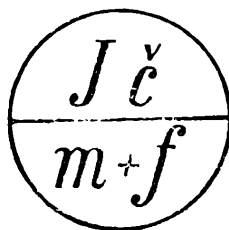


ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER



ROČNÍK 36

1958

*Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury
za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.*

O B S A H

Úvodníky:

Kahuda František: Výňatek z referátu na Uherskobrodských dnech Komenského	337
Mírová výzva Jednoty československých matematiků a fysiků	obálka č. 6
Redakce: Do dalšího ročníku	1
Sedláček Jiří: Sedm ročníků Matematické olympiády	289

Matematika:

Brejcha Josef: O jistém způsobu rektifikace kruhového oblouku	337
Dušek František: Rovnice lomené čáry	49
Horák Stanislav: O tětivovém čtyřúhelníku	199
Horák Stanislav ml.: O harmonické řadě	4
Horák Stanislav ml.: O součtech některých konečných řad	392
Hradecký František: Konstrukce trojúhelníků, mezi jejichž určovacími prvky jsou středky a poloměry kružnic opsaných a vepsaných	433
Chudý Jaroslav: O jedné metodě numerického řešení algebraických rovnic	97
Chudý Jaroslav: Eliminační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic	145, 195
Kraemer Emil: O analytické geometrii na přímce	193, 241
Kučera Vladimír: O řešení cyklických rovnic	294
Kůst Jiří: Parketová úloha sférické a rovinné geometrie	244
Langr Josef: Z geometrie tětivového čtyřúhelníka	202
Langr Josef: Věta o trojúhelníku	290
Lánský Miloš: O řešení jistých rovnic s absolutními hodnotami	153
Musil Stanislav: Poznámka k řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty	299
Setzer Ota: O poměrech funkcí úhlů ostroúhlého trojúhelníka	1
Tondl Aleš: O jedné úloze z geometrie kružnic	255
Valešová Marie: Některé zvláštní typy algebraických rovnic 3. a 4. stupně	385

Deskriptivní geometrie a rýsování:

Drs Ladislav: Rovnoběžný průmět rovinné křivky	303
Fehér Ján: Poznámka k paralelnému osvetleniu guľovej plochy v ortogónálnej axo- nometrii	400
Filip Jozef: Pravouhlý priemet uhla	106, 161
Harant František: O konstrukcích bodů kuželoseček bez užití kružítka	19
Havel Václav: Rovinný řez pravoúhlého trojhranu	17
Havel Václav: O jedné větě Pappově	54
Havlíček Karel: Užití přímkových ploch ve stavitelství	9
Havlíček Karel: O tečnách a normálách křivek	102
Havlíček Karel: O křivosti čar	158
Havlíček Karel: Šroubovice	257
Horák Stanislav: Meusnierova věta	264
Kubálková Svatava: Přibližné konstrukce	346, 395
Lamparter Vilém: Dandelinova věta a jednotná definice kuželoseček	444
Redakce: Soutěž	443

Fyzika:

Bádal Jiří: Principy radiolokace	350
Burjan Václav: Plasma	359
Cochlar Jiří: Elektronky pro ultrakrátké vlny	76
Heisenberg W.: Poslední tajnosti elementárních částic (přel. Inž. Müller)	27
Kašpar Emil: Skládání kmitů kolmých směrů	31
Kašpar Emil: Interference vlnění	36, 61
Kašpar Emil: Stojaté vlnění	222
Kroupa František: Plastická deformace a poruchy v krystalech	180, 214
Kubičková Karla: Nukleární emulze a jejich použití	311

Lepil Oldřich: Planckova kvantová teorie	317
Machalický Jiří: Teorie dimensí a modelování ve fyzice	170
Machalický Jiří: Avogadrovo číslo a metody jeho určování	363, 406
Malát V., Mašek K.: Fyzikální základy emise elektronů a kovů	457
Pazderák Jiří: O televizi	401, 450
Pejm Karel: 400 let balistiky	412, 453
Růzha Zdeněk: Řízené balistické střely	39
Růzha Zdeněk: Několik slov o raketách	39
Říman Evžen: Elektrické okruhy	114, 165
Šindelář Václav: Výtok ideální kapaliny	56
Šindelář Václav: Znáte všichni nonius?	219
Šindelář Václav: Okamžitá rychlost a místní tlak	267
Šindelář Václav: Užitečná analogie	270
Šindelář Václav: Příklad mechanického zrychlovače těles	306
Šindelář Václav: Skupenské přeměny a kinetická teorie tepla	355
Šindelář Václav: Určování malých rozdílů hustot pevných těles vznášecí metodou	446
Urgošik Bohuš: Hmotové spektrografie	69
Zikmunda Otakar: O předpovídání počasí	272

Astronomie:

Hruška Antonín: Co víme o kometách	128
Kleczek Josip: Hvězdy	86
Kleczek Josip: Jasnost, barva a spektrum hvězd	123
Kleczek Josip: Teplota hvězd	186
Lepil Oldřich: Halleyova kometa	280
Rajchl Jaroslav: Spektra komet	277
Vanýsek Vladimír: Umělé družice Země	227

Matematické zábavy:

Buchta Oldřich: Hra „na patnáct“	43
Buchta Oldřich: O celých kořenech kvadratické rovnice	283
Kleiner Josef: Hádanka	475
Malý Vladimír: Sportovní sázky očima matematika	205, 253
Setzer Ota: O vlastnostech násobků 239	238
Setzer Ota: O násobcích čísla 41	325
Šindelář Václav: Rozluštění hádanek z č. 6, roč. 1957	obálka č. 4
Tondl Aleš: Magické čtverce	326, 341

Recenze:

Havlíček Karel: Hruša, Kraemer, Sedláček, Vyšín, Zelinka, Přehled elementární matematiky	143
Chudý Jaroslav: A. J. Markušovič, Komplexní čísla v technické praxi	94
J. S.: Hruša-Kraemer-Sedláček-Vyšín-Zelinka, Přehled elementární matematiky	432
Krbíla J.: J. P. Natanson: Sčítanie nekonečne malých veličín	142
Menšík Miroslav: Metoděj Ostrý, Fyzika v úlohách	384
M. M.: Josef Fuka, Rozkladný transformátor ve školní praxi	431
M. M.: Miloš Jelínek a Vlastimil Macháček, Matematika pro kursy z učiva osmileté střední školy	432
Palaj Cyril: Medek-Mišík-Šalát: Prehľad stredoškolskej matematiky	192
Sehnal Ladislav: Astronomická tabulka 1958	330
Setzer Ota: Zdeněk Vančura, Analytická metoda v geometrii	191

Různé:

Baláž Peter: Ernest Rutherford - život a dielo	92
Janál Rudolf: Přímý důkaz existence neutrina	141
Janál Rudolf: Atomová baterie, přímý převod atomové energie na energii elektrickou	335
Janovič Josef: Objavenie nového chemického prvku	382

Janovič Josef: Torricelliho vzorec	474
Jeništa Oldřich: Matematika a deskriptivní geometrie v zrcadle nových pravidel českého pravopisu	381, 430
Kepr Bořivoj: Za prof. RNDr. Františkem Vyčichlem	95
Komurka František: Přenos elcktriny stejnoměrným proudem (překl.)	46
Komurka František: K. E. Ciolkovskij průkopníkem raketových letadel (překl.)	191
Komurka František: Málo známý průkopník fotografie (překl.)	237
Komurka František: K padesátiletému výročí úmrtí Williama Thomsona (překl.)	287
Komurka František: Zdar a nezdar aparatury Zeta (překl.)	382
Komurka František: Perspektivy mírového využití atomové energie (překl.)	383
Kotyk Josef: Od vesla k lodnímu šroubu	135, 234
Kotyk Josef: Max Planck	230, 284
Kotyk Josef: † František Vyčichlo a Rozhledy	288
Kotyk Josef: Rudolf Diesel	331
Lepil Oldřich: J. E. Torricelli	473
Menšík Miroslav: Co zajímá matematika a fyzika v nových pravidlech českého pravopisu	obálka č. 5 a 7
Pátý Libor: Postavení fyzikálního ústavu Karlovy university ve fyzikálním životě u nás	137
Říman Evžen: Pracovní konference učitelů fyziky	429
Šindelář Václav: K šedesátinám prof. RNDr. Zdeňka Horáka	334
Šoler Josef: Pocity člověka, do něhož „uhodilo“	83
Hradecký František: Matematici se sjeli na Slovensku	426
<i>Jiní o nás:</i>	
Hausenblas Karel: Matematika a jazykověda	379
Havlíček Karel: Jazykovědci a matematika	322
Nor A. C.: Matematika a jazyk	321
<i>Úlohy:</i>	
Úlohy k řešení	41, 91, 134, 189, 239
Řešení úloh	371, 413, 464, 475
<i>Matematická olympiáda</i>	obálka čísel 1, 7, 8, 9 a 10
<i>Fyzikální olympiáda</i>	471
<i>Zprávy z poboček JČMF</i>	47, 144, 383
<i>Redakční sdělení</i>	48, 240, 288, 336, 384, 432, 475

Do dalšího ročníku

Třicet pět let práce pro žáky a učitele škol všeobecně vzdělávacích i odborných mají Rozhledy matematicko-fyzikální již za sebou. Chceme v této tradici dále rozvíjet činnost k zvětšení odborných znalostí z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky, astronomie a zejména hodláme ukazovat technická užití těchto důležitých vědních oborů.

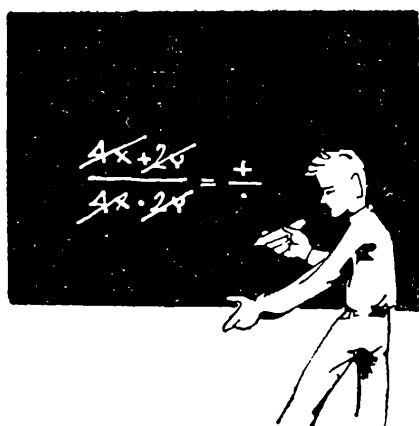
Nechceme být strohým školským časopisem, rádi bychom pomáhali odstraňovat zbytečný strach žáků z předmětů, které jsou základem všech technických oborů, i nechť většiny mládeže k nezbytné teorii. Jak se nám to během minulého roku dařilo, musí čtenáři sami posoudit, rádi uslyšíme jejich hlasy.

Žijeme v dějinných letech, kdy vývoj techniky a bádání v přírodních vědách předstihly všechna očekávání, dokonce i fantasmii spisovatelů. Současně však stojí lidstvo před problémy, které ovlivní celý další jeho vývoj.

Má-li náš vysoce průmyslový stát nejen zůstat v předních řadách pokroku, nýbrž dále zlepšovat své postavení, musí být nynější mládež, která v příštích desetiletích zaujme vedoucí odpovědná místa, dobře vyškolená zvláště v přírodních vědách a správně vychovávána pro tvrdou mezinárodní soutěž. Zde chceme pomáhat všemi svými silami.

Je naším přáním, aby boj na tomto poli byl úspěšný a vedl k sociální spravedlnosti i k trvalému míru.

Redakce



Matematika

Doc. Ota Setzer, Kralupy n. Vlt.:

O poměrech funkcí úhlů ostroúhlého trojúhelníka

V ostroúhlém trojúhelníku ABC (obr. 1) označíme vrcholy A, B, C , protilehlé strany a, b, c , vnitřní úhly α, β, γ , orthocentrum (průsečík výšek) V , střed opsané

kružnice S , paty výšek v_a, v_b, v_c na protilehlé straně $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$, paty kolmic ze středu S na strany a, b, c (neboli středy stran) písmeny P, Q, R .

Z věty o obvodových a středových úhlech v kružnici a z pravoúhlých trojúhelníků ASR, BSP, CSQ plyne **sinová věta**:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \quad (1)$$

kterou píšeme nejčastěji ve tvaru:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (2)$$

Siny vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru protilehlých stran.

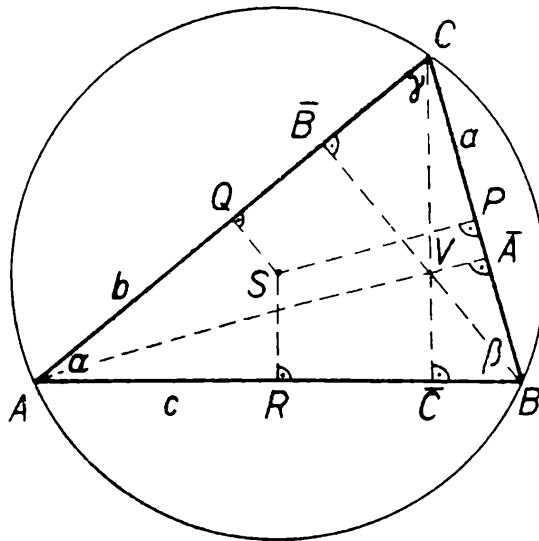
Uvědomíme-li si, že o obsahu \triangle trojúhelníka platí:

$$2\Delta = av_a = bv_b = cv_c,$$

dostaneme pro výšky v_a, v_b, v_c ihned úměru:

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

což ve spojení s rovnicí (2) vede ke vztahu¹⁾:



Obr. 1

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{\sin \alpha} : \frac{1}{\sin \beta} : \frac{1}{\sin \gamma} = \operatorname{cosec} \alpha : \operatorname{cosec} \beta : \operatorname{cosec} \gamma. \quad (3)$$

Kosekanty vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru jeho výšek.

¹⁾ Vedle funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens, které jsou žákům JSŠ známé, zavádí se v pravoúhlém trojúhelníku ještě další dvě funkce ostrého úhlu α , t. zv. sekans α (značí se $\sec \alpha$) a kosekans α ($\operatorname{cosec} \alpha$) těmito poměry stran: $\sec \alpha = \frac{\text{přepona}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{1}{\cos \alpha}$,

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{přepona}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Výška v_a je rozdělena orthocentrem V na úseky: $AV = x$, $V\bar{A} = x'$; právě tak na výšce v_b vznikají úseky $BV = y$, $V\bar{B} = y'$, na v_c úseky $CV = z$, $V\bar{C} = z'$. Úseky x , y , z nazýváme vrcholové úseky výšek trojúhelníka, x' , y' , z' stranové úseky výšek. Úsek z' počítejme nejprve z $\triangle AVC$ a pak z $\triangle BVC$ ($\sphericalangle AVC = \beta$, $\sphericalangle BVC = \alpha$):

$$z' = x \cos \beta = y \cos \alpha, \text{ z čehož } x : y = \cos \alpha : \cos \beta,$$

obdobně $y : z = \cos \beta : \cos \gamma$. Spojením obou úměr odvodíme:

$$x : y : z = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma. \quad (4)$$

Kosiny vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru vrcholových úseků příslušných výšek.

Poměr týchž funkcí vyjádříme i jinak. Z $\triangle BSP$ ($\sphericalangle BSP = \alpha$) plyne $SP = r \cos \alpha$, obdobně z $\triangle ASQ$ ($\sphericalangle ASQ = \beta$): $SQ = r \cos \beta$ a konečně z $\triangle ASR$ ($\sphericalangle ASR = \gamma$): $SR = r \cos \gamma$, čili:

$$SP : SQ : SR = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma. \quad (5)$$

Kosiny vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru vzdáleností středu S opsané kružnice od protilehlých stran.

Z $\triangle CVA$ plyne $x' = z \cos \beta$, z $\triangle CVB$ vyjádříme $y' = z \cos \alpha$, dělením:

$$x' : y' = \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} = \sec \alpha : \sec \beta, \text{ analogicky:}$$

$$y' : z' = \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma} = \sec \beta : \sec \gamma,$$

což píšeme jedinou postupnou úměrou

$$x' : y' : z' = \sec \alpha : \sec \beta : \sec \gamma. \quad (6)$$

Sekanty vnitřních úhlů v trojúhelníku jsou v poměru stranových úseků příslušných výšek.

Abychom vyjádřili poměry zbývajících funkcí úhlů α , β , γ , počítejme obsahy trojúhelníků $P_a = BVC$, $P_b = CVA$, $P_c = AVB$:

$$P_a = \frac{ax'}{2}, \quad P_b = \frac{by'}{2}, \quad P_c = \frac{cz'}{2}$$

$$P_a : P_b : P_c = ax' : by' : cz'$$

Vynásobením stejnohlých členů úměr (2), (6) dostaneme úměru: $ax' : by' : cz' = \sin \alpha \sec \alpha : \sin \beta \sec \beta : \sin \gamma \sec \gamma$, čili

$$P_a : P_b : P_c = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma. \quad (7)$$

Tangenty vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru obsahů trojúhelníků, majících základny ve stranách trojúhelníka a společný vrchol v orthocentru.

Násobíme-li stejnohlé členy úměr (3) a (4), dostaneme úměru:

$$xv_a : yv_b : zv_c = \operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \beta : \operatorname{cotg} \gamma. \quad (8)$$

Kotangenty vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru obsahů obdélníků, sestrojených z příslušné výšky a jejího vrcholového úseku.

Poslední poměr lze vyjádřit též prostorově pomocí trojbokého jehlanu, jehož podstavou je daný trojúhelník ABC a jehož pobočné hrany $AD = \bar{a}$, $BD = \bar{b}$, $CD = \bar{c}$ jsou navzájem kolmé. Potom trojúhelníky ADA , BDB , $CD\bar{C}$ o společné výšce VD jsou pravoúhlé a platí v nich Eukleidovy věty: $xv_a = \bar{a}^2$, $yv_b = \bar{b}^2$, $zv_c = \bar{c}^2$.

Úměra (8) se změní na:

$$\cotg \alpha : \cotg \beta : \cotg \gamma = \bar{a}^2 : \bar{b}^2 : \bar{c}^2 \quad (9)$$

Kotangenty vnitřních úhlů trojúhelníka jsou v poměru dvojmocí délek pobočných hran pravoúhlého trojhranu, sestrojeného nad daným trojúhelníkem.

Laskavý čtenář si upraví odvozené vztahy i pro tupouhlý trojúhelník.

Stanislav Horák, stud. Karlovy univ., Praha:

O harmonické řadě

Harmonickou řadou nazýváme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{in inf.} \quad (H)$$

Zkratka „in inf.“ se čte „in infinitum“ a znamená „do nekonečna“. Harmonická řada je tedy nekonečná a její n -tý člen

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Je známo, že tato řada je divergentní, jak si hned ukážeme. Za tím účelem řadu (H) rozdělíme na určité skupiny a ukážeme, že součet členů každé skupiny je větší než $\frac{1}{2}$. Poněvadž těchto skupin je nescíslně mnoho, vyplývá z toho divergence dané řady. Rozdělení členů řady do skupin je naznačeno v následujícím řádku:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{I. sk.}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\text{II. skupina}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{III. skupina}} + \underbrace{\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{\text{IV. skupina}} + \dots \text{ in inf.}$$

Součet členů v každé skupině je větší než $\frac{1}{2}$. Pro první skupiny se to dokáže snadno. Platí totiž

$$\text{I. sk.} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{II. sk.} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\text{III. sk.} \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

A nyní obecně. První člen k -té skupiny je roven $\frac{1}{2^k+1}$. Poslední člen této skupiny je $\frac{1}{2^{k+1}}$, takže k -tá skupina má $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ členů. Podle dřívějšího vzoru můžeme opět psát

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \\ & > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ sčítanců}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že součet členů každé skupiny je větší než $\frac{1}{2}$. Ale harmonická řada obsahuje takových skupin nekonečně mnoho, a proto je divergentní. Přesně řečeno: Zvolíme-li si libovolně velké číslo K (na př. $K = 100$), pak existuje přirozené číslo n takové, že

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > K.$$

Pro zajímavost si nyní zjistíme, kolik asi členů harmonické řady musíme sečíst, aby tento součet přesáhl číslo 100. K tomu nahradíme součet každé skupiny hodnotou $\frac{1}{2}$. Tím vlastně součet každé skupiny nahradíme číslem menším. Nejdříve určíme, kolik skupin stačí sečíst, aby součet přesáhl 100. Poněvadž jsme první dva členy nezařadili do žádné skupiny, odečteme je od 100; dostaneme $98\frac{1}{2}$. Zjistíme, kolik stačí sečíst skupin tak, aby jejich součet byl větší než $98\frac{1}{2} = \frac{197}{2}$. To však znamená, že stačí sečíst nejvýše 197 skupin, aby jejich součet byl větší než $98\frac{1}{2}$. Nyní spočítáme, kolik členů obsahuje těchto prvních 197 skupin.

- I. skup. obsahuje 2 členy,
- II. skup. obsahuje 2^2 členů,
- III. skup. obsahuje 2^3 členů,
- 197. skup. obsahuje 2^{197} členů.

Součet členů těchto skupin je

$$s = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{197} = 2(2^{197} - 1)$$

Avšak první a druhý člen harmonické řady není obsažen v žádné skupině a proto k nalezenému součtu s připočítejme ještě 2 a máme výsledek, že stačí sečíst *nejvýše* 2^{198} prvních členů harmonické řady, aby jejich součet přesáhl 100. Toto číslo je značně veliké. Vzpomeňme si jen na odměnu, kterou požadoval Sessu na indickém králi za vynalezení hry v šachy. Měl dostat $2^{64} - 1$ zrn pšenice. A tolik pšenice se dosud neurodilo za všechna ta staletí, co ji lidé pěstují. Ve skutečnosti by stačilo sečíst o něco méně členů, ale nějak podstatně by se nalezené číslo nezmenšilo. Bylo by to číslo v porovnání s číslem 100 obrovské. Říkáme proto, že harmonická řada je slabě divergentní.

Harmonické řady se často používá pro důkaz divergence jiných řad t. zv. porovnáním. Podstata toho je tato:

Mějme dány dvě nekonečné řady s nezápornými členy

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots & \text{ in inf.} \\ b_1 + b_2 + b_3 + \dots & \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Jestliže první řada je divergentní a jestliže zároveň platí

$$a_n \leq b_n$$

pro všechna přirozená n (nebo s výjimkou několika prvních přirozených čísel n), potom diverguje i druhá řada. Této věty, kterou jsme uvedli bez důkazu, použijeme na dvou příkladech.

1. Dokažte, že řada, jejíž n -tý člen je dán vzorcem

$$a_n = \frac{1}{7n - 6},$$

je divergentní.

Ř e š e n í. Rozepišme danou řadu

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots \text{ in inf.}$$

Abychom dokázali divergenci, napíšeme jednotlivé členy v jiném tvaru. Je patrné, že platí

$$a_n = \frac{1}{7n - 6} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n - \frac{6}{7}}$$

Podle toho můžeme danou řadu psát též takto:

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{7}} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2 - \frac{6}{7}} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3 - \frac{6}{7}} + \dots \text{ in inf.} =$$

$$= \frac{1}{7} \left[\frac{1}{1 - \frac{6}{7}} + \frac{1}{2 - \frac{6}{7}} + \frac{1}{3 - \frac{6}{7}} + \dots \text{in inf.} \right]$$

n -tý člen řady v závorce označme b_n . Pak platí

$$\frac{1}{n} < b_n$$

pro všechna přirozená čísla n . Proto řada v závorce je divergentní. Ale i daná řada je potom divergentní, neboť každá řada zůstane divergentní, jestliže všechny její členy znásobíme libovolnou nenulovou konstantou. V našem případě tato konstanta je $\frac{1}{7}$.

2. Dokažte divergenci řady

$$S = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \dots \text{in inf.}$$

Řešení. Abychom důkaz provedli, uvědomíme si, jakých hodnot nabývá $\log n$. Víme, že

$$\begin{array}{lll} \text{pro } 2 < x \leq 10 & \text{je } 0 < \log x \leq 1, \\ \text{pro } 10 < x \leq 100 & \text{je } 1 < \log x \leq 2, \\ \text{pro } 100 < x \leq 1\,000 & \text{je } 2 < \log x \leq 3, \end{array}$$

$$\text{pro } 10^r < x \leq 10^{r+1} \text{ je } r < \log x \leq r + 1.$$

Nyní danou řadu rozdělíme na skupiny podle následujícího schématu:

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{\left(\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{10 \log 10} \right)}_A + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{11 \log 11} + \frac{1}{12 \log 12} + \dots + \frac{1}{100 \log 100} \right)}_B + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{101 \log 101} + \frac{1}{102 \log 102} + \dots + \frac{1}{1\,000 \log 1\,000} \right)}_C + \dots \text{in inf.} \end{aligned}$$

Ihned je patrné, že první skupina obsahuje 9 členů, druhá skupina 90 členů, třetí 900 členů atd. a k -tá skupina $10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}$ členů. První skupinu ponecháme beze změny, ale druhé skupiny nahradíme jinými. O členech druhé skupiny zjevně platí

$$\frac{1}{11 \log 11} > \frac{1}{11 \log 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11},$$

$$\frac{1}{12 \log 12} > \frac{1}{12 \log 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{100 \log 100} \geq \frac{1}{100 \log 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}.$$

Proto můžeme psát

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{11 \log 11} + \frac{1}{12 \log 12} + \dots + \frac{1}{100 \log 100} > \\ &> \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} \right) > \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Úplně stejným způsobem zjistíme, že

$$C > \frac{1}{3} \cdot \frac{900}{1000} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} \text{ a t. d.}$$

O dané řadě tudíž platí

$$\begin{aligned} S &> A + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{10} + \dots \text{ in inf.} = \\ &= A + \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ in inf.} \right) - \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Avšak řada v závorce je harmonická a ta je divergentní a tím spíše je divergentní řada S . (Zde jsme použili věty o porovnání dvou řad.)

Cvičení:

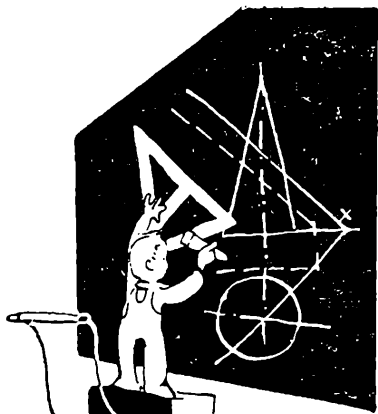
Dokažte divergenci těchto řad.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \text{ in inf.}$ (Vytkněte $\frac{1}{2}$.)

2. Řada má n -tý člen $a_n = \frac{1}{2n+1}$. (Řeší se obdobně jako 1. příklad v textu.)

3. Řada má n -tý člen $a_n = \left| \frac{\alpha}{\beta n + \gamma} \right|$, kde $\beta \neq 0$ a zároveň $\beta n + \gamma \neq 0$.

(Toto cvičení je zobecněním příkladu 1. v textu.)

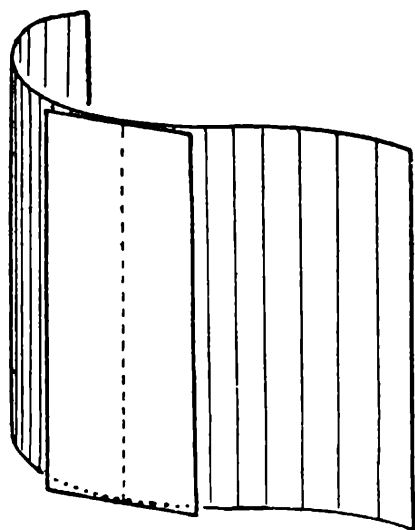


Deskriptivní geometrie

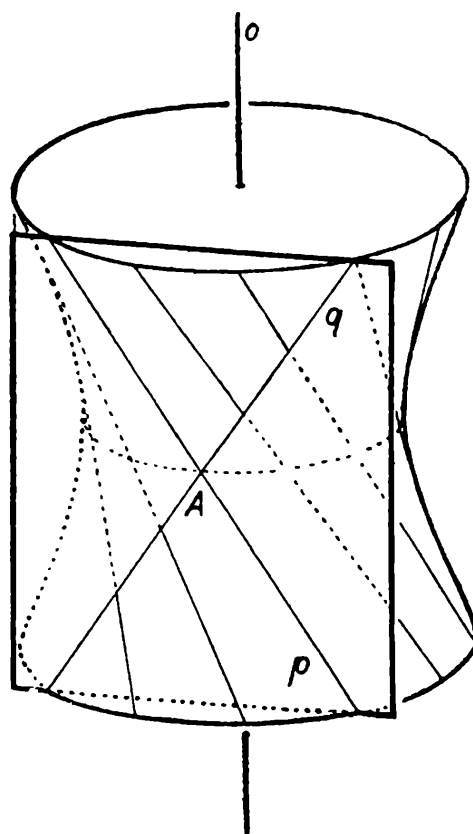
Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

Užití přímkových ploch ve stavitelství

Užití geometrie v praktickém životě lze názorně ukázat na příkladech některých *přímkových ploch*, jichž se užívá ve stavitelství. Přímkovou plochou nazýváme, stručně řečeno, takovou plochu, která vznikne pohybem přímky v prostoru. Přesněji řečeno: přímkovou plochou nazýváme každou takovou plochu, na níž leží nekonečně mnoho *povrchových přímek* a to tak, že každým bodem plochy prochází aspoň jedna její povrchová přímka. Přitom povrchovou přímku plochy nazýváme takovou přímku, která leží celá na té ploše. Tak na příklad plocha kulová není přímkovou plochou, protože na ní žádné přímky neleží. Příklady přímkových ploch poznáme v dalším textu.



Obr. 1

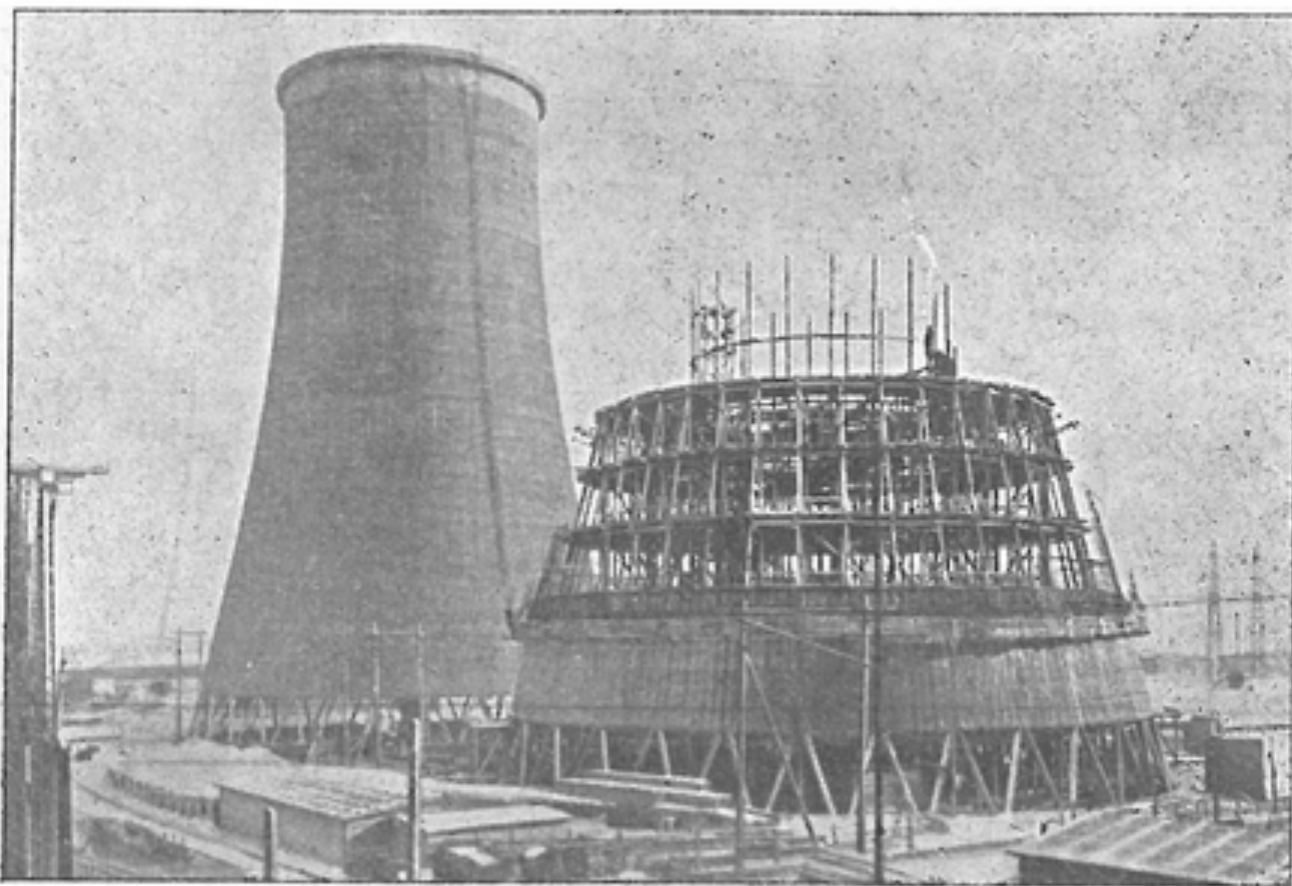


Obr. 2

Plochy kuželové nebo válcové, které znáte ze školy, jsou nejběžnějšími přímkovými plochami. Víte, že obsahují povrchové přímky. Ve stavitelství se často potřebují buď jako střechy, nebo jako klenby. Plochy kuželové a válcové počí-

táme mezi t. zv. *plochy rozvinutelné*, jež jsou charakterisovány tím, že každá tečná rovina takové plochy dotýká se jí podél celé povrchové přímky. To znamená, že tečná rovina rozvinutelné plochy dotýká se jí v nekonečně mnoha bodech, totiž ve všech bodech téže povrchové přímky. V obr. 1 je toto znázorněno u plochy válcové, což je přímková plocha, jejíž povrchové přímky jsou spolu rovnoběžné. Název rozvinutelných ploch pochází z toho, že tyto plochy můžete nenásilně a bez deformace rozvinout do roviny asi tak, jak jste zvyklí rozvinout do roviny plášť kužele nebo válce.

Mnohdy však s rozvinutelnými plochami ve stavitelství nevystačíme. Užíváme pak pokud možno přímkových ploch nerozvinutelných, jímž se také jinak říká *plochy zborcené*. Těch si zde všimneme; je jich, populárně řečeno, mnohem více



Obr. 3

typů než u ploch rozvinutelných. Od rozvinutelných ploch liší se plochy zborcené zřejmě tím, že tečná rovina nedotýká se takové zborcené plochy podél celé přímky, nýbrž jen v jednom bodě. Abychom si to lépe ujasnili na obr. 2, pohovořme nejdříve o nejnázornějším příkladě zborcené plochy.

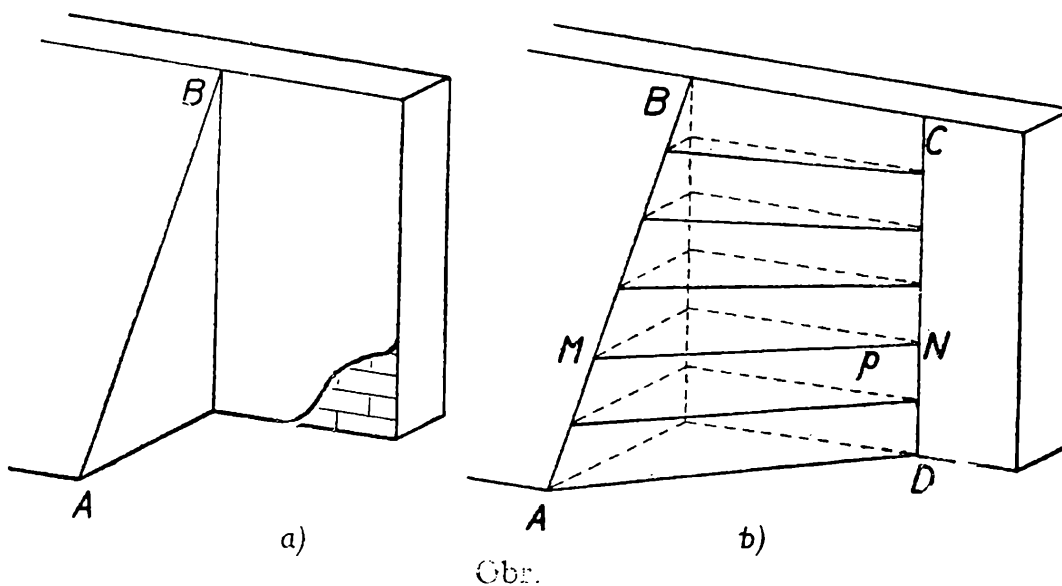
Je to plocha, kterou vytvoří přímka, otáčející se kolem jiné s ní mimoběžné přímky, t. zv. *osy otáčení*. Na obr. 2 je osa otáčení označena o a je vyrýsováno několik ploch přímky p , které přímka p postupně zaujme při otáčení kolem osy o . Předpokládáme, že přímky o , p jsou mimoběžné. Snadno si představíte všechny polohy přímky p , když uvážíte, že každý bod přímky p opisuje při otáčení kružnici, která leží v rovině kolmé k ose o a má na ose o svůj střed. Tak je na obr. 2

vyznačena dráha bodu A , kterou tento bod při otáčení vytvoří. Naše plocha patří mezi tak zvané *plochy rotační*, neboť otáčení se nazývá cizím slovem *rotace*.

Dá se ukázat, že tatáž plocha vznikne otáčením jisté hyperboly kolem její vedlejší osy. Plochy vzniklé otáčením hyperboly kolem některé její osy nazývají se *rotační hyperboloidy*. Na obr. 2 je dále zakreslena tečná rovina, která se této plochy dotýká v bodě A . Je vidět, že tato tečná rovina protíná náš hyperboloid v přímce p a ještě v další přímce q , celkem tedy ve dvou přímkách, ale přesto se jí dotýká jen v jednom bodě, totiž v bodě A . Tohoto rotačního hyperboloidu užívá se někdy v průmyslu při stavbě chladicích věží (obr. 3).

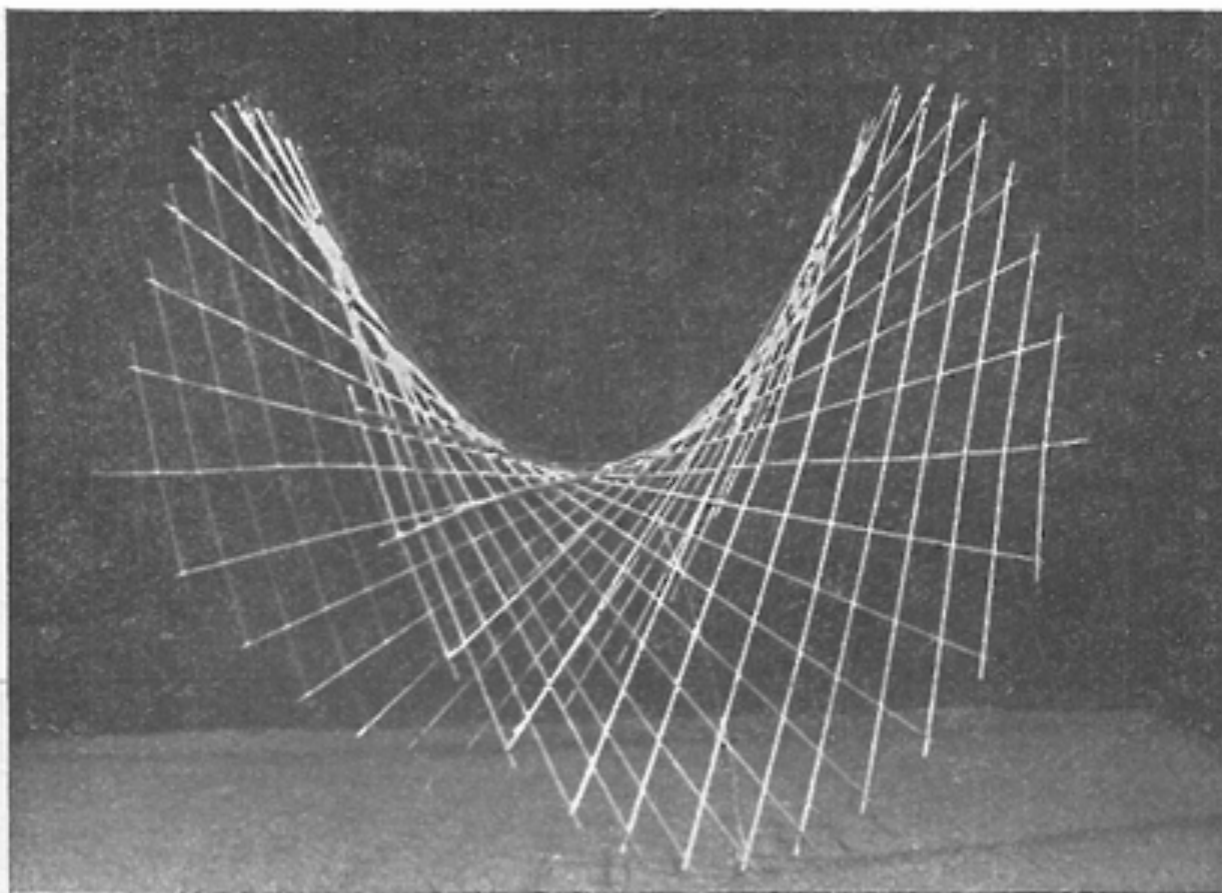
Podobně u ostatních i složitějších zborcených ploch tečná rovina se dotýká plochy obvykle jen v jednom bodě. Nehledíme-li k výjimečným případům, můžeme dokonce říci, že v jednotlivých bodech téže povrchové přímky má zborcená plocha vzájemně různé tečné roviny.

Důkazy všech těchto tvrzení ovšem nepodávám. Lze je podat hlavně užitím diferenciálního počtu, s kterým se musí seznámit každý student na vysoké škole technického směru. Rovněž i další geometrické vlastnosti ploch, které jsou zde uvedeny, podávám bez matematických důkazů. Srozumitelnost jednotlivých tvrzení se tím neztrácí. Čtenář necht' si však uvědomí, že jedině matematice děkujeme za znalost vlastností těchto prakticky tak užitečných ploch.



Ze všech zborcených ploch se ve stavitelství poměrně nejčastěji užívá plochy zvané *hyperbolický paraboloid*. Lze jí použít všude tam, kde je potřeba dvě mimoběžné přímé hrany spojit souvislou plochou. Ukažme si to na příkladu. Představte si svislou rovnou zeď, která z nějakého důvodu musí být v určitém místě zesílena nakloněnou podpěrou, jak je to naznačeno na obr. 4a. Tím vzniká na stavbě nepříjemná hrana AB , která za jistých okolností může značně trpět - snadno se poškodí vnějším nárazem, nebo i vlivem povětrnostních podmínek. Často můžete vidět takové hrany na stavbách. Někdy však je nutné právě naznačenou vadu odstranit, hranu prostě otupit a získat esteticky vhodný přechod. K tomu účelu stačí zvolit ve svislé stěně v určité vzdálenosti od bodu B svislou přímku CD (viz obr. 4b) a obě mimoběžky AB a CD spojit přímkovou plochou takto: libovolná

vodorovná rovina protíná hranu AB na příklad v bodě M , hranu CD v bodě N a přímka p spojující body M, N je povrchovou přímkou hledané plochy. Mění-li polohu myšlené vodorovné roviny, mění se poloha bodů M, N tak, že oba tyto body jsou vždycky stejně vysoko. Přímka p vytvoří pak křivou plochu, totiž hyperbolický paraboloid. Několik poloh přímky p je opět vyznačeno v obr. 4b. Upozorňuji, že vedle právě popsaných povrchových přímek leží na této ploše ještě další povrchové přímky, totiž příčky mimoběžek AD a BC , a že tyto další povrchové přímky jsou všechny opět rovnoběžné s jednou rovinou, zde se svislou rovinou, která je rovnoběžná s přímkami AB a CD ; původně zvolené hrany AB a CD k nim patří také, ostatní nejsou v obr. 4b vyznačeny. Na stavbě užiije se ovšem jen části hyperbolického paraboloidu omezené *prostorovým* čili *zborceným* čtyřúhelníkem $ABCD$.



Obr. 5

V obr. 5 je fotografie drátěného modelu hyperbolického paraboloidu v širším rozmezí. Poznámám, že každá rovina, která neprochází žádnou povrchovou přímkou této plochy, protíná ji buď v hyperbole nebo v parabole; odtud název této plochy. V obr. 5 je na příklad jasně vidět parabolu, která tvoří obrys tam zobrazeného hyperbolického paraboloidu.

Jiné příklady tohoto druhu může bystrý čtenář ve svém okolí často pozorovat sám. Ve většině případů, kdy dvě mimoběžné hrany jsou spojeny souvislou křivou plochou, užívali stavitelé právě hyperbolického paraboloidu. Jím se řeší na příklad střecha, u níž hřeben a okap jsou dvě mimoběžné vodorovné přímky. Hyper-

bolického paraboloidu užívá se i při stavbě silnic. Hodí se tu dobře na příklad k bočnímu zapojení vodorovné cesty na silnici, mající prudší spád - hlavně tu přichází v úvahu vjezd do dvora nebo do domu ze silnice, která probíhá na svahu (viz obr. 6, kde obě mimoběžné přímky spojené hyperbolickým paraboloidem jsou vyznačeny bílou přerušovanou čarou). Stavitelé starších dob, kteří nebývali zkušenými inženýry, dále zedničtí mistři, dlaždiči a pod., znali hyperbolický paraboloid obvykle pod názvem zborcená plocha, ačkoli už v minulých dobách se ve stavitelství vyskytovalo důmyslné uplatnění i jiných zborcených ploch.

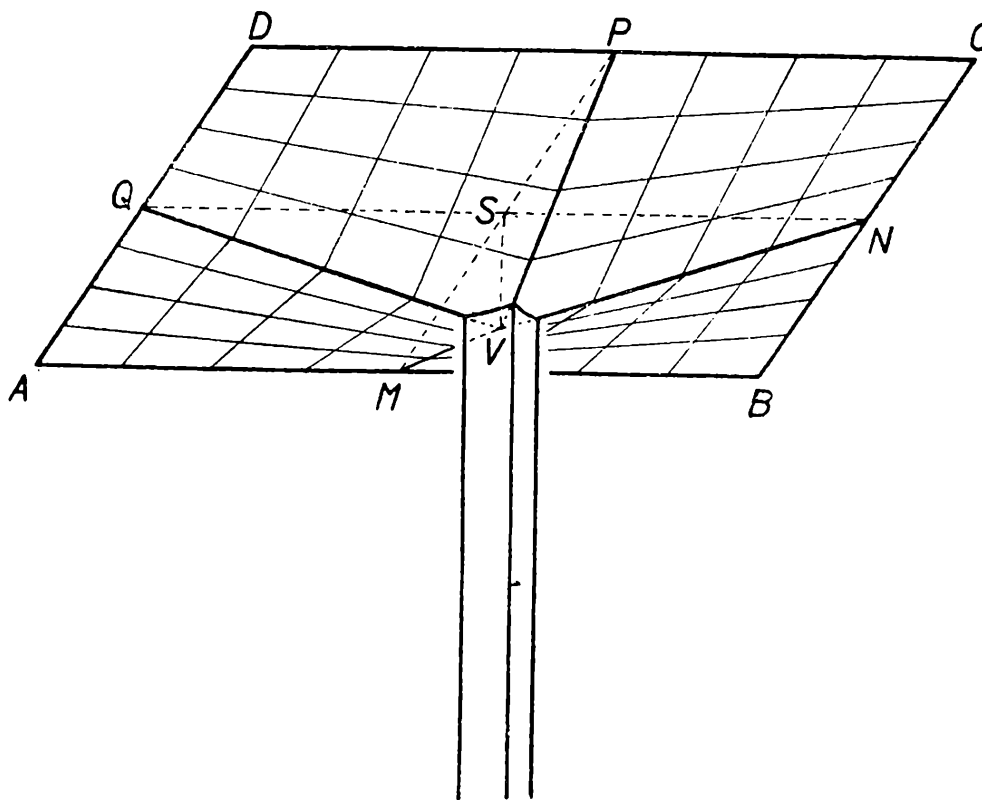
Zajímavý je zde vývoj stavitelské praxe. Ve starších dobách se stavělo hodně z tesaného kamene. Hlavní předností kamenných staveb byla jejich trvanlivost; nevyžadovaly téměř oprav. Dodnes se užívá tesaného kamene při stavbě pilířů u mostů přes větší řeky, protože takové pilíře vydrží dobře náporu ledů. Tesání



Obr. 6

různých tvarů z tvrdého kamene je ovšem drahé a vyžaduje zkušeného kameníka. Užití přímkových ploch tuto práci značně usnadňovalo; jistě se pohodlněji zhotovily kameny s hranami rovnými než s hranami zakřivenými podle přesných ná-kresů. Povrchové přímky užitých ploch tvořily prostě spáry mezi jednotlivými kameny. Ale vynálezem železového betonu se všechno změnilo. Začaly se na příklad stavět rovné střechy. Klenby ustoupily rovným stropům a zdálo se, že zborcené plochy budou ze stavitelství vytlačeny. Ale brzy se uplatnily znovu, a to právě při konstrukcích střech. Jde o t. zv. železobetonové *skořepiny*, které jsou tlusté pouze několik centimetrů. Ukažme si to zase na příkladu hyperbolického paraboloidu.

V obr. 7 je zobrazen vodorovný čtverec $ABCD$, nad nímž má být vyřešena střecha nebo strop. Zvolme bod V v přiměřené vzdálenosti pod středem S tohoto čtverce a spojme jej přímkami se středy stran daného čtverce. V obr. 7 jsou tyto středy stran označeny M, N, P, Q . Tím vzniknou čtyři prostorové (zborčené) čtyřúhelníky $AMVQ$, $BNVM$, $CNVP$ a $DPVQ$. Každý z nich určuje hyperbolický paraboloid způsobem, který jsme už poznali na obr. 4b. Takto sestavené čtyři hyperbolické paraboloidy řeší střechu, z níž dešťová voda se odvádí středním



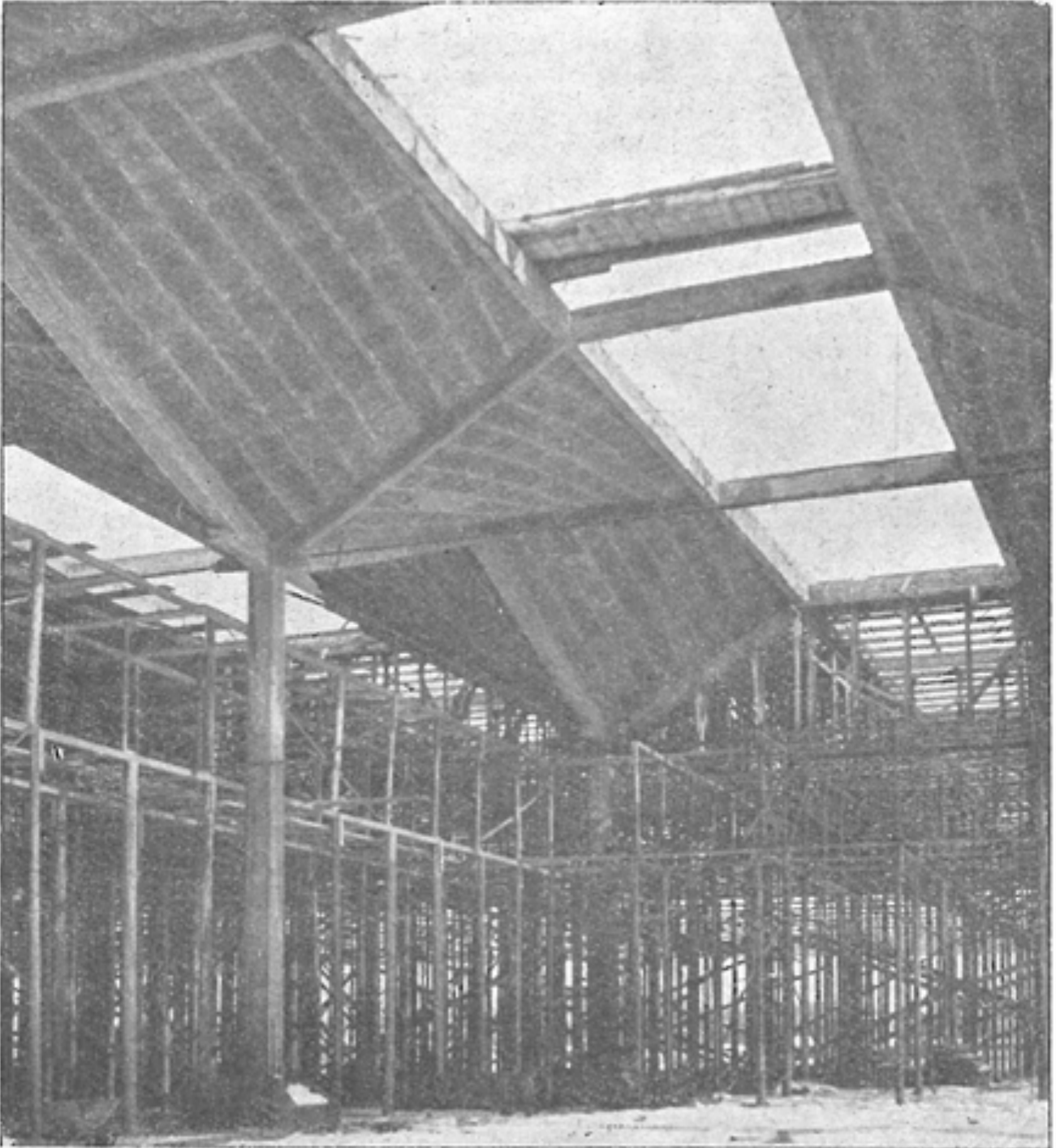
Obr. 7

podpěrným sloupem, jak je naznačeno v obr. 7 (nezapomeňte, že bod V je nejnižším bodem této střechy). Povrchové přímky ploch zde užitých jsou rovněž v obr. 7 vyznačeny. Sestavením celé řady těchto střech vedle sebe vyřeší pěkně krytí větší plochy (viz obr. 8). Střecha takto sestavená má různé výhody proti střechám rovným; je úsporná, neboť při stejné pevnosti se na ni spotřebuje méně betonu než na střechu rovnou, je pružná a značně trvanlivá.

Hyperbolických paraboloidů lze užít nejrůznějším způsobem ke konstrukci skořepinových střeš. Zájemci (i začátečníkovi) poskytně o tom dobrý přehled na příklad knížka prof. Dr F. Kadeřávka: Plochy stavebně inženýrské praxe (Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950). Z ní jsem převzal některé příklady i s obrázky pro tento článek. Dočtete se v ní na příklad, že užitím hyperbolických paraboloidů byly konstruovány skořepiny o rozpětí až 40 metrů, takže se výborně hodí ke krytí větších prostorů, jako jsou tovární nebo letecké haly.

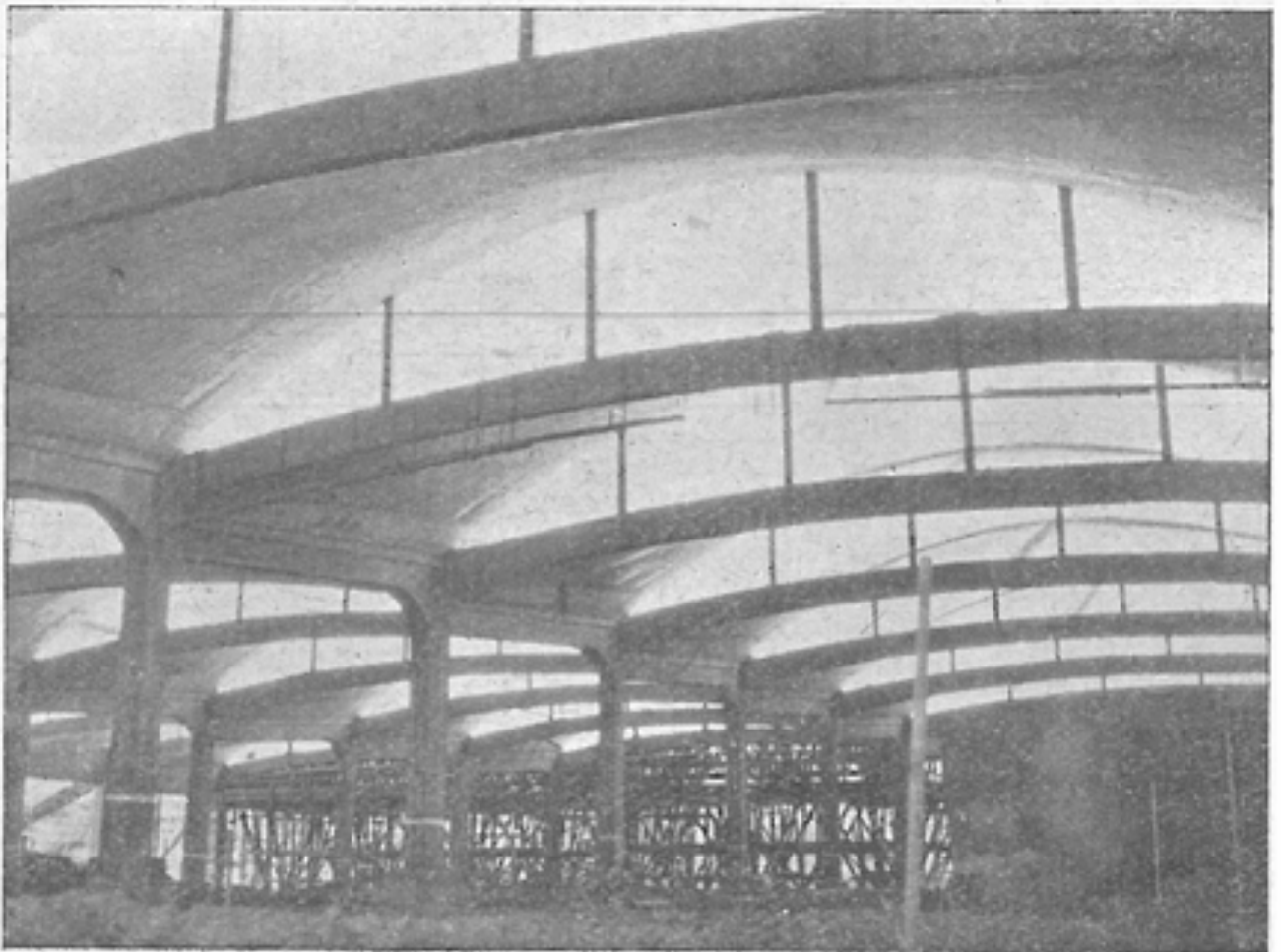
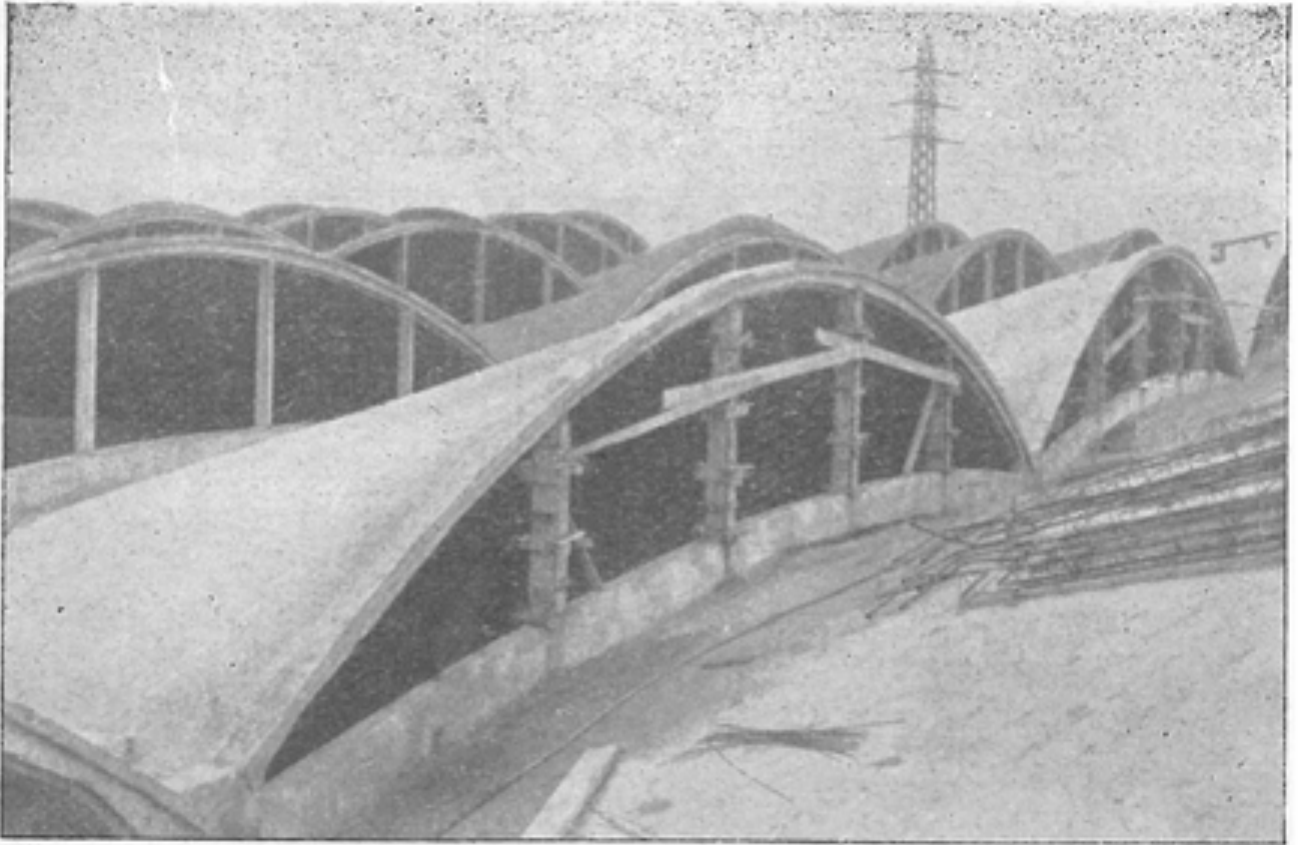
Užití jiné přímkové plochy pro železobetonové skořepiny vidíme na obr. 9a), b). Jsou tam dvě fotografie téže střechy; jedna ji ukazuje v nadhledu, tedy při pohledu z vnějšku, druhá při pohledu z vnitřku, tedy v podhledu. Je to plocha,

kteřá patří mezi plochy zvané *konoidy* a je rovněž plochou zborcenou. Její výtvarný zákon můžeme snadno sledovat na obr. 10. Představte si obdělík nebo čtverec $ABCD$ ležící ve vodorovné rovině. Hranou AB vedme rovinu svíslou a v ní sestrojme oblouk paraboly, kterou znáte ze školy; umístění paraboly nad hranu



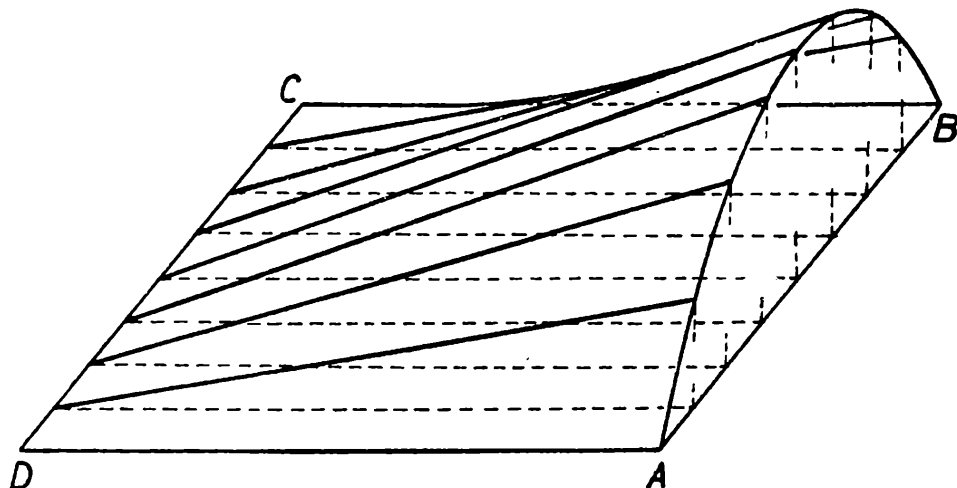
Obr. 8

AB je z obrázku zřejmé. Jednotlivé povrchové přímky tohoto konoиду jsou pak takové přímky, které protínají tuto parabolu i protější hranu CD zvoleného obdělíka a jsou zároveň k této hraně kolmé. V obr. 10 je jich několik vyrýsováno. Protože při sestavení takových dílů k sobě by se u přímé hrany CD držela dešťová voda, neužije se plochy při jejím praktickém použití až po samou hranu CD ; je to dobře vidět na obr. 9a.



Obr. 9ab

Pro konstrukci železobetonových skořepin se užívá i jiných ploch než přímkových, ale přímkové plochy tu převládají a mají tu výhodu, že dřevěné bednění, z něhož se při stavbě zhotovují formy, do kterých se beton pěchuje, lze tu zhotovit z rovných prken; to je mnohem lacinější než konstrukce bednění z ohýbaného dřeva. Přímkové plochy právě umožňují klást rovná prkna podél povrchových přímk.



Obr. 10

Je samozřejmé, že příklady zde uvedenými nejsou ani zdaleka vyčerpány všechny možnosti využití přímkových ploch ve stavitelství. Uvedli jsme pouze několik typů a neroztřídili jsme je ani matematicky. Dá se na příklad ukázat, že rotační hyperboloid zborcený a hyperbolický paraboloid jsou plochy druhého stupně, to znamená, že rovina, která nemá zrovna nějakou zvláštní polohu, protíná tyto plochy v kuželosečkách.

Doc. Dr. Václav Havel, Brno:

Rovinný řez pravoúhlého trojhranu

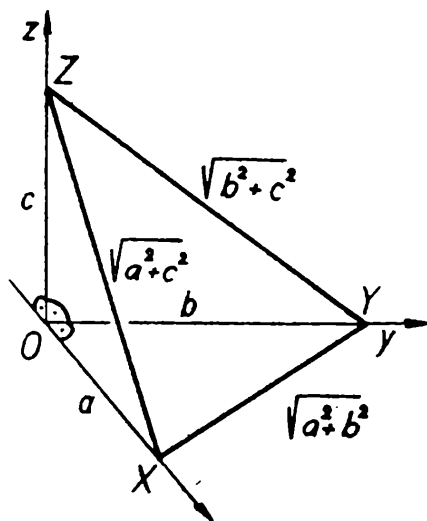
Mějme tři navzájem kolmé polopřímky x, y, z , které vycházejí z téhož bodu O a jsou prořaty rovinou α v různých bodech X, Y, Z . Body X, Y, Z jsou vrcholy trojúhelníka \triangle .

Dokážeme několikerým způsobem, že trojúhelník \triangle je ostroúhlý.

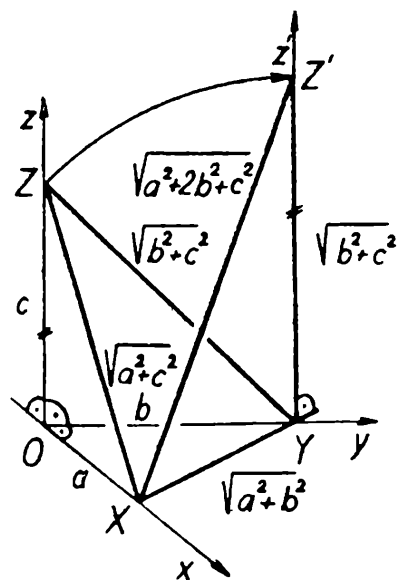
1. důkaz: (Obr. 1). Označme a, b, c vzdálenosti bodů X, Y, Z od bodu O . Pak podle Pythagorovy věty, užití v trojúhelnících o vrcholech O, X, Y ; O, X, Z ; O, Y, Z jsou $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + c^2}$ délky stran trojúhelníka \triangle . Snadno se přesvědčíme o správnosti nerovností $(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) > b^2 + c^2$, $(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) > a^2 + c^2$, $(a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) > a^2 + b^2$. Tedy součet obsahů čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka \triangle je vždy větší než obsah čtverce nad stranou zbývající. Z toho plyne, že trojúhelník \triangle je ostroúhlý.

P o d r o b n ě: Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ délky stran a velikosti protějších úhlů trojúhelníka, pak z nerovnosti $a_i^2 + a_j^2 > a_k^2$ a rovnice $a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos \alpha_k = a_k^2$ (platné podle kosinové věty) plyne $\cos \alpha_k > 0$, takže $0^\circ < \alpha_k < 90^\circ$; přitom i, j, k je pořadí čísel 1, 2, 3. Tedy z nerovností $a_1^2 + a_2^2 > a_3^2, a_1^2 + a_3^2 > a_2^2, a_2^2 + a_3^2 > a_1^2$ vyplývá, že daný trojúhelník je ostroúhlý.

2. d ů k a z: (Obr. 2). V rovině OYZ sestrojme kružnici, která má střed Y a prochází bodem Z . Dále vedme bodem Y polopřímku Z' , která je rovnoběžná s polopřímku Z a leží uvnitř pravého úhlu ohraničeného polopřímkami y, z . Sestrojená kružnice protíná polopřímku z' v bodě Z' . Srovnáme délky stran trojúhelníka \triangle s délkami stran trojúhelníka \triangle' o vrcholech X, Y, Z' . Strana proti vrcholu Z , resp. Z' je u obou trojúhelníků společná. Strana proti vrcholu X u trojúhelníka \triangle je stejně dlouhá jako strana proti vrcholu X u trojúhelníka \triangle' . Zato však strana proti vrcholu Y u trojúhelníka \triangle je kratší než strana proti vrcholu Y u trojúhelníka \triangle' . Trojúhelníky o vrcholech $O, X, Z; O, X, Z'$ jsou totiž při



Obr. 1



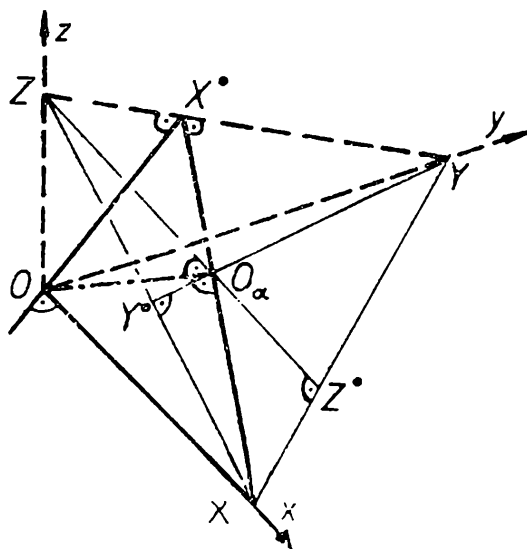
Obr. 2

vrcholu O pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty jsou $\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2)}$ vzdálenosti bodu X od bodů Z, Z' ; zajisté jest $\sqrt{a^2 + c^2} < \sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}$.

Tedy vnitřní úhel při vrcholu Y je u trojúhelníka \triangle menší než u trojúhelníka \triangle' , kde je pravý. Proto vnitřní úhel při vrcholu Y trojúhelníka \triangle je ostrý. Obdobně se dokáže, že též zbývající dva vnitřní úhly trojúhelníka \triangle jsou ostré.

3. d ů k a z: (Obr. 3). Označme O_α kolmý průmět bodu O do roviny α . Protože přímka OX je kolmá k rovině OYZ , jest též kolmá k přímce YZ , takže přímka $O_\alpha X$ je kolmá k přímce YZ . Obdobně stojí k sobě kolmo přímky $O_\alpha Y, XZ$ a přímky $O_\alpha Z, XY$. Tedy bod O_α je orthocentrem trojúhelníka \triangle . Avšak bod O_α padne dovnitř trojúhelníka \triangle .

P o d r o b n ě: Označme X' patu kolmice, spuštěné s bodu O na přímkou VZ . Protože trojúhelník o vrcholech O, Y, Z má při vrcholu O pravý úhel, padne bod X' mezi body Y, Z . Avšak též trojúhelník o vrcholech O, X, X' má při vrcholu O pravý úhel, takže bod O_α jako pata kolmice, vedená bodem O k přímce XX' , padne mezi body X, X' ; t. j. dovnitř trojúhelníka \triangle .



Obr. 3

Je známo, že orthocentrum tupouhlého trojúhelníka padne vně tohoto trojúhelníka, orthocentrum pravoúhlého trojúhelníka padne do vrcholu proti přeponě a orthocentrum ostroúhlého trojúhelníka padne dovnitř tohoto trojúhelníka. Z toho tedy plyne, že trojúhelník \triangle je ostroúhlý.

Zavedeme-li kosoúhlé nebo kolmé promítání do roviny α a prohlásíme-li prodloužené polopřímky x, y, z za osy souřadnic, pak takové promítání nazývá se kosoúhlou nebo pravoúhlou axonometrií. Trojúhelník \triangle nazývá se též stopním axonometrickým trojúhelníkem, protože jeho vrcholy jsou stopníky os souřadnic.

František Harant, Praha:

O konstrukcích bodů kuželoseček bez užití kružítka

1. Parabola

1,1. Necht' je dána parabola řídicí přímkou d a ohniskem F (obr. 1). Sestrojme dále osu o , která jde ohniskem F kolmo k řídicí přímce, vrchol A , který pólí úsečku DF (D je průsečík osy o a řídicí přímky d), a vrcholovou tečnu a , která jde vrcholem A rovnoběžně s řídicí přímkou d . Nanesme na vrcholovou tečnu a od vrcholu A úsečku $AB = 2p$ (kde p je parametr paraboly, t. j. $p = DF$). Ziskáním bodem B vedme rovnoběžku s osou o . Na té nám vytne přímka jdoucí vrcholem A a svírající s osou o úhel 45° bod C . Vedme dále v libovolné vzdálenosti h od o rovnoběžku r , která protne řídicí přímkou v bodě P'' , vrcholovou tečnu P' a spojnicí AC v bodě R . Vedme dále bodem R rovnoběžku s vrcholovou tečnou, která protne přímku BC v bodě Q . Spojnice AQ protne přímku r v bodě P dané paraboly.

Důkaz provedeme tak, že prokážeme rovnost $P''P = PF$.¹⁾

Z podobných trojúhelníků $\triangle AP'P \sim \triangle ABQ$ plyne

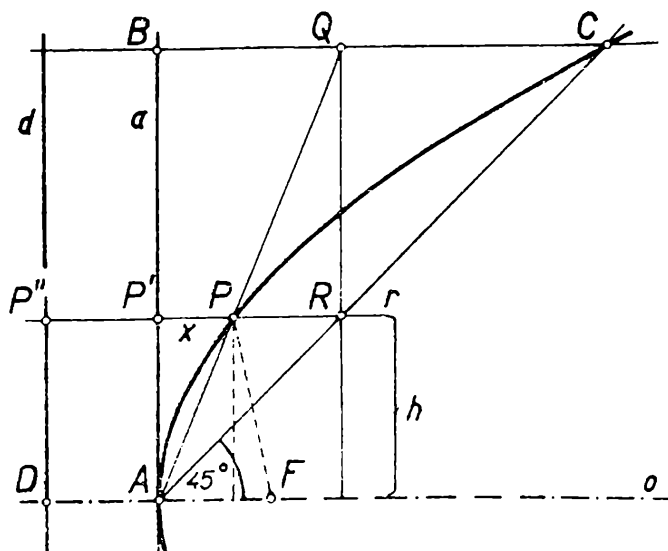
$$AP' : P'P = AB : BQ. \quad (1)$$

Jest však $AP' = BQ = h$, $AB = 2p$ a označíme-li $P'P = x$, obdržíme

$$h : x = 2p : h \quad (1')$$

a odtud

$$x = \frac{h^2}{2p}. \quad (2)$$



Obr. 1

Je tedy

$$P''P = \frac{p}{2} + x = \frac{p^2 + h^2}{2p} \quad (3)$$

Nyní vypočteme délku PF , která je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách h a $\frac{p}{2} - x$ (nebo také $x - \frac{p}{2}$, což však vede k stejným výsledkům).

Podle Pythagorovy věty jest

$$\overline{PF}^2 = h^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 \quad (4)$$

a po úpravě

$$PF = \frac{p^2 + h^2}{2p}. \quad (4')$$

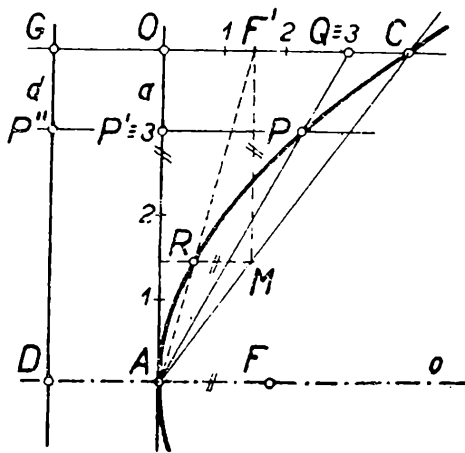
Podle (3) a (4') je tedy $P''P = PF$ a množina bodů P je parabola, což jsme chtěli dokázat.

¹⁾ Připomeňme definici paraboly: Parabola je rovinná křivka, která je množinou všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu F a pevné přímky d (která není incidentní s F) stejné vzdálenosti. Pevný bod F se jmenuje ohnisko, přímka d řídící (direkční) přímka.

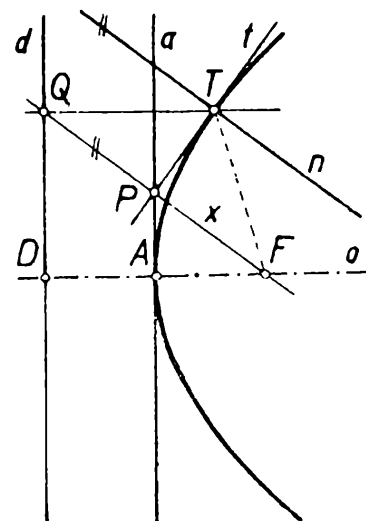
1,2. Jinou konstrukcí bodů paraboly odvodíme takto: Nechť je dána parabola opět jako v předchozím případě. Sestrojíme zase osu o , vrchol A a vrcholovou tečnu a a sestrojíme dále libovolný bod C této paraboly, kterým vedme přímku rovnoběžnou s osou o (obr. 2). Tato rovnoběžka protne řídicí přímku v bodě G a vrcholovou tečnu v bodě O . Rozdělme úsečky AO resp. OC na n stejných částí (pro přirozené $n \geq 2$) a získané body očíslovme od A k O , resp. od O k C čísly $1, 2, \dots, n-1$ (na úsečce AO padne bod s číslem n do O , na úsečce OC je n v bodu C). Libovolným bodem P' úsečky AO , kde P' je jedno z čísel $1, 2, \dots, n-1$, vedme rovnoběžku s osou o . Spojnice AQ , kde Q je bod úsečky OC , stejně očíslovaný jako bod P' , vytne nám na rovnoběžce s osou bod P paraboly.

Důkaz provedeme obdobně jako v případě předchozím. Z podobných trojúhelníků $\triangle AP'P \sim \triangle AOQ$ plyne

$$AP' : P'P = AO : OQ. \quad (5)$$



Obr. 2



Obr. 3

Jest však $AO = h$, $AP' = \frac{h}{k}$ (neboť úsečka AP' je k -tým dílem úsečky AO),

$OQ = \frac{u}{k}$ (neboť úsečka OQ je k -tou částí úsečky $OC = u$) a $P'P$ označme x .

Vztah (5) dostane pak tvar

$$\frac{h}{k} x = h : \frac{u}{k} \quad (5')$$

a odtud

$$x = \frac{u}{k^2}. \quad (6)$$

Je tedy

$$P''P = \frac{p}{2} + \frac{u}{k^2} = \frac{pk^2 + 2u}{2k^2}. \quad (7)$$

PF jest však přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku $\frac{h}{k}$ a $\frac{p}{2} - x$ (nebo $x - \frac{p}{2}$, což jak už víme, vede k stejným výsledkům) a tedy podle Pythagorovy věty jest

$$\overline{PF}^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + \frac{h^2}{k^2}. \quad (8)$$

Po dosazení za x z rovnice (6) obdržíme

$$\overline{PF}^2 = \frac{k^4 p^2 - 4k^2 pu + 4u^2 + 4h^2 k^2}{4k^4}. \quad (8')$$

Protože však z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle FF'C$, kde F' je pata kolmice spuštěné z F na OC , plyne

$$\overline{CF}^2 = \overline{FF'}^2 + \overline{F'C}^2$$

a protože jest $CF = GC = u + \frac{p}{2}$ (neboť C je bod paraboly), $FF' = h$ a $F'C = u - \frac{p}{2}$, platí

$$\left(u + \frac{p}{2}\right)^2 = h^2 + \left(u - \frac{p}{2}\right)^2;$$

po dosazení za h^2 do (8') a po úpravě a odmocnění obdržíme

$$PF = \frac{pk^2 + 2u}{2k^2} \quad (9)$$

a tedy ze (7) a (9) plyne $PF = P''P$, což jsme chtěli dokázat.

Právě dokázanou konstrukci můžeme prakticky při použití spojnice AC prováděti takto (konstrukce je v obr. 2 čárkována): Vedme libovolnou rovnoběžku s vrcholovou tečnou a . Jejím průsečíkem M se spojnicí AC vedme rovnoběžku s osou o a její průsečík F' s přímkou OC spojme s vrcholem A . Průsečík těchto dvou přímek je bod paraboly, na obrázku je označen R .

Tato konstrukce je vhodná, je-li parabola dána vrcholovou tečnou a , vrcholem A a bodem C (resp. vrcholem, osou a bodem).

Poznámka: Konstrukce uvedené v odstavcích 1,1 a 1,2 lze užívat i dále mimo úseky BC , resp. GC ; snadné provedení nebudeme zde uvádět.

A na závěr tohoto odstavce uvedme ještě konstrukci, která udává body paraboly přímo na jejich tečnách.

1,3. Necht' je dána parabola opět řídicí přímkou d a ohniskem F . Známým již způsobem sestrojíme osu, vrchol a vrcholovou tečnu. Vedme nyní ohniskem přímkou x (obr. 3), která protne vrcholovou tečnu v bodě P a řídicí přímkou v bodě Q . Bodem P sestrojme kolmici t k přímce x a bodem Q vedme k řídicí přímce d kolmici k . Průsečík T přímek t a k je bodem paraboly. Poněvadž $DA = AF$ je

i $QP = PF$ a tedy $\triangle QTP \cong \triangle FTP$, neboť jsou oba pravoúhlé a mají ještě společnou stranu TP . Je tedy i

$$QT = TF$$

a množina všech bodů T je parabola určená ohniskem F a řídicí přímkou d . Ježto platí věta, že paty kolmic spuštěných z ohniska na tečny paraboly vyplňují vrcholovou tečnu, je přímka t tečnou paraboly v bodě T .

Poznámka. Uvedenou konstrukcí obdržíme parabolu i tehdy, když vzdálenosti DA a AF nejsou stejné, dokonce seskupení přímek a, d , vzhledem k bodu F může být různé. Pak ovšem přímka d není řídicí přímkou a F není ohniskem vzniklé paraboly a proto tato konstrukce nemá praktický význam, i když je pozoruhodná.

Na závěr uvedme několik úloh k procvičení.

1. Sestrojte parabolu určenou vrcholovou tečnou a , vrcholem A a obecným bodem M . Užijte konstrukce z obr. 1, pomocí které snadno naleznete parametr.

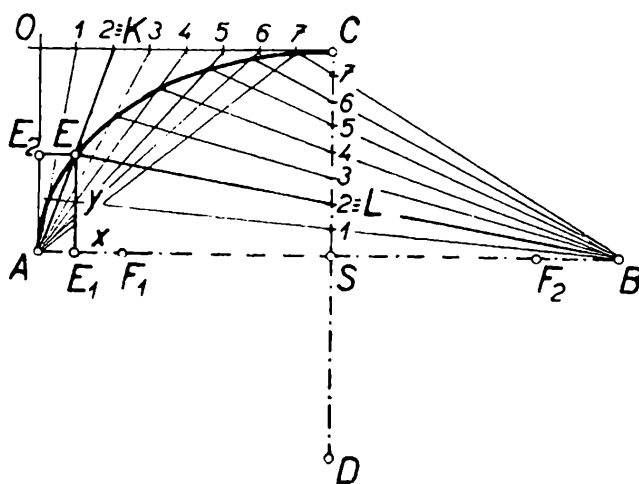
2. Sestrojte body paraboly určené vrcholovou tečnou a , vrcholem A a obecným bodem M , aniž hledáte ohnisko nebo řídicí přímkou. Užijte konstrukce z obr. 2, nebo též z obr. 1.

3. Sestrojte parabolu danou ohniskem F , směrem osy o' a normálou n obecného bodu. Užijte vztahů z obr. 3. Normála vytne na ose, kterou ihned obdržíme, bod N a ve vzdálenosti FN od bodu F leží na n i bod paraboly T . (Ostatní je pak zřejmé).

4. Je dána parabola ohniskem F a řídicí přímkou d , a přímka r rovnoběžná s osou o paraboly. Sestrojte průsečík přímky r s parabolou.

2. Elipsa

2,1. Nechť je dána elipsa polohou i délkou hlavní i vedlejší poloosy. Sestrojování jejích bodů děje se obvykle podle definice s použitím kružítka²⁾ a pomocí bodů



Obr. 4

na úsečce AB , kde A, B jsou hlavní vrcholy elipsy. Odvoďme si jinou konstrukci bodů elipsy, při níž nebudeme potřebovat kružítko.

²⁾ Máme opět na mysli tuto definici: Elipsa je rovinná křivka, která je množinou všech bodů E v rovině, majících od dvou různých bodů F_1 a F_2 stálý součet vzdáleností větší než F_1F_2 . Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska elipsy.

Sestrojíme si za tím účelem tečny ve vrcholech A a C , které jsou kolmé k osám, procházejícím těmito body (obr. 4). Jejich průsečík označme O . Rozdělme dále délku vedlejší poloosy SC a délku tečny OC na n stejných dílů (pro přirozená $n \geq 2$). Obdržené body označme postupně od S (resp. od O) k C čísly $1, 2, \dots, n-1$, (bod označený n splývá s bodem C). Spojnice AK (kde K je jeden z bodů, které jsme obdrželi na úsečce OC) protne spojnicí BL (kde L je bod úsečky SC stejně označený jako K) v bodě E náležejícím elipse.

Toto tvrzení je správné, je-li $F_1E + EF_2 = 2a$. Dokažme to. Veďme proto z bodu E kolmici na hlavní osu a na tečnu ve vrcholu A . Dostaneme tak body E_1 a E_2 . Označme dále $EE_1 = y$ a $E_1F_1 = x$. Z podobných trojúhelníků $\triangle BSL \sim \triangle BE_1E$ plyne

$$BS : SL = BE_1 : E_1E. \quad (10)$$

Platí však $BS = a$, $SP = \frac{b}{k}$ (neboť úsečka SL je k -tým dílem vedlejší poloosy b)

$E_1E = y$ a $BE_1 = a + e + x$. Po dosazení obdržíme

$$a : \frac{b}{k} = (a + e + x) : y \quad (10')$$

a odtud

$$y = \frac{b}{ak} (a + e + x). \quad (11)$$

Obdobně z $\triangle AE_2E \sim \triangle AOK$ plyne

$$AE_2 : E_2E = AO : OK. \quad (12)$$

Protože je však $AE_2 = EE_1 = y$, $E_2E = a - e - x$, $AO = SC = b$, a $OK = \frac{a}{k}$

(neboť úsečka OK je opět k -tým dílem úsečky OC), obdržíme

$$y : (a - e - x) = b : \frac{a}{k} \quad (12')$$

a odtud

$$y = \frac{bk}{a} (a - e - x). \quad (13)$$

Rovnice (11) a (13) dávají nám soustavu dvou rovnic pro neznámé x a y . Jejich řešením obdržíme

$$x = a \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} - e, \quad y = \frac{2bk}{k^2 + 1}. \quad (14)$$

Dále z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle E_1F_1E_1$ a $\triangle E_1F_2E$ plynou použitím věty Pythagorovy vztahy

$$\overline{F_1E}^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{EF_2}^2 = (2e + x)^2 + y^2 \quad (15)$$

Po dosazení za x a y z rovnic (14) a po úpravě dostaneme

$$F_1E = \frac{(a - e)k^2 + (a + e)}{k^2 + 1},$$

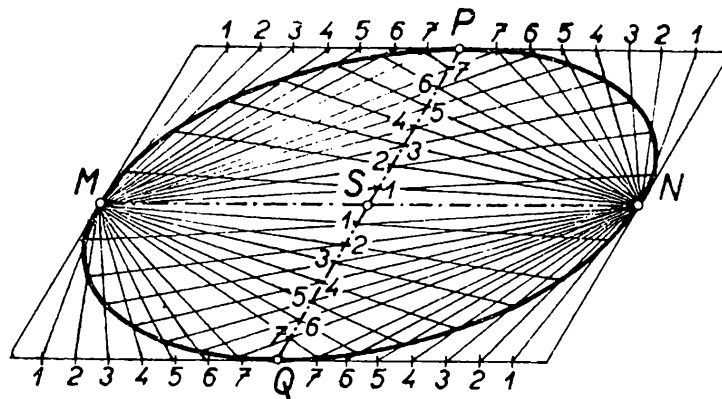
$$EF_2 = \frac{(a + e)k^2 + (a - e)}{k^2 + 1}. \quad (16)$$

Odtud sečtením pak plyne

$$F_1E + EF_2 = 2a, \quad (17)$$

což jsme chtěli dokázat.

Můžeme tedy touto konstrukcí sestrojiti libovolné množství bodů elipsy v obdélníku $SAOC$ a pomocí osové, resp. středové souměrnosti, dostaneme body elipsy i v ostatních kvadrantech určených osami elipsy (neboť jak známo, elipsa je křivkou osově souměrnou vzhledem k osám AB a CD a středově souměrnou vzhledem k středu S).



Obr. 5

Poznámka. Tuto konstrukci lze zobecnit pro případ, že místo os jsou dány omezené sdružené průměry. Konstrukce bodů v tomto případě je uvedena na obr. 5. Důkaz však provádět nebudeme, protože látka přesahuje osnovy geometrie na jedenáctiletkách. Mimo to důkaz vedený obdobnou cestou jako u věty předchozí, byl by zdlouhavý a konstrukci lze bez obtíží provést užitím afinity mezi elipsou a kružnicí, tedy rovněž užitím látky, která není v osnovách jedenáctiletěk.

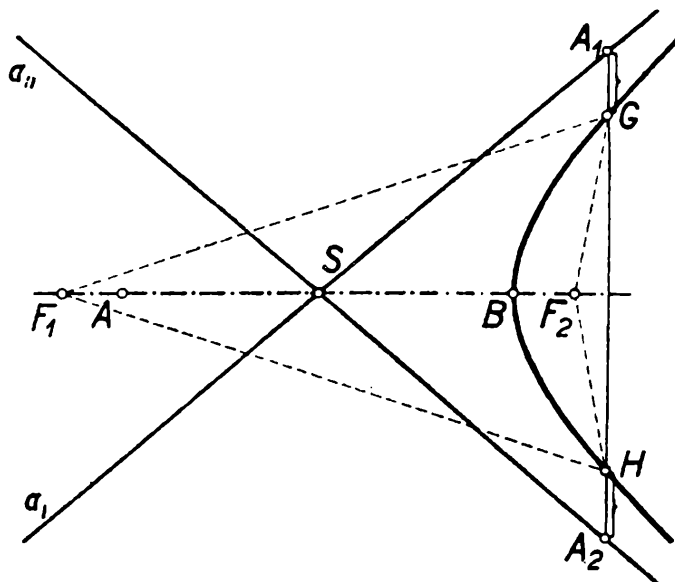
Rovněž zde uveďme na ukončení tři úlohy.

1. Sestrojte body elipsy určené osami AB , CD , aniž použijete kružítko.
2. Sestrojte body elipsy určené sdruženými průměry MN , PQ , bez užití kružítko.
3. Sestrojte body elipsy určené tečnami v koncových bodech jistých sdružených průměrů.

3. Hyperbola

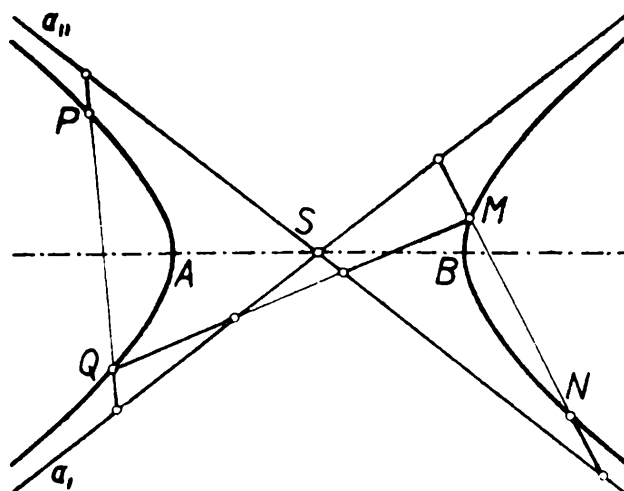
3,1. Nechť je dána hyperbola délkou hlavní poloosy a ohnisky F_1 a F_2 . Sestrojme kružnici (S, SF_1) a veďme v ohniscích kolmice k hlavní ose. Ty nám na sestrojené kružnici vytnou body, které spojeny se středem určují asymptoty a_I , a_{II} (obr. 6).

Obvyklou konstrukcí podle definice ³⁾ sestrojme body G, H užitím stejných oblouků kruhových. Protože $\triangle F_1GH$, resp. $\triangle F_2GH$ je rovnoramenný, je hlavní osa hyperboly osou souměrnosti úhlu $\sphericalangle GF_1H$ resp. $\sphericalangle GF_2H$ a tedy body G, H jsou souměrně položeny podle hlavní osy. Protože však podle hlavní osy jsou souměrné i obě asymptoty, tu označíme-li průsečíky spojnice GH s asymptotami A_1 a A_2 , jest $A_1G = A_2H$. Čili:



Obr. 6

Máme-li dva body hyperboly, souměrné podle osy (a to i podle osy vedlejší, jak dokáže čtenář sám), pak vzdálenosti mezi body a asymptotami měřené na spojnici obou bodů jsou si rovny.



Obr. 7

³⁾ Definice hyperboly: Hyperbola je rovinná křivka, která je množinou všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů F_1 a F_2 stálý (kladný) rozdíl vzdáleností menší než F_1F_2 . Body F_1 a F_2 se nazývají ohniska hyperboly.

3,2. Předchozí výsledek lze zobecnit pro dva libovolné body M, N hyperboly. Mějme tedy hyperbolu danou jako v předchozím případě a sestrojme dva body M, N , nikoliv souměrné vzhledem k ose (viz obr.:7). Platí věta:

Na libovolné sečně hyperboly (která není rovnoběžná s asymptotami) jsou úseky mezi body hyperboly a asymptotami sobě rovny.

Důkaz byl proveden v článku St. Horáka: Tři věty o hyperbole (Rozhledy č. 7, 1957, str. 304, poučka 3).

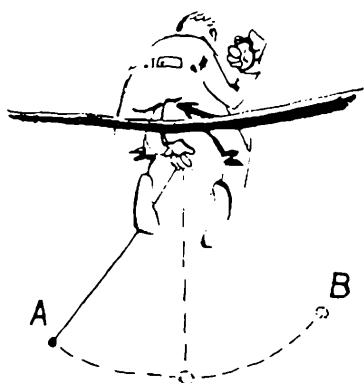
Použitím tohoto výsledku můžeme tedy sestrojovati libovolný počet bodů hyperboly, je-li určena asymptotami a jedním bodem (jako na obr. 7).

A na závěr opět úlohy.

1. Sestrojte další body hyperboly, je-li dána asymptotami a obecně položeným bodem, aniž hledáte osy nebo ohniska.

2. V daném bodě hyperboly určené ještě asymptotami, sestrojte tečnu. (Uvažte, že na tečně oba body určované podle předchozí konstrukce na sečně splynou.)

3. Sestrojte další body hyperboly určené asymptotami a tečnou. (Užijte výsledku z předchozí úlohy a pak sestrojíte další body vzhledem k nalezenému bodu dotyku na dané tečně.)



Fysika

Prof. Dr W. Heisenberg, nositel
Nobelovy ceny v r. 1932, Göttingen:

Poslední tajnosti elementárních částic

K dřívějším článkům pojednávajícím o elektronech připojujeme tento příspěvek, který nám umožňuje nahlédnout do říše úžasných zásob energie, skryté v nepatrných „prostorách“ jádra a jeho obalu.

Přírodní vědě, zabývající se atomovou energií - o níž jsme se domnívali, že dosáhla koncem minulého století svého vrcholu - nebylo dopřáno ověřiti si klasický řecký obraz o „nejmenším“ v přírodě. Naopak, čím hlouběji pronikal průzkum do jemné stavby hmoty, tím bylo zřejmější, že „atom“ v antickém světě představ a jeho chemicko-hmotná skutečnost mají společný jen název „a-tomos“, což znamená „nedělitelný“, neboť se atom začátkem tohoto století ukázal jako více méně složitě sestavený útvar. Jakmile Rutherfordovy a Soddyovy práce o postupu radioaktivního rozpadu dospěly k známému prvnímu modelu atomového jádra, počalo se pátrati po stavech a obalu atomu. V r. 1913 si dobyl Niels Bohr trvalých zásluh svým modelem diskretních drah elektronů a jejich „kvantových změn“, neboť jako první popsal správně - alespoň pro názornou představu - tehdy poznanou stavbu hmoty. Díky výsledkům této první etapy moderní atomové fyziky, bylo vlastně možno teprve správně porozuměti chemickým vlastnostem prvků

a světelným projevům hmoty (spektrálními čarami, světélkování, a pod.). Kvantová teorie let dvacátých vedla sice ještě k mnohým nutným revisím, působila však v celku k podpoře a k zaostření vzniklého obrazu přírody.

Další období fyzikálního průzkumu se zabyvá tajemstvím atomového jádra. Počátkem třicátých let se podařilo odhalit množství dosud neznámých částic, z nich některé patří k základním stavebním částicím jader prvků, některé byly poznány jako nestabilní s krátkou životností.

Vývoj prvních „paprskových“ děl - cyklotronu, betatronu - umožnil v těch letech bombardovat atomová jádra velmi zrychlenými „střelami“ a z výsledků byla získána řada nových poznatků o složení a chování jader. Pro použití v praxi bylo nejdůležitější odhalení spontánního štěpení těžkých jader (uran) ostřelovaných neutrony, jak provedli O. Hahn a F. Strassman v Berlíně 1938—39. Tím se po prvé podařilo uvolnit mimořádně velké množství vázané energie, nahromaděné v atomových jádrech a tak jí i technicky využít.

Asi od r. 1945 - když v USA a nad Japonskem vybuchly první atomové pumy - obrací se hlavní zájem „čisté fyziky“ ještě k menšímu předmětu, totiž k t. zv. elementárním částicím, tedy k oněm (až dosud) nejnepatrnějším částicím, ze kterých je složeno jádro a obal atomu. Vedle již známých lehkých částic (elektron, positron) a těžkých částic (proton, neutron), byla objevena řada nových útvarů, které se podle své hmoty řadí částečně mezi předchozí (meson), částečně jsou nadměrně těžké (hyperony). Nejvýznačnějšími jejich vlastnostmi jsou jednak původ z kosmického ultrazářením, jednak jejich krajně rychlá proměna nebo vyzáření. Je zde pravidlem poločas 10^{-9} sec a méně, na př. neutrální π -meson existuje průměrně asi jen $5 \cdot 10^{-16}$ sec! Ač četnými výzkumy bylo objasněno chování těchto částic, přece jsme dosud velmi vzdáleni jejich theoretickému porozumění. Zde může dále pomoci především pokus, při němž by se nemělo litovat ani námahy ani nákladů, v tom jsou jednotny všechny odborné kruhy.

Tento výpad do „podsvětí“ atomu je nejobtížnější a nejnákladnější podnikání, jaké až dosud fyzikové započali. Prof. Heisenberg stručně naznačil potřebný náklad pro další a ještě hlubší pronikání do vnitřních obvodů hmoty, když přednášel svůj referát o elementárních částicích a o příslušných výzkumech. Chtěl totiž osvětlit kolem nich vládnoucí nejasnosti. Velmi poučná byla jeho řádová porovnání velikostí energií potřebných v jednotlivých fázích výzkumného postupu. Spalováním, chemickými přeměnami látky nebo elektrickým světelným podnětem byl napřed „rozbit“ elektronový obal atomu, což se tedy stalo dávno známými operacemi při technických teplotách až do výše několika tisíc stupňů nebo - podle výrazů jaderné fyziky - při „termické energii“ několika set eV.

Útok na stotisíckrát menší atomové jádro vyžaduje již milionkrát větších „nákladů“: teplot uvnitř atomové pumy 10^6 až 10^8 °C, nebo milionů elektronvoltů (MeV), které získáváme v zařízeních pro zrychlení částic. Již r. 1932 se podařilo Angličanům Cocroftovi a Waltonovi, jako prvním ostřelovat protony (vodíkovými jádry) jádra prvku lithia a rozbit je ve dvě heliová jádra. Přivést elementární částice samy k reakci, t. j. proměnit je navzájem rázy nebo je transformovat na záření a tím poznat jejich vlastnosti, k tomu je zapotřebí ještě tisíckrát větších energií asi kolem 10^9 až 10^{12} eV. Takovými energiemi jsou však vybaveny ve volné pří-

rodě výlučně extrémně rychlé částice „výškového záření“ kosmického původu. Abychom mohli zacházet na Zemi tak velikými energiemi, je zapotřebí přímo gigantických zrychlovačů, v nichž je uměle vyrobenému proudu částic udělena potřebná obrovská kinetická energie. Jsou to cyklotron (vynalezený Lawrenceem), betatron, nověji synchrotron a řada dalších. Proti kosmickému záření má takový proud částic tu výhodu, že je kontinuální, tedy intenzivnější, čímž se patřičně zvyšuje „pravděpodobnost zásahu“, t. j. množství srážek částic, resp. jader.

V ženevském „Evropském ústředí pro nukleární fyzikální výzkum“ (CERN) staví se takové dosud největší zrychlovací zařízení proton-synchrotron (bevatron), ve kterém má být udělována částicím výsledná energie $25 \cdot 10^9$ eV (což píšeme 25 GeV a čteme 25 gigaelektronvoltů). Tento mocný stroj bude mít skleněnou trubku ve tvaru prstence, vyčerpanou na nejvyšší vakuum a obklopenou sto čtrnácti velkými magnety o váze rychlíkové lokomotivy, jejichž pole musí být nastavena s velkou přesností. Uvnitř stroje mají protony nakonec vykonat vlivem zrychlovacího pole, vytvořeného silným vysokofrekvenčním vysilačem, asi 300 000 oběhů za vteřinu, což znamená, že při vybočení mají téměř rychlost světla. Průzkum částic umožní zde spolupráce dvanácti zemí. Ve vzdálenosti 100 km od Moskvy v elektrofyzikální laboratoři Sovětské akademie věd se dokončuje podobné mamutí zařízení, zvané „synchrofazotron“. Jeho prstencové zařízení má průměr 60 m, magnety váží celkem 36 000 t a má vyrobit výslednou energii 10 GeV v podobě proudu protonů.

Největší potíž u takových zařízení je však ve vzájemném jemném sladění všech jednotlivých členů okruhů tak, aby celek také skutečně fungoval, t. j. aby bylo dosaženo vypočtených zisků energie. Američané dosáhli po dlouhé námaze konečného úspěchu u obou až dosud postavených zařízení „kosmotronu“ v Brookhaven o výkonu 2,5 GeV a „bevatronu“ v Berkeley s výkonem 6,2 GeV i více.

V Ženevě bude rovněž postaven za vedení prof. W. Gentnera z Freiburgu „synchrocyclotron“ k zrychlování deuteronů s energií 600 MeV. Také v NSR se podobně pracuje. V nové budově v ústavu pro nukleární fyziku a fyziku záření v Bonnu se dokončuje menší synchrocyclotron, zatím co v sousedním universitním fyzikálním ústavu se započalo se stavbou elektronového synchrotronu pro 500 MeV, který má být druhým největším na světě. V Lebeděvově institutu moskevské akademie mají rovněž takové zařízení dávající 265 MeV výsledné energie.

Zatím co konstrukce a spuštění těchto mocných zařízení pro zrychlení částic je dílem silnoproudých inženýrů a vakuových techniků, počíná velmi namáhavá práce fyziků teprve vyčíslováním mikroskopicky jemných stop na fotografických deskách, které představují po vyvedení proudu částic hlavní „cíl“ bombardování. Tyto dráhy částic označují na př. rozbití jader, stopy lehkých a těžkých mesonů a hyperonů (t. j. krátkodobých útvarů, které ukládají výzkumu ještě mnohé hádanky) i tvoří konečně dešť nebo „kaskády“ nadměrně rychlých částic, které mohou zplodit až dvacet částic - „dcer“. Fyzik zde získá nejdříve hmatatelné důkazy vzájemné proměny hmoty v energii a obráceně, jak to uvedl již před padesáti lety A. Einstein ve své rovnici ekvivalence $E = m \cdot c^2$, částice zmizí a zanechají kvantum zářivé energie, které samo může „vyráběti“ nové částice. T. zv. „fotogenní reakce jádra“, které lze pozorovat na atomovém jádru při vzniku takových na ener-

gů bohatých kvant (γ -paprsky), jsou rovněž výhodným předmětem jak pro po kus, tak i theorii. V ústavu pro pokročilé studium v Chicagu (Institut for Advanced Studies) byla sestrojena „bublinková komora“, to jest Wilsonova komora pro sledování stop s tekutým vodíkem, ve které je stereofotograficky sledován náraz uměle vyrobených mesonů a hyperonů na atomová jádra, která jsou tam velmi hustě nahromaděna.

Koncem minulého roku se podařilo skupině vědců u prof. Segré v Berkeley (Kalifornie), pracujících na bevatronu, uměle vyrobit „antiproton“, jehož existence byla podle theoretických závěrů již dříve předvídána. Tato částice, jež má stejnou hmotu jako proton a opačný (negativní) náboj, by spolu s kladně nabitým elektronem dávala vznik inverznímu atomu vodíku, který by se navenek musel chovat právě tak elektricky neutrálně, jako obyčejný atom vodíku. Positron byl objeven Andersonem již v r. 1932. Studium reakcí těchto anti-částic se jeví velmi významné, na př. pro astrofysiku. Již dávno se uvažuje, zda by mohlo existovat někde ve vesmíru nahromadění „anti-hmoty“, která by nutně při případných srážkách s hmotou našeho světa - a spojením s ní - zanikla a změnila se v záření o nepředstavitelné energii. Na štěstí nebyla dosud zpozorována žádná stopa „inverzního vesmíru“. Zatím není třeba k hlubšímu poznání přírody vůbec žádných gigantických kosmických ohňostrojů. Nepatrné stopy v citlivé vrstvě desky, které lze nakonec získati tak obrovským technickým úsilím, dávají nám dosti zpráv a poskytují vždy nové hádanky z nejhlubšího nitra světového dění.

Přitom je pozoruhodné, že k postavení mamutího zrychlovače došel výzkum opět věčnou snahou horlivě následovat přírodu. Stopy částic byly totiž získány již dávno jiným, v zásadě velmi primitivním způsobem. Byl vyslán svazek zvláště sensibilisovaných fotografických desek, zavěšených na balonech, až do výše 40 km do stratosféry, kde dopadá ještě poměrně nezeslabené kosmické záření. Takové systematické balonové vzestupy podnikala před několika lety skupina anglických, německých a italských fyziků v Sardinii a nad západním Středomořím. Zhodnocení stop rozpadu v emulsi desek umožnila již řadu cenných předběžných závěrů o hmotě, rychlosti, životnosti a druzích proměn částic výškového záření, jehož původ nutno hledat dílem ve sluneční koruně, dílem i ve velmi vzdálených kosmických prostorech. Tento postup je přirozeně odvislý od toho, co právě náhodou příroda poskytuje. Byly zde však také zjištěny tajuplné částice, jejichž energie je i více než 1 000 GeV. Tato energie se zdaleka vymyká všem laboratorním možnostem a vynořuje se otázka, jaká to mohou být pole, která jim dávají tak mimořádná zrychlení. Také zde považuje výzkum za svou úlohu vyrvat přírodě další tajemství a v dalším vyložit theorie, pozadí existence a souvislosti proměn: energie - hmota. Přitom je situace theoretiků ještě podstatně těžší, i když může práce experimentátorů jednotlivě být rovněž velmi namáhavá, neboť každé nové pozorování může přes noc zavrhnout těžce dosažené vzorce a výpočty.

Nositel Nobelovy ceny za fyziku, prof. W. E. Lamb mladší z Kalifornie, se jednou vyjádřil zcela drasticky: „Objevitel nové elementární částice považuje za obvyklé obdržeti za to Nobelovu cenu. Takový objev by však měl být dnes spíše potrestán peněžitou pokutou 10 000 dolarů.“

Zde je možno položit otázku, jakému konečnému účelu má sloužit neslýchaná

námaha vynaložená na tuto práci a obrovské výdaje? Jaký bude jednou konečný výsledek výzkumu elementárních částic?

Téměř před dvěma a půl tisíci lety řekl Herakleitos, že pralátkou (prapodstatou) našeho světa je oheň, a to vlastní, co zůstává na ní, je trvalá změna a proměna věcí „panta rhei“. Zaměňme jen slovo oheň za moderní výraz „energie“ - a oheň je vskutku energií ve své proměně, je hybnou silou - a vidíme v Einsteinově prohlášení o ekvivalenci hmoty a energie potvrzení slov řeckého filosofa výsledky moderní fyziky. Ovládajíc vzájemné přeměny energie a hmoty, pozvedla se moderní fyzika již daleko za hranice tužeb starých alchymistů a je snad již blízka poznání, „co svět v nitru spojuje“.

(Podle přednášky napsal E. Haux; přeložil Ing. M. Müller.)

Prof. Dr. Emil Kašpar, Praha:

Skládání kmitů kolmých směrů

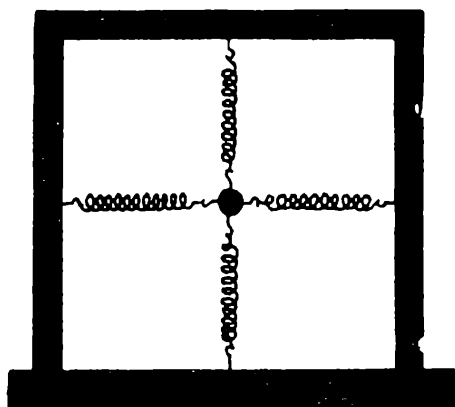
V případě že dvě harmonické složky kmitají ve směrech navzájem kolmých, bylo by nutno provést časové rozvinutí výsledného pohybu do směru, který je ke směrům obou složek kolmý a výchylky vektorově sečíst. Tímto znázorněním bychom dostali nějakou prostorovou křivku. Takové znázornění lze provádět jen v průmětu na nákresnu; bylo by však nepřehledné. Výsledný pohyb se však často děje v rovinné křivce a proto jej lze dosti názorně zobrazit bez časového rozvinutí.

Také zde, jako při skládání stejnosměrných kmitů (Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 1, str. 410), závisí tvar výsledné dráhy podstatně na poměru kmitočtů obou složek, dále na fázovém rozdílu a na poměru amplitud. Pro přehlednost probereme zvlášť tyto dva případy:

obě složky mají *kmitočet stejný*;

obě složky mají *kmitočet různý*.

Budeme předpokládat, že amplitudy obou složek jsou stejné.



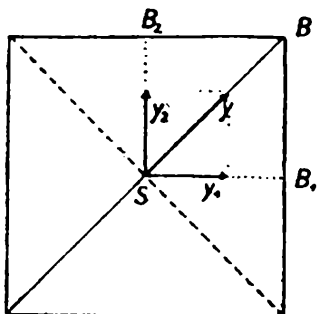
Obr. 1

A. Skládání dvou kolmých kmitů stejného kmitočtu.

Pokus. Pohyb vzniklý složením dvou kolmých kmitů o stejném kmitočtu mohli bychom si ukázat na přístroji podle obr. 1. V něm je kulička připevněna čtyřmi stejnými ocelovými pružinami ke středům stran čtvercového rámu. Svislé pružiny by samy o sobě způsobily kmitání kuličky ve směru svislém

a vodorovné pružiny samy o sobě by kmitaly kuličkou vodorovně. Za současného působení obou pružin koná kulička pohyb, který je výslednicí obou složek.

Už jsme si řekli, že výsledný pohyb závisí také na fázovém rozdílu obou složek. Fázový rozdíl však můžeme stanovit jen tenkrát, dohodneme-li se o kladném, resp. záporném směru výchylek. U vodorovného kmitání považujeme za kladnou výchylku vpravo a u svislého je kladná výchylka nahoru od rovnovážné polohy. V dalším probereme tyto důležité případy:

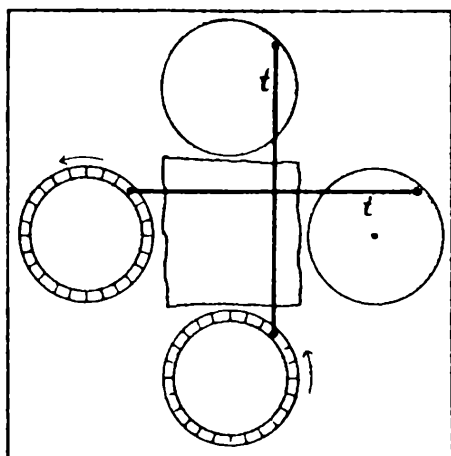


Obr. 2

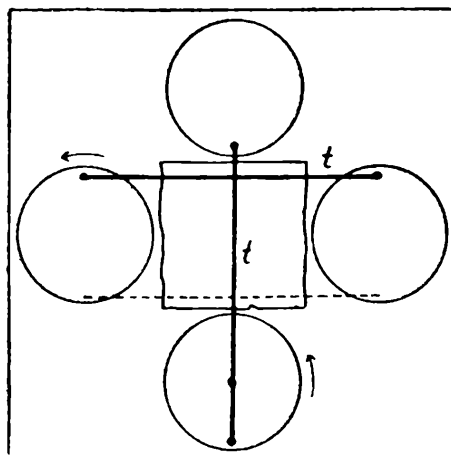
1. fázový rozdíl je 0° nebo 180° ;
2. fázový rozdíl je 90° nebo 270° ;
3. fázový rozdíl je jiný než v uvedených případech.

1. *Fázový rozdíl je $\varphi = 0^\circ$.* V tomto případě procházejí oba kmity v určitém okamžiku současně rovnovážnou polohou, a to vodorovná složka směrem vpravo, svislá směrem nahoru. Protože obě výchylky y_1 a y_2 jsou v každém okamžiku stejně veliké, spadá výsledná výchylka y stále do směru úhlopříčky (obr. 2). Výsledný pohyb je opět *kmitavý*, jehož amplituda je rovna úhlopříčce SB čtverce se stranami rovnými amplitudám SB_1 a SB_2 obou složek.

Je-li fázový rozdíl $\varphi = 180^\circ$, pak se tento případ liší od předešlého jen tím, že zatím co na př. svislá složka prochází rovnovážnou polohou směrem nahoru, jde vodorovná složka směrem vlevo. Výsledkem je opět harmonický pohyb jako v předešlém případě, který se však děje ve směru druhé úhlopříčky (v obr. 2 je vyznačena čárkovaně).



Obr. 3a



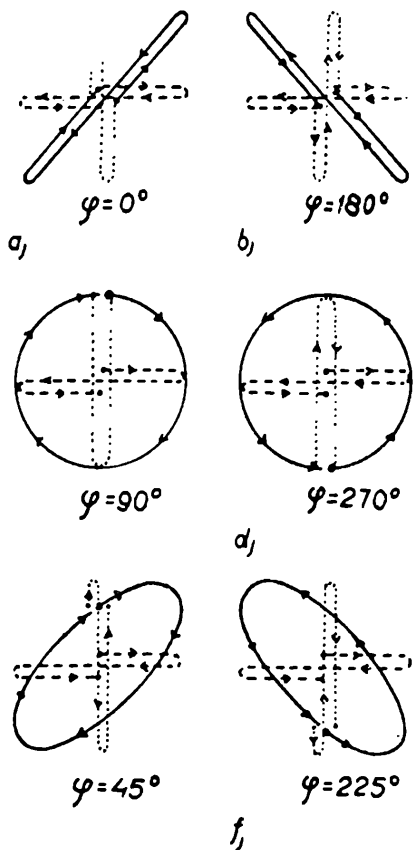
Obr. 3b

Pokus. Vřele doporučuji, aby si čtenář sestrojil jednoduchý přístroj, pomocí něhož si může snadno nakreslit výslednou dráhu nejen v uvedeném případě, nýbrž i ve všech dalších. Přístroj je schematicky znázorněn v obr. 3a. Na prkénko nebo na tuhý papír připevníme otáčivě čtyři stejné papírové kotouče vystřižené z lepenky. Dvojice protilehlých

kotoučů spojíme táhly t , zhotovenými na př. z rovného drátu, opatřených na konci očky. Spojení provedeme třeba pomocí připínáčků umístěných hrotem nahoru.

Otáčíme-li současně oběma dvojicemi kotoučů, pak průsečík obou táhel znázorňuje výsledný pohyb. Lépe je však zakreslovat postupně jednotlivé polohy průsečíku táhel na podložený papír.

Můžeme si tu na př. ukázat tyto případy: Necháme-li vodorovné táhlo v klidu a otáčíme-li rovnoměrně pouze kotouči spojenými táhlem svislým, pak průsečík táhel koná harmonický pohyb ve vodorovném směru. Tak dostáváme vodorovnou složku. Necháme-li naopak svislé táhlo v klidu a otáčíme rovnoměrně oběma kotouči s vodorovným táhlem, máme v pohybu průsečíku táhel obraz složky svislé. Otáčíme-li v kladném smyslu (t. j. proti pohybu hodinových ručiček) rovnoměrně a stejně rychle oběma dvojicemi kotoučů tak, že na počátku pohybu je svislé táhlo v nejnižší poloze a vodorovné co nejvíce vpravo, pak dostáváme obraz výslednice při fázovém rozdílu $\varphi = 0^\circ$. Posuneme-li však svislé táhlo do nejvyšší polohy (o 180° dopředu) a vodorovné necháme co nejdále vpravo a potom otáčíme oběma kotouči v kladném smyslu stejnou úhlovou rychlostí, pak průsečík táhel opisuje kmitavý pohyb ve směru druhé úhlopříčky.



Obr. 4

Průslušnou křivku dostaneme vždy tak, že zaznamenáváme tužkou jednotlivé polohy průsečíku táhel na podložený papír a potom body spojíme čarou. Přitom si poznamenáváme smysl, ve kterém bod tuto křivku opisuje. Pro $\varphi = 0^\circ$ nebo 180° se křivka redukuje na dvojitou úsečku, proto je dráha opisována střídavě v obou směrech.

V obr. 4a, b je schematicky vyznačen vznik výsledného kmitavého pohybu z obou složek. (Vodorovnou složku považujeme za první a svislou za druhou.)

2. *Fázový rozdíl $\varphi = 90^\circ$.* V tomto případě je svislá složka o $1/4$ periody napřed. To znamená: v okamžiku, kdy vodorovná složka prochází rovnovážnou polohou směrem vpravo, je svislá složka již v horní krajní výchylce (obr. 4c). Provedeme-li složení kmitů bod za bodem, vidíme, že výsledný pohyb je rovnoměrný pohyb po *kružnici*. Částice se pohybuje po kružnici ve směru pohybu ručiček hodinových (oběh v záporném směru).

Pokus. Vznik tohoto výsledného pohybu si můžeme znázornit také pomocí přístroje (obr. 3). Kotouči otáčíme ve stejném smyslu jako v případě stejných fází, ale fázový rozdíl 90° nastavíme při počáteční poloze kotoučů tak, že svislé táhlo je na počátku v nejnižší (rovnovážné) poloze a vodorovné v krajní horní poloze (na obr. 3b plně vytažené úsečky).

Je-li fázový rozdíl obou složek 270° , t. j. svislá složka předbíhá o $3/4$ periody před vodorovnou, pak se výsledný pohyb změní jen potud, že se změní smysl oběhu částice po kružnici v obrácený (v kladný) (obr. 4d).

Pokus. Vytvoření kruhového pohybu složením složek, které se liší fázovým rozdílem 270° , můžeme si demonstrovat naším přístrojem tak, že počáteční polohu svislého táhla necháme stejnou jako v případě, kdy bylo $\varphi = 0^\circ$, ale počáteční poloha vodorovného táhla je v krajní dolní výchylce (obr. 3b, čárkovaná vyznačená poloha).

V obou posledně jmenovaných případech částice koná jako výsledný pohyb kruhové kmity, a to buď pravotočivé (ve smyslu oběhu hodinových ručiček), nebo levotočivé (proti oběhu hodinových ručiček). Kruhové kmity jsou důležité v nauce o světle a setkáme se s nimi ještě v dalším výkladu.

3. *Fázový rozdíl je obecně jiný než v předešlých případech.* V každém jiném případě než bylo uvedeno, je výsledný pohyb částice *eliptický* (obr. 4e, f). Smysl oběhu je buď kladný nebo záporný. I tyto případy si můžeme znázornit naším přístrojem, když na př. na počátku necháme svislé rameno v rovnovážné poloze a druhé dáme do kterékoliv polohy mezi rovnovážnou polohou a krajní polohou. V těch případech říkáme, že částice koná *eliptické kmity*.

Poznámky. 1. Nejsou-li rozkmity obou složek stejně veliké, není výsledná dráha částice v předešlých případech nikdy kruhová, nýbrž eliptická.

2. Velmi často sledujeme pohyb částice pomocí průvodiče, t. j. úsečky, spojující rovnovážnou polohu s částicí. Mluvíme pak o *harmonických, kruhových a eliptických kmitech vektoru průvodiče*. To je důležité na př. v nauce o světle, kde nelze mluvit o pohybu částic. Říkáme pak, že *kmitá světelný vektor*. Tento výrok však je více méně obrazný. Ve skutečnosti se tu mění intenzita elektrického a magnetického pole, protože světlo je druh elektromagnetického vlnění. Podrobnější poučení naleznete v učebnicích fyziky v oddílech o šíření elektromagnetického vlnění.

B. Skládání dvou kolmých kmitů různého kmitočtu.

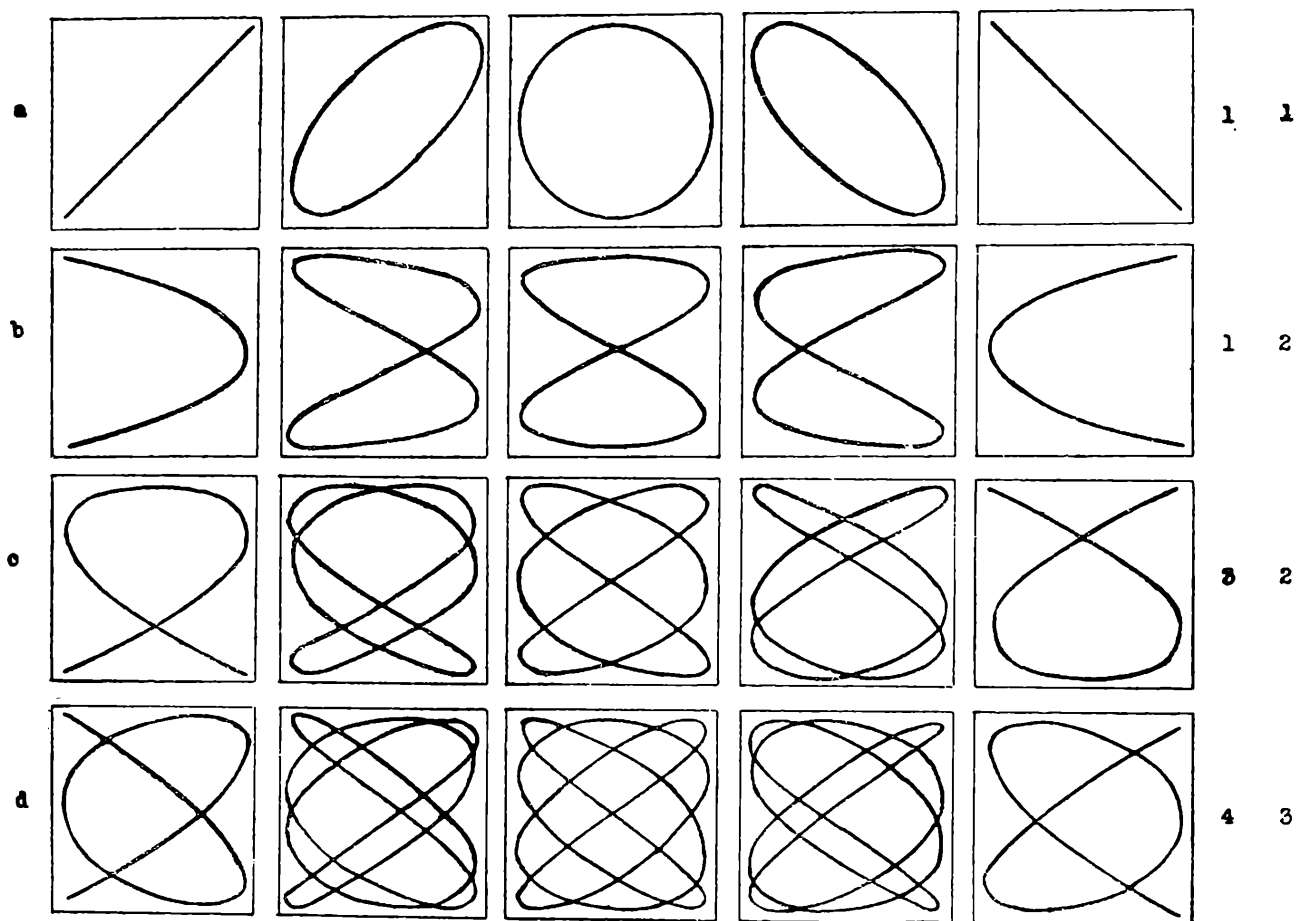
Jestliže složky nemají stejný kmitočet, pak je výsledný pohyb zpravidla složitější než byl v případě, kdy kmitočty složek byly v poměru 1 : 1. Podle poměru kmitočtů a ovšem podle fázového rozdílu na počátku pohybu, dostáváme dráhy ve formě více méně složitých křivek. Tyto křivky se nazývají podle francouzského fyzika *Lissajousovy* (čti: *Lisažúovy*) *obrazce*.¹⁾

Pokus. Přístrojem podle obr. 3 je můžeme také sestavit. Otáčení kotoučů však není stejně rychlé. Je-li na př. poměr kmitočtů vodorovného a svislého kmitání 1:2, tu se kotouče, které pohybují vodorovným táhlem (kmitajícím svisle), otáčejí dvakrát rychleji než druhá dvojice.

V obr. 5b jsou vyznačeny Lissajousovy obrazce pro poměr kmitočtů 1 : 2 při různých počátečních fázových rozdílech. Poměr velikostí amplitud při jejich řádově stejných velikostech nemá velký vliv na základní charakteristický tvar křivek. V obr. 5 jsou amplitudy složek stejné. V dalších obrázcích 5c, d jsou Lissajousovy obrazce pro poměry kmitočtů 3 : 2 a 4 : 3. Vidíme zřetelně, že křivka je tím složitější, čím je poměr kmitočtů složek vyjádřen většími (nesoudělnými) čísly.

Lissajousových obrazců a měření pomocí těchto obrazců se v technice používá stále více. Užívá se k tomu zpravidla *kathodového oscilografu*. Jeho podstatou je svazek katodových paprsků, t. j. letících elektronů, které dopadají na fluorescenční stínítko, kde je jejich stopou světlý „bod“. Svazek je elektricky vychylován

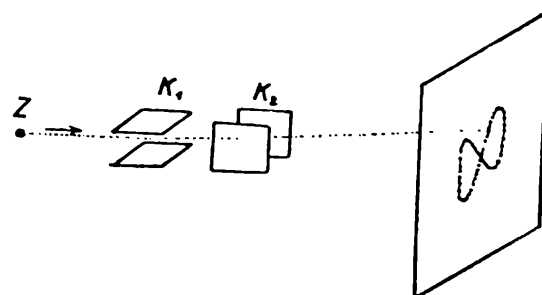
¹⁾ J. A. Lissajous (1822–1880).



Obr. 5

ve dvou směrech navzájem kolmých (schema 6). Vychylování se děje elektrickým polem mezi dvěma dvojicemi kovových destiček K_1 a K_2 , na které se přivádí příslušné elektrické napětí. Vodorovné vychylování se děje zpravidla t. zv. *pilotními kmity*, u nichž se pohyb paprsku děje zleva doprava rovnoměrně a s říditelnou frekvencí. Zpět skočí paprsek takovou rychlostí, že je jeho stopa na stínítku téměř nepozorovatelná. Ale u oscilografů je většinou zařízení, kterým můžeme na obě dvojice desek přivádět napětí libovolného průběhu.

Tak na př. lze na obě dvojice vychylujících destiček přivést napětí střídavého proudu ze sítě, jehož průběh je téměř harmonický. Výsledný obrazec je pak úsečka skloněná v úhlu 45° , je-li amplituda svislé i vodorovné složky stejná. Můžeme tak ukázat i vliv kapacity nebo samoindukce, zařazené do vedení, na fázi střídavého proudu. Fázové zpoždění nebo zrychlení jedné složky o kosý úhel se

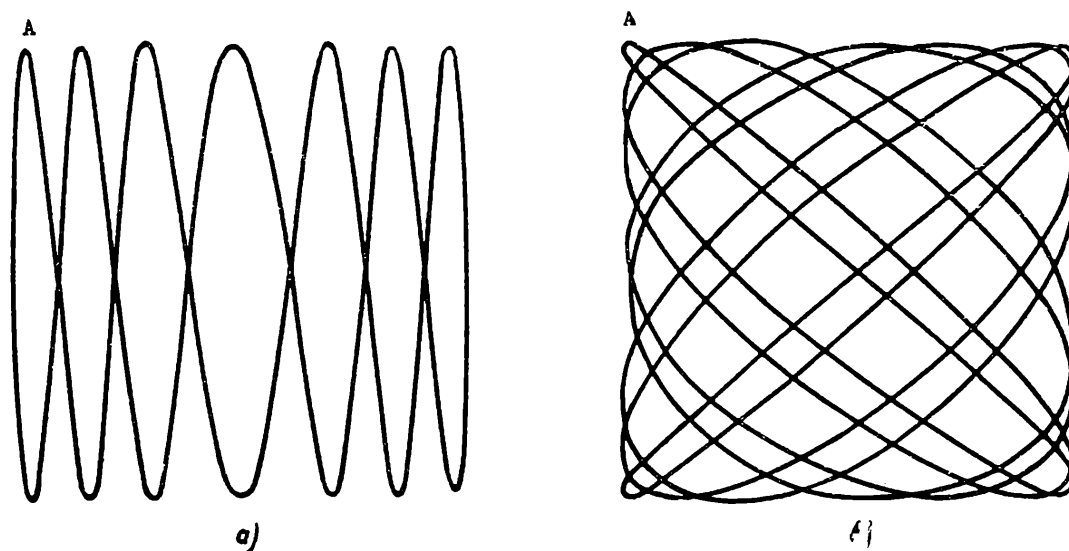


Obr. 6

projeví eliptickými kmity, o pravý úhel kruhovými kmity. Přivádíme-li na destičky střídavá napětí různých kmitočtů, pak dostáváme na fluorescenčním stínítku obrazovky stopy „bodu“ ve tvaru různých Lissajousových křivek. Tím

způsobem lze na př. srovnávat, po př. i měřit kmitočty různých dějů, deformací harmonického napětí, fázová posunutí atd.

Úloha. Při studiu střídavých napětí různých kmitočtů se na stínítku objevila křivka, v jednom případě asi taková, jak ukazuje obr. 7a, v jiném případě podle obr. 7b. Co můžeme říci o poměru kmitočtů střídavých napětí, které byly přivedeny na destičky oscilografu v případě a), resp. b)? Pokuste se určit číselně poměr kmitočtů složek v obou případech.



Obr. 7

Řešení. V případě a) připadá na jeden vodorovný kmit několik kmitů svislých. Proto je v tomto případě kmitočet svislé složky několikrát vyšší než kmitočet složky vodorovné. Přesně je poměr kmitočtů vodorovné a svislé složky 1:7.

V případě b) dráha se skládá ze závitů přibližně podoby kruhové, eliptické nebo téměř přímé. Odtud můžeme soudit, že kmitočty obou složek jsou přibližně stejné. Poměr kmitočtů je zde 8:7.

Přesně spočítáme poměr kmitočtů tak, že vyjdeme od určitého místa dráhy (na př. A), sledujeme dráhu a počítáme, kolik vodorovných kmitů se vykoná, než se vrátíme po křivce k témuž místu. Totéž počítáme pro kmity svislé. Poměr těchto čísel je poměr kmitočtů.

Prof. Dr. Emil Kašpar, Praha:

Interference vlnění

Známe-li zákony skládání kmitů, můžeme snadno vysvětlit vznik a vlastnosti *složených vlnění*, která jsou podstatou některých důležitých fyzikálních dějů i technických aplikací. I t. zv. *stojaté vlnění* a *chvění těles* vysvětlujeme složením dvou stejných vlnění, která postupují proti sobě. Těmito jevy se však budeme zabývat ve zvláštním článku. V tomto článku si vysvětlíme, jak vzniká složené vlnění postupné, t. j. odvodíme zákony *interference postupného vlnění*. Je tedy interference vlnění děj, při němž se skládají vlnění téhož druhu, která postupují týmž směrem. Tak na př. víme, že dva zvuky, které se šíří týmž prostředím a týmž směrem, navzájem se ovlivňují. Výsledek vzájemného působení může být někdy dosti neočekávaný. Může se na př. stát, že se dva tóny interferencí úplně zruší.

Jak je známo ze školské fyziky, jednoduché vlnění je a nebo si je můžeme zobrazit jako kmitání všech částic hmotného prostředí podle určitých pravidel. Můžeme proto při skládání vlnění užít zákonů, které jsme si odvodili dříve¹⁾ pro skládání harmonických kmitů. Další naše úvahy nebudou proto ničím jiným než praktickým užitím pravidel, která již známe. Je samozřejmé, že si všechny případy osvětlíme na názorných modelech, třeba jen myšlených, nebo na grafech.

Pro jednoduchost nejprve předpokládáme, že máme co dělat s vlněním *příčným* a *lineárně polarisovaným*, které se šíří v přímé řadě bodové. (Lineární polarisace znamená, že všechny částice kmitají rovnoběžně s určitým směrem, kolmým k řadě bodové.) Budeme se zabývat dvěma důležitými případy:

1. Interferencí dvou vlnění, u nichž se kmitání děje *ve stejném směru*; kmity obou vlnění se dějí v téže kmitové rovině.

2. Interferencí dvou vlnění, u nichž se děje kmitání *ve směrech navzájem kolmých*; kmitové roviny obou vlnění jsou navzájem kolmé.



Obr. 1

1. Interference vlnění stejnosměrných kmitů

Děj si nejprve zhruba znázorníme na jednoduchých modelech. Představme si, že se dvě přímé řady bodové spojují v jednu a v nich se šíří dvě stejná vlnění se stejnými směry kmitů (obr. 1). Kdybychom si chtěli tento děj znázornit nějakým skutečným modelem, bylo by to asi tak, jako by po dvou stejných přítocích postupovala dvě vlnění směrem k soutoku *A* (obr. 2) a pak postupovala po hladině výsledné strouhy *AB*, jejíž hladina by byla stejně široká jako hladina jednoho přítoku. (Jde tu o velmi hrubé názorné schema. Děj by ve skutečnosti byl složitější.)

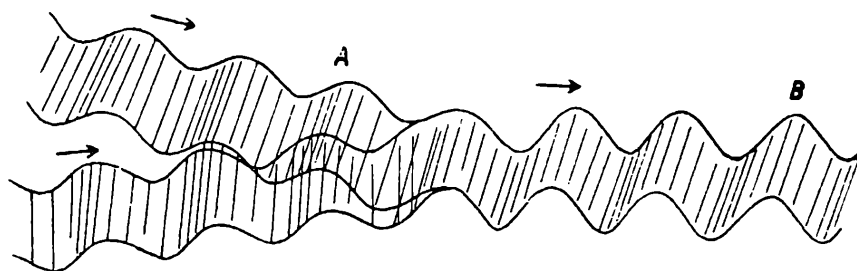
Jaký je výsledný děj složením takových dvou vlnění? Především víme, že se obě složky šíří řadou bodovou stejnou rychlostí. Analogicky jako u skládání kmitů mohou u interference vlnění nastat dva případy:

- a) obě složková vlnění mají *vlnovou délku stejnou*;
- b) obě složková vlnění mají *vlnovou délku různou*.

Vlnová délka λ závisí na rychlosti šíření c a na kmitočtu f , s kterým kmitají jednotlivé částice prostředí, známým vztahem $\lambda = \frac{c}{f}$. O rozkmitu nebudeme zatím nic zvláštního předpokládat. Obě interferující vlnění mohou tedy mít rozkmity obecně různé. Důležité však jest, že se obě vlnění mohou sejít v místě *A* s různou

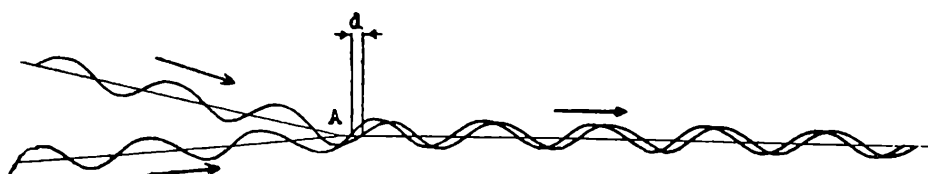
¹⁾ Rozhledy matem.-fyzikální, str. 410 a str. 31 tohoto čísla.

fázi kmitajících částic. U vlnění je výhodnější vyjádřit tento rozdíl tak zvaným *dráhovým rozdílem* d . Z obr. 3 vidíme, že dráhový rozdíl je vlastně vzdálenost nejbližších míst, v nichž mají obě vlnění v určitém okamžiku stejnou fázi.



Obr. 2

Při této příležitosti si musíme uvědomit zásadní rozdíl znázorňování dějů při skládání kmitů od znázorňování skládání vlnění. U kmitavého pohybu jsme pohyb znázorňovali časovým rozvojem. Časový rozvoj je obraz pohybu bodu, který se děje v přímce, rozvinutý do roviny. Přitom celý náčrt udává, jak se *jedna částice* pohybuje v určitém *celém časovém úseku*. Naproti tomu téměř ve všech dalších nákresech se nám budou sice objevovat také sinusoidy a jiné periodické křivky, ale tyto nákresey budou znázorňovat skutečné rozložení výchylek všech *částic* v celé řadě bodové, avšak v *jediném* určitém *okamžiku*. Budou to tedy jakési mžikové snímky skutečného děje.



Obr. 3

a) *Interferující vlnění mají stejnou vlnovou délku*. Kdyby se bodovou řadou šířila každá složka zvlášť, mohli bychom každou složku znázornit pokusem s vlnovkou z drátu, posouvanou směrem šíření vlnění. Pro náš účel si můžeme vypomoci jednodušším způsobem: Na proužky průsvitného papíru narýsuje obrazy dvou skládaných vlnění, jedno na př. čárkovaně, druhé tečkovaně (obr. 4, 5). Vlnivý děj pak si znázorníme posuvem obou proužků rychlostí c vpravo. Vodorevné přímky v obrázcích značí křídovou polohu přímé řady bodové a úsečky se šipkami výchylku bodu v příslušném místě a v určitém okamžiku, pro nějž je vzat daný snímek pohybu. Chceme-li znát průběh výsledného děje, pak položíme obě vlnovky na sebe tak, aby osy splynuly a v každém místě výchylky sečteme.

(Pokračování)



Co vidíme na nebi

Řízené balistické střely

Řízené balistické střely jsou v posledních měsících v popředí světového zájmu. Vybrali jsme z časopisu *Aviation magazine*, č. 235, roč. 1957, zprávy o nich za posledních několik měsíců.

11. července 1957: Americký tisk sděluje, že střela „Atlas“, vyrobená za 200 milionů dolarů ve Spojených státech, která měla přeletět Atlantik (6500 km), havarovala při startu a byla z bezpečnostních důvodů nuceně zničena.

5. července: Tisk v USA oznamuje, že v SSSR vystřelili dálkovou interkontinentální střelu.

22. srpna 1957: Japonské observatoře zaznamenávají nukleární výbuch ve výši 30 000 m na severovýchod od Kiota na sovětském území.

26. srpna: TAS oznamuje, že Sovětský svaz je schopen vypustit raketu, která dosáhne kteréhokoliv místa na světě.

28. srpna: V sovětské Aviacii gen. Pokrokovský sděluje, že raketa na termonukleární pohon rychlosti 25 000 km/hod ve výši 1000 km nebude mít v zásahu cíle větší chybu než 10 až 20 km.

30. srpna: Americký tisk oznamuje, že v SSSR od června vypustili čtyři dálkové řízené střely na Sibiři. Dolet má být 8000 km. Kromě toho se tam zkouší střely s malým donosem od 150 do 220 km a středním donosem od 900 do 1800 km.

4. září 1957: Dr Eugen Saenger píše ve Stuttgartu, že v SSSR mají raketu T-3, která má donos 8000 km a dostup 1450 km. Další jsou typ M 104 a T-4A, která může dosáhnout z Leningradu New York v 84 minutách.

Z. R.

Několik slov o raketách

Pro zajímavost a pro získání alespoň přibližné představy o tomto problému jsme pro vás sestavili do tabulky nám známé technické údaje o některých raketách, kterých bylo užíváno jako zbraně ve druhé světové válce nebo později pro výzkumné účely od r. 1945. Jest však řada raket, o nichž dosud nebyly podrobnější zprávy vůbec uveřejněny.

V Německu prof. V. von Brand již v r. 1933 navrhl pro vojenskou potřebu raketu označenou A-1 o délce 1,35 m. Výzkumné středisko v Penemünde pokračovalo v konstrukci a vyvinulo celkem deset typů raket, z nichž typ A-4 z r. 1940 o délce 14 m, váze paliva 12 500 kg s náloží 980 kg třaskavin byl pod názvem V-2 užit v r. 1944 ve válce proti Anglii. Raketa dosáhla výšky asi 40 km

a měla dolet až 350 km. Výtoková rychlost plynů činila 2100 m/sec a celkový tah byl 27 000 kg.

Tento zbrojní materiál převzali po válce Američané a v následující tabulce je v prvním sloupci uvedená V-2 pod názvem A-4. Proti německému originálu se příliš neliší. Také dále uvedené typy jsou jí podobné. Poslední z popsaných amerických raket typu A-4-WAC Corporal („Desátník“) je již dvojstupňová.

