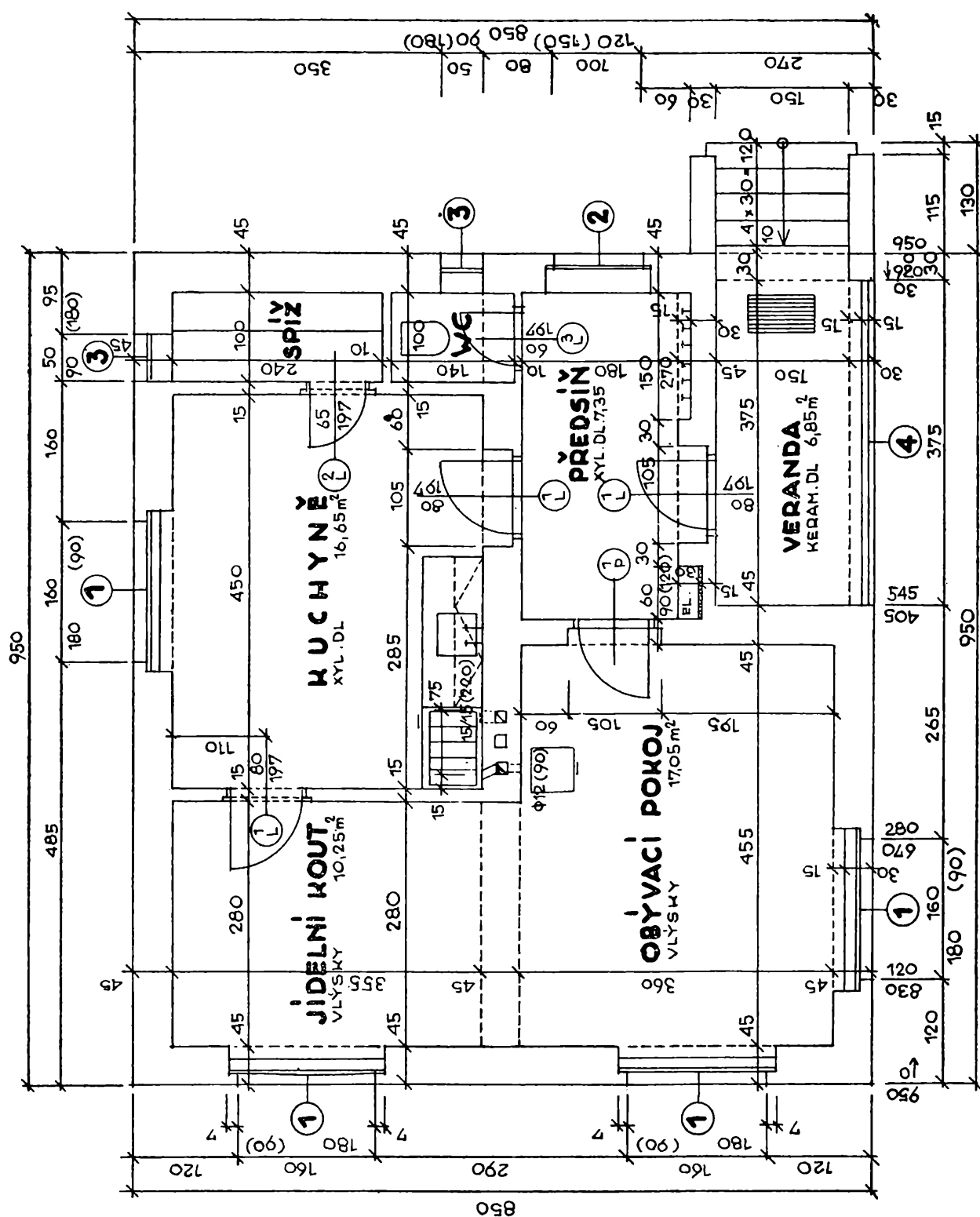
(Pokračování)

Celkový postup ve výuce rýsování stavitelských výkresů od cvičení v kreslení a popisování až po zakreslení značek pro technické zařízení jsem podal v obou článcích v tomto časopise. Znalosti obsahu a metody práce, které jsem nastínil spolu s pravidly zobrazování, tvoří nezbytný podklad pro aplikaci v polytechnické výchově při deskriptivní geometrii. Mohou být seznámením s rozsahem a uvedením do studia, poněvadž obsahují základní názvosloví a metodu i zvyklosti rýsování stavebních výkresů. K doplnění a prohloubení studia je ovšem nutno se obrátit na úvodní statě odborné literatury, například pro kreslení: Odborné kreslení pro I. a II. ročník průmyslových škol stavebních, a pro stavitelství: Přehled stavitelství (Práce 1950), pokud nebude vydána polytechnickému účelu lépe vyhovující pomůcka.

Text k obr. 1 a 2.

Půdorys stavebního díla (v našem případě rodinného domku izolovaného) je kreslen jako vodorovný řez ve výši asi 120 cm nad podlahou. Jsou tedy v půdorysu zakresleny zdi a příčky a v nich otvory oken a dveří. Hrany konstrukcí, které jsou nad rovinou řezu, kreslíme v půdoryse čárkovaně; proto v okenních otvorech v případě ustoupeného parapetu za líc zdi je nakreslena hrana okenního nadpraží. U dveří bez prahu je čárkovaně zakresleno nadpraží i horní část zárubně, zatímco u dveří s prahem je čárkovaně zakresleno jen nadpraží, prah plně. Okna užíváme dnes téměř výhradně jen zdvojená (obě zasklená křídla

jsou spolu sepnuta a otevírají se najednou a rozevírají se jen při čištění) pro úsporu dřeva. Ostění pro ně děláme bez ozubu, nebo s jedním ozubem pro lepší těsnění. Okno kótujeme zlomkem na kótovací čáře: šířka/výška, tedy 160/180 cm s udáním výšky spodní hrany - kóta v závorce (90). Dveřní křídlo je osazeno v zárubni obvykle ocelové a dveře jsou kóto-



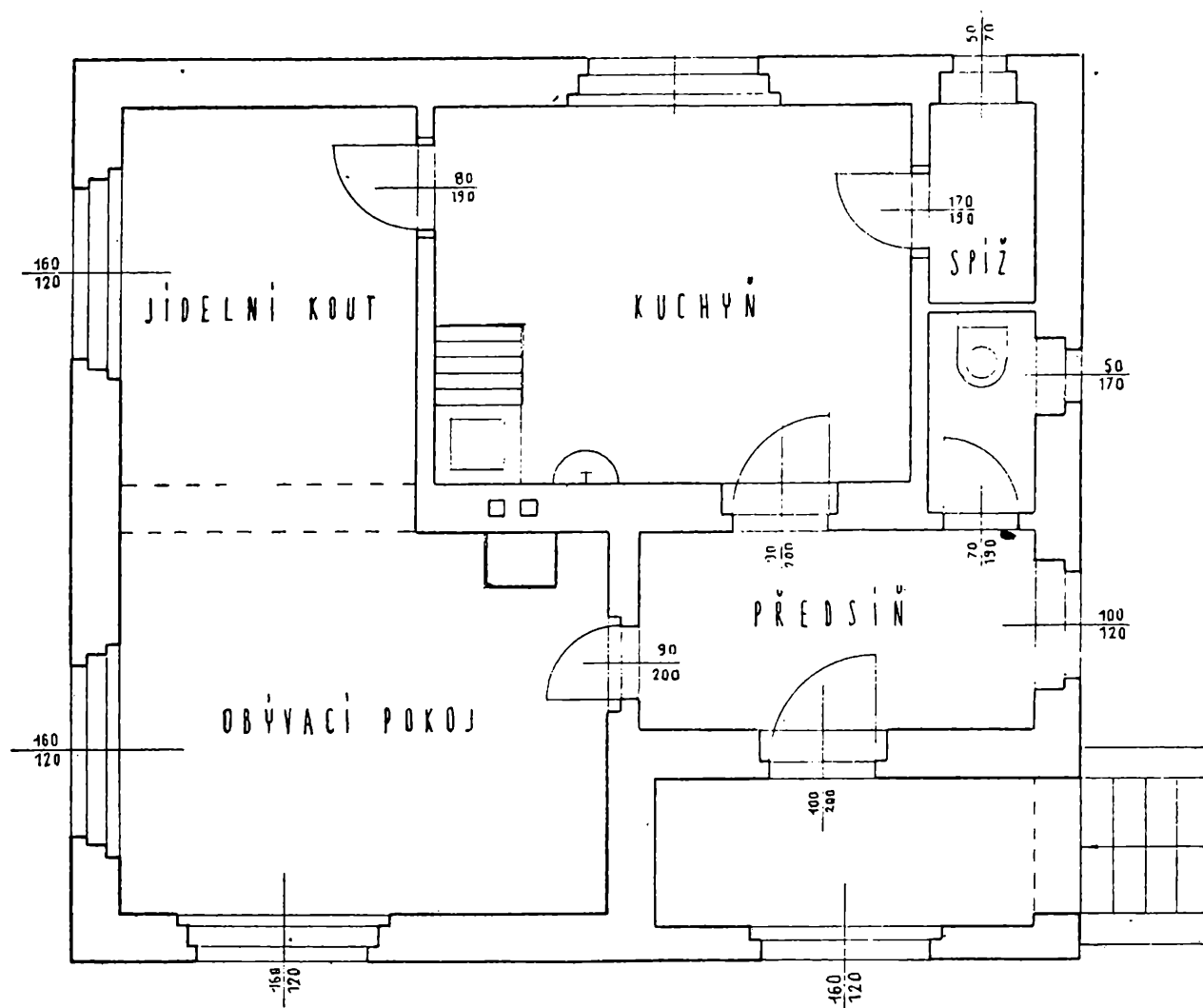
Obr. 1. Vzorň provedený námět z obr. 2.

vány světlým rozměrem šířka/výška tedy 80/197 cm. Jsou-li dveře ve zdi, např. 45 cm tl., kótuje se celý otvor a jeho poloha na průběžné kótě střední zdi. Jsou-li v příčce, kótuje se poloha osy dveří od nosné zdi. Nekótuje polohu dveří v příčce (např. u WC a špiže),

kteře jsou jednoznačně určeny. Velikosti nik v předsíni jsou určeny polohou a velikostí. Nika pro elektroměr El. je 60/90 (120) a hluboká 30 cm. Nika pro věšákovou stěnu má rozměr 150/270 cm a začíná od podlahy. Obr. 1.

Kuchyňské zařízení je sestaveno ze sporáku a pracovního stolu s dřezem. Nad stolem jsou skřínky na nádobí. Kuchyňský sporák a kamna z pokoje jsou zaústěny do jednoho komínu a pro odvětrání kuchyně je ventilace s mřížkou 15/15 cm velkou ve výši 220 cm. Do půdorysu jsou zakresleny předměty, které jsou součástí stavby: sporák, stůl s dřezem a skřínkami, kamna v pokoji, zdravotní zařízení WC, předsíňová věšáková stěna a škrabák na boty na verandě.

Celý půdorys je prokótován, čili opatřen rozměry v cm tak, aby mohl být realizován. Zásadou je, že všechny kóty jsou provedeny průběžně tak, aby mohly být kontrolovány součtově s celkovou kótou délky a šířky budovy. Provedeny jsou kóty kolem budovy, na nichž jsou celkové rozměry a velikosti oken a jejich poloha. Na dolní kótě je zaznamenáno staničení otvorů okenních zprava i zleva.



Obr. 2. Kreslil F. Andrlé, JŠŠ. Chotěboř.

Uvnitř půdorysu jsou kóty určující tloušťky zdí a velikosti místností a kóta střední zdi. Celý systém je doplněn kótami potřebnými pro určení polohy dveří a nik.

Popis půdorysu je proveden v jednotlivých místnostech názvem místnosti, určením druhu podlahy a výměrou podlahy v m², např. k u c h y ň ě, xylolitové dlaždice 16,65 m².

Celý půdorys rysujeme jednou tloušťkou čáry a druh materiálu vyznačujeme grafickými značkami. Srovnajte vzorné a žakovské provedení půdorysu (obr. 1 a 2).

Podrobnější výklad o rýsování stavebních výkresů i s vysvětlivkami odborných názvů viz v článku: Ing. J. Švastal: Jak se čtou stavitelské výkresy? Rozhledy matematicko-fyzikální str. 256, č. 6, roč. 1959/60.

Rysy se strojnickou tematikou

Do soutěže bylo zasláno celkem 63 výkresů se strojnickou tematikou, a to žáků z 8., 9. a 11. třídy všeobecně vzdělávacích škol českých i slovenských, včetně několika výkresů ze základní odborné školy a ze školy průmyslové.

Ježto požadavky na grafickou zručnost a věcnou správnost výkresů jsou na školách různého druhu nestejně, nelze brát na všechny předložené výkresy stejné měřítko, a proto posuzují soubory výkresů pro každý druh školy, popř. pro každou třídu samostatně.

a) *Výkresy žáků z 8. třídy*

Jsou to vesměs výkresy formátu A4, kreslené jednak pouze tužkou na kreslicím nebo rýsovacím papíře, jednak vytahované tuší na rýsovacím papíře nebo na průsvitce. Větší část výkresů má nízkou grafickou úroveň a mnohé jsou kresleny s hrubými kreslířskými chybami. Žáci neznají správný význam čar na výkresu (např. osy kreslí tence plně nebo čárkovaně), nedodržují poměrnou tloušťku čar tlustých, středních a tenkých, takže obrazy jsou nevýrazné a neumějí psát normalisované písmo. Tyto chyby jsou zvláště nápadné na výkresech vytažených tuší na průsvitkách. Na některých školách žáci dokonce pokládají tužkou nakreslené předměty barvou. Četné chyby při kótování (nesprávné kreslení vynášecích a kótovacích čar, šipek, nesprávné umísťování kótovacích čísel, vynechávání značek $\varnothing$, $\square$, r a neúplné kótování) ukazují, že si žáci dosud neosvojili základní zásady kótování. Není vhodné rýsovat na jednom listě více předmětů; v osmé třídě je vhodnější rýsovat na list formátu A4 pouze jeden předmět větší velikosti, jehož rýsování nevyžaduje takové přesnosti jako malé obrazy. Mnohé výkresy též prokazují, že žáci nepochopili, co je měřítko výkresu (obrazu).

Předložené výkresy upozorňují, že je třeba věnovat větší pozornost rýsování v osmé třídě. Především je třeba, aby žáci měli vhodnou učebnici a aby se věnovalo také více péče zvyšování technické kvalifikace učitelů rýsování, kteří v tomto směru nemají ještě dosti zkušeností.

b) *Výkresy žáků z 9. třídy*

Předložené výkresy jsou rýsovány tužkou nebo tuší na rýsovacím papíře formátu A4 a tužkové výkresy jsou pak kopírovány tuší na průsvitný papír. Úroveň grafického provedení je pak značně vyšší než u žáků v 8. třídě, ač i zde jsou některé výkresy po stránce grafické špatně nakreslené.

Mnohé výkresy jsou nakresleny příliš tence a čárkované a čerchované čáry jsou kresleny s příliš krátkými čárkami, takže výkresy nemají technický vzhled (jsou málo výrazné), většina z nich je správně kótována (jak z hlediska formálního, tak i věcného). Též popisování je u většiny výkresů děláno normalisovaným písmem.

Na několika výkresech jsou narýsovány dva nebo i tři předměty, což není vhodné.

Z předložených výkresů jsou nejlepší (z hlediska grafického i věcného) práce těchto žáků a žákyň:

Chasáková z Českého Těšína (třída 9c), učí L. Urban;

Kajzar z Českého Těšína (třída 9c), učí L. Urban;

Ouřadová z Ústí nad Labem (třída 9c), učí E. Pavlata;

Tesařová z Chotěboře (třída 9a), učí Ph (?).

Žádný z nich není však takový, aby byl vhodný pro reprodukci.

c) *Výkresy žáků 11. třídy*

Předložené výkresy jsou narýsovány tuší nebo tužkou na rýsovacím papíře formátu A4 a A3; tužkové výkresy jsou okopírovány tuší na průsvitném papíře. Výkresy obsahují jednak náměty, uvedené jako cvičení v učebnici Technické kreslení pro 11. ročník, jednak jsou kresleny podle skutečnosti (modelů nebo předloh). Výkresy s náměty, které jsou zařazeny do cvičení ve výše jmenované učebnici, jsou nakresleny až na menší nedostatky vcelku správně. Naproti tomu výkresy kreslené podle skutečnosti (nebo předloh), které obsahují z hlediska odborného dosti náročné náměty, jsou kresleny s četnými kreslířskými i technickými chybami, které prokazují, že žáci je nedovedli zvládnout. Proto je třeba při výběru předmětu pro rýsování podle skutečnosti postupovat s rozvahou, zejména je třeba, aby si žáci předem osvojili potřebné technické znalosti konzultacemi s odborníky v závodech, kde konají výrobní práci. Jinak si žáci rýsováním takových předmětů nemohou osvojit dobře znalosti a správné návyky v technickém kreslení, a jejich výkresy jsou pak technicky velmi nedokonalé. Za nejlepší práci považuji výkres žáka:

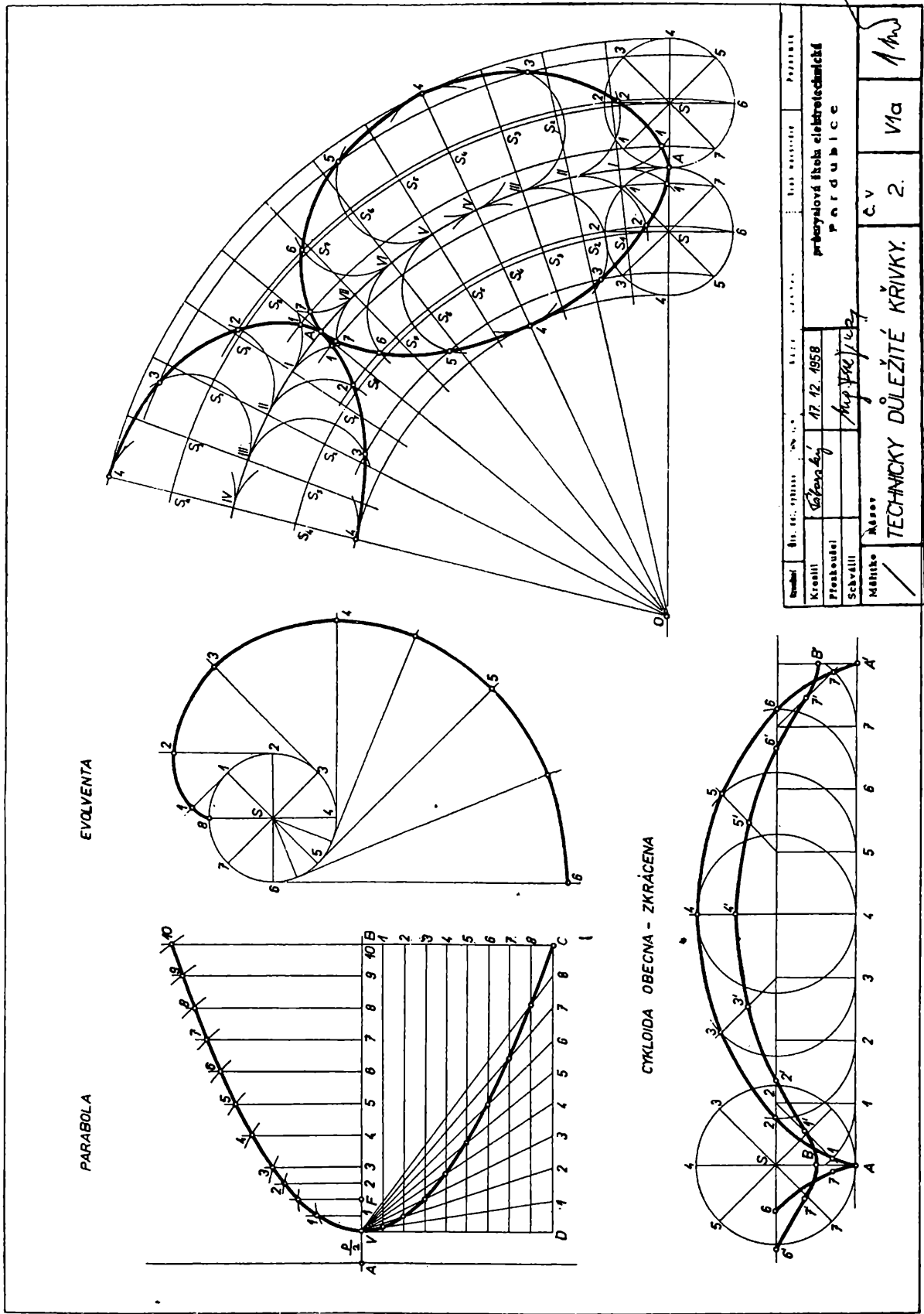
Zrzavého ze třídy 11b v Chotěboři, učí(?).

Na všech předložených výkresech upozorňuji žáky tužkou psanými poznámkami na grafické nebo technické nedostatky a chyby v nakreslených obrazech.

Posuzuji-li výkresy z uvedených tří tříd střední školy jako celek, je třeba zdůraznit nápadný rozdíl v grafickém projevu žáků 8. a 9. třídy. Proto je třeba věnovat zvýšenou pozornost rýsování v 8. třídě, aby se tam zdvihla úroveň grafického vyjadřování. Zejména je třeba věnovat v 8. třídě větší pozornost správnému rýsování tužkou a omezit nebo úplně upustit od rýsování tuší, aby si žáci osvojili alespoň správnou techniku rýsování tužkou. I když je grafická úroveň některých předložených výkresů z 9. a 11. třídy poměrně dobrá, je třeba si uvědomit, že učitelé do soutěže zaslali jistě pouze nejlepší práce, a proto nemůžeme být spokojeni s dnešní průměrnou až podprůměrnou úrovní grafického vyjadřování žáků střední školy. Vždyť znalost grafického vyjadřování je nezbytným předpokladem pro úspěšné studium na vysokých školách technických.

d) *Výkresy žáků základní odborné školy*

Jsou předloženy pouze dva tušové originály téhož předmětu, vypracované žáky základní odborné školy v K. Třebaže jde o výkresy z odborné školy, kde technické kreslení patří mezi hlavní předměty, nejsou z hlediska grafického a



Obr. 3

technického nakresleny zcela správně (nesprávně nakreslený částečný řez, chyby v kótování, neúplně vyplněné rohové razítko aj.). Podle dvou výkresů z téže školy ovšem nelze posoudit úroveň grafického vyjadřování žáků tohoto typu škol.

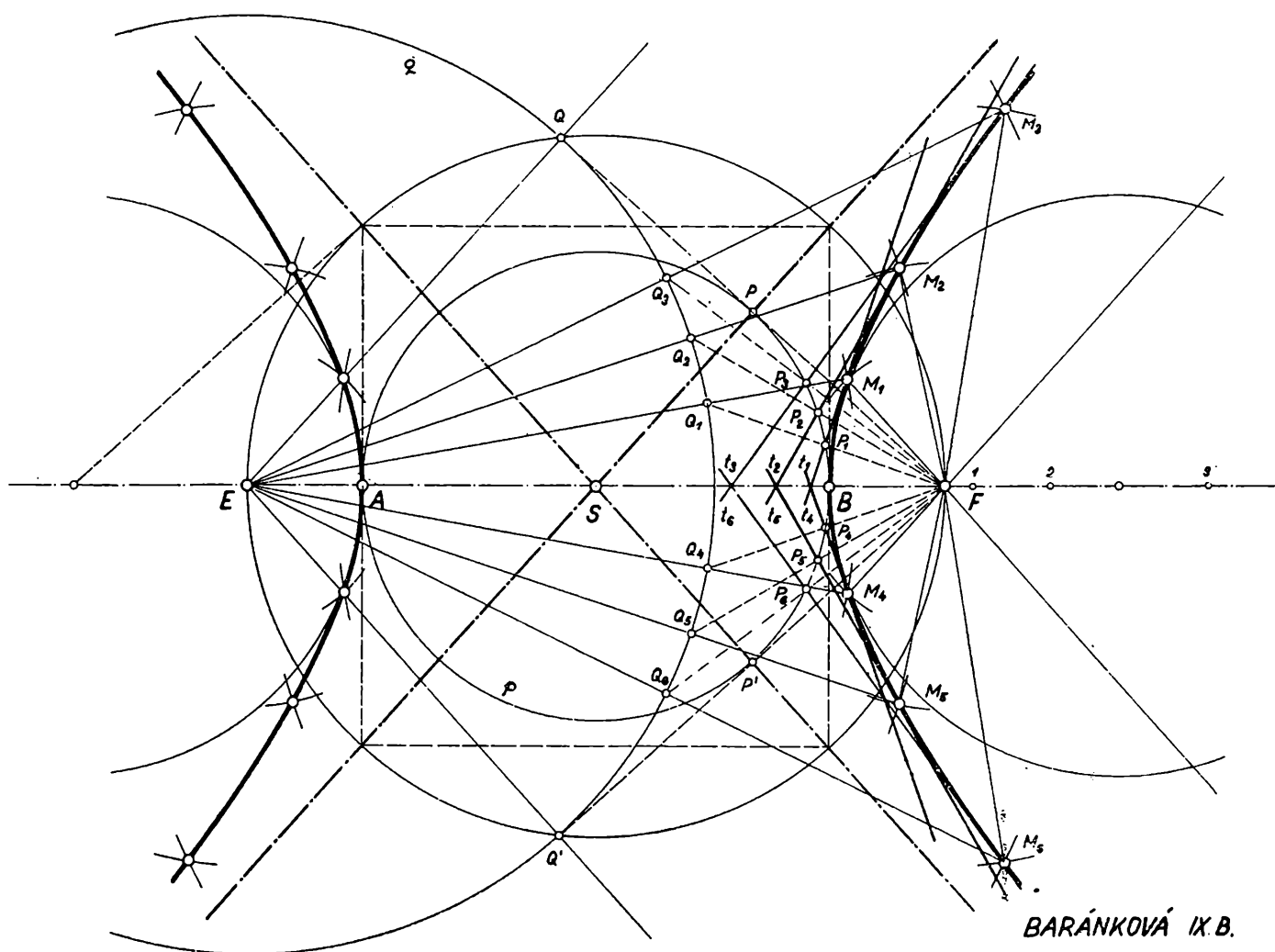
e) Výkresy žáků průmyslové školy

Byly předloženy pouze dva tuší vytažené rysy formátu A3, obsahující technicky důležité křivky a jeden tušový originál formátu A2, obsahující schéma přijímače.

Všechny výkresy vypracovali žáci průmyslové školy elektrotechnické v Pardubicích. Výkresy jsou vzorně nakresleny a všichni tři žáci této školy:

Kim Dzong Dza, Tábořský a Tuzar (učí inž. Březina)
zaslouží pochvaly. Na ukázkou otiskujeme jeden z nich (obr. 3).

Vzorné rysy s geometrickou tematikou



Obr. 4

Třída 8.:

Ľ. Barczay, JSŠ Aš, učí V. Sommer (rys nelze reprodukovat).

Třída 9.:

G. Baránková, JSŠ Bratislava, Vazovova, učí J. Kukliš, obr. 4, 5;

Ľ. Hromada, JSŠ N. Hrozenkov, učí R. (?), obr. 6.

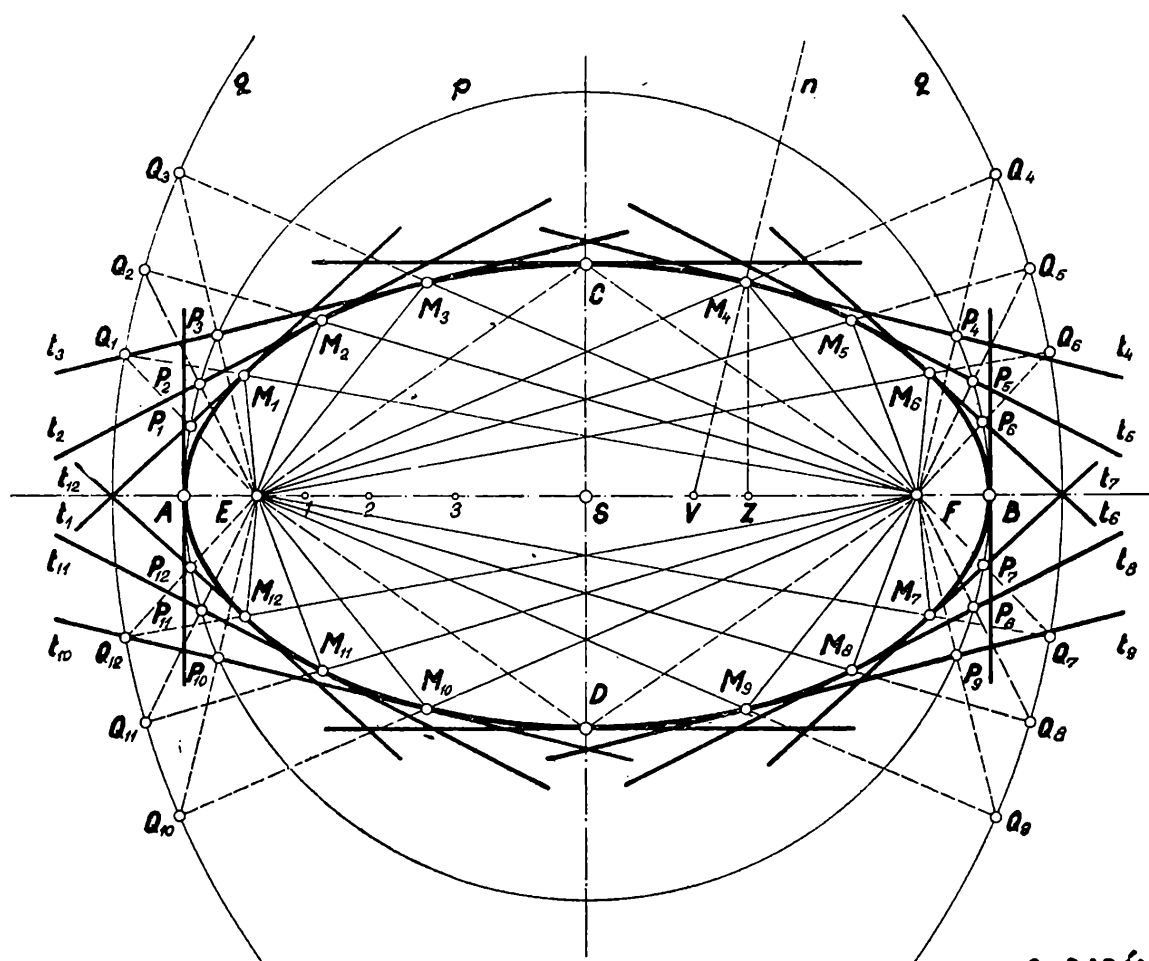
Třída 10.:

E. Krejsa, JSŠ Ostrava I, učí O. Lanta, obr. 7;

Ľ. Rusina, JSŠ Č. Těšín, učí A. Hustá, obr. 8.

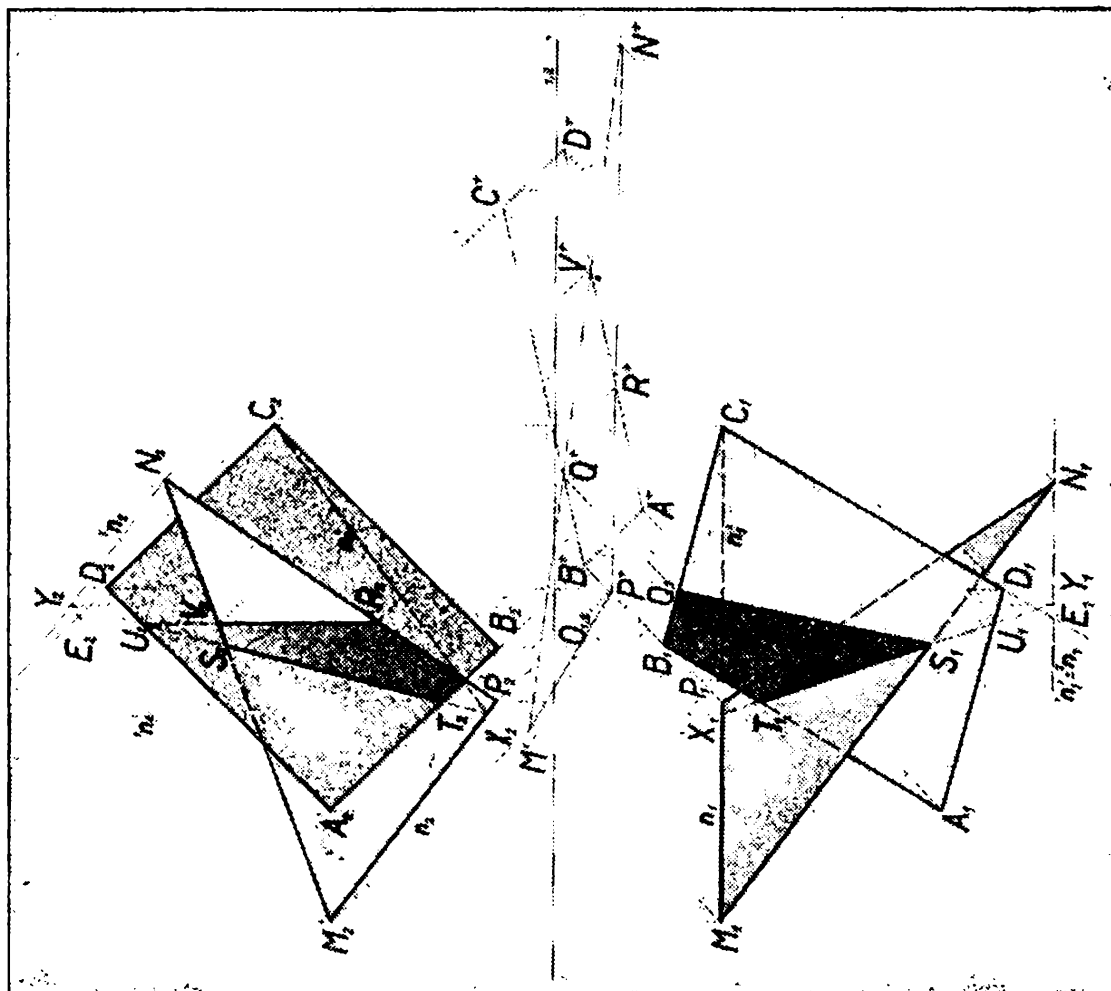
Třída 11.:

Ľ. Páč, 1. JSŠ Ústí n. L., učí E. Pavlata, obr. 9.

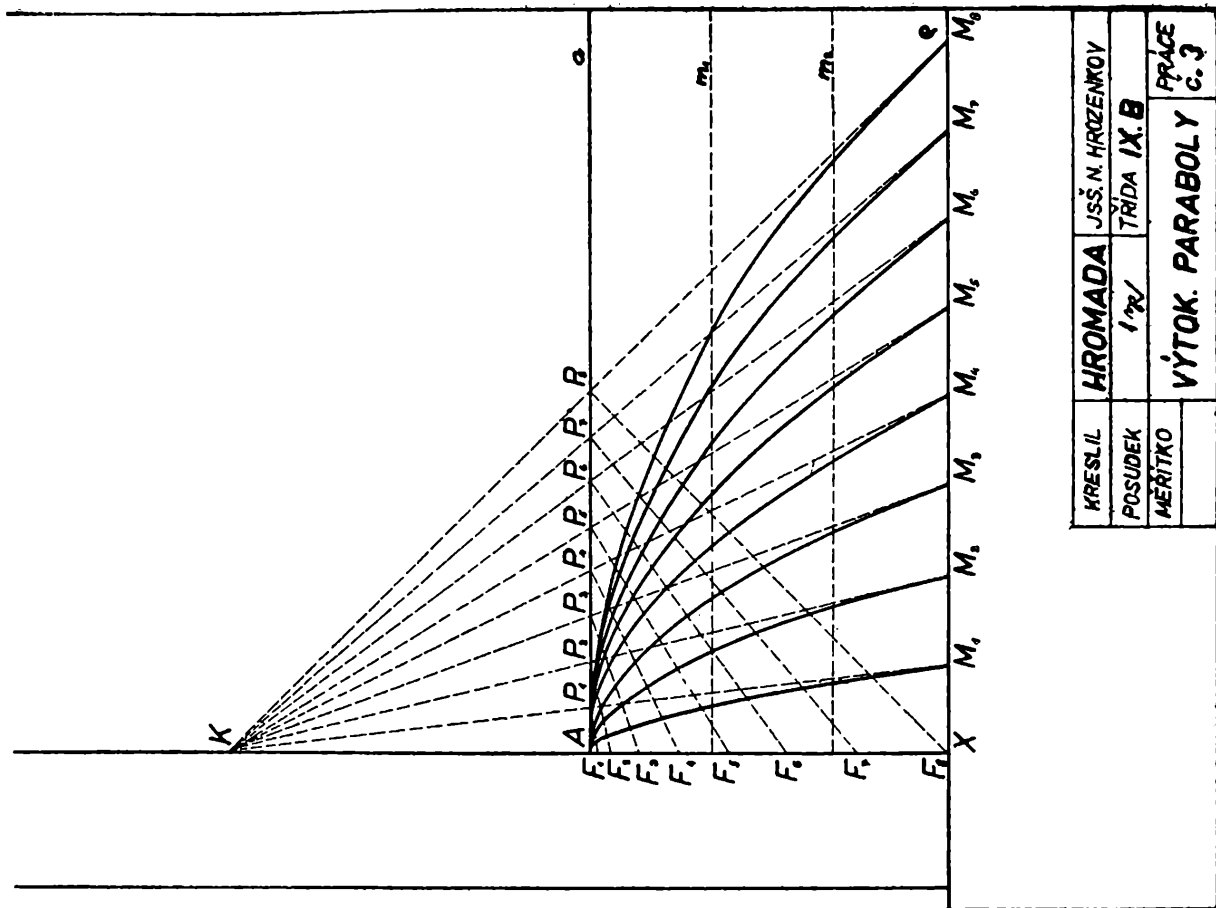


G. BARÁNKOVÁ IX. b

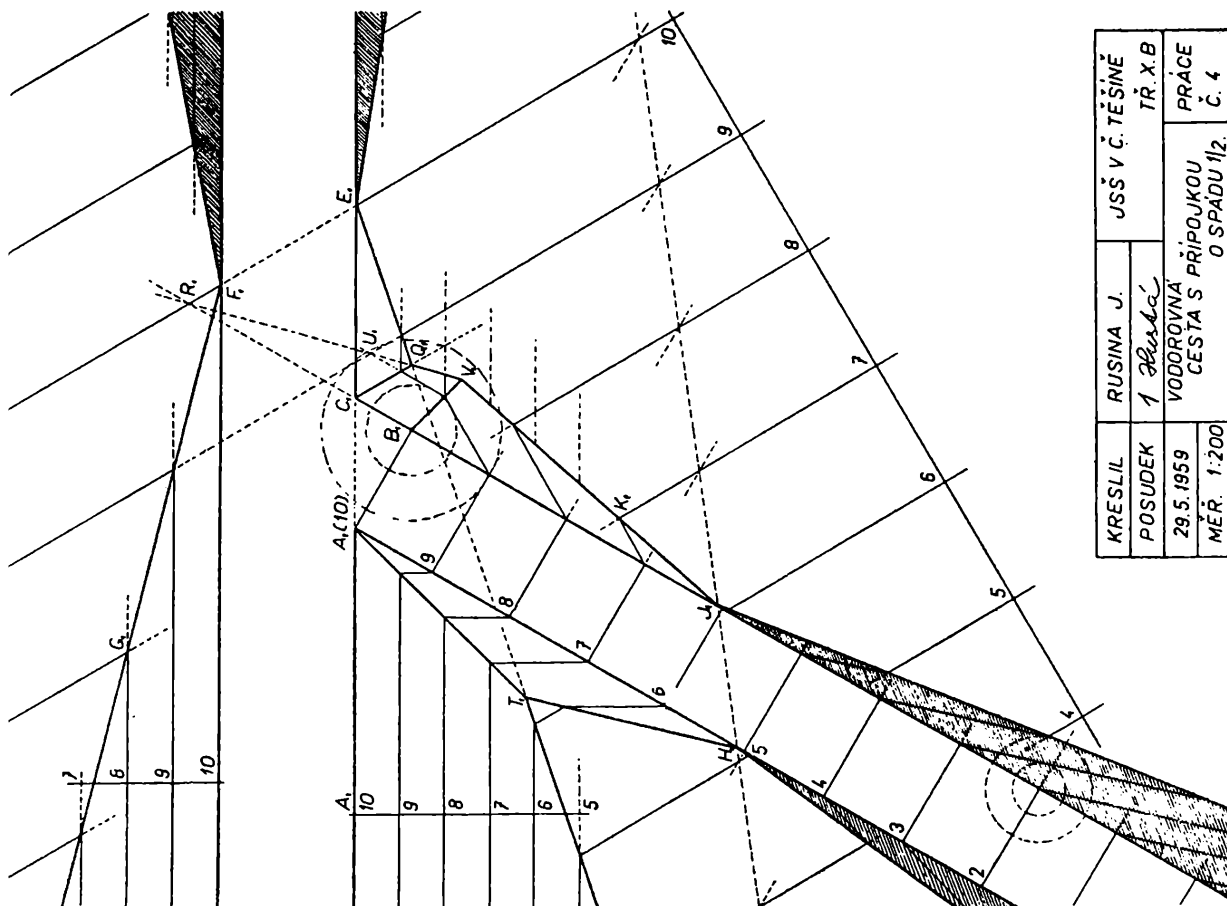
Obr. 5



Obr. 7

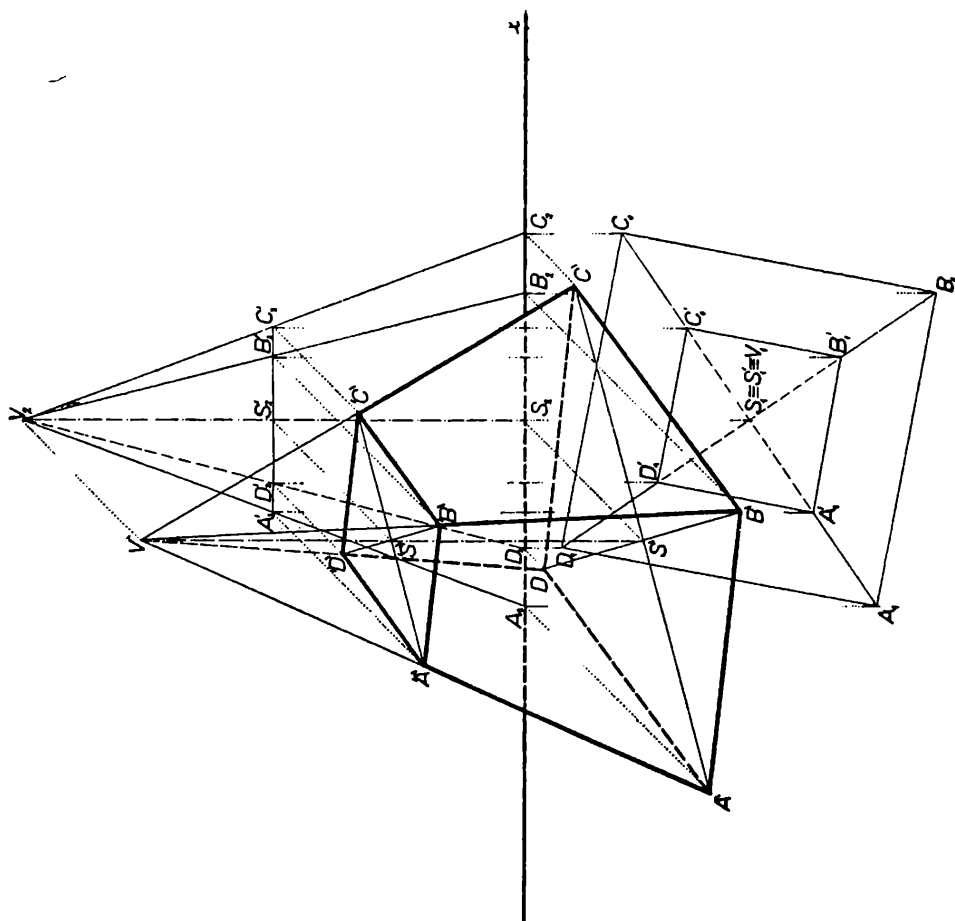


Obr. 6



KRESLIL	RUSINA J.	JSS V Č. TĚŠINĚ
POSUDEK	1. <i>Bruska</i>	TR. X. B
29.5.1959	VODOROVNÁ	PRÁCE
MĚŘ. 1:200	CESTA S PŘÍPOJKOU	Č. 4
	O SPÁDU 1/2.	

Obr. 8



Kreslí	4.2.1959	J. <i>Bruska</i>	I. JEDENÁCTILETA STŘED. I
Prehled			ŠKOLA V ÚSTÍ n. L. - roč. <i>XIIA</i>
Měřtko:			Č. výkres: 3
			KOSOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ

Obr. 9

Výsledky fyzikálních příkladů

Laboratorní cvičení, popsané v článku J. Kotyky v č. 2 Rozhledů matematicko-fyzikálních na str. 191: Mechanický ekvivalent tepla má hodnotu $\mathcal{J} = \frac{A}{Q} = 426,8 \text{ kpm/kcal}$.

Cvičení u článku J. Kotyky v č. 3, str. 143:

1. Označíme-li vodní hodnotu kalorimetru μ , vychází

$$K = \frac{Q}{A} = \frac{c(m + \mu)(t_2 - t_1)}{U \cdot I \cdot \tau} \text{ cal/joule.}$$

2. Tepelný ekvivalent práce má hodnotu $K = 0,24 \text{ cal/joule}$.

4a. Při spojení vodičů v sérii (za sebou) jest poměr Jouleových tepel $Q_1 : Q_2 = R_1 : R_2$. b) Spojíme-li vodiče paralelně (vedle sebe), vychází však $Q_1 : Q_2 = R_2 : R_1$.

J. K.

* Nezapomeňte si u PNS včas zajistit první číslo dalšího ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních, které vyjde v září 1960.

* Žádáme přispěvatele našeho časopisu, aby své články psali na stroji ob řádku a aby algebraický text (včetně indexů) co nejpečlivěji a čitelně vpišovali, nejlépe ručně. Text, který má být sázen kurzívou (ležatě), podtrhávejte vlnovkou tužkou. Obrázky rýsujte pečlivě tuší a opatřte je popisem provedeným 5 mm šablonou. Pamatujte přitom, že reprodukci budou obrázky dvakrát zmenšeny. Nejste-li s to provést je tuší, narýsujte je tak přesně tužkou, aby je pak bylo možno tuší pouze obtáhnout.

* Vzhledem k tomu, že v předepsané lhůtě do 29. února 1960 nedošlo ani k jediné správné řešení úlohy K. Čulíka otiskované v č. 5 na str. 234 s názvem „Stará čínská hra“, rozhodla se redakce prodloužit lhůtu k zasílání řešení - i částečných - nejpozději do 25. dubna 1960.

* Redakce upozorňuje, že soutěž o nejlepší rys byla vyhlášena i na letošní školní rok. Rysy provedené tuší na námět geometrický nebo technický (tematicky zapadající do osnov deskriptivní geometrie nebo rýsování a na odborných školách do technického kreslení) zasílejte spolu s přípisem školy, kde budiž uvedeno jméno žáka-autora, učitele i školy do 1. července 1960 na adresu redakce.

* L. Krakówka, Gottwaldov. Vaši oprávněnou stížnost na špatné doručování Rozhledů jsme postoupili k vyšetření. Informace Vám daná místní Poštovní novinovou službou plyne z naprosté neinformovanosti. Redakce totiž nezasílá ani neprodává Rozhledy, jichž se tiskne jen tolik, kolik si jich PNS objedná.

* Autoři otiskovaných článků dostanou poštou vždy jeden volný autorský výtisk. Přejí-li si další, musí si je zvláště objednat u své PNS.

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

tematika i thematika
temperatura
tense i tenze
tensometr i tenzometr
tensor i tenzor
teorém
teoretický
teoretik
teorie
terciární
tercie
terén
terénní, terénový
termika
termín
terminovati
termit
termodynamika
termoelektrický
termoregulátor
termosifon
termoska
termostat
tětíva
tetraedr
tetragon
tetroda
text
těžnice
theodolit
these i teze
tisícero násobný
tisící
tisíčovka
titan
titrace
tj. (to jest)
tlumicí (cívka)
tlumicí (kdo nebo co tlumí)
tón
tónometr
tonometr (k tonus)
torse i torze
traktorie
tramvaj
transcendentní
transformace
transitivní i tranzitivní

translace
transsonický
transversála i transverzála
trasa
triangulace
triedr
trigonometrie
trioda
triviální
trojčlenný i tříčlenný
trojdílný i třídílný
trojfázový i třífázový
trojhranný i tříhranný
trojmístný i třímístný
trojúhelník
troposféra
třiapůl i tři a půl
třiapůlkrát
třicet, třiceti nebo třicíti
třicetistupňový i třicítistupňový, 30stup-
ňový
třicetina
třicetistupňový
třímotorový
třináctý
třistaletý i třisetletý
turbína i turbína
turbogenerátor
turmalín
typ

úběžník
úhel
úhloměr
úhlopříčka
úchylka
ukladatel
úkos
ultrasonický
umísťovati i umístovati
umor
umořovatel
universální i univerzální
universita
úpatnice
uran
úročitel

Hvězdářská ročenka 1960

Ročenku sestavili J. Bouška, V. Guth, B. Onderlička a spolupracovníci; ročník 36, str. 222, obr. 18, tab. XII, brož. Kčs 10,80. ČSAV, Praha, 1959.

Nový svazek oblíbené ročenky obsahuje základní efemeridy Slunce, Měsíce, planet a hvězd. Uvádí data o slunečních a měsíčních zatměních i zákrytech hvězd Měsícem. Upozorňuje na nejdůležitější úkazy na obloze v kalendáři úkazů, přináší efemeridy satelitů planet a data o proměnných hvězdách. Ročenku doplňují přehled vědeckých časových signálů i pásmové časy a chronologické tabulky se základními údaji pro kalendář juliánský a gregoriánský. V přehledu pokroků v astronomii seznamují autoři se všemi důležitými objevy v poslední době, zejména v oboru nebeské mechaniky, komet i meteorů, kde vypuštěním umělých družic přibýly nové výzkumné metody.

V závěru jsou uvedeny vysvětlivky k ročence obsahující údaje k jednotlivým efemeridám, nejdůležitější redukční vzorce a pomocné tabulky. Proti předcházejícím ročníkům je v letošním svazku několik podstatných změn, např. o zavedení rovnoměrně plynoucího efemeridového času jako tabulkového argumentu základních efemerid, užití grafického znázornění poloh Jupiterových měsíků a rozšíření části H o některé krátkoperiodické hvězdy.

Kniha je účelnou pomůckou, zejména pro astronomy-amatéry a doporučujeme ji našim čtenářům.

Red.

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Miloš Jelínek - Rudolf Zelinka: Matematika pro odborná učiliště a učňovské školy. Díl II. Str. 147, cena brož. výt. Kčs 3,80.

Dr. Jaroslav Barták - Zdeněk Pelc: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť a učňovských škol pro učební obory v hutnictví. Str. 143, cena brož. výt. Kčs 3,50.

Jaroslav Sekanina - František Filip a Jaroslav Pavel: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť a učňovských škol.

Učební obory zpracování dřeva a výroby hudebních nástrojů. Str. 93, cena brož. výt. Kčs 2,65.

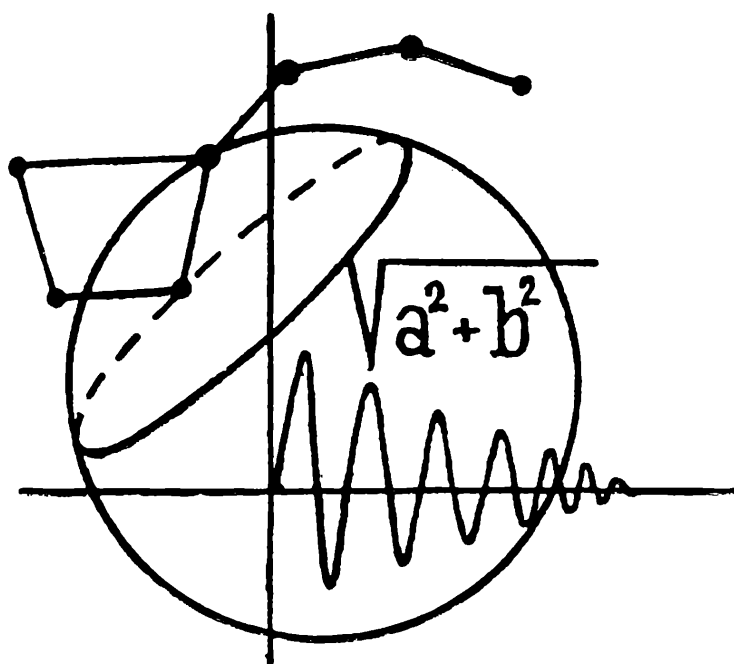
Dr. Metoděj Ostrý a kolektiv: Aplikovaná matematika pro odborná učiliště a učňovské školy chemického průmyslu.

Str. 275, cena brož. výt. Kčs 6,10.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy

9



ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 9

Toto číslo vyšlo 4. května 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

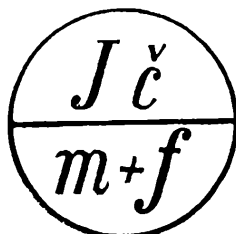
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSS, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570.

OBSAH

Doc. dr. M. Menšík, doc. O. Setzer: Květen 1945	385
Inž. dr. J. Langr: Harmonické body trojúhelníku	386
Doc. J. Vyšín: O nejdelší úsečce, kterou lze umístit do daného obrazce .	389
Inž. F. Mádle: O Pascalově trojúhelníku	394
J. Pech: Výpočet hodnot $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$ pomocí goniometrických rovnic . . .	398
Doc. Z. Kowalski: Jak pomáhá deskriptivní geometrie inženýru - projektantovi	400
Doc. O. Setzer: Steinerovy úlohy (Dokončení)	405
Prof. dr. V. Santholzer: Umělá radioaktivita z nukleárních zkoušek	412
Inž. J. Machalický: Skupenské přeměny vody (Dokončení)	417
A. Valenta: Magnetický záznam zvuku	420
M. M.: Máte velmi dobrou představivost?	425
O. S.: Co způsobí jedna žena	426
Řešení hádanek z čísla 5	426
Doc. O. Setzer: Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem	429
Dr. Č. Vitner: Akademik E. Čech (1893—1960)	430
Redakce: 85 let inž. dr. Josefa Langra	431
Recenze	432
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu .	3 str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-17*01059
Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hömig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.

Květen 1945

S radostí i pohnutím vzpomínáme na historické poslední dny druhé světové války a tím i na konec našeho národního utrpení.

Ještě v posledních dnech kruté nacistické nadvlády sešel se dne 30. dubna 1945 výbor Jednoty československých matematiků a fyziků, aby dal jednomyslně najevo své odbojné přesvědčení a radost nad blížícím se osvobozením v projevu, který částečně citujeme:

Vyjadřujeme díky a vděčnost nejen všem Čechům a Slovákům, kteří doma i za hranicemi pracovali na našem osvobození a kladení základů lepšího zítřka, ale i všem přátelům našeho národa, kteří náš boj podporovali. S pohnutím a vděčností vzpomínáme pak těch, kteří v tomto boji padli a jimž nebylo dopřáno zúčastniti se další budovatelské činnosti v osvobozeném státě. Náš vřelý dík náleží též naší armádě, především pak chrabré Sovětské armádě.

Hlásíme se radostně ke spolupráci na znovuvybudování našeho národního života ve smyslu politického a kulturního programu naší vlády a jsme přesvědčeni, že v rámci úkolů, které nás sdružují, budeme moci účinně přispěti k jeho provádění. K této spolupráci v novém duchu a hlavně v duchu přátelství k bratrskému národu ruskému a ostatním národům slovanským vyzýváme též všechny své členy a přátele.

Uvedený projev podepsali všichni členové výboru včetně obou pisatelů tohoto článku a zaslali jej pak předsedovi vlády a ministru školství a osvěty.

Předseda tehdejší československé vlády Z. Fierlinger naň odpověděl takto:

Jménem vlády a svým vlastním děkuji Vám za Váš projev a zejména ujištění, že se hlásíte ke spolupráci na vybudování našeho národního života ve smyslu politického a kulturního programu vlády. Přeji Vám k tomu v zájmu osvobozené vlasti plného úspěchu.

Patnáct let stáli českoslovenští matematici a fyzici na straně pokroku a podíleli se s radostí na úspěšném budování naší socialistické vlasti. Doufáme, že budou moci v klidu a míru pokračovat v této práci.

Doc. dr. M. Menšík

Doc. Ota Setzer

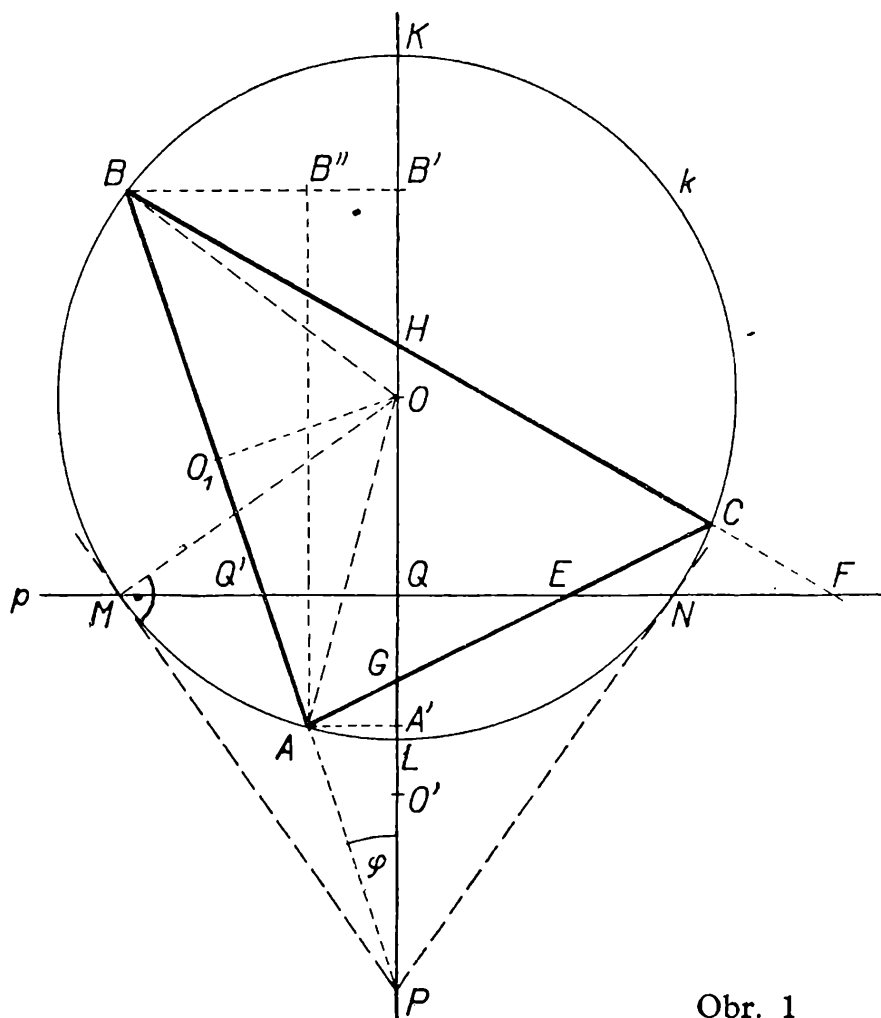


Matematika

† Inž. dr. Josef Langr, Praha:

Harmonické body v trojúhelníku

Do kružnice k o středu O a poloměru r je vepsán trojúhelník ABC . Na prodloužené straně AB je zvolen bod P . Vzdálenost OP označme d . Z bodu P jsou vedeny tečny ke kružnici k s dotykovými body M, N . Přímku $p = MN$ jmenujeme



Obr. 1

v geometrii *polárou bodu P* a bod P jejím *pólem*. Polára p protíná přímku OP v bodě Q a strany trojúhelníka AC a BC v bodech E, F . Spojnice OP , která je zřejmě kolmá k p , protne kružnici v bodech K, L .

Z pravoúhlého trojúhelníka OMP máme podle Euklidovy věty $\overline{OM}^2 = OQ \cdot OP$,

z čehož $OQ = \frac{r^2}{d}$. Bod Q dělí průměr KL v poměru $KQ : LQ = \left(r + \frac{r^2}{d}\right) : \left(r - \frac{r^2}{d}\right) = (d + r) : (d - r)$. Bod P dělí KL v poměru $KP : LP = (d + r) : (d - r)$. Dělí tedy body P, Q úsečku KL ve stejném poměru s tím rozdílem, že Q leží mezi body K, L , kdežto P leží vně této úsečky, takže znaménko jednoho dělicího poměru je záporné, druhého kladné.¹⁾ Avšak i druhá úsečka, určená body Q, P , je dělena body K, L ve stejném poměru. Délka QP je $d - \frac{r^2}{d} = \frac{d^2 - r^2}{d}$; označíme-li O' její střed, je $O'Q = O'P = \frac{d^2 - r^2}{2d}$. Pak máme $LQ = r - \frac{r^2}{d}$, $LP = d - r$, pročež $LQ : LP = \left(r - \frac{r^2}{d}\right) : (d - r) = \frac{r(d - r)}{d} : (d - r) = r : d$. Pro druhý bod K je $KQ = r + \frac{r^2}{d}$, $KP = d + r$, a proto $KQ : KP = \left(r + \frac{r^2}{d}\right) : (d + r) = r : d$. Dělicí poměry bodů K, L vzhledem k úsečce PQ jsou

$$\text{tedy až na znaménka opět stejné } r : d. \text{ Dále jest } KO' = r + \frac{r^2}{d} + \frac{d^2 - r^2}{2d} = \frac{2dr + 2r^2 + d^2 - r^2}{2d} = \frac{(d + r)^2}{2d}; \text{ podobně } LO' = \frac{d^2 - r^2}{2d} - \left(r - \frac{r^2}{d}\right) = \frac{(d - r)^2}{2d}. \text{ Součin } LO' \cdot KO' = \frac{(d + r)^2 (d - r)^2}{4d^2} = \frac{(d^2 - r^2)^2}{4d^2} = \overline{O'P^2}. \text{ Je pro-}$$

to i zde součin vzdáleností bodů K, L od středu O' úsečky PQ roven čtverci poloviny této úsečky. Mají tedy oba páry bodů K, L i P, Q tu vlastnost, že body jednoho páru dělí ve stejném poměru (až na znaménka) úsečku určenou druhým párem. Druhou vlastností pak je, že součin vzdáleností bodů jednoho páru od středu úsečky, určené druhým párem, rovná se čtverci poloviční délky této druhé úsečky. Čtenáři si sami mohou dokázat, že z této druhé vlastnosti plyne nutně i vlastnost první. Takové čtveřiny bodů nazýváme v geometrii *harmonické* a zavádíme pro ně označení $(KLQP) = -1$. Tuto definici *harmonické čtveřiny* můžeme ovšem vyslovit i jiným způsobem²⁾.

Také strana AB obsahuje čtveřinu harmonických bodů. Jsou to body A, B jednoho páru a P, Q' body druhého páru, kde Q' je průsečík poláry p se stranou AB . Stačí dokázat, že $Q'O_1 \cdot PO_1 = \overline{O_1A^2}$, kde O_1 je střed strany AB . Ve čtyřúhelníku $OO_1Q'Q$, jehož dva protilehlé úhly jsou pravé, platí $\overline{O_1Q'}^2 =$

¹⁾ Viz článek H. Drábek, O dělicím poměru na přímce, Rozhledy mat.-fyz., č. 7, 1960.

²⁾ Viz článek M. Valešová, Dvojpoměr, Rozhledy mat.-fyz., č. 7, 1960.

$= \overline{Q'Q}^2 + \overline{QO}^2 - \overline{OO_1}^2$. Zde je $Q'Q = QP \cdot \operatorname{tg} \varphi = \left(d - \frac{r^2}{d}\right) \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel strany AB s OP . Protože $OQ = \frac{r^2}{d}$, $OO_1 = d \sin \varphi$, je po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} (O_1Q')^2 &= \frac{(d^2 - r^2)^2}{d^2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{r^4}{d^2} - d^2 \sin^2 \varphi = d^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - d^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ \frac{r^4}{d^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) - \frac{2d^2 r^2}{d^2} \operatorname{tg}^2 \varphi = d^2 \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{r^4}{d^2 \cos^2 \varphi} - 2 \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \\ &= \left(\frac{d^2 \sin^2 \varphi - r^2}{d \cos \varphi} \right)^2 \end{aligned}$$

Poněvadž $O_1P = d \cos \varphi$, je $O_1P \cdot Q'O_1 = r^2 - d^2 \sin^2 \varphi = \overline{OA}^2 - \overline{OO_1}^2 = \overline{O_1A}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Je tedy splněna podmínka harmoničnosti a body A, B, Q', P jsou harmonicky sdružené.

Konečně máme třetí skupinu harmonických bodů, které leží na poláře p . Jsou to body M, N - průsečíky poláry p s kružnicí k - a body E, F - průsečíky poláry se stranami AC, BC trojúhelníka ABC . Zde je třeba dokázat, že $QE \cdot QF = \overline{QN}^2$. Poněvadž výpočet délek úseček QE, QF je dosti složitý, volíme snazší cestu. Na poláře p určíme body M, N, Q, E, F tak, aby $QE \cdot QF = \overline{QN}^2 = \overline{QM}^2$. Body M, N proložíme libovolnou kružnicí o středu O , který ovšem leží na ose úsečky MN . Libovolně zvolený bod C na k spojíme s E a F . Spojnice protínající kružnici k v bodech A, B a přímku OQ v bodech G, H . Přímka AB musí procházeti bodem P na OQ , o němž dokážeme, že je pólem přímky p vzhledem ke k , čímž bude harmoničnost čtveřiny bodů E, F, M, N potvrzena. K důkazu promítneme vrcholy A, B na přímku OQ jako body A', B' . Průsečíky přímky OQ se stranami AC, BC označme G, H . Označíme-li φ úhel strany AB s přímkou OQ , zjistíme snadno, že $\sphericalangle AGP = \alpha - \varphi$ a $\sphericalangle CHP = \beta + \varphi$, kde α, β jsou úhly trojúhelníka ABC . V pravoúhlých trojúhelnících $AA'O, BB'O$ platí $\sphericalangle OAG + \sphericalangle GAA' = 90^\circ - \beta + 90^\circ - (\alpha - \varphi) = \gamma + \varphi$ a $\sphericalangle B'BH + \sphericalangle HBO = 90^\circ - (\beta + \varphi) + 90^\circ - \alpha = \gamma - \varphi$, pročež $OA' = r \sin(\gamma + \varphi)$, $OB' = r \sin(\gamma - \varphi)$, $AA' = r \cos(\gamma + \varphi)$, $BB' = r \cos(\gamma - \varphi)$. Je tedy $OA' + OB' = r \sin(\gamma + \varphi) + r \sin(\gamma - \varphi) = 2r \sin \gamma \cos \varphi$ a $BB' - AA' = 2r \sin \gamma \sin \varphi = BB''$, kde B'' je průsečík rovnoběžky s QO , jdoucí bodem A , s přímkou BB' . Máme tak dva podobné trojúhelníky $BB''A$ a $AA'P'$, kde P' je průsečík AB s OQ . V nich je $BB'' : B'A = AA' : A'P'$ a po dosazení předchozích hodnot $2r \sin \gamma \sin \varphi$:

$$2r \sin \gamma \cos \varphi = r \cos(\gamma + \varphi) : A'P', \text{ což dá } A'P' = r \frac{\cos \varphi \cos(\gamma + \varphi)}{\sin \varphi}. \text{ Proto je}$$

$$A'P' + A'O = r \left(\frac{\cos \varphi \cos(\gamma + \varphi)}{\sin \varphi} + \sin(\gamma + \varphi) \right). \text{ Po úpravě dostaneme } OP' =$$

$= r \frac{\cos \gamma}{\sin \varphi}$. Z trojúhelníka BOP máme $r : OP = \sin \varphi : \cos \gamma$ a $OP = r \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

Odtud je vidět, že $OP = OP'$, tj. strana AB jde skutečně bodem P a tím *harmoničnost čtveřiny bodů M, N, E, F je potvrzena.*

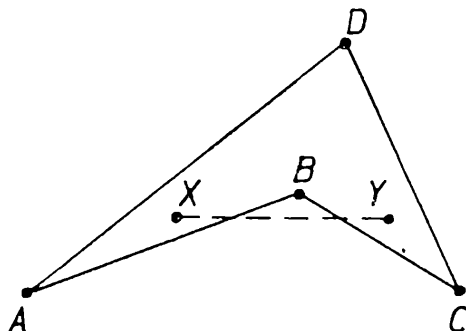
Doc. Jan Vyšín, KU, Praha:

O nejdelší úsečce, kterou lze umístit do daného obrazce

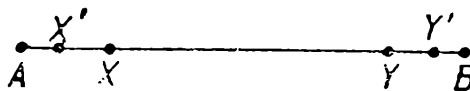
1. V tomto článku budeme studovat jednoduchou geometrickou úlohu, k jejímuž řešení je třeba jen nepatrných matematických znalostí, která však poskytuje dosti příležitosti k cvičení postřehu a úsudku.

Předmětem našich úvah budou hlavně obrazce, které nazveme konvexní. Konvexním obrazcem rozumíme každý takový geometrický útvar, tj. množinu bodů v rovině, který má tyto tři vlastnosti:

- je omezený, tj. lze ho umístit do vhodně zvoleného kruhu;
- obsahuje aspoň dva různé body;
- úsečka spojující kterékoli dva body obrazce náleží celá tomuto obrazci¹⁾.



Obr. 1



Obr. 2

Podle této definice je konvexním obrazcem např. úsečka AB , a to buď s oběma krajními body, nebo s jedním krajním bodem, nebo bez krajních bodů (tzv. vnitřek úsečky). Konvexním obrazcem však není polopřímka nebo dutý úhel; tyto útvary sice mají obě vlastnosti b), c), ale nemají vlastnost a). Trojúhelník nebo obdélník, k nimž počítáme jejich obvody, jsou konvexní obrazce. Také kruh, k němuž počítáme obvod, i vnitřek kruhu, jsou konvexní obrazce. Naproti tomu čtyřúhelník, načrtnutý na obr. 1, není konvexním obrazcem; má sice vlastnosti a) a b), ale nemá vlastnost c), jak ukazuje obr. 1.

Naše úloha zní: *Máme najít úsečku největší možné délky, kterou lze umístit do daného konvexního obrazce. Nebo jinak řečeno: Máme určit takové dva body daného konvexního obrazce, aby jejich vzdálenost byla co největší.*

Délka této „maximální úsečky“ se někdy nazývá *průměrem obrazce*.

Na první pohled je patrné, že takováto úsečka XY maximální délky nemusí

¹⁾ Přitom k úsečce počítáme i její krajní body.

vůbec existovat. Tak například, je-li daný konvexní obrazec vnitřek úsečky AB , lze ke každé úsečce XY , ležící ve vnitřku úsečky AB (viz obr. 2), najít takovou úsečku $X'Y'$, ležící také ve vnitřku úsečky AB , že platí

$$X'Y' > XY$$

Jestliže je daný konvexní obrazec úsečka AB (i s krajními body), je příslušná úsečka maximální délky sama úsečka AB .

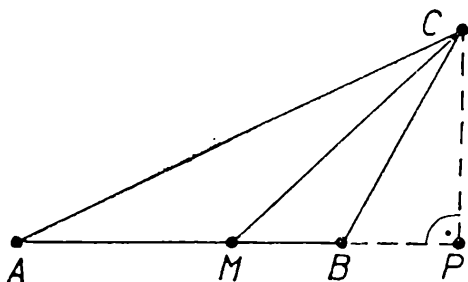
2. Rozřešíme naši úlohu nejprve pro konvexní mnohoúhelníky. Obvod budeme vždy počítat k mnohoúhelníku. Mnohoúhelníky, k nimž počítáme jejich obvod, nazýváme *uzavřené*.

Začneme s uzavřeným trojúhelníkem a uvedeme tuto pomocnou větu:

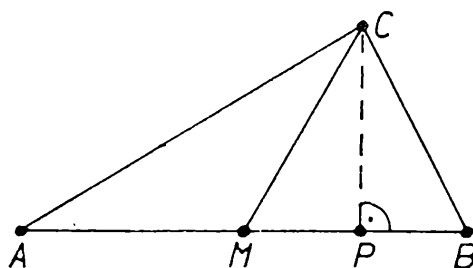
Pomocná věta P. Probíhá-li bod M stranu AB trojúhelníka ABC , pak úsečka CM není delší než větší z obou stran AC , BC .

Správnost této pomocné věty nahlédneme, sestrojíme-li výšku CP trojúhelníka ABC (obr. 3 a, b). Zvětšuje-li se vzdálenost MP , zvětšuje se podle známé planimetrické věty také vzdálenost MC . Je tedy na obr. 3a, i na obr. 3b

$$CM < AC.$$



Obr. 3a



Obr. 3b

Nyní zvolíme v uzavřeném trojúhelníku ABC dva různé body X , Y . Přímka XY obsahuje buď dva vrcholy trojúhelníka (obr. 4a) nebo jediný jeho vrchol (obr. 4b) nebo neobsahuje žádný vrchol trojúhelníka ABC (obr. 4c). Označíme v prvním případě X' , Y' vrcholy té strany, v níž leží úsečka XY , v druhém a třetím případě označíme X' , Y' průsečíky přímky XY s obvodem trojúhelníka ABC . Vždy je $X' \neq Y'$ a vždy platí

$$XY \leq X'Y'; \quad (1)$$

rovnost může nastat tehdy, je-li $X \equiv X'$, $Y \equiv Y'$.

V prvním případě není úsečka XY delší než strana BC . V druhém případě je podle pomocné věty P vzdálenost CY' menší nebo rovna větší ze vzdáleností AC , BC ; na obr. 4b je

$$X'Y' = CY' \leq AC. \quad (2)$$

Spojíme-li vztahy (1), (2), dostaneme vztah

$$XY \leq AC.$$

Úsečka XY není tedy v tomto případě větší než delší ze stran AC , BC .

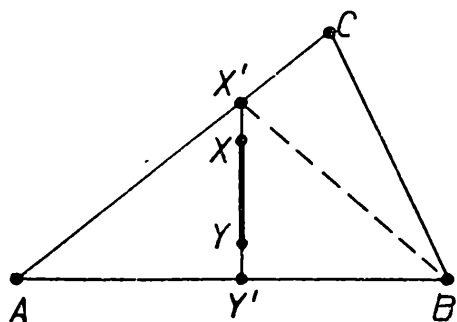
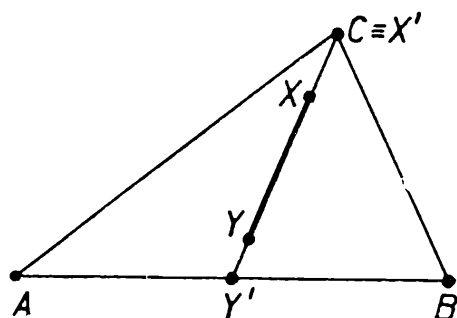
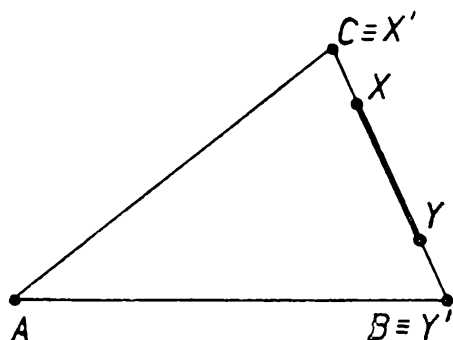
V třetím případě uijeme pomocné věty P dvakrát. Nejprve si všimneme trojúhelníka ABX' (obr. 4c). Podle pomocné věty P je buď

$$X'Y' \leq AX' < AC,$$

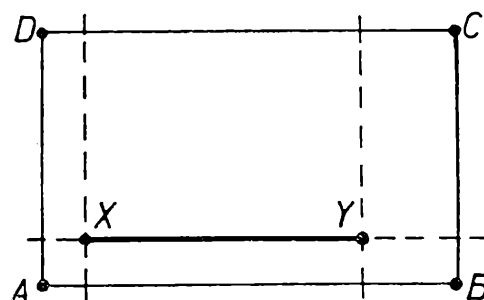
nebo

$$X'Y' \leq BX'$$

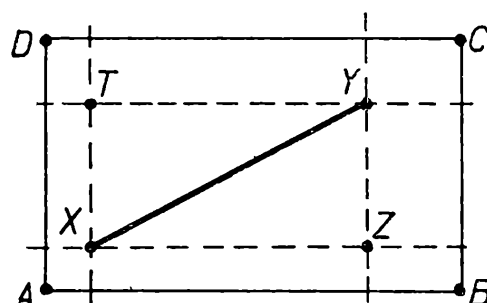
a podle pomocné věty P není BX' větší než delší ze stran AB , BC . Je tedy v třetím případě vzdálenost $X'Y'$ vždy menší, nebo rovna délce některé strany trojúhelníka. Vzhledem ke vztahu (1) můžeme říci totéž o vzdálenosti XY .



Obr. 4a, b, c



Obr. 5a



Obr. 5b

Shrneme-li všechny tři případy, vidíme, že vzdálenost XY není větší než velikost nejdelší strany trojúhelníka. Nejdelší strana je však úsečka, která leží v uzavřeném trojúhelníku. Vyslovíme tedy větu:

Věta 1. *Průměr uzavřeného trojúhelníka je roven délce jeho nejdelší strany.*

3. Dále se budeme zabývat obdélníkem. V uzavřeném obdélníku $ABCD$ zvolíme dva různé body X , Y a jimi vedeme rovnoběžky se stranami obdélníka. Jsou možné dvě situace: buď oba body X , Y leží na téže přímce rovnoběžné

s některou stranou obdélníka (obr. 5a), nebo sestrojené rovnoběžky vytvoří nový obdélník $XZYT$ (obr. 5b).

V prvním případě je

$$XY \leq AB; \quad (3)$$

body X, Y mohou totiž ležet na stranách AD, BC . V druhém případě platí pro rozměry obdélníka $XZYT$ vztahy

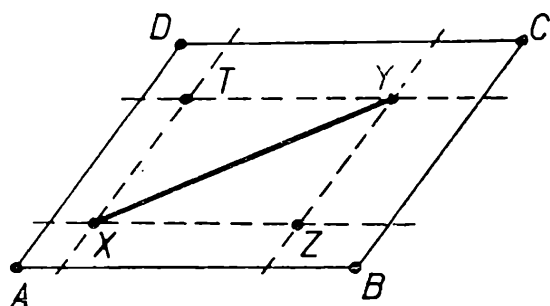
$$XZ \leq AB, \quad ZY \leq BC.$$

Proto je podle Pythagorovy věty

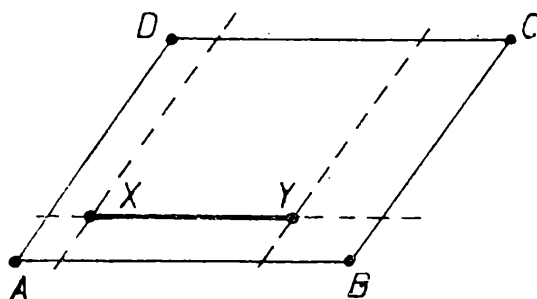
$$XY = \sqrt{XZ^2 + ZY^2} \leq \sqrt{AB^2 + BC^2} = AC.$$

Protože platí $AB < AC$, vyplývá ze vztahu (3) v prvním případě také

$$XY < AC.$$



Obr. 6a



Obr. 6b

V každém případě je tedy vzdálenost bodů X, Y rovna nejvýše délce úhlopříčky AC . Poněvadž úhlopříčka leží v uzavřeném obdélníku, můžeme vyslovit tento výsledek:

Věta 2. Průměr uzavřeného obdélníka je délka jeho úhlopříčky.

Předcházející postup se dá přenést na libovolný rovnoběžník. Mějme uzavřený rovnoběžník $ABCD$, který má při vrcholu A ostrý vnitřní úhel. Zvolme v rovnoběžníku $ABCD$ dva různé body X, Y a vedme jimi rovnoběžky se stranami rovnoběžníka. Buď zjistíme jako při obdélníku, že vzdálenost XY je menší, nebo rovna délce některé strany rovnoběžníka (na obr. 6a je $XY < AB$), nebo vznikne nový rovnoběžník $XZYT$, který leží v původním (obr. 6b). V prvním případě je

$$XY < AB < AC, \quad (4)$$

neboť trojúhelník ABC má tupý úhel při vrcholu B a proto jeho nejdelší strana je úhlopříčka AC . V druhém případě přemístíme rovnoběžník $XZYT$ podle obr. 7 do polohy $X_1Z_1Y_1T_1$. Leží-li bod Y_1 na úhlopříčce AC , je

$$XY = X_1Y_1 \leq AC. \quad (5)$$

Neleží-li bod Y_1 na úhlopříčce AC , snadno dokážeme vztah

$$\sphericalangle AY_1C > \sphericalangle ABC; \quad (6)$$

úhel $\sphericalangle AY_1C$ je totiž součtem úhlů $\sphericalangle AY_1U$, $\sphericalangle CY_1U$ a pro ně platí podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka

$$\sphericalangle AY_1U > \sphericalangle ABU, \quad \sphericalangle CY_1U > \sphericalangle CB\bar{U}$$

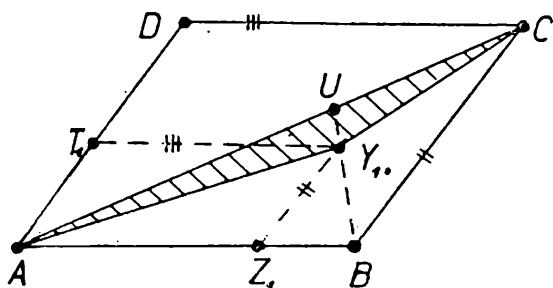
Sečtením těchto vztahů dostaneme vztah (6)²⁾. Protože je úhel $\sphericalangle DAB$ ostrý, je úhel $\sphericalangle ABC$ tupý a podle (6) je tím spíše úhel $\sphericalangle AY_1C$ tupý. V trojúhelníku AY_1C je tedy nejdelší strana AC , tj. platí

$$XY = X_1Y_1 = AY_1 < AC. \quad (7)$$

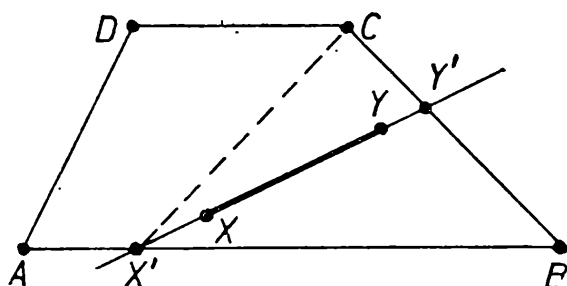
Spojením vztahů (4), (5) a (7) zjišťujeme, že je v každém případě $XY \leq AC$. Výsledek vyslovíme větou:

Věta 3. *Průměr uzavřeného kosohlého rovnoběžníka je délka úhlopříčky spojující ty vrcholy, při nichž jsou ostré úhly.*

4. Vyšetřujeme nyní nejdelší úsečku, kterou lze umístit v lichoběžníku a po-



Obr. 7



Obr. 8

užijme přitom metody, která se osvědčila při trojúhelníku. Zvolme dva různé body X, Y uzavřeného lichoběžníka $ABCD$ tak, aby úsečka XY neležela v žádné straně lichoběžníka (obr. 8). Přímka XY protne obvod lichoběžníka ve dvou různých bodech X', Y' : zřejmě je

$$XY \leq X'Y' \quad (8)$$

Uvažme situaci z obr. 8. Podle pomocné věty P není úsečka $X'Y'$ delší než větší ze stran BX', CX' trojúhelníka ABC . Je-li $X'Y' \leq BX'$, je také $X'Y' \leq AB$, tj. podle (8) též $XY \leq AB$. Je-li $X'Y' \leq CX'$, užijeme pomocné věty P pro trojúhelník ABC a zjistíme, že úsečka CX' není delší než větší z úseček AC, BC . Je tedy v tomto případě podle vztahu (8) buď $XY \leq AC$, nebo $XY \leq BC$.

Z á v ě r Vzdálenost XY je vždy menší nebo rovna délce některé strany nebo úhlopříčky.

K témuž závěru dospějeme i při jiné poloze bodů X, Y ³⁾, a ovšem i tehdy, leží-li úsečka XY v některé straně lichoběžníka. Můžeme tedy vyslovit větu:

Věta 4. *Průměr uzavřeného lichoběžníka je délka největší ze stran nebo úhlopříček tohoto lichoběžníka.*

²⁾ Vztah (6) platí i v případě, že bod Y_1 leží na straně BC .

³⁾ Tj. padnou-li body X, Y na jiné strany lichoběžníka $ABCD$.

Věta 5. *Průměr uzavřeného konvexního n -úhelníka je největší ze vzdáleností dvojic jeho vrcholů.*

(Pokračování)

O Pascalově trojúhelníku

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n,$$

Součinitele u členů binomického rozvoje nazýváme **binomickými koeficienty** nebo též **kombinačními čísly**. **Pascalův trojúhelník** je přehledným uspořádáním těchto binomických koeficientů pro různá n . Čísla jeho vodorovných řádků jsou vytvořena pro určitá n a v každém řádku vznikne $(n + 1)$ kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ tvořených z čísla n pro $k = 0, 1, \dots, n$.

[illegible]

Binomické koeficienty mají řadu zajímavých vlastností, z nichž pro Pascalův trojúhelník vyplývá:

Každý vodorovný řádek začíná a končí jedničkou, neboť $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ a též $\binom{0}{0} = 1$. Každý vodorovný řádek zůstává nezměněn, napíšeme-li jeho čísla v obráceném pořádku, jelikož platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ze vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (1)$$

vyplývá, že součet dvou sousedních binomických koeficientů v každém vodorovném řádku je roven binomickému koeficientu, který je mezi nimi v řádku bezprostředně následujícím. Je-li totiž v určitém řádku jedno číslo $\binom{n}{k}$, je sousední číslo téhož řádku $\binom{n}{k+1}$ a číslo mezi nimi v následujícím řádku je $\binom{n+1}{k+1}$.

Součet všech binomických koeficientů určitého vodorovného řádku příslušného číslu n je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

jelikož podle binomického rozvoje $(1+1)^n$ dostáváme

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Krajní šikmé strany Pascalova trojúhelníku, jež obsahují samé jedničky, nazýváme jeho základnami a s nimi jsou rovnoběžné šikmé řádky. V šikmém řádku n -tém od základny označíme r -tý člen posloupnosti v něm obsažené $a_r^{(n)}$, součet prvních r členů této posloupnosti $S_{n,r}$ a r -tý člen posloupnosti v následujícím šikmém řádku $a_r^{(n+1)}$.

Podle způsobu vytváření Pascalova trojúhelníku je

$$a_r^{(n)} = \binom{n+r-1}{n}, \quad (2)$$

$$S_{n,r} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+r-1}{n},$$

$$a_r^{(n+1)} = \binom{n+r}{n+1}. \quad (3)$$

Ze vztahu (1), klademe-li v něm za n postupně $n, n+1, \dots, n+r-1$ a za k položíme n , dostaneme řadu rovnic

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n+1}{n+1},$$

$$\binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{n+1},$$

$$\binom{n+r-1}{n} + \binom{n+r-1}{n+1} = \binom{n+r}{n+1},$$

jejichž sečtením a zrušením stejných členů na obou stranách rovnic a členu $\binom{n}{n+1} = 0$ vyplývá

$$S_{n,r} = \binom{n+r}{n+1} = a_r^{(n+1)}$$

Je tedy součet prvních r členů posloupnosti $P^{(n)}$ obsažené v šikmém řádku n -tém od základny roven r -tému členu posloupnosti $P^{(n+1)}$ obsažené v následujícím šikmém řádku. Posloupnost $P^{(n+1)}$ se nazývá *součtovou posloupností* k posloupnosti $P^{(n)}$.

Z výrazů (2), (3) pro $a_r^{(n)}$ a $a_r^{(n+1)}$ však vyplývá, že r -tý člen posloupnosti $P^{(n)}$ je algebraický polynom v r stupně n -tého a součet prvních r jejích členů $S_{n,r} = a_r^{(n+1)}$ je algebraický polynom v r stupně $(n+1)$ -ho. Taková posloupnost se nazývá *aritmetickou posloupností* n -ho stupně a vyznačuje se dále tím, že má n tzv. *diferenčních posloupností*. Každá následující diferenční posloupnost má stupeň o jedničku menší než předcházející a tedy n -tá diferenční posloupnost je 0-tého stupně a má stejné všechny své členy.

Utvoříme-li totiž rozdíly sousedních členů uvažované aritmetické posloupnosti n -tého stupně, dostaneme novou aritmetickou posloupnost stupně $(n-1)$ -ho, které říkáme první diferenční posloupnost. K této diferenční posloupnosti můžeme vytvořit opět diferenční posloupnost jako *druhou diferenční posloupnost* k původní posloupnosti a je to aritmetická posloupnost $(n-2)$ -ho stupně atd.

Naše posloupnost $P^{(n)}$ v šikmém řádku n -tém od základny má svoje diferenční posloupnosti v počtu n obsažené v předcházejících šikmých řádcích včetně základny. Podle vztahu (1) je totiž

$$a_r^{(n)} - a_{r-1}^{(n)} = \binom{n+r-1}{n} - \binom{n+r-2}{n} = \binom{n+r-2}{n-1} = a_r^{(n-1)},$$

tj. její první diferenční posloupnost je posloupnost v šikmém řádku předcházejícím a n -tá diferenční posloupnost je tedy v základně.

Posloupnost v prvním šikmém řádku ($n=1$) za základnou je *aritmetickou posloupností* prvního stupně *přirozených čísel* o řadové diferenci $d=1$: její r -tý člen je $a_r^{(1)} = r$ a součet prvních r členů je

$$S_{1,r} = \binom{r+1}{2} = a_r^{(2)}$$

Její součtovou posloupností je posloupnost v druhém šikmém řádku ($n = 2$) za základnou a je to aritmetická posloupnost druhého stupně tzv. čísel trojúhelníkových; její r -tý člen je $a_r^{(2)} = S_{1,r} = \binom{r+1}{2}$ a součet prvních r členů je

$$S_{2,r} = \binom{r+2}{3} = a_r^{(3)}$$

V třetím šikmém řádku ($n = 3$) máme aritmetickou posloupnost třetího stupně tzv. čísel čtyřstěnových, jejíž r -tý člen je $a_r^{(3)} = S_{2,r} = \binom{r+2}{3}$ a součet prvních r členů je

$$S_{3,r} = \binom{r+3}{4} = a_r^{(4)}$$

a jež je součtovou posloupností předcházející posloupnosti čísel trojúhelníkových.

V Pascalově trojúhelníku jsou tedy součty prvních r členů posloupností obsažených v základně a v následujících n šikmých řádcích tyto:

V základně je $S_{0,r} = \binom{r}{1}$, v prvním šikmém řádku $S_{1,r} = \binom{r+1}{2}$, ve druhém $S_{2,r} = \binom{r+2}{3}$ atd., až v n -tém řádku máme $S_{n,r} = \binom{n+r}{n+1}$. Součet těchto $(n+1)$ jednotlivých součtů bude

$$\begin{aligned} \Sigma = S_{0,r} + S_{1,r} + S_{2,r} + \dots + S_{n,r} &= \binom{r}{1} + \binom{r+1}{2} + \binom{r+2}{3} + \\ &+ \dots + \binom{n+r}{n+1}. \end{aligned}$$

Tento součet utvoříme opět ve vztahu (1), který napíšeme ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Klademe-li zde za n postupně $r-1, r, r+1, \dots, r+n$ a za k položíme $r-1$, obdržíme opět řadu rovnic

$$\begin{aligned} \binom{r-1}{r-1} &= \binom{r}{r} - \binom{r-1}{r}, \\ \binom{r}{r-1} &= \binom{r+1}{r} - \binom{r}{r}, \\ \binom{r+1}{r-1} &= \binom{r+2}{r} - \binom{r+1}{r}, \end{aligned}$$

$$\binom{r+n}{r-1} = \binom{n+r+1}{r} - \binom{r+n}{r},$$

jejichž sečtením, zrušením stejných členů a členu $\binom{r-1}{r} = 0$ na pravé straně s úpravou levé strany podle vztahu $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ vyplývá

$$\Sigma = \binom{r}{1} + \binom{r+1}{2} + \dots + \binom{n+r}{n+1} = \binom{n+r+1}{r} - 1$$

Pascalovým trojúhelníkem můžeme též řešit úlohu, v kolika nejvýše bodech se protínají úhlopříčky uvnitř obecného p -úhelníku ($p \geq 4$). Úhlopříčky čtyřúhelníku ($p = 4$) dají nejvýše jeden průsečík vnitřní, pětiúhelníku ($p = 5$) nejvýše pět vnitřních průsečíků, šestiúhelníku ($p = 6$) nejvýše patnáct vnitřních průsečíků atd. Tato čísla jsou členy posloupnosti obsažené ve čtvrtém šikmém řádku za základnou ($n = 4$) a to její první člen odpovídá čtyřúhelníku, druhý pětiúhelníku, třetí šestiúhelníku atd., tedy p -úhelníku přísluší $(p-3)$ -tý člen. Položíme-li ve vzorci pro r tý člen

$$a_r^{(4)} = \binom{r+3}{4}$$

$r = p - 3$, dostaneme hledaný počet

$$P = \binom{p}{4}$$

Jinak bychom tento vzorec obdrželi určitou úvahou pomocí jedné souměrné aritmetické řady druhého stupně.

(Pokračování)

J a r o s l a v P e c h, studující MFF KU, Všebořice:

Výpočet hodnot $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$ pomocí goniometrických rovnic

Je známo, že většina hodnot goniometrických funkcí jsou čísla iracionální, dají se vyjádřit jen přibližně pomocí tabulek. Už při zavedení goniometrických funkcí jako poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku jste si ukázali, že jejich hodnoty pro úhly 30° , 45° , 60° , 90° jsou buď čísla racionální nebo druhé odmocniny z racionálních čísel. Dá se ukázat, že je tomu tak pro všechny úhly, které jsou celými násobky úhlu 3° .