Označení rakety	A-4 (V-2)	Viking 1	„7“	Zvětšený typ 11	A-4, WAC Corporal
Doba a místo vypuštění	17. 12. 1946 White Sand	3. 5. 1949 White Sand	7. 9. 1951 White Sand	25. 5. 1954	24. 2. 1949
Délka (m)	14,8	13,7	14,8	12,8	19,2
Průměr těla (cm)	165	81	81	114	165
Průměr včetně stabilisátoru (m)	3,58	2,8	2,8	4,05	3,58
Váha při startu (kg)	13 137	4 377	4 867	6 806	13 026 (oba stupně)
Palivo a jeho váha (kg)	tek. kyslík a alkohol	tek. kyslík a alkohol	tek. kyslík a alkohol	tek. kyslík a alkohol	okysličovačlo a anilin
Velikost tahu při startu (kg)	23 587	9 276	9 561	9 707	25 400
Max. rychlost (m/sec)	1 647	1 052	1 788	1 920	2 302
Max. výška (km)	187	80	219	255	393
Doba hoření rakety (sec)	69	54	72	104	86

Již řadu let se zabývají v SSSR, USA a ve Velké Británii možnostmi vyslání umělé družice naší Země. V dalším uvedeme údaje o projektovaných raketách nutných pro vynesení této oběžnice.

Projekt rakety „Mouse“ provedené v první variantě Britskou meziplanetární společností, udává její délku 15,5 m a největší průměr těla 188 cm. Celková váha této rakety (třístupňové) má být při startu 16 800 kg, z čehož je 11 419 kg paliva, kterým je tekutý kyslík a hydrazin. Konečná váha vlastní oběžnice má být 4,5 kg, maximální rychlost 8047 m/sec a největší výška 800 km.

V rámci mezinárodního geofyzikálního roku projektují Američané odpálení rakety Vanguard („Předvoj“). Její délku udávají 21,9 m a maximální průměr těla 114 cm. Je to též třístupňová raketa, vážící při startu 9979 kg, vlastní oběžnice má vážit pouze 9,75 kg. Palivo v prvním stupni je tekuté, ve druhém tuhé a druh paliva ve třetím stupni není udáván. Největší rychlost posledního stupně je opět 8047 m/sec a docílená výška je uváděna 480 km.

Odborníci v SSSR předběžně neuveřejňovali technické údaje o svých plánech a překvapili svět skutkem. Dvě umělé družice po prvé v dějinách lidstva již delší dobu putují kolem země. Jejich částečný popis znáte z denního tisku.



Úlohy k řešení

Našim řešitelům

V této rubrice budeme pravidelně v několika prvních číslech uveřejňovat k řešení úlohy z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Doufáme, že se mnozí z vás pokusí o správná řešení. Neostýchejte se zaslat třeba i ojedinělé vyřešené příklady.

Podobně jako loni budou i letos nejlepší řešitelé odměněni hodnotnou odbornou literaturou. Jména těchto řešitelů uveřejníme v posledním, 10. čísle Rozhledů.

K usnadnění naší práce číslujte úlohy týmiž čísly jako v zadání. Řešení každé úlohy - tedy nikoli pouze výsledek - budiž vždy na zvláštním listu papíru formátu A4 nebo A5. Slovní text úlohy v řešení již znovu neopakujte. Pište čitelně perem nebo strojem pouze po jedné straně papíru. V pravém dolním rohu každého listu uveďte čitelně celé své příjmení a jméno s adresou a udejte též školu i třídu, kterou navštěvujete.

Ukázky řešených příkladů naleznete v č. 7 až 10 loňského ročníku. K řešení příkladů označených hvězdičkou stačí vědomosti z 9. třídy JŠŠ, mohou je však řešit i studující vyšších tříd.

Řešitele z letošních 11. tříd JŠŠ nebo 4. roč. odborných škol upozorňujeme, že svá řešení mohou zaslat i po maturitě do lhůty, která bude včas oznámena.

Řešení zasílejte na adresu: D o c. O t a S e t z e r, P r a h a 6, Z i k o v a 4.

Předpokládáme, že budete pracovat samostatně, bez cizí pomoci, a přejeme Vám hodně úspěchu.

Redakce

1. Součin plošných obsahů trojúhelníků A_0SA_i , kde A_0, A_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) je n prvních za sebou jdoucích vrcholů pravidelného $2n$ -úhelníka, vepsaného do kružnice o středu S , je roven dvojnásobku součinu výšek, spuštěných ze společného vrcholu S . Dokažte!

Josef Brejcha

2. Součin plošných obsahů rovnoramenných trojúhelníků A_0SA_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), $n > 1$, liché, kde A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) je n prvních za sebou jdoucích vrcholů pravidelného $2n$ -úhelníka, vepsaného do kružnice o středu S , je roven součinu plošných obsahů rovnoramenných trojúhelníků A_0SB_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), kde A_0, B_i jsou vrcholy pravidelného n -úhelníka, vepsaného do téže kružnice o středu S . Dokažte!

Josef Brejcha

3. Z výsledku úlohy 2. odvoďte pro $n > 1$, liché, vztah

$$\cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Josef Brejcha

4. Sečtěte

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$$

Jiří Sedláček

5. Jsou dány tři body A, B, C neležící v přímce a přímka t různoběžná s rovinou $\rho = (A, B, C)$. Sestrojte kulovou plochu procházející body A, B, C a dotýkající se přímky t .

Alois Urban

6. Jsou dány dvě roviny ρ, σ a přímka p různoběžná s ρ a nikoliv k ní kolmá. Sestrojte čtverec, jehož jedna strana leží na přímce p , druhá strana v rovině ρ a jeden vrchol v rovině σ .

Alois Urban

7. Po vodorovné hladké vozovce se valí dutý rotační válec, jehož vnější průměr je $d_1 = 0,6$ m, vnitřní průměr $d_2 = 0,5$ m a délka $l = 1$ m. Materiál válce je stejnorodý a má hustotu $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaká je celková kinetická energie válce (v joulech), je-li úhlová rychlost rotace válce kolem jeho podélné osy rovna $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$? Tření přitom pomíjíme.

(Moment setrvačnosti dutého rotačního válce kolem jeho podélné osy je dán vztahem: $I = \frac{1}{8} m (d_1^2 + d_2^2)$, kde m je hmota válce).

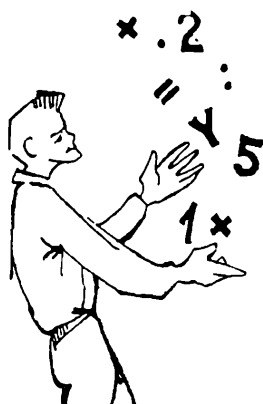
Václav Šindelář

8. Ve výšce $h_1 = 5$ m nad zemským povrchem je umístěno dělo, z něhož je vystřelen projektil. Hlaveň děla je při výstřelu vodorovná a směřuje k pólu. Jakou rychlost by musel projektil mít, aby obíhal v kruhové dráze kolem Země, kdyby nebylo odporu vzduchu? Zemi přitom pokládejme za dokonalou kouli (nikoliv tedy geoid s nepravidelným povrchem) o poloměru $R = 6,37 \cdot 10^6$ m, na jejímž povrchu je tíhové zrychlení $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$. Počítejme s hmotou Země $M = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Gravitační konstantu, kterou pro výpočet budeme potřebovat, si určíme podle zadaných hodnot. Určete také tíhové zrychlení ve výšce h_1 (podobně i h_2 u druhé části úlohy) nad zemským povrchem.

Jaké rychlosti by bylo potřeba v podobném případě, kdyby výška hlavně nad povrchem Země byla $h_2 = 1$ km. Je v obou případech nutno uvažovat také tvar a hmotu projektilu?

Václav Šindelář

Tyto úlohy zašlete do 31. května 1958.



Matematické zábavy

Oldřich Buchta, studující, Brno:

Hra „Na patnáct“

V Matematickém kaleidoskopu od Hugo Steinhouse¹⁾ je zmínka o hlavolamu, který se nazývá „Hra na patnáct“ a je i u nás dosti známý. Cituji doslova z českého překladu této knihy: V ploché krabičce je 16 polí. Patnáct z nich je obsazeno čtvercovými destičkami s čísly a jedno pole zůstává prázdné. Destičky jsou kladeny do krabičky v libovolném pořadí a poté se jedna destička za druhou posunuje (vodorovně nebo svisle) a zaujímá sousední prázdné pole. Tímto přemístěním se snažíme uvést destičky do normálního pořadí znázorněného na obrázku (obr. 1).

V uvedeném českém překladu je naznačena matematická theorie hry, ale dost nejasně a nepřesně. Z této theorie vyplývá na příklad, že pro uspořádání destiček na obr. 2 je úloha neřešitelná. Obecně je v polovině případů úloha řešitelná a v polovině nikoliv.

V tomto článku bych chtěl provést rozbor úlohy, z kterého také vyplyne jednoduché početní pravidlo, které rozhodne v každém daném případě o řešitelnosti úlohy.

V dalším budeme potřebovat pojem liché a sudé permutace.

P e r m u t a c í čísel $1, 2, 3, \dots, n$ nazýváme jakékoliv uspořádání těchto čísel, třeba $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, kde každé číslo a_i zastupuje jedno z čísel $1, 2, 3, \dots, n$. Dvě permutace jsou tehdy různé, když lze najít číslo $k \leq n$ takové, že na k -tém místě leží v obou permutacích různá čísla.

Řekněme, že jsme v dané permutaci provedli t. zv. **t r a n s p o s i c i**, když jsme vzájemně vyměnili některá dvě čísla v permutaci a ostatní jsme ponechali beze změny.

I n v e r s í dané permutace nazveme každý jednotlivý případ, kdy v permutaci větší číslo předchází menšímu (mezi oběma čísly může být ovšem libovolný počet jiných čísel). Na příklad permutace $(1)(3)(4)(2)$ pro $n = 4$ má právě dvě inverse: $(3)(2)$, $(4)(2)$.

Permutaci nyní nazveme **s u d o u** (resp. **l i c h o u**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí. Permutace $(1)(3)(4)(2)$ je tedy sudá.

¹⁾ Jméno autora knihy je v českém překladu nesprávně uváděno jako G. S t e i n h a u s. (Pozn. redakce.)

O lichých a sudých permutacích platí věta:

Sudá (lichá) permutace se libovolnou transposicí změní v lichou (sudou).

Důkaz. Provedeme-li transposici některých dvou sousedních čísel, třeba a_i, a_{i+1} , pak bylo-li $a_i > a_{i+1}$, ubude po výměně jedna inverse, a to $(a_i), (a_{i+1})$; bylo-li $a_i < a_{i+1}$, pak naopak přibude jedna inverse, a to $(a_{i+1}), (a_i)$. Jinak se počet inverzí zřejmě nezmění. Věta tedy platí pro každou „sousední“ transposici.

Provedeme-li obecně výměnu dvou „nesousedních“ čísel a_k, a_{k+i} , pak se tato výměna dostane také postupným provedením těchto sousedních transposic: $(a_k) (a_{k+1}), (a_k) (a_{k+2}), \dots, (a_k) (a_{k+i}), (a_{k+i}) (a_{k+i-1}), \dots, (a_{k+i}) (a_{k+1})$. Počet těchto transposic je zřejmě $i + (i - 1) = 2i - 1$, tedy liché číslo. Poněvadž jedna sousední transposice mění sudou permutaci v lichou a naopak, činí totéž i lichý počet sousedních transposic a odtud plyne výsledek.

Dále platí: Sudých i lichých permutací z n prvků je stejný počet. Skutečně, označme S počet všech sudých, L počet všech lichých permutací. Provedeme-li v sudé permutaci výměnu prvků (1) (2), dostaneme lichou permutaci a naopak. Mimo to zřejmě ke dvěma různým permutacím dostaneme takto opět dvě různé permutace. Odtud nejprve $S \leq L$ a dále $L \leq S$, tedy $L = S$. Počet všech permutací, jak známo ze školy, je $n!$, tedy celkem

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 1

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 2

$$L = S = \frac{n!}{2}$$

Nyní již můžeme lehce vyřešit náš problém. Označme si destičky, které byly v jistém pořádku vloženy do hry, stejně jako na obr. 3.

Uvažujme permutaci $(a_1) (a_2) \dots (a_{15})$, kterou nazveme příslušnou k dané sestavě. Libovolné jiné sestavě lze přiřadit její příslušnou permutaci tímž „hádovitým“ pohybem při zanedbání prázdného políčka.

Vyměníme-li v dané sestavě navzájem kterékoliv dvě destičky (to ovšem není tah dovolený ve hře) a ostatní ponecháme, provádíme tím vlastně transposici příslušné permutace a tato permutace se tedy změní ze sudé v lichou a naopak. V našem případě můžeme teď provést 4 různé tahy podle pravidel hry, a to takové, že jednu ze čtyř destiček, označených čísly a_3, a_5, a_6, a_{10} posuneme do prázdného pole. Posuneme-li destičku a_5 nebo a_6 , pak se příslušná permutace nezmění. Posuneme-li však na příklad a_3 , dostaneme touž příslušnou permutaci, jako kdybychom (theoreticky) vyměnili destičku a_3 s a_4 a pak s a_5 . Posuneme-li a_{10} , je to

totéž, jako bychom vyměnili destičku a_{10} s a_9, a_8, a_7, a_6 . Sudý počet vzájemných výměn destiček však zřejmě nemění sudost a lichost příslušných permutací. Tedy po provedeném tahu budou nové permutace sudé nebo liché podle toho, byla-li původní permutace sudá nebo lichá. Je vidět, že při tom nezáleží na poloze prázdného políčka, neboť při nahrazení libovolného tahu výměnami destiček - podle hořejšího návodu - se naše destička musí vyměnit se stejným počtem destiček na cestě ke kraji rámečku, jako na zpáteční cestě, tedy vždy se sudým počtem destiček.

Platí tedy: Máme-li dvě libovolné sestavy (permutace), můžeme dostat jednu z druhé přesunováním destiček podle pravidel hry jen tehdy, když příslušné permutace jsou buď obě sudé nebo obě liché. Platí také obrácené pravidlo, totiž že libovolnou sestavu s lichou (sudou) permutací můžeme převést v libovolnou jinou sestavu s lichou (sudou) permutací; to však zde dokazovat nebudeme.

K přirozenému uspořádání na obr. 1 náleží permutace $(1)(2)(3)(4)(8)(7)(6)(5)(9)(10)(11)(12)(15)(14)(13)$, která má právě 9 inverzí: $(8)(7), (8)(6), (8)(5), (7)(6), (7)(5), (6)(5), (15)(14), (15)(13), (14)(13)$; je tedy lichá.

Dostáváme tedy tento závěr: *Je-li permutace příslušná k dané sestavě lichá, pak je úloha řešitelná, je-li sudá, pak je úloha neřešitelná.*

a_1	a_2	a_3	a_4
a_7	a_6		a_5
a_9	a_8	a_{10}	a_{11}
a_{15}	a_{14}	a_{13}	a_{12}

Obr. 3

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Obr. 4

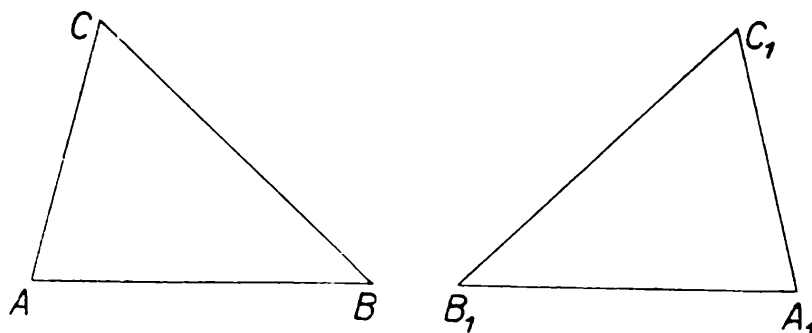
Speciálně sestava na obr. 2 vznikne z přirozené sestavy výměnou dvou destiček, tedy její permutace je sudá. Nelze tedy jednu sestavu převést v druhou. Každou sestavu se sudou permutací lze však převést na druhý „přirozený“ tvar na obr. 4. Tento tvar dostaneme totiž z tvaru na obr. 1 (opět theoreticky) takto: Sloupec 4, 8, 12 posuneme dolů, řádek 1, 2, 3 pak vpravo. Dále vyměníme 12 s 15, 14, 13, 8 s 11, 10, 9, 4 s 7, 6, 5 a jsme hotovi. Přitom jsme devětkrát vzájemně vyměnili destičky, tedy nová permutace bude skutečně sudá.

Podle předchozího je úloha v polovině případů řešitelná tvarem v obr. 1 a v druhé polovině případů tvarem v obr. 2. Při řešení stačí jen předem si spočítat příslušnou permutaci.

Ještě návod, jak postupovat při skutečném výpočtu.

Nejdříve si napíšeme do řádku příslušnou permutaci, v ní si zatrhneme první číslo a určíme všechna čísla vpravo menší než toto číslo. Je-li počet sudý, přejdeme k druhému číslu, je-li lichý, uděláme si čárku na okraj a opět přejdeme k druhému číslu. Takto postupujeme dále. Jestliže jsme nakonec dostali lichý počet čárek, je permutace lichá, jinak je sudá.

* Na připojeném obrázku 1 jsou naryšované dva různostranné nepřímo shodné trojúhelníky: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Z této jejich vlastnosti plyne že jeden trojúhelník můžeme úplně zakrýt druhým tak, že jeden z nich vysřídáme, překlopíme (t. j. obrátíme rubem vztlůru) a pak položíme lícem na líc druhého trojúhelníka. Existuje však ještě jiný způsob, jak lze po vystřížení ztotožnit



Obr. 1

jeden trojúhelník s druhým, při čemž trojúhelníky nepřeklápíme, nýbrž jen posouváme v téže rovině rubem vystříženého trojúhelníka po líci druhého.

Pokuste se nalézt způsob řešení a zašlete redakci!

S. H.



Různé - recenze

Přenos elektřiny stejnosměrným proudem

Ve Švédsku bylo zjištěno, že přenos elektřiny 1 500 MW na délku 530 km a 750 MW na délku přes 650 km je levnější stejnosměrným než střídavým proudem. Proto se tam pomýšlí nahradit dálkové vedení na střídavý proud o 220 kV stejnosměrným proudem o 300 kV, čímž by se dosáhlo 3 až 4krát většího přenosu elektřiny.

V SSSR má být do roku 1960 vybudováno dálkové vedení stejnosměrné o 400 kV pro 750 MW na vzdálenost 521 km. Je tam také uvažováno o stejnosměrném vedení na vzdálenost přes 2 000 km pro 2 500 MW. Anglie a Francie hodlají uskutečnit spojení svých elektrických sítí stejnosměrným kabelem o 200 kV. (V. D. I. Zeitschrift, 23/1957.)

Komurka

První rok činnosti odbočky JČMF v Liberci

Ve školním roce 1956-57 pořádala krajská odbočka JČMF v Liberci ve spolupráci s katedrou matematiky a fyziky zdejší vysoké školy strojní a s Československou společností pro šíření politických a vědeckých znalostí dvakrát měsíčně přednášky s tematikou střídavě matematickou a fyzikální. Přednášky se konaly v posluchárně fyzikálního ústavu vysoké školy. Průměrně byly navštěvovány asi třiceti posluchači z řad učitelů škol druhého a třetího stupně a pracovníků vysoké školy. S lítostí je nutno se pozastavit nad malou účastí odborníků z průmyslu, ačkoliv četné závody byly informovány o přednáškové činnosti pozvánkami. Citelným nedostatkem byla i malá účast studentů. Po organizační stránce byly všechny přednášky velmi dobře zajištěny.

Během roku byly prosloveny tyto přednášky:

1. října: Jiří Bečvář, O přesnosti v matematice.
 15. října: Ing. Rudolf Marx, O výrobě Geiger-Müllerových počítačů a elektrometrických elektronek a jejich použití.
 5. listopadu: Ing. Miroslav Valach, Matematické stroje I. část - vývoj a princip.
 19. listopadu: Ing. Miroslav Valach, Matematické stroje II. část - úprava výpočtů pro matematické stroje.
 3. prosince: Dr. Jan Tichý, Kosmické záření.
 17. prosince: Prof. Miloš Jelínek, Vyučování matematice v západních zemích.
 7. ledna: Jiří Sedláček, Theorie konečných grafů.
 21. ledna: Dr. Jaroslav Pernegr, Kosmické záření.
 18. února: Alois Švec, kand. f. m. věd, Geometrie mnohostěnu.
 4. března: Dr. Miroslav Fiedler, O některých elementárních i neelementárních problémech geometrických.
 18. března: Dr. Jan Tichý, O některých otázkách kauzality a determinismu v kvantové mechanice.
 1. dubna: Prof. Dr. Alois Zátopek, člen koresp. ČSAV, Geofyzikální rok.
 15. dubna: Doc. Dr. František Nožička, Některé aplikace tensorového počtu.
 6. května: Doc. Dr. Václav Alda, Methoda Monte Carlo.
 20. května: Ing. Josef Šmíd, kand. věd, Pěstování monokrystalů.
- Přednášky vzbudily zájem posluchačů a velmi často vyvolaly živou diskusi.
- Pro žáky vyšších tříd výběrových škol pořádala odbočka pod vedením prof. Františka Duška tyto semináře, kterých se účastnilo průměrně 28 žáků z Liberce, Turnova, Mimoně, Frýdlantu a Jablonce:
10. října: Absolutní hodnota čísla a její užití.
 21. listopadu: Konstruktivní úlohy a jejich diskuse.
 12. prosince: Sestrojování elipsy z různých prvků.
 30. ledna: Matematická indukce.
 13. února: Moderní elektronické přístroje (s demonstracemi).
 20. března: Konstrukce omezenými prostředky.

O úspěchu těchto seminářů svědčí ta okolnost, že účastníci obsadili šesté a sedmé místo celostátního kola Matematické olympiady.

Odbočka dále pomohla závodnímu Energovod v Liberci uspořádat kurs matematiky, jež vedl odb. asistent VŠS Václav Metelka. Na pomoc učitelům, kteří si rozšiřují kvalifikaci dálkovým studiem, byly pod vedením prof. Bohuslava Průška uspořádány dva semináře, a to:

13. března: Vybrané otázky moderní fyziky.
22. května: Vybrané kapitoly z optiky a elektřiny.

Na členské schůzi 20. února byl prodiskutován návrh nových učebních osnov matematiky a rýsování pro 6. až 8. třídu a vypracován posudek s připomínkami. Odbočka má nyní 87 činných členů. První rok činnosti lze tedy, jak vyplývá z uvedeného nástinu její práce, jistě právem považovat za úspěšný.

Dr Jan Tichý



Redakce hovoří se čtenáři

★ Redakční rada děkuje svému odcházejícímu členu Pavlu Bartošovi, učiteli JSŠ ve Zlatých Moravcích na Slovensku, za obětavou práci věnovanou *Rozhledům* matematicko-fyzikálním.

★ Dopis čtenářky J. H. z Veselí na Moravě:

. . . Mám velmi ráda naše *Rozhledy*. A to, co mě k nim tak přitahuje, je jejich srozumitelnost. Autor každého článku se opravdu snaží, aby napsanému porozuměl průměrný žák jedenáctiletky. Myslím, že k takovým článkům patří i veselé obrázky právě takového druhu, jaké jste dávali.

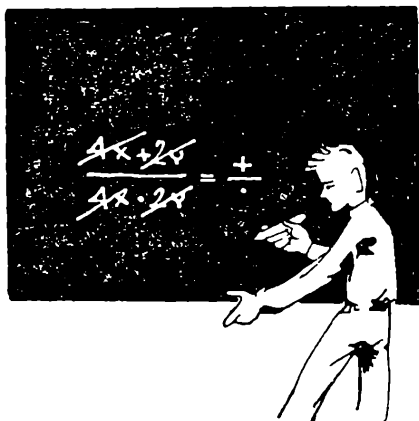
. . . studuji nyní na pedagogické škole matematiku a deskriptivu . . . a připomínám si svůj budoucí úkol: učit tak, aby hodiny matematiky nebyly očekávány se strachem a odporem, ale aby se matematika stala všem srozumitelnou a pro všechny zajímavou. A ještě jednu připomínku. Je správné, že v časopisu jsou i úlohy k řešení. Myslím však, že by bylo dobré přesně vymezit, pro koho jsou . . . Domnívám se, že by bylo vhodné zařazovat sem i úlohy pro žáky vysokých škol. Na vysoké škole, pokud vím, není žádná taková akce, kde by žák mohl změřit své síly, a to ani při zkoušce, která je tam prý loterií . . . Potud naše čtenářka.

Redakce uznává Vaši připomínku a v příštím ročníku bude označovat alespoň ty příklady, pro jejichž řešení postačí znalosti z 9. třídy. Tím ovšem není řečeno, že by je pak měli řešit jenom žáci těchto tříd.

Také druhý Váš námět je vhodný k úvaze, litujeme však, že přesahuje rámec našeho časopisu.

Teprve delším pobytem na vysoké škole zjistíte, že názor uvedený v poslední větě Vašeho dopisu neplatí pro každý předmět a nikdy pro dobře připraveného studenta.

Těší nás, že jste si zvolila odpovědné povolání učitelky matematiky a deskriptivní geometrie, ke kterému máte jistě vlohy, jak jste ukázala v naší soutěži.



Matematika

František Dušek, Liberec:

Rovnice lomené čáry

V článku R. Langhammera „O funkcích s absolutní hodnotou“, v 6. čísle tohoto časopisu (roč. 1957), jsou uvedeny zajímavé typy grafů, které dostáváme grafickým znázorněním funkčních rovnic, v nichž se vyskytují absolutní hodnoty výrazů, obsahujících proměnnou x (viz též článek Jiřího Sedláčka „O zajímavém druhu funkcí“ v 3. čísle Matematicko-přírodovědeckých rozhledů, roč. 1955).

Položme si nyní dvě otázky: 1. Zdali se v praxi setkáváme s jevy, jejichž grafy by měly tak neobvyklý tvar. 2. Jak se pro takové grafy najde příslušná (jediná) funkční rovnice.

Pokusíme se zodpovědět tyto otázky na několika konkrétních příkladech.

I.

Jako první příklad uvažujme tuto úlohu: Do prázdné nádrže o objemu 10 m^3 začne rovnoměrně přitékat voda kohoutem dávajícím 2 m^3 vody za hodinu. Má se sestrojít graf, znázorňující množství vody v nádrži v závislosti na době i najít příslušná funkční rovnice.

Označíme-li dobu (v hodinách) písmenem x a množství vody (v m^3) v nádrži písmenem y , je v okamžiku spuštění přítoku $x = 0$, $y = 0$ a za pět hodin $x = 5$, $y = 10$. Poněvadž voda přitéká rovnoměrně, je závislost množství vody na době pro $0 \leq x \leq 5$ znázorněna úsečkou (obr. 1) spojující body $A_1(0; 0)$, $A_2(5; 10)$. Předpokládáme ovšem, že voda přitéká dále, avšak množství vody v nádrži už se nemění, neboť nádrž víc než 10 m^3 nepojme a přebytečná voda proto přetéká. Pro $x > 5$ je tedy stále $y = 10$. Na otázku, jak mnoho vody bylo v nádrži před spuštěním přítoku, t. j. pro $x < 0$, odpovíme, že nádrž byla stále prázdná, čili $y = 0$. Je tudíž grafem dané závislosti lomená čára, skládající se z polopřímky A_1M , úsečky A_1A_2 a polopřímky A_2N , jak je na obr. 1 silně vyznačeno.

Pokud se týče příslušného zápisu, mohli bychom jej sice vystihnout třemi rovnicemi

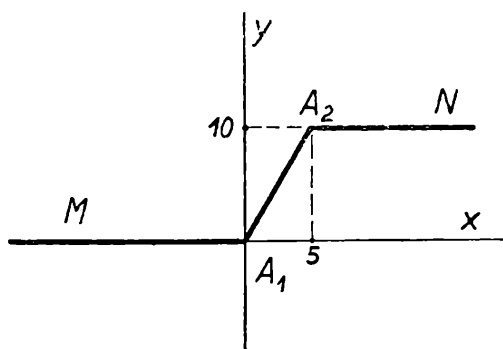
$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ pro } x < 0, \\ y &= 2x \text{ pro } 0 \leq x \leq 5, \\ y &= 10 \text{ pro } x > 5, \end{aligned}$$

ale na začátku jsme si dali za úkol vyjádřit graf *jedinou* rovnicí.

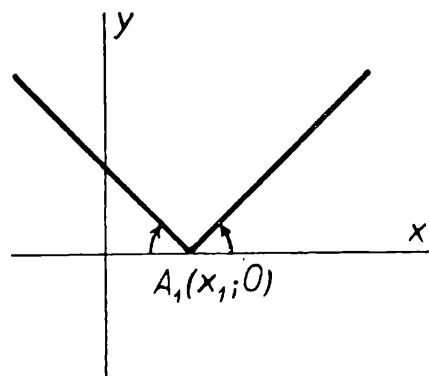
Abychom tak mohli učinit, uvažme nejprve, že nejjednodušším typem rovnice značící lomenou čáru (viz výše citované články) je $y = |x - x_1|$. Příslušná lomená čára má vrchol $A_1(x_1; 0)$ a obě její ramena svírají s osou x úhly 45° (obr. 2). Prvním zobecňujícím krokem z ní dostaneme rovnici $y = k_1|x - x_1|$, kde význam konstanty k_1 (*směrnice*) je čtenáři jistě znám: v obr. 3 je zvoleno $k_1 = -\frac{1}{2}$.

Dostáváme tím však lomenou čáru souměrnou opět podle pořadnice vrcholu A_1 . Abychom obdrželi polohu obecnější, musíme k pravé straně připojit výraz $kx + q$ (k, q jsou konstanty), takže vznikne rovnice

$$y = kx + q + k_1|x - x_1|.$$



Obr. 1



Obr. 2

Příslušný graf, vyznačený silně na obr. 4, dostaneme, uvážíme-li, že pořadnici pro libovolné x obdržíme algebraickým sečtením pořadnic pomocných grafů $y = kx + q$ (vyznačen čerchovaně) a $y = k_1|x - x_1|$ (vyznačen slabě plně); na obr. 4 je to ukázáno pro bod M . Výsledný graf má vrchol A_1 pro $x = x_1$ a výhodně jej z grafů funkcí $y = kx + q$ a $y = k_1|x - x_1|$ odvodíme pomocí bodů P, A_1, Q postupem, jež čtenář vyčte z obrázku.

K zvětšování počtu vrcholů lomené čáry dospějeme připojováním dalších výrazů typu $k_n|x - x_n|$, kde $x_i \neq x_j$. Na př. lomená čára o dvou vrcholech A_1, A_2 bude mít rovnici

$$y = kx + q + k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2|, \quad x_1 \neq x_2.$$

Je to tedy právě rovnice grafu z naší úlohy podle obr. 1. Známe pro ni souřadnice $x_1 = 0$ a $x_2 = 5$ vrcholů A_1 a A_2 , takže ji můžeme psát

$$y = kx + q + k_1|x| + k_2|x - 5|.$$

Abychom určili čtyři dosud neznámé konstanty k, q, k_1, k_2 , uvažme, že graf sestává ze tří částí, z nichž každá je dostatečně určena dvěma body: úsečka A_1A_2 body A_1 a A_2 , polopřímka A_1M bodem A_1 a dalším libovolným vnitřním bodem M , polopřímka A_2N bodem A_2 a dalším bodem N . Všechny tyto body musí na grafu ležet a proto jejich souřadnice musí rovnici splňovat. Dosadíme-li tedy do uvedené rovnice po řadě souřadnice bodů $A_1(0; 0)$, $A_2(5; 10)$, $M(-1; 0)$, $N(6; 10)$, dostaneme soustav čtyř rovnic

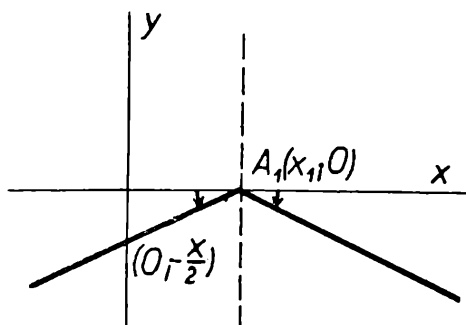
$$\begin{aligned} 0 &= q + 5k_2, \\ 10 &= 5k + q + 5k_1, \\ 0 &= -k + q + k_1 + 6k_2, \\ 10 &= 6k + q + 6k_1 + k_2, \end{aligned}$$

jejichž řešením je

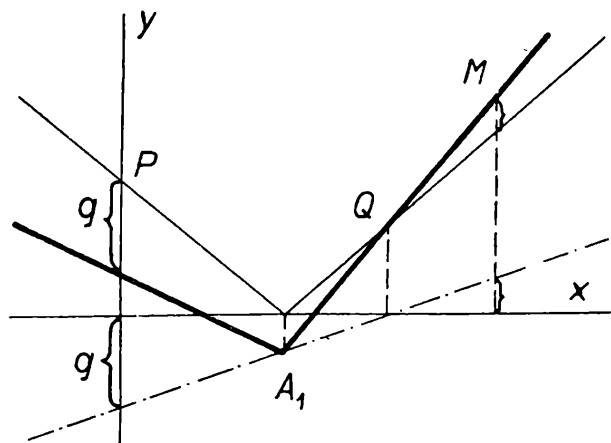
$$k = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad q = 5,$$

takže hledaná rovnice zní

$$y = 5 + |x| - |x - 5|.$$



Obr. 3



Obr. 4

Doporučujeme čtenáři, aby si rozбором této rovnice (případně dosazováním souřadnic některých bodů) ověřil, že dané úloze vyhovuje.

Naznačený postup můžeme vyslovit obecně: Lomená čára (obr. 5), která má n vrcholů $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n)$, začíná polopřímkou A_1M a končí polopřímkou A_nN , kde $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ a

$$x_M < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_N,$$

má rovnici

$$y = kx + q + \sum_{j=1}^{j=n} k_j |x - x_j|^{1)}$$

¹⁾ Součtový (sumační) symbol Σ (sigma), vyjadřující svými indexy, že máme provést sečítání od $j = 1$ až do $j = n$ znamená: $\sum_{j=1}^{j=n} k_j |x - x_j| = k_1 |x - x_1| + k_2 |x - x_2| + \dots + k_n |x - x_n|$.

V této rovnici je $n + 2$ konstant: $k, q, k_1, k_2 \dots k_n$, pro jejichž výpočet obdržíme n rovnic dosazením souřadnic vrcholů $A_1, A_2 \dots A_n$ a další dvě dosazením souřadnic některého vnitřního bodu polopřímky A_1M a některého vnitřního bodu polopřímky A_nN .

Při uvedeném postupu nevadí, pokládáme-li za vrchol lomené čáry bod, který ve skutečnosti vrcholem není; výpočet toto „nedopatření“ sám upraví. Jako konkrétní příklad uvažujme „zdánlivě lomenou“ čáru (obr. 6) složenou z polopřímek A_1M a A_1N , kde $M(0; 0), A_1(1; 1), N(2; 2)$. Ačkoliv je zřejmé, že obě polopřímky tvoří jedinou přímku o rovnici $y = x$, postupujme výše uvedeným způsobem: „lomená“ čára bude mít rovnici

$$y = kx + q + k_1 |x - 1|;$$

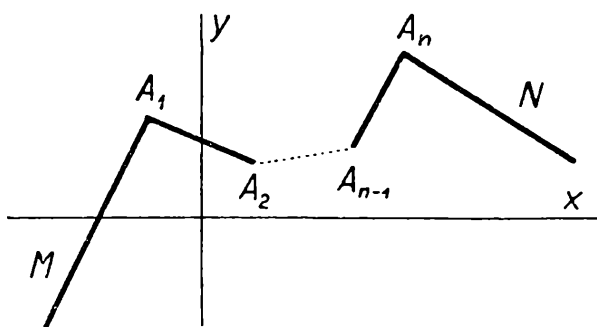
konstanty k, q, k_1 obdržíme řešením soustavy, kterou si opatříme dosazením souřadnic bodů M, A_1, N :

$$0 = q + k_1,$$

$$1 = k + q,$$

$$2 = 2k + q + k_1;$$

řešení je $k = 1, k_1 = 0, q = 0$ a rovnice naší čáry tedy skutečně $y = x$.



Obr. 5

II.

V úloze řešené v I. oddílu mohla proměnná x nabývat libovolné (reálné) hodnoty a proto grafem byla lomená čára nekonečná. Povaha některých jevů však vede k omezení oboru proměnné x a příslušný graf je pak lomená čára složená jen z úseček, nebo z úseček a polopřímky.

Jako ukázkou uvažujme tuto úlohu: Mzda za normální pracovní hodinu při osmihodinové denní pracovní době činí 4 Kčs, za přesčasovou o 25% víc, čili 5 Kčs (předpokládáme v dalším, že se úměrně odměňuje libovolný zlomek hodiny). Má se sestavit graf, znázorňující závislost výše denní mzdy y (v Kčs) na odpracované době x (v hodinách) a určit příslušná (jediná) funkční rovnice.

Z povahy úlohy plyne, že proměnná x je omezena na interval od 0 do 24 a příslušný graf je proto konečná lomená čára složená z úseček MA_1 a A_1N , kde

$M(0; 0)$, $A_1(8; 32)$, $N(24; 112)$; v obr. 7, v němž jsou tentokrát na osách zvolena různá měřítka, je vyznačena silně.

Při odvozování příslušné funkční rovnice najdeme nejprve rovnici nekonečné lomené čáry utvořené z polopřímek A_1M a A_1N :

$$y = kx + q + k_1|x - 8|.$$

Dosazením souřadnic bodů M , A_1 , N dostáváme soustavu

$$0 = q + 8k_1,$$

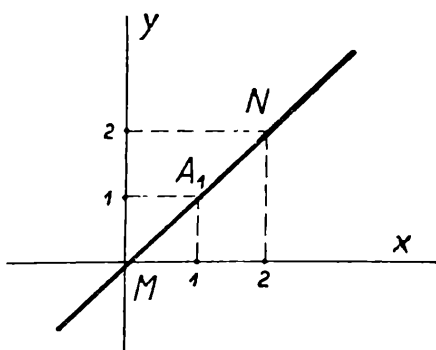
$$32 = 8k + q,$$

$$112 = 24k + q + 16k_1,$$

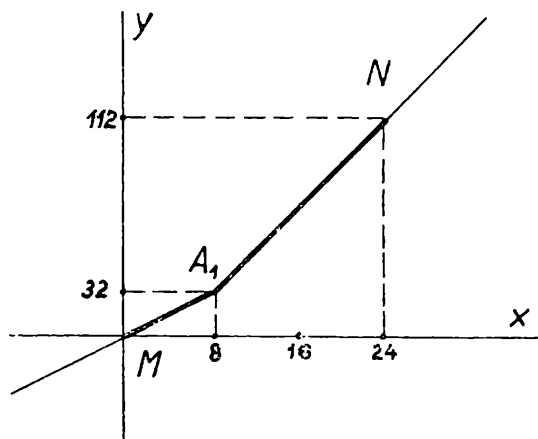
jež má řešení $k = \frac{9}{2}$, $k_1 = \frac{1}{2}$, $q = -4$,

takže hledaná rovnice zní

$$y = \frac{9}{2}x - 4 + \frac{1}{2}|x - 8|.$$



Obr. 6



Obr. 7

To je ovšem rovnice *nekonečné* lomené čáry a kdybychom chtěli vyjádřit, že proměnná x smí nabývat jen hodnoty od 0 do 24, musili bychom připojit omezující podmínku $0 \leq x \leq 24$. Máme-li i v tomto případě dosáhnout zápisu jedinou formulí, musíme pravou stranu doplnit vhodným výrazem, na př.

$$\sqrt{x} - \sqrt{|x|} + \sqrt{24-x} - \sqrt{|24-x|},$$

který má reálnou hodnotu (rovnou nule) jen pro $0 \leq x \leq 24$, kdežto pro všechny ostatní hodnoty x je komplexní. Lze tedy uvažovaný graf vystihnout jedinou formulí

$$y = \frac{9}{2}x - 4 + \frac{1}{2}|x - 8| + \sqrt{x} - \sqrt{|x|} + \sqrt{24-x} - \sqrt{|24-x|}.$$

III.

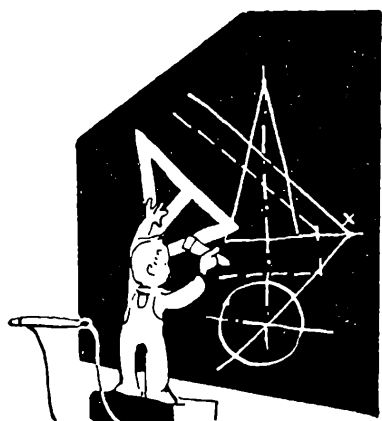
Příklady ke cvičení:

1. Za jízdu autem do 50 km se platí 1 Kčs za 1-km, za každý další kilometr o 20 % méně. Určete graf i funkční rovnici, podle které cena jízdy y (v Kčs) závisí na délce ujeté dráhy x (v km).

2. Určete graf i funkční rovnici, podle které teplota y (ve $^{\circ}\text{C}$) jednoho kilogramu ledu s počáteční teplotou -10°C závisí na množství x dodávaného tepla (v kcal), předpokládáme-li, že specifické teplo ledu je $0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}}$, vody

$1,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}}$ a skupenské teplo tání ledu $80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$. Stanovte omezující podmínky.

3. Úlohu z II. oddílu našeho článku upravte pro případ, že mzda za noční přesčasové hodiny (od 22 do 6 hod.) je o 50 % vyšší než za normální. Vyberte některou z různých možných eventualit.



Deskriptivní geometrie

Doc. Dr Václav Havel, Brno:

O jedné větě Pappově

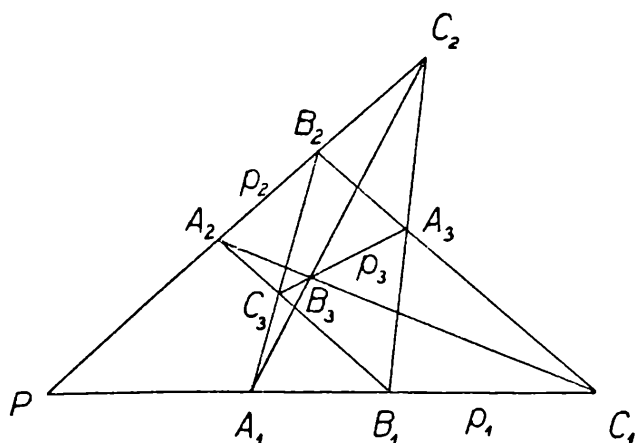
Větu Pappovu lze vyslovit takto: Mějme různé body A_1, B_1, C_1 na přímce p_1 a různé body A_2, B_2, C_2 na přímce p_2 ; přitom předpokládejme, že přímky p_1, p_2 nesplývají a že žádný z bodů $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ nesplývá s průsečíkem P přímek p_1, p_2 . Potom průsečík C_3 přímek A_1B_2, A_2B_1 , průsečík B_3 přímek A_1C_2, C_1A_2 a průsečík A_3 přímek B_1C_2, C_1B_2 leží na téže přímce p_3 (obr. 1).

Při studiu základů rovinné geometrie má Pappova věta velký význam. Nás bude ovšem zajímat pouze její důkaz. Ten provedeme ve dvou etapách. Nejprve se omezíme na případ, že přímky p_1, p_2 jsou vlastní a body C_3, B_3 nevlastní. Užitím centrálního promítání pak přejdeme od předchozího případu k případu obecnému.

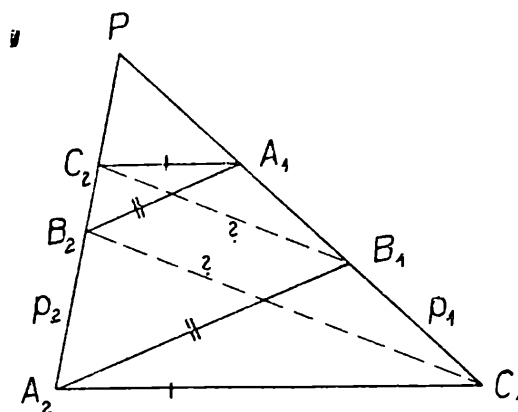
První část důkazu.

a) V předpokladech věty Pappovy nechť jsou body $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, P$ vlastní a body C_3, B_3 nevlastní (to, že P je vlastní bod, znamená, že přímky p_1, p_2

jsou různoběžné; to, že body C_3, B_3 jsou nevlastní, znamená, že $A_1B_2 \parallel A_2B_1, A_1C_2 \parallel A_2C_1$). Dokážeme, že též bod A_3 je nevlastní (jinými slovy: že $B_1C_2 \parallel B_2C_1$). Všimněme si, že trojúhelníky PA_1A_2, PB_1B_2 jsou stejnoploché (neboť $A_1B_2 \parallel A_2B_1$) a že též trojúhelníky PA_1A_2, PC_1C_2 jsou stejnoploché (neboť $A_1C_2 \parallel A_2C_1$). Tedy též trojúhelníky PB_1B_2, PC_1C_2 jsou stejnoploché a z toho již plyne $B_1C_2 \parallel C_2B_1$ (obr. 2).



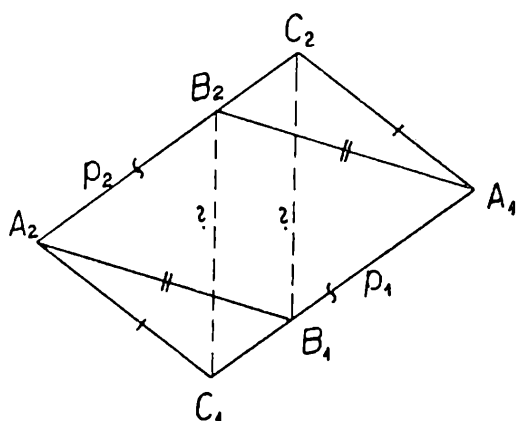
Obr. 1



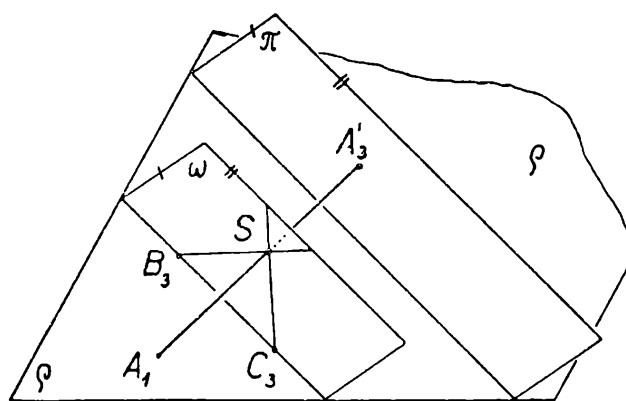
Obr. 2

b) V předpokladech Pappovy věty nechť jsou body $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ vlastní a body P, C_3, B_3 nevlastní (t. j. $p_1 \parallel p_2, A_1B_2 \parallel A_2B_1, A_1C_2 \parallel A_2C_1$). Dokážeme opět, že i bod A_3 je nevlastní (t. j., že $B_1C_2 \parallel B_2C_1$). Pak čtyřúhelníky $A_1B_1A_2B_2, A_1C_1A_2C_2$ jsou rovnoběžníky, takže trojúhelníky $A_1B_1C_2, A_2B_2C_1$ jsou podobné. Tedy přímky B_1C_2, B_2C_1 jsou rovnoběžné (obr. 3).

Dokázali jsme tedy platnost věty Pappovy za předpokladu, že body $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ jsou vlastní a body C_3, B_3 nevlastní.



Obr. 3



Obr. 4

Druhá část důkazu.

V předpokladech Pappovy věty nechť alespoň jeden z bodů C_3, B_3 je vlastní, dejme tomu C_3 . Přímku C_3B_3 pak proložme libovolnou rovinu ω různou od roviny ρ , v níž leží body $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$. V rovině ω si vyberme libovolný bod S neležící v rovině ρ . A konečně vyberme libovolnou rovinu π rovnoběžnou s rovinou ω , avšak neprocházející bodem S . (Obr. 4.) Promítejme ze středu S

do průmětny π . Průměty C'_3, B'_3 bodů C_3, B_3 jsou body nevlastní, protože průmítací přímky SC_3, SB_3 jsou rovnoběžné s průmětnou. Průměty $A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2$ bodů $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ jsou body vlastní, protože žádný z bodů $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ neleží v rovině ω . Podle první části důkazu, kde nečárkované symboly nahradíme čárkovanými, platí $B'_1C'_2 \parallel B'_2C'_1$. Tedy body A'_3, B'_3, C'_3 (C'_3 je společný nevlastní bod přímek $A'_1B'_2, A'_2B'_1$) leží na téže přímce p'_3 , takže body A_3, B_3, C_3 leží na téže přímce p_3 ; přímka p'_3 je průmětem přímky p_3 , ležící v rovině ρ .

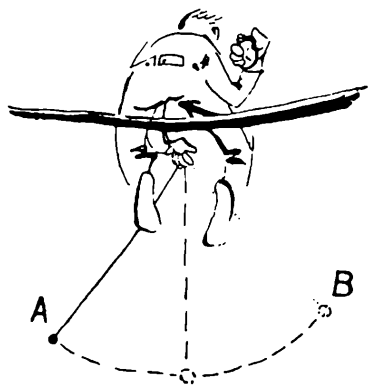
Tím jsme důkaz Pappovy věty ukončili.

Pappos, slavný geometr řecký, působil v letech 250 až 300 v Alexandrii v Egyptě. V jeho „*Matematických sbírkách*“, které jsou hlavním pramenem našich znalostí tehdejší geometrie a matematiky, je shrnuto mnoho vět a tehdejších objevů různých matematiků. Pappos sám tam přispěl mnohými objevy k pokroku v této oblasti. V díle jsou mnohé věty, které teprve daleko později (až v novověku) došly řádného uplatnění v t. zv. *geometrii projektivní*. Jsou to hlavně různé Pappovy poznatky o dvojpoměru čtyř bodů v přímce. S tím souvisí, že dnes pod názvem Pappova věta se v literatuře vyskytují různé věty. V tomto článku vybrali jsme jednu z nich, která je základem pro konstrukce v projektivní geometrii přímých řad bodových, jak se budou moci přesvědčit ti z našich čtenářů, kteří budou studovat na vysokých školách technického směru. Zvláště praktické je zobecnění této věty pro kuželosečky a je studentům na technikách známé jako slavná věta *Pascalova*. Elementární a velmi jednoduchý důkaz, který v tomto článku autor podává, je snadno přístupný všem našim čtenářům. Věříme, že mnozí z nich budou mít v budoucnu příležitost sami náležitě ocenit tuto zdánlivě vyumělkovanou větu.

Budiž ještě na okraji historické poznámky připomenuto, že jednou z nejpozoruhodnějších věcí Pappovy sbírky jsou také některé vzorce pro výpočet objemu a povrchu různých rotačních těles. Tyto vzorce upadly časem v zapomenutí a byly znovu objeveny až na rozhraní 16. a 17. století a jsou dnes známy pod názvem *pravidla Guldinova*. Teprve moderní matematická analýza je však mohla spolehlivě dokázat. Svědčí to o značné vyspělosti starověké řecké matematiky.

Upozorňujeme ještě, že se jménem Pappovým jste se sešli v našich Rozhledech už loni v č. 5, str. 347 v článku A. Tondla.

Doc. Dr. K. Havlíček - Red.



Fysika

Ing. Dr. Václav Šindelář, Praha:

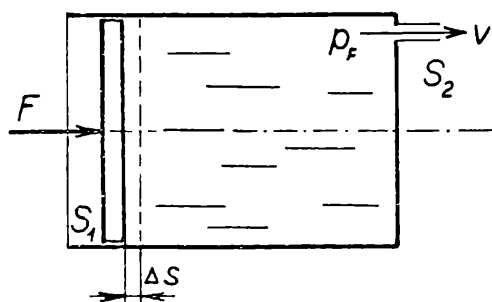
Výtok ideální kapaliny

Ideální (dokonalou) kapalinou rozumíme takovou, jež je *nestlačitelná* a jež není *viskosní* (t. j. u níž se neprojevuje vnitřní tření). Skutečné kapaliny se ovšem svými vlastnostmi od tohoto ideálu více či méně odchyľují. Přesto však

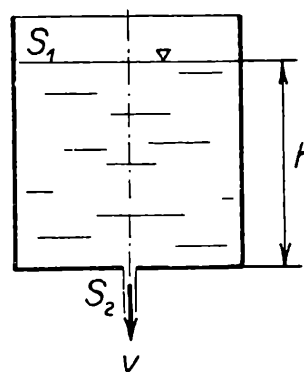
je vhodné při různých teoretických úvahách a výpočtech předpokládat kapalinu ideálních vlastností, pro značné zjednodušení, jež tento předpoklad přináší. Známe-li chování kapaliny ideální, snažíme se pak stanovit odchylky, způsobené nedokonalostí té které reálné (skutečné) kapaliny, případně i působením různých vnějších vlivů.

Odvodíme si nejprve známý vztah pro rychlost ideální kapaliny vytékající malým otvorem působením tlakového rozdílu. Uzavřeme ideální kapalinu hustoty ρ do válce s horizontální osou. Kapalina je ve válci uzavřena pohyblivým pístem (obr. 1), na nějž působí ve směru osy válce osamělá vnější síla F . Je-li plocha pístu S_1 (stejný je i vnitřní průřez válce), působí píst na kapalinu tlakem $p_F = \frac{F}{S_1}$, který je

podle Pascalova zákona ve všech místech prostoru vyplněného kapalinou stejný. Tento tlak si nazveme *hydrostatickým tlakem způsobeným vnější silou*. Kromě tohoto tlaku bude v kapalině ještě *hydrostatický tlak způsobený vlastní vahou kapaliny* (označíme si jej p_G). Nebude v různých místech stejný a můžeme jej zatím pominout, zvolíme-li vnější sílu F dostatečně velkou. Jak bude později vysvětleno, musíme si ještě dát podmínku, že průřez výtokového otvoru S_2 bude zanedbatelně malý proti průřezu válce S_1 , tak, aby při výtoku kapaliny se píst pohyboval nepatrnou



Obr. 1



Obr. 2

rychlostí. Otevřeme-li otvor v čele válce, počne kapalina vytékat rychlostí v . Vyteče-li za čas Δt objem kapaliny ΔV , posune se píst o délku Δs a vykoná se přitom práce $\Delta L = F \cdot \Delta s$. Protože je kapalina nestlačitelná, musí být nutně $\Delta V = S_1 \cdot \Delta s = S_2 \cdot v \cdot \Delta t$. Kapalina vyteklá za čas Δt má kinetickou energii $\Delta E = \frac{1}{2} \Delta V \cdot \rho \cdot v^2$, kde $\Delta V \cdot \rho$ je její hmota. Podle zákona o zachování mechanické energie¹⁾ musí nyní platit

$$\Delta L = \Delta E ,$$

$$F \cdot \Delta s = \frac{1}{2} \Delta V \cdot \rho \cdot v^2 ,$$

¹⁾ Protože i teplo, jako celkovou energii mikromechanických pohybů nějaké soustavy zahrnujeme do energie mechanické, rozumíme tu makromechanickou energii mechanickou energii v užším slova smyslu, t. j. bez energie tepelné.

$$S_1 \cdot p_F \cdot \Delta s = \frac{1}{2} S_1 \cdot \Delta s \cdot \rho \cdot v^2,$$

z čehož

$$p_F = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1)$$

Z (1) pak plyne

$$v = \sqrt{\frac{2 p_F}{\rho}} \quad (2)$$

což je hledaný vztah pro rychlost kapaliny hustoty ρ vytékající při tlaku p_F . Tlak p_F je vlastně přetlakem proti okolní atmosféře (okolnímu prostředí), nejčastěji proti okamžitému barometrickému tlaku b . Absolutní tlak p_a (t. j. vlastně přetlak proti absolutnímu vakuu) je uvnitř kapaliny ovšem roven $p_a = p_F + b$, nepřihlížíme-li zatím k hydrostatickému tlaku p_G způsobenému vlastní vahou. V případě, že by kapalina z válce vytékala do vakua, dosadili bychom do (2) namísto přetlaku p_F absolutní tlak p_a .

Vztah (1) je velmi důležitý. Kapalina původně v klidu dala se do pohybu. Podle toho hydrostatický tlak v kapalině představuje vlastně potenciální energii její objemové jednotky:

$$[p]_{\text{MKS}} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$$

Kdyby naopak byla do proudu kapaliny tekoucí rychlostí v vložena nějaká překážka, bude na ni s různých stran působit rozličný tlak. Jeho maximální hodnota bude ve shodě s principem zachování makromechanické energie rovna hydrostatickému tlaku (ovšem absolutnímu) zvětšenému o hodnotu určenou vztahem (1), příslušející t. zv. *tlaku dynamickému* (p_d)

$$p_d = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (3)$$

Je to tlak, v němž se přeměnila kinetická energie objemové jednotky kapaliny.

Doposud jsme k hydrostatickému tlaku p_G způsobenému vlastní vahou nepřihlíželi. Nyní si probereme výtok kapaliny pouze vlivem p_G (viz obr. 2). Víme, že v hloubce h pod hladinou je v kapalině hustoty ρ hydrostatický tlak p_G (způsobený vlastní vahou) roven

$$p_G = h \cdot \rho \cdot g, \quad (4)$$

kde g je místní tíhové zrychlení. Vytéká-li kapalina z nádoby otvorem v hloubce h pod hladinou pouze vlastní vahou, dosadíme do rovnice (2) namísto hydrostatického tlaku p_F hydrostatický tlak p_G a dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2 p_G}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 h \rho g}{\rho}} = \sqrt{2 h g}, \quad (5)$$

což je známý *Torricelliův vzorec*. Výtok ovšem předpokládáme do volné okolní atmosféry, jež je také ve styku s povrchem kapaliny v nádobě, z níž vytéká. Hodnota p_G je tedy opět vlastně přetlakem proti okolní atmosféře.

Kdybychom uvažovali výtok vlastní vahou (v místě tlaku p_G) za současného tlaku p_F (vlastně přetlaku proti okolní atmosféře, do níž se výtok děje), psali bychom pak

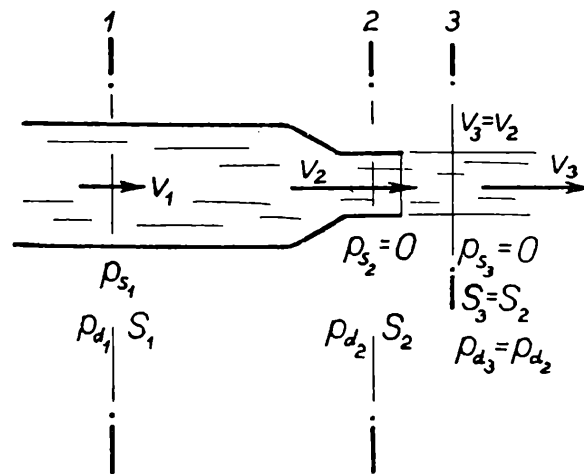
$$v = \sqrt{\frac{2(p_F + p_G)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2p_{hs}}{\rho}}, \quad (6)$$

kde celkový hydrostatický tlak p_s v místě výtoku je zřejmě roven $p_{hs} = p_F + p_G$.

Opět je to vlastně přetlak. Celkový (absolutní) statický tlak v nějakém místě uvnitř kapaliny bude ovšem roven součtu hydrostatického tlaku p_{hs} a aerostatického (barometrického) tlaku b :

$$p_s = p_{hs} + b = p_F + p_G + b,$$

tlak p_s musíme do (6) dosadit v případě, že by se jednalo o výtok do absolutního vakua.



Obr. 3

Dosud uvedené vztahy, jež jsou běžně známé uvádím pro rekapitulaci, abychom mohli přejít k jednomu případu složitějšímu. Mluvili jsme o tlacích hydrostatických a tlaku hydrodynamickém. Zatím co prvý představuje, jak již řečeno, potenciální energii (tlakovou) objemové jednotky kapaliny, představuje druhý (hydrodynamický) kinetickou energii objemové jednotky. Je-li kapalina při pohybu energeticky izolována, t. j. během jejího průtoku či výtoku jí energii ani nepřivádíme, ani neodvádíme, musí být její celková (makromechanická) energie (ovšem i objemové jednotky) stálá

$$p_s + p_d = \text{konst.} \quad (7)$$

To je vlastně zjednodušená Bernoulliho rovnice pro případ, že průtok se děje na př. ve vodorovné trubici, kdy se tedy nemění polohová energie.

Vypočteme si nyní výtokovou rychlost v_3 z trubice naznačené na obr. 3. Osa trubice je vodorovná, její průřez se zužuje z S_1 na S_2 . V místě 1 je statický tlak p_{s1} , a dynamický tlak $p_{d1} = \frac{1}{2} \rho v_1^2$. Koncem trubice průřezu S_2 kapalina vytéká. Protože se jedná o ideální kapalinu, bude celkový statický tlak již v této koncovce trubice roven nule ($p_{s2} = 0$). Přitom uvažujeme ovšem o výtoku do absolutního

vakua. Kdyby se výtok děl do prostoru o tlaku p (nejčastěji do volné atmosféry o tlaku b), museli bychom do rovnice (7) i dalších namísto statického tlaku p_s dosadit přetlak ($p_s - p$) nebo ($p_s - b$).

V koncovce průřezu S_2 bude mít tedy kapalina již rychlost výtokovou ($v_2 = v_3$). Podle (7) bude platit

$$p_1 + p_{d1} = \underbrace{p_{s2}}_0 + p_{d2}$$

čili

$$p_{s1} + p_{d1} = p_{d2} .$$

Dosaďme do rovnice (3) a dostaneme

$$p_{s1} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_3^2 \quad (8)$$

Protože se jedná o průtok nestlačitelné kapaliny, platí pro něj známá rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 ,$$

z čehož

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1}{n} \text{ nebo } v_1 = n \cdot v_2 , \quad (9)$$

označíme-li si poměr průřezů $n = \frac{S_2}{S_1}$

Dosaďme nyní za v_2 výraz (9) do rovnice (8)

$$p_{s1} + \frac{1}{2} \rho n^2 v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 ,$$

z čehož

$$v_2 = v_3 = \sqrt{\frac{2p_{s1}}{\rho(1-n^2)}} , \quad (10)$$

což je hledaný vztah pro výtokovou rychlost. Záleží zde zřejmě na poměru průřezu n . Je ovšem samozřejmé, že vztah platí pro jakékoliv $n < 1$. Pro $n = 1$ je i $p_{s1} = 0$, a proto (8) $v_2 = v = v_1$.

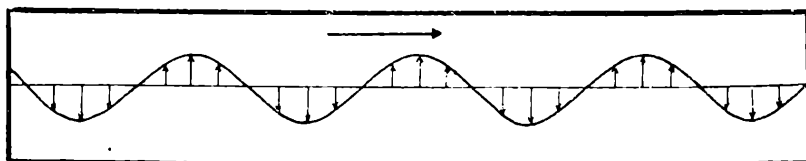
Při řešení nutno ovšem předpokládat, že průtok je ustálený (stacionární), t. j. v našem případě, že veličiny v_1 a p_{s1} v průřezu 1 se s časem nemění. Při stavu neustáleném byly by poměry mnohem komplikovanější. Tak i v případě samovolného výtoku kapaliny ze dna nádoby nutno předpokládat, že poměr n průřezu S_2 výtokového otvoru k průřezu S_1 nádoby je malý (maximálně roven cca 1/10). Potom můžeme v krátkém časovém úseku pokládat rychlost poklesu hladiny v nádobě za zanedbatelně malou a můžeme přibližně počítat ze vzorce (5). Poměry pak pokládáme za přibližně ustálené (kvasistacionární). Totéž nutno předpokládat při odvozování vzorce (1). V případě, že by poměr $n = \frac{S_2}{S_1} > \frac{1}{10}$, uplatňuje se

vliv pohybu hladiny mnohem podstatněji a řešení takového silně neustáleného (nestacionárního) průtoku či výtoku je pak obtížné a je možné jen za pomoci vyšší matematiky.

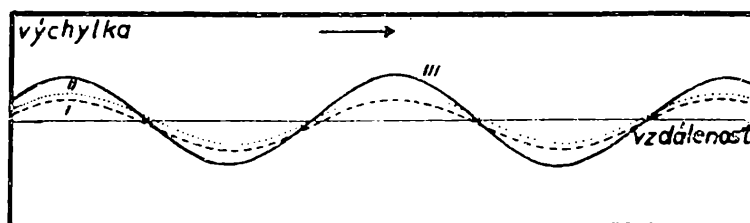
Interference vlnění

(Dokončení)

Protože se obě interferující vlnění pohybují stejnou rychlostí a stejným směrem, je vidět, že se také výsledný děj bude šířit touž rychlostí vpravo. Sečtením výchylek v každém místě dostaneme tedy nějakou křivku, která značí výslednou výchylku částice. Posouváme-li potom tuto výslednou křivku vpravo rychlostí c , budou její body znamenat polohy částic po složení obou interferujících vlnění, čili - stručně řečeno - dostaneme tak model děje, který vznikl interferencí. (Výchylky sčítáme jako vektory, t. j. výchylky obráceného směru odčítáme.)



Obr. 4



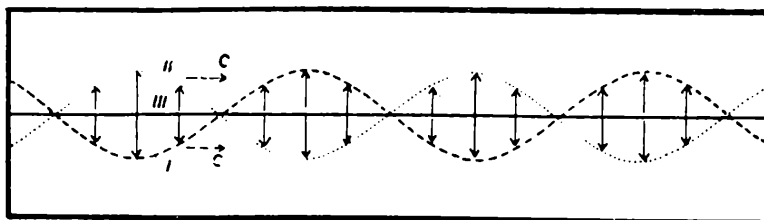
Obr. 5

Uvažme, jak bude výsledný děj záviset na dráhovém rozdílu, s kterým se interferující vlnění setkají.

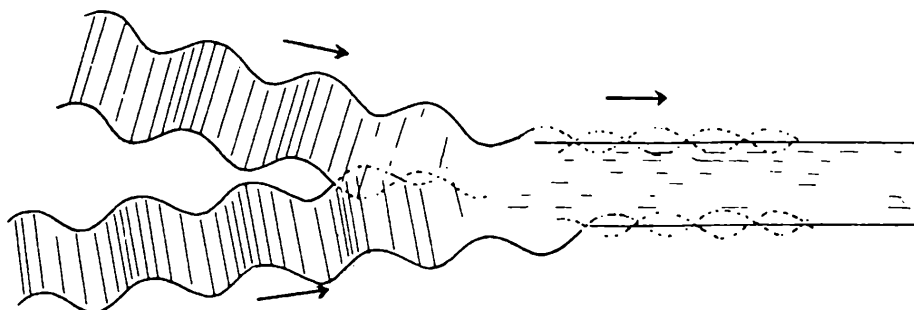
Dráhový rozdíl $d = 0$. Příklad, kdy se obě vlnění setkávají se stejnou fází, kdy je tedy také dráhový rozdíl roven 0, je vyznačen na obr. 5. Z něho vidíme, že obě složky mají v určitých místech současně výchylky nulové a v jiných výchylky největší. To znamená, že i výsledný děj má nulové, resp. maximální výchylky v týchž místech jako obě skládaná vlnění. *Výsledkem interference je opět vlnění harmonické* (t. j. můžeme je znázornit sinusoidou), *se stejnou vlnovou délkou*, kterou mají obě dílčí vlnění. Dráhový rozdíl výsledného vlnění proti složkám je roven 0. Amplituda výsledného vlnění je rovna součtu amplitud obou interferujících vlnění. Stejný výsledek dostaneme, je-li dráhový rozdíl obou vlnění roven celé délce vlnové λ , nebo celému jejímu násobku: 2λ , 3λ atd. To uvidíme bezprostředně z obr. 5: posuneme-li jednu vlnovku proti druhé o λ , nebo o celý násobek λ vpravo nebo vlevo, nic se na výsledku nezmění.

Dráhový rozdíl $d = \frac{\lambda}{2}$. V případě, že obě interferující vlnění mají dráhový rozdíl roven polovině vlnové délky nebo lichému násobku poloviny vlnové délky, mají výchylky obou složek v každém okamžiku opačný smysl (obr. 6, kde $A_1 = A_2$).

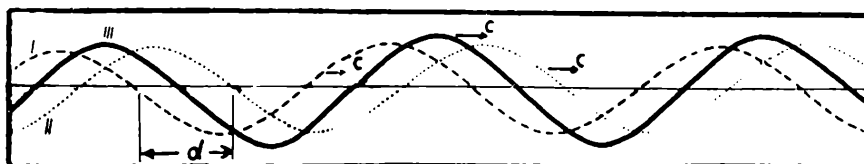
To znamená, že by částice měla mít v kterémkoli okamžiku současně dvě výchylky obráceného směru. Výsledná velikost výchylky je rovna rozdílu výchylek obou složek a její smysl je stejný jako smysl výchylky větší. Také rozkmit A je roven rozdílu rozkmitů obou složek $A = A_1 - A_2$. V obr. 7 je vyznačeno, jak by to asi zhruba vypadalo na našem modelu soutoku. (V obr. 6, 7 jsou amplitudy složek stejné. V tom případě se obě vlnění navzájem ruší.)



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

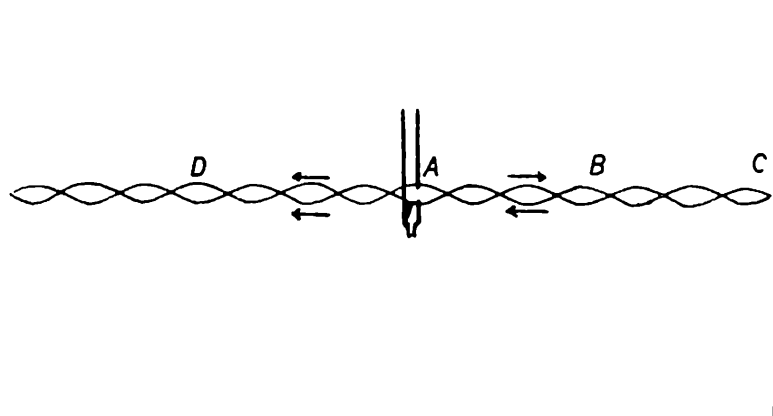
Dráhový rozdíl je roven jinému zlomku vlnové délky než $\frac{\lambda}{2}$. Z obr. 8, ve kterém mají obě složky pro jednoduchost stejnou amplitudu kmitů, je vidět, že výsledné vlnění má opět stejnou délku vlny jako složky, rychlost šíření je opět c (neboť složky se posouvají stejnými rychlostmi c vpravo). Výsledná amplituda má však velikost mezi 0 a $2A$, kde A je amplituda jedné složky. Vidíme také, že výsledné vlnění je dráhově posunuto proti oběma interferujícím vlněním.

Snad bychom měli jen ještě ukázat, že i v tomto případě je výsledné vlnění harmonické, t. j. že sečtením výchylek u dvou sinusovek se stejnou periodou dostaneme opět sinusoidu, ať jsou obě složky jakkoli vzájemně posunuty po ose. Ale to jsme již vlastně dokázali v dřívějším článku (RMF 35, str. 410) o skládání stejnosměrných harmonických kmitů. Rozdíl je tu jen ten, že tam znamenaly sinusoidy časový rozvoj kmitů, kdežto zde jsou to skutečné výchylky bodů v řadě bodové.

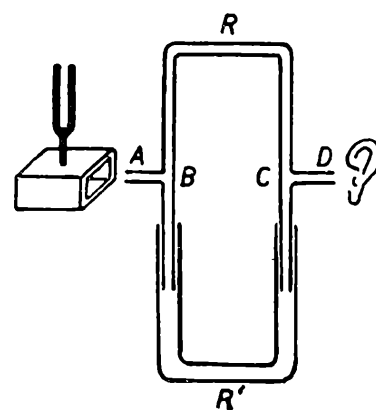
Poznámka. Na naší úvaze by se nic nezměnilo, kdyby vlnění nebylo příčné, nýbrž podélné. Podmínka, že složky mají stejný směr kmitání, by byla opět splněna, neboť výchylky částice se u podélného vlnění dějí vždy ve směru řady bodové. Proto výsledek interference dvou podélných vlnění je analogický jako u příčného.

Pokusy. 1. Uvedené příklady interference vln na vodě při soutoku byly hrubé a neuskutečnitelné modely. Můžeme si však i doma provést pokus o interferenci *zvukových* vln: Ve větší místnosti zní píšťala pokud možno stálou intenzitou v menší vzdálenosti (asi 1 m) od prázdné stěny (o rozloze nejméně 2 až 3 m²). Pozorovatel naslouchá v místě *D* (obr. 9) před pomocníkem, který píská na píšťalu. Blíží-li se nyní píšťala ke stěně *C* nebo vzdaluje-li se od ní (vzdálenost *AD* udržujeme stálou), pak slyšíme zřetelně, že se síla tónu střídavě zvětšuje a zmenšuje. Výklad zjevu je snadný. K pozorovateli *D* přichází tón jednak přímo od píšťaly *A*, jednak odražený od stěny v místě *C*. Tyto dva tóny jsou dvě stejná vlnění, která v místech od *A* vlevo interferují. Dráhový rozdíl pak závisí na vzdálenosti *AC* píšťaly od stěny. Proto pro některé polohy píšťaly se tóny navzájem zesilují a pro jiné zeslabují. Pro zdar pokusu musí být splněny některé podmínky. Tak na př. zdroj tónu musí vydávat zvuk stálé intenzity, nepřiliš vysoký (vhodný je na př. asi o výšce tónu houslové struny *e*). Velmi pěkně se tento pokus ukáže, máme-li ladičku na resonanční skřínce. Pak stačí rozezvučet ladičku, držet skřínku v natažené ruce směrem ke stěně a pomalu se s ní blížit nebo vzdalovat od stěny. Změna síly tónu je velmi zřetelná.

2. Na obr. 10 je znázorněn jiný pokus o interferenci zvuku, který je také uveden ve Fysice 10, na str. 163. Místo ladičky je možno při něm použít také píšťaly.



Obr. 9



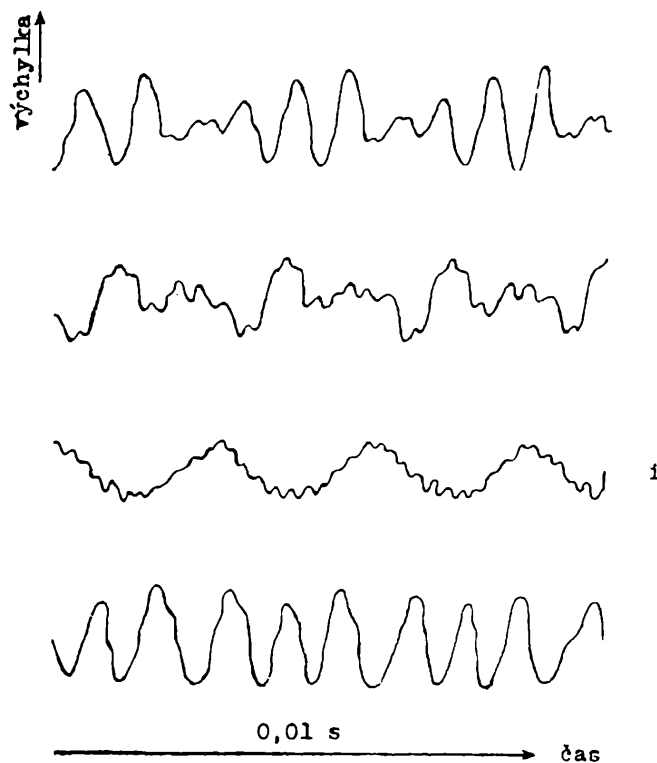
Obr. 10

Okolnost, že složením dvou nebo více vlnění, která mají touž vlnovou délku, vznikne vždycky vlnění o téže vlnové délce (a tedy téže frekvence) nezávisle na dráhovém rozdílu složek, je důležitá na př. v orchestrální hudbě. Kdyby totiž výška výsledného tónu závisela na dráhovém rozdílu interferujících vlnění, nebyla by možná taková hudba, kdy na př. čtyři housle hrají touž melodii v téže výšce.

Úloha 1. Pokuste se vypočít, pro které vzdálenosti *AC* (v pokuse na obr. 10) je v místě *D* intenzita tónu nejmenší, resp. největší (pro výšku tónu $N = 680$ c/s).

b) *Interferující vlnění mají různou vlnovou délku.* Čtenář si jistě povšiml, že jsme se při skládání vlnění v předešlých řádcích mohli odvolat na výsledky našich úvah o skládání stejnosměrných kmitů v dřívějších člancích. Uvažujeme-li, co se děje s jedním jediným bodem z řady bodové, kterou se šíří dvě vlnění, pak je to vlastně skládání dvou kmitů. A protože vlnění není nic jiného než kmitání celé soustavy částic, při čemž všechny částice konají shodné kmity až na fázový rozdíl, můžeme se i v dalším odvolávat na článek o skládání kmitů (RMF, roč. 35, str. 410, 444).

Poměr vlnových délek interferujících vlnění je 1 : 2. Pro výklad výsledného děje můžeme použít obr. 7 z dřívějšího článku (RMF, str. 444), kde však křivky nepovažujeme za časový rozvoj kmitavého pohybu jednoho bodu, nýbrž za mžikový obraz skutečných výchylek v řadě bodové. Uvažujme na př., jak se bude pohybovat třeba bod na pravém konci řady bodové. Vidíme, že má kmitat současně dvěma kmity, jejichž frekvence jsou v poměru 1 : 2. Výsledný pohyb je pak takový, že jeho časovým rozvojem je plně vytažená křivka. A totéž platí o všech ostatních bodech, s tím rozdílem, že mezi různými místy budou různé fázové rozdíly. Fázový rozdíl pak závisí na vzájemné vzdálenosti uvažovaných míst.



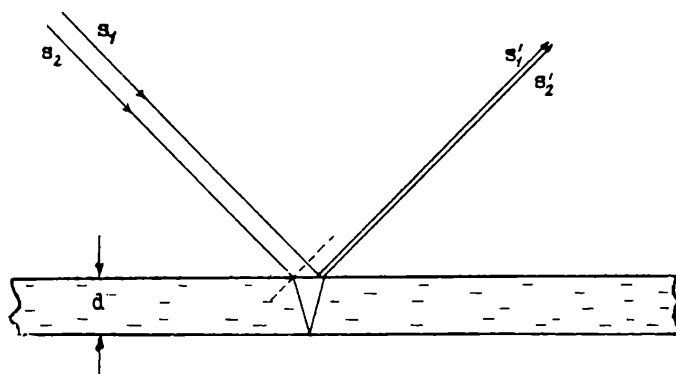
Obr. 11

Interference vlnění s vlnovými délkami téměř stejnými. Rázy. Vyšetřování tohoto případu vede k analogickému výsledku jako případ rázů v oddíle o skládání kmitů (RMF, str. 445). Každá částice prostředí, v němž se šíří dvě vlnění o téměř stejných vlnových délkách, totiž kmitá s frekvencí rovnou aritmetickému průměru kmitočtů obou složek, při čemž se rozkmit pomalu zvětšuje a zmenšuje. Frekvence „rázů“ je rovna stejně jako ve jmenovaném případě kmitových rázů rozdílu kmitočtů obou složek. Ovšem i v našem případě kmitají jednotlivé částice prostředí s různými fázovými rozdíly. Je-li perioda rázů T , pak částice ve vzájemné vzdálenosti $c \cdot T$, kde c je postupná rychlost vlnění, mají v témže okamžiku stejný rozkmit. Tuto skutečnost již známe: součin $c \cdot T$ je roven vlnové délce λ , částice jsou v místech, jejichž vzdálenost je právě rovna vlnové délce λ .

Stojí za zmínku, že náš sluch nevnímá složené vlnění jako kvalitativně nový zvuk, nýbrž rozkládá si složené vlnění jako analysátor ve složky; slyšíme dva tóny -

složky. Pouze ve zvláštních případech může složením dvou nebo více tónů vzniknout i kvalitativně nový vjem. Jeden již známe, jsou to *rázy*. Druhým je jev, známý v hudbě jako *barvitost tónu*.

Barvitost tónu. Z hudby je známo, že se tóny liší výškou, intenzitou a barvitostí. Slyšíme-li nějaký tón, můžeme třeba i za zavřenými dveřmi rozeznat, zda jej hrají housle, či flétna, nebo klarinet a pod. To je umožněno tím, že různé nástroje vyluzují stejně vysoké tóny lišící se t. zv. *barvitostí*. Analýsou tónů bylo zjištěno, že barvitost tónů je způsobena vyššími tóny, které provázejí tón základní, ale s menší intenzitou. U hudebních nástrojů jsou tyto zbarvující tóny často *vyšší harmonické*, t. j. tóny, jejichž výšky jsou k výšce základního tónu v poměru celých čísel. Má-li základní tón výšku N , pak druhý harmonický má výšku $2N$, třetí $3N$ atd. A právě výška a intenzita těchto spoluznějících tónů způsobují charakteristické zbarvení tónů různých hudebních nástrojů. Zde ovšem jde o skládání více než dvou vlnění.



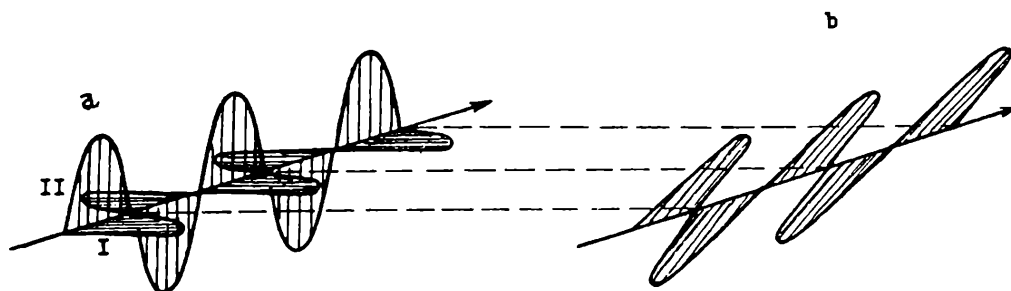
Obr. 12

Harmonická analýsa. Je zajímavé, že každý zvuk, ať má jakýkoli průběh, můžeme považovat za děj složený z řady harmonických tónů. Rozkládání zvuku - obecně jakýchkoliv rozruchů - v harmonické složky se nazývá *harmonická analýsa*. Ta má velký význam ve zvukové technice i v technice elektromagnetických vlnění. Souzněním vyšších tónů současně se základním tónem je způsobena nejen barvitost lidského hlasu, nýbrž i vytváření samohlásek a souhlásek při mluvení. Vidíme to dobře z obr. 11, který znázorňuje časové rozvinutí znění některých samohlásek. Je vidět, že při vzniku hlásek má podstatný význam spoluznění vyšších tónů a jejich intenzita.

Interference zvuku je skládání postupného vlnění. Příkladem interference příčné vlnění je interference světla. Vzhledem k tomu, že vlnové délky světla jsou velmi malé (0,000 4 až 0,000 75 mm), vznikají interferenční zjevy nejčastěji na tenkých vrstvách. Obr. 12 znázorňuje (ve velkém zvětšení) výklad interference světla dopadajícího šikmo na tenkou vrstvu. Zde interferuje paprsek s_1 , odražený na povrch s paprskem s_2 , odraženým na spodní straně vrstvy. Z bílého světla se některé barvy interferencí ruší - to záleží na tloušťce vrstvy, indexu lomu a na úhlu dopadu - proto je odražené světlo zbarveno (barvy tenkých vrstev na př. na vodní hladině znečištěné olejem).

2. Interference vlnění kolmých kmitů

V nauce o světle i v technické praxi se setkáváme s t. zv. *kruhově*, po př. *elipticky polarisovaným* světlem. Vznik těchto vlnění si můžeme vysvětlit jako děj, který vzniká složením dvou lineárně polarisovaných vlnění, jejichž kmitové roviny jsou k sobě kolmé. K výkladu užijeme výsledků článku, v němž jsme si vyložili vznik složených kmitů ze dvou složek, které kmitají navzájem kolmo (RMF, roč. 36, str. 31). Pro jednoduchost se omezíme opět na přímou řadu částic (obr. 13) a budeme předpokládat, že se v ní šíří dvě stejná lineárně polarisovaná vlnění (složky), jejichž kmitové roviny jsou k sobě kolmé: jedna kmitá ve vodorovném směru (složka I) a druhá svisle (složka II). Výsledný pohyb částic dostaneme vektorovým složením výchylek. Musíme si při tom uvědomit, že částice mají výchylky zobrazené v obr. 15 jen v určitém okamžiku. Pro znázornění celého průběhu vlnění bychom musili křivky v obr. 13a posouvat směrem šipky rychlostí vlnění c . Protože se však obě složková vlnění šíří stejnou rychlostí, vidíme, že i křivka, která v obr. 13b znázorňuje výsledek složení výchylek pro všechny částice, by se posouvala směrem šipky touž rychlostí c . Výsledný pohyb však bude záviset na dráhovém rozdílu obou složek, a proto si vyřešíme dva základní případy: a) $d = 0$, b) $d = \frac{\lambda}{4}$.

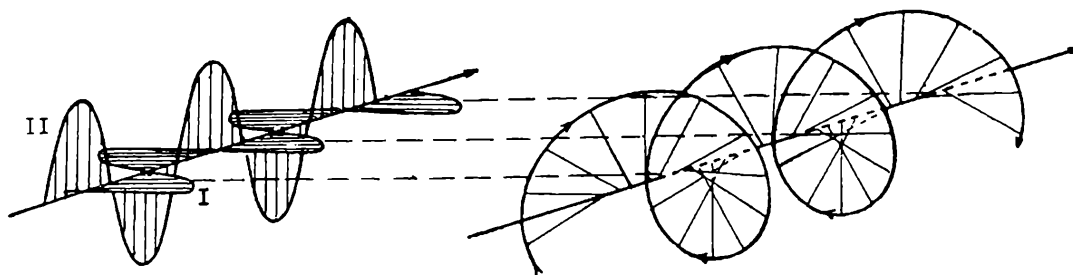


Obr. 13

a) *Dráhový rozdíl* $d = 0$. Tento případ je pro jistý okamžik znázorněn na obr. 13. Z něho vidíme zejména toto: Obě složky (obr. 13a) mají maximální výchylky (vrchy nebo důly) v témž místě. Proto i výsledné vlnění (obr. 13b) bude mít maximální výchylky (vrchy nebo důly) také v témž místě. Nulovou výchylku mají obě složky v témž místě. Proto také ve výsledném vlnění budou nulové výchylky v týchž místech. Obě složky mají pro tutéž částici stejné výchylky k sobě kolmé. Proto jejich výslednice bude mít velikost a směr úhlopříčky čtverce, sestrojeného v každém místě z výchylek obou složek. Z obr. 13 bezprostředně plyne, že výsledný pohyb je *lineárně polarisované* vlnění, které má stejnou délku vlny jako každá ze složek, rychlost šíření je stejná jako rychlost složek, dráhový rozdíl proti složkám je nulový; velikost a směr amplitudy dostaneme sestrojením úhlopříčky čtverce, jehož stranami jsou amplitudy složek. Výsledné vlnění je opět lineárně polarisované, ale rovina kmitová je symetricky položena ke kmitovým rovinám složek. Je to analogický případ k případu vyloženému dříve (RMF, roč. 36, str. 32). Stejný výsledek bychom dostali, kdyby dráhový rozdíl byl λ , 2λ atd. O tom se snadno přesvědčíme, když si nakreslíme obě složky zvlášť na průsvitný papír a pak posuneme jednu složku ve směru osy o vlnovou délku λ , po př. o její celý násobek vpravo nebo vlevo.

b) *Dráhový rozdíl* $d = \frac{\lambda}{4}$. *Kruhově a elipticky polarisované vlnění*. Kruhově polarisované vlnění dostaneme, šíří-li se dvě stejná vlnění řadou bodovou s dráhovým rozdílem rovným $\frac{1}{4}$ vlny. Tento případ je znázorněn pro určitý okamžik v obr. 14.

Abychom zjistili, jaký je výsledný pohyb určitého bodu, sledujeme, co se v jeho místě děje s oběma složkami. Myslíme-li si, že se obě vlnovky, znázorňující obě složky, posouvají rovnoměrně stejnou rychlostí vpravo dozadu, pak vidíme, že daný bod by měl kmitat současně ve dvou směrech k sobě kolmých tak, že mezi oběma kmity je fázový rozdíl právě čtvrt periody T . Ale tento případ jsme měli již dříve (RMF, roč. 36, str. 33). Tam jsme zjistili, že taková částice koná výsledný pohyb kruhový. Tak na př. bod A by kmital ve vlnění I vodorovně a ve vlnění II svisle, ale o čtvrt periody později. V okamžiku, kdy má vlnění I vrch (na př. směrem za nákresnu), má vlnění II nulovou polohu. Ale po $\frac{1}{4}$ periody má vlnění vodorovně nulovou polohu, kdežto svislé má vrch (směrem nahoru). Částice tedy přešla po čtvrtkružnici z bodu za nákresnou do bodu nahoře v nákresně. Díváme-li se proti směru šíření vlnění, koná částice kruhový pohyb proti pohybu hodinových ručiček, tedy v kladném smyslu (levotočivý).



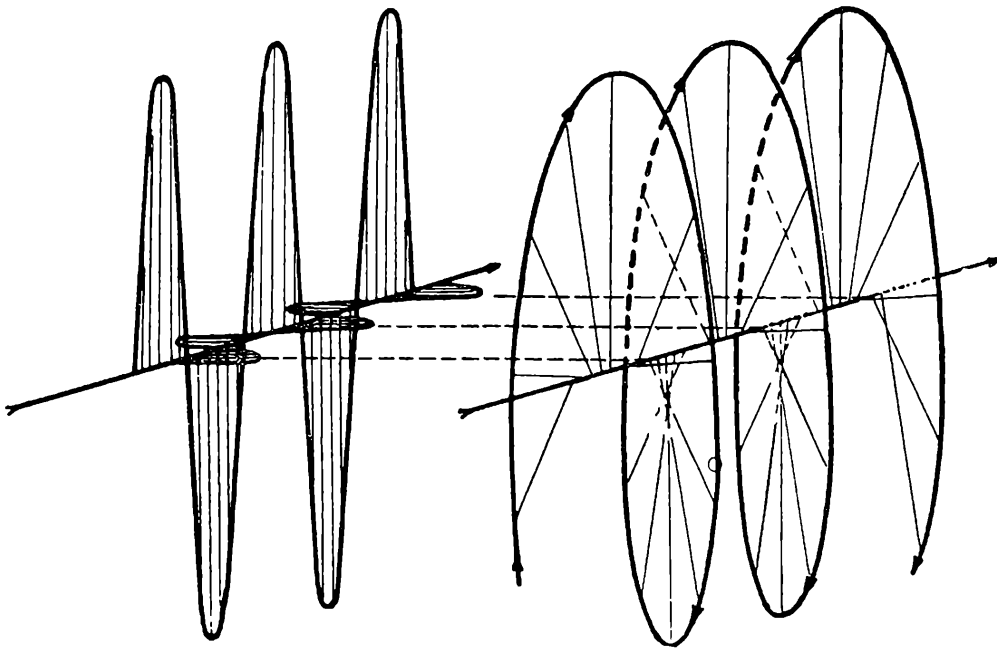
Obr. 14

Musíme ještě odvodit, jaké je rozložení částic v celé bodové řadě v určitém okamžiku. Vidíme to nejlépe na obr. 14. Složíme-li totiž všechny dvojice výchylek, vidíme, že jsou částice rozloženy po křivce, která upomíná na tvar šroubového závitu. Tato křivka se také nazývá šroubovice. Chceme-li si tedy učinit obraz o tom, jak se takové *kruhově polarisované* vlnění šíří, myslíme si, že jsou částice upevněny na drátěné šroubovici, která je připevněna k ose o . Otáčíme-li osou (a současně všemi částicemi) ve směru kladném, dostáváme mechanický model šíření *kruhově polarisovaného* vlnění. Kdyby amplitudy obou složek nebyly stejně veliké, vzniklo by vlnění *elipticky polarisované*, obr. 15.

c) *Dráhový rozdíl* $d = \frac{3}{4} \lambda$. V tomto případě vznikne opět *kruhově polarisované* vlnění, ale smysl otáčení je obrácený proti předešlému (pravotočivé). To si čtenář snadno odvodí, myslí-li si v obr. 14 složku II posunutou na př. vpravo o $\frac{\lambda}{2}$.

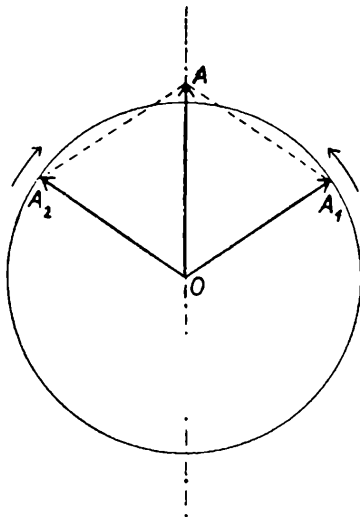
Úloha 2. Jaké by bylo výsledné vlnění, kdyby dráhový rozdíl obou složek byl roven lichému násobku poloviny vlnové délky?

d) *Dráhový rozdíl je jiným zlomkem vlnové délky než v předešlých případech. V tomto případě je výsledný pohyb částice eliptický. Takové vlnění nazýváme elipticky polarisované.*



Obr. 15

Příklady. Jak už jsme řekli, mají kruhově a elipticky polarisovaná vlnění velkou důležitost v nauce o světle. Tak na př. v *polarimetrii*, t. j. při optické metodě zjišťování koncentrace roztoků ze stáčení polarisační roviny opticky činnými látkami jde vlastně o skládání dvou kruhově polarisovaných světél. Jinak se užívá elipticky a kruhově polarisovaných světél na př. ke zjišťování jakosti leštěných povrchů, resp. ke studiu tenkých povrchových vrstev na leštěných plochách. Podrobnější poučení o tom nalezne čtenář v důkladnějších učebnicích fyzikální optiky.



Obr. 16

Úloha 3. Fresnel (francouzský fysik poč. 19. stol.), vyložil stáčení polarisační roviny lineárně polarisovaného světla v některých látkách teorií, podle které se lineárně polarisované světlo v těchto látkách rozkládá na dvě světla kruhově polarisovaná, jedno pravotočivé a druhé levotočivé. Ukažte, že kmitání částice lineárně polarisovaného vlnění skutečně lze vysvětlit jako složení dvou kruhově polarisovaných složek s opačnými směry kmitání.

Řešení. Úloha 1. Vlnová délka je pro $N = 680$ c/s; $\lambda = 0,5$ m. Maximum intenzity je v místech, pro něž $2AC = n \cdot 0,5$ m ($n = 1, 2, 3, \dots$), minimum pro $2AC =$ lichému násobku vzdálenosti $0,25$ m.

Úloha 2. Výsledné vlnění by bylo také lineárně polarisované, ale rovina kmitová by byla kolmá k rovině kmitové výsledného vlnění při dráhovém rozdílu $d = 0$.

Úloha 3. Má-li světelný vektor konat současně dva kruhové kmity stejné frekvence, jeden pravotočivý a druhý levotočivý, pak výslednice stále splývá s přímkou pŕlící úhel obou kruhově kmitajících vektorů \vec{OA}_1 a \vec{OA}_2 (obr. 16). Vektor $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$ se mění harmonicky od 0 do $2OA_1$.

Hmotové spektrografy

Úvod.

Iste ste už niečo počuli o i z o t o p o c h. Zistilo sa, že existujú prvky, ktoré majú naprosto rovnaké chemické vlastnosti - a predsa sa líšia - v atómových váhach. Menujú sa i z o t o p y. Je vám napr. známe, že uran má izotopy U^{234} , U^{235} , U^{238} ; vodík sa vyskytuje tiež v troch modifikáciach: ako H^1 („obyčajný“ vodík), H^2 (deuterium) a H^3 (tritium). Chemické prvky sú v skutočnosti zmes izotopov a ich váhy, určené obvyklými chemickými cestami, sú stredné hodnoty atómových váh izotopov, z ktorých sa prvok skladá. Rozvoj fyziky - zvlášť atómovej - prináša požiadavku stanoviť nie stredné, ale skutočné atómové váhy. Tento článok vás chce zoznámiť s prístrojmi, ktoré umožňujú spomínané merania. Nazývajú sa *hmotové spektrografy* alebo *spektrometry*, presnejšie rozlíšenie bude podané nižšie.

Užitie hmotových spektrometrov sa však týmto nevyčerpáva. Ich upotrebenie je rozmanité. Veľmi často je napr. potrebné previesť analýzu zmesi plynov čo do percentuálneho obsahu jednotlivých prvkov, alebo zlúčenín. Taká úloha sa môže vyskytnúť napr. vo vákuových systémoch, vo výbojkách, v elektrónkach pokiaľ ešte nie sú odtavené od čerpacích sústav a podobne. Chemicky by sa takáto úloha stala neriešiteľnou (meriame v uzavretom priestore, do systému nemôžeme nič vpravovať), alebo pri najlepšom veľmi zdĺhavou a ťažkopádnu. Hmotový spektrometer, ktorý má tú vlastnosť, že dokáže od seba odlíšiť častice (atómy, molekuly) s rôznou hmotou alebo váhou, učiní také meranie rýchlym a presným.

Princíp činnosti.

Predstavme si, že máme v nejakom uzavretom objeme zmes častíc s rôznymi hmotami. Môžu to byť atómy izotopov niektorého prvku, alebo atómy rôznych prvkov, alebo rôzne molekuly, alebo konečne všetky dohromady. Ako sme sa zmienili v úvode, na hmotovom spektrografe, alebo spektrometre požadujeme, aby z tejto zmesi nejakým spôsobom vymedzil častice s rovnakou hmotou a aby nám podal informáciu o ich množstve.

Táto úloha spektrografa, ako i jeho názov, vnucuje analógiu s optickou spektroskopiou. V optike je úloha podobná. Zo zmesi svetelných lúčov o rôznych vlnových dĺžkach (napr. z bieleho svetla) treba vybrať lúče podľa vlnových dĺžok a určiť ich intenzitu. V optike na oddelenie lúčov užijeme hranolu. Hranol lúče lomom oddelí a rozloží v spektrum. Ak za hranol postavíme fotografickú platňu, jednotlivé jej miesta, na ktoré svetlo dopadá, zčernajú úmerne s intenzitou svetla. Tým by bola v najjednoduchšom prípade optická analýza prevedená.

V hmotovej spektrografii je úloha ťažšia. Riešenie je takéto. Skúmané častice sa vždy privedú do ionizovaného stavu, tj. elektricky sa kladne nabijú, a obyčajne sa z nich potom tiež vytvorí zväzok, lúč letiacich častíc. Zväzok iónov je vedený do zariadenia, zvaného *analyzátor*, ktoré svojou funkciou pripomína opt. hranol.

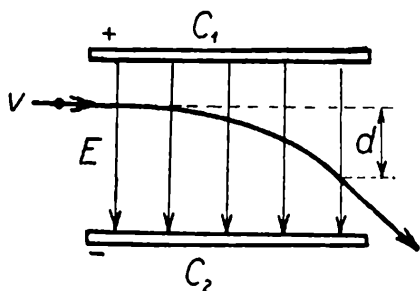
Každý ión vo zväzku je charakterizovaný svojou hmotou, nábojom, rýchlosťou a množstvom vzhľadom k ostatným. Analyzátor musí byť usporiadaný tak, aby pôvodný zväzok, ktorý obsahuje všetky druhy iónov, rozložil v zložky, v „spektrum“, v ktorých by boli sústredené ióny len s určitou hmotou, bez ohľadu na rýchlosť. ¹⁾

Rozlíšené zložky sú ďalej vedené do zariadenia, ktoré registruje dopad iónov. Vidíme, že hmotové spektrálne prístroje pozostávajú z troch základných častí: zo zdroja iónov, kde prebieha ionizácia skúmanej látky a formovanie zväzku, z analyzátora a registrácie rozlíšených iónov.

Ako pracuje analyzátor si ukážeme na konkrétnych príkladoch. Tu iba pripomenieme, že analýza sa prevádza pomocou rôzne kombinovaných elektrických a magnetických polí. Ak je niektoré z polí - obyčajne elektrické - s časom premenné, prístroje sa nazývajú *dynamické*, ak sú nepremenné, menujú sa *statičné*. Podľa spôsobu registrácie hovoríme o *spektrografoch*, v prípade, že je optická (napr. fotografická platňa), alebo o *spektrometroch*, ak sa užíva k registrácii priamo elektrického náboja iónov a meria sa iónový prúd, príslušný rozlíšenej zložke.

Nabitá častica v elektrickom a magnetickom poli.

Aby sa nám v ďalšom lepšie sledoval výklad činnosti analyzátoru, povšimneme si zbežne chovania sa nabitých častíc v elektr. a magnet. poli. Predstavme si, že medzi dosky kondenzátora C_1, C_2 (obr. 1), ktorý vytvára elektr. pole s intenzitou E vletí nabitá častica rýchlosťou v s nábojom e a hmotou m . Na časticu začne pôsobiť sila eE (gravitačná sila oproti elektrickej je zanedbateľná, preto ju neuvažujem). Zrýchlenie pôsobiace na časticu dostaneme, ak predelíme silu hmotou,



Obr. 1. Nabitá častica v elektrickom poli. C_1, C_2 dosky kondenzátora; E intenzita el. poľa; v rýchlosť nabitých častíc; d odchylka od pôvodného smeru.

tj. $\frac{eE}{m}$. Celý prípad pripomína vodorovný vrh, len s tým rozdielom, že miesto gravitačného zrýchlenia tu pôsobí na časticu zrýchlenie $\frac{eE}{m}$. Dráha

častice sa v elektrickom poli zakriví. Po opustení kondenzátora pokračuje častica v tom smere, ktorý mala v okamžiku opustenia kondenzátora. Zložitejší výpočet ukazuje, že odchylka d od pôvodného smeru je

$$d = K \frac{e}{mv^2}, \quad (1)$$

kde K je konštanta závislá na dĺžke kondenzátora a intenzite elektr. poľa E . Ak do kondenzátora vchádza zväzok nabitých častíc s rôznymi hmotami m a rôznymi rýchlosťami v , budú častice rôzne odchylené; prísluší im rôzne d .

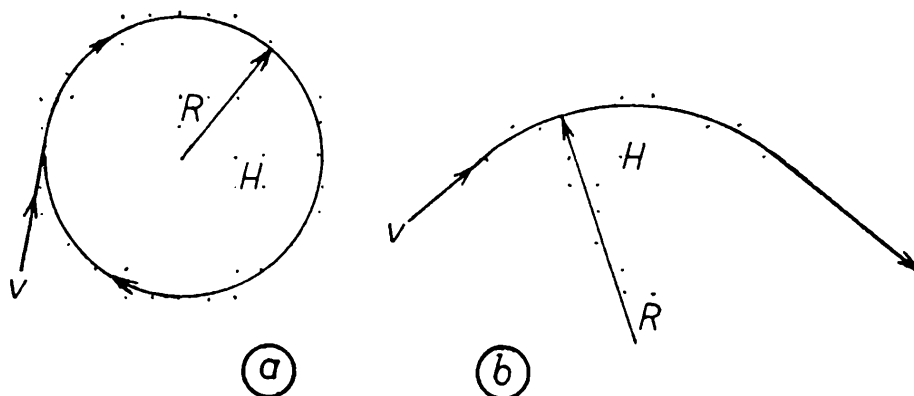
¹⁾ V ďalších úvahách budeme predpokladať, že všetky ióny sú iba jedenkrát ionizované, tj., že majú všetky rovnaký el. náboj, rovný náboju elektrónu s kladným znamienkom. j

Obráťme teraz pozornosť na chovanie sa nabitých častíc v homogennom magnetickom poli s intenzitou H^2). V prípade, že by v okamžiku, kedy začneme časticu pozorovať bola v klude, magnet. pole ju ponechá v stave nehybnosti i naďalej. Ak sa však nabitá častica pohybuje v magnet. poli rýchlosťou v , môžeme tento jav pokladať za elektrický prúd v magnet. poli (elektr. prúd je tok nabitých častíc). Vieme, že na vodič v magnetickom poli, ktorým preteká prúd, pôsobí sila. Teda i na jednu časticu bude pôsobiť sila. V homogennom magnetickom poli, ktoré je kolmé k rýchlosti častice, táto - tzv. Lorentzova - sila mení iba smer rýchlosti častice a nie jej veľkosť, pretože táto sila je stále kolmá k rýchlosti. Častica sa preto začne pohybovať po kružnici (obr. 2a).

Polomer kružnice R je daný vzorcom

$$R = \frac{mv}{e} \cdot \frac{1}{H} \quad (2)$$

Keby do magnet. pola vleteli častice s rôznou hmotou a rýchlosťou, ich dráhy sa rôzne zakrivia. Treba pripomenúť, že častica nemusí vždy opísať celú kružnicu, ako je to na obr. 2a. Ak polomer krivosti R bude väčší ako priestor, v ktorom je magnet. pole, častica sa síce zakriví v súhlase so vzorcom (2), ale opustí magnet. pole ako je to na obr. 2b.



Obr. 2. Nabitá častica v homogennom mag. poli. H intenzita mag. pola kolmá na rovinu obrázku; v rýchlosť častice; R polomer krivosti dráhy.

Astonov hmotový spektrograf.

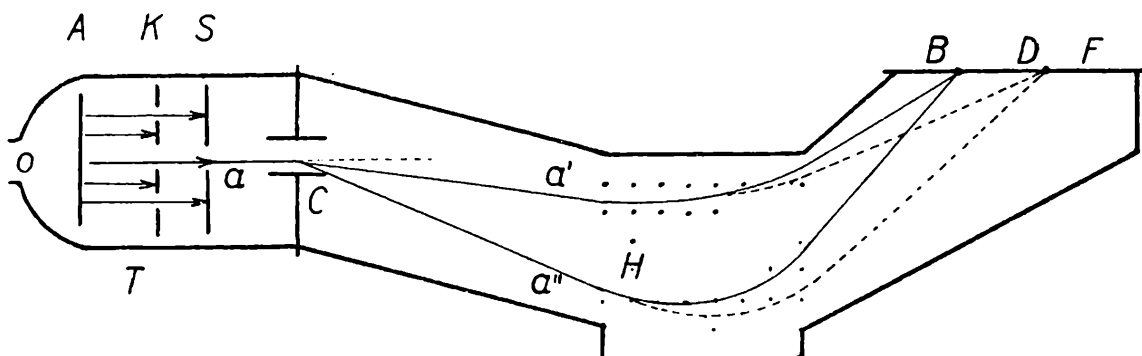
Prejdeme k zjednodušenému popisu činnosti hmotových spektrografov. Zo statických systémov si všimneme iba Astonovho; je jednak prvým spektrografom vôbec a jednak nám umožní vo veľkej miere užiť optickej analógie. Astonov hmotový spektrograf pracuje s časove nepremenným elektrickým a kolmým magnetickým polom. Činnosť je takáto: Kladne nabité ióny skúmanej látky v plynnom stave získame výbojom v trubici T (obr. 3). Priechodom cez dierkovanú katódu K sa vytvoria z iónov kanálové lúče. Štrbinou S vydelfíme z nich

²⁾ Homogenným polom rozumieme také pole, v ktorom sú všetky siločiarly rovnobežné a rozložené so stejnou hustotou v danom priestore.

úzky zväzok a , ktorý vniká medzi dosky kondenzátora C . Predpokladajme teraz na chvíľu, že vo zväzku a sú obsažené ióny síce s rôznymi rýchlosťami v , ale s rovnakou hmotou m . Kondenzátor, ako už vieme zo vzorca (1), nám častice vo zväzku odchyli úmerne s $\frac{e}{mv^2}$. Zväzok sa rozťahne. Častice s najväčšou

rýchlosťou sa budú pohybovať po hranici a' , s najmenšou rýchlosťou po a'' . Ostatné budú medzi nimi. Rozťahlý zväzok vnikne do priestoru, v ktorom je magnet. pole intenzity H . Magnet. pole je kolmé na rovinu nákresu a teda i na smer rýchlostí častíc. Podľa vzorca (2) vieme, že rýchlejšie častice sa zakrivia menej ako pomalé. V našom prípade hranica a' bude zakrivená menej ako a'' . Poľu H sa dáva taký smer, aby spôsobovalo zakrivenie dráhy na opačnú stranu ako elektrické. Následkom toho sa v bode B spoja obe hranice, tj. všetky ióny bez ohľadu na rýchlosti dopadnú do akéhosi spoločného ohniska. Bod B leží na fotografickej platni F .

Užime optickej analógie, aby sme lepšie pochopili činnosť prístroja. Zväzok bieleho svetla a prejde hranolom P_1 (obr. 4) a rozloží sa v spektrum. Červenému svetlu bude odpovedať lúč a' , fialovému a'' . Druhý hranol P_2 , umiestený vrcholom na opačnú stranu ako prvý, znovu sústredí všetky rôznofarebné lúče do bieleho ohniska. Tu odpovedá prvý hranol elektrickému a druhý magnetickému poľu. Lúče rôznej vlnovej dĺžky odpovedajú časticiam rôznych rýchlostí.



Obr. 3. Astonov hmotový spektrograf. O otvor, ktorým je prístroj napojený na baňku so skúmanou látkou; T výbojová trubica; A anóda; K dierkovaná katóda; S štrbina; C kondenzátor; a zväzok skúmaných iónov; H mag. pole; F fotograf. platňa; B, D stopy iónov na platni.

Uvažovali sme ióny s rovnakými hmotami m . Zistili sme, že Astonov spektrograf tieto ióny sústredil bez ohľadu na ich rýchlosti do jedného bodu. Predpokladajme teraz, že v kanálových lúčoch sú obsiahle ióny dvoch rozdielných hmôt m a m' . Nech pre určitosť platí $m < m'$. V magnet. poli sa ióny s väčšou hmotou zakrivia menej. Pôvodný zväzok (obr. 3) sa rozdelí na dva: plnovytiahly, odpovedajúci m , a čiarkovaný, odpovedajúci m' . Konečný výsledok je tento: Do bodu B sa sústredili všetky ióny s hmotou m , do D s hmotou m' - bez ohľadu na rýchlosti. A to sme práve chceli. Samozrejme, že pre viac hmôt by sme dostali viac ohnisiek.

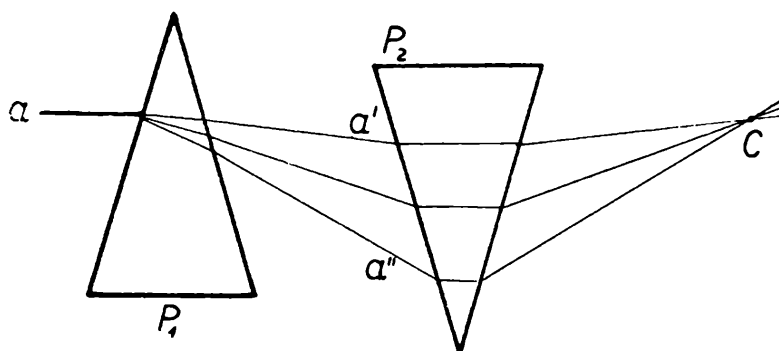
³⁾ Pôvodný zmysel a' , a'' sa teraz zmenil. a'' odpovedá teraz najpomalejším iónom s hmotou m , a' odpovedá najrýchlejším iónom s hmotou m' .

Ióny dopadlé na fotografickú platňu spravia svojím nárazom na ňu záznam. Ak sme analyzovali viac hmôt, dostaneme po vyvolaní platne rôzne tmavé záznamy, odpovedajúce svojou polohou na doske veľkosti hmoty iónov, svojou tmavosťou množstvu iónov. Takýto záznam sa nazýva *hmotové spektrum*. Pre nedostatok miesta sa nemôžeme zaoberať spôsobom, akým sa spektrum vyhodnocuje. Pretože žiadané informácie na tomto prístroji sú dané graficky, prístroj sa nazýva *spektrograf*.

Sú i iné typy spektrogrfov ako popísaný Astonov. Majú jednu spoločnú vlastnosť: umožňujú veľmi presné merania hmôt, tj. až na 5 des. miest, ale zisťovanie percentuálneho obsahu hmôt fotometricky podľa zčernania platne je dosť ťažké a nepresné. K tomuto účelu sa lepšie hodia *spektrometry*. Spektrometry môžu byť jak statické, tak i dynamické. My sa oboznámime s jedným dynamickým.

Omegatrón.

Statické systémy sú obyčajne čo do rozmerov veľké. Kladú nezvyčajne veľké požiadavky na presnosť konštrukcie a geometrické tvary súčiastok. Užívajú veľkých magnetov so špeciálnymi pólovými nástavcami. Len málo laboratórií si ich môže zadovážiť pre ich vysokú cenu. *Dynamické spektrometry*, pracujúce so striedavým elektrickým poľom, strácajú skoro všetky tieto nevýhody. Sú malé a niektoré z nich - napr. tzv. Bennettov systém - nepotrebujú ani magnetického poľa. Popíšeme si jeden dynamický spektrometer zvaný *omegatrón*.



Obr. 4. Optická analógia hmotového spektrografu. P_1, P_2 hranoly; a zväzok bieleho svetla; a' červený, a'' fialový lúč; C biele ohnisko.

Omegatrón skonštruovali r. 1949 Hipple, Sommer a Thomas. Využíva účinkov homogenného magnet. a ku nemu kolmého elektr. poľa. Elektrické pole je striedavé (vysokofrekvenčné).

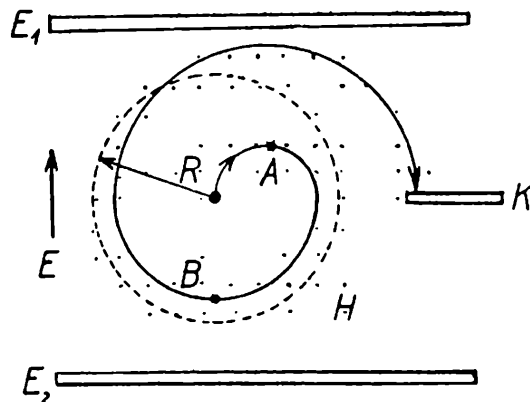
Nech siločiar magnet. poľa H mieria kolmo na rovinu nákresu v obr. 5. Elektrické pole E vytvorené medzi elektrodami E_1, E_2 je kolmé k magnetickému. Predstavme si, že sme nejakým spôsobom vpravili do týchto polí ión s hmotou m a nábojom e . Elektr. pole E nech v tom okamžiku mieria od E_2 k E_1 . Účinkom elektr. poľa sa častica začne pohybovať k elektróde E_1 , účinkom magnet. poľa sa jej dráha zakriví, ako je to na obr. 5. Častica sa ocitne až v bode A . Keby sa teraz smer elektr. poľa zmenil v opačný, dospela by častica do bodu B . V bode B by sme znovu žiadali zmenu elektr. poľa - a podobne ďalej. Tak by sa nám častica začala pohybovať po špirále. Vidíme, že či sa častica bude pohybovať po špirále alebo nie, závisí od vhodnej zmeny, tj. frekvencie elektrického poľa. Úvaha dá,

že vhodnosť či nevhodnosť frekvencie bude závisieť na e , m , H . Veľkosť intenzity elektr. poľa E bude mať za následok iba toto: ak bude E malé, špirála bude „hustejšia“, ak bude E veľké, bude „riedka“, na ovplyvnení vlastnej frekvencie sa však nezúčastní. Skutočne, výpočet dáva v súhlase s týmto takýto vzorec pre kruhovú frekvenciu ω elektrického poľa:

$$\omega = \frac{eH}{m} \quad (3)$$

Ak teda vložíme na E_1 , E_2 elektr. pole s kruhovou frekvenciou ω danou vzorcom (3), pri danom H sa bude ión pohybovať po špirále, až dopadne na zbernú elektrodu K , zvanú kolektor. Takýto ión sa nazýva „r e z o n a n č n ý m“. Názov „o m e g a t r ó n“ je odvodený práve od kruhovej frekvencie ω .

Vráťme sa však ešte k bodu A . Ak frekvencia (tj. zmena) elektr. poľa nebude priaznivá ako v prvom prípade, častica sa nikdy nebude pohybovať po špirále. Autori omegatrónu vypočítali, že ak častica nemá pri danom magnet. poli náboj a hmotu vyžadovanú vzorcom (3), pri svojom pohybe nevybočí z akejsi kružnice o polomere R . Ak je vzdialenosť kolektoru od stredu väčšia ako R , takýto ión nikdy nedopadne na kolektor.



Obr. 5. Princíp činnosti omegatrónu. E_1 , E_2 elektródy; E okamžitý smer el. poľa; H mag. pole; R polomer kružnice pre „nerezonančné“ ióny; A , B body na špirále; k kolektor.

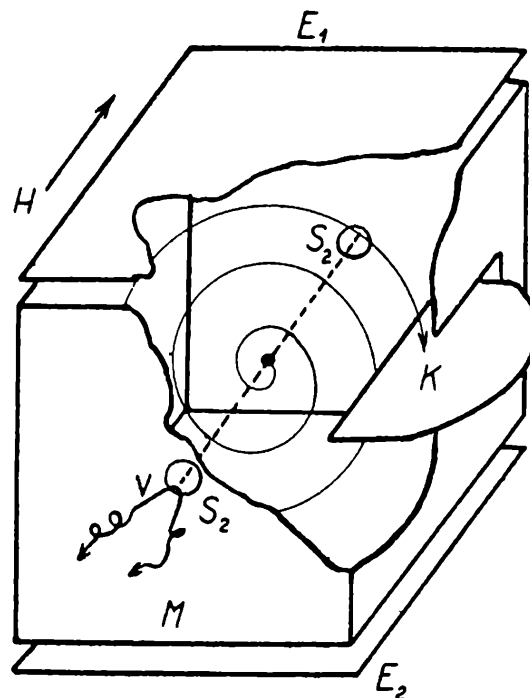
Spravme si záver. Pri určitej kruhovej frekvencii ω elektr. poľa E medzi elektrodami E_1 , E_2 dopadnú na kolektor len ióny s určitou hmotou m . Ak frekvenciu zmeníme, na kolektor sa dostanú zase ióny s inou hmotou. Zmenou frekvencie môžeme takto vyčerpať všetky hmoty, ktoré sme do omegatrónu vpravili, a získať ich spektrum. Pripomeňme si, že je i iná možnosť získať spektrum. Je totiž podľa vzorca (3) možné nechať frekvenciu stálo a meniť magnetické pole.

Konštrukčne býva omegatrón usporiadaný takto. V plechovej krabicike M (obr. 6) bez spodnej a vrchnej steny je v prednej stene štrbina s_1 , v zadnej s_2 . Pred štrbinou s_1 je vlákno V . Ak sa vlákno rozžeraví, emituje elektróny, z ktorých sa štrbinou s_1 vydolí úzky zväzok. Ten prejde krabíčkou a štrbinou s_2 ju opustí. V krabíčke je skúmaný plyn. Elektróny na svojej ceste krabíčkou ionizujú plyn. Tým je vyriešený problém vpravovania iónov do omegatrónu. Nad a pod krabíčkou sú elektródy E_1 , E_2 . V jednej zo stien je kolektor K . Celý tento systém

je zatavený do sklenej baňky (podobne ako elektrónka; svojimi rozmermi sa omegatrón veľmi nelíši od elektrónky) a napojený na objem so skúmanou látkou. Baňka je vložená do magnet. poľa H , ktoré má smer ako na obrázku.

Na kolektor dopadnú „rezonančné“ ióny. Čím je v skúmanej látke viac častíc s hmotou m , tým viac iónov sa vytvorí a tým viac ich dopadne na kolektor. Kolektor sa kladne nabije. Ak ho spojíme cez galvanomer so zemou, pretečie galvanomerom elektr. prúd. Výchylka galvanomeru je priamoúmerná množstvu dopadlých iónov a je teda mierou percentuálneho obsahu danej látky. Na presné posúdenie percenta treba galvanomer najprv vhodne okalibrovať. Presnosť určenia percenta je veľmi vysoká i pri veľmi nízkych koncentráciach.

Vo vákuovej fyzike sa veľmi často stáva, že vo vákuovej aparátúre sa nenachádza iba jeden plyn, ale zmes plynov (napr. vzduch). Niekedy je dôležité poznať nie celkový tlak zmesi, ale len tlak jedného plynu (napr. kyslíku), ktorý by tento mal, keby bol v aparátúre sám (tzv. p a r c i á l n y t l a k). Takéto merania



Obr. 6. Experimentálne usporiadanie omegatrónu. E_1 , E_2 elektródy pre vysokofrekvenčné el. napätie; M plechová komôrka; K kolektor; s_1 , s_2 štrbiny; V vlákno katódy; H smer mag. poľa. Špirála predstavuje dráhu jedného rez. iónu.

sa môžu prevádzať omegatrónom. Ak je známa hmotnosť molekuly a intenzita mag. poľa, zo vzorca (3) sa vypočíta príslušná frekvencia. Napr. molekula kyslíka má mol. váhu 32. Pri magnet. poli 3 500 Gauss vychádza rez. frekvencia $f = 173$ KHz

$\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$. Ak teda privedieme na elektródy omegatrónu elektr. pole o frekvencii

173 KHz, dopadnú na kolektor iba ióny kyslíka. Iónový prúd je mierou tlaku ako u ionizačného manometru. Napr. pre parc. tlak 10^{-7} mmHg na istom type omegatrónu bol odvedený iónový prúd o intenzite $3 \cdot 10^{-11}$ A.

Nechceli sme v tomto článku prebrať všetky typy spektrografov a spektrometrov. Už pri statických systémoch sme si povedali, že je ich viac druhov. O dynamických to platí tým viac, že i v súčasnej dobe sa pracuje na nových systémoch. Jednalo sa nám hlavne o princípy, na ktorých sú tieto veľmi dôležité prístroje založené.

Jiří Cochlar, studující JSS, Vsetín:

Elektronky pro ultrakrátké vlny

Se stoupajícím rozvojem techniky ultrakrátkých vln (dále UKV) vzrůstají speciální požadavky na elektronky. Již v běžném televizním přijímači jsou použity zvláštní typy elektronek a nejčastěji se s nimi setkáváme v přijímačích a vysílačích radaru a jiných zařízeních, pracujících v oblasti metrových až centimetrových vln (na př. retranslační linky pro televizi, navigační soustavy LORAN a j.).

V zásadě můžeme elektronky pro UKV rozdělit do dvou skupin:

1. *Elektronky klasických typů* (triody, diody) pro práci na UKV vhodně upravené.

2. *Elektronky zvláštní*, pracující na naprosto odlišném principu.

Proč vlastně musí být pro UKV zvláštní elektronky? Je pro to několik důvodů. Předně se na vysokých kmitočtech nepříznivě uplatňuje *průletová doba elektronů*, t. j. doba, kterou elektrony potřebují k přeletu dráhy katoda - anoda. Je-li tato doba srovnatelná s dobou kmitu, nastává zpoždování a vracení elektronů ke kathodě. Zkracuje se doba, ve které mohou nerušeně procházet mezi elektrodami elektronky. Přejde-li na mřížku elektronky kladné napětí, elektrony z kathody doletí na anodu až za určitou dobu. Je-li však tato doba rovna na př. $\frac{T}{4}$ (T je

doba kmitu), potom elektronkou teče proud jen po zbývající $\frac{T}{4}$. Pak přijde

záporná půlvlna a elektronka je uzavřena. Vidíme, že výkon klesá, zvyšuje se potřebné budící napětí na mřížce. Proud anody a napětí na mřížce nejsou ve fázi, nastává nežádoucí fázový posun.

Dalším důvodem pro konstrukci zvláštních elektronek je vlastní indukčnost vývodů elektrod uvnitř elektronky. Elektronku si pak můžeme představit tak, jak je zakreslena na obr. 1. *Indukčnost přívodů* je sice nepatrná, ale na UKV se již výrazně projevuje, způsobuje různé fázové posuny, chová se jako odpor vřazený do přívodů a to odpor nikterak malý.

Rovněž mají na UKV velký význam *mezieletrodové kapacity*, které se sčítají s ladícími kapacitami rezonančních obvodů nebo způsobují nežádoucí vazby mezi obvody mřížky a anody.

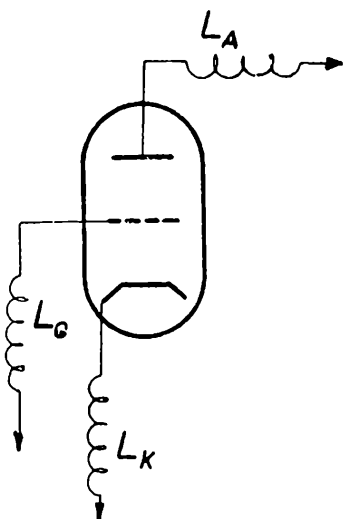
Existuje též t. zv. *vlastní rezonanční kmitočet elektronky*. Spojíme-li mřížku a anodu přímým vodičem nakrátko, vnitřní kapacity a indukčnost elektrod a jejich

vývodů vytvoří rezonanční obvod. Jeho kmitočet můžeme pro danou elektronku vypočítat a to je pak vlastní rezonanční kmitočet elektronky, která nemůže kmitat na frekvenci vyšší, protože jakýkoliv připojený vnější obvod kapacitu a indukčnost elektronky zvětší, tím podle vzorce

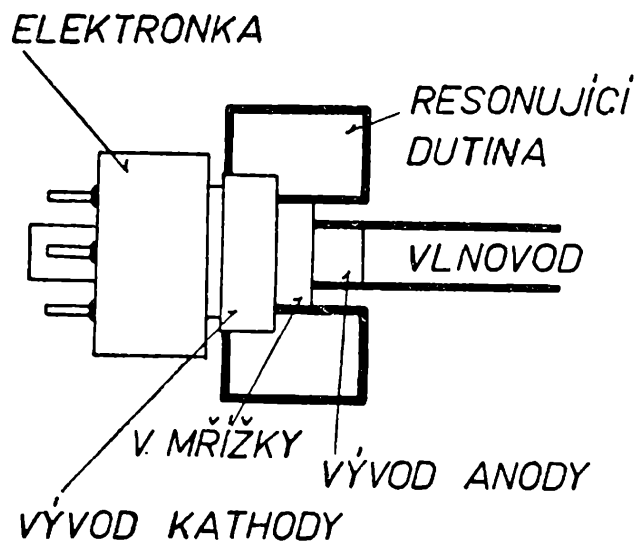
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C}}$$

musí se nutně zmenšit kmitočet.

Zmenšení indukčnosti přívodů mezielektrodových kapacit elektronky můžeme dosáhnout jen značným zmenšením všech jejích rozměrů. Protože zesílení závisí na strmosti, musí mít elektronky pro UKV značnou strmost, která často přesahuje 10 mA/V. Prvním krokem k UKV elektronkám jsou *miniaturní elektronky* (na př. 6F36, 6CC42 a pod.). Těchto elektronek se používá hlavně v televizních přijímačích na frekvencích 50 až 200 MHz.



Obr. 1.



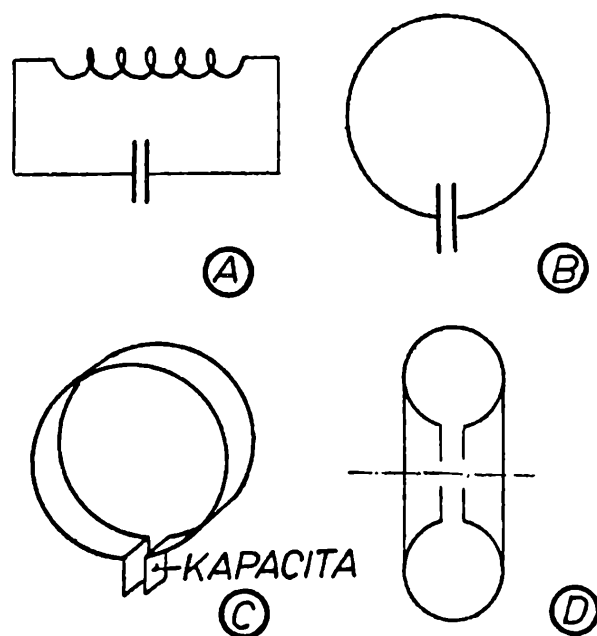
Obr. 2. Majáková elektronka.

Dalším stupněm jsou *elektronky žaludové* nebo též *knoflíkové*. Jak už název naznačuje, jde o elektronky značně malé. Vzdálenosti mezi elektrodami jsou řádově asi 10^{-1} mm. Vývody elektrod, hlavně kathydy, jsou několikanásobné, aby na induktanci kathydového vývodu nevznikala vazba mezi anodovým a mřížkovým napětím. Do této kategorie patří též *elektronky planární*, které mají mřížku, anodu i kathydu rovinné a vzdálené od sebe mnohdy méně než 10^{-1} mm. Často se tyto elektronky konstruují jako *majákové*, které mají vývody elektrod (kromě žhavení) ve formě kovových mezikružjí (obr. 2), na která přímo navazují kruhové vlnovody a koaxiální kabely. Tyto elektronky mají mezní kmitočty až v oblasti GHz (gigahertz = 10^3 MHz). Větších výkonů dosahují na těchto kmitočtech *elektronky zvláštní*.

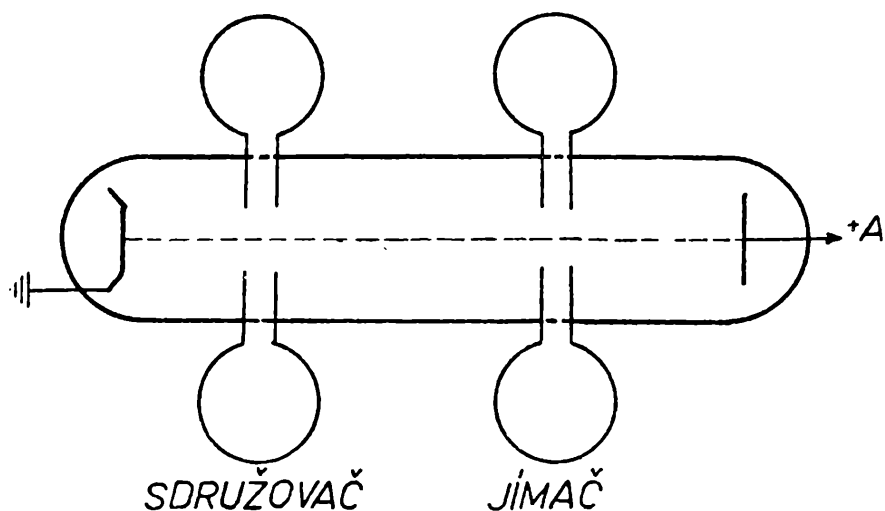
Podle principu se dělí na několik skupin:

1. Klystrony.

Než si ukážeme princip klystronu, musíme se seznámit s jeho důležitou součástí - dutinovým rezonátorem. Představme si obvyklý oscilační obvod, složený z cívky a kondensátoru (obr. 3a). Zmenšujeme-li velikost indukčnosti, do-



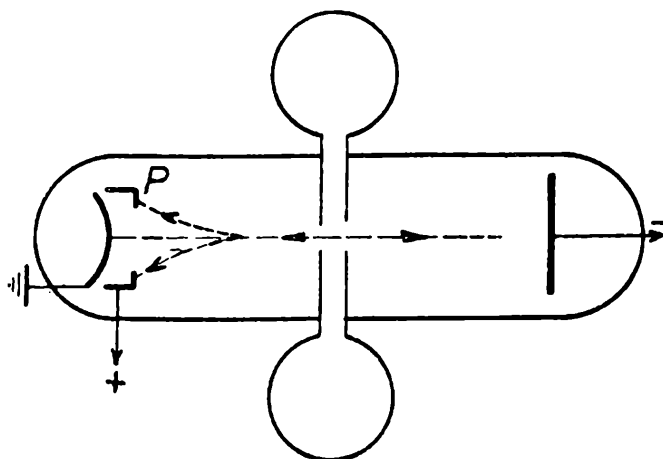
Obr. 3. Vznik dutinového rezonátoru.



Obr. 4. Klystron (rhumbatron).

jdeme až k obvodu na obr. 3b, jehož indukčnost je tvořena jedinou smyčkou drátu. Místo drátu můžeme použít kovového pásku (obr. 3c), jehož šířku zvětšíme a konečně celý obvod stočíme do kruhu (obr. 3d). Vznikl t. zv. *dutinový rezonátor*, v podstatě kmitavý obvod. Protože hodnota jeho kapacity i indukce je velmi malá, kmitá tento rezonátor v oblasti centimetrových vln.

Nyní si již můžeme objasnit princip klystronu. Na obr. 4 máme nakreslen klystron, který se též nazývá *rhumbatron*. Skládá se ze žhavené katody, dvou dutinových resonátorů (proto též klystron dvoudutinový) a anody, zachycující elektrony. Na anodě je kladné napětí, skleněná trubice je dokonale vyčerpána. Předpokládejme, že první resonátor kmitá. Elektrony, které procházejí jeho středovým otvorem jsou střídavě brzděny nebo zrychlovány podle toho, v který okamžik tímto otvorem procházejí. Původní souvislý proud elektronů se začne dělit, pomalejší elektrony zůstávají pozadu, rychlejší se dostávají vpřed, svazek elektronů se změní v jednotlivé shluky. Proto se též první resonátor nazývá *sdužovač*. V místě, kde jsou největší rozdíly v hustotě elektronů, je umístěn další resonátor - *jímač*. Jednotlivé shluky elektronů a jejich elektrické pole způsobí silné rozkmitání tohoto resonátoru. Elektrony pak pokračují v letu až na anodu, která má zde funkci pouze sběrací. Jestliže nyní zavedeme vhodnou zpětnou vazbu mezi jímačem a sdužovačem, klystron se rozkmitá, protože v resonátorech i obvodech k nim připojených je vždy určité vysokofrekvenční napětí, vyvolané tepelným pohybem elektronů (t. zv. *š u m o v é n a p ě t í*). Toto napětí stačí rozkmitat klystron.



Obr. 5. Reflexní klystron.

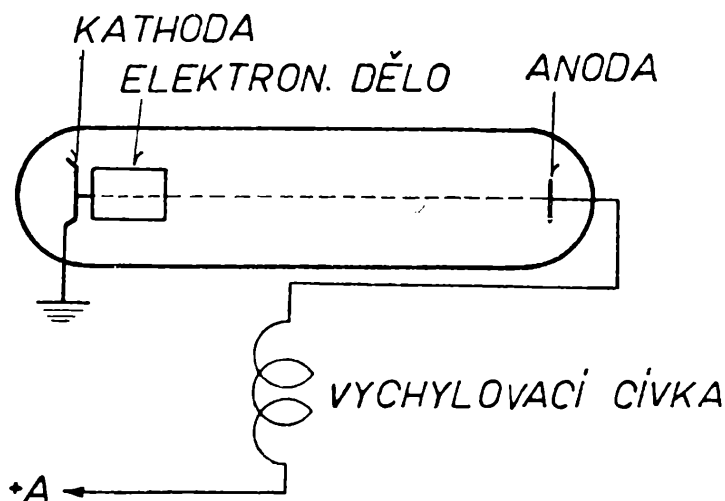
Jiným druhem klystronu je t. zv. *reflexní klystron* (obr. 5). Skládá se jen z jednoho dutinového resonátoru; na místě anody má t. zv. reflektor s velkým záporným napětím. Proud elektronů prochází podobně jako u rhumbatronu dutinovým resonátorem, elektrony jsou zrychlovány a brzděny. Když doletí k reflektoru, záporné napětí je vrátí zpět, elektrony jsou už zatím rozděleny do shluků, proletí opět resonátorem a odevzdají mu svou energii - zvýší amplitudu jeho kmitu. Potom elektrony dopadnou na kladně nabitý prstenec okolo katody (*P* v obr. 5).

Tento klystron má výhodu plynulé laditelnosti. Změna frekvence se provádí stlačováním dutinového resonátoru, čímž se mění jeho kapacita i indukčnost a tím i frekvence. Rovněž se dá frekvence ovlivňovat napětím reflektoru. Byly sestrojeny klystrony tohoto druhu s kmitočtovým rozsahem 1 : 5 i více. Dosahují však menších výkonů než klystrony dvoudutinové.

Oba druhy klystronů pracují na kmitočtu až 25 GHz, rhumbatron s výstupním výkonem asi 20—40 mW, reflexní klystron jen asi 20 mW.

2. Elektronky s putující vlnou-permactrony.

Nevýhoda klystronu je v tom, že silové pole ovlivňující pohyb elektronů, působí na tyto elektrony jen nepatrný, velmi krátký okamžik. Proto je hustotní promodulování (t. j. kontrast mezi shluky a mezerami v elektronovém paprsku) elektronového paprsku malé, tím klesá i účinnost a výkon elektronky. Klystrony se rovněž příliš nehodí k zesilování, poněvadž jejich frekvenční charakteristika je značně úzká. Všechny tyto důvody vedly ke konstrukci permactronů. Aby mohlo silové pole déle působit na elektronový svazek, vedou se vysokofrekvenční kmity vodičem v těsné blízkosti elektronového svazku. Rychlost šíření vysokofrekvenční energie podél vodiče je však mnohem větší než rychlost elektronů, proto je vodič stočen do spirály. Tím se relativní rychlost postupu vysokofrekvenční energie vzhledem k paprsku značně sníží. Zavedeme-li nyní do spirály vysokofrekvenční kmity, vznikne hustotní modulace paprsku podobně jako u klystronu a vzájemným působením silových polí se vř kmity značně zesílí. Konstrukce těchto elektronek není pochopitelně tak jednoduchá. Hlavně je nutné zajistit, aby na konci spirály nevznikaly odrazy kmitů, které by způsobily samovolné rozkmitání elektronky.



Obr. 6. Deflektron s elektromagnetickým vychylováním.

Někdy se místo kovové spirály užívá druhého paprsku elektronů, který je hustotně modulován a probíhá v blízkosti paprsku prvního. V zásadě však princip činnosti zůstává stále týž. Permactrony dosahují zisku až $4 \cdot 10^4$ v oblasti 3 GHz při šíři pásma až 1 000 MHz.

3. Deflektrony.

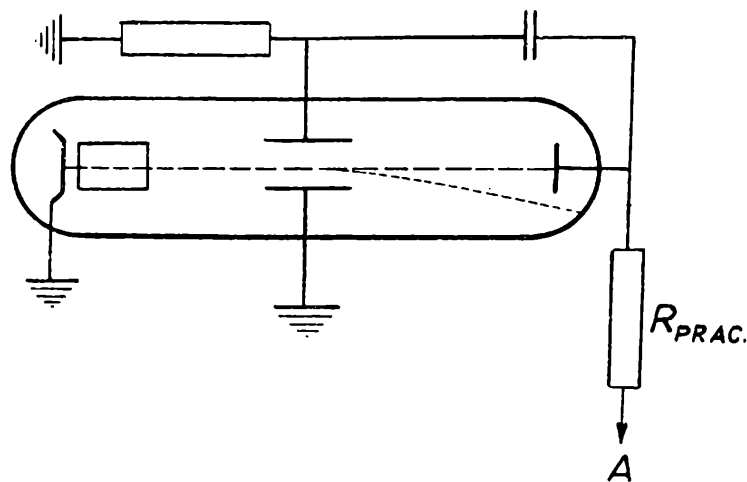
Zajímavou elektronkou, používanou převážně jako oscilátor, je t. zv. deflektron (obr. 6). Paprsek elektronů, vycházející z katody, dopadá na anodu. Vzniklým anodovým proudem je napájena vychylovací cívka, která způsobí vychýlení paprsku mimo anodu a zánik anodového proudu. Obvod je přerušen, vychylovací cívka je bez proudu, paprsek se vrátí na anodu. Vychylovací cívka dostane proud, paprsek se vychýlí . . . atd.

Děj se pravidelně opakuje, vznikají netlumené kmity. Deflektrony mohou též pracovat s elektrostatickým vychylováním. Místo vychylovací cívky je zapojen pracovní odpor. Na něm vzniklé napětí se pak převádí na vychylovací destičky (obr. 7).

Deflektrony mají též závažné nevýhody - nutnost vysokého anodového napětí a malá účinnost. Proto se též velmi málo používají. Dosahují kmitočtů až 1 GHz při vysokofrekvenčním výkonu 20 W.

4. Magnetrony.

Nyní se dostáváme k nejužívanější elektronce na UKV (hlavně v radiolokaci), která dosahuje v impulsním provozu výkonů až 300 kW při kmitočtu 9 GHz. Nás bude jistě zajímat, že to byl český profesor Žáček, který r. 1924 dal základ matematické theorii magnetronů. Magnetron byl objeven r. 1921 fysikem Hullem, ovšem zdaleka se nepodobal dnešním typům. Vývoj magnetronů byl velmi složitý.

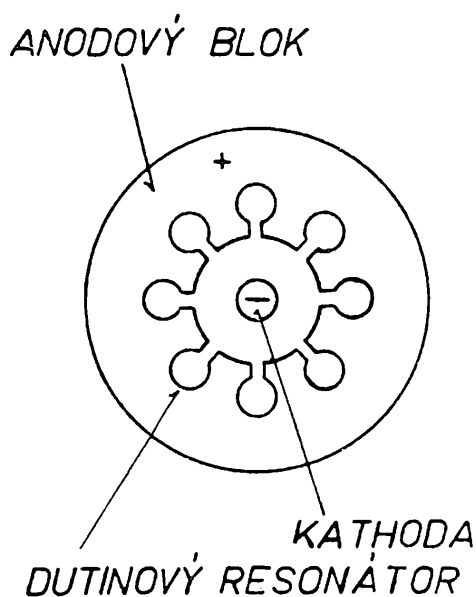


Obr. 7. Deflektron s elektrostatickým vychylováním.

Teprve druhá světová válka a s ní nutnost urychleného vývoje dostatečně výkonných oscilátorů pro radar uspíšila vznik magnetronu v jeho nynější podobě. Různými přechodnými vývojovými typy se nebudeme zabývat. Zájemce odkazujeme na pramen [1]. Všimneme si až magnetronu v dnešní podobě (obr. 8).

Vidíme, že se skládá ze žhavené katody a anody ve formě bloku mědi, obklopujícího katodu. V anodovém bloku jsou vyvrtány otvory tvaru dutinových rezonátorů. Vlastní anodový blok je pro ně takřka dokonalým izolátorem. Celá elektronka je umístěna v silném magnetickém poli; na našem obrázku mají siločáry magnetického pole směr kolmý k nákresně. Jeho vlivem se dráha elektronů zakřivuje, až při jisté velikosti anodového napětí a magnetického pole se elektrony vůbec na anodu nedostanou a jsou vráceny na katodu. Nyní však předpokládejme, že dutinové rezonátory magnetronu kmitají, při čemž anodové napětí a magnetické pole jsou tak velké, že elektrony se těsně u anody obracejí a vracejí se ke katodě. Některé elektrony jsou polem rezonátoru zpomaleny, jejich dráha se

ještě více zakříví a elektrony se vrátí na katodu. Jiné elektrony jsou zrychleny a mají-li vhodnou rychlost, dostanou se před ostatními resonátory také do zrychlujícího pole a tak začnou obíhat v pravidelných shlucích těsně před anodou a ústím dutinových resonátorů. Vlivem elektrických polí těchto shluků se dutinové resonátory, podobně jako u klystronu, rozkmitávají se zvětšenou amplitudou, magnetron kmitá. Aby resonátory kmitaly se správnou fází, spřahují se někdy párovitě. Všechny kmity se odebírají vazební smyčkou v jednom resonátoru. Zajímavé je, že většina magnetronů po počátečním uvedení do chodu pracovala bez přívodu žhavicího proudu, protože vlivem vracejících se elektronů na katodu je tato velmi intenzivně rozžhována.