Z vlastností pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka lze odvodit hodnotu $\sin 18^\circ$ ¹⁾. Ve svém příspěvku chci ukázat jinou metodu výpočtu této hodnoty, založenou na vyjádření funkcí dvojnásobného úhlu pomocí funkcí jednoduchého úhlu.

Úhel 18° vyhovuje goniometrické rovnici:

$$\sin x = \cos 4x. \tag{1}$$

¹⁾ Viz článek A. Kejzlar, Z l a t ý ř e z ú s e č k y v tomto časopise, 1957, č. 2, str. 54.

Abychom to dokázali, použijeme převodního vztahu mezi goniometrickými funkcemi a dosadíme do (1):

$$\sin x = \cos (90^\circ - x). \quad (1')$$

$$\cos 4x = \cos (90^\circ - x).$$

Omezíme-li se na x taková, že $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$, a uvážíme, že funkce $\cos x$ je pro $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ funkce prostá, tj. z $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, $\cos \alpha = \cos \beta$ plyne $\alpha = \beta$, obdržíme z (1'):

$$4x = 90^\circ - x, \quad x = 18^\circ$$

Tím je důkaz proveden.

Pro libovolný úhel x platí tyto identity:

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x. \quad (2)$$

Položíme-li $x = 18^\circ$ a považujeme-li identity (2) za rovnice s neznámými $x_1 = \sin 18^\circ$, $x_2 = \cos 36^\circ$, obdržíme soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých:

$$x_1 = 2x_2^2 - 1 \quad (3)$$

$$x_2 = 1 - 2x_1^2.$$

Sečteme obě rovnice, čímž obdržíme:

$$x_1 + x_2 = 2(x_2^2 - x_1^2).$$

Poněvadž výraz $x_1 + x_2 \neq 0$, můžeme jím dělit obě strany rovnice a zároveň dělit dvěma:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Z (4) dosadíme do druhé rovnice soustavy (3):

$$x_1 + \frac{1}{2} = 1 - 2x_1^2 \quad (4')$$

a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro x_1 :

$$4x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \quad (5)$$

Z jejích kořenů vyhovuje úloze kořen kladný:

$$x_1 = \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

a dosazením do (4) obdržíme:

$$x_2 = \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Tím jsme našli hodnoty $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$.

Jak je vidět, druhý kořen rovnice (4') udává hodnotu $-x_2 = -\cos 36^\circ = \cos 144^\circ$.



Deskriptivní geometrie

Doc. Zdeněk Kowalski, VŠT, Brno:

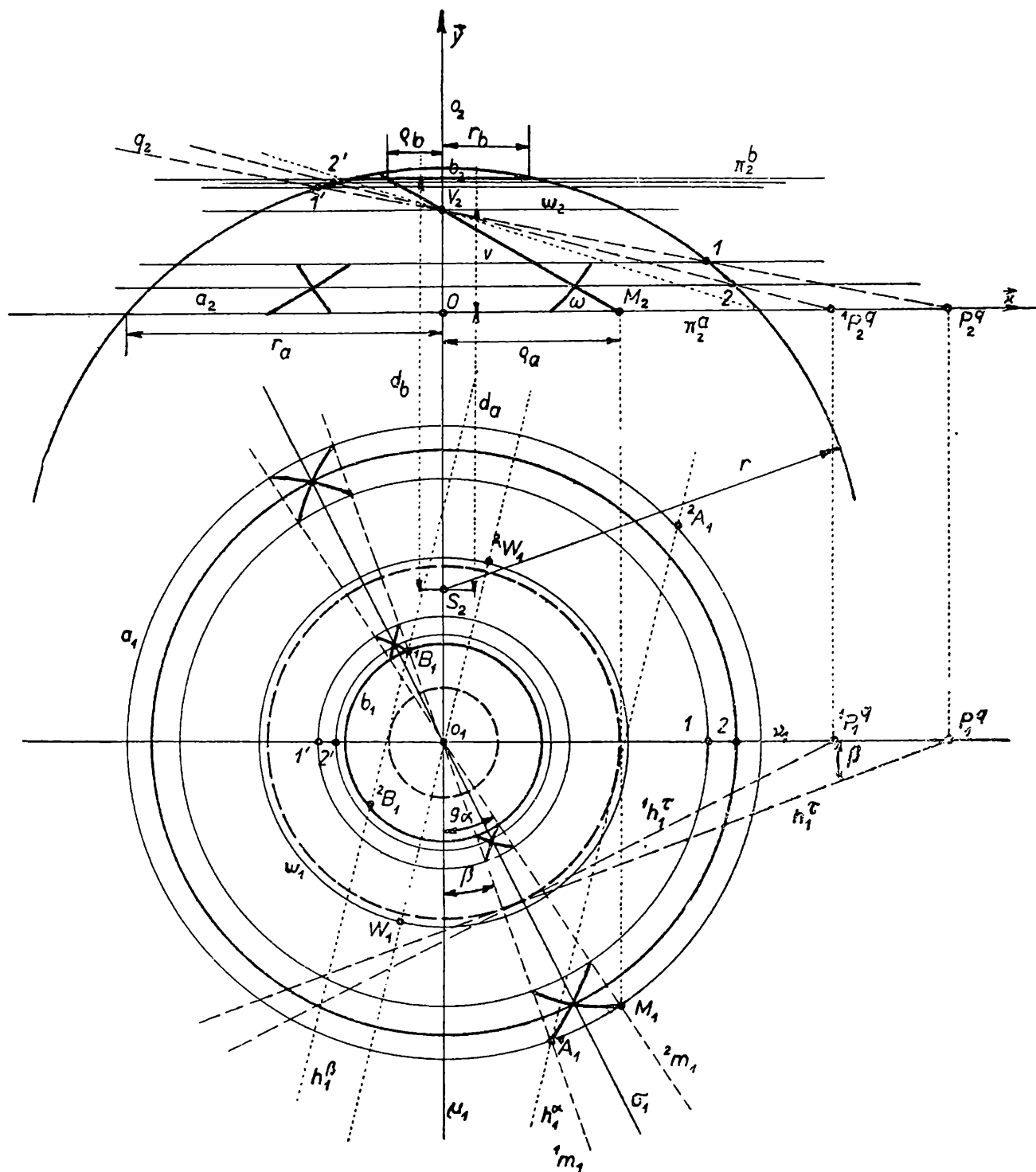
Jak pomáhá deskriptivní geometrie inženýru-projektantovi

O pavilónu „Z“ na brněnském výstavišti bylo toho již hodně napsáno, přes to však se k němu znovu a rádi vracíme, jako k pěknému vzoru naší stavební techniky. Jak známo, užil projektant kopule prof. dr. F. Lederer k zakrytí kruhového půdorysu části kulové plochy o poloměru $r = 65,25$ m, za patní čáru zvolil horizontální kružnici a v π_a o poloměru $r_a = 46,75$ m, tj. vzdálenou od středu kulové plochy o délku $d_a = 45,5192$ m. Kopuli omezil rovněž horizontální kružnicí b v π_b tak, aby $r_b = 9$ m, tj. vzdálenou od středu kulové plochy o délku $d_b = 64,6263$ m (viz obr. 1). Zbytek prostoru zakryl střechou zvlášť definovanou, tzv. lucernou.

Ke konstrukci bání užil sítě shodných povrchových kružnic, jejichž roviny obalují rotační plochu kuželovou s vrcholem V na vertikální ose bání, takže řídicí kružnice o poloměrech ϱ_a, ϱ_b v obou omezujících rovinách π_a, π_b jsou soustředné s kružnicemi a, b . Tuto pomocnou plochu nazveme řídicí kuželovou plochou. Dvojice kruhových řezů kulové plochy, které leží v diametrálně protilehlých tečných rovinách řídicí kuželové plochy, se protínají v bodech povrchové kružnice w , ležící v horizontální rovině procházející vrcholem V . Kruhové řezy protínají kružnice a, b v bodových dvojicích ${}^1A^2A, {}^1B^2B$, jejichž spojnice obalují kružnice, ve kterých řídicí kuželová plocha protíná omezující roviny π_a, π_b . Aby rozložení kružnic po kulové ploše bylo stejnoměrné a aby vyhovovalo nejlépe statickým podmínkám, rozhodl se projektant po předběžných výpočtech užít pro konstrukci 128 kružnic. Rozdělil tedy obě kružnice a, b na 128 stejných dílů, takže jednomu dílu přísluší středový úhel $\alpha = 2^\circ 48' 45''$ a roviny kružnic určil hlavními přímkami v úrovních π_a, π_b tak, aby tyto přímky byly od středů kružnic vzdáleny o délky $\varrho_a = r_a \sin 9\alpha = 19,98819635$ m, $\varrho_b = r_b \sin 9\alpha = 3,847995$ m¹⁾. Zřejmě je ϱ_a poloměrem kružnice, ve které řídicí kuželová plocha protíná rovinu π_a , $\operatorname{tg} \omega = \frac{d_b - d_a}{\varrho_a + \varrho_b} = 0,8016015$ spád jejich povrchových přímek a $v = \varrho_a \operatorname{tg} \omega = 16,022567895$ m výška řídicího kužele, čímž celá síť je jednoznačně definována.

¹⁾ Touto volbou docílil projektant nejen stejnoměrného rozložení shodných kruhových řezů, ale také staticky nejvýhodnějšího spádu jejich rovin.

Vrcholy sférických čtyřúhelníků takto vytvořené sítě projektant ztužil horizontálními kružnicemi, takže výslednou síť tvoří sférické trojúhelníky, jejichž jedna hrana leží v horizontální rovině a obě zbývající v rovinách téhož spádu $\text{tg } \omega$.

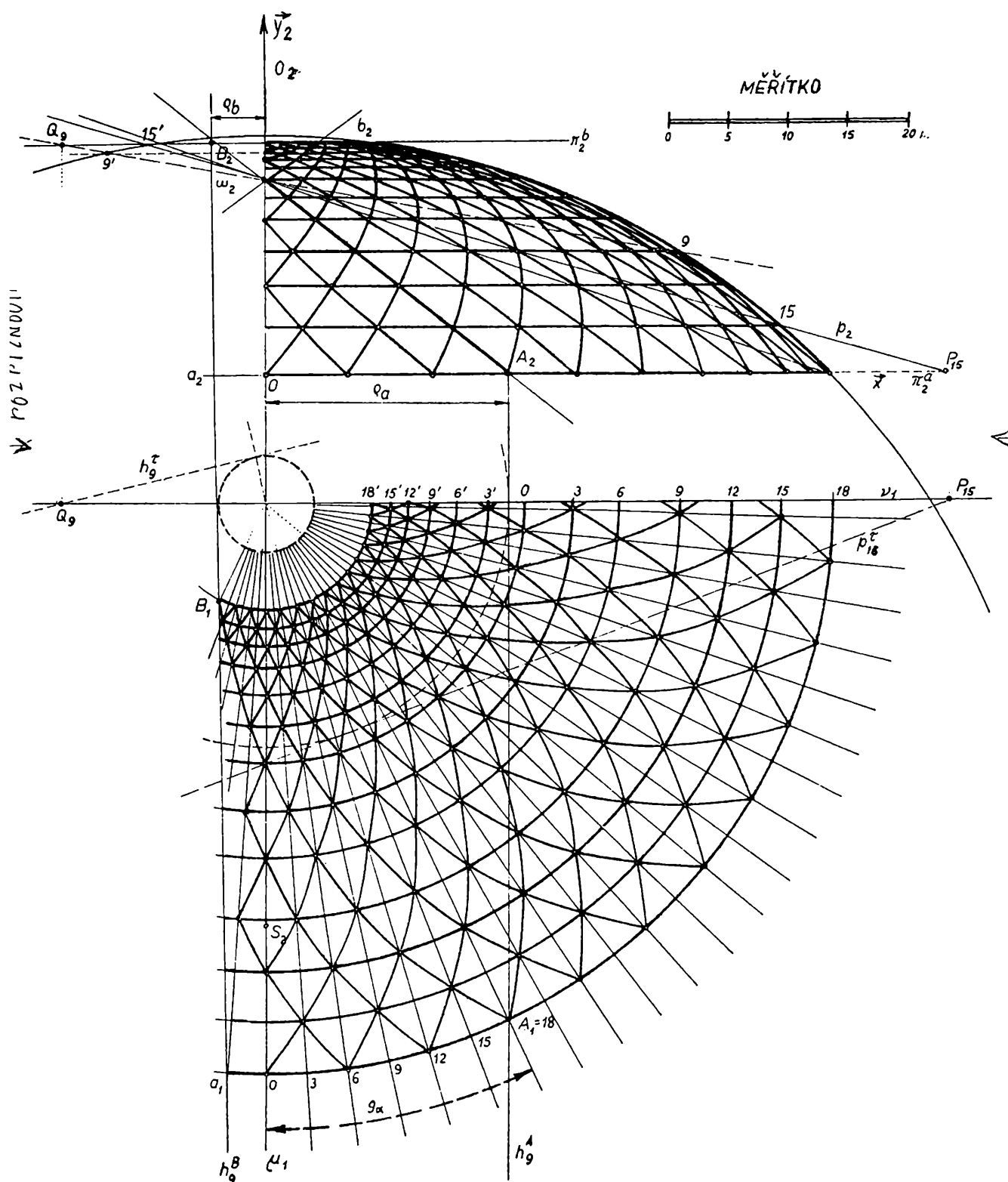


Obr. 1. Řezy rovinami spádu $\text{tg } \omega$ na kulové ploše.

Jsou tedy takto definované sférické trojúhelníky rovnoramenné, tj. leží-li vrcholy horizontální hrany na meridiánech 1m , 2m zvolené kulové plochy, leží jeho třetí vrchol v rovině souměrnosti σ obou meridiánů 1m , 2m .

Protože celá konstrukce byla provedena z ocelových trubek, bylo nutno přesně

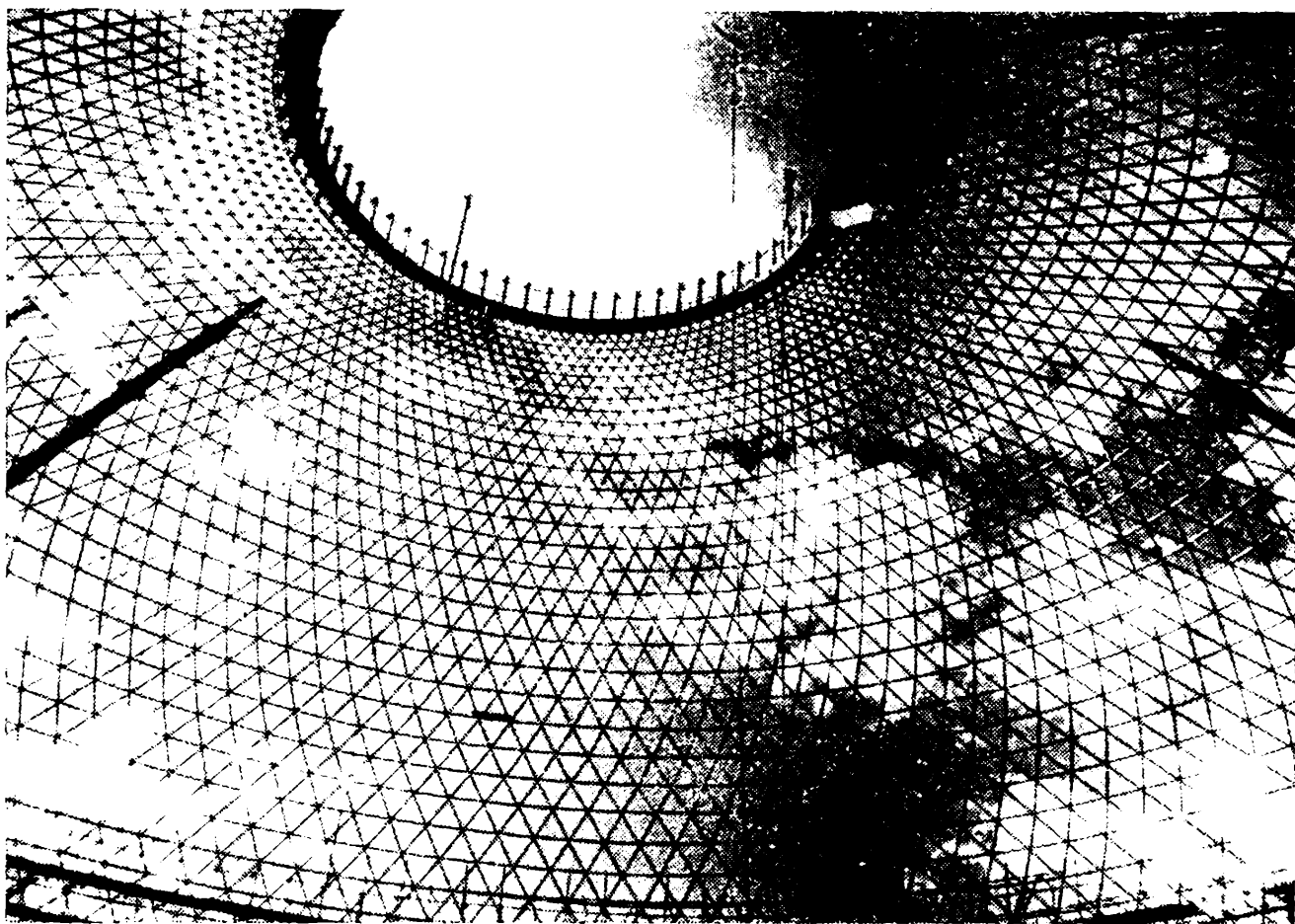
propočítat všechny rozměry určující nejen velikost, ale i polohu užitých kružnic aby jednotlivé díly mohly být přímo na staveništi složeny a aby při tom nedošlo k nežádoucím deformacím. Z důvodů tomotechnických bylo zejména nutno urči



Obr. 2. Ocelová konstrukce.

přesně výšky všech povrchových kružnic, které tvoří horizontální hrany sférických trojúhelníků sítě. Polohu horizontálních kružnic určíme konstruktivně i početně nejlépe oběma body, ve kterých tečná rovina řídící kuželové plochy protíná

meridián kulové plochy, ležící v průčelné rovině ν . Oba body leží zřejmě na průsečnici obou rovin a všechny tyto průsečnice tvoří paprskový svazek, jehož vrcholem je bod V . Označíme-li na příklad β úhel (viz obr. 1), který svírá promítací rovina povrchové přímky (podél které se dotýká tečná rovina τ řídící kuželové plochy) s hlavní vertikální rovinou $\mu \perp \nu$, je vzdálenost OP^q (tj. vzdálenost průsečíku rovin τ, π_a, ν od středu O patní kružnice a) rovná $\frac{\varrho_a}{\sin \beta}$. Protínají tedy průsečnice q všech užitých rovin spádu $\tan \omega$ vertikální osu kulové plochy v bodě V a průčelnou horizontální přímku procházející bodem O v bodě iP^q tak, že $OiP^q = p_1 = \frac{\varrho_a}{\sin \beta_i}$. Tím jsou ovšem také určeny oba průsečíky každé tečné roviny τ_i řídící plochy kuželové s hlavním meridiánem kulové plochy.



Obr. 3. Část bane pavilónu „Z“, pohled zevnitř před montáží lucerny.

Pro nás ovšem přicházejí v úvahu jen ty horizontální hrany sférických trojúhelníků, které leží mezi omezujícími rovinami π_a, π_b . Protože rozložení kruhových řezů na ploše kulové je souměrné podle rovin $\mu \perp \nu$ mají pro nás význam jen ty roviny, pro které je $p_i \geq r_a = \frac{\varrho_a}{\sin 9\alpha}$. Stačí tedy vyšetřit průsečíky s hlavním meridiánem jen těch rovin, které se řídící plochy kuželové dotýkají podél povrchových přímek, jejichž první promítací roviny svírají s rovinou μ úhel menší než 9α .

K vyšetření výšek zbývajících dvou vrcholů takto určené sítě sférických čtyřúhelníků je ovšem třeba uvážit, že tyto čtveřice leží v rovině souměrnosti σ obou meridiánů příslušných středovému úhlu α , tj. určit také průsečíky tečných rovin řídící kuželové plochy, podél těch povrchových přímek, v nichž roviny σ_i kuželovou plochu protínají. Označíme-li meridián ležící v rovině μ číslicí 0 a meridiány příslušné středovým úhlům $\frac{\alpha}{2}, 2\frac{\alpha}{2}, 3\frac{\alpha}{2}, \dots$, číslicemi 1, 2, 3, ..., dostaneme celkem 19 tečných rovin $\tau_i (i = 0, 1, 2, \dots, 18)$, jejichž průsečíky s hlavním meridiánem je třeba určit.

Pro výpočet výšek a poloměrů horizontálních kružnic sítě zvolme bod O za počátek souřadnic, horizontální přímku $x \equiv \nu \cdot \pi$ za osu $\vec{x}$, osu bání za osu $\vec{y}$. Můžeme tedy napsat rovnici hlavního meridiánu:

$$x^2 + y^2 + 2d_a y + d_a^2 = r^2 \quad (1)$$

a rovnici přímky $q_i \equiv \tau_i \quad \nu : \frac{x}{p_i} + \frac{y}{v} = 1 \quad (2)$

Vyloučením neznámé x a dosazením hodnot v textu uvedených za příslušné konstanty dostaneme pro y , tj. pro výšky horizontálních povrchových kružnic výsledné sítě celkem 19 rovnic tvaru:

$$y^2 \left(1 + \frac{p_i^2}{v^2} \right) + 2y \left(d_a - \frac{p_i^2}{v} \right) + p_i^2 + d_a^2 - r^2 = 0, \quad (3)$$

kde ve výrazu $p_i = \frac{\rho_a}{\sin i \frac{\alpha}{2}}$ je $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 18$. Pro hodnotu $i = 0$ dosta-

neme lineární rovnici a kořen této rovnice určuje polohu kružnice w , jejíž rovina prochází vrcholem V řídícího kužele. Kořeny 18 dalších kvadratických rovnic určí polohu zbývajících 36 horizontálních kružnic, jichž bylo s původními 128 kružnicemi užito ke konstrukci sítě kopule pavilónu „Z“. Z rovnice (3) je také zřejmé, že pro hodnotu $i = 18$ je jeden kořen nulový, tj. určuje tzv. patní kružnici a a druhý kořen výšku prstence b , který nese lucernu. Poloměry všech horizontálních kružnic, tj. hodnotu neznámé x , určíme z rovnice (2) dosazením vypočtených hodnot za y .

V obr. 2 je v měřítku, které je k obr. připojeno, zakreslen půdorys a nárys konstrukce, která je podle rovin μ, ν kolmo souměrná. Aby obraz nebyl přeplněn, je v něm zakreslena jen každá třetí kružnice sítě sférických trojúhelníků, ale meridiány plochy kulové, která stavební celek omezuje, jsou číslovány tak, jak jich bylo užito v projektu. Očíslujeme-li i horizontální kružnice sítě tak, jak udává číslo i v rovnicích (3), můžeme body půdorysu sítě určit jako průsečíky sudými (resp. lichými) čísly označených meridiánů a rovnoběžek kulové plochy.

Tak zvanou lucernu tvoří rotační válec s řídící kružnicí b (výška 1,50 m), který je zakryt kulovým vrchlíkem (výška 1,50 m), k jehož konstrukci bylo užito téhož systému jako pro hlavní bání.

P o z n á m k a. Hodnoty všech konstant jsou vyňaty z technické zprávy projektanta prof. dr. F. Lederera úmyslně, aby si studenti uvědomili nutnou přesnost při výpočtech ocelových konstrukcí, jejich obtížnost a také skutečnost, že inženýr - projektant musí umět počítat nejen s písmenky, ale také s iracionálními, neúplnými čísly a že mu nestačí na všechno logaritmické pravítko.

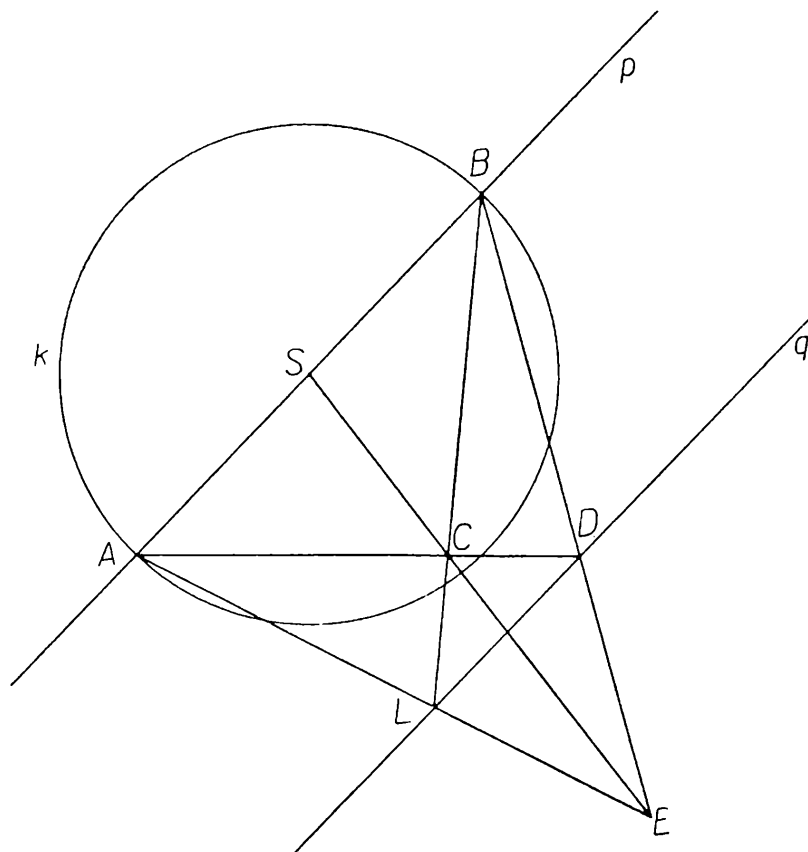
Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Steinerovy úlohy

(Dokončení)

V první části článku jsme vyřešili několik pomocných úloh nevyžadujících pomocné kružnice. Přistupme nyní k řešení *vlastních Steinerových úloh*.

Ú l o h a 7: Bodem L vedte s danou přímkou p rovnoběžku q , máte-li narýsovanou kružnici k !

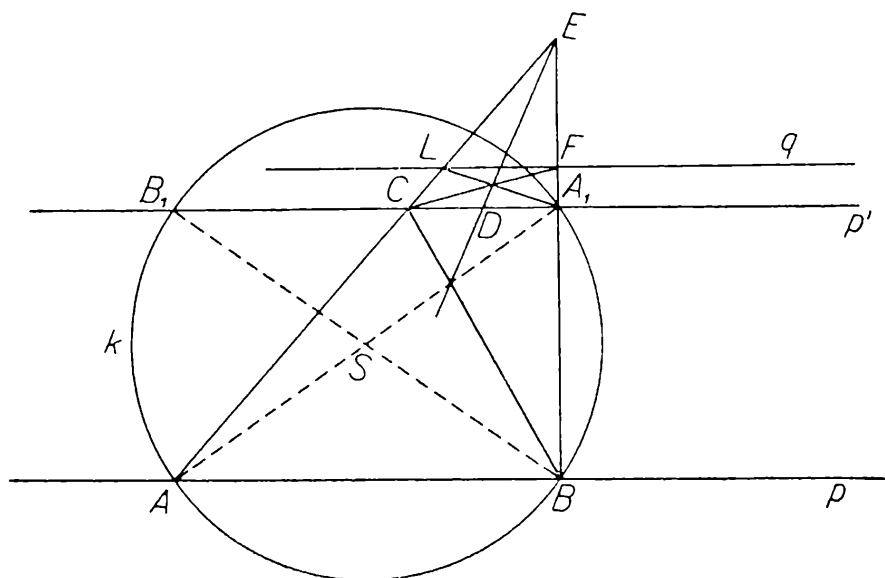


Obr. 7a

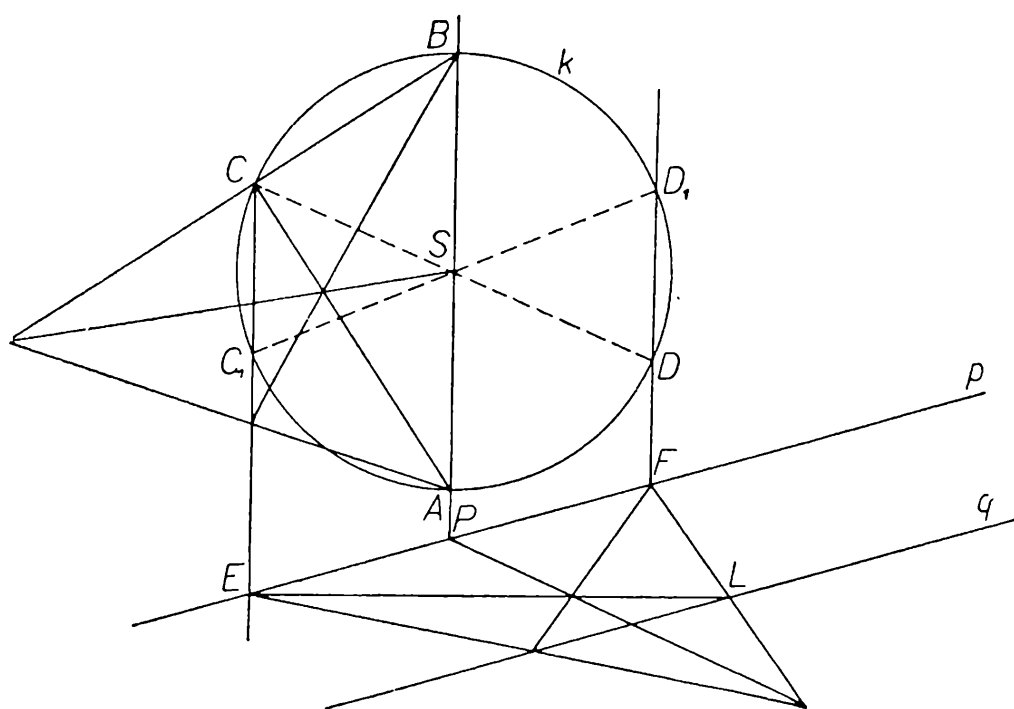
Tuto úlohu vyřešíme pro tři možné případy: a) přímka p prochází středem S kružnice k ; b) přímka p protíná kružnici k , ale nejde jejím středem; c) přímka p je nesečnou kružnice k .

a) Přímka p určuje na kružnici k průměr AB , který je středem S půlen. Tím jsme převedli náš případ na úlohu 1 a čtenář si ji snadno provede podle obr. 7a.

b) Přímka p protíná kružnici k v bodech A, B , k nimž diametrální body jsou A_1, B_1 . Pak nutně $A_1B_1 \parallel AB$. Naše úloha přechází v úlohu, sestrojiti bodem L rovnoběžku q s danou přímkou p , známe-li další rovnoběžku $p' \parallel p$. Tento případ jsme však již vyřešili v úloze 2 a podle toho provedeme naši úlohu, jak je zobrazena v obr. 7b.



Obr. 7b



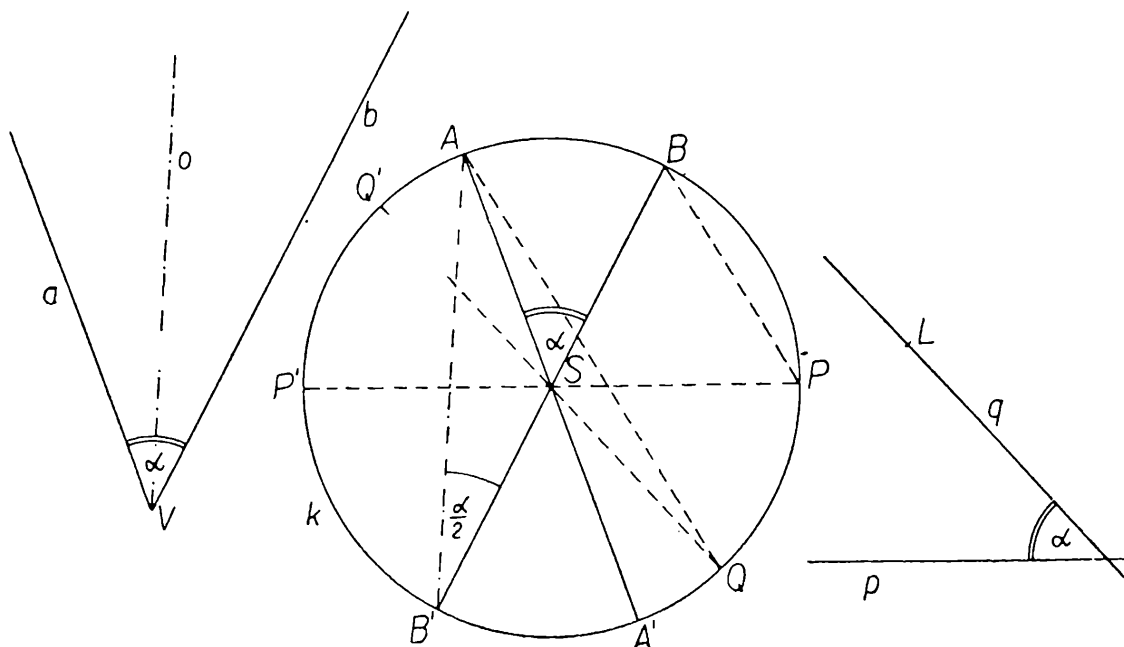
Obr. 7c

c) Neprotíná-li přímka p kružnici k , zvolíme si na přímce p libovolný bod P , který spojíme se středem S naší kružnice. Tím vznikne průměr AB ($AS = SB$), k němuž vedeme libovolným bodem C kružnice k rovnoběžnou sečnu $CC_1 \parallel AB$

a diametrální sečnu $DD_1 \parallel CC_1$ (viz obr. 7c). Prodloužené spojnice CC_1 , DD_1 protnou přímku p v bodech E , F , přičemž $EP = PF$. Nyní již můžeme podle úlohy 1 vésti bodem L rovnoběžku $q \parallel p$, neboť na přímce p známe dvě stejně dlouhé úsečky vedle sebe.

Úloha 8: Je dán ostrý úhel α o ramenech a , b a vrcholu V . Sestrojte pomocí kružnice k pouhým pravítkem jeho osu o !

Řešení (obráz. 8): Středem S kružnice k sestrojíme podle úlohy 7c rovnoběžky $AA' \parallel a$, $BB' \parallel b$ (konstrukce není v obrázku rýsována). Ke středovému úhlu $\alpha = ASB$ odpovídá podle známé věty obvodový úhel $AB'B = \frac{\alpha}{2}$. Vede-li daným vrcholem V rovnoběžku $o \parallel AB'$ podle úlohy 7b (v obr. nejsou konstrukce rýsovány), získali jsme hledanou osu souměrnosti úhlu α . Osa o' tupého úhlu přímk a , b by byla rovnoběžná se spojnici AB .



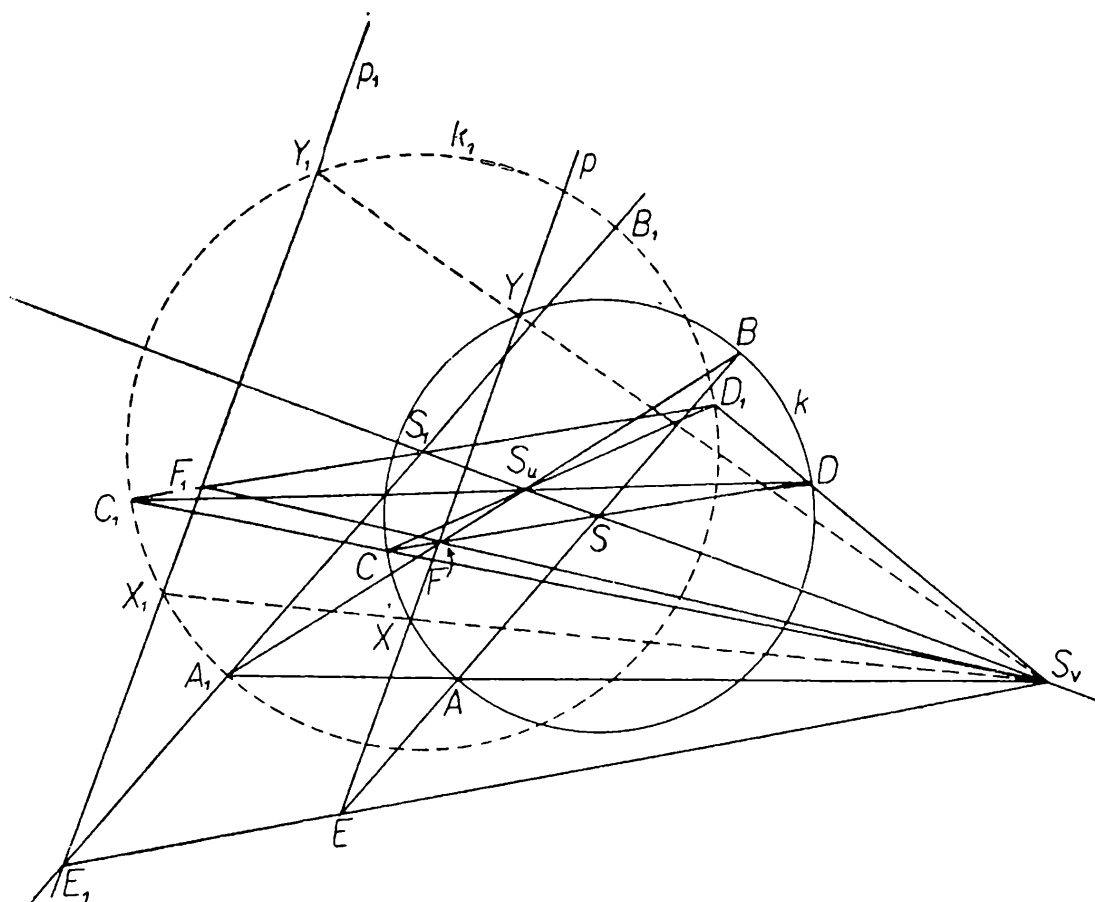
Obr. 8

Úloha 9: Je dán opět úhel α (aVb), přímka p a mimo ni bod L . Bodem L vedte přímku q , která s přímkou p svírá úhel α !

Řešení: Podle obr. 8 sestrojíme průměr $PP' \parallel p$. Spojíme-li koncový bod P s bodem B a vedeme-li podle úlohy 7b bodem A rovnoběžku $AQ \parallel BP$, pak nutně kruhové oblouky AB a PQ jsou stejně dlouhé. Proto středový úhel $ASB = PSQ = \alpha$. Vede-li nyní daným bodem L podle úlohy 7a přímku $q \parallel QQ'$, našli jsme jedno řešení naší úlohy. Druhé nenarýsované řešení 1q vznikne pomocí bodu 1Q na kružnici k : $B{}^1Q \parallel AP$, ${}^1q \parallel S{}^1Q$.

Úloha 10: Určete průsečíky X_1 , Y_1 dané přímky p_1 s nenarýsovanou kružnicí k_1 , která je dána středem S_1 a bodem A_1 svého obvodu, je-li narýsována kružnice k o středu S a poloměru r !

Řešení (obr. 9): V kružnici k sestrojíme průměr AB rovnoběžný s daným poloměrem S_1A_1 ; v obr. 9 není tato konstrukce vyrýsována, provádí se podle úlohy 7. Na středné SS_1 určíme známým již způsobem vnitřní S_u i vnější S_v střed stejnolehlosti kružnic k a k_1 ($A_1A \cdot S_1S \equiv S_v$, $A_1B \cdot S_1S \equiv S_u$). V kružnici k zvolíme libovolný průměr CD . Pomocí středů S_u , S_v sestrojíme k němu odpovídající průměr C_1D_1 kružnice k_1 ($CS_v \cdot DS_u \equiv C_1$, $CS_u \cdot DS_v \equiv D_1$, $C_1D_1 \parallel CD$). Průměry A_1B_1 , C_1D_1 protínají danou přímku p_1 v bodech E_1 , F_1 ; promítnutím ze středu S_v dostaneme na průměrech AB a CD stejnohlé body E a F , jejichž spojnice již stanoví přímku p stejnohlou k p_1 . Nyní již stačí zjistit průsečíky X , Y přímky p s kružnicí k a promítnutím z S_v do p_1 zjistit odpovídající jim body X_1 , Y_1 , jež jsme hledali.



Obr. 9

Pomocné věty:

V citovaném již článku Stanislava Horáka³⁾ byly dokázány tyto věty:

a) Vedeme-li ke kružnici k z bodu P mimo ni ležícího libovolné sečny s průsečíky A_1 a A_2 , B_1 a B_2 , C_1 a C_2 , ... atd., pak součiny $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 = PC_1 \cdot PC_2 = \dots$ jsou pro všechny tyto sečny konstantní a rovnají se tzv. *mocnosti bodu P ke kružnici k* .

b) *Chordála* je množina všech bodů, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost. (V případě protínajících se kružnic je chordálou spojnice průsečíků obou kružnic.)

c) Chordály tří kružnic se protínají v jednom bodě.

Mějme nyní dvě kružnice k_1 a k_2 s vnějším středem stejnolehlosti S_v . Bodem

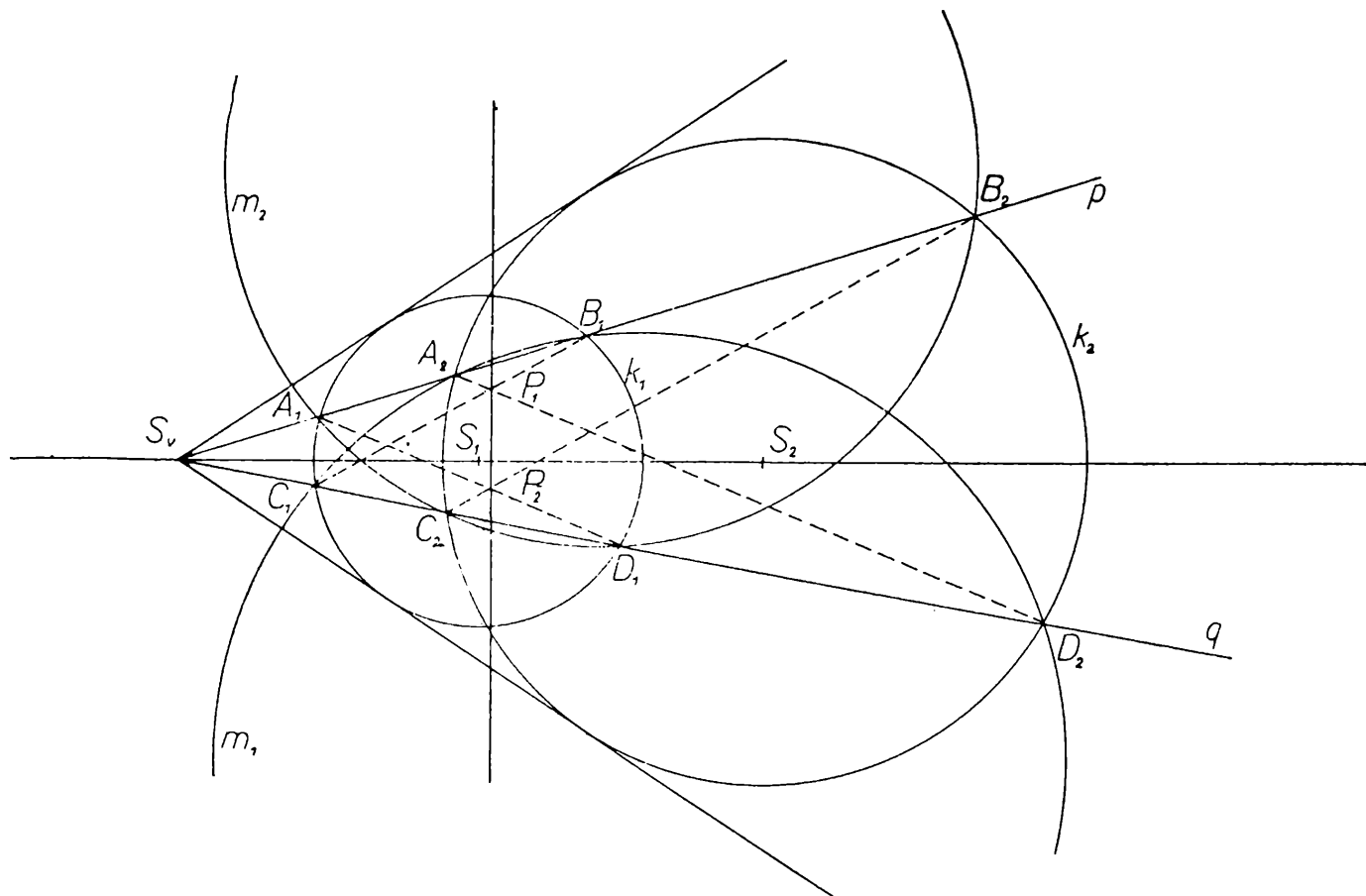
S_v vedme dvě sečny p a q obou kružnic (obr. 10). Přímka p seče kružnici k_1 v bodech A_1, B_1 a kružnici k_2 v bodech A_2, B_2 , přímka q má s kružnicí k_1 společné body C_1, D_1 a s kružnicí k_2 body C_2, D_2 . Při tomto označení platí věty:

V ě t a 1: Čtyři body A_2, B_1, C_1, D_2 (resp. A_1, B_2, C_2, D_1) leží na kružnici m_1 (m_2).

D ů k a z: Ze stejnolehlosti kružnic k_1 a k_2 plyne:

$$\frac{S_v A_1}{S_v A_2} = \frac{S_v B_1}{S_v B_2} = \frac{S_v C_1}{S_v C_2} = \frac{S_v D_1}{S_v D_2} = \lambda. \quad (3)$$

Z mocnosti bodu S_v ke kružnicím k_1 a k_2 odvodíme:



Obr. 10

$$S_v A_1 \cdot S_v B_1 = S_v C_1 \cdot S_v D_1 = c_1, \quad (4)$$

$$S_v A_2 \cdot S_v B_2 = S_v C_2 \cdot S_v D_2 = c_2. \quad (5)$$

Ze (4) plyne

$$S_v B_1 = \frac{c_1}{S_v A_1} \text{ nebo } S_v C_1 = \frac{c_1}{S_v D_1}; \quad (6)$$

ze (3) obdržíme:

$$\lambda \cdot S_v A_2 = S_v A_1 \text{ nebo } \lambda \cdot S_v D_2 = S_v D_1. \quad (7)$$

Vynásobením vztahů (6) a (7) dostaneme:

$$\lambda \cdot S_v A_2 \cdot S_v B_1 = c_1 \quad \text{a} \quad \lambda \cdot S_v C_1 \cdot S_v D_2 = c_1,$$

z čehož plyne

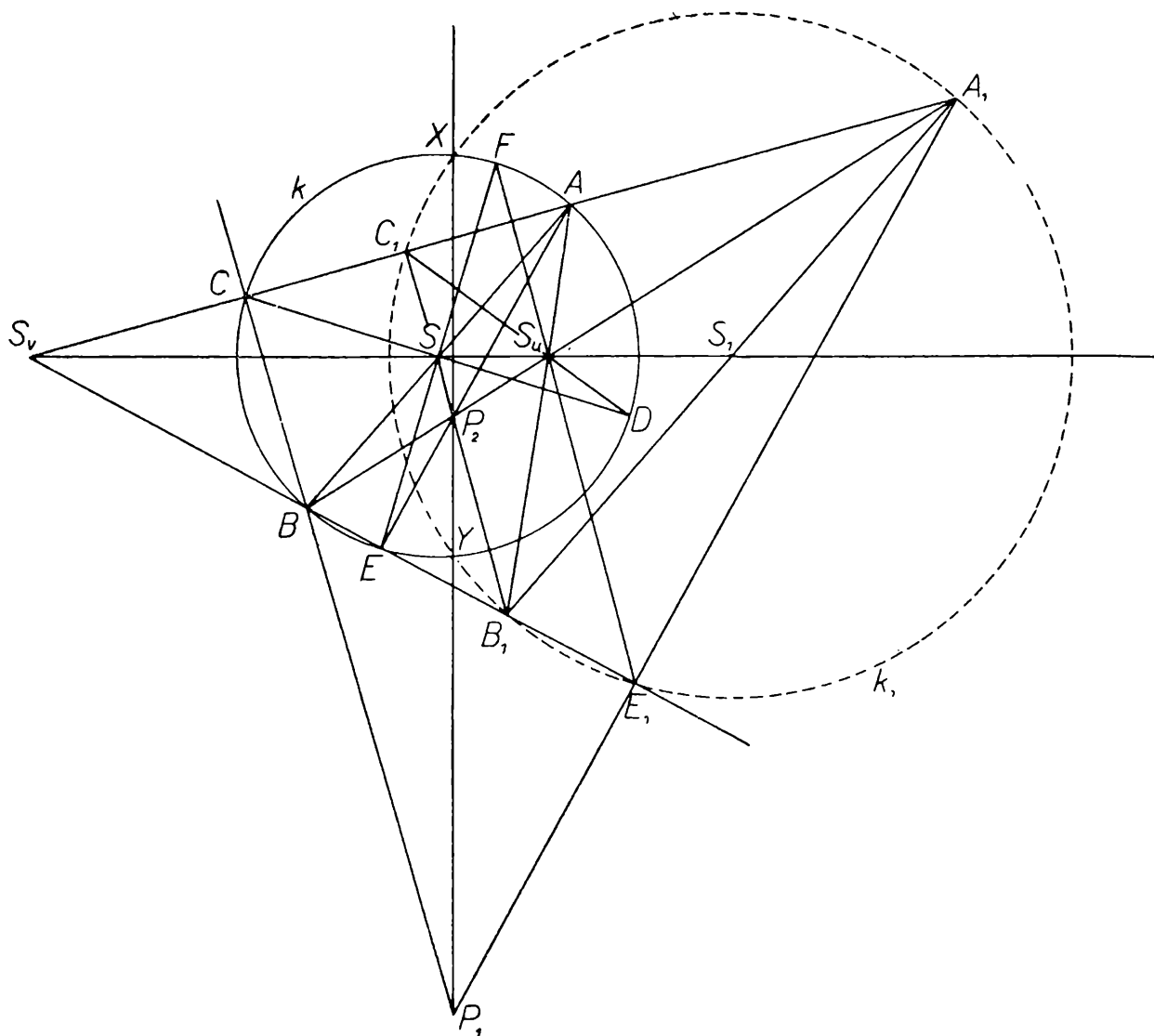
$$S_v A_2 \cdot S_v B_1 = S_v C_1 \cdot S_v D_2. \quad (8)$$

Jednotlivé strany rovnice (8) značí vlastně mocnost bodu S_v ke kružnici m_1 , jdoucí body A_2, B_1, C_1, D_2 .

Analogicky postupujeme pro kružnici m_2 :

Z (5)

$$S_v B_2 = \frac{c_2}{S_v A_2} \quad \text{nebo} \quad S_v C_2 = \frac{c_2}{S_v D_2}, \quad (6')$$



Obr. 11

z (3)

$$S_v A_1 = \lambda \cdot S_v A_2 \quad \text{nebo} \quad S_v D_1 = \lambda \cdot S_v D_2; \quad (7')$$

vynásobením (6') a (7') odvodíme

$$S_v A_1 \cdot S_v B_2 = c_2 \lambda, \quad S_v C_2 \cdot S_v D_1 = c_2 \lambda,$$

odtud

$$S_v A_1 \cdot S_v B_2 = S_v C_2 \cdot S_v D_1. \quad (8')$$

Jednotlivé strany rovnice (8') vyjadřují mocnost bodu S_v ke kružnici m_2 , jdoucí body A_1, B_2, C_2, D_1 . Tím je důkaz proveden.

V ě t a 2: Průsečík P_1 (resp. P_2) spojnic A_2D_2 a B_1C_1 (resp. A_1D_1 a B_2C_2) leží na chordále kružnic k_1, k_2 .

D ů k a z: Spojnice A_2D_2 je chordálou kružnic m_1 a k_2 , spojnice B_1C_1 chordálou kružnic m_1 a k_1 ; proto podle citované věty o chordálách tří kružnic leží bod P_1 na chordále k_1 a k_2 . Obdobně A_1D_1 je chordálou kružnic m_2, k_1 a spojnice B_2C_2 chordálou m_2, k_2 ; průsečík P_2 leží též na chordále k_1 a k_2 .

Ú l o h a 11: Sestrojte průsečíky X, Y pomocné kružnice $k(S; r)$ s nenarýsovanou kružnicí $k_1(S_1; r_1)$ danou středem S_1 a bodem A_1 ($S_1A_1 = r_1$).

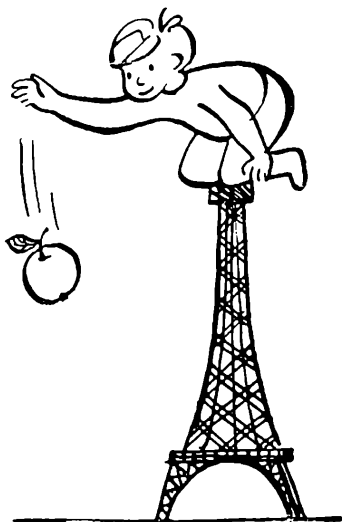
Ř e š e n í (obr. 11): Nejprve sestrojíme známým způsobem středem S rovnoběžný průměr $AB \parallel S_1A_1$. Spojnice A_1A určí na středné SS_1 bod S_v a spojnice A_1B bod S_u (středů stejnolehlosti). Druhý koncový bod B_1 průměru A_1B_1 určíme v průsečíku spojnic $AS_u \cdot S_vB$. Spojnice AA_1 protíná kružnici k v druhém průsečíku C . Pomocí diametrálního bodu D snadno určíme k bodu C stejnohlelý bod $C_1: DS_u \cdot AA_1 \equiv C_1$. Přímka BB_1 protíná kružnici k v dalším průsečíku E , k němuž opět přes diametrální bod F určíme stejnohlelý bod $E_1: FS_u \cdot BB_1 \equiv E_1$. Podle věty 1 jsou čtyřúhelníky A_1CBE_1 a AC_1B_1E tětíkové a podle věty 2 leží průsečíky $P_1 \equiv BC \cdot A_1E_1$ a $P_2 \equiv B_1C_1 \cdot AE$ na chordále kružnic k a k_1 . Proto spojnice P_1P_2 protíná kružnici k v hledaných průsečících X, Y obou kružnic.

Ú l o h a 12: Určete průsečíky X, Y nenarýsovaných kružnic k_1 a k_2 daných vždy středem a jedním bodem!

Ř e š e n í Podle úlohy 11 určíme chordálu c_1 pevné kružnice k a k_1 , dále chordálu c_2 kružnic k a k_2 . Podle citované věty c) prochází chordála $c_{1,2}$ kružnic k_1 a k_2 průsečíkem P chordál c_1 a c_2 kolmo ke středné S_1S_2 . Vyšetříme-li podle úlohy 10 průsečíky X, Y přímky $c_{1,2}$ s jednou z daných kružnic, vyřešili jsme úlohu.

Z á v ě r: Z předchozího výběru Steinerových úloh jste viděli, že euklidovské úlohy lze opravdu vždy řešit „steinerovsky“, tj. pravítkem pomocí jediné předem narýsované kružnice. Ukazuje se však, že úlohy, které euklidovsky provedeme jen několika čarami, vyžadují tu velkého množství přímek (proto jsme některé konstrukce ani nerýsovali) a jsou tudíž nepřehledné. Úlohy jsou dobrou teoretickou ukázkou, jak lze pracovat s omezenými prostředky. Pro nás zůstanou většinou nepoužitelné, neboť raději zůstaneme věrni svému kružítku i dvěma pravoúhlým trojúhelníkům, s nimiž se pracuje mnohem ekonomičtěji, jak to vyžaduje dnešní praktický život.

P o z n á m k a: Snadno nahlédneme, že zcela obdobně budeme postupovat v úlohách, při nichž smíme používat jen jednoho pravítka a kružítko, které však má stále stejné rozevření r (poloměr nelze měnit). Jde tu opět o Steinerovy úlohy, neboť daným poloměrem můžeme narýsovat pomocnou kružnici. Často však zde lze příslušné konstrukce podstatně zjednodušit, jak se může čtenář sám přesvědčit např. na úloze 3.



Fyzika

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

Umělá radioaktivita z nukleárních zkoušek

Umělá radioaktivita - na rozdíl od radioaktivity přirozené čili přírodní - je vlastnost atomových jader, která vznikla uměle. Původně stabilní jádra se účinkem ostřelování částicemi nebo paprsky stávají uměle radioaktivní, *a k t i v u j í s e*. Umělá radioaktivita vzniká jadernými reakcemi, kdy výsledkem reakce částice s jádrem je jádro nestálé, radioaktivní. Umělou radioaktivitu objevili roku 1934 manželé Joliotovi (I. Curieová a F. Joliot Curie).

Roku 1939 byla objevena zvláště důležitá jaderná reakce, *š t ě p e n í j á d r a* (O. H a h n a F. S t r a s s m a n n). Štěpením jádra vznikají obvykle dvě jádra značně odlišných hmot od jádra původního. Štěpení bylo původně objeveno u nejtěžších jader Mendělejevovy soustavy prvků, u jader uranu a thoria. Odštěpky jader neboli *š t ě p n é p r o d u k t y* jsou jádra uměle radioaktivních prvků.

Nukleární zkoušky, tj. pokusné nukleární výbuchy, jsou zdrojem velikých množství štěpných produktů, neboť atomové pumy využívají štěpení těžkých jader (uran 235 a $^{238^1}$), plutonium 239). Štěpné produkty z nukleárních zkoušek se rozptylují do ovzduší a prouděním vzduchových mas jsou roznášeny po celé zeměkouli, i do našich končin. Štěpné produkty pomalu klesají k zemi jako *n u k l e á r n í s p a d*. Když se ocitají v oblastech, v nichž se tvoří srážky, jsou rychle vymývány deštěm, sněhem apod., jako tzv. mokrá, dešťový spad. Jejich množství je však doplňováno ze stratosféry, kam byl radioaktivní prach vymrštěn zvláště při explozích vodíkových pum. Doba prodlevu radioaktivního prachu ve stratosféře je několik let.

Radioaktivita štěpných produktů se tak rozšiřuje do našeho životního prostředí. Záření, jemuž je lidstvo vystaveno, pochází především z přirozených (přírodních) radioaktivních prvků, které jsou rozptýleny v nepatrných množstvích v zemské kůře. Typickým přírodním prvkem je prvek radium, $Ra\ 226$. Málokdo si uvědomuje, že v $1\ km^3$ žuly je rozptýleno asi 8 kg prvku radia! Dceřinnou látkou radia je plynný radon, radiová emanace, která ze zemské kůry uniká do vzduchu a zde se proměňuje na svoje další rozpadové produkty. Všechny organismy obsahují nepatrné množství přirozených radioaktivních prvků, prvku radia a jeho dceřinných látek, radioaktivního draslíku $K\ 40$, aj. Na záření těchto prvků, i na paprsky

¹⁾ Číslo jsou h m o t o v á č í s l a, tj. celkový počet protonů a neutronů neboli *n u k l e o n ů* v příslušném jádře.

kosmické, jsou organismy navyklé. Přesněji řečeno, intenzita těchto paprsků je hluboko pod toleranční čili přípustnou dávkou záření.

Část lidstva je však vystavena i záření umělého původu, které se uplatňuje při lékařském a průmyslovém využití radioisotopů (umělých i přirozených radioaktivních prvků). Lidé jsou také rentgenováni, Roentgenových paprsků se využívá nejen v lékařství, ale i v průmyslu a jinde. Také mírové využití atomové energie v reaktorech a atomových elektrárnách je zdrojem záření. Ochranné biologické štíty reaktorů pohlcují však prakticky všechno škodlivé záření. Všechny tyto umělé zdroje záření člověk dokonale ovládá a má ve své moci postavit je tak, aby byly lidstvu neškodné.

V posledních letech objevil se v biosféře - tj. v oblasti rozšíření života na Zemi - nový zdroj záření, který lidstvo nemůže ovládat, jakmile jej nechalo vzniknout. Je to již uvedený **n u k l e á r n í s p a d**, vlastně radioaktivní prach pocházející z pokusných výbuchů atomových a vodíkových pum. Jedině naprostý zákaz nukleárních zkoušek, o nějž vytrvale usiluje Sovětský svaz, by odstranil nebezpečí tohoto nového zdroje záření. Radioaktivní prach se dostává i do těch nejzastřenějších koutů světa, nikde se není možno před ním ukrýt. Často je označován jako **r a d i o a k t i v n í a e r o s o l**. Aerosolem nazýváme jakoukoliv pevnou nebo i tekutou látku, která je velmi jemně rozptýlena ve vzduchu. Buď je radioaktivní prach sám o sobě suspendován čili jemně rozptýlen v ovzduší, nebo je zachycen na částicích látky neaktivní, na běžných prachových částicích, na jemných kapkách mlhy a deště, apod. Tyto částice jsou částčkami radioaktivního prachu **a k t i v o v á n y**.

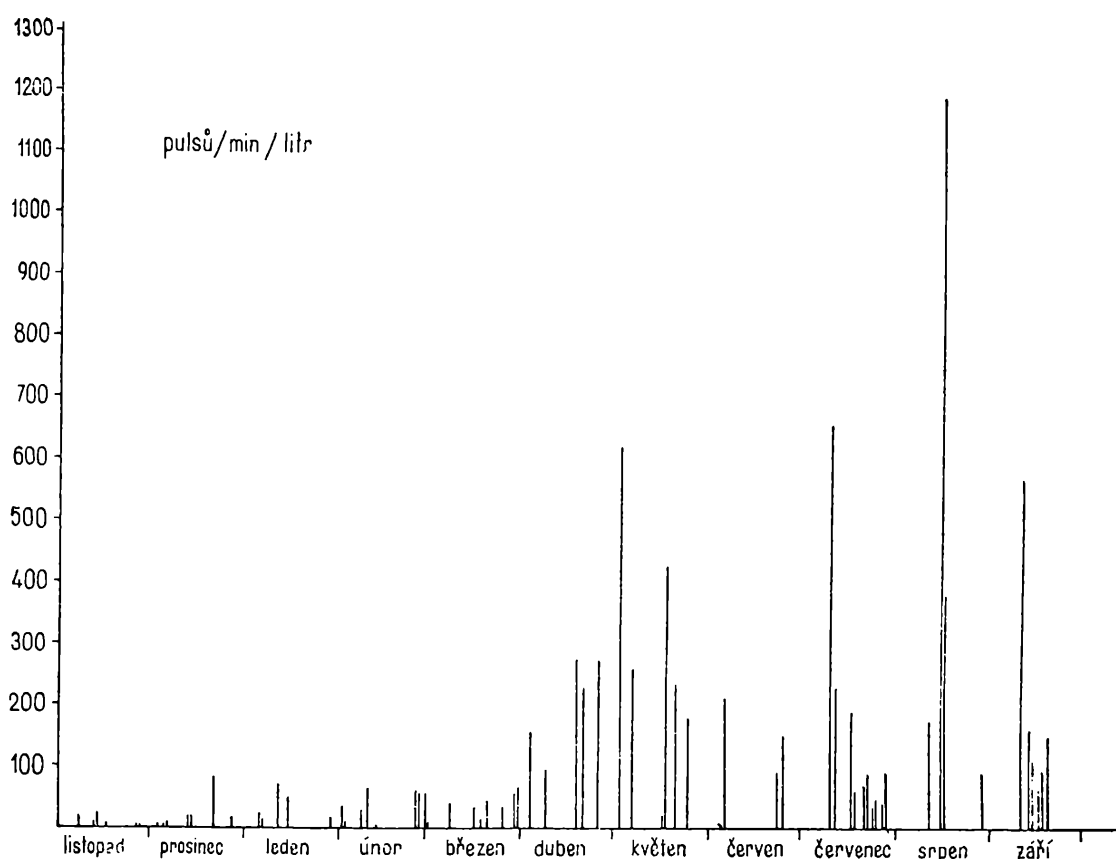
Nejlépe je to možno zjistit dvěma jednoduchými způsoby: buď změřením aktivity dešťové vody, nebo změřením aktivity suchého spadu, který napadá do velké, otevřené nádoby. Náš fyzikální ústav na lékařské fakultě Karlovy university v Hradci Králové má svoje sběrné nádoby umístěny na ploché střeše fakulty. Je to mísa z umělé hmoty (polyetylén) o ploše dna asi 1 m^2 . Druhá kontrolní skleněná nádoba má dno asi $0,06 \text{ m}^2$. V nádobách je udržována tenká vrstva destilované vody, aby napadaný prach nebyl odnášen větrem. Směs vody a prachu se vypustí otvorem ve dně nádoby, a je přelévána do odpařovací baňky v laboratoři ústavu. Po odpaření a vyžihání odparku při teplotě asi 600°C je vzorek znovu navlhčen a rovnoměrně nanesen na hliníkovou misku plochy 3 cm^2 . Pak je znovu vysušen pod infralampou (lampou vysílající hojně infračervených, tepelných paprsků), pokryt tenkou celofánovou fólií, aby byl chráněn před vlhkostí, poškozením apod., a po uplynutí dvou dnů měřena jeho **a k t i v i t a b e t a²⁾**.

Podobně se zachycují také atmosférické srážky, déšť, sníh aj., a připravují se z nich odparky na malé, očíslované hliníkové misky. Prachové částčky buď samy pozvolna klesají do sběrných nádob, anebo jsou splachovány z ovzduší srážkami. Čím větší aktivita odparku, tím větší množství štěpných produktů odparek obsahuje. Množství štěpných produktů je přímo úměrné množství paprsků beta, které z odparku vyletují.

²⁾ Aktivita beta, tj. záření beta pochází ze štěpných produktů, které tvoří radioaktivní aerosol.

Proč čekáme dva dny, než měříme radioaktivitu odparku? Je to proto, aby z odparku vymizela přirozená aktivita, pocházející z dceřinných látek radonu, který je v nepatrných množstvích obsažen ve vzduchu a v něm se ustavičně rozpadá. Radon prolíná z půdy do vzduchu, a protože jeho poločas je pouze 4 dny, rozpadá se na pevné svoje dceřinné látky radium A, radium B a radium C a C'. Tyto radioisotopy se za 2 dny prakticky úplně rozpadnou, takže po uplynutí dvou dnů měříme již jen aktivitu příslušející štěpným produktům. Kdybychom měřili aktivitu odparků ihned po jejich získání, naměřili bychom podstatně větší hodnoty.

Přirozená radioaktivita je dnes ještě podstatně vyšší než radioaktivita umělá, pocházející z nukleárních zkoušek.



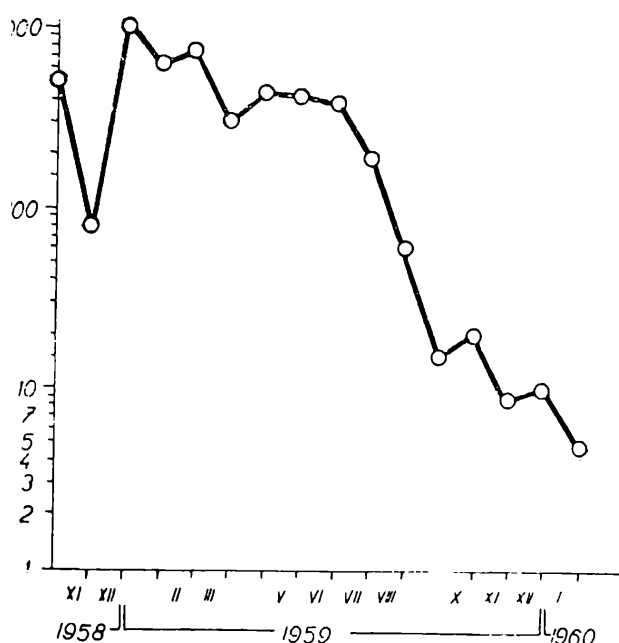
Obr. 1. Délky jednotlivých čar odpovídají radioaktivitám dešťů od 1. 11. 1956 do 30. 9. 1957.

Proč je tedy nukleární spád nebezpečný pro lidstvo a proč Sovětský svaz - a s ním všichni odpovědní vědci i na Západě - usilují o naprostý zákaz nukleárních zkoušek a úplné nukleární odzbrojení?

Je to proto, že nukleární spád je nevídaným přídatkem k intenzitě přirozeného záření, na kterou jsme navyklí a která je pro nás snesitelná. A tento přírůstek následkem pokusných výbuchů stále vzrůstá. Sovětský radiobiolog O. J. L e j - p u n s k i j vypočítal, že kdyby každý rok byly uvedeny k výbuchu nukleární trřaskaviny rovnocenné svou výbušnou energií jedenácti megatunám³⁾ trřaskaviny trinitrotoluenu, vyskytovala by se na konci našeho století taková kontaminace čili znečištění radioaktivními látkami, že by bylo ohroženo celé lidstvo.

Pro srovnání uvádím, že tzv. nominální atomová puma, která byla v roce 1945 svržena na Hirošimu, byla jen úrovně kilotunové. Byla rovnocenná dvaceti tisícům tun trinitrotoluenu. Vodíkové pumy jsou obvykle megatunové. V roce 1958 bylo provedeno několik pokusných výbuchů pum vodíkových a několik serií výbuchů pum atomových. Také v roce 1957 byly prováděny nukleární zkoušky. Je to jasně patrné z obr. 1, v němž na ose úseček jsou nanášeny jednotlivé měsíce od listopadu 1956 do září 1957. Na ose pořadnic jsou nanášeny radioaktivity jednotlivých srážek, které byly zachycovány a měřeny v našem fyzikálním ústavě. Jednotlivé pořadnice jsou úměrné radioaktivám dešťů, takže z obr. 1 je patrné, jak po seriích nukleárních zkoušek aktivity dešťů vzrůstaly, pak opět klesaly, atd.

Jako pořadnice jsou na obr. 1 nanášeny pulsy⁴⁾ za minutu na 1 litr dešť. vody. V našem ústavě používáme automatického zařízení, konstruované inž. J. Macků, které registruje celkový počet impulsů a zapisuje jej na proužek papíru.



Obr. 2. Pokles radioaktivity nukleárního spadu v období po zastavení pokusných výbuchů (od 1. 11. 1958). Zastavení výbuchů mělo za následek rychlý pokles spadu po uplynutí asi osmi měsíců od zastavení zkoušek.

K vyjádření aktivity nukleárního spadu v jednotkách *curie* je nutno použít preparátu, jehož radioaktivita je přesně známá. Používáme preparátu (standardu), který obsahuje radioaktivní stroncium. Preparát jsme obdrželi z dosimetrického oddělení Ústavu jaderného výzkumu v Praze (vedoucí prof. dr. František Běhounek, člen korespondent ČSAV). Preparát obsahuje 1 milimicrocurie⁵⁾ radioaktivního stroncia a jeho dceřinné látky, radioaktivního yttria, která je se stronciem v rovnováze. Takový preparát označujeme Sr 90 + Y 90, neboť jde o radioisotopy hmotového čísla 90.

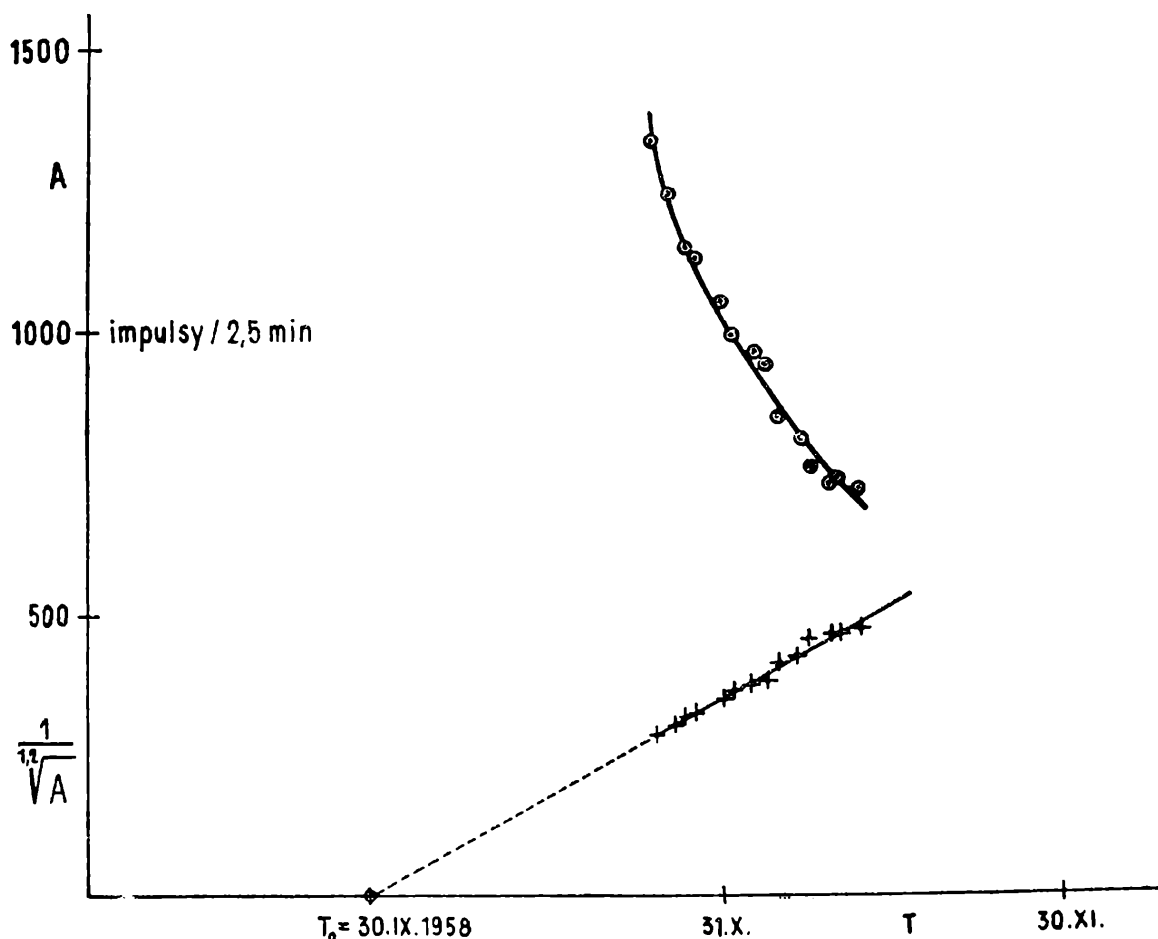
Na obr. 2 je průběh radioaktivity nukleárního spadu v období po zastavení

³⁾ 1 megatuna = 1 milión tun.

⁴⁾ Pulsy (= impulsy) jsou elektrické výboje, které vznikají v počítači trubici. Každý impuls odpovídá jednomu paprsku beta.

⁵⁾ Jednotka *milicurie* je tisícina *curie*. *Microcurie* je milióntina curie, 1 milimicrocurie = 10^{-9} curie. V jednom curie radioaktivní látky se rozpadá právě tolik jader jako v jednom gramu prvku radia. Je to 37 miliard jader za jednu vteřinu.

pokusných výbuchů, od listopadu 1958 do ledna 1960. Jako pořadnice jsou nanášeny logaritmy měsíčního spadu, tj. radioaktivního prachu, který dopadl na plošnou jednotku za příslušný měsíc. Bylo nutno použít logaritmů, neboť za 13 měsíců od zastavení výbuchů pokleslo množství spadu v poměru 200 : 1, tedy na 0,5 %. Obr. 2 tedy jasně dokazuje veliký význam zastavení výbuchů. I v současné době se projevuje ještě další, pomalý pokles množství radioaktivního prachu ve vzduchu. Je pravděpodobné, že za několik let - nebudou-li výbuchy obnoveny - množství spadu poklesne na nepatrnou hodnotu.



Obr. 3. Jeden ze způsobů grafického stanovení přibližného data nukleární zkoušky. Bližší výklad v textu.

Vzorky spadu, které měly značnou aktivitu, jsme proměřovali delší dobu. Je známo, že aktivita spadu se ze začátku rychle zmenšuje s časem. Na obr. 3 je graficky znázorněn pokles radioaktivity spadu, který byl nasbírán v říjnu 1958, tedy nedlouho před zastavením zkoušek. Počet impulsů za čas, který byl nanášen jako pořadnice, rychle klesal.

Na obr. 3 byly jako pořadnice nanášeny ještě jiné hodnoty, a sice převratné hodnoty odmocniny z aktivity, kdy odmocnitelem je 1,2. Tak získané body (na obr. označené křížky) jsou přibližně na přímce, která časovou osu protíná v datu 30. 9. 1958, což je přibližné datum příslušné nukleární zkoušky (bod T_0).

Správnost tohoto postupu vyplývá z této úvahy: v okamžiku výbuchů byla radioaktivita A našeho vzorku velmi velká proti aktivitě, kterou jsme naměřili

koncem října 1958. Trvalo to nejméně 14 dnů, než k nám aktivita dospěla z místa pokusného výbuchu v Nevadě, USA. Převratná hodnota aktivity, i její odmocniny, byla by tedy v době výbuchu velmi nepatrná, prakticky nulová. Kde tedy přímka protíná časovou osu, musí být datum výbuchu. Křivka časového poklesu aktivity je totiž křivkou hyperbolického typu. Podle zkušeností i podle matematických úvah je dána rovnicí

$$A = at^{-1,2}, \quad (1)$$

kde A je radioaktivita spadu po uplynutí času t od výbuchu. Konstanta a je zřejmě aktivita spadu po uplynutí časové jednotky. Čas t původně neznáme. Nahradíme jej rozdílem $T - T_0$, kde T je datum měření, T_0 datum výbuchu. Pak je možno rovnici (1) napsat ve tvaru

$$T - T_0 = \frac{k}{\sqrt[1,2]{A}}, \quad \text{kde } k = \sqrt[1,2]{a} \quad (2)$$

Pro veliké A je pravá strana rovnice prakticky nulová, takže $T = T_0$. Dosazujeme-li do vztahu (2) přímo hodnoty $\frac{1}{\sqrt[1,2]{A}} = y$, dostaneme rovnici přímky

$$y = \frac{1}{k} (T - T_0) \quad (3)$$

V průsečíku přímky s časovou osou, tj. pro $y = 0$ je $T = T_0$. Toho jsme použili v obr. 3 ke grafickému určení přibližného data nukleární zkoušky. Přímka daná rovnicí (3) je určena body označenými křížky, a protíná časovou osu v bodě T_0 .

Inž. Jiří Machalický, ČVUT, Praha:

Skupenské přeměny vody

(Dokončení)

Vzhledem k vysoké hodnotě specifického tepla vody a vzhledem k tomu, že se při teplotách (0 až 100) °C prakticky nemění (viz diagram na obr. 8), používá se vody hojně při všech kalorimetrických měřeních.

✚ Při skupenských přeměnách dochází za určitých podmínek k zjevům, které odporují dosud uvedeným poznatkům. Tak např. vodu lze podchladit až o 10 °C pod bod mrazu, vroucí vodu lze přehřát nad bod varu; v přesycené páře nedochází ještě ke kondenzaci, ačkoliv už má teplotu nižší, než odpovídá jejímu tlaku na křivce přeměny: pára $\longleftrightarrow$ voda atd. Tyto stavy nejsou však rovnovážné - nazýváme je *metastabilní*. Jak ukazuje podrobnější termodynamický rozbor, příčinou těchto jevů, vedle dalších, je ta okolnost, že při změnách skupenství se uplatňují kapilární síly. Jedna fáze se totiž tvoří v druhé ve formě jemně rozptýlené (pára kondenzuje v drobné kapičky mlhy; při varu naopak se ve vodě tvoří malíčké bublinky páry atd.).

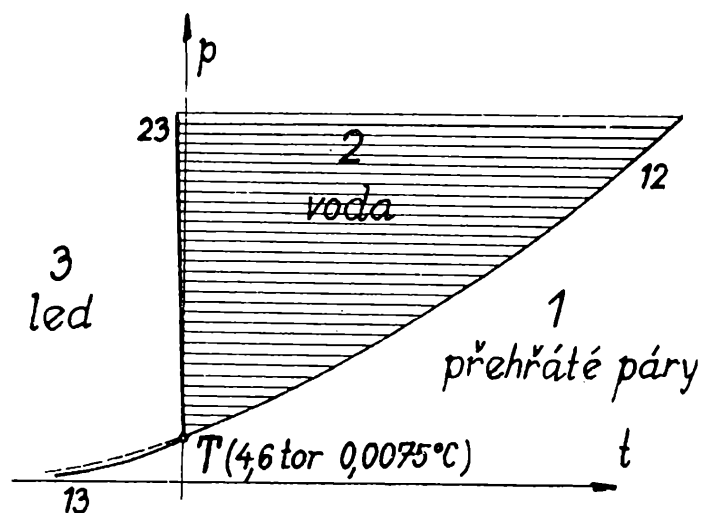
Vzhledem k silně vyvinutému povrchu může povrchová energie ovlivnit průběh přeměny. Podrobněji se lze o těchto zajímavých jevech informovat ve speciální literatuře, např. Kirejev: Fyzikální chemie. [135]

Pozorování nás poučují, že vedle uvedených přeměn je možná také přímá přeměna led - pára. Tomu říkáme *sublimace*. Při tom bylo shledáno, že *tenze par nad ledem jsou nižší než nad přechlazenou vodou*.

Tenze par (tor)

T	nad ledem	nad přechl. vodou
0	4,58	4,58
— 5	3,02	3,16
— 10	1,96	2,14
— 15	1,25	1,42

Všechny tři přeměny můžeme znázornit (viz obr. 6) v diagramu ($p - T$) čarami, kterým říkáme *čára tání, vypařování a sublimování*. Rovnovážný stav mezi všemi skupenstvími může nastat jen při zcela určité teplotě a tlaku. V diagramu $p - T$ leží tento stav v průsečíku křivek, znázorňujících fázové přeměny; nazýváme ho *t r o j b o d*.



Obr. 6

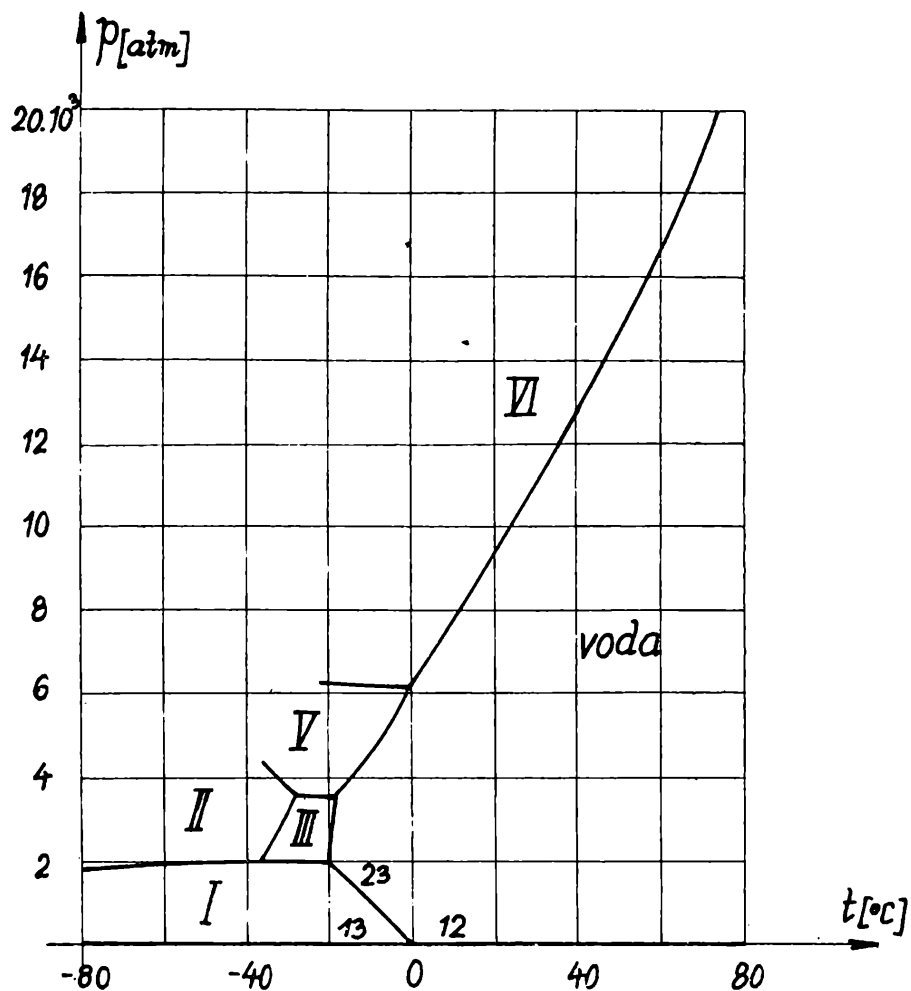
Z nasycených par můžeme různým způsobem získat přehřáté páry (např. izotermickou expanzí, izobarickým ohřevem atd.). Napětí přehřátých par je za téže teploty nižší než tenze par.

Kdybychom však snižovali tlak nasycené páry adiabatickou expanzí, neklesne obvykle tlak páry pod napětí nasycené páry, odpovídající snížené teplotě - vzniknou tedy z par nasycených p á r y p ř e s y c e n é. Jsou-li v takové páře zárodky kondenzace (prach, ionty atd.), začne kondenzovat v podobě mlhy.

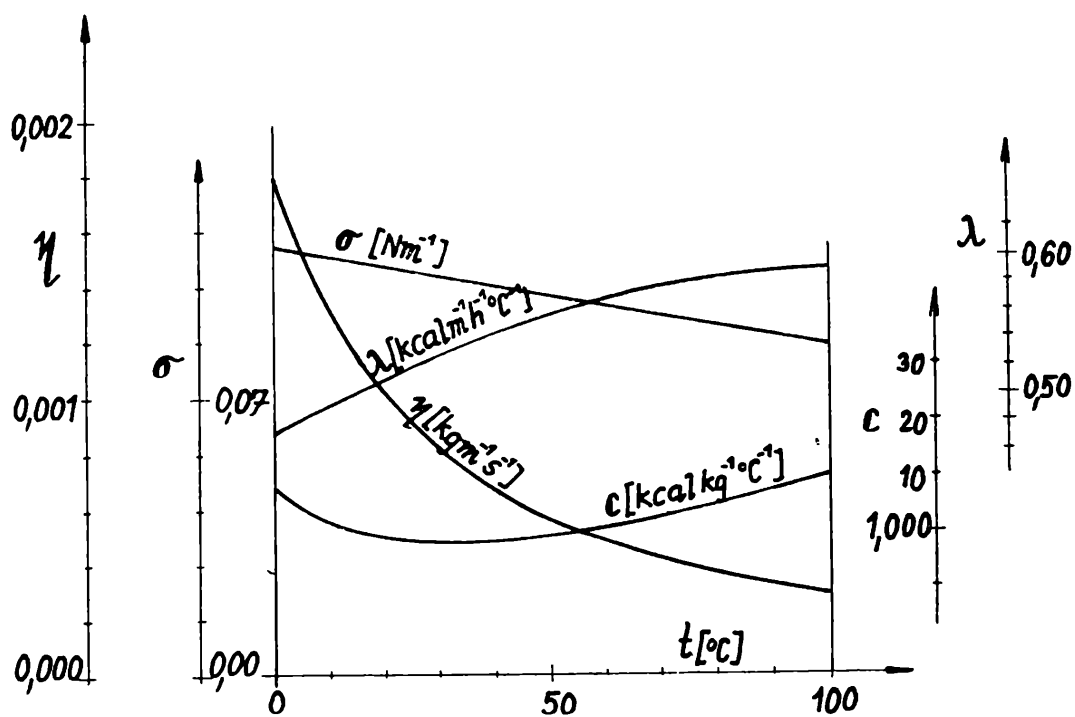
G. T a m m a n n (čti temen) a P. W. B r i d g m a n n (čti bridžmen)⁸⁾ zjistili,

⁸⁾ Viz P. W. B r i d g m a n n: The physics of high pressures 1949, resp. Bridžmen P. W.: Fizika vysokich davlenij ONTI 1935.

že vedle obyčejného ledu existují při vyšších tlacích ještě další modifikace pevné fáze vody. Úplný diagram ($p - T$) je zakreslen na obr. 7. Vzhledem k použitému



Obr. 7



Obr. 8

měřítku splývají čára sublimování 13 a čára vypařování s osou teplot. Vyrůstá-li tlak od 0 asi do 20 000 atm, snižuje se bod tání k $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Od tohoto místa se čára tání obrací a se vzrůstajícím tlakem rovněž vzrůstá teplota tání. Jak patrně, může být voda v rovnováze s několika modifikacemi své pevné fáze. Diagram obsahuje několik trojných bodů, v nichž nastává rovnováha mezi vodou a dvěma pevnými modifikacemi pevné fáze. Teoreticky se dá dokázat, že rovnováha může nastat u jediné chemicky čisté látky maximálně mezi třemi fázemi - mohou se tedy v diagramu protnout v jednom bodě nejvýše tři křivky fázových přeměn.

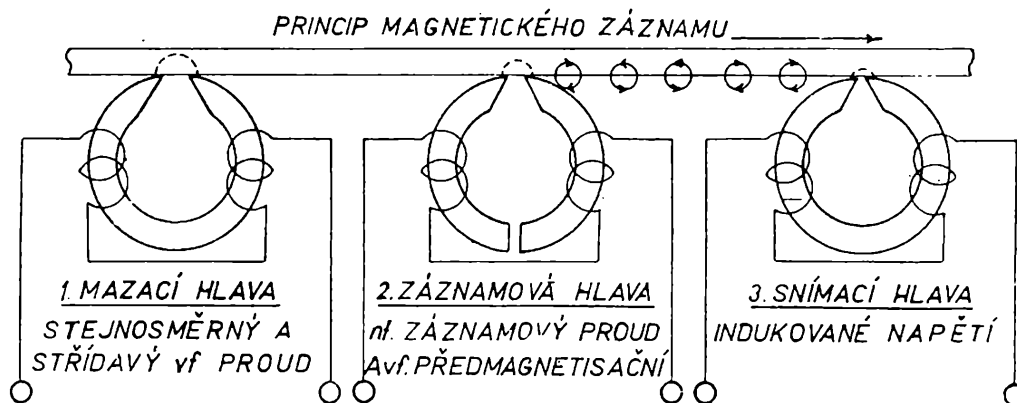
V závěru je připojen ještě diagram (obr. 8), v němž jsou pro vodu znázorněny závislosti nejdůležitějších veličin na teplotě.

Antonín Valenta, studující VUT, Brno:

Magnetický záznam zvuku

Magnetický záznam zvuku prodělal hlavně v posledních letech prudký rozvoj. Zaujal přední místo v nízkofrekvenční záznamové technice, jejíž význam pro mnohá odvětví naší kulturní i hospodářské činnosti nelze plně docenit.

Protože již není příliš daleká doba, kdy se stálým zdokonalováním výrobních procesů - nehledě ani na amatérské možnosti - stane m a g n e t o f o n přístupný široké veřejnosti, je vhodné stručně se seznámit s jeho vcelku jednoduchou funkční podstatou.



Obr. 1

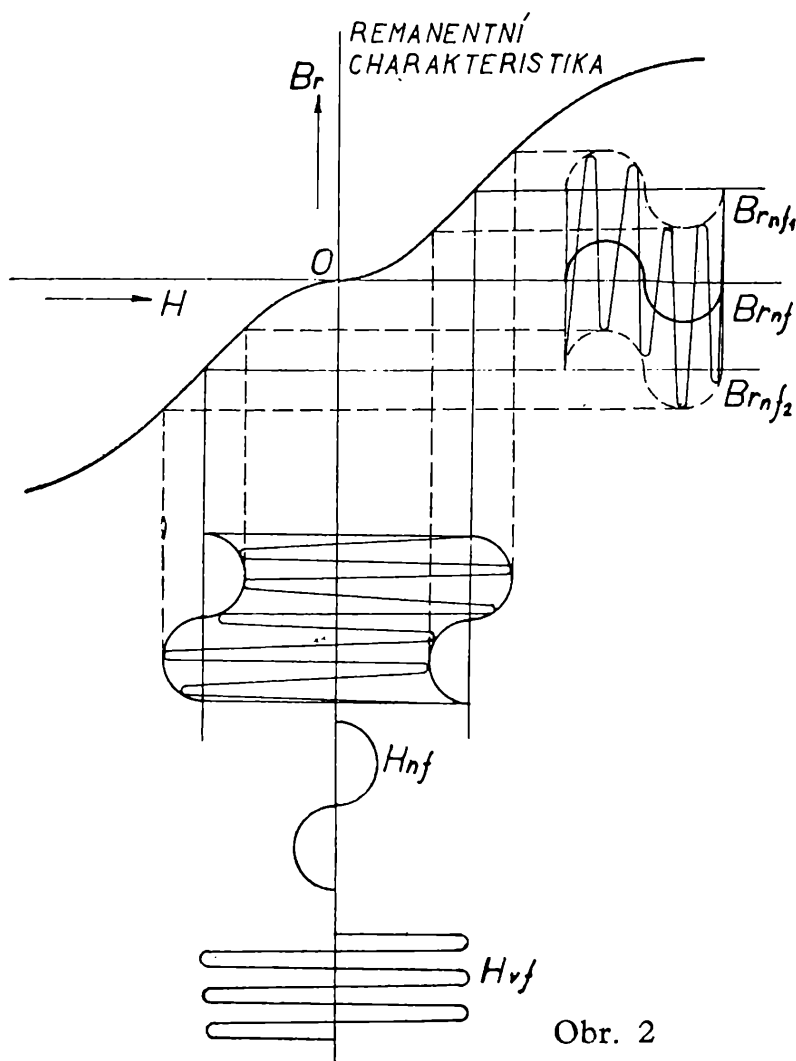
Další výklad je rozdělen na tři části. První část tvoří pojednání o principu magnetického záznamu a reprodukce, druhá část se zabývá elektronickou stránkou magnetického záznamu zvuku a ve třetí části je uvedeno několik teoretických i konstrukčních poznatků o magnetofonových hlavách.

Popis mechanického vybavení magnetofonu je vynechán, neboť článek je informativní a není tedy stavebním návodem.