Obr. 8. Magnetron.

Velkou nevýhodou magnetronů je nemožnost změny frekvence. Proto byl vyvinut zvláštní typ magnetronu - *donutron*, který je laditelný v rozmezí kmitočtů 1 : 2. Princip jeho činnosti je však poněkud složitý; proto odkazujeme čtenáře na prameny [1] a [2]. Zajímavé je, že u magnetronu byla theorie činnosti vypracována až dodatečně ke známým faktům.

To je stručný přehled nejdůležitějších elektronek pro UKV. Některé z nich jsou dnes už na vrcholu vývoje, na př. magnetron. Jiné budou ještě dále rozvíjeny a zpracovávány.

Literatura:

- [1] Dr. I. Šimon, Magnetronové generátory centimetrových vln. Krátké vlny, ročník 1947, číslo 4.
- [2] Larsen, Mikrovlny, srdce radaru, str. 67 a další.
- [3] RNDr J. Forejt, Praktická elektronika.

Pocity člověka, do něhož „uhodilo“

Jistě je šťastný člověk, který nám může vyprávět o tom, jaké měl pocity, když byl zasažen bleskem. Uvádíme část jeho dopisu:

stalo se to 8. července 1957. Týden před tím byla vlna velikých veder. Slovenská nížina měla přes 40 °C ve stínu, ve výši nad 2 000 m n. m. však bylo příjemně, asi 15 °C až 20 °C. Náhle v noci na 8. července nastal zvrát, ze Sovětského svazu zasáhl přes Tatry „polární vzduch“ a „teplota“ klesla přes noc na -5 °C. Hory zářily jinovatkou. Poté se však zase oteplilo na 30 °C.

Dne 8. července jsem vyšel v 6 hodin za úplně jasného počasí přes Hrebienok ze Starého Smokovce. V 8 hodin bylo tak horko, že jsem šel v šortkách a svlekl jsem si i košili. Dohonil mne při tom jeden Slovák, kterého jsem jinak neznal, a žádal mne, aby mohl jít se mnou na L'adový štít. Oblečen byl jen v plátěných kalhotách a ve flanelové košili, kabát ani pláštěnku neměl. Asi v 9 hodin jsme došli do Terryho chaty (něco přes 2 000 m n. m.) za stálého krásného počasí. Popili jsme čaj a putovali jsme dále. Kdesi daleko, desítky kilometrů od nás, bylo v nížině slyšet bouřku. Vystoupili jsme do L'adové priehyby (2 500 m n. m.). Za námi i nad námi bylo jasno. Ale asi 5 km od nás, už v Belanských Tatrách, stál šedobílý mrak, který sahal od výše asi 2 400 m do 3 000 m n. m. a od něho vanul slabý vítr směrem k nám. Bylo horko, oba jsme byli bez košile. Náhle kolem nás zavanul nápadně teplý vítr a kolem nás a před námi přetahovala jemná mlha. Ani nekáplo a ani nezahřímalo.

Náhle mám pocit, že mi ve vlasech - které jsem si den předtím umyl, takže byly dokonale suché - leze nad čelem brouk. Hrábnu si do vlasů, ale nikde nic. „To je divné, že za větru a ve výši 2 500 m jsou mouchy,“ říkám si. Ale pocit lezení brouka ve vlasech se opakoval, proto říkám společníkovi: „Podívejte se, něco mi leze ve vlasech.“ Podívám se přitom na něho a již jsem věděl, oč jde. Měl dlouhé (asi 5 až 10 cm) vlasy sčesané hladce nazad. Stály mu kolmo k lebce jako hřebíky, tak jako by stál na izolační stoličce a byl nabíjen indukční elektrickou. I moje pačesy stály asi stejně pěkně. Vytáhl jsem kovové zrcátko a strčil jsem mu je před oči, aby se podíval, jak mu vlasy stojí.

„Prásk!“ Z jeho nosu do mého zrcátka přeskočila elektrická jiskra 2 až 3 cm dlouhá. Hádám, že měla napětí 20 000 až 30 000 volt. Stejně jiskry přeskakovaly i mezi mým prstem a jeho bradou nebo rukou. Když jsem se nataženou rukou blížil jeho vlasům, odpuzovaly se. Měly souhlasný náboj jako má ruka. Po chvíli jsem to opakoval, jeho vlasy se však přitahovaly - měly nesouhlasný náboj. Dostali jsme strach a sedli jsme si na zem, t. j. na skálu, ale mezi skálou a našimi prsty skákaly opět jiskry.

Pravděpodobné vysvětlení: Zatím co já byl obut v turistických botách s tlustou rýhovanou podrážkou tvaru pneumatiky, můj společník šel pouze v kedskách. Protože jsme šli asi čtvrt hodiny sněhem, měl kedscky promočené a byl od země hůře izolován než já. Patrně jsem suchými vlasy ssál elektřinu a nabyl stejného

potenciálu, jaký byl ve výši mé hlavy, neboť hrot nabývá potenciálu toho místa, kam sahá. Gradient potenciálu mezi mou hlavou a nohou nebo koncem prstů byl patrně tak velký, že působil přeskok jisker asi 3 cm dlouhých. Můj společník, stojící na špatně izolujících kedskách, měl někdy potenciál povrchu země (látka jeho vlhké kedsky se náhodou dotýkala skály), jindy měl potenciál vyšší, když stál náhodou na gumách a byl od země izolován.

To trvalo asi čtvrt hodiny. Přitom ani nekápllo. Jít zpět dolů jsme se báli. Pod námi se valila hustší mlha přes Baranie sedla. Na našem sedle jsme seděli na rovince, ale cesta dolů zpět vedla příkrým svahem o sklonu přes 45° a tam jsme se neodvážili, aby nás tam nestihla bouře a nesrazila nás dolů. Mlha i elektrické napětí pak zase zmizely a zazářilo opět slunce. Vítr foukal směrem od nás k vrcholu L'adového štítu. Podle aerodynamického paradoxu se mlhy nassávaly za masiv L'adového štítu a vytvořily za ním šedivý mrak, který tam seděl celé dvě hodiny. Z naší strany byl kopec čistý, jasný a na naší straně svítilo slunce, takže jsme opět byli bez košil. Čekali jsme však celé dvě hodiny, než mrak zmizel. Náčelník Tatranské záchranné služby, který byl týž den v poledne na Gerlachu (Stalinův štít), mi řekl o dva dny později, že L'adový štít skýtal tehdy z Gerlachu hrůzný obraz: byl středem, kolem něhož vířily bělošedivé bouřkové mraky. To bylo při pohledu s Gerlachu. Od nás jsme viděli návětrnou stranu štítu, která byla jasná, oni viděli závětrnou, rozvířenou.

Asi ve 13 hodin, když mrak zmizel, dali jsme se v plném slunci k vrcholu. Došli jsme tam za jasného slunečního svitu asi za půl hodiny a měli jsme krásný rozhled a úplné jasno. Stáli jsme v závětrří vytvořeném z hrubých balvanů na ochranu stanu. Je to kamenná zídka, asi půl metru vysoká, kruhového tvaru, průměru asi pět metrů. Byli jsme asi 10 metrů od vrcholového trianglu, tvořeného komolým čtyřbokým jehlanem z úhlového železa asi 1,50 metru vysokého a vyztuženého dřevem.

Jak se tak rozhlížíme, náhle bez jakéhokoli přechodu nám opět vstanou vlasy na hlavě, zas tu bylo se závanem horkého vzduchu vysoké napětí. Teď bylo zle. Byli jsme na nejvyšším kopci okolí, Gerlach byl asi 5 km daleko, Lomnický štít byl vzdálen asi 4 km. Cesta zpět vedla kolem trianglu, tudy jsme se báli jít. O triangu se opírala dřevěná tyč asi tři metry vysoká, která mířila šikmo k nám. Můj společník mi povídá: „Z jejího konce to hučí a srší, jako když hoří veliký hořák ‚primusu‘.“ Bylo mu 39 let, proto patrně ještě dobře slyšel vysoké tóny kmitočtu nad 20 000 kmitů za vteřinu, já jako starší jsem již neslyšel nic. Vzal jsem tyč do ruky a sršení rázem ustalo, patrně proto, že jsem tyč uzemnil.

Říkám žertem: „To by byl pěkný hromosvod, ten tady necháme stát.“ Ale hned dodávám: „On by ten hromosvod byl příliš blízko nás, uhodí-li do něj, úder blesku nás sice nezasáhne, ale rána nás ohluší a blesk oslepí. To nemůžeme potřebovat.“ Přitom jsem hodil tyč na zem. Z hran trianglu nám skákaly do rukou opět jiskry dlouhé asi 3 cm a ozývalo se z něho stále silné hučení „zzzzz“, které jsem slyšel i já. Tu a tam na nás spadla i kapička deště nebo kroupa, kterou k nám přivanul vítr, ale nad námi svítilo stále slunce. Kroupy a kapky deště však znamenají bouřku. Oblekl jsem se proto, sedl si na suchý kámen a natáhl igelitovou pláštěnku. Spolucestovatel si sedl vedle mne na zem a stěžoval si, že sedí na vlhkém.

Pláštěnku jsme si dali přes hlavy, a protože jsme očekávali vítr a bouři, drželi jsme se kolem krku. On seděl vlevo ode mne, já ho držel levou rukou, on mne pravou. Já měl pravou ruku na klíně na chlebníku, on se opíral levou rukou o vlhkou zem. Pod pláštěnkou nám vlasy nestály, ale jak jsme dostali chuť utéci pryč - seděli jsme skrčeně v kruhovém závětří - a zvedli hlavy nad úroveň kamenné ohrady, stanuly nám rázem vlasy jak hřebíky, a proto jsme si raději hned opět sedli.

Triangl stále zlověstně hučel své ...zzzzzz...! Uvědomoval jsem si plně: dokud hučí a stačí ssát elektrinu z ovzduší, je dobře. Jakmile nestačí, udeří zaručeně do nás blesk. Utéci podél trianglu dolů a jít pak po ostrém hřebenu, pověstném „Kamenném koni“, asi 22 metrů dlouhém hřebeni z balvanů, který se napravo i nalevo svažuje v úhlu asi 60° a spadá do propasti téměř 600 m hluboké, jsme si netroufali, protože bychom byli po dobu celé hodiny nejvyšším bodem v okolí. Mrak a vysoké napětí nás držely v naší pasti jako kočka myš, netroufali jsme si ani se pohnout. Tenkrát jsem si uvědomoval, že jakmile bychom běželi a porušili rovnováhu elektrických siločar, že by do nás uhodilo. Přitom nepršelo a bylo téměř úplné bezvětří. Nejprve uhodilo asi jeden kilometr od nás, po druhé asi 2 km od nás. „Bouřka se od nás vzdaluje,“ řekl jsem si po zjištění doby mezi zábleskem a hromovým rachotem. Bylo pak zase ticho, pouze triangl hučel stále dále ...zzzz...

Nic jsem neviděl, ani neslyšel, ale když jsem začal opět vnímat, viděl jsem, že ležíme oba roztaženi na zemi. Nohy se mi chvěly a byly bez citu. „Teď jsme to chytli,“ říkám svému společníkovi, „zůstaňte ležet.“ Měl jsem strach, že vstane a že blesk do nás udeří po druhé. Třásl jsem jím, mluvil do něho, abych ho přivedl k sobě. Můj společník však začal smrtelně chroptět, zvolna se položil zcela na zem, v obličeji zmodral a zfialověl. Byl na místě mrtev.

Mně zachránily patrně život následující okolnosti: 1. Měl jsem silné gumované podrážky, jež isolovaly líp než společníkovy mokré kedsy. 2. Seděl jsem na suchém kameni, kdežto on seděl ve vlhku. 3. On se holou rukou opíral o vlhkou zem. Byl tedy dobře uzemněn a dělal mi vlastně hromosvod.

Blesk uhodil do jeho levého ramene, kterým se opíral o kámen, prošel mu srdcem, které ochrnul, levou rukou, kterou se opíral o zem (byly na ní spáleniny). Jeho i mé hodinky šly dále, mé se pak poněkud zpožďovaly. Kompas, který jsem měl na klíně, se neodmagnetoval ani nepřemagnetoval. Při úderu blesku jsem nic neviděl ani neslyšel. Dalo by se to vysvětlit snad tím, že jsem byl určitou dobu v bezvědomí, ale v tom případě by mi silná rána spojená s úderem blesku měla poškodit bubínek. Nepozoroval jsem však žádných potíží. Někdo by soudil, že to snad byl úder bez světla a rány. Ale dole mi pak vypravovali, že nejprve bylo slyšet dva blesky, celkem slabé. Ale ta třetí hromová rána, to prý byla opravdová šupa! A právě tento úder zasáhl nás. Nikdy bych tomu nevěřil, že zasáhne-li nás blesk, není to ani vidět ani slyšet, že takový úder blesku přečkám, když to společníka, který sedí se mnou pod jednou pláštěnkou - ve které nebyla po úderu blesku ani dírka - zabije, ač jsme se drželi za ruce a kolem krku.

Pokusil jsem se vstát, abych zavolal pomoc. Ale jako bych nohy neměl, zapotácel jsem se a zas jsem ležel na zemi. Mé nohy byly ochrnuté. Blesk přešel z pravé společníkovy nohy bederním kloubem do mé levé nohy, kterou jsem se ho do-

týkal, prošel mou levou nohou, kterou ochrnul, přešel do mého pravého kolena a do pravého chodidla. Také pravá noha mi od kolena dolů ochrnula. Elektrina zřejmě narazila na mé gumové podrážky, nabila staticky má chodidla, silně roztáhla svaly, žíly a vlasečnice. Nohy mi opuchly, nevešly se do bot. Zul jsem boty. Levá noha, hlavně prsty, hrály do běla, žluta i fialova. Roztažení krevní kapiláry nedodávaly krev svalům, proto ten šok.

Prostý lid na Slovensku, ale pak i sám primář nervového oddělení sanatoria mi den nato radili, že kdo má nohy ochrnuté bleskem, má si je zahrabat do země, „aby z nich elektrina vyprchala“. To jsem tehdy ovšem nevěděl, ani nemohl provést, protože jsem byl mezi balvany. Chvíli jsem si masíroval nohy, pak jsem se plížil po loktech a kolenou. Nohy se přitom masírovaly o vlhké kamení a přicházely postupně k sobě, takže jsem nakonec mohl po šeredné kamenité cestě dojít bos. Levá noha však byla ochrnutá ještě večer a nereagovala na poklep lékařského kladívka pod kolenem.

Druhý den mi již bylo poměrně dobře, ale musil jsem ze Smokovce odjet, neboť jsem se stal nemile populární osobou. V elektrické dráze, na lanovce i v jídelně na mne ukazovali: „To je ten pán, do kterého uhodil hrom“, u lékařů i v Čedoku mi lidé všude dávali přednost. Začly se konat o blesku a o nás učené přednášky, zkrátka, kam jsem zapadl, všude mne znali. Na levé noze jsem měl ožehnuté chloupky, na stehně a lýtku šel podle vyjádření lékařů výboj podél ischiatického nervu. Zbyla mi jediná stopa, červená skvrna na místě bederního kloubu, kudy do mne blesk vnikl. Lékaři mne utěšují, že po tom elektrickém šoku zaručeně nikdy ischias nedostanu. Všechny potíže po úderu blesku již zmizely.

Mám dojem, že nás snad nezasáhl přímý úder blesku, ale pouze zpětný úder uvolněný přímým zásahem blesku do trianglu. Seděl jsem u trianglu blíže než můj společník, a přesto se mi celkem nic nestalo. Tak nevím, zda přece jen neexistuje nějaký „ochranný prostor“, jak se to kdysi učilo a jak to stavitelé hromosvodů dodnes říkají.

Nevyhýbá se snad blesk učitelům fyziky?



Co vidíme na nebi

Dr Josip Kleczek, Ondřejov:

Hvězdy

V minulém článku jsme se seznámili se základními vlastnostmi planet naší sluneční soustavy. Planety jsou tělesa téměř kulová, která sama nezáří a vidíme je jen proto, že odrážejí sluneční světlo. Obíhají kolem Slunce v elipsách, které se

příliš neliší od kruhových. Nejvzdálenější planeta *Pluto* je 40krát dále od Slunce než *Země*.

Hvězdy naopak září svým vlastním světlem, které vzniká jadrovými reakcemi v hlubinách jejich nitra. Jejich vzdálenosti jsou ohromné. Nejbližší z hvězd je 250tisíckrát dále než Slunce. Hvězdy se nám proto jeví jako zářící tečky i v největších dalekohledech, kdežto obyčejným triedrem můžeme vidět *Venuši* nebo *Jupitera* jako kotouček.

Za jasné bezměsíční noci spatří naše oko asi tři tisíce hvězd. Jsou nepravidelně rozloženy po obloze, mají různou barvu a rozličnou jasnost. Hledání hvězd na obloze je značně usnadněno tím, že celá oblaha je rozdělena do několika souhvězdí. Původ názvů souhvězdí je nutno hledat v dávném starověku. Jsou nazvána podle hrdinů bájí, zvířat atd. V současné době byly hranice mezi jednotlivými souhvězdími přesně vymezeny. Nejjasnější hvězda v souhvězdí je označena řeckým písmenem alfa; na př. α *Leonis* je nejjasnější hvězda v souhvězdí *Lva* (lat. *Leo*, genitiv *Leonis*). Řada jasných hvězd má však své vlastní jméno na př. *Regulus*, *Aldebaran*, *Sirius* atd.

Běžně užívané názvy nejjasnějších hvězd na obloze pocházejí od Arabů, Řeků nebo Římanů a byly mnohými generacemi předávány až po naši dobu. Staří astronomové zpravidla označovali hvězdy podle jejich polohy v souhvězdích (na př. *Oko Oriona*). *Canopus* bylo původně jméno muže, vedoucího Menelaovu výpravu, která se zastavila v Egyptě při návratu z Troje. Byla po něm nazvána nejen hvězda v souhvězdí *Carinae*, ale též starý hlavní přístav v Egyptě. *Rigel Kentaurus* (*Alfa Centauri*), pochází z arabského *ridžl* (noha) a z řeckého *kentauros* (*Centaur*). Označuje jednu nohu *Centaura* a je to hvězda nejbližší Slunci. *Prokyon* (*Alfa Canis Minoris*) pochází z řeckého *pro* (před) a *kyon* (pes), neboť v severních šířkách kolem 30° vychází před *Siriem*, hvězdou psí. *Deneb* je z arabského *dhanab* (ocas) a značí ocas *Labutě* (α *Cygni*).

Důležitějším krokem ve výzkumu hvězd bylo sestavení hvězdných katalogů. Již v době Hipparchově byl pořízen seznam hvězd, viditelných pouhým okem a uspořádaných podle klesající jasnosti. První katalog, který se však uchoval v arabském překladu (*Almagest*) až do naší doby, pochází z druhého století a jeho autorem je *Ptolemaios*. Obsahuje 1 200 hvězd rozdělených do šesti tříd podle zdánlivé jasnosti. Nejjasnější hvězdy nazýval hvězdy první velikosti, nejslabší šesté (viz tabulka II).

Středověké katalogy a katalog *Tychona de Brahe* z r. 1594 obsahovaly méně hvězd než *Almagest*. Od XVII. století, po vynalezení dalekohledu, počet pozorovaných hvězd silně vzrůstal, poněvadž se zvětšoval i průměr užitého dalekohledu. Bylo třeba rozšířit Ptolemaiovu klasifikaci. V XVII. stol. byla dosažena 12. velikost. Z hvězd této velikosti k nám přichází dvěstěpadesátkrát méně světla než z nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem. V XIX. století byla dosažena 14. velikost. Polomarský dalekohled o průměru 5 m dosahuje fotograficky 23. velikosti, to je hvězd, z nichž k nám přichází několik milionůkrát méně světla než z hvězd šesté velikosti.

Od XVIII. století jsou polohy hvězd v katalogích dosti přesné, aby mohly být zjišťovány jejich vlastní pohyby. Dříve bylo vzájemné uspořádání hvězd v souhvězdích považováno za neměnné. Přesné určení polohy - pomocí dalekohledů, jejichž osa se pohybuje v rovině poledníku a pomocí fotografie - vedlo však k objevu vlastního pohybu hvězd po nebeské sféře. Pomocí nových přístrojů, foto-metrů, bylo možno nahradit dřívější kvalitativní odhad jasnosti hvězdy kvantitativním určením.

Až do začátku našeho století bylo určování hvězdných jasností prováděno vizuálním pozorováním v dalekohledu. Mnozí pozorovatelé určují ještě dnes velikost hvězd vizuálně. Princip vizuálního odhadu jasnosti hvězd spočívá v tom, že se hvězda porovnává s jinými hvězdami, jejichž hvězdná velikost byla určena již dříve.

Pro měření množství světla, přicházejícího z hvězdy, se používá též fotografické desky nebo fotočlánek. Avšak klasifikace jasnosti hvězd různými metodami dává poněkud odlišné výsledky. Mluvíme proto přesně o velikosti vizuální, o velikosti fotografické atd.

V dalších kapitolách našeho článku pohovoříme o tom, jak astronomové podle poloh hvězd na nebeské sféře a jejich přesně určených jasností poznávají vesmír.

Vzdálenosti hvězd.

Různá jasnost hvězd, jak je vidíme na obloze, je způsobena jednak tím, že hvězdy se nacházejí v různé vzdálenosti od nás a dále tím, že se od sebe značně liší co do skutečné zářivosti. Tento názor byl potvrzen přesnými měřeními vzdáleností hvězd. Protože znalost vzdáleností ve vesmíru patří k základním poznatkům v astronomii, bude užitečné, seznámíme-li se s nejjednodušším způsobem jejich stanovení.

Je to trigonometrická metoda. Touto metodou určují zeměměřiči vzdálenost nepřístupných objektů na Zemi. Její princip pochopíme z následující úvahy. Zatím co geometrovi stačí pro pozemské měření základna několika set metrů, musí mít astronom k dispozici základnu podstatně větší. Tou je na př. průměr dráhy Země kolem Slunce, jenž měří 300 milionů kilometrů a má protilehlé body *A* a *B*. Země prochází těmito body po půl roce na př. 1. III. a 1. IX. V tyto dny určuje astronom přesně polohu hvězdy na obloze. Z těchto měření dostává úhel α , v němž bychom viděli průměr zemské dráhy z měřené hvězdy.

Předností tohoto postupu je nejen velká základna, ale i použití téhož přístroje. Podmínky místní a přístrojové jsou identické a tak jsou automaticky vyloučeny dodatečné komplikace, které vznikají při použití dvou různých přístrojů. Prakticky se fotografuje táž oblast oblohy po půlročním intervalu a určují se polohy hvězd. Většina hvězd, zachycených na fotografické desce, jest velmi vzdálená, takže se jeví na obloze nehybné. Obraz nejbližších hvězd opisuje na obloze během roku elipsu a to tím menší, čím je hvězda vzdálenější. Na fotografiích zachytíme ze zmíněné elipsy jen dva body. Určení jejich vzdálenosti vede k přesnému změření vzdálenosti hvězdy.

Princip je značně jednoduchý, avšak jeho praktické provedení je dosti nesnadné a klade značné požadavky na zručnost pozorovatele.

Nepřekvapuje proto, že do r. 1900 byly známy vzdálenosti jen několika desítek (asi třiceti) nejbližších hvězd. První měření hvězdných vzdáleností byla provedena na začátku XIX. stol. Dřívější pokusy astronomů byly bezúspěšné, neboť jejich přístroje dovolovaly stěží určit úhel jedné desetiny obloukové sekundy a změny poloh nejbližších hvězd dosahují toliko desetin sekundy, tedy nepatrně více, než byla přesnost přístrojů dřívější doby.

První hvězda, jejíž vzdálenost v r. 1838 určil *Bessel*, byla *61 Cygni* a tentýž rok určil *Struve* z *Pulkova* vzdálenost α *Lyræ*. V našem století byl fotografický proces tak zdokonalen, že pomocí fotografie lze dosáhnout mnohem větší přesnosti než starými visuálními metodami. Dnes je známo asi pět tisíc hvězdných vzdáleností.

Vzdálenosti hvězd, byť i těch nejbližších, jsou mnohem větší než vzdálenosti planet. Zatím co světlo letící ze Slunce na Zemi potřebuje ke své cestě 8 minut, na cestu z nejbližší hvězdy (*Proxima složka α Centauri*) potřebuje celé čtyři roky. Vzdálenosti ve vesmíru jsou tak ohromné, že je určujeme pomocí doby, kterou potřebuje světlo, aby je proletělo. Za jednu vteřinu uletí světlo 300 tisíc kilometrů, což je zhruba vzdálenost Země-Měsíc, *Proxima Centauri* je vzdálena 4,3 světelného roku a známe hvězdy, vzdálené mnoho milionů světelných let.

Vzdálenost hvězdy se též udává úhlem, pod nímž by bylo vidět vzdálenost Slunce-Země z oné hvězdy. Nazývá se paralaxou hvězdy. Vzdálenost hvězdy, jejíž paralaxa je jedna sekunda, je často vzata za jednotku vzdáleností ve vesmíru a nazývá se parsek. *Proxima Centauri* se nachází ve vzdálenosti 1,3 parsek. Je-li hvězda vzdálena 100 světelných roků, její paralaxa je 0,033 obloukové sekundy.

Použitelnost této metody je omezena přesností dnešních přístrojů, která v příznivém případě dosahuje dvou tisícin obloukové sekundy. Můžeme tedy trigonometrickou metodou měřit hvězdy jen do vzdálenosti kolem 1 000 světelných roků, kdežto hvězdy vzdálenější jsou dosud našim měřicím přístrojům nepřístupné.

Hvězdy se známými trigonometrickými paralaxami jsou tedy omezeny na bezprostřední okolí našeho Slunce. Jsou uvnitř koule o poloměru 1 000 světelných let, v jejímž středu je naše Slunce. Při řadě astronomických výzkumů je jim dáвана přednost, neboť sousedy známe zpravidla nejlépe. Ovšem závěry takových výzkumů nelze vždy zevšeobecňovat na celý vesmír, neboť není žádný důvod k předpokladu, že by zcela malý kousek hvězdného nebe kolem našeho Slunce reprezentoval celý vesmír.

Trigonometrické určování vzdálenosti hvězd je základní metodou. Známe ještě jiné, nepřímé a méně přesné metody: pomocí rychlostí hvězd v prostoru, jejich absolutní jasnosti nebo pomocí periody proměnných *Cefeid*.

Pro názor uvedeme trigonometrické vzdálenosti deseti nejbližších hvězd a dvaceti nejjasnějších hvězd (tabulka I a II). Tabulky udávají jméno hvězdy, souhvězdí, v němž se hvězda nachází, její jasnost (zdánlivou velikost, magnitudu) a vzdálenost ve světelných rocích.

Pohled na tabulky prozradí, že některé z nejbližších hvězd musí být opravdu

velmi slabé, málo jasné, a že některé z nejjasnějších hvězd na naší obloze jsou tak vzdáleny, že musí být ve skutečnosti neobyčejně zářivé. Tak na př. C a n o p u s vyzařuje 100tisíckrát více světla než naše Slunce, kdežto B a r n a r d o v a hvězda v O p h i u c h u je tak slabá, že 1 400 takových hvězd by se co do zářivosti stěží vyrovnalo našemu Slunci.

Zdánlivá jasnost hvězd na obloze není tedy bezpečným ukazatelem vzdálenosti hvězdy. T. zv. hvězdy viditelné pouhým okem, jsou zpravidla mnohem dále než 100 světelných roků.

Tabulka I. *Deset nejbližších hvězd.*

Hvězda	Souhvězdí	Zd. velikost	Vzdálenost ve světelných rocích
Alfa Centauri	Centaurus	0,3	4,3
Barnardova hvězda	Ophiuchus	9,7	6,1
Lalande 21185	Ursa Maior	7,6	8,3
Sirius	Canis Maior	-1,6	8,8
Innes	Vela	12,0	9,6
Cordoba Zone 243	Caelum	9,2	10,3
Tau Ceti	Cetus	3,6	10,4
Procyon	Canis Minor	0,5	10,4
Epsilon Eridani	Eridanus	3,8	10,5
61 Cygni	Cygnus	5,0	10,9

Tabulka II. *Vzdálenosti dvaceti nejjasnějších hvězd.*

Hvězda	Souhvězdí	Zd. velikost	Vzdálenost ve světelných rocích
Sirius	Canis Maior	-1,6	8,8
Canopus	Argus	-0,9	652,0
Vega	Lyra	0,1	26,0
Arcturus	Bootes	0,2	41,0
Capella	Auriga	0,2	44,0
Rigel	Orion	0,3	543,0
Alfa Centauri	Centaurus	0,3	4,3
Procyon	Canis Minor	0,5	10,4
Achernar	Eridanus	0,6	67,0
Altair	Aquila	0,9	16,0
Beta Centauri	Centaurus	0,9	91,0
Betelgeuze	Orion	0,9	192,0
Alpha Crucis	Crux	1,0	109,0
Aldebaran	Taurus	1,1	57,0
Spica	Virgo	1,2	362,0
Pollux	Gemini	1,2	32,0
Antares	Scorpio	1,2	125,0
Deneb	Cygnus	1,3	652,0
Regulus	Leo	1,3	56,0
Fomalhaut	Piscis Australis	1,4	24,0



Úlohy k řešení

Našim řešitelům

V této rubrice budeme pravidelně v několika prvních číslech uveřejňovat k řešení úlohy z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Doufáme, že se mnozí z vás pokusí o správná řešení. Neostýchejte se zaslat třeba i ojedinělé vyřešené příklady.

Podobně jako loni budou i letos nejlepší řešitelé odměněni hodnotnou odbornou literaturou. Jména těchto řešitelů uveřejníme v posledním, 10. čísle Rozhledů.

K usnadnění naší práce číslujte úlohy týmiž čísly jako v zadání. Řešení každé úlohy - tedy nikoli pouze výsledek - budiž vždy na zvláštním listu papíru formátu A4 nebo A5. Slovní text úlohy v řešení již znovu neopakujte. Pište čitelně perem nebo strojem pouze po jedné straně papíru. V pravém dolním rohu každého listu uveďte čitelně celé své příjmení a jméno s adresou a udejte též školu i třídu, kterou navštěvujete.

Ukázky řešených příkladů naleznete v č. 7 až 10 loňského ročníku. K řešení příkladů označených hvězdičkou stačí vědomosti z 9. třídy JSS, mohou je však řešit i studující vyšších tříd.

Řešitele z letošních 11. tříd JSS nebo 4. roč. odborných škol upozorňujeme, že svá řešení mohou zaslat i po maturitě do lhůty, která bude včas oznámena.

Řešení zasílejte na adresu: Doc. Ota Setzer, Praha 6, Zikova 4.

Předpokládáme, že budete pracovat samostatně, bez cizí pomoci, a přejeme Vám hodně úspěchu.

Redakce

* 9. Je dán obdélník $ABCD$ ($AB = 9$, $BC = 7$) a uvnitř jeho strany BC bod E ($CE = 3$). Narýsujte stoupající oblouk (ve stavitelství zvaný kobylí hlava), který se skládá ze dvou vzájemně se dotýkajících kruhových oblouků k_1 a k_2 . Oblouk k_1 se dotýká strany AD v bodě A , oblouk k_2 se dotýká strany CD a strany BC v bodě E .
Ota Setzer

* 10. Vypočtěte, kde musíme volit v předchozím příkladě bod E (uvnitř strany BC), aby střed oblouku k_1 ležel v bodě B ? Pro tento zvláštní případ určete - za jinak nezměněných podmínek - obsah plochy omezené kobylí hlavou a úsečkami AB , BE . Kolik % celého opsaného obdélníka zaujímá tato plocha?
Ota Setzer

11. Sestrojte rotační hyperboloid jednodílný, je-li dána osa rotace, poloměr hrdelní kružnice a dva body plochy.
Josef Glivický

12. Na elektrickém vařiči se nějaké množství vody počne vařit za dobu $\tau_1 = 10$ min., je-li napětí v síti, na niž je vařič připojen $V_1 = 220$ V. Poklesne-li napětí na $V_2 = 210$ V, vaří se totéž množství vody ohřívané ze stejné počáteční teploty za $\tau_2 = 14$ min. Na kolik by se prodloužil ohřev τ_3 až do varu, kdyby napětí bylo pouze $V_3 = 200$ V. Při výpočtu uvažujme také ztráty tepla do okolí, pro jednoduchost jako přímo úměrné době ohřevu. Václav Šindelář

13. Vedení z elektrárny, jež vyrábí stejnosměrný proud, ke spotřebiteli je z měděného drátu o průřezu $S = 2,5$ mm². Délka dvou vodičové přípojky je $L = 49$ m. V elektrárně je napětí $V = 120$ V. Má-li být připojen u spotřebitele elektrický vařič o výkonu $P_s = 600$ W, jaký musí být jeho odpor? Měrný odpor přírodních drátů budiž $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6}$ Ω cm. Václav Šindelář

Řešení úloh 9–13 zašlete do 20. června 1958.



Různé - recenze

Peter Baláž, Bratislava:

Ernest Rutherford - život a dielo

K 20. výročiu jeho smrti.

20. októbra 1957 uplynulo 20 rokov od smrti vynikajúceho anglického fyzika sira E. Rutherforda.

Rutherford sa narodil 30. augusta 1871 ako štvrtý z dvanástich detí v malom mestečku na Novom Zélande. Jeho otec bol farmár a zaoberal sa hlavne pestovaním ľanu.

Po skončení národnej školy Rutherford navštevoval Nelson - kolégium (stredná škola) v meste Nelsone. Jeho triedny učiteľ a riaditeľ školy vyzdvíhovali u neho mimoriadnu schopnosť koncentrovať svoje myšlienky aj pri najväčšom vyrušovaní. Rutherford si rád spomínal po celý svoj život na roky strávené v tejto vzornej škole. R. 1931 bol povýšený do šľachtického stavu ako lord Rutherford of Nelson. Poslednými slovami pred smrťou obracal sa s prosbou k manželke, aby Nelsonskému kolégiu odovzdala určitý peňažný dar.

Po absolvovaní Nelsonského kolégia Rutherford študoval 4 roky matematiku a fyziku na novozélandskom Canterbury kolégiu (univerzita) v meste Christchurch, kde sa zapracoval do vážnej vedeckej práce a štúdium ukončil s vyznamenaním.

V nasledujúcom roku po skončení univerzitného štúdia bola mu priznaná „prémia roku 1851“ za prácu z elektromagnetizmu. Táto prémia umožňovala

najschopnejším absolventom provinciálnych vysokých škôl pracovať na najlepších univerzitách v Británii.

Rutherford odišiel do Británie a pracoval 3 roky v Cavendishovom laboratóriu v Cambridge pod vedením významného fyzika, direktora tohto laboratória, J. J. Thomsona. Tu sa Rutherford zaoberal skúmaním rádioaktivity, ktorú r. 1896 objavil Becquerell. Experimentálne dokázal, že „uránové lúče“ obsahujú korpuskulárne žiarenie α a β , pričom α -častice majú väčšiu energiu a tiež väčšiu ionizačnú schopnosť.

V r. 1898 Rutherford bol menovaný profesorom na univerzite v Montreali (Kanada). Práve v tom čase preletela svetom zpráva o objave rádioaktívnych prvkov polónia a rádia manželmi Curie v Paríži. Podstata rádioaktivity zostávala však nevyjasnená. Rutherford, vďaka jeho vedeckej intuícii, jav rádioaktivity vysvetlil. Atómy rádioaktívnych prvkov treba pokladať za nestabilné, samovoľne sa rozpadajúce a to s rýchlosťou, ktorá je pre jednotlivé rádioaktívne prvky charakteristická. Spolu so Soddym v r. 1902 vytvorili teóriu rádioaktivity ako procesu spontánneho rozpadu atómov, pri ktorom sa mení jedna látka na druhú. V r. 1903 Rutherford vyslovil rozpadový zákon:

$$n = n_0 e^{-\lambda t}$$

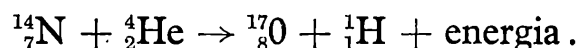
(n je počet atómov rádioaktívneho prvku v čase t ; n_0 je počet atómov rádioaktívneho prvku v čase $t = 0$ a λ je rozpadová konštanta, ktorá charakterizuje rýchlosť rozpadu.)

V r. 1907 Rutherford prijal miesto profesora na univerzite v Manchestri, kde pokračoval úspešne v bádateľskej práci. Hoci fyzikálne laboratórium bolo tu veľmi skromné čo do umiestnenia a vybavenia, predsa tu previedol znamenité práce v oblasti rádioaktivity. Na základe experimentálneho skúmania ako sa chovajú častice pri prechode látkou vytvoril principiálne nový model atómu. Atóm skladá sa z centrálnej časti, jadra, okolo ktorého obiehajú v určitých sférach záporne nabité elektróny. Rôzne prvky líšia sa svojimi jadrami. Najjednoduchšie jadro má vodíkový atóm.

Rutherfordov žiak Moseley dokázal, že počet kladných elementárnych nábojov v jadre udáva atómové číslo prvku a určuje jeho umiestnenie v Mendelejevovej tabuľke. Druhý Rutherfordov žiak Bohr vypracoval na základe kvantovej teórie novú mechaniku elektrónov a tým odstránil podstatný nedostatok novej teórie, týkajúci sa stability atómu. Rutherford - Bohrov - model atómu bol teoreticky zdôvodnený a je doteraz základom celej jadernej fyziky.

Spolu s Geigerom určili počet α -častíc, ktoré vyletia z 1 g rádia za 1 sec a náboj jednej α -častice. Rutherford ďalej dokázal, že α -častica je dvojnásobne ionizovaný atóm hélia.

Rutherford uskutočnil prvú umelú premenu jadra dusíka na jadro kyslíka odstrelovaním jadier dusíka α -časticami, pričom sa uvoľnil protón. Táto jaderná reakcia sa formuluje takto:



V r. 1919 Rutherford prevzal po prestárlom Thomsonovi vedenie fyzikálneho laboratória v Cambridgi, kde zotrval až do smrti.

Rutherford v r. 1920 predpovedal existenciu neutróna a popísal jeho vlastnosti. Neutrón objavil v r. 1932 Chadwick.

V Cambridgi u Rutherforda viac rokov pracoval aj významný sovietský fyzik Kapica, ktorý vypracoval originálnu metódu na získanie silného magnetického poľa.

Za priekopnícke práce v atómovej fyzike Rutherford bol poctený Nobelovou cenou a mnohými vyznamenaniami. Bol členom takmer všetkých vedeckých akadémií. Zomrel 20. októbra 1937 v Cambridgi. Je pochovaný vo Westminster-skom opátstve vedľa Newtona, Darwina a Faradaya.

Literatúra:

Prof. Dr. Karl Werner: Ernest Rutherford - Leben und Werk. Mathematik und Physik in der Schule, 4. Jahrgang, 1947. Heft 10.

J. B. Fainbojm, Ernest Rutherford, žurn. „Fizika v škole“, 1956, No 5.

Komplexní čísla v technické praxi

Vám všem je znám pojem komplexního čísla a jeho geometrického znázornění v rovině, i užití komplexních čísel při řešení kvadratické a binomické rovnice a při odvození základních aditivních vztahů pro $\sin(x \pm y)$ a $\cos(x \pm y)$. Význam komplexních čísel je však mnohem širší a hlubší, než by se z těchto několika málo aplikací zdálo. Ze zkušenosti vím, že absolventi jedenáctiletky si nejsou plně vědomi tohoto významu. Myslím, že většina z vás pokládá komplexní čísla za čistě myšlenkový výtvar lidského rozumu (což je pravda), za nereálný pojem, mající význam jen pro matematické úvahy, za věc bez praktického vztahu k technické aplikaci. Z tohoto omylu vás zcela vyvede spisek, který nedávno vyšel v knižnici **Populární přednášky o matematice**, vydaný Státním nakladatelstvím technické literatury jako 12. svazek v překladu ing. M. Ullricha z ruštiny. Tento spis je od známého sovětského autora A. I. Markuševiče a má název: **Komplexní čísla a konformní zobrazení**.

Obsah je možno zhruba rozdělit na dvě části. V první části (článek 1.—19.) seznamuje autor čtenáře zcela od začátku s komplexními čísly velmi názorným a přitom přesným způsobem. Přestože většina výsledků zde dosažených je vám známa ze školy, nevynechávejte první články, neboť důsledné geometrické pojetí komplexního čísla jako vektoru pomůže vám porozumět dobře posledním článkům první části i celé části druhé. V ní se seznámíte s některými jednoduchými (nezalekněte se vznešeně znějících názvů) funkcemi komplexní proměnné, pomocí nichž se zprostředkuje t. zv. **konformní zobrazení v rovině**. Tohoto zobrazení je pak užito pro některé technické aplikace, jako je sestavení map a konstrukce základních profilů křidel letadla. Spisek, mající 75 stran, je ukončen deseti cvičeními s návodem i řešením.

Knížka je psána jasně a srozumitelně, takže jí mohou porozumět žáci tří posledních tříd jedenáctiletky i odborných škol. Knížka může být i dobrým pomocníkem učitele zejména v zájmových kroužcích z matematiky. Možno ji proto vřele doporučit studentům i učitelům. Brožovaná stojí 2,30 Kčs.

Jaroslav Chudý

Za prof. RNDr. Františkem Vyčichlem

Dne 6. ledna 1958 zemřel po těžké chorobě náš význačný matematik a školský pracovník Dr. Frant. Vyčichlo, nositel Řádu práce a profesor matematiky na fakultě inženýrského stavitelství Českého vysokého učení technického v Praze. Odešel náhle a předčasně v necelých 53 letech.

František Vyčichlo se narodil 22. dubna 1905 v Pardubicích. Ve 14 letech mu zemřel otec a tak se svou matkou pečoval o tři mladší sourozence. Rys otcovské péče přenesl prof. Vyčichlo do celé své další životní činnosti. Jeho talent a láska pro matematiku přivedla jej ke studiu matematiky a deskriptivní geometrie na přírodovědeckou fakultu Karlovy university a na techniku v Praze. Jeho mimořádné nadání bylo na vysoké škole brzy objeveno, neboť student Vyčichlo se záhy zařadil mezi vynikající posluchače. Již po tříletém studiu byl doporučen za asistenta matematiky. Po vystudování již jako 23letý absolvent university byl pověřen suplováním přednášek deskriptivní geometrie na přírodovědecké fakultě KU. V roce 1929 byl promován na doktora přírodních věd na podkladě disertační práce z oboru geometrie. Studoval v r. 1929 v Göttingen u slavného matematika Hilberta a v r. 1937 na universitě ve Florencii.

Hluboký zájem o otázky školské matematiky přivedl prof. Vyčichla na karlínskou reálku, kde působil od r. 1930 po celých dvanáct let. Tato léta jsou poznamenána širokým rozvinutím jeho odborné činnosti a uplatňováním osobité iniciativy nejen na poli pedagogické a vědecké práce, nýbrž i na úseku činnosti organizační, popularizační a redaktorské, zejména v JČMF. Byla to však zároveň i léta úspěšného působení na stále se rozšiřující okruh pracovníků, vážně se zamýšlejících nad problematikou tehdejší školy a obírajících se metodickými otázkami matematiky i jinými školskými problémy. Proto byl prof. Vyčichlo později stavěn do čela řady komisí pro reformu studia našich středních škol a pro vypracování učebních osnov, zejména po osvobození naší vlasti v r. 1945, kdy byl pověřován péčí nebo přímou účastí na přepracování nebo vypracování nových středoškolských učebnic matematiky a deskriptivní geometrie.

Podněty, které si přinesl z jednorozhodného studijního pobytu ve Florencii, byly popudem ke zvláštnímu rozvinutí jeho vědecké činnosti vyúsťující k dosažení habilitace v r. 1939 na ČVUT pro obor celé geometrie a na přírodovědecké fakultě KU pro obor matematiky a geometrie. V r. 1939 začal přednášet na universitě a byl pověřen suplováním matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství.

Doba okupace byla profesoru Vyčichlovi obdobím cílevědomé přípravy pro řešení velikých úkolů na školském úseku, jež s sebou přinese osvobození naší vlasti, v něž prof. Vyčichlo vždy pevně věřil. Byl v této době přidělen Státnímu památkovému úřadu, kde vedl skupinu studentů Uměleckoprůmyslové školy, jejímž úkolem bylo opatřit plány našich nejcennějších stavebních památek pro případ jejich možného zničení za války.

Ihned po osvobození zúčastnil se přípravných prací k bezodkladnému znovuootevření našich vysokých škol. V r. 1945 byl prof. Vyčichlo pověřen přednáškami z matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství a později pro své vědecké

a pedagogické kvality byl jmenován řádným profesorem matematiky na této škole. Současně přednášel matematiku a deskr. geometrii na řadě jiných vysokých škol. Podstatně se zasloužil o vybudování matematického ústavu ČSAV.

Prof. Vyčichlo po okupaci pečoval o výuku matematických disciplin na většině fakult ČVUT, zapojil se do dalších náročných úkolů, jako byla reforma vysokých škol, sestavování nových učebních osnov, pořizování zákona z r. 1950, znamenajícího zásadní přerod vysoké školy podle potřeb socialistického zřízení. Bylo zcela přirozené, že v čelo katedry matematiky a deskr. geometrie pro celé ČVUT byl postaven prof. Vyčichlo, neboť jeho zkušenosti a vyvinutý organizační smysl, znalost problematiky vědecké práce a její spojení s otázkami technických oborů, jeho charakterové a povahové vlastnosti, ideologická vyspělost a pevný politický postoj jako člena KSČ učinily z něho osobnost, která dovedla ovlivnit a usměrnit chod pedagogické a vědecké práce v matematických disciplínách na celém ČVUT.

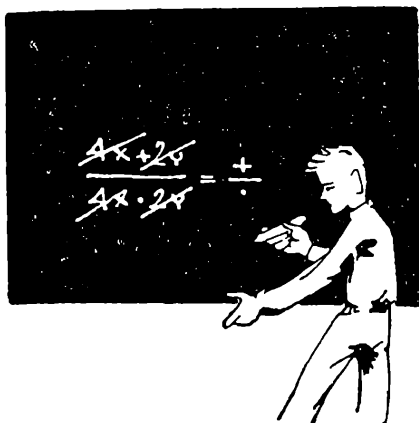
Prof. Vyčichlo dovedl lidi vést, povzbuzovat a podněcovat k práci. Uměl vyhmátnout podstatu úkolů a jejich řešení i stmelit práci svých spolupracovníků a svěřenců v harmonický celek. Prosazoval kritické hodnocení individuální práce kolektivem, což přispívalo k odbornému růstu schopných jedinců. Příkladná byla zvláště péče věnovaná výchově mladých členů katedry. Vedl je hlavně k řešení úkolů, které vyžaduje technická praxe. Matematika byla životem prof. Vyčichla. Proto v tomto vědním oboru pracoval nejen jako učitel, nýbrž celá léta stál v popředí všech akcí směřujících k dalšímu rozvoji matematiky, této základní vědy, tolik nezbytné pro přípravu nových inženýrů. Veliká je zásluha prof. Vyčichla o výchovu inženýra nového typu, dobře odborně připraveného na velké úkoly socialistické výstavby našeho státu. Prof. Vyčichlo vštěpoval studentům zájem a lásku k matematice. Byl učitelem přísným a nesmlouvavým, vždy však laskavým a plným zájmu o denní starosti svých studentů i spolupracovníků. Budou proto na něj všichni dlouho a s láskou vzpomínat.

Bohaté výsledky své vědecké a odborné práce uložil prof. Vyčichlo v řadě významných publikací, učebnic, skript a vědeckých pojednání v odborných časopisech domácích i zahraničních. Práce, jíž přispěl k rozvoji československé vědy, je hlavně z oboru diferenciální geometrie. V posledních letech se zabýval aplikacemi matematiky v problémech inženýrské praxe a to zejména v teorii matematické pružnosti. Vynikající pedagogické zkušenosti prof. Vyčichla a znalost problémů střední školy jej přivedly mezi obětavé spolupracovníky ministerstva školství při řešení úkolů na tomto úseku. Vysokého ocenění všestranné vědecké, učitelské a organizační práce dostalo se prof. Vyčichlovi propůjčením Řádu práce v roce 1956.

Odchod prof. Vyčichla těžce postihuje celé naše školství a naši matematickou vědu. Dílo jím započaté bude pokračovat dále v práci jeho spolupracovníků, které neustále nabádal k práci, je vedl a s opravdovým zájmem sledoval. Výsledky pedagogického a písemného působení prof. Vyčichla budou žít v jeho studentech. Jeho pracovní a ideově výchovné metody budou dále rozvíjeny spolupracovníky ve všech směrech.

Vzpomínka na plodný život prof. Vyčichla a jeho hřejivé přátelství zůstanou nesmazatelně vryty v srdcích všech, kteří ho znali.

Doc. Bořivoj Kepr



Matematika

Jaroslav Chudý, Praha:

O jedné metodě numerického řešení algebraických rovnic

Algebraickou rovnicí o jedné neznámé nazýváme takovou rovnici, kterou lze různými úpravami převést na tvar

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (1)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n jsou obecně komplexní čísla. Úpravami rozumíme kromě samozřejmých změn (převádění členů s jedné strany na druhou, násobení nebo dělení rovnice nenulovou konstantou) též odstraňování zlomků, v jejichž jmenovatelích se vyskytuje neznámá i umocňování (přitom je třeba vždy provést zkoušku, t. j. zjistit, zda kořeny upravené rovnice jsou skutečně též kořeny dané rovnice - na př. u rovnic iracionálních). Takovou algebraickou rovnicí je třeba rovnice

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3x-5}{2x+3} - 6x + 7 = \frac{4}{x} + 2,$$

nebo rovnice $\sqrt{x+2} - x + 7 = x^2$ atd.

Rovnice, které nelze převést na tvar algebraické rovnice, se nazývají *transcendentní*; jsou to na př. rovnice $3^x - 5x = 4$, $x - \log x = 2$, $x + \sin x = 3$, atd.

My se budeme v tomto článku zabývat jen rovnicemi algebraickými, a to takovými, jejichž koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n jsou čísla reálná. Bude-li $a_0 \neq 0$, říkáme, že rovnice (1) je stupně n -tého. Kořenem rovnice (1) nazveme takové číslo α , které vyhovuje rovnici (1).

Abychom se mohli dále stručně a výstižně vyjadřovat, zavedme si jeden užitečný symbol. Označme levou stranu naší algebraické rovnice (1) symbolem $P(x)$; veličinu x nazveme v tomto symbolu *proměnnou* a $P(x)$ *mnohočlen* (polynom) n -tého stupně (při $a_0 \neq 0$) v proměnné x . Různým hodnotám proměnné x jsou přiřazeny obecně různé hodnoty mnohočlenu $P(x)$. Hodnotu mnohočlenu $P(x)$ přiřazenou číslu a (získanou dosazením čísla a za x) označíme symbolem

$P(a)$. Tak na př. pro $P(x) = 2x^3 - 5x + 4$ je $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 + 4 = 43$, $P(-1) = 7$, $P(a) = 2a^3 - 5a + 4$ atd. Pomocí zavedeného symbolu lze kořen α rovnice $P(x) = 0$ charakterisovat podmínkou $P(\alpha) = 0$.

O kořenech algebraické rovnice platí t. zv. *fundamentální věta algebry*, jejíž důkaz předpokládá však znalost vyšší algebry:

V ě t a 1. *Každá algebraická rovnice kladného stupně má aspoň jeden kořen (reálný nebo komplexní).*

Z této věty lze již poměrně snadno dokázat další větu:

V ě t a 2. *Algebraická rovnice n -tého stupně má nejvýše n kořenů (reálných nebo komplexních).*

Z algebraických rovnic jste se ve škole učili řešit rovnici stupně prvního $a_0x + a_1 = 0$, mající jediný kořen $x = -\frac{a_1}{a_0}$ a rovnici stupně druhého $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$, mající dva (v případě nulového diskriminantu jeden) kořeny $x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$; z rovnic vyšších stupňů jste řešili jen speciální typy,

na př. rovnice binomické, trinomické atd. Je možné ještě odvodit řešení rovnice stupně třetího a čtvrtého. Je však dokázáno, že pro rovnice stupně pátého a vyššího, obecně dané, nelze vyjádřit jejich kořeny výrazy, složenými z koeficientů takové rovnice. Na druhé straně existuje celá řada method, které nám umožňují pro konkrétně danou rovnici (t. j. rovnici s numericky danými koeficienty) libovolného stupně nalézt její kořeny přibližně, ale s libovolnou přesností. Než budeme precisovat výrok „s libovolnou přesností“, zavedme si užitečný pojem intervalu.

Mějme dána dvě reálná čísla $a < b$. Množinu všech reálných čísel x , pro něž platí $a \leq x \leq b$, nazýváme *uzavřeným intervalem* a označujeme symbolem $\langle a; b \rangle$; množinu všech reálných čísel x , pro něž platí $a < x < b$, nazýváme *otevřeným intervalem* a značíme jej $(a; b)$. Číslům a, b říkáme *krajní body* (užito geometrické terminologie, vyplývající ze znázornění intervalu na číselné ose) intervalu.

Výroku „s libovolnou přesností“ rozumíme to, že můžeme zjistit dvě racionální čísla $a < b$ tak, že kořen α je v intervalu $\langle a; b \rangle$, při čemž rozdíl $(b - a)$ lze učinit libovolně malým (menším než třeba 0,001 nebo 0,000 01 atd). Nahradíme-li pak kořen α libovolným číslem tohoto intervalu, říkáme, že jsme kořen α a p r o x i m o v a l i takovým číslem s chybou menší než $(b - a)$. Celá tato úvaha se týká jen reálných kořenů vyšetřované rovnice. Ačkoliv lze i komplexní kořeny stanovit také s libovolnou přesností, omezíme naše vyšetřování jen na kořeny reálné.

Náš problém zní tedy takto: *Nalézt reálné kořeny algebraické rovnice libovolného stupně s numericky danými reálnými koeficienty s libovolnou přesností.*

Většina method, poskytujících takové řešení, užívá vyšší matematiky. My se seznámíme s celkem elementární methodou, užívající t. zv. ř e t ě z o v ý c h z l o m k ů. Přitom se však nelze vyhnout jedné větě, jejíž důkaz nemůžeme provádět (je založen na vlastnosti spojitych funkcí); místo důkazu si vysvětlíme větu na příkladě a ukážeme její význam pro řešení rovnic.

Mějme třeba rovnici $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$ a označme její levou stranu symbolem $P(x)$. Snažíme se nalézt číslo α tak, aby $P(\alpha) = 0$. Vypočteme hodnoty

našeho mnohočlenu pro několik celých čísel: $P(0) = -1$, $P(1) = -1$, $P(2) = 31$; pro další kladná čísla je již zbytečné počítat hodnoty mnohočlenu, jež budou vždy kladné. Snadno nahlédneme, že kořen α (existuje-li vůbec takový reálný kořen) musí být menší než 2. Dosazujme nyní záporná celá čísla: $P(-1) = 1$, $P(-2) = -1$, $P(-3) = 11$; pro menší čísla bude již výsledek vždy kladný. Usoudíme zase, že kořen musí být větší než -3 . Znamená to, že reálné kořeny naší rovnice (existují-li) musí být v intervalu $(-3; 2)$. Všimněme si nyní těch dvojic sousedních celých čísel, pro něž hodnoty mnohočlenu se liší znaménkem. Vezměme třeba dvojici čísel 1 a 2, pro něž $P(1) = -1$, $P(2) = 31$. Kdybychom do $P(x)$ dosazovali všechna čísla intervalu $\langle 1; 2 \rangle$, můžeme očekávat, že bychom dostali všechna čísla intervalu $\langle -1; 31 \rangle$ (možná že i čísla jiná, ale určitě všechna reálná čísla mezi -1 a 31). Protože 0 leží v intervalu $\langle -1; 31 \rangle$, bude existovat v intervalu $\langle 1; 2 \rangle$ číslo α , pro něž $P(\alpha) = 0$. Je ovšem možné, že takových čísel bude víc; určitě však bude existovat aspoň jedno. Tento závěr je obsahem slíbené věty.

V ě t a 3. *Platí-li pro polynom $P(x)$ a dvě reálná čísla $a < b$ relace $P(a) \cdot P(b) < 0$ (t. j. že $P(a)$ a $P(b)$ se liší znaménkem), má algebraická rovnice $P(x) = 0$ aspoň jeden kořen v intervalu $(a; b)$.*

Podle této věty bude mít naše rovnice $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$ aspoň jeden kořen v intervalu $(1; 2)$, aspoň jeden kořen v intervalu $(-1; 0)$, aspoň jeden kořen v intervalu $(-2; -1)$ a aspoň jeden kořen v intervalu $(-3; -2)$. Protože jde o rovnici stupně čtvrtého, mající nejvýše čtyři kořeny, vidíme, že v každém z uvedených intervalů je právě jeden kořen.

Podaří-li se nám pro danou algebraickou rovnici nalézt intervaly takové, že v každém z těchto intervalů je právě jeden kořen rovnice, říkáme, že jsme provedli *s e p a r a c i* (oddělení) kořenů. Provedení této separace nám umožňuje právě věta 3.

Nevýhodou uvedené věty je skutečnost, že nám neudává počet kořenů v takovém intervalu; zaručuje nám jen existenci aspoň jednoho kořenu. Jsou známy věty, dávající úplnou odpověď na otázku počtu kořenů v intervalu (to je zejména důležité u takových rovnic, jejichž kořeny se od sebe málo liší). Pro náš účel bude však stačit věta 3.

Než přistoupíme k výkladu vlastní metody, uveďme ještě tři užívané vlastnosti.

1. Zavedeme-li do rovnice $P(x) = 0$ novou neznámou substitucí $x = -y$, dostaneme rovnici $Q(y) = 0$, kde $Q(y) = P(-y)$. Záporným kořenům rovnice $P(x) = 0$ odpovídají kladné kořeny rovnice $Q(y) = 0$. Znamená to, že vyšetřování záporných kořenů lze pomocí uvedené substituce převést na vyšetřování kladných kořenů.

2. Provedeme-li v rovnici $P(x) = 0$ substituci $x = y + c$, kde c je libovolné reálné číslo, dostaneme rovnici $Q(y) = 0$, kde $Q(y) = P(y + c)$. Ze vztahu mezi x a y vidíme, že, bude-li rovnice $P(x) = 0$ mít kořeny x_1, x_2, \dots , bude mít rovnice $Q(y) = 0$ kořeny y_1, y_2, \dots , při čemž $y_i = x_i - c$. Této vlastnosti využijeme takto: bude-li mít rovnice $P(x) = 0$ kořen x_1 v intervalu $(a; a + 1)$, přejde rovnice substitucí $x = a + y$ v rovnici $Q(y) = 0$, jejíž kořen y_1 (odpovídající kořenu x_1) bude v intervalu $(0; 1)$.

3. Provedme konečně v rovnici $P(x) = 0$ substituci $x = \frac{1}{y}$, čímž dostaneme rovnici $P\left(\frac{1}{y}\right) = 0$. Odstraníme-li v této rovnici zlomky násobením y^n , získáme rovnici $Q(y) = 0$, kde $Q(y) = y^n \cdot P\left(\frac{1}{y}\right)$. Kladným kořenům rovnice $P(x)$ odpovídají kladné kořeny rovnice $Q(y) = 0$, a to tak, že kořenu $x_1 < 1$ odpovídá kořen $y_1 > 1$. Bude-li rovnice $P(x) = 0$ mít jediný kořen v intervalu $(0; 1)$ - což lze vzhledem ke 2. dosáhnout - má rovnice $Q(y) = 0$ jediný kořen větší než 1. Provedeme-li separaci tohoto kořenu nalezením intervalu $(a; a + 1)$, kde $a \geq 1$, bude odpovídající kořen x_1 v intervalu $\left(\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a}\right)$.

Uvedené vlastnosti spojujeme samozřejmě tak, jak potřebujeme. Především se stačí omezit vždy na vyšetření kladných kořenů. Má-li rovnice $P(x) = 0$ jeden kořen x_1 v intervalu $(a; a + 1)$, kde a je nezáporné celé číslo, provedeme substituci $x = a + \frac{1}{y}$. Po úpravě bude mít rovnice $Q(y) = 0$ jediný kořen y_1 - právě ten, který odpovídá kořenu x_1 - větší než 1; bude-li tento kořen v intervalu $(b; b + 1)$, kde $b \geq 1$, bude kořen x_1 v intervalu $\left(a + \frac{1}{b+1}; a + \frac{1}{b}\right)$.

Nyní lze již přikročit k vlastní metodě. Provedeme to hned na příkladě. Mějme řešit rovnici $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$, pro níž jsme již provedli separaci a hledáme kořen x_2 v intervalu $(-3; -2)$.

Provedme nejdříve substituci $x = -y$, čímž dostaneme rovnici $y^4 - 3y^3 + 4y - 1 = 0$, mající odpovídající kořen y_1 v intervalu $(2; 3)$. Další substitucí $y = 2 + \frac{1}{z}$ získáme $\left(2 + \frac{1}{z}\right)^4 - 3\left(2 + \frac{1}{z}\right)^3 + 4\left(2 + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$. Provedením naznačených výkonů získáme

$$16 + \frac{32}{z} + \frac{24}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{1}{z^4} - 24 - \frac{36}{z} - \frac{18}{z^2} - \frac{3}{z^3} + 8 + \frac{4}{z} - 1 = 0.$$

Po sloučení a odstranění zlomků (a znásobení -1) dostaneme rovnici $z^4 - 6z^2 - 5z - 1 = 0$. Tato rovnice má, jak víme, jediný kořen větší než 1. Označme $Q(z) = z^4 - 6z^2 - 5z - 1$ a provedme separaci: $Q(1) = -11$, $Q(2) = -19$, $Q(3) = 11$. Odpovídající kořen z_1 je v intervalu $(2; 3)$. Kdybychom se vrátili k neznámé x , dostaneme $x_1 = -\left(2 + \frac{1}{z_1}\right)$; vypočteme-li hodnoty x'_1 a x''_1 , odpovídající krajním hodnotám 2 a 3 intervalu pro z_1 , dostaneme $x'_1 = -\left(2 + \frac{1}{2}\right) = -2,5$ a $x''_1 = -\left(2 + \frac{1}{3}\right) = -2,3$; je tedy $-2,5 < x_1 < -2,3$. Odtud bychom mohli kořen x_1 aproximovat číslem 2,4 s chybou menší než 0,1, t. j. $x_1 = -2,4 \pm 0,1$.

Vyšetřujeme ještě dále rovnici pro neznámou z a provedme v ní substituci $z = 2 + \frac{1}{u}$; dostaneme tak $\left(2 + \frac{1}{u}\right)^4 - 6\left(2 + \frac{1}{u}\right)^2 - 5\left(2 + \frac{1}{u}\right) - 1 = 0$, t. j. po úpravě $19u^4 - 3u^3 - 18u^2 - 8u - 1 = 0$, jež má, jak víme, jeden kořen u_1 větší než 1. Označme levou stranu této rovnice $R(u)$ a provedme separaci: $R(1) = -11$, $R(2) = 191$; je tedy u_1 v intervalu (1; 2). Kdybychom se vrátili k neznámé x , dostaneme $x_1 = -\left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{u_1}}\right)$. Hodnoty x'_1 a x''_1 , odpovídající krajním bodům intervalu (1; 2) jsou

$$x'_1 = -\left(2 + \frac{1}{2+1}\right) = -2,\bar{3} \text{ a } x''_1 = -\left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}\right) = \\ = -\left(2 + \frac{2}{5}\right) = -2,4;$$

pak je $-2,4 < x_1 < -2,\bar{3}$.

Opakujme celý postup a provedme (již stručněji) ještě dva kroky. Substitucí $u = 1 + \frac{1}{v}$ získáme (po úpravě) rovnici $11v^4 - 23v^3 - 87v^2 - 73v - 19 = 0$, mající kořen v_1 v intervalu (4; 5). Pak

$$x_1 = -\left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{v_1}}}\right); \quad x'_1 = -\frac{33}{14} \doteq -2,357; \\ x''_1 = -\frac{40}{17} \doteq -2,353.$$

Je tedy po tomto kroku $-2,357 < x_1 < -2,353$.

Při dalším kroku získáme substitucí $v = 4 + \frac{1}{t}$ rovnici $359t^4 - 943t^3 - 693t^2 - 153t - 11 = 0$, jejíž kořen t_1 je v intervalu (3; 4). Pak

$$x_1 = -\left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{t_1}}}}\right)$$

Dalším opakováním dostáváme pro x_1 tvar t. zv. řetězového zlomku, jehož zápis (z úspornosti) vyznačujeme tak, jak je to provedeno pro x'_1 :

$$x_1' = - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{3}{13} \right) =$$

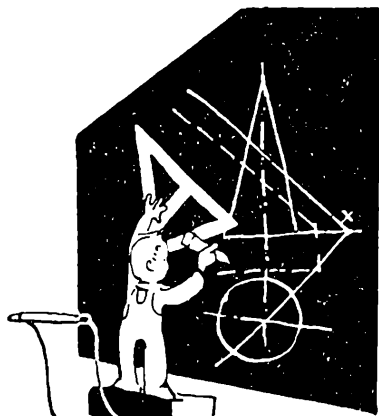
$$= - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{13}{16} \right) = - \frac{106}{45} = - 2,3\bar{5} ;$$

podobně $x'' = - \frac{139}{59} \doteq - 2,355\ 9$. Je tedy $- 2,355\ 9 < x_1 < - 2,3\bar{5}$.

Pak lze psát $x_1 = - 2,355\ 7 \pm 0,000\ 2$. Dosazením čísla $(- 2,355\ 7)$ za x do levé strany dané rovnice dostaneme $P(- 2,3557) \doteq 0,000\ 16$.

Jako příklad můžete vypočítat další tři kořeny vyšetřované rovnice; vyjde:

$$x_2 \doteq 1,095\ 3; \quad x_3 \doteq - 0,262\ 4; \quad x_4 \doteq - 1,477\ 3.$$



Deskriptivní geometrie

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

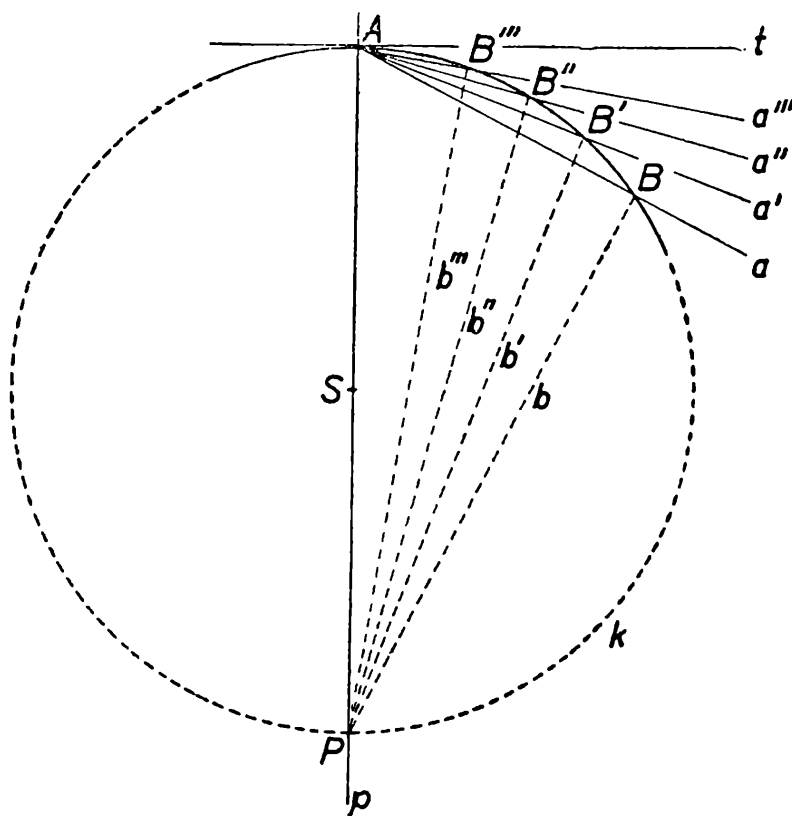
O tečnách a normálách křivek

Křivky lze studovat s různých hledisek. Ve škole si všímáte hlavně těch vlastností křivek, které vyplynou přímo z měření, a to jak z měření délek, tak z měření úhlů. Už v definici kružnice vyskytuje se délka poloměru, u elipsy mluvíte o tom, že všechny její body mají stálý součet vzdáleností od dvou daných bodů - ohnisek. Srovnáváte velikosti obvodových úhlů v kružnici s velikostí úhlů středových. I tečny těchto křivek sestrojíte na základě měření. Při sestrojení tečny kružnice využíváte podstatně toho, že taková tečna je kolmá na poloměr procházející bodem, v němž se tečna kružnice dotýká. Ale kolmost dvou přímek je očividně opět vlastnost související s měřením, totiž s měřením úhlů. U elipsy je konstrukce tečny o něco složitější, ale také vychází z jednoduchých měřických vlastností.

Ale přemýšleli jste už někdy o sestrojení tečny u jiných křivek?

Nevystačíme-li při takové konstrukci s jednoduchými důsledky pouhého měření, přibíráme na pomoc vlastnosti hlubší. K objevení takových vlastností docházíme v matematice obvykle tehdy, když se na známé nám výsledky podíváme s nového hlediska. Všimněme si tedy tečny kružnice a hledejme, zdali některou její vlastnost můžeme přenést i na tečny jiných křivek,

V obr. 1 sledujeme jen určitou část oblouku kružnice k v okolí bodu A , v němž známe tečnu t . Průměr $p \equiv AS$ (S je střed kružnice k) protne kružnici k ještě v bodě P , který v naší úvaze hraje jen roli pomocného bodu. Zvolme na našem oblouku vedle bodu A nějaký další bod B a sestrojme spojnicí $a \equiv AB$. Spojnici BP označme písmenem b . Přímky a, b jsou k sobě kolmé, což zapisujeme stručně symbolem $a \perp b$; jde totiž o obvodový úhel nad průměrem AP . Mysleme si nyní, že bod B se pohybuje po kružnici k tak, že se blíží k pevnému bodu A . V obr. 1 jsou vyznačeny pochopitelně jen některé polohy B', B'', B''', \dots , jež bod B při své pouti zaujme. Všimněte si, že přímka $a \equiv AB$, procházející podle předpokladu pevným bodem A , přejde přitom do poloh $a' \equiv AB', a'' \equiv AB'', a''' \equiv AB''', \dots$, a že přímka b zaujme postupně polohy $b' \equiv PB', b'' \equiv PB'', b''' \equiv PB''', \dots$.



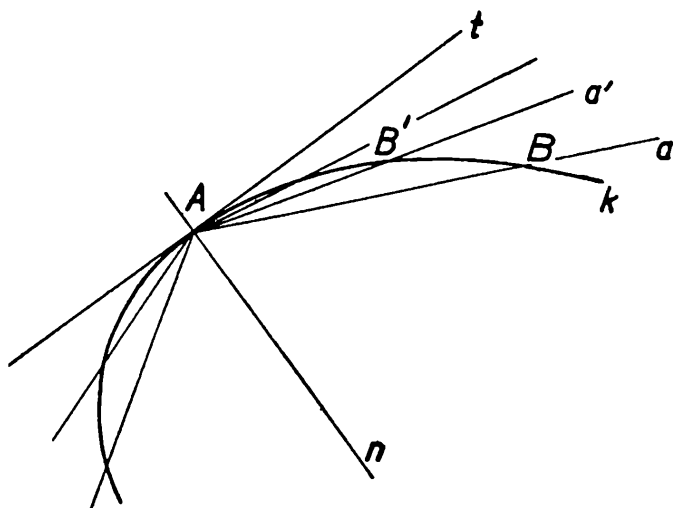
Obr. 1

Protože body A, P jsou při tomto pohybu pevné, zůstane stálý i příslušný obvodový úhel. Je tedy $a' \perp b', a'' \perp b'', a''' \perp b''', \dots$. Přejde-li konečně bod B přímo do bodu A , splyne přímka b s průměrem p a přímka a jako druhé rameno pohybujícího se pravého úhlu zaujme polohu přímky procházející bodem A kolmo k průměru p . Je tedy výslednou polohou přímky a právě tečna t kružnice k . Odmysleme si nakonec pomocný bod P i pomocné přímky $b, b', b'', b''', \dots, p$; řekneme pak, že *blíží-li se bod B po křivce k k bodu A , je tečna t křivky k v bodě A mezním čili limitním případem secny $a \equiv AB$.*)

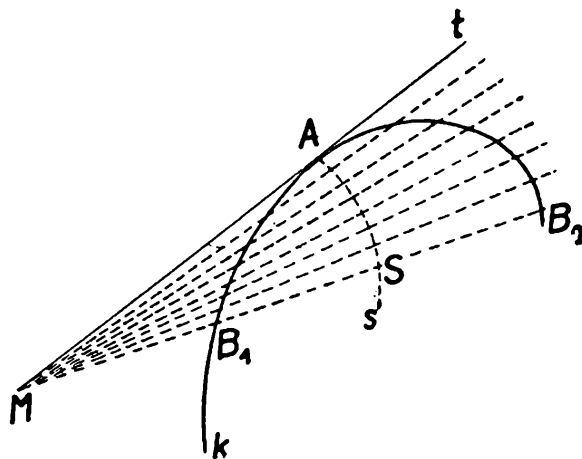
¹⁾ Kdybychom chtěli sestrojovat touto cestou tečnu t kružnice k , nepotřebovali bychom k tomu ani bod P , ani přímky b, b', b'', b''', \dots , stačilo by sledovat jen změny polohy přímek a, a', a'', a'''

Těmito slovy charakterisujeme tečnu křivky k v bodě A i u jiných křivek než u kružnice (viz obr. 2). Čtenář nechť si ještě uvědomí, že pohyb bodu B po křivce k musíme přitom sledovat v celém okolí bodu A , tedy po obou stranách od bodu A na křivce k . Ve starší literatuře vyjadřovala se právě popsaná vlastnost tečny přírozenými slovy, že *tečna je spojnicí dvou sousedních (též soumězných nebo nekonečně blízkých) bodů křivky*. Je to ovšem nepřesné rčení, protože jsme neřekli, co rozumíme pod pojmem dvou sousedních nebo nekonečně blízkých bodů křivky; ale slouží to dobře k zapamatování výše popsané vlastnosti tečny.

Čtenář si zde jistě všiml toho, že podobně jako v aritmetice zavádíme i v geometrii úvahy limitní. Ovšem v aritmetice jste na příklad limitu posloupnosti zavedli s naprostou přesností. Podobně to lze provést i v geometrii, nebudeme se s tím zde však trápit, protože účel tohoto článku je jen informativní; nesledujeme zde cíl naučit naše čtenáře s limitními pojmy v geometrii zacházet. Nebudu zde tedy ani přesně vymezovat pojem křivky, každý nechť si tyto i následující věci představí na těch nejběžnějších křivkách, ať už to budou křivky s geometrickou zákonitostí známou, nebo křivky empirické, rychle načrtnuté.



Obr. 2



Obr. 3

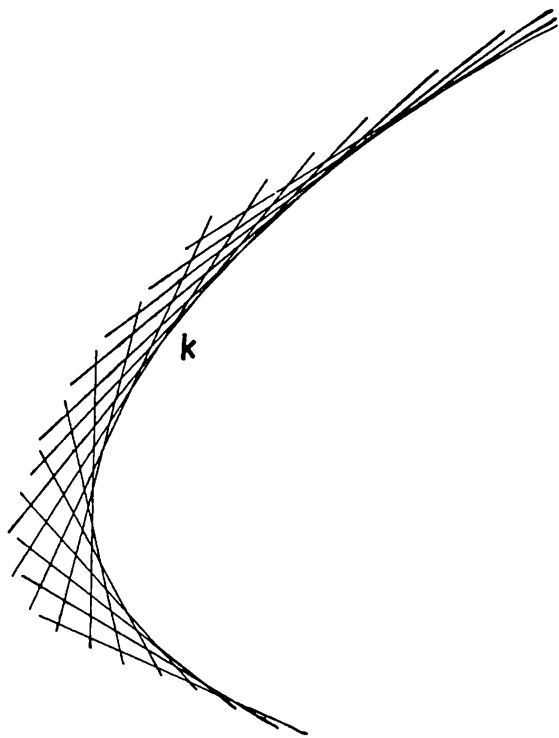
Naše představa tečny jako spojnice dvou sousedních bodů křivky má také význam praktický. Ukažme si to jen na jednom příkladě. Jde ovšem jen o konstrukci přibližnou, ale při praktickém rýsování mají právě takové konstrukce velký význam.

Budiž na obr. 3 dána nějaká křivka k a mimo ni bod M . Úloha zní: bodem M vést tečnu t ke křivce k a najít bod A , v němž se tato tečna křivky k dotýká. Řešení je velmi názorné. Protože polohu tečny t i bodu A předem tušíme, sestrojíme snadno několik sečen křivky k , jež bodem M procházejí a jež leží blízko hledané tečny t . Každá taková sečna protíná křivku k ve dvou bodech, na obr. 3 jsou v jednom případě tyto body označeny B_1, B_2 . Střed úsečky $B_1 B_2$ označme S . Blíží-li se naše sečna k tečně t , blíží se body B_1 a B_2 k sobě a střed S , mezi nimi stále sevřený, vytvoří křivku s , která zřejmě protíná danou křivku k v hledaném bodě A . Tečnu t už pak snadno sestrojíme jako spojnicí AM . Pomocnou křivku s můžeme sestrojít s dostatečnou přesností, vyrýsujeme-li dosta-

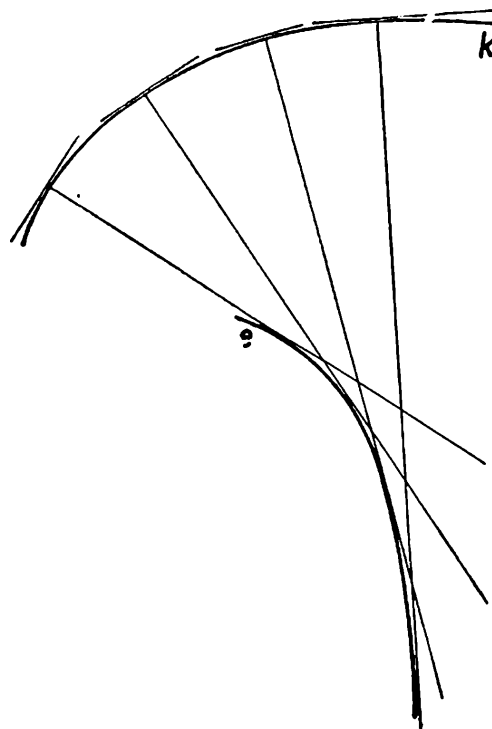
tečně hustě sečny procházející bodem M ; tím získáme i potřebný počet bodů křivky s , jejíž zakreslení pak nečiní potíží.

Obměnu této konstrukce pro případ, že máme vést ke křivce k tečnu rovnoběžnou s danou přímkou, čtenář snadno provede sám, pomocné sečny budou pak prostě s danou přímkou rovnoběžné.

Při rýsování i při výpočtech týkajících se složitých křivek, se často vyplatí nahradit křivky čarou jednodušší. Protože přímka je nejjednodušší čára spojující dva body, můžeme říci, že ze všech přímek jdoucích daným bodem křivky ji tečna nejlépe a p r o x i m u j e, t. j. že nejlépe naznačuje přibližný běh křivky v okolí zkoumaného bodu. Ovšem přímka je čára přec jen velmi prostá, proto je samozřejmé, že tečna nahrazuje křivku jen velmi hrubě a nedokonale. Prakticky se to však uplatňuje tehdy, známe-li dostatečný počet tečen žádané křivky. Na příklad na obr. 4, kde pro jistou křivku k je vyrýsováno dostatek tečen, vidíte pohodlně křivku k i když tam úmyslně není bodově vyrýsována. Říkáme, že křivka k je tečnami *obalena*, čili že je *obálkou* svých tečen.



Obr. 4



Obr. 5

Bod, v němž se tečna křivky dotýká, nazýváme *bodem dotyku* obou čar. Ze všech přímek, procházejících bodem dotyku, je vedle tečny zvlášť důležitá ještě jedna přímka, totiž přímka kolmá na tečnu; nazývá se *normála* křivky. V obr. 2 (vraťte se k němu) je vyrýsována normála n křivky k v bodě A . Sestrojování normál křivek je v určitých partiích geometrie důležité; na příklad v kinematické geometrii čili v t. zv. geometrii pohybu sestrojují se normály drah jednotlivých pohybujících se bodů snáze než jejich tečny, slouží zde tedy normály křivky dobře k sestrojení příslušných tečen.²⁾ My si zde všimneme něčeho jiného.

²⁾ O kinematické geometrii dočtete se v minulém ročníku tohoto časopisu v článku Doc. Dr. Menšíka: Základy kinematické geometrie v rovině, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 35, str. 23, 64, 163, 202.

U kružnice je věc názorná a jednoduchá. Všechny její normály procházejí vždycky jejím středem, protože jsou to zároveň průměry té kružnice. Ale u jiných křivek tomu tak není. Všechny normály křivky k neprocházejí obvykle jedním pevným bodem, ale obalují nějakou křivku, v obr. 5 jsme ji označili písmenem e . Tato křivka e se nazývá *evoluta* křivky k ; normály křivky k jsou tedy tečnami její evoluty e , evoluta křivky k je prostě obálkou normál křivky k .

Podrobnější vlastnosti normál a evoluty křivky nebudeme zde zkoumat. Limitní úvahy v geometrii vyžadují pochopitelně znalost limitních procesů v aritmetice; geometrie, která se jimi zabývá, nazývá se *diferenciální geometrie*. Diferenciální geometrie využívá plně diferenciálního a integrálního počtu, s nímž se naši čtenáři seznámí až při studiu na vysoké škole. Do diferenciální geometrie patří také studium křivosti čar; tomuto pojmu bude věnován příští článek, k němuž dnešní řádky jsou přípravou. I v tomto příštím článku pokusím se objasnit příslušné pojmy bez užití výpočtů, pojem evoluty křivky bude nám k tomu velmi užitečný.

Jozef Filip, Bratislava:

Pravouhlý priemet uhla

Vo svojich úvahách o tomto predmete sa omedzíme na dutý uhol a budeme skúmať najmä vzťahy medzi veľkosťou uhla a veľkosťou jeho pravouhlého priemetu.

Najprv sa zoznámime so znakmi, ktorých budeme v tomto článku dôsledne užívať a pripomenieme si niektoré všeobecné vlastnosti dutého uhla a jeho pravouhlého priemetu.

Dutý uhol s ramenami VA , VB označujeme znakom $\sphericalangle AVB$ (alebo $\sphericalangle BVA$). Jeho rovinu - t. j. rovinu, ktorej časťou je daný uhol - budeme označovať písmenom ϱ a priemetňu písmenom π . Keď rovina ϱ pretne priemetňu π , označíme ich priesečnicu písmenom p a vrcholom V vedieme priamku $h \parallel p$ a priamku $s \perp p$. Priamku h , ktorá je rovnobežná aj s priemetňou π , budeme nazývať hlavnou priamkou roviny ϱ a priamku s spádovou priamkou roviny ϱ . Priesečík priamok s , p , o ktorom budeme predpokladať, že nesplýva s vrcholom V , budeme označovať písmenom P . Na priamke h zvolíme ľubovoľné body M , N v poradí MVN a na priamke s ešte bod Q v poradí PVQ (obr. 1). Z geometrie je známe, že každým bodom V roviny ϱ , ktorá nie je rovnobežná s priemetňou, môžeme viesť jedinou priamku h a jedinou priamku s .

Pravouhlé priemety geometrických útvarov budeme označovať tými istými znakmi ako útvary samotné, pripojíme však index 1. Napr. pravouhlý priemet uhla $\sphericalangle AVB$ označíme znakom $\sphericalangle A_1V_1B_1$.

Keďže uhol je časť roviny, uvážime najprv, čo je priemetom roviny a polroviny.

Keď je rovina $\varrho \perp \pi$, ležia premietacie lúče všetkých jej bodov v rovine ϱ , a ich priesečičky s priemetňou π sú teda na priesečnici $p \equiv \varrho \cdot \pi$. Pravouhlým priemetom roviny kolmej na priemetňu je teda priamka (priesečnica roviny s priemetňou).

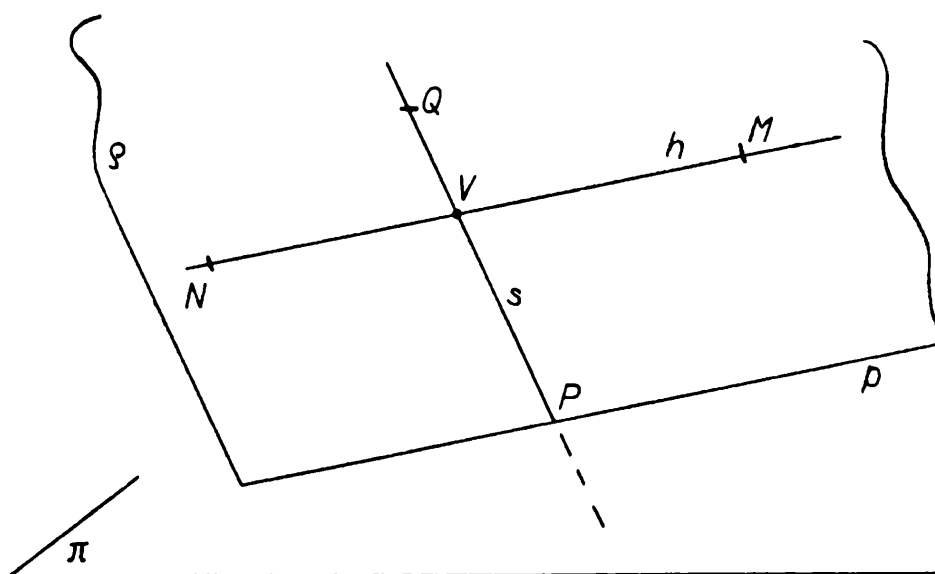
Zvoľme v rovine $\rho \perp \pi$ ľubovoľnú priamku q , ktorá nie je kolmá na priemetňu π . Priamka q rozdelí rovinu ρ na dve polroviny a pravouhlým priemetom každej z nich je priamka $p \equiv \rho \cdot \pi$, ktorá je tiež priemetom priamky q .

Keď v rovine $\rho \perp \pi$ zvolíme ľubovoľnú priamku $s \perp \pi$, vzniknú polroviny sE , sF , ak E, F sú ľubovoľné body roviny ρ oddelené priamkou s . Ich pravouhlými priemetmi sú opačné polpriamky s_1E_1, s_1F_1 - časti priamky $p \equiv \rho \cdot \pi$ - lebo priamka s sa v tomto prípade premietne do jediného bodu s_1 priamky p .

Keď rovina ρ nie je kolmá na priemetňu π , je jej pravouhlým priemetom celá rovina π .

Keď v rovine ρ , ktorá nie je kolmá na priemetňu, zvolíme ľubovoľnú priamku q , vzniknú opačné polroviny qK, qL (K, L sú ľubovoľné body roviny ρ oddelené priamkou q) a ich pravouhlými priemetmi sú opačné polroviny q_1K_1, q_1L_1 .

Teraz môžeme prikročiť k úvahám o priemete uhla.



Obr. 1

Nech rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle AVB$ je kolmá na priemetňu π . Vedme vrcholom V priamku $s \perp \pi$, ktorá rozdelí rovinu ρ na dve opačné polroviny. Potom môžu nastať len tieto dva prípady: a) body A, B ležia oba v tej istej polrovine (a to oba vnútri polroviny alebo jeden z nich na hranici s), b) body A, B ležia vnútri opačných polrovín.

V prípade a) je pravouhlým priemetom uhla $\sphericalangle AVB$ polpriamka, v prípade b) celá priamka.

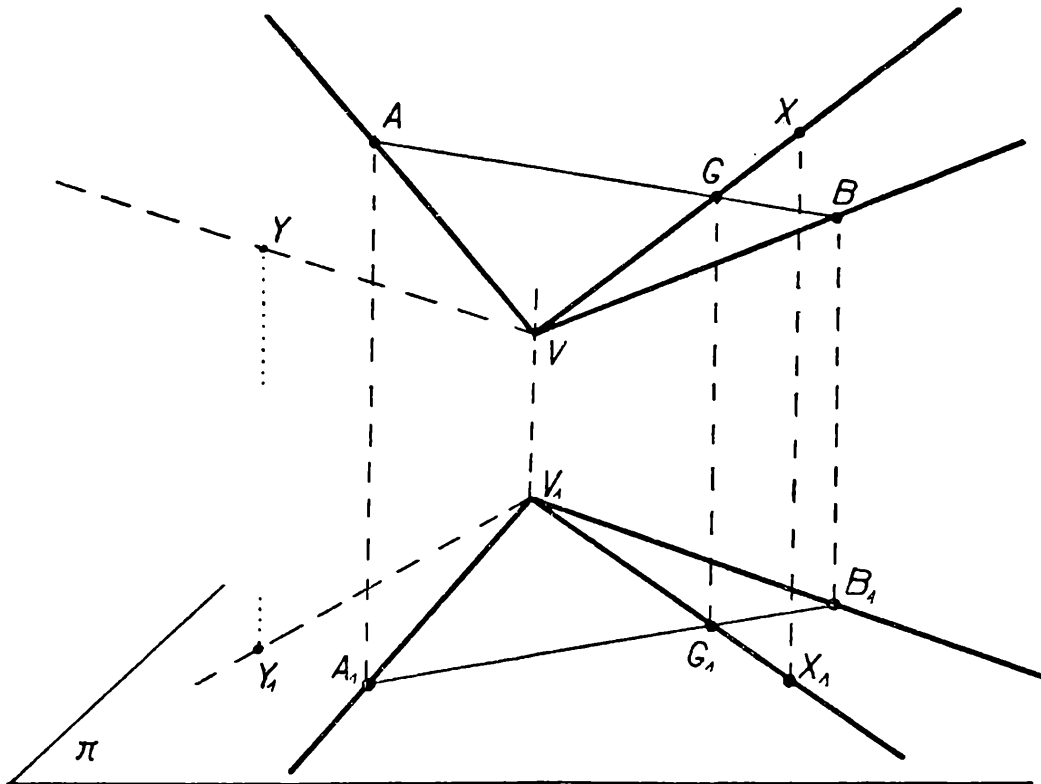
Keď rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle AVB$ nie je kolmá na priemetňu, platí o jeho pravouhlom priemete dôležitá veta.

Veta I. Pravouhlým priemetom dutého uhla $\sphericalangle AVB$, ktorého rovina nie je kolmá na priemetňu, je zase dutý uhol $\sphericalangle AV_1B_1$.

Dôkaz: Nech je daný dutý uhol $\sphericalangle AVB$ v rovine ρ , ktorá nie je kolmá na priemetňu. Potom pravouhlým priemetom trojuholníka ABV je trojuholník $A_1B_1V_1$ a jeho uhol $\sphericalangle A_1V_1B_1$, ktorý je vždy dutý, je totožný s priemetom

$\sphericalangle A_1V_1B_1$ uhla $\sphericalangle AVB$. Toto tvrdenie odôvodníme takto: (Obr. 2). Každý bod $X \neq V$ uhla $\sphericalangle AVB$ leží vnútri polpriamky VG , ktorá má s úsečkou AB spoločný bod G . Polpriamka VG sa premietne do polpriamky V_1G_1 a bod X do jej vnútorného bodu X_1 . Pretože bod G_1 je bodom úsečky A_1B_1 , náleží polpriamka V_1G_1 celá uhlu $\sphericalangle A_1V_1B_1$ a teda aj bod X_1 . Každý bod X uhla $\sphericalangle AVB$ sa zobrazí do bodu X_1 uhla $\sphericalangle A_1V_1B_1$. Naopak každý vonkajší bod Y uhla $\sphericalangle AVB$ sa zobrazí do vonkajšieho bodu Y_1 uhla $\sphericalangle A_1V_1B_1$, lebo polpriamka VY nemá spoločného bodu s úsečkou AB a teda ani jej priemet V_1Y_1 nemôže mať spoločného bodu s úsečkou A_1B_1 . Je teda skutočne pravouhlý priemet uhla $\sphericalangle AVB$ totožný s vnútorným uhlom $\sphericalangle A_1V_1B_1$ trojuholníka A_1BV_1 , a je vždy dutý.

Ako samozrejmé z názoru vyplývajúce uvedieme bez dôkazu ďalšie tri vety.



Obr. 2

Veta II. Pravouhlým prietomom dvoch vrcholových uhlov, ktorých rovina nie je kolmá na priemetňu, je zase dvojica vrcholových uhlov.

Veta III. Pravouhlým prietomom dvoch vedľajších uhlov, ktorých rovina nie je kolmá na priemetňu, je zase dvojica vedľajších uhlov.

Veta IV. Pravouhlým prietomom dvoch styčných uhlov, ktorých rovina nie je kolmá na priemetňu, je zase dvojica styčných uhlov.

Teraz obrátíme pozornosť na skúmanie vzťahu medzi veľkosťou dutého uhla a veľkosťou jeho pravouhlého priemetu.

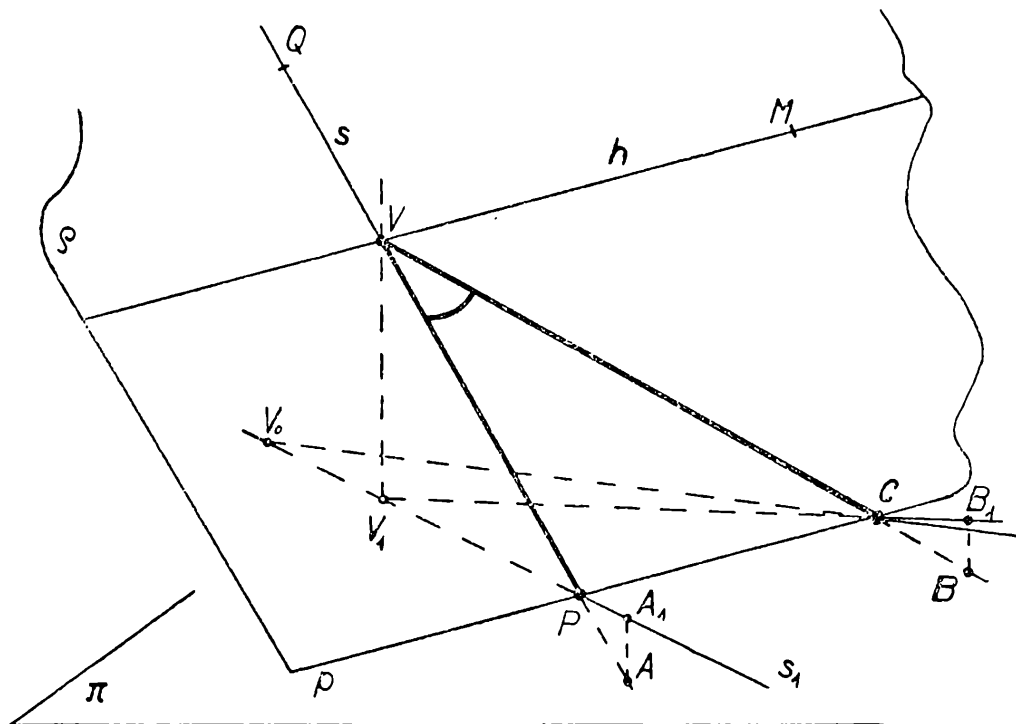
Najprv preberieme prípad, kedy rovina uhla je rovnobežná s priemetňou. O ňom hovorí

veta V. Pravouhlým prietomom dutého uhla $\sphericalangle AVB$, ktorého rovina je rovnobežná s priemetňou (a ktorého obe ramená sú teda tiež rovnobežné s priemetňou), je uhol $\sphericalangle A_1V_1B_1$ vždy zhodný s uhlom $\sphericalangle AVB$.

D ô k a z : Nech obe ramená VA, VB dutého uhla $\sphericalangle AVB$ sú rovnobežné s priemetňou π . Potom $\triangle ABV$ má všetky strany rovnobežné s priemetňou a zobrazí sa teda do $\triangle A_1B_1V \cong \triangle ABV$ (sss). Zo zhodnosti trojuholníkov vyplýva zhodnosť ich uhlov a preto $\sphericalangle A_1V_1B_1 = \sphericalangle AVB$. Avšak uhol $\sphericalangle AVB$ trojuholníka ABV je totožný s daným uhlom a práve tak uhol $\sphericalangle A_1V_1B_1$ trojuholníka ABV je totožný s priemetom daného uhla. Skutočne teda daný uhol a jeho pravouhlý priemet sú zhodné uhly.

Keď rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle AVB$ nie je na priemetňu ani kolmá, ani s ňou rovnobežná, platí medzi uhlom $\sphericalangle AVB$ a jeho pravouhlým priemetom $\sphericalangle A_1V_1B_1$ práve jeden zo vzťahov

$$\sphericalangle A_1V_1B_1 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \sphericalangle AVB$$



Obr. 3

Našou úlohou bude zistiť, kedy ktorý prípad nastane. Aby sme si túto úlohu uľahčili, rozdelíme naše úvahy na tri časti tak, že budeme najprv uvažovať o pravouhlom priemete ostrého uhla, potom o priemete pravého uhla a nakoniec o priemete tupého uhla.

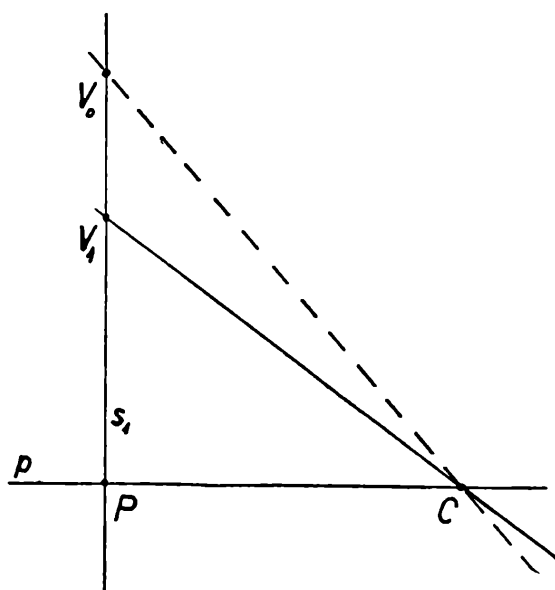
A. Pravouhlý priemet ostrého uhla.

O pravouhlom priemete ostrého uhla platia vety VI, VII, VIII.

Veta VI. Keď rovina ρ ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ nie je na priemetňu π ani kolmá, ani s ňou rovnobežná a spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom V buď splýva s ramenom uhla, alebo uhol rozdeľuje, potom uhol $\sphericalangle AVB$ je vždy menší než jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1V_1B_1$.

D ô k a z : 1. Nech rameno VA ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ splýva s polpriamkou VP a rameno VB nech pretína priamku $p \equiv \varrho \cdot \pi$ v bode C ($P \equiv s \cdot p$) (obr. 3). Zostrojíme priemet V_1 vrcholu V a uhol $\sphericalangle PV_1C \equiv \sphericalangle A_1V_1B_1$. Premietacia rovina σ priamky s obsahuje priamku $s \perp p$ a priamku $VV_1 \perp p$, je teda $\sigma \perp p$ a priesečnica $\sigma \cdot \pi \equiv s_1 \perp p$. Na polpriamke PV_1 zostrojíme bod V_0 tak, aby $PV_0 = PV$. Pretože $PV > PV_1$, sú na priamke $s_1 \equiv PV_1$ body v poradí PV_1V_0 . Keď zostrojíme ešte polpriamku V_0C , máme na rovine π situáciu znázornenú na obr. 4. Pretože bod V_1 je medzi bodmi P, V_0 , je v trojuholníku V_1V_0C uhol $\sphericalangle PV_1C$ uhlom vonkajším a uhol $\sphericalangle PV_0C \equiv \sphericalangle V_1V_0C$ protiľahlým vnútorným uhlom a preto $\sphericalangle PV_1C > \sphericalangle PV_0C$.

Avšak $\triangle CPV \cong \triangle CPV$ (sus) a z toho vyplýva, že $\sphericalangle PV_0C = \sphericalangle PVC \equiv \sphericalangle AVB$. Je teda skutočne $\sphericalangle A_1V_1B_1 > \sphericalangle AVB$.



Obr. 4

Je zřejmé, že by sa na veci v podstate nič nezmenilo, keby rameno VA ostalo na svojom mieste, ale uhol $\sphericalangle AVB$ se premiestil do polroviny opačnej k polrovine sC . A nezmenilo by sa na veci nič podstatného ani vtedy, keby jedno rameno uhla $\sphericalangle AVB$ splýnulo s polpriamkou PQ opačnou k polpriamke VP . V tomto prípade by sme mohli na základe vety II skúmať miesto priemetu daného uhla priemet uhla k danému uhlu vrcholového a prejsť tak na situáciu, pre ktorú sme dôkaz práve vykonali.

2. Nech polpriamka $VP \perp p$ rozdelí ostrý uhol $\sphericalangle AVB$ na dva uhly $\sphericalangle AVP$, $\sphericalangle BVP$, takže $\sphericalangle AVP + \sphericalangle BVP = \sphericalangle AVB$. O ich pravouhlých priemetoch $\sphericalangle A_1V_1P$, $\sphericalangle B_1V_1P$ ($P \equiv P_1$) platí na základe dôkazu v predchádzajúcom odstavci vykonaného

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1V_1P &> \sphericalangle AVP \\ \sphericalangle B_1V_1P &> \sphericalangle BVP \end{aligned} \tag{1}$$

a podľa vety IV $\sphericalangle A_1V_1P + \sphericalangle B_1V_1P = \sphericalangle A_1V_1B_1$.

Sčítaním nerovností (1) dostaneme

$$\sphericalangle A_1V_1P + \sphericalangle B_1V_1P > \sphericalangle AVP + \sphericalangle BVP,$$

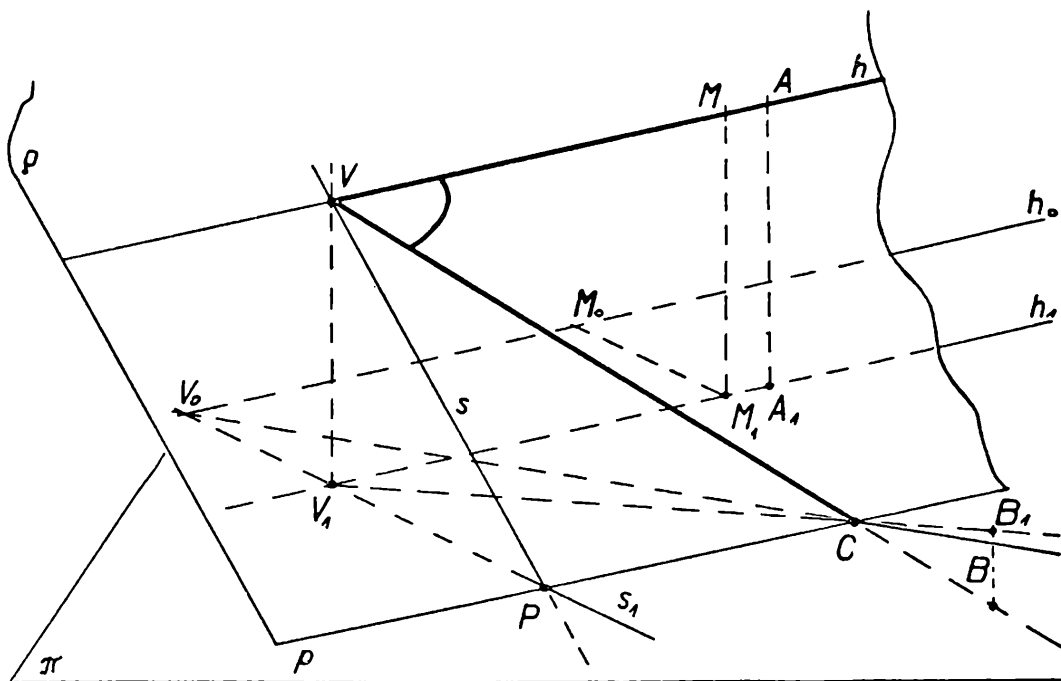
čiže

$$\sphericalangle A_1V_1B_1 > \sphericalangle AVB.$$

Je evidentné, že by sa na dôkaze v podstate nič nezmenilo, keby namiesto polpriamky VP rozdeľovala uhol $\sphericalangle AVB$ polpriamka VQ opačná k polpriamke VP .

Tým je skončený dôkaz vety VI.

Veta VII. Keď rovina ρ ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ nie je na priemetňu π ani kolmá, ani s ňou rovnobežná a hlavná priamka h roviny ρ vedená vrcholom V buď splýva s ramenom uhla, alebo uhol rozdeľuje, potom uhol $\sphericalangle AVB$ je vždy väčší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1V_1B_1$.

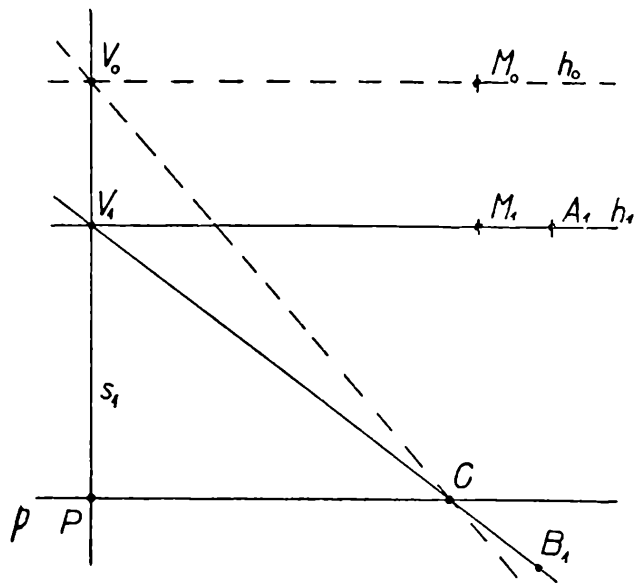


Obr. 5

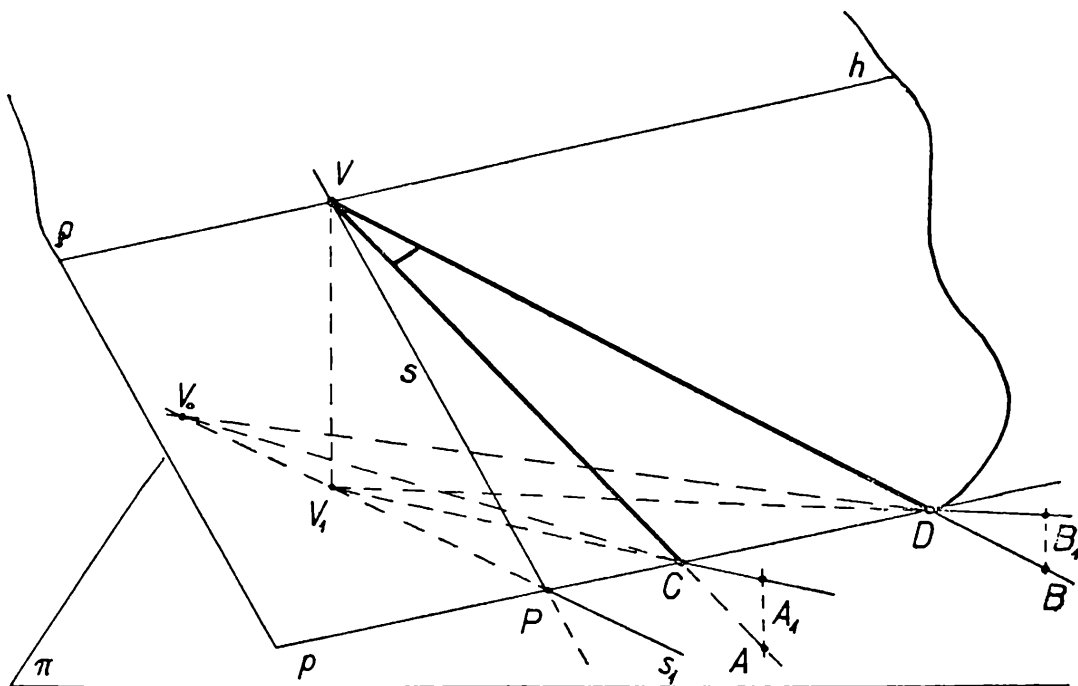
Dôkaz: 1. Nech rameno VA ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ splýva s polpriamkou $VM \parallel p \equiv \rho \cdot \pi$ a rameno VB nech pretína priamku p v bode C (obr. 5). Bodom V vedme priamku $s \perp p$ a jej päťu označme P . Bodom P zostrojme priamku $s \perp p$ (viď 1. časť dôkazu vety VI, v ďalšom stručne VI/1) a na nej priemet V_1 vrcholu V . Ďalej zostrojme bodom V priamku $h \parallel p$, na nej body A_1, M_1 a polpriamku $V_1C \equiv V_1B_1$. Tým sme dostali priemet $\sphericalangle A_1V_1B_1$ uhla $\sphericalangle AVB$. Na polpriamke PV_1 zostrojme ešte bod V_0 tak, aby $PV_0 = PV$ a vedme bodom V_0 priamku $h_1 \parallel p$ a polpriamku V_0C . Na priamke h_1 zvolme ľubovoľný bod M_0 vnútri polroviny s_1M_1 .

Na rovine π máme potom situáciu znázornenú na obr. 6. Z planimetrie je známe, že $\sphericalangle M_1V_1C \equiv \sphericalangle A_1V_1B_1 = \sphericalangle V_1CP$ a $\sphericalangle M_0V_0C = \sphericalangle V_0CP$ (uhly striedavé). Pretože bod V_1 je vnútorným bodom uhla $\sphericalangle V_0CP$, lebo je vnútorným bodom úsečky PV_0 (viď VI/1), je v každom prípade $\sphericalangle V_1CP < \sphericalangle V_0CP$.

Avšak $\sphericalangle MVC \equiv \sphericalangle AVB = \sphericalangle VCP$ (obr. 7, uhly striedavé) a $\sphericalangle VCP = \sphericalangle V_0CP$, čo vyplýva zo zhodnosti $\triangle CPV \cong \triangle CPV_0$ (sus).
 Je teda skutočne $\sphericalangle A_1V_1B_1 < \sphericalangle AVB$.



Obr. 6



Obr. 7

Je zrejmé, že by sa na veci v podstate nič nezmenilo, keby jedno rameno uhla $\sphericalangle AVB$ splynulo s polpriamkou VN opačnou k polpriamke VM a druhé rameno (a teda aj celý uhol) ostalo v polrovine hP . A nezmenilo by sa nič podstatného na veci ani vtedy, keby jedno rameno uhla $\sphericalangle AVB$ ostalo na priamke $h \parallel p$, ale druhé rameno a teda celý uhol sa premiestil do polroviny hQ opačnej k polrovine hP . V tomto prípade by sme mohli na základe vety II uvažovať o priemete uhla

k danému uhlu vrcholového a prejsť na situáciu, pre ktorú sme dôkaz práve vykonali.

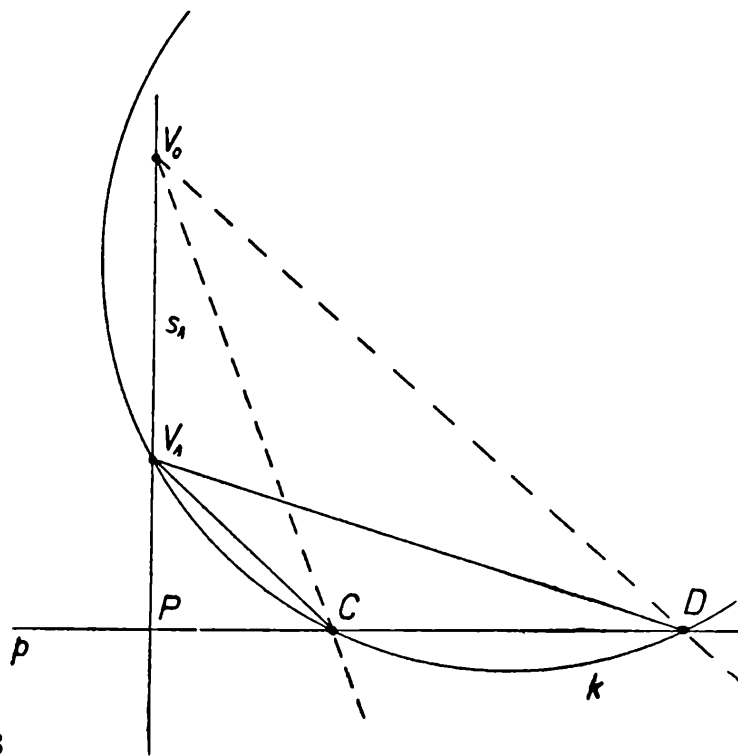
2. Druhá časť dôkazu, v ktorej by sme mali dokázať, že veta VII platí i v tom prípade, že hlavná priamka h uhol $\sphericalangle AVB$ rozdeľuje, prebieha veľmi podobne ako druhá časť dôkazu vety VI a preto ju ponechávame čitateľovi.

Zbýva preskúmať pravouhlý priemet takého ostrého uhla, ktorého rameno nesplýva ani s hlavnou priamkou h , ani so spádovou priamkou s a ktorý ani jedna z týchto priamok nerozdeľuje.

O veľkosti pravouhlého priemetu takého uhla hovorí

veta VIII. Keď rovina ρ ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ nie je na priemetňu π kolmá ani s ňou rovnobežná a keď hlavná priamka h , ani spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom V uhol $\sphericalangle AVB$ nerozdeľuje, ani nesplýva s niektorým jeho ramenom, potom je uhol $\sphericalangle AVB$ buď väčší, rovnako veľký alebo menší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1V_1B_1$.

V dôkaze, ktorý nasleduje, odvodíme, kedy ktorý prípad nastane.



Obr. 8

D ô k a z : Nech ramená VA , VB ostrého uhla $\sphericalangle AVB$ pretínajú priamku $p \equiv \rho \cdot \pi$ v bodoch $C \equiv p \cdot VA$, $D \equiv p \cdot VB$, ktoré nie sú oddelené bodom $P \equiv s \cdot p$ (obr. 7).

Zostrojíme priemet V_1 bodu V a polpriamky $V_1C \equiv V_1A_1$, $V_1D \equiv V_1B_1$ ($C \equiv C_1$, $D \equiv D_1$), čím dostaneme priemet $\sphericalangle A_1V_1B_1$ uhla $\sphericalangle AVB$. Potom zostrojíme na polpriamke PV_1 bod V_0 tak, aby $PV_0 = PV$ a vedieme polpriamky V_0C , V_0D . Pretože $\triangle CPV_0 \cong \triangle CPV$ (sus) a $\triangle DPV_0 \cong \triangle DPV$ (sus), je $CV_0 = CV$ a $DV_0 = DV$. Tieto zhodné úsečky sú stranami trojuholníkov CDV , CDV_0 , ktoré majú stranu CD spoločnú. Preto je $\triangle CDV_0 \cong \triangle CDV$ (sss) a z toho vyplýva, že $\sphericalangle CV_0D = \sphericalangle CVD \equiv \sphericalangle AVB$. V dôsledku toho môžeme namiesto vzťahu medzi uhlami $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A_1V_1B_1$ skúmať vzťah medzi uhlami $\sphericalangle CV_1D \equiv \sphericalangle A_1V_1B_1$ a $\sphericalangle CV_0D = \sphericalangle AVB$, ktoré oba ležia v rovine π .

Aby sme tento vzťah preskúmali, opíšme trojuholníku $\overline{CDV_1}$ kružnicu k (obr. 8). Z planimetrie je známe, že a) všetky uhly $\sphericalangle CXD$ sú zhodné s uhlom $\sphericalangle CV_1D$, keď ich vrcholy X ležia vnútri oblúka $\overline{CV_1D}$ kružnice k , res p. vnútri oblúka $\overline{CV_1D}$ súmerne združeného s oblúkom $\overline{CV_1D}$ podľa priamky CD ; b) každý uhol $\sphericalangle CYD > \sphericalangle CXD$, keď jeho vrchol Y je vnútorným bodom útvaru ohraničeného oblúkmi $\overline{CV_1D}$ a $\overline{CV_1'D}$; c) každý uhol $\sphericalangle CZD < \sphericalangle CXD$, keď jeho vrchol Z je vonkajším bodom útvaru ohraničeného oblúkmi $\overline{CV_1D}$ a $\overline{CV_1'D}$.

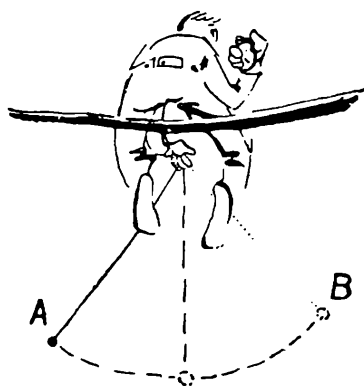
Pretože bod V_0 neoddeľuje body P, V_1 (viď VI/1), môže bod V_0 , keď kružnica k priamku s_1 pretína, padnúť dovnútra kružnice k , na kružnicu k , alebo zvonku kružnice k . Keď sa kružnica k dotýka priamky s_1 v bode V_1 , ostáva, pravda, len tretia možnosť. V každom inom prípade existujú tieto tri možnosti: 1. bod V_0 padne dovnútra kružnice k , potom je $\sphericalangle CV_0D > \sphericalangle CV_1D$; 2. bod V_0 padne na kružnicu k , potom je $\sphericalangle CV_0D = \sphericalangle CV_1D$; 3. bod V_0 padne zvonku kružnice k , potom je $\sphericalangle CV_0D < \sphericalangle CV_1D$.

Pretože $\sphericalangle CV_1D \equiv \sphericalangle A_1V_1B_1$ a $\sphericalangle CV_0D = \sphericalangle AVB$, ako bolo už prv dokázané, platí skutočne vždy jeden zo vzťahov $\sphericalangle AVB \cong A_1V_1B_1$ podľa toho, ktorý z prípadov označených 1., 2., 3. práve nastane.

Je zrejmé, že by sa na podstate veci nič nezmenilo, keby uhol $\sphericalangle AVB$ ležal v polrovine opačnej k polrovine sC a jeho ramená pretínali polpriamku opačnú k polpriamke PC . A práve tak by sa nezmenilo nič podstatného, keby uhol $\sphericalangle AVB$ ležal v polrovine opačnej k polrovine hP (h je hlavná priamka roviny ρ vedená vrcholom V) a jeho ramená priamku p nepretínali. V tomto prípade by sme mohli použiť vetu II a namiesto o priemete daného uhla uvažovať o priemete uhla k danému uhlu vrcholového. Dospeli by sme k tomu istému výsledku. (Vykonajte.)

Tým sú skončené úvahy o pravouhlom priemete ostrého uhla.

(Dokončení)



Fysika

E v ž e n Ě í m a n, Praha:

Elektrické okruhy

Elektrické deje sú pre moderného človeka zjavy vlastne už všedné a samozrejmé. Bez elektrického prúdu si nemožno predstaviť ani náš súkromný život, ani dnešnú techniku, ani vedu. Bez elektriny nemôže dnes pracovať lekár ani polárny cestovateľ, baník ani letec, námorník ani roľník, nehovoriac o rádiových, televíznych a podobných prístrojoch.

Zásadne však zasahuje význam elektriny oveľa hlbšie. Od Rutherfordovho objavu r. 1912 je ľudstvu jasné, že každá hmota je zložená z elektrických častíc a že medziatomárne sily sú silami elektrickými. Náuka o elektrine získala tak ústredné postavenie v našom svetonázore; ona a mechanika sa stali najdôležitejšími časťami fyziky. Bez ovládania základných poznatkov z náuky o elektrine nemožno porozumieť ani fyzike, ani chémii, ani žiadnej technickej vede.

Vyložme si preto a v mnohých číselných príkladoch precvičme základné vety týkajúce sa elektrického prúdu jednosmerného aj striedavého.

Pritom budeme používať len tie znalosti, ktoré čitatelia získali v ôsmom postupnom ročníku. Všetky potrebné vety a poznatky však znovu zopakujeme eventuálne odvodíme, aby aj žiaci 9. a 10. triedy mohli tieto state sledovať a si osvojiť.

Budeme postupovať metódou riešených príkladov. Tá má nahradiť, pokiaľ je to možné, živý výklad vyučujúceho. Čitateľovi radíme postupovať asi takto: Najprv treba prečítať obecnú stať s snažiť sa jej porozumieť. Príklady sa snažíme rozriešiť s a m i bez nazerania do uvedeného riešenia. Ak sa nepodarí toto vlastné riešenie - a tak to bude možno ve väčšine príkladov, veď každý začiatok je ťažký - prečítame si návod a znova se pokúšame príklad sami rozriešiť. V prípade nového nezdaru sledujeme presne udané riešenie do najmenších podrobností. Pritom sa vrele odporúča, aby čitateľ neskoršie, najlepšie na druhý deň, sa pokúsil rozriešiť príklad sám, bez pomoci. Hlavne tým, ktorí nemajú postačujúcu zručnosť v úprave rovníc, zlomkov, ani zbehlosť v numerickom počítaní, radíme vykonať postupne celé riešenie do najmenších podrobností. Len týmto spôsobom získa čitateľ z príkladov plný a najväčší užitek. Samotné jednorázové prečítanie nestačí.

Postup pri riešení príkladov:

a) Pomaly čítajme text príkladu a usilujme sa porozumieť, akou c e s t o u sa dostaneme od veličín daných k veličinám hľadaným.

b) Súčasne sa rozhodne, akými písmenami budeme z n a č i ť veličiny dané aj hľadané. Značky, ktoré sa užívajú v nasledujúcich kapitolách, sú také isté, aké sa užívajú na vysokých školách v ČSR. Tieto značky budú normalizované a sú to poväčšine tie isté, ktoré užívajú učebnice fyziky na osemročných aj jedenáctročných školách.

c) Hneď na začiatku treba si uvedomiť a zapísať použité zjednodušujúce p r e d p o k l a d y, ktoré sa potom majú znova vysloviť vo výslednej slovnej odpovedi. Tak napríklad v úvahách o brzdení vozidla sa spravidla predpokladá, že pohyb je rovnomerne spomalěný.

d) Vychádzajme vždy z veličín d a n ý c h, teda nie z hľadaných. Preto užívajme vzťahov, v ktorých sa vyskytujú dané veličiny, na vypočítavanie nových veličín, ktoré nie sú dané tak až prídeme k hľadanej veličine.

e) Aj keď je príklad daný so zvláštnymi číslami, rátajme najprv vždy a l g e b r a i c k y !

f) Ak máme daný problém rozriešený algebraicky, potom spravme tak zvanú d i m e n z i o n á l n u k o n t r o l u, t. j. presvedčme sa, či sú obidve strany vyjadrené v tých istých jednotkách, čiže majú ten istý rozmer čiže dimenziu. Prípadný nesúhlas v rozmeroch obidvoch strán je postačujúcim dôkazom, že riešenie je chybné.

g) Prv než prevedieme numerický výpočet, t. j. prv než dosadíme dané zvláštne čísla do všeobecného vzorca, sa majú všetky dané veličiny previesť do určitej jednotkovej sústavy. Teda všetky dĺžky, ktoré možno sú schválne dané v rozličných jednotkách, napr. [cm], [km], [mm], prevedme na jednu jednotku, napr. [m], všetky časové údaje na sekundy. Ak to neurobíme, bude práca ťažšia, lebo prideme k výsledkom, ktoré potom treba upravovať.

h) Dôrazne sa odporúča dosadzovať do všeobecného vzorca dané číselné hodnoty vždy aj s r o z m e r o m, t. j. fyzikálnou jednotkou. Tým si totižto stále znova a znova uvedomujeme a opakujeme, v ktorých jednotkách sa dotyčná veličina udáva a ako sa urobí prevod na základne jednotky („sila“ sa dosadí v jednotkách [N] = newton = [kg m s⁻²]) a súčasne sa tým robí žiadaná kontrola dimenzionálnej správnosti.

Každý výpočet skontrolujeme ešte približným odhadom, ktorým si overíme tak správnosť prvej číslice ako aj správnosť rádovej veľkosti výsledku.

1. Elektrónová teória atómu

Celá naša experimentami overená skúsenosť učí, že elektrický náboj je vždy viazaný na hmotu, čiže neexistuje samostatne, nezávisle od hmoty. Nositeľmi elektrických nábojov sú práve tie častice, z ktorých je atóm zbudovaný: z jadra nabitého kladne a obsahujúceho temer celú hmotu atómu a z elektrónového obalu, t. j. určitého počtu Z elektrónov, ktoré obiehajú po určitých dráhach nazývaných sféry okolo jadra. Číslo Z je takzvané atómové číslo, pre vodík je $Z = 1$, pre berkelium $Z = 97$. Častice, z ktorých je zložené jadro, sú jednak protóny, jednak neutróny.

Náboj elektrónu alebo protónu voláme elementárny náboj. To je najmenšie množstvo elektriny, ktoré sa v prírode vyskytuje. Všetky náboje pozorované na časticiach aj na makroskopických telesách sú celistvými násobkami tohto elementárneho náboja $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [As].

Jednotkou elektrického náboja, ktorú tiež môžeme nazývať elektrické množstvo a značíme písmenom q , je teda 1 a m p é r s e k u n d a, ktorú na počesť francúzskeho fyzika Coulomba voláme tiež 1 c o u l o m b.

1 [As] = ampérsekunda = coulomb = [C] = elektrické množstvo dopravené prúdom jedného ampéru v čase jednej sekundy, je to náboj približne šiestich triliónov elektrónov alebo protónov, presnejšie číslo je $6,28 \cdot 10^{18}$.

Odvodíme to ľahko zo vzťahu $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [As], z ktorého riešením dľa neznámej [As] plynie:

$$1 \text{ [As]} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} q_e = 6,28 \cdot 10^{18} q_e .$$

Atóm, ktorý má rovnaký počet protónov ako obiehajúcich elektrónov, je na vonok elektricky neutrálny. Akonáhle však atóm s t r a t í jeden, alebo viac svojich elektrónov, je nabitý k l a d n e, pretože kladných protónov v jeho jadre je viac ako obiehajúcich elektrónov, a volá sa kladný i ó n. Podobne atóm, ktorý

si priberie ešte jeden alebo viac elektrónov k svojim, má potom viac elektrónov ako protónov a je elektricky záporný a volá sa záporný ión).

2. Elektrický prúd

Kovy sú prvky, ktoré obsahujú vo valenčnej sfére 1, 2 alebo 3 elektróny, len veľmi slabo viazané k jadrú. Kovový vodič si teda môžeme predstaviť ako priestorovú mrežu alebo sieť, z pravidelne usporiadaných iontov, medzi ktorými sa voľne pohybujú valenčné elektróny, ktorými preto budeme hovoriť voľné elektróny. Toto voľné pohybovanie elektrónov v kovoch je práve príčinou, prečo všetky kovy sú dobrými vodičmi elektriny.

Podľa tzv. kinetickej teórie hmoty kmitajú tieto ionty kovu okolo svojej rovnovážnej polohy, podobne ako molekuly každej látky v pevnom skupenstve. Medzi nimi sa priamočiare a neusporiadane pohybujú voľné elektróny, pokiaľ pravda nenastane zrážka voľného elektrónu s iontami. Tento pohyb elektrónov je zatiaľ neusporiadaný t. j. deje sa všetkými smermi, podobne ako napr. pohyb molekúl vzduchu v miestnosti.

Pripojme teraz k obidvom koncom kovového vodiča tzv. zdroj prúdu (napr. galvanický článok, akumulátor, indukčnú elektriku a pod.), čím sa rozumie zariadenie, ktoré premieňa niektorý druh energie v energiu elektrickú. Tento zdroj má na jednom svojom konci (zvanom záporný pól) nadbytok voľných elektrónov, na druhom konci (kladný pól) vzniká nedostatok elektrónov. Pretože elektróny sa vzájomne odpudzujú, tvorí sa tým tzv. elektrické napätie U , ktoré uvedie všetky voľné elektróny v drôte do pohybu²⁾ v určitom smere: vznikne elektrický prúd.

Tento jednosmerný pohyb voľných elektrónov, ktorému stručne hovoríme elektrický prúd, je síce zrychlený, podobne ako pohyb telies padajúcich v gravitačnom poli zemskom, ale prerušovaný, pretože „padajúce“ elektróny ustavične narážajú na iontovú sieť kovu a týmto zrážkami odovzdávajú časť svojej kinetickej energie kmitajúcim iontom. Zväčšená kinetická energia iontov znamená však, že vodič sa zohrieva. Energia dodaná zo zdroja mení sa teda v energiu tepelnú, čo vyjadruje tzv. Joule - Lencov zákon.

¹⁾ Slovo ión značí v gréčtine idúci. Ak se takýto ión dostane medzi dve dosky, z ktorých jedna je nabitá kladne a druhá záporne, t. j. ak sa dostane do tzv. elektrického poľa, začne sa pohybovať (ísť). S týmto pohybom iontov sa stretávame pri zjave zv. elektrolýza.

²⁾ Konajú teda voľné elektróny vlastne dvojaký pohyb: jednak neusporiadaný, stále trvajúci, v ktoromkoľvek kuse kovu a jednak usmernený (smer od mínus pólu zdroja k plus pólu), ktorý trvá len za ten čas, pokiaľ je kov zapojený k elektrickému zdroju.

Podobne napr. molekuly vzduchu v miestnosti, kde medzi otvoreným oknom a dvermi je prievan, konajú okrem neusporiadaného stále trvajúceho pohybu, pri ktorom každá molekula letí iným smerom, aj druhý pohyb, keď prievan unáša všetky molekuly určitým smerom.

Pre zapamätanie rozličných pojmov týkajúcich sa elektrického prúdu je veľmi výhodné *p r i r o v n a n i e*³⁾ s vodným prúdom, ktoré v ďalšom použijeme.

3. Analógie medzi prúdom vodným a elektrickým

Ak spojíme

dve nádoby s rôzne vysokými hladinami čiže s nejakým výškovým rozdielom h metrov trubicou, vtedy výšky hladín	dva vodiče rozličného potenciálu čiže s určitým napätím U voltov drôtom, vtedy potenciály
---	---

sa vyrovnajú. Vznikol pochod

molekúl H_2O

elektrónov

zvaný

vodný prúd.

elektrický prúd.

Množstvo prešlých

molekúl H_2O

elektrónov

meriame v praxi jednotkami väčšími, ako sú

1 liter vody = $3,4 \cdot 10^{23}$ molekúl H_2O . 1 coulomb = 1 ampérsekunda =
= $6,25 \cdot 10^{-3}$ elektrónov.

Trvanie pokusu a prúdu bolo veľmi krátke.

Aby prúd trval dlhšie, treba udržiavať

výškový rozdiel h (alebo tlak) na pr. pumpou alebo pripojením k potrubiu vodárne.	rozdiel potenciálov U (čiže napätie) napr. indukčnou elektrickou alebo pripojením k sieti elektrárne.
---	---

Prístroj, ktorý ukáže

výškový rozdiel alebo pretlak resp. hydrostatický tlak v atmosférach	rozdiel potenciálový čiže napätie vo voltoch
--	--

sa volá

manometer.

voltmeter.

³⁾ Treba však dôrazne pripomenúť, že žiadne prirovnanie (analógia) nikdy nemôže nahraďovať dôkaz. Dôkaz sa vo fyzike podáva iba presne urobeným pokusom, alebo odvodením z všeobecne platných fyzikálnych zákonov. Analógiou nemožno nič dokazovať. Mylné zneužitie analógií vedie k hrubým nepravdám.

Intenzita prúdu,⁴⁾ stručne „prúd“ je daná

množstvom vody, ktoré pretečie v určitom mieste za 1 sekundu, t. j.

$$I = \frac{\text{množstvo vody}}{\text{čas}} = \frac{Q}{t}.$$

Vodný prúd sa meria na „sekundové litre“, t. j.

$$\left[\frac{\text{liter}}{\text{sek}} \right] = [\text{liter s}^{-1}].$$

množstvom elektriny čiže elektrickým nábojom, ktoré pretečie v určitom mieste za 1 sekundu, t. j.

$$I = \frac{\text{elektrický náboj}}{\text{čas}} = \frac{q}{t}.$$

Elektrický prúd sa meria na „sekundové coulomby“, t. j.

$$\left[\frac{\text{coulomb}}{\text{sek}} \right] = \left[\frac{\text{C}}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{As}}{\text{s}} \right] = [\text{A}] = \text{ampér}.$$

Platí teda táto definícia:

1 sekundový liter = intenzita vodného prúdu, ktorý dáva za 1 sekundu vodné množstvo jedného litra (t. j. $3,4 \cdot 10^2$ molekúl H_2O).

1 [A] = 1 ampér = $\left[\frac{\text{coulomb}}{\text{sek}} \right] =$
= intenzita elektrického prúdu, ktorý dáva za 1 sekundu elektrické množstvo jedného coulombu = 1 [As] (t. j. $6,25 \cdot 10^{18}$ elektrónov).

4. Elektrické napätie. Práca a výkon prúdu

Elektrické napätie U sa meria na volty; definuje sa pomocou práce, ktorú elektrický prúd vykoná prenesením el. množstva (náboja) q .

Tento nesnadný pojem si vysvetlíme prirovnaním s vodným prúdom: Predstavme si, že v svislom potrubí za vodnou priehradou klesne 1 liter vody o 1 meter nižšie. Koľko práce sa tým vykoná?

Ako vieme, váha 1 litra vody sa rovná jednomu váhovému kilogramu čiže kilopondu. (Značka je $[\text{kg}^x] = [\text{kp}]$.) Ak klesne akékoľvek teleso váhy 1 [kp] o výškový rozdiel 1 [m], vykoná tým prácu

$$1 [\text{kp}] \cdot 1 [\text{m}] = 1 [\text{kpm}] = \text{kilopondmeter} = [\text{kg m}] = 9,81 [\text{J}].$$

Definujme teraz nazpäť pomocou tohoto príkladu, čo to je 1 meter. Hľadaná definícia, ktorá se zdá podivnou a zbytočnou, ale v ďalšom je prospešná, znie:

⁴⁾ Česká učebnice „Fysika pro osmý postupný ročník (Hlavička - Vlček - Voráček)“ uvádí. „Elektrický proud je pohyb elektronů s místa, kde je jich nadbytek (= záporný pól) směrem k místu, kde je jich nedostatek (= kladný pól). Jde tedy tok elektronů od záporného pólu ke kladnému.“

V technice je dosud zvykem značit směr el. proudu od kladného pólu k zápornému. Toto označení vzniklo v dobách, kdy nebylo ještě dost znalostí o elektrině.“

Na str. 43 uvádí táž učebnice tento výklad el. napětí: „Aby vznikl vodní proud, musí být tlak vody s jedné strany potrubí větší než s druhé. Přesvědčíme se o tom, spojíme-li trubici dvě nádoby, v nichž je hladina vody nestejně vysoko. Voda teče vždy z nádoby s hladinou výše položenou, neboť větší výška vody tvoří ve spojovací trubici větší tlak.“

1 meter = výškový rozdiel, ktorého prebehnutím vykoná teleso o váhe 1 kilopondu prácu 1 kilopondmetra čiže 9,81 joulov; písané značkami to znie:

$$1 \text{ [m]} = \frac{1 \text{ [kpm]}}{1 \text{ [kp]}}.$$

Obdobná je definícia voltu:

1 volt = el. napätie, ktorého prebehnutím vykoná 1 [As] elektriny prácu 1 joulu; písané značkami to znie:

$$1 \text{ [V]} = \frac{1 \text{ [J]}}{1 \text{ [As]}}.$$

Ak odstránime z tejto rovnice zlomky, dostaneme dôležitý vzťah

$$1 \text{ joule} = \text{volt ampérsekunda}; \text{ značkami } [\text{J}] = [\text{V A s}]$$

zobecnime tento prípad: Ak prebehne

teleso váhy G
(v gravitačnom poli)
cez výškový rozdiel
(= spád) h ,

el. náboj $q = I t$
(v elektrickom poli)
cez potenciálový rozdiel
(= napätie) U ,

vykoná tým prácu

$$A = h G,$$

$$A = U q = U I t,$$

slovami

práca sa rovná súčinu výškového rozdielu a váhy.

práca sa rovná súčinu napätia a náboja čiže súčinu napätia, prúdu a času.

Vzorec

$$A = U I t$$

pre prácu vykonanú elektrickým prúdom je veľmi dôležitý.

Výkon elektrického prúdu určíme teraz ľahko: Výkon P je pomer práce A a času t potrebného k jej vykonaniu, teda

$$P = \frac{\text{práca}}{\text{čas}} = \frac{A}{t} = \frac{U I t}{t} = U I,$$

slovami:

$$\text{Výkon prúdu} = \text{napätie krát prúd.}^5)$$

Jednotkou výkonu v elektrotechnike je vždy len *w a t t*, takže bude

$$1 \text{ w a t t} = 1 \text{ [W]} = \frac{\text{joule}}{\text{sek}} = \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = [\text{J s}^{-1}] = \text{volt ampér} = [\text{V A}].$$

⁵⁾ Fysika pro osmý postupný ročník uvádí na str. 54 vzorec $P = U I$ a rovněž vztah $[\text{V}] \cdot [\text{A}] = [\text{W}]$.

Treba si teda dobre zapamätať nasledujúce dva vzťahy slovne aj značkami:
 1 joule = wattsekunda = newtonmeter = voltampérsekunda,

$$[J] = [Ws] = [Nm] = [VA s],$$

$$1 \text{ watt} = \frac{\text{joule}}{\text{sek}} = \frac{\text{newtonmeter}}{\text{sek}} = \text{voltampér}$$

$$1 [W] = \left[\frac{J}{s} \right] = \left[\frac{Nm}{s} \right] = [VA].$$

Príklad 1. Prúd 4 [A] o napätí 100 [V] tečie 1 minútu. Koľko práce vykoná? Aký je jeho výkon? Aká veľká sila by pôsobila, ak vykonaná práca posunula teleso po dráhe 50 [m] a straty boli zanedbateľné?

Riešenie: Dané veličiny sú $I = 4 [A]$, $U = 100 [V]$, $t = 60 [s]$, dráha $s = 50 [m]$.

Potrebné vzťahy: $P = UI$; $A = UIt = Pt$;
 práca = sila krát dráha čiže $A = F \cdot s$.

Výsledky: Výkon = $P = UI = 100 [V] \cdot 4 [A] = 400 [VA] = 400 [W] = 400 \left[\frac{J}{s} \right]$.

Práca = $A = UIt = Pt = 100 [V] \cdot 4 [A] \cdot 60 [s] = 24\,000 [VAs] = 24\,000 [J]$.

Sila = $F = \frac{\text{práca}}{\text{dráha}} = \frac{A}{s} = \frac{24\,000 [J]}{50 [m]} = 480 \left[\frac{J}{m} \right] = 480 [N]$, lebo $[J] = [Nm]$.

5. Ohmov zákon

Aby drôtom, ktorého odpor je 1 ohm, prechádzal prúd o intenzite 2 ampérov, musí napätie U byť dvakrát väčšie než pri prúde 1 [A]. Obrátene: Ak má prúd ustavične intenzitu $I = 1 [A]$ a vodič má odpor 2Ω alebo 3Ω , musí byť napätie v prvom prípade 2 [V], v poslednom 3 [V]. Slovami povedané: Napätie potrebné pre priechod prúdu je tým väčšie, čím väčší je odpor R a čím väčšia je intenzita prúdu I .

K tomu istému výsledku vedie aj pokus: Ak meriame intenzitu prúdu I pri rozličných napätiach U alebo pri rozličných odporoch R vodiča, poznáme, že napätie U na koncoch kovového vodiča (pri konštantnej teplote) a prechádzajúci prúd I sú veličiny navzájom úmerné.

Koeficientom úmernosti je odpor R . Vzorec

$$U = RI$$

vyjadruje t. zv. Ohmov zákon, ktorý je najdôležitejším zákonom praktickej elektrotechniky.

Ak dosadíme do OZ⁶⁾ miesto jednotlivých veličín jejich jednotky, dostaneme

⁶⁾ OZ čítaj „Ohmov zákon“, podobne v budúcnu KZ I čítaj „Kirchhoffov zákon prvý“; KZ II = „Kirchhoffov zákon druhý“.

vzťah volt = ohm . ampér, t. j. $[V] = [\Omega A]$,

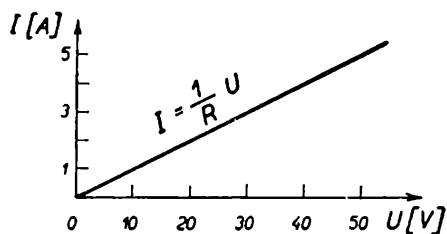
z čoho ohm = $\frac{\text{volt}}{\text{ampér}}$, t. j. $1 [\Omega] = \left[\frac{V}{A} \right]$,

alebo ampér = $\frac{\text{volt}}{\text{ohm}}$, t. j. $1 [A] = \left[\frac{V}{\Omega} \right]$,

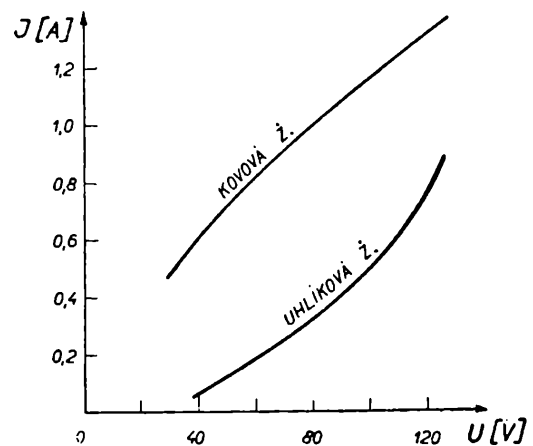
vzťahy, ktoré radno si dobre zapamätať.

Môžeme teda definovať odpor R vodiča tiež dľa OZ ako podiel napätia a prúdu, t. j.

$$R = \frac{\text{napätie } U \text{ medzi oboma koncami prúdovodiča}}{\text{prúd } I \text{ idúci prúdovodičom}} .$$



Obr. 1. Grafické znázornenie Ohmovho zákona.



Obr. 2. Charakteristika kovovej a uhlíkovej žiarovky.

Ak vyjadríme Ohmov zákon graficky, t. j. ak graficky znázorníme (obr. 1) závislosť prúdu I na napätí U (matematicky povedané $I = f(U)$ v súradniciach U a I , obdržíme samozrejme priamku, pretože prúd I vyjadrený z OZ je daný vzťahom $I = \frac{1}{R} U$, ktorý odpovedá matematickému vyjadreniu $y = kx$. Je teda

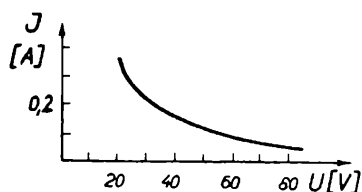
smernicou tejto priamky výraz $\frac{1}{R}$ čiže prevrátená hodnota odporu (ináč zvaná „vodivosť“).

P o z n á m k y : 1) Odpor R má teda rozmer $\left[\frac{V}{A} \right]$ čiže $[\Omega] = \text{ohm}$.

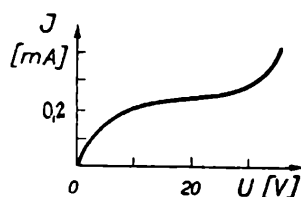
2) Treba si uvedomiť, že odpor R , t. j. pomer $R = \frac{U}{I}$ hociktorého vodiča je konštantný len vo zvláštnych prípadoch, napr. odpor kovových vodičov je konštantný iba vtedy, ak se teplota nemení.

Ale odpor žiaroviek, elektromotorov, elektróniek atď. spravidla není konštantný. Potom nemožno vyjadrovať vzťah medzi I a U pomocou Ohmovho zákona, ale je rozumnejšie užiť grafického znázornenia krivkou, ktorá sa nazýva charakteristika.

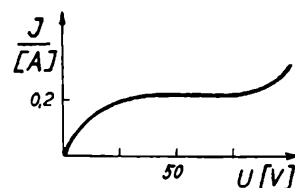
Obr. 2 znázorňuje charakteristiku žiarovky (s vláknom uhlíkovým a kovovým), z ktorej je patrné, že odpor vlákna kovového s rastúcim napätím (teda tiež s rastúcou teplotou) rastie, odpor uhlíkového vlákna klesá.



Obr. 3. Charakteristika oblúčovej lampy.



Obr. 4. Charakteristika fotonky plnenej plynom.



Obr. 5. Charakteristika železného vlákna („stabilizátor prúdu“).

Charakteristika oblúčovej lampy, ktorá je znázornená na obr. 3, ukazuje, že s rastúcim napätím U sa prúd I znižuje. Táto „klesajúca charakteristika“ zapríčiňuje, že oblúk nemôže horieť stabilne, ak nepredstavíme (do série) vhodný kovový odpor. Lebo keby náhodou napätie U zdroja sa zmenšilo, potom by prúd I vzrástol a rástol by ustavične, až by nastal skrat (ktorému teda predstavený odpor zabráni).

Obr. 4 znázorňuje charakteristiku fotonky plnenej plynom a obr. 5 charakteristiku železného vlákna v baňke, ktorá je plnená vodíkom a tvorí tzv. stabilizátor prúdu.



Co vidíme na nebi

Dr. Josip Kleczek, Ondřejov:

Jasnost, barva a spektrum hvězd

Jasnost a barva hvězd

Ze zkušenosti víme, že hvězdy na obloze mají různou barvu a nejsou stejně jasné. Některé jsou bílé až namodralé (Riegel v Orionu), jiné tmavě červené (na př. Antares ve Štíru). Sirius ve Velkém Psu je velmi jasný. Naopak je velmi mnoho takových hvězd, které leží na hranici vnímavosti našeho oka. V minulém článku jsme hovořili o tom, že zdánlivá jasnost, to je jasnost hvězdy jak se nám jeví, závisí jednak na její vzdálenosti, jednak na množství světla, které hvězda každou vteřinu vysílá. Tato poslední veličina se nazývá zářivost nebo luminosita hvězdy.

Astronomové dovedou měřit zdánlivou jasnost hvězdy několika různými způsoby. Vyjadřují ji v *magnitudách* (hvězdných velikostech). Přichází-li do měřicího přístroje z hvězdy *A* stokrát více světla než z hvězdy *B*, je rozdíl v jejich jasnostech pět magnitud. Této skutečnosti si všiml v r. 1830 J. Herschel, který zjistil, že z hvězd první magnitudy přichází stokrát více světla než z hvězd šesté magnitudy. Přichází-li z hvězdy *C* dvaapůlkrát více světla než z hvězdy *D*, říkáme, že hvězda *C* je o jednu magnitudu jasnější než hvězda *D*. Přitom menší čísla odpovídají jasnějším hvězdám a naopak. Tak na př. jasnost *V e g y* (nejjasnější hvězda v souhvězdí *L y r y*) je $0,0^m$ a jasnost *S p i k y* (nejjasnější hvězda v souhvězdí *P a n n y*) je $1,0^m$. Přichází k nám tedy z *Vegy* dvaapůlkrát více světla než ze *Spiky*. Slovo magnituda (hvězdná velikost) pochází z nejstarších dob, kdy se mělo za to, že jasné hvězdy jsou velké a slabé hvězdy mají rozměry malé. Jak vyplývá z předcházejícího popisu, je zdánlivá jasnost hvězdy udávána v logaritmech intensity světla dopadajícího do našeho oka nebo do našich přístrojů. Oko reaguje na světlo tak, že intenzita vjemu není přímo úměrná intenzitě dopadajícího světla, nýbrž logaritmu této intenzity. Stanovení nulového bodu je libovolné a bylo provedeno tak, aby hvězdné velikosti souhlasily se starými katalogy.

Hvězdná jasnost je v astronomii velmi důležitou veličinou. Bylo by příliš namáhavé, kdyby pozorovatel měl při každé příležitosti určovat základními metodami jasnost studovaných hvězd. Za tím účelem byly změřeny velmi přesně jasnosti asi jednoho sta hvězd v blízkosti severního nebeského pólu. Tato skupina hvězd s přesně určenou jasností se nazývá *severní polární sekvence*, obsahuje hvězdy od druhé až do dvacáté magnitudy a srovnáváním s ní se určují jasnosti jiných hvězd. Předností severní polární sekvence je její viditelnost ze všech observatoří na severní polokouli. Možná, že se čtenář ptá, proč je třeba znát s velkou přesností jasnosti hvězd. V dalším uvidíme, že je nutno přesně znát zdánlivé jasnosti hvězd, abychom mohli odvodit jiné důležité charakteristiky hvězd.

Pro hvězdy, u nichž známe přesně vzdálenost, lze určit *absolutní jasnost* (absolutní velikost). Astronomové se dohodli, že absolutní jasnost hvězdy je domnělá zdánlivá jasnost, kterou by hvězda měla, kdybychom ji přenesli z jejího místa ve vesmíru do vzdálenosti 33 světelných roků od nás. Tato vzdálenost je osmkrát větší, než vzdálenost *P r o x i m y C e n t a u r i*, naší nejbližší hvězdy.

U hvězd velmi vzdálených však nedovedeme měřit jejich vzdálenost přímo. Přesto však dovedeme určit jejich absolutní jasnost. V roce 1914 Adams našel důležitý vztah mezi absolutní jasností hvězd a jejich spektrem. Tento vztah odvodil Adams na základě pozorování nejbližších hvězd, u nichž byly známy trigonometrické paralaxy. Není však důvodu, proč by tento vztah neměl platit pro všechny hvězdy, proč by tak nepatrná část hvězdného vesmíru, který obklopuje Slunce do vzdálenosti jednoho tisíce světelných let, měla mít nějaké výjimečné vlastnosti ve srovnání s ostatním vesmírem.

Pro hvězdy o neznámé vzdálenosti dovoluje zobecněná Adamsova závislost určit absolutní jasnost hvězdy. Později byla Adamsova závislost značně zdokonalena (Hertzsprung-Russellův diagram, čti: hercšprung-raselův). Na základě znalosti spektra hvězdy dovoluje určit její absolutní jasnost s přesností řádově

10 %. Při takovém určení získáváme jako vedlejší produkt *vzdálenost hvězdy*. Mezi zdánlivou jasností, absolutní jasností a vzdáleností hvězdy existuje jednoduchý vztah, takže ze dvou známých veličin lze určit třetí neznámou. Jestliže jsme tedy určili zdánlivou jasnost a ze spektra odvodili absolutní jasnost hvězdy, potom snadno vypočteme zmíněným vztahem vzdálenost hvězdy:

$$M = m - 5 \log d + 5 ,$$

kdež M je absolutní velikost hvězdy, m je zdánlivá velikost a d je její vzdálenost v parsec.

Stačí, aby hvězda měla dostatečnou zdánlivou jasnost, abychom mohli získat její spektrum. Prakticky lze dosáhnout tímto způsobem vzdálenosti několika tisíců světelných roků. Prostor a tedy i počet hvězd, které je pak možno studovat, se tak stal zhruba stonásobně větší než tomu bylo dříve v prostoru proměřeném přímo trigonometricky. Je ovšem třeba poznamenat, že můžeme určovat tímto způsobem jen vzdálenosti nejjasnějších hvězd, byť i velmi vzdálených. Vzdálenosti příliš slabých hvězd, od nichž nelze získat spektrum, zůstanou neznámé. Seares (čti sírs) ukázal v roce 1924, že počet hvězd určité absolutní jasnosti je tím větší, čím je tato menší. Z toho můžeme usoudit, že pozorováním nelze určit celkový počet hvězd, neboť hvězdy slabé, nepozorovatelné, jsou mnohem početnější, než hvězdy pozorovatelné. Absolutní jasnost hvězdy je její charakteristický znak, který závisí toliko na hvězdě samotné. Srovnávání absolutních jasností dvou hvězd má tedy fyzikální význam, kdežto srovnávání zdánlivých jasností je bezvýznamné. Můžeme tedy hvězdy klasifikovat na základě jejich absolutní jasnosti.

Záhy se však zjistilo, že tato klasifikace není dostatečná, ani dobře definovaná. Jasnosti měřené určitým receptorem záření, na př. okem - *visuální velikosti* - nesouhlasí docela s velikostí těchže hvězd určenou jiným způsobem, na př. fotograficky - *velikosti fotografické*. Tento rozdíl v systémech absolutní jasnosti je způsoben barvou hvězd. Oko a fotografická deska jsou různě citlivé na záření různých barev. Představme si na příklad dvě hvězdy, žlutou a modrou, které jsou pro oko stejně jasné. Jak známo, je oko nejcitlivější žlutému záření. Fotografická deska bude naopak vnímat především modré záření, takže fotografická jasnost hvězdy modré bude větší než žluté hvězdy z naší dvojice. Vidíme tedy, že fotografická jasnost hvězdy nemusí souhlasit s jasností visuální. Pickering stanovil stupnici fotografických magnitud tak, že pro určitý druh bílých hvězd (spektrální typ A0) se fotografické velikosti rovnají velikostem visuálním.

Z toho, co jsme dosud řekli tedy vyplývá, že srovnání visuální a fotografické velikosti vystihuje barvu hvězdy. Modrá hvězda, jak jsme viděli, bude mít větší magnitudu visuální než fotografickou, čili její visuální jasnost bude menší než fotografická. V případě červených hvězd tomu bude naopak. Rozdíl „velikost fotografická velikost visuální“ se nazývá *barevný index*. Barevný index je tedy kladný pro hvězdy červené a záporný pro hvězdy modré.

Barevný index hvězdy kvantitativně vystihuje její barvu. Můžeme tedy hvězdě připsat dvě číselné charakteristiky: absolutní jasnost a barevný index. Pomocí těchto dvou charakteristik lze hvězdy třídit (klasifikovat). Tato klasifikace původně navržená r. 1866 jesuitou Secchim (čti sekčim) znamená jednu z nejdůležitějších etap v astrofysice. Secchi rozeznával čtyři třídy: hvězdy modré a bílé,

hvězdy žluté (k nim patří i naše Slunce), hvězdy oranžové a jasně červené, a hvězdy tmavě červené. Dnes můžeme zpřesnit hrubou Secchiho klasifikaci pomocí barevného indexu, což je klasifikace přesnější a především kvantitativní. Je přece mnohem přesnější, když řekneme o hvězdě, že má barevný index $-0,5$ než když řekneme, že je modrá.

Místo barevného indexu lze užít pro klasifikaci spektra hvězd. Barevný index hvězdy totiž těsně souvisí s jejím spektrem. Jaké vlastnosti spektra se však dá použít pro klasifikaci hvězd? Připomeňme si nejdříve základní poznatky spektrální analýzy.

Spektrum hvězd

Isac Newton po prvé rozložil sluneční světlo skleněným hranolkem ve spektrum. Na stěně proti otvoru v okenici pozoroval jen spojitý sled duhových barev. Po více jak stu letech upozoroval W. W. Wollaston, že ve spojitém slunečním spektru jsou tmavé čáry. Josef Fraunhofer jich v roce 1815 zjistil větší počet a na jeho počest jsou dodnes nazývány čarami Fraunhoferovými. Fraunhofer později studoval spektra hvězd a shledal, že mnohá jsou podobná našemu Slunci, jiná, že se však v mnohém ohledu liší od spektra slunečního.

Spektrum hvězd je především spojitě spektrum. Intensita záření ve spojitém spektru se mění pozvolna a pravidelně při přechodu od jedné barvy k barvě sousední. Barva hvězdy je způsobena relativním rozdělením intenzity ve spektru. Tak na př. červená hvězda je taková, v jejímž spektru je intenzivní záření červené. Avšak v jejím spektru je také obsaženo slabé záření modré, zelené a žluté. Ve spojitém spektru hvězdy existuje záření všech vlnových délek (všech barev); některé hvězdy mají zvlášť intenzivní záření infračervené. Jiné září intenzivně na centimetrových a metrových vlnách, jsou neviditelné, mohou však být pozorovány pomocí radioteleskopů. Některé hvězdy září převážně v daleké ultrafialové části spektra.

Průměrným hvězdářským dalekohledem lze určovat spojitá spektra hvězd do desáté magnitudy. Ve spektru hvězd se proměřuje intensita všech vlnových délek. Jedním z nejdůležitějších objevů, pokud jde o rozložení intenzity ve spektru hvězd, je nedávný objev Chalonga a Barbiera, týkající se ultrafialové části hvězdného spektra. Zmínění autoři si povšimli, že intensita spojitěho spektra se mění skokem při přechodu z ultrafialové do fialové části. Tato náhlá změna intenzity je nazývána *Balmerovým skokem* (Balmerovou diskontinuitou). Vyšlo najevo, že Balmerův skok závisí na barvě hvězdy: je značný pro hvězdy bílé, slabý pro hvězdy žluté, zatím co u hvězd červených jej nelze zjistit vůbec.

Na spojitě spektrum se překládá spektrum čárové, sestávající zpravidla z absorpčních čar a zřídka z čar emisních. Příčina spektrálních čar byla rozpoznána Kirchhoffem a Bunsenem, když objevili zákony emise a absorpce světla ve žhavicích plynech. Na základě laboratorních pokusů v šedesátých letech minulého století jmenovaní fyzikové zjistili, že světlo ze zářících plynů se rozkládá po projití hranolem ve spektrum, sestávající ze zcela jasných (emisních) čar. Jestliže spojitě spektrum z rozžhavené pevné nebo kapalné látky prochází plynem, vytvoří se v něm absorpční čáry. Vlnová délka absorpčních čar je natolik charakteristická pro jednotlivé prvky, že dovoluje určení chemického složení nebeských těles.

Charakteristiky čárového spektra umožnily podrobnou klasifikaci hvězd. Secchi v polovině minulého století ukázal, že čárové spektrum hvězd těsně souvisí s jejich barvou. Adams pak v roce 1914 objevil, že absolutní jasnost také do jisté míry ovlivňuje čárové spektrum. První podrobná spektrální klasifikace hvězd, které v základních rysech používáme dodnes, pochází z katalogu Henry Drapera (čti drejpr), publikovaného v roce 1890 harvardskými astrofysiky. Tato klasifikace třídila hvězdy do skupin označených velkými písmeny: *B*, *A*, *F*, *G*, *K*, *M* atd. Je poněkud divné, že v tomto seznamu některá písmena zcela chybí, u jiných je abecední pořadí zpřeházeno. Tento zdánlivý nepořádek byl způsoben tím, že z počátku byla spektra hvězd označována abecedním pořadím *A*, *B*, *C* . . . , ale během doby se některá ukázala neúčinnými a z klasifikace vypadla. Tak na př. některé skupiny neodpovídaly jednoduchým hvězdám, nýbrž dvojhvězdám, takže jejich spektrum je ve skutečnosti součtem dvou jednoduchých spekter. Na druhé straně, theoretický výklad spekter je z pozdější doby než jejich označení; hvězdné třídy byly uspořádány logičtějším způsobem, když se ukázalo, že závisí na teplotě.

Harvardský astronom Pickering se svými žáky zlepšil uvedenou klasifikaci tím, že každou třídu rozdělil na deset podtříd. Tak na př. mezi hvězdou *A* a hvězdou *G* jsou hvězdy *F*, rozdělené do deseti kategorií. Spektrální posloupnost tedy bude: $A_9, F_1, F_2 \dots F_9, G_1$ atd. Mimoto byly zavedeny některé nové typy, na př. hvězdy *O*, jedny z nejžhavějších hvězd vůbec. Podle Adamse pak bylo toto spektrální třídění hvězd zdokonaleno zavedením absolutní jasnosti. Toto zdokonalené třídění bylo podrobně studováno především Morganem (který užívá spektrálních čar), jednak Chalongem a Barbierem, kteří naopak užívají spojitého spektra a Balmerova skoku.

Povězme si nyní o hlavních spektrálních vlastnostech jednotlivých tříd. Hvězdy původně klasifikované jako *O* mají čáry ionisovaných prvků, na př. ionisovaného helia, tedy čáry z atomů, které ztratily jeden nebo více elektronů. Ionisace atomů svědčí o vysoké teplotě prostředí, ve kterém se v atmosféře hvězdy nacházejí. Jsou modré barvy. Také hvězdy třídy *B* jsou modravé, jejich teplota je poněkud nižší a v jejich spektru jsou čáry neutrálního helia. Hvězdy spektrální třídy *A* jsou bílé a jejich teplota již dovoluje kovům, aby se projevíly absorpčními čarami. Do této třídy náleží *V e g a* a *S i r i u s*. Zvláště intenzivní jsou čáry vodíku. Vidíme, že podle povrchové teploty je vhodnější seřazení *O*, *B*, *A*, místo původního abecedního seřazení. V další třídě *F* jsou intenzivní čáry ionisovaného vápníku. Naše Slunce patří do třídy žlutých hvězd třídy *G*, hvězd bohatých na čáry kovů. V třídách *K* je teplota již tak nízká, že na nich existují některé jednoduché molekuly. Přijaté pořadí spektrální klasifikace je: *O*, *B*, *A*, *F*, *G*, *K*, *M* . . . K této řadě se připojují ještě vzácnější třídy *R*, *N*, *S*, značně blízké hvězdám *M*; jejich molekulové pásy jsou jiné. Tak na příklad hvězdy *S* mají pásy kysličníku zirkonu, *R* hvězdy mají silné pásy uhlíkových sloučenin atd.

V tabulce I je porovnání starší Secchiho klasifikace s klasifikací Harvardskou:

Z čárového spektra hvězd lze - mimo zařazení do třídy - získat řadu důležitých poznatků o fyzikálních podmínkách v atmosféře hvězdy a o jejím chemickém složení. Studium čar nás informuje o pohybech hvězdy ve vesmíru (posuv Dopple-

T a b u l k a I.

Srovnání Secchiho a Harvardské klasifikace: v posledním sloupci je udána teplota hvězd, o jejímž určení podrobně pojednáme ve zvláštním článku.

Secchi	Harvard	Barva	Spektrum hvězdy	Teplota °K
I	O	modrá	ionisované helium, kyslík, dusík	30 000
	B A	bílá	neutrální helium, uhlík, vodík velmi silné čáry vodíku, objevují se čáry kovů	20 000 10 000
II	F ₂ F ₅	žlutá	silnější čáry kovů	7 000
	G K ₂		mnoho čar kovů čáry H a K ionisovaného vápníku v maximální intenzitě	5 500 4 000
III	K ₅	oranžová	kysličník titanu uhlíkové sloučeniny velmi silné uhlíkové sloučeniny oxydované zirkonium	od 3 000 do 2 000
IV	M	červená		
	R			
	N S			

rovým efektem), o její rotaci (rozšíření čar), o pohybech v atmosféře hvězdy (turbulence, explose, expanse), o magnetickém poli, o mracích prachu a plynu, které se nacházejí v prostoru mezi hvězdou a námi atd.

Bylo by příliš rozsáhlé a snad i únavné pro laika, kdybychom chtěli hovořit o jednotlivých metodách poznávání hvězd z jejich spektra. V příštím článku poznáme, jak se určuje teplota ze spektra hvězd.

Antonín Hruška, Ondřejov:

Co víme o kometách?

V minulém roce jsme byli svědky poměrně dosti vzácného úkazu na obloze. V rozmezí několika málo měsíců jsme mohli pozorovat dvě neobyčejně jasné k o m e t y, které byly vidět dokonce i prostým okem. Objevení se slabé komety není žádným mimořádným zjevem; astronomové skoro každý rok pozorují 5 až 10 takových slabých, málo svítících těles, která v dobrém dalekohledu nebo na fotografii pořízené dokonalým astrografem vypadají jako nepatrné body nebo mlhavé obláčky. Objeví-li se však jasná kometa, pak ji můžeme našimi přístroji zkoumat velmi podrobně a učinit řadu cenných závěrů o jejím složení. Nejprve si všimneme komet s mechanického hlediska, to znamená, že musíme zjistit, jak se komety

pohybují kolem Slunce a zda existují ve sluneční soustavě ještě nějaká tělesa, která mají podobné dráhy jako komety.

Četná měření poloh různých komet a výpočty ukázaly, že většina komet obíhá kolem Slunce po drahách, které mají tvar velmi „protáhlé“ elipsy. V jednom z ohnisek elipsy leží Slunce; z geometrie víme, že čím je elipsa protáhlejší, to znamená, čím více se liší od kružnice, tím blíže leží ohniska k jejím vrcholům. Komet, která se po takové eliptické dráze pohybuje, může se tedy octnout v určitém okamžiku v bezprostřední blízkosti Slunce a za polovinu své oběžné doby je opět velmi daleko od Slunce, takže v této době je velmi slabým, málo svítícím objektem, který ani nemůžeme pozorovat. V případě některých komet byla dokonce zjištěna dráha parabolická nebo hyperbolická. Pokud se komet, která se po takové dráze skutečně pohybuje, znamená to, že přilétla do prostoru naší sluneční soustavy odněkud z jiných částí naší Galaxie, byla sluneční přitažlivostí přinucena opsat oblouk kolem Slunce a potom se od nás opět vzdálila, takže ji již vícekrát nespatříme. Výzkumy posledních let však ukazují, že pravděpodobně všechny komety jsou příslušníky naší sluneční soustavy, to znamená, že původně obíhaly kolem Slunce po uzavřených, eliptických drahách a dráhy komet, označené za parabolické a hyperbolické, jsou ve skutečnosti jen nepřesně určené dráhy eliptické, které mají obrovskou velkou poloosu. K takové nepřesnosti určení dráhy komety může dojít nejen vinou astronomů, to je špatným výpočtem, ale především vinou tíhového působení planet, hlavně Jupitera, který svým gravitačním působením dokáže značně změnit dráhu malého tělesa jako je komet, takže je potom velmi obtížné přesně určit, jak vypadala jeho dráha před přiblížením k planetě, to je před dobou než planeta počala jeho dráhu měnit. Gravitačním působením planet si také vysvětlujeme vznik t. zv. krátkoperiodických komet; jak nám již sám název napovídá, jsou to komety s velmi malou oběžnou dobou a malou poloosou. Zákony nebeské mechaniky totiž ukazují že komet, která se pohybuje po veliké „protáhlé“ elipse, může být za určitých okolností stržena působením planet na takovou dráhu o malé poloose.

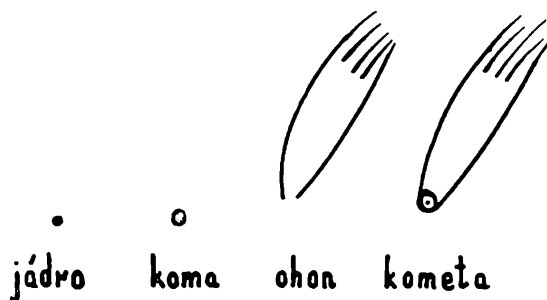
Abychom si učinili představu o velikosti drah komet, uvedeme si několik dat o dráze pro několik známějších komet. V následující tabulce P značí oběžnou dobu komety v rocích, q nejmenší vzdálenost komety od Slunce a a velkou poloosu její dráhy.

Kometa	P	q	a
Wilson-Harrington ¹⁾	2,3	1,03	1,75
Encke	3,3	0,33	2,21
Pons-Winnecke	6,15	1,16	3,36
Gale	11,0	1,18	4,94
Halley	76,0	0,59	18,25

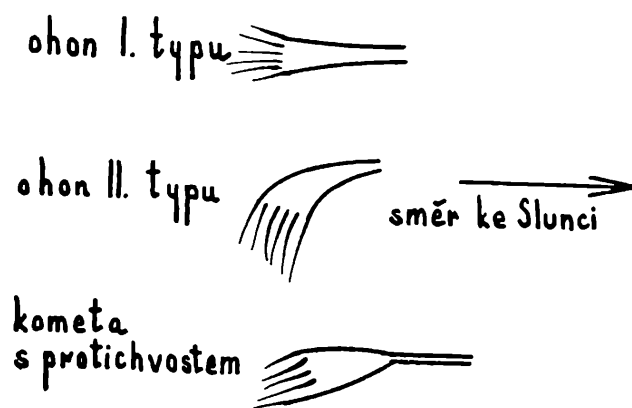
¹⁾ Komet s nejkratší oběžnou dobou, která je známá.

Veličiny a a q jsou v tabulce udány v astronomických jednotkách, to je v takové míře, kde vzdálenost mezi Zemí a Sluncem, která se rovná přibližně 150 milionům kilometrů, je vyjádřena číslem 1. Chceme-li vyjádřit a a q v kilometrech, musíme je násobit 150 000 000.

Ve sluneční soustavě známe ještě jiná tělesa, která mají dráhy dosti podobné drahám komet. Jsou to v některých případech planety a hlavně meteor. Meteorology jsou velmi drobná tělíska, která pravděpodobně vznikají, alespoň z největší části, postupným rozpadem komet. Čtenář, který by se o tyto otázky více zajímal, nalezne poučení v srozumitelně psané knížce Dr. M. Plavce „Meteorické roje“.



Obr. 1



Obr. 2

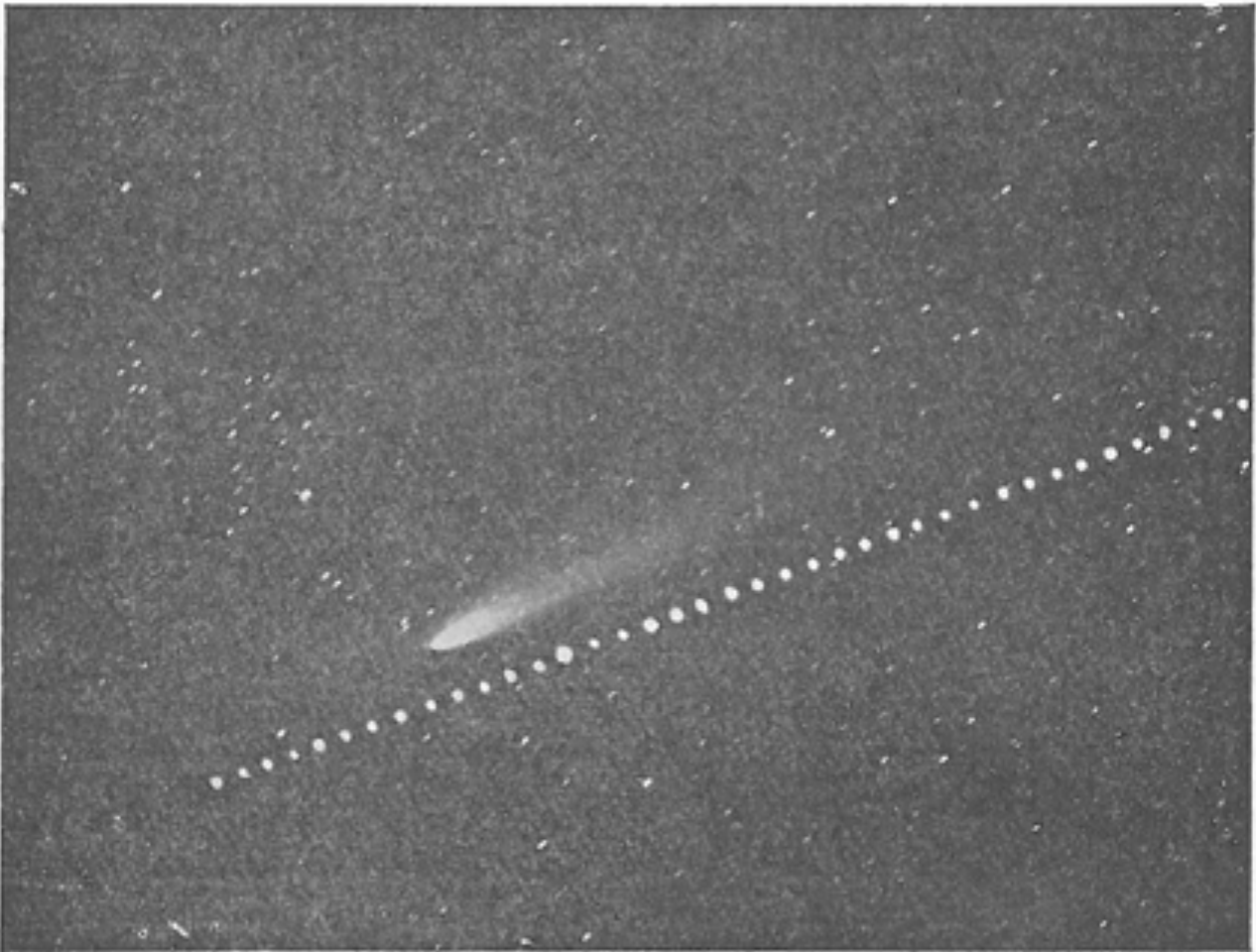
A nyní již se můžeme podívat na komety po fyzikální stránce, to znamená, že se budeme snažit zodpovědět otázky, jako je na příklad problém složení onoho mlhavého obláčku, který můžeme pozorovat skoro u každé komety, nebo otázku, proč vzniká ohon komety a podobně.

Veliké komety se zpravidla skládají ze tří částí (viz obr. 1). Z bodové ho jádra, kolem něhož je mlhavý obláček, kterému říkáme koma a z té vybíhá ohon. U slabých komet ohon a jádro nebývá vidět a z celé komety pak vlastně zbývá pouze koma.

Již z prostého vizuálního (zrakového) pozorování jasných komet je dnes zřejmé, že koma komety je tvořena jednotlivými molekulami plynu nebo prachovými částicemi, které proudí z jádra. U některých komet bylo již dříve možno takové proudy nebo výrony hmoty z jádra přímo pozorovat. Zároveň byla zjištěna velmi zajímavá věc, že totiž tyto proudy se skoro vždy odklánějí od Slunce téměř přesně

ve směru spojnice Slunce-kometa. Z toho je zřejmé, že Slunce působí na hmotu vyvrženou z jádra značným odpudlivým zrychlením. Tato hmota, nebo alespoň její část, vytváří proud, který pozorujeme jako ohon.

Chceme-li získat podrobnější informace o struktuře komet, pak již jednoduché pozorování vzhledu komety nestačí a musíme použít některých přístrojů, na příklad spektrografu, jehož princip známe z fyziky. Rozkladem světla komety získáme její spektrum. Odtud bylo zjištěno, že koma většiny komet se skládá z CN, C₂, CH, CO⁺, CO₂, N₂⁺, OH, NH, CH⁺, CH₂, NH₃, NH₂ a drobných prachových částic. Přítomnost prachových částic v hlavě komety zjistíme velmi

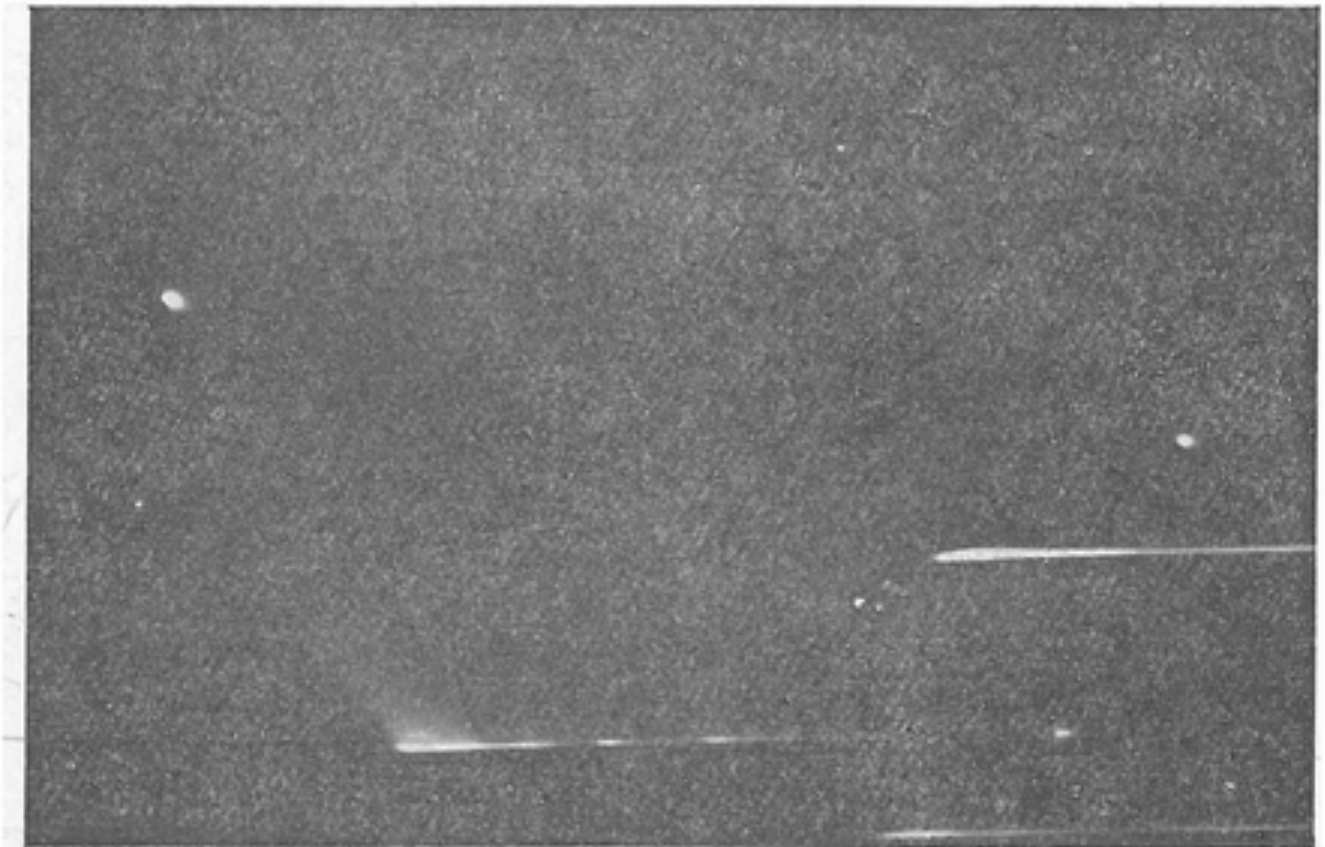


Obr. 3

snadno podle toho, že ve spektru vedle jasných molekulárních pásů můžeme pozorovat i spojité pozadí, které může vzniknout jedině odrazem slunečního světla na prachových částicích. Čím intenzivnější je spojité spektrum, tím více prachu koma obsahuje. Mnohem zajímavější výsledky poskytuje spektrální analýza ohonů komet. Bylo zjištěno, že ohony, které míří od Slunce přesně ve směru spojnice Slunce-kometa, skládají se výlučně z ionisovaných radikálů CO⁺, CO₂⁺, CH⁺, N₂⁺ a zřejmě též z volných elektronů, takže hmota v těchto ohonech, které nazýváme ohony I. typu (obr. 2), tvoří elektricky vcelku neutrální plasmu. Tak totiž nazýváme směs kladných iontů, elektronů a případně neutrálních molekul.

Naproti tomu v ohonech II. typu, které jsou poněkud zahnuty ke Slunci (viz obr. 2), nikdy nepozorujeme ve spektru molekulární pásy, ale pouze spojité spektrum, které odpovídá přítomnosti prachových částic.

Abychom vysvětlili fakt existence ohonů komet a rozdílů mezi jejich jednotlivými druhy, k tomu je třeba, abychom našli sílu, která dokáže iontům v ohonech I. typu udělit tak veliké zrychlení (velikosti 10 až 1 000 cm/sec^2), aby prýštily z komy komety rychlostí několika desítek km/sec , které v těchto ohonech skutečně pozorujeme a částicím v ohonech II. typu rychlost několika kilometrů za vteřinu. V případě prachových částic je touto silou tlak slunečního záření, který může být tak velký, že malé částice o rozměrech několika setin nebo desetin



Obr. 4

milimetru může vyvrhnout z komy komety i proti sluneční přitažlivosti. Přesné výpočty Wurmovy však ukázaly, že tlak záření nestačí, aby udělil zrychlení o velikosti větší než 1 cm/sec^2 iontům plynů, a proto k vysvětlení vzniku ohonů I. typu musíme hledat jiný mechanismus.

Takový mechanismus našel Biermann. Ten dokázal, že pozorovaná zrychlení můžeme vysvětlit, jestliže předpokládáme, že do prostoru hlavy komety proudí ze Slunce velikou rychlostí elementární částice jako jsou protony a elektrony. Ze sluneční fyziky a jiných odvětví astronomie víme, že takový předpoklad není zcela neoprávněný a proto jej přijmeme. Částice proudící ze Slunce narážejí na ionty v komě komety a vypuzují je obrovskou rychlostí do ohonu. Jedná se zde vlastně o strhování plynu viskózním třením. Nesmí nás mýlit, že jsme se ve škole učili, že viskozita plynu je zanedbatelná; v kometách jsou poněkud jiné podmínky,

než s jakými se setkáváme v laboratořích. Lépe řečeno některé efekty, které se v laboratorních podmínkách prakticky neprojeví, nabývají v případě řídkého ionisovaného plynu, který tvoří ohony komet, neobyčejného významu.

Dosud jsme hovořili pouze o komě a ohonu komety, všimněme si nyní poněkud podrobněji i jejího j á d r a. Jak víme, je jádro jakousi zásobárnou plynů a prachu, které z něho bez ustání proudí do komy a ohonu a odtud se zase poměrně rychle rozptylují do okolního prostoru. V jádře tedy musí být v poměrně malém prostoru zkoncentrována dosti značná hmota, která se odtud může postupně uvolňovat slunečním teplem. Jsou pouze dvě možnosti jak tyto podmínky splnit: buď je jádro tvořeno jakýmsi slepencem prachových částic, v nichž jsou absorbovány plyny, nebo je jádro tvořeno konglomerátem zmrzlých plynů a prachových částic. V obou případech se plyny z jádra uvolňují slunečním teplem a částice se mohou rozprašovat do okolního prostoru - komy. Podrobnější diskuse celého problému ukazuje, že pravděpodobnější je druhá domněnka, že totiž plyny a prach tvoří v jádře konglomerát.

Je ovšem možné, že jádro se skládá z několika částí, „balvanů“, které drží spolu pohromadě vzájemnou gravitační přitažlivostí. Je dokonce nepochybné, že některé komety mají patrně takovou strukturu. Na příklad *B i e l o v a k o m e t a*, která se v polovině minulého století rozdělila na několik částí přímo před očima astronomů, měla jistě jádro složené z několika „kusů“, které se od sebe mohly snadno oddělit. Kdyby jádro Bielovy komety bylo tvořeno jedním balvanem, bylo by k jeho rozdělení třeba obrovské energie, jejíž zdroj by v jádře sotva bylo možno nalézt. Naproti tomu je velmi pravděpodobné, že převážná většina komet má jádro monolitní, zvláště krátkoperiodické komety, které se velmi často přibližují k slunci a jsou podrobeny destruktivním účinkům slunečního záření; a přesto za dlouhou dobu struktura jejich jádra nedoznala žádné podstatné změny. Velikou nevýhodou při studiu jader komet je, že jsou velmi špatně pozorovatelná, a i když ve středu komy komety vidíme jasný bod, který bychom za jádro mohli považovat, musíme dát pozor, zda-li to není pouze centrální zhuštění komy, tedy něco zcela jiného než skutečné pevné jádro komety. Proto také při studiu vlastností jádra postupujeme tak, že sledujeme změny v komě a odtud teprve nepřímou usuzujeme na strukturu jádra. Všechny tyto otázky jsou dosti složité a nebudeme se proto jimi podrobně zabývat.

Na začátku jsme se zmínili o dvou jasných kometách, které jsme mohli pozorovat v minulém roce. Byly to komety *A r e n d - R o l l a n d o v a* a *M r k o s o v a*. Každá jasná kometa, která je dobře pozorovatelná, povzbudí astronomy k horečné činnosti. Tak se stalo i v Astronomickém ústavu ČSAV v Ondřejově. A protože obě komety byly skutečně pěkné, přinášíme od každé z bohaté ondřejovské žně fotografií alespoň jeden obrázek na ukázkou. Obr. 3 je fotografií Arend-Rollandovy komety, kterou pořídil Z. Cepelcha 27. IV. 1957 třiceti pěti minutovou expozicí. Všimněte si na něm anomálního ohonu - *p r o t i c h v o s t u* - který je u komet poměrně dosti vzácným úkazem. (Řada bodů byla na negativu udělána uměle jako pomůcka při jeho proměrování.)

Obr. 4 je fotografií spektra Mrkosovy komety. Bylo získáno tak, že před dalekohled stejný jako ten, jímž byl pořízen předcházející snímek, byl dán spektro-

skopický hranol. Spektrum komety na snímku je dole uprostřed. Dvě čáry po jeho stranách vpravo jsou spektra hvězd, která se na snímku vyexponovala zároveň s kometou. Rozmáznutí, které vidíme na levém konci spektra komety, je vlastně fotografií jejího ohonu ve světle, které vydávaly molekuly C_2^+ . Tento snímek získali naši astronomové Ceplecha a Rajchl 23. srpna 1957 expozicí dlouhou 1 hod. 15 min. Již z délky expozice vidíte, že získat pěknou fotografii spektra komety není tak snadné. O tom, jak se to přesně dělá, si povíme někdy jindy.



Úlohy k řešení

* 14. Vyhledejte všechny pravidelné mnohoúhelníky, u nichž velikost vnitřního úhlu (ve stupních) je dána celým číslem.

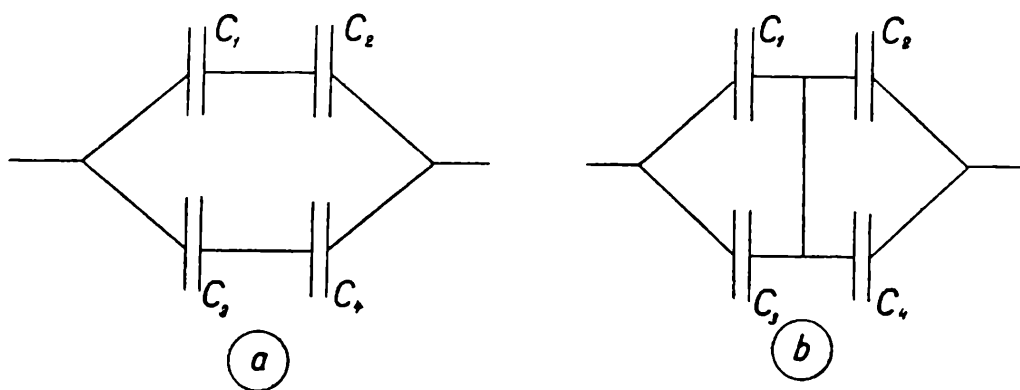
Jiří Sedláček

15. Sestrojte rovnoramenný dvojtředový lichoběžník (t. j. lichoběžník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici), znáte-li střed S_o kružnice opsané, střed S_v kružnice vepsané a bod R na jeho rameni (nebo na jeho prodloužení).

Ota Setzer

16. V rovině je dána přímka a (b), na ní bod A (B) tak, že A (B) neleží na b (a). Určete geometrické místo dotykových bodů dvou vzájemně se dotýkajících kružnic, z nichž jedna se kromě toho dotýká přímky a v bodě A , druhá přímky b v bodě B .

Alois Urban



Obr. 1

17. Baterie se skládá z $n = 5$ stejných galvanických článků seriově zapojených. Každý z článků má elektromotorickou sílu $E = 1,4 \text{ V}$ a vnitřní odpor $R_v = 0,3 \Omega$. Při jakém proudu bude užitečný výkon baterie roven $P = 8 \text{ W}$?

Václav Šindelář

18. Máme vypočítat celkovou kapacitu dvou soustav kondensátorů, nakreslených schematicky na obr. 1a, b. Kapacity čtyř kondensátorů jsou C_1, C_2, C_3 a C_4 .

Václav Šindelář

Řešení zasílejte do 30. června 1958 na adresu:

Doc. Ota Setzer, Praha 6, Zikova 4.



Různé - recenze

Josef Kotyk, Pardubice:

Od vesla k lodnímu šroubu

(Napsáno v říjnu 1957 k 100. výročí úmrtí Josefa Ressla.)

Mezi nejstarší dopravní prostředky lidstva patří loď. O plavbě po řekách a na moři vypravují už dávné báje. „Přišel jsem a propůjčil jsem ti vítězství nad obyvateli přístavů. Přišel jsem a propůjčil jsem ti vítězství nad ostrovy uprostřed moře.“ Takto promlouvá v t. zv. poetické stéle velikého faraona Dhutmase III.) bůh Ammon k tomuto slavnému egyptskému panovníku. Obyvatelé řeckých ostrovů v Archipelagu a na pobřeží maloasijském byli podmaněni loďstvem.

Historikové usoudili, že egyptské lodi by se však k přepravě velikého vojska asi nehodily a vyslovili domněnku, že Egypťany přepravovali na svém loďstvu pravděpodobně Feničané, „muži sidonští“,) jejichž lodi se v dobách, o nichž píší, plavily po celém Středoziemním moři až k „sloupům Melkartovým“.³⁾

¹⁾ Dhutmas III., zvaný někdy také Thutmes III. (1501–1447), zvětšil egyptskou říši četnými válečnými výpravami a povznesl tehdejší Egypt na první velmoc.

²⁾ Feničané byli semitští obyvatelé pobřežního pruhu na západním svahu Libanonu. Jejich politický život se soustřeďoval v městech Tyros a Sidon. Politicky nenabyli nikdy veliké moci; žili téměř stále v područí Egypťanů a jiných národů.

³⁾ Bůh Melkart byl místním božstvem města Tyru. U „sloupů Melkartových“ přistal roku 711 po Kr. maurský vojevůdce Tarik a podmanil si poloostrov Pyrenejský. Od té doby označujeme toto místo jménem Gebel al Tarik (vrch Tarikův), dnes Gibraltar.

Jejich původní lodi byly veslové. Feničané dovedli však také již ve starověku stavět námořní lodi, opatřené nejen vesly, nýbrž i plachtou. Obchodní lodi mívaly stožár k napínání plchet; jen za bezvětří nebo proti větru byly lodě poháněny vesly. Dříví na ně bylo bráno z bohatých cedrových lesů libanonských. Lodi fenické nebyly celkem veliké, mívaly však široký a okrouhlý spodek, aby se hodily k přepravě většího množství zboží ze vzdálených krajů. Do domácích přístavů se vracívaly někdy i po dlouholeté plavbě. Obeplovajíce poloostrov Pyrenejský, zajížděly k ústí Garonny a poloostrovu Bretaňskému, k jižnímu pobřeží Velké Britannie a okolním ostrovům „cínovým“, k otevřenému ústí velikých řek severoněmeckých, ba snad i Odry a Visly a k okolním „jantarovým“ ostrovům dánským a baltickým.

Nejslavnějším činem, jímž se feničtí plavci mohou právem honosit, jest však o b e p l u t í A f r i k y z moře Rudého do Středozemního, provedené ve službách egyptského krále Necha II.) v letech 608 až 605 před Kr. Zprávu o tom zaznamenal řecký dějepisec Herodot⁵⁾ podle vypravování egyptských kněží. Slovy neobyčejně poutavými líčí, jak „Feničané vypluli z Rudého moře a plavili se po jižním moři, kdykoli pak jeseň nastala, přistávali k břehu a osévali krajinu libyjskou (t. j. africkou), v níž právě byli; pak vyčkali žní a sklidivše obilí, plavili se dále, až po uplynutí dvou let, roku třetího, otočivše se kolem sloupů Herakleových (t. j. Melkartových) do Egypta přišli. I pravili, c o ž s e m n ě n e z d á h o d n o v í r y, že plujíce kolem Libye (t. j. Afriky) měli Slunce po p r a v é r u c e.“ Plavci feničtí viděli Slunce, máme-li na mysli směr jejich cesty, na - severním obzoru. Lidem zvyklým hledati polohu Slunce vždy na jihu, utkvěl zjev ten jistě trvale v paměti. Herodotovi zdála se tato věc ovšem neuvěřitelnou, ač souhlasí se skutečností, kterou Herodot však nemohl znát, a potvrzuje pravdivost vypravování. Když roku 1498 Vasco de Gama konečně otevřel Portugalcům dlouho hledanou námořní cestu do Indie, jistě netušil, že již 2 000 let před jeho slavnou plavbou poznávali krásy afrického pobřeží po celé jeho délce odvážní feničtí plavci.

Ve vzdálenějších zemích zakládali Feničané osady, na př. Kartago poblíže nynějšího Tunisu a j. O rozsáhlém obchodu a plavbách, jež K a r t a g i ň a n é) podnikali, svědčí plavecké výkazy, jichž za panování Filipa II. Makedonského) použil neznámý autor k sepsání námořnické příručky. Z jeho zprávy⁸⁾ se s pře-

⁴⁾ Král N e c h o I I. (610—595) dal kopati průplav z východního ramena nilského do Rudého moře, oč se marně pokoušel už král R a m s e s I I. (1310—1244). Pro technické obtíže nebyla však práce ani tentokrát dokončena. Staré projekty faraonské došly uskutečnění teprve roku 1869 otevřením průplavu suezského.

⁵⁾ H e r o d o t o s z H a l i k a r n a s s u (484—408), „o t e c h i s t o r i e“, nejstarší dějepisec a první vědecký cestovatel řecký.

⁶⁾ Římané nazývali Kartagiňany P o e n i, od čehož odvozujeme přídavné jméno punicus, punský = kartaginský. Viz na př. punské války a j.

⁷⁾ Za vlády Filipa II. (359—336), krále makedonského, byly řecké obce zbaveny svobody a řecký národ po prvé sjednocen politicky pod vůdcovstvím Makedonie.

⁸⁾ Viz na př. Hannonův Periplus 112.

kvapením dovídáme, že Kartagiňané se odvažovali dokonce i plaveb po širém moři a pronikli západně od Senegambie až do chaluhoého (sargassového) pásma Atlantického oceánu, jež je teprve přinutilo k návratu. Pásmo pokryté hustou spleť mohutných mořských rostlin pokládali za zbytek pevniny. Zkušenosti takto získané daly pravděpodobně podnět k bájím o tajemné Atlantidě, jež sahají rovněž daleko do starověku.⁹⁾

Z národů starého věku žádný nepřekonal Feničany po stránce plavecké a objevné. Od těch dob nenastaly v lodnictví po mnohá staletí hlubší změny. Teprve ve 14. století byly veslové lodi z námořní dopravy vytlačeny. Změny zavedené v 15. století, na př. pobíjení lodí měděným plechem, účelnější uspořádání plachet, zvětšování rozměrů lodí, zřizování několkých palub a j., týkaly se rovněž jen jednotlivostí. Převrat ve vývoji přivodilo teprve 19. století. Jako průkopníci technického pokroku vstupují na jeviště dějin opět příslušníci malého národa, tentokrát dokonce vnitrozemského národa českého.

(Příště dokončení.)

Libor Pátý, Praha:

Postavení fyzikálního ústavu Karlovy university ve fyzikálním životě u nás

Výtah ze zahajovacího referátu prof. Dr. V. Kunzla na I. sjezdu fyziků.

Osvětlit postavení fyzikálního ústavu Karlovy university ve fyzikálním životě u nás není možno bez stručného přehledu historického vývoje naší fyziky vůbec. Pokusíme se proto ukázat na jednotlivé etapy vývoje fyziky u nás, uvést její hlavní úspěchy a též podmínky, za nichž se vyvíjela.

Hlavními mezníky jednotlivých údobí vývoje fyziky jsou rozdělení pražské university r. 1882, vybudování fyzikálního ústavu r. 1907, léta kolem 1920 a léta kolem 1950.

Podobně jako jiná odvětví české kultury, tak i česká fyzika začíná se projevovat teprve koncem první poloviny minulého století. Po roce 1848 se může na pražské universitě přednášet též česky a teprve v roce 1882 dochází k rozdělení university na českou a německou. V druhé čtvrtině minulého století zásluhou J. V. Sedláčka a J. F. Smetany se vytváří česká matematicko-fyzikální terminologie. Připomeňme,

⁹⁾ Podle údajů řeckého filosofa Platona (427—347), ležela Atlantis na západ od sloupů Herakleových (Gibraltaru) a poblíže Gadese (Cádiz). Z novějších nálezů (Dr. Schulten a j.) lze soudit, že jde pravděpodobně o Tartessos, sídliště Tyrsů, ležícím na ostrově v ústí španělské řeky Guadalquiviru, zničené okolo roku 500 před Kr. Kartagiňany.

že Smetana ve svém spise „Silozpyt čili fysika“ poukázal na význam fysiky pro společnost a vyjádřil tím skutečnost, s níž se náš průmysl i po stu letech neuměl vypořádat.

Již v době před rozdělením university vyniklo několik českých fysiků (F. A. Petřina, V. K. Zenger, K. Domalíp a Č. Dvořák), kteří svými pracemi se uplatnili na mezinárodním vědeckém foru. Vedle těchto fysiků byla zde řada fysiků-středoškolských profesorů, kteří se svou činností pedagogickou a popularisační podstatně zasloužili o rozvoj fysikálního života u nás.

Rozdělením tehdejší Karlo-Ferdinandovy university v roce 1882 vznikla u nás česká universita. Teprve touto universitou se české fysice otevřela cesta k samostatnému vývoji. Prvním profesorem experimentální fysiky byl jmenován Čeněk Strouhal, profesorem theoretické fysiky a astronomie August Seydler. Strouhal, žák Macha a Kohlrausche, byl fysikem širokého rozhledu, zručným experimentátorem, skvělým řečníkem a výborným pedagogem. Začínal na české universitě za velmi těžkých podmínek. Veškerý inventář fysikálního ústavu nerozdělené university byl přidělen universitě německé, takže bylo nutno začít s téměř holýma rukama v malé a zcela nevhodné budově, jež tehdy stála na dvoře Klementina. V budově na př. nebyl rozvod elektrického proudu, k pokusům z elektřiny musely být stále sestavovány články, které bylo nutno roznášet do laboratoří a do posluchárny v hlavní budově. Přesto se práce pedagogická i vědecká utěšeně rozvíjela za pomoci Strouhalových asistentů J. Teurera, V. Nováka a B. Kučery, později vesměs vysokoškolských profesorů. Profesor Strouhal v té době pracoval na rozsáhlém kompendiu experimentální fysiky, užívaném po několik generací českými fysiky.

Profesor Strouhal považoval tento stav za provisorní a od počátku proto usiloval o výstavbu nové budovy fysikálního ústavu. Bylo zapotřebí vybojovat finanční prostředky, pozemky a vypracovat plány. Jakého úsilí bylo k tomu všemu třeba, prokazuje již ta skutečnost, že přes skvělé Strouhalovy schopnosti došlo k stavbě až po více než dvaceti letech. Za pomoci pozdějšího profesora Kučery vybuodoval prof. Strouhal ústav, který se v té době vyrovnal předním ústavům zahraničním.

Nejvýznamnější vědecké práce Strouhalovy můžeme vřadit do dvou směrů. V prvním jsou práce z akustiky, věnované zejména vzniku tónu při pohybu vzduchu okolo překážky. Výsledky těchto prací mají obecnější význam, nejen pro akustiku. Druhý směr obsahuje práce, týkající se studia galvanických a magnetických vlastností ocele. Tyto práce již tehdy prokázaly praktický význam fysikálního výzkumu.

Vědecká práce profesora Kučery, žáka Scheringova a Strouhalova nástupce, je významná ve dvou směrech. Jednak je to studium elektrokapilárních jevů v roztocích solí na rtuťové hladině, jež vedlo ke vzniku samostatného vědního odvětví polarografie, rozvinutého akademikem Heyrovským. Dále je to studium ionizačního účinku radioaktivního záření, na němž pracoval spolu s B. Maškem. Hlavním výsledkem těchto prací bylo zjištění rozptylu částic alfa při jejich průchodu kovovými lístky. Tato práce značně přispěla k našim vědomostem o složení atomu a měla pro naši fysiku význam tím, že jí otevřela cestu v tehdy zcela novém odvětví.

Je třeba vzpomenout také výrazné postavy naší fyziky theoretika Koláčka, nástupce prof. Seydlera. Koláček vedle díla nauky o elektřině a magnetismu a vedle hydrodynamiky publikoval mnoho významných prací z optiky, termodynamiky, akustiky, hydrodynamiky a theorie elektrických oscilací. Jen jako příklad uvádím jeho elektromagnetickou teorii disperse světla, jeho řešení magnetostriktice a s ní souvisících jevů a teorii Lumerovy desky. Koláček byl i výborným experimentátorem; vždy poukazoval na neodlučitelnou souvislost theorie s experimentem. Na některé problémy elektromagnetické a optické navázal jeho žák a asistent Záviška, který jako profesor měl v době mezi oběma světovými válkami vedoucí postavení v naší theoretické fyzice. Zabýval se hlavně problémem šíření elektromagnetických vln, jejich buzení a vedení ve vlnovodech. Prof. Kučera spolupracoval s pozdějším profesorem Žáčkem. Tato spolupráce přinesla řadu cenných výsledků.

V období po vzniku samostatného československého státu rostl počet pracovníků ve fyzikálním ústavu a s ním i pracovní ruch, zejména díky poněkud se zlepšujícím pracovním podmínkám. Vědecká práce v tomto období vykristalisovala do několika směrů, reprezentovaných Žáčkem, Posejpalem, Vojtěchem, Dolejškem a Petržilkou.

Nejvýznamnější úsek práce prof. Žáčka se týká fyziky vysoké frekvence a elektronových lamp. Popudem k tomuto zaměření byl jeho pobyt na göttingenské universitě. V roce 1924 se mu podařilo budít pomocí diody v magnetickém poli - magnetronu - elektromagnetické vlny o vlnové délce 29 cm. Tím se stal objevitelem nového druhu generátoru, jehož principu, ovšem značně rozvinutého se dnes užívá k buzení nejkratších elektromagnetických vln pro radiolokační účely. Otázkám kmitání piezoelektrických výbrusů se věnoval Petržílka, žák prof. Žáčka, se svými doktorandy. Krátce před druhou světovou válkou začal Petržílka rozvíjet práci v oboru jaderné fyziky.

Směry, v nichž pracovala skupina prof. Posejpala, jsou dány studiem refrakce plynů, fluorescence, fluorescenční absorpce a oboru X-paprsků. Posejpal na sklonku svého života zabředl do pochybených hypothes a spekulací o světovém éteru, které byly našimi fyziky oprávněně kritisovány. - V oboru vědecké fotografie pracoval prof. Vojtěch. Zabýval se otázkami latentního obrazu a rozlišovací mohutnosti fotografické emulze. Ačkoliv měl široký rozhled, výsledky své práce nepublikoval a nevychoval pracovníky, kteří by v jeho práci pokračovali.

Další rozsáhlou skupinou prací rozvinul profesor Dolejšek se svými spolupracovníky. Dolejšek se zaměřil na spektroskopii především paprsků X, což bylo důsledkem jeho studijního pobytu u profesora Siegbahna. Tyto práce se obíraly studiem emisních X-spekter různých vlnových délek, existencí t. zv. vazbových linií, zjišťováním přesných poloh absorpčních hran a jejich jemné struktury. Byla zjištěna zákonitost pro energii hladin v závislosti na valenci. Nejzávažnější práce se týkaly N-serie ve spektrech X, již byl Dolejšek objevitelem. Dolejškovi se též podařilo udat takový vztah pro vyjádření Moseleyova zákona, který dovoľoval přesněji klasifikovat zjištěné linie. Značný díl práce připadal na vypracování nových method, konstrukci nových aparatur a zařízení. Zejména byla věnována značná pozornost vakuové technice.

Uvedme na tomto místě též práci theoretického fysika nedávno zemřelého profesora Trkala, byť i přímo nesouvisela s fysikálním ústavem. Trkal, žák Ehrenfestův, publikoval nejzávažnější své práce s Ehrenfestem (kvantové odvození dissociační rovnováhy a z něho plynoucí výpočet chemických konstant). Později soustředil zájem na některé vlastnosti Diracových rovnic.

Můžeme tedy říci, že vědecké práce ve fysice u nás v době do druhé světové války přispěly i v mezinárodním měřítku hodnotným příspěvkem k poznání. Mnohé z prací jsou citovány v zahraniční literatuře a výsledků je dále použito.

Okupace a zavření vysokých škol zasáhly do fysiky zvláště destruktivně a znásobily nedostatky, jimiž trpěla fysika před válkou. Prořídly již beztak řídké řady fysiků a vedle mladších zahynuli právě ti přední - profesori Karlovy university Závíska a Dolejšek a profesor brněnské university Sahánek. Byly rozptýleny pracovní kolektivy, byla zničena pracoviště, přerušena kontinuita práce, zanikl styk s cizinou a byl ztracen přehled o světovém rozvoji fysiky. Přitom probíhal v cizině neobyčejný rozmach fysiky. To byl stav, z něhož vycházela fysika po skončení války a za něhož se počínala vědecká práce na fysikálním ústavu. Bylo zapotřebí věnovat pozornost především práci pedagogické; rozběh k práci vědecké trval několik let. V rámci vysokoškolských reforem byly zřízeny katedry (katedra obecné fysiky, katedra pevných látek, katedra vysoké frekvence a vakuové techniky a konečně theoretické fysiky) a studium v určitých oborech fysiky-specialisacích. Zvětšením úkolů se zvětšil počet odborných sil na ústavě, čímž byly zlepšeny i podmínky k vědecké práci.

Vědecká práce na fysikálním ústavě se rozvinula podle specialisací výuky se zřením na úkoly fysiky v našem státě. Z oboru pevných látek se rozvinula práce ve studiu polovodičů experimentálně a též theoreticky zásluhou předčasně zemřelého profesora Matyáše, v oboru fotofysiky a fotochemie zejména studiem intermitenčního zjevu a studiem přípravy emulsí vhodných k registraci elementárních částic. Theoreticky byly studovány elastické vlastnosti kovů a optické vlastnosti tenkých vrstev. Experimentálně bylo pracováno v oboru plasticity kovů. V jaderné fysice bylo pracováno na theorii elementárních částic a experimentálně bylo pracováno zejména na studiu jaderného fotoefektu, na měření životní doby mesonů a sledována interakce neutronů s jádry. V oboru vysokofrekvenční a vakuové fysiky byla práce zaměřena především na interakci vysokofrekvenčního pole s výbojovým plasmatem a elektronovým svazkem. Pracuje se na problematice působení elektronů na polovodiče a dielektrika. Je věnována pozornost moderní methodice vakuové fysiky, zejména iontovému čerpání. Byl řešen problém magnetické fokusace svazku elektronů.

Vzpomenutou vědeckou činností přispěly fysikální katedry k celkové vědecké činnosti u nás v poválečných letech. Po osvobození r. 1945 doznala fysika za změněné hospodářské a společenské situace zásadní změny ve svém postavení. Byl jí uložen úkol plnit své společenské poslání a stát se účinnou oporou techniky a průmyslu. Fysikální bádání přestalo být pouhou záležitostí jednotlivce a stalo se společnou záležitostí všech fysiků. Na podporu nových úkolů československé fysikální vědy byly zřizovány výzkumné ústavy bez pedagogických povinností a v roce 1952 byla založena Československá akademie věd jako vrcholná instituce

vědecká, jejíž ústavy stávají se hlavními nositeli badatelské práce. Vysoké školy, jako instituce vychovávající vědecké pracovníky pro tyto ústavy, zůstávají však i nadále stejně významnými centry vědecké práce, zajišťujícími svou činností úroveň a životaschopnost těchto ústavů pro vědeckou práci. Aby mohly plnit tento základní úkol, netřeba zdůrazňovat, že se jim musí dostávat nemenší podpory a péče, než ústavům ryze badatelským.

Fysika začíná mít v posledních několika málo letech jiné postavení ve společnosti a začíná se těšit zvýšenému zájmu. Tato změna se výrazně projevuje v její práci, jak ukazuje neobyčejný vzrůst počtu vědeckých publikací v poslední době.

R u d o l f J a n á l, Liberec:

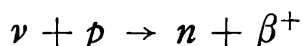
Přímý důkaz existence neutrina

α -částice a γ -paprsky vysílané vzbuzenými atomovými jádry, mají přesně definovanou energii. Na rozdíl od nich elektrony, vysílané v procesu β -rozpadu, mají spojité spektrum energie v intervalu od nuly do určité maximální hodnoty, charakteristické pro dané jádro. Aby tato skutečnost souhlasila se zákonem zachování energie a existencí diskretních energetických hladin u atomových jader, vytvořil německý fyzik Pauli v roce 1933 hypotézu, při které při β -rozpadu současně s elektronem vyletuje i jiná částice, zbavená elektrického náboje a odnášející s sebou část energie. Tato částice byla nazvána *neutrino*. Později bylo zjištěno, že neutrino se musí účastnit i řady jiných jaderných procesů (K -záchyt, rozpad mesonů).

Současné pokusy dokázat existenci neutrina přímými zkouškami donedávna zůstávaly bezúspěšné. Nemajíc elektrického náboje a klidové hmoty, reaguje neutrino velmi slabě s hmotou. Tak na př. z 10^9 takových částic ve vrstvě vody tloušťky 1 km by se mohla pohltit jen jedna částice.

Vše co se podařilo udělat vědcům do roku 1956, bylo stanovení několika nepřímých experimentálních podmínek o účasti neutrin v jaderných procesech. Avšak tyto pokusy nemohly sloužit jako konečný důkaz existence těchto částic. Takový důkaz byl získán teprve v roce 1956 americkými fyziky Reinsem a Kovenem.

Jestliže neutrino existuje, musí reagovat s protony a neutrony. Při vzájemném styku neutrina s protonem vzniká neutron a pozitron. Tento případ přichází velmi zřídka v úvahu a pro nějakou registraci

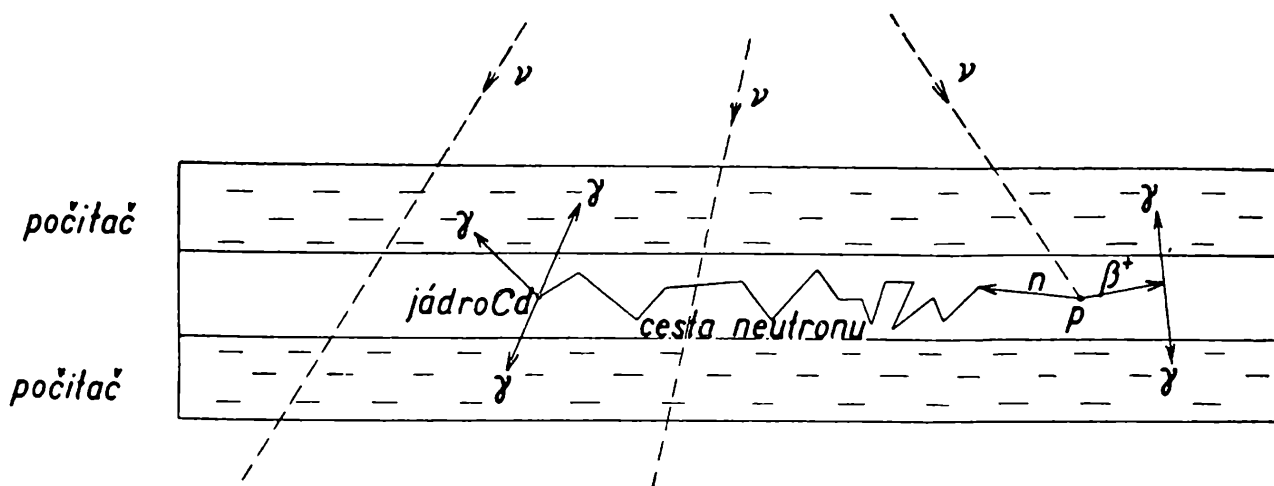


n nebo β^+ podle uvedené rovnice bychom museli mít velmi silné zdroje neutrin. Takovými zdroji jsou dnes atomové reaktory.

Je známo, že odpadky, vznikající při dělení jader uranu, po několika β -rozpadech se stávají nakonec stabilními isotopy. Průměrně na každý případ dělení jádra připadá asi 7 β -rozpadů a tolikéž neutrin. V atomovém reaktoru každému KW výkonu odpovídá $3 \cdot 10^{13}$ dělení za sekundu. Proto reaktor o výkonu několik tisíc kW dá okolo 10^{18} neutrin za sekundu.

Schema pokusu Reinse a Koveny je na obrázku 1. Jeho základem je směs 200 g vodního roztoku soli kadmia ($CdCl_2$) ve vrstvě 7,5 cm. Zhora a zespodu k ní přiléhají kapalné scintilační počítače, které zaznamenávají světelně zábleskem každé vyvolané γ -kvantum. Tyto záblesky byly registrovány pomocí elektronových násobičů. Před kosmickým zářením je celá aparatura chráněna silnou vrstvou parafinu a olova a nacházela se pod zemí ve velké hloubce pod reaktorem.

Pohlčení neutrína protonem vede ke vzniku neutronu a pozitronu. Bezprostřední pozorování je ztíženo tím, že neutron nemá náboj a pozitron žije velmi krátkou dobu, a téměř okamžitě s některým z elektronů vytváří dvě γ -kvanta, vylétující v opačných směrech. Dopadajíce do obou počítačů, vytvářejí v každém



Obr. 1

z nich okamžité impulsy. Neutron se pohybuje ve směsi tak dlouho, dokud není pohlčen kterýmkoliv jádrem kadmia, které je jedním z nejlepších absorbátorů neutronů. Přitom jádro ovšem uvolní zase několik γ -kvant, také registrovaných oběma počítači současně. Mezi prvním impulsem a druhým impulsem proběhne jen několik málo mikrosekund, ve kterých se neutron pohybuje k jádru kadmia.

Pokusy Reinse a Koveny trvaly více než 1 300 hodin. Průměrně každou hodinu bylo registrováno okolo třech zdvojených současných impulsů ve výborném souhlase s předběžnými theoretickými předpoklady. Serii speciálních pokusů bylo dokázáno, že tento efekt je bezpodmínečně spojen s existencí ohromného množství neutrín v blízkosti atomového reaktoru. Takto byla konečně dokázána existence ještě jedné stabilní elementární částice: n e u t r i n a.

Literatura: Fyzika v škole, str. 19, č. 5, 1957.

Sčítanie nekonečne malých veličín

V knižnici „Populárni prednášky o matematice“ vychádzajú lacné, ale cenné knižičky. Jednou z nich je: „Sčítanie nekonečne malých veličín“ od I. P. Natansonu, ktorú z ruštiny preložil Ing. Milan Ullrich a odborne upravil akademik Eduard Čech.

Prvá kapitola je prípravná a zaoberá sa niektorými vzorcami z algebry, potrebnými v ďalších kapitolách. Druhá a tretia kapitola obsahuje riešenie praktických úloh z fyziky na ktorých vidieť akou dôležitou je matematika pre prax a pre fyziku. State v ktorých sa hovorí o určení tlaku kvapaliny na svislú stenu, alebo o určení práce potrebnej k vyčerpaniu kvapaliny z nádob, budú viacerých zaujímať.

Ďalšie kapitoly sa týkajú geometrie. Tu majú možnosť tí, ktorým na škole predložili vzorce na výpočet objemu kúžela, ihlana a gule len k uvereniu, dozvedieť sa, ako sa tie vzorce odvodlia pomocou pojmu limity súčtu neobmedzene rastúceho počtu neobmedzene klesajúcich sčítancov. Ba môžu sa dozvedieť aj ako je to s objemom spoločnej časti dvoch valcov. Piata a šiesta kapitola obsahuje okrem iného určenie veľkosti plochy (kvadráturu) paraboly, elipsy a sínusoidy, tiež určenie objemu niektorých rotačných telies.

Spomínanú bružúru doporučujeme tým, ktorí chcú študovať technické smery, pretože im pomôže pochopiť princíp integrálneho počtu, ktorý je dôležitou disciplínou vysokoškolskej matematiky, ktorá má veľmi mnohé aplikácie v praxi. Z toho dôvodu nezaškodí jej preštudovanie ani tým, ktorí po absolvovaní odbornej školy odídu do zamestnania. Pretože pri jej štúdiu vystačíme so znalosťami elementárnej matematiky, výborne zapadne ako téma pre matematické krúžky vyšších tried jedenástročných a odborných škôl.

J. Krbíla

Přehled elementární matematiky

Přehled elementární matematiky vydalo koncem roku 1957 Státní nakladatelství technické literatury v Praze. Autoři: K. Hruša, E. Kraemer, J. Sedláček, J. Vyšín a R. Zelinka jsou dnešní naši přední pedagogičtí pracovníci v matematice. Kniha má 497 stran, obsahuje 503 obrázků a vázaný výtisk stojí Kčs 36,50.

Tato příručka je určena studentům i absolventům středních škol k opakování a prohloubení středoškolské látky z matematiky. Obsahuje, zhruba řečeno, látku, které se dnes vyučuje na našich jedenáctiletkách, ale v některých partiích ji i přesahuje. Tak na příklad podává řešení binomických rovnic v oboru komplexních čísel hlouběji, než ve škole, uvádí posloupnosti, kombinatoriku i geometrické příbuznosti v rovině. Obsahuje také látku z analytické geometrie, která se dnes na jedenáctiletkách neprobírá, ale byla v osnovách bývalých reálků a reálných gymnasií. V posledním odstavci z analytické geometrie jsou uvedeny i komplexní souřadnice.

Svým novým pojetím se tato příručka značně liší od podobných starších knih. Tato kniha není sice učebnicí, protože neobsahuje důkazy jednotlivých matematických vět, jež podává, ale neobsahuje také jen pouhý soupis vzorců. Vedle přesných definic, vět a příkladů je tu dost slovního doprovodu, jímž autoři náležitě objasňují jednotlivé pojmy či formule. Praktickou cenu zvyšuje mnoho obrázků a přehledné sestavení matematických značek na šesti stránkách hned na počátku. Vlastní látka je rozdělena do dvou částí. První část, algebra a aritmetika, se dělí na patnáct kapitol, v nichž ovšem vedle rovnic, nerovností, logaritmů

a j. jsou uvedeny i funkce, posloupnosti a čísla komplexní. V kombinatorice nezapomněli autoři ani na souvislost binomické věty s kombinačními čísly a na Pascalův trojúhelník. Druhá část, geometrie, má osm kapitol, věnovaných jak rovinným, tak prostorovým vztahům, trigonometrii a analytické geometrii.

Všechny slovní výklady je přizpůsoben dnešnímu způsobu podání středoškolského učiva, netrpí tedy formalismem starších podobných příruček. Základním matematickým pojmem, z něhož autoři vycházejí, je pojem množiny.

Protože jednotlivci, kteří sami studují matematiku (na příklad účastníci dálkového studia na různých školách), potřebují vedle věcných znalostí osvojit si i schopnost umět matematiku vhodně používat, zařadili autoři do svého přehledu i řešené úlohy. Na každou větu je tu uveden aspoň jeden řešený příklad; celkem je tu téměř 500 takových řešených úloh, takže tato knížka částečně nahrazuje i sbírku řešených příkladů. Přitom tyto příklady nejsou triviální, ani zase tak komplikované, že by probíranou látku zatemňovaly. Jsou voleny velmi vhodně.

Státní nakladatelství technické literatury vydalo tedy knihu, která již dlouho chyběla v naší literatuře.

Doc. Dr. Karel Havlíček

Zpráva o činnosti pobočky JČMF v Olomouci

Ve IV. čtvrtletí 1957 konaly se v pobočce dvě členské schůze.

Ve čtvrtek 21. listopadu 1957 přednášel doc. Dr. Josef Široký „Vybrané kapitoly z dějin matematiky“ a doc. Dr. B. Hacar „Umělé satelity a jejich význam“.

Doc. Dr. B. Hacar ve své přednášce uvedl vznik myšlenky na vypuštění umělých satelitů v rámci MGR, pojednal o jejich fyzikální podstatě a technické úpravě, pokud jsou známy její podrobnosti. Promluvil o kosmickém postavení satelitů, zejména o perturbacích drah jak se strany Měsíce a Slunce, tak se strany zploštění zemského tělesa a jeho nepravidelností.

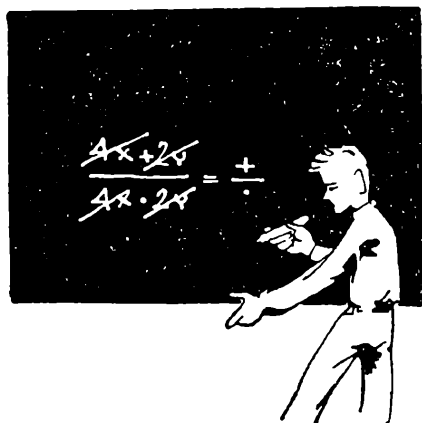
Ve čtvrtek 19. prosince přednášel doc. Dr. Josef Šimek „Konstrukce elipsy odvozené z prostoru“.

Přednášející odvodil některé vlastnosti elipsy, vyplývající z rovnoběžného průmětu kružnice. K řešení úloh o elipse, methodou odvozenou z prostoru, užíval rotační válcové plochy s osou ležící v průmětně. Nejdříve uvedl řešení základní úlohy: Konstrukce elipsy ze tří bodů a dvou rovnoběžných tečen a pak ukázal methodou odvozenou z prostoru řešení těchto úloh: Sestrojte elipsu, je-li dáno: 1) a, B, C, S (střed); 2) a, b, C, S ; 3) a, b, c, S ; 4) A, B, C, S ; 5) A, S, P (pól), p (polára bodu P); 6) a, S, P, p .

Dalším bodem programu této schůze byla diskuse k dopisu ÚV KSČ ze dne 20. 10. 1957.

Po celé čtvrtletí řídili jsme fyzikální olympiádu v Olomouckém kraji pro žáky 9. – 11. tříd JSS. Olympiády se účastní celkem 85 žáků z těchto 12 škol: JSS Bruntál (3, 0, 6), JSS Jeseník (3, 0, 0), JSS Lipník nad Bečvou (1, 0, 1), JSS Olomouc, Tř. Jiřího z Poděbrad (4, 4, 2), JSS Olomouc, Hejčín (2, 3, 0), JSS Prostějov, Kollárova ul. (2, 9, 1), JSS Prostějov, Rejskova tř. (1, 0, 3), JSS Přerov (16, 7, 2), JSS Rýmařov (0, 0, 3), JSS Šumperk (3, 1, 0), JSS Uničov (1, 0, 0), JSS Zábřeh na Moravě (3, 3, 1). První číslo v závorce udává počet účastníků v kat. A (žáci 11. tříd), druhé v kat. B (žáci 10. tříd) a třetí v kat. C (žáci 9. tříd).

Dr. Miroslav Laitoch



Matematika

Jaroslav Chudý, Praha:

Eliminační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic

Ve škole jste se učili řešit soustavu dvou, tří i více lineárních rovnic o dvou, třech i více neznámých. Užívali jste při tom aspoň dvou method: 1. substituční (dosazovací), spočívající v tom, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou pomocí ostatních a za takto vyjádřenou neznámou dosadíme do zbývajících rovnic. Tím se počet rovnic i počet neznámých zmenší o jednu; 2. sčítací, spočívající v tom, že vhodné násobky jedné rovnice odečítáme od zbývajících tak, aby se tím vyloučila vždy táž neznámá; tím se také počet rovnic i neznámých zmenší o jednu. Opakováním postupu užitím jedné nebo druhé metody dojdeme nakonec k jedné rovnici o jedné neznámé.

Cílem tohoto článku je jisté zobecnění sčítací metody, které nám umožní řešit lineární rovnice úpravou jisté soustavy čísel, skládající se z koeficientů při neznámých a pravých stran rovnic. Položíme si však problém v obecnější formě, než jste to prováděli ve škole. Budeme totiž uvažovat soustavu lineárních rovnic o libovolném počtu neznámých a libovolném počtu rovnic. Bývá zvykem neznámé označovat písmeny z konce abecedy (x, y, z, u, \dots). Abychom dosáhli přehledný zápis rovnice o n neznámých (a také, abychom nemusili vymýšlet pro ně n různých písmen), označíme je x_1, x_2, \dots, x_n - obecně x_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Je ovšem samozřejmé, že při konkrétně daném n uijeme i označení x, y, z, \dots . Pro přehlednost a snadnou orientaci označíme koeficienty při neznámých symbolem a_{ij} , kde první index i udává pořadí rovnice v dané soustavě, druhý index j vyjadřuje koeficient při neznámé x_j ; tak na př. a_{35} (čteme: a tři pět) bude vyjadřovat koeficient v třetí rovnici při neznámé x_5 . Pravé strany rovnic označíme číslem c_i (index i vyjadřuje zase pořadí rovnice). Mějme dānu soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
 a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
 a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & c_3 \\
 \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
 a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m .
 \end{array} \tag{1}$$

Abychom se mohli dále krátce a účelně vyjadřovat, zavedeme si některé pojmy jež jste většinou ve škole intuitivně vytušili, aniž jste si je přímo definovali. Potřebu těchto definic ukážeme si na několika jednoduchých příkladech.

Soustava

$$x + 2y = 5$$

$$3x - y = 1$$

má, jak snadno zjistíme, právě jedno řešení $x = 1, y = 2$; uspořádanou skupinu dvou čísel $(1; 2)$ nazveme pak řešením naší soustavy. Situace není však vždy tak jednoduchá, jak ukáže další příklad:

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 10 .$$

Snadno nahlédneme, že každá dvojice čísel, vyhovujících první rovnici, vyhovuje též rovnici druhé (jež je dvojnásobkem první). První rovnici vyhovuje však nekonečně mnoho dvojic, na př. $(1; 2), (4; \frac{1}{2}), (5; 0), (-3; 4)$. Všechny takové dvojice je možné vyjádřit obecně tak, že jednu neznámou, třeba y , volíme libovolně a pomocí této zvolené neznámé vypočítáme druhou neznámou; v našem případě bude $x = 5 - 2y$. Každé řešení naší soustavy lze pak vyjádřit uspořádanou dvojicí $(5 - 2y; y)$, kde y je libovolné číslo.

Mějme konečně soustavu

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 9$$

Snadno nahlédneme, že žádná dvojice, vyhovující první rovnici, nemůže vyhovovat rovnici druhé a naopak. Znamená to, že naše soustava nemá řešení.

Tím jsme ilustrovali v podstatě všechny případy, které se mohou při řešení lineárních rovnic vyskytnout. Vidíme, že bude třeba vypořádat se s dvěma otázkami: 1. co je to řešení soustavy, t. zn. pořádně definovat tento pojem, s nímž budeme neustále pracovat; 2. kdy má soustava (1) řešení (ať jedno nebo nekonečně mnoho) a kdy nemá žádné řešení - otázka existence řešení. Druhou otázku zodpovíme současně s nalezením řešení (pokud ovšem existuje) až na konci článku. Pojem řešení zavádí:

Definice 1. Ř e š e n í m soustavy (1) nazýváme každou uspořádanou skupinu n čísel (q_1, q_2, \dots, q_n) takových, že dosadíme-li do levých stran rovnic (1) za neznámé x_1, x_2, \dots, x_n čísla q_1, q_2, \dots, q_n , je výsledek dosazení roven pravé straně příslušné rovnice.

Další pojem si ilustrujeme zase na jednoduchém příkladě. Mějme třeba dvě soustavy lineárních rovnic, jednu tvořenou jednou rovnicí a druhou dvěma rovnicemi vždy se dvěma neznámými

$$x + 2y = 5 ; \quad \begin{array}{l} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 . \end{array}$$

Ihned vidíme, že každé řešení jedné soustavy je současně řešením soustavy druhé. Prakticky to znamená, že řešení třeba druhé soustavy lze převést na řešení jednodušší soustavy první. Pro takové dvojice soustav lineárních rovnic si zavedeme název definicí:

Definice 2. Dvě soustavy o témž počtu neznámých a libovolném počtu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m & b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \dots + b_{sn}x_n &= d_s \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

nazýváme ekvivalentní, jestliže každé řešení soustavy (1) je také řešením soustavy (2) a naopak.

Právě definovaný pojem ekvivalence lze rozšířit i na rovnice nelineární; pak však na př. rovnice $x = 2$ není ekvivalentní s rovnicí $x^2 = 4$; znamená to, že umocňování rovnice porušuje ekvivalenci.

Pojem ekvivalentních soustav lineárních rovnic bude pro nás velmi důležitý; podstata vykládané metody tkví právě v tom, že danou soustavu převedeme různými změnami v soustavu ekvivalentní s danou a to takovou, pro níž snadno nalezneme řešení. Musíme ovšem nejdříve vytknout ty úpravy, které převádějí jednu soustavu v soustavu s ní ekvivalentní. Poznamenejme jen, že všichni tyto úpravy znáte; užívali jste jich běžně při řešení soustavy o dvou i více neznámých, aniž jste jejich oprávnění nějak dokazovali. Tyto t. zv. dovolené změny shrnuje:

Věta 1. Dovolené úpravy zachovávající ekvivalenci soustav jsou:

- Záměna pořadí rovnic.
- Násobení některé rovnice číslem různým od nuly (tedy též i dělení nenulovým číslem).
- Přičtení (nebo odečtení) libovolného násobku jedné rovnice k libovolnému násobku rovnice jiné.
- Vynechat rovnici, jež je násobkem rovnice jiné.

Důkaz. Tvrzení a), b) jsou samozřejmá.

c) Přičtíme třeba k první rovnici soustavy (1) h násobek rovnice r -té ($2 \leq r \leq m$) této soustavy. Dostaneme tak soustavu (1'), lišící se od (1) jen v první rovnici, jež u (1') má tvar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n) = c_1 + hc_r. \quad (3)$$

α) Nechť nejdříve je (q_1, q_2, \dots, q_n) řešení soustavy (1), t. j. platí $a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n = c_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Pak je také $a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{n1}q_n + h(a_{r1}q_1 + a_{r2}q_2 + \dots + a_{rn}q_n) = c_1 + hc_r$; to však znamená, že (q_1, q_2, \dots, q_n) vyhovují rovnici (3) a že je tedy řešením soustavy (1').

β) Nechť $(q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ je řešením soustavy (1'). Uvažujme soustavu (1*), která vznikne ze soustavy (1') odečtením h násobku r -té rovnice (t. j. přičtením

($-h$) násobku) k první rovnici soustavy (1'). Pak podle α je $(q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ řešením soustavy (1*), jež je však identická se soustavou (1).

Vzhledem ke změně ad a) můžeme místo první rovnice uvažovat libovolnou rovnici.

d) Necht' třeba poslední, t. j. m -tá rovnice soustavy (1) je h násobkem rovnice r -té ($1 \leq r \leq m - 1$) a uvažujme soustavu (1'), vzniklou z (1) vynecháním m -té rovnice. Každé řešení soustavy (1) je zřejmě též řešením soustavy (1'). Je-li naopak $(q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ řešením soustavy (1'), musí $a_{i1} q'_1 + a_{i2} q'_2 + \dots + a_{in} q'_n = c_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$; pak je též (m -tá rovnice je h násobkem r -té) $a_{m1} q'_1 + a_{m2} q'_2 + \dots + a_{mn} q'_n = h(a_{r1} q'_1 + a_{r2} q'_2 + \dots + a_{rn} q'_n) = h c_r = c_m$. Jsou tudíž obě soustavy (1) a (1') ekvivalentní. Vzhledem k a) platí vlastnost dokázaná pro m -tou rovnici též pro libovolnou rovnici.

Uvědomíme-li si, že všechny dovolené změny a), b), c) se v soustavě (1) projeví jen v odpovídajících změnách koeficientů a_{ij} a pravých stran c_i rovnic, nahlédneme snadno, že lze místo se soustavou rovnic pracovat jen se soustavou, složenou z koeficientů a pravých stran rovnic

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} & c_3 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right\|, \quad (4)$$

v níž svíslou čarou oddělíme pravé strany rovnic. Takovou soustavu čísel nazveme *maticí* soustavy (1) typu $(m, n + 1)$, m řádků, $n + 1$ sloupců. Při tom j -tý sloupec ($1 \leq j \leq n$) je složen z koeficientů při neznámé x_j , i -tý řádek z koeficientů a pravé strany i -té rovnice dané soustavy.

Úpravy rovnic, vyjádřené větou 1. se projeví v odpovídajících úpravách řádků matice (4). Nazveme-li matice dvou ekvivalentních soustav také ekvivalentní, lze větě 1. dát tvar.

Věta 2. Matice přejde v matici ekvivalentní při těchto změnách:

- Výměna řádků matice.
- Násobení některé řádky nenulovým číslem (t. j. i dělení).
- Přičtení libovolného násobku jednoho řádku k libovolnému násobku řádku jiného.
- Vynechání řádku, který je násobkem řádku jiného.

Poznámka 1. Někdy je výhodné provést v matici (4) i výměnu sloupců (kromě sloupce pravých stran). Tato změna porušuje sice ekvivalenci matic a tím i ekvivalenci příslušných soustav, ale víme jak. Výměna j -tého a s -tého sloupce ($1 \leq j \leq n$, $1 \leq s \leq n$, $j \neq s$) v matici (4) znamená výměnu těchto sloupců v soustavě (1), čímž dostaneme soustavu (1'). Tato soustava není ekvivalentní s (1), ale souvisí s ní takto: je-li $(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_j, q_{j+1}, \dots, q_{s-1}, q_s, q_{s+1}, \dots, q_n)$ řešením soustavy (1), bude $(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_s, q_{j+1}, \dots, q_{s-1}, q_j, q_{s+1}, \dots, q_n)$ řešením soustavy (1'). Při těchto změnách je užitečné vyznačovat nad jednotlivými sloupci takto získaných matic příslušné neznámé.

Přístupme nyní k praktickému provedení eliminace pro soustavu (1), přičemž úpravy provádíme s maticí (4). Především změnou pořadí rovnic lze vždy dosáhnout toho, že $a_{11} \neq 0$ (jinak by se v soustavě (1) nevyskytovala vůbec neznámá x_1). Násobme první řádek postupně čísly

$$\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

a vzniklé násobky odečteme od 2., 3., ..., m -tého řádku. První člen v r -tém řádku ($2 \leq r \leq m$) je potom

$$a_{r1} - \frac{a_{r1}}{a_{11}} a_{11} = 0$$

Vznikne tak matice ekvivalentní s původní ve tvaru

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & d_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & & b_{3n} & d_3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & & b_{mn} & d_m \end{array} \right\| \quad (5)$$

Zde je $b_{ij} = a_{ij} - a_{1j} \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $d_i = c_i - c_1 \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ pro $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Matice (5) je maticí soustavy ekvivalentní s (1) jednodušší tím, že je eliminována neznámá x_1 .

Týž postup opakujeme s druhým řádkem. Násobme tento řádek postupně čísly $\frac{b_{i2}}{b_{22}}$, a vzniklé násobky odečteme od i -té řádky (je-li aspoň jedno z čísel $b_{i2} \neq 0$, lze změnou řádků dosáhnout vždy toho, že $b_{22} \neq 0$; kdyby všechna $b_{i2} = 0$, vyměníme sloupce, čímž sice porušíme ekvivalenci, ale víme jak). Tím vznikne matice

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & & c_{3n} & e_3 \\ 0 & 0 & c_{43} & & c_{4n} & e_4 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & c_{m3} & \dots & c_{mn} & e_m \end{array} \right\|$$

Zde je $c_{ij} = b_{ij} - b_{2j} \frac{b_{i2}}{b_{22}}$, $e_i = d_i - d_2 \frac{b_{i2}}{b_{22}}$ pro $3 \leq i \leq m$, $2 \leq j \leq n$.

Tato matice je maticí soustavy ekvivalentní s (1), v níž jsou eliminovány neznámé x_1, x_2 .

Opakováním celého postupu, v němž po každém kroku lze vynechat řádek, který by byl násobkem řádku jiného, dospějeme konečně k matici o r řádcích ($r \leq m$) jednoho z těchto tří tvarů (koeficienty i pravé strany jsou označeny jednotně)

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1r} & \dots & A_{1n} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2r} & \dots & A_{2n} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3r} & \dots & A_{3n} & B_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{rr} & & A_{rn} & B_r \end{array} \right\| \quad (6)$$

při $r < n$, nebo

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1,n-1} & A_{1n} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2,n-1} & A_{2n} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & & A_{3,n-1} & A_{3n} & B_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & A_{nn} & B_n \end{array} \right\| \quad (7)$$

při $r = n$, nebo

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} & A_{1n} & B_1 \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} & A_{2n} & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & A_{nn} & B_n \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & B_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & B_r \end{array} \right\| \quad (8)$$

při $r > n$, kde aspoň jedno z čísel $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_r$ je různé od nuly (jinak by to byl typ (7)).

Výsledek úprav lze popsat tak, že převedeme danou matici dovolenými úpravami na matici, v jejíž hlavní úhlopříčce, tvořené členy s oběma indexy stejnými, jsou čísla různá od nuly a „pod“ hlavní úhlopříčkou jsou samé nuly. Výsledná matice představuje soustavu rovnic buď ekvivalentní s danou soustavou, nebo při užití změn podle poznámky 1. soustavu, jejíž řešení je - až na pořadí, přičemž víme jak - totožné s řešením dané soustavy. Podívejme se, co nám každý z výsledných tří typů říká o řešení dané soustavy.

Typ (6) vyjadřuje soustavu

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + & \dots + A_{1r} x_r + A_{1,r+1} x_{r+1} + & \dots + A_{1n} x_n = B_1 \\ & A_{22} x_2 + & \dots + A_{2r} x_r + A_{2,r+1} x_{r+1} + & \dots + A_{2n} x_n = B_2 \end{aligned} \quad (6')$$

$$A_{rr} x_r + A_{r,r+1} x_{r+1} + & \dots + A_{rn} x_n = B_r .$$

Při užití změn podle poznámky 1. vyznačíme ovšem příslušné výměny neznámých; dále již toto mlčky předpokládáme.

V poslední r -té rovnici soustavy (6') lze z $(n - r + 1)$ neznámých x_r, x_{r+1}, \dots, x_n volit $(n - r)$ neznámých libovolně a zbývající neznámou pomocí jich z této rovnice vypočítat. Volíme-li $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, bude $x_r = \frac{1}{A_{rr}} (B_r - A_{r,r+1} x_{r+1} - \dots - A_{rn} x_n)$. Z předposlední rovnice vypočítáme pak x_{r-1} (bude zase vyjádřeno pomocí x_{r+1}, \dots, x_n); z $(r - 2)$ rovnice vypočítáme x_{r-2} atd, až z první vypo-

čítáme x_1 . Vidíme, že v tomto případě má soustava (1) nekonečně mnoho řešení (vzhledem k libovolnosti volených neznámých).

Typ (7) vyjadřuje soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 + & + A_{1n} x_n = B_1 \\ & A_{22} x_2 + A_{23} x_3 + & + A_{2n} x_n = B_2 \\ & A_{33} x_3 + & + A_{3n} x_n = B_3 \end{aligned} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} A_{n-1, n-1} x_{n-1} + A_{n-1, n} x_n &= B_{n-1} \\ A_{nn} x_n &= B_n . \end{aligned}$$

Z poslední rovnice vypočítáme $x_n = \frac{B_n}{A_{nn}}$, z předposlední x_{n-1} atd, až z první vypočítáme x_1 . V tomto případě má daná soustava právě jedno řešení.

Typ (8) nám říká, že daná soustava nemůže mít řešení, neboť nemohou platit rovnice $B_i = 0$ pro $i = n + 1, n + 2, \dots, r$.

Celý tento obecně vyložený postup si objasníme na několika příkladech. Abychom nemusili provádět dělení a vyhnuli se tak počítání se zlomky, snažíme se, pokud to ovšem lze, provést nejdříve úpravu tak, aby pro první krok byl $a_{11} = 1$, pro druhý krok $b_{22} = 1$ atd.

Příklad 1. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3 x_1 - 5 x_2 + 4 x_3 - 14 x_4 + 8 x_5 &= 11 \\ 5 x_1 + 10 x_2 + 8 x_3 - 35 x_4 + 7 x_5 &= 4 \\ 7 x_1 - 15 x_2 - 12 x_3 - 20 x_4 + 4 x_5 &= 23 \\ 8 x_1 + 45 x_2 + 36 x_3 - 85 x_4 + 17 x_5 &= -11 \\ 9 x_1 &- 8 x_3 - 41 x_4 + 3 x_5 = 16 \end{aligned}$$

Matice dané soustavy s vyznačenými neznámými je

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 3 & -5 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 5 & 10 & 8 & -35 & 7 & 4 \\ 7 & -15 & -12 & -20 & 4 & 23 \\ 8 & 45 & 36 & -85 & 17 & -11 \\ 9 & 0 & -8 & -41 & 3 & 16 \end{array} \right\|$$

K eliminaci bude nejvýhodnější druhý sloupec: vyměňme proto první sloupec s druhým (výměnu označme nadepsáním příslušných neznámých):

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -5 & 3 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 10 & 5 & 8 & -35 & 7 & 4 \\ -15 & 7 & -12 & -20 & 4 & 23 \\ 45 & 8 & 36 & -85 & 17 & -11 \\ 0 & 9 & -8 & -41 & 3 & 16 \end{array} \right\|$$

Násobme první sloupec postupně čísly 2; -3; 9 a přičtěme k 2. 3. a 4. řádku; dostaneme tak (první a pátý řádek se nemění):

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -5 & 3 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 0 & 11 & 16 & -63 & 23 & 26 \\ 0 & -2 & -24 & 22 & -20 & -10 \\ 0 & 35 & 72 & -211 & 89 & 88 \\ 0 & 9 & -8 & -41 & 3 & 16 \end{array} \right\|$$

Dělme třetí řádek (-2) a vyměňme jej s druhým:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -5 & 3 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 12 & -11 & 10 & 5 \\ 0 & 11 & 16 & -63 & 23 & 26 \\ 0 & 35 & 72 & -211 & 89 & 88 \\ 0 & 9 & -8 & -41 & 3 & 16 \end{array} \right\|$$

Abychom zmenšili čísla ve třetím a čtvrtém řádku, odečteme od čtvrtého řádku trojnásobek třetího a pak od třetího odečteme pátý řádek:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -5 & 3 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 12 & -11 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & 24 & -22 & 20 & 10 \\ 0 & 2 & 24 & -22 & 20 & 10 \\ 0 & 9 & -8 & -41 & 3 & 16 \end{array} \right\|$$

Protože třetí i čtvrtý řádek je násobek druhého řádku, lze je vynechat; odečteme-li pak devítinásobek druhého řádku od třetího, dostaneme konečně:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -5 & 3 & 4 & -14 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 12 & -11 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -116 & 58 & -87 & -29 \end{array} \right\|$$

Dělením třetího řádku číslem (-29) dostaneme matici typu (6), vyjadřující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -5x_2 + 3x_1 + 4x_3 - 14x_4 + 8x_5 &= 11 \\ x_1 + 12x_3 - 11x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Tato soustava, ekvivalentní se soustavou danou, je podstatně jednodušší.

Volíme-li v poslední rovnici třeba x_4, x_5 , vypočítáme $x_3 = \frac{1 + 2x_4 - 3x_5}{4}$; z druhé rovnice vypočítáme $x_1 = 5 - 12x_3 + 11x_4 - 10x_5$, t. j. $x_1 = 2 + 5x_4 - x_5$; z první rovnice vypočítáme konečně $x_2 = \frac{3x_1 + 4x_3 - 14x_4 + 8x_5 - 11}{5}$, t. j. $x_2 = \frac{-4 + 3x_4 + 2x_5}{5}$

Daná soustava má nekonečně mnoho řešení, jež lze všechna vyjádřit

$$\left(2 + 5x_4 - x_5 ; \frac{-4 + 3x_4 + 2x_5}{5} ; \frac{1 + 2x_4 - 3x_5}{4} ; x_4 ; x_5 \right),$$

kde x_4, x_5 jsou libovolná.

Tak na př. pro $x_4 = 0, x_5 = 1$ dostaneme řešení $(1; -\frac{2}{5}; -\frac{1}{2}; 0; 1)$ nebo pro $x_4 = 1, x_5 = -2$ bude řešení $(9; -1; \frac{9}{4}; 1; -2)$, atd.

(Dokončení)

Dr. Miloš Lánský, Praha:

O řešení jistých rovnic s absolutními hodnotami

Budeme se zabývat rovnicemi o jedné neznámé. Všechna čísla, která se zde vyskytují, budou reálná. Lineární rovnicí rozumíme zpravidla rovnici

$$Ax - B = 0,$$

kde A a B jsou čísla, při čemž A je číslo různé od nuly. Kořenem takové rovnice rozumíme číslo x , pro něž platí

$$x = \frac{B}{A}.$$

Tento kořen vypočteme, převedeme-li číslo B na pravou stranu rovnice a dělíme celou rovnici číslem A . Je patrné, že předpoklad o tom, že číslo A je nenulové, je pro řešení rovnice podstatný, neboť nulou dělit nesmíme. Za tohoto předpokladu má tedy lineární rovnice jediný kořen $x = \frac{B}{A}$. Kdyby bylo $A = 0, B \neq 0$, neměla

by rovnice $Ax - B = 0$ žádné řešení, zatím co vztah $Ax - B = 0$ je v případě $A = B = 0$ splněn identicky pro všechna možná čísla x .

Abychom mohli zavést rovnice s absolutními hodnotami, zopakujeme si, co rozumíme pojmem „absolutní hodnota reálného čísla“. Je-li c nějaké reálné číslo, pak absolutní hodnotu tohoto čísla označujeme znakem $|c|$, t. j. vepíšeme znak c mezi dvě svíslé úsečky. Tímto symbolem označujeme vzdálenost čísla c od nuly. Je-li na př. $c = 4$, pak je $|c| = 4$, je-li $c = -4$, je rovněž $|c| = -(-4) = 4$.

Obecně, je-li $c \geq 0$, pak je $|c| = c$;

je-li $c \leq 0$, pak je $|c| = -c$.

Tato definice zahrnuje i případ, kdy je $c = 0$. Zřejmě je vždy $|c| \geq 0$, při čemž platí $|c| = 0$ právě tehdy, je-li $c = 0$.

Řešíme-li nyní rovnici, v níž se vyskytuje absolutní hodnota nějakého výrazu, musíme vždy rozlišovat, zda je tento výraz nekladný či nezáporný.

Řešme na příklad rovnici

$$2x + 11 - 4|x + 3| = 0 \tag{1}$$

Je-li výraz $x + 3$ nekladný, t. j. je-li $x \leq -3$, pak je $|x + 3| = -(x + 3)$ a rovnice (1) přejde do tvaru

$$2x + 11 + 4(x + 3) = 0$$

Odtud dostaneme po jednoduchých úpravách $x = -\frac{23}{6} < -3$.

Je-li výraz $x + 3$ nezáporný, t. j. $x \geq -3$, pak je $|x + 3| = x + 3$ a rovnice (1) přejde v tomto případě do tvaru

$$2x + 11 - 4(x + 3) = 0.$$

Odtud máme $x = -\frac{1}{2} > -3$.

Dostali jsme tedy dva kořeny rovnice (1)

$$x = -\frac{23}{6} \text{ a } x = -\frac{1}{2}$$

Tímto příkladem jsme objasnili hlavní myšlenku postupu při řešení rovnic s absolutními hodnotami.

Rovnice (1) je speciálním případem rovnice

$$a_0(x - b_0) + a_1|x - b_1| = 0. \quad (2)$$

Skutečně, položíme-li $a_0 = 2$, $b_0 = -\frac{11}{2}$, $a_1 = -4$, $b_1 = -3$, dostaneme rovnici (1).

Snadno sestavíme i rovnice obsahující více absolutních hodnot. Tak na př. rovnici se dvěma absolutními hodnotami bude rovnice

$$a_0(x - b_0) + a_1|x - b_1| + a_2|x - b_2| = 0. \quad (3)$$

Budeme se nyní zabývat rozбором rovnice (3).

Můžeme zcela dobře předpokládat, že čísla b_1 a b_2 nejsou stejná. Kdyby totiž bylo $b_1 = b_2$, pak by se sobě rovnaly i výrazy $x - b_1$ a $x - b_2$ a rovnice (3) by se stala rovnicí s jednou absolutní hodnotou typu (2). Protože označení čísel b_1 a b_2 je v naší moci, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je b_1 menší než b_2 .

Budeme nyní rozlišovat tři případy.

1. Je-li x menší nebo rovno b_1 (a tedy menší než b_2), pak je $|x - b_1| = -(x - b_1)$, $|x - b_2| = -(x - b_2)$ a rovnici (3) můžeme přepsat takto:

$$(a_0 - a_1 - a_2)x - (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2) = 0. \quad (4)$$

Položme pro stručnost $A_0 = a_0 - a_1 - a_2$, $B_0 = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2$, takže rovnici (4) zapíšeme ve tvaru

$$A_0x - B_0 = 0. \quad (5)$$

Řešme nyní rovnici (5).

a) Je-li $A_0 \neq 0$, pak z rovnice (5) plyne, že je $x = \frac{B_0}{A_0}$. To však nestačí k tomu, abychom prohlásili, že číslo $\frac{B_0}{A_0}$ je kořenem rovnice (3). Nesmíme zapomenout, že

jsme vyšli z předpokladu, že je x menší nebo rovno b_1 . Je-li tedy $\frac{B_0}{A_0} \leq b_1$, je číslo

$\frac{B_0}{A_0}$ kořenem rovnice. Není-li však tato podmínka splněna, pak rovnice (3) nemá žádný kořen menší nebo rovný b_1 .

b) Je-li $A_0 = 0$, $B_0 \neq 0$, je z rovnice (5) patrné, že také v tomto případě neexistuje kořen menší nebo rovný b_1 .

c) Je-li $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, pak každé číslo menší nebo rovné b_1 je kořenem rovnice a ta má tedy nekonečně mnoho kořenů.

II. Je-li $b_1 \leq x \leq b_2$, pak je

$$|x - b_1| = x - b_1, \quad |x - b_2| = -(x - b_2).$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (3), dostaneme rovnici

$$(a_0 + a_1 - a_2)x - (a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_2 b_2) = 0 \quad (6)$$

Zavedeme-li tentokrát zkratky

$$A_1 = a_0 + a_1 - a_2, \quad B_1 = a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

můžeme rovnici (6) zapsat ve tvaru

$$A_1 x - B_1 = 0. \quad (7)$$

Rozborem rovnice (7) dostaneme podobné výsledky jako v případě I.

Je-li $A_1 \neq 0$ a platí nerovnost $b_1 \leq \frac{B_1}{A_1} \leq b_2$, je číslo $\frac{B_1}{A_1}$ jediným kořenem rovnice (3) v rozmezí od b_1 do b_2 . Je-li $\frac{B_1}{A_1} < b_1$, nebo je-li $\frac{B_1}{A_1} > b_2$, jakož i v případě, kdy je $A_1 = 0$ a $B_1 \neq 0$, nemá rovnice v daném rozmezí žádný kořen. Je-li $A_1 = B_1 = 0$, má rovnice nekonečně mnoho kořenů.

III. Je-li $x \geq b_2$, pak zavedením zkratk

$$A_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad B_2 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (8)$$

přejde rovnice (3) na tvar

$$A_2 x - B_2 = 0 \quad (9)$$

a rozbor této rovnice vede podobně jako v případě I. a II. k závěrům, že rovnice (3) má jediný kořen $\frac{B_2}{A_2}$ větší nebo rovný b_2 právě tehdy, je-li

$$A_2 \neq 0, \quad \frac{B_2}{A_2} \geq b_2.$$

Je-li $A_2 = B_2 = 0$, má nekonečně mnoho takových kořenů. V ostatních případech rovnice kořen v daném rozmezí nemá.

Z uvedeného rozboru rovnice (3) je patrné, že řešení takových rovnic můžeme s výhodou provádět pomocí schematu daného touto tabulkou:

	A_i	B_i	$a_i b_i$	b_i	$\frac{B_i}{A_i}$	x
	A_0	B_0	$a_0 b_0$	b_0	$\frac{B_0}{A_0}$	
	A_1	B_1	$a_1 b_1$	b_1		
	A_2	B_2	$a_2 b_2$	b_2		

$$A_0 = a_0 - a_1 - a_2, \quad B_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

$$A_1 = a_0 + a_1 - a_2, \quad B_1 = a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

$$A_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad B_2 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Příklad 1: $2(x + 3) + 3|x - 1| - 4|x - 5| = 0$.

	A_i	B_i	$a_i b_i$	b_i	$\frac{B_i}{A_i}$	x
2	3	11	-6	-3	$\frac{11}{3}$	-
3	9	17	3	1		
-4	1	-23	-20	5		
					$-\frac{23}{1}$	-

Příklad 2: $2(x - 1) + 3|x + 2| + 5|x - 7| = 0$.

	A_i	B_i	$a_i b_i$	b_i	$\frac{B_i}{A_i}$	x
2	-6	-27	2	1	$\frac{9}{2}$	-
3	0	-39	-6	-2		
5	10	31	35	7		
					$\frac{31}{10}$	-

Příklad 3: $(x + 2) - 2|x - 5| + |x - 12| = 0$.

	A_i	B_i	$i b_i$	b_i	$\frac{B_i}{A_i}$	x
1	2	-4	-2	-2	-2	-2
-2	-2	-24	-10	5		12
1	0	0	12	12	-	$x \geq 12$

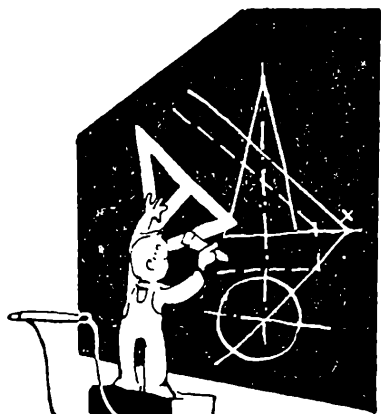
Tabulek užíváme tak, že porovnáváme hodnoty obsažené ve sloupci $\frac{B_i}{A_i}$ s hodnotami ve sloupci b_i . Tak v případě 1. z toho důvodu, že $\frac{B_0}{A_0} = \frac{11}{3}$ není menší než $b_1 = 1$, neexistuje žádný kořen menší 1. Na druhé straně, protože $\frac{B_1}{A_1} = \frac{17}{9}$ leží mezi $b_1 = 1$ a $b_2 = 5$, je $\frac{17}{9}$ jediným kořenem rovnice v intervalu mezi 1 a 5. Konečně z toho důvodu, že $\frac{B_2}{A_2} = -\frac{23}{1}$ není větší než $b_2 = 5$, nemá rovnice větší kořen než 5.

Metodu uvedenou v předešlém odstavci snadno zobecníme.

Čtenář se může pokusit sám o zdůvodnění oprávněnosti naší metody na tomto příkladu:

Příklad 4: $3(x - 1) + 2|x + 1| - 3|x - 1| - 4|x - 5| + |x - 6| = 0$.

	A_i	B_i	$a_i b_i$	b_i	$\frac{B_i}{A_i}$	x
3	7	22	3	1	$\frac{22}{7}$	-
2	11	18	-2	-1		$\frac{18}{11}$
-3	5	12	-3	1	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$
-4	-3	-28	-20	5	$\frac{28}{3}$	-
1	-1	-16	6	6	16	16



Deskriptivní geometrie

Doc. dr. Karel Havlíček, Praha:

O křivosti čar

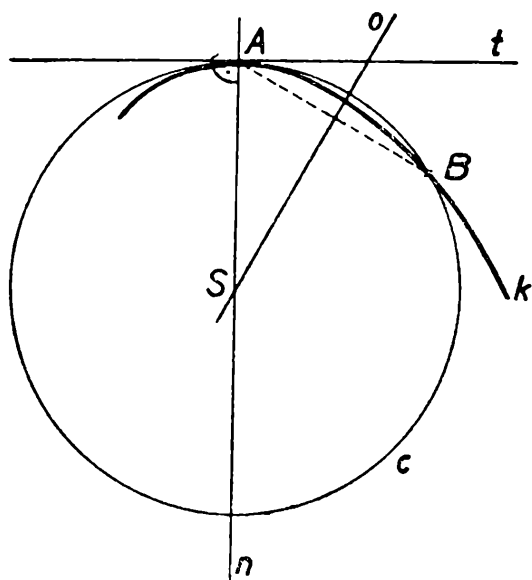
Při rýsování elipsy užíváte ve škole s výhodou t. zv. *kružnic oskulačních* čili *kružnic křivosti*, jimiž nahrazujete elipsu v okolí jejích vrcholů (viz učebnici deskriptivní geometrie pro devátý postupný ročník, str. 28, kterou vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze 1957 a jejíž autoři jsou E. Kraemer, St. Horák a Fr. Hradecký). Někdy tak činíte s větším, jindy s menším zdarem. Vždycky však si musíte být vědomi toho, že nahrazení oblouku elipsy obloukem kružnice je jen přibližné. Z textu uvedené učebnice je to sice patrné, ale pro konstrukci oskulační kružnice je tam uveden jen předpis; na bližší vysvětlení není ve škole dost času. A snad leckterého studenta napadla přitom otázka, proč používáme při tomto rýsování právě těch zcela určitých a nikoli jiných kružnic.

Ani tento náš dnešní článek vám na to nedá plnou odpověď, ta by vyžadovala užití rozsáhlého matematického aparátu. Pokusíme se však objasnit si i bez výpočtů příslušné pojmy aspoň na příkladech. Neomezíme se přitom jenom na elipsu, všimneme si křivek v rovině vůbec a navážeme na výklad, který jsem uvedl v minulém čísle tohoto časopisu pod názvem „*O tečnách a normálách křivek*“ (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 36, str. 102). K nahrazení křivky v okolí některého jejího bodu čarou jednodušší jsme tam použili přímky, ale zároveň jsme si uvědomili, že tečna vystihuje jen velmi nedokonale průběh křivky v okolí bodu dotyku. Vzniká však přirozená otázka, nemůžeme-li k stejnému účelu použít jiné čáry než přímky. Vedle přímek nejlépe umíme rýsovat kružnice; ptejme se tedy, která ze všech kružnic nejvíce se přiblíží tvaru dané křivky v okolí některého jejího bodu. Čtenář snadno uhodne, že tuto kružnici budeme hledat mezi těmi kružnicemi, které se dané křivky ve zkoumaném bodě dotýkají, které tedy mají v tomto bodě s danou křivkou společnou tečnu. Na obr. 1 je dána křivka k a předpokládejme, že v jejím bodě A známe její tečnu t . Každá kružnice, která se křivky k dotýká v bodě A , dotýká se v tomtéž bodě A zároveň i tečny t a má tedy svůj střed S na normále n křivky k sestrojené v bodě A . Takových kružnic je ovšem nekonečně mnoho. Určíme mezi nimi nejdříve takovou kružnici c , která prochází ještě některým dalším bodem B zvoleným na naší křivce k . Její střed je průsečíkem zmíněné už normály n s osou souměrnosti úsečky AB ; označme tuto osu souměrnosti o . Kružnice c , dotýkající se tečny t v bodě A a procházející bodem B , je těmito podmínkami určena jednoznačně.

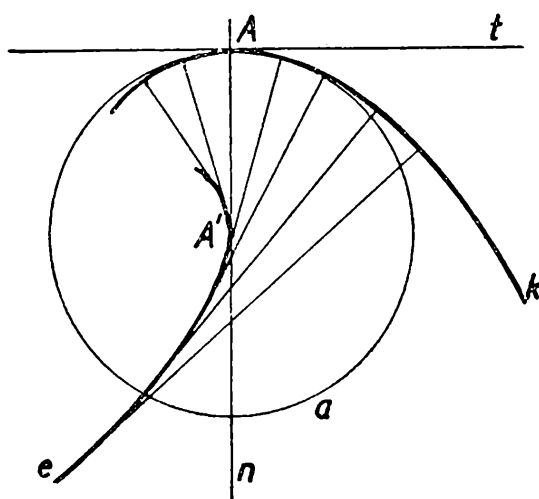
Užijme nyní pro tuto kružnici c podobného postupu, jakého jsme v minulém článku užili pro sečnu křivky k . Představme si, že bod B se pohybuje po křivce k

tak, že se blíží k bodu A . Podobně jako sečna AB se přitom blíží k tečně t , jež je tedy limitním případem sečny, tak také kružnice c se bude při tomto pohybu bodu B měnit tak, že se přiblíží jisté kružnici, kterou označíme a ; její konstrukce nás zajímá především. K tomu musíme znát střed kružnice a . Protože bod A i tečna t a normála n jsou nezávislé na pohybu bodu B , leží při každé poloze bodu B střed S kružnice c na pevné přímce n . Při pohybu bodu B po křivce k mění i střed S svoji polohu na normále n a my ovšem hledáme jeho výslednou polohu. Hledáme tedy na normále n bod A' , k němuž se blíží střed S při popsání změnách. Tento bod A' , existuje-li, je zřejmě středem hledané limitní kružnice a (viz obr. 2).

A zde se naskýtají dvě otázky. Jaký je význam kružnice a a jak najdeme její střed A' na normále n ? Význam kružnice k je jasný. Ze všech kružnic, jež se křivky k v bodě A dotýkají, vystihuje kružnice a nejlépe tvar křivky k v okolí bodu A . Tak jako o tečně se říkalo, že je spojnicí dvou nekonečně blízkých bodů křivky, tak ve starších pojednáních se názorně říkalo, že tato zvláštní kružnice a má s křivkou k tři nekonečně blízké body společné. To lze objasnit takto: každá z kružnic c má



Obr. 1



Obr. 2

s křivkou k v bodě A dva nekonečně blízké body společné (neboť tyto křivky mají společnou tečnu) a v případě kružnice a přibyl k nim do bodu A ještě další průsečík B zkoumaných kružnic s křivkou k . I když tato slova nevyhovují dnešní přesnosti matematické řeči, přece stačí k pochopení významu kružnice a .

Z obr. 2 je patrné, že kružnice a se daleko lépe přimyká ke křivce k než pouhá tečna, která udává vlastně jen směr křivky v okolí bodu A . Kružnice a už vystihuje i zakřivení křivky k v bodě A a proto se nazývá *kružnice křivosti* křivky k v bodě A . Její střed, bod A' , nazývá se *střed křivosti* křivky k v bodě A . Pro kružnici křivosti užívá se často též cizího názvu *kružnice osculační*.¹⁾

Bližší určení středu křivosti snadno pochopíte, vrátíte-li se na chvíli k obr. 1.

¹⁾ Původ tohoto názvu je zajímavý. Slovo *osculum* znamená v latině polibek. Doslova přeloženo znamenala by tedy kružnice osculační kružnici líbající danou křivku; tím se vsutku částečně vystihuje těsnější sblížení obou křivek.

Střed S kružnice c byl tam sestrojen jako průsečík normály n s osou o souměrnosti úsečky AB . Uvědomíte-li si, že tato osa o se při dostatečně malé vzdálenosti bodů A, B velmi málo liší od další normály křivky k , uznáte, že u obvyklých křivek jeví se bod S jako průsečík normály n s některou jinou k ní velmi blízkou normálou téže křivky. Ale všechny normály křivky k obalí její evolutu e , jak bylo vyloženo v minulém článku. Není tedy divu, že v mezním případě, splyne-li bod B s bodem A , přejde průsečík dvou blízkých normál křivky k v bod, ve kterém se pevná normála n dotýká evoluty e . Čtenář, který nemá prozatím předpoklady ke studiu diferenciální geometrie, musí mi na tomto místě prostě uvěřit, že všechny tyto výsledky lze potvrdit výpočtem. Platí tedy (viz opět obr. 2):

Střed křivosti křivky k v bodě A je bod A' , v němž se normála n křivky k sestrojena v bodě A dotýká evoluty e křivky k .

Jinými slovy můžeme to říci takto:

Evoluta e křivky k je souhrn středů křivosti jednotlivých bodů křivky k .

Protože však v matematice se nesmíme spoléhat na cizí výpočty, jsem přesvědčen, že čtenář, kterého zajímají výsledky zde uvedené, těší se již dnes na to, až si je bude jednou moci sám potvrdit vlastním výpočtem.

Všimněme si konečně kružnic křivosti ve vrcholech elipsy. Podle toho, co jsme právě poznali, vyplatilo by se sestrojiti nejdříve evolutu elipsy. Na obr. 3 jsou vyznačeny normály elipsy k v přibližně rovnoměrně rozložených bodech jednoho jejího kvadrantu (t. j. jedné její čtvrtiny) a je vyrýsována jejich obálka. Protože elipsa je souměrná podle svých os x, y , je podle nich souměrná i její evoluta a snadno ji tedy v obrázku doplníme. Vidíte, že zde má evoluta tvar jakési čtyřcípé hvězdy, jejíž hroty leží právě na osách x, y . Podle předcházejícího výkladu jsou tyto hroty středy křivosti vrcholů elipsy. Už v dávných dobách matematikové objevili, že tyto středy křivosti leží náhodou na přímce q , procházející průsečíkem tečen u, v sestrojených ve vrcholech elipsy, při čemž přímka q je kolmá na spojnici obou příslušných vrcholů (označení je z obr. 3 zřejmé). A to je konstrukce vám známá ze školy.

Pomocí kružnic křivosti můžeme zavést ještě jeden v geometrii důležitý pojem. Na obr. 2 byla sestrojena kružnice křivosti křivky k v bodě A ; označili jsme ji tam písmenem a . Poloměr této kružnice se nazývá *poloměr křivosti* křivky k v bodě A ; označme ho písmenem ρ . Je tedy $\rho = AA'$, značí-li AA' délku úsečky s krajními body A a A' . Výraz

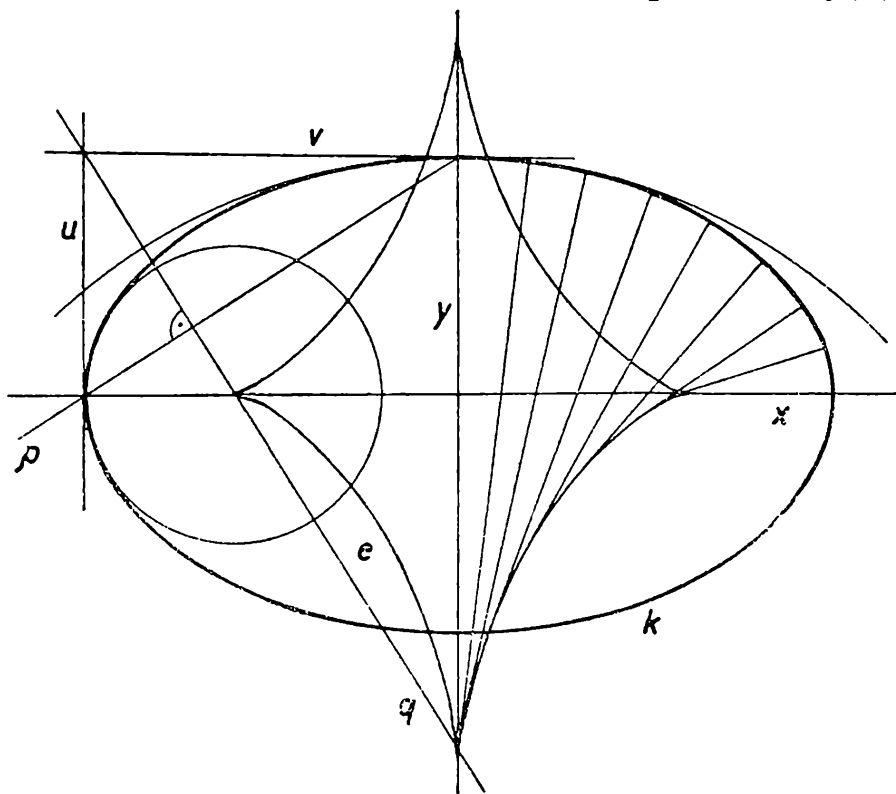
$$f = \frac{1}{\rho} \quad (\text{I})$$

nazývá se pak *křivost* křivky k v bodě A .

Je tedy křivost křivky vyjádřena jakýmsi číslem, jímž, stručně řečeno, měříme velikost zakřivení křivky v příslušném bodě. Křivka k na obr. 2 má zřejmě v různých svých bodech různou křivost; roste-li poloměr křivosti, zmenšuje se křivost křivky v příslušných bodech; a obráceně, v bodech, kde křivost je větší, čili kde zakřivení křivky je prudší, je poloměr křivosti menší. Protože poloměr křivosti odměříte na příslušné normále od bodu křivky až k bodu dotyku normály s evolutou, snadno se přesvědčíte, že i elipsa v obr. 3 má v různých bodech téhož kvad-

rantu různě velikou křivost. Z konstrukce vám známé vypočítáte, že křivost elipsy ve vrcholu hlavní osy je rovna číslu $\frac{a}{b^2}$ a ve vrcholu vedlejší osy číslu $\frac{b}{a^2}$, značí-li zde a, b délky hlavní a vedlejší poloosy elipsy jako obvykle. Výpočet si proveďte sami jako cvičení; vystačíte při něm s běžnými vlastnostmi podobných pravoúhlých trojúhelníků, vyskytujících se v obr. 3.

A závěrem malý žert. Zeptejte se třeba maminky nebo někoho, kdo matematiku buď vůbec nestudoval nebo ji studoval jen málo, co soudí o tom, zda-li kružnice je ve všech svých bodech stejně křivá nebo ne. Jistě vám odpoví, že ano, že kružnice je ve všech svých bodech stejně zakřivena (proto se totiž dá kružnice otáčet sama v sobě). Dovedete to potvrdit výpočtem? Jistě že ano. Stačí v obr. 2 za křivku k zvolit kružnici o poloměru r . Protože kterékoli dvě normály kružnice procházejí jejím středem, je její střed zároveň středem křivosti pro všechny její body a křivost



Obr. 3

této kružnice je tedy podle rovnice (I) ve všech bodech rovna témuž číslu $\frac{1}{r}$. Na tomto příkladě vidíte, že měření křivosti křivky zavedli matematikové docela šikovně, dokonce tak, aby to odpovídalo i lidským představám laiků o křivosti čar.

Jozef Filip, Bratislava:

Pravouhlý priemet uhla

(Dokončení)

B. Pravouhlý priemet pravého uhla.

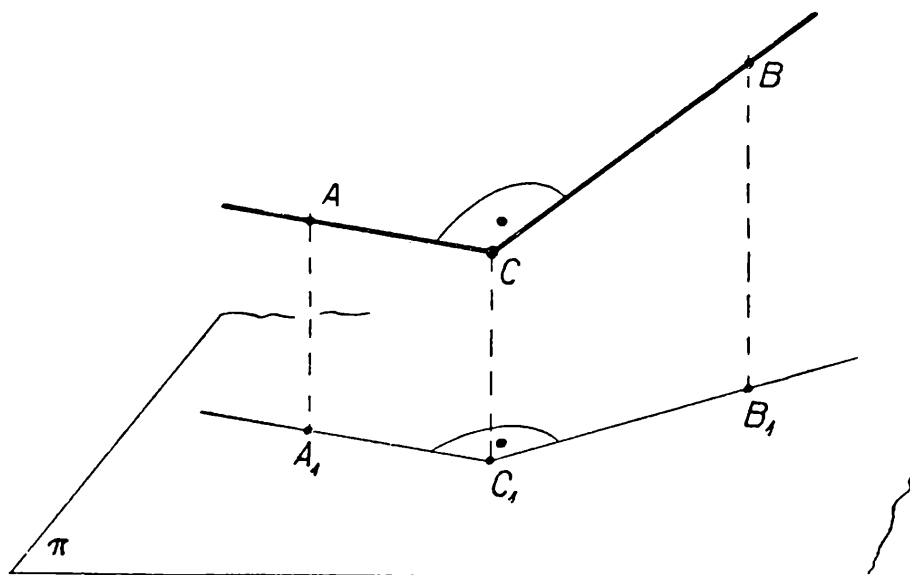
Predovšetkým dokážeme, že o priemete pravého uhla platí dôležitá veta:

Veta IX. Pravý uhol sa zobrazí v pravouhlom priemetaní do pravého uhla vtedy, keď aspoň jedno jeho rameno je rovnobežné s priemetňou a druhé nie je na ňu kolmé.

Dôkaz: Nech rameno CA pravého uhla $\sphericalangle ACB$ je rovnobežné s priemetňou π a druhé rameno CB nech zvierá s ňou kosý uhol (obr. 9). Pretože $AC \parallel \pi$, je $A_1C_1 \parallel AC$, $CC_1 \perp AC$. Priemetacia rovina $\sigma \perp \pi$ priamky BC obsahuje dve nerovobežné priamky BC , CC_1 , ktoré sú obe kolmé na priamku AC . Je teda $\sigma \perp AC$ a v dôsledku rovnobežnosti $A_1C_1 \parallel AC$ je tiež $\sigma \perp A_1C_1$. A pretože priemet C_1B_1 - ako časť priesečnice $\sigma \cdot \pi$ - leží tiež v rovine σ , je skutočne $C_1A_1 \perp C_1B_1$.

Keď ani jedno rameno pravého uhla nie je rovnobežné s priemetňou, platia o jeho pravouhlom priemete vety X, XI.

Veta X. Keď rovina ρ pravého uhla ACB nie je na priemetňu kolmá ani s ňou rovnobežná a spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom C uhol $\sphericalangle ACB$ rozdeľuje (na dva uhly ostré), je jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1C_1B_1$ vždy uhol tupý.



Obr. 9

Dôkaz: Nech spádová priamka s roviny ρ rozdelí pravý uhol $\sphericalangle ACB$ na dva ostré uhly $\sphericalangle ACL$, $\sphericalangle BCL$, takže $\sphericalangle ACL + \sphericalangle BCL = \sphericalangle ACB$. (L je ľubovoľný bod priamky s ležiaci vnútri uhla $\sphericalangle ACB$.)

O pravouhlých priemetoch $\sphericalangle A_1C_1L_1$, $\sphericalangle B_1C_1L_1$ platí podľa vety VI

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1C_1L_1 &> \sphericalangle ACL \\ \sphericalangle B_1C_1L_1 &> \sphericalangle BCL \end{aligned} \quad (2)$$

a podľa vety IV $\sphericalangle A_1C_1L_1 + \sphericalangle B_1C_1L_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1$.

Sčítaním nerovností (2) dostaneme:

$$\sphericalangle A_1C_1L_1 + \sphericalangle B_1C_1L_1 > \sphericalangle ACL + \sphericalangle BCL,$$

čiže

$$\sphericalangle A_1C_1B_1 > \sphericalangle ACB = R.$$

Pretože podľa vety I je $\sphericalangle A_1C_1B_1 < 2R$, je veta X dokázaná.

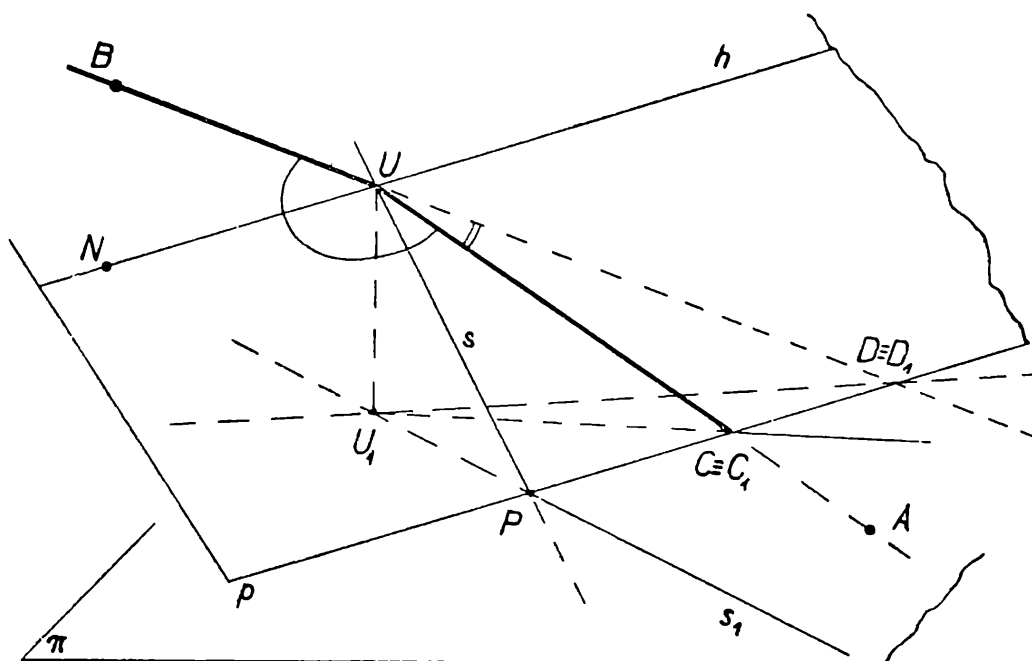
Veta XI. Keď rovina ρ pravého uhla $\sphericalangle ACB$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a hlavná priamka h roviny ρ vedená vrcholom C uhol $\sphericalangle ACB$ rozdeľuje na dva ostré uhly, je jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1C_1B_1$ vždy ostrý uhol.

Dôkaz vety XI prebieha veľmi podobne ako dôkaz vety X a preto ho ponecháme čitateľovi.

C. Pravouhlý priemet tupého uhla.

O veľkosti pravouhlého priemetu tupého uhla hovoria vety XII, XIII, XIV.

Veta XII. Keď rovina ρ tupého uhla $\sphericalangle AUB$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a keď spádová priamka s roviny ρ idúca vrcholom U rozdeľuje uhol $\sphericalangle AUB$ buď na uhol pravý a uhol ostrý alebo na dva uhly ostré, potom je uhol $\sphericalangle AUB$ vždy menší než jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1U_1B_1$.



Obr. 10

D ô k a z : 1. Nech rameno UA tupého uhla $\sphericalangle AUB$ splýva s hlavnou priamkou h roviny ρ . Potom spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom U rozdeľí uhol $\sphericalangle AUB$ na uhol $\sphericalangle AUK = R$ a na uhol $\sphericalangle BUK < R$. K je ľubovoľný bod priamky s zvolený vnútri uhla $\sphericalangle AUB$.

Pravý uhol $\sphericalangle AUK$ se premieta podľa vety IX do pravého uhla a ostrý uhol $\sphericalangle BUK$ se premieta podľa vety VI do uhla väčšieho. Z toho vyplýva, že je skutočne $\sphericalangle AUB < \sphericalangle A_1U_1B_1$.

2. Nech spádová priamka s roviny ρ rozdeľí tupý uhol $\sphericalangle AUB$ na dva ostré uhly. Označme $\sphericalangle BUC$ uhol vedľajší k uhlu $\sphericalangle AUB$, takže $\sphericalangle AUB + \sphericalangle BUC = 2R$. Uhol $\sphericalangle BUC$ je zrejme ostrý. Ak je uhol $\sphericalangle AUB$ rozdelený priamkou s na dva ostré uhly, musí byť ostrý uhol $\sphericalangle BUC$ rozdelený priamkou $h \perp s$ a ten se podľa vety VII premieta do uhla $\sphericalangle B_1U_1C_1 < \sphericalangle BUC$. Podľa

vety III je však $\sphericalangle A_1U_1B_1 + \sphericalangle B_1U_1C_1 = 2R$. Z toho vyplýva, že $\sphericalangle A_1U_1B_1 > \sphericalangle AUB^1)$.

Tým je skončený dôkaz vety XII.

Veta XIII. Keď rovina ρ tupého uhla $\sphericalangle AUB$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a keď hlavná priamka h roviny ρ vedená vrcholom U uhol $\sphericalangle AUB$ rozdeľuje buď na uhol pravý a ostrý alebo na dva uhly ostré, je uhol $\sphericalangle AUB$ vždy väčší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1U_1B_1$.

Dôkaz vety XIII je v obidvoch oddieloch 1., 2. veľmi podobný dôkazu vety XII a preto ho ponechávame čitateľovi.

Zbýva uvážiť, aký vzťah jestvuje medzi veľkosťou dutého uhla a veľkosťou jeho pravouhlého priemetu v tom prípade, že obe priamky hlavná i spádová roviny ρ rozdeľujú uhol na tri časti - jeden pravý uhol a dva ostré uhly.

O tomto vzťahu hovorí

veta XIV. Keď rovina ρ tupého uhla $\sphericalangle AUB$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a keď obe priamky hlavná i spádová roviny ρ vedené vrcholom U uhol $\sphericalangle AUB$ rozdeľujú na tri časti, potom uhol $\sphericalangle AUB$ je buď väčší, rovnako veľký alebo menší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1U_1B_1$.

V dôkaze, ktorý hneď vykonáme, ozrejníme, kedy ktorý prípad nastane.

D ô k a z : Nech polpriamky $UN \parallel p \equiv \rho \cdot \pi$, $UP \perp p$ rozdeľujú uhol $\sphericalangle AUB$ na časti: $\sphericalangle AUP < R$, $\sphericalangle PUN = R$, $\sphericalangle BUN < R$ (obr. 10). Rameno UA nech pretne priamku p v bode C a priamka BU v bode D . Body C, D nemôžu byť oddelené bodom $P \equiv s \cdot p$. Uhol $\sphericalangle CUD \equiv \sphericalangle AUD$, ktorý je k uhlu $\sphericalangle AUB$ výplnkový a teda ostrý, nie je rozdelený ani priamkou h , ani priamkou s roviny ρ a preto o ňom platí veta VIII. Podľa nej je uhol $\sphericalangle CUD$ väčší, rovnako veľký alebo menší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle C_1U_1D_1$. Potom o uhle $\sphericalangle AUB$ na základe vety III musí platiť: Uhol $\sphericalangle AUB$ je menší, rovnako veľký alebo väčší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle A_1U_1B_1$.

Tým je potvrdená správnosť vety XIV.

Aby sme zistili, ktorý z uvedených troch prípadov nastane, zostrojme na polpriamke PU_1 bod U_0 tak, aby $PU_0 = PU$ a opíšeme trojuholníku CDU_1 kružnicu k .

Pri dôkaze vety VIII sme dospeli k tomuto výsledku:

1. keď bod U_0 padne dovnútra kružnice k , je $\sphericalangle CUD > \sphericalangle C_1U_1D_1$;
2. keď bod U_0 padne na kružnicu k , je $\sphericalangle CUD = \sphericalangle C_1U_1D_1$;
3. keď bod U_0 padne zvonku kružnice k , je $\sphericalangle CUD < \sphericalangle C_1U_1D_1$.

V dôsledku toho a na základe vety III platí o uhle $\sphericalangle AUB$:

1. keď bod U_0 padne dovnútra kružnice k , je $\sphericalangle AUB < \sphericalangle A_1U_1B_1$;
2. keď bod U_0 padne na kružnicu k , je $\sphericalangle AUB = \sphericalangle A_1U_1B_1$;
3. keď bod U_0 padne zvonku kružnice k , je $\sphericalangle AUB > \sphericalangle A_1U_1B_1$.

Tým sú vyčerpané všetky možnosti, ktoré sa môžu vyskytnúť pri pravouhlom premietaní dutého uhla.

Z viet VI—XIV môžeme vyvodiť všeobecnejšie vety platné pre pravouhlý priemet dutého uhla.

¹⁾ Druhá časť dôkazu by sa mohla vykonať tiež podobne ako 2. časť dôkazu vety VI.

Veta XV. Keď rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle JGH$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom G uhol rozdeľuje, ale hlavná priamka h roviny ρ vedená vrcholom G uhol nerozdeľuje, potom je uhol $\sphericalangle JGH$ vždy menší než jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle J_1G_1H_1$.

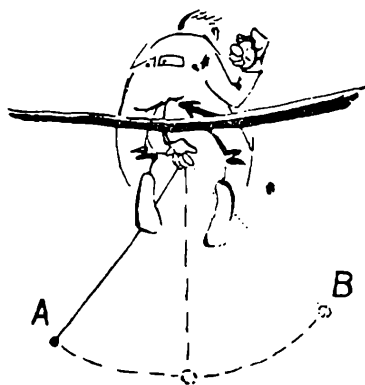
Veta XVI. Keď rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle JGH$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a hlavná priamka h roviny ρ vedená vrcholom G uhol rozdeľuje, ale spádová priamka s roviny ρ vedená vrcholom G uhol nerozdeľuje, potom je uhol $\sphericalangle JGH$ vždy väčší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle J_1G_1H_1$.

Veta XVII. Keď rovina ρ dutého uhla $\sphericalangle JGH$ nie je na priemetňu kolmá, ani s ňou rovnobežná a obe priamky hlavná h i spádová s roviny ρ vedené vrcholom G buď uhol rozdeľujú alebo ho obe nerozdeľujú, potom uhol $\sphericalangle JGH$ je buď väčší, rovnako veľký alebo menší ako jeho pravouhlý priemet $\sphericalangle J_1G_1H_1$.

P o z n á m k y : 1. Na začiatku našich úvah o pravouhlom priemete dutého uhla sme urobili predpoklad, že $P \not\equiv V$ (resp. $P \not\equiv C$, $P \not\equiv U$). Tento predpoklad môžeme vždy splniť. Keby náhodou dutý uhol $\sphericalangle AVB$ mal v rovine ρ takú polohu, že by $P \equiv V$ posunieme priemetňu π do polohy $\pi' \parallel \pi$, čím dosiahneme toho, že $P \not\equiv V$. Vo vetách týkajúcich sa priemetu dutého uhla sa hovorí iba o vzájomnej polohe rovín ρ , π , ale nehovorí sa o určitej polohe roviny π v priestore. Posunutím roviny π do polohy $\pi' \parallel \pi$ sa vzájomná poloha rovín ρ , π nezmení a neporuší sa teda ani platnosť našich viet.