I. Princip magnetického záznamu

Střídavé elektrické napětí získané ze zvukové energie elektroakustickým zařízením se přes záznamový zesilovač přivádí na svorky z á z n a m o v é h l a v y,

kde vytvoří proměnné elektromagnetické pole (obr. 1). Siločáry magnetického toku vystupují před štěrbinou z jednoho pólu jádra, vstupují do pohybujícího se feromagnetického záznamového materiálu¹⁾ a vracejí se druhým pólem zpět do jádra. Pásek se tak zmagnetuje v souvislou řadu magnetů různé velikosti a směru. Probíhá-li pak pásek touž rychlostí a směrem kolem štěrbinu snímací hlavy, vytváří v jejím jádře střídavý magnetický tok různého smyslu a hustoty,



Obr. 2

který indukuje ve vinutí hlavice proměnné napětí, jež se dále zesiluje a přivádí k reprodukční soustavě.

¹⁾ Záznamovým materiálem rozumíme zpravidla pásek nebo drát, zhotovený z feromagnetického materiálu, tj. látek s vysokou magnetickou permeabilitou. V nynější době byly původní celokovové pásy nahrazeny pásy z umělých hmot, vyráběných převážně z acetylcelulosy a polyvinylchloridu. Potřebné feromagnetické vlastnosti se získávají buď přímísením magneticky aktivního prášku k výrobní hmotě pásu, nebo vytvořením feromagnetické vrstvy buď po jedné, nebo i po obou stranách pásu.

Při záznamu není nutno nahrávat na celou šířku pásu. Záznam možno provést na polovinu, popřípadě i na jeho menší část. Docházíme tak k více stopám, jejichž hlavní výhodou je možnost využití pásu více než jednou. Výstupní napětí se však zmenší u tohoto způsobu záznamu na převrácenou hodnotu počtu stop. U některých zahraničních profesionálních nahrávačů se užívá jako záznamového materiálu ocelové struny. Výhodou je, že se mohou značně zmenšit rozměry nahrávače.

Vztah mezi intenzitou magnetického pole Br ve šterbině záznamové hlavy a remanentní magnetickou indukcí²⁾ v záznamovém materiálu znázorňuje remanentní (dynamická) charakteristika (obr. 2).

Záznam pouhého nízkofrekvenčního (dále nf.) kmitočtu by byl vlivem nelineárnosti remanentní charakteristiky v okolí počátku zkreslený. Proto se do záznamové hlavy přivádí ještě vysokofrekvenční kmitočet (dále vf.), jehož zdrojem je elektronkový generátor.

Časově rozvinutý průběh magnetizačního pole ve šterbině záznamové hlavy je dán sinusovkami H_{nf} a H_{vf} , jejichž překládáním (superpozicí) vzniká výsledný záznamový kmitočet. Průběh zaznamenané remanentní indukce vf. kmitočtů je účinkem inflexního zakřivení (křivka v okolí tzv. inflexního bodu má tvar S) charakteristiky v okolí počátku zkreslený. Průběh nf. kmitočtu je nezakreslený, neboť účinně využívá přímých částí charakteristiky. Výsledná hodnota nf remanentního průběhu bude:

$$Br_{nf} = \frac{Br_{nf1} + Br_{nf2}}{2}$$

Poznámka: Délka zaznamenané vlny λ je dána vztahem $\lambda = \frac{v}{f}$, kde v je posuvná rychlost záznamového materiálu a f frekvence záznamového proudu.

Poněvadž je superpoziční kmitočet nejméně pětkrát větší než maximální kmitočet nf., je i λ_{nf} pětkrát větší než λ_{vf} a při užívaných rychlostech pásku se následkem demagnetizace vf. kmitočet prakticky nezaznamenává.

*Reprodukce.*³⁾ Znázorníme-li si záznam sinusového kmitočtu, bude se podobat řetězu magnetů, souhlasnými póly u sebe. Délka jednotlivých magnetů je polovina délky zaznamenané vlny, tedy $\lambda/2$.

Za předpokladu konstantního záznamového proudu by byl ideální průběh indukovaného napětí v závislosti na kmitočtu charakterizován přímkou stoupající o 6 dB³⁾ (decibel) na oktavu.

Zesílení nebo zeslabení v belech je tedy dáno:

$$N_B = \log \frac{P_2}{P_1} \quad (1)$$

Pro praxi má význam jednotka desetkrát menší, tzv. decibel [dB], pro něž platí:

$$N_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad (2)$$

²⁾ Remanentní magnetickou indukcí, neboli remanencí, nazýváme vlastnost některých feromagnetických látek uchovat si magnetickou polarizaci i po zaniknutí magnetujícího pole. Tato vlastnost je způsobena tzv. koercitivní silou (nazývanou též silou bránivou), kterou lze obecně definovat jako sílu bránící změně magnetické polarizace.

³⁾ Bel [B] je jednotka zesílení nebo zeslabení určená logaritmem podílu výkonu po zesílení P_2 a výkonu před zesílením P_1 .

Pro elektrický výkon P platí při napětí U , intenzitě I a odporu R : $P = UI = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$ a po dosazení za P_1 a P_2 do rovnice (2) dostaneme:

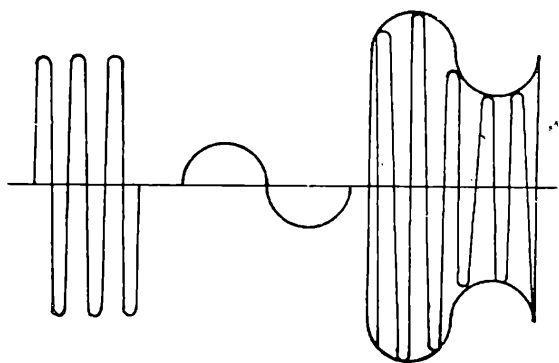
$N_{dB} = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$, kde U_2 je napětí po zesílení U_1 napětí před zesílením při konstantním odporu R .

Reálné indukované napětí je však úměrné frekvenci asi do 300 Hz; v 5 kHz dosahuje extrému a pak rychle klesá následkem demagnetizace.

My však požadujeme na výstupu snímacího zesilovače frekvenčně nezávislé napětí. O tom, jak se toto vyrovnání (korekce) výstupního napětí prakticky provádí, bude však pojednáno až v kapitole o záznamovém a snímacím zesilovači.

II. Záznamový zesilovač

K vytvoření magnetizačního proudu, který teče hlavou, slouží záznamový zesilovač. Skládá se ze dvou složek, a to nízkofrekvenční, jež zpracovává zvukový



Obr. 3

signál, a vysokofrekvenční, tzv. předmagnetizační, vytvořené normálním elektronkovým oscilátorem. K vlastnímu záznamu slouží pouze složka nf., kdežto proud vf. pouze přispívá k zlepšení jakosti záznamu. Nejdůležitější vlastností nf. záznamového zesilovače je jeho *kmitočtová charakteristika*, kterou nutno upravit tak, aby vykazovala vzestup zesílení směrem k vyšším frekvencím. Rozložení zvukové energie ve spektrech hudby a hlasu má maximum v pásmu 200 až 500 Hz, v pás-

mu nejnižších a nejvyšších kmitočtů je značný pokles. Bylo by tedy vhodné zvýšit při záznamu úroveň nízkých a vysokých kmitočtů. Činitel zkreslení záznamového materiálu při nízkých kmitočtech je však mnohem větší než při vysokých kmitočtech. Zvýšením úrovně nízkých kmitočtů zvětšil by se nám tedy nepříznivě i činitel zkreslení. Proto se v praxi zesiluje intenzita pouze nejvyšších kmitočtů, a to bez nebezpečí, že se záznam přemoduluje v míře neodpovídající přirozenému zvukovému spektru.

Magnetofonové hlavy (viz dále) mají charakter indukčnosti a jejich reaktance⁴⁾ $X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi f$ stoupá úměrně s frekvencí. My však požadujeme od záznamové hlavy rovnoměrnou přeměnu střídavého elektrického proudu v magnetické pole v potřebném kmitočtovém rozsahu. Abychom toho docílili, musíme hlavu připojit ke zdroji s určitým vnitřním odporem, jež určíme takto. Budiž indukčnost záznamové hlavy L (H), zdroj proudu má vnitřní odpor R_i (Ω).

⁴⁾ *Reaktance (jalový odpor)* $X = \frac{1}{\omega C} - \omega L$, kde $\frac{1}{\omega C}$ je kapacitní odpor a ωL induk-
tivní odpor.

Indukčnost L a činný odpor R_i tvoří obvod, v němž je reaktance přímo rovna indukčnosti; výsledná impedace Z bude se tedy rovnat:

$$Z = \sqrt{R_i^2 + (\omega L)^2} \quad [\Omega; \text{Hz}; \text{H}] .$$

Z Ohmova zákona plyne:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R_i^2 + (\omega L)^2}} \quad [\text{A}; \text{V}; \Omega; \text{Hz}; \text{H}] , \quad (3)$$

kde I a U jsou proud a napětí v daném obvodu.

Nyní již máme vše připraveno k řešení počátečního úkolu: Jak veliký musí být vnitřní odpor R_i zdroje, je-li indukčnost hlavy L a kmitočtový rozsah, ve kterém připouštíme v intenzitě proudu rozdíl x % mezi maximální a minimální hodnotou kmitočtového spektra od 0 Hz do h Hz.

Řešení. Pro nulovou frekvenci ($f = 0$) bude proud podle vztahu (3)

$$I_1 = \frac{U}{R_i} \quad [\text{A}; \text{V}; \Omega] \quad (4)$$

Pro kmitočet $f = h$ Hz je

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_i^2 + (2\pi h L)^2}} \quad [\text{A}; \text{V}; \Omega; \text{Hz}; \text{H}] \quad (5)$$

platí $I_2 > I_1 - \frac{I_1}{100} x$ a po dosazení ze vztahů (4) a (5)

$$\frac{U}{\sqrt{R_i^2 + (2\pi h L)^2}} > \frac{U}{R_i} - \frac{U}{R_i} \cdot \frac{x}{100} = \frac{U(100 - x)}{100 R_i}, \quad U > 0$$

$$\text{možno dělit } 10^4 - \frac{10^4}{2 \cdot 10^2 x + x^2} > R_i^2 + (2\pi h L)^2 \quad \text{a tedy}$$

$$R_i > 2\pi h L \sqrt{\frac{10^4 - 2 \cdot 10^2 x + x^2}{2 \cdot 10^2 x - x^2}} . \quad (6)$$

Ze vztahu (6) vyplývá, že pro hlavy s indukčností řádově 1/1000 H volíme elektronky s vnitřním odporem $7 \div 15 \text{ k}\Omega$, tj. triody, jež mají též poměrně malé *nelineární zkreslení*⁵⁾. Vychází-li vnitřní odpor již desítky $\text{k}\Omega$, je nutno volit pro záznamový stupeň pentodu, kterou pro zmenšení *harmonického a intermodulačního zkreslení*⁵⁾ užijeme v triodovém zapojení.

Korekce záznamového proudu se ve vysokých kmitočtech provádí seriovou kombinací kapacity a odporu zapojených paralelně ke *katodovému odporu*⁶⁾. Primární vinutí výstupního transformátoru je pro správný přenos nízkých

⁵⁾ Viz poznámku na konci kapitoly.

⁶⁾ *Katodový odpor* zapojený v katodové větvi elektronky slouží k získání předpětí pro řídicí mřížku elektronky. Spádem katodového proudu (jenž je roven součtu proudů zbývajících elektrod) vznikne na katodovém odporu potenciální rozdíl, jehož relativní minus pól se přivádí přes svodový odpor na mřížku.

kmitočtů nutno volit tak, aby jeho reaktance $X_L = 2\pi fL$ byla rovna dvojnásobku zatěžovacího a vnitřního odporu elektronky. Zvyšováním impedance hlavy může dojít k tomu, že převod výstupního transformátoru bude 1 : 1 a transformátor pak můžeme vynechat. Docházíme tak k tzv. *vysokoohmovým hlavám*, jež se přes vhodný filtr zapojují přímo na anodu elektronky.

Druhou částí záznamového zesilovače je vf. g e n e r á t o r mazacího a předmagnetizačního proudu. Dříve než přejdeme k jeho popisu, je nutno předeslat několik elementárních poznatků o skládání vysokého a nízkého kmitočtu, jež sice nemají pro nf. techniku takový význam, jako pro techniku vf., přece však jsou nutné pro správné pochopení *předmagnetizace*, jako důležitého činitele při zlepšování jakosti magnetického záznamu zvuku.

(Dokončení)

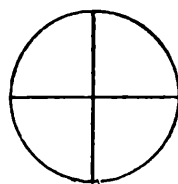
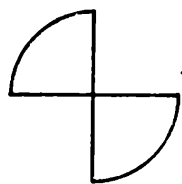
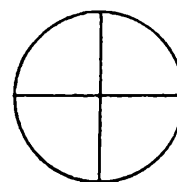
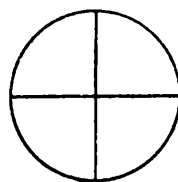
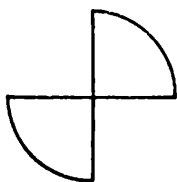
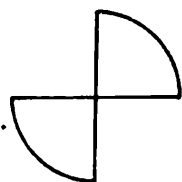
Matematické zábavy



Máte velmi dobrou představivost?

Pakli ano, tedy nakreslete nebo narysujte názorný obrázek těles daných na obr. 1 a 2 vždy půdorysem, nárysem a bokorysem zleva. Řešení zašlete redakci Rozhledů do konce června. Jména správných řešitelů otiskneme v některém z příštích čísel.

M. M.



Obr. 1

Obr. 2

Co způsobí jedna žena

V podniku pracují muži a ženy. Kdyby jedna žena odešla do důchodu, bylo by celkové procento žen právě o jedno větší než kdyby byla nahrazena mužem. Kolik mužů a kolik žen má nyní podnik? Řešení zašlete redakci do 15. června 1960.
O. S.

Řešení hádanky z čísla 5

Kostel, radnice a hvězdárna jsou v téže přímce. Chodec, jdoucí stále touž rychlostí, vyjde od kostela, když na radnici tluče právě 10 hodin, přijde k radnici, když na kostele tluče $1\frac{1}{2}$ 11, přijde k hvězdárně, na níž hodiny ukazují 10.40 hod., vrátí se k radnici právě, když je na ní 10.50 hod. a když dojde ke kostelu, dává hvězdárna signál 11.15 hod.

Co můžete z daných údajů říci o příslušných vzdálenostech a o hodinách, jejichž chod je jinak pravidelný? S rychlostí zvuku přitom nepočítejte!

Řešil Boh. Jetmar, Náchod, Komenského třída 1429:

Hodiny na hvězdárně jdou přesně. Cestu od hvězdárny ke kostelu konal chodec od 10.40 hod. do 11.15 hod. přesného času, tedy 35 minut. Protože od kostela přišel k hvězdárně v 10.40 hod. přesného času, musel chodec vyjít od kostela v 10.05 hod. přesného času. Na radnici tlouklo ale 10 hod., proto hodiny na radnici šly o 5 minut pozdě. Cestu od kostela k hvězdárně a zpět k radnici konal chodec od 10 hod. do 10.50 hod. podle hodin radnice, tedy 50 minut. Proto cestu od hvězdárny k radnici šel chodec 15 minut ($= 50 - 35$), a od radnice ke kostelu 20 minut ($= 35 - 15$). Chodec od kostela přišel k radnici (podle hodin radnice) v 10.20 hod. a v tu dobu tlouklo na kostele 10.30 hod. Hodiny na kostele šly proto o 10 minut napřed než na radnici a o 5 minut napřed podle přesného času.

Další správná řešení zaslali:

Marie Bohatová, XI., JSŠ v Uhlířských Janovicích,

František Březina, I. roč. MU v Brně,

Dagmar Bydžovská, X. c, 7. JSŠ v Praze,

Miroslav Fiala, XI. c, JSŠ v Ostravě,

Igor Gašaj, stavebný robotník, Senec,

Ľeroným Hájek, Praha 3, Dobrovolného 1,

Ivan Havlíček, IX. a, JSŠ v Rakovníce (vycházel však z předpokladu, že hodiny na kostele jdou dobře),

Vladimír Kos, X., DSŠ, Horní Nová Ves u Lázní Bělohrad,

Karla Kropáčková, Prům. škola, Žďár n. Sázavou,

A. Kubátová, učitelka, Chrudim,

Karel Kunc, stud. MU v Brně,

Josef Laga, JSŠ v Otrokovicích,

Vladimír Lukeš, Plzeň V, Zahradní 86,

Pavel Novotný, XI. a, DSŠ v Praze 16, Belojanisova 3,
 Jana Šandová, XI. c, DSŠ v Uherském Hradišti,
 Miloslav Šmerda, Babice nad Svitavou 45,
 Vladimír Vätter, JSS v Nepomuku,
 Zdeněk Votápek, stud. prům. školy strojnické v Praze 3,
 Dagmar Vydrová, X. a, DSŠ v Plzni - Doubravce.

Máte dobrou představivost?

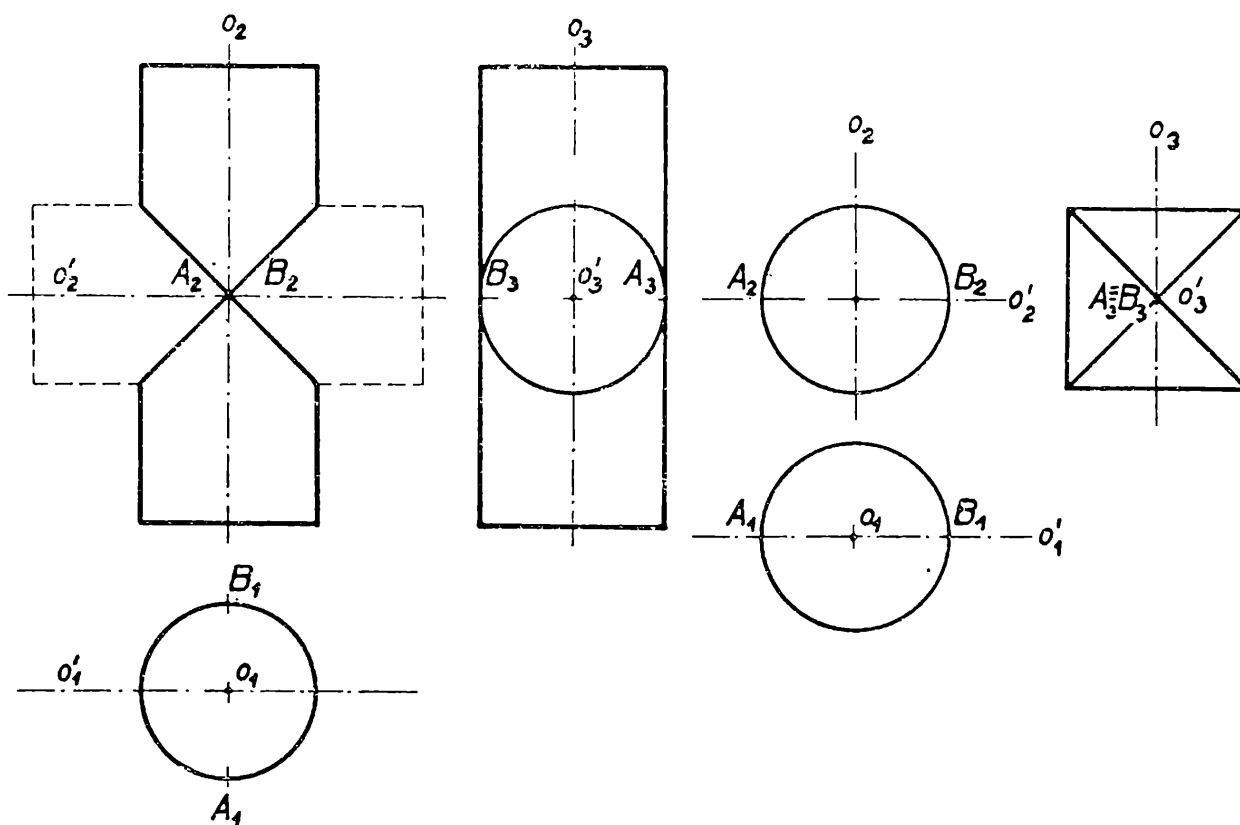
Dostali jsme řadu řešení této úlohy z Rozhledů č. 5, ale jen málo z nich bylo správných a ještě více činilo obtíže zobrazení.

Správné řešení zaslali:

S: Kubálková, laborantka ČKD Stalingrad, Praha 3, Cyrilometodějské n. 6,

K. Kropáčková, PŠ, Žďár n. Sázavou,

Ľ. Skála, X. b, 15. JSS, Praha 12, Londýnská 34, který nadto provedl modely obou těles.



Obr. 1a, b

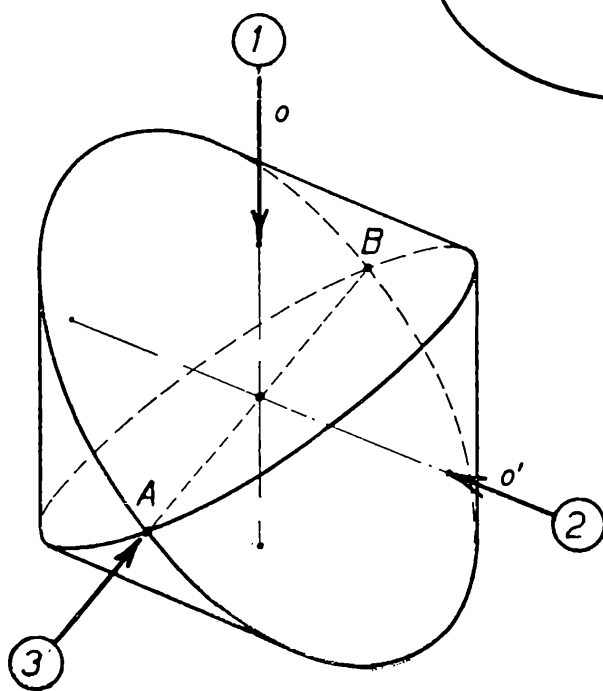
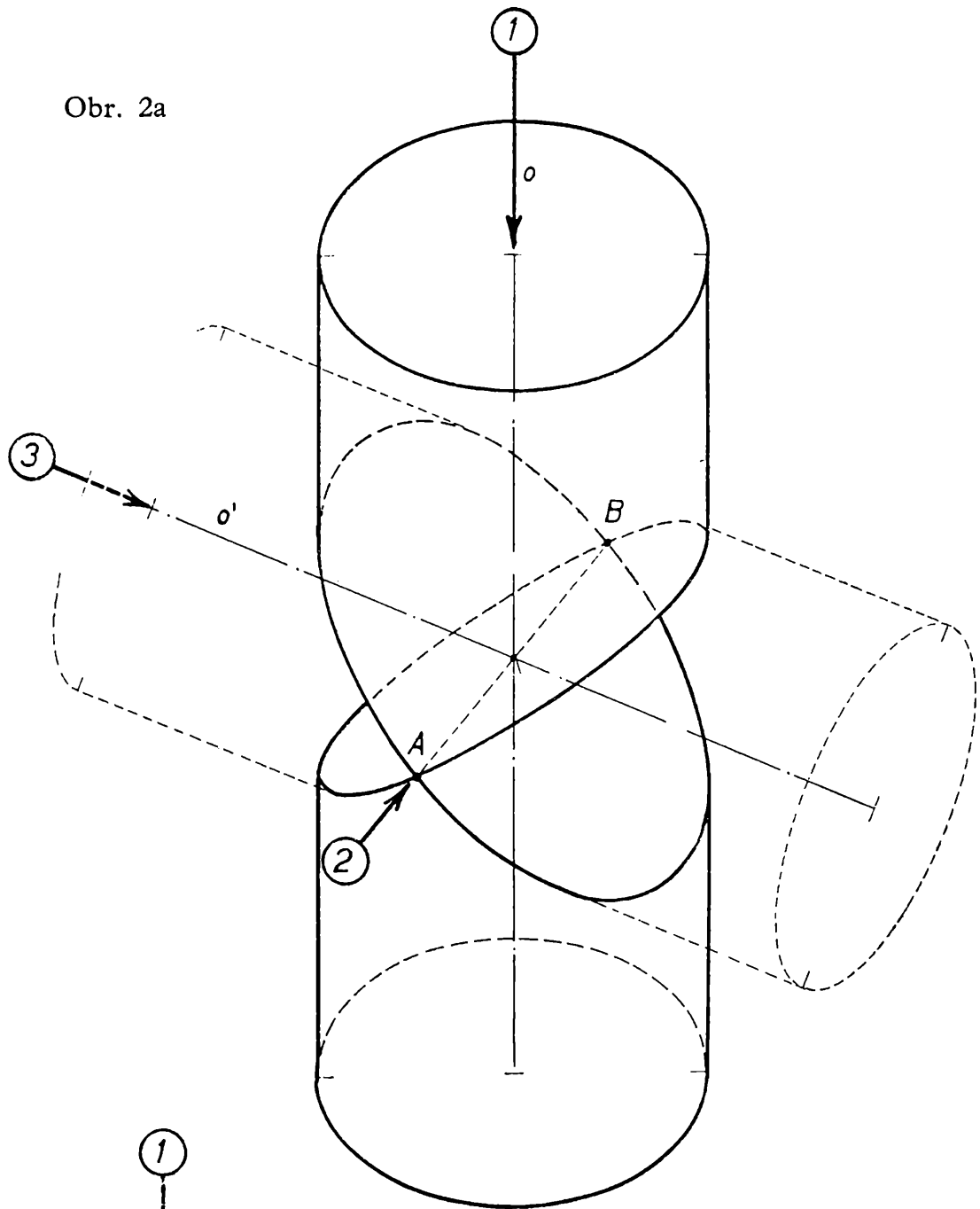
Zásadně správné řešení, avšak s nepřesnými obrázky zaslali:

M. Kutílek, X. d, 1. JSS, Praha 16, U Santošky 1,

V. Vätter, JSS Nepomuk.

Řada dalších čtenářů odhadla dobře tvar pouze jednoho z obou těles.

Obr. 2a



Obr. 2b

1. První těleso je průnikem dvou rotačních válců téhož průměru s různoběžnými osami $o \perp o'$, z nichž válec o ose o' byl vyňat; na obr. 1a je zobrazen čárkovaně. Na tloušťce stěn ani na výškách válců nezáleží. V obr. 1b je názorný obrázek tohoto tělesa. Průniková křivka není prostorová křivka, jak se někteří mylně domnívali, ale je složena ze dvou elips protínajících se v bodech A, B . Tyto elipsy leží v rovinách vzájemně kolmých. V praxi vidíme podobný průnik u kleneb nebo u potrubí.

2. Druhé těleso je průnikem těchto dvou válců jako v prvním případě (obr. 2a). Je to část společná oběma válcům čili tzv. *j á d r o p r ů n í k u*. Lepší prostorový dojem získáme z názorného obr. 2b.

Různé

Doc. O t a S e t z e r, ČVUT, Praha:

Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem

Mnoho československých učitelů a s nimi celá kulturní veřejnost vzpomněla 14. března tr. vzácného jubilea vynikajícího československého matematika, akademika Bohumila Bydžovského.

Obvykle se při takové příležitosti vylíčí celý oslavencův život a provede důkladný výčet a rozbor jeho vědeckých prací. Vás však budou jistě zajímat ze života akademika Bydžovského hlavně události a práce, které jsou v určitém vztahu ke středoškolské mládeži.

Akademik Bydžovský se narodil 14. března 1880 v Duchcově, byl ze čtyř dětí stavebního inženýra. Stálé změny otcova působiště způsobily, že mladý Bydžovský prošel střídavě českou a německou obecnou školu. Akademické gymnasium vystudoval v Praze. Přesto, že patřil k nejlepším matematikům na škole, studoval současně pilně i jazyky a do maturity ovládal již vedle němčiny také angličtinu, francouzštinu a italštinu. Tyto filologické znalosti mu usnadňovaly vysokoškolské studium matematiky a fyziky, která konal na tehdejší Karlo-Ferdinandově universitě v Praze a jež ukončil ve svých 22 letech. O rok později promoval.

Učitelskou činnost zahájil na malostranském gymnasiu, pak působil na reálkách v Kutné Hoře, Praze, Kladně a Karlíně. Na Karlově universitě přednášel od r. 1909, na pražské technice od r. 1910. Řádným profesorem university je od r. 1920.

Nejtěžším obdobím jinak klidného rodinného života prošel dr. Bydžovský za okupace, kdy byly české vysoké školy uzavřeny a jejich profesori pensionováni. Prof. Bydžovský žil nějaký čas ve Veselí n. Lužnicí se svou chotí dr. Marií Bydžov-

skou až do r. 1942, kdy byli oba gestapem zatčeni a internováni pro podezření, že jejich syn je emigrant. Květnová revoluce zastihla prof. Bydžovského ve Veselí n. Lužnicí, kde vytvořil již 5. května s pokrokovými občany MNV.

Na rok 1946/47 byl zvolen rektorem Karlovy university, v roce 1947/48 byl jejím prorektorem. V únoru 1948 převzal znovu rektorský úřad a v této hodnosti pak řídil úspěšně všechny oslavy spojené se 600letým trváním Karlovy university. Při udílení hodnosti akademiků byl Bohumil Bydžovský mezi prvními poctěnými.

Pro středoškolské studenty znamená akademik Bydžovský mnoho. Z doby jeho působení na reálkách vznikly četné středoškolské učebnice matematiky, užívané v celé republice a oblíbené nejen mezi žáky, nýbrž i mezi učiteli pro svůj srozumitelný sloh a metodickou dokonalost.

Otázkám středoškolské reformy věnoval akademik Bydžovský mnoho času již po první světové válce, řídil četné reformní komise; po druhé světové válce byl horlivým zastáncem jednotné školy, zasloužil se i o vysokoškolské vzdělání učitelů. Všude tu uplatňoval své bohaté učitelské zkušenosti.

Přes vysoké počty, kterých se mu dostalo doma i za hranicemi, zůstává akademik Bydžovský člověkem skromným, dobrého srdce a otevřeného charakteru, člověkem, který dovede vždy poskytnout dobrou osobní i odbornou radu. Činí to vždy neobyčejně taktně a přátelsky.

Noblesnost jeho vystupování, skvěle připravené přednášky, přátelská náklonnost ke studentstvu a pokrokovost názorů učinila nám, bývalým jeho žákům, z akademika Bydžovského vzor dokonalého učitele. Proto ho máme tak rádi a přejeme mu ještě dlouhá leta klidného života.

Mládeži je akademik Bydžovský příkladem houževnatého a pilného pracovníka, všestranně vzdělaného vědce pokrokového smýšlení.

Dr. Čestmír Vitner, ČVUT, Praha:

Akademik E. Čech

1893—1960

V březnu 1960 zemřel vynikající československý matematik akademik Eduard Čech. V něm ztrácí naše matematika vědce světového formátu. Jako málokdo proslavil naši vědu v zahraničí.

E. Čech se narodil 29. června 1893 ve Stračově u Hradce Králové. Již v mládí se zajímal o matematiku. Dal se proto v roce 1912 zapsat jako posluchač filosofické fakulty Karlovy university, kde se tehdy matematika studovala. Tam se stal žákem znamenitého učitele a vědce profesora Karla Petra. V Praze se E. Čech vrhl do intenzivního studia a v krátké době přečetl v knihovně Jednoty československých matematiků a fyziků velkou řadu matematických knih. Jeho studia však po pěti semestrech přerušila první světová válka. Ale ani vojna nemohla zničit jeho snahu po vzdělání. A tak uprostřed válečné vřavy se dále vzdělává v matematice a učí

se světovým jazykům. Jen své silné vůli a obrovské pílí vděčí za to, že již v roce 1919 může zkouškami zakončit svá vysokoškolská studia a věnovat se ihned vědecké práci. V roce 1921 odjel na stipendijní cestu do Itálie, kde se stal žákem a spolupracovníkem znamenitého italského matematika G. Fubiniho. Spolu s ním pak o něco později vydal dvě knihy, které se staly základními učebnicemi projektivní diferenciální geometrie a založily tak jeho světovou slávu.

V roce 1922 se E. Čech habilitoval a rok nato byl jmenován profesorem na universitě v Brně po zemřelém vynikajícím profesoru M. Lerchovi. Zde zůstal až do konce druhé světové války. V roce 1945 se stal profesorem Karlovy university v Praze, kterým zůstal až do své smrti. Během svého života se profesor E. Čech mnoho věnoval vědecké práci. V matematice měl rozsáhlé vědomosti jako žádný náš matematik. Jeho oblíbeným oborem byla od mládí geometrie, v níž se stal předním světovým odborníkem a také průkopníkem nových myšlenek v několika důležitých směrech bádání, především v projektivní diferenciální geometrii a v topologii. Profesor Čech byl v čilém styku se zahraničními matematiky, byl členem mnoha učených společností, přednášel o svých pracech doma i v zahraničí. Na jeho práce navázali mnozí naši i zahraniční matematikové, kteří jsou hrdi na to, že jsou jeho žáky. Prvořadý vědecký význam E. Čecha ovšem neznamená, že by se věnoval jen své vědecké práci. Byl i vynikajícím pedagogem a napsal několik vysokoškolských učebnic. Zajímal se také o středoškolskou matematiku, mnoho o ní přemýšlel a diskutoval. Své názory uplatnil v učebnicích matematiky pro střední školu. E. Čech se neuzavíral do úzkého odbornictví, vřele se zajímal o veřejné události. Byl příkladem pokrokového vědce. Při ustavení Československé akademie věd se stal ředitelem Matematického ústavu akademie a byl jmenován jedním z prvních akademiků. Za vynikající vědecké výsledky byl dvakrát jmenován laureátem státní ceny a u příležitosti pětadesátých narozenin mu byl v uznání jeho zásluh udělen řád republiky.

V posledních letech byl profesor E. Čech nemocen, ale to nijak neovlivňovalo jeho pracovní elán a duševní svěžest. Odešel uprostřed plodné práce a zanechal po sobě prázdné místo, které bude možno jen velmi těžko zaplnit.

85 let inž. dr. Josefa Langra

Dne 28. února dožil se v plné svěžesti duševní i tělesné pětadesátiletý dlouholetý přispěvatel našeho časopisu inž. dr. Josef Langr. Narodil se v Nemyčevsi u Jičína a vystudoval strojní inženýrství na České vysoké škole technické v Praze, kde poslouchal přednášky slavného českého matematika Weyra a dále deskriptivní geometrii u profesorů Procházky a Tilšera. Již tehdy v době studií i později jako námořní dělostřelecký inženýr psal články z oboru geometrie do Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky a jeho přílohy, z nichž časem vznikly naše Rozhledy.

Je jistě řídkým případem, že autor píše do téhož odborného časopisu déle než šedesát let. Dr. Langra můžeme počítat mezi nejlepší znalce geometrie trojúhel-

níku a jeho články najdeme často i v zahraničních časopisech, jako např. v belgickém „Mathésis“.

S politováním sdělujeme smutnou zprávu, která nás došla při redakční uzávěře, že inž. dr. J. Langr náhle zemřel dne 8. dubna 1960.

Redakce



Recenze

L. Pekárek: Termonukleární reakce

Kniha, která vyšla jako 13. svazek „*Malé moderní encyklopedie*“ má 194 stran a 31 obrázků. Vyšla nákladem Orbis koncem roku 1959. Cena 9 Kčs za brožovaný výtisk.

Autor ukazuje, jak lidská společnost k svému dalšímu rozvoji potřebuje stále nové zdroje energie, na nichž je tento rozvoj závislý. Podává pak přehled využití různých druhů energie a poukazuje na problémy a otázky spojené s jejich využitím. Přechází pak k popisu složení atomového jádra a k objevu uvolňování jaderné energie štěpením atomů těžkých prvků, zejména uranu. Po tomto úvodu přechází k druhé možné cestě uvolňování jaderné energie, která je založena na syntéze (skládání) atomů lehkých prvků, zejména vodíku a jeho izotopů deuteria a tritia. Popisuje potom historický vývoj tohoto objevu a základní podmínky, které musí být splněny, aby tento děj - označovaný jako termonukleární reakce - mohl vůbec nastat. Je to zejména velmi vysoká teplota dosahující mnoha miliónů stupňů. Popisuje pak nejbližší přirozený termonukleární reaktor - Slunce - a uvádí podstatu dějů probíhajících v jeho nitru. Přechází pak k termonukleární explozi vyvolané uměle člověkem, při níž jako roznětky působí normální uranová nebo plutoniová puma. Uvádí zneužití této exploze ve vodíkové pumě, které se dnes stává hrozbou lidstva. Na dnes aktuální otázku, zda je možno sestrojít tzv. „čistou pumu“, která by nezamořovala ovzduší nebezpečnými radioaktivními látkami, odpovídá záporně. Ukazuje pak, jak je naopak velmi dobře možno využít termonukleární reakce k mírovým účelům a ve prospěch lidské společnosti. Po té přechází k řízené termonukleární reakci, popisuje dosud provedené pokusy k jejímu uskutečnění a podává perspektivu budoucího využití této reakce zejména při budování termonukleárních elektráren.

Na knize je patrné, že ji psal odborník, který téma velmi dobře a podrobně ovládá a dovedl je také srozumitelně podat. Kniha je psána jasně a bez použití matematického aparátu. Je proto velmi dobrou pomůckou pro naši mládež i pro všechny ostatní, kteří mají zájem o tuto dnes tak aktuální otázku.

K. Šoler

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Pokračování)

vanadium
variometr
vařící (voda)
vaselina i vazelína
vážící (stroj)
vážící (kdo nebo co váží)
vážitelný i važitelný
včitatelný
včítati
vedví i ve dvě
veliký i velký
velocipéd
velocipedista
ventilátor
verse i verze
vibrafon
vícefázový
vícenásobný
vícestranný
vinyl
virtuální
viskosa i viskóza
viskosimetr i vizkozimetr
visuální i vizuální
vizírka
vizírovat
vizmut
vkladatel
vlákénko i vlákýnko
vlhkoměr
vnímatelný
vodící (např. kroužky)
vodící (kdo nebo co vodí)
volant
volt V
voltampér VA
voltáž
voltcoulomb
voltmetr
volumen
vrstevní i vrstevný
vt. vteřina
vulkán
vulkanický
vybádati
vybijeti
vyčísliti
výhybka
vyjádřitelný

vyjadřovací
vykrystalisovati i vykrystalizovati
vykřičník
vylouhovati i vyluhovati
vynalézavý
vypínač
vypnouti, vypjal i vypnul
vypočitatelný
vypočítati
vyrovnávací
vyrýsovati
vysavač (prachu)
vysokofrekvenční, vysokofrekventní
vytknouti, vytčený i vytknutý
vyvážitelný i vyvažitelný
vyvíječ
W watt
Wh watthodina
Wm wattminuta
Ws wattsekunda
wattmetr
wolfram
yard
ytterbium
zaisolovati i zaizolovati
zakótovati
zaktivisovati i zaktivizovati
zanalysovati i zanalyzovati
žářící (lampa)
žářící (kdo nebo co září)
zastudena i za studena
zatímní
zautomatisovati i zautomatizovati
zborcený
zbrousiti (odstranit broušením)
zdesateronásobiti
zdvihač i zdvíhač
zdvojnásobiti
zelektrisovati i zelektrizovati
Země (těleso nebeské)
zeměměřictví, zeměměřický
zeměměřičství (zaměstnání)
zepelín
zesilovač
zešikmiti
zformulovati
zgalvanisovati i zgalvanizovati
zchladnouti
zidealisovati i zidealizovati

Jan Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických

1959, VIII. vydání, V. 8°, str. 478, obr. v textu 90, váz. Kčs 28,—; ČSAV.

Úvodní učebnice pro studium základů matematiky na vysokých školách technického a přírodovědeckého směru přístupnou formou seznamuje s hlavními pojmy a soudy matematické vědy. Její význam dokazuje skutečnost, že vychází již v osmém vydání.

Autor podává vybranou látku systematicky ve větších celcích. Osvětluje postupně základy analytické geometrie rovinné, základy počtu diferenciálního i počtu integrálního. Pak přechází na derivace vyšších řádů a rozebírá základy analytické geometrie prostorové. Nakonec pojednává o derivacích funkcí několika proměnných. Velkou pozornost věnuje autor aplikacím, k čemuž slouží příklady ke cvičením připojené k jednotlivým oddílům.

Kniha je nutnou učební pomůckou pro začátečníky v matematice, která jistě bude přijata naší matematickou veřejností s uspokojením.

Z nových knih Státního pedagogického nakladatelství

Bohdan Rüffer a Štefan Galusek: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť a učňovských škol.

Učební obory v textilu a oděvnictví. Str. 83, cena brož. výt. Kčs 2,15.

Stanislav Horák - Bohuslav Němec: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť a učňovských škol.

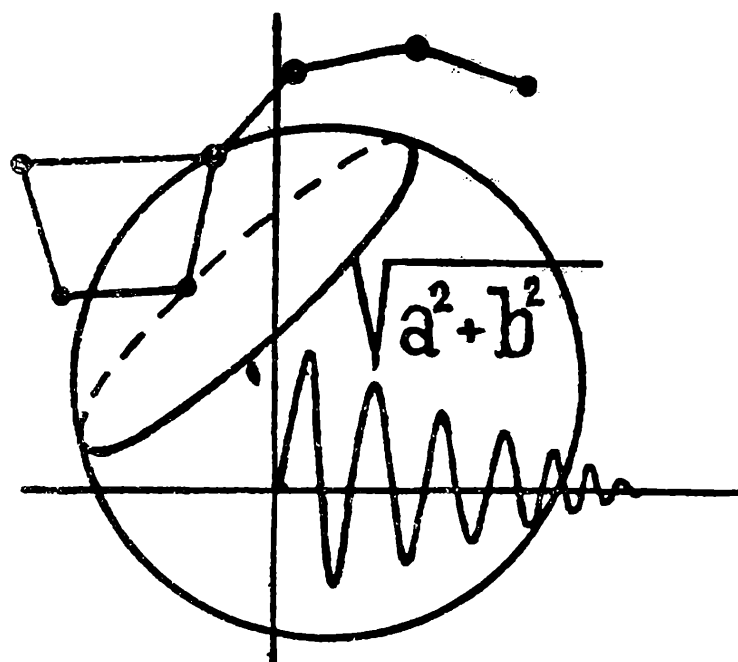
Učební obory ve strojírenství. Str. 175, cena brož. výt. Kčs 3,95.

František Galus - Josef Cerman, Alois Matýsek a Jan Skopal: Aplikovaná matematika pro I. a II. ročník odborných učilišť hornických.

Učební obory: horník pro uhelné doly, horník pro rudné doly, vrtač. Str. 124, cena brož. výt. Kčs 3,10.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

rozhledy



10

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ročník 38 - 1959/60 - číslo 10

Toto číslo vyšlo 4. června 1960

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

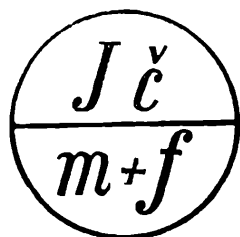
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JSŠ, Brno; Dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. Dr. Josef Korous, VŠD, Praha; doc. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. Dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ÚNSMS, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 21 41 až 6, linka 570

OBSAH

S. Horák: Jedna věta z planimetrie a její důsledky	433
Doc. E. Kraemer: O analytické geometrii v rovině (Pokračování)	437
Inž. F. Mádle: O Pascalově trojúhelníku (Dokončení)	441
Doc. J. Vyšín: O nejdelší úsečce, kterou lze umístit do daného obrazce (Dokončení)	444
V. Littmann: Řešení rovnice 5. stupně, jejíž dva páry kořenů jsou čísla opačná, různá od nuly	449
Inž. L. Drs: Některé vztahy mezi kosoúhlým promítáním a promítáním pravouhlým na dvě kolmé průmětny	453
Inž. J. Pazderák: Záznam televizního signálu na magnetofonový pás	456
A. Valenta: Magnetický záznam zvuku (Dokončení)	463
J. Rajchl: Některé fyzikální děje probíhající při průletu meteorického tělíska zemskou atmosférou	470
Doc. dr. M. Menšík: Sedmdesát pět let prof. Františka Kadeřávky	474
Redakční sdělení	476
Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu (Dokončení)	3 str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. A-17*01093
Návrh obálky: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Úvodní obrázky: Míla Havlíček. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1960.



Matematika

Stanislav Horák st., ČVUT, Praha:

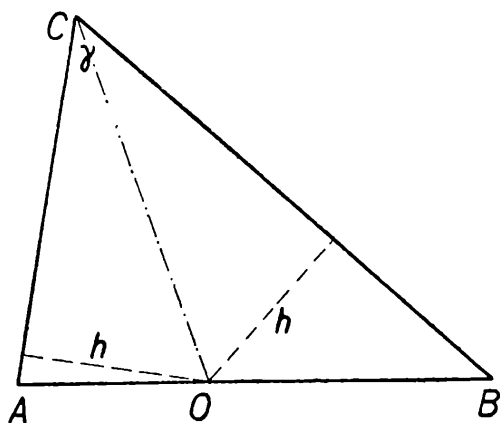
Jedna věta z planimetrie a její důsledky

I. V obr. 1 je narysován trojúhelník ABC s vnitřním úhlem γ při vrcholu C . Osa tohoto úhlu protíná stranu AB v bodě O . Bod O má od stran AC , BC stejné vzdálenosti; označíme je h . Dokážeme nyní správnost rovnice

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{\sin \gamma}{h}. \quad (1)$$

Důkaz spočívá v tom, že upravíme levou stranu rovnice (1):

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{AC + BC}{AC \cdot BC}. \quad (1')$$



Obr. 1

Víme, že součin $AC \cdot BC \cdot \sin \gamma$ je dvojnásobný obsah trojúhelníka ABC . Označíme-li tento obsah P , platí

$$AC \cdot BC = \frac{2P}{\sin \gamma}.$$

Ale obsah P se dá vypočítat též jako součet obsahů trojúhelníků ACO , BCO .

Tedy

$$2P = AC \cdot h + BC \cdot h = (AC + BC) \cdot h$$

a odtud

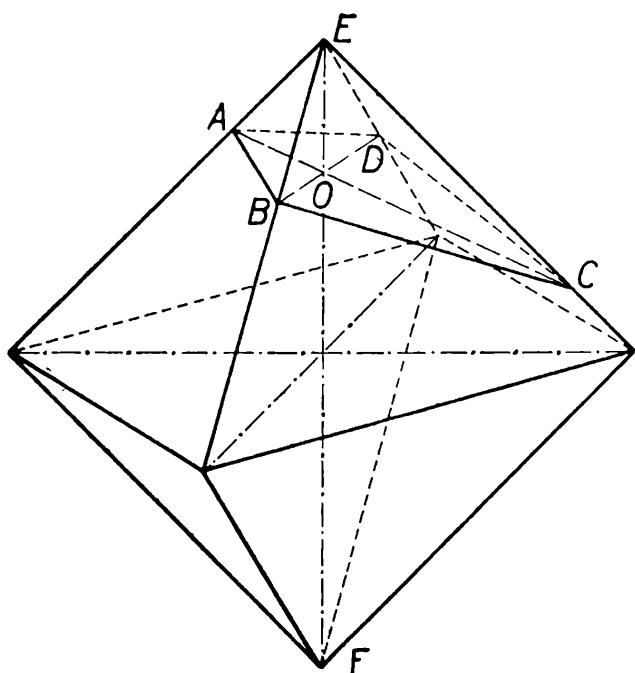
$$AC + BC = \frac{2P}{h}.$$

Dosadíme-li vypočtené hodnoty do pravé strany rovnice (1'), obdržíme rovnici (1) a tím je důkaz proveden.