2. Všimnime si, že veta V neplatí obrátene. Naproti tomu veta IX platí aj obrátene.

C v i č e n i e : Keď stred hodinového ciferníku spojíme s bodmi označujúcimi celé hodiny, dostaneme rozličné uhly. Rozhodnite, aký je vzťah medzi veľkosťou týchto uhlov a ich pravouhlých priemetov, keď odchýlka roviny ciferníka ρ od priemetne π je 45° a keď spádová priamka roviny ρ prechádza bodmi 6—12.



Fysika

Evžen Říman, Praha:

Elektrické okruhy

(Dokončení)

6. Zapojovanie odporov.

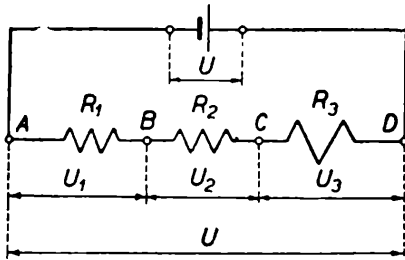
a) Ak je vodivá cesta prúdiacich elektrónov vytvorená spojením viacerých vodičov z a s e b o u (ináč povedané v s é r i i), ktorých odpory sú R_1, R_2, R_3 potom výsledný odpor $R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = R_k$.

Túto vetu si možno ozrejmiť aj ináč: Nazvime súčin odporu R a ním prechádzajúceho prúdu I (teda výraz RI) o h m i c k ý m n a p ä t í m.

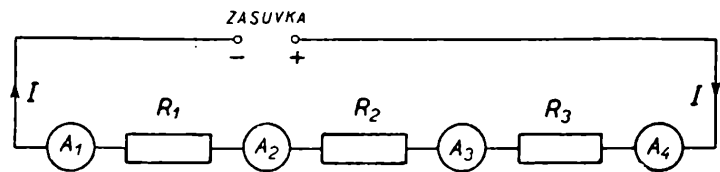
Pri zapojení dľa obr. 6 sa celkové napätie medzi bodmi AD rovná napätiu zdroja U . (Podobnú úvahu sme robili v ods. 5, str. 121). Všetkými vodičmi prechádza ten istý prúd I . Medzi bodmi AB bude teda ohmické napätie $U_1 = R_1 I$, medzi B a C je napätie $U_2 = R_2 I$ a medzi C a D je napätie $U_3 = R_3 I$. Súčet všetkých týchto ohmických napätí je celkové napätie U ; teda $U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I$. Výraz v zátvorke nazvime „v ý s l e d n ý odpor pri sériovom zapojení“

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 = \Sigma R_k$$

Výsledok: Pri spojení vodičov za sebou (v sérii) sa sčítajú ohmické napätia aj odpory.



Obr. 6. Sériové zapojenie odporov.



Obr. 7. Pri sériovom zapojení tečie všetkými odpormi ten istý prúd.

Príklad 2: Pri zapojení dľa obr. 6. bolo $U = 20$ [V], $R_1 = 20$ [Ω], $R_2 = 30$ [Ω], $R_3 = 50$ [Ω]. Potom celkový odpor $R_s = R_1 + R_2 + R_3 = 20 + 30 + 50 = 100$ [Ω]. Dľa Ohmovho zákona bude prechádzajúci prúd

$$I = \frac{U}{R_s} = \frac{20 \text{ [V]}}{100 \text{ [\Omega]}} = 0,2 \text{ [A]} .$$

Voltmeter pripojený k bodom A a B (t. j. na koncoch odporu R_1) ukáže preto napätie $U_{AB} = U_1 = R_1 I = 20 \text{ [\Omega]} \cdot 0,2 \text{ [A]} = 4 \text{ [V]}$, keďže [$\Omega \cdot A$] = [V]; medzi bodmi B a C (t. j. na koncoch odporu R_2) je napätie $U_{BC} = U_2 = R_2 I = 30 \text{ [\Omega]} \cdot 0,2 \text{ [A]} = 6 \text{ [V]}$; podobne je $U_{CD} = U_3 = R_3 I = 50 \text{ [\Omega]} \cdot 0,2 \text{ [A]} = 10 \text{ [V]}$. Kontrola: Súčet všetkých čiastočných napätí musí dať napätie celkové, t. j. $U_1 + U_2 + U_3 = 4 \text{ [V]} + 6 \text{ [V]} + 10 \text{ [V]} = 20 \text{ [V]} = U$.

Z toho vidmo, že Ohmov zákon $U = R I$ vraví fyzikálne viacej: Ak nejakým vodičom ide prúd I , potom úbytok napätia medzi dvoma bodmi, medzi ktorými je odpor R , je $R I$. Ináč povedané: Ohmov zákon $U = R I$ platí nielen pre celý (t. j. „uzavretý“) okruh ale tiež pre ktorýkoľvek úsek vodivej cesty, kedy znie: Úbytok napätia v úseku prúdovodiča sa rovná súčinu odporu R tohoto úseku krát intenzita prúdu I , ktorá ním prechádza.

Príklad 3: Transformátor dávajúci napätie 3 [V], má rozmraziť železné ($\rho = 0,1 \text{ [\Omega mm}^2 \text{ m}^{-1}]$) potrubie o dĺžke $l = 8$ [m], ktorého vnútorný polomer $r_1 = 20$ [mm] a vonkajší $r_2 = 24$ [mm]. Koľko tepla vznikne za 1 [min]?

$$\text{Riešenie: } R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\pi (r_1^2 - r_2^2)} ; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{\pi (r_1^2 - r_2^2) U}{\rho}$$

$$\text{preto } A = U I t = \frac{\pi (r_1^2 - r_2^2) U^2 t}{\rho l}$$

Číselne: $t = 1 \text{ [min]} = 60 \text{ [s]}$; $\left[\frac{\text{V}^2}{\Omega} \text{ s} \right] = \left[V \frac{V}{\Omega} \text{ s} \right] = [\text{V A s}] = [\text{W s}] =$
joule = [J] = 0,24 [cal]; milimetre netreba previesť na metre, takže

$$A = \frac{\pi (24^2 - 20^2) [\text{mm}^2] \cdot 9 [\text{V}^2] \cdot 90 [\text{s}]}{0,1 [\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}] \cdot 8 [\text{m}]} = \frac{540 \pi \cdot 44 \cdot 4 \left[\frac{\text{V}^2 \text{ s}}{\Omega} \right]}{0,8} = 118\,800 \pi \doteq$$

$$\doteq 373 \cdot 10^3 [\text{J}] = 89,5 \cdot 10^3 [\text{cal}] = 89,5 [\text{kcal}].$$

b) *Intenzita prúdu v rozličných miestach prúdovodiča.*

Vodičom nazývame vodivý spoj, pričom nezáleží na tom, či je pretekajú prúdom alebo nie. Ak chceme zdôrazniť, že vodičom prechádza prúd, nazývame ho prúdovodičom.

Zapojme do zásuvky elektrickej siete (obr. 7) za sebou niekoľko spotrebičov (ktoré môžu mať rozličné odpory R_1, R_2, \dots) v jeden jednoduchý okruh a merajme prúd na rozličných miestach. Uvidíme, že ampérmeter vstavený na ktoromkoľvek mieste okruhu (na obr. A_1, A_2, A_3, A_4) ukáže tu istú hodnotu prúdu. Teda:

V každom mieste vodivého okruhu tečie prierezom vodiča ten istý prúd I .

c) *Rozloženie celkového napätia v prúdovodiči.*

Zapojme - ako prv - do zásuvky el. siete za sebou niekoľko spotrebičov rozličných odporov a merajme voltmetrom napätie medzi rozličnými bodmi. (Vid' obr. 6.)

Nájdeme tak, že napätie medzi krajnými bodmi A, D, t. j. $U_{AD} = U$ sa rovná súčtu jednotlivých čiastočných napätí U_1, U_2, U_3 , meraných medzi bodmi A a B, potom B a C a konečne C a D; teda platí $U = U_1 + U_2 + U_3$ a pretože dľa OZ pre úsek prúdovodiča platí $U_1 = R_1 I, U_2 = R_2 I, U_3 = R_3 I$ dostaneme vzťah $U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3$ slovami:

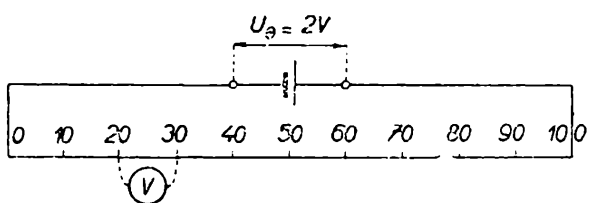
Celkové napätie v prúdovodiči je rozdelené tak, že na každý úsek prúdovodiča pripadá čiastočné napätie, ktoré je úmerné jeho odporu.

Ak pripojíme napr. medzi póly akumulátora (emsa $U_e = 2 \text{ [V]}$) tenký odporový drôt o dĺžke 100 [cm], všade rovnakého prierezu, rozdelí sa napätie úmerne odporu. Medzi dvoma bodmi 10 [cm] od seba vzdialenými (ale volenými kdekkoľvek na vodiči) bude teda napätie 0,2 [V]. Týmto spôsobom môžeme dostať ľubovoľne malé napätie. Toto zapojenie sa volá zapojenie potenciometrické. V paralelnej odbočke je potom to isté napätie ako v oddelenom úseku. Oba body, odkiaľ odbočka je odvetvená, fungujú ako akési póly nového zdroja. (Vid' obr. 8.)

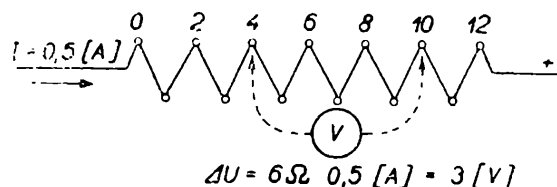
Na pr. v slávnom prístroji prof. Heyrovského zv. polarograf sa vlastne prevádza elektrolyza pri rozličných napätiach, ktoré sa musia spojiť (po stotínach voltu) meniť od nuly do 2 alebo 4 voltov; preto v polarografe je užité potenciometrického zapojenia s precízne vyrobeným odporovým drôtom.

Keby na pr. v zapojení dľa obr. 9 cez reostat (s vývodmi 0, 2, 4, 6, ... ohmov) išiel prúd $I = 0,5 \text{ [A]}$, vtedy voltmeter pripojený k vývodom 4 a 10 ukáže napätie $U = 3$ volty. Úsek vodiča (reostatu) medzi vývodmi 4 a 10 má totižto odpor $10 - 4 = 6$ ohmov, takže dľa OZ, t. j. $U = R I$ je $U = 6 \text{ [\Omega]} \cdot 0,5 \text{ [A]} = 3 \text{ [V]}$. Pretože na celom reostate je celkový odpor $R = 12 \text{ [\Omega]}$, bude úbytok napätia medzi vývodmi označenými 0 a 12 $U = R I = 12 \text{ [\Omega]} \cdot 0,5 \text{ [A]} = 6 \text{ [V]}$.

Vidno z toho, že každý odpor vložený do nejakého okruhu (na pr. v okruhoch radioprijímača), ktorým ide jednosmerný prúd, z n i ž u j e napätie o určitú hodnotu, ktorá je súčinom odporu R a intenzity I prúdu idúceho cez uvažovaný odpor.



Obr. 8. Reostat.



Obr. 9. Úbytok napätia na úseku prúdovodiča.

d) Aby sme mohli porovnávať odpory rozličných látok, bol zmeraný odpor drôtov o priereze $l \text{ [mm}^2\text{]}$ a dĺžke $l \text{ [m]}$. Tým je stanovený t. zv. špecifický¹⁾ o d p o r, ktorý značíme ρ (čítaj ró). Ak známe špecifický odpor, môžeme vypočítať odpor vodiča ľubovoľnej dĺžky a ľubovoľného prierezu: odpor vodiča je tým väčší, čím je dlhší a čím väčší je jeho prierez. Matematicky povedané: R je priamo úmerné dĺžke l a nepriamo úmerné prierezu S ; koeficientom úmernosti je ρ , teda

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Príklad 4: V starších tabuľkách sme našli pre špec. odpor meďi hodnotu $\rho_{\text{Cu}} = 17 \cdot 10^{-7} \text{ [\Omega cm]}$. Čo to znamená a aký veľký je podľa toho odpor medeného drôtu o dĺžke $l \text{ [m]}$ a priereze $l \text{ [mm}^2\text{]}$?

Riešenie: Užime prevodných vzťahov: $1 \text{ [cm]} = 10^{-2} \text{ [m]}$, ďalej $1 \text{ [m]} = 10^3 \text{ [mm]} \Rightarrow 1 \text{ [m}^2\text{]} = 10^6 \text{ [mm}^2\text{]}$ a dosadzujeme

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Cu}} &= 17 \cdot 10^{-7} \text{ [\Omega cm]} = 17 \cdot 10^{-7} \text{ [\Omega]} \cdot 10^{-2} \text{ [m]} = 17 \cdot 10^{-9} \text{ [\Omega m]} = \\ &= 17 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} \right] = 17 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \text{ m}^2 \right] = 17 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right] \cdot 10^6 \text{ [mm}^2\text{]} = \\ &= 17 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Vo fyzike sa plošný obsah z á s a d n e udáva vo štvorcových metroch $\text{[m}^2\text{]}$, kým v praxi radi užívajú pre prierezy drôtov jednotku $\text{[mm}^2\text{]}$. Teda pozor pri prevádzaní: Preto sa v učebniciach stretávame s dvoma rôznymi definíciami: 1. Š p e c i f i c k ý odpor látky (značka ρ) sa číselne rovná odporu kocky o hrane rovnajúcej sa jednotke dĺžkovej (t. j. 1 meter [m] alebo 1 [cm]); 2. t. zv. m e r n ý odpor (značka ρ') sa číselne rovná odporu drôtu dĺžky 1 [m] a prierezu 1 milimeter štvorcový, t. j. $\text{[mm}^2\text{]}$. Avšak my v ďalšom nebudeme robiť rozdiel medzi odporom „špecifickým“ a „merným“, pretože podľa rozmeru v hranatej zátvorke ihneď vieme, o ktorý pojem ide. Viď príklad:

Význam jednotlivých výsledkov je tento: $17 \cdot 10^{-7} [\Omega \text{ cm}]$ hlási, že medená kocka o hrane 1 [cm] má odpor $17 \cdot 10^{-7} [\Omega]$ čiže $1,7 \cdot 10^{-6} [\Omega] = 1,7 [\mu\Omega]$ (čítaj mikroohmov); výraz $17 \cdot 10^{-9} [\Omega \text{ m}]$ stanoví, že medená kocka o hrane 1 [m] má odpor $17 \cdot 10^{-9} [\Omega]$ čiže $0,017 [\mu\Omega]$; posledný výraz $17 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$ hovorí, že medená tyčka prierezu 1 [mm²] dlhá 1 [m] má odpor 0,017 [Ω], t. j. posledný výraz určuje t. zv. m e r n ý odpor.

Slovo „o d p o r“ sa užíva vo fyzike vo dvoch významoch: jednak ako fyzikálna veličina, t. j. pomer $\frac{U}{I}$, ktorej jednotkou je 1 ohm, a jednak ako vodič (resp. prístroj), ktorý má nejaký odpor (teda vlastne t. zv. reostat).

Zo všetkých kovov má striebro najmenší špecifický odpor, potom nasledujú Cu, Al, . . . ; vcelku možno povedať, že kovy majú špecifický odpor nepatrný, ale značne závislý na teplote.

Zliatiny (na pr. manganin, konštantan, nikelin a pod.) majú špecifický odpor značný, ale s teplotou málo sa meniaci.

Izolanty (ktoré nemajú temer žiadnych voľných elektrónov) majú špecifický odpor ohromný (volá sa „izolačný odpor“). Jediným dokonalým izolantom je pravdaže len absolútne vzduchoprázdno.

Príklad 5: Chromnikový drôt, ktorého dĺžka je 14 [m] a prierez 0,6 [mm²], má odpor 25 ohmov; má sa určiť špec. odpor chromniku v jednotkách [Ω m² m⁻¹] a [Ω mm² m⁻¹]:

Riešenie: Ex $R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R S}{l}$ a dosadením daných hodnôt $l = 14$ [m], $S = 6 \cdot 10^{-1}$ [mm²], $R = 25$ [Ω] obdržíme

$$\rho = \frac{25 [\Omega] \cdot 6 \cdot 10^{-1} [\text{mm}^2]}{14 [\text{m}]} = \frac{15}{14} [\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}] = 1,1 [\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}] =$$

$$= 1,1 [\Omega] \cdot [\text{mm}^2] \cdot [\text{m}^{-1}] = 1,1 [\Omega] \cdot 10^{-6} [\text{m}^2] \cdot [\text{m}^{-1}] = 1,1 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} \right].$$

(Užili sme prevodného vzťahu 1 [m] = 10³ [mm], takže 1 [m²] = 10⁶ [mm²], z čoho 1 [mm²] = $\frac{1}{10^6}$ [m²] = 10⁻⁶ [m²]).

Príklad 6: Aký veľký odpor má 600 [m] medeného drôtu o priemere 1 [mm]? (Dané $\rho_{\text{Cu}} = 18 \cdot 10^{-9} [\Omega \text{ m}^2 \text{ m}^{-1}]$.)

²⁾ Prevratná hodnota odporu, t. j. $\frac{1}{R} = G$ sa nazýva v o d i v o s ť a udáva sa v jednotkách [Ω⁻¹]; prevratná hodnota špecifického odporu, t. j. $\frac{1}{\rho} = \lambda$ sa volá špecifická vodivosť; jej jednotkou je [Ω⁻¹ m⁻¹].

Riešenie: Pretože priemer $2r = 10^{-3}$ [m], bude $r = 5 \cdot 10^{-4}$ [m], čiže prierez $S = \pi r^2 = 25 \pi \cdot 10^{-8}$ [m²], takže

$$R = \rho \frac{l}{S} = 18 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} \right] \cdot \frac{6 \cdot 10^2 \text{ [m]}}{25\pi \cdot 10^{-8} \text{ [m}^2\text{]}} = \frac{1080}{25\pi} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4320}{100\pi} = 13,8 [\Omega].$$

Ing. Jiří Machalický, Praha:

Theorie dimensí a modelování ve fyzice

V pátém čísle Rozhledů, roč. 35, upozornil E. Říman v článku *Dimensionální správnost fyzikálních rovnic na důležitost rozměrů fyzikálních veličin*. Na řadě příkladů bylo tam ukázáno, jak se postupuje při odvozování rozměrů (jednotek) různých veličin.

V tomto článku bych chtěl naznačit, že *rozměr*¹⁾ má ve fyzice ještě mnohem větší význam. Theorie dimensí, jejíž princip zde chci vysvětlit, dává možnost z podrobnějších rozborů dimensí všech veličin, které mají vliv na průběh určitého jevu, odvodit vztahy platné mezi těmito veličinami. Této theorie se užívá dnes k řešení nejrozmanitějších úkolů zejména v technických oborech. Jmenujme jen stručně některé z nich: pohyb těles za působení různých druhů sil, proudění tekutin potrubím nebo kanály rotačních strojů, obtékání těles, různé úlohy z pružnosti a pevnosti, kmitání, akustiky, elektrotechniky atd.

Bohužel, některé úvahy zde načrtnuté jsou poněkud náročnější a vyžadují trochu vytrvalosti čtenáře. Tím větší však bude jeho radost, když podle uvedeného návodu sám vyřeší třeba jednoduchý příklad.

Při studiu je účelné přečíst úvodní část (až po větu G) zběžně, pro orientaci, pak řešit (a to písemně) oba příklady a v průběhu řešení se vracet na příslušná místa obecného návodu tak, jak je to vyznačeno v textu. Není tedy účelem článku vysvětlit v celé šíři teorii dimensí, nýbrž poukázat na její užitečnost a získat jí nové příznivce. K podrobnějšímu studiu mohou čtenáři vyhledat vhodnou literaturu v připojeném seznamu.

Celá theorie je založena na *Fourierově* (čti furjé-) *poznatku*, že každá fyzikální rovnice musí být rozměrově stejnorodá (dimensionálně homogenní), t. j. *rozměry a jednotky všech sčítanců v rovnici musí být na obou stranách stejné*.

Označíme-li veličiny vystupující v určitém fyzikálním jevu x, y, z, \dots, i , lze obecně psát pro jejich vzájemnou souvislost vztah

$$f(x, y, z, \dots, i) = 0 \quad (\text{A})$$

¹⁾ Zopakujme si stručně: *rozměr je výraz, který vyznačuje, jakou funkci základních veličin je určitá veličina odvozena* a píše se buď symbolicky ve tvaru součinu mocnin základních znaků M, L, T (na př. rozměr síly MLT^{-2}), nebo přímo jednotkami příslušných veličin, tedy [kgms⁻²].

Je možno ukázat, že v této funkci libovolná veličina nezávisí jednotlivě na každé z ostatních zvlášť, nýbrž na určitém počtu skupin z těchto proměnných tak utvořených, že mají stejný rozměr jako ona veličina. Můžeme si to objasnit na příkladu. Jistě se pamatujete na výklad o t. zv. matematickém kyvadle, jímž rozumíme „hmotný bod“ zavěšený na „nehmotném vlákně“. Doba kmitu T takového kyvadla se dá vypočítat ze vzorce

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

to však platí pouze pro malé úhly α .

Pokusme se řešit pohyb matematického kyvadla pomocí theorie dimensí. Uvažujme nejprve, které veličiny mohou mít vliv na tento pohyb. Jistě o tom budou rozhodovat především vlastnosti samotného kyvadla, tedy hmota m a délka l a za druhé vnější vlivy, zrychlení tíže g a úhel α . Můžeme tedy psát obecně

$$T = f(l, m, g, \alpha). \quad (2)$$

Protože rozměr pravé i levé strany musí být stejný, nemohou tu jednotlivé veličiny vystupovat osamoceně, nýbrž ve skupinách, které mají stejný rozměr jako T . Takových skupin je ovšem mnoho a lze je obecně vyjádřit vztahem

$$T = l^a m^b g^c \alpha^d, \quad (3)$$

kde a, b, c, d jsou zatím neznámé exponenty. Hned si ukážeme, jak se vypočítají. Dosadíme si do rovnice (3) rozměry všech veličin

$$\begin{aligned} [s] &= [m]^a [kg]^b [ms^{-2}]^c [1]^d \\ [s] &= [m]^{a+c} [kg]^b [s]^{-2c} [1]^d. \end{aligned}$$

Tato podmínka může být splněna pro libovolné kyvadlo jen tehdy, když exponenty u týchž základů na obou stranách rovnice budou stejné, t. j. když

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b &= 0 \\ -2c &= 1 \\ d &= \text{libovolné číslo.} \end{aligned}$$

Řešením těchto tří rovnic dostáváme $c = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $d =$ libovolné číslo a dosazením těchto hodnot zpět do rovnice (2) plyne

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \alpha^d.$$

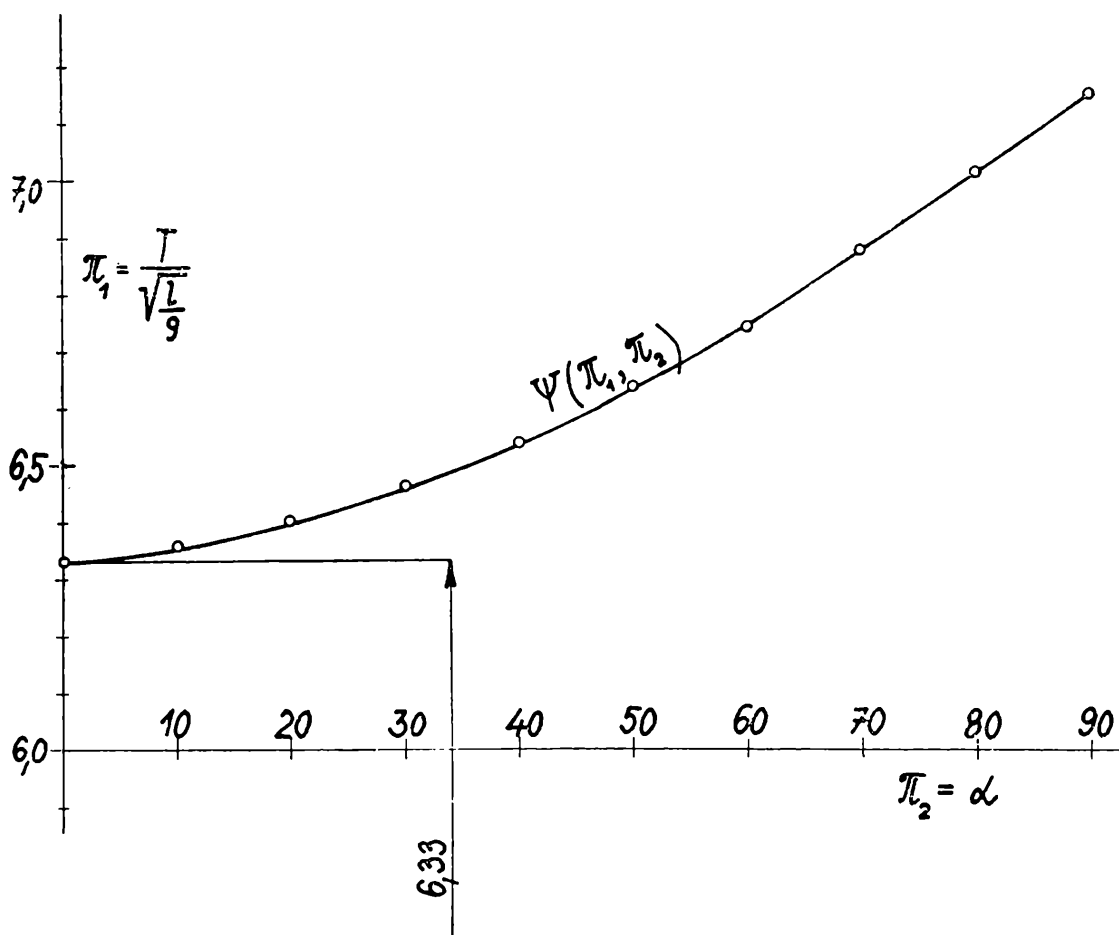
Vidíme tedy, že veličiny l, m, g, α skutečně nevystupují samostatně, nýbrž tvoří v tomto jednoduchém případě jednu skupinu veličin, jejíž rozměr je stejný jako rozměr doby kmitu T , totiž $[s]$. Je vidět, že z této skupiny úplně vypadla hmota m , která nemá vliv na pohyb kyvadla.

Původní rovnici (2) lze nyní přepsat na tvar

$$T = \varphi \left(\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \alpha^d \right)$$

Dělíme-li ještě celou rovnici T , dostáváme

$$1 = \varphi \left(\frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{T} \cdot \alpha^d \right)$$



Obr. 1

a protože podíl $\frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{T}$ má rozměr 1 stejně jako α , lze konečně uvést vztah (2) na bezrozměrný tvar

$$\Psi \left(\frac{T}{\sqrt{\frac{l}{g}}}, \alpha \right) = \theta \quad (4)$$

Výrazy $\sqrt{\frac{T}{l}}$ a α nazýváme bezrozměrné argumenty a označujeme je π_1, π_2 . Tvar

funkce (4) musíme určit pokusem. Na kyvadle (malá kulička zavěšená na niti délky l) měníme rozkyv α ($0 \div 90^\circ$) a měříme vždy dobu kmitu T . Pak ze známých l, m, T vypočteme pro několik úhlů α hodnotu argumentu $\pi_1 = \sqrt{\frac{T}{l}}$ a vynese-

me do grafu (viz obr. 1) v závislosti na rozkyvu $\pi_2 = \alpha$.

Výsledek souhlasí dobře s theoretickým vztahem (1). Na př. pro $\alpha = 0$ lze z grafu číst $\pi_2 = 6,330$, takže

$$T = 6,330 \sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (\pi = 3,14159 \dots \text{Ludolf. č.})$$

Je to však výsledek obecnější, neboť platí pro libovolný rozkyv α . Další výhoda našeho výsledku je, že z jediného pokusu lze určit pohyb libovolného jiného matematického kyvadla.

Podobným způsobem lze upravit každou funkci tvaru (A) na bezrozměrný tvar

$$\Psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{i-r}) = 0 \quad (\text{B})$$

s menším počtem $i - r$ proměnných. Tyto proměnné označujeme π_1, π_2, \dots (odtud pochází také označení π -t h e o r e m); všechny mají rozměr 1. Nazýváme je **bezrozměrné argumenty** (čísla, kriteria a pod.). Některá z nich mají ještě označení podle význačných badatelů, na př. *Newtonovo číslo Ne*, *Reynoldsovo číslo Re*, *Prandtlovo číslo Pr*, *Fourierovo číslo Fo* atd. Tvar každého argumentu lze psát jako součin různých mocnin zúčastněných veličin:

$$\pi = x^a y^b z^c \quad (\text{C})$$

Rovnice (B) je podstatně jednodušší než (A) - je však třeba vysvětlit, jak se tato úprava provádí. Návod je celkem jednoduchý. Obecně ho lze vyslovit takto:

Vyjádríme-li v rovnici (A) rozměry všech veličin, jichž počet označíme i pomocí r základních rozměrů [m], [kg], [s], resp. (M, L, T), lze zpravidla sestavit ($i - r$) nezávislých bezrozměrných argumentů. (V rovnici (B) již bylo připsáno pořadové číslo posledního argumentu $i - r$.)

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{i-r}.$$

Každý z těchto argumentů má rozměr 1, takže platí

$$1 = [x]^a [y]^b [z]^c \quad (\text{D})$$

Rozměry $[x], [y], [z] \dots$ vyjádříme r základními rozměry a sdružíme exponenty u stejných rozměrů.

Z podmínky, že levá strana rovnice (D) je identicky rovna 1, plyne, že výsledný mocnitel každého základního rozměru je roven nule.

Napíšeme-li tuto podmínku pro r základních rozměrů, obdržíme r homogenních lineárních rovnic pro i neznámých exponentů. Je třeba jen poznamenat, že

to musí být *rovnice nezávislé*, o čemž lze rozhodnout podle hodnoty t. zv. rozměrové matice.²⁾

Je-li $i - r = 1$ můžeme volit jeden z neznámých mocnitelů a ostatních r mocnitelů vypočítat. Obyčejně se volí exponent té veličiny, kterou chceme vypočítat a klademe jej roven jedné. (E)

Častější je však případ $i > r$. Pak je nutno volit $i - r$ mocnitelů a tuto volbu $(i - r)$ krát opakovat. Získáme tak obyčejně $i - r$ bezrozměrných argumentů. Podle volby mocnitelů obdržíme různé bezrozměrné argumenty, které všechny správně popisují daný fyzikální děj.

V technické praxi byly však již jisté argumenty zavedeny, takže volbu je třeba usměrnit tak, abychom daný problém vyjádřili pokud možno známými a běžně užívanými (t. zv. normálními) argumenty. Pokud přímá volba chybějících exponentů nebyla dosti vhodná, lze dodatečnou úpravou získat normální argumenty na základě věty:

Algebraickými výkony s mocninami bezrozměrných čísel se získá opět číslo bezrozměrné. (G)

Dále si celý postup zopakujeme na příkladech:

1. Je dána úloha pomocí theorie dimensí vyšetřit odpor, který klade tekuté prostředí pohybu tělesa, na př. při volném pádu. Představme si pro jednoduchost, že v nějaké kapalině vypustíme v určitém okamžiku malou kuličku a necháme ji volně klesat. Rychlost kuličky vzrůstá od nuly až po určitou velikost, neboť víme, že proti pohybu působí odpor prostředí, který nedovolí, aby rychlost vzrůstala neomezeně. Průběh rychlosti lze graficky vyznačit tak, jak je to znázorněno na obr. 2. Označíme-li hmotu kuličky m , její poloměr r , objem $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, hustotu prostředí S_p a odpor prostředí P , je podle II. Newtonova pohybového zákona

$$(mg - VS_p) - P = m \cdot a$$

Protože odpor P se zvětšuje s rychlostí, zatím co výraz v závorce, t. j. váha kuličky zmenšená o vztlak zůstávají stálé, musí nutně nastat případ, kdy

$$(mg - VS_p) - P = 0 .$$

Pak se pohyb děje už stálou rychlostí v_{mez} , kterou nazýváme *mezí rychlostí* a je tedy rovnoměrný. Odpor prostředí vzrůstá s rychlostí tím rychleji, čím větší rychlostí se těleso pohybuje; při malých rychlostech je úměrný první, při rychlejších pohybech druhé i vyšší mocnině rychlosti. Vzniká totiž jednak tím, že pohybující se těleso musí před sebou odstraňovat tekutinu (práce odporu prostředí rovná se kinetické energii tekutiny), jednak třením tekutiny, kterou těleso uvedlo do pohybu. Pro pohyb drobných tělísek malou rychlostí má rozhodující význam druhý vliv. Proto bude jistě záviset na viskozitě. Mimo to bude o odporu rozhodovat rychlost v a poloměr kuličky r . Vystupují tedy v úloze celkem čtyři proměnné, které lze shrnout ve funkci

$$f(v, r, \eta, P) = 0 . \quad (a)$$

²⁾ Protože většinou tento požadavek bývá splněn, nebudu se o něm blíže zmiňovat. Podrobně je o tom pojednáno na př. v knize Dr. J. Kožešník: Fyzikální podobnost a stavba modelů, JČMF, Praha 1948.

Rozměry jednotlivých veličin jsou:

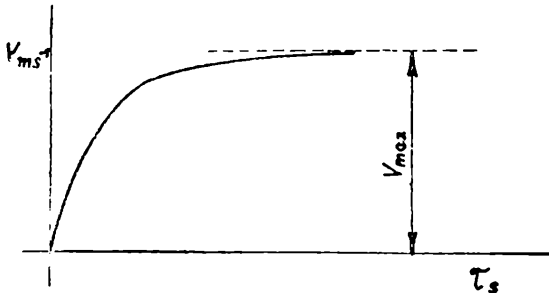
$$\begin{aligned} [v] &= \text{LT}^{-1} && \text{resp. } [\text{ms}^{-1}] \\ [r] &= \text{L} && [\text{m}] \\ [\eta] &= \text{L}^{-1}\text{MT}^{-1} && [\text{m}^{-1} \text{ kgs}^{-1}] \\ [P] &= \text{LMT}^{-2} && [\text{kgms}^{-2}] . \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Počet základních rozměrů je o jeden menší než počet proměnných ve vztahu (a). Bude proto problém úplně popsán jediným ($i - r = 4 - 3 = 1$) bezrozměrným argumentem tvaru

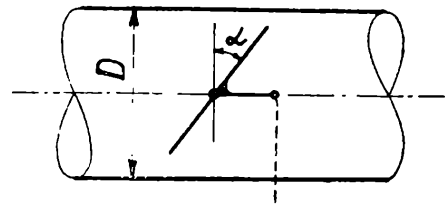
$$\pi = v^x r^y \eta^z P^u. \quad (\text{c})$$

Dosadíme-li do rovnice (c) rozměry podle (b) dostaneme

$$\begin{aligned} [\pi] &= [\text{LT}^{-1}]^x [\text{L}]^y [\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}]^z [\text{LMT}^{-2}]^u \\ 1 &= [\text{L}]^{x+y-z+u} [\text{M}]^{z+u} [\text{T}]^{-x-z-2u} . \end{aligned}$$



Obr. 2



Obr. 3

V této rovnici musí být exponenty u týchž základů na obou stranách stejné, (můžeme si myslet, že na levé straně máme $[\text{L}]^0[\text{M}]^0[\text{T}]^0$; což je rovno 1) čili

$$\begin{aligned} x + y - z + u &= 0 \\ z + u &= 0 \\ -x - z - 2u &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Pro čtyři neznámé máme tři nezávislé rovnice. Můžeme proto hodnotu jedné neznámé zvolit. Podle návodu (E) volme $u = 1$ (není to však nutné). Ostatní neznámé snadno určíme řešením (d) rovnic: $x = y = z = -1$

$$\pi = \frac{P}{\eta r v}. \quad (\text{e})$$

Rovnici (a) lze pak přepsat na bezdimensionální tvar

$$\varphi \left(\frac{P}{\eta r v} \right) = 0. \quad (\text{f})$$

Jednoduchým pokusem několikrát opakovaným s různými kuličkami a tekutinami bylo zjištěno, že

$$\frac{P}{\eta r v} = \text{konst.} \doteq 18,85,$$

což je v soulasu s theoretickým výsledkem $\left(\frac{P}{\eta r v} = 6\pi, \text{ Stokesův vzorec} \right)$ pro odpor prostředí; zde ovšem $\pi = 3,14159 \dots$ je známé Ludolfovo číslo)

2. Je vyšetřit poměrně složitý fyzikální jev obtékání regulační klapky v kruhovém potrubí. Úloha je theoreticky velmi obtížná. Theoretické řešení lze však nahradit přibližným řešením pomocí teorie dimensí, doplněné vyšetřením (experimentálním) na vhodném modelu. Pro technické účely není totiž rozhodující detailní vyšetření tvaru proudnic, průběh tlaků a rychlostí podél klapky atd., ale velikost momentu potřebného k natočení klapky v závislosti na poloze klapky (určené úhlem α , viz obr. 3).

O problému budou rozhodovat, jak vyplývá z názoru, tyto veličiny: (protože tento příklad byl vybrán z technického oboru, uvedu zde jednotky v technické soustavě, dosud běžně užívané)

moment M [kpm], průměr potrubí D [m], sklon klapky α [l], přetlak na klapce Δp [kpm⁻²], střední rychlost c [ms⁻¹], hustota tekutiny ρ [kps²m⁻⁴], dynamická viskozita tekutiny η [kpsm⁻²].

Jejich souvislost lze obecně napsat ve tvaru

$$\varphi(M, D, \alpha, \Delta p, c, \rho, \eta) = 0 \quad (a)$$

Do tohoto vztahu je nutno zahrnout všechny veličiny, které by vystupovaly v rovnicích matematické teorie tohoto problému. Funkci (a), jejíž tvar je jistě složitý, nahradíme funkcí několika bezrozměrných argumentů. Tvar takového argumentu lze psát podle (C)

$$\pi = M^x D^y \alpha^z \Delta p^m c^n \rho^o \eta^p. \quad (b)$$

Zavedeme-li sem rozměry všech veličin, dostáváme

$$[\pi] = [\text{kpm}]^x [\text{m}]^y [\text{l}]^z [\text{kpm}^{-2}]^m [\text{ms}^{-1}]^n [\text{kpm}^{-4} \text{s}^2]^o [\text{kpm}^{-2} \text{s}]^p. \quad (c)$$

Dále sdružíme exponenty stejných základních rozměrů

$$1 = [\text{kp}]^{x+m+o+p} [\text{m}]^{x+y-2m+n-4o-2p} [\text{s}]^{-n+2o+p}.$$

Z této rovnice je patrné, že neznámé exponenty x, y, z, \dots musí splňovat tři podmínky

$$\begin{aligned} x + y + o + p &= 0 \\ x + y - 2m + n - 4o - 2p &= 0 \\ -n + 2o + p &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

K určení $i = 7$ neznámých exponentů nám chybí čtyři podmínky. Můžeme proto hodnoty čtyř exponentů volit libovolně a zbývající tři určit z rovnic (d), protože počet neznámých exponentů $i = 7$ a počet základních rozměrů $r = 3$,

lze podle (F) obecnou funkci (a) nahradit funkcí čtyř bezrozměrných argumentů ($i - r = 7 - 3 = 4$). Tyto čtyři argumenty bychom mohli podle návodu (F) vypočítat čtyřikrát opakovanou volbou čtyř ze sedmi neznámých exponentů x, y, \dots, p a vypočtením zbývajících tří z rovnic (d). Můžeme si však úlohu usnadnit. Především lze sklon α považovat za jeden argument. Dále se můžeme oprávněně domnívat, že v problému budou vystupovat čísla Reynoldsovo a Eulerovo jako v podobných problémech v theorii proudění. Bude tedy

$$\pi_1 = \alpha, \quad (e)$$

$$\pi_2 = Re = - \frac{cD \rho}{\eta}, \quad (f)$$

$$\pi_3 = Eu = - \frac{\Delta p}{\rho c^2}.$$

Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny pro tyto argumenty všechny podmínky (d). Pro poslední argument provedeme volbu: $x = 1, z = 0, m = -1, n = 1$.

Takto zvolené exponenty dosadíme do rovnice (7) a vypočteme chybějící exponenty:

$$o = 1$$

$$p = -1$$

$$y = -2$$

Odtud plyne už tvar posledního argumentu

$$\pi_4 = \frac{Mc \rho}{D^2 \Delta p \eta}. \quad (h)$$

Tento argument lze ještě zjednodušit podle věty (G). Na př. násobíme-li třetím argumentem, dostaneme:

$$\pi_4 \pi_3 = \frac{Mc \rho}{D^2 \Delta p \eta} \frac{\Delta p}{\rho c^2} = \frac{M}{D^2 \eta c} = \pi'_4, \quad (i)$$

nebo

$$\frac{\pi_1 \pi_3}{\pi_4} = \frac{M}{D^3 c^2 \rho} = \pi''_4. \quad (j)$$

V obou případech argumenty π_4 , resp. π''_4 , plně nahrazují původně stanovený argument π_4 .

Funkci (a), která má sedm proměnných lze nahradit funkcí pouze čtyř bezrozměrných proměnných

$$\Psi \left(\frac{M}{D^2 \eta c}, Re, Eu, \alpha \right) = 0, \quad (k)$$

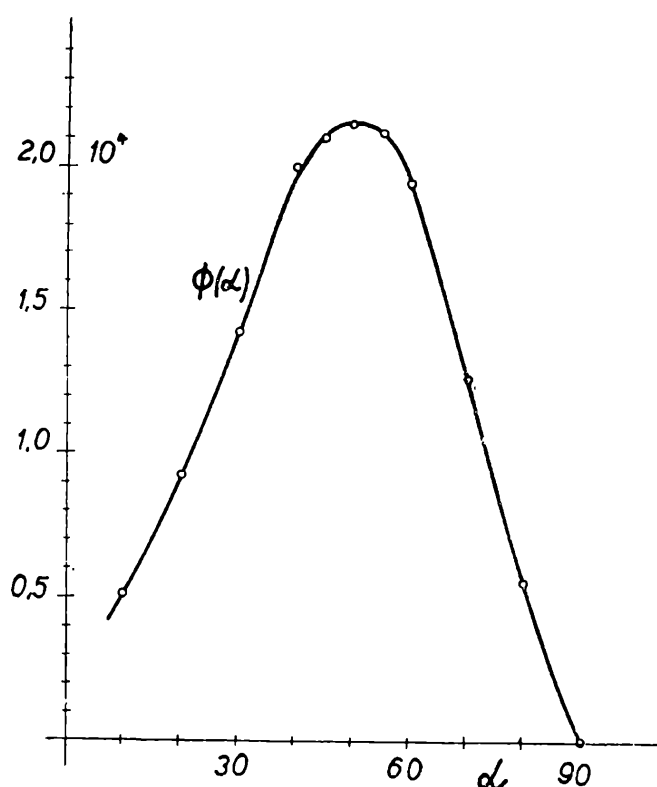
resp. vztahem

$$M = D^2 \eta c \Phi (Re, Eu, \alpha) = 0. \quad (l)$$

Tvar funkce (k) nutno určit experimentálně. Měření provádíme nejčastěji na

m o d e l e c h, což je s hospodářského hlediska velmi výhodné. Stavbu modelů je nutno podříditi určitým zákonům. K tomu je třeba jistých zkušeností. *Výsledky experimentů jsou však o to cennější, že rozsah jejich platnosti lze rozšířit na všechny jevy fyzikálně podobné.*

Fyzikálně podobné jsou takové jevy, pro které mají bezrozměrné argumenty stejnou hodnotu pro model i skutečné provedení. Úplná podobnost, zahrnující sebemenší podrobnosti, není ve skutečnosti možná. Veličiny vystupující v kriteriích podobnosti nejsou totiž nezávislé, takže zvolením některých z nich jsou už ostatní určeny. Nelze na př. měnit libovolně viskozitu, hustotu a jiné vlastnosti látek. Proto v případě s větším počtem argumentů provádíme měření na t. zv. p ř i b l i ž n ý c h m o d e l e c h, u nichž vynecháme podmínku rovnosti méně významných argumentů buď vůbec, nebo vyžadujeme jen přibližné její splnění.



Obr. 4

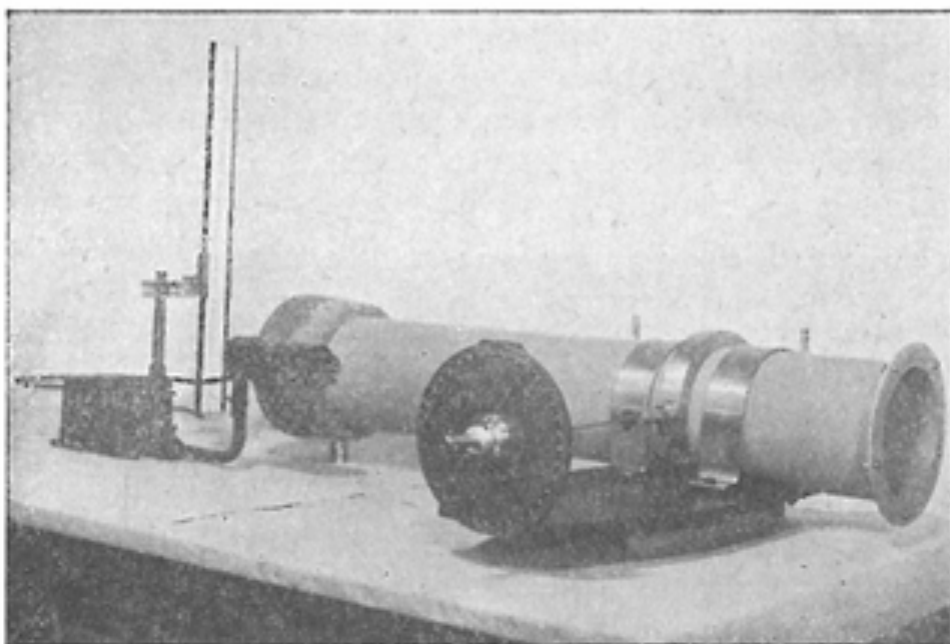
V našem příkladě jde konkrétně o vyšetření poměrů na regulační klapce chladičího zařízení obtékanou chladicí látkou v plynném skupenství (vzduch, propan, propylen atd.). Můžeme proto provést přibližné řešení tak, že zanedbáme vliv Reynoldsova a Eulerova čísla; třecí síly jsou totiž u plynů zanedbatelné a také vliv statického tlaku je zanedbatelný.

Tak lze funkci (1) nahradit jednoduchým vztahem

$$M = D^2 \eta c \Phi(\alpha). \quad (m)$$

Tvar funkce $\Phi(\alpha)$ byl vyšetřen experimentálně na modelu, který je patrný z obr. 4. Výsledek většího počtu měření je graficky znázorněn na obr. 5. V tomto

diagramu jsou pro úhly sklonu od nuly do devadesáti stupňů vyneseny hodnoty bezrozměrné funkce $\Phi(\alpha)$ vypočtené ze vztahu $\Phi(\alpha) = \frac{M}{D_m^2 \eta_m c_m}$. Index m je připsán, aby bylo zřejmé, že jde o veličiny změřené na modelu. Klapka byla provedena v potrubí průměru $D_m = 160$ mm. Toto potrubí pak bylo připojeno k ssacímu potrubí vzdušného ventilátoru. Viskosita η_m vzduchu odečtena z tabulek. Moment M_m byl určován ze zkroucení torsní tyčky (úhel zkroucení měřen zrcátkovou methodou). Střední rychlost c_m vzduchu byla určena pomocí clonky.



Obr. 5

Z á v ě r. Na skutečné provedení (dílo) lze tedy přenést získané výsledky takto: Pro fyzikálně podobný případ obtékání geometricky podobné klapky lze určit moment M podle vztahu (1), kam za $\Phi(\alpha)$ dosadíme hodnoty, odečtené pro libovolný úhel α z grafu na obr. 5. Výsledky však lze v tomto jednoduchém tvaru aplikovat, jak už bylo uvedeno, jen pro klapky geometricky podobné a obtékané plyny.

Literatura:

- M. V. Kirpičev: Teorie fyzikální podobnosti, čas. Sovětská věda, Matematika-Fysika-Astronomie č. 4, 5, 6, roč. V., 1955.
- J. Kožešník: Fyzikální podobnost a stavba modelů, JČMF, 1948.
- J. Kožešník: Fyzikální podobnost a theorie modelů, SNTL, 1955.
- L. I. Sedov: Methody podobnosti a rozměrovosti v mechanice, SNTL, 1955.

Plastická deformace a poruchy v krystalech

Plastická deformace.

Působením sil se mění tvar tělesa, těleso se deformuje. Deformaci nazýváme *pružnou*, jestliže po oddálení sil, které deformaci způsobily, nabude těleso původních rozměrů. Deformaci, která zůstane i tehdy, když síly přestanou působit, nazýváme *nepružnou, trvalou* nebo *plastickou*.

Při hrubším pozorování bychom nabyli dojmu, že při působení menších sil je deformace většiny těles pružná, při větších silách začíná vznikat i trvalá deformace. Při přesnějších měřeních však bylo zjištěno, že i u tak pružných látek, jako je na př. ocel, zůstává i při malých zatíženích určitá, i když nepatrná, plastická deformace. Dnes víme, že plastická deformace je zjev, se kterým se stále setkáváme v přírodě i v technice.

Tak na příklad vlivem ohromných tlaků horských masivů dochází k plastické deformaci hornin. Podobně dochází k plastické deformaci ledu v ledovcích, zvané tečení ledu. Plastické deformace se využívá při tváření kovů kováním, válcováním, protlačováním, lisováním. Nevítaným dějem je naopak plastická deformace při namáhání strojních součástí, kde může vést k poruchám strojů.

Plastická deformace je děj, který má svůj časový průběh.

Působením sil se rozměry tělesa v závislosti na čase mění; mluvíme o *plastickém tečení*. Tento děj může směřovat buď k nastavení rovnováhy, nebo může vést k rozrušení tělesa.

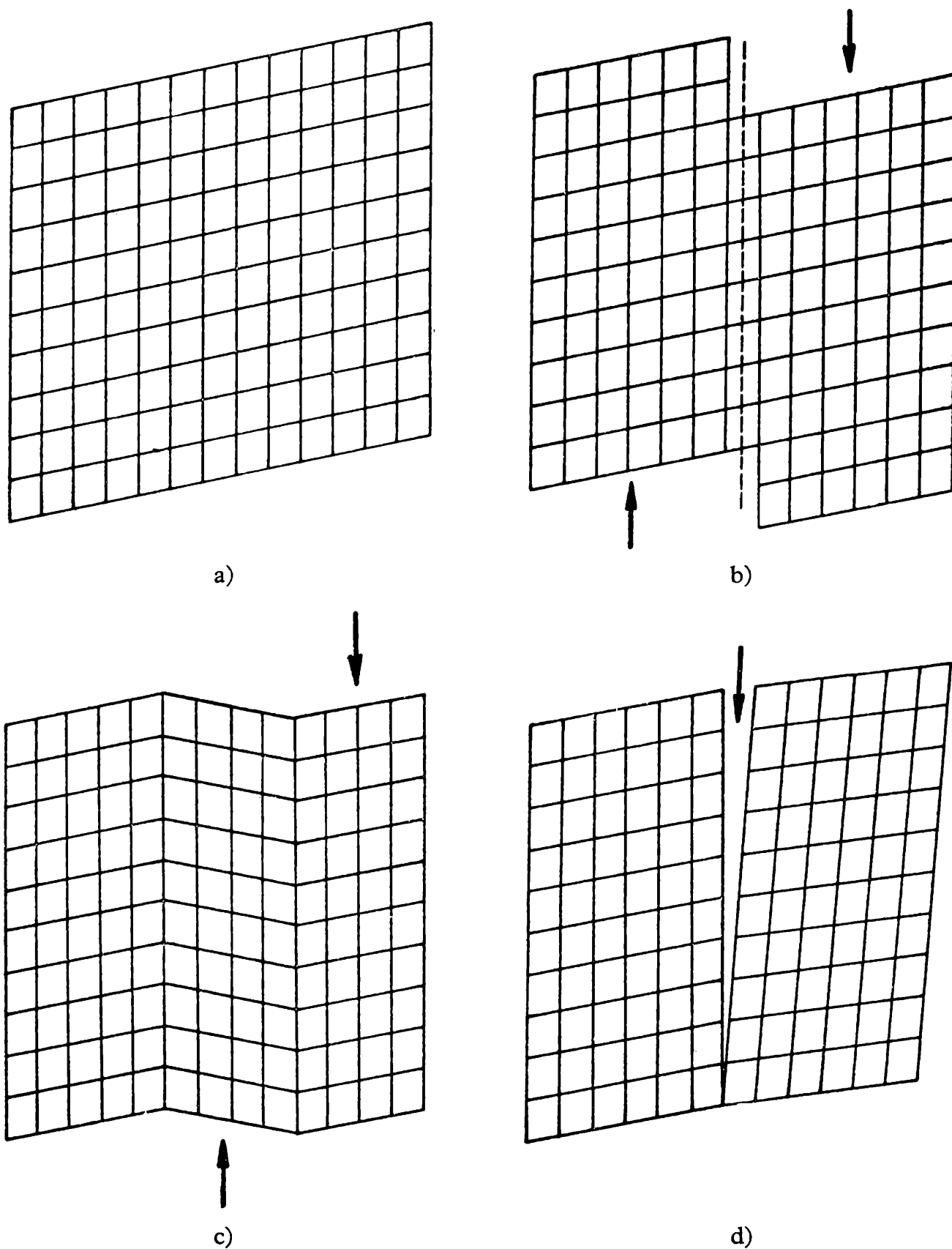
Vzhledem k významu plastické deformace je jedním z velmi důležitých úkolů fyziky zjistit, jaké děje probíhají v tělese při plastické deformaci a zvláště, jaká je mikrofyzikální podstata těchto dějů. Na tuto otázku není jednoznačná odpověď. Tyto mikrofyzikální děje se mohou dosti lišit podle toho, o jaký typ tělesa jde. U látek *nekrytalických* neboli *amorfních*, ve kterých nejsou pravidelně uspořádány atomy v prostorovou mřížku, jako je na př. sklo, guma, pryskyřice a podobné látky, probíhá při plastické deformaci tečení podobně jako ve značně viskosní kapalině.

Složitější a mnohem zajímavější děje probíhají při plastické deformaci v látkách krystalických, jejichž atomy jsou v prostoru rozestaveny v pravidelnou prostorovou mřížku. Těchto dějů si chceme podrobněji všimnout v našem článku.

Většina látek v neživé přírodě - horniny - a nejdůležitější látky v technické praxi - kovy - jsou *látky polykrystalické*, t. j. jsou složeny z velkého počtu malých krystalických zrn různě orientovaných. V přírodě můžeme však najít i vyvinuté větší monokrystaly nejrůznějších minerálů a ve fyzice dovedeme vyrobit i větší monokrystaly různých látek, mezi nimi též monokrystaly kovů.

Je zřejmé, že při plastické deformaci polykrystalických látek mohou probíhat současně dva děje: může docházet k plastické deformaci uvnitř jednotlivých krystalů a k vzájemnému pohybu jednotlivých zrn, čili k t. zv. *tečení na hranicích zrn*.

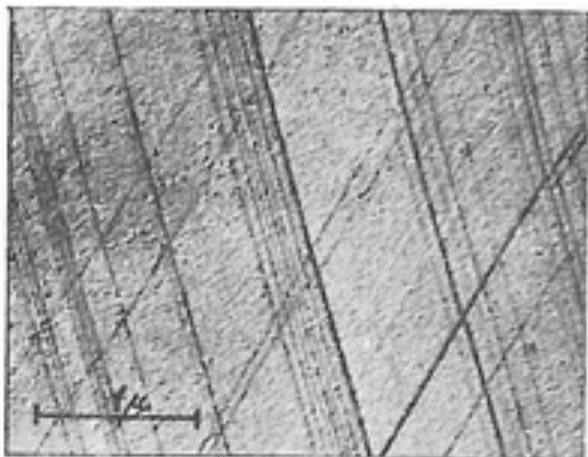
O tomto druhém ději, který na př. u kovů nastává ve větší míře při vyšších teplotách, není ještě plně jasno. Podle některých teorií je na hranicích zrn vrstvička bez krystalické struktury, tedy v amorfním stavu a tečení na hranici zrn je děj podobný



Obr. 1. Různé případy trvalé deformace krystalů: a) krystal nedeformovaný, b) skluz, c) dvojčení, d) štěpení.

ději ve viskosní kapalině. Podle jiných teorií na hranicích zrn navazují krystalové mřížky jednotlivých zrn na sebe, což se zdá být pravděpodobné zvláště v případech málo odlišné orientace zrn. Potom i tečení na hranici zrn je dějem analogickým ději v krystalu.

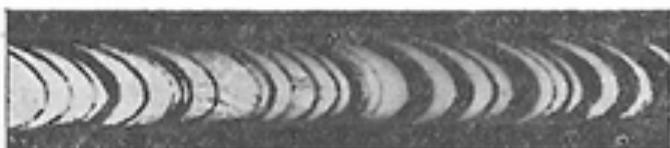
Lepší znalosti máme dnes o dějích, které probíhají při plastické deformaci uvnitř krystalu. Vyplynuly z rozsáhlého experimentálního materiálu, který byl v posledních desetiletích získán při pokusech s monokrystaly.



Obr. 2. Stupně na povrchu krystalu mosazi po plastické deformaci skluzem při pozorování elektronovým mikroskopem (podle D. Kuhlman-Wilsdorf, H. Wilsdorf, Acta metallurgica 1 (1953), 394).



Obr. 3. Skluzové pásy na monokrystalu mědi při pozorování metalografickým mikroskopem.



Obr. 4. Makroskopické skluzové stupně na monokrystalu Zn deformovaném tahem (podle H. Tersch, Die Festigkeitserscheinungen in Kristallen, 1949).

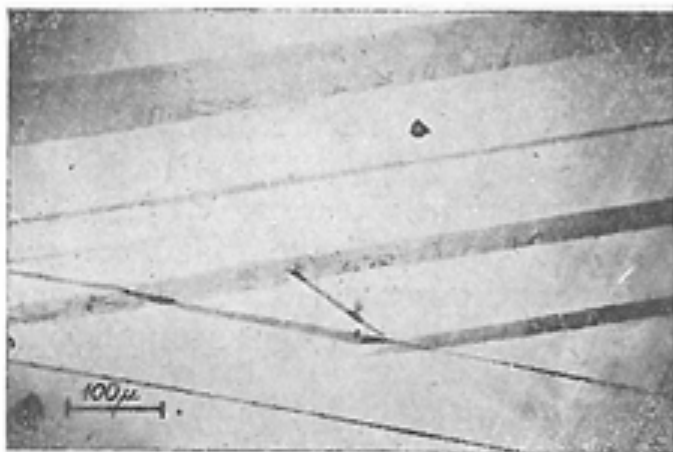


Obr. 5. Deformační dvojče u vápence, vzniklé při vtlačování břitu (podle E. Schmid, W. Boas, Kristallplastizität, 1935).

Makroskopická pozorování ukázala, že plastická deformace monokrystalů může probíhat třemi různými základními procesy. Jsou to: *skluz*, *dvojčení* a *štěpení*. Jejich podstatu vidíme na obr. 1, kde je mřížka krystalu znázorněna schematicky pouze v rovině, atomy (u kovů ionty) jsou umístěny v uzlech sítě. Na obr. 1a vidíme ideální mřížku krystalu, na obr. 1b vidíme mřížku po

s k l u z u, to je po plastické deformaci, vzniklé posuvem jedné části krystalu proti druhé. Rovina ve které skluz nastal, se nazývá *rovina skluzu*, směr posunutí atomů se nazývá *směr skluzu*. Obr. 1c znázorňuje *d v o j č e n í*, to je plastickou deformaci krystalu, vzniklou natočením části krystalu do polohy, ve které mřížka je symetrická vůči původní mřížce vzhledem k určité rovině. Rovinu symetrie nazýváme *rovinou dvojčení*, směr posuvů atomů *směr dvojčení*. Natočenou část krystalu, na obr. 1c, tedy střední část, nazýváme *deformační dvojče*. Na obr. 1d vidíme t. zv. *š t ě p e n í*, to je oddělení dvou částí krystalu od sebe podél roviny štěpení.

Na rozdíl od skluzu a dvojčení nevede štěpení k pouhé změně tvaru, ale přímo k porušení krystalu a často nebývá počítáno k plastické deformaci. Proces štěpení je pravděpodobně z těchto tří procesů nejznámější z vlastní zkušenosti. Je možno se s ním seznámit při štípání slídy na tenké destičky, neboť i velké desky slídy jsou zpravidla monokrystaly, nebo na př. při štípání krystalků kamenné soli. Uvedeme proto experimentální důkazy pouze pro skluz a dvojčení.



Obr. 6. Deformační dvojčata v krystalu cínu (podle M. Ryšavé).



Obr. 7. Skluzové čáry na polykrystalickém niklu s žihacími dvojčaty.

Při skluzu vznikají zřejmě na povrchu krystalů stupně. Takové stupně, nazývané často *skluzové čáry*, vidíme na obr. 2, který zobrazuje povrch plasticky deformované mosazi. Byl pořízen elektronovým mikroskopem technikou zhotovení tenkého otisku povrchu, jeho pokovení a pozorování na průchod. Vidíme, že skluzové stupně se na některých místech soustřeďují ve svazky, které mohou již být viditelné i optickým mikroskopem, v ojedinělých případech, na př. při deformaci monokrystalů kadmia nebo zinku, zvláště za vyšších teplot, mohou nabýt makroskopických rozměrů a jsou pak viditelné pouhým okem. Výška elementárních skluzových stupňů z obr. 2 je několik set Å. Čáry viditelné optickým mikroskopem, čili t. zv. *skluzové pásy*, které jsou tvořeny nahromaděním elementárních stupňů umístěných ve vzdálenostech přibližně po 200 Å, odpovídají již celkové výšce stupně několik tisíc Å. Vzhledem k malé rozlišovací schopnosti není možno optickým mikroskopem rozlišit jejich jemnou strukturu. Skluzové čáry, odpovídající takovým svazkům stupňů po deformaci monokrystalu mědi a pozorované optickým mikroskopem na odraz, čili t. zv. *m e t a l o g r a f i c k ý m m i k r o s k o p e m*, vidíme na obr. 3.

Rovněž makroskopické skluzové stupně ojediněle pozorované, viz na př. obr. 4, jsou složeny z řady jemnějších stupňů.

Při plastické deformaci některých krystalů bylo ojediněle pozorováno dvojčení v makroskopickém měřítku. Na obr. 5 vidíme takové deformační dvojče, vzniklé u vápence po vlačování břitů, kdy dvojče změnilo celkový tvar tělesa a jeho vznik byl doprovázen vytvořením trhliny. Častější je případ dvojčení v mikroskopickém měřítku, kdy deformací vzniklé dvojče vytvoří uvnitř krystalu zrn jiného orientace, zpravidla velmi úzké. Na rovinném povrchu se takové dvojče projeví podle obr. 1c deformací povrchu a může být viditelné mikroskopem a někdy i pouhým okem. Na obr. 6 vidíme povrch krystalu cínu s deformačními dvojčaty. K zvýšení kontrastu bylo při pozorování metalografickým mikroskopem užito šikmého dopadu světla. Hranice dvojčat je možno též zviditelnit naleptáním podobně jako hranice zrn v polykrystalickém materiálu.

Dvojčení, které nastává při plastické deformaci, bývá nazýváno *mechanickým dvojčením* na rozdíl od dvojčení, které vzniká velmi často při žíhání některých krystalů nebo polykrystalických látek předtím plasticly deformovaných. V tomto případě mluvíme o *žíhacích dvojčatech*, která jsou zcela běžná u polykrystalické mědi, niklu i jiných kovů.

Skluz je důležitým mechanismem plastické deformace nejen u monokrystalů, ale i u polykrystalických materiálů. Přesvědčuje nás o tom obr. 7. Materiálem je zde vyžíhaný polykrystalický nikl. Při elektrolytickém naleptání byly na jeho povrchu zviditelněny hranice zrn i žíhacích dvojčat, vzorek byl potom plasticly deformován čistým tahem. Na povrchu vidíme opět při pozorování metalografickým mikroskopem skluzové stupně, které mají v jednotlivých zrnech a v jednotlivých dvojčatech různé směry.

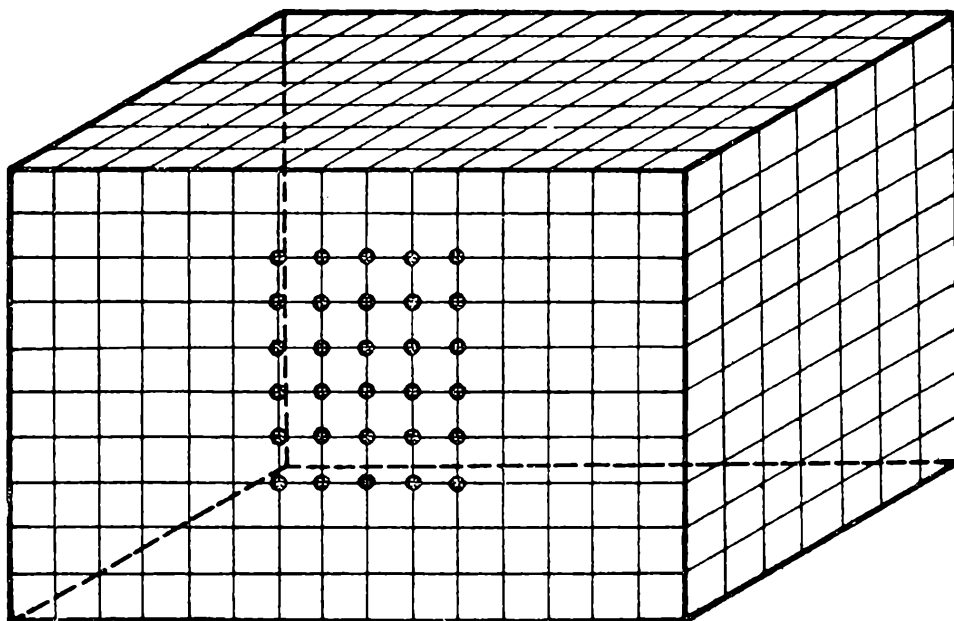
Důležitým experimentálním výsledkem je zjištění, že roviny i směry skluzu a dvojčení, i roviny štěpení jsou význačné zcela určité krystalografické roviny a směry v krystalu, zpravidla jedny z rovin a směrů nejhustěji obsazených atomy. Plastická deformace krystalů je tedy krystalograficky závislá, a tím se zásadně liší od plastické deformace amorfních látek.

Dislokace a výklad mechanismu skluzu.

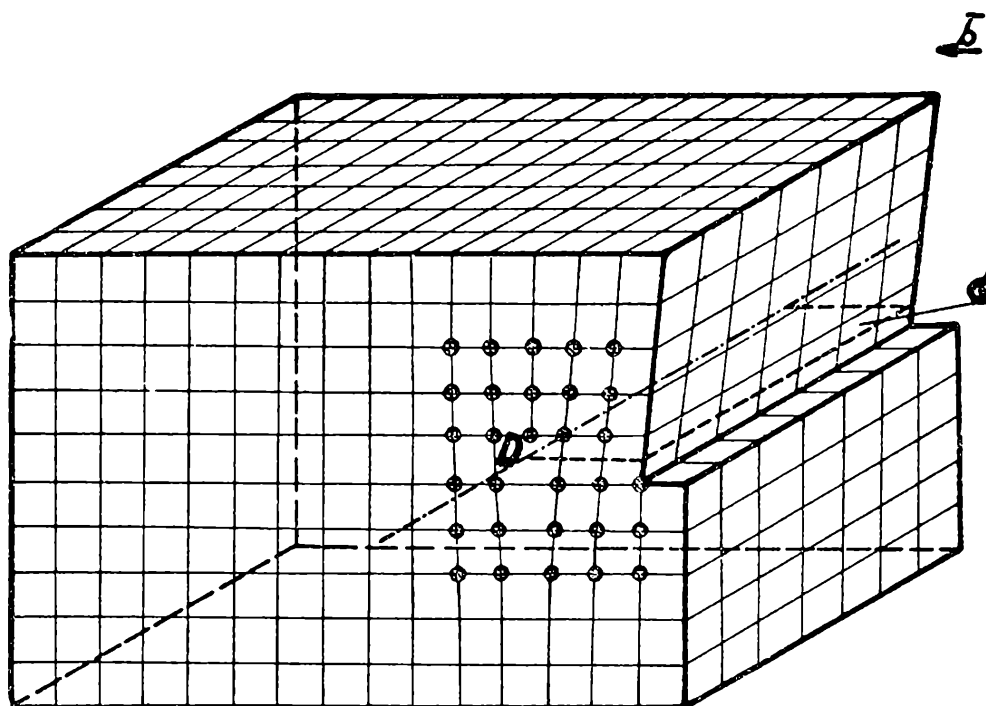
Při prvých pokusech o výklad skluzu se projevil zajímavý rozpor. Z pokusů bylo známo, že význačná deformace skluzem se projeví, jakmile složka smykového napětí ve skluzové rovině, působí ve směru skluzu, dostoupí hodnoty τ_k , která se nazývá *kritické skluzové napětí*. Z pokusů vycházela hodnota kritického skluzového napětí pro monokrystalové čisté kovy velmi malá a to 0,01 až 0,1 kg/m². Pokusy o teoretický odhad této hodnoty z mezioatomárních sil, při kterých se vycházelo z předpokladu, že obě části krystalu se pohybují po sobě jako tuhé celky, vedly k hodnotám τ_k až 10 000krát větším. Tento rozpor mezi naměřenou hodnotou a t. zv. teoretickou hodnotou kritického skluzového napětí vedl k závěru, že předpoklady teorie nejsou splněny a že tedy obě části krystalu se vzájemně nepohybují jako tuhé celky. Vzájemný pohyb se rovinou skluzu musí šířit postupně; můžeme tedy říci, že při skluzu se rovinou skluzu šíří jakási porucha.

Překvapující je rovněž značně nerovnoměrné rozdělení aktivních skluzových rovin v krystalu, t. j. takových rovin, ve kterých skutečně skluz nastal. Zatím co

bychom očekávali, že v ideálním krystalu proběhne skluz co v největším počtu rovnoběžných ekvivalentních rovin o malé posuvy, vzniká skluz ve skutečnosti v poměrně malém počtu takových rovin, vzájemný posuv je v nich však stovky atomových vzdáleností. Zdá se, jakoby skluz souvisel s poruchami krystalové mříž-



Obr. 8. Hranová dislokace v prosté krychlové mřížce: a) krystal bez poruchy,



b) krystal s dislokací,

ky, které jsou v krystalu nepravidelně rozmístěny. Tento nesouhlas mezi teoretickou a experimentální hodnotou kritického skluzového napětí a nerovnoměrnost rozdělení skluzu v krystalu vedly v r. 1934 Orowana a Taylora k názoru, že plastická deformace skluzem v krystalech je způsobena přítomností a pohybem speciálních poruch krystalové mřížky, zvaných *dislokace*.

V dalším podáme jednoduché vysvětlení pojmu dislokace a mikrofyzikální výklad skluzu.

Dislokace jsou zvláštním případem poruch krystalové mřížky. Poruchami nazýváme oblasti, ve kterých se mřížka značně liší od mřížky ideální. Dislokace zařazujeme mezi *poruchy čarové*. Porušená oblast má totiž jeden rozměr značně převládající, je rozložena podél určité čáry, kterou nazýváme *dislokační čára*. Byla již podána obecná definice dislokace pro libovolnou krystalografickou soustavu a pro obecný tvar dislokační čáry. Pro jednoduchost se však spokojíme pouze znázorněním dvou nejjednodušších typů dislokace, které nazýváme *dislokace hranové* a *šroubové*, s dislokační čarou přímkovou v prosté krychlové soustavě.

Na obr. 8a je v této soustavě schematicky znázorněna ideální mřížka, na obr. 8b mřížka s *h r a n o v o u d i s l o k a c í*. Její vznik bychom si myšleně mohli představit tak, jako by po rozříznutí krystalu podél roviny σ až k přímce D byla horní část zatlačena vlevo tak, že posunutí horních atomů proti spodním je dáno vektorem \bar{b} , kolmým k přímce D , jehož délka je právě rovna vzdálenosti sousedních atomů, a jako by horní a dolní část krystalu pak byly opět spojeny. Vzniká tak porucha, u které mřížka je silněji deformována v okolí přímky D , která je tedy dislokační čarou. Ve všech rovinách kolmých k dislokační čáře je rozmístění atomů stejné. Nejcharakterističtější pro toto rozmístění atomů je, že v horních řadách nad rovinou σ stojí v okolí dislokační čáry n atomů proti $(n - 1)$ atomům spodních řad.



Co vidíme na nebi

Dr. Josip Kleczek, Ondřejov:

Teplota hvězd

Hvězdy září vlastním světlem a jejich teplota je značně vyšší než teploty, jakých dosáhneme v našich pozemských laboratořích. Způsob měření teploty hvězd je však obtížnější než měření teplot v laboratoři. Použití teploměrů a elektrických metod není v astronomii možné pro velké vzdálenosti mezi pozorovatelem a nebeskými tělesy, třeba i těmi nejbližšími. Takové přístroje by ostatně byly zcela neúčinné pro přímé měření teploty hvězd, neboť i kdybychom je mohli zanést do styku s hvězdou, obrovským teplem hvězdy by velmi rychle roztály a vypařily se v plyn. Jediný způsob, jak získat informace o teplotě hvězdy, je rozbor jejího spektra. Světelný paprsek je totiž jediným prostředníkem mezi hvězdou a pozorovatelem. Je třeba umět odšifrovat zprávy, které s sebou z hvězdy přináší. Je to celkem věrný posel, který dodává nezkrácené informace o prostředí, v němž se zrodil - o hvězdné atmosféře.

Vyzářená energie má svůj původ v hlubokých, velmi teplých vrstvách hvězdy. Tam za teploty mnoha milionů stupňů a obrovských tlaků probíhají jádrové

reakce, podobné těm, které se odehrávají při výbuchu vodíkové bomby: z lehkých prvků se vytvářejí prvky těžší. Přitom se uvolňuje ohromné množství energie, která ve formě záření putuje směrem k povrchu hvězdy. Doznává při tom značných změn, neboť z roentgenova záření, které převládá v nitru hvězd, se stává záření viditelné, světlo. Celková energie však zůstává stejná, jinak by totiž byl porušen princip zachování energie. Velmi energetický foton roentgenova záření se totiž na své dlouhé cestě ze středových oblastí hvězdy k jejímu povrchu rozmělní na přibližně tisíc fotonů, z nichž každý obsahuje tisíckrát méně energie než mateřský roentgenovský foton. Jinými slovy: kvalita záření závisí na teplotě prostředí. Když je konečně foton vyzáren atmosférou hvězdy do prázdného mezihvězdného prostoru, nese s sebou zprávy o těch vrstvách, z nichž byl vyzáren, to je o hvězdné atmosféře. Z denní praxe víme, že čím je těleso teplejší, tím více září a tím více přechází od barvy červené do bílé. Rozžhavené vlákno žárovky má bílou barvu a jeho teplota je značně vyšší než teplota do červena rozžhavených kamen. Při teplotě 6 000° většina záření má formu světla, jinými slovy, jeho fotony působí na sítnici našeho oka.

Vztah mezi barvou (nebo spojitým spektrem hvězdy, což je totéž) a teplotou vedl ke dvěma metodám měření hvězdné teploty. Obě jsou založeny na měření intensity v záření v různých bodech, t. j. v různých vlnových délkách spektra. První metoda je založena na zákonu, že teplota je nepřímo úměrná vlnové délce maximální intensity záření (Wienův zákon).

W i e n ů v p o s u n o v a c í z á k o n z n í:

$$\lambda_{\max} T = 0,288 \text{ cm grad},$$

kde T je absolutní teplota a λ_{\max} je vlnová délka (v cm), na níž připadá maximální intenzita záření ve spektru. Při této metodě je třeba pouze určit tu vlnovou délku, v níž hvězda nejvíce září.

Při druhé metodě je zapotřebí určit intenzitu ve dvou nebo více vlnových délkách spektra. Výsledné intenzity jsou porovnávány s theoretickým zákonem záření, který odvodil německý fysik Max Planck.

P l a n c k ů v v y z a ř o v a c í z á k o n z n í:

$$J_{\lambda T} = c_1 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1},$$

kde $J_{\lambda T}$ je intenzita záření ve vlnové délce λ , T je absolutní teplota zářícího tělesa, $e = 2,718 \dots$ (základ přirozených logaritmů), $c_1 = 3,70 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{sec}}$ a $c_2 = 1,433 \text{ cm} \cdot \text{grad}$.

Konečně třetí metoda, která užívá spojitého spektra, vychází ze zářivosti hvězdy. Zářivost hvězdy, což je celkové množství energie vyzárené každou vteřinu do okolního prostoru, se odvodí snadno z absolutní magnitudy (absolutní jasnosti). Známe-li navíc ještě průměr hvězdy, nebo - což je ekvivalentní - její povrch, můžeme vypočítat množství zářivé energie, které prochází každou vteřinu jedním centimetrem čtverečním povrchu hvězdy. Podle S t e f a n o v a z á k o n a je toto množství úměrné čtvrté mocnině absolutní teploty hvězdy.

Stefanův zákon zní:

$$E = \sigma T^4,$$

kde E je množství energie vyzářené jedním centimetrem čtverečním za jednu vteřinu, σ je konstanta $\left(5,71 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec grad}^4}\right)$.

Uvedené tři způsoby měření povrchové teploty hvězdy vycházejí ze spojitého spektra. Opírají se v podstatě o tři zákony záření: Wienův, Planckův a Stefanův. Vidíme tedy, že určování hvězdné teploty spočívá na zákonech podobně jako určování teploty na zemském povrchu. Měření normálním teploměrem je založeno na zákonu roztažnosti látek (rtuti) s teplotou. Měříme tedy délku rtuťového sloupce a opírajíce se o uvedený zákon, usuzujeme na teplotu. Postup je tedy principiálně stejný jako při měření teploty hvězd.

Další metody stanovení hvězdné teploty vycházejí z čárového spektra hvězd.

Jestliže má hvězda ve svém spektru na př. pouze čáry vodíku, soudíme, že je příliš horká, aby měla také čáry kovů, které se vyskytují v chladnějších hvězdách. Je však poměrně chladná na to, aby měla čáry helia, které se vyskytují jen v nejteplejších hvězdách. Znalostí podmínek, ve kterých se vyskytují tyto čáry, lze určit teplotu takové hvězdy na 10 000 °K. Jestliže naopak jsou ve spektru hvězdy silné čáry kysličníku titanu, můžeme na základě zkušeností z laboratoře říci, že její teplota je asi 2 500 °K.

Záření, které přichází z nitra hvězdy, nese s sebou určité množství energie. Tato energie může být předána různým atomům, které tvoří hvězdnou atmosféru. Víme však, že atomy jsou systémy kvantované: mohou absorbovat jen určitá kvanta energie. Energie, již je atom schopen absorbovat, může mít jen určité velikosti, určené stavbou uvažovaného atomu. Atom tedy bude pohlcovat záření jen v určitých vlnových délkách, které jsou pro něj charakteristické. Záření jiných vlnových délek bude procházet kolem atomu, aniž by bylo pohlceno. Ve spojitém spektru tedy zjistíme tmavé čáry, vyvolané atomy různých druhů.

Atom si můžeme představit sestavený z jádra, obklopeného elektrony umístěnými v různých hladinách, v různých vzdálenostech od jádra. Každé hladině odpovídá určitá energie, kterou má elektron, pokud se v této hladině nachází. Mezi těmito hladinami nemohou elektrony existovat. Proto se mění energie při přeskoku elektronů z jedné hladiny na druhou. Tak se při přeskoku elektronu z vyšší hladiny na nižší vyzáří určité kvantum energie. Při přeskocích z nižší hladiny na vyšší se pohlcuje stejné množství energie. Tak na př. vodík pohlcuje z procházejícího záření čáru H -alfa při každém přeskoku z druhé hladiny na třetí. Je pochopitelné, že čára H -alfa bude tím intenzivnější, čím je více atomů vodíku, které mají elektron v druhé hladině.

Počet atomů vodíku, které mají elektron v určité hladině, je však závislý na teplotě. Měření intenzity spektrální čáry nám tak dovoluje stanovit teplotu hvězdné atmosféry. Teplota hvězdy však může být tak vysoká, že atom ztrácí jeden ze svých elektronů. Atomu, ochuzenému o jeden či více elektronů, se říká iont. Spektrálními vlastnostmi se ionty značně liší od atomů neutrálních. Ztratil-li atom dva elektrony, říkáme, že je dvakrát ionisovaný atd. Poměr ionisovaných atomů k atomům neutrálním je známou funkcí teploty a tlaku. Tento důležitý

vztah odvodil podrobně v roce 1920 indický fyzik Saha a nazývá se *ionisační rovnice*. Pomocí ionisační rovnice můžeme z intensity atomů neutrálních a jejich iontů určit teplotu hvězdy. Tak na př. víme, že čáry neutrálního helia jsou ve hvězdách *O* slabší než čáry helia ionisovaného; naopak jsou silnější ve hvězdách *B*. To dokazuje, že hvězdy *O* jsou teplejší než hvězdy *B*, což potvrzuje závěry našeho minulého článku.

Povrchové teploty hvězdy, jak jsme se mohli přesvědčit v tabulkách v minulém článku, sahají od dvou do třiceti tisíc stupňů. Jsou-li hvězdy tak teplé na povrchu, jakých teplot musí dosahovat ve svém nitru? Zde nám pozorování nedá přímou odpověď. Je tedy třeba obrátit se k teorii vnitřní stavby hvězd, v níž je na základě několika fyzikálních zákonů odvozen stav hvězdného materiálu v různých hloubkách pod povrchem hvězdy. Výsledky výpočtů na př. ukazují, že teplota v nitru naší nejbližší hvězdy, Slunce, dosahuje třinácti milionů stupňů Kelvina. Jen za této teploty se drží Slunce v rovnovážném stavu, v *rovnovážném stavu dynamickém*, při němž obrovské tlaky kompensují tíhu hořejších vrstev slunečních. Slunce je za této teploty též *v rovnováze energetické*, neboť energie vyzářená povrchovými vrstvami do prostoru je kompensována jádrovou energií přeměny vodíku v helium. Za těchto vysokých teplot jsou téměř všechny atomy zbaveny svých elektronů. Jádra atomů se pohybují obrovskými rychlostmi, takže mezi nimi dochází k velmi prudkým srážkám, z nichž některé končí splnutím a přeměnou jader a uvolněním značného množství energie.

Některé hvězdy uvolňují ve svém nitru obrovská množství energie. Jsou to žhaví obři, spektrální třídy *O* a hvězdy Wolfovy-Rayettovy. Počínají si se svým „atomovým palivem“ tak nešetrně, že je spálí ve velmi krátké době. Jsou to tedy hvězdy velmi mladé, několik statisíců až milionů roků. Naproti tomu naše Slunce je ve vydávání svých energetických zásob šetrné a z geologických a paleontologických nálezů vyplývá, že v posledních miliardách let svého života nezměnilo znatelně svou zářivost. Podrobně se budeme zabývat otázkou uvolňování energie ve hvězdném nitru, jakož i stářím a životem hvězd, v některém z pozdějších článků.



Úlohy k řešení

19. Určete nutnou a postačující podmínku pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

aby její dva kořeny byla čísla opačná (různá od nuly).

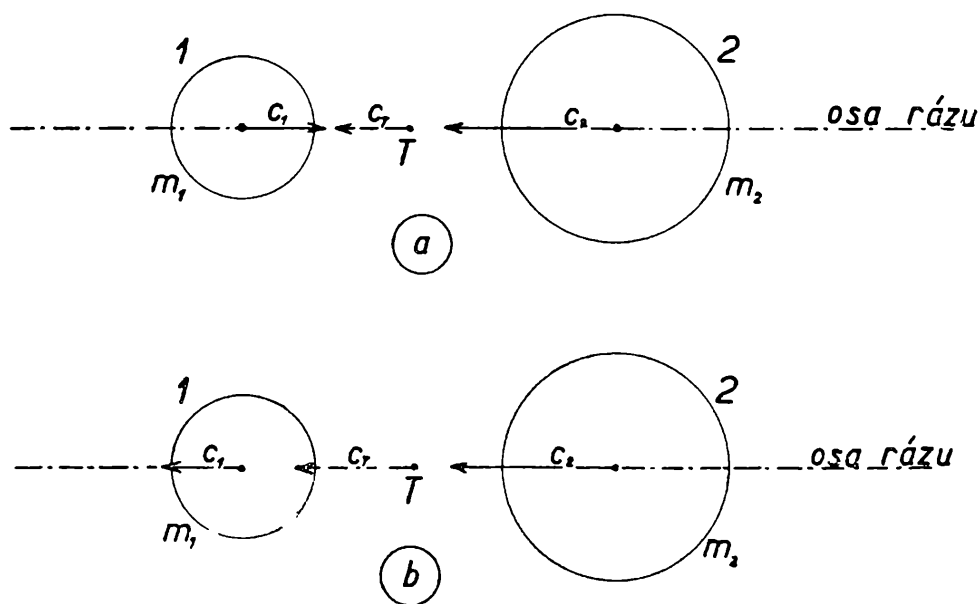
Ĵ. Holubář

20. Dokažte, že paty výšek v trojúhelníku T o úhlech $4\alpha = 2\beta = \gamma$ jsou vrcholy trojúhelníka nepřímo podobného T a zjistěte poměr podobnosti obou trojúhelníků. (Užijte výsledků z článku Ing. Dr. J. Langra v č. 9 Rozhledů matematicko-fyzikálních, roč. 1957.)

J. Langr

21. Jsou dány dvě různé přímky p , t a bod M neležící na žádné z nich. Sestrojte kulovou plochu, která prochází bodem M , dotýká se přímky t a střed má na přímce p .

A. Urban



Obr. 1

22. Dvě koule hmoty $m_1 = 1$ g a $m_2 = 5$ g se setkají v přímém rázu. Protože se jedná o ráz kulových těles, bude ráz středový. Koule jsou dokonale pružné. Rychlosti koulí před rázem jsou: a) $c_1 = 1$ m · s⁻¹, $c_2 = -2c_1$ (obr. a),
b) $c_1 = -1$ m · s⁻¹, $c_2 = 2c_1$ (obr. b).

Jak je z obrázků a) a b) patrné, klademe zde osu rázu do souřadnicové osy x ; pak též rychlostem v jejím kladném směru připisujeme hodnoty kladné, v opačném směru hodnoty záporné. Vypočtěte

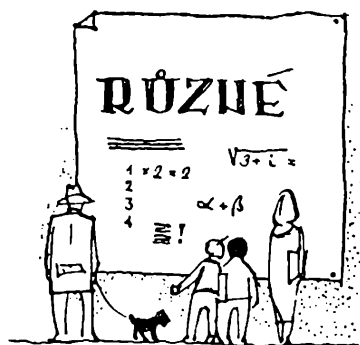
1. rychlost obou koulí (v_1 a v_2) po rázu v případech a) a b),
2. rychlost těžiště hmotné soustavy obou koulí před rázem (c_T) a po rázu (v_T) pro případ (a).

V. Šindelář

Řešení zasílejte do 30. června 1958 na adresu:

Doc. Ota Setzer, Praha 6, Zikova 4.

Různé



K. E. Ciolkovskij průkopníkem raketových letadel

Dne 17. září 1857 narodil se v Iževské, v rjazaňské gubernii, vynikající ruský fyzik Konstantin Eduardovič Ciolkovskij. Ciolkovskij navázal na práce svého předchůdce, vynálezce N. I. Kibalčiče (1853—1881), jenž chtěl realizovat starý sen lidstva o proniknutí do vesmíru raketami s náplní střelného prachu. Ciolkovskij seznal nevhodnost takového pohonu a roku 1903 uveřejnil v časopise „Naučnoje Obozrenie“ článek „Průzkum vesmíru raketami“, v němž navrhoval mnohem vydatnější kapalná paliva jako zdroj energie pro raketová letadla. Tím položil Ciolkovskij základ k technickému uskutečnění raket o velkém doletu, zvláště když již tehdy navrhl vícestupňové uspořádání raketových letadel. Ciolkovskij v dalších pracích zdůraznil, že uskutečnění letů do vesmíru ve více etapách vyžaduje zřízení satelitu s posádkou. V téže době také Němec Ing. H. Ganswind (1856—1934) vystoupil s návrhem na meziplanetární letadlo poháněné raketami s kapalným palivem. Úspěchy sovětské vědy a techniky - jako je vyslání umělé družice pomocí nosné rakety o velkém doletu - jsou v úzké souvislosti s životním dílem Ciolkovského a s jeho předpovědí, že „po století vrtulových letadel bude následovat éra raketových letadel“. (Wissenschaft und Fortschritt č. 9/1957.)

F. Komurka



Recenze

Analytická metoda v geometrii

V Státním nakladatelství technické literatury v Praze vyšel I. díl celostátní vysokoškolské učebnice doc. RNDr Zdeňka Vančury: Analytická metoda v geometrii (stran 297, cena 29 Kčs). Kniha je sice věnována

posluchačům vysokých škol, hlavně účastníkům dálkového studia na těchto školách, může ji však se zájmem a s plným užitekem číst každý schopný žák 11. třídy JSS, který se zajímá o matematické myšlení a aplikace matematiky.

Kniha podává elementární, ucelený a logicky přesný výklad základních poznatků a metod analytické geometrie v rovině a to nezávisle na předchozích poznatcích synthetické geometrie. Způsobem ryze algebraickým je tu probrána geometrie přímky i kuželoseček, přičemž se zde vhodně doplňují principy a metody moderní a klasické analytické geometrie.

Učitelům matematiky je kniha užitečným prostředkem k prohloubení moderních metod v geometrii, nadaným žákům nejvyšších tříd jedenáctileté je klíčem k poznání nejzákladnějších vlastností lineárních a kvadratických rovinných útvarů. Stručná shrnutí na konci každého článku a vhodné připojené příklady jim toto poznání usnadní ještě před vstupem na vysokou školu.

O. S.

Prehľad stredoškolskej matematiky

Upozorňujeme čitateľov, že v Slovenskom vydavateľstve technickej literatúry vyšla knižočka **M e d e k - M i š í k Š a l á t : P r e h ľ a d s t r e d o š k o l s k e j m a t e m a t i k y**, str. 296, cena Kčs 12,80.

Kniha prehľadným spôsobom zhrňuje učebnú látku matematiky jedenáštočnej strednej školy a je vhodnou pomôckou pre žiakov stredných škôl pri opakovaní látky a hlavne pri príprave na prijímaciu skúšku z matematiky na vysokú školu. Knihu s radosťou uvítajú tiež vysokoškooláci ako vhodný a spoľahlivý prameň pre rýchle nájdenie zabudnutých definícií, poučiek, vzťahov a vzorcov zo stredoškolskej matematiky. Rozsah prehľadu tvorí nutný základ matematických vedomostí, potrebný pre úspešné štúdium na vysokej škole.

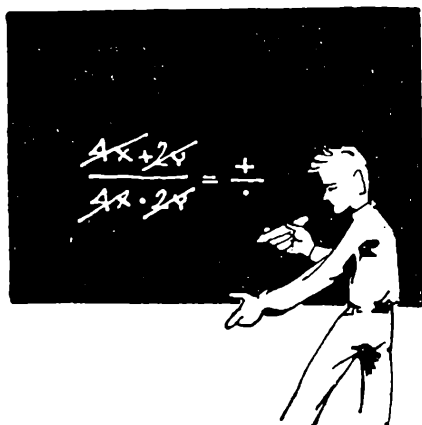
Kniha se podstatne líši od doterajších príručiek tohoto druhu. Je písaná presne, a to z hľadiska dnešného stupňa rozvoja základov matematiky, obsahuje presné definície pojmov, pri každej vete a vzorci obsahuje i podmienky, za ktorých vzťahy platia a ukazuje i spôsob ich použitia. Autori sú vysokoškolskí učitelia, knihu napísali na základe spozorovaných ťažkostí poslucháčov vysokých škôl, v snahe uľahčiť stredoškoolákovi prechod na vysokoškolské štúdium.

K prehľadu sú pripojené i základy matematickej logiky a aby si čitateľ navykol na správne metódy dôkazu, je v prehľade uvedené i niekoľko kratších typických dôkazov.

Ináč kniha je v prvom rade zameraná na objasnenie základných pojmov a to formou kratšieho výkladu. Tam, kde to autori považovali za potrebné, doložili k výkladu i riešenie typického príkladu (kniha obsahuje celkove 122 vyriešených príkladov). Aby si poslucháč mohol overiť nakoľko látke rozumie a mohol si látku precvičiť, za jednotlivými kapitolami sú pripojené úlohy na riešenie.

Sme presvedčení, že knižočka, ináč i vonkajšou formou veľmi pekne vybavená, sa Vám stane pri štúdiu dobrým, stálym a obľúbeným pomocníkom.

Doc. Dr Cyril Palaj



Matematika

Doc. Emil Kraemer, Praha:

O analytické geometrii na přímce

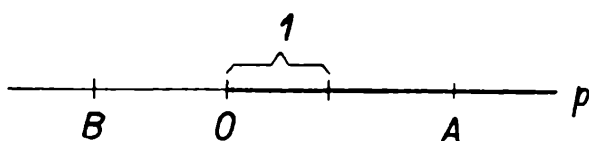
Na střední škole se učíme řešit geometrické problémy úsudkem. I když přitom někdy používáme výpočtů (např. Pythagorovy nebo Eukleidovy věty), přece jen téměř vždy musíme celé řešení provést často obsírným slovním výkladem. Takové metodě v geometrii říkáme *metoda syntetická*. Je však možno provádět řešení geometrických problémů důsledně početním postupem; tomu pak říkáme *metoda analytická*. Děje se to tak, že vyjadřujeme geometrické veličiny početně pomocí tzv. *s o u ř a d n i c*, které umožňují převést daný geometrický problém na problém početní. Tento početní problém pak řešíme početně pomocí algebry a výsledek opět vyložíme geometricky. Jestliže takto postupujeme, zabýváme se tzv. *analytickou geometrií*.

Analytická geometrie je matematickou naukou starou přes 300 let. Její počátky jsou nerozlučně spjaty s jménem francouzského matematika, filosofa a vojáka *René Descarta* (čti dekárt; 1596—1650). Jím vypracovaná a dalšími matematiky rozvinutá metoda znamenala nesmírný pokrok v pěstování geometrie. Umožnila využít výsledků jiných odvětví matematiky k řešení geometrických problémů, na které po staletí nestačila metoda syntetická. Tak např. teprve analytická metoda v geometrii vedla k důkazu nemožnosti eukleidovské *t r i s e k c e ú h l u* (tj. rozdělení úhlu na tři shodné úhly použitím jednoho pravítka a kružítka) nebo k důkazu nemožnosti *k v a d r a t u r y k r u h u*, (tj. proměny kruhu na čtverec s týmž obsahem) aj. Analytická metoda umožnila dále důkladné a soustavné studium složitých geometrických útvarů, jejichž probádání cestou čistě syntetickou je mnohdy téměř nemožné. Zkrátka objevení analytické geometrie znamená spolu s objevením infinitesimálního počtu (Newtonem a Leibnitzem) koncem 17. století převrat ve vývoji matematiky, který se někdy obrazně, avšak výstižně vyjadřuje slovy, že „tím matematika vstoupila ze stadia rukodělného do stadia velkopřumyslového“.

Vyložíme nejprve podstatu analytické geometrie na přímce a potom si všimneme analytické geometrie v rovině. Základním kamenem, o němž se při tom opíráme, je tato známá věta elementární geometrie:

Velikostí každé úsečky je některé kladné reálné číslo a obráceně, každé kladné reálné číslo je velikostí některé úsečky.

Přitom ovšem předpokládáme, že je předem zvolena jednotka délky (např. cm nebo mm a podobně). Má-li úsečka krajní body A, B , pak velikost úsečky AB nazýváme také *vzdáleností bodů A, B* a označujeme ji AB nebo BA . Jestliže body A, B splynou, pak říkáme, že jejich vzdálenost je rovna nule. Vzdálenost bodů A, B je tedy vždy číslo nezáporné, tj. $AB \geq 0$.



Obr. 1

Předpokládejme nejprve, že všechny body, jimiž se budeme zabývat, leží na téže přímce p . Na této přímce p zvolíme jeden bod, který nazveme *počátek*, a označíme jej písmenem O (origo = počátek). Počátek O rozdělí přímku p na dvě polopřímky (obr. 1); jednu nazveme *kladnou*, druhou *zápornou*. Na obr. 1 je přímka p vodorovná; na takové přímce volíme obvykle za kladnou polopřímku tu, která leží vpravo od počátku (na obr. 1 je silně vytažena). Dále zvolíme ještě pevně určitou jednotku délky. Potom platí:

Každému bodu X přímky p přiřadíme určité (jediné) reálné číslo X , jemuž říkáme *souřadnice bodu X* . Toto přiřazení provedeme takto:

Absolutní hodnota¹⁾ $|x|$ souřadnice x je rovna vzdálenosti bodu X od počátku O ; přitom je $x > 0$ pro body ležící uvnitř kladné polopřímky (např. pro bod A na obr. 1) a $x < 0$ pro body ležící uvnitř záporné polopřímky (např. pro bod B na obr. 1).

Z této definice plyne, že souřadnice počátku O je rovna nule. Dále je patrné, že obráceně každé reálné číslo x je souřadnicí jediného bodu na přímce p . Číslu $x = 0$ je přiřazen počátek O , číslu $x > 0$ bod ležící uvnitř kladné polopřímky a číslu $x < 0$ bod uvnitř záporné polopřímky.

Abychom vyznačili, že číslo x je souřadnicí bodu X , zavádíme zápis $X(x)$. Tak např. zápis $A(3)$ znamená, že bod A má souřadnici 3, zápis $B(-3)$ znamená, že bod B má souřadnici -3 atp.

Pomocí souřadnic x_1, x_2 bodů $A(x_1), B(x_2)$ snadno odvodíme vzorec pro vzdálenost AB těchto dvou bodů. Je-li $x_2 > x_1 > 0$ (obr. 2), je zřejmé

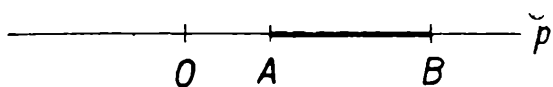
$$AB = x_2 - x_1 \quad (1)$$

¹⁾ Jak víte, je $|x| = x$ pro případ, že je $x \geq 0$, $|x| = -x$ pro případ, že $x < 0$. Je tedy vždy $|x| \geq 0$.

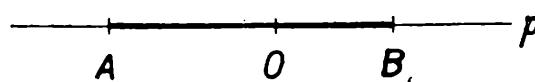
Tento vzorec však platí i pro $x_2 > x_1 = 0$ (tj. pro případ $A \equiv O$) a pro $x_2 > 0 > x_1$ (obr. 3). Snadno se přesvědčíte, že vzorec platí i pro $x_2 = 0$ (tj. pro $B \equiv O$), $x_1 < 0$ a pro $x_1 < x_2 < 0$. Konečně je zřejmé, že je $AB = x_2 - x_1$ i tehdy, jestliže je $A \equiv B$.

Vzorec (1) platí tedy vždy, pokud je $x_2 \geq x_1$. Je-li $x_2 \leq x_1$ (tj. zaměníme-li ve všech minulých případech body A, B), je

$$AB = x_1 - x_2. \quad (2)$$



Obr. 2



Obr. 3

Místo dvou vzorců (1) a (2) můžeme však psát vzorec jediný, jestliže si připomeneme definici absolutní hodnoty čísla. Pro $x_2 \geq x_1$ je totiž $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$; pro $x_2 \leq x_1$ je $x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Protože je vždy $|a| = |-a|$, je také $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Došli jsme tedy k tomuto výsledku:

Pro vzdálenost AB bodů A, B (různých nebo splývajících) platí vždy vzorec

$$AB = BA = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|. \quad (3)$$

V příštím článku ukážeme, jak můžeme pomocí tohoto jednoduchého vzorce řešit různé úlohy, které se týkají bodů téže přímky.

(Pokračování)

Jaroslav Chudý, Praha:

Eliminační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic

(Dokončení)

Příklad 2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= -5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 4x_4 &= +19 \\ 6x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= -15 \end{aligned}$$

Příslušná matice, v níž hned odečteme druhý řádek od prvního, má tvar:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 3 & 8 & -6 & -2 & -5 \\ 5 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 15 & 4 & 19 \\ 6 & -7 & -9 & 8 & -15 \end{array} \right\|$$

Přičtením vhodných násobků prvního řádku k ostatním získáme:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & -31 & 21 & 28 & 7 \\ 0 & -68 & 54 & 56 & 30 \\ 0 & -45 & 51 & 44 & 35 \\ 0 & -85 & 45 & 68 & 9 \end{array} \right\|$$

Pomocí druhého řádku zmenšíme čísla v ostatních řádcích; dvojnásobek druhého odečteme od třetího, trojnásobek od pátého a jednonásobek od čtvrtého:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & -31 & 21 & 28 & 7 \\ 0 & -6 & 12 & 0 & -16 \\ 0 & -14 & 30 & 16 & 28 \\ 0 & 8 & -18 & -16 & -12 \end{array} \right\|$$

Přičtěme nejdříve čtyřnásobek pátého řádku k druhému a dělme pak třetí, čtvrtý a pátý řádek dvěma:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & -51 & -36 & -41 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & -7 & 15 & 8 & 14 \\ 0 & 4 & -9 & -8 & -6 \end{array} \right\|$$

Vhodné násobky druhého řádku přičítáme k ostatním řádkům:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & -51 & -36 & -41 \\ 0 & 0 & -147 & -108 & -115 \\ 0 & 0 & -342 & -244 & -273 \\ 0 & 0 & 195 & 136 & 158 \end{array} \right\|$$

Přičteme-li pátý řádek ke čtvrtému, získáme řádek shodný s třetím; lze tedy čtvrtý řádek vynechat. Pak (po vynechání) přičtěme čtvrtý řádek ke třetímu a čtyřnásobek takto vzniklého řádku odečteme od čtvrtého:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & -51 & -36 & -41 \\ 0 & 0 & 48 & 28 & 43 \\ 0 & 0 & 3 & 24 & -14 \end{array} \right\|$$

Šestnáctinásobek čtvrtého řádku odečteme od třetího a vyměňme je:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & -13 & 9 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & -51 & -36 & -41 \\ 0 & 0 & 3 & 24 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -356 & 267 \end{array} \right\|$$

To je matice typu (7). Uvážíme-li příslušnou soustavu rovnic, získáme postupně ze čtvrté, třetí, druhé a první rovnice:

$$x_4 = -\frac{267}{356} = -\frac{3}{4}; x_3 = \frac{-14 - 24x_4}{3} = \frac{4}{3}; x_2 = 0; x_1 = \frac{1}{2}. \text{ Daná sou-}$$

$$\text{stava má právě jedno řešení } \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{4}{3}; -\frac{3}{4} \right)$$

Příklad 3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Napišme matici hned s vyměněným prvním a druhým sloupcem:

$$\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array} \quad \text{odtud} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 5 \end{array} \quad \text{dále}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_4 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 5 \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 \end{array}$$

Zde již není třeba upravovat dále. Poslední dva řádky matice představují totiž dvojici rovnic $10x_1 = 2$ a $10x_1 = 1$, jež nemohou současně platit (jsou sporné). Daná soustava nemá proto řešení.

Právě vyložené eliminační metody se užívá velmi často v praxi. Jsou-li koeficienty rovnic vícemístná čísla nebo čísla desetinná, nevyvarujeme se při úpravách dělení. Pro řešení užíváme pak několik druhů schemat, jež nám výpočet zmechanisují a jež nám současně umožní kontrolu každého částečného výpočtu. Je snad zbytečné prokazovat výhodnost počítačového stroje při jednotlivých početních výkonech. Objasněme si nejdříve princip kontroly výpočtu.

Zavedme do soustavy (1) nové neznámé y_i vztahy $x_i = y_i - 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Po dosazení do r -té rovnice ($r = 1, 2, \dots, m$) dostaneme

$$\begin{aligned} a_{r1}(y_1 - 1) + a_{r2}(y_2 - 1) + \dots + a_{rn}(y_n - 1) &= c_r, \text{ tj.} \\ a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \dots + a_{rn}y_n &= c_r + a_{r1} + a_{r2} + \dots + a_{rn}. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$c_r + a_{r1} + a_{r2} + \dots + a_{rn} = s_r, \quad (9)$$

má r -tá rovnice tvar $a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \dots + a_{rn}y_n = s_r$.

Kontrola spočívá nyní v tom, že současně se soustavou (1) pro neznámé (x_1, x_2, \dots, x_n) řešíme soustavu (9) pro neznámé (y_1, y_2, \dots, y_n) , jež se liší od soustavy (1) jen v pravých stranách podle (9). Vlastnost, vyjádřená rovností (9) bude pak za-

chována v každém řádku získaném dovolenými úpravami - tím kontrolujeme správnost každého provedeného kroku při úpravách. Mezi řešeními jedné i druhé soustavy musí pak platit $y_i = x_i + 1$, čímž je dosaženo kontroly výsledku.

Základní princip všech schemat (lišících se od sebe v podstatě jen zmenšením počtu nutných početních výkonů pro speciální soustavy - souměrné atd.) ukážeme v jednoduchém příkladu soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých; pro početní výkony je užito počítačového stroje - je počítáno na čtyři desetinná místa (čtvrté zaokrouhleno).

Příklad 4.

$$\begin{aligned} 2,65 x_1 - 3,94 x_2 + 0,58 x_3 &= -3,91 \\ 1,96 x_1 + 2,23 x_2 - 3,72 x_3 &= 4,64 \\ 0,36 x_1 + 1,68 x_2 - 2,54 x_3 &= 1,98 \end{aligned}$$

Příslušné schema vypadá takto:

x_1	x_2	x_3	pravá strana	součet
2,65	-3,94	0,58	-3,91	-4,62
1,96	2,23	-3,72	4,64	5,11
0,36	1,68	-2,54	1,98	1,48
1	-1,486 8	0,218 9	-1,475 5	-1,743 4
	5,144 1	-4,149 0	7,532 0	8,527 1
	2,215 2	-2,618 8	2,511 2	2,107 6
	1	-0,806 6	1,464 2	1,657 6
		-0,832 0	-0,732 3	-1,564 3
		1	0,880 2	1,880 2
	1		2,174 2	3,174 2
1			1,564 4	2,564 4

Nejdříve napíšeme koeficienty dané rovnice i její pravou stranu a do sloupce „součet“ napíšeme součet koeficientů i pravé strany každé rovnice. První řádek dělíme číslem 2,65 a výsledek napíšeme do řádku čtvrtého (představuje první rovnici s koeficientem 1 při x_1); podtrhneme a provedeme první krok: čtvrtý řádek násobíme číslem 1,96 a odečteme od druhého - výsledek je v pátém řádku; dále čtvrtý řádek násobíme číslem 0,36 a odečteme od třetího a výsledek napíšeme do dalšího, tj. šestého řádku. Konečně dělíme pátý řádek číslem 5,144 1 a výsledek napíšeme do sedmého řádku. Tím je první krok - eliminace neznámé x_1 - proveden. Podtrhneme a provádíme druhý krok: násobek sedmého řádku číslem 2,215 2 odečteme od šestého řádku a výsledek sepíšeme pod čáru jako řádek osmý; dělením tohoto řádku číslem (-0,832) dostaneme řádek devátý, čímž je eliminace další neznámé x_2 provedena. Devátý řádek nám již udává hodnotu neznámé $x_3 = 0,880 2$ a $y_3 = 1,880 2$. Nyní se vracíme zpět: pomocí sedmého řádku a hodnot x_3, y_3 vypočítáme x_2 a y_2 - příslušný řádek je napsán jako desátý. Konečně ze čtvrtého řádku vypočítáme x_1 a y_1 - provedeno v řádku jedenáctém. Tím je výpočet dokončen. Sledujte přitom funkci čísel ve sloupci „součet“ v každém řádku.

Cvičení.

$$\begin{array}{l} 1. \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad 2x_1 - x_2 \quad \quad - 3x_4 = 2 \\ \quad 3x_1 \quad \quad - x_3 + x_4 = -3 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ \quad 7x_1 - 2x_2 \quad \quad - 3x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2. \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ \quad x_1 + 3x_2 \quad \quad - 3x_4 = 1 \\ \quad \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 3. \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \quad - x_5 = -3 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \quad \quad = 10 \\ \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4. \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ \quad 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 5. \quad 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ \quad 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ \quad 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$$

V ý s l e d k y :

1. $(0; 2; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3})$.
2. $(-8; 3 + x_4; 6 + 2x_4; x_4)$, kde x_4 je libovolné.
3. Soustava nemá řešení.
4. $(0; 0; 0; 0)$.
5. $(\frac{3x_3 - 13x_4}{17}; \frac{19x_3 - 20x_4}{17}; x_3; x_4)$, kde x_3, x_4 jsou libovolné.

Stanislav Horák, Praha:

O tětiovém čtyřúhelníku

V tomto článku pod pojmem čtyřúhelník budeme rozumět čt y ř ú h e l n í k k o n v e x n í (vypuklý). Každý čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, nazýváme t ě t i v o v ý. Ve škole jste se již seznámili s některými speciálními tětiovými čtyřúhelníky. Měli jste čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník. Tětiovým čtyřúhelníkem může však být i čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné (obr. 1a, b, c). O takovém budeme v tomto článku mluvit. Rozumí se, že vlastnosti, které odvodíme, platí i pro tětiové čtyřúhelníky dosud známé.

V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 1) narýsujeme úhlopříčky AC, BD a označme duté úhly

$$\begin{array}{l} \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \alpha, \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \beta, \\ \sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = \gamma, \quad \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \delta \end{array}$$

Odtud snadno nahlédneme, že je správná věta:

1. *V tětiovém čtyřúhelníku je součet dvou vnitřních protějších úhlů roven úhlu přímému.*

Platí však i věta obrácená:

1'. Jestliže součet protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníka je přímý úhel, pak čtyřúhelník je tětíkový.

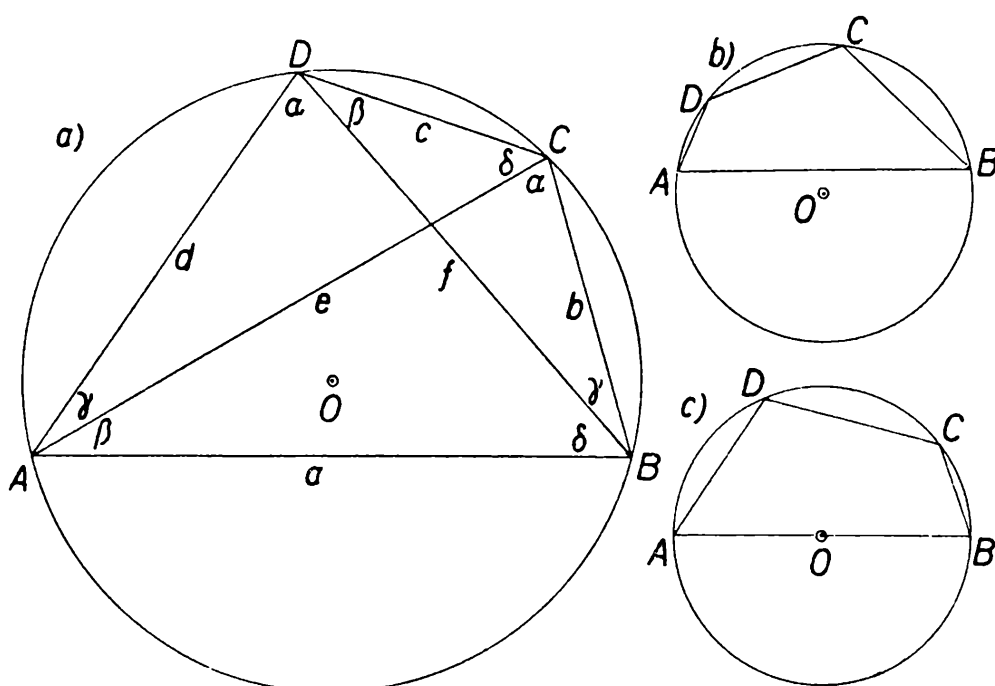
D ů k a z obrácené věty provádět nebudeme. Dokážeme si však další větu, které se říká **P t o l e m a i o v a** věta (Ptolemaios žil v 2. st. po Kr.):

2. V tětíkovém čtyřúhelníku součin úhlopříček je roven součtu součinů protějších stran, tj. platí

$$ef = ac + bd,$$

kde e, f jsou délky úhlopříček a a, b, c, d jsou po řadě délky stran AB, BC, CD, AD .

P o z n á m k a. Věta je vyslovena poněkud nepřesně. Místo „součin úhlopříček“ a „součin dvou stran“ by mělo být „součin délek úhlopříček“ a „součin délek stran“. Použil jsem kratšího vyjádření, neboť každý ví, oč jde.



Obr. 1

D ů k a z. Užitím kosinové věty pro trojúhelníky ABC, ACD dostaneme

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma + \delta) \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ &= c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos(\gamma + \delta) \end{aligned} \quad (1b)$$

Vyloučením $\cos(\gamma + \delta)$ z obou těchto rovnic obdržíme po kratší úpravě

$$e^2(ab + cd) = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) = (ac + bd)(ad + bc) \quad (2a)$$

Podobným způsobem z trojúhelníků ABD, BCD dostaneme

$$f^2(ad + bc) = ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2) = (ab + cd)(ac + bd) \quad (2)$$

Rovnice 2a, 2b vynásobíme:

$$e^2 f^2 (ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)^2 (ad + bc)(ab + cd).$$

Odtud po zkrácení máme vyslovenou větu.

Platí však ještě více:

2'. *Jestliže ve čtyřúhelníku platí*

$$ef = ac + bd ,$$

kde a, b, c, d, e, f mají známý význam, pak čtyřúhelník je tětiový.

Důkaz obrácené věty provádět nebudeme.

Tento informativní článek zakončíme vzorcem pro obsah tětiového čtyřúhelníka.

Z obr. 1 je patrné, že jeho obsah P je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC , ADC . Podle toho platí

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin(\gamma + \delta) + \frac{1}{2} cd \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

Tento vzorec vzhledem k větě 1 nabude tvaru

$$P = \frac{1}{2} (ab + cd) \cdot \sin(\gamma + \delta) . \quad (5)$$

Nyní vypočteme $\sin(\gamma + \delta)$ jako funkci stran tětiového čtyřúhelníka. Rovnice 1a, 1b od sebe odečteme a ze vzniklé rovnice vypočteme $\cos(\gamma + \delta)$:

$$\cos(\gamma + \delta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} .$$

Z toho můžeme vypočítat $\sin(\gamma + \delta)$ takto:

$$\begin{aligned} \sin^2(\gamma + \delta) &= 1 - \cos^2(\gamma + \delta) = \\ &= 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right)^2 = \\ &= \frac{2^2(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{2^2(ab + cd)^2} \end{aligned}$$

Dále budeme upravovat jenom čitatele, kterého označíme \check{c} . V čitateli je rozdíl druhých mocnin:

$$\begin{aligned} \check{c} &= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) = \\ &= [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2] = \\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) . \end{aligned}$$

V geometrii je zvykem obvod mnohoúhelníků označovat $2s$. Pro náš čtyřúhelník tedy platí

$$a + b + c + d = 2s$$

Dále jest

$$\begin{aligned} -a + b + c + d &= 2s - 2a = 2(s - a) , \\ a - b + c + d &= 2(s - b) , \\ a + b - c + d &= 2(s - c) , \\ a + b + c - d &= 2(s - d) . \end{aligned}$$

Dosadíme-li do výrazu pro \check{c} , obdržíme

$$\check{c} = 2^4 (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

a dále

$$\sin^2 (\gamma + \delta) = \frac{2^4 (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ab + cd)^2}$$

a posléze

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Tento vzorec, který se podobá Heronovu vzorci pro obsah trojúhelníka, pochází od indického matematika *Brahmagupty*. Žil v 7. st. po Kr.

Tento článek je míněn jako úvod k jiným článkům, v nichž se seznámíte s méně známými vlastnostmi tětíkových čtyřúhelníků.

Cvičení.

1. Ukažte, že tětíkový čtyřúhelník nemůže mít tři ostré úhly.

2. Je dán rovnostranný trojúhelník MNP . Na kratším oblouku MN kružnice jemu opsané je zvolen vnitřní bod R oblouku MN . Dokažte, že platí $RF = RM + RN$. (Čtyřúhelník $MRNP$ je tětíkový; použijte naň Ptolemaiovy věty.)

3. Sestrojte tětíkový čtyřúhelník, jestliže je dáno: a) $a = 7, b = 4, \sphericalangle ABC = 75^\circ, f = 6$, b) $a = 4, b = 5,5, \sphericalangle ABC = 105^\circ, \sphericalangle BCD = 60^\circ$, c) $a = 8,5, c = 4,5, d = 6,5, \sphericalangle BCD = 60^\circ$, d) $a = 8,5, c = 4,5, \sphericalangle DAB = 45^\circ, \sphericalangle CBA = 60^\circ$.

4. Je dána nenulová úsečka AB . Bodem A je proložena libovolná přímka $a \not\equiv AB$ a bodem B libovolná přímka $b \not\equiv AB$. Libovolná kružnice k , která prochází body A, B , protne přímku a ještě v bodě D a přímku b ještě v bodě C (pokud se těch přímek nedotýká). Dokažte, že přímka CD je rovnoběžná s pevným směrem nezávislým na volbě kružnice k .

Ing. Dr. Josef Langr, Praha:

Z geometrie tětíkového čtyřúhelníka

Čtenářům tohoto článku doporučuji, aby si přečetli předchozí článek S. Horáka: O tětíkovém čtyřúhelníku, kde je zvlášť důležitá věta 1. Na tu se budu odvolávat poukazem V1.

Budiž dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$; kružnice jemu opsaná je $k \equiv (O; r)$. Pro stručnost označme velikosti stran $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$; velikosti úhlopříček $AC = u, BD = v$ a velikosti úhlů $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \alpha, \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = \beta, \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \gamma, \sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA = \delta$.

P o z n á m k y. 1. Zavedené veličiny nejsou nezávislé; platí o nich například

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2R, \text{ (viz V1)} \quad (1)$$

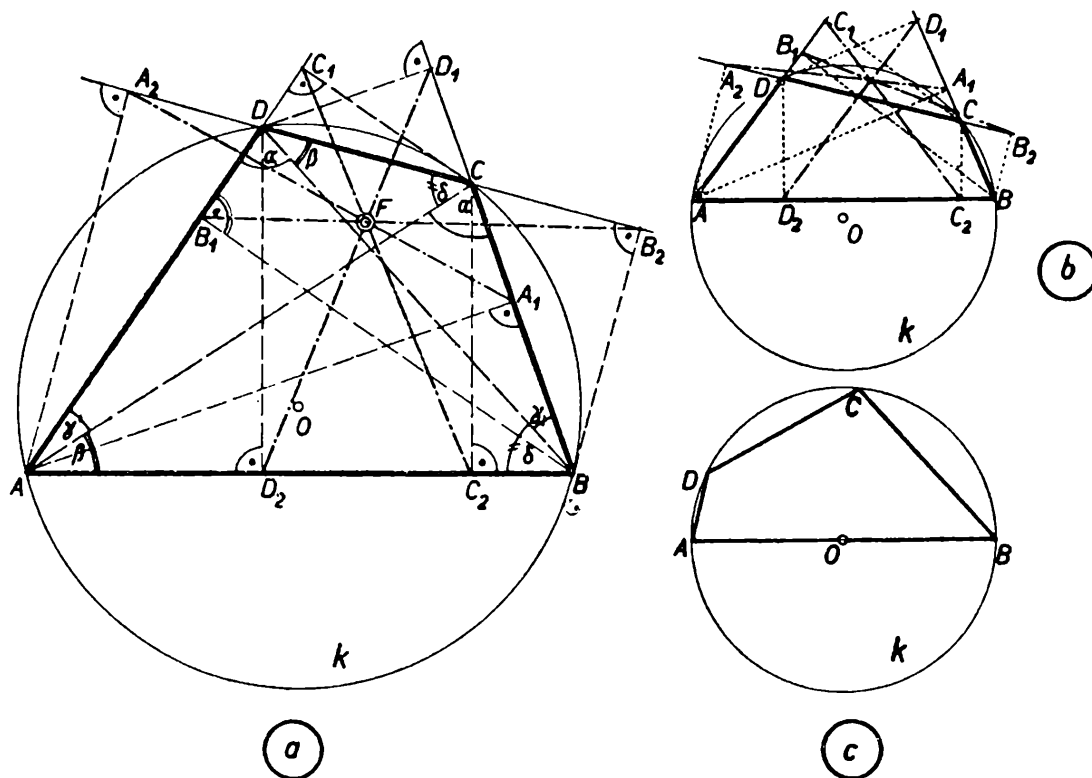
$$r = \frac{1}{2} u \cdot \sin (\gamma + \delta) = \frac{1}{2} v \cdot \sin (\beta + \gamma), \quad (2)$$

$$r = \frac{1}{2} a \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} b \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} c \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} d \cdot \sin \delta. \quad (3)$$

2. Střed O kružnice k může ležet uvnitř, nebo vně čtyřúhelníka $ABCD$, nebo na jeho jedné straně. Všechny tyto možnosti jsou vyznačeny v obrázcích 1a, b, c.

Body A, B sestrojme kolmice na přímku CD a jejich paty označme po řadě A_2, B_2 . Vrcholy B, C proložme kolmice na přímku AD a jejich paty označme B_1, C_1 . Potom narýsujeme kolmice z bodů C, D na přímku AB a jejich paty označme C_2, D_2 a posléze kolmice z vrcholů A, D na přímku BC a jejich paty označme A_1, D_1 . Nyní odvodíme několik zajímavých vět.

P o u č k a 1. Úsečky $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ jsou shodné.



Obr. 1

D ů k a z budeme provádět jen pro situaci vyznačenou v obr. 1a. Čtenáře prosím, aby situaci, která nastane v obr. 1b, c sám si nakreslil a promyslel.

Uvažujme čtyřúhelník AA_1CA_2 ; ten je tětiový, neboť úhly při vrcholech A_1, A_2 jsou pravé a tudíž výplňkové. (V1) Lze mu tedy opsat kružnici, jejíž střed O_a leží ve středu úsečky AC a její poloměr je tudíž $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} u$.

Dále platí

$$\sphericalangle A_2O_aA_1 = 2(\beta + \gamma),$$

což se dokáže takto:

$$\sphericalangle A_2O_aC = 2R - 2\delta,$$

$$\sphericalangle CO_aA_1 = 2R - 2\alpha.$$

Sečteme-li tyto dvě rovnice a použijeme-li rovnice 1, je ihned patrna správnost vysloveného tvrzení.

Z rovnoramenného trojúhelníka $A_1A_2O_a$ plyne

$$A_1A_2 = u \cdot \sin(\beta + \gamma).$$

Vzhledem k rovnici 2 nabude tato rovnice tvaru

$$A_1A_2 = 2r \cdot \sin(\beta + \gamma) \cdot \sin(\gamma + \delta).$$

Délku úsečky B_1B_2 vypočítáme obdobně ze čtyřúhelníka BB_1DB_2 :

$$B_1B_2 = v \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2r \cdot \sin(\alpha + \delta) \cdot \sin(\alpha + \delta).$$

Avšak z rovnice 1 plyne

$$\begin{aligned} \sin(\beta + \gamma) &= \sin(\alpha + \delta), \\ \sin(\gamma + \delta) &= \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

S ohledem na tyto rovnice je zřejmé, že $A_1A_2 = B_1B_2$ a tedy také $A_1A_2 = C_1C_2 = D_1D_2$, a to jsme měli dokázat.

P o z n á m k a. V obr. 1b vznikne situace poněkud jiná. Tam je tětivový čtyřúhelník ACA_1A_2 . Na to se musí při provádění důkazu vzít ohled. V obr. 1c je situace jednodušší. Tento případ budeme v dalším ze svých úvah vylučovat.

P o u č k a 2. *Příčky A_1A_2 , B_1B_2 svírají stejné úhly se stranou CD . Totéž platí o příčkách B_1B_2 , C_1C_2 a straně AD ; o příčkách C_1C_2 , D_1D_2 a straně AD a o příčkách D_1D_2 , A_1A_2 a straně BC .*

D ů k a z. Uvažujme tětivový čtyřúhelník AA_1CA_2 . V něm platí

$$\sphericalangle AA_2A_1 = \sphericalangle A_1CA_1 \equiv \sphericalangle ACB = \alpha$$

a proto

$$\sphericalangle CA_2A_1 = \frac{1}{2} \pi - \alpha.$$

Podobně v tětivovém čtyřúhelníku BB_1DB_2 je

$$\sphericalangle BB_2B_1 = \sphericalangle BDB_1 \equiv \sphericalangle BDA = \alpha$$

a proto

$$\sphericalangle DB_2B_1 = \frac{1}{2} \pi - \alpha,$$

čímž je věta dokázána, neboť pro ostatní příčky a strany by se důkaz prováděl stejně.

P o z n á m k a. V případě 1c přímky CD , A_1A_2 , B_1B_2 splývají a věta je triviální.

Právě dokázaná poučka nám umožní provést důkaz další věty, která platí, vyloučíme-li případ 1c.

P o u č k a 3. *Všechny čtyři příčky procházejí jediným bodem F , který je dělí v témže poměru.*

D ů k a z. Předpokládejme, že příčky A_1A_2 , B_1B_2 se protínají v bodě F_{12} a příčky A_1A_2 , D_1D_2 v bodě F_{14} . První část důkazu je, že body F_{12} , F_{14} jsou vnitřními body příček. To dokazovat nebudeme a přistoupíme k druhé části důkazu. Dokážeme, že $A_2F_{12} + A_1F_{14} = A_1A_2$ a že tedy $F_{12} \equiv F_{14}$.

Přímky AB , CD svírají, jak se snadno přesvědčíme, úhel velikosti $\delta - \beta$ nebo $\beta - \delta$ podle toho, zda A je mezi vrcholem B a průsečíkem X přímek AC , BD , nebo zda B je mezi A a X . Potom

$$A_2B_2 = a \cdot \cos(\delta - \beta) = a \cdot \cos(\beta - \delta).$$

Z rovnoramenného trojúhelníka $A_2B_2F_{12}$ dostaneme

$$A_2F_{12} = B_2F_{12} = \frac{1}{2} a \frac{\cos(\delta - \beta)}{\sin \alpha}.$$

S ohledem na rovnici 3 máme

$$A_2F_{12} = B_2F_{12} = r \cdot \cos(\delta - \beta).$$

Podobně v trojúhelníku $A_1D_1F_{14}$ platí

$$A_1D_1 = d \cdot \cos(\gamma - \alpha) = d \cdot \cos(\alpha - \gamma),$$

kde $\gamma - \alpha$ nebo $\alpha - \gamma$ je úhel přímek AD a BC . Potom

$$A_1F_{14} = D_1F_{14} = \frac{1}{2} d \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\sin \delta} = r \cdot \cos(\gamma - \alpha).$$

Vypočteme teď součet

$$\begin{aligned} A_2F_{12} + A_1F_{14} &= r [\cos(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha)] = \\ &= 2r \cdot \sin \frac{-\alpha - \beta + \gamma + \delta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma + \delta}{2} = \\ &= 2r \cdot \sin(\beta + \gamma) \sin(\gamma + \delta) = A_1A_2. \end{aligned}$$

Řekli jsme si, že body F_{12}, F_{14} jsou vnitřní body úsečky A_1A_2 a vzhledem k právě dosaženému výsledku platí $F_{12} \equiv F_{14} \equiv F$.

Podobně bychom dokázali, že bodem F prochází i přímka C_1C_2 . Poněvadž

$$A_1F = D_1F = C_1F = B_1F,$$

plyne z toho, že bod F dělí všechny příčky v témž poměru.

Důsledek poučky 3 je další poučka.

P o u č k a 4. Čtyřúhelníky $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ jsou tětivové a jsou podobné čtyřúhelníku $ABCD$. Střed kružnice jim opsané je bod F .

D ů k a z této poučky je snadný a přenechávám jej čtenářům.

(Pro tisk upravil S. Horák)

V l a d i m í r M a l ý, Praha:

Sportovní sázky očima matematika

1. Mnohý z čtenářů „Rozhledů“ již někdy stál před problémem sestavit správný tip pro S a z k u nebo S p o r t k u. Některý při sestavě pouze pomáhal rodičům nebo sourozencům, některý si možná i sám vsadil „za své peníze“. Vzhledem k tomu, že sázky na sportovní utkání a na sportovní losování dosahují stále větší obliby, bude účelné říci si několik zajímavostí o variantách a způsobu tipování. Na rozdíl od různých příruček a schemat, kolujících mezi sázejícími, budeme se opírat pouze o fakta prověřená matematicky.

✪ Chci v tomto článku uvést, případně i odvodit některá zajímavá čísla, týkající se kombinací v Sazce (problémům Sportky bude věnována pozornost v jiném článku).

Úvahy a vzorce použité v článku budou jen zcela nepatrně převyšovat úroveň znalostí žáků jedenáctiletky.

2. Nejprve uvedu některé pojmy, jichž budu v dalším používat (některým z čtenářů budou tyto pojmy nové, pro jiné budou znamenat jen osvěžení jejich znalostí);

$n!$ (čti: „ n faktoriál“) = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n$ = součin všech celých čísel od jedné do n .

Příklad: $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Číslo $n!$ udává počet různých permutací neboli přestav (od slovesa „přestaviti“) n různých prvků; např. písmena A, B, C, D můžeme přestaviti celkem do 24 uspořádání, neboť $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Přitom zvlášť definujeme $0! = 1$.

Tab. 1. Hodnoty $n!$

n	$n!$	n	$n!$
0	1	7	5 040
1	1	8	40 320
2	2	9	362 880
3	6	10	3 628 800
4	24	11	39 916 800
5	120	12	479 001 600
6	720		

Tab. 2. Hodnoty $\binom{n}{k}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	—	—	—	—	—
2	1	2	1	—	—	—	—
3	1	3	3	1	—	—	—
4	1	4	6	4	1	—	—
5	1	5	10	10	5	1	—
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924

$\binom{n}{k}$ (čti: „ n nad k “) udává počet různých způsobů, kterými lze z n různých prvků vybrat k prvků ($0 \leq k \leq n$). Platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Po rozepsání faktoriálů a krácení zjistíme, že

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+3) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$$

Čtenář nechť si povšimne, že v čitateli i ve jmenovateli tohoto zlomku je stejný počet součinitelů, totiž právě k ; všichni součinitelé jsou celá čísla, lišící se postupně o jedničku.

Příklad:
$$\begin{aligned} \binom{7}{3} &= \frac{7!}{3!(7-3)!} \\ &= \frac{7!}{3!4!} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad (\text{v čitatele i ve jmenovateli po třech členech}) \\ &= 35. \end{aligned}$$

Příklad: Ve třídě je 18 žáků a profesor potřebuje poslat tři žáky do kabinetu pro pomůcky. Kolik různých trojic žáků může z 18 žáků vybrat? Zřejmě $\binom{18}{3}$ trojic, tj.

$$\binom{18}{3} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816 \text{ různých trojic.}$$

Je možno dokázat, že platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

důkaz je zřejmý ihned z rozpisu obou čísel pomocí faktoriálů. Čtenář nechť si sám dokáže, že např. $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$

V tab. 1 jsou hodnoty $n!$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ a v tab. 2 hodnoty $\binom{n}{k}$ pro $n = 1, 2, \dots, 12$ a $k = 1, 2, \dots, 6$.

3. Předpokládám, že čtenář je seznámen alespoň v hlavních rysech s herním plánem S a z k y. Jen stručně opakuji:

a) každý týden se tipuje výsledek 12 zápasů (neuvažuji dva zápasy náhradní, neboť jen zřídka je některý zahrnován mezi zápasy pojaté do tipování); pro každý zápas je na sázence vyhrazen jeden řádek;

b) výsledek každého zápasu je možno tipovat třemi způsoby: vítězství mužstva uvedeného v řádku jako první se tipuje j e d n i č k o u, vítězství mužstva uvedeného v řádku jako druhé se tipuje d v o j k o u, remisa se tipuje k ř í ž k e m.

Správně tipovaný zápas s výsledkem $\begin{matrix} & 1 \\ & \swarrow \\ 2 & \\ & \searrow \\ & \times \end{matrix}$ se hodnotí $\begin{matrix} & 1 \\ & \swarrow \\ 2 & \\ & \searrow \\ & 3 \end{matrix}$ body. Sázející, který

správně tipoval všechny zápasy a dosáhl tak maximálního počtu bodů, získává výhru v prvním pořadí. Sázející, kterému chybí jeden bod (tj. neuhodl jednu jedničku), získává druhé pořadí. Podobně ten, kdo neuhodl jednu dvojku nebo dvě jedničky (chybí tudíž dva body), vyhrává třetí pořadí a sázející s chybějícími třemi body (neuhodl jeden křížek nebo jednu jedničku a jednu dvojku nebo tři jedničky) vyhrává čtvrté pořadí.

Podrobnosti o rozdělování vsazené částky na výherce se čtenář dozví v herním plánu Sazky. Jeden tip na 12 zápasů stojí 1 Kčs, na sázenku se vejde 10 tipů.

4. Je zřejmé, že pro každý z 12 zápasů může být správný jeden ze tří tipů; celkem tedy (v daném týdnu) vyjde jedna z $3^{12} = 531\,441$ různých kombinací jedniček, dvojek a křížků. Sázející, který by vsadil všechny tyto kombinace, by měl *jistotu*, že vyhraje jedno první pořadí; tento tip by jej ovšem stál přes půl milionu Kčs. Přitom by vyhrál pochopitelně i několik druhých, třetích a čtvrtých pořadí; jejich počet by závisel na tom, kolik je ve správné kombinaci jedniček, dvojek a křížků. Označme počet jedniček j , počet dvojek d a počet křížků k (ve správné kombinaci). Je zřejmé $j + d + k = 12$. Počet výher ve druhém pořadí (tj. se ztrátou jedné jedničky) je dán počtem kombinací, v nichž chybí jedna jednička a místo ní je buď dvojka nebo křížek. Je tedy počet výher V_{II} ve druhém pořadí

$$V_{II} = \binom{j}{1} \cdot 2 = 2j.$$

Počet výher V_{III} ve třetím pořadí můžeme stanovit touto úvahou: třetí pořadí znamená, že v tipu chybí (proti správné kombinaci)

- a) buď dvě jedničky, na jejichž místech jsou dvojky nebo křížky,
- b) nebo jedna dvojka, na jejímž místě nesprávně stojí jednička nebo křížek.

Dvě jedničky mohou chybět v $\binom{j}{2}$ kombinacích; na jejich místě může být jedna ze čtyř kombinací: $2\,2$; $2\,\times$; $\times\,2$; $\times\,\times$. Jedna dvojka může chybět v $\binom{d}{1}$ kombinacích. Celkem bude tedy

$$\begin{aligned} V_{III} &= 4 \cdot \binom{j}{2} + 2 \cdot \binom{d}{1} \\ &= 2j(j-1) + 2d \end{aligned}$$

Kombinace získávající výhru ve IV. pořadí, vznikne ze správné kombinace

a) ztrátou tří jedniček, tj. $\binom{j}{3}$ možností; na místech těchto jedniček mohou nesprávně stát dvojky a křížky, a to buď žádný, nebo jeden, nebo dva, nebo tři křížky (zbývající místa nesprávně tipovaná jsou obsazena dvojkami), což dává $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8$ možností;

b) ztrátou jedné dvojky a jedné jedničky, což je možné $\binom{j}{1} \cdot \binom{d}{1}$ způsoby; přitom na místě správné jedničky může stát nesprávně dvojka nebo křížek, na místě

správně dvojky pak nesprávně jednička nebo křížek, celkem tedy $2 \cdot 2 = 4$ možností;

c) ztrátou jednoho křížku, na jehož místě může být jednička nebo dvojka, tedy $2 \cdot \binom{k}{1}$ možností.

Je tedy

$$V_{IV} = 8 \cdot \binom{j}{3} + 4 \cdot \binom{d}{1} \binom{j}{1} + 2 \binom{k}{1} \\ = \frac{4}{3} j(j-1)(j-2) + 4d \cdot j + 2k$$

Tyto úvahy jsou ovšem samozřejmě zcela teoretické; žádný sázející ani skupina sázejících nemůže všechny tyto kombinace vsadit. Vedle finančního nákladu je zde i jiná překážka, jak se přesvědčíme výpočtem. Jestliže totiž vyplnění jednoho sloupce trvá 10 vteřin (uvažováno pouhé vyplňování čtverečků sázenky jedničkami, dvojkami a křížky bez uvažování a rozmyšlení, nutného při takovém komplikovaném tipování), potom je možno napsat za 1 minutu dva sloupce (každý se píše na tři díly sázenky). Potom však 531 441 sloupců představuje práci v délce 265 720,5 min. = 4428 hodin = $184\frac{1}{2}$ dne po 24 hodinách = $553\frac{1}{2}$ pracovního dne po osmi hodinách pracovní doby. Při 10 sloupcích na jedné sázence a váze jedné sázenky asi 1,3 gramu by váha potřebných sázenek činila asi 6,9 q.

5. Praktické problémy, před kterými sázející stojí, jsou ovšem poněkud jiné. Jen u některých zápasů ponecháváme trojtip (1; 2; ×). U některých zápasů vystačíme s dvojitipem (přesně vzato: předpokládáme, že s dvojitipem vystačíme, tj. vylučujeme jednu ze tří možností výsledků). Existují zřejmě tři druhy dvojitipu, totiž (1; 2), (1; ×), (2; ×). Mimoto u některých zápasů se tipuje výsledek bezpečně, tj. uvažuje se jen jedna ze tří možností, čili tzv. *tutovka*.

Na základě dvojitipů a trojtipů se konstruuji tzv. rozpisy, a to buď úplné (nepočítají se ztrátou bodů za předpokladu, že pro každý zápas vyjde buď tipovaná tutovka, nebo jedna z tipovaných možností dvojitipu), nebo zkrácené, počítající (za stejných předpokladů) s *maximální* ztrátou jednoho, dvou nebo tří bodů.

Předpokládejme, že tipujeme:

- a* tutovek
- b* dvojitipů (1; 2)
- c* dvojitipů (1; ×)
- d* dvojitipů (2; ×)
- e* trojtipů (1; 2; ×) ,

kde zřejmě $a + b + c + d + e = 12$. Úplný rozpis je zřejmě poměrně rozsáhlý, neboť vyžaduje

$$R_{ii} = 2^{b+c+d} \cdot 3^e$$

sloupců. Jsou-li správně tipovány všechny tutovky a dvojitipy, zaručuje tento úplný rozpis výhru v prvním pořadí.

Vedle samozřejmého požadavku snížení počtu tutovek na minimum (neboť nejsou velké riziko ztráty bodů) je problémem hlavně správné umístění jednotlivých

druhů dvojitipů. V některých zápasech prakticky vylučujeme vítězství mužstva uvedeného na druhém místě, tj. tipujeme (1; ×); v jiném řádku nepřipouštíme v úvahách možnost výsledku (1), tj. tipujeme (2; ×).

Zcela zvláštní pozornosti si zaslouhuje tipování křížků; u některých druhů sportu totiž zřídka dochází k remise. O tom svědčí např. tab. 3.

Vidíme, že např. v hokeji se vyskytuje remisa jen asi z polovice tak často jako při kopané; v házené je počet křížků asi uprostřed mezi těmito dvěma sporty. U košíkové je ovšem nutno upozornit na skutečnost, že v případě nerozhodného výsledku v normální hrací době se zápas prodlužuje, ale do Sazky platí výsledek docílený v normálním čase, tj. křížek.

Tab. 3. Nerozhodné výsledky v různých druzích her.

Druh sportu	Soutěž, doba	Počet zápasů	Z toho remis	
			abs.	%
Kopaná	liga 1957/58 jaro	66	18	27,3
	liga 1957/58 podzim	66	14	21,2
	divise A 1957/58 jaro	66	10	15,2
	divise B 1957/58 jaro	66	13	19,7
Hokej	liga 1956/57	182	17	9,3
	liga 1957/58 1. – 17. kolo	102	6	5,9
	II. liga A 1. – 12. kolo	51	5	9,8
Rugby	přebor 1957 jaro	28	1	3,6
Košíková	liga muži 1956/7	132	0	—
	liga muži 1957/8 1. – 7. kolo	42	0	—
	liga ženy 1956/7	132	0	—
Házená	liga muži 1957/8 jaro	66	5	7,6
	liga ženy 1957/8 jaro	45	6	13,3
Česká házená	liga muži 1957	45	6	13,3
	liga ženy 1957	45	8	17,8

6. Daleko nejoblíbenější jsou však rozpisy zkrácené, neboť jsou mnohem lacinější, tj. vyžadují daleko menší počet vsazených sloupců. Je možno odvodit obecné vzorce pro výpočet sloupců zahrnující (s maximální ztrátou jednoho, dvou nebo tří bodů) všechny možné kombinace (při daném počtu tutovek a dvojitipů). Tyto vzorce jsou však příliš složité a proto je neuvádím. V dalším rozvádím pouze několik příkladů, kde pro daná čísla a, b, c, d, e jsou vedle R_u udány i rozpisy se ztrátou jednoho bodu (tj. jedné jedničky) a jejich počet, označený R_{-1} (čti: potřebný počet sloupců při rozpisu se ztrátou jednoho bodu).

Přitom je nutno upozornit na jednu okolnost, již si osvětlíme nejlépe na příkladu. Jestliže např. máme dva dvojitipy (1; ×), potom každá ze čtyř možností je obsažena s maximální ztrátou jednoho bodu v *každé* ze tří dvojic:

1. zápas: ×; × ×; 1 ×; 1
2. zápas: ×; 1 ×; × ×; 1

To znamená: rozpisy krácené o 1 bod, jak jsou uvedeny v následujících příkladech, nejsou jediné rozpisy o daném počtu sloupců. Existuje více rozpisů krácených

o 1 bod pro danou pěticí čísel a, b, c, d, e , zahrnujících všechny možné kombinace a obsahujících *minimální* počet sloupců; rozpis v příkladu uvedený je jedním z těchto rozpisů o minimálním počtu sloupců.

Příklad I.

$$a = 7, b = 1, c = 2, d = 1, e = 1; \text{ je } a + b + c + d + e = 12$$

Dále je

$$R_u = 2^{2+1+1} \cdot 3^1 = 2^4 \cdot 3 = 48.$$

Zkrácený rozpis:

Tip:

(1; 2)	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
(1; ×)	×	×	×	×	×	×	1	1	1	1	1	1	×	×	×	×	×
(1; ×)	1	1	1	1	1	1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
(2; ×)	2	×	2	×	2	×	2	×	2	×	2	×	2	×	2	×	2
(1; 2; ×)	1	1	2	2	×	×	1	1	2	2	×	×	1	1	2	2	×

Je tedy $R_{-1} = 18$, což značí proti R_u úsporu 62,5 %.

Příklad II.

$$a = 8, c = 2, e = 2, b = d = 0. R_u = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Tip:

(1; 2; ×)	×	×	2	2	×	2	×	2	×	2	1	1	$R_{-1} = 12.$
(1; 2; ×)	×	2	×	2	2	×	×	2	×	2	1	1	
(1; ×)	×	×	×	×	×	×	1	1	1	1	×	1	
(1; ×)	×	×	×	×	1	1	×	×	1	1	×	1	

Příklad III.

$$a = 9, e = 3, b = c = d = 0. R_u = 3^3 = 27$$

Tip:

(1; 2; ×)	×	×	×	2	2	2	×	2	×	2	1	1	$R_{-1} = 12.$
(1; 2; ×)	×	×	2	×	2	×	2	2	1	1	×	2	
(1; 2; ×)	×	2	×	×	×	2	2	2	2	×	1	1	

Příklad IV.

$$a = 8, b = 2, c = 1, d = 0, e = 1. R_u = 2^2 \cdot 3^1 = 24.$$

Ukážeme si rozpis krácený jednak o jeden, jednak o dva body.

Tip:

(1; 2)	2	2	2	2	2	1	1	1	1	$R_{-1} = 9.$	2	2	2	2	1	$R_{-2} = 5.$
(1; 2)	2	2	2	2	1	2	1	1	1		2	2	1	1	2	
(1; ×)	×	×	1	1	×	×	×	×	1	×	×	×	×	×		
(1; 2; ×)	2	×	1	×	2	2	2	×	×	2	×	1	2	×		

7. Tento způsob tipování má však jednu nevýhodu; zpravidla totiž „uteče“ příliš mnoho jedniček (v příkladu I. je z 90 tipovaných znaků jen 24 jedniček, tedy jen asi 26,6 %). Někdy se proto postupuje tak, že se stanoví maximální očekávaný

počet remis, tj. křížků a provede se rozpis (buď úplný nebo zkrácený) pro všechny kombinace mající *nejvýše* tento předem stanovený počet křížků.

Konečně si ještě ukážeme, jak je možno stanovit potřebný počet kombinací při několika dvojtipech obsahujících jedničku, tj. (1; ×) a (2; ×), při předpokládané maximální ztrátě 1 bodu. Při této úvaze tedy necháme stranou dvojtipy (2; ×) a trojtipy; jejich přibráním dostaneme zřejmě $2^d \cdot 3^e$ -násobek počtu kombinací, jež zjistíme pro výše zmíněné dva druhy dvojtípů.

Položme $b + c = r$. Při r dvojtipech (z nichž každý obsahuje jedničku) máme zřejmě 2^r různých kombinací. Označme každou kombinaci jako kombinaci i -tého řádu, jestliže obsahuje i jedniček (a tedy $r - i$ dvojek, resp. křížků), kde $0 \leq i \leq r$.

Kombinací i -tého řádu bude zřejmě $\binom{r}{i}$. Přitom každá z kombinací i -tého řádu je se ztrátou jedné jedničky „obsažena“ v i kombinacích $(i - 1)$ -tého řádu.

Kombinace i -tého řádu je možno sestavit do dvojic tak, že v každé dvojici jsou kombinace souhlasné v $(r - 2)$ místech, zatím co na zbývajících dvou místech je v obou kombinacích jen po jedné jedničce, ale tyto jedničky nejsou vedle sebe. Příklad: $r = 5, i = 3$;

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \times & 1 \\ 1 & \times \\ 1 & 1 \\ \times & \times \end{array}$$

Souhlasná místa: první, čtvrté, páté.

Je zřejmé, že taková dvojice je se ztrátou maximálně jednoho bodu obsažena v jedné kombinaci řádu $i - 1$, jež se shoduje v souhlasných místech s dvojicí a na zbývajících místech má nejedničkové typy dvojice. Pro náš příklad je to kombinace druhého řádu

$$\begin{array}{c} 1 \\ \times \\ \times \\ 1 \\ \times \end{array}$$

V případě, že kombinací i -tého řádu je lichý počet, potom se jedna z nich spáruje se dvěma jinými (tato kombinace zahrnutá do dvou párů je pak zřejmě obsažena ve dvou kombinacích nižšího řádu).

Rozpis se provede velmi jednoduše: kombinaci r -tého řádu škrtneme a ponecháme jednu řádu $r - 1$, v níž tato byla obsažena. Zbývajících kombinací řádu $r - 1$ škrtneme a ponecháme na každé dvě, spojené do páru podle výše uvedeného pravidla, jednu kombinaci řádu $r - 2$. Zbývajících kombinací řádu $r - 2$ škrtneme a ponecháme některé kombinace řádu $r - 3$ v počtu rovném polovině vyškrtnutých kombinací řádu $r - 2$, atd.

Příklad: $a = 2, b = 4, c = 4, d = 2, e = 0$. Je tedy $r = 8$.

Celkem tedy dostáváme 86 kombinací místo $2^8 = 256$, což znamená snížení

počtu kombinací na téměř přesnou třetinu. Uvážíme-li, že $2^d = 4$, dostáváme 344 kombinací, což pro dvě tutovky a deset dvojitipů je poměrně levný rozpis.

	Počet kombinací řádu i	Ponecháme kombinací	Počet dvojic sestavených ze zbylých kombinací
8	$\binom{8}{8} = 1$		$1 \left(= \frac{1+1}{2} \right)$
7	$\binom{8}{7} = 8$	1	$4 \left(= \frac{7+1}{2} \right)$
6	$\binom{8}{6} = 28$	4	$12 \left(= \frac{28-4}{2} \right)$
5	$\binom{8}{5} = 56$	12	$22 \left(= \frac{56-12}{2} \right)$
4	$\binom{8}{4} = 70$	22	$24 \left(= \frac{70-22}{2} \right)$
3	$\binom{8}{3} = 56$	24	$16 \left(= \frac{56-24}{2} \right)$
2	$\binom{8}{2} = 28$	16	$6 \left(= \frac{28-16}{2} \right)$
1	$\binom{8}{1} = 8$	6	$1 \left(= \frac{8-6}{2} \right)$
0	$\binom{8}{0} = 1$	1	0

8. Je zřejmé, že každý z postupů v tomto článku uvedených má celou řadu variant. Je např. možné rozdělit celý tip na $b + c$ dvojitipů obsahujících jedničku a sestavit pro ně rozpis se ztrátou jednoho bodu a tento rozpis kombinovat s jiným, sestaveným pro d dvojitipů ($2; \times$) a e trojitipů se ztrátou dvou bodů. Výsledný rozpis pak dává maximální ztrátu tři bodů a podobně.

Je zřejmé, že základní podmínkou úspěchu je znalost okamžité formy jednotlivých mužstev, aby nebylo nutno všechny zápasy obsazovat dvoj- nebo trojtipy. To ovšem vyžaduje vést si pro osobní potřebu evidenci hlavních soutěží, jejichž zápasy jsou do Sazky zařazovány, sledovat mužstva často se na sázence objevující a naučit se i odhadovat jejich možný systém hry proti různým soupeřům a tak odhadovat možnosti výsledku.

Tipování v Sazce tedy vyžaduje:

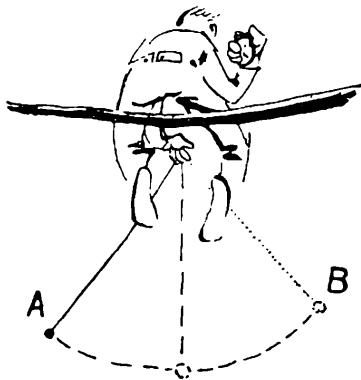
1. ovládat pravidla různých her, jejichž zápasy jsou tipovány;
2. umět hodnotit taktiku mužstev i formu jednotlivců;
3. provádět správné hodnocení poměru sil obou soupeřů.

Kladem Sazky je, že

1. nutí širokou veřejnost seznamovat se se sportovní problematikou a vychovává tak obecnost znalé pravidel a ne „skalní fanoušky“, nekritické a neukázněné;
2. poskytuje při poměrně malém sázkovém vkladu možnost velké výhry;
3. pomáhá rozvoji sportu tím, že polovinu vsazeného obnosu věnuje na sportovní účely.

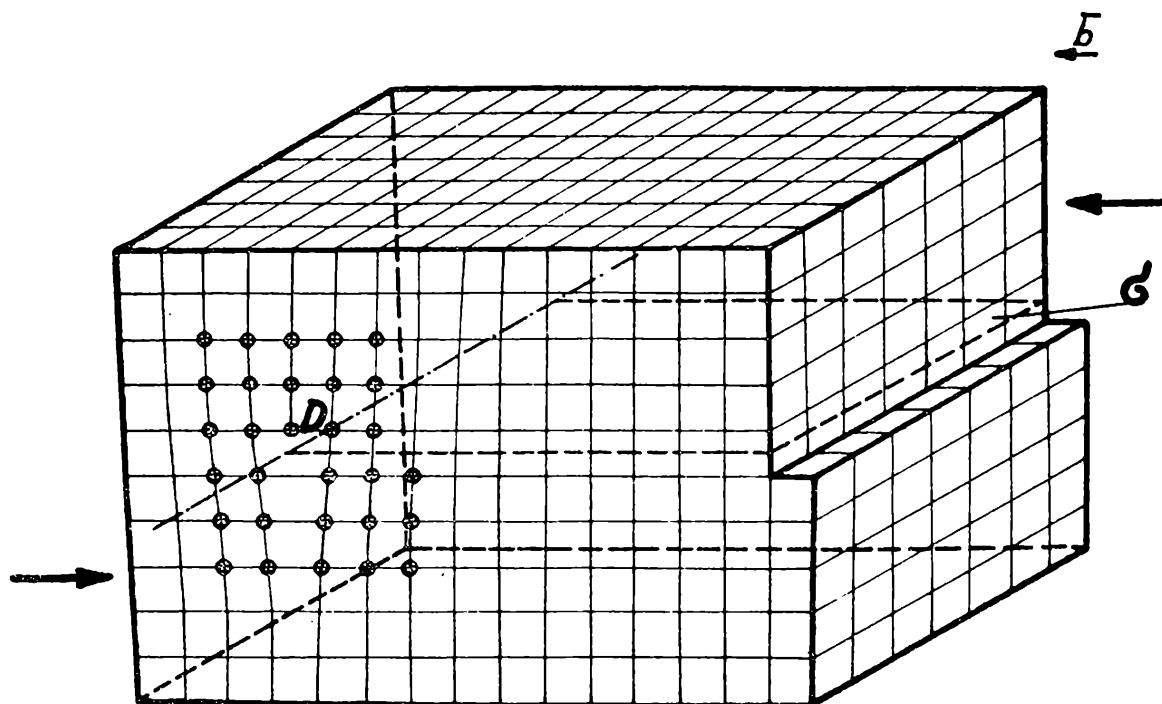
(Příště o Sportce.)

Dr. František Kroupa, Praha:



Plastická deformace a poruchy v krystalech

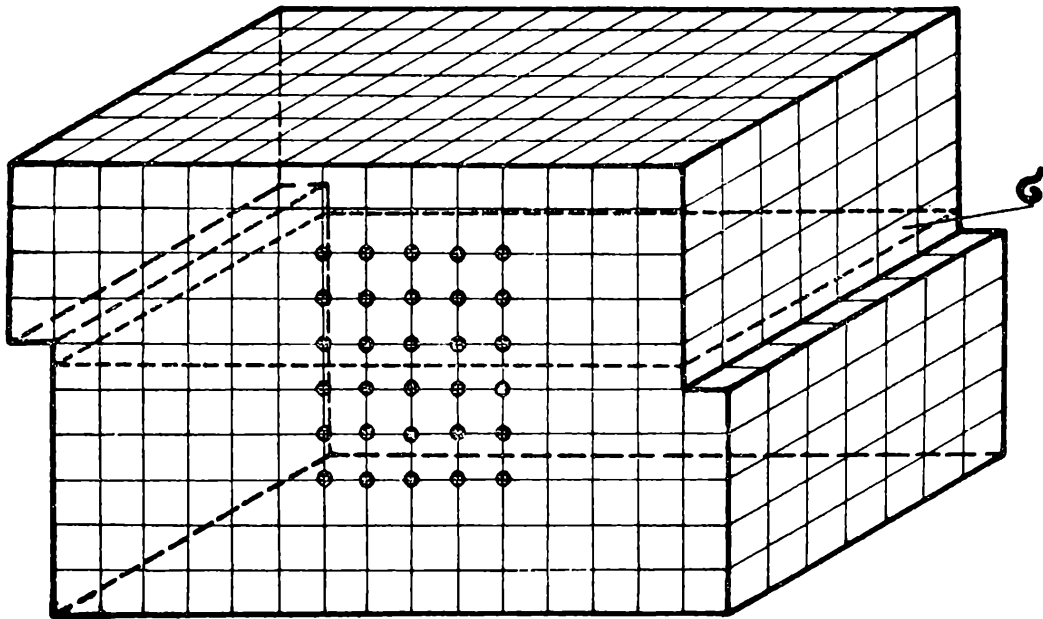
Na obr. 9 vidíme jiný typ dislokace, a to dislokaci šroubovou. Opět si její vznik můžeme myšleně představit tak, že krystal byl podle určité roviny σ rozříznut až k přímce D a horní část posunuta proti spodní o vektor \bar{b} , mající tentokrát směr rovnoběžný s dislokační čarou D . Délka vektoru \bar{b} je opět rovna vzdálenosti sousedních atomů. Vzniká tedy podle obr. 9a taková deformace rovin původně kolmých k čáře D , že tyto roviny na sebe šroubovitě navazují. Na obr. 9b vidíme při pohledu shora uspořádání atomů nad rovinou σ (vyznačeny kroužkem) a pod rovinou σ (vyznačeny křížkem). Z obrázku vidíme, že výraznější deformace krystalové mřížky nastává opět jen v nejbližším okolí dislokační čáry.



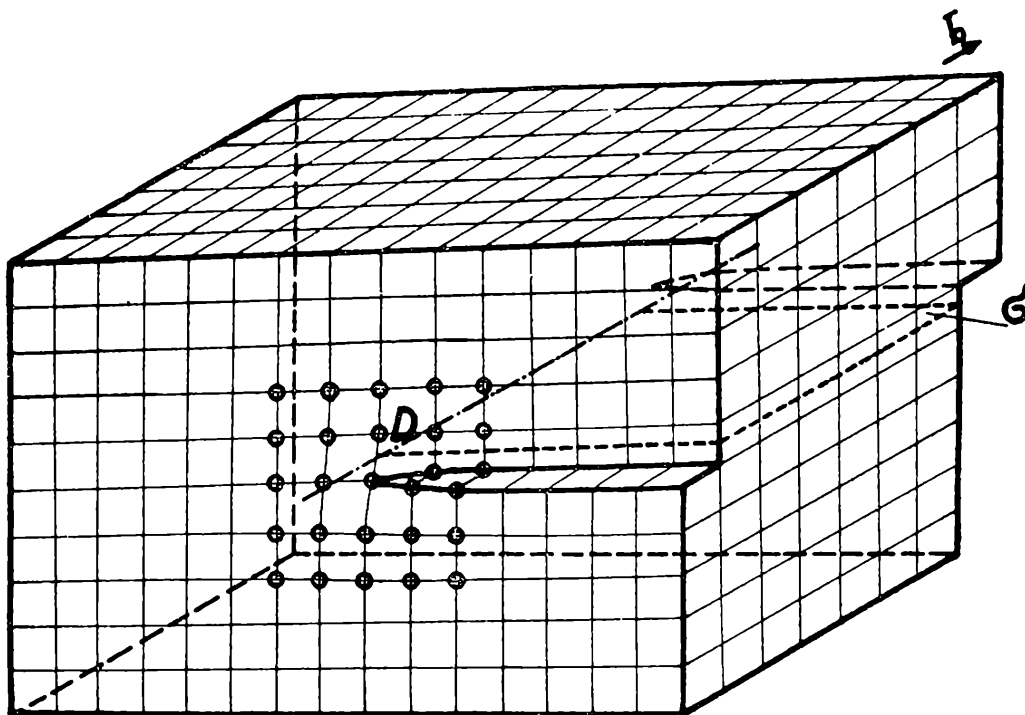
Obr. 8. Hranová dislokace v prosté krychlové mřížce: c) dislokace se pohnula.

Dislokace nejsou statické, neproměnné poruchy krystalové mřížky. Mohou v krystalu vznikat, zanikat a také se pohybovat. Na obr. 8c vidíme, jak může přejít hranová dislokace do jiné polohy, nebo - na obr. 8d - dokonce vyjít na povrch krystalu. V tomto případě dislokace zanikla; dostáváme opět ideální mřížku, P_{00}

hybem dislokace, který může být způsoben vlivem vnějších sil, naznačených na obr. 8c, proběhl však zajímavý děj. Horní část krystalu se při pohybu dislokace posouvala vlevo, při výstupu dislokace na povrch se pak již celá horní část posunula



Obr. 8. d) dislokace dosáhla povrchu - proběhl skluz a mříž je bez poruchy.



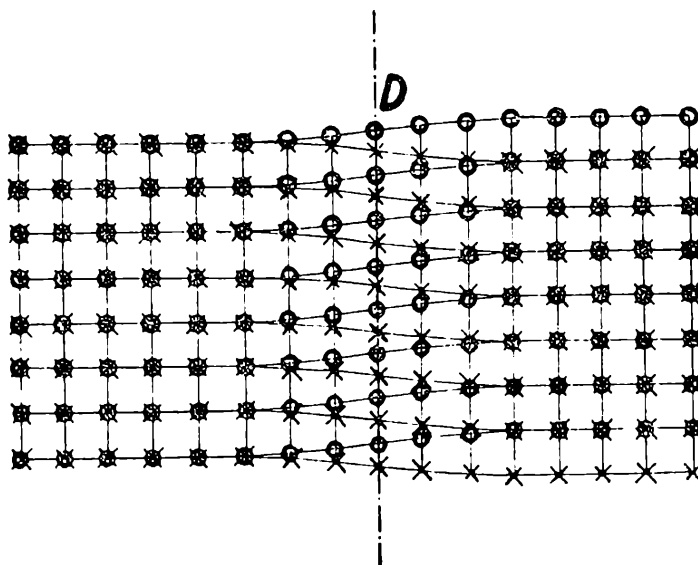
Obr. 9. Šroubová dislokace v prosté krychlové mřížce: a) pohled na krystal se šroubovou dislokací.

proti spodní o vektor \bar{b} . Proběhl tedy v rovině σ skluz o jednu atomovou vzdálenost. Rovina σ , ve které se hranová dislokace může snadno pohybovat a způsobovat skluz jedné části krystalu vůči druhé, nazývá se její *rovinou skluzu*.

Rovněž šroubová dislokace se může pohybovat. Při zatlačování horní části krystalu silou působící ve směru vektoru \bar{b} , posouvají se další atomy o vektor \bar{b} a dislokační čára se posouvá vlevo; probíhá opět skluz (obr. 9a).

Můžeme tedy říci, že speciální poruchy krystalové mřížky, které jsme právě poznali, dislokace, posouvají při svém pohybu jednu část krystalu proti druhé a způsobují tudíž skluz, jeden z hlavních mechanismů plastické deformace.

Výklad skluzu pomocí dislokací může snadno odstranit nejasnosti, o kterých jsme se zmínili na začátku tohoto odstavce. Malou hodnotu kritického skluzového napětí, známou z pokusů, vysvětlíme tím, že síla potřebná k pohybu dislokací je podstatně menší než síla potřebná k posuvu jedné části krystalu proti druhé jako tuhého celku, neboť posuv probíhá skluzovou rovinou postupně. Teorii dislokací



Obr. 9. b) Uspořádání atomů nad rovinou σ (označený kroužkem) a pod touto rovinou (označený křížkem).

se též podařilo dobře vysvětlit, proč skluz je soustředěn do menšího počtu skluzových rovin a proč celkový vzájemný posuv je v takové aktivní skluzové rovině až stovky atomových vzdáleností. Aby rovina mohla být aktivní skluzovou rovinou, to vyžaduje přítomnost alespoň jedné dislokace. Při jejím pohybu ve skluzové rovině se tak může speciálním mechanismem vytvářet zdroj nazývaný Frank-Reedův, z kterého vzniká velký počet dalších dislokací, které se pohybují ve skluzové rovině za sebou a zvětšují vzájemný posuv obou částí krystalu. Dobře vysvětluje teorie dislokací též krystalografickou závislost rovin a směrů skluzu. Jsou to roviny a směry, ve kterých je třeba k pohybu dislokací nejmenších sil.

Význam teorie dislokací

Přestože pojem dislokace byl ve fyzice prvně zaveden teprve v roce 1934, dosahuje již dnes počet prací, které vykládají různé vlastnosti a zjevy v krystalech pomocí dislokací a studují dislokace teoreticky a experimentálně, více než tisíc. Z tohoto oboru, který je dnes nazýván *t e o r i e d i s l o k a c í*, vyšlo již i několik monografií a dokonce i učebnic. Jednou z takových základních učebnic je např. kniha W. T. Read: *Dislocations in Crystals* z roku 1953, přeložená též do ruštiny. Vedle zdravého rozvoje celé teorie se však objevily též práce, které vykládaly nej-

různější vlastnosti krystalů z teorie dislokací pomocí značně složitých představ, aniž by byla tvrzení dostatečně podložena experimentálním materiálem. Vznikly proto i ostré kritiky teorie dislokací, ve kterých bylo např. pochybováno též o významu dislokací pro mechanismus skluzu. Avšak podobně jako v teorii dislokací byl někdy význam dislokací přeceňován, byly podle našeho názoru i kritiky teorie dislokací opačně přehnány až k odsuzování teorie dislokací. Tyto kritiky však přispěly též kladně k rozvoji celé teorie. Zatím co dříve byly práce z teorie dislokací většinou spekulativní povahy, objevil se v posledních letech velký počet prací experimentálních, ve kterých se podařilo pozorovat přímo i jednotlivé dislokace, jejich pohyb, tvary dislokačních čar a tak byl o nich získán rozsáhlý experimentální materiál. Pokusy se podařilo ověřit většinu fakt, dříve předpověděných teoreticky.



Obr. 10. Naleptání dislokací na povrchu krystalu LiF, dokazující pohyb dislokací při plastické deformaci (podle J. J. Gilman, W. G. Johnston, Journ. Appl. Phys. 27 (1956), 1018).

Upozorníme alespoň na výsledky jedné z takových prací Gilmana a Johnstona z roku 1956, ve které byly zviditelněny jednotlivé dislokace a bezpečně dokázán jejich pohyb při plastické deformaci krystalů LiF, krystalisujícího v krychlové soustavě. V místech, kde dislokace ústí na povrch krystalu, podařilo se speciálním chemickým leptadlem naleptat důlky. V okolí dislokace je totiž krystalová mřížka deformována a leptání zde probíhá rychleji. Důlky mají čtvercovou podstavu vzhledem k různé rychlosti leptání v různých směrech v krystalu. Krystal mírně plasticky deformovaný byl leptán nejprve 40 vteřin, pak byl dále nepatrně deformován a leptán znovu 20 vteřin. Na obr. 10 vidíme výslednou fotografii, pořízenou metalografickým mikroskopem. Řady dislokací v skluzových rovinách se pohnuly z původních míst, kde byly delším leptáním získány větší důlky, při plastické deformaci do nových míst, kde pak kratším leptáním byly získány menší důlky.

Na základě tohoto pokusu i řady dalších pokusů můžeme dnes pokládat za prokázané, že skluz v krystalech, jeden z hlavních mechanismů plastické deformace, je způsobován pohybem dislokací.

Ovšem teorie dislokací jako každá mladá teorie má ještě mnoho mezer a obtíží, které jsou však postupně odstraňovány.

Tak dlouho zůstávala nejasná otázka vzniku dislokací. Vysvětlení skluzu pohybem dislokací předpokládá již přítomnost dislokací v krystalu. V poslední době

bylo pak potvrzeno experimentálně, že reálné krystaly mají mřížku značně odlišnou od ideální pravidelné mřížky. Obsahují vždy velké množství poruch, mezi nimi též dislokace. Jejich hustota je udávána délkou dislokačních čar v jednotce objemové. U krystalu nedeformovaného bývá hustota dislokací 10^2 až 10^6 cm/cm³, u silně deformovaných až 10^{12} cm⁻². S trvalou deformací se tedy hustota dislokací značně zvětšuje.

V poslední době bylo užito teorie dislokací s úspěchem i k vysvětlení některých dalších zjevů při plastické deformaci. Tak dislokacím je přisuzována vážná úloha též při mechanickém dvojčení a při štěpení. Pomocí teorie dislokací jsou vysvětlovány i některé složitější zjevy deformace krystalů jako *únava*, vznik mikroskopických trhlin, *pomalé tečení* za vysokých teplot, zvané též creep (čti kríp) atd. Pomocí dislokací jsou ovšem vysvětlovány nejen zjevy při plastické deformaci monokrystalů, ale též polykrystalických látek. Podstatně větší pevnost polykrystalických technických látek souvisí s tím, že obsahují překážky pohybu dislokací, jakými jsou zvláště nečistoty a hranice zrn.

Bylo dokázáno, že dislokace hrají významnou roli i při jiných zjevech v krystalech, neovlivňují tedy pouze plastickou deformaci. Tak např. šroubová dislokace umožňuje tzv. *spirální růst krystalu*, dislokace tvoří hranice mezi *mosaikovými bloky*, jak nazýváme bloky krystalové mřížky s málo odlišnou orientací v monokrystalech, významně ovlivňují difuzi atomů, elektrický odpor atd.

Podíváme-li se na dislokace z širšího hlediska, vidíme, že jsou speciálními poruchami krystalové mřížky. Jinými poruchami jsou např. *prázdná* čili *vakantní místa v mřížce*, atomy v *meziuzlové* čili *intersticiální poloze*, atomy příměsí buď v uzlové nebo intersticiální poloze a mnoho dalších poruch jednoduchých nebo složitějších, vzniklých kombinacemi poruch jednodušších. U poruch, které jsme vyjmenovali, je deformace mřížky soustředěna na okolí určitého bodu. Jsou proto nazývány *poruchami bodovými*. Dislokace se od nich liší tím, jak již víme, že jsou poruchami čarovými. Z hlediska plastické deformace jsou dislokace od ostatních poruch zvláště tím odlišné, že jsou jedinými poruchami, které mohou svým pohybem způsobovat vzájemný posuv částí krystalu.

Studium poruch krystalové mřížky vystoupilo v posledních letech do popředí zájmu moderní fyziky pevných látek. Ukázalo se totiž, že pro většinu vlastností pevných látek v krystalickém stavu mají poruchy krystalové mřížky zásadní význam. Některé z těchto vlastností ovlivňují poměrně málo, jako např. stlačitelnost nebo modul pružnosti v tahu. Většina vlastností a zjevů v krystalech je poruchami mřížky ovlivněna neobyčejně silně, některé dokonce tak, že bez přítomnosti poruch by tyto vlastnosti byly kvalitativně odlišné. Mezi takové zjevy patří např. elektrická vodivost, luminiscence a také právě plastická deformace.

Odkrytí úlohy speciálních poruch krystalové mřížky - dislokací při plastické deformaci můžeme pokládat za nejvýznamnější objev v oboru studia mechanických vlastností pevných látek v posledních desetiletích z hlediska jak teoretického významu tak i praktických důsledků. Poznání základních procesů při deformaci umožní jistě důkladné vyřešení jednoho z nejdůležitějších technických problémů - zlepšení mechanických vlastností, především zvýšení pevnosti kovů a jiných technických materiálů.

Znáte všichni nonius?

Stupnice měřicích přístrojů, na nichž čteme hledanou hodnotu určované veličiny, nemohou být děleny na libovolně malé dílky. Důvodů je několik a povíme si o nich podrobněji někdy jindy. Velikost nejmenšího dílku stupnice bude ovšem rozhodovat o tom, jak přesně budeme moci číst měřenou veličinu. Bude-li dílek malý, budeme číst přesněji, než bude-li dílek větší, ovšem za jinak stejných podmínek. Děláme proto nejmenší dílky stupnice co možno malé a ještě hodnoty čtení v mezích těchto dílků *interpolujeme*. Hrubou interpolací je *odhadování* indikované veličiny v mezích nejmenšího dílku, při současném jejím *zaokrouhlování*. Přesnější je použití různých interpolačních zařízení, z nichž nejběžnějším je *pomocná stupnice*, kterou nazýváme *nonius*.¹⁾

Princip noniusu spočívá v tom, že malé posunutí vhodné pomocné (vedlejší) stupnice je provázeno mnohem větším posunutím proti sobě ležících *rysek hlavní a vedlejší stupnice*, tzn. rysek (dělicích stupnice na dílky), jež jsou ve vzájemné koincidenci. Podrobněji si princip objasníme dále.

Při zhotovení noniusu postupujeme takto: Rozdělme $n-1$ nejmenších dílků hlavní stupnice na n dílků stupnice vedlejší. Je-li šířka dílku hlavní stupnice s (viz obr. 1), bude šířka dílku vedlejší stupnice s_1 rovna

$$s_1 = s \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) \quad (1)$$

Rozdíl šířky dílků hlavní a vedlejší stupnice je pak roven

$$s - s_1 = s \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{s}{n} . \quad (2)$$

Tento rozdíl $s - s_1$ nazýváme *nonickou diferencí*. Nonická diference udává velikost hodnoty, kterou tímto interpolačním zařízením můžeme ještě číst. Dělíme-li celou rovnici (2) šířkou dílku hlavní stupnice s , dostaneme

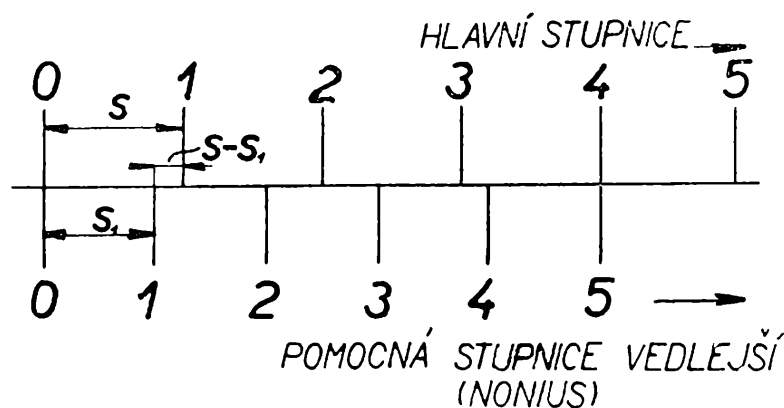
$$\frac{s - s_1}{s} = \frac{1}{n} \quad (3)$$

Podíl $\frac{s - s_1}{s}$ nazýváme *nonickým poměrem*. Ten udává, kolikátou část dílku hlavní stupnice můžeme číst. A nyní si uveďme jednoduchý *příklad*:

Rozdělme $n - 1 = 9$ dílků hlavní stupnice na $n = 10$ dílků stupnice vedlejší. Nonius bude připojen u nějaké stupnice délkoměrného přístroje; šířku nejmenšího

¹⁾ Tato pomocná stupnice byla pojmenována původně prý po Portugalci Pedrovi Nuñezovi (1492—1577). Jako skutečný její objevitel je však udáván Alsasan Peter Werner (1631), po němž bývá také někdy stupnice nazývána *vernierem*. V některých státech, např. ve Francii, se tohoto pojmenování užívá všeobecně.

dílku hlavní stupnice si tedy zvolme $s = 1 \text{ mm}$. Nonická diference $s - s_1 = \frac{1}{10} \text{ mm}$ udává, že nejmenší hodnotou, kterou můžeme tímto interpolačním zařízením číst, je zde 0,1 mm. Nonický poměr $\frac{s - s_1}{s} = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$ naznačuje, že dílek si noniusem rozdělujeme na desetiny. Zvolili jsme tedy *nonius dekadický*, který je nejběžnější.²⁾ Protože jsme interpolovali na desetiny dílku hlavní stupnice, nazýváme *nonius desetinový*. Podobně se setkáme s *noniusem dvacetinovým* a nejvýše pak s *padesátinovým*. V případě podobném předchozímu příkladu mohli bychom dvacetinovým noniusem číst 0,05 mm, padesátinovým dokonce 0,02 mm.



Obr. 1. Princip noniusu (přímý stejnosměrný pětinnový nonius).

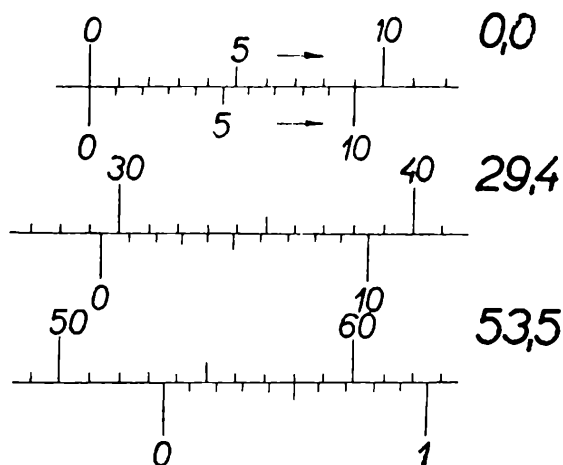
A nyní se vraťme k vlastnímu čtení na noniusu. Na obr. 1 vidíme, že se kryjí na počátku nulové rysky hlavní i vedlejší stupnice. Budeme-li chtít, aby se kryly rysky 1, bude nutno nonius posunout ve směru naznačené šipky proti stupnici hlavní. Jak je naznačeno, bude posunutí rovno nonické diferenci, tedy v případě desetinového noniusu 0,1 mm. Budeme-li dále chtít, aby se kryly např. čtvrté rysky obou stupnic, budeme muset nonius z nulové polohy posunout o $4 \cdot (s - s_1) = 0,4 \text{ mm}$. Tak jsme si vlastně vysvětlili nastavování noniusu na nějakou žádanou míru, což se také často dělá. Zcela opačné je určování posunutí noniusu proti hlavní stupnici při měření neznámé veličiny. Nulová ryska noniusu udává vždy počet celých dílků hlavní stupnice, zlomky tohoto dílku určíme na noniusu. Čitatele tohoto zlomku udává ryska noniusu, jež se právě kryje s některou ryskou stupnice hlavní, jmenovatele pak nonický poměr.

Na obr. 2 je nakresleno několik nastavení desetinového noniusu. Současně je připsáno příslušné čtení na stupnici. Na obr. 3 pak je zobrazen dvacetinový a padesátinový nonius.

Doposud byly všechny zmíněné *noniusey stejnosměrné*, tzn., že hlavní i vedlejší (pomocná) stupnice jsou číslovány ve stejném směru, od prava doleva. Výjimečně se však můžeme setkat také s *noniusey protisměrnými*, tj. takovými, jež jsou číslovány

²⁾ S nedekadickým noniusem setkáme se u stupnic úhломěrných s běžným šedesátinovým dělením. Podobně i u stupnic v míře palcové apod.

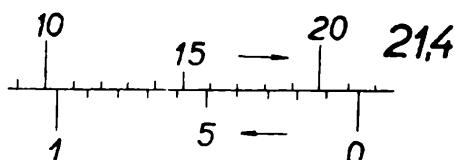
v opačném směru než stupnice hlavní a jež vzniknou, dělíme-li $n + 1$ dílku stupnice hlavní na n dílků stupnice pomocné. Jejich výhodou sice je větší přesnost, protože šířka jejich dílků je poněkud větší u jinak stejné stupnice hlavní, nevýhodou je však dosti obtížné čtení, jež se u noniusu děje v opačném směru než u stupnice hlavní. Protisměrný nonius desetinový je nakreslen na obr. 4.



Obr. 2. Několik příkladů čtení s přímým stejnosměrným desetinovým noniusem. Ve všech případech jde o nonius stejnosměrný.



Obr. 3. Dvacetinový ($n = 20$) a padesátinový ($n = 50$) nonius stejnosměrný.



Obr. 4. Příklad čtení s přímým protisměrným desetinovým noniusem.

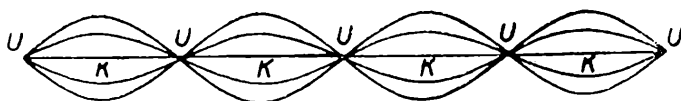
Noniusey přímými³⁾ opatřujeme nejčastěji přístroje pro měření délek, jako posuvná měřítka, hloubkoměry, výškoměry nebo přístroje, kde se z délkových rozměrů usuzuje nepřímě na nějakou jinou veličinu, např. barometry, dilatometry apod. Použití tohoto jednoduchého zařízení je velmi široké.

³⁾ P ř í m ý m i zde nazývám běžný typ noniusů na rozdíl od zařízení o b l o u k o v ý c h úhломěrných, o nichž se chci zmínit zvláště.

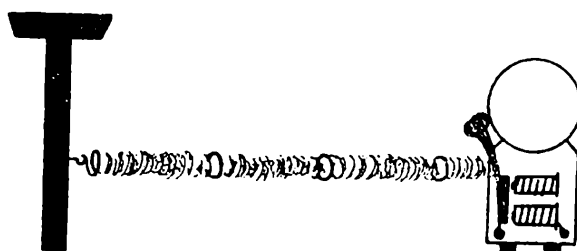
Stojaté vlnění

(Dokončení)

Stojaté vlnění je jen zvláštním případem složeného vlnění. Pro výklad vyjdeme z pokusů. Kdybychom rozkmitávali jeden konec velmi dlouhé hadice, volně natažené, pak se na ní vytvoří příčné vlny, které postupují od místa rozruchu ve tvaru postupného vlnění (vrchů a důlů). Jiný zjev nastane, je-li hadice krátká. Rozkmitáme-li jeden její konec, pak je výsledný její pohyb takový, že některá místa U jsou v klidu, tzv. *uzly*, ostatní konají kmitavý pohyb (obr. 1). Místa K uprostřed mezi uzly mají největší rozkmit, říkáme jim *kmitny*. Vzniká stojaté vlnění, jako je např. chvění struny houslí nebo jazýčku píšťaly. Také na vodě můžeme vytvořit stojaté vlny. Kdybychom hodili kámen na rozlehlou vodní hladinu, šíří se od místa dopadu postupné příčné vlny ve tvaru kruhových vrchů a důlů. Kmitáme-li však vodní hladinou uprostřed kruhového umyvadla, pak se odrazem od okrajů umyvadla vytvoří stojaté vlnění. Při něm v některých místech je hladina v klidu (uzlové čáry), v jiných místech částice kmitají. Místa kde nejvíce kmitají, by bylo možno také spojit čarami.



Obr. 1



Obr. 2

I stojaté vlnění podélné si můžeme doma ukázat *pokusem* např. takto: Navineme na tužku tenoučký drátek tak, aby po natažení byla délka pružiny asi 25 cm. Pružinu natáhneme, aby mezi sousedními závity byly mezery asi 2 až 3 mm. Potom jeden konec pružiny připevníme ke kotvě elektrického zvonku (od něhož odmontujeme talíř) a druhý konec držíme v ruce, nebo připevníme (obr. 2). Po zapojení elektrického proudu se kotva rozkmitá a při vhodném napnutí pružiny se zřetelně vytvoří kmitny a uzly stojatého vlnění podélného.

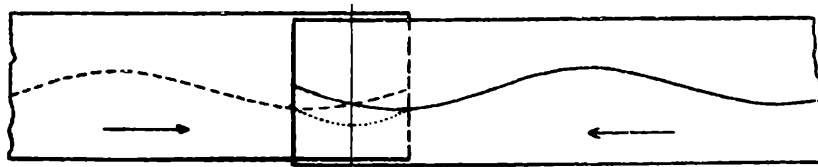
V uvedených příkladech vzniklo stojaté vlnění složením postupného vlnění s vlněním odraženým. V přírodě i v technické praxi stojaté vlnění vzniká nejčastěji skutečně tak, že v témže prostředí postupují proti sobě dvě stejná vlnění postupná, zpravidla jedno původní a druhé odražené. Vznik stojatého vlnění si objasníme na jednotlivých případech, a to u stojatého vlnění 1. *příčného*, 2. *podélného*.

1. Stojaté vlnění příčné

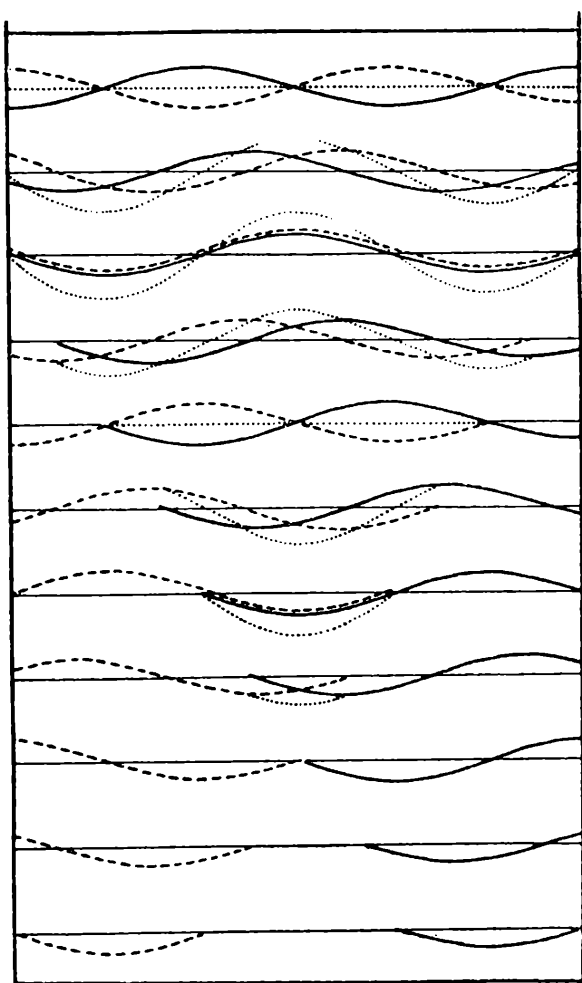
Provedeme si *pokus* s vlnovkami na průsvitném papíru (obr. 3). Nyní však oba proužky posouváme proti sobě tak, že si na podložený bílý papír narýsujeme svislou úsečku a při posouvání pohybujeme oběma proužky stejnou rychlostí vzhledem k této rysce.

Sledujeme-li pozorně obě vlnění, vidíme, že: a) v určitých místech jsou výchylky obou skládaných vlnění stále sobě rovny, ale mají opačný smysl. V těch místech je

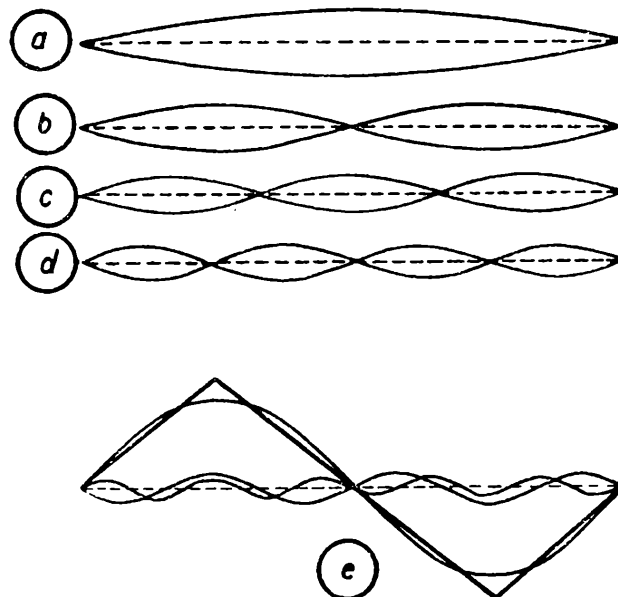
výsledkem klid (*uzel*); b) v místech o $\frac{1}{4}$ vlnové délky vzdálených od uzlů má výslednice největší rozkmit (*kmitny*). - Abychom výsledný děj zachytili co nejnázorněji, zakreslíme si jej v několika momentních snímcích. Provedeme to tak, že obě složky posuneme vždy např. o $\frac{1}{8}$ vlnové délky, zakreslíme jejich polohy na nový průsvitný papír a pak je graficky složíme. Dostaneme tak výsledný děj v časovém rozložení. Ukazuje to obr. 4. (V obr. je výslednice nakreslena tečkovaně.)



Obr. 3



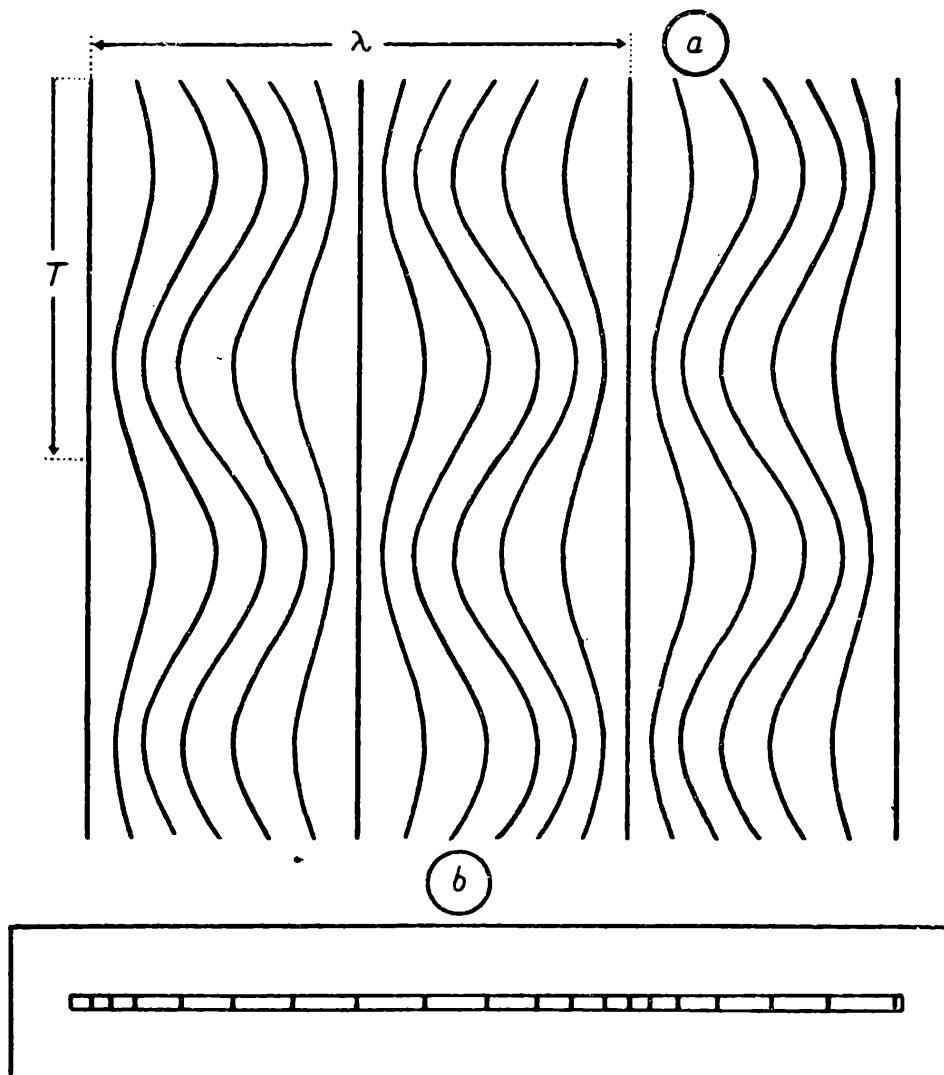
Obr. 4



Obr. 5

Příklad. S uvedeným druhem stojatého vlnění neboli chvění se v praxi často setkáváme. Jeden z nejnázornějších příkladů je chvění struny. Také zde se šíří postupné vlnění, které se odrazí od druhého konce a skládá se s původním vlněním ve stojaté vlnění. Nejjednodušší případ je ten, kdy se vytvoří na koncích struny uzly a uprostřed kmitna (obr. 5a). Může však nastat složitější případ, že se vytvoří uzel i uprostřed struny (obr. 5b) apod. (obr. 5c, d). Na houslích snadno vyvoláme takové chvění, když se lehce dotkneme struny v místě uzlu a strunu smyčcem rozechvějeme. - V obr. 5e je nakreslen ještě složitější případ. Víme již, že barvitost tónů je

způsobena spoluzněním vyšších harmonických (RMF, str. 65). Jestliže strunu rozezvučíme např. drnknutím, pak struna kmitá přibližně trojúhelníkovými kmity, jak ukazuje silná čára v obr. 5e. Obrázek zároveň naznačuje, jak si můžeme představit vznik takového složeného vlnění přibližně ze tří složek (stojatých vln) o poměru kmitočtů 1 : 3 : 5. Základní tón má vždycky největší intenzitu, proto je jeho amplituda největší.



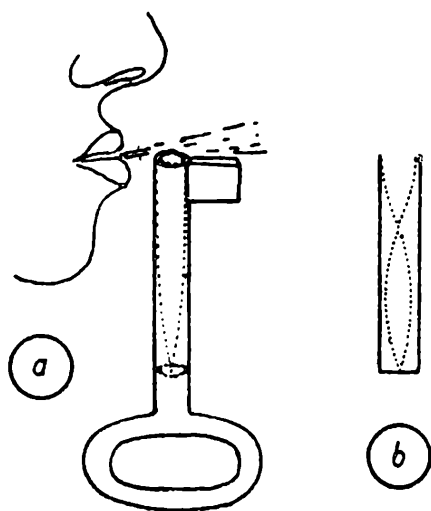
Obr. 6

Úloha 1. O frekvenci vlnění f platí základní vztah $f = \frac{c}{\lambda}$. Vypočítejte podle toho, v jakém poměru jsou výšky tónů struny v případech a, b, c v obr. 5, je-li výška základního tónu $f = n$ (např. 440 c/s).

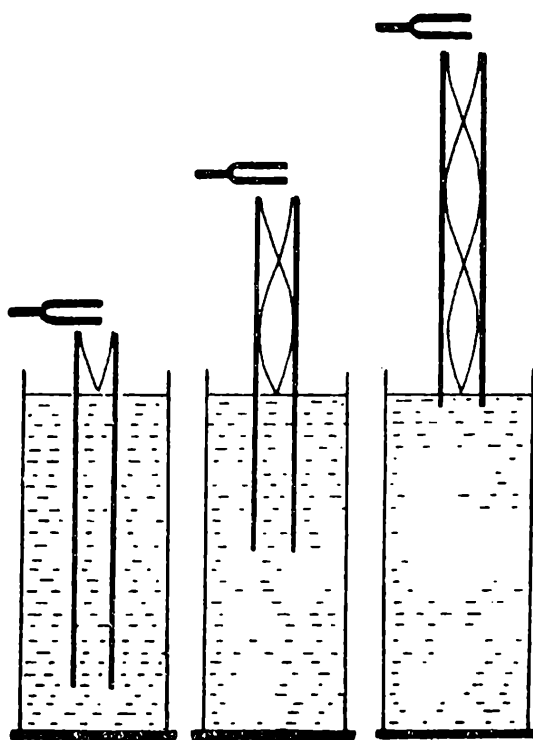
2. Stojaté vlnění podélné

Stejně často se v přírodě a v technické praxi setkáváme se stojatými podélnými vlnami. Fyzikálně se tento případ od předešlého liší tím, že částice prostředí nyní kmitají ve směru šíření vln. Vznik stojatých podélných vln si snadno odvodíme následující úvahou a pomocí náskresů v obr. 6. Víme, že částice kmitají s různými amplitudami: v kmitnách s největšími amplitudami, v uzlech jsou v klidu. Částice

kmitají v našem případě vodorovně, proto si jejich pohyb časově rozvineme do směru svislého dolů. Vznikne obrazec podle obr. 6a. Chceme-li nyní vědět, jaké jsou polohy bodů v některém okamžiku, přiložíme do toho místa vodorovnou štěrbinu 6b, vystřiženou z papíru. Chceme-li mít názorný obraz celého děje, posouváme pod štěrbinou obrázek svisle nahoru. Štěrbinu při tom necháme v pevné poloze. Všimněme si přitom zejména jednoho zajímavého zjevu: v uzlech, kde je nejmenší pohyb částice (přímo v uzlu je klid), je největší střídání (= změna) hustoty částic, kdežto v kmitnách se sice částice pohybují nejvíce, ale hustota částic zůstává stálá.



Obr. 7



Obr. 8

Pokusy a příklady. 1. O tom, že se stojaté podélné vlnění vytváří složením dvou stejných vlnění postupujících proti sobě, můžeme se přesvědčit jednoduchým pokusem, který jsme již popisovali (RMF, str. 63, obr. 9). Zvuk píšťaly dopadá na stěnu a odráží se zpět tak, že se v rovině stěny vytvoří uzel. Mezi píšťalou *A* a místem odrazu *C* se tedy šíří dvě stejná vlnění opačnými směry. Proto v tomto prostoru vznikne stojaté vlnění s řadou kmiten a uzlů. Polohy kmiten a uzlů zjistíme tak, že necháme píšťalu znít v určitém místě stálou intenzitou a sami se vzdalujeme nebo přibližujeme ke stěně mezi místy *A* a *C*. Tón je nejsilnější v kmitnách a nejslabší v uzlech.

2. Vznik chvění vzduchového prostoru může způsobit nepříjemné a nežádoucí zjevy v hudebních sálech. Tak např. se mocně rozechvívají mezi stěnami vzduchové sloupce, jejichž délka je rovna právě celému násobku půlvlny tónu. Na to si můžeme provést jednoduchý pokus v prázdné místnosti. Zpíváme-li tam totiž různé tóny, ozve se mocně určitý tón. Je to zpravidla tón, jehož vlnová délka splňuje uvedenou podmínku pro vzdálenost protějších stěn.

3. Foukněme přes okraj dutiny klíče nebo jiné trubičky, uzavřené na druhém konci. Improvisovali jsme si tak nejjednodušší píšťalu. Říkáme, že se sloupec vzduchový rozechvěl v dutině resonancí. Chvění sloupce vzduchu je stojaté vlnění, při němž se na uzavřeném konci vytvoří uzel a na otevřeném kmitna. Obraz takového chvění je schematicky v obr. 7a. (V obrázku je vlna naznačena schematicky jako příčná. Ve skutečnosti je to vlnění podélné, které by se nedalo nakreslit dosti názorně.)

Vidíme, že se v dutině vytvoří $\frac{1}{4}$ vlny. Délka vlny je proto rovna 4násobku délky dutiny. Je-li délka dutiny např. $l = 2$ cm, je $\lambda = 4l = 8$ cm. Výšku tónu pak dostaneme ze známého vztahu

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l} = \frac{340}{0,08} = 4250 \text{ c/s} .$$

Je to tón značně vysoký. Patří k tónům, které jsou při horní hranici tónů užívaných v hudbě.

4. Foukněme přes okraj klíče hodně silně. Ozve se daleko vyšší tón. Říkáme, že jsme naši píšťalku *přefoukli*. Co je to přefouknutí? Při přefouknutí píšťaly nechvěje sloupec vzduchu jako $\frac{1}{4}$ vlny, nýbrž se vytvoří o jeden uzel víc. Přitom na otevřeném konci zůstává kmitna, na uzavřeném uzel. Může se tedy v píšťale vytvořit $\frac{3}{4}$ vlny (obr. 7b). Pak je vlnová délka tónu přefouknuté píšťaly $\lambda_1 = \frac{3}{4}l$. Výška tónu je $f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3c}{4l} = 12\,750 \text{ c/s}$. Srovnáme-li tento výsledek se základním

tónem, vidíme, že tón přefouknuté dutiny má výšku třikrát vyšší. Je to třetí harmonický (kvinta druhé oktávy). Tím si snadno vysvětlíme, proč se na krátké dutině klíče vytvoří jen základní tón a proč takovou krátkou dutinu „nelze“ přefouknout. Ve skutečnosti i takovou dutinu přefoukneme a vyloudíme zvuk, ale jeho kmitočet je tak vysoký, že tón již přechází ve svist (kolem 16 000 c/s), nebo dokonce v neslyšitelný ultrazvuk. Je-li píšťala delší, můžeme na ní vyloudit i 5. a 7. atd. harmonický. Tyto vyšší harmonické v malé intenzitě vždy spoluzní se základním tónem a jak víme, dodávají mu barvitost.

5. Na resonanci sloupce vzduchového je založena laboratorní metoda *měření rychlosti zvuku* ve vzduchu, nebo v jiných plynech. Je to známý pokus (Fysika pro 10. roč., str. 168, 169), vyobrazený schematicky na obr. 8. Tón zesílený resonancí se ozve silně tehdy, je-li výška sloupce vzduchu rovna lichému násobku čtvrtvlny. (Z první čtvrtvlny není možné dost přesně měřit rychlost zvuku, protože se kmitna nevytváří přesně na okraji trubice, nýbrž vně trubice.)

Úloha 2. Jak dlouhou trubicí musíme vzít pro pokus v obr. 8, chceme-li, aby se tónem výšky $f = 440 \text{ c/s}$ vytvořily resonancí dvě celé půlvlny?

Řešení. Úloha 1. Délka vlny základního tónu struny o délce l je v případě a) $\lambda_0 = 2l$, výška tónu $n_0 = \frac{c}{2l}$. V případě b) je $\lambda_1 = l$, výška tónu $n_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{l}$. V případě c)

je $n_2 = \frac{c}{\frac{2}{3}l}$. Ptají tedy $n_0 : n_1 : n_2 = 1 : 2 : 3$.

Úloha 2. $l = \lambda + \frac{1}{4}\lambda = 96 \text{ cm}$,



Co vidíme na nebi

Dr. Vladimír Vanýsek, kandidát věd, Praha:

Umělé družice Země

Umělé družice Země, které sovětští vědci vypustili do meziplanetárního prostoru na podzim minulého roku, znamenají podstatný krok k ovládnutí prostoru mimo naši Zemi.

Naši čtenáři jsou jistě dosti podrobně informováni z denního tisku o průběhu prvního i druhého úspěšného pokusu o vyslání umělých družic a mnozí snad i jednu z družic, nebo nosnou raketu první družice pozorovali. Není tedy úkolem tohoto článku opakovat to, co již čtenář zná, ale chceme obrátit jeho pozornost k principům, podle nichž se běh družice řídí a zmínit se o úkolech, které družice mají.

Princip, jímž se řídí pohyb umělé družice kolem Země, je znám od dob objevení gravitačního zákona, který vyslovil před třemi sty lety Issak Newton. Dvě tělesa - například Země a družice - se přitahují silou, která je přímo úměrná jejich hmotám a nepřímo úměrná dvojmoci jejich vzájemné vzdálenosti. Jelikož hmota družice je zanedbatelně malá proti hmotě Země, pak síla, kterou družice je přitahována k Zemi, závisí toliko na vzdálenosti družice od středu Země. Jestliže uvedeme družici do kruhového pohybu kolem Země a to takovou rychlostí, že síla odstředivá je v rovnováze se silou přitažlivou, bude těleso - pokud mu v tom jiné vnější síly nebudou bránit - kroužit kolem Země, tak jako kolem ní obíhá Měsíc, nebo planety kolem Slunce. Potřebná rychlost, kterou musí těleso mít, aby obíhalo kolem Země, vypočteme ze vzorce

$$v = \sqrt{\frac{g R^2}{r}},$$

kde g je gravitační zrychlení, R poloměr Země a r vzdálenost družice od Země.

Při povrchu Země je tato rychlost přibližně 8 km/s, a těleso, které se touto rychlostí pohybuje směrem kolmým na spojnici se středem Země, bude se pohybovat po dráze kruhové. Tuto rychlost nazýváme rychlostí kruhovou. Je-li počáteční rychlost o něco vyšší než rychlost kruhová, pak těleso se bude pohybovat po dráze eliptické, jejíž velká poloosa bude tím větší, čím větší je počáteční rychlost. V místě, kde družice nabyla počáteční rychlosti, nutné k obíhání kolem Země, bude nejbližší k Zemi. Kdyby rychlost dostoupila (na povrchu Země) hodnoty 11,2 km/s, pak by dráha byla parabolická a družice by se již nikdy k Zemi nevrátila - tuto rychlost nazýváme rychlostí únikovou.

Pohyb umělé družice z hlediska nebeské mechaniky je tedy jasný. Jde tedy o to, jakým způsobem dopravit družici do větší vzdálenosti od povrchu Země a tam ji udělit rychlost přibližně 8 km/s. Než si však promluvíme o řešení tohoto problému, zastavíme se nejdříve u otázky, proč byly umělé družice vypuštěny.

Výzkum vysoké atmosféry, zejména nejvyšších vrstev byl umožněn po druhé světové válce především raketovými sondážemi. Již v roce 1946 bylo možno pomocí ukořistěných německých raket V2 vyslat měřicí přístroje do výšky 160 km. V dalších letech se prováděly raketové sondáže především v SSSR a USA velmi často a technika raket se neustále zdokonalovala. Avšak raketa sama nezůstává ve vyšších vrstvách atmosféry dlouho. Let sám trvá několik minut a pohyb rakety na vrcholu dráhy je omezen na několik desítek vteřin. Veškerá měření, která tam raketa pomocí automaticky pracujících přístrojů provádí, trvají jen krátkou dobu a tudíž nemohou nám podat příliš přesný obraz o dlouhodobých změnách ve vysoké atmosféře. Bylo nutno tedy umístit do vysoké atmosféry přístroje na delší dobu, což je možno toliko cestou umělých družic. Tato okolnost byla též rozhodující pro snahu vypustit umělé družice v období mezinárodního geofyzikálního roku, který právě probíhá.

Je pochopitelné, že umělé družice znamenají též mnoho pro řešení problémů meziplanetárních letů, leč tyto problémy nejsou zatím hlavním důvodem pro realizaci umělých těles obíhajících kolem naší Země.

Aby měřicí přístroje mohly bezpečně dosáhnout velké výše nad zemským povrchem a tam v obalu umělého satelita kroužit kolem Země, je nutné je vhodným způsobem vynést alespoň do výšek kolem 250 až 300 km a tam jim udělit potřebnou kruhovou nebo slabě nadkruhovou rychlost. Zatím známe jedinou cestu: použití několikastupňových raket.

Raketový motor, který pracuje na principu reaktivní síly vznikající prudkým výtokem plynů vrhaných z rakety tryskami v určitém směru, má velkou tažnou sílu, která dodá normálním raketám konečnou rychlost 2 až 3 km za vteřinu. U většiny raket používá se tekutého kyslíku, který ve spalovací komoře raketového motoru se za velkých teplot slučuje s tekutým palivem, jako je alkohol, gasolin a podobně. Výhodou tohoto paliva je, že jeho přítok do spalovacích komor je regulovatelný. U některých raket se užívá pohonných látek pevných. Konečná rychlost rakety, kterou dosáhne po spálení pohonných látek (což netrvá dále než 1 až 2 minuty) je dána vztahem

$$V = v \cdot \lg \frac{M_0}{M},$$

kde V je rychlost konečná, v rychlost vytékajících plynů, M_0 váha rakety při startu, M váha rakety po spálení pohonných látek. Při vhodném váhovém poměru, který je větší než 2,7 dosáhneme rychlosti větší než je rychlost výtoková. V praxi bývá váhový poměr asi 1 : 5. Váhový poměr u rakety typu V2 byl 3,4 a konečná rychlost (bez ohledu na odpor prostředí a gravitaci) je asi 2570 km/s.

Raketa je říditelná jednak usměrněním výtoku plynu například náklonem celé spalovací komory, jednak, v nižší atmosféře, pomocí stabilizačních ploch jako letadlo.

Chceme-li dosáhnout konečné rychlosti asi 8 km/s - čili počáteční rychlosti nutné pro družici, musíme použít alespoň třístupňové rakety. Odpálení umělé družice se provádí asi takto:

Raketa skládající se ze tří stupňů je odpálena pomocí prvního stupně svisle vzhůru. Dráha se během letu naklání automatickým zařízením umístěným ve druhém stupni. Ve výšce asi 60 km je dráha letu skloněna o 45°. V těch místech se též odpoutá

prvý stupeň, jehož palivo vyhořelo a v činnost je uveden pohon druhého stupně. Ten vynese raketu do výšky asi 200 km, která pak setrvačností stoupá dále do výšek 300 až 500 km, kde je dráha již vodorovná a kde poslední stupeň rakety dosáhne rychlosti kolem 8 km/s.

Družice je buď umístěna ve tvaru koule ve špici posledního stupně, od kterého se oddělí, nebo je samotný třetí stupeň vlastní družicí. Prvá sovětská družice byla prvního typu. Byla to koule o průměru asi 58 cm a celkové váze kolem 80 kg. Tvar koule je velmi výhodný, neboť ze změny oběžné doby a pozvolného pádu, působením brzděním zbytku atmosféry ve velkých výškách možno snadno určit hustotu prostředí ve výškách, ve kterých se družice pohybuje. Velikost koule je volena tak, aby těleso bylo ještě dost dobře pozorovatelné, tj. aby jeho zdánlivá jasnost byla přibližně na hranici viditelnosti pouhým okem. Třetí stupeň, od kterého se družice uvolní, pochopitelně se pohybuje kolem Země jako družice. Avšak jeho rychlost vlivem zpětného nárazu při uvolnění družice je trochu nižší a i vliv prostředí je jiný než u družice. Proto se obě tělesa od sebe rychle vzdalují a nosná raketa - přesněji zbytky rakety - dopadnou mnohem dříve zpět na Zemi. Tak nosná raketa první družice obíhala dva měsíce, kdežto družice o měsíc déle. Průměrná výška těchto těles v prvních dnech po vypuštění byla 570 km. Kdyby byla průměrná výška větší, pak by brzdící účinek zbytku ovzduší byl podstatně menší a životní doba satelitu podstatně delší. Dosáhne-li v budoucnu umělý satelit výšek několika tisíc km, pak bude moci obíhat kolem Země řadu let a možná prakticky nekonečně dlouho.

Druhá sovětská družice, která je samotným posledním stupněm vícenásobné rakety, je druhým typem a obsahovala více měřicích přístrojů, než družice první. Mimo to měla i živou posádku - polárního psa.

Jaký je zatím úkol umělých družic?

Výzkumný úkol umělých družic se prozatím příliš neliší od výzkumných úkolů raket startujících do vysoké atmosféry. Využívá se zde především dlouhého pobytu satelitu ve vysokých vrstvách atmosféry, přesněji řečeno v oblastech, kde jsou toliko její nepatrné stopy.

Chceme především určit hustotu a teplotu vysoké atmosféry. Hustotu možno - jak již bylo řečeno - určit již ze samotného pohybu kulové družice. Jiná měření se týkají především slunečního záření a to v těch vlnových oborech, které atmosférou neproniknou přímo na zemský povrch. Jde především o záření ultrafialové a záření Roentgenovo. Dalším výzkumným úkolem je problém primárního kosmického záření.

Všechny měřené údaje je nutno malou vysílačkou přenést na základnu. Nelze totiž zatím vrátit družici zpět na zemský povrch, aby bylo možno získat měřené údaje registračních přístrojů. Měřicí přístroje ovládají určitým, předem voleným způsobem klíčovací zařízení vysílačky, která v určitém kódu pak přenáší naměřené hodnoty. Prvá družice měla dvě vysílačky, které pracovaly po dobu téměř tří týdnů na vlnách 15 a 7,5 metrů, tj. 20 a 40 MHz. Vysílaly přerušovaný tón - čárky o délce asi 0,3 s. Slyšitelnost byla výborná, přestože vlastní výkon vysílaček byl velmi malý, ne větší než několik wattů.

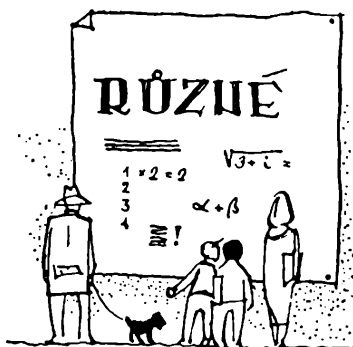
Druhá družice vysílala orientační signál na stejných vlnách po dobu jednoho týdne. Jakým způsobem byl upraven kód a systém vysílání údajů, zatím nevíme.

Vedle sledování družice rádiem, je možno - a dokonce je nutné - ji sledovat opticky. Optické sledování malých umělých družic je relativně dosti obtížné, uvážíme-li, že úhlová rychlost na obloze je asi 1 až 1,5° za vteřinu. Malý hvězdný bod, sotva v zenitu pozorovatelný pouhým okem, je i za dobrých pozorovacích podmínek těžko postřehnutelný. U velkých družic - jako u druhé umělé družice - je viditelnost dobrá, neboť jejich jasnost stoupá až k jasnosti hvězd první velikosti. V takových případech lze snadno zachytit satelit i fotograficky normálními fotografickými komorami.

Pro optické sledování umělých družic je důležité, aby pozorovací místo se již nalézalo ve stínu, tedy, aby okamžik přeletu družice nastal po západu, nebo před východem Slunce. Přitom však družice sama musí být osvětlena ještě Sluncem, tedy nesmí průchod nastat dlouho po jeho západu nebo příliš brzo před východem. Jestliže výška satelitu je 900 km, pak jej lze pozorovat ještě 3 hodiny po západu nebo před východem Slunce. Oběžná doba družic byla u první asi 90 a u druhé 100 minut a sklon dráhy k rovníku přibližně 60°. Bylo je možno pozorovat prakticky ve všech obydlených končinách světa. Během dne oběhla družice přibližně 15krát Zemí, což mělo za následek, že určité místo přelétala přibližně v určitou ranní nebo večerní hodinu příznivou pro pozorování. Příznivé přelety se časově posouvaly denně asi o 20 minut jednak vlivem stáčení dráhy, jednak následkem nesoudělnosti doby rotace Země a oběhu družice. Posouvaly se směrem k západu. Proto pro každé pozorovací místo nastaly vždy určité série dní, kdy družice byla viditelná zrána či večera.

Optické pozorování umělých družic přesnými metodami má význam i pro geodesii. Družice představuje totiž jakýsi triangulační bod viditelný současně ze dvou kontinentů (Evropa - Amerika). Zaměřením na tento triangulační bod bude možno navázat vzájemně geodetické sítě dvou vzdálených zemědílů.

I když dosavadní vzdálenost družic je nepatrný zlomek vzdálenosti k nejbližšímu kosmickému tělesu - Měsíci - přece jen jsou předzvěstí meziplanetárních letů, které dnes již nepatří mezi sny utopistů.



Josef Kotyk, Pardubice:

Různé

Max Planck

Jedním z největších fyziků nové doby, s jehož jménem se budou čtenáři našeho časopisu při studiu fyziky znovu a znovu setkávat, je **M a x P l a n c k** (čti plank). Jeho památky a záslužné vědecké činnosti vzpomínáme proto u příležitosti 100. výročí jeho narození těmito řádky.

M a x P l a n c k se narodil dne 23. dubna 1858 v Kielu, kde jeho otec Vilém působil jako profesor. Vystudovav matematiku a fyziku, nabyt roku 1789 v Mnichově hodnosti doktorské. Roku 1889 přijal v Berlíně místo soukromého docenta. Již v roce 1892 byl však jmenován jako nástupce Kirchhoffův¹⁾ profesorem teoretické fyziky na universitě v Berlíně, kde záhy soustředil kolem své osobnosti celou plejádu hvězd první velikosti, jakými byli E i n s t e i n,²⁾ L a u e,³⁾ N e r n s t,⁴⁾ S c h r ö d i n g e r⁵⁾ aj. O vědecké výši a významu tamějších fyzikálních seminářů podal nejlepší svědectví Einstein, když měl být jako nástupce Lorentzův⁶⁾ jmenován profesorem teoretické fyziky na universitě v Leydenu a nabídku tu nepřijal s odůvodněním, že nechce ztratit svou vzácnou společnost berlínskou, označuje léta v ní strávená za mimořádně šťastná pro porozumění, jehož se mu tam zvláště ze strany P l a n c k o v y dostávalo. Již roku 1914 byl totiž na přímý návrh P l a n c -



¹⁾ **G u s t a v R o b e r t K i r c h h o f f** (1824–1887) objevil již jako 23letý student po něm nazvané zákony o rozvětvení elektrického proudu. Pracoval též ve spektrální analýze (Kirchhoffův zákon o emisi a absorpci), v termodynamice, v nauce o záření (Kirchhoffův zákon tepelného záření) aj.

²⁾ **A l b e r t E i n s t e i n** (1879–1955) je autorem principu relativnosti a moderní teorie gravitační.

³⁾ **M a x v o n L a u e** připadl roku 1912 na geniální myšlenku vzbudit ohyb Roentgenových paprsků přirozenou mřížkou, tvořenou pravidelným uspořádáním iontů v krystalech.

⁴⁾ **W a l t h e r N e r n s t**, německý chemik, ředitel říš. fyzikálně technického ústavu v Berlíně, zasloužil se o fyzikální chemii, zvláště pak o termodynamiku. Zejména třetí hlavní věta termodynamická (viz dále Část I.) bývá zpravidla označována jeho jménem.

⁵⁾ **E r w i n S c h r ö d i n g e r**, profesor teoretické fyziky na universitě v Berlíně, stal se zakladatelem kvantové teorie atomu, zejména jejího vlnového aspektu. Viz také dále Část II., pozn. 6.

⁶⁾ **H e n d r i k A n t o o n L o r e n t z** (1853–1928), fyzik holandský, proslul jako zakladatel teorie elektronové. Viz opět dále Část II., pozn. 6.

k ů v (Planck byl tehdy rektorem university) jmenován členem berlínské Akademie věd a to za podmínek, jež mu přinášely plné možnosti věnovat se jen vědeckým problémům. Také bádání [P l a n c k o v u dostalo se ovšem náležitého uznání, když např. roku 1918 byla mu za zvláštní zásluhy jako fysiku světového jména udělena Nobelova cena.

O vědecké činnosti P l a n c k o v ě pojednám ve dvou statích.

Část I. Thermodynamika

Cestu životních osudů P l a n c k o v ý c h lemuje řada vynikajících vědeckých děl. Připomenuli z konce minulého století v časovém pořadí „Das Prinzip der Erhaltung der Energie“ (1887), „Grundriß der allgemeinen Thermochemie“ (1893) a „Vorlesung über Thermodynamik“ (1897), nemusím podrobněji vykládat, že P l a n c k hledal popis přírody, jenž by obsáhl nejširší obor přírodních jevů. Jedním z prostředků, jež se tu nabízely, byla, jak vidíme, t h e r m o d y n a m i k a. Není snad náhodné, že také Einsteinovi učarovala, jak známo, nejdříve.

Thermodynamika se zabývá zákony, jimiž se řídí přeměny různých druhů energie v teplo nebo naopak, především přeměna tepla v mechanickou práci. Je založena na dvou větách vyslovených axiomatically.

P r v n í h l a v n í v ě t a, v podstatě princip zachování energie, praví, že teplo, může-li z mechanické práce nebo z jiných druhů energie vznikat a v ně se také měnit, je rovněž energie a nikoli nezničitelné fluidum, jak se dříve soudilo.

D r u h á h l a v n í v ě t a možnost přeměny tepla v práci nebo v jiné formy energie omezuje.

Obě věty thermodynamiky lze formulovati také matematicky; formulace principu zachování energie, jež se obvykle v literatuře vyskytuje,⁷⁾ je v podstatě dílem P l a n c k o v ý m. Naším čtenářům stačí však vyjádřit obsah první věty těmito slovy: Není možno sestrojiti p e r p e t u u m m o b i l e p r v n í h o d r u h u, tj. stroj, který by konal práci sám od sebe, aniž by bylo nutné dodávat mu energii z vnějška. Stejně stručně a zcela obdobně zní také druhá věta: Není možno sestrojiti p e r p e t u u m m o b i l e d r u h é h o d r u h u, tj. tepelný motor, v němž by se všechno dodané teplo změnilo v mechanickou práci; část dodaného tepla přechází vždy na hmotu nižší teploty. Výstižnější je však f o r m u l a c e T h o m s o n o v a - P l a n c k o v a: Není možno sestrojiti periodicky pracující stroj, jenž by nezpůsobil nic jiného, než ochlazoval tepelnou lázeň⁸⁾ a konal rovnomocnou práci, tj. bral teplo z nějaké lázně a měnil je úplně v práci. Význam druhé hlavní věty thermodynamické stane se však mnohem hlubším, zavedeme-li důležitý, našim čtenářům pravděpodobně však méně známý pojem tzv. e n t r o p i e. Upustíme-li opět od příliš abstraktních úvah matematických, můžeme s P l a n c k e m v entropii spatřovati míru „záliby“, kterou příroda má pro jednotlivé fysikální stavy. Při stejné zálibě k stavu počátečnímu i konečnému nedává příroda žádnému z nich přednost; děj je r e v e r s i b i l n í (vratný), může

⁷⁾ Viz např. Záviškovu Thermodynamiku, čl. 1, str. 1 až 5.

⁸⁾ Tepelnou lázeň rozumíme těleso, jež má teplotu všude stejnou a může jiným tělesům teplo dodávat nebo od nich teplo přijímat.

probíhat v obou směrech.⁹⁾ Je-li však záliba přírody pro stav konečný větší než pro stav počáteční, je děj *irreversibilní* (nevratný) a může probíhat jen ve směru od stavu počátečního ke konečnému. Uzavřená soustava mění tedy svůj stav vždy tak, že pravděpodobnost stavu konečného je větší než pravděpodobnost stavu počátečního. Žádnými prostředky nelze zároveň entropii soustavy těles zmenšit, aniž by při tom současně nedošlo ke změnám v jiných tělesech. Po každém přirozeném fyzikálním nebo chemickém ději je součet entropií všech těles, jež se tohoto děje účastnila, větší. S pomocí pojmu entropie, *Planckem* vtipně personifikovaného, jeví se také druhá hlavní věta *thermodynamická* principem, a to *principem zvětšení entropie*.

Dodám ještě, že obě hlavní věty *thermodynamiky* plynou ze zkušenosti. Celou svou povahou jsou takové, že jen zkušenost je může potvrdit nebo vyvrátit. Všechny důsledky z nich plynoucí však se zkušeností souhlasí. To je důkazem a *posteriori* jejich platnosti. *Thermodynamice* byl tak umožněn popis různých fyzikálních a chemických vlastností hmoty na základě několika všeobecných předpokladů, aniž bychom příčiny jednotlivých jevů přesně znali. Příslušné závěry vyplývají z pozorování velkého množství stejných částic, jež skládají uvažovaný efekt *statisticky*. Také pojem entropie lze chápat *statisticky*. *Planck*, vycházející ze *statistické* definice entropie a opíraje se o výsledky *Nernstových* studií chemické afinity za nízkých teplot, vystoupil roku 1911 s hypotézou, že při teplotě $0\text{ }^\circ\text{K} = -273\text{ }^\circ\text{C}$ (přesněji $-273,16\text{ }^\circ\text{C}$) je entropie všech prvků i sloučenin ve stavu chemicky čistém rovna nule. Záhy se sice ukázalo, že měřením nebylo možno *Planckův* předpoklad v celém rozsahu, např. pro sklo a jiné látky amorfny, potvrditi, s omezením na látky krystalovavné zůstal však v platnosti. V pojetí *statistiky* běží zajisté o nejvyšší stupeň uspořádanosti látky. Za jakou dobu se takový stav rovnovážný ustálí, *thermodynamika* již neříká. Při velmi nízkých teplotách¹⁰⁾ se pohyby částic (molekul a iontů) zastavují, stavy, jež nejsou rovnovážné, mohou proto existovat libovolně dlouho. To v důsledcích znamená, že nula absolutní stupnice teplotní je bodem *asymptotickým*; této teplotě se můžeme sice libovolně přiblížit, avšak přesněji dosáhnout nemůžeme. Podrobnější matematický rozbor ukazuje, že věta o nedosažitelnosti absolutního bodu mrazu¹¹⁾ (třetí hlavní věta *thermodynamická*) není však větě *Nernstově-Planckově* zcela ekvivalentní.

⁹⁾ *Thermodynamickou* vratnost děje nesmíme ovšem zaměňovat s chemickou zvrátností reakce. Viz dále Cvičení, 2.

¹⁰⁾ V oblasti nejnižších teplot se nám, jak vidíte, otvírá zcela nový svět. Jeho dobývání je však nesmírně obtížné. Velkých úspěchů v tom směru dosáhli zejména badatelé sovětské, B. Wul, P. L. Kapica aj.

Kdyby se pracující plyn mohl ochladit až na absolutní nulu, bylo by možno u tepelných strojů dosáhnout účinnosti 100 %, tj. proměnit všechno teplo v práci.

¹¹⁾ Málo je známo, že první návrh *William Thomsona* (lorda *Kelvina*) z roku 1848, jak definovati stupnici pro měření teplot, zněl tak, aby byla nahoru i dolů neomezená; nebylo by v ní tedy ani teploty nejvyšší, ani nejnižší. Teplotě $0\text{ }^\circ\text{K}$ by v ní odpovídala nekonečně veliká hodnota záporná. To by rovněž velmi dobře souhlasilo s obsahem třetí hlavní věty *thermodynamické*.

Cvičení.

1. Předpoklad, který činí Thomsonova-Planckova formulace druhé hlavní věty termodynamiky, že jde o lázeň, tj. těleso teploty všude stejné, je nutný, neboť jinak bychom mohli rozdílu teplot v různých místech téhož tělesa užít k periodickému získávání práce z tepla tělesu odnímaného. Vyložte, jakým např. způsobem!

2. Rozhodněte, který z fyzikálních jevů, jež dále uvádím, náleží k dějům vratným (nevratným): a) vznik tepla z mechanické práce třením, b) expanse (nebo komprese) plynu, způsobená náhlou změnou tlaku, c) vznik Jouleova tepla ve vodiči, jímž prochází elektrický proud, d) proudění kapalin, jež nemají vnitřního tření, e) elektromagnetické nebo také optické děje v prostředích nevodivých nebo průhledných, f) vedení tepla, g) záření tepla (o něm viz také dále Část II).

(Dokončení)

Josef Kotyk, Pardubice:

Od vesla k lodnímu šroubu

(Dokončení)



JOSEF RESSEL
1793 — 1857

Obr. 1. Josef Ressel 1793—1857

bylo jinému příslušníku našeho malého vnitrozemského národa *Josefu Resselovi* (obr. 1; nar. 29. června 1793 v Chrudimi, zemř. 10. října 1857 v Kraňsku), jemuž - právě zase po dalších 10 letech - byla dne 11. února 1827 příznivě vyřízena žádost

V 19. století bylo k pohonu lodí užito nové hnací síly, a to síly páry. Po prvé tak učinil roku 1807 (právě před 150 lety) Američan Robert Fulton (čti faltn), o 10 let později náš Josef Božek (1782—1835), mechanik tehdy vznikající vysoké školy technické v Praze,¹⁾ muž vysoce talentovaný, jenž za příznivých okolností se mohl stát také vynálezcem lokomotivy. Božek sestrojil parní loď 5 stop²⁾ dlouhou, s kterou vykonal roku 1817 veřejnou plavbu na Vltavě s úplným zdarem. Pro nedostatek prostředků a potřebného porozumění musel však brzy pokusů zanechat.³⁾ Stát se revolucionářem mořeplavby souzeno

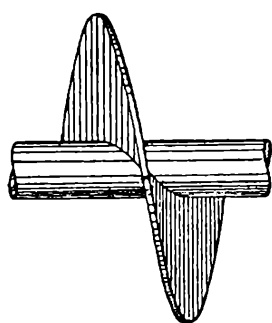
¹⁾ Pražská polytechnika vznikla roku 1803 z veřejné stavovské školy inženýrské, zřízené reskriptem císaře Josefa I. již roku 1707.

²⁾ Stopy bylo v té době užíváno jako míry délkové o velikosti 0,316 m; 5 stop = 1,58 m.

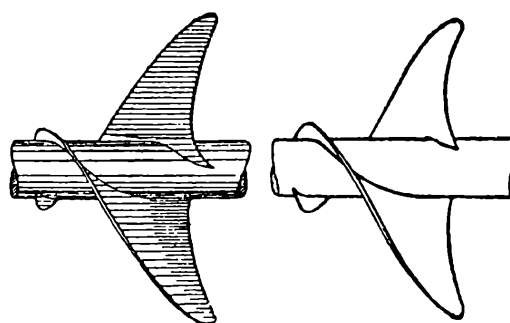
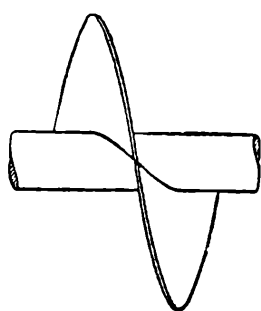
³⁾ Tragiku tohoto nadějného vynálezce, jehož tehdejší společnost nechala zapadnout, neboť parního stroje nepotřebovala, přibližuje člověku nové doby film „Poseľ úsvitu“.

o patentování vynálezu l o d n í h o š r o u b u. Činnost tohoto zapomínaného⁴⁾ pionýra technického pokroku a jeho průkopnické dílo dále stručně zhodnotíme.

Pochopiti a z hlediska principů mechaniky vysvětliti působení lodního šroubu je zcela snadné. Jestliže motor otáčí šroubem, který je umístěn mimo trup lodi ve vodě, působí šroub při otáčení na vodu tlakem. Podle principu akce a reakce působí však i voda na šroub (a tím i na trup lodi) reakcí. Tak se stane, že trup lodi a tekuté prostředí se uvedou ve vzájemný pohyb opačnými směry. Idea otáčejícího se šroubu, jenž si vyvrtává ve vodě matici a tak pohání loď, stala se Resselovi cílem, za nímž šel jako za hvězdou životem velikých obětí. Již za vysokoškolských studií na universitě ve Vídni zabýval se Ressel touto myšlenkou. Z této doby pochází i výkres, zachovaný v „Museu práce“ ve Vídni, na němž Ressel poprvé zobrazil lodní šroub. Když mu bylo 27 let, byl jmenován vrchním lesníkem v Terstu. Tehdy se ukázalo, jaký význam má pro činnost člověka vedle teorie a experimentálního bádání další činitel, totiž vliv prostředí, v němž žije a tvoří. Osobní dopravě mezi Benátkami a Terstem sloužil v době, o níž píší, malý kolesový parník „Carolina“. Bystrý a hloubavý Ressel záhy postřehl, jaké těžkosti způsobuje plavbě vibrace lodí, vznikající nárazy lopatek. S pohotovostí sobě vlastní vytyčil si ihned řadu problémů, které měly odstranit tyto nesnáze, zabezpečit loď před vlnobitím, zlepšit a zrychlit plavbu, zlevnit pohon apod. Roku 1825 zhotovil malý model šroubové lodi a vykonal s ním úspěšnou zkoušku na terstské plovárně. Roku 1826 sestrojil již desetimetrový člun o nosnosti asi 5 tun, s nímž konal veřejně pokusné



Obr. 2. Resselův lodní šroub.



Obr. 3. Nynější lodní šroub.

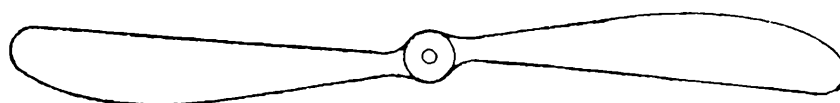
plavby s takovým úspěchem, že se rozhodl požádat úřední místa nejen o patentování vynálezu, nýbrž i o souhlas k ustavení společnosti, jež by jeho pokusy zabezpečila finančně lépe než podpora terstského obchodníka F o n t a n y a zabývala se stavbou dalších šroubových lodí.

Málo se dnes již připomíná, jaká byla původní podoba Resslova šroubu. Byl to v podstatě jediný závit širokoplochého šroubu, jak znázorňuje obr. 2. Pro srovnání a zajímavost poukazují zároveň na nynější lodní šroub (viz obr. 3), jenž mívá pro větší účinnost dva závity nebo i několik závitů ve tvaru křídel prohnutých podél šroubovice. Velikou starost působilo Resselovi umístění šroubu. Ressel uvažoval nejprve o činnosti šroubu na zádi lodi, aby šroub tlačil loď, což byla myšlenka

⁴⁾ I nad učebnicovou literaturou dnešních škol musíme s lítostí užít tohoto výrazu.

vsutku geniální. Lodníci však upozorňovali na nevhodnost tohoto umístění šroubu, neboť by prý překážel a snad zcela znemožňoval řídit loď kormidlem. Ressel shledal také, že lodní šroub vyžaduje hluboké vody. Nehodí se tedy stejnou měrou pro službu říční a pobřežní jako námořní. Upozorňoval dále, že vhodným materiálem pro lodní šroub může být zejména bronz, neboť se ve vodě nemění, kdežto železo velmi rychle rezaví a zvyšuje pak tření při pohybu. Původní domněnka, že šroub větších rozměrů je účelnější, se ukázala však teprve později klamnou. Přispěla k tomu náhoda, jak často v dějinách bývá: Při plavbě Smithova anglického parníku urazila se nárazem o mělčinu část závitu lodního šroubu, loď nabyla však k velikému překvapení - větší rychlosti než měla dříve.

Vynálezce lodního šroubu prožíval zatím zklamání za zklamáním. Doba, v níž žil, doba absolutismu Metternichova, nechápala dosah Resslerova vynálezu, jenž měl sloužit a prospívat všem. Despotický panovník přál si mimo to mít jen „hodné a poslušné poddané“, nikoli také hloubavé a učené. Úřady sledovaly Resslerovu činnost s rostoucí nedůvěrou. Stačilo proto, když při zkušební plavbě nové dvoustěžňové šroubové lodi „Civita“ roku 1829 vypověděl službu parní stroj, aby další pokusy byly Resslerovi zakázány a patent na jeho vynález prohlášen za neplatný. Že Ressel předložil také lesnímu hospodářství země desítky zlepšovacích návrhů, bylo v té chvíli ihned ničím. Místo uznání dostalo se mu jen výtek, že vynálezy a samými zbytečnostmi zanedbává povinnosti svého úřadu. . .



Obr. 4. Letadlová vrtule.

Pověřen úkolem vykonat určitá měření v okolí Lublaně, přijíždí velký vynálezce do svého posledního životního působiště, aby zde, daleko od domova, daleko od krásných Čech i od širého moře, v nezdravém kraji lublaňských bahnisek zamořených v té době tyfem, zakončil v chudobě a opuštěn svůj strastiplný život. Nikdo z okolí nemohl tehdy vědět, kdo je ten neznámý, životem znavený stařec, jenž přišel do této krajiny zemřít. V jeho ztuhlé ruce byl nalezen lékařský recept s posledním pozdravem vzdálené rodině a s prosbou: „Hajte mé prvenství vynálezu lodního šroubu!“ Zneuznán dobou, pochován byl bez okázalosti na lublaňském hřbitově.

Zatím - a to už od roku 1840 - brázdily vody terstského přístavu anglické parníky, jejichž šroub byl pouhou kopií šroubu Resslerova. Boj s kořistnictvím a nepoctivostí nezůstal však marný. Svědčí jen o zchátralosti habsburského císařství, že pikle proti Resslerovi a jeho životnímu dílu neustávaly a trvaly dlouho i po jeho smrti. Konečně byly zásluhy Resslerovy všeobecně uznány a vynálezci lodního šroubu směl být i ve Vídni postaven před budovou polytechniky kovový pomník, avšak s podmínkou, že s desky budou odstraněna slova „natione Bohemus“, tj. rodem Čech. . . Běželo přece také o původ, o Čecha, který nešel v řadě s „hodnými a poslušnými“ poddanými, ale chtěl samostatně tvořit! V tom tkví trpkost lidského

údělu Resslera v polofeudální společnosti tehdejšího Rakouska, žaláře národů. V tom tkví však i příčina Resslerovy dějinné velikosti!⁵⁾



Obr. 5. Poštovní známka s portrétem Josefa Božka.

Málo známý průkopník fotografie

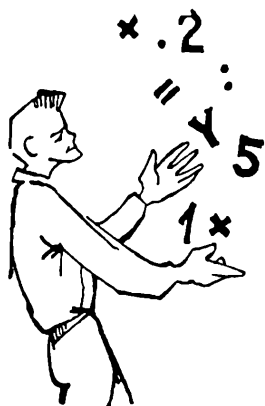
Převládajícím názorem je, že vynálezci fotografie jsou Francouzi Daguerre a Niepce, kteří již v roce 1822, resp. 1833, se zabývali pokusy o zachycení obrazů. Zajímavé je, že ve skutečnosti začátkem 19. století Angličan Tom Wedgwood a o něco později Seebeck zhotovili fotografie, jež však pro neznalost fixace nedovedli uchovat. To se teprve podařilo Henry Fox Talbotovi, když v roce 1835 vyvolal kyselinou duběnkovou s dusičnanem stříbra snímky květin a listů po krátké expozici na papír, potažený směsí chloridu a jodidu stříbra. Jeho fotografie z roku 1840 vynikají zdařilým provedením, což jej přimělo k předpovědi důležitosti fotografie pro cestovatele, badatele, umělce atd. (Wissenschaft und Fortschritt č. 10, 1957.)

F. Komurka

⁵⁾ „Pyšníme se před světem jmény našich vynálezců Josefa Resslera aj. Máme právo být hrdí na náš vklad do pokroku vědy a techniky,“ napsal V. Kopecký. Autoři našich učebnic však na Resslera zapomněli.

Poznámka: ¹⁾ Ponechávaje další vývoj mořeplavby soukromému zájmu čtenářů (doporučuji mj. také knihu doc. dr. Fr. Běhouňka „Mořeplavci a objevitelé“), doložím význam lodního šroubu ještě několika čísly: Kolumbus plul roku 1492 do Ameriky 68 dní, plachetní kolesový parník „Savannah“ z Ameriky do Liverpoolu roku 1818 už jen 25 dní, šroubový parník roku 1874 však toliko 8 dní, „Lusitania“ roku 1910 jen 4½ dne atd. Resslerův lodní šroub (podobný účel má také vrtule vzducholodí a letadel, viz obr. 4) přináší lidstvu veliký užitek.

²⁾ Také románová biografie „Posel úsvitu“ vynálezce Josefa Božka od Jaroslava R. Vávry zasluhuje pozornosti čtenářů. Božkův portrét stal se námětem poštovní známky (viz obr. 5), vydané u příležitosti 175. výročí jeho narození a zároveň 250 let trvání inženýrských škol v Praze k uctění jeho památky.



Matematické zábavy

Doc. Ota Setzer, Praha:

O vlastnostech násobků čísla 239

Sedmiciferná čísla, která jsou dělitelná prvočíslem 239, mají zajímavou vlastnost. Říkejme „cyklická záměna cifer“ takové záměně číslic daného čísla, při níž poslední číslici daného čísla (tj. počet jednotek) přeneseme na začátek čísla a pořadí ostatních cifer přitom neměníme; touto cyklickou záměnou přejdou desítky původního čísla na místo jednotek nového čísla, původní stovky na místo desítek atd.

Odvodíme si nyní větu:

Sedmiciferná čísla, která vzniknou postupně cyklickou záměnou cifer sedmiciferného čísla dělitelného 239, jsou také dělitelná 239.

Důkaz: Budiž $a b c d e f g$ dané číslo, o němž předpokládáme, že je dělitelné 239; a, b, c, d, e, f, g jsou jeho cifry; hodnotu daného čísla snadno určíme: $N_0 = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + g$; podle předpokladu je

$$N_0 = 239 \cdot k,$$

kde k je přirozené číslo; cyklickou záměnou vznikne číslo

$$N_1 = g \cdot 10^6 + a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f;$$

násobme nové číslo deseti:

$$10 \cdot N_1 = g \cdot 10^7 + a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10;$$

po úpravě dostaneme:

$$10 \cdot N_1 = g \cdot 10^7 + N_0 - g = N_0 + 9\,999\,999 \cdot g,$$

čili $10 \cdot N_1 = 239 \cdot k + 9 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot g = 239 \cdot (k + 41\,841 \cdot g) = 239 \cdot m$, kde m je opět přirozené číslo; protože 10 a 239 jsou čísla nesoudělná, musí číslo N_1 být násobkem 239; právě tak jako jsme z čísla N_0 dělitelného 239 odvodili cyklickou záměnou číslo N_1 , také dělitelné 239, můžeme stejně odvodit z čísla N_1 cyklickou záměnou číslo N_2 jež je zase dělitelné 239. Opakováním cyklické záměny vzniknou čísla N_3, N_4, N_5, N_6 a konečně $N_7 = N_0$, vesměs dělitelná 239. Tím je věta dokázána.

Je-li např. zvolené číslo $N_0 = 5\,693\,219 = 23\,821 \cdot 239$, jsou odvozená čísla:

$$\begin{aligned} N_1 &= 9\,569\,321 = 40\,039 \cdot 239, & N_2 &= 1\,956\,932 = 8188 \cdot 239, \\ N_3 &= 2\,195\,693 = 9187 \cdot 239, & N_4 &= 3\,219\,569 = 13\,471 \cdot 239, \\ N_5 &= 9\,321\,956 = 39\,004 \cdot 239, & N_6 &= 6\,932\,195 = 29\,005 \cdot 239. \end{aligned}$$

Jestliže dané číslo N_0 má méně cifer než sedm, můžeme chybějící cifry nahradit nulami, např. $N_0 = 20\ 315 = 85 \cdot 239$, $N_1 = 5\ 002\ 031 = 20\ 929 \cdot 239$ atd.

Podle odvozené věty lze na první pohled rozhodnout, že číslo 8 000 047 je dělitelné 239, neboť číslo 478 odvozené cyklickou záměnou je dvojnásobkem čísla 239. Z důkazu naší věty dále plyne, že věta zůstane v platnosti, nahradíme-li v ní všude prvočíslo 239 prvočíslem 4649.

Uvedená věta je rozšířením vět, které byly bez důkazu uveřejněny v českém překladu knihy: *B. A. Korděmskij „Matematické prostocviki“* (vyšlo v nakladatelství Mladé fronty v roce 1957, cena 31,50 Kčs). Na straně 240 tam čteme:

„Je přirozené, že se nám vnucuje domněnka, že každé číslo, které vznikne cyklickou záměnou číslic trojmístného čísla dělitelného sedmatřiceti, je také dělitelné číslem 37.“

Čtenář si toto tvrzení snadno ověří analogicky podle důkazu naší věty; rovněž tak i větu naznačenou bez důkazu na str. 241 téže knihy:

„Je-li pěticiferné číslo dělitelné 41, jsou číslem 41 dělitelná i další čtyři čísla, jež z původního čísla dostaneme postupně cyklickou záměnou jeho číslic.“



Úlohy k řešení

23. Osy o_a, o_b stran a, b trojúhelníka ABC protínají jeho výšku v_c v bodech A', B' . Dokažte, že součin vzdáleností CA', CB' je roven čtverci r^2 poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

J. Langr

24. Určete nutnou a postačující podmínku pro koeficienty rovnice $x^4 + ax^3 + cx + d = 0$, aby její dva kořeny byla čísla opačná (různá od nuly).

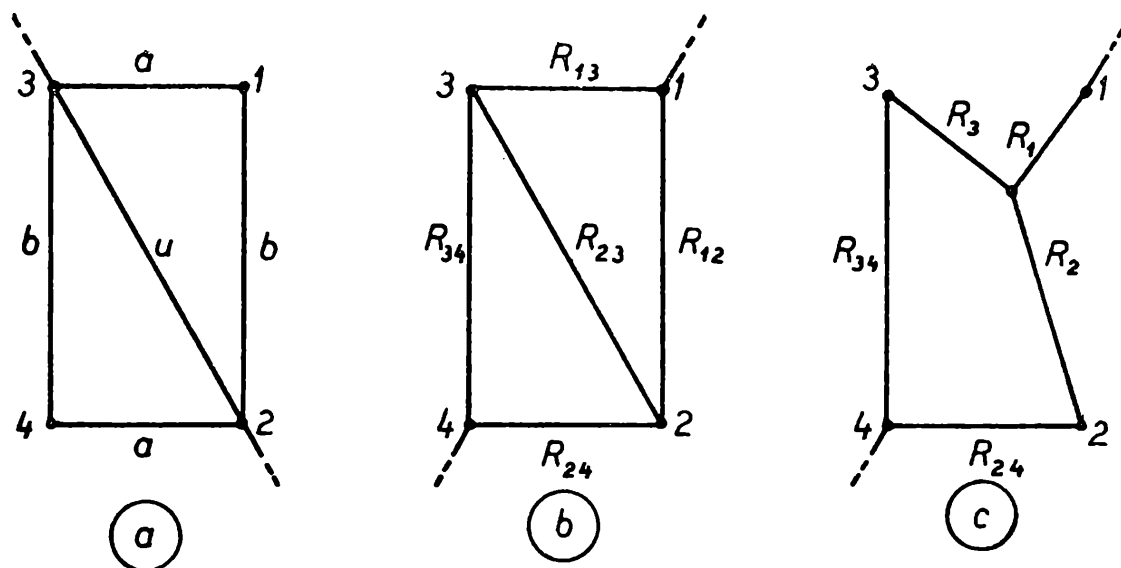
J. Holubář

25. Jsou dány mimoběžky a, b, c protínající danou rovinu ρ . Zjistěte směr rovnoběžného osvětlení, při němž vržené stíny a', b', c' na rovinu ρ omezují rovnostranný trojúhelník.

Red.

26. Máme určit celkový odpor obdélníkové kostry z odporového drátu (viz obr. 1a, b) pro případ, že proudové přívody jsou: a) v místech 2 a 3, b) v místech 1 a 4. Všechny odporové dráty mají stejný průřez a stejný měrný odpor. Ve druhém případě musíme odporové spojení do trojúhelníka 123 převést na „odporovou hvězdu“ 123 (obr. 1c).

V. Šindelář



Obr. 1

27. Navrhněte nonius pro stupnici vynesenu v palcové míře. Nejmenší dílek stupnice je $1/16$ in. Nonius má mít nonickou diferenci $1/128$ in. Nakreslete část stupnice s noniusem při čtení $2 \frac{5}{64}$ in. Současně určete, jaký je v daném případě nonický poměr a jakou hodnotu má daná nonická diference, vyjádříme-li ji v milimetrech. Viz článek na str. 219.

Poznámka: Základní jednotkou anglické palcové míry je 1 palec čili 1 inch (vy-slov inč) = 1 in. = 1'' = 25,399 978 mm = 25,4 mm. Dělení na menší dílky se děje dvojkovou soustavou, např. $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ atd. hodnoty se vyjadřují smíšeným číslem (např. $3 \frac{7}{32}$ in.).

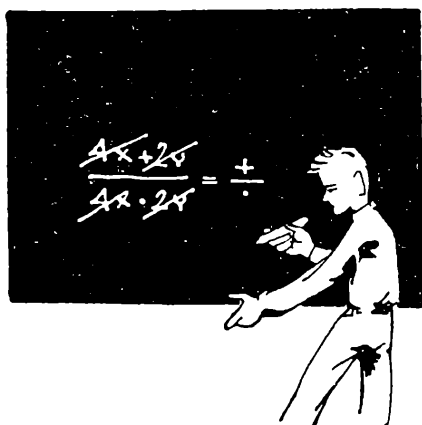
V. Šindelář

Řešení zasílejte do 15. července 1958 na adresu:
Doc. Ota Setzer, Praha 6, Zikova 4.



Redakce hovoří se čtenáři

Žádáme čtenáře, kterým *Rozhledy* pravidelně nedocházejí, aby své stížnosti adresovali místní Poštovní novinové službě. Teprve nepodaří-li se Vám tam zjednat nápravu, zašlete přesně stylisovanou stížnost na adresu: Státní pedagogické nakladatelství (k rukám inž. J. Volka), Praha III, Valdštynské nám. 1.



Matematika

Doc. Emil Kraemer, Praha:

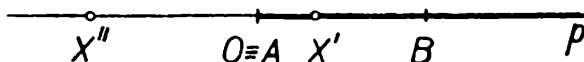
O analytické geometrii na přímce

(Dokončení)

Nyní si ukážeme, jak pomocí jediného vzorce (pro vzdálenost dvou bodů), který jsme minule odvodili, můžeme řešit různé úlohy o přímce.

Příklad 1. Na přímce p jsou dány dva různé body A, B . Určete na ní bod X tak, aby bylo $AX : BX = 1 : 2$.

Ř e š e n í. Zvolme na přímce p (obr. 4) soustavu souřadnic tak, aby bod A byl jejím počátkem a aby bod B měl souřadnici 1 (to znamená, že kladnou polopřímku je polopřímka AB a že jednotkou délky je vzdálenost bodů A, B). Souřadnici hledaného bodu X v této soustavě souřadnic označme x . Je tedy $A(0), B(1), X(x)$.



Obr. 4

Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů je $AX = |x|$, $BX = |1 - x|$. Podle dané podmínky je

$$\frac{|x|}{|1 - x|} = \frac{1}{2},$$

z čehož plyne, že $1 - x \neq 0$. Po úpravě rovnice dostaneme rovnici

$$|2x| = |1 - x|$$

Z této rovnice plyne, že čísla $2x, 1 - x$ jsou buď stejná, nebo opačná (liší se pouze znaménkem). Je tedy buď $2x = 1 - x$, anebo $-2x = 1 - x$. První rovnice má kořen $x = \frac{1}{3}$, druhá má kořen $x = -1$.

Úloha má tedy dvě řešení. Jeden bod X (na obr. 4 označený X') leží uvnitř úsečky AB tak, že je $AX' = \frac{1}{3} AB$, druhý bod X (na obr. 4 označený X'') leží na prodloužení úsečky AB za bod A tak, že je $AX'' = AB$.

Ukážeme však, že metodou analytické geometrie se dají řešit i úlohy mnohem náročnější. Ze školy víte, že existují různá zobrazení v rovině i v prostoru. Jejich podstatou je, že každému bodu X se určitým předpisem přiřadí jediný bod X' , jemuž pak říkáme obraz bodu X . Takovými zobrazeními jsou např. osová souměrnost v rovině nebo rovinová souměrnost v prostoru aj. Jestliže se omezíme jenom na přímku, můžeme definovat *zobrazení na přímce* takto:

Každému bodu X dané přímky p přiřadíme nějakým předpisem jediný bod X' ležící opět na přímce p . Bod X nazýváme *vzorem*, bod X' jeho *obrazem*. Jestliže v tomto zobrazení bod X splyne se svým obrazem X' , pak bodu $X \equiv X'$ říkáme *bod samodružný*. Jestliže zobrazení má tu vlastnost, že vzdálenost $X'Y'$ obrazů X', Y' libovolných dvou bodů X, Y je vždy táž jako vzdálenost XY , pak toto zobrazení nazýváme *shodností* čili *shodným zobrazením*.

Položme si nyní otázku, zdali lze určit všechna shodná zobrazení na přímce.

Příklad 2. Nalezněte všechna shodná zobrazení na přímce a určete jejich samodružné body.

Ř e š e n í. Libovolný bod X přímky p se v každém hledaném zobrazení zobrazí do bodu X' , libovolný bod Y do bodu Y' ; přitom má být $X'Y' = XY$ pro každou dvojici bodů X, Y .

a) Zvolme ze všech bodů přímky p jeden určitý bod O ; jeho obraz označme O' . Na přímce p zvolme soustavu souřadnic tak, aby měla počátek v bodě O ; jednotku délky a kladnou polopřímku zvolme pak už libovolně. V této soustavě souřadnic má bod O souřadnici nula a bod O' souřadnici, kterou označíme a . Souřadnici libovolného bodu X přímky p označme x , souřadnici jeho obrazu X' označme x' . Podle dané podmínky je vždy $O'X' = OX$ čili

$$|x' - a| = |x|$$

To znamená, že čísla $x' - a, x$ jsou buď stejná, anebo opačná. Je tedy buď $x' - a = x$, anebo $x' - a = -x$, tj. platí jeden z těchto vztahů:

$$x' = x + a \tag{1}$$

$$x' = -x + a \tag{2}$$

Našli jsme tak dvě různě vyjádřená shodná zobrazení na přímce: V jednom je obrazem každého bodu $X(x)$ bod $X'(x + a)$, ve druhém je obrazem každého bodu $X(x)$ bod $X'(-x + a)$; při tom bod $O'(a)$ je obrazem bodu $O(0)$. Pro samodružný bod X platí, že je $X' \equiv X$, tj. $x' = x$.

b) V případě (1) musí tedy pro samodružný bod platit rovnice

$$x = x + a$$

Tato rovnice nemá pro $a \neq 0$ žádné řešení v pro $a = 0$ je jejím řešením každé číslo x . Došli jsme tedy k tomuto výsledku:

Zobrazení (1) buď nemá žádný samodružný bod, anebo je to zobrazení, v němž je každý bod samodružný.

c) Pro samodružný bod zobrazení (2) musí platit rovnice

$$x = -x + a ,$$

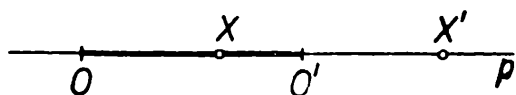
$$x = \frac{a}{2}$$

To znamená, že zobrazení (2) má vždy jediný samodružný bod. Pro $O' \not\equiv O$ ($a \neq 0$) je to zřejmě střed S úsečky OO' (obr. 6); pro $O' \equiv O$ ($a = 0$) je to bod $S \equiv O$.

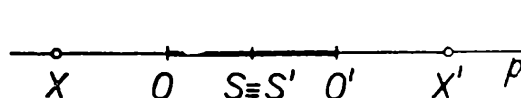
d) Z rovnice (1) a z výsledku na konci odstavce b) plyne, že zobrazení (1) můžeme názorně uskutečnit takto:

1. Buď všechny body přímky p posuneme po přímce p , a to tak, aby při tom bod O přešel do bodu O' (obr. 5). Zobrazení se pak nazývá *posunutí* čili *translace*. Zároveň je názorně patrné, že žádný bod při tomto zobrazení nezůstane na svém místě, takže neexistuje žádný samodružný bod.

2. Nebo každý bod přímky p zůstane na svém místě (je bodem samodružným). Zobrazení se pak nazývá *totožnost* čili *identita*.



Obr. 5



Obr. 6

V zobrazení (2) je vždy jediný bod S samodružný; přitom pro každý bod X a jeho obraz X' platí

$$SX' = SX$$

To nastane buď pro bod $X' \equiv X$, anebo pro bod X' , který je k bodu X souměrně sdružen podle bodu S . Protože však bod S je jediným samodružným bodem, je pro $X \not\equiv S$ případ $X' \equiv X$ vyloučen; zbývá proto jediné druhá možnost. Došli jsme tedy k tomuto výsledku:

3. Zobrazení (2) je středovou souměrností se středem v bodě S , který je jediným samodružným bodem tohoto zobrazení (obr. 6).

Závěr. Shodné zobrazení na přímce buď nemá žádný samodružný bod (posunutí čili translace), nebo má jediný samodružný bod (středová souměrnost), anebo je to zobrazení, v němž je každý bod samodružný (totožnost čili identita). Jiná možnost nemůže nastat.

Užitečnost analytické metody, kterou jsme zatím omezili jenom na vyjádření bodů téže přímky, však teprve náležitě vynikne, až jí užijeme k vyjádření bodů celé roviny. To provedeme v dalších článcích, kde opět ukážeme užití této metody k řešení různých úloh.

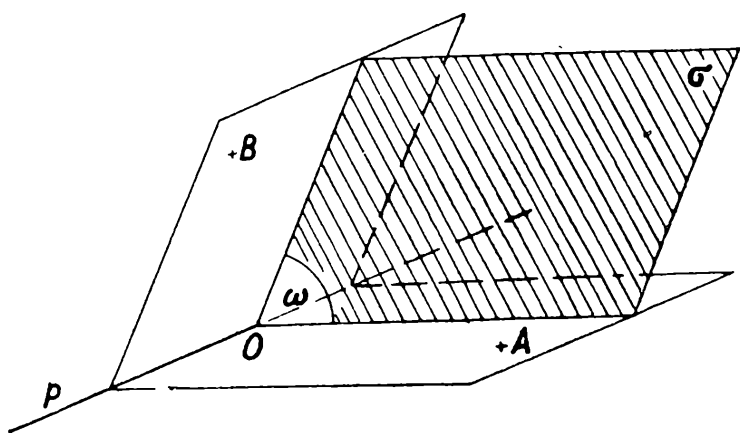
Parketová úloha sférické a rovinné geometrie

Z názoru je patrné, že rovinu lze zcela pokrýt (parketovat) např. shodnými čtverci, nebo shodnými rovnostrannými trojúhelníky, anebo shodnými pravidelnými šestiúhelníky. Dokážeme později, že tím právě jsou vyčerpány všechny možné případy, jak se dá rovina pokrýt shodnými pravidelnými mnohoúhelníky.

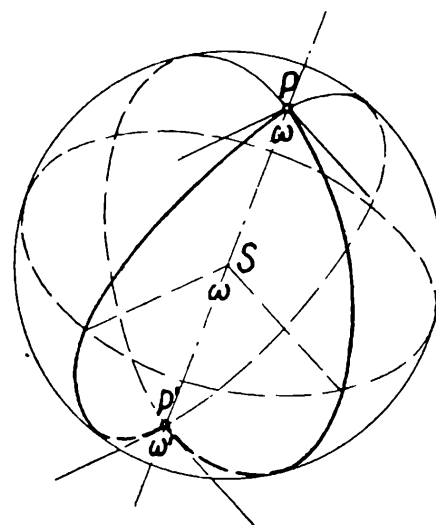
Řešení této planimetrické úlohy je poměrně jednoduché a dosti známé. Napadne nás myšlenka, zda má řešení obdobná sférická úloha, kterou vyslovíme otázkou:

Je možno plochu kulovou úplně pokrýt shodnými pravidelnými sférickými mnohoúhelníky?

Řešení této úlohy se zřejmě neobejde bez *sférické geometrie*. Protože nelze její znalost předpokládat, je nutno z ní vybrat a předeslat vlastnímu problému alespoň tolik, kolik je třeba k jeho porozumění. Pro omezenost místa musíme se spokojit jen objasněním těch nejpotřebnějších a základních pojmů. Budeme však přitom hledět k tomu, aby vytvořily malý souvislý celek, který by mohl být čtenáři, neznajícímu sférickou geometrii, příležitostí k položení prvních základů pro další její studium. Nikde však neužijeme prostředků *sférické trigonometrie*, i když jsme si vědomi, že by to bylo někde výhodné; odvození potřebných jejích výsledků by již velmi přesáhlo rámeček článku.



Obr. 1



Obr. 2

Sférická geometrie vyšetřuje útvary na ploše kulové. Nejjednodušší z nich jsou *sférický dvojúhelník*, *sférický trojúhelník* a *sférický mnohoúhelník*. První z nich úzce souvisí s jednoduchým pojmem klínu, připomínajícím planimetrický pojem dutého úhlu, druhý a třetí se opírají o teorii trojhranu a mnohohranu, která je analogií teorie trojúhelníka a mnohoúhelníka. Uvedeme jejich definice a některé vlastnosti.

Klín. Buďte pA , pB dvě různé poloroviny (se společnou hranicí p), které nejsou navzájem opačné (obr. 1). Pak klínem $A \cdot p \cdot B$ nazýváme průnik (společnou část) poloprostorů pAB , pBA .¹⁾

¹⁾ Např. poloprostor pAB je určen hraniční rovinou pA a bodem B ležícím mimo rovinu pA .

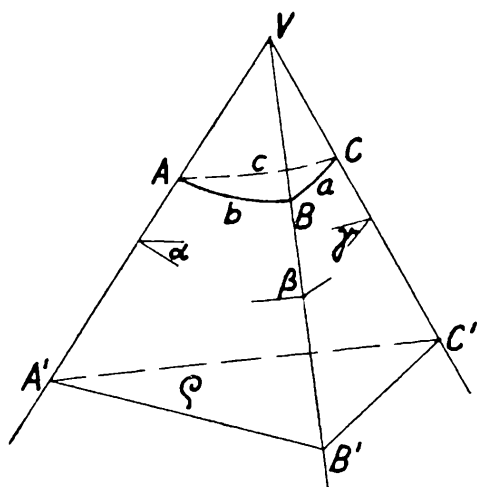
Poloroviny pA , pB jsou *stěny klínu*, přímka p se nazývá *hrana klínu*. Průnik klínu s libovolnou rovinou σ kolmou na hranu klínu je (dutý) úhel ω ; nazývá se *úhel klínu*. Jeho ramena jsou polopřímky se společným počátkem O na hraně klínu, které leží ve stěnách klínu a jsou kolmé na jeho hranu.

Sférický dvojúhelník. Průnik klínu a plochy kulové, jejíž střed S leží na hraně klínu, se nazývá *sférický dvojúhelník* (obr. 2). Má dva *vrcholy* P, P' , v nichž hrana klínu protíná plochu kulovou a dvě *strany*, což jsou polokruhové oblouky hlavních kružnic, ve kterých plocha kulová protíná stěny klínu.

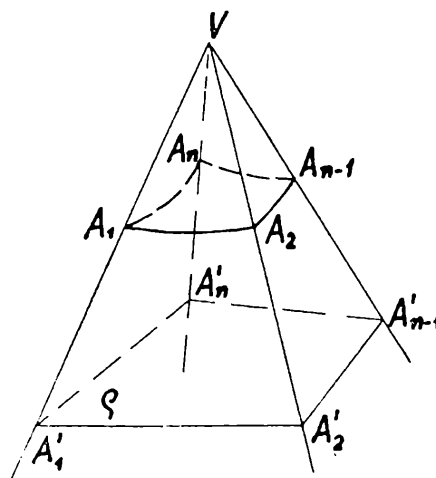
Sférický dvojúhelník má dva úhly ω, ω' . Např. ω je dutý úhel, který svírají obě polopřímky se společným počátkem ve vrcholu P dvojúhelníka, které leží ve stěnách příslušného klínu a jsou kolmé na jeho hranu PP' . Každý z obou úhlů ω, ω' dvojúhelníka je zřejmě úhlem příslušného klínu; jsou tedy oba navzájem shodné a lze mluvit jen o *úhlu dvojúhelníka*.

Trojhran. Je dán $\triangle A'B'C'$ v rovině ρ a bod V , který neleží v rovině ρ . Množina všech bodů všech polopřímek s počátkem V , které protínají rovinu ρ v bodech trojúhelníka $A'B'C'$, je *trojhran* (obr. 3); budeme jej značit $V(A'B'C')$.

Bod V je *vrchol*, polopřímky VA', VB', VC' jsou *hrany trojhranu*. Úhly (duté) $B'VC', C'VA', A'VB'$ jsou *stěny trojhranu*. Velikosti těchto úhlů se nazývají *strany trojhranu*.



Obr. 3



Obr. 4

Úhel klínu $B' . VA' . C'$ je *úhel trojhranu* při hraně VA' . Podobně definujeme úhly trojhranu při hranách VB', VC' . Lze dokázat, že trojhran $V(A'B'C')$ je průnikem poloprostorů $VB'C'A', VC'A'B', VA'B'C'$.

Jako trojúhelník má i trojhran šest základních prvků: tři stěny (strany) a tři úhly.

Sférický trojúhelník. Průnik trojhranu $V(A'B'C')$ a plochy kulové, jejíž střed je ve vrcholu V trojhranu, se nazývá *sférický trojúhelník* (obr. 3).

Má tři vrcholy A, B, C , v nichž hrany trojhranu protínají plochu kulovou. Jeho *strany* jsou oblouky $\widehat{BC} = a, \widehat{CA} = b, \widehat{AB} = c$, ve kterých plocha kulová protíná stěny trojhranu. Obvykle však rozumíme stranami sférického trojúhelníka úhlové

velikosti těchto oblouků, tj. velikosti středových úhlů příslušných těmto obloukům, udané v míře stupňové nebo obloukové.

Sférický trojúhelník ABC má tři úhly α, β, γ ; jsou to úhly příslušného trojhranu. Např. α je dutý úhel, který svírají obě polopřímky se společným počátkem ve vrcholu A , které leží ve stěnách klínu $B' \cdot VA' \cdot C'$ a jsou kolmé na jeho hranu VA' . Je to také úhel dvojúhelníka příslušného tomuto klínu. Velikost úhlů sférického trojúhelníka ABC značíme také α, β, γ . Úhel α (β, γ) budeme nazývat protějším úhlem ke straně a (b, c). Úhly β, γ jsou přilehlé ke straně a atd.

Trojhran (sférický trojúhelník) rovnoramenný. Trojhran, který má dvě shodné stěny (tj. stejné strany), se nazývá *rovnoramenný trojhran*. Příslušný sférický trojúhelník se také nazývá *rovnoramenný*.

Shodné strany se nazývají *ramena*, třetí strana je *základna*, k ní protější vrchol je *hlavní vrchol* sférického rovnoramenného trojúhelníka. Stejně jako u rovinného trojúhelníka, platí i u sférického rovnoramenného trojúhelníka, že p r o t i s h o d n ý m s t r a n á m (r a m e n ů m) l e ž í s h o d n é ú h l y.

Vypuklý mnohoúhelník. Je dán vypuklý mnohoúhelník $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ ($n \geq 3$) ležící v rovině ρ a dále bod V , který neleží v rovině ρ . Množina všech bodů všech polopřímek s počátkem V , které protínají rovinu ρ v bodech mnohoúhelníka, vyplňuje vypuklý mnohoúhelník (určitěji n -hran) $V(A'_1 A'_2 \dots A'_n)$.

Mnohoúhelník $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ budeme nazývat *řídícím mnohoúhelníkem n -hranu*, bod V *vrcholem n -hranu* (obr. 4).

Polopřímky $VA'_1, VA'_2, \dots, VA'_n$ se jmenují *hrany n -hranu*.

Hrany procházející sousedními vrcholy řídicího mnohoúhelníka, jsou sousední hrany n -hranu.

Úhly $A'_1 VA'_2, A'_2 VA'_3, \dots, A'_n VA'_1$ jsou *stěny n -hranu*; jejich velikosti se nazývají *strany n -hranu*.

Úhel klínu $A'_n \cdot VA'_1 \cdot A'_2$ je *úhel n -hranu* při hraně VA'_1 . Obdobně definujeme úhel n -hranu při kterékoli další jeho hraně.

Stěny, resp. úhly mnohoúhelníka, jsou sousední, jsou-li sousední příslušné strany, resp. úhly řídicího mnohoúhelníka.

Lze dokázat, že vypuklý n -hran je průnikem n poloprostorů, z nichž každý je vyřezán jednou z rovin, obsahujících stěny n -hranu a určen libovolným vnitřním bodem řídicího mnohoúhelníka.

Sférický vypuklý mnohoúhelník. Průnik vypuklého mnohoúhelníka (n -hranu) a plochy kulové, jejíž střed je ve vrcholu mnohoúhelníka, se nazývá *vypuklý sférický mnohoúhelník* (n -úhelník). (Obr. 4.)

Význam pojmů vrcholy, strany a úhly je u sférického mnohoúhelníka týž jako u sférického trojúhelníka.

Vrcholy, resp. strany sférického mnohoúhelníka, jsou sousední, jsou-li sousední odpovídající hrany, resp. stěny příslušného mnohoúhelníka.

Pravidelný mnohoúhelník. Je-li řídicí mnohoúhelník v rovině ρ pravidelný mnohoúhelník a je-li bod V , který neleží v rovině ρ , bodem přímky kolmé k rovině ρ a procházející středem O' řídicího mnohoúhelníka, pak příslušný n -hran nazýváme *pravidelným n -hranem*. Má všechny strany stejné a také všechny úhly stejné.

Pravidelný sférický mnohoúhelník. Průnik pravidelného n -hranu a plochy kulo-

vé, jejíž střed je ve vrcholu mnohohranu, se nazývá *pravidelný sférický n -úhelník*.

Vrcholy pravidelného sférického n -úhelníka jsou zřejmě zároveň vrcholy pravidelného rovinného n -úhelníka.

Pravidelný sférický n -úhelník má všechny strany stejné a také všechny úhly stejné.

Pravidelný n -hran $V(A'_1 A'_2 \dots A'_n)$ lze rozložit na n shodných, navzájem se nepronikajících rovnoramenných trojhranů; jednou hranou každého z nich je polopřímka VO' , další dvě hrany jsou vždy dvě sousední hrany n -hranu (např. VA'_1, VA'_2). Právě tak lze rozložit příslušný pravidelný sférický n -úhelník $A_1 A_2 \dots A_n$ na n shodných navzájem se nepřekrývajících rovnoramenných sférických trojúhelníků. Hlavní vrchol každého z nich je průsečík O přímky VO' s plochou kulovou. Jeho další dva vrcholy (např. A_1, A_2) jsou průsečíky dvou sousedních hran (VA'_1, VA'_2) n -hranu s plochou kulovou. Společný hlavní vrchol O všech těchto sférických rovnoramenných trojúhelníků se nazývá *střed* pravidelného sférického n -úhelníka. Úhel při hlavním vrcholu O v každém takovém rovnoramenném sférickém trojúhelníku má zřejmě velikost $\sigma = \frac{4R}{n}$ a oba shodné úhly při jeho

základně mají velikosti rovné polovině velikosti úhlu pravidelného sférického n -úhelníka.

Ještě si připravíme několik potřebných vět.

Věta 1. Sférický dvojúhelník, jehož úhel má velikost α (ve stupních), má na ploše kulové poloměru r obsah

$$P_\alpha = \frac{\alpha}{90} \pi r^2 = 2r^2 \operatorname{arc} \alpha.$$

Důkaz. Plochu kulovou lze složit ze 360 navzájem se nepřekrývajících a shodných dvojúhelníků se společnými vrcholy v krajních bodech některého průměru kulové plochy; úhel každého z nich má velikost 1° . Obsah každého takového dvojúhelníka je tedy roven $\frac{1}{360} \cdot 4\pi r^2$, kde $4\pi r^2$ je povrch koule.

Obsah dvojúhelníka, jehož úhel má velikost α° , (α číslo celé), je pak zřejmě

$$P_\alpha = \frac{\alpha}{360} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\alpha}{90} \pi r^2 = 2r^2 \operatorname{arc} \alpha$$

Lze dokázat, že vzorec platí i tehdy, je-li α jakékoli číslo reálné, pro které platí $0 < \alpha < 180$.

Věta 2. Obsah sférického trojúhelníka na ploše kulové poloměru r je $P = r^2 \operatorname{arc} \varepsilon$, kde $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 2R$ a α, β, γ jsou velikosti úhlů (ve stupních) sférického trojúhelníka.

Důkaz. Označíme P obsah sférického trojúhelníka ABC a P_a, P_b, P_c po řadě obsahy sférických trojúhelníků BCA', CAB', ABC' , přilehlých ke stranám a, b, c sférického trojúhelníka ABC (obr. 5).

Sférické trojúhelníky ABC a BCA' vyplní sférický dvojúhelník o úhlu α a o obsahu P_α , sférické trojúhelníky ABC a CAB' vyplní sférický dvojúhelník o úhlu β

a o obsahu P_β a sférické trojúhelníky ABC a ABC' vyplní sférický dvojúhelník o úhlu γ a o obsahu P_γ .

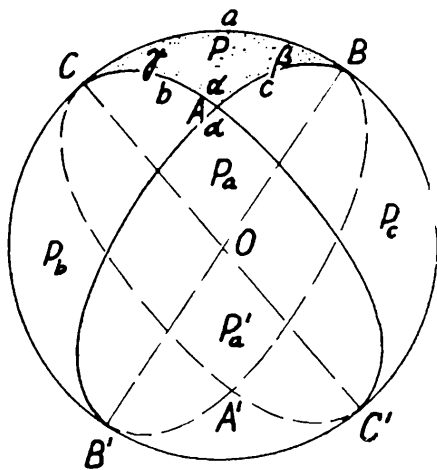
Platí tedy $P + P_a = P_\alpha$, $P + P_b = P_\beta$, $P + P_c = P_\gamma$ a proto také

$$2P + P + P_a + P_b + P_c = P_\alpha + P_\beta + P_\gamma. \quad (1)$$

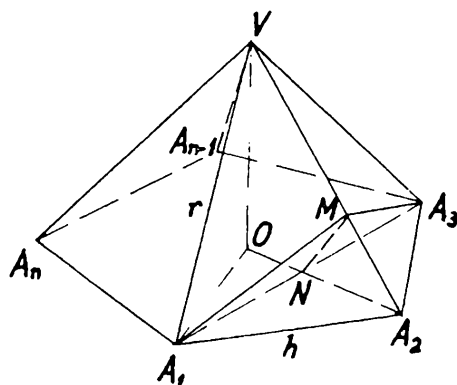
Snadno nahlédneme, že sférické trojúhelníky BCA' , $B'C'A$ se shodují ve dvou stranách $\widehat{CA'} = \widehat{AC'} = 2R - b$, $\widehat{BA'} = \widehat{AB'} = 2R - c$ a v úhlu jimi sevřeném α . Lze dokázat, že takové dva sférické trojúhelníky jsou shodné, stejně jako tomu je v obdobném případě planimetrickém. Shodnost obou trojúhelníků je patrná i z toho, že jsou souměrné podle středu O .

Je proto $P_a = P'_a$, kde P'_a je obsah sférického trojúhelníka $B'C'A$. Můžeme pak rovnost (1) přepsat ve tvaru

$$2P + (P + P'_a + P_b + P_c) = P_\alpha + P_\beta + P_\gamma. \quad (2)$$



Obr. 5



Obr. 6

Ježto je zřejmé $P + P'_a + P_b + P_c = 2\pi r^2$ (polovina povrchu koule) a protože dále (podle věty 1) $P_\alpha = 2r^2 \text{arc}\alpha$, $P_\beta = 2r^2 \text{arc}\beta$, $P_\gamma = 2r^2 \text{arc}\gamma$, dostaneme z rovnosti (2)

$$P = r^2 (\text{arc}\alpha + \text{arc}\beta + \text{arc}\gamma - \pi),$$

tj. vskutku

$$P = r^2 \text{arc} (\alpha + \beta + \gamma - 2R) = r^2 \text{arc}\varepsilon.$$

Věta 3. Obsah pravidelného sférického n -úhelníka na ploše kulové poloměru r je $P = r^2 \text{arc} [n\alpha - (n-2)2R]$, kde α je velikost (ve stupních) úhlu sférického n -úhelníka.

Důkaz. Rozložme pravidelný sférický n -úhelník na n shodných sférických rovnoramenných trojúhelníků o společném hlavním vrcholu ve středu n -úhelníka. Úhel při hlavním vrcholu v každém rovnoramenném sférickém trojúhelníku má velikost $\frac{4R}{n}$ a oba shodné úhly při jeho základně mají velikosti rovné polovině veli-

kosti α úhlu pravidelného sférického n -úhelníka.

Je proto podle věty 2. obsah každého takového rovnoramenného trojúhelníka $P_1 = r^2 \arccos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{4R}{n} - 2R \right) = r^2 \arccos \left(\alpha - \frac{n-2}{n} 2R \right)$. Obsah pravidelného sférického n -úhelníka je $P = r^2 \arccos [n\alpha - (n-2) 2R]$.

Věta 4. Je-li α velikost (ve stupních) úhlu pravidelného sférického n -úhelníka, pak platí nerovnost $\alpha > \frac{(n-2) 180}{n}$

Důkaz. Vrcholy A_1, A_2, \dots, A_n pravidelného sférického n -úhelníka jsou zároveň vrcholy podstavy pravidelného n -bokého jehlanu, jehož vrchol V je ve středu plochy kulové (obr. 6).

Kolmice vedené z bodů A_1, A_3 na přímkou A_2V se protnou v bodu M , ležícím uvnitř polopřímky A_2V (proč?). Trojúhelník A_1MA_3 je rovnoramenný, neboť zřejmě $A_1M = A_3M$; také trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnoramenný, protože $A_1A_2 = A_2A_3$. Oba trojúhelníky mají společnou základnu A_1A_3 ; protože pak

$$A_1M < A_1A_2, \text{ je } \sphericalangle A_1MA_3 > \sphericalangle A_1A_2A_3. \quad (3)$$

Důkaz o tom přenecháváme čtenáři; jistě jej provede několika způsoby. Je patrné, že $\sphericalangle A_1MA_3$ je úhel pravidelného n -hranu $V(A_1A_2 \dots A_n)$, tedy zároveň úhel sférického pravidelného mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_n$; proto má velikost α . Úhel $\sphericalangle A_1A_2A_3$ je vnitřní úhel pravidelného rovinného n -úhelníka; proto má, jak známo, velikost $\frac{(n-2) 180}{n}$. Odtud a z nerovnosti (3) plyne vskutku $\alpha > \frac{(n-2) 180}{n}$.

Tím jsme skončili všechny přípravy a můžeme přikročit k řešení úlohy ohlášené v úvodu článku.

Předpokládejme, že plochu kulovou lze úplně pokrýt shodnými pravidelnými sférickými n -úhelníky; hledáme přirozené číslo $n (\geq 3)$. Každý vrchol kteréhokoli z těchto sférických pravidelných n -úhelníků je společným vrcholem $m (\geq 3)$ shodných n -úhelníků. Protože je plocha kulová mnohoúhelníky úplně pokryta, je součet úhlů těchto m mnohoúhelníků při společném vrcholu roven $4R$, tj. platí $m\alpha = 4R$, kde α je velikost úhlu pravidelného sférického n -úhelníka. Podle věty 4 platí dále $\alpha > \frac{(n-2) 2R}{n}$. Z obou posledních vztahů plyne

$$4R > m \cdot \frac{(n-2) 2R}{n},$$

čili

$$m < \frac{2n}{n-2} \quad (4)$$

Řešení naší geometrické úlohy můžeme tedy hledati jen mezi řešeními aritmetické úlohy: nalézt přirozená čísla $m (\geq 3), n (\geq 3)$, která splňují nerovnost (4).

Protože je $\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, lze nerovnost (4) nahraditi nerovností

$$m < 2 + \frac{4}{n-2} \quad (5)$$

Vzhledem k tomu, že je $3 \leq m$, musí přirozené číslo $n (\geq 3)$ splňovat nerovnost $3 < 2 + \frac{4}{n-2}$; dostaneme $3 \leq n < 6$. Vyhovují tedy nerovnosti (5) pro n jedinečně čísla 3, 4, 5.

Z nerovnosti (5) plyne pak

- a) $3 \leq m < 6$, je-li $n = 3$,
- b) $3 \leq m < 4$, je-li $n = 4$,
- c) $3 \leq m < 3\frac{1}{3}$, je-li $n = 5$.

Řešení nerovnosti (4) jsou tedy v případě a) dvojice $n = 3, m = 3; n = 3, m = 4; n = 3, m = 5$; v případě b) $n = 4, m = 3$; v případě c) dvojice $n = 5, m = 3$.

Podle těchto výsledků přicházejí v úvahu pro úplné pokrytí plochy kulové buď sférické rovnostranné trojúhelníky - tři možnosti případu a) - nebo pravidelné sférické čtyřúhelníky - jedna možnost případu b) - nebo pravidelné sférické pětiúhelníky - jedna možnost případu c).

Dokážeme nyní, že každý z těchto pěti možných případů je vskutku řešením naší geometrické úlohy. Určíme pro každý z nich poměr p povrchu koule a obsahu pravidelného sférického mnohoúhelníka (věta 3). Obdržíme

$$p = 4\pi r^2 : r^2 \arccos [n\alpha - (n-2)2R] = 4\pi : \arccos [n\alpha - (n-2)2R] = \frac{8R}{n\alpha - (n-2)2R}$$

Položíme-li tu $\alpha = \frac{4R}{m}$, dostaneme po úpravě

$$p = \frac{4m}{2m + 2n - mn}$$

Dosadíme-li do posledních dvou vztahů za m a n , dostaneme pro pět možných případů přehledně²⁾

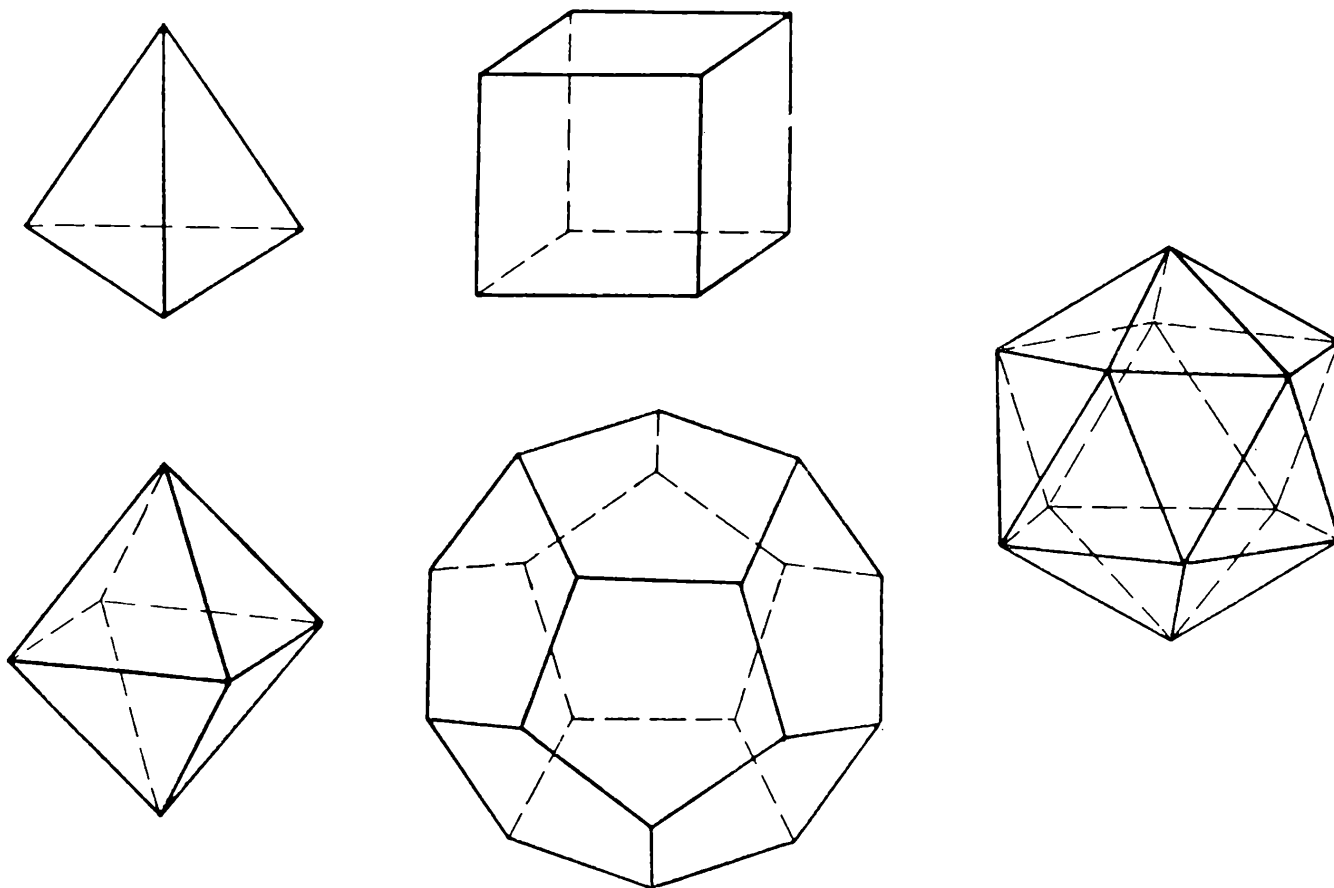
n	m	p	α	a
3	3	4	120°	109° 28' 14''
3	4	8	90°	90°
3	5	20	72°	63° 26' 14''
4	3	6	120°	70° 31' 32''
5	3	12	120°	41° 48' 21''

Protože poměr p je ve všech případech číslo přirozené, lze plochu kulovou vskutku

²⁾ Význam posledního sloupce je vloženo dále.

rozložit zjištěnými pěti způsoby na shodné nepřekrývající se pravidelné sférické mnohoúhelníky. Číslo p udává jejich počet v každém případě.

V ý s l e d e k. Plochu kulovou lze úplně pokrýti: a) čtyřmi sférickými rovnostrannými trojúhelníky ($\alpha = 120^\circ$), b) osmi sférickými rovnostrannými trojúhelníky ($\alpha = 90^\circ$), c) dvaceti sférickými rovnostrannými trojúhelníky ($\alpha = 72^\circ$), d) šesti sférickými pravidelnými čtyřúhelníky ($\alpha = 120^\circ$), e) dvanácti sférickými pravidelnými pětiúhelníky ($\alpha = 120^\circ$).



Obr. 7

Vrcholy shodných pravidelných sférických n -úhelníků, jimiž lze plochu kulovou úplně pokrýt, jsou zároveň vrcholy shodných pravidelných rovinných n -úhelníků, které jsou stěnami pravidelného mnohostěnu vepsaného kulové ploše. Vrcholy a strany těchto pravidelných mnohoúhelníků jsou vrcholy a hrany pravidelného mnohostěnu, střed plochy kulové je střed mnohostěnu.

Řešení naší úlohy nás tedy zároveň přivedlo k zjištění, že existuje právě pět druhů (vypuklých) pravidelných mnohostěňů (obr. 7).

Poslední přehledná tabulka udává pak pro každý druh mnohostěnu počet stěn (p), počet hran (n) v každé stěně (počet stran každého pravidelného mnohoúhelníka) a počet hran (m) vycházejících z každého vrcholu mnohostěnu a vytvářejících pravidelný m -hran. Dále α značí velikost shodných úhlů pravidelného n -hranu, jehož vrcholem je střed mnohostěnu a řídicím mnohoúhelníkem některý pravidelný n -úhelník (stěna mnohostěnu).

Pravidelné mnohostěny jsou tedy *pravidelný čtyřstěn*, *pravidelný šestistěn* (krychle), *pravidelný osmistěn*, *pravidelný dvanáctistěn* a *pravidelný dvacetistěn* (obr. 7).

Vypočteme ještě stranu a pravidelného sférického n -úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$ pro kterýkoli z pěti případů.

Na obr. 6 jsou velikosti úhlů $\sphericalangle A_1VA_2$, $\sphericalangle A_1MA_3$, $\sphericalangle A_1A_2A_3$, $\sphericalangle A_1A_2V$ pořadě α , $\alpha = \frac{2R}{m}$, $\frac{(n-2)R}{n}$, $\frac{1}{2} \cdot (2R - a)$.

Označme N střed společné základny rovnoramenných trojúhelníků A_1A_3M , $A_1A_3A_2$.