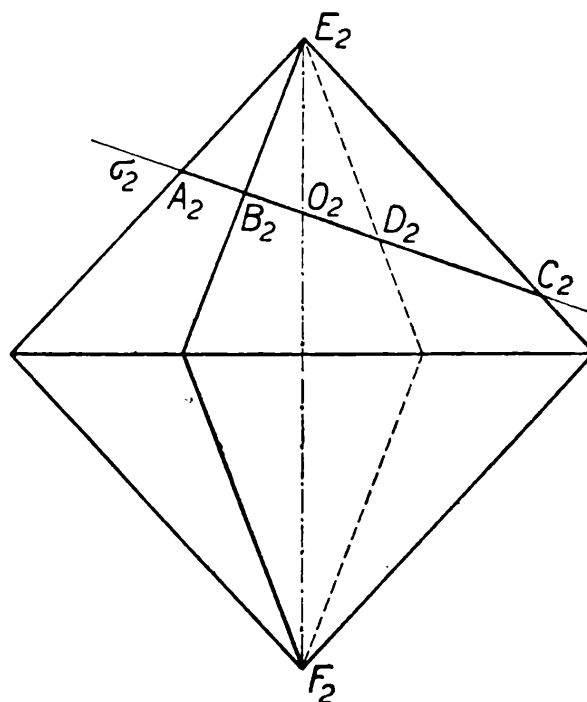
P o z n á m k a. Je důležité si uvědomit, že součet na levé straně rovnice (1) závisí jen na dvou veličinách, na úhlu γ a na vzdálenosti h . Kdybychom tedy bodem O proložili libovolnou přímku, která by přímku AC proťala v bodě A' a přímku BC v bodě B' , platilo by stejně

$$\frac{1}{A'C} + \frac{1}{B'C} = \frac{\sin \gamma}{h}.$$

Rovnice (1) platí tudíž pro všechny trojúhelníky, které mají společný vnitřní úhel γ a jejichž strana protilehlá tomuto úhlu prochází tímž bodem O na ose úhlu γ .



Obr. 2a



Obr. 2b

Tato poznámka je důležitá pro aplikace věty (1), které v dalším uvedeme.

C v i č e n í 1. Jak se změní rovnice (1) pro $\gamma = 90^\circ$?

II. Je dán pravidelný osmistěn, jehož jedna úhlopříčka je EF . Protněme jej rovinou σ tak, aby tato rovina protínala všechny čtyři hrany vycházející z vrcholu E . Rovina σ protne tedy daný osmistěn ve čtyřúhelníku $ABCD$. V obr. 2 je sestaven názorný obrázek i nárys. Trojúhelník ACE je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu E a přímka EF je v něm osou pravého úhlu. Její průsečík s přeponou AC označíme O . Podle věty (1), v níž položíme $\gamma = 90^\circ$, platí

$$\frac{1}{AE} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{h}, \quad (2)$$

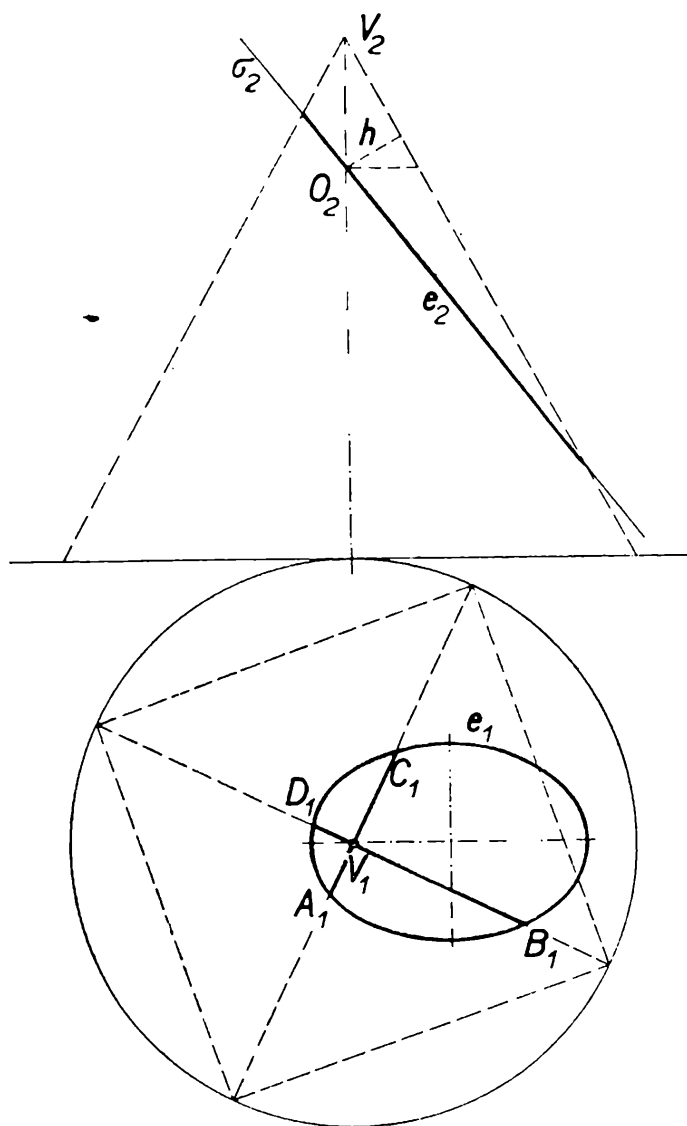
kde h je vzdálenost bodu O od hran pravidelného osmistěnu.

Podobně z pravoúhlého trojúhelníka BDE se dá odvodit

$$\frac{1}{BE} + \frac{1}{DE} = \frac{1}{h}. \quad (3)$$

Sečtením rovnic (2), (3) dostaneme

$$\frac{1}{AE} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CE} + \frac{1}{DE} = \frac{2}{h}. \quad (4)$$



Obr. 3

Výsledek vyjádříme slovy:

Rovina σ protíná hrany pravidelného osmistěnu, které vycházejí z téhož vrcholu E , v bodech A, B, C, D . Součet reciprokých hodnot vzdáleností těchto čtyř bodů od vrcholu E je konstantní a závislý jen na vzdálenosti bodu $O \equiv EF$ σ od hran osmistěnu.

Z vyslovené věty vyplývá, že součet v rovnici (2) je týž pro všechny roviny jdoucí pevným bodem O na EF .

Cvičení 2. Větu podobnou větě (4) odvoďte pro pravidelný jehlan šesti-boký, jehož protější pobočné hrany jsou k sobě kolmé.

Věty (1) použijte k odvození věty platící pro jehlan s obdélníkovou podstavou, jehož výška prochází středem podstavy.

Dříve než přistoupíme k odvození dalšího důsledku věty (1), zopakujeme si některé věty z deskriptivní geometrie.

V obr. 3 je dán rotační kužel s podstavou v půdorysně a s osou kolmou k půdorysně. Pak je dána rovina σ kolmá k nárysně, tak, že neprochází vrcholem V kužele a že protíná všechny přímky kužele. Víme, že v tomto případě rovina σ protíná daný rotační kužel v elipse e . Nárysem této elipsy je úsečka e_2 , půdorysem

je elipsa e_1 , jejíž jedno ohnisko je půdorys V_1 vrcholu V . Obráceně; mějme v půdorysně libovolnou elipsu e_1 , jejíž jedno ohnisko je V_1 . Potom tuto elipsu můžeme považovat za půdorys eliptického řezu e rotační kuželové plochy, jejíž řídicí kružnice je libovolná kružnice v půdorysně opsaná kolem V_1 a jejíž vrchol V je libovolný bod na kolmici, vztyčené ve V_1 k půdorysně (s výjimkou V_1). Když si toto uvědomíme, můžeme odvodit další aplikaci věty (1).

III. Do daného rotačního kužele, jehož průměty jsou v obr. 3, je vepsán pra-

videlný čtyřboký jehlan. Tento jehlan je rovinou σ proťat ve čtyřúhelníku $ABCD$ a kužel je proťat v elipse e . Podle věty (1) platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{AV} + \frac{1}{CV} &= \frac{\sin \gamma}{h} \\ \frac{1}{BV} + \frac{1}{DV} &= \frac{\sin \gamma}{h}\end{aligned}\quad (5)$$

a sečtením těchto dvou rovnic obdržíme

$$\frac{1}{AV} + \frac{1}{BV} + \frac{1}{CV} + \frac{1}{DV} = \frac{2 \sin \gamma}{h}.$$

Přitom h je vzdálenost průsečíku O osy kužele s rovinou σ a γ je úhel přímek rotačního kužele v osovému řezu.

Půdorysnou odchylku přímek daného kužele označme α . (Víme, že $\gamma = 2R - 2\alpha$.) O průmětu A_1V_1 úsečky AV platí

$$A_1V_1 = AV \cdot \cos \alpha$$

a podobně

$B_1V_1 = BV \cdot \cos \alpha$, $C_1V_1 = CV \cdot \cos \alpha$, $D_1V_1 = DV \cdot \cos \alpha$ (6). První z rovnic (5) znásobíme výrazem $\frac{1}{\cos \alpha}$, což smíme, neboť $\alpha \neq 90^\circ$. S použitím rovnic (6) dostaneme

$$\frac{1}{A_1V_1} + \frac{1}{C_1V_1} = \frac{\sin \gamma}{h \cdot \cos \alpha}.$$

Výraz na pravé straně rovnice upravíme, neboť

$$\sin \gamma = \sin (2R - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Tudíž po dosazení

$$\frac{1}{A_1V_1} + \frac{1}{C_1V_1} = \frac{2 \sin \alpha}{h}. \quad (7)$$

Tento výsledek bychom mohli slovy vyjádřit takto:

Ohniskem elipsy je vedena libovolná sečna, protínající elipsu v bodech A_1 , C_1 . Součet reciprokových hodnot vzdáleností těchto dvou bodů od ohniska je konstantní tj. nezávislý na poloze tětiny.

Poněvadž součet reciprokových hodnot je nezávislý na poloze sečny, můžeme za tuto sečnu zvolit hlavní osu. Uvažovaný součet má pak hodnotu (a , b , e mají pro elipsu známý význam)

$$\frac{1}{a + e} + \frac{1}{a - e} = \frac{2a}{a^2 - e^2} = \frac{2a}{b^2}.$$

A dospěli jsme k větě:

Ohniskem V_1 elipsy je vedena libovolná přímka, která elipsu protne v bodech A_1, C_1 . Potom součet

$$\frac{1}{A_1V_1} + \frac{1}{C_1V_1}$$

je konstantní a rovná se $\frac{2a}{b^2}$.

Zopakujme si obsah článku. Začali jsme drobnou větou z geometrie trojúhelníka. Pomocí ní jsme odvodili věty o řezech na jehlanu a rotačním kuželi. A z věty o řezu na rotačním kuželi jsme odvodili větu o elipse, tedy zase větu z planimetrie.

Cvičení 4. V ohnisku V_1 elipsy je k hlavní ose sestrojena kolmice, která elipsu protne v bodě A_1 . a) Dokažte, že $V_1A_1 = \frac{b^2}{a}$. b) Přesvědčte se, že v tomto případě V_1A_1 je rovno poloměru kružnice křivosti v hlavním vrcholu elipsy.

Doc. Emil Kraemer, KU, Praha:

O analytické geometrii v rovině

(Pokračování)

Jak víme, je kružnice geometrickým místem bodů, které mají od pevného bodu stejnou vzdálenost $r > 0$. Pevný bod S se nazývá *středem*, číslo $r > 0$ *poloměrem* kružnice. Má-li v dané soustavě souřadnic střed S souřadnice m, n a jsou-li souřadnice libovolného bodu P kružnice x, y , pak pro její každý bod platí $SP = r$. Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů (věta 11. v čísle 2. letošního ročníku) je tedy

$$\sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} = r$$

čili

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \quad (1)$$

Obráceně, platí-li pro nějaký bod $P(x; y)$ rovnice (1), platí i rovnice předcházející, čili je $SP = r$, takže bod P leží na kružnici se středem $S(m; n)$ a poloměrem r .

Rovnice (1) platí tedy pro každý bod $P(x; y)$ dané kružnice a platí jenom pro její body, čili je to rovnice této kružnice. Výsledek našich úvah můžeme shrnout takto:

Věta 15. *Kružnice, která má střed $S(m; n)$ a poloměr r , má rovnici*

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

které říkáme středová rovnice kružnice.

Je-li speciálně $S(0; 0)$, dostaneme velmi jednoduchou rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Příklad 8. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A(3; 5)$, $B(2; 6)$ a jejíž střed leží na přímce $2x + 3y - 4 = 0$.

Řešení. Označme střed hledané kružnice $S(m; n)$ a její poloměr r . Jestliže kružnice existuje, pak má podle věty 15 rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Prochází-li body $A(3; 5)$, $B(2; 6)$, vyhovují jejich souřadnice její rovnici, tj. platí rovnice

$$(3 - m)^2 + (5 - n)^2 = r^2$$

$$(2 - m)^2 + (6 - n)^2 = r^2.$$

Leží-li střed $S(m; n)$ na přímce $2x + 3y - 4 = 0$, vyhovují jeho souřadnice její rovnici, tj. platí rovnice

$$2m + 3n - 4 = 0.$$

Tak jsme dostali tři rovnice o třech neznámých m, n, r , které nyní budeme řešit. Upravíme-li první dvě, dostaneme rovnice

$$m^2 + n^2 - 6m - 10n + 34 = r^2$$

$$m^2 + n^2 - 4m - 12n + 40 = r^2.$$

Odečteme-li první od druhé, vznikne rovnice

$$2m - 2n + 6 = 0$$

$$m - n + 3 = 0,$$

kterou řešíme s rovnicí

$$2m + 3n - 4 = 0.$$

Dostaneme $m = -1$, $n = 2$; dosadíme-li tato čísla do kterékoli z dřívějších dvou kvadratických rovnic, obdržíme $r = 5$. Hledaná kružnice tedy existuje, je jenom jedna a má rovnici

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Přesvědčte se zkouškou, že vyhovuje všem třem daným podmínkám.

Provedeme-li početní výkony naznačené v rovnici z věty 15, dostaneme rovnici

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0.$$

Položíme-li $-2m = M$, $-2n = N$, $m^2 + n^2 - r^2 = L$, můžeme rovnici kružnice napsat ve tvaru

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0, \quad (2)$$

jemuž říkáme *obecný tvar rovnice kružnice*.

Každá kružnice má tedy rovnici (2). Je nyní otázkou, zda obráceně každá rovnice tvaru (2) je rovnicí kružnice. A tu je zajímavé, že tomu tak nemusí být, jak ukazují třeba příklady:

$$x^2 + y^2 = -3, \quad x^2 + y^2 = 0,$$

tj. rovnice tvaru (2), v nichž je $M = N = 0, L = 3$ nebo $L = 0$. Vzhledem k tomu, že je vždy $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$, neplatí rovnice $x^2 + y^2 = -3$ pro žádnou dvojici $(x; y)$ a rovnice $x^2 + y^2 = 0$ platí jedině pro $x = y = 0$, tj. pro jediný bod.

O tom, zda daná kvadratická rovnice (2) je rovnicí kružnice, se přesvědčíme tak, že zjistíme, zda se rovnice (2) dá přenést na tvar $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde je $r^2 > 0$. Postup ukážeme na příkladě.

Příklad 9. Zjistěte, zda rovnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ je rovnicí kružnice či nikoli.

Ř e š e n í. Rovnici upravíme takto:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) &= 4 \\(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 1 + 4 \\(x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 9.\end{aligned}\tag{3}$$

Protože číslo 9 je kladné, existuje kladné číslo $r = \sqrt{9} = 3$. Kružnice se středem $S(1; -2)$ a poloměrem $r = 3$ má pak podle věty 15 rovnici (3), jejíž zpětnou úpravou dostaneme danou rovnici $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tato daná rovnice je tedy rovnicí kružnice se středem $S(1; -2)$ a s poloměrem $r = 3$.

Vzájemnou polohu přímky a kružnice zjišťujeme analyticky tak, že hledáme jejich vzájemné body, tj. řešíme dané rovnice. Důležitý je ten případ, kdy přímka je tečnou kružnice. Proto si všimneme právě tohoto případu; aby výpočty byly jednodušší, omezíme se na případ, kdy kružnice má střed právě v počátku soustavy souřadnic.

Budiž tedy dána kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2\tag{4}$$

a libovolná přímka. Nejprve probereme případ, kdy daná přímka není rovnoběžná s osou y . Potom má rovnici

$$y = kx + q.\tag{5}$$

Mají-li obě čáry společný bod $(x; y)$, pak pro jeho souřadnice platí rovnice (5) i rovnice (4) a tedy též rovnice

$$x^2 + (kx + q)^2 = r^2.$$

Tuto rovnici můžeme upravit na tvar

$$(1 + k^2)x^2 + 2kqx - (r^2 - q^2) = 0.\tag{6}$$

Protože je $k^2 \geq 0$, je $1 + k^2 > 0$; rovnice (6) je tedy vždy rovnicí kvadratickou. Je-li přímka (5) tečnou kružnice (4), má s ní jediný společný bod. To však znamená, že kvadratická rovnice (6) má jediný kořen; její diskriminant je tedy roven nule. Podle známého vzorce pro kořeny kvadratické rovnice pak dostaneme kořen

$$x_1 = - \frac{kq}{1 + k^2} ;$$

podle rovnice (5) patří k tomuto x_1 jediné

$$y_1 = \frac{q}{1 + k^2} . \quad (7)$$

Bod $T (x_1; y_1)$ je pak dotykovým bodem tečny s kružnicí.

Protože tečna kružnice neprochází jejím středem, tj. bodem $S (0; 0)$, je v její rovnici (5) určité $q \neq 0$. Z rovnice (7) pak plyne, že je též $y_1 \neq 0$. Proto můžeme počítat podíl

$$\frac{x_1}{y_1} = - \frac{kq}{1 + k^2} \cdot \frac{1 + k^2}{q} ;$$

z toho pak plyne, že je

$$k = - \frac{x_1}{y_1} . \quad (8)$$

Z rovnice (7) potom dostaneme

$$q = \left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2} \right) \cdot y_1 = \frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1} .$$

Protože však bod $T (x_1; y_1)$ leží na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$, je $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, takže je

$$q = \frac{r^2}{y_1} \quad (9)$$

Podle (5), (8) a (9) má tedy hledaná tečna rovnici

$$\begin{aligned} y &= - \frac{x_1}{y_1} x + \frac{r^2}{y_1} \\ y_1 y &= - x_1 x + r^2 \\ x_1 x + y_1 y &= r^2 \end{aligned} \quad (10)$$

To jsme ovšem odvodili pro případ, že tečna t není rovnoběžná s osou y . Je-li však $t \parallel y$, pak má buď dotykový bod $T (-r; 0)$ nebo $T (r; 0)$ a její rovnice je buď $x = -r$ nebo $x = r$. Avšak tyto rovnice dostaneme rovněž ze vzorce (10), dosadíme-li $x_1 = r, y_1 = 0$ nebo $x_1 = -r, y_1 = 0$; vzorec (10) platí tedy pro každou tečnu. Tak jsme dokázali důležitou větu:

V ě t a 16. *Tečna kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ v jejím libovolném bodě $T (x_1; y_1)$ má rovnici $x_1 x + y_1 y = r^2$.*

Tak např. rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 = 25$ v jejím bodě $T (-3; ?)$ dostaneme takto: Nejprve určíme souřadnici y bodu T . Protože $T (-3; y)$ leží na kružnici $x^2 + y^2 = 25$, platí pro jeho souřadnice rovnice $9 + y^2 = 25$ čili $y^2 = 16$,

která má kořeny $y_1 = 4, y_1' = -4$. Body T jsou tedy dva, a to $T(-3; 4), T'(-3; -4)$. Podle věty 16 tečny kružnice v těchto bodech jsou

$$-3x + 4y = 25, \quad -3x - 4y = 25$$

P o z n á m k a. Lze dokázat, že libovolná kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ má ve svém bodě $T(x_1; y_1)$ rovnici $(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - n)(y - n) = r^2$.
(Pokračování)

Inž. František Mádle, Praha:

O Pascalově trojúhelníku

(Dokončení)

Pro úplnost se zmíníme ještě o posloupnostech obsažených ve svislých sloupcích Pascalova trojúhelníku. Jelikož sloupce položené souměrně podle středního sloupce obsahují stejné posloupnosti, stačí se zabývat pouze sloupci např. v pravé polovině a označíme tu součet prvních r členů posloupnosti v n -tém sloupci za středním sloupcem jako

$$S_{n,r} = \binom{n}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{2} + \dots + \binom{n+2r-2}{r-1} \quad (4)$$

kde n je libovolné nezáporné celé číslo a r je kladné přirozené číslo. Potom ve středním sloupci máme

$$S_{0,r} = \binom{0}{0} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{2r-2}{r-1}$$

a v $(n+1)$ -ním sloupci za středním sloupcem je

$$S_{n+1,r} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+3}{1} + \binom{n+5}{2} + \dots + \binom{n+2r-1}{r-1}. \quad (5)$$

Odečtením rovnic (4) a (5) dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} S_{n+1,r} - S_{n,r} = & \left[\binom{n+3}{1} - \binom{n+2}{1} \right] + \left[\binom{n+5}{2} - \binom{n+4}{2} \right] + \\ & + \dots + \left[\binom{n+2r-1}{r-1} - \binom{n+2r-2}{r-1} \right], \end{aligned}$$

kterou použitím vztahu

$$\binom{p+1}{k+1} - \binom{p}{k+1} = \binom{p}{k}$$

můžeme upravit na tvar

$$S_{n+1,r} - S_{n,r} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+4}{1} + \dots + \binom{n+2r-2}{r-2},$$

čili

$$S_{n+2,r} - S_{n+1,r} + S_{n,r} = \binom{n+2r}{r-1}. \quad (6)$$

Vzhledem k definici čísla n obdržíme z rekurentního vztahu (6) soustavu rovnic

$$S_{2,r} - S_{1,r} + S_{0,r} = \binom{2r}{r-1},$$

$$S_{3,r} - S_{2,r} + S_{1,r} = \binom{2r+1}{r-1},$$

$$S_{n+2,r} - S_{n+1,r} + S_{n,r} = \binom{2r-n}{r-1},$$

jejichž sečtením a použitím známého vztahu binomických koeficientů

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{m}{p} = \binom{m+1}{p+1} \quad (7)$$

vyplývá

$$S_{n+2,r} - S_{1,r} + \sum_{n=0}^n S_{n,r} = \binom{n+2r+1}{r} - \binom{2r}{r}, \quad (8)$$

čili též

$$S_{n+3,r} - S_{1,r} + \sum_{n=0}^{n+1} S_{n,r} = \binom{n+2r+2}{r} - \binom{2r}{r}. \quad (8')$$

Avšak sečtením rovnic

$$S_{0,r} = \binom{0}{0} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{2r-2}{r-1},$$

$$S_{1,r} = \binom{1}{0} + \binom{3}{1} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{2r-1}{r-1},$$

$$S_{n+1,r} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+3}{1} + \binom{n+5}{2} + \dots + \binom{n+2r-1}{r-1}$$

podle sloupců na jejich pravých stranách a s přihlédnutím ke vztahu (7) dostaneme

$$\sum_{n=0}^{n+1} S_{n,r} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+4}{2} + \dots + \binom{n+2r}{r} - \left[\binom{2}{2} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{2r-2}{r} \right],$$

čili

$$\sum_{n=0}^{n+1} S_{n,r} = S_{n,r} + \binom{n+2r}{r} - 1 - \left[\binom{2}{2} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{2r-2}{r} \right].$$

Dosazením za $S_{1,r}$ a za $\sum_{n=0}^{n+1} S_{n,r}$ do rovnice (8') vyplývá

$$S_{n+3,r} + S_{n,r} - X = \binom{n+2r+2}{r} - \binom{n+2r}{r} - \binom{2r}{r} + 1, \quad (9)$$

kde

$$X = \binom{1}{0} + \left[\binom{2}{0} + \binom{3}{1} \right] + \left[\binom{4}{1} + \binom{5}{2} \right] + \dots + \left[\binom{2r-2}{r-2} + \binom{2r-1}{r-1} \right].$$

Připojíme-li k poslední rovnici ještě rovnici

$$S_{0,r} = \binom{0}{0} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{2r-2}{r-1},$$

pak upotřebením vztahu

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p+1}{k+1}$$

na součty binomických koeficientů stojících ve stejných sloupcích na pravých stranách obou posledních rovnic obdržíme

$$X + S_{0,r} = 2 + 2 \left[\binom{3}{1} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{2r-1}{r-1} \right],$$

čili

$$X + S_{0,r} = 2 + 2(S_{1,r} - 1)$$

a konečně

$$X = 2S_{1,r} - S_{0,r}.$$

Potom rovnice (9) dostane tvar

$$S_{n+3,r} + S_{n,r} - 2S_{1,r} + S_{0,r} = \binom{n+2r+2}{r} - \binom{n+2r}{r} - \binom{2r}{r} + 1$$

a pro $n = 0$ je

$$S_{3,r} - 2S_{1,r} + 2S_{0,r} = \binom{2r+2}{r} - 2\binom{2r}{r} + 1.$$

Řešením této rovnice s rovnicemi nám již známými

$$S_{2,r} - S_{1,r} + S_{0,r} = \binom{2r}{r-1},$$

$$S_{3,r} - S_{2,r} + S_{1,r} = \binom{2r+1}{r-1}$$

konečně vyplývá

$$S_{1,r} = \frac{1}{2} \left[\binom{2r}{r} - 1 + S_{0,r} \right],$$

$$S_{2,r} = \frac{1}{2} \left[\binom{2r}{r} - 1 - S_{0,r} \right] + \binom{2r}{r-1},$$

$$S_{3,r} = \binom{2r+2}{r} - \binom{2r}{r} - S_{0,r}.$$

Známe-li tedy součet prvních r členů posloupnosti ve středním sloupci, můžeme určit součet stejného počtu členů posloupnosti v kterémkoli jiném sloupci.

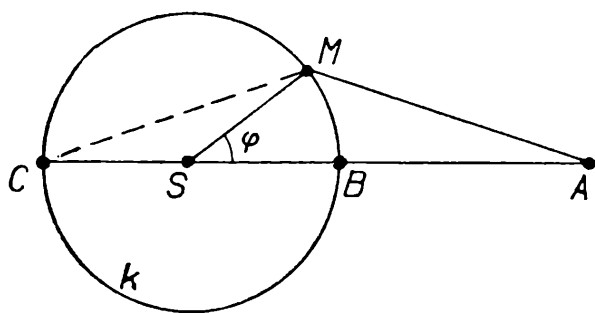
Doc. Jan Vyšín, KU, Praha:

O nejdelší úsečce, kterou lze umístit do daného obrazce

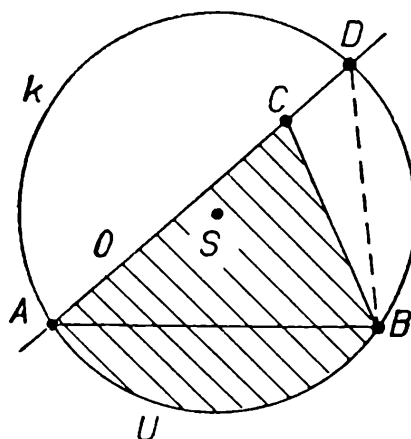
(Dokončení)

5. V další části článku rozřešíme naši úlohu pro složitější konvexní obrazec. Nejdříve však uvedeme druhou pomocnou větu.

Pomocná věta Q. Mějme kružnici k se středem S a bod A různý od S . Pak body kružnice k , které mají od bodu A nejmenší a největší možnou vzdálenost, jsou průsečíky kružnice k s přímkou AS . Pohybuje-li se bod M po kružnici k od nejbližšího bodu B k nejvzdálenějšímu bodu C , pak vzdálenost AM stále roste.



Obr. 9



Obr. 10

Dokážeme pomocnou větu Q pro případ, že bod A leží vně kružnice k (obr. 9); v ostatních případech jsou důkazy obdobné. Označíme d vzdálenost AS a r poloměr kružnice k ; podle předpokladu je $d > r$. Dále označíme B bod kružnice k , pro který platí $AB = d - r$, C bod kružnice k , pro který platí $AC = d + r$,

M bod ležící na polokružnici mezi body B, C . Konečně označíme φ velikost úhlu $\sphericalangle MSA$. Kosinová věta pro trojúhelník ASM dává

$$\overline{AM}^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos \varphi. \quad (9)$$

Vzorec (9) platí i pro $M \equiv B$ a $M \equiv C$. Dosadíme-li $\varphi = 0^\circ$, vyjde

$$\overline{AM}^2 = d^2 + r^2 - 2dr = (d - r)^2 = \overline{AB}^2;$$

dosadíme-li $\varphi = 180^\circ$, vyjde

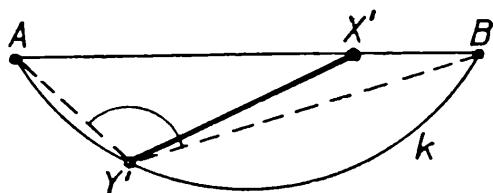
$$\overline{AM}^2 = d^2 + r^2 + 2dr = (d + r)^2 = \overline{AC}^2.$$

Pohybuje-li se bod M po polokružnici od bodu B k bodu C , roste velikost φ od 0° do 180° ; $\cos \varphi$ pak klesá od 1 do -1 ; člen $-2dr \cos \varphi$ roste od $-2dr$ do $2dr$.

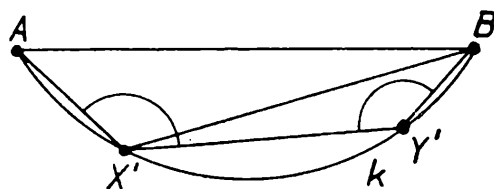
Tím je pomocná věta Q dokázána v případě $d > r$.

Nyní sestojíme tento obrazec (obr. 10): V kružnici $k \equiv (S; r)$ vedeme tětivu AB kratší než průměr. Na větším oblouku $\widehat{AB}$ zvolíme bod D tak, aby vznikl ostroúhlý trojúhelník ABD ; mezi body A, D zvolíme bod C tak, aby střed kružnice k ležel uvnitř trojúhelníka ABC . Obrazec O složíme z uzavřené úseče U , omezené tětivou AB a menším obloukem $\widehat{AB}$ a z trojúhelníka ABC .

Dokážeme snadno, že obrazec O je konvexní. Vlastnost a) z definice konvexního obrazce je zřejmě splněna, neboť obrazec O náleží celý kruhu K , omezenému kružnicí k . Dále si všimneme, že obrazec O je část roviny společná dutému úhlu $\sphericalangle ACB$ a kruhu K , čili - jak v matematice říkáme - je průnikem úhlu $\sphericalangle ACB$ a kruhu K . Úhel $\sphericalangle ACB$ i kruh K mají vlastnosti b), c) z definice konvexního obrazce. Z toho bezprostředně vyplývá, že má obě tyto vlastnosti i obrazec O , čili, že je obrazec O konvexní.



Obr. 11



Obr. 12

6. Nyní zvolíme libovolné dva různé body X, Y obrazce O . Náleží-li body X, Y trojúhelníku ABC , je vzdálenost XY menší nebo rovna délce největší ze stran AB, BC, CA . Náleží-li body X, Y oba uzavřené úseči U , je

$$XY \leq AB. \quad (10)$$

Abychom tuto nerovnost dokázali, prodloužíme úsečku XY . Přímka XY protne obvod úseče U ve dvou různých bodech X', Y' ⁴⁾. Zřejmě je

$$XY \leq X'Y' \quad (11)$$

Leží-li např. bod X' na úsečce AB a bod Y' na oblouku kružnice k (obr. 11), je

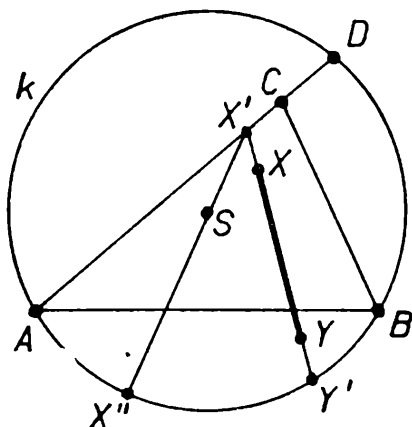
⁴⁾ Lze dokázat, že přímka, která obsahuje aspoň jeden bod vnitřku úseče U , protíná její obvod ve dvou různých bodech.

podle pomocné věty P vzdálenost $X'Y'$ menší nebo rovna větší ze vzdáleností AY' , BY' . Protože je daný oblouk menší oblouk $\widehat{AB}$, je úhel $\sphericalangle AY'B$ tupý a AB je nejdelší strana trojúhelníka ABY' . Je tedy $X'Y' < AB$ a poněvadž platí vztah (11) platí pak vztah (10).

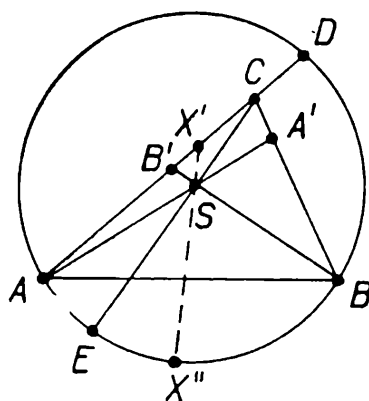
Leží-li oba body X' , Y' (obr. 12) na oblouku kružnice⁵⁾, jsou úhly $\sphericalangle AX'B$, $\sphericalangle AY'B$ tupé; tím spíše to platí o úhlech $\sphericalangle AX'Y'$, $\sphericalangle BY'X'$. V trojúhelníku ABX' je nejdelší strana AB , v trojúhelníku $BX'Y'$ je nejdelší strana BX' . Platí tedy opět vztah $X'Y' < AB$ a v důsledku vztahu (11) platí opět vztah (10).

Zbývá vyšetřit případ, kdy jeden z bodů X , Y , např. bod Y náleží úseči U a druhý - bod X - náleží trojúhelníku ABC . Určíme opět průsečíky X' , Y' přímky XY s obvodem obrazce O (obr. 13). Zřejmě platí opět vztah (11).

Ponechme bod X' pevný a měňme bod Y' . Nejdelší možná úsečka vznikne, najdeme-li na menším oblouku $\widehat{AB}$ takový bod X'' , který je nejvzdálenější od bodu X' . Podle pomocné věty Q je to buď průsečík přímky SX' s menším obloukem $\widehat{AB}$, nebo je to některý z bodů A , B ⁶⁾. V tomto posledním případě platí



Obr. 13



Obr. 14

$$XY \leq X'Y' \leq AX' \leq AC,$$

nebo

$$XY \leq X'Y' \leq BX' \leq BC.$$

Leží-li bod X'' uvnitř oblouku (jako na obr. 13), je

$$XY \leq X'Y' \leq X'X''$$

Nejdelší z úseček $X'X''$ najdeme snadno. Uvědomíme si, že platí

$$X'X'' = SX' + SX'' = r + SX' \quad (12)$$

a dále, že bod S leží uvnitř trojúhelníka ABC . Sestrojíme přímky AS , BS a určíme jejich průsečíky A' , B' se stranami BC , AC (obr. 14). Má-li bod X'' padnout dovnitř menšího oblouku AB , musí bod X' náležet některé z úseček $A'C$, $B'C$. Označme E průsečík polopřímky CS s kružnicí k . Nejdelší z úseček $X'X''$, když

⁵⁾ Pak ovšem můžeme předpokládat, že jsou oba různé od bodů A , B .

⁶⁾ Bod kružnice k nejbližší bodu X' ležícímu na některé z úseček AC , BC , náleží podle pomocné věty Q vždy většímu oblouku $\widehat{AB}$.

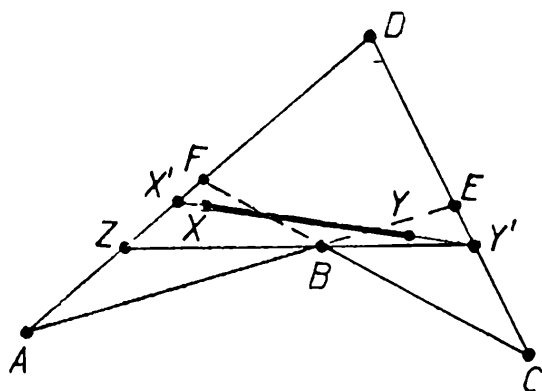
X' probíhá úsečku $B'C$ a současně X'' oblouk $\widehat{BE}$, je některá z úseček BB' , CE ; to zjistíme ze vztahu (12), uvážíme-li, že nejdelší z úseček SX' je některá z úseček SB' , SC .

Obdobně zjistíme, že nejdelší z úseček $X'X''$, když X' probíhá úsečku $A'C$ a současně X'' oblouk $\widehat{AE}$, je některá z úseček AA' , CE . Závěr naší úvahy je tedy tento:

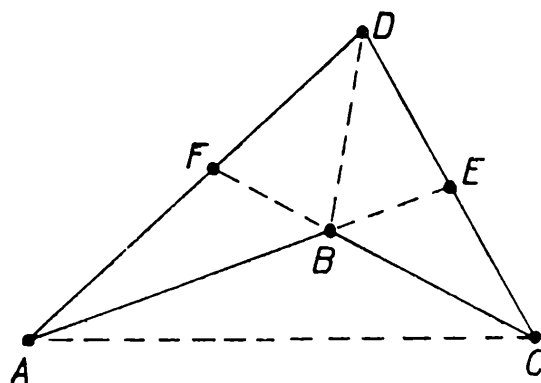
Průměr daného obrazce O je velikost největší z úseček AB , BC , CA , CE .

7. Rozřešíme ještě jednu úlohu o průměru obrazce, tentokrát nekonvexního. Průměrem opět rozumíme délku největší úsečky, kterou lze umístit do daného obrazce.

Na obr. 15 je narysován nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$, který se skládá z trojúhelníků ABC , CBD . Nekonvexnost čtyřúhelníka je zřejmá, neboť úsečka AC obrazci nenáleží. Protože úhel ABC , v němž obrazec leží, je vypuklý, protnou polopřímky AB , CB strany CD , AD ve vnitřních bodech E , F .



Obr. 15



Obr. 16

Budeme zkoumat délku úsečky XY spojující dva různé body čtyřúhelníka $ABCD$ a ležící v čtyřúhelníku. Leží-li oba body X , Y v trojúhelníku ADE nebo CDF , je vzdálenost XY menší, nebo rovna největší ze vzdáleností AD , AE , CD , CF . To si snadno dokážete pomocí věty 1. Stačí tedy dále se zabývat jen tím případem, kdy jeden z krajních bodů X , Y leží v trojúhelníku ABF , druhý v trojúhelníku CBE (obr. 16). Přímka XY odděluje body B , F , neboť prochází vnitřkem konvexního čtyřúhelníka $BEDF$. Z téhož důvodu odděluje i body B , E ; proto neodděluje body A , B a odděluje tedy body A , F ⁷⁾. Průsečík přímky XY s úsečkou AF označíme X' ; obdobně vzniklý průsečík přímky XY s úsečkou CE označíme Y' . Přímka BY' odděluje zřejmě vrcholy A , E trojúhelníka ADE , ale neodděluje jeho vrcholy D , E ; proto (podle Paschovy věty) protíná úsečku AD v jejím vnitřním bodě Z .

⁷⁾ Zde používáme známé věty Paschovy o přímce a trojúhelníku, která zní takto: Odděluje-li přímka p vrcholy A , B trojúhelníka ABC a neprochází-li žádným jeho vrcholem, pak odděluje také buď vrcholy A , C nebo vrcholy B , C .

Nyní odhadneme vzdálenost XY' . Platí

$$XY \leq X'Y'; \quad (13)$$

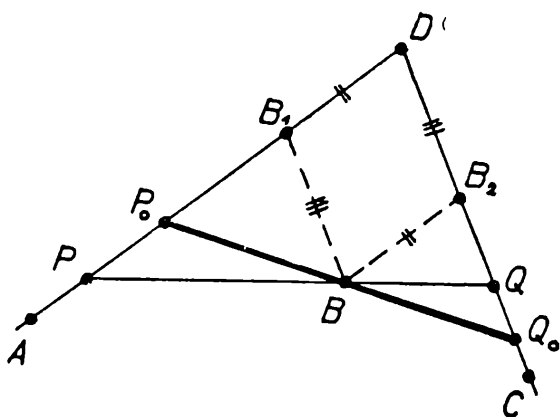
je-li v trojúhelníku $X'Y'D$ úhel $\sphericalangle DX'Y'$ tupý nebo pravý, je

$$X'Y' < DY' < BD$$

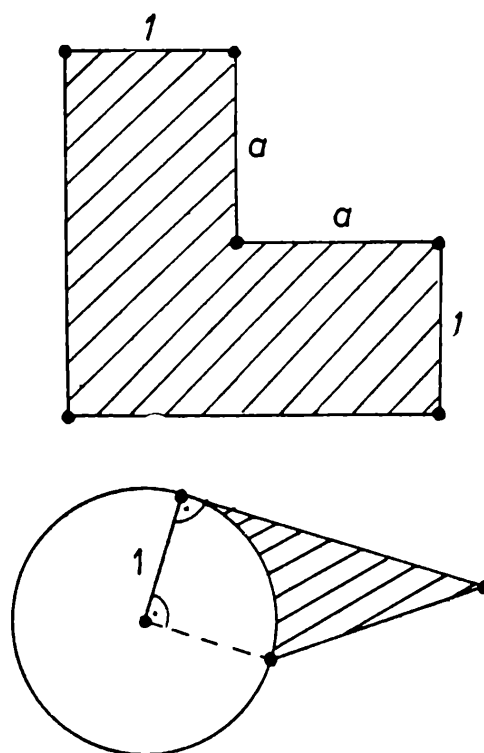
a spojením těchto vztahů se vztahem (13), dostaneme $XY < BD$. Je-li úhel $\sphericalangle DX'Y'$ ostrý (jako na obr. 16), je jeho vedlejší úhel $\sphericalangle ZXY'$ tupý; v trojúhelníku $X'Y'Z$ pak platí $X'Y' < Y'Z$ a podle (13) je

$$XY \leq Y'Z.$$

Tento výsledek je zřejmě správný i v případě, když úsečky $X'Y'$, ZY' splynou. Pro omezení úseček XY potřebujeme tedy ještě najít nejdelší z úseček, které procházejí bodem B a jejichž krajní body náležejí stranám AD , BD .



Obr. 17



Obr. 18a, b

8. Jde zde vlastně o úlohu: Je dán dutý úhel $\sphericalangle ADC$ a uvnitř něho bod B . Máme zjistit, jak se mění délka úsečky PQ , jejíž krajní body P , Q leží po řadě na ramenec DA , DC a která obsahuje bod B (obr. 17).

Sestrojíme rovnoběžník DB_1BB_2 . Je zřejmé, že krajní body úsečky PQ náležejí polopřímek B_1A , B_2C . Řešení naší úlohy je pak toto:

Vzdaluje-li se bod P po polopřímce B_1A od bodu B_1 (a současně bod Q se přibližuje po polopřímce B_2C bodu B_2), potom se úsečka PQ stále zmenšuje, až nabude jisté nejmenší délky P_0Q_0 . vzdaluje-li se bod P dále od bodu B_1 (a současně se přibližuje bod Q bodu B_2), vzrůstá opět délka úsečky PQ , a to nad všechny meze.

Odvození tohoto výsledku a zejména sestrojení nejmenší úsečky P_0Q_0 není snadné a vyžaduje řešení jisté rovnice třetího stupně. Zvolíme-li totiž menší z úseček DB_1 , DB_2 za jednotkovou, označíme-li a délku větší z nich (na obr. 17 je $DB_1 = 1$, $DB_2 = a$), označíme-li ω velikost úhlu $\sphericalangle ADC$ a t délku úsečky B_2Q , platí pro velikost úsečky PQ vzorec

$$PQ = \left(1 + \frac{t}{a}\right) \sqrt{t^2 - 2t \cos \omega + 1}; \quad (14)$$

vzorec (14) snadno odvodíme z podobnosti trojúhelníků B_2QB , B_1BP . Délku $t_0 = B_2Q_0$, která vede k určení nejkratší úsečky P_0Q_0 , dostaneme jako jediný reálný kořen rovnice třetího stupně

$$t^3 - t^2 \cos \omega + at \cos \omega - a = 0. \quad (15)$$

To je zmíněná rovnice třetího stupně a odvodí se zkoumáním průběhu funkce (14), které nebudeme provádět. Úsečku P_0Q_0 zpravidla nedovedeme sestrojit euklidovsky pravítkem a kružítkem; to je možné jen v některých jednoduchých zvláštních případech, např. pro $\omega = 90^\circ$, $a = 1$.

Vraťme se nyní k nekonvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 16). Z řešení předcházející úlohy vyplývá, že nejdelší ze všech úseček $Y'Z$ je jedna z úseček AE , CF . Spojíme-li tento výsledek s předchozími úvahami o čtyřúhelníku $ABCD$, dostaneme tento závěr:

Průměr nekonvexního čtyřúhelníka $ABCD$ je velikost nejdelší z úseček AD , AE , CD , CF .

Přenecháváme čtenáři, aby zjistil průměry vyšrafovaných uzavřených obrazců, narysovaných na obr. 18.

Vítě zslav Littmann, Beroun:

Řešení rovnice 5. stupně, jejíž dva páry kořenů jsou čísla opačná, různá od nuly

U rovnice 5. stupně

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (1)$$

platí obecně:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -a \quad (2)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = b \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + \\ &+ x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = -c \end{aligned} \quad (4)$$

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = d \quad (5)$$

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = -e \quad (6)$$

Kořeny, které mají býti opačnými čísly, různými od nuly, označíme $x_1, x_2 \neq 0$ a $x_3, x_4 \neq 0$, takže

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.$$

Podle rovnice (2)

$$x_5 = -a. \quad (7)$$

Podle rovnice (3)

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_5 = b,$$

čili

$$x_1x_2 + x_3x_4 = b \quad (8)$$

Podle (4)

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_1x_2x_5 + (x_1 + x_2)(x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) + x_3x_4x_5 = -c,$$

neboli

$$(x_1x_2 + x_3x_4)x_5 = -c$$

a vzhledem k (7) a (8) dostáváme první podmínku pro koeficienty dané rovnice (1), aby její dva páry kořenů byla čísla opačná, různá od nuly:

$$ab = c. \quad (9)$$

Podle (5)

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_5(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4x_5 = d,$$

neboli

$$x_1x_2x_3x_4 = d, \text{ tedy } d \neq 0. \quad (10)$$

Podle (6) a (7) a s ohledem k (10) zjistíme druhou podmínku pro koeficienty rovnice (1), aby její dva páry kořenů byla čísla opačná, různá od nuly:

$$ad = e \quad (11)$$

Z obou podmínek (9) a (11) také vyplývá, že $cd = be$.

Platí-li tyto podmínky (9), (11) a $d \neq 0$, které jsou podmínkami nutnými, ukáže se naopak, když vypočítáme kořeny dosazením podmínek do dané rovnice (1), že její dva páry kořenů jsou čísla opačná. Tímto dosazením dostaneme

$$x^4(x + a) + bx^2(x + a) + d(x + a) = 0$$

Této rovnici vyhovuje

1. $x + a = 0$, z čehož $x_5 = -a$ ve shodě s (7),

$$2. \quad x^4 + bx^2 + d = 0 \quad (12)$$

V rovnici (12) dosadíme $x^2 = z$, čímž vyjde

$$z^2 + bz + d = 0$$

$$z_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - d},$$

z čehož vypočítáme čtyři kořeny rovnice (1):

$$x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}}, \quad (13)$$

$$x_3 = \sqrt{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}}, \quad x_4 = -\sqrt{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}}. \quad (14)$$

Kořeny rovnice (12) jsou za předpokladu $d \neq 0$ po dvou opačnými čísly, různými od nuly. Tím jsme dokázali, že uvedené podmínky jsou i podmínkami postačujícími.

Pro $d = 0$ je podle (11) také $e = 0$ a rovnice (1) má tvar

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0.$$

Její dva kořeny jsou rovny nule. Zbývající tři vyhovují rovnici 3. stupně

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Z podmínky (9) je ji možno napsat ve tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0,$$

čili

$$(x + a)(x^2 + b) = 0.$$

Její kořeny jsou

$$x_3 = \sqrt{-b}, \quad x_4 = -\sqrt{-b}, \quad x_5 = -a.$$

Máme tedy *výsledek*: Nutná a postačující podmínka, aby dva páry kořenů rovnice (1) byla čísla opačná, různá od nuly, je dána vztahy:

$$ab = c, \quad ad = e, \quad d \neq 0.$$

1. *poznámka*: O správnosti kořenů mohli bychom se přesvědčiti dosazením do dané rovnice.

2. *poznámka*:

α) Pro $a = 0$ je podle (9) také $c = 0$ a podle (11) $e = 0$ a rovnice (1) zní

$$x^5 + bx^3 + dx = 0.$$

Její jeden kořen x_5 rovná se nule. Zbývající čtyři vyhovují rovnici

$$x^4 + bx^2 + d = 0,$$

což je naše rovnice (12).

β) Pro $b = 0$ je podle (9) také $c = 0$ a rovnice (1) má tvar

$$x^5 + ax^4 + dx + e = 0.$$

Je to rovnice (15) - viz dále, k níž jsme uvedli příklad.

Ostatní nulové koeficienty vedou k témuž zvláštnímu případu.

Příklad. Volme rovnici

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 14x + 28 = 0,$$

kterou jsme sestavili s ohledem na to, aby kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 byly různé od nuly a nebyly imaginární, z kterýchžto důvodů volme $d \neq 0$, $\frac{b^2}{4} - d > 0$, $-\frac{b}{2} > \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}$. Mimo to volme b a d tak, aby $\sqrt{\frac{b^2}{4} - d}$ bylo číslo racionální; např.

$$a = 2, b = -9, c = -18, d = 14, e = 28.$$

Zvolená rovnice vyhovuje podmínkám (9) a (11) a má kořeny: podle (13)

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{7}$$

podle (14)

$$x_3 = \sqrt[3]{2}, \quad x_4 = -\sqrt[3]{2}$$

a podle (7)

$$x_5 = -2.$$

Jak jsme již poznamenali, některé koeficienty v rovnici (1) mohou býti rovny nule.

1. Uvažujeme-li u první podmínky $ab = c$, že $a \neq 0$ a $b = 0, c = 0$, dostaneme rovnici

$$x^5 + ax^4 + dx + e = 0, \quad (15)$$

jejíž dva páry kořenů při splnění podmínky $ad = e$ a za předpokladu $d \neq 0$ jsou také opačnými čísly, různými od nuly.

Příklad. Volme rovnici

$$x^5 + 3x^4 - 16x - 48 = 0.$$

Podle (7), (13) a (14)

$$x_1, x_2 = \pm \sqrt[3]{-d} = \pm 2, x_3, x_4 = \pm \sqrt[3]{-d} = \pm 2i, x_5 = -a = -3$$

Když vezmeme dále v úvahu, že $a = 0$, u první podmínky $b \neq 0, c = 0$, u druhé $d \neq 0, e = 0$, obdržíme rovnici

$$x^5 + bx^3 + dx = 0,$$

v níž také $d \neq 0$. Vydělíme-li ji x , dostaneme opět rovnici (12).

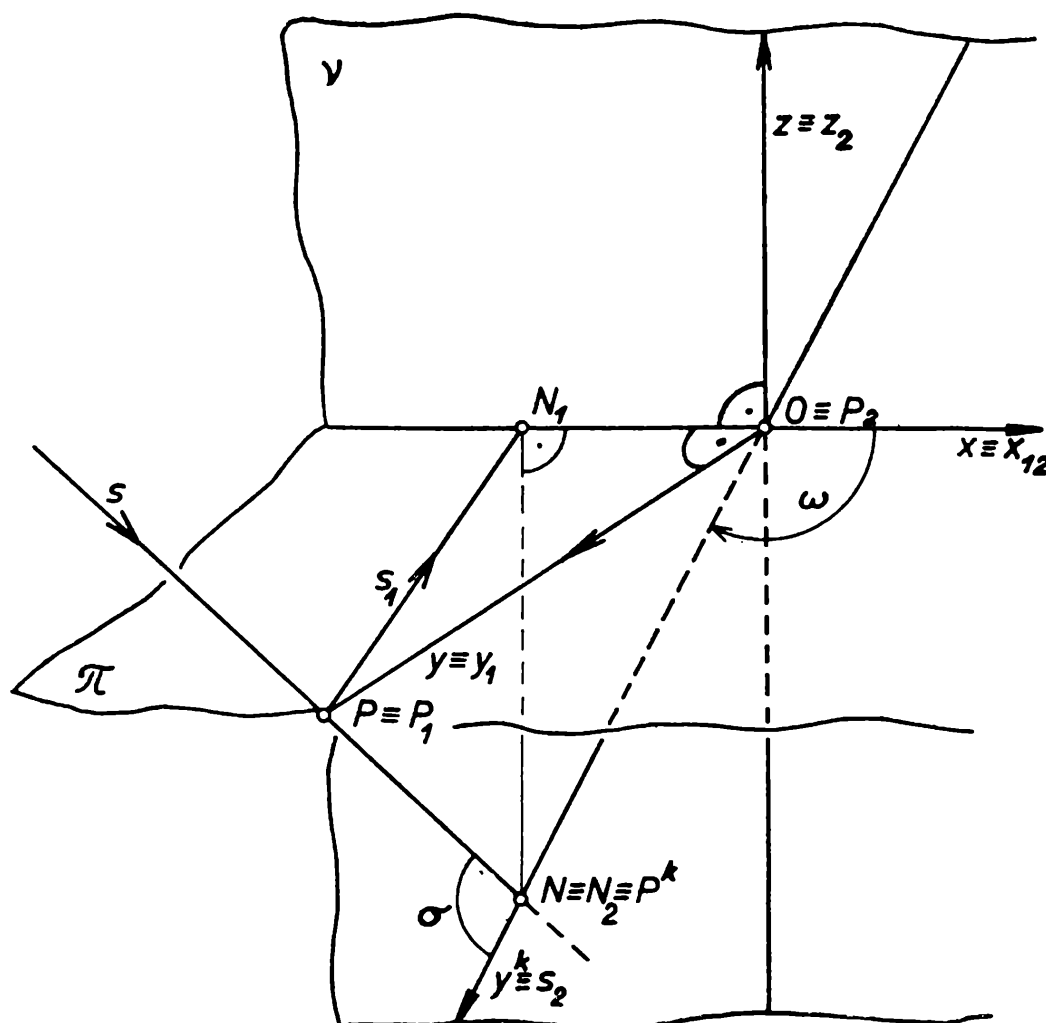


Deskriptivní geometrie

Inž. Ladislav Drs, ČVUT, Praha:

Některé vztahy mezi kosoúhlým promítáním a promítáním pravoúhlým na dvě kolmé průmětny

V tomto článku odvodíme vztahy mezi úhlem ω a kvocientem q určujícími kosoúhlé promítání a směrem s tohoto promítání.



Obr. 1

Na názorném obr. 1 je dána soustava souřadnic s počátkem O a osami x, y, z a jedním bodem P na y je veden orientovaný promítací paprsek s udávající směr

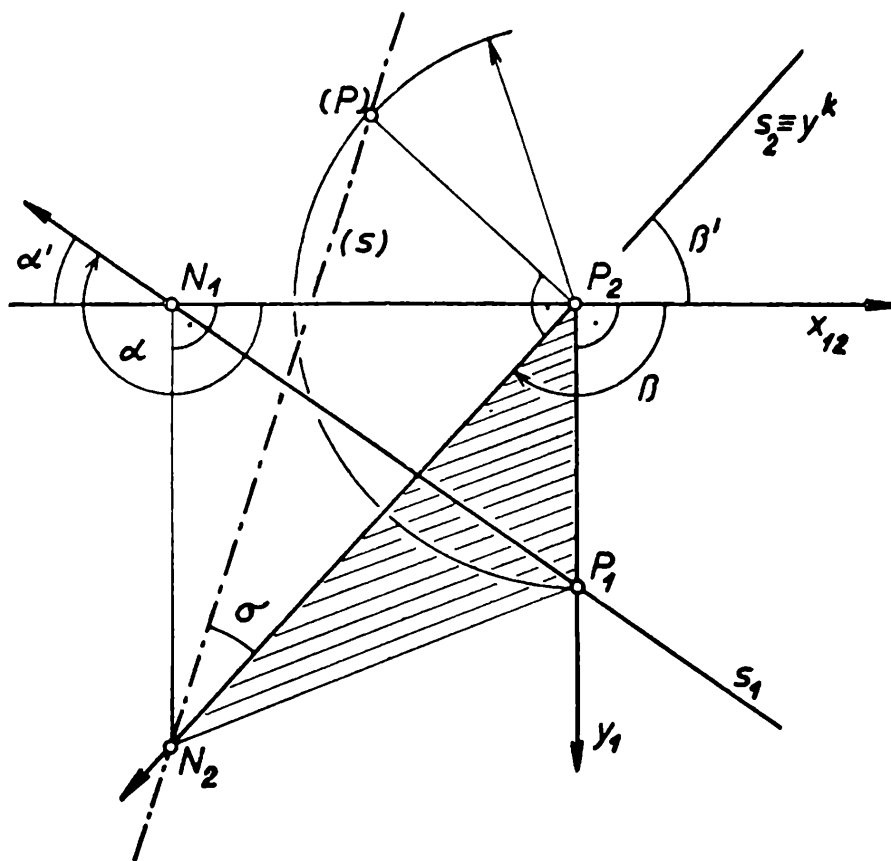
promítání. Rovina π protne průmětnu ν v přímce y^k , v kosoúhlém průmětu osy y . Přímka y^k prochází bodem N , stopníkem přímky s na nárysně. Potom je

$$\omega = \sphericalangle xy^k, \quad q = NO : PO$$

Z hodnot úhlu ω vylučujeme tyto úhly: 0° , 90° , 180° , 270° , 360° . (Proč? Například pro $\omega = 0^\circ$ by se rovina π promítala do přímky, promítání by nebylo názorné a o to nám v kosoúhlém promítání právě jde. Kvůli názornosti průmětů přece toto promítání zavádíme! Odůvodněte sami vyloučení ostatních hodnot!)

Kromě toho vylučujeme $s \parallel \nu$ (nevzniklo by promítání na ν) a $s \perp \nu$ (proč?). Z toho plyne, že $0 < q < \infty$.

Na názorném obr. 1. byly dále sestrojeny průměty s_1 a s_2 přímky s do π a ν . Je zřejmé, že $s_1 \equiv PN_1$, $s_2 \equiv P_2N \equiv y^k$.



Obr. 2

Názornému obr. 1 odpovídá obr. 2, kde jsou v promítání pravoúhlém na dvě kolmé průmětny dány průměty s_1 a s_2 směru s kosoúhlého promítání. Stopník N přímky s je současně kosoúhlým průmětem stopníku P , jak je patrné z obr. 1. Vedme osu y bodem P ! Průmětem P_1 jde y_1 kolmo k ose x_{12} , $y_2 \equiv P_2$. Potom platí jednak $s_2 \equiv y^k$ a dále, že trojúhelník $P_1P_2N_2$ (v obr. 2 vyšrafovaný) je charakteristický trojúhelník kosoúhlého promítání. Hodnota q je rovna poměru $N_2P_2 : P_1P_2$. Tím je udána konstrukce kosoúhlého promítání, je-li dán v Mongeově promítání směr s kosoúhlého promítání.

Označme podle obr. 2 $\alpha = \sphericalangle x_{12} s_1$, α' ostrý úhel přímek x_{12} , s_1 , $\beta = \sphericalangle x_{12} s_2$, β' ostrý úhel přímek x_{12} , s_2 . Na základě úhlů α , α' , β , β' vyjádříme veličiny ω , q .

Velmi jednoduchý je vztah mezi ω a β , neboť zřejmě platí

$$\omega = \beta. \quad (1)$$

Vztah mezi q a danými úhly vypočteme. Označme $a = N_1P_2$. Pak je

$$N_2P_2 = \frac{a}{\cos \beta'},$$

$$P_1P_2 = a \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

a tedy

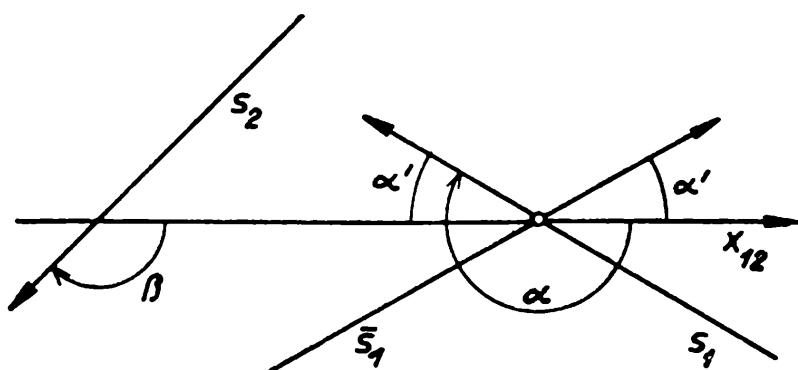
$$q = \frac{NO}{PO} = \frac{N_2P_2}{P_1P_2} = \frac{a}{\cos \beta' \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{1}{\cos \beta' \operatorname{tg} \alpha'} \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) určují početně veličiny ω , q , jsou-li známy průměty směru s kosoúhlého promítání.

Obráceně vypočteme úhly α' , β je-li dáno ω , q z rovnic

$$\beta = \omega \quad (1')$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{q \cos \beta'} \quad (2')$$



Obr. 3

Úhel α je úhlem α' jednoznačně určen, předpokládáme-li, jak je vždy obvyklé, že paprsek s přichází zpredu. Pak je $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Je-li například $\beta = 135^\circ$, $\alpha' = 30^\circ$ pak z možných směrů $\vec{s}_1, \vec{s}_1$ (obr. 3) které vyhovují podmínce $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ nevyhovuje směr $\vec{s}_1$ orientaci nárysu s_2 a je tedy správný pouze směr s_1 , $\alpha = 210^\circ$.

Sestrojme ještě podle obr. 2 odchylku σ přímky s od ν sklopením přímky s do ν . $P_2(P) \perp s_2$, $P_2(P) = P_1P_2$, $(s) = N_2(P)$. Platí tedy

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(P)P_2}{N_2P_2} = \frac{P_1P_2}{N_2P_2} = \frac{1}{q}. \quad (3)$$

Tangenta odchylky σ směru promítání s je převrácená hodnota kvocientu q . Tím je nalezen geometrický význam kvocientu q .

Uveďme příklady.

1. Je dáno kosoúhlé promítání veličinami $q = 1$, $\omega = 135^\circ$. Máme určit úhly $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \sigma$!

$$\beta = 135^\circ, \beta' = 45^\circ, \operatorname{tg} \alpha' = 1 : 1 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}, \alpha' = 54^\circ 44',$$

$$\alpha = 234^\circ 44', \operatorname{tg} \sigma = 1, \sigma = 45^\circ$$

Jako cvičení určete konstruktivně i početně úhly $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \sigma$ je-li dáno

a) $\omega = 120^\circ, q = 2 : 3;$

b) $\omega = 60^\circ, q = 1 : 2.$

2. Je dán směr s kosoúhlého promítání úhly $\alpha = 135^\circ, \beta = 135^\circ$. Máme určit ω, q, σ :

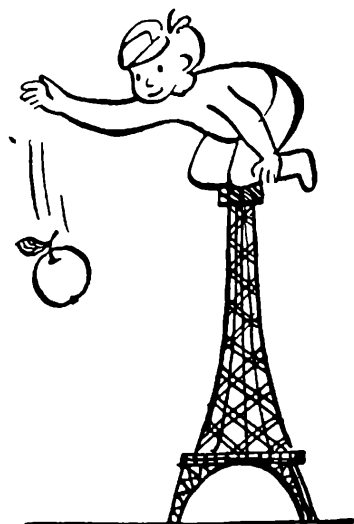
$$\omega = 135^\circ, \beta' = 45^\circ, \alpha' = 45^\circ, q = 1 : \cos 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \sigma = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2, \sigma = 35^\circ 16'$$

Jako cvičení určete konstruktivně i početně ω, q, σ je-li dáno s_1 a s_2 hodnotami

a) $\alpha = 210^\circ, \beta = 225^\circ,$

b) $\alpha = 300^\circ, \beta = 300^\circ!$



Fyzika

Inž. Jiří Pazderák, Praha:

Záznam televizního signálu na magnetofonový pás

V provozu programové televize se stále častěji vyskytuje požadavek uchování některých televizních programů, které mají trvalejší uměleckou nebo dokumentární hodnotu. Tento požadavek se řeší dvěma způsoby a to záznamem televizních obrazů na film a záznamem televizního signálu na magnetofonový pás.

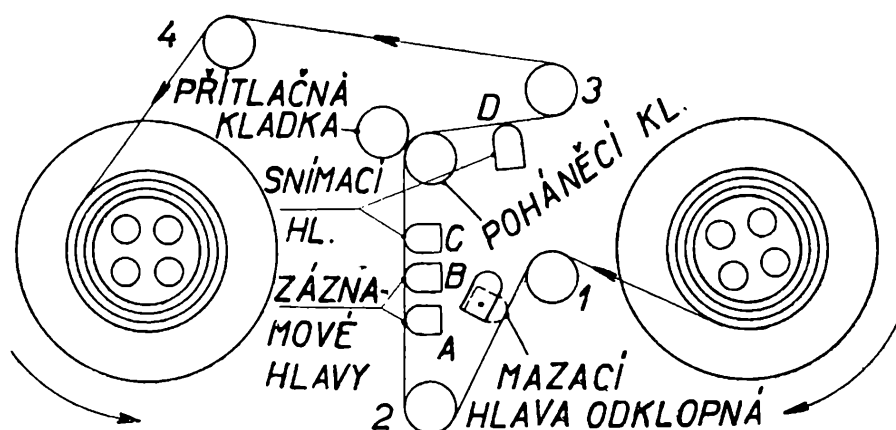
Se záznamem na film souvisí kromě speciálního televizního snímacího zařízení též příslušný fotochemický proces (vyvolávání). Jeho nevýhodou je složitost a nákladnost. Vyplývá z něho i nutný časový odstup od okamžiku pořízení záznamu do doby, kdy je možno jej reprodukovat. Okamžitá kontrola záznamu není možná.

Záznam televizního signálu na magnetofonový pás potřebuje proti předešlému způsobu poněkud složitější zařízení; nevyžaduje však dalšího zpracování magnetofonového pásu, který je po záznamu okamžitě připraven k reprodukci, dá se podle potřeby uchovat, zpracovávat stříhem nebo vymazat a dá se ho použít pro

další záznam. Tento způsob umožňuje navíc bezprostřední kontrolu záznamu a principiálně je použitelný i pro barevnou televizi.

Záznam televizního signálu na magnetofonový pás je obdobný záznamu zvuku, kterého se běžně používá v rozhlasové praxi. Rozdíl je v tom, že počet informací, které je třeba při televizním záznamu zaznamenat za stejnou časovku jednotku, je mnohem větší než u záznamu zvukového. Rozdíl v počtu zaznamenávaných informací se dá vyjádřit kmitočtovým pásmem, kterého je třeba k přenosu zvukového nebo televizního obrazového signálu. Nejvyšší kmitočtové pásmo zvukové záznamové soustavy zaznamenávají signály do kmitočtu 20 kHz, zatím co pro záznam obrazového signálu je třeba kmitočtového pásma až 6 MHz, tj. 300krát více.

Je známo, že šířka kmitočtového pásma (nebo-li počet zaznamenaných informací) magnetofonového záznamu je v zásadě omezena rychlostí posuvu magnetofonového pásu a šířkou šterbiny záznamové hlavy. Čím je tato šterbina užší a čím je rychlost posuvu pásu větší, tím je možno zaznamenat širší kmitočtové pásmo. Šířku šterbiny záznamové hlavy nelze zmenšovat bez omezení. Technologicky ještě proveditelná šterbina u kvalitních záznamových hlav má šířku několik

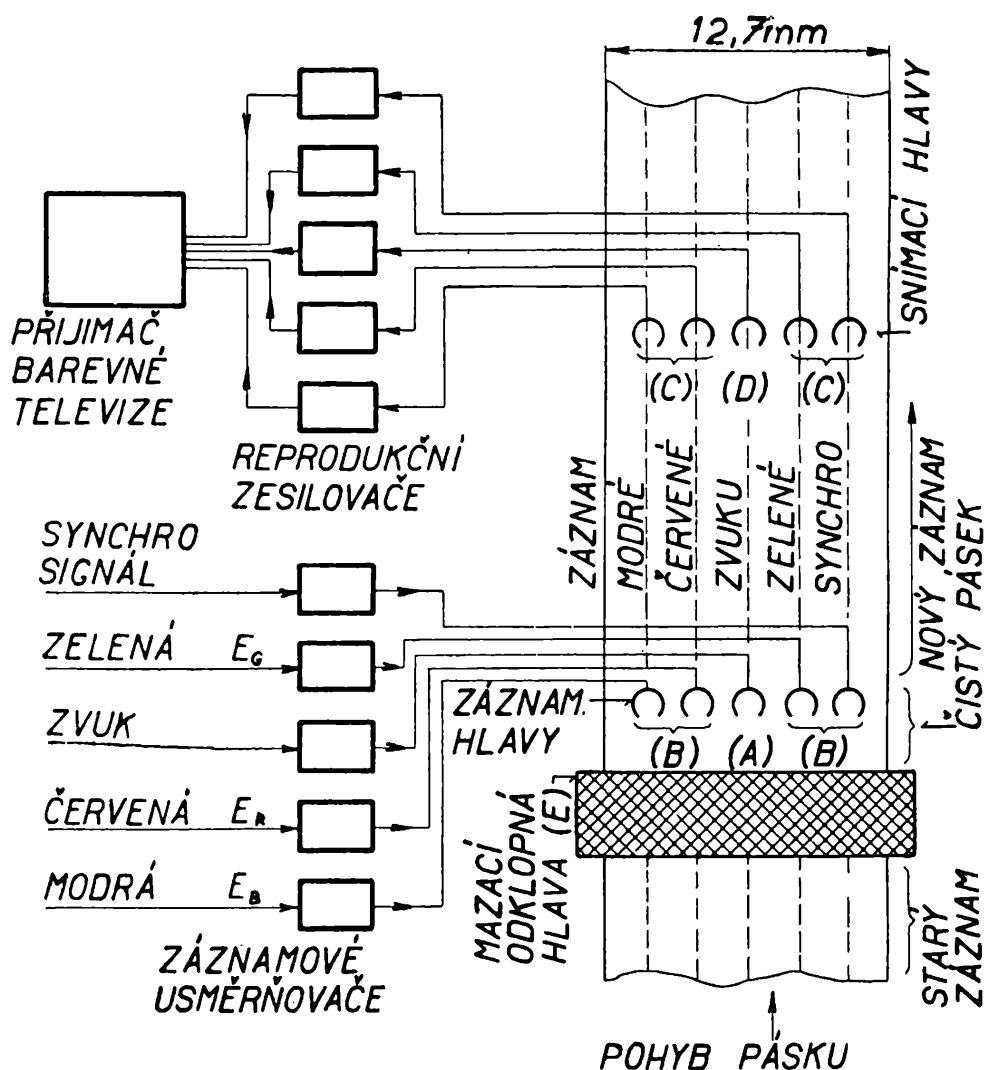


Obr. 1. Transport magnetofonového pásu v záznamové soustavě RCA.

mikronů. Také rychlost posuvu magnetofonového pásu se nedá zvyšovat neomezeně. Předpokládáme-li, že kvalitní zvuková soustava zaznamenaná při rychlosti posuvu pásu 19 cm/s až signály o kmitočtu 20 kHz, pro záznam obrazového signálu s kmitočtovým pásmem 6 MHz by bylo třeba rychlosti posuvu pásu kolem 60 m/s. Takové nadměrné zvyšování rychlosti posuvu pásu zvyšuje nároky na mechanismus stroje a zvyšuje spotřebu pásu pro záznam programu určité délky. Uvedený propočet i praxe ukazují, že řešení záznamu obrazového signálu nelze hospodárně uskutečnit pouze analogicky podle záznamu zvukového prostým zvyšováním záznamové rychlosti.

Přesto bylo v období kolem r. 1954 podobné řešení pokusně realizováno americkou firmou RCA. Pro záznam signálu černobílé televize se zvukovým doprovodem bylo použito magnetofonového pásu šíře 6,35 mm, pro záznam signálů barevné televize bylo použito pásu šíře 12,7 mm. Rychlost posuvu pásu byla 9 m/s a zaznamenané kmitočtové pásmo 3,5 MHz. Dostí širokého kmitočtového pásma bylo dosaženo použitím záznamových hlav s extrémně úzkou šterbinou (asi 2 mikrony).

Na obr. 1 je znázorněno uspořádání transportu pásu. Odvíjecí cívka (vpravo) vnějšího průměru 430 mm pojme 2000 m magnetofonového pásu, jehož hmota je asi 2 kg. Při uvedené rychlosti posuvu pásu je nejdelší doba nepřetržitého záznamu asi 4 minuty. Z odvíjecí cívky postupuje pás nejdříve kolem mazací hlavy (E),



Obr. 2. Blokové schéma záznamového a reprodukčního zařízení RCA.

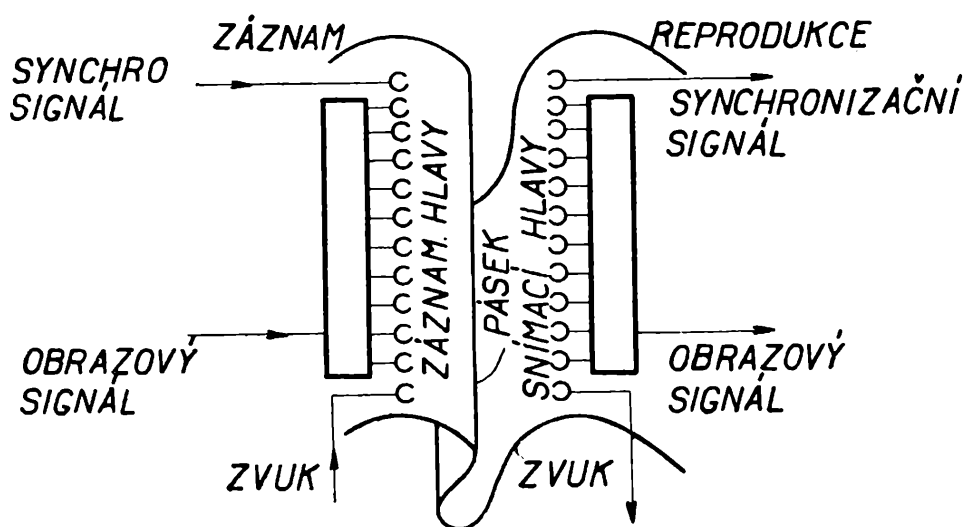
kteřou je možno odklopit, nemá-li být předchozí záznam vymazán. Další hlavy, kolem kterých pás prochází, jsou: *A* pro záznam zvuku, *B* pro záznam obrazového signálu, *C* pro snímání obrazového signálu, *D* pro snímání zvuku. Mezi hlavami *C* a *D* je hlavní pohonná kladka, odkud jde pás přes vodící kladky na navíjecí cívku (vlevo). Zvláštní pozornost musí být věnována rovnoměrnému posuvu pásu, protože náhlé změny jeho rychlosti způsobují geometrickou deformaci reprodukováného televizního obrazu.

Záznam signálu černobílé televize se v tomto uspořádání provádí ve dvou paralelních stopách (obraz a zvuk) na pásu šířky 6,35 mm. Je pozoruhodné, že tohoto zařízení bylo také použito pro záznam signálů barevné televize. K záznamu bylo použito základních barevných signálů E_R , E_G , E_B a samostatného synchronizačního signálu (obr. 2 - dole). Tyto signály zaznamenává ve čtyřech

stopách speciální čtyřdílná záznamová hlava *B*. Zvukový doprovod se zaznamenává samostatnou hlavou *A* v páte paralelní stopě. Funkce reprodukčního zařízení je inverzní, jak plyne z obr. 2 (nahore).

Popsané zařízení firmy RCA se neujalo pro značnou nehospodárnost provozu a pro nedostatky v kvalitě reprodukováného obrazu. Současně se potvrdilo, že řešení obrazového záznamu pouze analogicky podle záznamu zvuku není vhodné.

Jiný záznamový systém byl vyvinut v laboratořích firmy Bing Crosby. Používá relativního zvýšení záznamové rychlosti tím, že při menší skutečné rychlosti posuvu pásu (2,5 m/s) se provádí záznam televizního signálu postupně deseti záznamovými hlavami v příčném směru na magnetofonový pás (obr. 3). Synchronizační signál a signál zvuku se zaznamenávají samostatně po okrajích pásu. Jeho šíře je 12,7 mm a používané cívky stačí pro nepřetržitý záznam asi 15minutového pořadu.



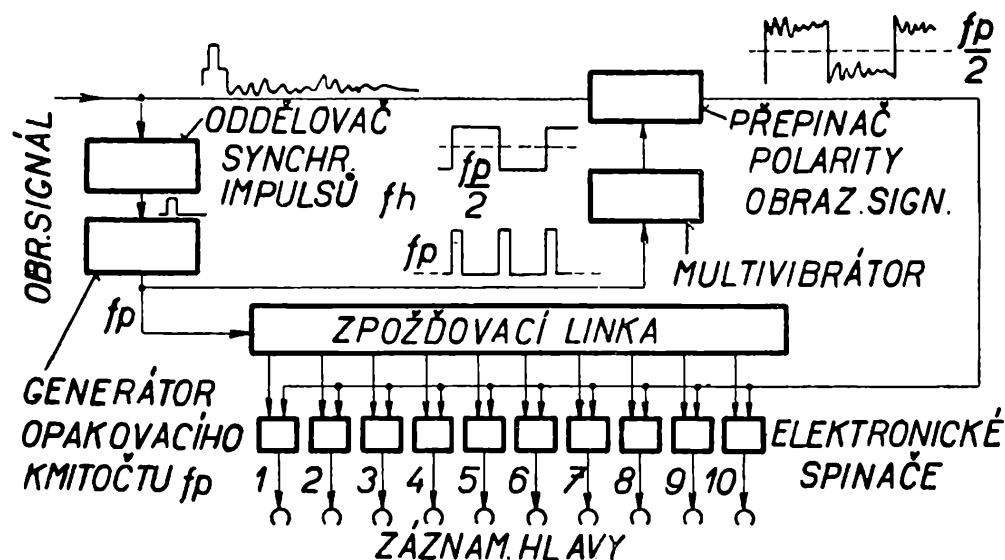
Obr. 3. Princip záznamové soustavy Bing Crosby.

Tímto způsobem lze dosáhnout při poměrně malé rychlosti posuvu pásu šíře kmitočtového pásma záznamu asi 3 MHz. Je to podmíněno dosti složitými elektronickými obvody, o kterých se stručně zmíníme. Na obr. 4 je schéma záznamového zařízení. Z úplného televizního signálu se odvozují synchronizační řádkové impulsy kmitočtu f_h . Tyto impulsy spouštějí generátor speciálních opakovacích impulsů kmitočtu f_p . Opakovací kmitočet je stanoven vztahem

$$f_p = f_h \left(\frac{43}{2} + \frac{1}{42} \right). \quad (1)$$

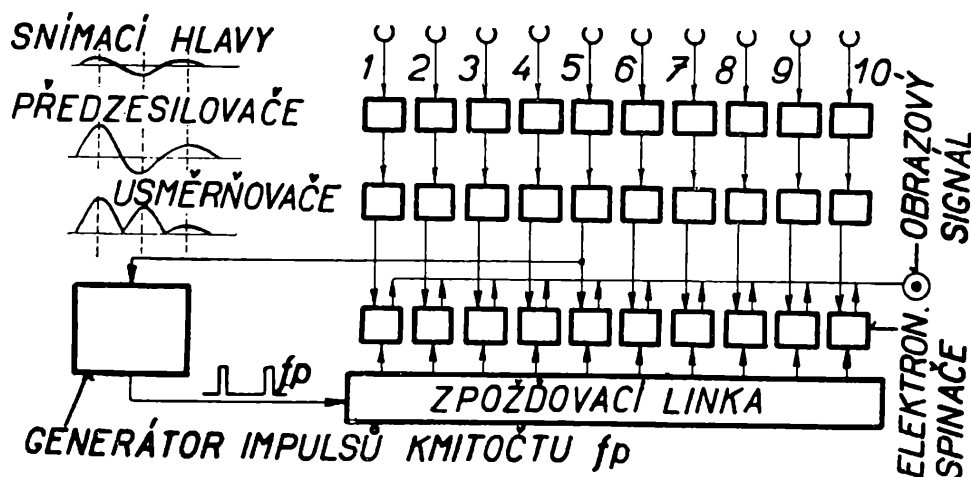
Pro řádkový kmitočet $f_h = 15\,750$ Hz vychází kmitočet opakovacích impulsů $f_p = 339\,000$ Hz a jejich délka kolem 0,15 mikrosekund. Opakovací impulsy kmitočtu f_p jednak synchronizují multivibrátor (tj. elektronický obvod, který vyrábí napětí obdélníkového průběhu), jednak se přivádějí na vstup zpožďovací linky. Multivibrátor vyrábí obdélníkové napětí kmitočtu $\frac{f_p}{2} = 169,5$ kHz a ovládá jím přepínač polarity obrazového signálu. Polarita obrazového signálu vystupujícího

z přepínače je periodicky měněna s tímto kmitočtem. Takto upravený obrazový signál se stále přivádí na vstup všech elektronických spínačů příslušných záznamových hlav. Opakovací impulsy se současně vedou na vstup zpožďovací linky, která má 9 sekcí a z nich každá zpoždění 0,295 mikrosekund. Zpožděné opakovací



Obr. 4. Blokové schéma záznamového zařízení Bing Crosby.

impulsy se přivádějí, tak jak postupují po zpožďovací lince, k jednotlivým spínačům a způsobují po dobu svého trvání (asi 0,15 mikrosekund) volný průchod k záznamové hlavě. Na magnetofonový pás jsou zachyceny prostřednictvím takto

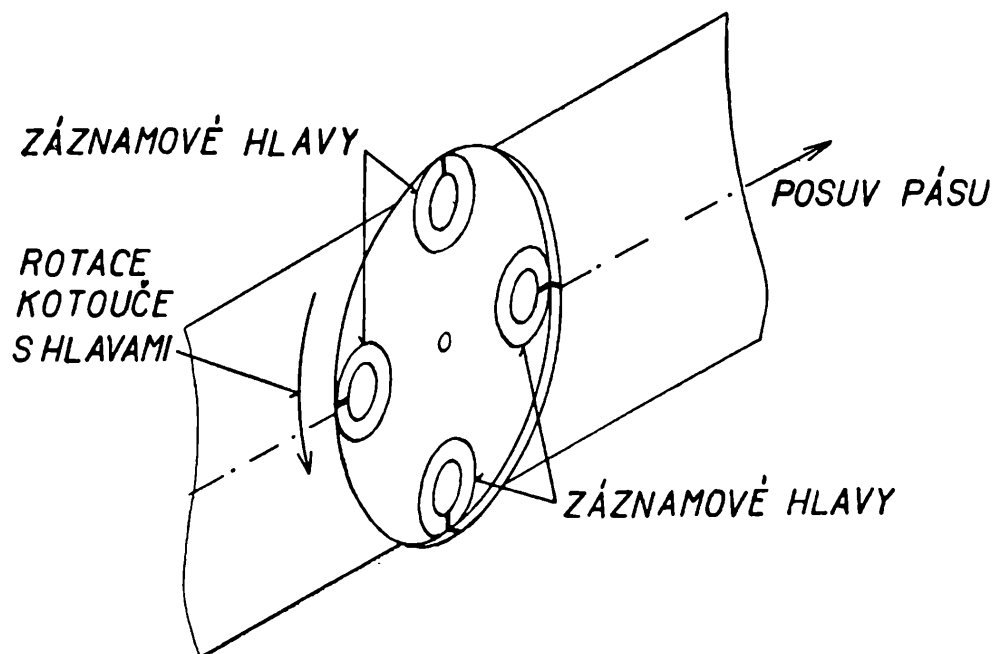


Obr. 5. Blokové schéma reprodukčního zařízení Bing Crosby.

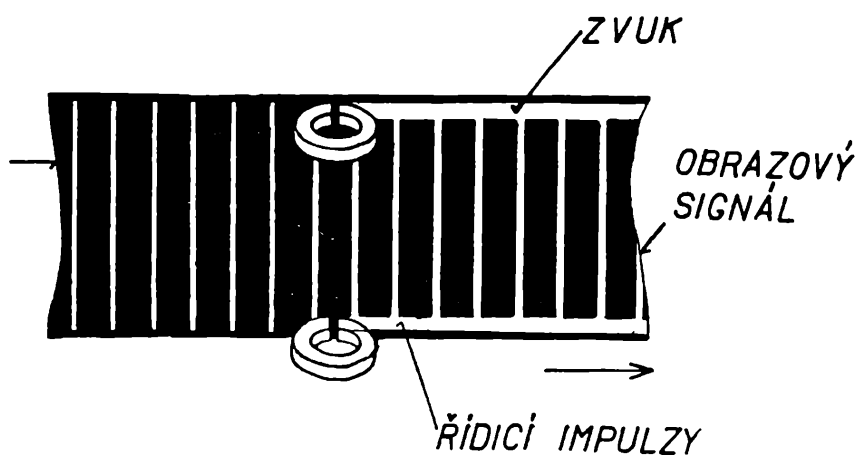
vzniklých vzorkových impulsů informace o obrazovém signálu. Postoupí-li opakovací impuls až na konec zpožďovací linky, přichází na její vstup po uplynutí 0,295 mikrosekund další opakovací impuls a současně se změní polarita obrazového signálu přiváděného k záznamovým hlavám. Kmitočet takto vzniklých vzor-

kových impulsů je 169,5 kHz; je to současně nejvyšší kmitočet, který musí záznamové hlavy zaznamenat.

Reprodukční zařízení, které pracuje zcela analogicky je uvedeno v blokovém schématu na obr. 5. Vzorkový signál, který vzniká reprodukcí magnetického záznamu, se zesiluje, usměrňuje a ve stejném sledu jako při záznamu se připojuje na výstup, kde se vytváří úplný obrazový signál.



Obr. 6. Orientace rotujícího kotouče se záznamovými hlavami a magnetofonového pásu v soustavě Ampex.



Obr. 7. Znázornění příčných drah magnetického záznamu obrazového signálu a podélných drah záznamu zvuku a řídicích impulsů v soustavě Ampex.

Uvedený systém Bing Crosby je pozoruhodný tím, jak příčným záznamem lze při nižší rychlosti posuvu pásu zaznamenat vysoký počet informací. Pro svou elektronickou náročnost se ani tento systém neuplatnil v televizním provozu. Má však jisté společné znaky s moderní soustavou záznamu televizních signálů systémem Ampex.

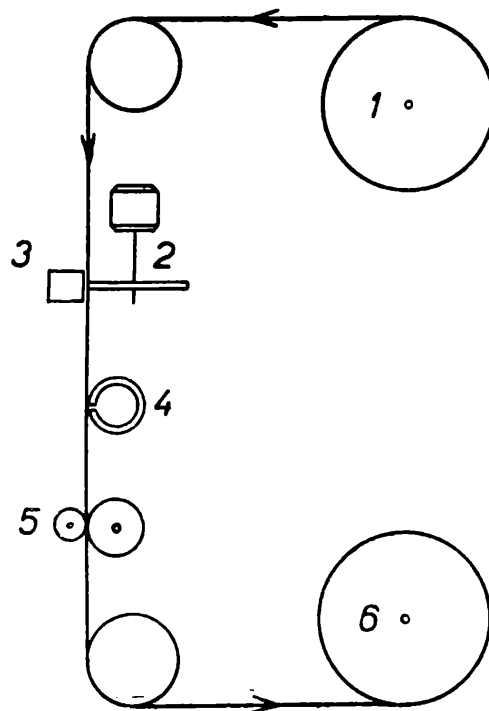
V soustavě Ampex se provádí záznam televizního signálu též v příčném směru na magnetofonový pás jako u předešlého systému. Záznam je však plynulý a pro-

vádějí jej čtyři záznamové hlavy rovnoměrně rozložené po obvodu otáčejícího se kotouče, jehož osa rotace je shodná se směrem posuvu pásu (obr. 6).

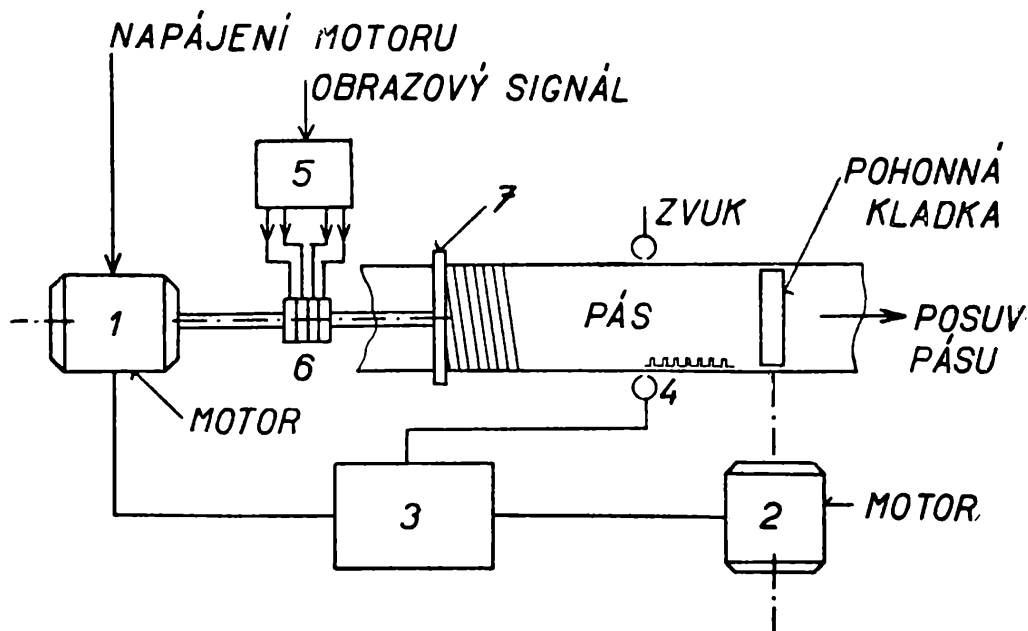
Při záznamu (a stejně i při reprodukci) je rychlost otáčení kotouče taková, aby každá ze čtyř záznamových hlav vytvořila na pásu jednu řádku příčného magnetického záznamu, jak znázorňuje obr. 7. Záznam zvukového signálu a speciálních řídicích impulsů se provádí na okraji pásu.

Je samozřejmé, že rychlost posuvu pásu a rychlost otáčení kotouče s hlavami je pevně navzájem vázána. U původní soustavy se otáčí kotouč rychlostí 240 ot/s a rychlost posuvu pásu je 38 cm/s. Za těchto poměrů je skutečná záznamová rychlost, kterou se pohybují záznamové hlavy při styku s pásem 38 m/s, což je výhodné jak z hlediska výroby záznamových hlav, tak i z hlediska množství zaznamenaných informací.

Obr. 8 znázorňuje transport pásu v soustavě Ampex. Cívka 1, ze které se pás odvíjí, pojme zásobu na 65 minut televizního pořadu. Pás postupuje kolem rotujícího kotouče se záznamovými hlavami 2, na který jej přitlačuje podložka 3, aby



Obr. 8. Transport pásu v soustavě Ampex.



Obr. 9. Blokové schéma záznamového zařízení Ampex.

dobře přilehl. Dále prochází přes záznamové hlavy zvuku a řídicích impulsů 4 a přes pohonnou kladku 5 se navíjí na druhou cívku 6.

Záznamová soustava Ampex obsahuje také dosti složitou elektronickou část,

jejímž úkolem je za prvé udržovat přesný vztah mezi otáčkami motoru 1 (obr. 9), který otáčí kotoučem s hlavami a otáčkami motoru 2, který pás posunuje a za druhé rozdělit obrazový signál do jednotlivých záznamových hlav a zaznamenat jej v plné kvalitě.

Přesný vztah mezi otáčkami obou motorů udržují vyrovnávací obvody 3. Zde se vyrábějí též řídicí impulsy, které na okraj pásu zaznamenává hlava 4. Význam řídicích impulsů se projeví při reprodukci, kdy se z pásu snímají a jejich prostřednictvím se udržuje správná rychlost posuvu magnetofonového pásu.

Televizní obrazový signál se před záznamem zpracovává ve speciálním záznamovém zesilovači 5. Zde se též rozděluje do jednotlivých záznamových hlav 7, kam přichází přes komutátor 6.

Při reprodukci probíhá tento proces opačně: Rotační snímací hlavy probíhají po řádkách magnetického záznamu a vytvářejí jedna po druhé při styku s pásem obrazový signál. Ten se ve směšovacím zesilovači upraví v jeden televizní obrazový signál, schopný reprodukce.

Soustava Ampex je jistě pozoruhodným řešením záznamu televizních signálů na magnetofonový pás. Že je i řešením schopným praktického provozu, to do svědčuje její zavádění do některých zahraničních televizních studií.

Antonín Valenta, studující VUT, Brno:

Magnetický záznam zvuku

(Dokončení)

Existuje dvojí způsob skládání nízkého a vysokého kmitočtu. Jednak tzv. *modulace*, kterou lze definovat jako obecné změny v charakteru vf. kmitů, jež probíhají s mnohem pomalejším kmitočtem *nf* (viz obr. 2).

Druhý způsob je *překládání* neboli *superpozice*. Zde je třeba zdůraznit, že superpozice dvou rozdílných kmitočtů vzniká pouze v *lineárních obvodech*⁷⁾, poněvadž impedance procházejícím proudem se nemění a vůči každému kmitočtu se chová tak, jako by na něj jiné kmitočty nepůsobily.

Ukázkou časového rozvinutí superpozice dvou rozdílných kmitočtů je obr. 2.

Rozdíl mezi oběma druhy skládání dvou velmi se lišících kmitočtů nespočívá jen v jejich grafickém vyjádření, ale i v jejich elektrickém působení.

Kdybychom reprodukovali vf. kmitočet modulovaný nf. kmitočtem reprodukční soustavou, která by vf. kmitočet potlačila, zůstal by potlačen i nf. kmitočet.

Tentýž pokus provedený se superponovanými kmitočty by nám ukázal, že ačkoli by vf. kmitočet zůstal potlačen, nf. kmitočet by byl reprodukován.