Z pravouhlých trojúhelníků A_1NM ($\sphericalangle N = R$), A_1NA_2 ($\sphericalangle N = R$), A_1MA_2 ($\sphericalangle M = R$) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{A_1N}{A_1M}, \quad \sin \frac{(n-2)R}{n} = \cos \frac{2R}{n} = \frac{A_1N}{A_1A_2}, \quad \sin \frac{1}{2}(2R - a) = \\ &= \cos \frac{a}{2} = \frac{A_1M}{A_1A_2} \end{aligned}$$

$$\text{Je tedy } \cos \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{2R}{n}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{tj. } \cos \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{2R}{n}}{\sin \frac{2R}{m}}.$$

Dosadíme-li do poslední rovnosti za n a m a provedeme-li logaritmičsky výpočet, dostaneme pro strany pěti pravidelných sférických mnohoúhelníků čísla, která jsou uvedena v posledním sloupci přehledné tabulky. Známe-li stranu a pravidelného sférického n -úhelníka (tj. velikost $\sphericalangle A_1VA_2$ na obr. 6), pak již snadno vypočteme (z rovnoramenného $\triangle A_1A_2V$) velikost h hrany A_1A_2 příslušného pravidelného mnohostěnu vepsaného do koule daného poloměru r ($= A_1V$).

Čtenář si sám již rozmyslí, jak by potom vypočítal povrch a objem takového mnohostěnu.

Nakonec se vrátíme k planimetrické úloze na prvních řádcích článku a dokážeme, že mimo tři případy tam uvedené, neexistuje již jiný způsob, jak parketovat rovinu shodnými pravidelnými mnohoúhelníky. Postup je přesně týž, jako u rozřešené již úlohy sférické.

Předpokládejme tedy, že rovinu lze úplně pokrýt shodnými pravidelnými n -úhelníky; hledáme přirozené číslo n (≥ 3). Každý vrchol kteréhokoli z těchto pravidelných n -úhelníků je společným vrcholem m (≥ 3) shodných n -úhelníků.

Vnitřní úhel pravidelného n -úhelníka má velikost $= \frac{(n-2)2R}{n}$. Protože je

rovinu mnohoúhelníky úplně pokryta, pak součet vnitřních úhlů těchto m mnohoúhelníků při společném vrcholu je $4R$, tj. platí $m\alpha = 4R$; vzhledem k předposlední

rovnosti je tedy $m \frac{(n-2)2R}{n} = 4R$ čili $m = \frac{2n}{n-2}$. Odtud přijdeme k rovnosti

$$m = 2 + \frac{4}{n-2} \quad (6)$$

obdobně, jako jsme od nerovnosti (4) přešli k nerovnosti (5).

Řešení naší planimetrické úlohy je nutno hledat mezi přirozenými čísly $m \geq 3$ a $n \geq 3$ vyhovujícími rovnosti (6). Snadno zjistíme, že jsou to pro n jedině čísla 3, 4, 6; jim pak po řadě přísluší pro m čísla 6, 4, 3.

Tím je potvrzeno, že mimo uvedené tři způsoby není již dalších možností, jak parketovat rovinu shodnými pravidelnými mnohoúhelníky.

V l a d i m í r M a l ý, Praha:

Sportovní sázky očima matematika

1. Podobně jako u S a z k y, nebudeme se ani u S p o r t k y podrobně zabývat jejím herním plánem a omezíme se na zmínku o nejdůležitějších pravidlech, potřebných k vysvětlení a odvození některých matematických vztahů.

Každý týden je z 49 různých sportů, označených čísly 1 až 49, vylosováno zcela náhodným způsobem (postupem obdobným jako v loterii) 6 sportů. Sázenka, na níž je vyznačeno těchto 6 vylosovaných druhů sportů, vyhrává výhru v I. pořadí (40 000 Kčs). Sázenka se správně vyznačenými pěti, čtyřmi a třemi sporty získává výhru ve II., III. a IV. pořadí. Na sázence je možno vyznačit pouze 6 sportů.

Vzhledem k jednoznačnému přiřazení sportů a čísel budeme v dalším mluvit pouze o číslech. Přitom pod pojmem „s á z k a“ rozumíme tip na jedné sázence; tip stojí 3 Kčs, sázenka 0,20 Kčs. Uvažujeme sázení vždy pro určitý týden.

2. Prvním problémem, jenž nás bude zajímat, je počet možných způsobů, jimiž se dá z 49 různých čísel vybrat 6 čísel; jinak řečeno: kolik různých šestic čísel může vůbec být vylosováno. Těchto šestic je

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816,$$

tedy číslo úctyhodné. Kdyby každý z obyvatel ČSR, včetně dětí a nemluvňat, uzavřel jednu sázku, jinou než všichni ostatní, zůstalo by ještě asi 1 milion sázek neobsazených.

Z uvedeného čísla je zřejmé, že žádný sázející nemůže hrát Sportku tak, aby měl *zaručenu* výhru v I. pořadí. Vždyť taková sázka by jej stála „jen 44 748 211 Kčs 20 hal.

Jestliže se uzavírá týdně asi $3\frac{1}{2}$ milionu sázek, potom při rovnoměrném sázení na všechna čísla by v průměru asi jedenkrát za 4 týdny vyšla jedna výhra v I. pořadí,

K tomu je nutno osvětlit význam rčení „v průměru“. Z pravidel počtu pravděpodobnosti plyne, že nemusí vždy právě každý čtvrtý týden být zaznamenána právě jedna výhra I. pořadí. Interval bez výhry může být delší i kratší a právě tak může některý týden být více výher než jedna. Teprve po uplynutí velkého počtu sázkových týdnů by se ukázalo, že počet výher v I. pořadí činí asi $\frac{1}{4}$ počtu sázkových týdnů (za předpokladu $3\frac{1}{2}$ milionu sázek týdně).

Výše uvedený výsledek však zahrnuje ještě jeden předpoklad; zmíněné úvahy jsou správné, jestliže jsou tipována rovnoměrně všechna čísla. U tohoto bodu je nutno se zastavit. Někteří sázející se domnívají, že je účelné sázet čísla tažená v několika minulých týdnech, jiní naopak sázejí čísla v předcházejících tazích málokdy vylosovaná. Oba názory jsou nesprávné; v ý s l e d k y t a h ů j s o u n a s o b ě z c e l a n e z á v i s l é, tj. každé ze 49 čísel má stejnou pravděpodobnost být vylosováno bez ohledu na to, kolikrát bylo taženo v předchozích sázkových týdnech.

Nemožnost vsazení všech možných kombinací je zřejmá i z následující úvahy; vyplnění jedné sázenky Sportky trvá zhruba 1 minutu (první díl trvá méně než 20 vteřin, v dalších je nutno dávat pozor, aby byla označena stejná čísla, což dobu vyplňování prodlužuje). Vyplnění všech možných sázenek navzájem různých by trvalo 13 983 816 minut, tj. asi 233 064 hodin, což při osmihodinové pracovní době představuje 29 133 pracovních dnů. Při 300 pracovních dnech v roce by toto vyplňování zaměstnalo 97 osob po celý rok.

Jestliže je v určitém týdnu uzavřeno 3,5 milionu sázek, představuje doba potřebná k jejich vyplnění 58 333 hodin; při 46hodinovém pracovním týdnu jde o celotýdenní činnost 1268 zaměstnanců, při čemž nejsou uvažovány ztráty spojené s podáváním a manipulací sázek na poštách.

3. Každá sázenka se správně zaškrtnutými pěti z šesti vylosovaných (zbývající šesté vylosované je jedno ze 43 nezaškrtnutých) vyhrává výhru ve II. pořadí. Zřejmě existuje celkem $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 = 258$ různých výher II. pořadí. Obdobně existuje $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$ různých možných výher ve III. pořadí (čtyři správně zaškrtnutá čísla ze šesti vylosovaných) a $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246\,820$ různých možných výher ve IV. pořadí. Pro úplnost budiž uvedeno, že existuje 1 581 150 různých možných sázek se dvěma správně typovanými čísly, 5 775 588 s jedním správně tipovaným číslem a 6 096 454 různých možných sázek, kde ani jedno ze šesti tipovaných čísel nebylo taženo.

Případá tedy (v případě rovnoměrného sázení na všechna čísla) průměrně

jedna výhra v I. pořadí na	13 983 816 uzavřených sázek,
jedna výhra v II. pořadí na	54 201 uzavřených sázek,
jedna výhra v III. pořadí na	1 032 uzavřených sázek,
jedna výhra v IV. pořadí na	57 uzavřených sázek,

4. Závěrem si provedeme srovnání výhodnosti Sazky a Sportky. Vyjdeme při tom z předpokladu, že výhodnost toho kterého druhu sázení je tím větší, čím
- je větší výhra (maximální) v I. pořadí;
 - je menší počet různých možností sázek;
 - je menší cena jedné sázky.

Je tedy možno vyjádřit výhodnost Sazky

$$V_{Sa} = k \frac{20\,000}{531\,441.1}$$

a výhodnost Sportky

$$V_{Sp} = k \frac{40\,000}{13\,983\,816.3}$$

jejich podíl je

$$\frac{V_{Sa}}{V_{Sp}} = \frac{20\,000 \cdot 13\,983\,816.3}{40\,000 \cdot 531\,441.1}$$

$$V_{Sa} : V_{Sp} = 39,47 \quad 1$$

A. T o n d l, Čes. Budějovice:

O jedné úloze z geometrie kružnic

Pod tímto názvem uvedli jsme loňského roku v tomto časopise (ročník 35, č. 4, str. 152) systematické řešení jedné úlohy pro potřeby řešitelů úkolů Matematické olympiády. Tehdy autor článku Dr. K. H a v l í č e k ukázal, jak obtížnější úlohy lze řešit systematickým rozkladem na úlohy jednodušší. Dnes upozorňujeme čtenáře na jiné řešení téže úlohy, které podal prof. A l e š T o n d l z Českých Budějovic a které došlo do naší redakce 26. listopadu 1957. Ukazuje se stará zkušenost, že touž úlohu lze řešit obvykle různými metodami. Bylo-li první naše řešení založeno na systematickém rozkladu úlohy v jednodušší úlohy, je dnešní řešení založeno na vtípném nápadu. Prof. Tondl převádí tuto úlohu na jinou s ní ekvivalentní, již řeší stejnolehlostí. Řešitelé z Matematické olympiády necht' si tedy uvědomit, že vtípnost je v matematice stejně důležitá jako vědomosti.

Dnešní řešení včetně formulace úlohy uvádíme stručně. Bystrý čtenář si podrobnosti i diskusi počtu řešení doplní snadno sám.

Red.

Ú l o h a. Jsou dány dvě různoběžné přímky u a v . Na přímce u budiž dán bod M a na přímce v bod N tak, aby $M \neq N$. Sestrojte dvě stejně velké kružnice tak, aby jedna z nich se dotýkala přímky u v bodě M a druhá přímky v v bodě N , a aby se obě kružnice dotýkaly navzájem. Kolik je řešení?

Ř e š e n í. Úhel přímek u a v je vždy menší než $2R$ (obr. 1). Množinou středů kružnic, které se dotýkají přímky u v bodě M je kolmice k_1 vztyčená z bodu M k přímce u . Obdobně všechny středy druhých kružnic leží na kolmici k_2 vztyčené

v bodě N k přímce v . Přímky k_1 a k_2 jsou různoběžné, protínají se v bodě K . Tuto úlohu můžeme vyslovit také takto:

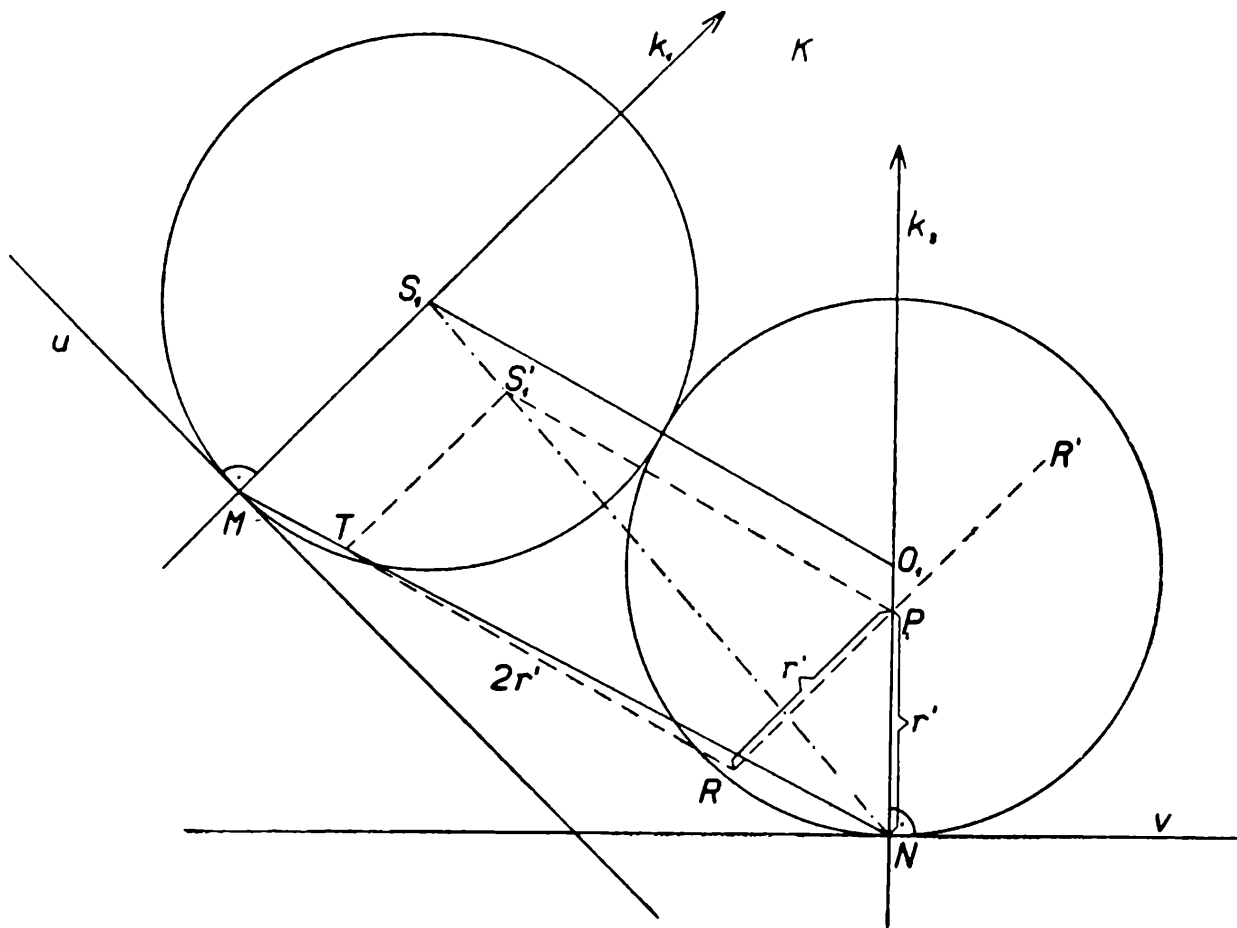
Je dán trojúhelník MNK . Na straně MK (i prodloužené) máme nalézt bod S_1 a na straně NK (i prodloužené) máme nalézt bod O_1 tak, aby $S_1M = O_1N$ a $S_1O_1 = 2S_1M = 2O_1N$.

Jestliže nalezneme takové body S_1 a O_1 , které splňují tuto podmínku, nalezní jsme středy kružnic dané úlohy. Tato úloha se dá však řešit stejnolehlostí.

Na straně NK zvolme libovolný bod P a označme vzdálenost $NP = r'$. Bodem P vedme rovnoběžku se stranou MK a na ni nanese od bodu P vzdálenost $NP = r'$. Obdržíme tedy body R a R' . Platí $PN = PR = PR'$.

Sestrojme nyní průsečíky přímky MN s kružnicemi, které mají středy v bodech R a R' a poloměr rovný dvojnásobku vzdálenosti NP . Poloměr kružnic se rovná $2r'$. V prvním případě (středem je bod R) dostaneme průsečíky T a V , v druhém případě (středem je bod R') dostaneme průsečíky T' a V' .

Sestrojíme nyní rovnoběžníky $PRTS'_1$, $PRTS'$, $PR'T'S'_3$ a $PR'V'S'_4$. Na obrázku je vyrýsován jen rovnoběžník $PRTS'_1$.



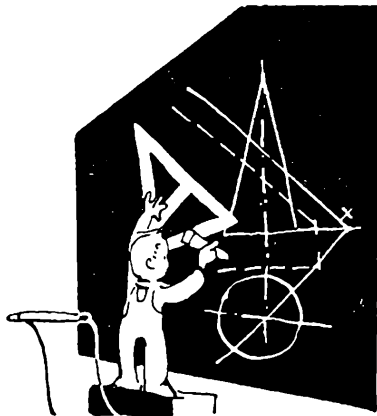
Obr. 1

Rovnoběžník $PRTS'_1$ má strany těchto délek ($PR \parallel TS'_1$; $PR = TS'_1 = r'$; $RT \parallel PS'_1$; $RT = PS'_1 = 2r'$). Stejně dlouhé strany mají i druhé rovnoběžníky.

Budeme-li nyní považovat za střed stejnolehlosti bod N , bude obrazem bodu S'_1 bod S_1 , který dostaneme jako průsečík přímky NS'_1 s přímkou MK . Obdobným způsobem sestrojíme body S_2, S_3, S_4 , které ve stejnolehlosti se středem v bodě N odpovídají bodům S'_2, S'_3, S'_4 . Všechny body S_1, S_2, S_3, S_4 leží na

přímce MK . Body S_i sestrojíme rovnoběžky s přímkami S_iP a průsečíky těchto rovnoběžek s přímkou KN označíme O_i . Zřejmě platí $S_iM = NO_i$; $S_iO_i = 2MS_i = 2NO_i$.

Tím je úloha vyřešena. Vždy existují čtyři řešení.

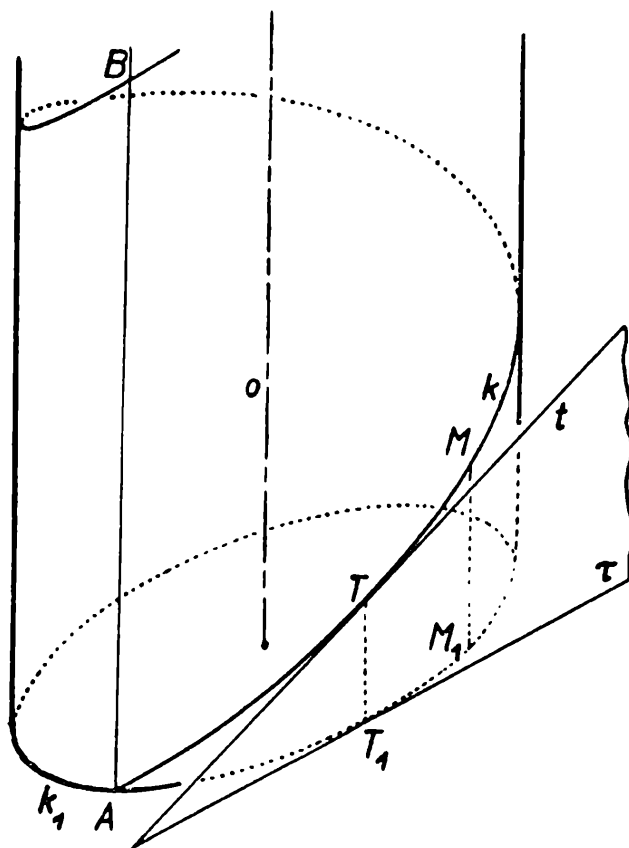


Deskriptivní geometrie

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

Šroubovice

Kružnice, elipsa a vůbec kuželosečky jsou křivky rovinné, to znamená, že všechny body každé takové křivky leží v jedné a téže rovině. Vedle kuželoseček

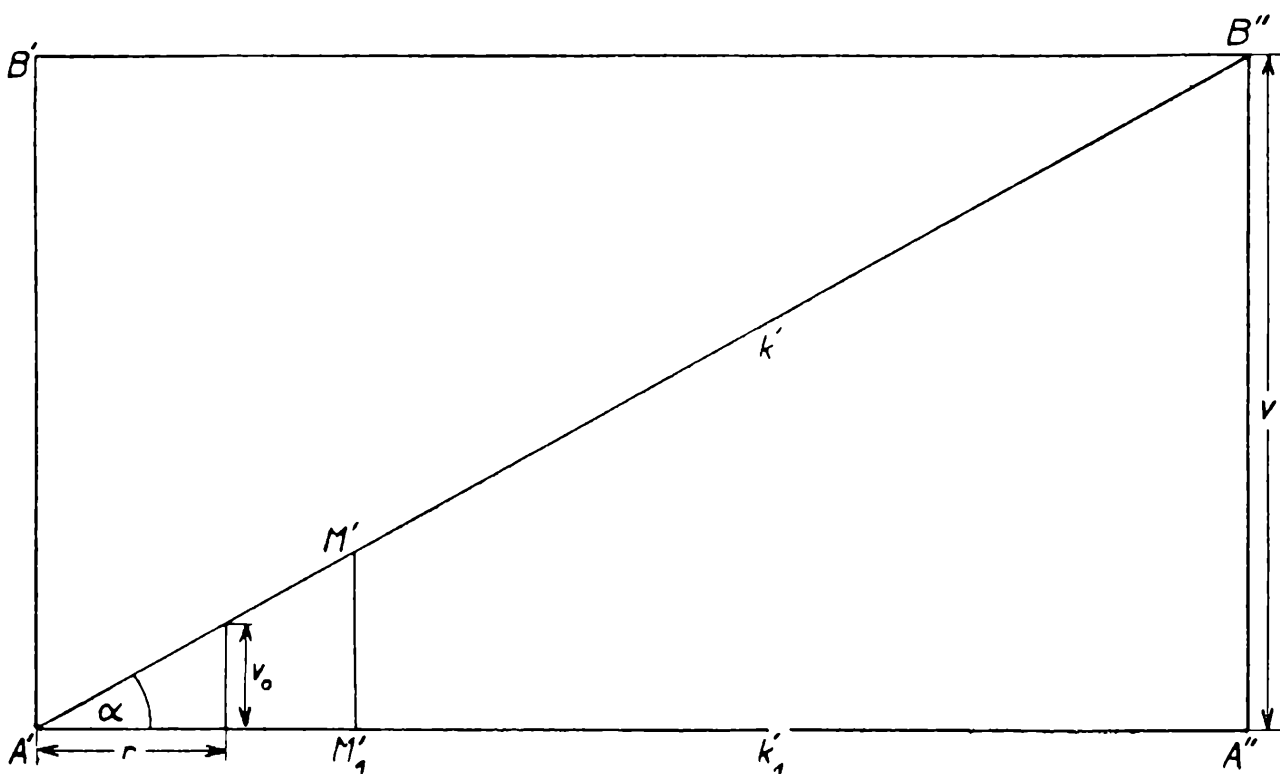


Obr. 1

známe ovšem ještě mnoho jiných rovinných křivek. Ale v praxi s rovinnými křivkami nevystačíme. Proto i v geometrii studujeme *křivky prostorové*, to je křivky, jejichž body neleží všechny v jedné rovině. Nejjednodušší a zároveň prakticky

nejdůležitější prostorovou křivkou je *šroubovice*. Její výtvarný zákon lze geometricky velmi jednoduše popsat.

Budiž dán rotační válec o ose o a poloměru r (obr. 1). Rovina kolmá k ose o protíná válec v kružnici k_1 o stejném poloměru r . Při rozvinutí pláště válce do roviny, rozvine se tato kružnice k_1 do úsečky k'_1 (obr. 2), jejíž délka je pochopitelně rovna délce kružnice k_1 , tedy číslu $2\pi r$. Krajiní body úsečky k'_1 jsou na obr. 2 označeny A' , A'' a představují v rozvinutí vlastně též bod A kružnice k_1 , neboť při zpětném navinutí úsečky k'_1 na náš válec splynou oba v jednom bodě. Povrchové přímky válce přejdou v rozvinutí do přímek kolmých k úsečce k'_1 . Sestrojme nyní v obr. 2 kteroukoli jinou přímku k' , která není rovnoběžná s k'_1 , ani k ní není kolmá. Pro jednoduchost ji vedme bodem A' a odchylku přímek k' , k'_1 označme α . Navineme-li nyní plášť zpět na daný válec, navine se přímka k' do křivky k , kterou nazýváme *šroubovicí*.¹⁾



Obr. 2

Pro jednoduchost vyjadřování zavádějí se tyto názvy: osa válce, na němž šroubovice leží, nazývá se též *osa této šroubovice* (přesto, že to není její osa souměrnosti), poloměr toho válce nazývá se též *poloměr této šroubovice*. Z uvedeného vytvoření šroubovice jsou patrné tyto její dvě vlastnosti:

V ě t a 1. *Kolmý průmět šroubovice do roviny kolmé k její ose je kružnice.*

V ě t a 2. *Šroubovice je prostorová křivka na válci, protínající všechny jeho povrchové přímky pod týmž úhlem.*

¹⁾ Přesný název této křivky je *kruhová šroubovice*, zatím co název šroubovice se ponechává pro podobně vzniklou křivku na libovolném (tedy nikoli nutně rotačním) válci. Protože však v tomto článku nebude řeč o jiné než o kruhové šroubovici, můžeme zde pro ni bez obav z nedorozumění užít stručného názvu šroubovice.

Tímto tvrzením rozumíme fakt zřejmý z rozvinutí v obr. 2, že tečna šroubovice k sestavená v nějakém jejím bodě, svírá s povrchovou přímkou válce, procházející tímto bodem, stálý úhel, jehož velikost se nemění, mění-li se příslušný bod dotyku na šroubovici. Jistě nevádí, že jsme neřekli předem, co je tečna šroubovice, protože je zřejmé, že tečna křivky k přejde při rozvinutí v tečnu jejího rozvinutého obrazu k' . Je vidět, že tečna šroubovice v jejím bodě T (obr. 1) je taková přímka t ležící v příslušné tečné rovině τ daného válce, do které se tato šroubovice rozvine, rozvineme-li plášť válce do této jeho tečné roviny. Rozumí se, že τ zde značí tečnou rovinu, dotýkající se válce v bodě T a tedy i ve všech bodech jeho povrchové přímky, jež bodem T prochází.

Z obr. 2 vyplývá přímo ještě další vlastnost šroubovice. Budiž M libovolný její bod a budiž M_1 jeho kolmý průmět na rovinu kružnice k_1 ; bod M_1 padne ovšem právě na kružnici k_1 . V rozvinutí přejde bod M v bod M' a bod M_1 v bod M'_1 . Z obr. 2 snadno vychází vztah

$$\frac{M'M_1}{A'M'_1} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Délku úsečky MM_1 označme písmenem z ; je pak $z = MM_1 = M'M'_1$. Z rozvinutí na obr. 2 je zřejmé, že úsečka $A'M'_1$ je stejně dlouhá jako oblouk s kružnice k_1 měřený od bodu A k bodu M_1 . Horní rovnice dává tedy přímou úměrnost veličin z , s , totiž

$$z = s \operatorname{tg} \alpha . \quad (1)$$

Protože pro všechny body šroubovice je $\operatorname{tg} \alpha$ konstantní, můžeme vytvořit šroubovici takovým pohybem bodu M , při kterém posunutí z tohoto bodu ve směru osy o je přímo úměrné dráze s , kterou tento bod zároveň oběhne při otáčení okolo téže osy o . Lze tedy rovnoměrný²⁾ pohyb bodu po šroubovici složit ze dvou pohybů jednodušších a to z rovnoměrného otáčení okolo osy o a z rovnoměrného přímočarého posunutí ve směru téže osy o . Jinými slovy řečeno:

V ě t a 3. Otáčí-li se bod M v prostoru okolo přímky o a posouvá-li se zároveň přímočaře ve směru této přímky o tak, že v každém okamžiku je délka tohoto posunutí bodu M přímo úměrná velikosti otočení bodu M okolo přímky o , pak bod M probíhá šroubovici o ose o .

Pohyb každého útvaru skládající se z rovnoměrného posunutí ve směru dané přímky a z rovnoměrného otáčení okolo téže přímky nazývá se proto *šroubový pohyb* toho útvaru.

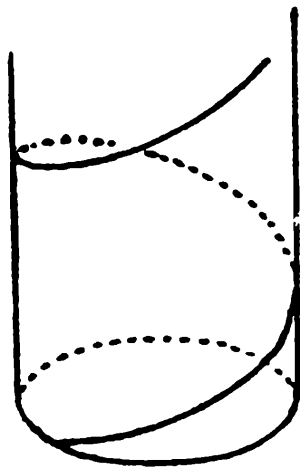
V celém dalším textu zachováme označení z obr. 1 a 2, na nichž nechť čtenář sleduje výklad i nadále.

Postaví-li se pozorovatel dovnitř našeho válce tak, že zaujme polohu osy o , a sleduje-li na šroubovici pohyb bodu M právě popsany, jsou myslitelné dva případy. Klesá-li bod M směrem od hlavy pozorovatele k jeho patě, pak buď se otáčí bod M od jeho levé ruky k pravé, nebo obráceně. V prvním případě nazývá se příslušná šroubovice *pravotočivá*, v druhém případě, kdy klesající bod M se otáčí od pravé ruky našeho pozorovatele k levé, nazývá se jeho šroubovice *levotočivá*.

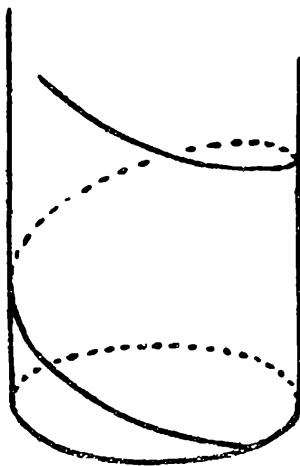
²⁾ *Rovnoměrným pohybem* rozumíme takový pohyb, jehož rychlost je konstantní.

Postaví-li se pozorovatel vně válce, na němž šroubovice leží, platí zřejmě následující věta:

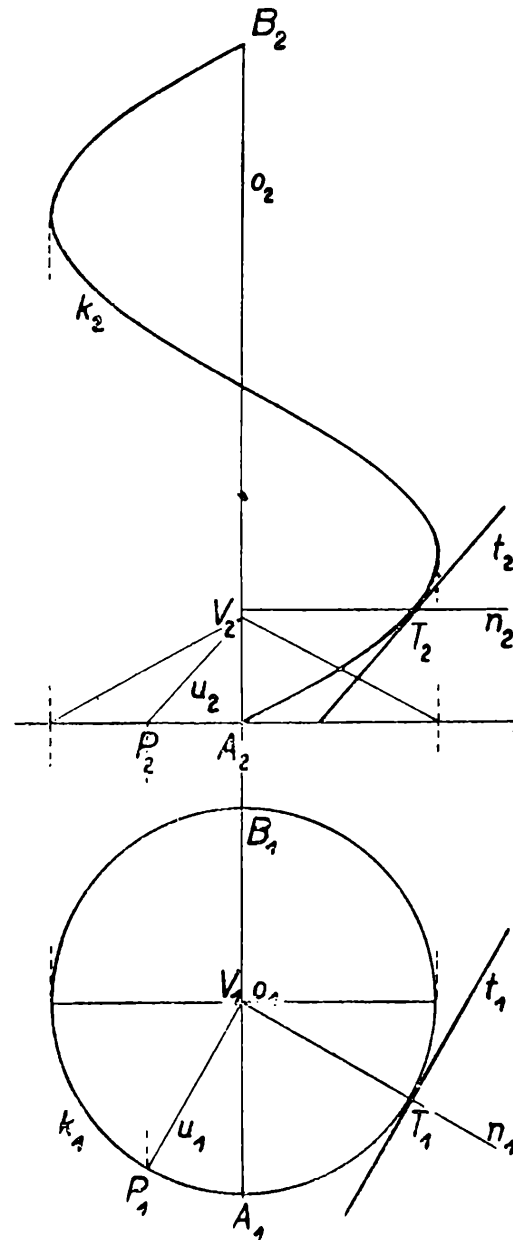
V ě t a 4. *Pozorovateli, stojícímu vně válce, jehož povrchové přímky směřují od hlavy k patě pozorovatele, jeví se pravotočivá šroubovice na tomto válci tak, že stoupá odleva doprava, levotočivá šroubovice pak stoupá odprava doleva.*



Obr. 3a



Obr. 3b



Obr. 4

Na obr. 3a je znázorněna pravotočivá šroubovice a na obr. 3b levotočivá šroubovice. Čtenář si snadno ověří, že pravotočivou šroubovici nelze nikdy pouhým pohybem v protoru přeměnit ve šroubovici levotočivou a obráceně. Je to podobné jako u rukavic. Ať otáčíme pravou rukavicí jakkoli, aniž ji přitom obrátíme naruby, nevznikne z ní nikdy rukavice levá. Zvláště to vyniká u kovových rukavic, jaké byly součástí rytířského brnění, které nosili středověcí bojovníci; tam obrácení takové rukavice naruby nebylo možné a proto se nedala pravá rukavice obléknout na levou ruku,

V technickém použití je ovšem třeba pozorně rozlišovat oba základní typy šroubovic. Nejjednodušší aplikací jsou obyčejné šrouby; každý z nás je zná z denní praxe. Značná jejich většina jsou šrouby pravotočivé, jak čtenář sám snadno zjistí. Je zajímavé, že oba typy šroubovic se vyskytují i v přírodě. Popínavé rostliny vinou své stonky okolo jiných rostlin nebo drátů a hůlek zhruba ve tvaru šroubovice. Některé z nich, například fazole, vytvářejí vždycky šroubovice pravotočivé, jiné z nich, například chmel, vytvářejí šroubovice levotočivé.

Vraťme se ke geometrii. Příslušné výklady budeme sledovat jen na příkladě šroubovice pravotočivé, pro šroubovici levotočivou si je čtenář snadno přizpůsobí sám. Nejdřív některé běžné pojmy.

Úhel α z rovnice (1) se nazývá *sklon* nebo *úhel stoupání* šroubovice; jeho funkce $\operatorname{tg} \alpha$ se nazývá *spád* nebo *stoupání* šroubovice. Na obr. 2 jsme viděli, že úhel stoupání α je odchylka rozvinutého obrazu k' dané šroubovice k od přímky k_1 , do níž se rozvinul kruhový řez daného válce. Protože při tomto rozvinutí všechny tečny šroubovice se rozvinou také do přímky k' , je odchylka každé této tečny a roviny kružnice k_1 stálá, totiž α . Platí tedy:

V ě t a 5. *Odchylka tečny šroubovice a roviny kolmé k ose této šroubovice rovná se úhlu stoupání šroubovice a je pro všechny tečny téže šroubovice stálá.*

Jednoduše se vyjadřuje slovy, že *šroubovice je křivka konstantního spádu* (stoupání). Samozřejmě z toho také plyne, že odchylka osy šroubovice a libovolné její tečny je stálá, nezávislá na tom, kterou tečnu dané šroubovice zvolíme.

Důležitý je pojem výšky závitu šroubovice. *Závitem šroubovice k* rozumíme její část, kterou proběhne její bod, když jeho kolmý průmět na rovinu kružnice k_1 proběhne právě celou kružnicí k_1 (obr. 1). *Výška závitu* šroubovice k je pak definována jako délka, o kterou se bod šroubovice posune ve směru její osy, když jeho kolmý průmět na kružnici k_1 se otočí právě o 360° , tj. když tento průmět proběhne právě celou kružnicí k_1 . Výšku závitu označíme písmenem v . Můžeme ji určit na povrchových přímkách válce, na němž šroubovice leží. Protíná-li šroubovice takovou povrchovou přímku v bodech A, B , při čemž na této povrchové přímce už mezi body A, B žádné další body naší šroubovice nejsou (obr. 1), pak zřejmě délka úsečky AB je výška závitu v . Z rovnice (1) vychází pro výšku závitu v rovnice

$$v = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha . \quad (2)$$

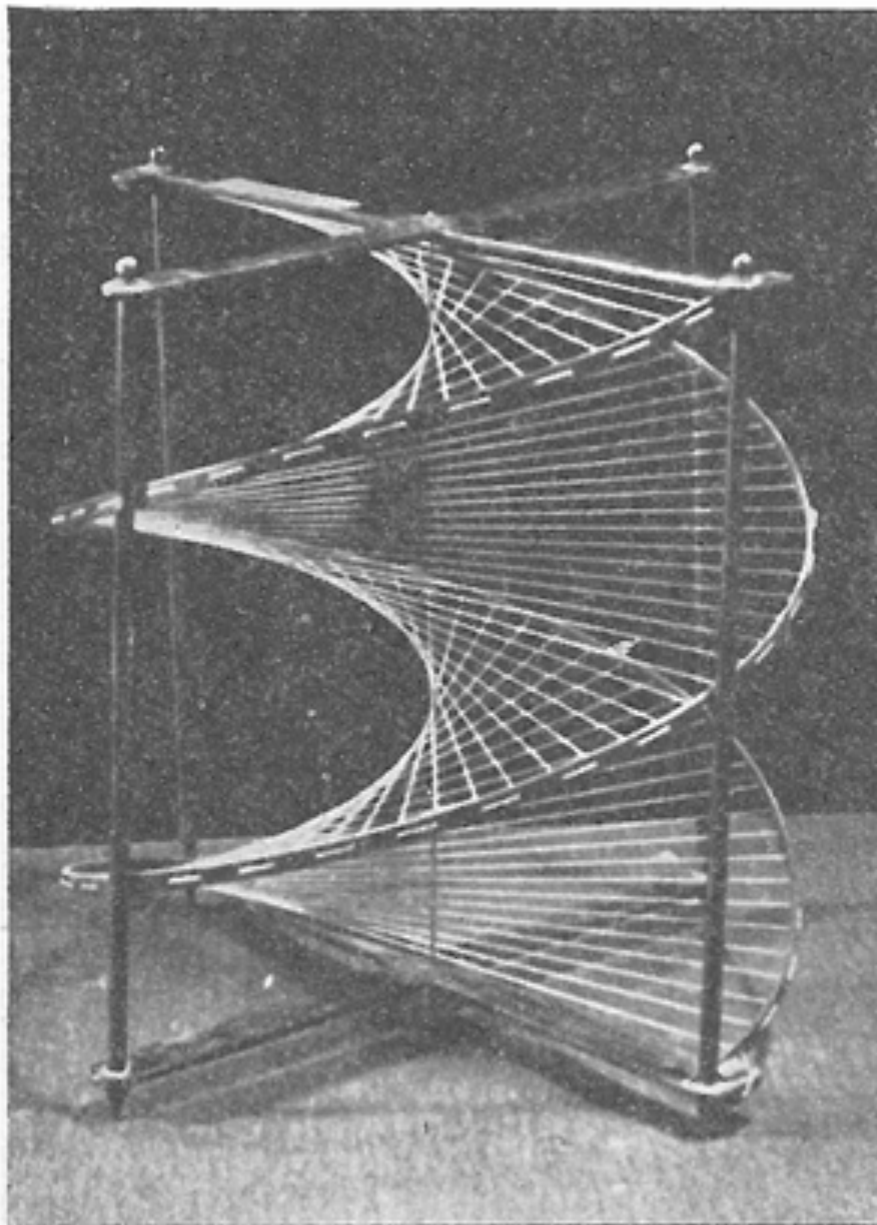
Vedle tohoto pojmu zavádí se ještě pojem *redukované výšky závitu* šroubovice. Tím rozumíme délku, o kterou se bod šroubovice posune ve směru její osy, když jeho kolmý průmět na kružnici k_1 proběhne oblouk, jehož délka je rovna poloměru r této kružnice. Označíme-li redukovanou výšku závitu šroubovice písmenem v_0 , je při zachování našeho dosavadního označení

$$v_0 = r \operatorname{tg} \alpha . \quad (3)$$

Čtenář to snadno nahlédne na obr. 2, kde jsou délky v a v_0 vyznačeny v rozvinutí pláště základního válce. Z rovnic (2), (3) vychází $v : v_0 = 2\pi$, tedy:

V ě t a 6. *Poměr výšky závitu a redukované výšky závitu je u každé šroubovice týž, totiž 2π .*

Ukažme si nyní konstrukci tečny šroubovice v některém jejím bodě. Provedme to v kolmém promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (obr. 4). Půdorysna budiž rovina kružnice k_1 , tedy rovina kolmá k ose šroubovice; náryсна je ovšem s touto osou rovnoběžná. Půdorysem šroubovice k je pak kružnice k_1 , v náryse vyneseme výšky jednotlivých bodů šroubovice snadno pomocí obr. 2. Stačí také rozdělit



Obr. 5

kružnici k_1 například na 12 stejných dílů a uvědomit si, že každý z těchto dělicích bodů je půdorysem bodu šroubovice, jehož výška nad půdorysnou je postupně rovna $0, c, 2c, 3c, \dots$, kde $c = \frac{1}{12} v$ (v značí stále výšku závitů). Tím získáme pohodlně dostatečný počet bodů nárysu k_2 šroubovice k , jímž je křivka zvaná *zobecněná sinusoida*.

Pro konstrukci tečen šroubovice je užitečná její tzv. *řídící kuželová plocha*. Tato plocha je definována jako souhrn přímek, procházejících libovolným pevně

zvoleným bodem v prostoru, které jsou rovnoběžné s tečnami dané prostorové křivky. U šroubovice je představa této řídicí kuželové plochy velmi jednoduchá:

V ě t a 7. Řídicí kuželová plocha šroubovice je plocha rotační; její osa rotace je rovnoběžná s osou dané šroubovice.

To plyne ihned z věty 5 a z toho, že ze všech kuželových ploch jedině rotační kuželová plocha má tu vlastnost, že všechny její povrchové přímky mají stejnou odchylku od téže roviny.



Obr. 6

Na obr. 4 zvolme za vrchol V této řídicí kuželové plochy bod, ležící na ose šroubovice tak, aby jeho vzdálenost od půdorysny byla rovna redukované výšce závitů v_0 zkoumané šroubovice. Půdorys V_1 tohoto vrcholu V splývá tedy se středem kružnice k_1 . Z rovnice (3) a z věty 5 plyne, že tato řídicí kuželová plocha protíná půdorysnu právě v kružnici k_1 . Je-li T libovolný bod naší šroubovice, sestrojíme v něm její tečnu t na základě toho, že tato tečna je rovnoběžná s jistou povrchovou přímkou u řídicí kuželové plochy. Půdorys t_1 tečny t je ovšem tečnou kružnice k_1 v bodě T_1 , který je půdorysem bodu T . Protože rovnoběžnost se kolmým promítáním zachovává, je půdorys u_1 přímky u rovnoběžný s přímkou t_1 . Půdorysný stopník P přímky u leží ovšem na kružnici k_1 . Z prostorové představy snadno vychází, že v případě pravotočivé šroubovice vznikne jeho půdorys P_1 otočením bodu T_1 po kružnici o pravý úhel a to ve směru pohybu hodinových ručiček,

díváme-li se na půdorysnu z vrcholu V . Narys u_2 přímky u sestrojíme známým způsobem na základě toho, že jde o povrchovou přímku kuželové plochy. Narys t_2 hledané tečny t je pak rovnoběžka s přímkou u_2 vedená narysem T_2 bodu T . Tím je tečna sestrojena. - Sestrojte si tímto způsobem sami takové tečny šroubovice, které jsou rovnoběžné s narysnou. V naryse má pak každá taková tečna tu vlastnost, že narys šroubovice přechází v okolí příslušného bodu dotyku z jedné strany tečny na druhou.

Vedeme-li bodem T dané šroubovice přímkou n kolmou k její ose o , pak tato přímka n je zároveň kolmá k tečně t sestrojené v bodě T . Přímka n nazývá se *hlavní normála* šroubovice. V praxi se často vyskytuje. Sestrojíme-li všechny hlavní normály šroubovice, dostaneme přímkovou plochu, které se říká *šroubový konoid*. Tato plocha patří mezi tzv. plochy zborcené.³⁾ Geometrický model této plochy vidíme na obr. 5 a praktické uplatnění na obr. 6, který ukazuje schodiště turistické rozhledny na Hlavatici u Turnova. Tato plocha se však v praxi vyskytuje i při nejrůznějších jiných příležitostech. Lze jí užít například při konstrukci propelerů (lopatek ventilátorů nebo lodních šroubů), nebo na druhé straně při stavbě silnic. Tohoto posledního případu si ještě všimněme.

Stoupá-li silnice v zatáčce do vrchu, bývají její okraje zhruba tvaru šroubovice a hlavní normály takové šroubovice vytvářejí pak vozovku. Každý automobilista, který projíždí takovou zatáčkou do kopce, ví ze zkušenosti, že je nevýhodné jezdit těsně při kraji vnitřního oblouku silnice, protože znamená větší namáhání motoru, než když jede při vnějším, i když delším okraji. To souhlasí s našimi výpočty. Zmíněný šroubový konoid můžeme totiž vytvořit také šroubovým pohybem známým nám už z věty 3. Podrobíme-li přímkou n (tj. hlavní normálu šroubovice) tomuto šroubovému pohybu, vytvoří každý její bod šroubovici. Všechny tak vzniklé šroubovice budou mít společnou osu, ale budou mít nestejně poloměry. Důležité však je, že všechny budou mít stejnou výšku závitu v a tedy podle věty 6 i stejnou redukovanou výšku závitu v_0 . V daném okamžiku budou totiž všechny body naší pohybující se přímky n stejně vysoko nad vodorovnou rovinou, v níž původně před započítím pohybu přímka n ležela. Při konstantním v_0 tedy ze vzorce (3) plyne, že se vzrůstajícím r klesá $\operatorname{tg} \alpha$ a obráceně. Při šroubovém pohybu mají tedy šroubovice s větším poloměrem menší spád a obráceně. Pro našeho automobilistu to znamená, že největší stoupání a tedy i největší namáhání motoru bude při vnitřním oblouku silnice stoupající do vrchu. U vozů se slabším motorem se to někdy projevuje i tím, že vůz se při takovém stoupání dokonce zastaví a nemůže jet dále. Řidič se musí vracet a volit k cestě dráhu většího poloměru, kterou pak projíždí pohodlně.

S t a n i s l a v H o r á k, Praha:

Meusnierova věta

I. Úvodem si odvodíme vzorec pro poloměr oskulační kružnice v hlavním vrcholu elipsy. Této kružnici se též říká *kružnice křivosti* (v daném

³⁾ Zborcené plochy jsem popsal nedávno v tomto časopise v článku „Užití přímkových ploch ve stavitelství“, *Rozhledy*, roč. 36 (1958), č. 1, str. 9–17.

bodě), jejímu středu a poloměru se říká střed křivosti a poloměr křivosti. V učebnici deskř. geometrie pro 9. postupný ročník na str. 28 v obr. 19 máte znázorněno a popsáno sestavení středu křivosti ve vrcholech elipsy. Z tohoto obrázku je ihned patrné, že

$$\triangle ASC \sim \triangle NAK$$

a odtud

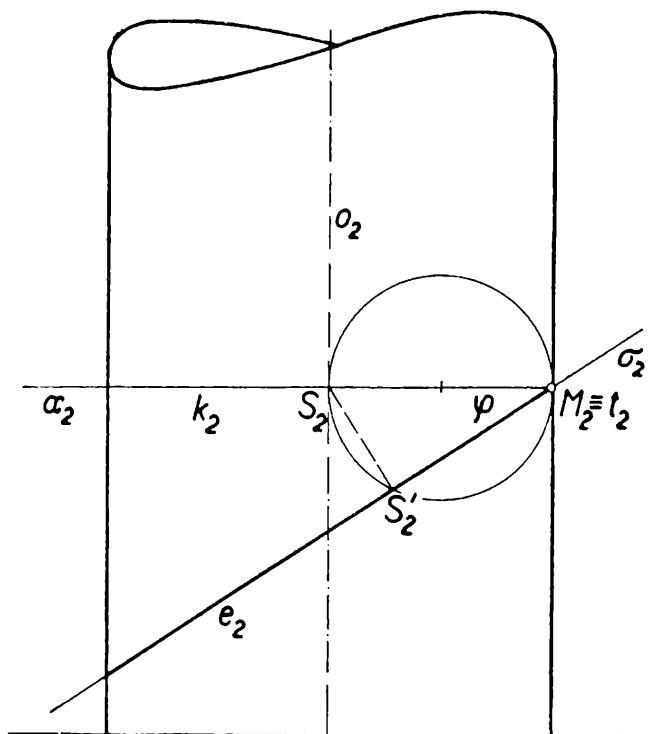
$$AS : SC = NA : AK$$

Při obvyklém označení je $AS = a$, $SC = NA = b$, $AK = \rho$. Dosadíme do naší úměry:

$$a : b = b : \rho,$$

z čehož vyplývá žádaný vzorec

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$



Obr. 1

V článku budeme mluvit též o n o r m á l e p l o c h y v daném bodě M . To je přímka jdoucí bodem M a kolmá na tečnou rovinu plochy sestavenou v bodě M .

II. Mějme danou rotační válcovou plochu (obr. 1), jejíž poloměr je $r \neq 0$ a na ní mějme libovolný bod M . Bodem M proložme rovinu α kolmou k ose o válcové plochy; ta protne válcovou plochu v kružnici k , jejíž střed označíme S . Poloměr této kružnice je r . Tečna t kružnice k v bodě M je zároveň tečnou válcové plochy. Tečnou t proložme rovinu σ , která s rovinou α svírá ostrý úhel φ . Rovina σ protne válcovou plochu v elipse e . Její hlavní poloosu, vedlejší poloosu a excentricitu označme po řadě a , b , c . V obr. je osa o válcové plochy zvolena kolmá k první průmětně, bod M je na druhém obrysu, druhý průmět roviny α je pak přímka α_2

rovnoběžná se základnicí, druhý průmět tečny t je bod $t_2 \equiv M_2$ a druhý průmět roviny σ je přímka σ_2 jdoucí M_2 . Úhel φ se promítá ve skutečné velikosti jako úhel přímek α_2, σ_2 .

O prvcích a, b, c elipsy e platí

$$a = \frac{r}{\cos \varphi}, \quad b = r, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = r \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Zvolený bod M je hlavní vrchol elipsy e a poloměr ρ jeho oskulační kružnice je

$$\rho = \frac{b^2}{a} = r \cdot \cos \varphi \quad (M)$$

Odtud vidíme, že střed S' křivosti elipsy e v bodě M je pata kolmice, spuštěné z bodu S na rovinu σ .

Poloměr křivosti $\rho = S'M$ je tudíž průmět poloměru $r = SM$ kružnice k .

Všechny roviny, které lze tečnou t proložit, tvoří svazek rovin. (Svazek rovin je souhrn všech rovin jdoucích toutéž přímkou, tzv. osou svazku.) Rovina α má mezi nimi výjimečné postavení, neboť obsahuje normálu n válcové plochy. Kružnice k se proto nazývá normální řez (příslušný tečně t). Poloměr kružnice je zároveň její poloměr křivosti ve všech jejích bodech. V rovnici (M) jsme tedy dokázali tuto větu pro rotační válcovou plochu:

Věta 1. Poloměr ρ křivosti libovolného rovinného řezu, jdoucího tečnou t , v bodě M , je dán vzorcem (M), kde r je poloměr křivosti příslušného rovinného řezu a φ je ostrý úhel sevřený rovinou řezu a rovinou normálního řezu.

P o z n á m k a. Tečnou rovinu válcové plochy v bodě M nebudeme považovat za rovinu řezu.

Z věty 1. vyplývá:

Věta 2. Geometrické místo středů S' křivosti v bodě M všech rovinných řezů dané válcové plochy, které procházejí tečnou t (s výjimkou tečné roviny jdoucí tečnou t), je kružnice, z níž je vyňat bod M , která má poloměr rovný $\frac{1}{2}r$ a střed má ve středu úsečky SM .

P o z n á m k a. V bodě M jsme si mohli zvolit jinou tečnu válcové plochy a tou proložit normální rovinu a pak příslušné roviny řezu. I potom zůstávají věty 1. a 2. správné. Ale nejen to; věty 1. a 2. platí pro jakoukoliv plochu a kterýkoliv bod na ní. Věta 1. se nazývá *Meusnierova věta* (čti menyjérova).

Cvičení.

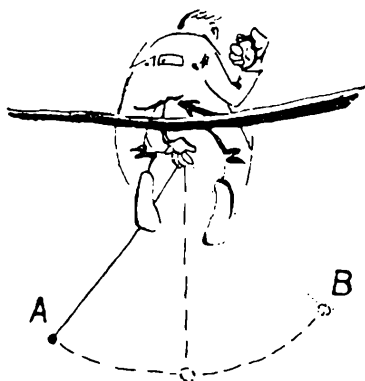
1. Je dána rotační válcová plocha ($r = 35$), na ní bod M , jímž prochází tečna t plochy, kolmá na osu o válcové plochy. Touto tečnou proložte rovinu σ tak, aby válcovou plochu protála v elipse, jejíž poloměr křivosti v bodě M by měl délku 20.

2. Sestrojte rotační válcovou plochu, je-li dán směr o' její osy, její bod M a střed S' křivosti v bodě M toho rovinného řezu, jehož tečna v M je kolmá na osu o válcové plochy.

3. Elipsou ($a = 40, b = 25$) prochází válcová plocha, jejíž površky jsou kolmé na rovinu dané elipsy. V některém vrcholu (hlavním nebo vedlejším) elipsy sestroj-

te tečnu t . Dokažte Meusnierovu větu pro tento případ. (Každá rovina, s výjimkou tečné, procházející tečnou t , protíná tuto válcovou plochu v elipse nebo v kružnici.)

4. Jak zní Meusnierova věta pro kulovou plochu?



Fysika

Ing. Dr. Václav Šindelář, Praha:

Okamžitá rychlost a místní tlak

Zmíním se krátce o analogii (obdobě), se kterou se setkáváme při vyjadřování okamžité rychlosti a místního tlaku v běžných jednotkách. S obdobnou analogií bychom se mohli ovšem setkat i u řady jiných fyzikálních veličin.

Sledujme nerovnoměrný translační pohyb (viz Rozhledy č. 1, str. 25, roč. 1957) nějakého tělesa. Uražená *dráha* je nějakou funkcí času $s = f(\tau)$. Ať vyjádříme dráhu v jakýchkoliv jednotkách (km, m, mm, Å apod), vždy se můžeme v libovolném čase měřením přesvědčit (sledujeme-li tento pohyb) o její velikosti, zaznamenáme-li si předtím *okamžitou polohu* tělesa. O spolehlivosti naměřené hodnoty budou ovšem rozhodovat správnost a přesnost použitého měřicího přístroje nebo zařízení. Jinak je tomu ovšem s *rychlostí* nebo se *zrychlením*. U nerovnoměrného translačního pohybu bude nás zajímat buď *rychlost průměrná* v_p v určitém časovém intervalu $\tau_2 - \tau_1$, určená vztahem

$$(v_p)_{\tau_2 - \tau_1} = \frac{s_2 - s_1}{\tau_2 - \tau_1} = \left(\frac{\Delta s}{\Delta \tau} \right)_{\tau_2 - \tau_1} \quad (1)$$

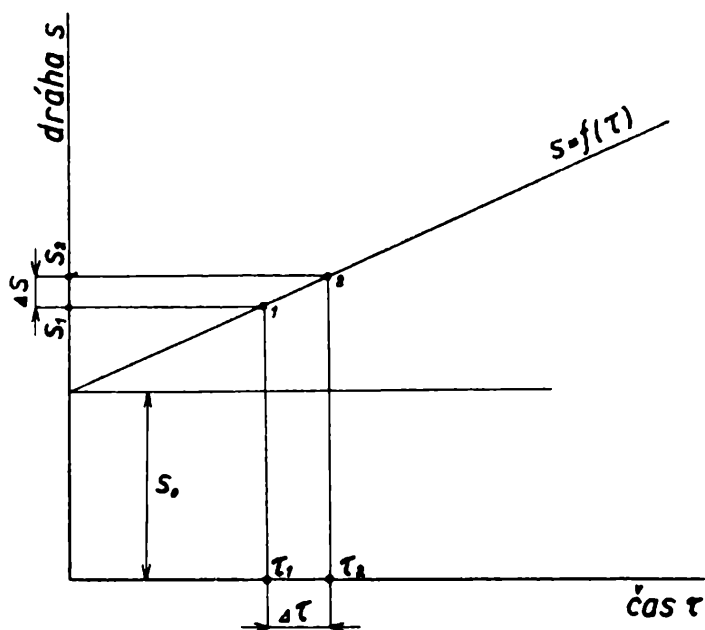
nebo *rychlost okamžitá* v , určená pro okamžik τ_i vztahem

$$(v)_{\tau_i} = \left(\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \tau} \right)_{\tau_i} \quad (2)$$

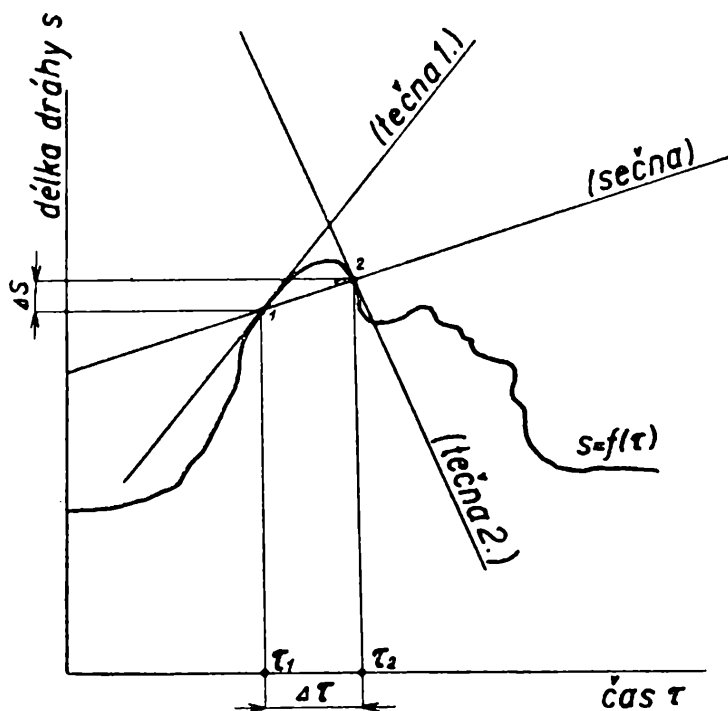
Je zřejmé, že se průměrná rychlost bude rychlosti okamžité blížit více, bude-li časový interval $\Delta \tau$ malý. Pro případ $\lim (\tau_2 - \tau_1) \rightarrow 0$ přejde rychlost průměrná v okamžitou. Zachyťme si graficky závislost (velikosti) dráhy na čase $s = f(\tau)$ (viz obr. 2). Určujeme-li rychlost podle vztahu (1) v časovém intervalu $\Delta \tau$ konečné velikosti, určujeme, jak již bylo řečeno, rychlost průměrnou, jež je dána směrnici sečny procházející body 1 a 2. Okamžité rychlosti jsou dány podle (2) směrnícemi tečen ke křivce $s = f(\tau)$ v bodech 1 a 2. Všimněme si, jak se okamžité rychlosti v okamžicích τ_1 a τ_2 liší od rychlosti průměrné v časovém intervalu $\tau_2 - \tau_1$. U pohybu rovnoměrného, pro nějž je závislost $s - \tau$ zachycena na obr. 1 je ovšem rychlost průměrná rovna rychlosti okamžité v libovolném τ_i .

Okamžitou rychlost, stejně jako rychlost průměrnou vyjadřujeme v jakékoli soustavě v týchž jednotkách, např. v soustavě MKS v $m \cdot s^{-1}$. Zatímco průměrnou rychlost, je-li časový interval roven 1 s, můžeme přímo určit změřením dráhy (m),

nemůžeme tak postupovat s rychlostí okamžitou, protože dráha naměřená za 1 s nikdy nebude vyjadřovat okamžitou rychlost (ovšem vyjma pohybu rovnoměrného), ale vždy jen její střední hodnotu v tomto časovém intervalu. Abychom změřili skutečně okamžitou rychlost, museli bychom přírůstek dráhy v jakémsi okamžiku



Obr. 1. Rovnoměrný pohyb v diagramu dráha-čas. Tangentou úhlu α [směrnici přímky $s = f(\tau)$] je určena rychlost rovnoměrného pohybu (rychlost průměrná je rovna rychlosti okamžité).

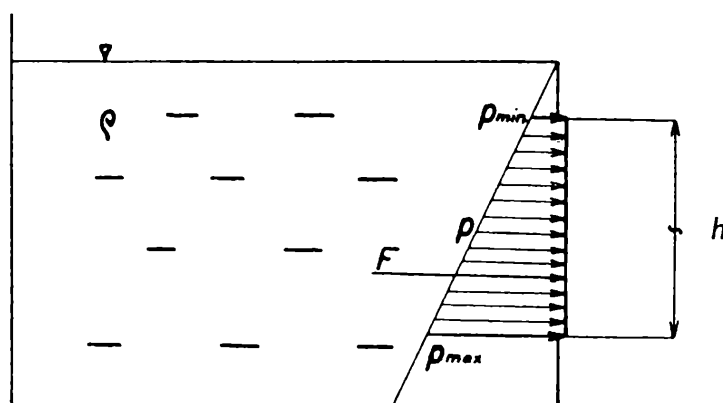


Obr. 2. Obecný nerovnoměrný pohyb v diagramu dráha-čas. Směrnici sečny je určena průměrná rychlost v intervalu $\tau_2 - \tau_1$, směrnici tečny 1. okamžitá rychlost v čase τ_1 , směrnici tečny 2. okamžitá rychlost v čase τ_2 .

τ_i určovat v časovém intervalu nekonečně malém, jak plyne z rovnice (2) nebo bychom museli použít nějaké metody nepřímé. Známe-li ovšem jakou funkcí času je okamžitá rychlost [$v = F(\tau)$], můžeme ji pro libovolný okamžik vypočítat. Při přímém měření určíme však vždy jen průměrnou rychlost v příslušném časovém intervalu, i když malém. Někdy ovšem tuto průměrnou rychlost (je-li $\Delta\tau$ malé) přibližně pokládáme za rychlost okamžitou. Záleží zde ovšem také na časovém průběhu rychlosti sledovaného pohybu. Je jistě samozřejmé, že nemůžeme volit stejný časový interval při sledování např. rychlosti růstu rostlin a rychlosti kmitající ladičky.

Hodnota okamžité rychlosti v okamžiku τ_i vyjádřená v běžných jednotkách značí dráhu, jakou by těleso urazilo za 1 s, kdyby se od okamžiku τ_i pohybovalo rovnoměrně.

Podobné úvahy mohli bychom aplikovat také na zrychlení v případě obecného přímočarého nerovnoměrného pohybu, tedy když $a \neq 0$. Přitom by opět nezáleželo na velikosti jednotky rychlosti, jen na velikosti časového intervalu, v němž bychom změnu rychlosti měřili.



Obr. 3. K vysvětlení průměrného a místního hydrostatického tlaku v kapalině.

S jistou analogií mohli bychom se kromě u jiných fyzikálních veličin setkat při vyjadřování hodnot *hydrostatického* (nebo *aerostatického*) tlaku. Je-li způsoben vnější silou, není s vyjadřováním v jakýchkoliv jednotkách obtíž. Je ve všech místech stejný a hodnota tlakové síly působící na stejnou plochu, umístěnou v různých místech uvažovaného prostoru je stejná. Při vyjadřování takového tlaku je jistá analogie s vyjadřováním rychlosti u rovnoměrného pohybu.

Složitější je problém v případě vyjadřování statického tlaku v prostoru, v němž je tlak funkcí polohy $p = f(x, y, z)$. To je případ hydrostatického (nebo aerostatického) tlaku způsobeného vlastní vahou tekutiny. Pro další uvažujme *u s t á l e n ý* (stacionární), to jest s časem se neměnicí stav. Pak bychom - podobně jako u rovnoměrného pohybu jsme rozlišovali průměrnou a okamžitou rychlost - mohli rozlišovat zde **průměrný tlak** p_p , tj. tlakovou sílu působící na nějakou plochu dělenou touto plochou, a **tlak místní** p , vztažený na nekonečně malou plošku, jak to dále vyjadřuje vztah (4). Všimněme si obr. 3. V nádrži je kapalina, působící statickým tlakem způsobeným vnější vahou na část stěny plochy velikosti S . Celková tlaková síla na zmíněnou část stěny působící je F . Průměrný tlak bude $p_p = \frac{F}{S}$, zatímco

místní tlaky jsou zřejmě různé a budou se pohybovat v mezích p_{\max} a p_{\min} , jež bychom si dovedli vypočítat ze vztahu $p = h \cdot \rho \cdot g$. V jednotkách (například v newtonech na metr čtvereční, $N \cdot m^{-2}$) opět stejných pro obě tlakové veličiny, v nichž je vztažnou veličinou plocha (správněji plošný obsah), je zpravidla velikost této plochy dosti velká a hodnotu místního tlaku si nebudeme moci ověřit změřením síly působící na tuto plochu. Jednak již proto, že jsme omezeni rozměry tlakových prostorů (např. v případě velikosti plochy 1 m^2), nebo z toho důvodu, že působící tlaková síla nebude na plochu rozdělena rovnoměrně a změřili bychom tak hodnotu průměrnou a nikoliv hodnotu místní. Podobně jako v případě předešlém psali bychom pro *průměrný tlak*

$$p_p = \frac{F}{S}$$

případně

$$p_p = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (3)$$

a pro tlak místní (v místě A):

$$(p)_A = \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \right) \quad (4)$$

Volba nekonečně malé plošky při měření tlaku je ovšem opět prakticky nemožná, nehledíme-li ovšem také ke skutečnosti, že podstatu tlakových jevů vysvětlujeme na základě kinetické teorie tepla nárazy molekul.

Určujeme tedy vždy jen tlak průměrný, který někdy, je-li ΔS dostatečně malé, pokládáme za tlak místní. O velikosti dostatečně malé plošky bude opět rozhodovat rozdělení tlaku v měřeném prostoru.

Hodnota (místního) tlaku v místě A vyjádřená v běžných jednotkách značí sílu (tlakovou), jakou by okolní prostředí působilo (kolmo) na jednotkovou plochu, jejíž těžiště je totožné s místem A . Síla je přitom rozdělena (rozložena) rovnoměrně a spojitě.

Závěrem si můžeme říci, že přímo (tj. přímou metodou, tedy podle definičního vztahu) nemůžeme nikdy určit přesně hodnotu ani okamžité rychlosti, ani místního tlaku, protože velikost vztažné veličiny (v prvním případě času, ve druhém plošného obsahu) nemůžeme volit nekonečně malou. Určujeme hodnoty průměrné, ovšem volíme-li velikost vztažné veličiny menší, více se přiblížíme okamžitým nebo místním hodnotám. Tuto skutečnost, kterou bychom zevšeobecněně mohli aplikovat i na veličiny jiné je nutno si rozvážit před každým novým měřením.

In g. D r. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Užitečná analogie

Základními veličinami fyzikálních měrových soustav užívanými v mechanice jsou *d ě l k a*, *h m o t a* a *č a s*. Pomocí jich můžeme vyjádřit všechny ostatní odvozené mechanické veličiny, i takové, které se týkají otáčivého (rotačního) pohybu. Zde sice na rozdíl od pohybu posuvného (translačního) potřebujeme místo

přírůstku dráhy Δs přírůstek úhlu $\Delta\alpha$, ten však není veličinou základní a jako veličina poměrná (relativní) neobjeví se v rozměrech příslušných mechanických veličin.¹⁾ V jejich jednotkách úhlová jednotka (obyčejně v míře „obloukové“ a ovšem s rozměrem pouhého čísla) je obsažena. Přestože otáčivý pohyb je v praktických aplikacích při nejmenším stejně důležitý jako posuvný, jsou vztahy, které jej definují, bohužel, absolventům jedenáctiletých středních škol méně běžné. Chtěl bych zde proto uvést krátkou srovnávací tabulku těchto vztahů na základě známé analogie.

Ten, kdo si zapamatuje jednoduchou analogii mezi prvními pěti veličinami, bude si umět lehce odvodit různé vztahy, platící pro otáčení z podobných vztahů platných pro posuvný pohyb.

Veličina nebo vztah týkající se pohybu posuvného (translačního)	Analogická veličina nebo vztah pro pohyb otáčivý (rotační)
délka dráhy s přírůstek (délky) dráhy Δs	(průvodičem opsaný) úhel α přírůstek úhlu $\Delta\alpha$
rychlost $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$	úhlová rychlost $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$
zrychlení $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\Delta s)}{(\Delta t)^2}$	úhlové zrychlení $\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\Delta\alpha)}{(\Delta t)^2}$
hmota m	moment setrvačnosti $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$
hybnost $G = m \cdot v$	moment hybnosti $U = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \mathcal{J} \cdot \omega$ (točivost)
impuls (síly) $I = F \cdot t$ při $F = \text{konst.}$, jinak, známe-li $F = f(t)$, $I = \sum_{i=1}^n F_i \Delta t_i$	impuls momentu (impulsmoment) $L = M \cdot t$ při $M = \text{konst.}$, jinak, známe-li $M = f(t)$, $L = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta t_i$
síla $F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}$	moment síly $M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t}$
pohybová rovnice $F = m \cdot a$	pohybová rovnice $M = \mathcal{J} \cdot \varepsilon$
práce $A = F \cdot s$ při $F = \text{const.}$, jinak	práce $A = M \cdot \alpha$

¹⁾ Mám zde na mysli ovšem úhel v obloukové míře, tj. jako podíl délky oblouku, který na kružnici opsané z průsečíku dvou paprsků tyto paprsky omezují - a poloměru této kružnice.

Myšlenka zařadit úhel mezi veličiny základní, ač jistě dosti logická, nebyla realizována. U většiny veličin je jednotka definována prototypem. U úhlu však není třeba zhotovovat prototyp, protože jde o veličinu v libovolné velikosti kdekoli a kdykoliv reprodukovatelnou (ovšem pomocí vhodného zařízení).

$$A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta s_i$$

energie potenciální $E_p = m \cdot a \cdot s$ při
 $a = \text{konst.}$

energie kinetická $E_k = \frac{1}{2} mv^2$

výkon $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = F \cdot v$

při $M = \text{konst.}$

$$\text{jinak } A = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta \alpha_i$$

energie potenciální

$E_p = \mathcal{J} \cdot \varepsilon \cdot \alpha$ při $\varepsilon = \text{konst.}$

energie kinetická $E_k = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$

výkon $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = M \cdot \omega$

O t a k a r Z i k m u n d a, kand. věd, Praha:

O předpovídání počasí

Činnost mnoha lidí do značné míry závisí na počasí. Zejména u zemědělců je tato závislost bezprostřední, protože počasí více či méně příznivé usnadňuje nebo ztěžuje jejich práci. Také rychle se rozvíjející letecká doprava vyžaduje nejenom stále podrobnější údaje o stavu atmosféry na různých místech zemského povrchu, ale zajímá se i o změny povětrnostních prvků (tj. prvků tvořících počasí) v příštím čase. Jaké však bude počasí zítra nebo pozítří, to chce vědět většina lidí, zejména v době dovolené a prázdnin.

Nebyla to však jen zvědavost, která vedla a vede lidi k poznávání zákonitostí ovládajících změny počasí. Z potřeb čistě praktických vzniklo nové vědecké odvětví - *meteorologie* - zabývající se podrobným studiem a fyzikálním vysvětlením jevů v zemském ovzduší. Část meteorologie, věnující se krátkodobé předpovědi počasí (tj. až na 24 nebo 48 hodin dopředu), nazýváme *synoptikou*. Jak poznáme dále, potřebuje *synoptická meteorologie* k vědecké předpovědi počasí znát stav ovzduší nad rozsáhlou částí zemského povrchu.

Aby bylo možné získat zprávy o počasí z prostoru většího než jsou světadíly, je celá meteorologická služba organisována na základě mezinárodní dohody a spolupráce. Přesně je určena činnost povětrnostních stanic (tj. míst, kde se pozoruje počasí), doba pozorování (termín), tvar a význam šifrovaných povětrnostních zpráv, čas a způsob jejich výměny (rádiem, dálnopisem). Jen podrobně dohodnutá organisace umožňuje, že každé ústředí, zabývající se předpovědí počasí, má nedlouho po pozorovacím termínu soustředěn rozsáhlý materiál z velké části severní polokoule. Naše povětrnostní služba například zachycuje 4krát za den hlášení o stavu počasí na stanicích, které leží v oblasti sahající od východních břehů Severní Ameriky po Ural a od severní Afriky po Špicberky.

Pro přehlednost se všechny šifrované zprávy o počasí překreslují ve smluvených značkách do zeměpisných map. Každá povětrnostní stanice je v příslušném místě mapy vyznačena malým kroužkem, do něhož se zakresluje množství pozorované oblačnosti. Je-li vnitřek kroužku prázdný, byla obloha příslušné stanice v době pozorování zcela bez mraků. Stupeň vyplnění kroužku odpovídá pozorovanému množství oblačnosti. Zaplněný kroužek znamená tedy oblohu zataženou. Vlevo od staničního kroužku se vyznačí odshora dolů: teplota, dohlednost (je velmi

důležitá pro letecký provoz), stav počasí (déšť, sněžení, bouřka, mlha) a teplota rosného bodu, kterým charakterisujeme vlhkost. (Je to totiž teplota, při níž by se vzduch nasýtil vodními parami, kdybychom jej ochlazovali za nezměněného tlaku.) Vpravo nahoře od staničního kroužku se píše tlak redukovaný na hladinu moře (tj. tlak, jaký by byl v příslušné stanici, kdyby tato ležela v hladině moře; redukcí vylučujeme vliv nadmořské výšky stanice na změřený tlak). Pod něj se zaznamenávají změny tlaku za poslední 3 hodiny před pozorováním a průběh počasí rovněž v posledních 3 hodinách. Nad staničním kroužkem i pod ním jsou bližší údaje o výšce a druhu oblačnosti. Směr větru v desítkách stupňů vyznačuje v příslušném místě šipka (při severním větru dotýká se šipka kroužku nahoře, při jižním dole, při východním na pravé straně a západním na levé straně). Rychlost větru je vyjádřena opeřením šipky.

Těmto pozorováním, která provádí pozorovatel v blízkosti zemského povrchu přístroji (teplota, vlhkost, tlak, směr a rychlost větru), nebo opticky (množství a druh oblačnosti, dohlednost, stav počasí), říkáme *přízemní pozorování*. Proto mapy, do nichž se zakreslují, nazýváme *přízemními synoptickými mapami*.

Kromě přízemních pozorování se provádějí na některých stanicích ještě dvakrát denně měření teploty, tlaku a vlhkosti vzduchu ve volné atmosféře. K měření se užívá zvláštních přístrojů (radiosond), které zjištěné hodnoty ihned vysílají na zem. *Radiosondy* jsou vynášeny balóny do výšek 20 až 40 km nad zemí. Z polohy balónu můžeme pomocí optického nebo radarového zaměřovače vypočítat směr a rychlost větru v různých výškách nad stanicí. Všechny prvky charakterisující stav atmosféry nad zemí se vyměňují denně ve tvaru zvláštních povětrnostních zpráv. Tato měření z volného ovzduší zakreslujeme pro určité hodnoty tlaku do zeměpisných map, které nazýváme *výškovými mapami*. Poměrů ve volné atmosféře se v poslední době využívá stále víc a více k zpřesnění předpovědí počasí.

Mapy, na nichž je ve smluvených značkách zakresleno počasí, prostuduje potom odborník (meteorolog-synoptik). Zjistí fyzikální zákonitosti, které jsou zřejmé z průběhu atmosférických jevů. Teprve na základě těchto zákonů může předvídat budoucí děje v ovzduší. Jinými slovy, dříve než synoptik předpoví počasí, musí provést důkladný fyzikální rozbor (analýzu) současné povětrnostní situace. Při rozboru přízemní povětrnostní mapy určí zejména rozdělení tlaku a polohu atmosférických front.

Rozdělení přízemního tlaku znázorníme tím, že místa se stejným redukovaným tlakem spojíme čarou (tzv. *isobary*). Ukazuje se, že každý den jsou isobary v některých oblastech zemského povrchu uzavřené. Je-li tlak uprostřed poslední uzavřené isobary nižší než v okolí, nazýváme tlakový útvar *cyklonou* (tlakovou níží); je-li vyšší, mluvíme o *anticykloně* (tlakové výši). Horizontální rozměry tlakových útvarů jsou značné, jejich průměr dosahuje řádově tisíc kilometrů.

Rozdíly tlaku mezi jednotlivými místy zemského povrchu jsou hlavní silou, která způsobuje pohyb vzduchu v horizontální rovině (vítr). Čím je rozdíl tlaku větší, tím je i vítr silnější. Kdyby Země byla v klidu, proudil by vzduch přímočaře z míst vyššího tlaku do oblastí s nižším tlakem. Zemská rotace jej od tohoto směru odchyluje na severní polokouli vpravo.

Proudění vzduchu je jedním z hlavních činitelů ovlivňujících změny počasí. Je sice důsledkem tlakových rozdílů mezi různými místy zemského povrchu, ale na druhé straně i jednou z příčin, které působí změny v rozdělení tlaku. Je totiž dobře známo, že anticyklony i cyklony se pohybují velmi často ve směru převládajícího proudění. Změna polohy tlakového útvaru vyvolává i změnu počasí. V oblastech vysokého tlaku vzduchu bývá často klidné, suché a málo oblačné počasí. Naopak v tlakových nížích převládá silný vítr, velká oblačnost se srážkami.

Tyto podstatné rozdíly počasí v tlakových útvarech lze vysvětlit zhruba odlišnými poměry proudění. Z anticyklon vzduch při zemi vytéká a je nahrazován ihned z vyšších vrstev. Sestupující vzduch se adiabaticky ohřívá, čímž se stále více vzdaluje od nasyceného stavu. Výsledkem tohoto děje je, že oblačnost v tlakových výších se rozpouští. Proto v anticyklonách převládá jen málo oblačné počasí.

Naopak do cyklon v přízemních vrstvách vzduch vtéká. To působí složitou stavbu útvaru, kterou nejspíše pochopíme z výkladu tzv. *n o r s k é š k o l y*. Její zakladatelé rozdělili atmosféru na několik velkých celků, lišících se svými fyzikálními vlastnostmi (zejména obsahem vodních par, teplotou a její změnou s výškou). Tyto celky nazvali *vzduchové hmoty*. Jelikož vzduchové hmoty se jen málo mísí, bývá přechod z jedné do druhé často provázen značnými změnami povětrnostních prvků (teplotou, oblačností, větrem, vlhkostí, tlakem). Styčnou plochu dvou různých vzduchových hmot nazýváme *frontální plocha* a její průsečná křivka se Zemi *přízemní fronta* nebo krátce jen *fronta*.

Na přední straně cyklony převládá vítr s jižními složkami (tzv. jihovýchodní až jihozápadní) a postupující teplý vzduch odděluje od ostatního okolního vzduchu *teplá frontální plocha*. Naopak v týlu tlakové níže proudí od severu k jihu studený vzduch, jehož čelo ohraničuje *studená fronta*. Teplá i studená fronta jsou základními typy front. Obě se vyskytují v mladých, nebo v tvořících se cyklonách. Jelikož každý typ fronty je provázen určitým druhem počasí, všimneme si podrobněji jejich stavby.

Na ploše teplé fronty postupuje teplý vzduch tak rychle, že studený vzduch nestačí před ním ustupovat. Proto teplý vzduch je nucen stoupat po mírném klínu studeného (sklon klínu je asi 1 : 100, tzn., že ve vzdálenosti 100 km od přízemní fronty je frontální plocha asi 1 km nad zemí). Výstupy teplého vzduchu ve srovnání s horizontálními pohyby jsou velmi malé a dosahují jen několika cm/vt. Přesto mají pro vývoj počasí značnou cenu. Stoupáním se totiž vzduch ochlazuje a vodní páry v něm obsažené začnou při určité teplotě kondensovat. Na celé frontální ploše vzniká pásmo vrstevnaté oblačnosti, z níž obvykle padají trvalé srážky.

Jak pozná synoptik teplou frontu na přízemní mapě? Stanice ležící daleko před frontou (asi 800 km) hlásí jen řídké vrstevnaté mraky, které velmi málo zeslabují sluneční svit. Čím více se blížíme k přízemní frontě, tím více houstnou mraky a jejich základna se snižuje. Ve vzdálenosti 300 až 400 km před frontou začíná pršet nebo sněžit. Jelikož teplé fronty se pohybují rychlostí kolem 30 km/hod, mají tyto srážky trvalý ráz po několik hodin. Za přízemní frontou se oblačnost protrhává a srážky přestanou. Tlak vzduchu, který před teplou frontou neustále

klesal, se po jejím přechodu buď nemění, nebo klesání je mnohem mírnější. Vítr při přechodu přízemní fronty zesílí, stočí se ve směru pohybu hodinových ručiček. Teplota stoupne, někdy dosti značně a poměrně rychle. Teplé fronty pronikají k nám v převládajícím proudění nejčastěji od západu, a zejména v zimě bývá jejich přechod velmi výrazný. Často působí rychlou oblevu i po poměrně silných mrazech.

Na studené frontě je teplý vzduch zaměněn studeným, takže studený klín postupuje tentokrát kupředu. V přízemních vrstvách je pohyb studeného vzduchu vždy rychlejší než teplého. Ve volném ovzduší však může proudit rychleji i teplý vzduch. Proto rozeznáváme studené fronty dvou druhů:

a) Teplý vzduch se pohybuje na celé frontální ploše pomaleji než studený a proto klouže nahoru po klínu studeného vzduchu. Studená fronta tohoto druhu se velmi podobá obrácené teplé frontě. Rozdíl je jedině v tom, že v blízkosti přízemní fronty je teplý vzduch prudce vytlačován nahoru. Proto tam vznikají mraky velkého vertikálního rozsahu s přeháňkami. Teprve za přízemní frontou a přeháňkami následuje pásmo trvalého deště. Rychlost těchto front bývá obvykle jen velmi malá.

b) Při druhém druhu studené fronty proudí teplý vzduch ve výšce rychleji nežli postupuje studený klín. Proto sklouzává po klínu dolů a působí rozpouštění oblačnosti. Zbývá jen poměrně úzký pás mohutné kupovité oblačnosti v blízkosti přízemní fronty, kde teplý vzduch je prudce vytlačován nahoru. Přechod takové fronty je provázen krátkým, ale obvykle prudkým lijákem, v létě bouřkou. Vítr při přechodu fronty je nárazovitý, často velmi silný a stáčí se rychle vpravo. Teplota po přechodu přízemní fronty klesá, oblačnost se brzy protrhává. Místy se tvoří později neuspořádané přeháňky. Jelikož vzrůst rychlosti větru s výškou je v atmosféře obvyklý, je tato studená fronta mnohem častější než předcházejícího druhu. Většina studených front v oblasti vyvinutých cyklon patří k druhému druhu. Jejich rychlost je dosti značná, a to kolem 40 až 50 km/hod, v ojedinělých případech dokonce 100 km/hod.

Tlak vzduchu před oběma druhy studené fronty klesá. Po přechodu začíná stoupat, u druhého druhu někdy velmi rychle.

Zmínili jsme se již, že teplá fronta postupuje na přední straně cyklony a studená za ní. Jelikož rychlost studené fronty je větší, dojde po určité době k spojení obou front. Vzniká nový typ fronty, který nazýváme *oklusní fronta*. Může mít dvojí charakter podle rozdílů teplot mezi studeným vzduchem před teplou frontou a za studenou frontou. Jestliže je vzduch za studenou frontou teplejší než před teplou frontou, nazývá se *okluse teplou*. Dochází k podobným jevům jako na teplé frontě. V případě, že vzduch za studenou frontou je chladnější než před teplou frontou, podobá se okluse studené frontě a nazýváme ji *studená okluse*. Jestliže studený vzduch před teplou frontou i za studenou frontou se teplotně příliš neliší, mají srážky charakter teplé i studené fronty: zpočátku stejnoměrný déšť přechází v přeháňky. Oklusní fronty jsou obvykle znakem stárnutí tlakové níže, která po oklusi se začíná pomalu vyplňovat. Časem slábnou i srážky na frontě, až přestanou úplně. Potom se začíná i oblačný systém fronty protrhávat. Říkáme, že **f r o n t a s e r o z p a d á**,

Přechod front ovlivňuje počasí v místech, která leží jižně od dráhy cyklony. Na severní straně tlakové níže pozorujeme do určité vzdálenosti od středu vrstevnatou oblačnost se srážkami ve tvaru trvalého deště. Vzdaluje-li se jádro cyklony, srážky ustávají, základna mraků se zvyšuje a oblačnost se protrhává.

Když odborník určil na přízemní synoptické mapě oblasti vysokého a nízkého tlaku a zjistil polohu a typ atmosférických front, vyznačí pro názornost barevnými tužkami ještě oblasti mlh, pásma trvalých frontálních srážek a přeháněk. Potom provede analýzu výškových map, která je dosti jednoduchá. Obvykle spojí čarami místa se stejnou výškou určité *i s o b a r i c k é p l o c h y* (tj. plochy se stejným tlakem). Mapám konstantní tlakové hladiny říkáme *absolutní topografie* a kreslíme je pro tlak 850 milibarů (tj. asi výška 1,5 km nad zemí), 700 mb, 500 mb (asi 5,5 km), někdy také pro 300 mb (9 km), nebo i 100 mb (kolem 16 km). Běžně se konstruuje i mapa relativní topografie 1000 až 500 mb, kterou znázorňujeme vlastně jakousi průměrnou teplotu ve zvolené vrstvě.

Po skončení analýzy výškových i přízemních map přejde synoptik k předpovědi. Nejprve určí polohu tlakových útvarů a systémů front v příštím čase. Při řešení této úlohy pomáhají mu výškové mapy, protože směr postupu tlakových výší, níží i front často souhlasí se směrem proudění ve volné atmosféře, zejména kolem hladiny 500 mb. Další velmi důležitou a těžkou otázkou, kterou musí synoptik vyřešit, je tvoření a zánik tlakových útvarů, změna intensity front a vlastností vzduchových hmot. Odhadnout správně vliv všech těchto dějů na změny povětrnostních prvků se daří jen velmi zkušenému odborníkovi. Výsledkem jeho úvah je potom slovní formulace předpovědi počasí, jak ji denně slyšíme v rozhlase.

Z předcházejícího odstavce je jasné, že přesnost předpovědi počasí značně závisí na předpovídající osobě, na jejich znalostech a zkušenostech. Proto říkáme tomuto způsobu *p ř e d p o v í d á n í s u b j e k t i v n í*. S menšími odchylkami jej používají všechny povětrnostní služby na světě. Aby se omezil vliv synoptika na předpovídání a zmenšil se případně počet nezdařených předpovědí, snaží se vědci na celém světě vyvinout nové metody, které se zakládají na zjednodušených fyzikálních představách atmosféry. Těmto zjednodušeným představám říkáme *modely atmosféry*. Jejich vlastnosti můžeme vyjádřit matematicky ve tvaru vzorců, z nichž pomocí okamžitého stavu povětrnostních prvků lze početně předpovědět některé veličiny, jako jsou tlak vzduchu, teplota, vlhkost, případně vertikální pohyby, o nichž jsme se zmínili při popisu teplé fronty. Z vertikálních rychlostí a z vlhkosti vzduchu můžeme pomocí jiného modelu určit oblasti, kde v příštím čase (za 24 hodin, příp. 36 hodin apod.) se vyskytnou srážky.

Rozvoji objektivního způsobu předpovědi počasí bránilo veliké množství výpočtů, které jednotlivec nemohl zvládnout. Jeho výpočty trvaly tak dlouho, že po skončení byly již pro předpověď zcela bezcenné. Teprve s rozvojem moderních, vysoce výkonných a rychlých elektronkových počítačů bylo možno přejít k praktickým zkouškám některých jednoduchých modelů. Avšak již na začátku nového způsobu předpovídání se ukazuje, že objektivní předpovědi pomocí jednoduchých modelů jsou tak přesné, jako předpovědi velmi zkušeného synoptika. Doufejme tedy, že v příštích letech, až získáme podrobnější znalosti o fyzikálním mechanismu atmosféry, bude možno řešit předpověď počasí pomocí složitých rovnic,

kteřé vystihnou vliv všech důležitých dějů. Bude-li rozvoj techniky na dostatečné výši, přejde objektivní způsob předpovědi počasí i do denní povětrnostní služby. Potom snad vzroste i přesnost předpovědi a zmenší se počet neúspěšných prognos.



Co vidíme na nebi

Jaroslav Rajchl, Ondřejov:

Spektra komet

Dnes víme, že je to sluneční záření, jehož působením se tvoří hlava a ohon u komet při určité vzdálenosti komety od Slunce.¹⁾

Ještě Newton a Olbers se domnívali, že komety jsou temná tělesa, svítící pouze odraženým slunečním světlem podobně jako planety. Naproti tomu Herschel přisuzoval i vlastnímu svícení komet určitý podíl na jejich celkové jasnosti. Sledování změn jasnosti komet se změnou vzdálenosti od Slunce popřelo domněnku Olbersovu a Newtonovu. Jasnost totiž neubývala se čtvercem vzdálenosti komety od Slunce, jak by tomu mělo být při svícení pouze odraženým světlem, ale s mocninou daleko vyšší. Nic bližšího o tomto vlastním svícení se touto metodou nedalo zjistit.

Teprve spektrální analýza světla, přicházejícího k nám z komet, dovolila určit původ světla a jeho vznik v kometách. Vedle toho se naskytla možnost zjistit, které jsou to látky, jež vysílají světlo. Ze vzhledu emisních čar a pásů, jejich struktury a polohy ve spektru, lze pak soudit na podmínky, za kterých vysílání světla nastalo.

K pozorování, resp. fotografování spektra, užíváme spektroskopu, resp. spektrografu opatřeného buď mřížkou (zde je možné přímé určení vlnových délek jednotlivých čar a pásů) nebo hranolem. U hranolu je nutno užít spektra už proměřeného jako srovnávacího, které promítneme nebo vyfotografujeme nad spektrum komety. Pomocí jeho čar o známé vlnové délce zjistíme i vlnové délky ve spektru kometárním.

Vzhledem k velkým ztrátám v optice spektroskopu absorpcí a reflexí světla, užívá se k analýze světla slabších zdrojů objektivního hranolu. Dosti jasné komety se totiž vyskytují zřídka. Zdroj světla - v našem případě kometa - je velmi daleko, můžeme tedy paprsky z ní přicházející pokládat za rovnoběžné a přímo je vrhat na hranol bez užití kolimátoru. Vzhled spektra je ovšem jiný; nedostaneme už čáry nebo pásy, jako při použití štěrbinového spektrografu, ale obrazy zdroje v různých spektrálních barvách (obr. 1). Hranolové spektrum (oproti mřížce) má nestejnou dispersi. Vezmeme-li si za jednotku délky třeba 1 mm, pak na tomto 1 mm délky v červené části spektra jsou vlnové délky obsažené v intervalu 200 Å, zatímco ve fialové části jen v intervalu 40 Å. Tedy ve fialové části můžeme od sebe rozlišit

¹⁾ Viz též článek A. Hrušky.

i slabé emise, které se v červené části spektra už přes sebe překrývají. Je tedy rozlišovací schopnost téhož spektrografu v krátkovlnné části mnohem větší.

Jako srovnávacích spekter užíváme spekter okolních hvězd, která se zpravidla vždy vyexponují na desku současně s kometou.

Donati v r. 1864 byl první, kdo namířil štěrbínový spektroskop na hlavu jasné komety. Zpozoroval světlé emisní pásy ve žluté ($\lambda = 5630 \text{ \AA}$), zelené ($\lambda = 5165 \text{ \AA}$) a modré ($\lambda = 4719 \text{ \AA}$) části spektra. Brzy na to Huggins našel u Tempelovy komety spojitě spektrum a o dva roky později změřil pásy objevené Donatim a identifikoval je s pásy Swanova spektra molekuly uhlíku C_2 . Tak byl objeven původce světla komety ve vizuální části spektra. Další fotografie ukázaly i přítomnost Fraunhofer-



Obr. 1. Spektrum komety Arend-Roland fotografované na Ondřejově (objektivní hranol). Na pravé straně snímku je emise CN, úplně vlevo (je patrný i ohon) je emise C_2 .

rových absorpčních čar, nalezených ve slunečním spektru a další hlavní emisi, emisní pásy molekuly CN ve fialové části spektra. Konečně u komet přicházejících velmi blízko k slunci byl zjištěn sodíkový dublet a čáry železa, niklu a chromu. Právě tyto prvky jsou také obsaženy v meteoritech (Fe, Ca, Mn, Mg, Cr, Si, Ni, Al, Na). To svědčí o podobnosti mezi meteority a jádry komet. U Halleyovy komety byly dokonce nalezeny (identifikace však není zcela bezpečná) pásy molekuly $C^{12}C^{13}$, která je dost důležitá z kosmogonického hlediska.

Další zdokonalení spektrografů přineslo výsledky, které můžeme shrnout: V hla-

vě komet emise: CN, C₂, CH, C₃, OH, OH⁺, NH, CH₂, CH⁺, NH₂ + NH₃, Na, Fe, Cr. V ohonu komet emise: CO⁺, CO₂⁺, CH⁺, N₂⁺.

Většina nalezených molekul jsou chemicky nestabilní radikály. Naskytla se tedy otázka, jak je možná jejich samostatná existence v komě a hlavně v jádře komety.

Zjistilo se, že v komě skutečně je velmi malá hustota a tedy molekuly mají velkou volnou dráhu a málokdy se srazí. Nejsou-li možné časté srážky, je i malá pravděpodobnost jejich vzájemného slučování. To platí pro komu. Víme však z pozorování, že koma se vytváří, jak se kometa postupně přibližuje k Slunci, působením jeho záření na jádro komety. Zdůvodniti existenci nestabilních radikálů trvale vedle sebe v jádře, kde již koncentrace bude daleko větší než v komě, bylo nesnadné. Proto se předpokládalo, že nestabilní radikály vznikají teprve působením slunečního světla dissociací ze složitějších molekul stabilních. Neuvažujeme-li v jádře existenci chemických reakcí výměnných, pak by mohly těmito mateřskými molekulami být H₂O, NH₃, CH₄, C₂N₂, CO₂. Něco o tom, jaké by mohly být tyto mateřské molekuly, může ukázat také identifikace plynů obsažených v meteoritech. Bylo tam nalezeno CO₂, CO, CH₄, H₂, N₂, H₂S, SO₂, CN. Nalezení nestabilních molekul CN ovšem ukazuje, že i při laboratorním vyšetřování, kdy musíme meteorit zahřívát, aby se pohlcené látky uvolnily, zřejmě nastává už dissociace, takže „původnost“ mateřských molekul není úplně zaručena. A ve spektru komet se dosud tyto molekuly nijak neprojeví. Pozorování jejich absorpčních pásů ve slunečním světle bylo by možné jen pro NH₃ (10 500 Å) a to jen u velmi jasné komety. Pro CH₄ a CO₂ jen velká radiální rychlost komety vzhledem k Zemi by dovolila vlivem Dopplerova principu rozlišit jejich pásy od absorpčních pásů vznikajících v atmosféře Země.

Sledujeme-li však spektrum v závislosti na změně vzdálenosti komety od slunce, vidíme, že s rostoucí vzdáleností se zvětšuje poměr složitějších molekul proti jednodušším pro tyto poměry: CH₂/CH, NH₂/NH. Zde je tedy možno se domnívat, že u každého poměru jednodušší složka vzniká ze složitější působením slunečního záření. Vedle toho ještě i poměry CN/C₂, C₃/C₂, C₃/CN se zvětšují s rostoucí vzdáleností. Podobný chod poměrů lze najít i v závislosti na vzdálenosti od jádra. Nastavíme-li totiž šterbinu spektrografu ve směru průměru hlavy nebo přímo ze spektra pořízeného objektivním hranolem, lze určit, jak daleko od jádra různé molekuly dosahují. Seřadíme-li je podle klesající vzdálenosti od jádra, máme: CN, C₂, NH, OH, C₃, NH₂. Vidíme, že nejen ve větších vzdálenostech komety od Slunce, ale též v menších vzdálenostech od jádra převládají složitější molekuly.

Vzhledem k nemožnosti srážek molekul v komě je možný vznik jednodušších molekul ze složitějších jedině fotodissociací slunečním zářením. Nikoli srážkami molekul a tedy nikoli teplotou. Ještě jeden fakt tento názor potvrzuje. Při mikrofotometrickém zjišťování průběhu energie v emisních pásech byl zjištěn nikoli plynulý průběh křivky rozdělení energie, jako tomu bylo u laboratorních výsledků, ale křivka byla značně zvlněna podružnými maximy a minimy. U pásů CN se snažili Babcock a Elvey vysvětlit dvě hlavní maxima křivky různou teplotou, příslušící každému rozdělení. Tyto teploty se od sebe velmi lišily, což vzhledem k tomu, že šlo o stejné molekuly ve stejných podmínkách, bylo těžko zdůvodnit. Ještě složitější průběh u jiných pásů nebylo možno takto již vůbec vysvětlit. Swings v r. 1941

našel velmi jednoduché vysvětlení. Sluneční spektrum vyvolávající záření molekul není totiž plynulé, ale je přerušeno Fraunhoferovými čarami, které působí tak složitý průběh křivky rozdělení energie v pásech spektra komety. Různá relativní rychlost komet vůči Slunci (Dopplerův princip) pak vysvětlila i rozdílný průběh křivek rozdělení energie v týchž pásech u různých komet. Konečně Zanstra vybudoval teorii založenou jen na předpokladu svícení molekul pouze působením slunečního záření (a nikoli srážkami molekul), která velmi dobře souhlasí s pozorováním. Tím je možno považovat dnes za dokázaný tento způsob svícení molekul v kometách. Bez spektrální analýsy bychom to nezjistili.

Zjištěním, že sluneční záření hraje důležitou roli při svícení komet, získala i sluneční fyzika v kometách další indikátor změn sluneční činnosti. Tato otázka však zasluhuje, aby byla vysvětlena v samostatném článku, neboť je dosti složitá.

Všimněme si ještě spojitého spektra. Spojité spektrum vzniká odrazem slunečního záření od jádra komety. Zjistilo se však, že některé komety ukazují spojitě spektrum i v částech hlavy vzdálenějších od jádra a dokonce i v ohonu. Jak tam vzniká? Plyny uvolňované z jádra strhují totiž s sebou drobné částičky prachu, na nichž se pak sluneční světlo rozptyluje. Z poměru intenzit spojitého a emisního spektra lze pak určovat množství takto vyvrhovaných částiček. Toto vyvrhování však úzce souvisí se vznikem meteorických rojů. Víme, že většina meteorických rojů má známou mateřskou kometu, jejímž rozpadem vznikly. Některé komety jeví však po celou dobu svého průchodu v blízkosti Slunce nápadnou intenzitu spojitého spektra, aniž by byly pozorovatelné exploze jádra, vedoucí k jeho rozpadu. Toto spektrum dosahuje daleko do komy. Seznalo se, že to nastává u komet, které jsou poprvé v blízkosti Slunce a které nazýváme *n o v é*. U nich se ukazuje zásoba prachu dosti silná proti kometám, které již několikrát prošly v blízkosti Slunce. Na tomto poli se spektrálnímu výzkumu teprve otvírají nové možnosti.

R. 1957 byl významný pro kometární astronomii. Dvě velmi jasné komety Arendova-Rolandova a Mrkosova byly pozorovány téměř po celém světě. Také v Ondřejově byly získány přímé i spektrální snímky obou komet. Již první předběžné zprávy ze světa svědčí o tom, že se dostaneme v našich znalostech těchto těles, která byla dříve pouze obávaným zjevem, opět o krok dále.

Oldřich Lepil, Gottwaldov:

Halleyova kometa

Před 200 roky, o vánocích 1758, prohlížel rolník a astronom J o h a n n P a l i t s c h v Prohlisi u Drážďan dalekohledem oblohu a spatřil v zorném poli kometu. Ani netušil, jaký význam bude mít jeho objev v boji proti pověrám o kometách. Tyto pověry totiž tvrdily, že komety jsou nadpřirozeným znamením a objevují se vždy jako předzvěst válek, moru a podobných zlých událostí. A právě Palitschův objev znamenal potvrzení domněnky astronoma E d m u n d a H a l l e y e, že komety jsou tělesa, která se mohou pohybovat po uzavřených křivkách, takže se periodicky vracejí a jejich návraty je možné předpovědět. Objevy komet nejsou tedy nic náhodného, ale jsou důsledkem platnosti zákonů nebeské mechaniky.

Všimněme si, jak přišel Halley ke své domněnce o perioditě pohybu komet. Iniciátorem mu byl vlastně jeho přítel Izák Newton. Newton vynalezl způsob, podle kterého je možné vypočítat dráhu komety z několika poloh komety mezi hvězdami v různých časových okamžicích. Když Newton provedl výpočty pro kometu z roku 1680, ukázalo se, že její dráha je parabola s ohniskem ve Slunci. Newton však předpokládal, že některé komety mohou mít i uzavřené - eliptické dráhy. O správnosti tohoto předpokladu bylo možno rozhodnout teprve po prozkoumání drah dosud známých komet. Tohoto namáhavého úkolu se ujal Halley¹).



Obr. 1. Fotografie Halleyovy komety z roku 1910.

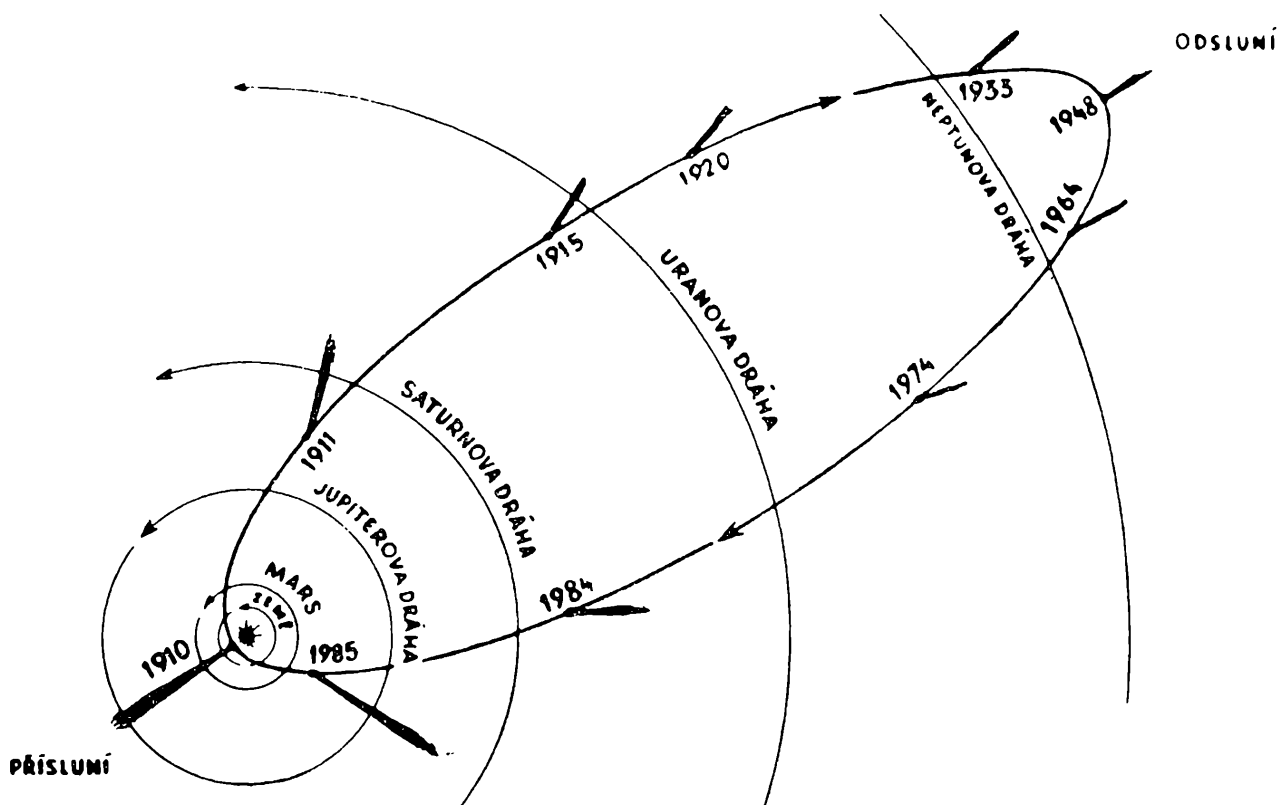
Halley shromáždil údaje o polohách a pohybu komet po obloze za tři století - od roku 1337 do roku 1698 a začal sestavovat dráhy všech komet, o nichž měl jen poněkud přesnější údaje. Z 24 takto prostudovaných komet jej zaujala nápadná shoda drah komet z roku 1531, 1608 a 1682. První kometu pozoroval Apianus, druhou Kepler a Longomontanus a třetí pozoroval Halley sám. Halley se vyjádřil, že by to byl zázrak, aby se tři různé komety pohybovaly po tak podobných drahách. Pravděpodobnější by byl předpoklad, že se jedná o tělesa totožná. Na závaží bylo, že oběžná doba kolísala mezi 74 až 76 roky. Tuto nesrovnalost však bylo možno vyložit silovým působením přitažlivosti velkých planet (Jupitera a Saturna) na celkem nepatrnou hmotu komety. Halley poruchy odhadl a stanovil návrat komety na rok 1758. Nedočkal se však potvrzení své domněnky o návratu komet a zemřel roku 1742, tedy o 16 roků předtím, než kometu znovu objevil rolník Palitsch.

Tak bylo před 200 lety potvrzeno, že komety nejsou nebeská znamení věstící mor nebo válku, ale hmotná tělesa, pohybující se vesmírem podle všech zákonů

¹) Edmond Halley (čti heli) 1656 – 1742.

pohybu nebeských těles. V tom je největší význam práce královského astronoma v Greenwichi Halleye, jehož jméno nese první kometa s předpověděným návratem.

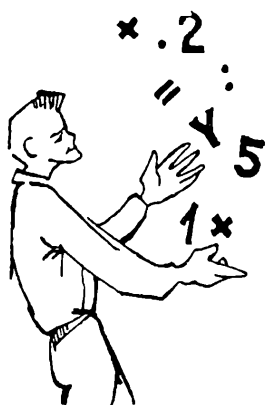
Dnes patří Halleyova kometa k nejlépe prozkoumaným kometám. Nejstarší záznam jejího návratu má letopočet 240 před n. l. a poslední návrat je datován rokem 1910. Výpočty poruch v pohybu komet se tak zpřesnily, že skutečný návrat nastal jen o 3 dny později, než předpověděli astronomové. Kometa prošla v největší blízkosti Slunce 19. dubna 1910. Objevena však byla už 11. září 1909 fotografickou cestou. Řada cenných pozorování skončila 1. července 1911. Za tuto dobu byly pořízeny stovky fotografií komety, které byly teprve po dvaceti letech zpracovány.



Obr. 2. Dráha Halleyovy komety.

Podrobné studium ukázalo, že v kometě proběhlo několik výbuchů; bylo možno sledovat zajímavé změny v ohonu a speciální výzkum potvrdil domněnky o složení komet. Poblíž přísluní mělo spektrum komety typ spektra slunečního. S rostoucí vzdáleností od Slunce se záření posouvalo ke kratším vlnovým délkám. Tyto výzkumy ukázaly, že jádro komety je složeno z prachových částic. V ohonu komety byl dokázán kysličník uhličitý a kyan. Když proběhla v roce 1910 zpráva, že Země projde 19. května ohonem komety dlouhým 30 milionů kilometrů, nastala mezi laiky panika, že plyny ohonu otráví ovzduší. Nic podobného se však nestalo, ani nejmenší chemická analýsa nedokázala žádné jedovaté příměsi ve vzduchu. Však ani nemohla, když uvážíme, že poměr hustoty ohonu komety k hustotě vzduchu je $1 : 10^{15}$.

V roce 1758 prošla kometa periheliem o 31 dnů dříve než bylo vypočteno, při posledním návratu jen o tři dny později. Tak byl za tuto dobu zdokonalen výpočet poruch a zpřesněno pozorování komet. Do jaké míry se ještě zpřesní naše výpočty, posoudíme při dalším návratu komety v únoru 1986.



Matematické zábarvy

Oldřich Buchta, stud. MU, Brno:

O celých kořenech kvadratické rovnice

Uvažujme kvadratickou rovnici $x^2 - 9x + 18 = 0$

Utvoříme si tabulku:

18	-10	2
10	-8	
4	-6	
0	-4	
-2	-2	
-2	0	
0	2	
4	4	

Při sestrojování tabulky se řídíme tímto pravidlem: V případě kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ napíšeme do záhlaví čísla c , $b - a$, $2a$. V druhém sloupci je napsána aritmetická posloupnost, jejíž diferenci udává poslední číslo $2a$ záhlaví. Ke každému číslu v prvním sloupci přičítáme číslo napsané úhlopříčně ve směru šipky v druhém sloupci a výsledek sečítání je další člen napsaný v prvním sloupci.

Kdekoliv se nyní v prvním sloupci vyskytne nula, její pořadové číslo, počítaje od vodorovné linky, je hodnotou jednoho celého kořene kladného naší kvadratické rovnice. V našem případě byly tedy kořeny 3, 6.

Pořadové číslo některé nuly udává hodnotu dvojnásobného kořene právě tehdy, když po obou stranách této nuly jsou v 1. sloupci napsána stejná čísla. Čtenář nechť si to ukáže na případě kvadratické rovnice $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Jestliže jsme naším postupem nenašli oba kořeny, užijeme na rovnici nové tabulky, která se liší od předešlé tím, že v záhlaví druhého sloupce je tentokrát napsáno číslo $-b - a$. Pořadové číslo každé nuly, která se objeví v prvním sloupci, je tentokrát absolutní hodnotou jednoho celého záporného kořene. Pro dvojnásobné kořeny platí podobná poznámka.

Příklad: $x^2 - x - 12 = 0$

-12	-2	2
-12	0	
-10	2	
-6	4	
0	6	
8	8	

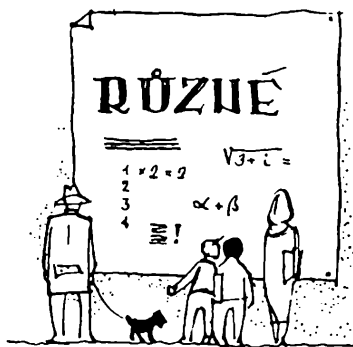
-12	0	2
-10	2	
-6	4	
0	6	

Kořeny: 4, -3.

Jestliže jsme ani užitím obou postupů nenašli oba kořeny, nemá už rovnice dalších celých kořenů. Čtenář nechť vyšetří rovnici $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ověříme nyní správnost naší metody. Označme a_n n -tý člen prvního sloupce, b_n n -tý člen druhého sloupce (počítáno od linky), s_n součet prvních n členů druhého sloupce.

Snadno vidíme: $b_n = b + (2n - 1)a$, $a_n = c + s_n$, $s_n = \frac{n}{2}(b_1 + b_n) = \frac{n}{2}(2b + 2na) = an^2 + bn$. Odtud $a_n = an^2 + bn + c$. Je-li tedy $a_k = 0$, je k kořenem dané rovnice. Je-li $a_{k-1} = a_{k+1}$, plyne srovnáním $2ak + b = 0$, $k = -\frac{b}{2a}$ a kořen k je tedy dvojnásobný. Konečně přechodem od rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ k rovnici $ax^2 + b(-x) + c = 0$ vysvětlíme způsob hledání celých záporných kořenů naší rovnice.



Různé

Josef Kotyk, Pardubice:

Max Planck

(Dokončení)

Počátkem poslední čtvrtiny devatenáctého století se fyzikové domnívali, že se přiblížila chvíle, kdy budou poznány poslední základy všech přírodních jevů a výstavba fyziky jako vědy bude zakončena. Max Planck líčí tuto náladu slovy:¹⁾ „Když jsem začínal ve fyzice pracovat, požádal jsem svého vzácného učitele Filipa Jollyho²⁾ o radu, týkající se podmínek a perspektivy mých prací.

¹⁾ Viz Max Planck „Ot ot nositelnovo k absolutnomu“, str. 15 a 16, Severnyj pečatnik, Vologda, 1925.

²⁾ Německý fyzik Filip Jolly (1809–1884), profesor fyziky v Mnichově, proslul experimentálním zjištěním gravitační konstanty. Základní myšlenku jeho metody vykládá učebnice fyziky pro 9. roč., čl. 124.

Jolly vylíčil mně tehdy fysiku jako vědu vysoce rozvinutou, skoro úplně vyžralou, jež - korunována objevem principu přeměny a zachování energie - musí již brzy dosáhnout svého konečného ustáleného tvaru. Je sice ještě možné upozorovat a odstranit drobné nedostatky, avšak jako celek stojí fysika a její systém velmi pevně. Zejména teoretická fysika se přiblížila takovému stupni dokonalosti, jakého již před staletími dosáhla geometrie.“

Naděje fysiků na brzké stanovení posledních „cihel světa“ a sny o dovršení stavby vědy, o dokonalém a definitivním obrazu světa, se však zhroutily. K revolučnímu otřesu přispěl nemalou měrou také Planck a to svými slavnými pracemi v n a u c e o z á ř e n í. Jí věnuji proto další stať svého pojednání.

Část II. Nauka o záření.

Při studiu průběhu u nevratných fysikálních dějů obrátil Planck zvláštní pozornost k záření vysílanému žhavým tělesem. Jeho přednáška „Zur Theorie des Gesetzes der Energie im Normalspektrum“, proslovená dne 14. prosince 1900 na zasedání Fysikální společnosti v Berlíně a díla „Entdeckung des Wirkungsquantums“ (1900) a „Vorlesung über die Theorie der Wärmestrahlung“ (1906) vyburcovala fysiku z jejího idylického klidu novými myšlenkami.

Planck nejprve ukázal, že kmitočet (a tím i jakost) záření vysílaného tělesem závisí na jeho teplotě a pokusil se o řešení problému, jenž i Maxwellově elektromagnetické teorii světla zůstal tvrdým oříškem, jak vyložit rozdělení energie ve spektru tělesa dokonale černého. Aby uvedl teorii ve shodu s experimentálními výsledky, zavedl představu, jež byla v naprostém rozporu s tehdejšími názory o povaze elektromagnetického záření i zákony termiky a optiky. Mají-li se čtenáři náležitě vžít do doby, o níž píši, musím připomenout, že devatenácté století razilo heslo „Natura non facit saltus“ (Příroda neučiní skoku), podle něhož rozvinulo ve vědách evoluční názory, založené na spojitém průběhu přírodních jevů. Také zářivá energie byla podle těchto představ v paprsku rozložena spojitě a jen spojitě se mohla měnit, např. jinými tělesy pohlcovat apod. Planck učinil však předpoklad, že pohlcování zářivé energie není spojitě, nýbrž děje se po „soustech“, jež nazval k v a n t a. Rovněž vysílání zářivé energie děje se podle Plancka nespojitě v těchto elementárních kvantech, určitých, dále nedělitelných dávkách, jakýchsi „atomech“³⁾ energie, jež obsahují tím větší množství energie W , čím větší je kmitočet f uvažovaného jednoduchého (monochromatického) záření. Kvanta energie takového záření jsou vesměs stejná a všeobecně velmi malá, neboť k o n s t a n t a zvaná dnes P l a n c k o v a - Planck označoval ji však názvem Wirkungsquantum, ú č i n k o v é k v a n t u m - tj. konstanta úměrnosti vztahu $W = h \cdot f$ má hodnotu $h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ erg. sec, tedy jen 6,624 tisícín kvadriliontiny jednotky. Snadno pochopíme také, proč u vln malého kmitočtu je nespojitý charakter záření prakticky nepozorovatelný, kdežto u záření většího kmitočtu se tím zřetelněji projevuje z r n í t ý c h a r a k t e r z á ř í v é e n e r g i e.

Planckova představa, v době, o níž píši, přímo revoluční, byla ovšem zkoumána

³⁾ Řec. atomos = nedělitelný.

různými badateli také pokusně; ukázala se však naprosto správnou. Musím dodat, že Planck odvodil svůj tzv. vyzařovací zákon černého tělesa⁴⁾ v době, kdy ještě mnoho fyziků v existenci molekul a atomů nevěřilo, Planckův předpoklad, že zdrojem, jenž vysílá zářivou energii po kvantech hf, jsou kmitající molekuly, jevil se proto také z této příčiny velmi odvážným. Do vývoje zasáhl však šťastně bystrý Einstein. Snaže se podat přímý důkaz existence molekul a atomů a ověření zároveň mikroskopické předpoklady Planckovy, vyjádřil je pohotově obecnými principy termodynamiky. Na základě předpokladu existence kvant světelného pole (fotonů) a s použitím Bohrovy teorie atomu,⁵⁾ podal mimo to další odvození Planckova zákona a základní podmínky $W_1 - W_2 = h \cdot f$ pro frekvenci, jež je emitována, resp. absorbována, při přechodu elektronu mezi dvěma stavy s energiemi W_1 a W_2 .⁶⁾ Indický fyzik Boze odvodil Planckův zákon jako důsledek korpuskulární statistiky.

Planck sledoval i po svém odchodu do výslužby roku 1926 s neutuchajícím zájmem ruch, který do fyziky vnesla jeho představa o nespojitosti přírodního dění. Zemřel ve svém rodišti dne 4. října 1947. Dožil se tedy plného vítězství svých názorů i potvrzení důležitosti kvantové teorie pro celou moderní fyziku. Einstein aplikoval mj. Planckův zákon také na elastické oscilace v tuhém tělese a odvodil (opět za určitých předpokladů) závislost specifických tepel na teplotě, jež byla v oblasti nízkých teplot, kde se nejnápadněji projevuje, později rovněž plně potvrzena. Platnost Planckovy teorie kvantové se plně osvědčila mimoto také při výkladu některých pozoruhodných okolností při jevu fotoelektrickém,⁷⁾ jež pro starou teorii undulační (vlnivou) zůstaly nepochopitelné. Fotoefekt je jeden z nejmocnějších důkazů kvantové teorie světla, neboť ukazuje, jak nepatrné změny kvantitativní vedou na určitém stupni k zvratu kvantity v kvalitu, k změnám kvalitativním, jež však nenastávají spojitě, nýbrž náhle, skokem. Na Planckově teorii kvant byla založena mechanika zv. rovněž kvantová pro děje v prostorech mizivě malých, jež obsáhla bohatou řadu dalších fyzikálních jevů, pro něž dříve nebylo fyzikálního popisu, ani nejmenší možnosti vysvětlení. Také Planckova konstanta h stala se již universální fyzikální konstantou a hraje neobyčejně důležitou úlohu zejména v moderní atomistice.

Čtenáři ovšem mohou právem dodat: Planckovou teorií kvantovou v r a c í m e

⁴⁾ Matematické znění zákona mohou čtenáři nalézt např. ve vysokoškolské učebnici Friš - Timoreva: Kurs fyziky, III, § 292 „Zákony záření tělesa absolutně černého“.

⁵⁾ Podrobnější poučení o Planckově teorii, modelech atomu a kvantování elektronových drah přináší dílo prof. Dr. Z d. H o r á k a „Úvod do molekulové a atomové fyziky“. V roce 1957 vyšlo v 2. vydání.

⁶⁾ Podle Bohrovy teorie o struktuře hmoty (1913) vysílá elektron energii jen při přechodu na dráhu bližší středu. Obíhá-li v téže dráze, energii nevyzařuje. To však nesouhlasí s představami Lorentzovy teorie elektronové (1895), podle níž periodický pohyb elektrického náboje by byl zdrojem elektromagnetického záření. Na odstranění těchto rozporů pracuje Schrödingerova vlnová mechanika.

⁷⁾ Poučení o něm mohou čtenáři nalézt v článku doc. Dr. E m. K l i e r a „O fotoelektrickém zjevu“ v 35. ročníku Rozhledů, čís. 2, str. 68 až 75. Toliko hodnotu Planckovy konstanty $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ erg. sec, uvedenou na str. 74 cit. článku, opravuji podle novějších měření na údaj $6,624 \cdot 10^{-27}$ erg. sec výše připomenutý. (Viz např. Trkalovu Mechaniku hmotných bodů a tuhého tělesa, str. 388 aj.)

se do jisté míry k staré překonané představě Newtonově o korpuskulární podstatě světla. Nevracíme se k ní však v její původní formě, nýbrž ve formě propracovanější, vyspělejší. Tvrdívá se, že vývoj lidstva lze znázornit spirálou.⁸⁾ Na ní byla by pak Planckova teorie kvantová jistě umístěna nad Newtonovou teorií emanační, v poloze vyšší.

Cvičení.

1. Vypočtete energii kvanta záření - Einstein je nazval stručně fotonem - pro monochromatické světlo vysílané parami Na (žluté světlo sodíkové) o vlnové délce $\lambda = 5900 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 1 \text{ angström} = 10^{-8} \text{ cm}$).

2. Srovnajte energii fotonu pro krajní světla viditelného spektra, červené ($\lambda_1 = 7500 \text{ \AA}$) a fialové ($\lambda_2 = 4000 \text{ \AA}$).

3. Podle Einsteinova⁹⁾ vztahu $W = m \cdot c^2$ mezi energií W a hmotou m (c znamená rychlost světla v prázdném prostoru) přísluší fotonu též určitá „setrvačná hmota“. Doplňte předchozí cvičení také jejím vypočtením!¹⁰⁾

4. Pro které záření rovná se hmota fotonu hmotě a) elektronu, b) protonu?

K padesátiletému výročí úmrtí Williama Thomsona

William Thomson (čti viljem thomsn) se narodil 26. června 1824 v Belfastu jako syn profesora matematiky. Od raného mládí se zabýval vědeckými otázkami. Při své promoci uveřejnil 12 významných vědeckých prací. Po studiích v Paříži stal se ve věku 22 let profesorem fyziky v Glasgowě, kde pak působil až do své smrti. Od vynalezení parního stroje Jamesem Watterem usilovali badatelé o teoretické propracování parního stroje a zvláště je zajímala otázka, za jakých podmínek se dá teplo proměnit v práci. Začátek tehdy učinil Francouz Sadi Carnot. Po něm roku 1850 William Thomson a Němec Rudolf Clausius dospěli k formulaci 2. věty termodynamiky, která říká, že přeměna tepla v energii je omezena tím, že je třeba tepelného spádu, jehož výška určuje účinnost. Tím byla jasně prokázána nemožnost perpetua mobile druhého řádu. Thomson s Joulem objevili po nich nazvaný Thomson-Jouleův efekt, při němž expansí plynu dochází k jeho ochlazení, což později Linde využil při konstrukci stroje na zkapalňování plynů. Tím byl dán také základ dnes tak rozsáhlému průmyslovému odvětví chladírenských zařízení, chladniček a tepelných čerpadel. Zvláště významná je činnost Thomsonova na poli elektrotechniky. V roce 1861 s Quarantem sestrojil elektrometr a v roce 1868 si dal Thomson patentovat zrcadlový galvanometr. Od Thomsona pochází také první výpočet elektrických kmitů okruhů a na jeho podnět z roku 1861 došlo k vypracování

⁸⁾ O vývojové spirále lidstva můžete se dočíst také v učebnicové literatuře středních škol, např. v učebnici fyziky pro 11. postup. ročník, str. 286 aj.

⁹⁾ Tohoto vztahu užíváme také k výpočtu atomové neboli nukleární energie, energie vazby částic atomového jádra. Viz učebnici fyziky pro 11. ročník, str. 305.

¹⁰⁾ Uvědomte si zároveň, že světelné paprsky podléhají proto i gravitačnímu poli a šíří se v něm obecně křivočaře. Při úplném zatmění Slunce dne 21. září 1922 bylo naměřeno, že paprsek přicházející od stálice, kterou vidíme právě u okraje sluneční desky, se odchýlí od původního směru o $1,74''$.

vání základních elektrických jednotek. Thomson uveřejnil na 600 vědeckých prací a učinil 70 vynálezů, z nichž mnohé vedly k vzniku celých průmyslových odvětví, za což byl povýšen do šlechtického stavu jako Lord Kelvin. Zemřel v Glasgově 17. prosince 1907 ve věku 83 let.

Fr. Komurka (URANIA 12/57)

Josef Kotyk, Pardubice:

† Fr. Vyčichlo a „Rozhledy“

Poměr zesnulého českého matematika prof. Dr. Františka Vyčichla¹⁾ k našemu časopisu trval dlouhá léta a byl neobyčejně vřelý. Naší studující mládeži může být zároveň zářivým příkladem, jak rozsáhlou měrou může dobrý časopis přispět růstu vědeckého pracovníka.

Vyčichlo nalezl již jako studující bývalé státní reálky v Pardubicích k nejpilnějším čtenářům dřívějších „Rozhledů matematicko-přírodovědeckých“ a k nejúspěšnějším řešitelům úloh v nich otištěných. Také jeho další vývoj svědčí o tom, že „Rozhledy“ byly a zůstaly jeho láskou po celý život. Již roku 1932 stal se (počínajíc 12. ročníkem) jejich redaktorem a se svými spolupracovníky Dr. Al. Wanglerem, později Dr. Zd. Pírkem a Dr. Al. Urbanem, věnoval jim velikou péči zvýšením obsahové úrovně i zlepšením vnější úpravy, aby došly u naší studující mládeže té obliby jako u něho. Řídil je pak - s výjimkou toliko ročníku 17, 1937/38²⁾ - až do roku 1946 (ročník 25 včetně). Přátelům z Jednoty čs. matematiků a fyziků se netajil tím, že musí „Rozhledům“ vděčně splatit dluh, jímž se jim pro celý svůj život cítí zavázán za služby, které mu prokázaly. Tato slova zůstanou ctí zesnulého soudruha prof. Dr. Františka Vyčichla, nositele Řádu práce, a „Rozhledům“ zároveň nejlepším doporučením na jejich pouti k srdcím čtenářů.



Redakce hovoří se čtenáři

Přejeme našim čtenářům úspěšné zakončení školního roku i příjemné prázdniny a těšíme se, že do 15. července nám ještě zašlou správná řešení příkladů.

¹⁾ Viz článek doc. Bořivoje Kepra „Za prof. RNDr. Františkem Vyčichlem“ v čís. 2, str. 95 a 96.

²⁾ Ročník dřívějších „Rozhledů matematicko-přírodovědeckých“ byl totožný se školním rokem. Tato praxe byla pro žáky i učitele výhodnější než dnešní.

Jiří Sedláček, kand. věd, Praha:

Sedm ročníků Matematické olympiády

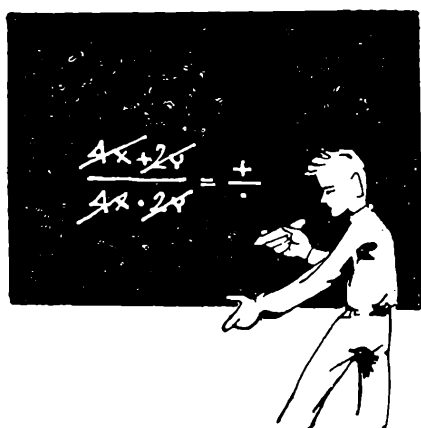
V uplynulém školním roce 1957/58 probíhal na našich středních školách již sedmý ročník populární matematické soutěže, známé pod názvem Matematická olympiáda. Soutěž pořádá každoročně ministerstvo školství a kultury spolu s Matematickým ústavem Československé akademie věd a Ústředním výborem ČSM. Počet řešitelů, kteří se za oněch sedm let soutěže zúčastnili, je úctyhodný. Mnoho mladých lidí vděčí Matematické olympiádě za to, že v nich probudila zájem o studium matematiky. Mnozí řešitelé, kteří úspěšně prošli prvními ročníky naší soutěže, působí nyní již jako asistenti na vysokých školách, pracují ve vědeckých ústavech, nebo učí na středních školách. Také pro přípravu ke studiu technických věd vykonala Matematická olympiáda mnoho, vždyť pro posluchače vysokých škol technických je matematika jedním z nejdůležitějších předmětů.

O naši soutěž se také zajímá širší veřejnost školská i mimoškolská. Je celkem samozřejmé, že zprávy o Matematické olympiádě přinášejí téměř všechny naše matematické časopisy. Soutěži však věnuje pozornost též denní tisk a Československý rozhlas. Matematická olympiáda bývá pravidelným bodem jednání na krajských a okresních schůzích učitelů a školských pracovníků, jejichž obětavé práci děkuje soutěž za svůj zdárný průběh.

Sedmý ročník Matematické olympiády byl zakončen třetím kolem, které se konalo v Praze v sobotu 24. května 1958. K třetímu kolu se sjelo 80 řešitelů z celé republiky, které vybral Ústřední výbor Matematické olympiády z nejlepších účastníků kategorie A. Sobotní dopoledne bylo věnováno vlastní soutěži. Po společném obědě navštívili účastníci zajímavou výstavku, kterou s názvem „S e d m r o č n í k ů M a t e m a t i c k é o l y m p i á d y“ uspořádala katedra matematiky Vysoké školy pedagogické v Praze v budově své školy. Výstavka byla pěknou ukázkou z historie Matematické olympiády v ČSR a informovala také o matematických soutěžích v zahraničí.

Sobotní odpoledne vyplnila tradiční beseda s účastníky III. kola soutěže. Beseda se konala (jako každoročně) ve velké posluchárně matematicko-fyzikální fakulty v Praze II, Ke Karlovu 3 a účastnila se jí vedle olympioniků též širší veřejnost. Besedu zahájil a řídil akademik Josef Novák, předseda Ústředního výboru Matematické olympiády. Naši studenti vyslechli dva zajímavé referáty. Akademik Vojtěch Jarník promluvil o studiu na matematicko-fyzikální fakultě a prof. dr. Alois Urban informoval zájemce o studiu na vysoké škole technické. Besedu uzavřela živá diskuse. Po společné večeři navštívili mladí olympionikové divadelní představení v Divadle komedie.

Z osmdesáti účastníků III. kola bylo vybráno dvacet nejlepších a ti byli podle organizačního řádu soutěže prohlášeni vítězi sedmého ročníku Matematické olympiády.¹⁾ Čestné diplomy i hodnotné ceny ministerstva školství a kultury, které vítězové za svou práci dostali, zůstanou pro ně jistě trvalou upomínkou na chvíle, které strávili nad zajímavými i obtížnými příklady Matematické olympiády. Jednota čs. matematiků a fyziků věnovala všem účastníkům řadu odborných knih.



Matematika

Inž. Dr. Josef Langr, Praha:

Věta o trojúhelníku

Jádrem tohoto článku je věta uvedená v odst. II. Aby se mohla dokázat, je k tomu potřeba dokázat některé pomocné věty. Ty se dokazují v odst. I. V celém článku jsou vrcholy trojúhelníka označeny A, B, C , délky jeho stran jsou a, b, c , střed vepsané kružnice je O a její poloměr ρ ; body dotyku této kružnice se stranami BC, CA, AB jsou po řadě A', B', C' (obr. 1).

I. Pro jednoduchost označme

$$AC' = AB' = x$$

$$BC' = BA' = y$$

$$CA' = CB' = z$$

Potom platí

$$x + y = c$$

$$y + z = a \tag{a}$$

$$x + z = b$$

Sečtením těchto tří rovnic obdržíme

$$x + y + z = s, \tag{b}$$

¹⁾ Jejich jména přináší „Rozhledy“ na jiném místě.

kde s je poloviční obvod. Z rovnic (a), (b) plyne

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \quad (\text{I})$$

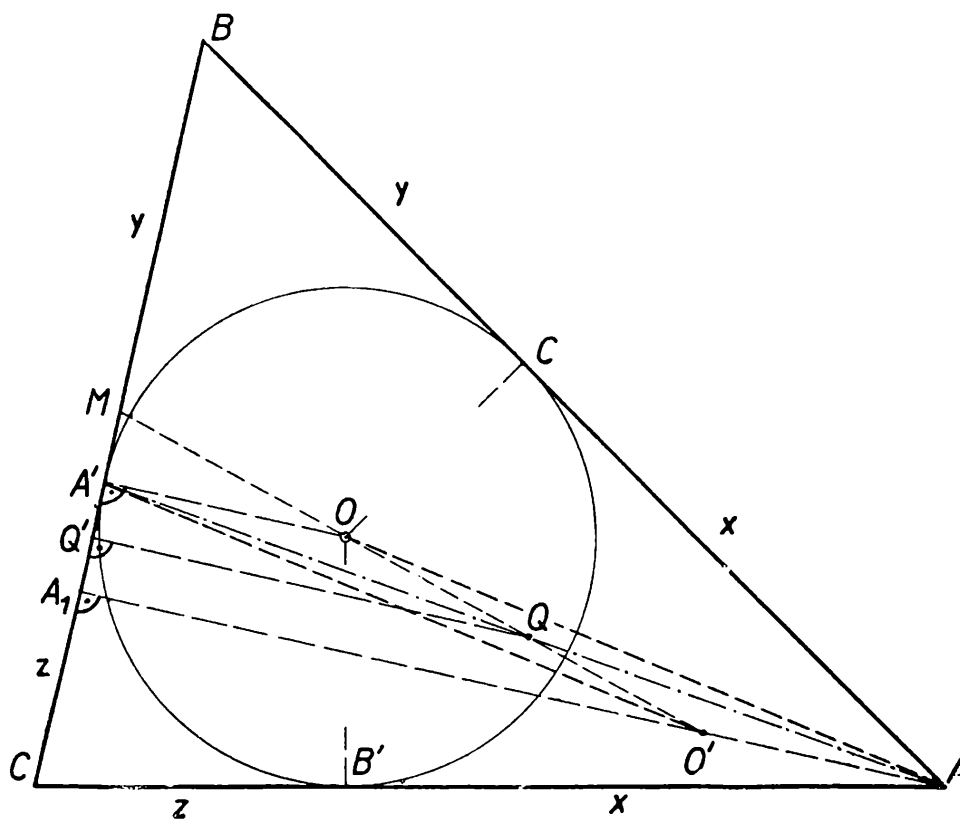
Tím jsme dospěli k první pomocné větě.

Patu výšky procházející vrcholem A označme A_1 a její délku v_a . Střed strany BC označme M . Počítejme délku MA_1 . Označme $CA_1 = u$, $BA_1 = t$. Tudíž

$$t + u = a. \quad (\text{c})$$

Použijeme-li Pythagorovy věty na pravoúhlé trojúhelníky AA_1C , AA_1B , obdržíme

$$\begin{aligned} u^2 &= b^2 - v_a^2 \\ t^2 &= c^2 - v_a^2. \end{aligned}$$



Obr.

Odečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$t^2 - u^2 = c^2 - b^2,$$

což psáno v jiném tvaru dá

$$(t + u)(t - u) = c^2 - b^2.$$

S ohledem na rovnici (c) můžeme této rovnici dát tvar

$$t - u = \frac{c^2 - b^2}{a}.$$

K této rovnici připojíme rovnici (c) a řešením tak vzniklé soustavy dostaneme

$$t = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

A nyní můžeme již počítat délku úsečky MA_1 .

$$MA_1 = BA_1 - BM = t - \frac{1}{2}a = \frac{c^2 - b^2}{2a}. \quad (\text{II})$$

Střed úsečky AA' označme Q . Patu kolmice spuštěné z bodu Q na stranu BC označme Q' . Počítejme délku úsečky MQ' :

$$MQ' = MA' + \frac{1}{2}A'A_1.$$

Vyjádríme nyní délku úsečky $A'A_1$ pomocí stran trojúhelníka ABC .

$$A'A_1 = BA_1 - BA' = t - y = \frac{(c - b)(-a + b + c)}{2a}$$

Potom

$$\begin{aligned} MQ' &= \frac{c - b}{2} - \frac{(c - b)(-a + b + c)}{4a} = \\ &= \frac{(c - b)(a + b + c)}{4a} = \frac{(c - b)s}{2a} \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Toto je další pomocný vzorec. A ještě jeden pro obsah trojúhelníka.

Střed O vepsané kružnice spojme s vrcholy A, B, C daného trojúhelníka. Tím se tento trojúhelník rozdělí na tři trojúhelníky: ABO, BCO, ACO . Obsah P trojúhelníka ABC je pak roven součtu obsahů těchto tří trojúhelníků:

$$P = \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}c\rho = s\rho.$$

Můžeme tudíž psát

$$\frac{1}{2}av_a = s\rho. \quad (\text{IV})$$

II. *Je-li v trojúhelníku ABC bod M střed strany BC a A' její bod dotyku s vepsanou kružnicí o středu O , potom přímka MO půlí úsečku AA' .*

Důkaz provedeme tak, že budeme předpokládat pravdivost vyslovené poučky, vyvodíme z ní určité vztahy a z nich dojdeme k správnému, jednoduchému a všeobecně známému vztahu. Potom obráceně z tohoto vztahu dojdeme k naší poučce. Tím bude důkaz proveden. Kdybychom totiž předpokládali pravdivost nějaké nesprávné poučky, dospěli bychom ke sporu.

Předpokládejme tedy, že vyslovená poučka je správná. Střed úsečky AA' označme Q a patu kolmice spuštěné z Q na BC označme Q' . Trojúhelníky $QQ'M, OA'M$ jsou podobné a proto platí

$$QQ' : OA' = MQ' : MA' \quad (\text{d})$$

Ale

$$\begin{aligned} QQ' &= \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} v_a \\ OA' &= \rho \\ MQ' &= \frac{(c-b)s}{2a} \text{ podle (III)} \\ MA' &= \frac{c-b}{2} \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do úměry (d), dostaneme po kratší úpravě

$$\frac{1}{2} v_a \quad \rho = \frac{s}{2a} \quad 1$$

a z této obdržíme již identitu (IV):

$$\frac{1}{2} a v_a = s \rho .$$

Došli jsme tak ke správnému výsledku.

A nyní obráceně. Vyjděme z identity

$$a v_a = 2s \rho$$

a upravujme ji následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} v_a \quad \rho &= 2s \quad a \\ \frac{1}{2} v_a \quad \rho &= \frac{s}{a} : 1 \\ \frac{1}{2} v_a \quad \rho &= \frac{s(c-b)}{2a} \quad \frac{c-b}{2} \end{aligned}$$

Této rovnici můžeme již dát tvar

$$XY \quad OA' = MQ' : MA' ,$$

kde XY je úsečka délky v_a rovnoběžná s OA' , přičemž bod Y leží na BC . Bod X leží na přímce MO a poněvadž $XY = \frac{1}{2} v_a$, musí být $X \equiv Q$ a $Y \equiv Q'$.

Ú l o h a. Právě dokázané věty použijeme k sestrojení trojúhelníka, je-li dán poloměr ρ vepsané kružnice, výška v_a a těžnice $t_a > v_a > 2\rho$.

Ř e š e n í. Je ihned patrné, že můžeme sestrojiti pravoúhlý trojúhelník AMA_1 , který je dán přeponou $AM = t_a$ a odvěsnou $AA_1 = v_a$. Na úsečce AA_1 sestrojme bod O' tak, aby $AO' = \rho$. Potom čtyřúhelník $AOA'O'$ je rovnoběžník, neboť $AO' = OA'$ a zároveň $AO' \parallel OA'$. Střed tohoto rovnoběžníku je bod Q , tj. střed úsečky AA' . To však znamená, že body O', Q, O, M leží v jedné přímce. Bod O (Q) leží na úsečce $O'M$ ve vzdálenosti ρ ($\frac{1}{2} v_a$) od BC . Známe-li střed O vepsané kružnice, můžeme vepsanou kružnici sestrojiti a další je již známé.

O řešení cyklických rovnic

V učebnicích matematiky a ve sbírkách úloh vyskytuje se obvykle příklad: *Určíte velikost hran kvádra, jehož tři stěny, tvořící týž roh, mají dané obsahy p , r a s .* K jejímu řešení sestavíme si rovnice

$$\begin{aligned} ab &= p \\ bc &= r \\ ac &= s, \end{aligned} \tag{1}$$

v nichž a , b a c je označení hledaných hran. Lze je řešit i méně vhodnými způsoby, ale zvláště pěkný je ten, že si nejprve najdeme pomocnou rovnici, vyjadřující součin všech neznámých. Ujijeme k tomu rovnice, značící, že součin levých stran rovnic v soustavě (1) rovná se součinu jejich pravých stran. Řekněme stručně, že dané rovnice spolu vynásobíme; podobně zde budeme užívat rčení, že dané rovnice sčítáme, nebo že rovnice dělíme a odčítáme. Získáme rovnici $abc = \sqrt{p r s}$ a z ní dělením rovnicí druhou, nebo třetí, nebo prvou obdržíme po řadě

$$a = \frac{\sqrt{p r s}}{r}, \quad b = \frac{\sqrt{p r s}}{s} \quad \text{a} \quad c = \frac{\sqrt{p r s}}{p}$$

Obdobný obrat dá se upotřebit u řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c. \end{aligned} \tag{2}$$

Ze součtu rovnic odvodí se pomocná rovnice

$$x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

a když od ní odečteme rovnici druhou, nebo třetí, nebo první, dostaneme po řadě

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a - b + c), \\ y &= \frac{1}{2}(a + b - c), \\ z &= \frac{1}{2}(-a + b + c). \end{aligned} \tag{2'}$$

Stačí však jen zběžný pohled na soustavu (2) a její řešení a shledáme, že je v podstatě obdobná soustavě (1) a dá se z ní odvodit logaritmováním. Věnujeme se tedy jen jedné z nich a zkusíme řešit stejným způsobem soustavu n rovnic, v nichž se v každé vyskytuje součet stejného množství m neznámých a to tak: Zvolíme si na kružnici n bodů třeba tak, že tvoří vrcholy pravidelného n -úhel-

níka. Pojmenujeme je stejně jako jsou označeny neznámé $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ¹⁾ v rovnicích se vyskytují vždy součty těch m neznámých, které tvoří pojmenování m sousedních vrcholů. V první rovnici $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, ve druhé $x_2, x_3, x_4, \dots, x_{m+1}$, až v poslední n -té jsou to $x_n, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. Tím si též vysvětlíme, proč soustavám takových tvarů říkáme soustavy rovnic kruhových čili cyklických.

Řešme soustavu čtyř cyklických rovnic, v nichž se vyskytuje po dvou neznámých. Neznámé si označíme x, y, z, u , známá čísla píšeme obecně a, b, c, d . Je tedy

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + u &= c \\ x + u &= d. \end{aligned} \tag{3}$$

Pomocnou rovnicí získáme opět sčítáním daných rovnic a je

$$x + y + z + u = \frac{1}{2}(a + b + c + d);$$

ale nepodaří se již odčítáním jedné z rovnic (3), nebo užitím několika z nich, dokončit řešení. Snadno také najdeme příčinu: Součet rovnice první a třetí má levou stranu $(x + y + z + u)$ stejnou jako je levá strana součtu rovnice druhé a čtvrté. Měly by se tudíž rovnat i součty na pravých stranách. A tu je dvojí možnost: buď se skutečně součty na pravých stranách sobě rovnají, potom však nejsou rovnice na sobě nezávislé a nestačí k řešení, nebo se sobě uvedené součty nerovnají a rovnice nemají společné řešení, neboť si odporují. Nedá se tedy uvedená soustava řešit.

Protože však soustava

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ y + z + u &= b \\ x + z + u &= c \\ x + y + u &= d \end{aligned}$$

opět řešení má, pokusme se najít podmínku, na níž možnost řešení závisí a jak se řešení najde.