U magnetického záznamu zvuku s vf. předmagnetizací se užívá superpozice vf. kmitočtu nf. kmitočtem.

Frekvence předmagnetizačního proudu závisí do určité míry na rychlosti posuvu záznamového materiálu. Pohybuje se od 30 do 80 kHz. Mazací proud činí

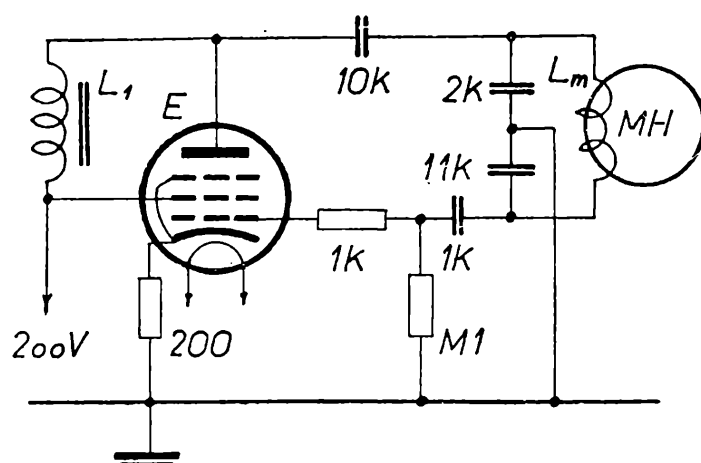
⁷⁾ Impedance lineárních obvodů se řídí Ohmovým zákonem. Odpor lineárního obvodu je stálý a nezávisí na velikosti elektronické síly působící v obvodu.

asi 100 až 150 mA a je proto nutno pro oscilátor volit výkonnou pentodu. Hodnoty předmagnetizačního proudu jsou až desetkrát menší. Frekvenci oscilátoru určíme takto:

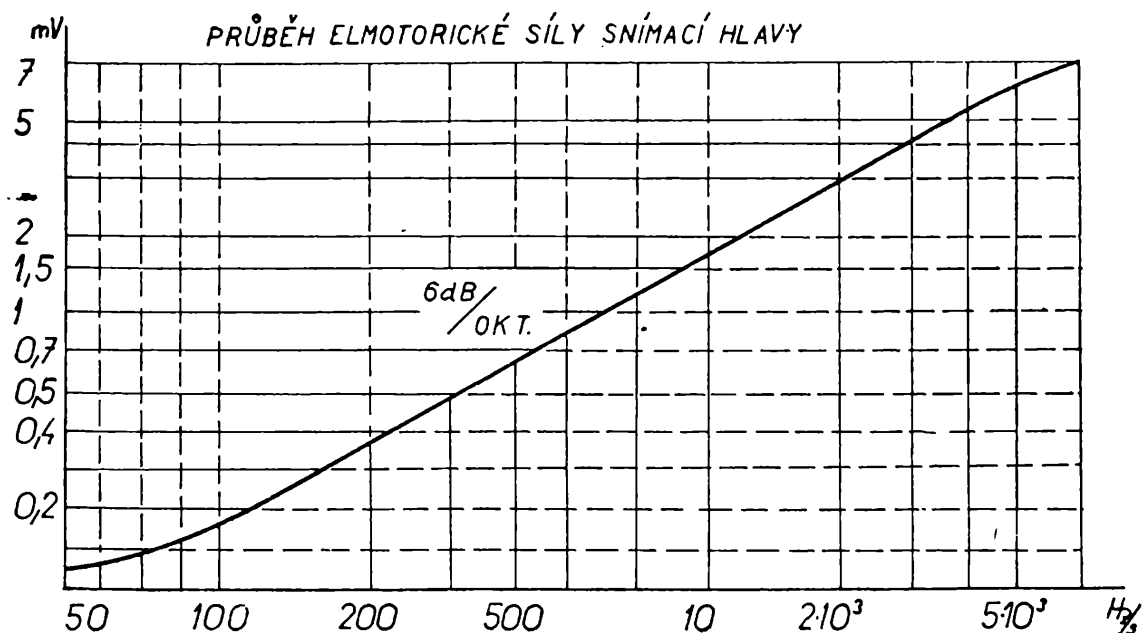
Oscilace (kmitání) vznikají pouze v rezonančním obvodu, tj. v obvodu, kde reaktance je nulová. Tedy:

$$\frac{1}{\omega C} - L\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad [\text{Hz}; \text{H}; \text{F}],$$

což je vztah pro kmitočet nejvíce užívaného oscilátoru LC . Na obrázku 4 je často se vyskytující zapojení oscilátoru, kde mazací hlava tvoří přímo indukčnost kmitavého obvodu.



Obr. 4



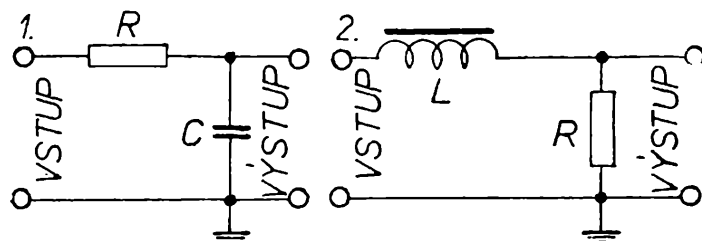
Obr. 5

Hlavní konstrukční zásadou u těchto oscilátorů je požadavek, aby vf. signál neobsahoval sudé harmonické, které vytvářejí stejnosměrnou složku v magnetizačním proudu. Tato nepříznivě působí na poměr mezi hladinou šumu a hladinou signálu, zvyšuje zbytkovou remanenci a tím snižuje záznamovou pružnost hlavy.

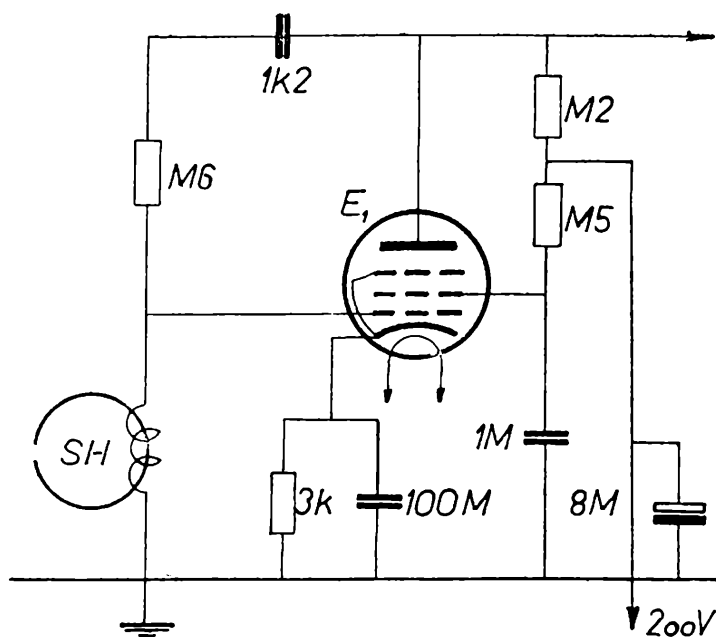
P o z n á m k a. Jak již bylo výše uvedeno, superpozice dvou kmitočtů vzniká jen v lineárním obvodu. Je konstrukčně obtížným problémem sestavit obvod, jehož charakter by byl vysloveně lineární. Proto také ve většině lineárních obvodů vzniká při superpozici nízkého a vysokého kmitočtu i jejich částečná modulace, obecně nazývaná *intermodulace* (*kombinační tóny*).

Je nasnadě, že tento děj rušivě zasahuje do celkové činnosti zařízení a zkreslení, které z něho bezprostředně plyne, se nazývá *zkreslením intermodulačním*.

Zkreslení harmonické vzniká opět nelineárností užitě soustavy. Jeho původ je ve vytváření výstupních harmonických kmitočtů, které ve vstupním signálu nebyly obsaženy. Charakter zkreslení se mění podle toho, která harmonická se na něm podílí. Obě zkreslení intermodulační i harmonické se souhrnně nazývají *zkreslením nelineárním*, obecně definované jako zkreslení kmitů procházejících nelineárním čtyřpólem.



Obr. 6



Obr. 7

Snímací zesilovač

Napětí, které vzniká na svorkách snímací hlavy, je jednak velmi malé a též i kmitočtově závislé. Proto i snímací zesilovač má své charakteristické vlastnosti, které by se daly shrnout takto: velké zesílení⁸⁾, vysoká vstupní citlivost (v poměru k hladině šumu) a korigovaná kmitočtová charakteristika.

⁸⁾ Zesílení je číslo udávající kolikrát je střídavé napětí v anodovém obvodu větší než napětí přiváděné na mřížku.

Na obrázku 5 je křivka znázorňující závislost napětí snímací hlavy na kmitočtu snímaného proudu. Je-li záznamový proud až do 10 kHz konstantní, roste indukované napětí snímací hlavy o 6 dB na oktávu. Chceme-li získat výstupní napětí ze zesilovače kmitočtově nezávislé, musí být útlumová charakteristika snímacího zesilovače zrcadlovým obrazem křivky, znázorňující indukované napětí snímací charakteristiky.

Jinými slovy musíme provést tzv. *integraci elektromotorické síly*. Integrační obvody v nejjednodušší formě jsou dva. Za použití odporu a kapacity, nebo za použití odporu a indukčnosti (viz obr. 6). Jak se toho prakticky využívá, ukazuje schéma (obr. 7) snímacího zesilovače. Hodnoty odporu 0,6 MΩ a kapacity 1200 pF tvoří známý integrační obvod, zatěžovací odpor nf. pentody EF12 je 0,2 MΩ, hodnota odporu pro předpětí v katodové větvi je 3,2 kΩ. Kondenzátory 100, 8 a 1 μF jsou filtrační.

Má-li ohmický člen hodnotu $R \Omega$, pak platí

$$I = \frac{U_a = U_g}{R} \quad [A; V; \Omega],$$

kde U_a a U_g jsou napětí na anodě a řídicí mřížce elektronky. Dosadíme-li za anodové napětí ze známého vztahu pro zesílení $z = \frac{U_a}{U_g}$, pak

$$I = \frac{U_a}{R} \cdot \frac{1}{1 + z}$$

Je tedy U_g zatíženo jakýmsi odporem $\frac{R}{1 + z}$. Poněvadž je hodnota zesílení v prvním stupni značně veliká, lze jedničku zanedbat. Volíme-li pak transformátorový vstup, připadá odpor $\frac{R}{z}$ na sekundární vinutí.

III. Magnetofonové hlavy

Konstrukční podstata magnetofonové hlavy spočívá v jádru vyrobeném z magneticky měkkého železa (pro omezení zbytkové remanence), na kterém je navinuta cívka. Indukčnost cívky je závislá na funkci hlavy. Největší indukčnost (až 70 mH) mají hlavy snímací, pak záznamové (asi 7 mH) a nakonec mazací (2 mH). U všech hlav je jádro přerušeno minimálně jednou šterbinou. U nahrávacích hlav je kromě pracovní šterbiny i tzv. *zadní mezera*, která jednak linearizuje *hysterezní smyčku* (viz níže), jednak chrání jádro proti přesycení. Vlivem pracovní šterbiny vytvářejí siločáry záznamové hlavy magnetického pole i mimo prostor jádra a mohou tak zmagnetizovat rovnoměrně se pohybující záznamový materiál.

Výpočet magnetofonových hlav

Elektromagnetický obvod charakterizují následující veličiny. U všech jsou jednotky vyjádřeny v soustavě MKSA.

Magnetomotorická síla F je definována jako součin proudu a počtu závitů:

$$F = NI,$$

kde F = magnetomotorická síla (Az = amperzávit), N = počet závitů, I = intenzita proudu (A.) (Podle nových norem se značí magnetomotorická síla $\mathcal{E}$).

Intenzita magnetického pole H je magnetomotorická síla na jednotku délky

$$H = \frac{F}{l},$$

kde H = intenzita magnetického pole (Az/m), F = magnetomotorická síla (Az) a l = jednotková délka (m).

Magnetický tok Φ je množství silových trubic procházejících jednotkovou plochou postavenou kolmo na jejich směr

$$\Phi = B \cdot S, \quad (7)$$

kde Φ = magnetický tok (Wb = weber), B = magnetická indukce (T = tesla) a S = jednotková plocha (m²).

Rovnice (7) platí za předpokladu, že magnetická indukce je konstantní. Takové pole se nazývá *homogenní*.

Magnetická indukce B jest určena vztahem

$$B = \mu H,$$

kde B = magnetická indukce (T), μ = permeabilita (H/m) a H = intenzita magnetického pole (Az/m).

Magnetický odpor Rm (reluktance)

$$Rm = \frac{F}{\Phi},$$

kde Rm = magnetický odpor (Az/Wb), Φ = magnetický tok (Wb) a F = magnetomotorická síla (Az).

Permeabilita μ nám udává, kolikrát je magnetická indukce v určitém materiálu větší než intenzita vnějšího magnetujícího pole. Velká magnetická permeabilita feromagnetických látek se vysvětluje vznikem zvlášť silné magnetické polarizace⁹⁾.

⁹⁾ *Magnetickou polarizací* rozumíme orientaci jednotlivých molekulárních magnetů dané látky do určitého směru účinkem vnějšího magnetujícího pole. Tím se tyto elementární magnetické momenty, tvořené molekulárními proudy (spiny) sčítají s původním magnetizačním polem a vytvářejí tak v daném materiálu nové magnetické pole zvětšené o hodnotu polarizace.

Pro praxi se zavádí relativní permeabilita

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o},$$

kde μ_o je permeabilita vakua.

Obdobou Ohmova zákona je pro magnetismus *Hopkinsův zákon*, který zní: Magnetomotorická síla je rovna součinu reluktance a magnetického toku.

$$F = Rm \cdot \Phi \quad [Az; Az/Wb; Wb] . \quad (8)$$

Z výše definovaných vztahů plyne

$$B = \mu \cdot H, \Phi = S \cdot B = S \cdot \mu \cdot H,$$

ale $H = \frac{F}{l}$ a po dosazení za H do předchozího vztahu je

$$\Phi = S \cdot \mu \cdot \frac{F}{l}$$

$$\text{Ze vzorce(8): } Rm = \frac{F}{\Phi} = \frac{F \cdot l}{S \mu F} = \frac{l}{\mu \cdot S} = \frac{l}{\mu_o \cdot \mu_r \cdot S} .$$

$$Rm = \frac{l}{\mu_o \cdot \mu_r S},$$

kde l = délka střední silové čáry (m), S = plocha jádra dané indukčnosti v obvodu (m²).

Pro indukčnost hlavy platí vztah

$$L = \frac{N^2}{Rm} \quad [H; Az/Wb] .$$

Reluktance Rm je dána součtem odporu jádra a odporu mezery, jež obojí určíme z výše uvedeného vztahu s ohledem na činitele rozptylu u pracovní štěrby.

Pro snímací hlavu je reluktance určena vztahem

$$Rm = \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{l_j}{\mu_p \cdot S_{jz}} + \frac{l_p}{\varrho_p \cdot S_p} \right) \quad [Az/Wb; H/m; m; m^2] ,$$

kde jsou: l_j délka střední silové čáry v jádře (m), l_p šířka štěrby (m), μ_p počáteční permeabilita, S_{jz} průřez železa v jádře (m²), S_p průřez jádra v místě pracovní štěrby (m²), ϱ_p činitel rozptylu, který udává, kolikrát se ve štěrbině zvětší průřez magnetického toku proti průřezu bez rozptylu.

$$\varrho = 1 + \alpha l_v \frac{a + b}{ab},$$

kde jsou l_v šířka štěrby (m), a, b rozměry průřezu jádra v místě štěrby (m) α činitel daný tvarem štěrby.

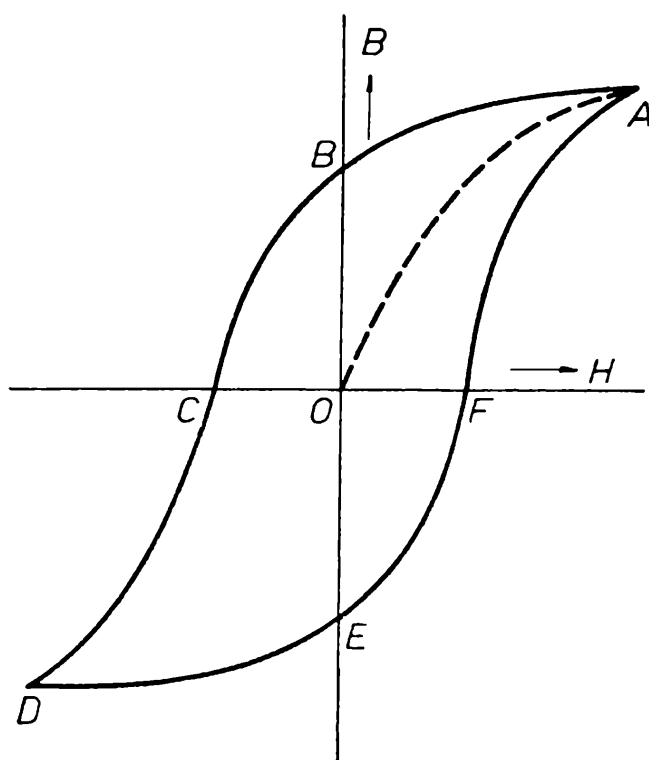
U záznamové a mazací hlavy lze zanedbat odpor jádra proti odporu mezer. Reluktance pro záznamovou hlavu je

$$R_m = \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{l_p}{\varrho_p \cdot S_p} + \frac{l_z}{\varrho_z \cdot S_j} \right) \quad [Az/Wb; H/m; m; m^2]$$

a pro mazací hlavu

$$R_m = \frac{1}{\mu_o} \frac{l_p}{\sigma_p \cdot S_p},$$

kde v prvním vztahu S_j , l_z a ϱ_z značí postupně průřez, šířku a činitel rozptylu zadní mezery u záznamové hlavy. Ostatní symbolika je stejná jako pro snímací hlavu.



Obr. 8

V závěru je nutno ještě se zmínit o současných posuvných rychlostech a výhodách magnetického záznamu zvuku. Obecně se řídí posuvná rychlost páska (udává se v cm/s) požadavkem na šířku záznamového spektra, kvalitou záznamové soustavy a užitým záznamovým materiálem. V Evropě se nejvíce ujala rychlost 4,75 cm/s a její násobky $2^n \cdot 4,75$ cm/s ($n = 0, 1, 2, \dots$). Pro studijní zařízení jsou příznačné velmi značné rychlosti až 76 cm/s. Pro technickou a amatérskou praxi mají však největší význam rychlosti 19 a 9,5 cm/s při průměrné šířce pásma 100 Hz — 10 kHz. Současná vývojová tendence však spěje k pomaloběžným nahrávačům, kde dochází uplatnění i dosud opomíjená rychlost 4,75 cm/s.

Jednou z největších výhod magnetického záznamu je možnost kdykoliv smazat starý záznam a nahrát na pásek záznam nový. U záznamu s vf. přemagnetováním

se mazání provádí střídavým magnetickým polem. Každá částice záznamového materiálu se průchodem přes štěrbinu mazací hlavy magnetuje od libovolné remanentní indukce B_r po zvětšujících se hysterzních křivkách až k nasycení a potom se po zmenšujících hysterezních křivkách odmagnetuje úplně na nulovou hodnotu. Další výhodou je možnost snadné úpravy programu (sestříhání) a i ta skutečnost, že se jakost zvuku i častým opakovaným přehráváním prakticky nemění.

P o z n á m k a. U feromagnetických látek lze pozorovat, že jejich magnetická indukce závisí nejen na současné, ale i na předchozí intenzitě pole a že zůstává poněkud pozadu za intenzitou pole. Tento jev nazýváme *magnetickou hysterezi* (sledujme obr. 8). Magnetujeme-li železo (nebo jiný feromagnetický materiál) původně zcela nemagnetické, stoupá indukce podle křivky OA (magnetizační křivka) až do stavu nasycení.

Zmenšujeme-li intenzitu magnetického pole, klesá magnetická indukce pomaleji než vzrůstala. V bodě B již není pole, avšak zůstává indukce, tzv. *zbytkový magnetismus* (remance). Abychom tento zbytkový magnetismus odstranili, musíme použít podle obráceného smyslu a sílu OC. Železo se brání odmagnetování *koercitivní silou*. Magnetujeme-li dále v obráceném smyslu, probíhá indukce podle křivky CD opět do nasyceného stavu, avšak obrácené polaritě. Z nasyceného stavu D přejdeme použitím vhodných polí zpět do nasyceného stavu A. Křivka ABCDEFA se pak nazývá hysterezní smyčkou.

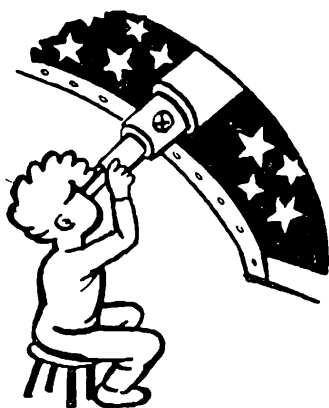
Literatura.

A. Rambousek: Amatérské páskové nahrávače.

V. G. Koroljukov: Magnitnaja zápis zvuka.

W. Albach: Zur Wirkung der Hochfrequenz-Vormagnetisierung bei Magnettonverfahren.

O. S. Schmidbauer: Ferrite als Kernmaterial für Magnettonköpfe.



astronomie

Jaroslav Rajchl, hvězdárna Ondřejov:

Některé fyzikální děje probíhající při průletu meteorického tělíska zemskou atmosférou

Meteorická tělíska se pohybují po rozličných drahách v meziplanetárním prostoru. A tak čas od času se stane, že některé z nich se setká se Zemí. Málokteré je tak veliké, že alespoň jeho část dopadne na zemský povrch. Pro většinu z nich znamená setkání se Zemí pouze setkání s její atmosférou. Co se při takovém setkání děje? Zodpovědět co nejpřesněji tuto otázku je úkolem tzv. fyzikální teorie meteorů.

Podle nejmodernějších představ a výsledků této teorie setkání meteorického tělíska s atmosférou Země se projeví zprvu jako nárazy jednotlivých molekul ovzduší na čelní povrch tělíska. Při nárazu předávají jednotlivé molekuly meteorickému tělísku určitý impuls ve směru opačném, než meteorické tělesko letí, a energii. Předávání impulsu vyvolává brzdění pohybu meteorického tělíska a předávání energie jeho zahřívání.

Abychom si odvodili základní rovnice, vystihující tyto procesy, představme si, že skutečné tělesko rozřízneme rovinou kolmou ke směru jeho pohybu. Plochu tohoto řezu označíme S a nazýváme ji *plochou čelního průřezu*. Je-li rychlost tělíska v a hustota vzduchu ρ , pak takové tělesko potká za čas dt (čti diferenciál t , což je nekonečně malý přírůstek veličiny t ; podobně v dalším) množství vzduchu hmoty

$$dM_a = S \rho v \cdot dt^1).$$

¹⁾ $\frac{dM_a}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ jsou symboly pro limity poměrů změny množství hmoty vzduchu, rychlosti, resp. hmoty tělesa podle změny času (tzv. derivace).

Této hmotě vzduchu přísluší vůči meteorickému tělísku pohybujícímu se rychlostí v hybnost daná vztahem

$$dM_a v = S \rho v^2 \cdot dt$$

a množství pohybové energie

$$\frac{dM_a v^2}{2} = \frac{1}{2} S \rho v^3 \cdot dt.$$

Kdyby tyto molekuly narážely kolmo na rovinu řezu, pak by za čas dt byl tok energie $W_0 = \frac{\rho v^2}{2}$ a tlak působící na tělísko proti jeho pohybu $P_0 = \rho v^2$. Ve skutečnosti však narážejí na čelní povrch meteorického tělíska a tedy tlak bude $P = \Gamma P_0$ a tok energie $W = \lambda W_0$, kde Γ je tzv. koeficient odporu a λ koeficient předání tepla. Chceme-li získat sílu a přítok energie na celé meteorické tělísko, musíme výrazy násobit plochou čelního průřezu S a dostaneme

$$F = PS = - \Gamma S \rho v^2$$

$$WS = \lambda \frac{S \rho v^3}{2}.$$

Síla F působí proti pohybu tělíska hmoty M rychlostí v (proto znaménko minus), takže pohybová rovnice zní

$$M \frac{dv}{dt} = - \Gamma S \rho v^2 \quad ^1), \quad (1)$$

což je jedna ze základních rovnic fyziky meteorů, tzv. *rovnice brzdění*.

Předaná energie působí zahřívání a posléze i vypařování, tedy ztrátu hmoty meteorického tělíska (znaménko minus). Druhou základní rovnicí je tedy tzv. *rovnice vypařování*:

$$\frac{dM}{dt} = - \lambda \frac{S \rho v^3}{2Q} \quad ^1), \quad (2)$$

kde Q je energie potřebná k zahřátí a vypaření 1 g hmoty.

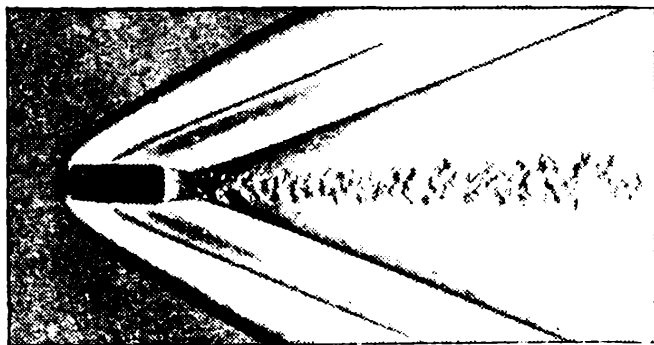
Meteorické tělísko však neztrácí hmotu jenom vypařováním. Už při prvních jednotlivých nárazech molekul ve vysokých zředěných vrstvách atmosféry dochází k ohřátí velmi malé části povrchu tělíska a tím k úniku několika molekul. Tato forma ztráty hmoty je však oproti vypařování nepatrná.

Ze vztahů (1) a (2) vidíme, že brzdění a prohřívání závisí podstatně na S a M , tedy na rozměrech tělíska. Je-li průměr tělíska několik milimetrů i více, prohřívá se pouze tenká povrchová vrstva. Nejvyšší, poměrně velmi zředěné vrstvy ovzduší ještě málo brzdí a prohřívají meteorické tělísko. Teplota povrchu tělesa však roste s pronikáním do hlubších hustších částí atmosféry, až ve výši kolem 100 km nad Zemí dosáhne hodnoty 2000 až 3000 °K. Tehdy nastává intenzivní vypařování a meteorické tělísko začne svítit - objeví se na obloze meteor.

Tělíska menší než 1 mm se prohřívají prakticky celá. Čím je tělísko menší, tím připadá menší hmota na jednotku plochy čelního průřezu a tím je tedy i podle vztahu (1) větší zpomalení. Velmi malá tělíska jsou tak zabrzděna už ve výškách 100 až 140 km ještě dříve, než může nastati intenzivní vypařování. Ta tedy ve formě svítících meteorů vůbec neuvidíme.

Jakmile nastane intenzivní vypařování, začne působit u větších tělísek proces, brzdící toto vypařování. Je to tzv. stínění. Působí je molekuly vypařené z meteorického tělíska tím, že jejich část setrvává před čelním povrchem tělíska a tak částečně omezuje možnost dalších přímých nárazů molekul ovzduší a tím předání tepla a pokles hmoty tělíska. Toto stínění je silnější u větších tělísek, v menších výškách nad Zemí, kde je větší hustota vzduchu, a při větší rychlosti. Též je stínění silnější u kamenných než u železných meteorických tělísek.

Velkou úlohu při vypařování hraje rychlost meteorického tělíska. Může nabývat hodnot od 15 do 70 km/s. Jedná se tedy o rychlosti 3600krát vyšší než u běžných dopravních prostředků. Čím je rychlost vyšší, tím větší energii získá meteorické tělísko srážkami s molekulami ovzduší a tím je vypařování mohutnější. Při velikých rychlostech se téměř všechna hmota vypaří dříve, než nastane citelný pokles rychlosti. Naproti tomu u meteorických tělísek s malými rychlostmi je vypařování pomalejší a postupný pokles rychlosti způsobený brzděním už zastaví další vypařování i když tělísko ztratilo vypařením poměrně málo hmoty. U rychlých meteorů tedy dochází k zastavení vypařování a tím k pohasnutí meteoru jak ztrátou rychlosti, tak úplným vypařením celého tělíska, zatímco u pomalých pouze ztrátou rychlosti. Malý zbytek hmoty původního tělíska pak volným pádem dopadá na Zemi ve formě tzv. *meteorického prachu*.



Obr. 1

Meteorická tělíska velikosti 10 cm i více jsou silně stíněna jak díky své velikosti, tak proniknutím do hustších částí atmosféry, takže z jejich původní hmoty zbude ještě více. Tento zbytek pak dopadá ve formě meteoritů na zemský povrch.

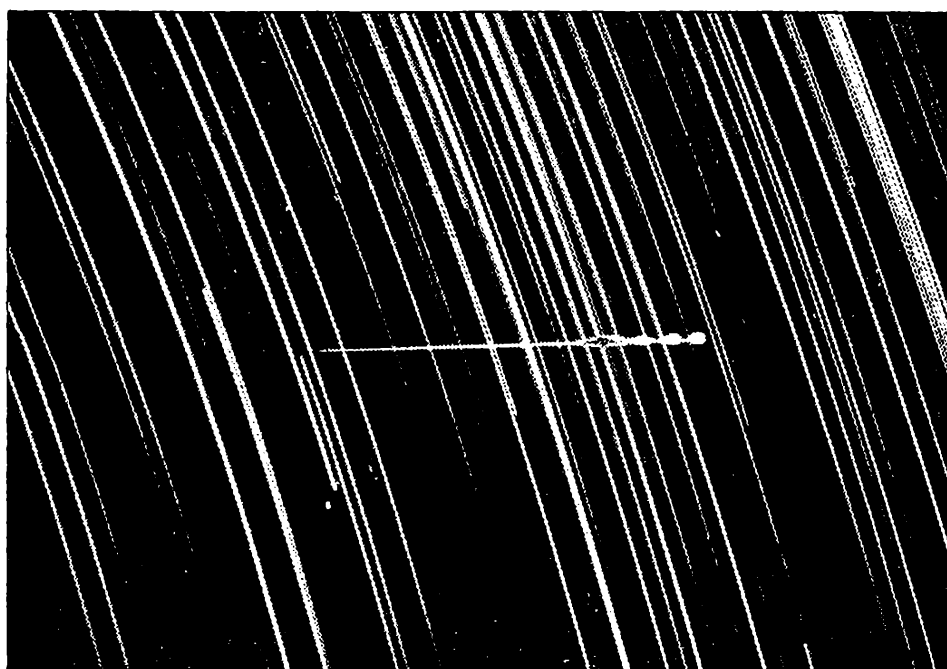
Čím je tedy větší původní hmota tělíska, tím hlouběji do atmosféry pronikne než se zabrzdí, nebo úplně vypaří a pohasne.

V malých výškách nad Zemí je však hustota vzduchu značná, a protože se i ty nejpomalejší meteory pohybují nadzvukovými rychlostmi, vzniká tzv. *rázová vlna* (obr. 1). Podobně, jako na vodní hladině před lodí, tak ve vzduchu se před meteorickým tělískem utvoří zhuštění, které letící tělísko „hrne“ před sebou. Molekuly vzduchu již nenarážejí bezprostředně na vlastní povrch tělíska, ale na frontu této rázové vlny, v níž vlivem silného stlačení vzduchu vzniká vysoká teplota. Odtud se pak teprve teplo přenáší na vlastní tělísko. Ovšem způsob, jakým se to děje je dnes ještě nejasný; nevíme přesně, kolik tepla se na tělísko přenese. Zde již fyzikální teorie meteorů přechází do oblasti výzkumu jiných

oborů: balistiky a dynamiky plynů, které teprve poměrně nedávno, díky vypuštění sputníků a kosmických raket, začaly též řešiti velmi komplikované problémy přenosu tepla při vzniku rázových vln.

Jak rázová vlna postupuje ovzduším, mění se postupně v akustické vlny. Slyšíme pak jakoby dělové rány, nebo střílení z kulometu, kterým jsou doprovázeny přelety velmi jasných meteorů a které byly slyšitelné např. i při nedávném dopadu příbramského meteorického deště²⁾.

Molekuly, které se vypařují z meteorického tělíska, narážejí při svém pohybu jednak na okolní molekuly vzduchu, jednak vzájemně na sebe. Tak dochází k jejich excitaci, disociaci a ionisaci a meteor svítí. Nesvítí tedy vlastní tělíska, poměrně velmi malých rozměrů, ale jeho nejbližší okolí, tzv. k o m a, tj. oblast, ve které dochází ke srážkám molekul. Tím je tedy umožněno meteor pozorovat a fotografovat. Sloupec ionisovaných atomů, vzniklý přeletem meteoru můžeme



Obr. 2

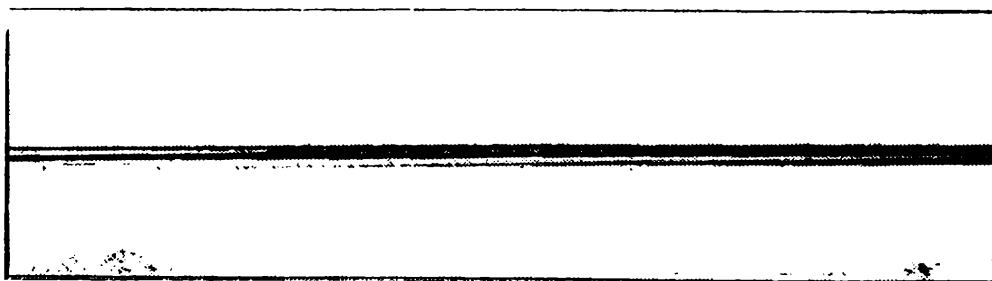
zachytiti radarem. Síla světla meteoru I závisí na kinetické energii vypařených molekul a atomů, tedy platí

$$I = \frac{\tau}{4\pi} \left(- \frac{dM}{dt} \right) \frac{v^2}{2} = + \frac{\tau}{4\pi} \cdot \frac{\lambda}{4Q} S_{\rho} v^5. \quad (3)$$

Toto je třetí důležitá rovnice fyzikální teorie meteorů, v níž τ je tzv. koeficient svítivosti, charakterizující množství kinetické energie, jež se promění ve světlo meteoru. Průběh intenzity světla, nebo jasnosti meteoru během letu znázorňujeme tzv. světelnou křivkou. Ideální průběh jasnosti je tento: Meteor začne svítit, jasnost pozvolna stoupá až dosáhne maxima

²⁾ Viz L. Sehnal, Nové československé meteority, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1959/60, č. 6, str. 266.

a prudce klesá až do pohasnutí. Pozorování a fotografie meteorů však ukazují, že tento ideální průběh se vyskytuje pouze u několika málo meteorů. U převážné většiny případů se objevují různé anomálie ve formě náhlých zjasnění, připomínající výbuch (obr. 2). Toto je jen část z řady anomálií, které ukazují, že meteory nesvíí zdaleka tak přesně podle ideální teorie, ale že se během letu atmosférou ještě navíc rozpadají. U slabých meteorů dochází k rozpadu působením aerodynamického tlaku P , který pórovitá, křehká tělíska rozdrobí už při vstupu do atmosféry. U nich pak pozorujeme neobvykle vysoké hodnoty zpomalení. Velmi jasné meteory, často končící i dopadem meteoritů, i když jsou většinou strukturně neobyčejně odolné a pevné, rozštěpí též aerodynamický tlak, který v malých výškách nad Zemí, kde k rozpadu dochází, dosahuje hodnot až 1000 atmosfér. Tak např. připojený obr. 3 ukazuje štěpení velmi jasného meteoru, které způsobilo dopad celé řady meteoritů (meteoritický déšť) 7. dubna 1959 u Příbrami. U takovýchto meteorů bývá často rozpad viditelný i pouhým okem.



Obr. 3

Meteory středních jasností se však rozpadají trochu jiným způsobem. U nich se obvykle nerozpadne celé meteorické tělíska na kousky, ale dochází pouze k výronu velkého množství mikroskopických částecek s povrchu tělíska. Co je příčinou tohoto způsobu rozpadu není dnes ještě zdaleka jasné. Zajímavý však je poznatek, objevený u nás v Československu, že rozpady nepozorujeme u těch tělísek, která dříve, než skončí svoji existenci ve vzdušném obalu Země, přicházejí po své dráze do velké blízkosti Slunce.

Z uvedení alespoň těch nejdůležitějších poznatků tedy vidíme, jak složitý je ve skutečnosti proces, o němž se prostě říká, že „padá hvězda“.

Různé

Doc. dr. Miroslav Menšík, ČVUT, Praha:

Sedmdesát pět let prof. Františka Kadeřávka

Prof. inž. dr. František Kadeřávek, doktor věd, nositel Řádu republiky se narodil v Praze 26. června 1885. S vyznamenáním maturoval r. 1902 na reálce, studoval pak strojní inženýrství na pražské technice a později matematiku spolu

s deskriptivní geometrií na filosofické fakultě tehdejší Karlo-Ferdinandovy university (nynější Karlovy university). Jeho učiteli tam byli slavní čeští geometři a matematici Pelz, Jarolímek, Sobotka a Petr. První svoji vědeckou práci uveřejnil v 21 letech, kdy se též stal asistentem pražské techniky. Hodnosti doktorské dosáhl ve 25 letech, o dva roky později se stal docentem a v r. 1917 profesorem techniky v Praze. Od té doby - s výjimkou okupace - přednášel až do r. 1957 deskriptivní geometrii na Českém vysokém učení technickém, a to na inženýrském stavitelství, architektuře a pozemním stavitelství, lesním inženýrství, akademii výtvarných umění a také na vysoké škole pedagogické.

To je pouze velmi stručný a suchý přehled jeho dosavadního bohatého života, jehož opravdovou náplň nelze však zde krátce zachytit.

Vaše znalosti, mladí čtenáři, nejsou v deskriptivní geometrii dosud takové, abyste mohli již nyní s úspěchem studovat vědecké práce prof. Kadeřávky, jichž je na čtyřicet. Patrně se s nimi setkáte pouze tehdy, budete-li studovat tento obor na vysoké škole. Oprávněně se zeptáte, proč vám tedy o prof. Kadeřávkovi píšeme.

Myslím, že ideální vysokoškolský učitel má dobře naučit svému oboru, vědecky pracovat, vychovávat žáky a získat lásku k svému předmětu. Málokterý z nich právě splňuje tyto požadavky tak vynikajícím způsobem jako prof. Kadeřávek.

Vy se o tom můžete již přesvědčit pouze přečtením některých z jeho knížek. Rozšíříte tím značně jak své odborné, tak všeobecné vzdělání. Tak např. knížku *Geometrie a umění v dobách minulých* (Štenc, Praha 1935) nebo *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk* (ČSAV, Praha 1954) si přečtete jako poutavý román. Ti z vás, kteří mají vztah k umění si se zájmem prostudují příručku pro architekty, malíře a přátele umění pod názvem *Perspektiva* (Štenc, Praha 1922) nebo příručku pro sochaře a architekty *Relief*. Také budoucí medikové najdou něco pro sebe v knížce *Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice* (Přírodovědecké nakl., Praha 1950).

Potom mně asi dáte za pravdu a nebudete se divit, proč prof. Kadeřávek měl vždy u svých posluchačů takový úspěch. Všude tam najdete totiž vzácnou harmonii mezi teoretickou odborností, technickým užitím i srozumitelností a u stavitelských aplikací deskriptivní geometrie se setkáte s vřelým poměrem k umění a k historii. Přistoupil-li by k tomu i přímý poslech přednášek podaných spatra virtuózně po všech stránkách, pak pochopíte, že se i laik nadchne pro zdánlivě tak nezáživný předmět jakým je deskriptivní geometrie a pochopí jeho užitečnost i krásu konstrukcí. Takové právě byly přednášky, které přes třicet let slýchali posluchači technických fakult i budoucí učitelé deskriptivní geometrie a prof. Kadeřávek byl při nich vždy technikem, geometrem, pedagogem i umělcem zároveň.

Ač obor sám svádíval k pěstování teorie ve směru „věda pro vědu“, k čemuž ještě mohla pomáhat vysoká úroveň tzv. pražské školy v deskriptivní geometrii, zůstane u nás navždy spojeno jméno prof. Kadeřávky s praktickým užíváním této disciplíny technickými obory počínaje a uměním i medicínou konče. Tímto

šťastným spojením byl u nás vytvořen předpoklad pro vytvoření nového předmětu, který bychom mohli nazvat technická geometrie.

Pohled prof. Kadeřávka na školu i život vůbec nebyl pohledem úzce zaměřeného odborníka, nýbrž širokým a citlivým náhledem dobrého člověka s polyhistorickými vědomostmi. Že takovým prof. Kadeřávek je, to jsme zjistili již před deseti lety jako jeho posluchači, kdy jsme právě proto hledávali příležitost, abychom si s tímto naším oblíbeným profesorem mohli promluvit. Třeba jen několik vět jím bystře pronesených, dovedlo nám být vzorem diskuse i podkladem našich dalších úvah odborných nebo společenských.

I když jsme si jako studenti tohoto přísného examinátora vážili a vážíme, nebyl nikdy mezi ním a námi onen nepřekonatelný odstup, který někdy bývá i po létech mezi posluchačem a vysokoškolským profesorem. Profesor Kadeřávek totiž vždy radil a pomáhal. Skutky dokazoval co znamená v praxi sociální cítění. Láska k mládeži jej provázela celým životem a byt neměl vlastních dětí, staral se s otcovskou péčí individuálně i v různých institucích o řady studentů, kteří bez jeho vzácné morální i hmotné pomoci by byli mnohdy ztroskotali.

Již za Rakouska byl neohroženým bojovníkem za právo, pravdu i pokrok. Takovým zůstal i za protektorátu, kdy byl pronásledován a zbaven možnosti učení na vysoké škole. Tehdy se stal pilným pracovníkem Studentského zdravotního ústavu, aby alespoň tak mohl konat dobro a rozsévat naději ve vítězství.

Po osvobození se znovu vrací na svoji milovanou techniku, která mu nabídla úřad rektorský a opět přednáší řadu let, aby přípravou oslav 250. výročí založení inženýrských škol v Praze ukončil svoji aktivní učitelskou činnost. Jeho celoživotní práce byla oceněna udělením Řádu republiky.

Neznamená to však, že je nyní prof. Kadeřávek „na odpočinku“, neboť u člověka jeho druhu to ani není možné. Nyní po nedávno přestálé chorobě je již opět v další práci s jemu vlastním optimismem.

Svým osobním příkladem vychoval více než jednu generaci techniků i učitelů deskriptivní geometrie, kterým vždy ukazoval, že cesta přímá je cesta nejkratší a u všech dosáhl toho, co na začátku jsem uvedl jako dosažitelná maximum dobrého učitele. Navíc k tomu získal prof. inž. dr. František Kadeřávek i lásku svých žáků, kteří mu při této příležitosti děkují a současně přejí, aby při dobrém zdraví mohl ještě dlouho spokojeně žít a pracovat, a zbude-li mu čas i odpočívat.

Vám, mladým členům, pak přejeme, abyste i vy měli takové učitele.

Redakční sdělení

Redakční rada děkuje dlouholetému svému členu dr. Karlu Havlíčkovi, docentu Karlovy university, za vynikající činnost v redakční radě Rozhledů matematicko-fyzikálních. Doc. dr. Havlíčkovi, který byl pověřen jiným úkolem, přejeme v jeho další činnosti mnoho úspěchů.

Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu

(Dokončení)

zintensivniti i zintenzivniti
zirkon
zirkonium
zkaliti
zkapalněti
zkapalniti (něco)
zklenutí (vada objektivu),
zkoksovatěti
zkoksovati
zkombinovati
zkoncentrovati
zkondensovati i zkondenzovati
zkonstruovati
zkoordinovati
zkorigovati
zkositi (učinit kosým)
zkrat
zkresliti (podati zkomoleně)
zkrut
zkružovací i skružovací
zkrystalisovati i zkrystalizovati
zkumavka
zkusmo
zladiti (naladiti)
zledovatěti
zledovatiti (zmraziti)
zlogaritmovati
zmagnetisovati i zmagnetizovati
zmagnetovati
zmapovati
zmechanisovati i zmechanizovati
změkčiti
znaménko i znamínko
znásobiti
znásobovati
znečištění i znečištění
zněkolikanásobiti
zneutalisovati i zneutalizovati
znivelisovati i znivelizovati
znivelovati
znízka i z nízka
znormalisovati i znormalizovati
znormovati
zodiak
zóna

zorientovati
zpateronásobiti
zpolarisovati i zpolarizovati
zpolovic, zpolovice
zpomaliti
zprůhledněti
zprůsvitněti
zprůsvitniti (něco)
zpružina i pružina
zpružněti
zpružniti (něco)
způli (napolo)
zrcadlo
zrcátko
zregulovati
zrekonstruovati
zrelativisovati i zrelativizovati
zrezavěti
zrezivěti
zrezovatěti
zrněčko, zrníčko i zrnečko
ztekutiti
ztlumiti
ztotožniti
ztrojnásobiti
zúročitel
zúročiti
zúrokovati
zúžiti
zvážitelný i zvažitelný
zvětšovati
zvířiti
zviřovati
zvnějška, zvnějšku i z vnějšku
zvnitřku i z vnitřku
zvonici (zařízení)
zvonící (kdo nebo co zvoní)
zvukoměřičský
žaluzie
žárovzdorný i žáruvzdorný
želatina
želé
železobeton
žiletka
žiravina

Alois Urban: Trigonometrie

3. doplněné vydání (v NČSAV 2.), 1960, str. 202, obr. v textu 105, brož. Kčs 13,10.

Uplatněním trigonometrie v technické praxi stoupá význam knihy A. Urbana. Seznamuje přístupnou formou se základy trigonometrie. O její důležitosti svědčí skutečnost, že v poměrně krátké době vychází již ve třetím vydání, rozšířené o základy goniometrických rovnic.

Autor vykládá rovinnou trigonometrii v rozsahu, ve kterém je probírána na jedenáctiletých a odborných středních školách. Postupně objasňuje goniometrické funkce obecného úhlu, základní trigonometrické věty pro řešení obecných trojúhelníků, řešení obecných trojúhelníků a nejjednodušší goniometrické rovnice. Po teoretických vývodech uvádí i jejich aplikace a použití v praxi. Text přibližuje velký počet nákresů a překladů.

Knihu uvítají zejména absolventi osmiletých škol, kteří mají zájem na prohloubení svého matematického vzdělání a chtějí dále studovat bez učitele. Pro žáky jedenáctiletých a průmyslových škol je vhodnou doplňkovou příručkou k prohloubení látky probírané ve škole a k přípravě studia na vysokou školu technického směru.

Tímto 10. číslem ukončujeme 38. ročník 1959/60 Rozhledů matematicko-fyzikálních. První číslo dalšího 39. ročníku 1960/61 vyjde počátkem září letošního roku. Doporučujeme všem školám i jednotlivým zájemcům, aby si časopis včas předplatili na příští půlrok (1. až 5. číslo, 10 Kčs) nebo lépe na celý rok (1. až 10. číslo, 20 Kčs), a to u svého poštovního doručovatele nebo přímo u Poštovní novinové služby. Odložíte-li objednávku až na září, může se stát, že nedostanete první číslo Rozhledů, bude-li náklad rozebrán.