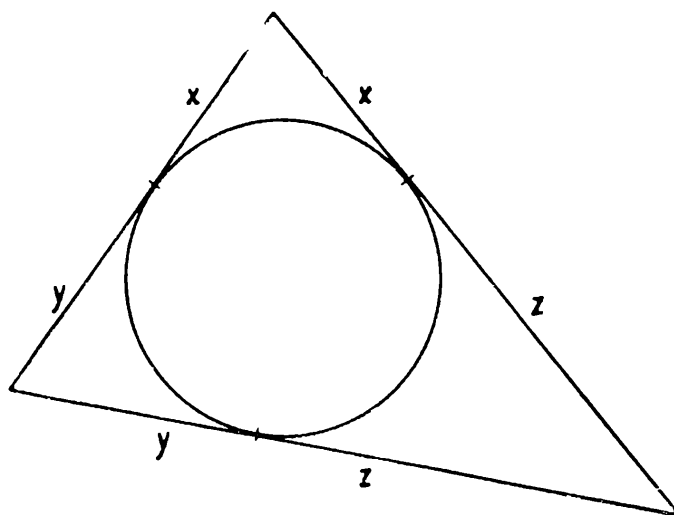
Shledáme, že pět cyklických rovnic o pěti neznámých má vždy řešení, ať se v nich v každé vyskytuje po dvou, po třech nebo po čtyřech neznámých. Naproti tomu taková soustava šesti rovnic má řešení jen tehdy, je-li v každé rovnici pět neznámých a nemá řešení, je-li v nich po dvou, po třech nebo po čtyřech neznámých. Sledováním soustav i vyššího počtu takových cyklických rovnic najdeme pravidlo, které se dá obecně dokázat:

¹⁾ Při menším počtu neznámých označujeme je r ú z n ý m i písmeny z konce abecedy, tedy např. x, y, z, u atp., při větším jejich počtu označujeme neznámé pro přehlednost $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (pro n -tou neznámou).

Soustavy cyklických rovnic mají řešení jen tehdy, je-li číslo n , udávající počet rovnic (a tedy současně i počet neznámých) nesoudělné s číslem m , které značí počet neznámých v každé rovnici.

Pod pojmem rovnice mají řešení rozumí se tu, že rovnice mají určité řešení jediné. Protože důkaz tvrzení a způsob obecného řešení je zdlouhavý, nebudeme jej uvádět a přikročíme hned k upotřebení.

Užití. Představíme si, že v soustavě rovnic (2) značí hodnoty a, b, c délky stran trojúhelníka a x, y, z jsou jejich části, na které je dělí příslušný dotykový bod kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 1). Soustava má jediné řešení, vyjádřené vzorci (2') a jsou ovšem kladná (to je vyhovující úloze) jen pro případ, že součet kterýchkoli dvou stran je větší než zbývající strana třetí.



Obr. 1

Složitější je to pro soustavu (3). Jsou-li tu a, b, c, d strany vypuklého čtyřúhelníka a x, y, z, u jejich části, vymezené z nich dotykovými body vepsané kružnice (obr. 2), musí být $a + b = c + d (= x + y + z + u)$, což je známá vlastnost čtyřúhelníka opsaného kružnici. Ale ani po splnění této podmínky nelze určit úseky x, y, z, u , neboť uvedená soustava nemá jediné řešení. Je možno zvolit si libovolně jeden úsek např. x ; ostatní se najdou pomocí prvních tří rovnic soustavy.

Pro pětiúhelník opsaný kružnicí vychází jediné řešení. Tu je

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + u &= c \\ u + v &= d \\ v + x &= e. \end{aligned}$$

Ze součtu těchto rovnic snadno dostaneme rovnici

$$x + y + z + u + v = \frac{1}{2}(a + b + c + d + e).$$

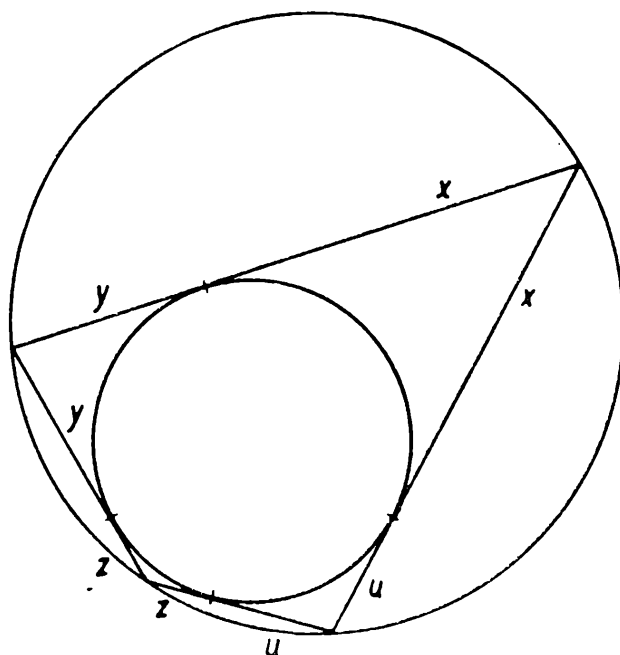
Odečteme-li rovnici druhou a čtvrtou dostaneme, že

$$x = \frac{1}{2}(a - b + c - d + e)$$

a podobně najdeme

$$y = \frac{1}{2}(a + b - c + d - e)$$

a tak i ostatní úseky. Z nich shledáme, že vypočtené úseky vyjdou kladné (a tedy řešení bude upotřebitelné) jen tehdy, když součet kterýchkoli dvou nesousedních stran je menší než součet stran ostatních.



Obr. 2

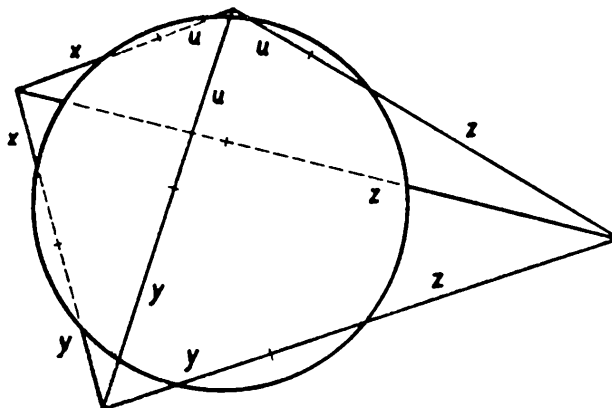
Pro šestiúhelník opsaný kružnicí opět nevyjde jediné řešení, i kdyby byla splněna podmínka, kterou snadno nalezneme, že totiž musí jeho strany být takové, že je $a + c + e = b + d + f$.

Tak bychom mohli pokračovat a došli bychom k závěru: Jsou-li dány délky všech n stran mnohoúhelníka opsaného kružnici, je možno vždy najít poloměr této kružnice, splňují-li délky stran podmínku: pro n liché je součet délek každých $\frac{n-1}{2}$ nesousedních stran menší než součet délek stran zbývajících; pro sudé n

se součty délek $\frac{n}{2}$ nesousedních stran sobě rovnají. Pro liché n je řešení jediné, pro sudé n je úloha neurčitá, má nesmírně mnoho řešení.

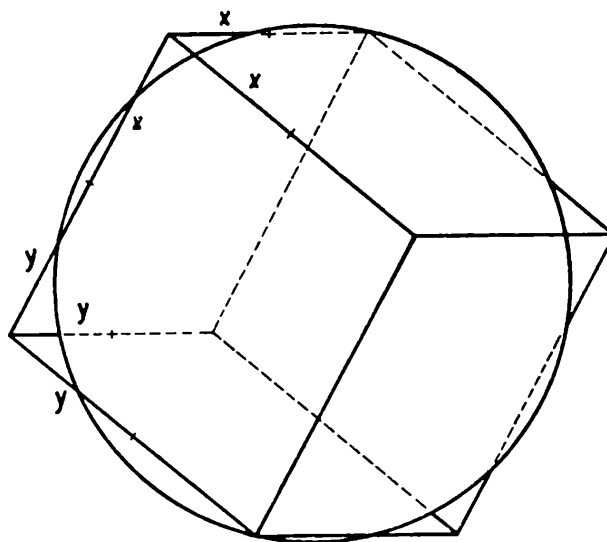
Ú l o h a. Máme za úkol sevřít co nejpevněji kruhový útvar (nebo válec s kruhovým řezem) n tyčemi skloubenými tak, že tyče tvoří tečnový n -úhelník s klouby ve vrcholech.

Ke konstrukci je vhodné užít jen lichého počtu tyčí, neboť potom je pohyb v kloubech nemožný.



Obr. 3

Při použití sudého počtu tyčí není vždy sevření zaručeno. Např. čtyřmi tyčemi utvořený čtyřúhelník může měnit tvar pohybem v kloubech, to je vrcholech tak, že vepsaný kruh se uvolní, neboť se dá nahradit vepsaným kruhem větším. Jenom v tom případě, že vepsaný kruh má největší možný poloměr, je konfigurace pevná. Výpočtem se můžeme přesvědčit, že v takovém případě je možno



Obr. 4

čtyřúhelníku opsat kružnici, takže je současně čtyřúhelníkem tečnovým i tětiovým (obr. 2). Protože u tětiového čtyřúhelníka jsou součty protějších úhlů stejné, jsou některé konstrukce vhodných čtyřúhelníků jednoduché: Jednou z nich je konstrukce čtvercová, jinou je konstrukce tvaru takového deltoidu, který je souměrný podle delší úhlopříčky a je jí rozdělen na dva pravoúhlé trojúhelníky shodné.

Podobně by tomu bylo i pro jiné mnohoúhelníky se sudým počtem stran. Konstrukce by byla pevná jen tehdy, když by tyčemi sevřený kruh byl největší ze všech možných kruhů. A to by určitě nastalo při pravidelných n -úhelnících.

Úvahy dají se též rozšířit do prostoru: *Máme co nejpevněji sevřít tyčovou kloubovou konstrukcí těleso kulového tvaru.*

Sestavíme si šest tyčí délek a, b, c, d, e, f tak, že vytvoří hrany čtyřstěnu. Sevřená koule se dotýká hran (obr. 3) a dotykovými body je dělí na takové části x, y, z, u , že je

$$\begin{array}{ll} x + y = a & u + z = d \\ x + z = b & u + y = e \\ x + u = c & y + z = f \end{array}$$

Hned vidíme, že délky hran nemohou být libovolné, ale musí splňovat podmínky $a + d = b + e = c + f (= x + y + z + u)$. Všechny tři součty dvojic protilehlých hran jsou si rovny. Je-li tomu tak, potom má uvedená soustava řešení a to jediné. To značí, že tyčová konstrukce tvaru hran čtyřstěnu je pevná.

Podobně zjistíme, že je pevná konstrukce z dvanácti tyčí, tvořící hrany krychle (obr. 4).

Stálo by za úvahu řešit i jiné možnosti obdobných tyčových konstrukcí. Složitější případy nastanou, chceme-li sevřít tyčemi dva kruhy, dvě nebo více koulí.

Stanislav Musil, studující M. U., Brno:

Poznámka k řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty

Řešení kvadratické rovnice

$$AX^2 + BX + C = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty A, B, C jsou komplexní čísla, je dáno známým vzorcem

$$X_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \tag{2}$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že vzorec (2) bude platit skutečně i pro řešení rovnice (1) s komplexními koeficienty, prohlédne-li si odvození vzorce v učebnici Algebry pro 9. postupný ročník JSS. Během odvození se užívá úkonů slučování, násobení a dělení, jež jsou pro čísla komplexní definovány; jde pouze o stanovení významu \sqrt{D} .

Diskriminant $D = B^2 - 4AC$ je rovněž komplexní číslo, lze jej tedy psát ve tvaru

$$D = d_1 + d_2i, \quad i^2 = -1,$$

kde d_1 a d_2 jsou reálná čísla.

Je-li

$$d_2 \neq 0, \quad (3)$$

může odmocňování diskriminantu způsobit potíže. Nelze-li se tomu vůbec vyhnout (viz Rozhledy roč. 35, str. 148), postupujeme zpravidla následujícím způsobem:

Předpokládejme, že existuje druhá odmocnina diskriminantu $D = d_1 + d_2i$, $d_2 \neq 0$ a že je to rovněž komplexní číslo Y

$$Y = y_1 + y_2i,$$

o kterém musí platit

$$Y^2 = D; \quad (4)$$

to znamená

$$(y_1 + y_2i)^2 = d_1 + d_2i. \quad (5)$$

Umocněním na levé straně a srovnáním reálných a imaginárních částí na obou stranách rovnice (5) získáme

$$y_1^2 - y_2^2 = d_1, \quad (6a)$$

$$2y_1y_2 = d_2. \quad (6b)$$

Reálná čísla y_1, y_2 jsou obě od nuly různá; kdyby bylo totiž $y_1 = 0$, pak Y^2 by bylo reálné (podobně pro $y_2 = 0$), což odporuje našemu předpokladu (3).

Je-li tedy $y_1 \neq 0$, lze z rovnice (6b) vypočítat y_2 a dosadit do rovnice (6a). Po úpravě obdržíme

$$4y_1^4 - 4d_1y_1^2 - d_2^2 = 0; \quad (7)$$

položíme-li $y_1^2 = z$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$4z^2 - 4d_1z - d_2^2 = 0.$$

Její kořeny jsou dány výrazem

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} (d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2}).$$

Pro nás bude mít význam z obou kořenů pouze kořen kladný, neboť číslo y_1 , pro něž platí $y_1^2 = z$, musí být reálné, různé od nuly. Protože platí

$$d_1 \geq -|d_1| > -\sqrt{d_1^2 + d_2^2},$$

je vždy kladný kořen z_1 , tedy

$$z_1 = \frac{1}{2} (d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2^2}) > 0.$$

Snadno se dá dokázat, že naopak kořen z_2 je vždy záporný. Řešení rovnice (7) získáme ze vztahu

$$y_1^2 = z_1. \quad (8)$$

Existují dvě reálná čísla y_1 , lišící se pouze znaménky a vyhovující podmínce (8); jim odpovídají rovněž dvě reálná čísla y_2 , která vypočítáme z relace

$$y_2 = \frac{d_2}{2y_1},$$

plynoucí z rovnice (6b).

Tak jsme dostali dvě komplexní čísla Y

$$Y = y_1 + y_2 i, \quad (9)$$

která se liší znaménky obou částí, takže jsou opačná a splňují rovnici (4), o čemž se přesvědčíme dosazením.

Dosadíme-li nyní jedno z obou čísel (9) do vzorce (2), obdržíme kořeny dané kvadratické rovnice s komplexními koeficienty ve tvaru

$$X_{1,2} = \frac{-B \pm Y}{2A}.$$

Řešením kvadratické rovnice (1) jsme rozřešili i jinou důležitou úlohu, totiž nalézt číslo, jehož dvojmoc je rovna danému komplexnímu číslu, tj. řešit rovnici (4), kde D je dané imaginární číslo. Poznali jsme, že taková čísla existují dvě a že jsou navzájem opačná. Libovolné z nich můžeme nazvat druhou odmocninou komplexního čísla D , což zapíšeme $Y = \sqrt{D}$, pro zbývající druhé číslo Y lze psát pak $Y = -\sqrt{D}$. Nyní již umíme řešit kteroukoliv kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty.

P ř í k l a d 1. Vypočítejte druhé odmocniny komplexního čísla $21 + 20i$.

Ř e š e n í. Budeme řešit rovnici

$$(y_1 + y_2 i)^2 = 21 + 20i.$$

Umocněním a srovnáním reálných a imaginárních částí získáme rovnice

$$y_1^2 - y_2^2 = 21,$$

$$2y_1 y_2 = 20, \quad y_1 \neq 0,$$

odkud plyne

$$y_2 = \frac{10}{y_1},$$

po dosazení do první rovnice:

$$y_1^2 - \frac{100}{y_1^2} = 21.$$

Nyní položíme $y_1^2 = z$ a po úpravě máme

$$z^2 - 21z - 100 = 0;$$

kořeny jsou

$$z_1 = 25, \quad z_2 = -4.$$

Tedy

$$y_1^2 = 25, \quad \text{čili } y_1 = \pm 5,$$

a konečně

$$y_2 = \pm \frac{10}{5} = \pm 2$$

Hledané odmocniny jsou dvě: $+(5 + 2i)$ a $-(5 + 2i)$. Jejich umocněním se přesvědčíme o správnosti výpočtu.

Příklad 2. Řešte kvadratickou rovnici $X^2 - (1 - 3i)X + (2 + 6i) = 0$.

Řešení. Nejprve vypočítáme diskriminant dané rovnice:

$$D = -16 - 30i.$$

Použitím předchozího postupu zjistíme jeho odmocniny

$$Y = \pm \sqrt[3]{D} = \pm (3 - 5i),$$

dosadíme do vzorce pro řešení kvadratické rovnice a máme

$$X_{1,2} = \frac{(1 - 3i) \pm (3 - 5i)}{2} = \begin{cases} (2 - 4i) \\ (-1 + i) \end{cases}$$

O správnosti výpočtu se opět přesvědčíme dosazením do dané rovnice.

Cvičení.

1. Nalezněte druhé odmocniny komplexních čísel:

a) $24 - 7i$,

c) $3 - 4i$,

b) $4 + 3i$,

d) $12 + 5i$.

2. Řešte kvadratické rovnice s komplexními koeficienty:

a) $X^2 - (4 + 2i)X + (6 + 8i) = 0$;

b) $X^2 - 4iX + 3 + 24i = 0$.

3. Dokažte, že pro $|y_1|$ a $|y_2|$ platí tyto vzorce:

$$|y_1| = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2^2})}, \quad |y_2| = \sqrt{\frac{1}{2}(-d_1 + \sqrt{d_1^2 + d_2^2})}.$$

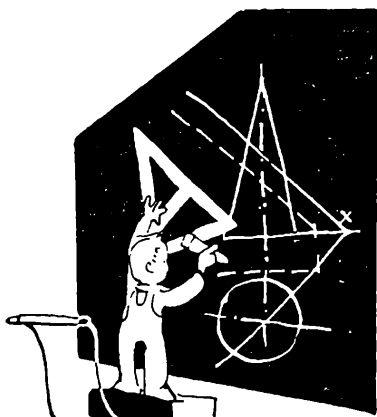
Hodnoty y_1 a y_2 získáme, dáme-li před odmocniny na pravých stranách obou vzorců příslušná znaménka (viz následující cvičení).

4. Přesvědčte se, že znaménka hodnot y_1 a y_2 jsou závislá na znaménku čísla d_2 . Závislost vyjadřuje tabulka:

d_2	y_1	y_2
+	\pm	\pm
-	\pm	\mp

Výsledky cvičení 1 a 2.

1. a) $\pm \frac{1}{2} \sqrt{2} (7 - i)$, c) $\pm (2 - i)$,
 b) $\pm \frac{1}{2} \sqrt{2} (3 + i)$, d) $\pm \frac{1}{2} \sqrt{2} (5 + i)$.
2. a) $X_1 = 3 - i, X_2 = 1 + 3i$;
 b) $X_1 = 3 - 2i, X_2 = -3 + 6i$.



Deskriptivní geometrie

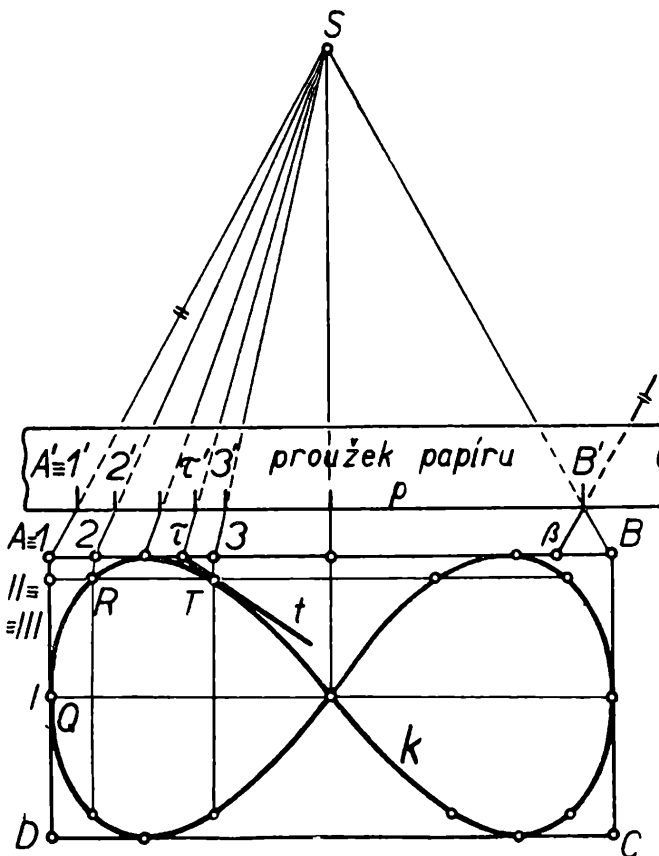
Ladislav Drs, Praha:

Rovnoběžný průmět rovinné křivky

Máme-li zobrazit v jakémkoli rovnoběžném promítání rovinnou křivku, můžeme tuto úlohu vyřešit otočením roviny křivky do průmětny a afinitou. Můžeme však použít jiné metody, která spočívá na větě, že se rovnoběžným promítáním nemění dělicí poměr bodů přímky. Podrobně si ji vysvětlíme v následujícím příkladě.

Dané křivce k (obr. 1) opišme obdélník $ABCD$. Zvolme na této křivce body Q, R, T, \dots a veďme jimi rovnoběžky se stranami obdélníka, které protnou stranu AB v bodech 1, 2, 3, \dots a stranu AD v bodech I, II, III, \dots . Případně sestrojme ještě průsečík τ tečny t křivky k v bodě T se stranou AB .

Půdorys a nárys této křivky, jsou-li dány průměty obdélníka $ABCD$, sestrojíme tímto způsobem (obr. 2): Zvolíme v obr. 1 libovolný bod S , neležící na přímce AB , střed svazku přímk, které procházejí body $A = 1, 2, 3, \dots, B$. Na hraně p proužku papíru sestrojíme body A', B' takové, že

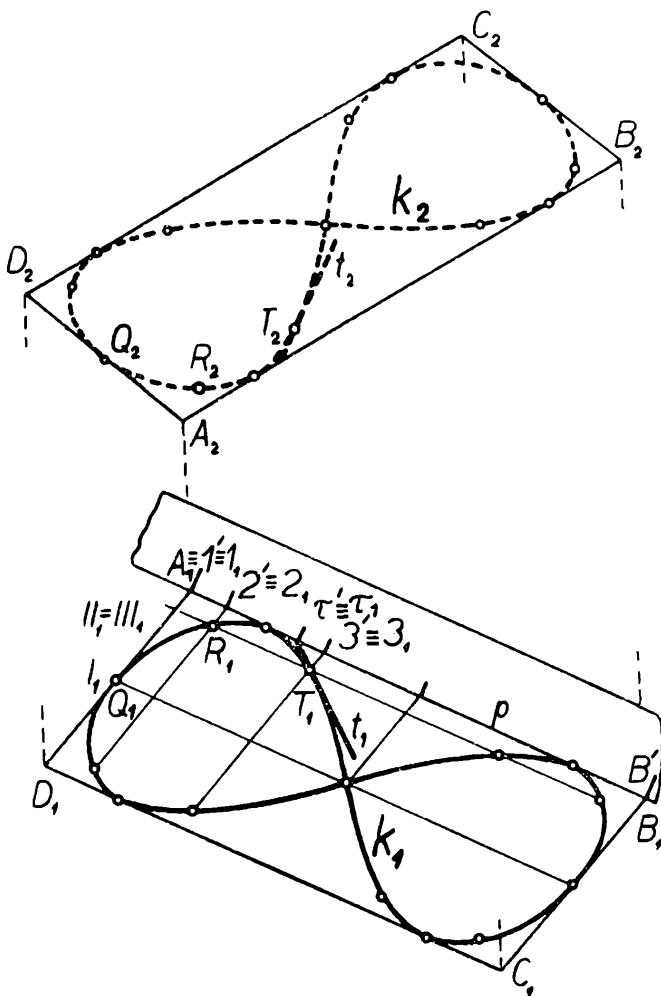


Obr. 1

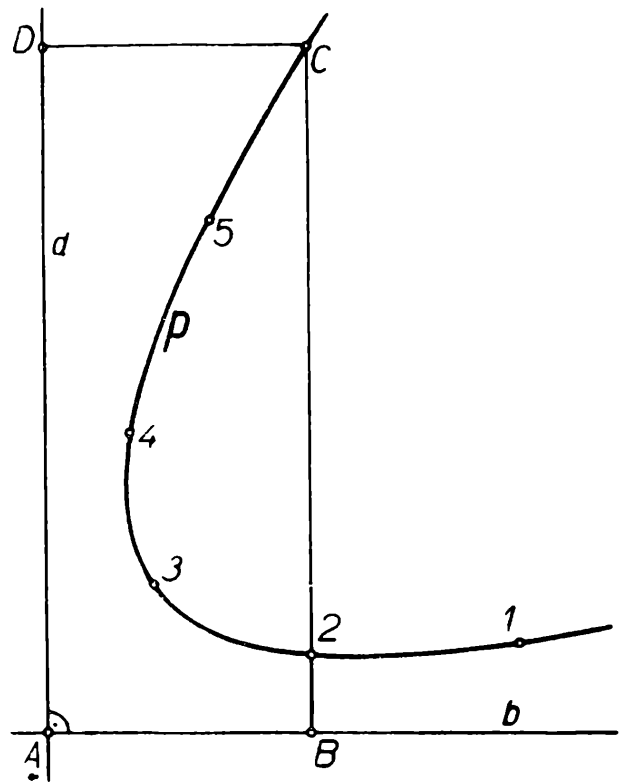
$A_1B_1 = A'B'$. Hranu p proužku položíme rovnoběžně s přímkou AB tak, aby na přímce SA ležel bod A' a na přímce SB bod B' . Přesně to lze provést konstrukcí naznačenou na obr. 1. Na straně AB sestrojíme bod β tak, aby $A_1\beta_1 = A\beta$. Bodem β vedeme rovnoběžku s přímkou AS a jejím průsečíkem B' s přímkou BS přímkou $p \parallel AB$. Je-li A' průsečík přímek AS , p , platí $A_1B_1 = A'B'$. Jestliže přímky svazku, jdoucí body 1, 2, 3, ... protnou hranu proužku v bodech 1', 2', 3', ..., pak platí

$$\frac{A' 2'}{B' 2'} = \frac{A 2}{B 2}, \quad \frac{A' 3'}{B' 3'} = \frac{A 3}{B 3}, \dots \quad \frac{A' I'}{B' I'} = \frac{A I}{B I}, \quad \frac{A' II'}{B' II'} = \frac{A II}{B II}, \dots$$

Běží totiž o úseky na rovnoběžkách prořátých svazkem přímek a ty jsou úměrné.



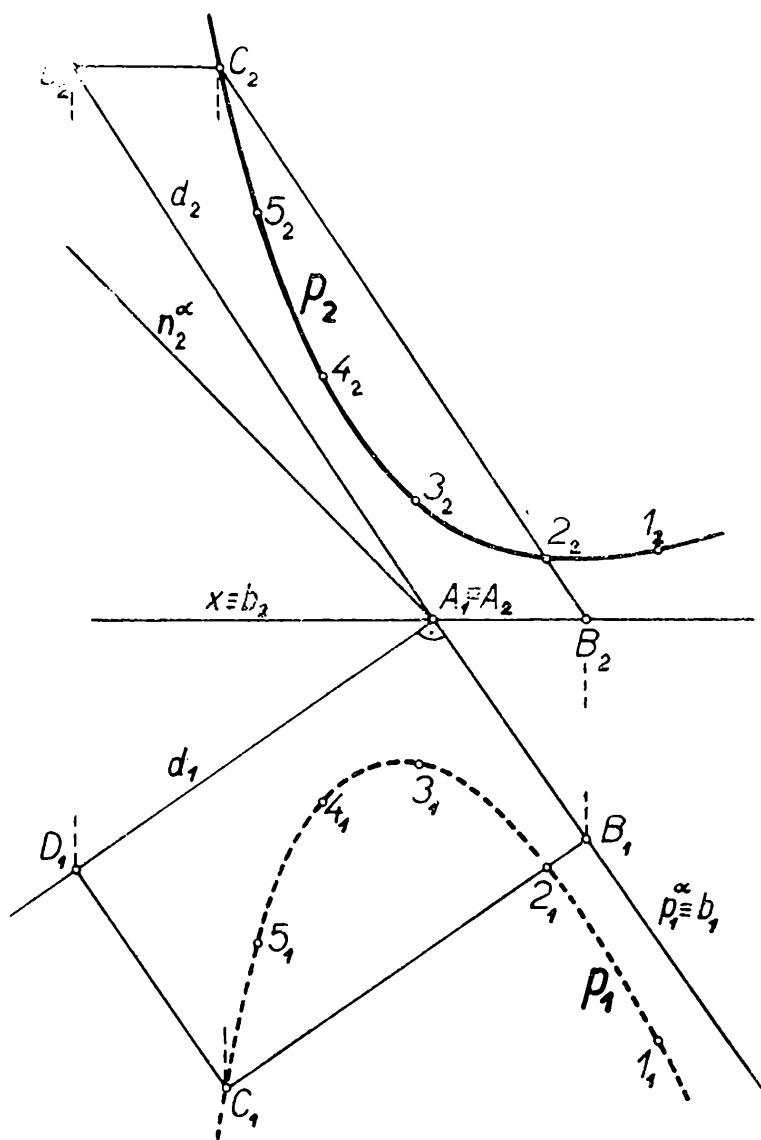
Obr. 2



Obr. 3

Přeneseme-li opět hranu p proužku na přímkou A_1B_1 tak, aby $A_1 \equiv A'$, $B_1 \equiv B'$, pak body $1_1 \equiv 1'$, $2_1 \equiv 2'$, $3_1 \equiv 3'$, ... jsou již průměty bodů 1, 2, 3, ... Tutíž konstrukci opakujeme pro nový střed S a stranu AD (na obr. 1 a 2 není již tato konstrukce vyznačena) a získáme průměty I_1, II_1, III_1, \dots bodů I, II, III, \dots . Vedeme-li body $1_1, 2_1, 3_1, \dots$ rovnoběžky se stranou A_1D_1 a body I_1, II_1, III_1, \dots rovnoběžky se stranou A_1B_1 , získáme v příslušných průsečících těchto rovno-

běžek průměty Q_1, R_1, T_1, \dots bodů Q, R, T, \dots křivky \mathbf{k} , jimiž prochází průmět \mathbf{k}_1 . Podobným způsobem získáme nárysy $1_2, 2_2, 3_2, \dots; I_2, II_2, III_2, \dots$ a pak nárysy Q_2, R_2, T_2, \dots bodů Q, R, S křivky \mathbf{k} , jimiž prochází nárys \mathbf{k}_2 . Body τ_1, τ_2 určují průměty t_1, t_2 tečny t , jako spojnice $T_1\tau_1, T_2\tau_2$. Přesnost průmětů $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ závisí na množství zvolených bodů na křivce \mathbf{k} . Jsou-li orientace obdélníků souhlasné (nesouhlasné) a je-li rovina křivky neprůhledná, je viditelnost průmětů stejná (opačná). Na obr. 2 jde o druhý případ. Protože křivka \mathbf{k}



Obr. 4

je souměrná podle středních příček obdélníka $ABCD$, a protože je bod S zvolen na ose souměrnosti, můžeme sestrojít na proužku jen body na jedné polovině úseček $A'B'$ ($A'D'$) a otočením proužku získáme na stranách průmětů obdélníka i zbývající body.

Křivka \mathbf{k} v tomto příkladě byla určena svým grafem. Takovým křivkám říkáme grafické. Známe však i jiné křivky, které nejsou definovány grafem, ale nějakým matematickým zákonem. Takovými křivkami jsou například kuželosečky. Ve

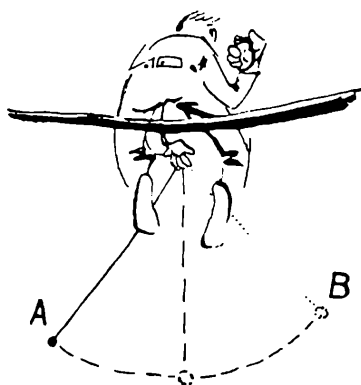
škole se probírá jen průmět kružnice. Eliptický průmět kružnice lze ovšem shora popsanou metodou také sestavit, ale konstrukce známá ze školy, kde se určují osy eliptického průmětu, je v tomto případě výhodnější a zcela přesná. Průměty ostatních kuželoseček se neprobírají. Naší metodou je však můžeme také sestavit. Elipse opíšeme obdélník a postupujeme podle uvedeného příkladu. Hyperbole a parabole ovšem obdélník opsat nelze. Jak máme v tomto případě postupovat? Objasníme si to na následujícím příkladě. (Obr. 3 a 4.)

Je dána parabola p . V její rovině zvolme dvě přímky b, d navzájem kolmé, protínající se v bodě A . Na parabole p zvolme bod C a vedme jím rovnoběžky s přímkami b, d a označme průsečíky D, B . Tím získáme obdélník $ABCD$ a dále již postupujeme podle prvního příkladu. Některé rovnoběžky jsou sice vně obdélníka $ABCD$ a protínají prodloužené strany b, d , ale tím se konstrukce podstatně nemění. Půdorys p_1 a nárys p_2 paraboly p v obecné rovině α určené stopami p_2^α, n_2^α jsou uvedeny na obr. 4 již bez konstrukcí.

Popsaná metoda je velmi výhodná, neboť je rychlá, jednoduchá, jednotná pro všechny rovinné křivky, dostatečně přesná a nákresna se při ní nezaplňuje konstrukcemi (jako je tomu při otáčení a afinitě), protože je provádíme mimo nákresnu.

Jako cvičení si sestavte půdorys a nárys 1. elipsy, 2. oválu, 3. grafů A, B, D , 4. hyperboly ležících v obecné rovině α !

Této metody lze použít i v jakémkoli jiném rovnoběžném promítání. Za cvičení si zobrazte křivku k z prvního příkladu v kosoúhlém promítání $q = 2/3, w = 120^\circ$, jestliže 1. $AB \equiv x, AD \equiv y$; 2. $AB \equiv y, AD \equiv z$!



Fyzika

Inž. Dr. Václav Šindelář, Praha:

Příklad mechanického zrychlovače těles

V minulém ročníku našeho časopisu jsem se zmínil¹⁾ o pohybových změnách, jež nastanou při rázu těles. Vedle všeobecného úvodu seznámili jsme se tam s přímým, dokonale pružným rázem hladkých koulí a odvodili jsme si vztahy, pomocí nichž dovedeme vypočítat pohybové změny způsobené rázem. Na některé z nich dnes navážeme.

¹⁾ Článek: O rázu těles, č. 6, str. 255–261, 1957.

Víme, že existují různá zařízení, jimiž dovedeme zvětšovat hodnoty některých veličin, různé zesilovače, násobiče apod. Výčet veličin, jichž se to týká, byl by jistě dosti dlouhý. Zmíníme se dnes o jednom z a ř í z e n í n a z v ě t š o v á n í r y c h l o s t i. Pro taková zařízení máme název samostatný: *zrychlovače* (nesprávně se říká urychlovače). Známe jich celou řadu např. *betatron*, *cyklotron*, *synchrotron*, *synchrociklotron*, *synchrofázotron* apod. Některé z nich jsou vhodné k zrychlování elektronů (betatron, elektronový synchrotron aj.), jiné k zrychlování protonů či větších iontů (cyklotron, synchrociklotron, synchrofázotron aj.). Zvětšování rychlosti je v těchto přístrojích ovšem doprovázeno také vzrůstem pohybové hmoty,²⁾ vzrůstem patrným, ježto se jedná o rychlosti srovnatelné nebo blízké rychlosti světla c . Podle toho mohli bychom tedy taková zařízení nazvat také „*zhmotňovači*“. U všech zmíněných zařízení děje se zrychlování působením magnetického nebo častěji elektrického pole.

Zmíním se nyní o *mechanickém zrychlovači*, který je založen na mechanickém principu rázu těles. Pro jednoduchost uvažujme zatím ráz dokonale pružný. V odstavci C citovaného článku¹⁾ jsme vypočítali, že narazí-li velká koule (obecně ovšem jakékoliv těleso) hmoty m_1 rychlostí c_1 na malou kouli hmoty m_2 , jež je v klidu ($c_2 = 0$), odskočí malá koule rychlostí

$$v_2 = \frac{2a}{a+1} \cdot c_1, \quad (1)$$

kde $a = m_1/m_2$ je poměr hmot obou koulí. Velká koule se ovšem rázem nezastaví, nýbrž jen poněkud zpomalí. Její rychlost po rázu bude

$$v_1 = \frac{a-1}{a+1} \cdot c_1 \quad (2)$$

Při změnách rychlosti nastanou i změny pohybové hmoty. Ty ovšem v případě malých rychlostí budou zcela nepatrné a nebudeme s nimi tedy počítat. Velikost hmot budeme pokládat za konstatní, jako ostatně ve všech případech klasické mechaniky.

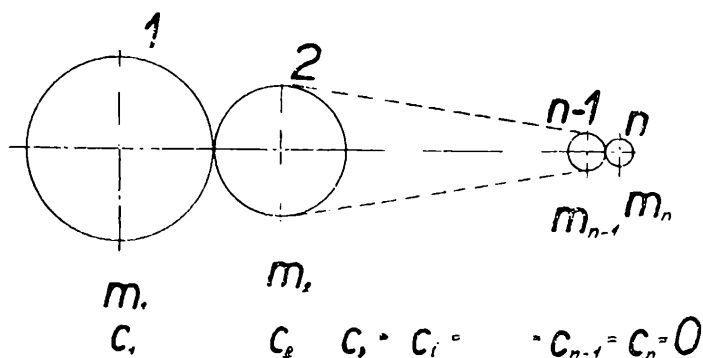
Je-li $a > 1$, bude $v_2 > v_1$, jak se snadno můžeme přesvědčit srovnáním vztahů (1) a (2) a dostáváme tak již jednoduchý případ zrychlování. V mezním případě (v limitě $a = m_1/m_2 \rightarrow \infty$) můžeme jediným jednoduchým rázem rychlost zdvojnásobit, jak plyne z (1)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} v_2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{a+1} \cdot c_1 = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} \cdot c_1 = 2 c_1 \quad (3)$$

²⁾ Podle Einsteinovy rovnice $m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - c_1^2}}$, kde m_0 je hmota částice za (relativního) klidu (též hmota klidová), m_1 pohybová hmota při rychlosti c_1 . Konečně c je rychlost světla ve vakuu.

Ovšem jediným rázem bychom při stálém c_1 nedocílili libovolného zrychlování nad $v_2 = 2c_1$. K tomu je zapotřebí většího počtu jednoduchých rázů, jež proběhnou v přímé řadě těles (v našem případě koulí),³⁾ jejichž hmota se zmenšuje. Taková přímá řada s konvergující hmotou je znázorněna na obr. 1. Hmoty jednotlivých členů řady jsou $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, přičemž $a = m_1/m_2 = m_2/m_3 = \dots = m_i/m_{i+1} = \dots = m_{n-1}/m_n = \text{konst.}$ Rychlost před rázem: $c_1, c_2 = c_3 = \dots = c_i = \dots = c_n = 0$, pohybuje se tedy jen první velká koule, ostatní jsou v klidu.

Celý tento rázový děj je dosti složitý. Nejprve narazí první koule na druhou, druhá na třetí a tak první *postupný ráz*, sestávající z $n - 1$ jednoduchých rázů *dílčích* (vždy mezi sousedními koulemi) proběhne až k n -té (poslední kouli), jež od řady odskočí rychlostí v_n . Ostatní koule jsou však i nadále v pohybu; podobně proběhne druhý postupný ráz (který bude sestávat již jen z $n - 2$ dílčích jednoduchých rázů) a rázový děj by tak probíhal dále, až by skončil posledním [$n - 1$] (prvým) postupným rázem, který již postupným v pravém smyslu nebude, protože proběhne jen mezi dvěma koulemi (první a druhou).



Obr. 1

Všimněme si dále jen prvního postupného rázu, který proběhne v přímé řadě koulí a vypočteme si rychlost v_n , kterou odskočí poslední koule v řadě. První koule hmoty m_1 narazí rychlostí c_1 na druhou kouli hmoty m_2 , jíž udělí rychlost danou vztahem (2). Druhá koule narazí na třetí a udělí jí opět podobně podle (2) rychlost

$$v_2 = \frac{2a}{a+1} \cdot v_1 = \left(\frac{2a}{a+1} \right)^2 c_1,$$

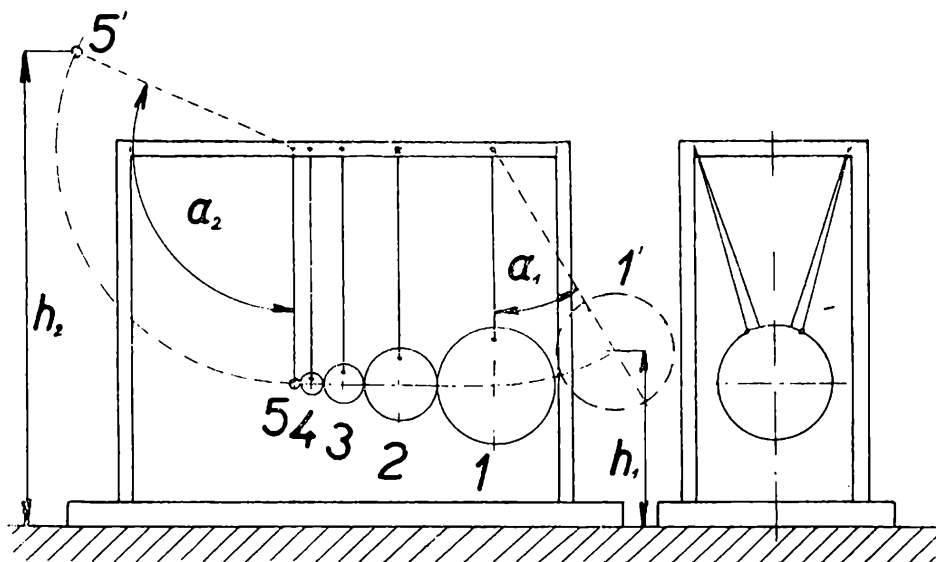
kam jsme za rychlost druhé koule před druhým jednoduchým rázem dosadili rychlost druhé koule po prvním jednoduchém rázu.

³⁾ Přímou řadou koulí rozumíme takovou řadu, jejíž všechny členy mají těžiště na společné přímce ležící v ekvipotenciální rovině, abychom nemuseli přihlížet ke změnám potenciální energie.

Podobně by proběhl i jednoduchý ráz třetí atd., až při $(n - 1)$ -prvém jednoduchém rázu (ovšem prvního rázu postupného) srazí se $(n - 1)$ -prvá koule v řadě s koulí poslední, n -tou. Po tomto jednoduchém rázu, posledním prvého rázu postupného, odskočí n -tá koule rychlostí

$$v_n = \frac{2a}{a + 1} v_{n-1} = \left(\frac{2a}{a + 1} \right)^2 v_{n-2} = \dots = \left(\frac{2a}{a + 1} \right)^{n-1} \cdot c_1 \quad (4)$$

Z rovnice (4) vidíme, že rychlost poslední koule v řadě může nabýt při vhodné volbě a a n i velmi značných hodnot. Kdyby n rostlo nade všechny meze, pak by podle (4) měla být rychlost n -té koule $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \rightarrow \infty$, což není ovšem možné, s ohledem na vícekrát potvrzené relativistické vztahy, podle nichž největší rychlost, kterou se hmota může pohybovat, není větší než rychlost světla c ve vakuu. Vzorec (4) bude tedy platit jen do rychlostí malých proti rychlosti světla.



Obr. 2

Potom bychom museli místo něj použít vztah relativistický, jehož odvození je ovšem již složitější a který zde neuvádím. I tak je však obor platnosti vztahu (4) dosti široký, budeme-li za klasické pokládat zhruba rychlosti do $v_n \doteq \frac{c}{100}$.

Tím je popsán princip mechanického zrychlování. Lze si jej i pěkně demonstrovat na kyvadlovém zařízení schematicky znázorněném na obr. 2. Několik koulí konvergující hmoty, stálého poměru $a = m_i/m_{i+1}$, je v něm zavěšeno (bifilárně) na konsle stojanu tak, aby se všechny sousední koule v klidu právě dotýkaly, a aby jejich středy ležely na společné horizontále. Pak vychýlíme kouli 1 se závěsem o úhel α_1 a volně ji necháme kývnout zpět. Poté proběhne zmíněný postupný ráz a odskočí poslední koule, vychýlí se závěs o úhel α_2 . Z výchylek α_1 a α_2 můžeme si vypočítat rychlost koulí (zajímá nás první a poslední) a určenou

v_n zkonfrontujeme s hodnotou určenou teoreticky, podle vztahu (4). Výpočet rychlostí je snadný, neboť zřejmě plyne

$$m_i \cdot g \cdot h_i = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2, \text{ z čehož } v_i = \sqrt{g h_i}, (i = 1, n), \quad (5)$$

podobně jako u volného pádu. Přitom h_1 buď vypočteme z α_1 , nebo změříme přímo např. katetometrem. Ve vztahu (5) ovšem nepřihlížíme ke ztrátám způsobeným odporem vzduchu, jež zde můžeme pominout.

Při srovnání naměřených hodnot a hodnot teoreticky vypočtených objevíme obvykle patrnou neshodu, kterou musíme připsat na vrub nedokonalé pružnosti materiálů koulí. Jednotlivé jednoduché rázy nebudou totiž dokonale pružné, jak jsme nejprve předpokládali, nýbrž polopružné (nedokonale pružné), takže přesněji vzato měli bychom místo (4) použít vztahu

$$v_n = \left[\frac{(1+k) \cdot a}{a+1} \right]^{n-1} \cdot c_1, \quad (6)$$

kde k je střední koeficient restituce při jednom jednoduchém rázu ve zvolené řadě koulí. Ze vztahu (4) a (6) můžeme k také vypočítat. Určíme si nejprve poměr:

$$\frac{v_n}{v_{n, \text{teor.}}} = \left(\frac{1+k}{2} \right)^{n-1}$$

z čehož

$$k = 2 \sqrt[n-1]{\frac{v_n}{v_{n, \text{teor.}}}} - 1 \quad (7)$$

V případě polopružného rázu bude ovšem účinné mechanické zrychlování většinou jen tehdy, bude-li $k \geq 1$. Je-li například $a = 2$, bude při $k = 0,5$ rychlost $v_n = c_1$, nedojde tedy vůbec k žádnému zrychlení. Ovšem při $a = 100$, i když bude $k = 0,5$, má rychlost při $n = 2$ hodnotu $v_n = v_2 \doteq 1,5 c_1$.

S tímto druhým případem se můžeme setkat při dopadu velmi hmotného tělesa na relativně klidné těleso málo hmotné, jež odskočí zvětšenou rychlostí. Mohou se vyskytnout i případy, že se ráz neděje jen mezi dvěma tělesy, nýbrž ještě prostřednictvím těles jiných, podobně jako jsme si pro ideální případ odvodili v (6).

Nutno se ovšem zamyslet ještě nad energetickou účinností takového zrychlování, jež i při rázu dokonale pružném je velmi malá, jak ostatně si můžeme vypočítat ze vzorce

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\frac{1}{2} m_n v_n^2}{\frac{1}{2} m_1 c_1^2} = \frac{1}{a_{n-1}} \cdot \frac{v_n^2}{c_1^2} = \frac{1}{a_{n-1}} \cdot \left(\frac{2a}{a+1} \right)^{2(n-1)} = \\ &= a^{(n-1)} \left(\frac{2}{a+1} \right)^{2(n-1)} \leq 1. \end{aligned} \quad (8)^4$$

⁴⁾ Přitom je n přirozeně číslo kladné, udávající počet těles ($n > 1$) a podobně i poměr a ($a \geq 1$, aby však nastalo zrychlení, musí nutně $a > 1$).

Případ nedokonale pružného rázu v tomto článku nebyl odvozován; byla uvedena jen výsledná formule (6). Podobně jak jsem se již dříve zmínil o rázu pružném, pojednám někdy později stručně i o rázu polopružném a dokonale nepružném.

Karla Kubíčková, prom. fys., Liberec:

Nukleární emulze a jejich použití

V jaderné fyzice se zjišťuje přítomnost ionisujícího záření různými metodami. Mezi tyto metody patří registrace záření:

- a) *ionisačními komorami,*
- b) *počítači,*
- c) *Wilsonovou mlžnou komorou,*
- d) *nukleárními emulsemi.*

Těmito způsoby můžeme zjišťovat různé typy záření: záření alfa (částice alfa jsou jádra heliových atomů), záření beta (částice beta jsou elektrony) a detekovat i další druhy částic jako protony (vodíková jádra), deuterony (jádra těžkého vodíku), mesony, hyperony.¹⁾

Všechny jmenované metody jsou založeny na faktu, že nabitá částice při průchodu prostředím toto prostředí ionisuje, tzn. neutrální atomy rozkládá na kladně a záporně nabitě ionty. Tyto metody se liší jen způsobem registrace. Tak ionisační komory jsou vlastně vhodně upravené kondensátory, na nichž se měří průběh vybíjení ionisujícím zářením (částice ionisuje vzduch, resp. plyn, který je mezi elektrodami). Počítače jsou uzavřené trubice plněné obvykle nějakým vzácným plynem. Na katodu (kovový válec) a anodu (kovové vlákno uvnitř válce) je vloženo napětí. Částice vyvolá krátkodobou ionisaci uvnitř trubice a vznikne krátkodobý výboj. Tento děj registrujeme jako napěťový impuls vzniklý na pracovním odporu počítače. Ve Wilsonově komoře kondensují kapičky přesycené páry na iontech, vytvořených podél dráhy částice. Tím se dráhy zviditelní ve formě mlžných proužků.

O poslední metodě, která pracuje s nukleárními emulsemi, bude v tomto článku pojednáno podrobněji.

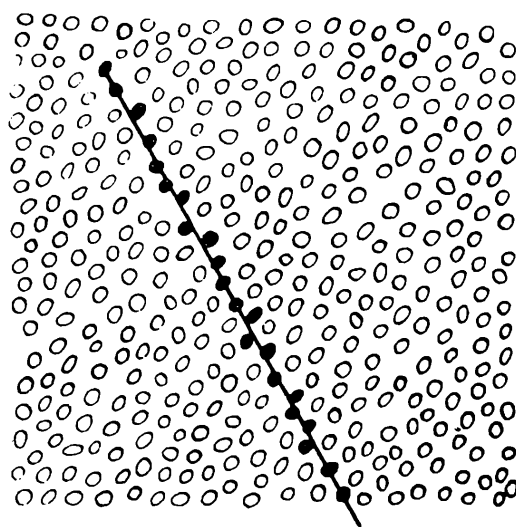
Účinky světla na fotografickou emulsi jsou každému dobře známy. Citlivá fotografická vrstva, zvaná fotografická emulze, je suspensí krystalků bromidu stříbrného AgBr v želatině. Po osvětlení fotografické emulze vzniká neviditelný, tzv. latentní obraz. Jeho vznik se vykládá takto:

Dopadem světla na fotografickou emulsi se v krystalcích AgBr uvolňuje určité

¹⁾ Mesony jsou částice, které mají hmotu větší než je hmota elektronu, ale menší než je hmota protonu. Hyperony jsou těžké částice, jejichž hmota je mnohem větší než hmota protonu. Obě částice mohou mít náboj kladný nebo záporný, nebo mohou být neutrální.

množství elektronů, které vytvoří s ionty stříbra neutrální atomy stříbra v místech dopadu světelných paprsků. Vznikem dalších neutrálních atomů stříbra se v těchto místech vytvoří částice kovového stříbra. Vyvoláním se mnohonásobně zvětší množství kovového stříbra, tj. zviditelní se latentní obraz. Ustálením se odstraní bromid stříbrný, který nebyl světlem zasažen.

Stejným způsobem působí na fotografickou emulsi - kromě viditelného světla - také záření infračervené, ultrafialové, Roentgenovo, paprsky gama i dopadající nabitě částice jako např. částice alfa, částice beta, protony, deuterony, mesony a hyperony. Působení jednotlivých částic na fotografické emulsi je odlišné. Většinu částic bychom nemohli pozorovat v obyčejných fotografických emulsích.



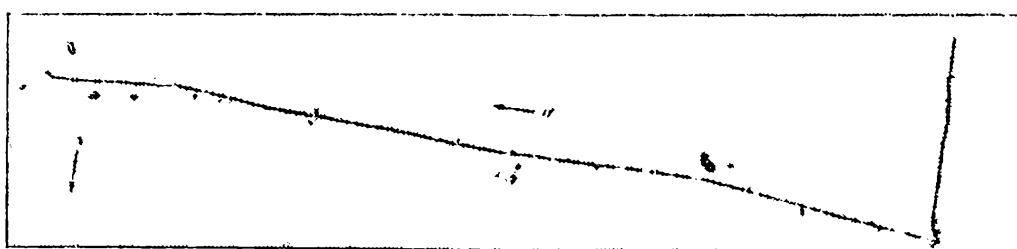
Obr. 1

V obr. 1 je schematicky znázorněn vznik dráhy nabitě částice ve fotografické emulsi. Bílé kroužky značí zrníčka AgBr, černými zrníčky jsou znázorněny shluky stříbra vyloučeného podél dráhy proletující částice. Tato dráha se skládá někdy z řídkého, jindy z hustého sledu menších nebo větších černých zrníček, vzniklých shlukem uvolněných atomů stříbra. Vzniklá zrníčka jsou však tak jemná, že dráhy jednotlivých částic ve fotografické emulsi nemůžeme v žádném případě pozorovat pouhým okem. Je nutno užít mikroskopu s různě velkým zvětšením podle toho, jak dlouhé a zřetelné jsou pozorované dráhy částic. Je možné poříditi též mikrofotografie jednotlivých drah ve fotografické emulsi.

Dráha částice v emulsi neleží vždy v rovině rovnoběžné s povrchem, takže dráhu nemůžeme celou zaostřit. Při prohlížení je nutné postupně zaostřovat na jednotlivá zrna dráhy od jednoho jejího konce k druhému. Při fotografování se pochopitelně musí postupovat obdobně, a to tak, že se fotografují postupně jednotlivé části dráhy zvlášť (při každém snímku se zaostří na další úsek dráhy). Při pořizování pozitivu je nutno všechny snímky mozaikovitě složit, abychom dostali obraz celé dráhy částice, která pronikla do emulsi. Taková mozaiková rekonstrukce dráhy jdoucí šikmo do emulsi je dobře viditelná na obr. 2, na němž je mikrofotografie rozpadu mesonu.

První částice pozorovaná užitím fotografických emulzí byla částice alfa. Zjistilo se, že v emulsi vznikly po ozáření částicemi alfa jakési stopy viditelné pod mikroskopem, skládající se z řady zrníček. Částice při průchodu emulzí způsobuje svými ionizačními účinky uvolňování stříbra a tím vytváří shluk zrníček představující latentní obraz její dráhy. Při průchodu emulzí částice ztrácí svou energii srážkami s atomy obsaženými v emulsi. Část této energie se spotřebuje na odtržení elektronu v krystalcích AgBr. Způsob tvoření latentního obrazu účinkem nabitě částice procházející emulzí je obdobný jako v případě působení světla a pro vysvětlení se tedy používá stejných představ.

Po tomto prvním objevu následovaly další pokusy s pozorováním jiných částic ve fotografických emulzích. Jak již bylo řečeno, je dána možnost registrace částice v emulsi ionizačním účinkem uvažované částice. Velikost ionizačního účinku částice je určena její hmotou a energií. Podrobnější úvaha ukazuje, že ionisace je



Obr. 2

přímo úměrná hmotě částice a nepřímo úměrná její energii. Z toho tedy vyplývá, že nejnadhěji se pozoruje (uvažujeme-li částice o téže energii) částice alfa a nejslabší ionizační účinek budou mít naopak elektrony. Proto také při prvních pokusech byly zaznamenány částice s velkou hmotou a malou energií.

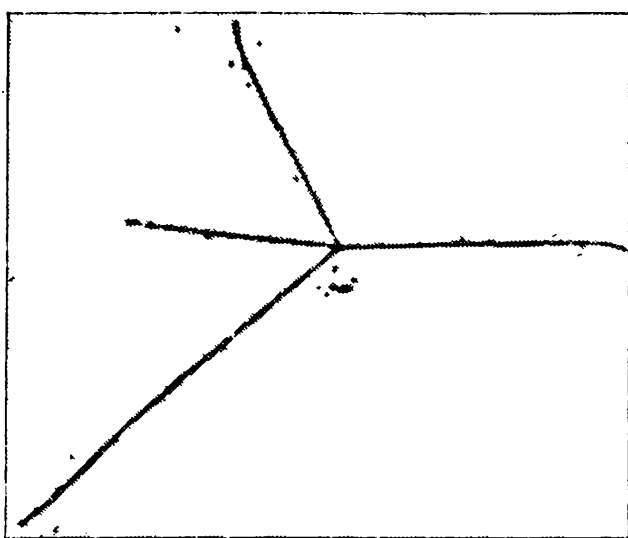
Později byly vyráběny speciální emulse, na něž byly kladeny různé požadavky. Hlavní podmínkou bylo zvýšení citlivosti emulzí. Snahou bylo vyrobit takové emulse, které by zaznamenaly i velmi málo ionisující částice. V takových emulzích byly pozorovány i protony s energií i několika milionů eV. Ukázalo se, že lze měřit energii částice měřením tzv. *d o b ě h u*, tj. délky dráhy částice v emulsi. Je pochopitelné, že částice rychlejší, tzn. částice s větší energií, poletí v emulsi dále než tatáž částice s malou energií. Byla tedy dalším požadavkem dostatečná jemnozrnnost emulse, která by zaručovala přesné proměření délky dráhy v emulsi a co nejpřesnější určení energie částice z jejího doběhu.

Emulsní technika se stala v posledních letech důležitou pomůckou v jaderné fyzice při zkoumání vlastností atomových jader a při studiu kosmických paprsků. Dnes se vyrábějí speciální tlustší emulse s větší citlivostí a s menší velikostí zrna, tzv. *nukleární* neboli *jaderné emulse*. Tyto emulse mají schopnost zaznamenat dráhy libovolných částic s libovolnou energií, a to velmi malou i velmi vysokou. Druh částic se v nich dá rozeznat podle délky dráhy, její síly, hustoty zrn podél dráhy apod. Na obr. 3 je fotografie radioaktivního rozpadu thoria; jednotlivá ramena tzv. *rozpadové hvězdice* jsou stopami částic alfa. Obr. 4 znázorňuje dráhu A) protonu, B) deuteronu. Na obr. 5, na němž je rozpad jádra způsobený rychlou

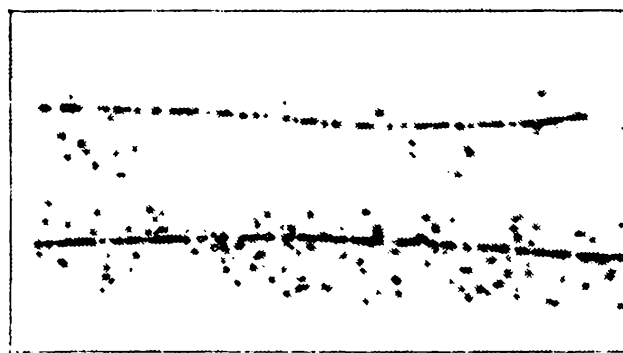
částic z kosmického záření, je dobře viditelný rozdíl mezi drahami různě ionisujících částic. Rozpadová hvězdice se skládá z osmi drah značně ionisujících částic a z jedenácti drah velmi rychlých, tedy málo ionisujících částic.

Pomocí nukleárních emulsí dosáhlo se velikého pokroku zvláště v posledních letech při pozorování elementárních částic s různými hmotami a jejich vzájemného působení s atomovými jádry.

Zatím jsme uvažovali jen registraci nabitých částic. Často však chceme pomocí nukleárních emulsí sledovat také dráhy neutrálních částic. Neutrální částice však nemá ionisační schopnost, tzn., že neuvolňuje v emulsi elektrony potřebné k vytvoření latentního obrazu. Neutrální částice, např. neutrony, lze pozorovat nepřímou, totiž pomocí částic, které se uvolňují při jaderných reakcích neutronu s nějakým atomovým jádrem. Tento problém není jednoduchý, neboť musíme vybrat takové jádro, které po zasažení neutronem vyše nabitou částicí. Tak pro pozorování pomalých neutronů (tj. neutronů, jejichž rychlost je přibližně 2200 m/sec při pokojové teplotě) je nutné přidat do emulze nějaký

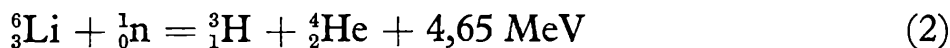
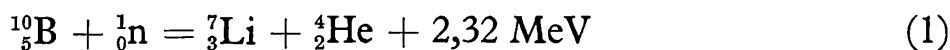


Obr. 3



Obr. 4 a, b

prvek, např. bor $^{10}_5\text{B}$ nebo lithium ^6_3Li . V prvním případě vznikne jádro lithia ^7_3Li a v emulsi pozorujeme dráhu vyslané částice alfa, v druhém případě se lithium rozpadne na tritium ^3_1H a částici alfa. V emulsi probíhají tyto reakce:

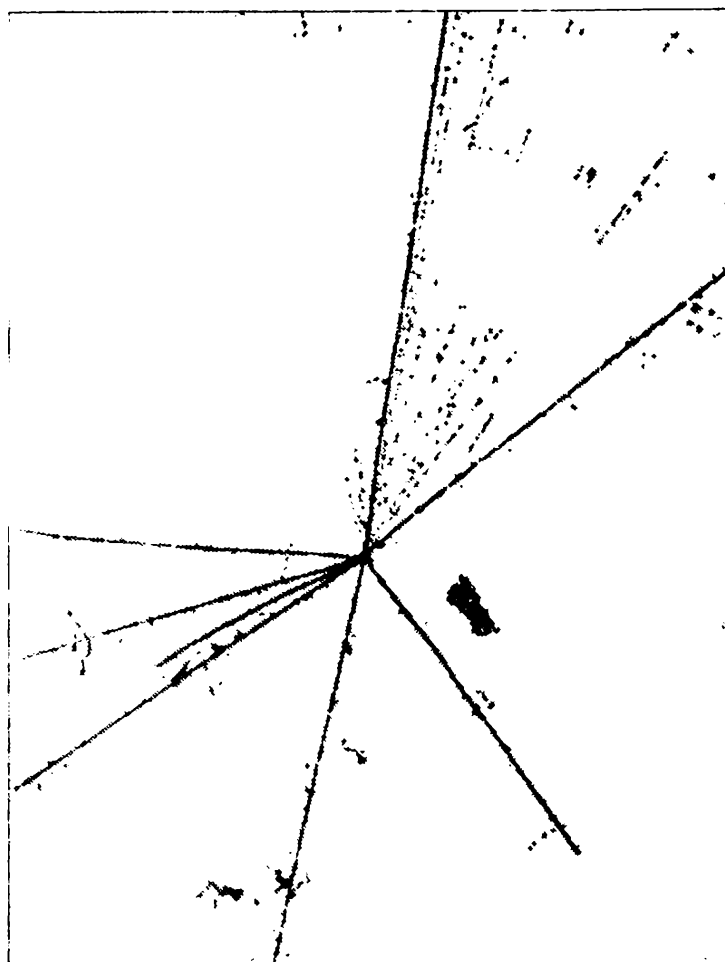


Z charakteru jednotlivých drah částic získaných reakcí neutronů s atomovými jádry můžeme získat potřebné informace o dopadajících neutronech, resp. o jejich působení s příslušnými atomovými jádry. Na obr. 6 je stopa částice alfa a tritia vzniklá rozpadem jádra ^6_3Li při zasažení neutronem.

Jaderné emulze se musí zpracovávat mnohem déle a trochu odlišným způsobem než normální fotografické emulze, protože jsou mnohem tlustší a citlivější. Bývají obvykle 50, 100 a 200 μ silné, v poslední době se vyrábějí i 1 až 2 mm silné. Existuje celá řada způsobů zpracování jaderných emulsí a také mnoho speciálních vývojek. Vyvolávací doba je zhruba uměrná tloušťce emulze. Vyvolávání trvá

hodinu i více. Ustalování probíhá několik hodin, u velmi tlustých emulsí i několik dnů. Speciálním vyvoláváním lze rozlišit dráhy částic s jedním a dvěma náboji, je možno pozorovat i částice s velmi malou ionisační schopností, takže se dá velmi přesně určit náboj, hmota, energie i moment hybnosti jednotlivých částic.

Pomocí dokonalých nukleárních emulsí byly při studiu kosmického záření zjištěny částice s obrovskými energiemi 10^{10} až 10^{13} eV. Těchto emulsí se dá po-



Obr. 5

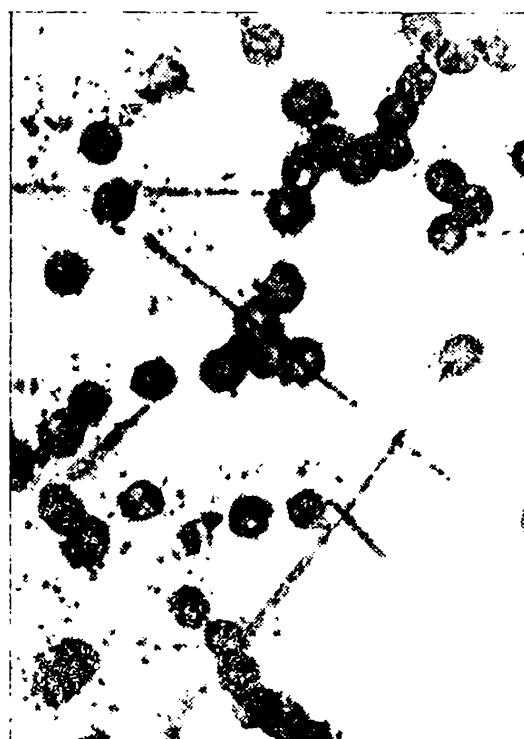
chopitelně též použít při studiu částic získaných v urychlovačích. Výhodou metody jaderných emulsí je možnost přímo rozeznat dráhy různých částic a přesným změřením doběhu částice určit nejen její energii, ale u neznámé částice odhadnout i její hmotu, náboj a moment hybnosti. Velkou výhodou této metody je též možnost postupného zpracování materiálu získaného z určitého experimentu, což není možné např. u metody počítačů a ionisačních komor.

Kromě uvedeného používá se v jaderné fyzice techniky jaderných emulsí též k různým jiným účelům, např. při určování energetických spekter, měření účinných průřezů, určování poločasů rozpadu atomových jader, určování aktivity v alfa a beta spektrometrech, při měření energie záření gama a k určování neutronových toků. Při výzkumech kosmického záření jsou fotografické emulse vyneseny pomocí balónů do výšek 30 až 40 km. Tam jsou vystaveny účinkům kosmického záření a zaznamenávají dopadající částice a jejich rozpady.

Jaderné emulze mají význam nejen v jaderné fyzice a fyzice kosmických prvků, ale i v mineralogii a v geologii, např. při studiu rozdělení radioaktivních prvků v horninách a v biologii při studiu různých procesů v rostlinných a živočišných organismech. Používá se tzv. metody autoradiografie. Tato metoda je velmi jednoduchá a spolehlivá. Stačí vyrobit např. mikroskopický preparát tkáně, do níž byl dříve naočkován nějaký radioaktivní prvek a pak tento preparát přiložit na nukleární emulsi. Po vyvolání se snadno určí místa, v nichž se naočkovaná látka usadila. Na obr. 7 jsou částice alfa vysílané krevními buňkami po naočkování thoria B. Částice alfa pocházejí z thoria C a C', které vzniká rozpadem thoria B. Stejným způsobem se dá zjišťovat usazování příměsí v kovech, slitinách apod.



Obr. 6



Obr. 7

Dále se nukleárních emulzí používá v lékařství a při ochraně pracovníků zdržujících se v blízkosti zdrojů radioaktivního záření. Jako standardní metody při určování dávek radioaktivního záření přípustných lidskému organismu se používá jednak černání emulzí vlivem záření (vyvolané emulze se zpracovávají fotometricky), jednak se používají emulze plněné např. lithiem k zjištění dávky neutronů. Druhá metoda je založena na reakci (2) uvedené výše. Vyvolané emulze se prohlížejí pod mikroskopem a z počtu drah částic alfa a tritia se zjistí dávka, kterou byl pracovník zasažen. V obou případech nosí pracovníci při sobě po dobu jednoho pracovního týdne malý vzorek s nukleární emulzí vhodně zabalený.

Nukleárních emulzí se hlavně v poslední době používá ve velkém měřítku, protože dlouhodobě zaznamenávají dopadající částice.

Literatura, z níž byly převzaty obrázky:

- [1] Y a g o d a H.: "Radioactive Measurements with Nuclear Emulsions" (1949) - obr. 3 a 4.
- [2] R o t b l a t J.: "Progress in Nuclear Physics I." (1950) - obr. 2, 5 a 7.
- [3] S e g r é E.: "Experimental Nuclear Physics II." (1953) - obr. 6.

Planckova kvantová teorie

Před sto lety (24. dubna 1858) se narodil v Kielu jeden z největších světových fyziků - M a x P l a n c k. Planck byl profesorem teoretické fyziky na universitě v Berlíně. Hlavním oborem jeho rozsáhlé vědecké činnosti byla termodynamika a teorie záření. Jeho nejvýznamnějšími pracemi jsou formulace třetí věty termodynamiky a vytvoření teorie tepelného záření, za kterou byl odměněn v roce 1918 Nobelovou cenou. Planck se zabýval také filosofickými otázkami, ale jeho filosofické závěry byly idealistické.

Všimněme si Planckova nejvýznamnějšího objevu - vyzařovacího zákona, který je podkladem kvantové teorie a celé moderní fyziky.

Jestliže zahříváme nějaké těleso, potom se část energie takto přijaté přemění v elektromagnetické záření, které se šíří do prostoru a my je vnímáme jako záření tepelné. Tepelné záření je při nižších teplotách (asi do 500 °C) pro oko neviditelné a můžeme je zjistit například fyziologickými účinky na pokožku. S rostoucí teplotou tělesa vzrůstá celková vyzářená energie a vlnová délka vysílaného záření se přesune do oboru viditelného záření.

Abychom nemuseli naše úvahy o vyzařované energii komplikovat, zavádíme pojem „a b s o l u t n ě č e r n ě h o t ě l e s a“, kterým rozumíme těleso pohlcující veškeré záření, které na ně dopadá. V praxi se realizuje absolutně černé těleso dutinou, jejíž stěny jsou začerněny, a proto pohltí prakticky veškeré záření, které do dutiny vnikne malým otvorem. A právě tento malý otvor se nám jeví jako povrch absolutně černého tělesa. Jestliže dutinu zahříváme, potom záření, které otvorem vychází, určuje energii, kterou by při dané teplotě vyzářil povrch absolutně černého tělesa o velikosti plochy otvoru.

Záření, které z dutiny vychází, zahrnuje velké množství vlnových délek, které ovšem nerovnoměrně přispívají k celkové vyzářené energii. Proto zavádíme vedle úhrnné zářivosti E také, tzv. spektrální zářivost E_λ , určující množství energie, která připadá na jednu vlnovou délku při dané teplotě.

Pro spektrální zářivost odvodil W i e n (1896) na základě termodynamických úvah vztah

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda, T), \quad (1)$$

kde f značí dosud neznámou funkci součinu vlnové délky λ a absolutní teploty T . Aníž bychom znali tuto funkci, je možné odvodit z uvedeného vztahu vlnovou délku, při níž nabývá spektrální zářivost E_λ maximální hodnoty

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{konst.} \quad (2)$$

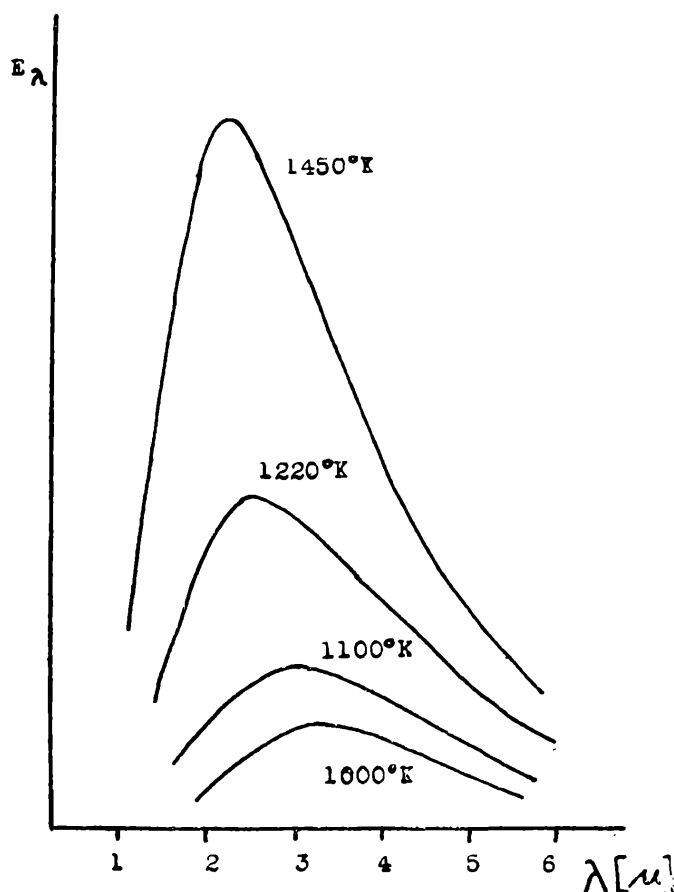
Podle tohoto tzv. W i e n o v a z á k o n a p o s u v u se mění při zvyšování teploty barva vysílaného záření od temně červené, oranžové, žluté až po bílou.

Posuvový zákon byl také experimentálně potvrzen L u m e r e m a P r i n g s-
h e i m e m (1897), jejichž měření je vyjádřeno graficky na obr. 1. Plocha ohraničená křivkou určuje celkovou vyzářenou energii E .

Wien se pokusil nalézt také hodnotu neznámé funkce ve vztahu (1) a dospěl k výrazu

$$f(\lambda, T) = c_1 \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}, \quad (3)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty. Ale tento výsledek byl správný a souhlasil s experimentem jen pro viditelné vlnové délky, takže pro vlastní tepelné záření neplatil vůbec (obr. 2a).



Obr. 1

Tento nesouhlas se snažili odstranit R a y l e i g h a J e a n s, kteří vyšli z kinetické teorie plynů a pro spektrální zářivost našli vztah

$$E_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} c \cdot \lambda \cdot T, \quad (4)$$

kde c je opět nějaká konstanta.

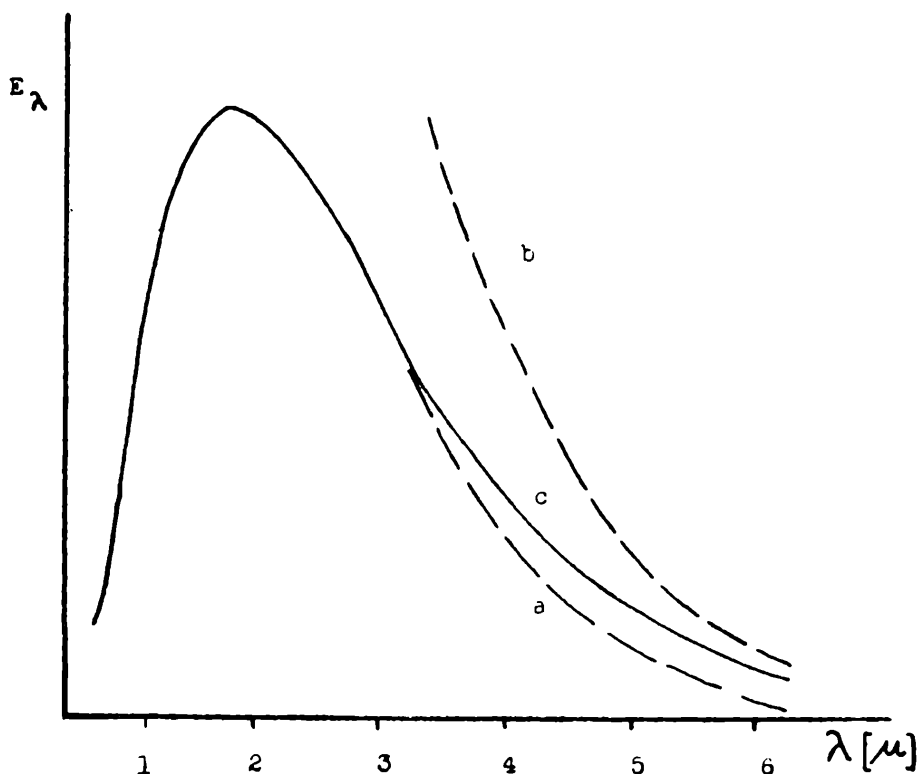
Srovnáme-li vztah (4) se vztahem (1), vidíme, že vzájemně souhlasí, jestliže Wienova neznámá funkce $f(\lambda, T) = c \lambda T$. Avšak na grafickém vyjádření vztahu (4) (obr. 2b) shledáváme, že pro krátké vlnové délky nabývá spektrální zářivost extrémně velkých hodnot, takže celková plocha ohraničená grafem funkce (4) je nekonečně veliká a úhrnná zářivost by pak byla také nekonečně veliká. To je

ovšem nemožné, a tak celý problém skončil tzv. ultrafialovou katastrofou.

Máme tedy dva vztahy, z nichž Wienův platí pro krátké vlny a Rayleigh-Jeansův pro dlouhé vlny tepelného záření. Nalézt zákon, který by platil pro celý obor vlnových délek, tohoto úkolu se ujal Planck a zkombinoval oba předešlé zákony v jediný

$$E_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)}; \quad (5)$$

c_1 a c_2 jsou konstanty. Že Planckův vztah vyhovuje pro celý obor vlnových délek, můžeme snadno dokázat:



Obr. 2

1. Pro $c_2 \gg \lambda \cdot T$ - pro krátké vlny - můžeme jedničku ve jmenovateli zanedbat proti exponenciální funkci a pro E_{λ} plyne

$$E_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}$$

Tak dospějeme ke vztahu Wienovu, který platí skutečně pro krátké vlny.

2. Pro $c_2 \ll \lambda T$ - pro dlouhé vlny - můžeme exponenciální funkci rozvinout, omezit se na první dva členy rozvoje

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} +$$

a po dosazení do (5) docházíme ke vztahu (4), platnému opět pro dlouhé vlny. Tím byl nalezen vztah, který vyhovoval také experimentálním měřením (obr. 2c).

Mnohem obtížnějším úkolem, který Planck rovněž úspěšně provedl, bylo teoretické zdůvodnění odvozeného vztahu. Planck, ve snaze nalézt všeobecně platnou vyzařovací funkci, musel zavést zcela neobvyklý předpoklad, že totiž přeměna tepelné energie v zářivou a naopak, není spojitá, jak se předpokládalo dosud, ale děje se po celistvých násobcích určitého kvanta energie - ε , které je úměrné frekvenci - f příslušného záření

$$\varepsilon = h \cdot f ,$$

kde h je *Planckova konstanta* nebo také *účinkové kvantum*. Planckova konstanta zjištěná různými metodami má hodnotu $h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ J. sek.

Teprve zavedením tohoto předpokladu bylo možno stanovit také hodnoty radiačních konstant $c_1 = 2 \pi h c^2$; $c_2 = \frac{h c}{k}$, kde c je rychlost světla a k *Boltzmannova konstanta*.

Podle Plancka má tedy energie, podobně jako hmota, určitá nejmenší množství - *kvanta*, která už dále nejsou dělitelná a jsou tím větší, čím vyšší je frekvence záření. Poněvadž energie jednoho kvanta je velmi nepatrná (řádově 10^{-19} J pro viditelné záření), setkáme se v praxi vždy s velkým počtem kvant, takže přeměna energie se nám jeví opět spojitě. Přesto Planckova kvantová domněnka znamená úplný převrat v dosavadním názoru na energii.

Když Planck v roce 1900 svoji domněnku zveřejnil, byl odmítnut, ale již za několik let práce *Einsteinovy* o fotoelektrickém jevu a specifických tepelech ukázaly správnost a velký význam Planckovy domněnky při výkladu jevů, které byly pro klasickou fyziku nevysvětlitelné. *Bohr* použil Planckových závěrů při výkladu energetických stavů atomu, *Compton* k objasnění tzv. *Comptonova jevu* a vzniká řada dalších aplikací, kde kvantová teorie pomáhá klasické fyzice z nesnází. Znovu se tak vlastně vracíme k *Newtonově korpuskulární teorii světla* a na základě Planckových představ nacházíme jednotící hledisko na podstatu světla.



Jiní o nás

Před časem jsme požádali Svaz čs. spisovatelů, aby některý z jeho členů nám přispěl do této části našeho časopisu. Škoda, že zatím pouze čekáme. Proto otiskujeme alespoň zde plné znění článku spisovatele A. C. Nora, uveřejněného pod čarou v deníku „Lidová demokracie“.

Z článku zjišťujeme, že autorovi pravděpodobně dělala nesnáze matematika a její logika v době jeho studií. Ostatně, posudte sami.

Je určitým nedostatkem naší literatury, že máme dosud málo literárních prací z prostředí přírodovědeckého nebo technického. Umožnilo by to nejen rozšíření těchto věd do širokých vrstev našeho lidu, ale sblížilo by, tak i spisovatele s odborným prostředím a umožnilo jim poznat specifickou jazykovou nutnost.

Redakce.

A. C. N o r

Matematika a jazyk

Bývalo tomu tak snad odjakživa, že učil-li se některý žák výborně matematice a vědám exaktním, míval slabiny v jazycích a žáci, kteří vynikali v předmětech literárních, neslavili zpravidla úspěchy v matematice. Bývaly a jsou výjimky, pravda, ale víme, co se říká o výjimkách potvrzujících pravidlo. Snad proto už ze šerého dávnověku se datuje averse matematiků vůči jazykovědcům a naopak. A možná, že právě zde je třeba hledat příčinu různých jazykových výstředností v matematice. Skoro to vypadá, jako by si matematikové vymýšleli rozmanité jazykové zvláštnosti schválně, potají se těšice, jak budou jazykáři vyskakovat. Soudím tak aspoň z toho, že se kdysi nemohla slavná Jednota českých matematiků a fyziků dohodnout s ještě slavnějším Ústavem pro jazyk český na korektní jazykové normě v matematickém názvosloví a že mezi těmito dvěma institucemi, anebo spíše mezi stavy matematiků a jazykovědců vládne jen průměr, nikoli hluboký trvalý mír.

Posvíťme si jednou docela nevinně na některé takové jazykové libůstky a zvláštnůstky v matematice. Tuhle jsem jednomu matematikovi opravil v rukopise několikrát rčení, že číslo „je různé od nuly“. Ach, lidičky zlatí, jak ten matematik řádil! Jak soptil! Nikdo přece neřekne v normální české mluvě, hájil jsem se, že něco je různé od něčeho, že například já jsem různý od vás. Řeknu přece, že se od vás liším, že jsem jiný než vy, že... že... číslo se tedy liší od nuly, že je od nuly odlišné, že není totožné s nulou a tak podobně. Ale matematik ne a ne si dát říci! Číslo je různé od nuly a basta! Je prý to tak v normě. Že by to bylo v normě? Zaváhal jsem. Vždyť přece Ústav pro jazyk český reviduje po jazykové stránce technické normy, ne-li všechny, jistě jejich velkou část. I našli jsme si dotyčnou normu - a hle, tam pod značkou vyjadřující odlišnost čísla od nuly bylo slovní vyjádření: není totožné s nulou. Triumfoval jsem. Ale matematik se necítil poražen. Nedonutíte mě psát jinak než „různý od nuly“, zvykl jsem si a do smrti si to neodvyknu ani nehodlám odvyknout, zařikal se. A vzhledem k tomu, že jde o matematika mladého, potrvá patrně „různost od nuly“ ještě hodně dlouho.

Jděme dál. Matematik chce říci, že v rovině lze vést k přímce jen jednu kolmici. Tak by to však vyjádřil pouze nevzdělaný matematik. Pravý matematik řekne, že „v rovině lze vést k přímce j e d n u a j e n j e d n u kolmici“. Jindy chce matematik tvrdit, že přímka je kolmá k rovině, jen je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny. Neřekne to takto jednoduše, nýbrž prohlásí, že „přímka je kolmá k rovině t e h d y a j e n t e h d y, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny“. Namítnete, že toto vyjádření je ovšem také správné, ale že to je zbytečný pleonasmus, že by tam stačilo to „tehdy“ jen jednou. A opakuje-li se toto zdůrazňování v každém matematickém obratu, v každé poučce, ztrácí samozřejmě účinnost a je to pouhé klišé. Matematik vám řekne: Každý profesor, každý technik, každý matematik vám to poví v přednášce tak a nejinak. Vždycky „tehdy a jen tehdy“, nikdy pouze „jen tehdy“, vždycky „jednu a jen jednu“, nikdy pouze „jen jednu“. A já už vidím přednášejícího profesora matematika, jak studentům sugestivně sugeruje svou poučku. Pomáhá si gestem, zvednutým prstem, zvýšeným hlasem, celým postojem, že t e h d y a j e n t e h d y - pamatujte si to, studenti! Ale to ovšem je řeč přednáškových síní, jako to jinde je hantýrka dílen, laboratoří, pracovního prostředí - to není řeč spisovná. A přenášet hovorové obraty důsledně do řeči spisovné není ani vhodné, ani správné.

Bylo by toho nesmírně mnoho, kdybychom chtěli rozebrat důkladně frazeologii matematických knih, jejich květomluvu. Nepoučujte matematika odvolávajícího se na normu, že norma je a může být jen terminologická, nikoli frazeologická. Matematika nepřesvědčíte. A tak se matematická mluva přímo hemží jazykovými zeugmaty, anakoluty, vyšínutími z vazby, zpřeházeným pořádkem slov, nesprávným slovným i větným spojením atd. U matematika není veličina rovna nejméně pěti, nýbrž vždycky je veličina nejméně rovna pěti, matematik má v každé druhé větě stereotypní právě tehdy, právě když, právě jeden a přitom se vás pokusí přesvědčit, že „právé jeden“ je totéž co „aspoň jeden“ a zároveň „nejvýše jeden“. To jsou tak záhady! Že však byste neuhodli, které slovíčko je v matematice nejoblíbenější, a proto i nejčastější? Ale ano, uhodli jste okamžitě, podceňuji vás. Nu ano, je to slovíčko „pak“. Každá hlavní věta následující po vedlejší je uvozena slůvkem „pak“, ačkoli by stačilo začít normálně slovesem.

A protože matematikové myslí s velkou péčí na mládež, nalezneme tuto matematickou frazeologii už i v učebnicích osmiletěk, a to i s tou růzností od nuly. Mají to pak češtináři těžkou práci ve školách, chtějí-li dětem vymluvit jejich matematickou hantýrku a naučit je česky.

Ale vážně! Poslyšte, vážení a důstojní páni matematikové, staří i mladí! Opravdu by to nešlo udělat, tak jako tomu je ve všech ostatních vědních oborech: domluvit se s Ústavem pro jazyk český na korektním českém spisovném vyjádření všech těch vašich frází, věčně se v textu opakujících, z nichž jen některé jsem tu ukázkově předvedl. Nechcete přece být sektou vylučující se ze spisovné řeči a jít po havlíčkovsku tou příslovečně proslulou louží. Kdyby se vám podařilo dohodnout se, bylo by to na prospěch vám i jazyku českému. A život by byl hned drobet krásnější.

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

Jazykovědci a matematika

Matematické zájmy filologů jsou většinou skromné; taková je aspoň zkušenost matematiků. Proto je potěší, věnuje-li matematice pozornost spisovatel formátu A. C. Nora, jenž pod nadpisem „Matematika a jazyk“ uveřejnil celý článek v nedělní Lidové demokracii ze dne 25. května 1958. Ale jak se zdá, nenacházejí matematikové u filologů zrovna uznání své práce. Není mi známo, že by některý spisovatel napsal někdy chvalozpěv na neukleidovskou geometrii, nebo že by se nadchl krásami moderní algebry, která přímo překypuje duchaplností a elegancí. Máme nejvýš onu smutnou zkušenost, že filologové obracejí své odbornické zraky jen k řeči matematiků a nevšímají si celku, hlavního poslání a krásy matematiky. V tom smyslu zklamal nás i citovaný článek A. C. Nora.

Účel Norova článku je záhadný. Odhodlá-li se známý spisovatel k uveřejnění podobného článku v novinách, aniž se předtím pokusí o vyjasnění věci a o dorozumění s předními představiteli naší matematické veřejnosti, znamená to vyhlášení boje na nejširším fóru, a to vyhlášení boje bez výzvy. Ale naši matematikové jsou ještě natolik zdraví, že se tomuto boji nemusí vyhýbat. Norovo počínání neslučuje se ani s tendencí popularisace matematiky, která je dnes na postupu v celém světě. Norův článek se nejvýš snaží udělat matematikům ostudu, zatím co my potřebujeme otevřít širší veřejnosti oči a ukázat, že matematika je přece jen také k něčemu dobrá. V tom směru nám A. C. Nor vůbec nepomohl.

Ale ještě horší je, že A. C. Nor jako dobrý beletrista sugestivní stylisací podává čtenáři ve svém článku přímo nesprávnosti a chyby. Snad o nich sám neví. Ale zde už nemohou matematikové mlčet, protože nemohou neodpovědně přihlížet k tomu, když někdo bourá jejich práci. V krátkém článku nelze ovšem diskutovat o všech otázkách, které A. C. Nor nadhodil. Obráťme se tedy jen ke dvěma z nich.

A. C. Norovi se nelíbí, když matematik říká, že v rovině lze bodem vést k přímce „jednu a jen jednu“ kolmici. Stejně pokládá za špatný obrat „tehdy a jen tehdy“, kterého matematikové hodně používají. A právě tomuto problému je věnováno v Norově článku nejvíc místa. A. C. Nor píše: „Namítnete, že toto vyjádření je ovšem také správné, ale že to je zbytečný pleonasmus, že by tam stačilo to tehdy jen jednou. A opakuje-li se toto zdůrazňování v každém matematickém obratu, v každé matematické poučce, ztrácí samozřejmě účinnost a je to pouhé klišé.“ Povrchní čtenář usoudí, že matematik zbytečně, snad pro frajeřinu, ze tří možností totiž „tehdy“, „jen tehdy“ a „tehdy a jen tehdy“, si vybírá právě tu třetí, nejméně obvyklou možnost.

A je to docela jednoduché. Každá z těchto vazeb znamená přece něco jiného. A hlavně není pravda, že matematik užívá těchto obrátů nahodile. Lze uvést mnoho příkladů, kdy nesmíme užít vazby „tehdy a jen tehdy“. Každý počtář, nemusí to být ani matematik, vám například snadno potvrdí správnost této matematické poučky:

Číslo je dělitelné třemi tehdy, když je dělitelné devíti.

Ano, je to řečeno správně, neboť pokaždé, když je číslo dělitelné devíti, je také dělitelné třemi. Ale hrubou chybou by bylo užít v této poučce místo slova „tehdy“ slovo „jen tehdy“. Poučka by rázem přestala být pravdivá, protože například číslo 24 je sice dělitelné třemi, ale není dělitelné devíti. Tak tedy pozor! Slovo „tehdy“ a slova „jen tehdy“ mají různý význam; matematik si to dobře uvědomuje a přísně obě tyto možnosti rozlišuje.

Všimněme si druhé možnosti. Zajímá nás například dělitelnost čtyřmi. Už dětem je zřejmé, že liché číslo není dělitelné čtyřmi. To znamená, že čísla dělitelná čtyřmi hledáme mezi čísly sudými. To lze vyslovit poučkou, která je jistě gramaticky nezávadná:

Číslo je dělitelné čtyřmi je-li sudé.

Ovšem matematická správnost této poučky spočívá právě v tom slovíčku „jen“; vynechati je nelze, neboť pak by poučka byla falešná. Není přece pravda, že každé sudé číslo je dělitelné čtyřmi.

Obě matematické poučky, jež jsem zde uvedl, jsou málo významné. Z předpokladu, že číslo je dělitelné devíti plyne, že je dělitelné třemi, ale nikoli obráceně. Je-li číslo dělitelné třemi, nemusí být ještě dělitelné devíti. Takový poznatek je málo užitečný. Proto matematikové hledají hlavně takové zákony, kde předpoklad je s tvrzením ekvivalentní. A jedině v takovém případě smějí užít vazby „tehdy a jen tehdy“. Rozeberme si to na příkladu z článku A. C. Nora. Užijme úmyslně formulace s naznačenou vazbou. Předpokládejme, že přímka je kolmá ke dvěma různoběžkám téže roviny; z toho očividně plyne, že taková přímka je k té rovině kolmá. Matematik to formuluje takto:

Přímka je kolmá k rovině tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám té roviny.

Sledujte pozorně, milí čtenáři, znovu a sami, co je v této poučce předpokladem a co je tvrzením, z předpokladu plynoucím. Naproti tomu si všimněte této druhé, rovněž správné poučky:

Přímka je kolmá k rovině jen tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám té roviny.

Jindy není k rovině ta přímka kolmá. Jinými slovy: je-li přímka k rovině kolmá, je kolmá i ke dvěma různoběžkám té roviny. Zde jsme tedy ve skutečnosti předpokládali, že přímka je k rovině kolmá. A z tohoto předpokladu plyne tvrzení o kolmosti přímky ke dvěma různoběžkám.

Obě poslední poučky o kolmosti přímky a roviny se liší tedy v tom, že předpoklad a tvrzení jsme v nich zaměnili. A obě tyto poučky jsou správné, ale u každé poučky to tak v matematice není, to je samozřejmé. V takových případech, kdy taková záměna zde popsána je možná, užívají matematikové zkrácené formy; obě poslední poučky spojují v širší poučku, kterou vyslovují jedinou větou, totiž:

Přímka je kolmá k rovině tehdy a jen tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám té roviny.

Nejde tedy o nějakou hantýrku, jak se domnívá A. C. Nor. Protože matematikové hledají hlavně takové poučky, v nichž podmínky nutné jsou zároveň postačujícími pro studované objekty, jejich vlastnosti, vyskytuje se vazba „tehdy a jen tehdy“ často. Na matematika ovšem nesmí působit okolnost, že častým opakováním této vazby by se ztrácela její účinnost, jak se obává A. C. Nor. Je to podobné jako na železnicích, kde dopravní návěsti a různé semaforey musí strojvůdce, řídicí rychlík, vnímat s touž intenzitou, i když jich během své namáhavé služby vidí sebevíce; přitom si nesmí všimnout toho, že podivuhodnost semaforů zevšední za chvíli obyčejnému cestujícímu. Právě tak matematikové se nemohou ohlížet na ostatní lidi, pokud jde o účinnost vazby „tehdy a jen tehdy“. Matematickou knihu nelze číst jako román, v matematické literatuře se musí dávat pozor na každé slovo, byť by se tam vyskytovalo třeba stokrát.

A jak je to s tou růzností od nuly? Je ovšem věcí osobního vkusu, do jaké míry se komu líbí rčení, že číslo je různé od nuly, ale nelze je dobře nahradit rčením, že číslo se liší od nuly nebo že je jiné než nula. Odlišnost je jiný pojem než různost. Jsou-li dva předměty odlišné, jsou samozřejmě i různé. Ale jsou-li dva předměty navlas stejné, neliší se od sebe ničím jiným, než právě tou růzností. Řeknu-li, že číslo se liší od nuly, čekáte automaticky bližší vysvětlení, v čem se liší; je jedno z nich zelené a druhé fialové, nebo se liší co do velikosti? Ale ani v té velikosti se nemusí lišit. Je dobře známo, že například komplexní čísla, mezi něž nula také patří, nelze žádným rozumným způsobem seřadit podle velikosti. A jak máme rozlišit různé druhy čísel? Pracuji-li v oboru reálných čísel, jsou pro mne všechna tato čísla stejného druhu. *j i n á* jsou čísla komplexní, *j i n á* jsou čísla celá atd. A ve všech těchto skupinách je nula. Reservuji-li si termín *j i n ý* pro tento účel, musím nutně pro různost od nuly zvolit další termín. Najdete-li jiné vhodné a hlavně krásnější přídavné jméno než různý, které vystihuje přesně týž pojem, poradte nám je. - Člověka jen přitom napadá, kdy si na terminologii posvítí filologové také jinde než v matematice, třeba ve sportu. Jsou krásné různé ty na-

střelené tyče, vodácké maratóny a mapy a zaběhané časy? Ale kritisovat sportovce není tak populární jako kritisovat matematiky, to je to.

A závěrem malý žert. Mohou-li filologové kritisovat matematiku po stránce filologické, mohou zajisté matematikové kritisovat jiné texty po stránce matematické. A. C. Nor v úvodu k svému článku píše doslova:

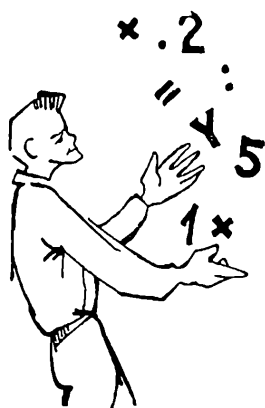
„... už ze šerého dávnověku se datuje averse matematiků vůči jazykovědcům a naopak.“

Prosím čtenáře, aby se zamyslel nad tím, co zde znamená slovíčko „naopak“, zakončující tuto periodu. Jaké je opačné tvrzení k tomu, že se datuje averse matematiků vůči filologům? Každý matematik musí se aspoň trochu seznámit s logikou, a proto ví, že slova naopak se užívá k negaci, k popření daného výroku. Opačný výrok k hořnému rčení tedy zní: „Nedatuje se averse matematiků vůči jazykovědcům.“ Ale z celého článku A. C. Nora vysvítá, že tohle nechtěl autor říci. Zřejmě chtěl říci, že se datuje nejen averse matematiků vůči jazykovědcům, ale také averse jazykovědců vůči matematikům, že tedy pořadí obou předmětů se dá v tomto přísudku obrátit. Proto matematik by hořné rčení vyslovil správně takto:

„... už ze šerého dávnověku se datuje averse matematiků vůči jazykovědcům a obráceně.“

Čtenář zajisté nahlíží, že logický a tedy i matematický význam slov „naopak“ a „obráceně“ je přesně vymezen a že na to musíme brát zřetel. S takovou filologií, jakou praktikuje A. C. Nor, bychom tedy v matematice daleko nedošli.

Nakonec upozorňuji, že Jednota čs. matematiků a fyziků zaujme oficiální stanovisko k výpadu A. C. Nora ve svém časopise „Pokroky matematiky, fyziky a astronomie“ a přenesse tam i další případnou diskusi.



Matematické zábavy

Doc. Ota Setzer, Praha:

O násobcích čísla 41

V 5. čísle Rozhledů jste se na str. 238 dočetli o zajímavých vlastnostech sedmiciferných násobků čísla 239.¹⁾ Ukážeme si obdobné vlastnosti pro některá jiná čísla.

Budiž N_0 deseticiferné číslo dělitelné 41. Přepišme poslední dvojčíslí (cifry v témž pořadí) před osm nezměněných zbývajících číslic. Dokážeme si, že nové deseticiferné číslo N_1 je opět dělitelné 41.

¹⁾ Doc. Ota Setzer: O vlastnostech násobků čísla 239.

D ů k a z : Necht' a, b, c, d, e jsou dvojciferná přirozená čísla; pak původní číslo N_0 lze psát ve tvaru:

$$N_0 = a + 10^2b + 10^4c + 10^6d + 10^8e = 41 k_0, \quad (1)$$

kde k_0 je podle předpokladu přirozené číslo; přestavěné číslo N_1 má tvar

$$N_1 = b + 10^2c + 10^4d + 10^6e + 10^8a.$$

Utvoříme jeho stonásobek

$$100 N_1 = 10^2b + 10^4c + 10^6d + 10^8e + 10^{10}a. \quad (2)$$

Vzhledem k (1) lze pravou stranu rovnice (2) upravit:

$$100 N_1 = N_0 + 9\,999\,999\,999 a.$$

Za N_0 dosadíme z (1) a číslo $9\,999\,999\,999 a$ rozložíme

$$100 N_1 = 41 k_0 + 99.41.2\,463\,661 a,$$

na pravé straně vytkneme 41:

$$100 N_1 = 41 (k_0 + 99.2\,463\,661 a).$$

Výraz v závorce je opět přirozené číslo k_1 :

$$100 N_1 = 41 \cdot k_1$$

Z nesoudělnosti čísel 100 a 41 plyne naše tvrzení. Uvedenou cyklickou záměnu dvojcíslí lze postupně provádět i se vzniklými čísly N_1, N_2, N_3 a N_4 . Další číslo je opět N_0 . Čísla N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 jsou tedy dělitelná 41.

Čtenář si snadno odvodí větu: Šesticiferná čísla dělitelná 37 (7, 13) zůstanou dělitelnými 37 (7, 13), když poslední dvojcíslí přepíšeme na začátek čísla. Stačí jen uvážit, že $3.7.13.37 = 10\,101$.

A l e š T o n d l, České Budějovice:

Magické čtverce

Velmi často se setkáváme s úlohami, které se nazývají „magické čtverce“. Ukážeme si v tomto článku různé metody řešení magických čtverců, hlavně ukážeme, že na těchto úlohách není nic magického, jak se domnívali lidé v dávných dobách.

První zmínky o magických čtvercích a snad i o jejich řešení nalézáme v Číně a Japonsku asi 4000 let před naším letopočtem. Odtud se dostaly tyto úlohy do Indie a odtud pak do Evropy asi ve 14. století. Mnoho matematiků, vědců i laiků se pokoušelo o jejich řešení, a tak vznikly některé velmi vtipné a jednoduché metody. Ukážeme si jen ty, které postačí k řešení všech magických čtverců.

Vyslovíme nejprve obecnou úlohu o magickém čtverci.

Je dán čtverec o celočíselné straně $n \geq 3$. Rozdělme tento čtverec vodorovnými a svislými čarami na $n^2 \geq 9$ stejně velkých čtverečků a vepišme do těchto čtverečků čísla od 1 do n^2 tak, aby čísla vyhovovala této podmínce: Součet čísel v každém řádku, sloupci a v obou úhlopříčkách necht' je roven stejnému číslu.

Například magický čtverec o straně 4 (počet čtverečků v řádce budeme nazývat řádem magického čtverce, tedy m. č. čtvrtého řádu) je zobrazen na obr. 1. Zde se vyskytují čísla od 1 do 16, a to tak, že součet čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách je roven 34.

Toto však není jediná vlastnost magického čtverce. Ukážeme jiné na první pohled ne příliš patrné vztahy, které byly příčinou toho, že se těmto úlohám přičítaly různé tajuplné a mystické vlivy.

1. Součet rohových čísel je opět roven číslu 34

$$1 + 4 + 13 + 16 = 34 .$$

2. Rozdělíme základní čtverec na čtyři čtverce menší. Součet čísel v každém čtverci se rovná číslu 34

$$\begin{aligned} 1 + 14 + 7 + 12 = 34, & \quad 15 + 4 + 6 + 9 = 34, \\ 8 + 11 + 13 + 2 = 34, & \quad 10 + 5 + 3 + 16 = 34. \end{aligned}$$

3. Součet čtverců čísel v krajních řádcích se sobě rovná

$$1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438 .$$

Právě tak součet čtverců čísel ve vnitřních řádcích se sobě rovná

$$12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 = 8^2 + 11^2 + 10^2 + 5^2 = 310 .$$

4. Analogický vztah platí pro součet čtverců ve sloupcích

$$\begin{aligned} 1^2 + 12^2 + 8^2 + 13^2 = 4^2 + 9^2 + 5^2 + 16^2 = 378, \\ 14^2 + 7^2 + 11^2 + 2^2 = 15^2 + 6^2 + 10^2 + 3^2 = 370. \end{aligned}$$

5. Vepišme do základního čtverce nový tak, aby jeho vrcholy byly středy stran původního.

Součet protějších stran se sobě rovná a rovná se opět číslu 34

$$14 + 12 + 5 + 3 = 15 + 9 + 8 + 2 = 34 .$$

Pozoruhodnější je však vztah

$$14^2 + 12^2 + 5^2 + 3^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2 = 374$$

a dále

$$14^3 + 12^3 + 5^3 + 3^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3 = 4644 .$$

Je zřejmé, že číslo, jemuž se rovná součet v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách, není zvoleno náhodně, ale vyhovuje určité podmínce.

V magickém čtverci n -tého řádu se vyskytuje n^2 různých čísel. Součet všech

je dán vzorcem $S = \frac{(1 + n^2)n^2}{2}$, neboť jde zřejmě o součet aritmetické řady

$1 + 2 + 3 + \dots + (n^2 - 1) + n^2$. Toto číslo S obdržíme také tak, že sečteme součty všech řádek nebo sloupců, kterých je n . Protože součty všech řádek jsou shodné, vypočteme lehce číslo K , jemuž se rovná součet čísel v jednotlivé řádce, sloupci nebo úhlopříčce.

$$\text{Toto číslo } K = \frac{(1 + n^2)n}{2}.$$

Vyřešíme nyní magický čtverec třetího řádu.

Narýsujme tento čtverec a do jeho čtverečků vepíšme místo čísel výrazy a_1, a_2, \dots, a_9 počínaje v levém horním rohu (obr. 2). Číslo K , jemuž se rovná součet čísel v řádce (sloupci), se rovná podle předchozího vzorce 15. Dokážeme nyní, že výraz a_5 zastupuje číslo rovné $\frac{1}{3}K$.

Z definice magického čtverce plynou tyto rovnice:

$$\begin{aligned} (1) \quad a_1 + a_4 + a_7 &= K, & (2) \quad a_1 + a_5 + a_9 &= K, \\ (3) \quad a_3 + a_6 + a_9 &= K, & (4) \quad a_3 + a_5 + a_7 &= K. \end{aligned}$$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Obr. 1

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Obr. 2

$a_5 + x$	$a_5 - x - y$	$a_5 + y$
$a_5 - x + y$	a_5	$a_5 + x - y$
$a_5 - y$	$a_5 + x + y$	$a_5 - x$

Obr. 3

Vypočteme z rovnic (1) a (2) a_1 a z rovnic (3) a (4) a_3 a pak porovnejme rovnice (1), (2) a (3), (4). Dostaneme:

$$\begin{aligned} (1) \quad a_4 + a_7 &= K - a_1, & (2) \quad a_5 + a_9 &= K - a_1, \\ (3) \quad a_6 + a_9 &= K - a_3, & (4) \quad a_5 + a_7 &= K - a_3, \\ a_4 + a_7 &= a_5 + a_9, \\ a_6 + a_9 &= a_5 + a_7. \end{aligned}$$

Po sečtení rovnic obdržíme:

$$a_4 + a_6 = 2a_5.$$

Přičteme k oběma stranám rovnice číslo a_5 . Rovnost zůstane zachována a dostaneme:

$$a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5.$$

Levá strana rovnice se však rovná číslu K (součet střední řádky):

$$K = 3a_5, \quad \text{z toho} \quad a_5 = \frac{1}{3}K.$$

Dokázali jsme tedy, že v magickém čtverci třetího řádu je střední číslo rovno třetině součtu čísel v řádce, sloupci, úhlopříčce.

Vypíšme a očíslovme všechny rovnice, které jsou v magickém čtverci třetího řádu obsaženy:

$$\begin{array}{ll}
 (1') a_1 + a_2 + a_3 = K, & (2') a_7 + a_8 + a_9 = K, \\
 (3') a_1 + a_4 + a_7 = K, & (4') a_3 + a_6 + a_9 = K, \\
 (5') a_4 + a_6 = \frac{2}{3} K, & (6') a_2 + a_8 = \frac{2}{3} K, \\
 (7') a_1 + a_9 = \frac{2}{3} K, & (8') a_3 + a_7 = \frac{2}{3} K
 \end{array}$$

V rovnicích se nevyskytuje číslo a_5 a máme tedy 8 rovnic pro 8 neznámých. Všechny rovnice však nejsou lineárně nezávislé, jak se ukáže v dalším. Například sečtením rovnic (5'), (7'), (8') dostáváme totéž jako sečtením rovnic (3') a (4'). Podobně součet rovnic (6'), (7'), (8') dává součet rovnic (2') a (1'). Rovnice (1') a (4') jsou lineárně závislé na ostatních a po jejich vyškrtnutí máme nezávislou soustavu šesti rovnic o osmi neznámých. To však znamená, že dvě čísla můžeme

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obr. 4

$C - a$	$B + a + c$	$A + b - c$	$D - b$
$A + a - d$	D	C	$B - a + d$
$D - b + d$	A	B	$C + b - d$
$B + b$	$C - a - c$	$D - b + c$	$A + a$

Obr. 5

volit libovolně. Protože známe ještě hodnotu středního výrazu a_5 , máme při sestavení magického čtverce třetího řádu celkem tři volitelná čísla. Označme volená dvě čísla písmeny x a y , hodnotu středního výrazu a_5 . Vyjádříme hodnotu všech výrazů a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) jen pomocí čísel x , y a a_5 ,

$$\text{např. } a_1 = a_5 + x,$$

$$a_2 = a_5 - x - y \text{ atd., jak ukazuje obrázek 3.}$$

Zaměníme-li v takto sestaveném magickém čtverci x za $-x$, nebo y za $-y$, nebo x za y , nic se v celém systému nezmění a součet výrazů v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách bude stále roven číslu K .

Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $9 \geq x > y \geq 1$. Ze všech výrazů vyskytujících se v obrázku 3 je zřejmě nejmenší výraz $a_5 - x - y$ a největší $a_5 + x + y$. Položme nejmenší výraz roven nejmenšímu číslu a největší největšímu číslu, která se v magickém čtverci vyskytují. Obdržíme rovnice:

$$a_5 + x + y = 9$$

$$a_5 - x - y = 1, \quad \text{ale} \quad a_5 = \frac{1}{3} K = 5.$$

Po dosazení za a_5 dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned}x + y &= 4, \\ -x - y &= -4.\end{aligned}$$

Protože $x > y$ a zároveň mají platit hořejší rovnice, musí $x = 3$ a $y = 1$. Dosadíme-li za x, y a a_5 čísla jim příslušná, dostaneme skutečný magický čtverec, jak ukazuje obr. 4.

Snažme se stejným způsobem řešit magický čtverec čtvrtého řádu.

Z deseti rovnic, které obdržíme, je jen osm nezávislých. Musíme všech 16 čísel vyjádřit pomocí osmi libovolně zvolených, a to provedeme takto: Čtyři z těchto volených čísel označme velkými písmeny A, B, C, D a zbylá malými písmeny a, b, c, d . Můžeme nyní všechna čísla obsažená v magickém čtverci čtvrtého řádu vyjádřit jen pomocí těchto osmi zvolených čísel, jak ukazuje obr. 5. Mohli bychom i tento čtverec rozložit na dva čtverce. V jednom z nich by se vyskytovala jen velká písmena, v druhém jen písmena malá. Je ovšem otázka, jak z osmi libovolně volených čísel vypočteme ostatních osm čísel. Tato otázka se však nedá řešit elementární cestou. Stejná, ne-li horší, by byla situace u magických čtverců vyšších řádů.

Provedeme nyní konstrukce magických čtverců různých řádů, ovšem bez důkazu, neboť ty, jak bylo uvedeno, nejsou jednoduché. (Pokračování)



Recenze

Dobrý pomocník přátelům astronomie

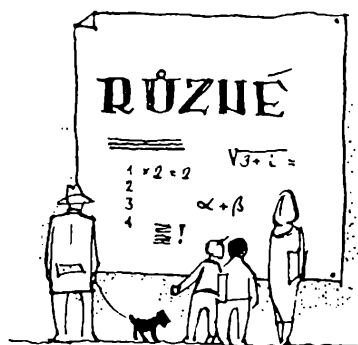
Na našem redakčním stole se objevila *Astronomická tabulka 1958* a i když je náš článek dosti opožděný, přece jen považujeme za svoji povinnost upozornit na ni naše čtenáře, neboť tato pomůcka vyjde jistě i v příštích letech.

V této zajímavé tabulce jsou graficky vyznačeny astronomické úkazy, které můžeme sledovat na obloze v letošním roce. V hrubých rysech nám tedy nahrazuje *Hvězdářskou ročenku* a jednoduchou přehledností a rychlostí orientace ji dokonce i předčí, při čemž přesnost údajů je postačující pro běžné amatérské požadavky. Z tabulky např. snadno vyčteme východy, kulminace a západy Slunce, Měsíce a planet, měsíční fáze, zatmění Slunce a Měsíce, kulminace čtyř největších planetek v době kolem oposice, kulminace jarního bodu aj. Na druhé straně tabulky jsou uvedeny dobře volené příklady, které nám umožní snadnou orientaci, najdeme tam např. návod, jak si sestavíme pozorovací program na určitou noc.

Pro toho, kdo má rád proměnlivou tvář hvězdného nebe, je tato tabulka dobrou pomůckou, která mu umožní nalézt na obloze rychle to, co jej zajímá.

Astronomickou tabulku vydala oblastní lidová hvězdárna v Plzni a zpracovali ji inž. B. Maleček a L. Zachar. Je k dostání v prodejnách knih za 3 Kčs.

L. S.



Různé

Josef Kotyk, Pardubice:

Rudolf Diesel

Napsáno v únoru 1958 k 100. výročí jeho narození.

„Vynalézat znamená vyhmátnout z mnoha omylů, četných nezdarů a polovičatých řešení, co je správné. Teprve potom může se dostavit úspěch. Nikoliv tedy myšlenka sama, nýbrž její uskutečnění je podstatou vynálezu.“

Těmito slovy, jež neztratila svou platnost ani dnes, ba zůstávají právě v socialistické společnosti stále velmi časovými, charakterisoval tvůrčí činnost vynálezce muž, jehož jméno žije a ještě dlouho bude žít jako - technický pojem,¹⁾ zasloužilý německý badatel **Rudolf Diesel**. Na letošní rok připadá sté výročí jeho narození.

Rudolf Diesel se narodil dne 18. března 1858 v Paříži, kde jeho otec měl v ulici Rue Notre-Dame de Nazareth malou dílnu, v níž vyráběl galanterní zboží. Zručný chlapec často otci pomáhal, roznášel také zboží po městě, nejraději však kreslival a v Conservatoire des Arts et Métiers (Museum umění a řemesel) by byl vyseděl celé dny. Romantika mládí vzala však za své roku 1870, kdy Francie, vzrušená porážkou a kapitulací císaře Napoleona III. dne 2. září u Sedanu, vzchopila se k zoufalé obraně proti německým vetřelcům. Ještě během září byli všichni Němci z hlavního města Francie vykázáni. Dieselovi rodiče se uchýlili do Londýna, avšak jejich dvanáctiletý chlapec byl s tabulkou na krku poslán do Německa, kde našel útočiště u strýce v Augsburgu.

Od vstupu na průmyslovou školu v Augsburgu organizoval Diesel podle vlastních slov již zcela vědomě svou budoucnost. Jeho toužebným přáním bylo stát se významným technikem, slavným vynálezcem. I na vysoké škole technické v Mnichově²⁾ patřil proto od počátku k nejlepším studentům. S největším zájmem

¹⁾ Mám zřejmě na mysli motor zv. „diesel“. Stejný osud potkal také jiného německého badatele **Wilhelma Konrada Roentgena** (1845—1923), z jehož jména se časem stal rovněž technický pojem, název přístroje zv. „rentgen“.

²⁾ Vysoká škola technická v Mnichově byla založena roku 1868. V této době měly pražské inženýrské školy, založené reskriptem císaře Josefa I. roku 1707, již velmi dobré jméno doma i daleko za hranicemi.

poslouchal přednášky o parních strojích. Nemile překvapen se zejména dovídal, že i dokonalé parní stroje zůstávají zařízením velmi nevhodným, v němž 90 % energie obsažené v palivu se k práci nevyužije, avšak naopak vyzařuje z kotlů, válců a potrubí navenek, ztrácí se v komínech, v kouřových plynech aj. Mladý, pro svět techniky zanícený Diesel si už tehdy, jako posluchač vysoké školy, vylíčil pevný životní cíl: řešit problém výkonnosti a úspornosti tepelných motorů, sestrojil dokonalý motor, jenž by dovoloval při přeměně tepelné energie v mechanickou práci využití tepla co nejlépe. Diesel mu říkal „racionální³⁾ tepelný stroj“, my dnes zcela stručně „diesel“. S vytouženým cílem před očima šel Diesel za ním od svých studentských let s příkladnou vytrvalostí.

Aby svou životní myšlenku uskutečnil, musel Diesel poznávat nejen stroje, nýbrž i lidi, a od nich se učit. Student Diesel dovedl však lidi i stroje hledat a jít za nimi tam, kde pracují. Přihlásil se proto o práci v továrně. Bylo mu uloženo pilovat klíče, užívané k utahování šroubů. Když prošel školou namáhavé tělesné práce ve výchovném prostředí průmyslového proletariátu a zakončil studia, budoucí slavný vynálezce vykročil do světa. Z příkazu svého učitele profesora Lindeho,⁴⁾ proslaveného konstruktéra chladírenských strojů, jel nejprve do rodné Paříže, aby tam podle Lindeova patentu zařídil mrazírny. V Paříži ohlásil záhy také již první vlastní patent k výrobě bloků ledu mimořádné čistoty. Činnost v oboru „ničemných“ strojů mrazírenských byla mu přesto jen epizodou, jež nemohla zastřít jeho zájem o tepelné motory. Shledává, že v motorech parních koná energie obsažená v palivu práci prostřednictvím páry, obrátil svou pozornost k motorům plynovým, kde jsou poměry jednodušší, neboť palivo v plynném stavu se spaluje přímo v pracovním válci, zužitkuje se proto hospodárněji. Spálení může nastat buď náhle, výbuchem (motory výbušné), nebo postupně (motory spalovací).

První výbušný motor sestrojil roku 1860 Lenoir (čti Lenoár) v Paříži, podstatně jej však zdokonalili Mikuláš Otto a Eugen Langen z Deutzu. Tento typ (plynové motory zv. Ottovy), uvedený na trh v Kolíně nad Rýnem roku 1867, studoval také Diesel. Po několik let zkoušel zejména použít rozmanitých (např. také čpavkových) par a plynů, uhelného prachu, pak opět paliv plyných a tekutých, petroleje i levné nafty, až vývoj Diesela spalovacího motoru byl roku 1893 v teorii skončen. V tomto roce vydal 35letý vynálezce, tehdy stále ještě zástupce Lindeových chladírenských strojů pro severní a východní Německo, knihu „Teorie a konstrukce racionálního tepelného stroje k nahrazení strojů parních atd.“.

První pokusný motor Dieselův byl v únoru roku 1894 podroben úspěšným zkouškám v augsburské továrně na stroje. Ačkoliv konečné podoby normálního čtyřdobého motoru nabyl až počátkem roku 1897,⁵⁾ mohl Diesel již dne 3. čer-

³⁾ Lat. ratio (t čti c) = rozum.

⁴⁾ Karl von Linde, profesor na technice v Mnichově, sestrojil stroje na výrobu ledu a roku 1895 stroj k přípravě kapalného vzduchu ve velkém množství.

⁵⁾ Výročí 60 let trvání „dieselů“ v roce 1957 vzpomněl náš časopis ve svém 35. ročníku, čís. 7, str. 330.

vence 1894 právem napsat: „Jsem v podstatě hotov. Jsem ve stavbě motorů prvním na zemi. Jsem průkopníkem nové techniky po obou březích oceánu . . .“

Spotřeba Dieselova motoru činila v té době 258 g petroleje na výkon 1 koně v hodině. Pozoruhodnou předností Dieselových motorů bylo, že mohly zužitkovat i palivo horší a levnější, jako surovou naftu, olej, např. i dehtový olej apod. Vysoká teplota, potřebná k spálení hořlavé směsi, se vzbudila při druhé době tím, že se čistý vzduch, nasátý při prvním zdvihu, prudce adiabaticky⁶⁾ stlačil až na 40 atm., čímž nabyl teploty 550° až 700°. Rozprašování paliva, vstříknutého do rozžhavaného vzduchu v třetí době, provádělo se zprvu pomocí kompresoru, později umělým vírem vzduchu ve válci. Velikou výhodou měly Dieselovy spalovací motory v tom, že nepotřebovaly zplynovače a „svíček“, tlak náhle nestoupl, měly proto i klidnější chod. Nad motory výbušné vynikaly i tím, že se tak značně nezahřívaly a nepotřebovaly tedy důkladného chlazení. Ukázalo se také, že se hodí zvláště pro velké výkony (od 8 koní nahoru), pro něž mají zároveň podstatně větší (35 až 40 %) účinnost než motory výbušné nebo dokonce motory parní. Jako stroje vysoce výkonných a nanejvýš úsporných bylo jich proto záhy používáno k pohonu nákladních vozů, v dopravě železniční (zejména pro lehčí vlakové soupravy) i námořní, uplatnily se na malých vlečných lodích i velkých zaoceánských parnicích,⁷⁾ v poslední době i v osobních automobilech (Mercedes-Diesel), rotáčejí vrtule letadel; staly se krátce majetkem celého světa.⁸⁾

A jejich vynálezce?

Obraťme znovu svou pozornost k dalším životním osudům Rudolfa Diesela.

Získal vysoké postavení, slávu a bohatství, štěstí však nenabyl. Svou knihu vydal předčasně, neboť netušil, že dává závistivcům i výrobcům tepelných motorů příliš brzy nahlédnout do své duševní dílny, a pro hru, která měla následovat, do karet. Znechucen vleklými spory o prvenství a bezohlednými zápasy s konkurencí, s představiteli mohutného odvětví průmyslu, jenž vyráběl parní stroje, 55letý padl vysílen v nerovném boji. V září roku 1913 vydal se do Anglie, aby jednal o založení nové továrny na Dieselovy motory, cestou propadl však beznadějí a rozhodl se jinak. Ztratil důvěru v lidi a nakonec i v sebe, dal přednost dobrovolnému odchodu ze života a našel hrob - v nekonečném moři.

Nad svým psacím stolem zanechal Diesel pamětihodný výrok španělského filosofa, jehož moudrosti nedbal: „*Nikdy nedej nahlédnout do věcí, které nemáš hotovy!*“ A v korespondenci zůstal rovněž bez náležitého povšimnutí odložen skromný dopis chudíčkého otce, jenž mu před mnoha lety k jeho vysokým životním cílům rukou ztvrdlou těžkou prací napsal: „*Nikdy si nemysli, že dosažení vysokého postavení a získání bohatství je člověku největším štěstím!*“

⁶⁾ A d i a b a t i c k é d ě j e v p l ý n u l z e uskutečnit, je-li uzavřen v nádobě, jejíž stěny teplo nepropouštějí (řec. a = ne, diabaino = procházím). Stlačíme-li plyn adiabaticky, vykonáme práci, jež se promění ve vnitřní energii plynu. To se projeví zahřátím plynu.

⁷⁾ Obrázek Dieselova motoru vhodného pro velké lodi přináší hlubotisková příloha XIII. učebnice fyziky pro 10. postup. ročník, 1954.

⁸⁾ Veliké obliby a neobyčejného rozšíření dosáhly v novější době zvláště Dieselovy motory vyrobené čs. národními podniky. Viz např. hlubotiskové přílohy X., XI. a XII. cit. učebnice.

K šedesátinám prof. RNDr. Zdeňka Horáka

Dne 6. října dožívá se šedesáti let vynikající vědec a pedagog RNDr. Zdeněk Horák, profesor fyziky na strojní fakultě Českého vysokého učení technického.

Narodil se v Praze roku 1898. Studoval na reálném gymnasiu na Král. Vinohradech a na přírodovědecké fakultě Karlovy university. Ještě před skončením vysokoškolských studií nastoupil jako asistent na fyzikální ústav vysoké školy obchodní, a pak na ústav sférické astronomie a základů vyšší matematiky na vysoké škole speciálních nauk. V letech 1921 a 1922 podrobil se aprobačním zkouškám a v roce 1923 byl prohlášen doktorem přírodních věd. Disertace pojednávala o principu energie v rovnicích fyziky. V letech 1928 až 1929 bylo mu uděleno stipendium ke studiu na Sorbonně a Collège de France. V lednu 1930 se stal docentem teoretické fyziky na ČVUT.

V roce 1935 přešel opět jako asistent na II. fyzikální ústav při vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství. Po smrti prof. F. Nachtikala převzal vedení přednášek z technické fyziky. Jeho učitelská činnost byla však krátce nato přerušena okupací. V letech 1940 až 1945 pracoval jako vědecký úředník ve Státním radiologickém ústavě. Již dříve konal řadu nepovinných přednášek a suploval přednášky z matematiky na vysoké škole inženýrského stavitelství. Přednášel také na řadě vědeckých shromáždění u nás i v zahraničí.

Po osvobození byl v roce 1945 jmenován řádným profesorem na Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství a vedoucím ústavu technické fyziky. Nyní je vedoucím katedry fyziky strojní fakulty.

Vědecká činnost profesora Zd. Horáka je velmi obsáhlá. Celkem publikoval 66 vědeckých prací, řadu z nich v zahraničí. Práce zasahují téměř do všech fyzikálních oborů. Řada prací je čistě teoretických, jiné jsou z oboru fyziky praktické. Zvláště je třeba se zmínit o původních metodách měření viskozity kapalin a tepelné vodivosti různých fází. Jako první zavedl již v roce 1924 pojem neholonomního prostoru a užil tohoto nového pojmu při studiu neholonomních soustav. Tak například dal dynamickým rovnicím kovariantní tvar vzhledem k nejobecnějším prostoročasovým neholonomním transformacím. Na základě těchto prací se mu podařilo také zobecnit Schroedingerovu rovnici pro tyto systémy. Z ostatních teoretických prací je zvláště třeba uvést práce o vrtném rázu, jakož i o vrtném tření. Po mnohaletém úsilí vytvořil zobecněním Hertzovy teorie novou teorii drsného rázu, jejíž výsledky experimentálně potvrdil.

Za vědecké práce získal také několik odměn a byla mu udělena hodnost doktora fyzikálně matematických věd.

Prof. Zd. Horák je však znám nejen jako autor zmíněných vědeckých prací, ale také jako autor řady učebnic a odborných monografií vysoké úrovně.

Významné výročí zastihuje prof. Zd. Horáka uprostřed velkého pracovního vypětí. Věříme, že i v budoucnu budeme se těšit s ním z jeho práce a proto mu přejeme do dalších let hojně zdraví a úspěchů.

Atomová baterie, přímý převod atomové energie na energii elektrickou

Atomové energie, nebo lépe jaderné energie, dokážeme dnes využít v tzv. atomových reaktorech a známe dnes již atomové elektrárny i atomové teplárny, které převádějí energii skrytou v jádru atomů na energii použitelnou člověkem. Pokusy s přímým převodem se již dělají od roku 1945 a nedá se říci, že tyto pokusy byly bezúspěšné. Sám objev přímého převodu atomové energie na elektrickou vyvolal kdysi ohromný zájem nejen u laiků, ale hlavně u odborníků, a to nejen z důvodu odborných, ale hlavně z praktického a hospodářského hlediska. Důvod, proč doposud ve větší míře nemáme ještě atomové baterie, tkví v technologii materiálů. Jak to dnes s atomovou baterií vypadá?

Dnes vlastně známe čtyři základní druhy atomových baterií, a to podle způsobů přeměny energie. Říkáme „známe“, což znamená podle zahraniční literatury, že byly někde ve světě vyrobeny ne pro technickou praxi, ale pro výzkumné úkoly.

Atomové baterie prvního typu jsou vodivé koule, v jejichž středu je izolovaně upoután zdroj alfa záření, nejčastěji směs Sr^{90} a Y^{90} . Záření vycházející ze zdroje způsobuje rozdíl potenciálů mezi zdrojem a koulí až 150 kV. Proud z těchto zdrojů má však velmi nepatrnou hodnotu, což je nevýhodné, a proto se ho používá k anodovému napájení elektronkových trubic. Tento zdroj může pracovat bez dodatečného nabíjení asi 25 let, což je pro tyto účely ohromná výhoda.

Druhým typem je taková baterie, ve které radioaktivní záření vedle nabíjení vodivého povrchu také ionisuje atomy plynu, které vlivem elektrického pole, vytvořeného mezi zdrojem a koulí, vytvářejí elektrický proud uvnitř baterie. Také tento proud má velmi nepatrnou hodnotu, řádově asi 10^{-10} A; hodí se proto zase jen pro výše uvedené účely.

Třetím typem atomové baterie, který má již nějakou naději na úspěch, je baterie s násobením proudu na kontaktu polovodičů $p - n$. Polovodiče typu p vedou proud pohybem pozitivních nábojů (lépe pozitivními dutinami), zatímco polovodiče typu n vedou proud pohybem negativních nábojů. K povrchu krystalku jsou přitisknuty dva hrotové kontakty, z nichž první je zdrojový kontakt a druhý sběrný kontakt. V okolí sběrného kontaktu se vytvoří tenká vrstva, která je složena z polovodičů obou typů. Tyto polovodičové slitinové kontakty typu $p - n$ jsou při ozařování částicemi β zdroji napětí a proudu. Přítomnost nových elektronů, částic β , zvýší vodivost krystalu, čímž se zvýší proud v okruhu sběrného kontaktu. Bylo provedeno měření se zdrojem záření Sr^{90} a Y^{90} s aktivitou 90 mc. Atomová baterie s křemíkovým kontaktem $p - n$ dávala napětí 0,03 V a proud $2,5 \cdot 10^{-5}$ A. Obdobné hodnoty dosáhneme u baterie s germaniovým kontaktem.

Čtvrtým typem atomové baterie je tzv. termoelektrická baterie s Po^{210} jako zdrojem tepla. Záření α i γ radioisotopu polonia s poločasem 138 dní je pohlcováno absorbatorem. Vzniklé teplo nám slouží jako zdroj v baterii, složené z několika termočlánků. Mezi oběma spájenými místy, které jsou na různé teplotě, vznikne proud, který je velmi malého řádu. Jak je vidět, neliší se tento typ baterie ničím od obyčejného termoelektrického článku s výjimkou toho, že zde využíváme tepelné energie radioaktivního záření.

Tyto čtyři typy baterií byly sestrojeny po dlouhých výzkumech a nedají se pro běžný provoz použít, protože hodnoty jejich proudu a napětí nevyhovují běžné praxi. Jen jako příklad bez nároku na přesnost uvádím, že atomová baterie pro motocykl Jawa by vážila asi 6 tun (tj. s ochranou a s několika bateriemi pro zesílení proudu). Byla však dokázána přímá přeměna atomové energie v elektrickou bez převodu a budoucnost jistě vyvine tyto typy dále. V posledních číslech zahraničních časopisů se objevují zprávy o velmi výhodném atomovém zdroji, založeném na fotočláncích. Tato nová baterie je velmi výhodně řešena a její hodnoty odpovídají požadavkům praxe. Dává totiž proti doposud uvedeným bateriím proud asi 20 mikroampér při napětí asi 1 V. V nové baterii, která i s krytem má průměr asi 1,5 cm a tloušťku 0,5 cm, vzbudí částice β z promethea Pm^{147} „fosfor“ (CdS) a fotobuňka přemění světlo na elektrickou energii. Jako zdroje se používá isotopu o 4,5 curie s poločasem 2,6 roku, tzn. že atomová baterie může být v provozu dva a půl roku bez nabíjení.

Tato baterie má výhodu v tom, že téměř nezávisí na teplotě a samotná skříňka již pohltí a zabrzdí veškeré záření, takže problémy stínění jsou nepatrné.

Na závěr zbývá říci to, že pokroky vědy a techniky jsou ohromné a že není daleko doba, kdy začneme těchto baterií používat pro běžné účely.



Redakce hovoří se čtenáři

★ Prof. Dr. E. Kašpar nám zaslal tuto připomínku: V článku J. K o t y k a O d v e s l a k l o d n í m u š r o u b u v č. 5 je dvakrát poznámka (str. 235 a 237) o tom, že naše učebnice fyziky nemají zmínky o J. Resslerovi. To se neshoduje se skutečností, neboť ve F y z i c e pro 7. roč., 4. vydání z roku 1957, str. 124 je životopisná poznámka o J. Resslerovi na půl stránky drobného tisku a je připojen i portrét vynálezce.

★ Upozorňujeme čtenáře, že článek Dr. F. K r o u p y: P l a s t i c k á d e f o r m a c e a p o r u c h y v k r y s t a l e c h, uveřejněný v č. 5 na str. 214, je pokračováním stejnojmenného článku z č. 4 na str. 180.

★ V druhém řádku str. 231 opravte si letopočet 1789 na 1879; na str. 286 v druhém řádku zdola má být $6,624 \cdot 10^{-27}$ erg. sec a v třetím řádku zdola $6,55 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.

Z referátu ministra školství a kultury dr. Františka Kahudy na Uherskobrodských dnech Komenského

Základní nové směrnice, které byly XI. sjezdem pro naše školství vypracovány, lze tedy shrnout do tří bodů:

1. *Obsahem socialistické školy musí být organické spojení vyučování a výchovy s výrobní prací žáků. Žáci mají získat nejen pracovní návyky, ale ve vyšších třídách i základní kvalifikaci pro dělnická povolání.*

2. *Základní povinné vzdělání se v nejbližších dvou až třech letech prodlouží na 9 let. Bude vytvořen systém, v němž na základní 9leté všeobecné vzdělání budou navazovat 3 další ročníky dvanáctiletky, nebo dvouleté až čtyřleté odborné školy, nebo dvouletá až tříletá odborná učiliště při závodech.*

3. *Do roku 1970 chceme poskytnout převážně většině mládeže plné středoškolské vzdělání.*

Jsou to úkoly, k jejichž uskutečnění soustředíme v příštích letech všechno své úsilí. Je nyní především úkolem pedagogů a učitelů, abychom tyto směrnice odpovědně zvážili a rozpracovali, abychom se co nejaktivněji účastnili jejich realizace.



Matematika

Doc. Dr. Josef Brejcha, Brno:

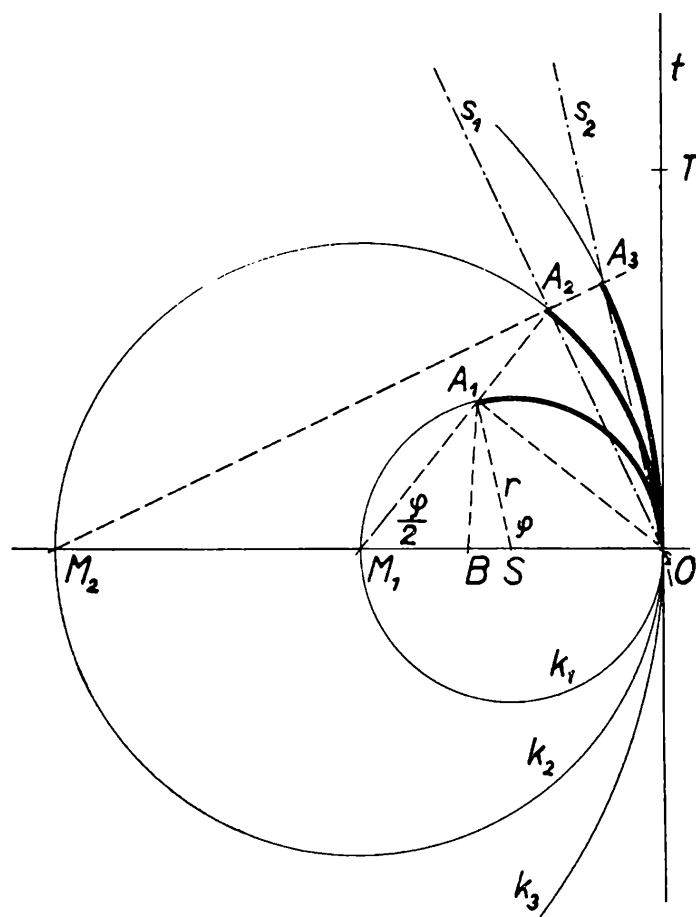
O jistém způsobu rektifikace kruhového oblouku

Budiž dána kružnice k_1 o středu S , poloměru r . Libovolný průměr protne tuto kružnici v bodech O, M_1 (viz obr. 1). Délku oblouku $\widehat{OA_1}$, příslušného k dutému středovému úhlu $\varphi = \widehat{OSA_1}$, označme o_1 . Je-li φ měřen v obloukové míře, pak, jak známo, platí

$$o_1 = r \varphi .$$

Sestrojme nyní kružnici k_2 o středu M_1 , poloměru $OM_1 = 2r$. Polopřímka M_1A_1 protne tuto kružnici v bodě A_2 . Z rovnoramenného trojúhelníka SA_1M_1 ihned plyne

$$\sphericalangle SM_1A_1 = \frac{\varphi}{2}$$



Obr. 1

Délka oblouku $o_2 = \widehat{OA_2}$ kružnice k_2 je pak dána vztahem

$$o_2 = \widehat{OA_2} = 2r \cdot \frac{\varphi}{2} = r\varphi, \text{ tj.}$$

$$o_1 = o_2.$$

Opakováním konstrukce právě popsané dospějeme ke vztahům

$$o_3 = \widehat{OA_3} = 2^2 r \frac{\varphi}{2^2} = r\varphi = o_1$$

$$o_n = \widehat{OA_n} = 2^{n-1} r \frac{\varphi}{2^{n-1}} = r\varphi = o_1, \text{ tj.}$$

oblouk $\widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} = \dots = \widehat{OA_n}$, přičemž oblouky s vyššími indexy se neustálým opakováním popsané konstrukce stávají plošší a plošší, takže při dosti velickém n lze oblouk $\widehat{OA_n}$ a úsečku OA_n prakticky ztotožnit.

Vadou konstrukce ovšem je, že body M_i ($i = 1, 2, \dots$) velmi brzo opustí nákresnu a příslušné kružnice k_i nelze rýsovat. Tuto vadu je však možno odstranit, uvážíme-li, že je

$$A_1A_2 \perp OA_1$$

$$A_2A_3 \perp OA_2.$$

$$A_{n-1}A_n \perp OA_{n-1}$$

a dále

$$OA_2 \text{ pŕl\u00ed \u00fanhel } A_1OT,^{1)}$$

$$OA_3 \text{ pŕl\u00ed \u00fanhel } A_2OT,$$

$$OA_n \text{ pŕl\u00ed \u00fanhel } A_{n-1}OT$$

kde T je libovoln\u00fd bod spole\u00e7n\u00e9 te\u00e7ny t kru\u00fdnic k_i , kter\u00fd le\u00fd\u00ed v t\u00e9\u00e7e polovin\u00e9 (vyt\u00e1t\u00e9 pŕ\u00edmku OS), v n\u00ed\u00fd le\u00fd\u00ed body A_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Odtud plyne snadn\u00e1 konstrukce \u00fase\u00e7ek OA_n , zjevn\u00e1 z obrazce, toti\u00fd:

s_1 je symetr\u00e1la \u00fanhlu A_1OT , $A_2A_1 \perp OA_1$,

s_2 je symetr\u00e1la \u00fanhlu A_2OT , $A_3A_2 \perp OA_2$, atd.

Konstrukci je mo\u00fdno ovšem od pŕ\u00edpadu k pŕ\u00edpadu pŕeru\u00fdit pŕi vhodn\u00e9m A_n .

Vedeme-li je\u00fdt\u00e9 $A_1B \perp OS$, pak plat\u00ed

$$A_1B = r \sin \varphi$$

¹⁾ D \u00fak a z Je zŕejm\u00e9 $\widehat{A_1OM_1} = R - \frac{\varphi}{2}$; pak

$$\widehat{A_1OT} = R - \left(R - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

Je\u00fdto $M_1M_2 = M_1A_2$, je $\widehat{M_1M_2A_2} = \widehat{M_1A_2M_2} = \frac{\varphi}{4}$, nebo\u00fd $\widehat{OM_1A_2} = \frac{\varphi}{2}$ je vn\u00e9\u00fd\u00fd \u00fanhel troj\u00fanheln\u00edka $M_1M_2A_2$ pŕi vrcholu M_1 . Podle konstrukce je d\u00e1le $OA_1 \perp M_1A_2$, $OA_2 \perp M_2A_2$ tj.

$$\widehat{A_1OA_2} = \widehat{M_1M_2A_2} = \frac{\varphi}{4}$$

Vzhledem k (1) m\u00e1me ihned $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OT}$, c . b . d.

$$OA_1 = \frac{A_1B}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$OA_2 = \frac{OA_1}{\cos \frac{\varphi}{2^2}}$$

$$OA_n = \frac{OA_{n-1}}{\cos \frac{\varphi}{2^n}}$$

Znásobením těchto rovnic vychází relace

$$OA_n = \frac{r \sin \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n}}, \quad (1)$$

platná pokud $0 \leq \varphi < \pi$.

Abychom ukázali, že délka úsečky OA_n , daná výrazem (1) s rostoucím n vždy přesněji representuje daný oblouk $\widehat{OA_1} = r\varphi$, určíme nejprve hodnotu

$$S_n = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n}.$$

To je možno provést různými způsoby; jeden z nejnámějších je tento:
Budiž

$$S_n = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n}$$

$$T_n = \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2^2} \dots \sin \frac{\varphi}{2^n}.$$

Znásobením vychází:

$$\begin{aligned} S_n \cdot T_n &= \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2^2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \sin \frac{\varphi}{2^n} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \dots \sin \frac{\varphi}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \sin \varphi \cdot \frac{T_n}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} \end{aligned}$$

Odtud pak máme ihned

$$S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2^n}}$$

Tomuto výrazu dáme tvar $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi \sin \frac{\varphi}{2^n}}$.

Po dosazení do (1) obdržíme

$$OA_n = \frac{r \sin \varphi}{\frac{1}{2^n} \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi \sin \frac{\varphi}{2^n}}} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} \cdot r \varphi$$

Pro n rostoucí nade všechny meze je pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} OA_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} \cdot r \varphi = r \varphi,$$

ježto, jak je běžně známo, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = 1$$

P o z n á m k a : Mikuláš Čusanus (1401 – 1464) navrhl r. 1450 tuto konstrukci pro rektifikaci kruhového oblouku:

Nechť S' je střed kružnice o poloměru r , AB její průměr. Na tomto průměru sestrojme v prodloužení přes bod B bod M , podle podmínky $BM = BS$. V bodě A sestrojme dále tečnu t dané kružnice. Je-li nyní C libovolný od A , B různý bod dané kružnice, určí přímka MC s tečnou t bod C_1 a platí $\widehat{AC} \approx AC_1$.

Pro úhel $\varphi = 32^\circ$ vede Cusanova konstrukce k hodnotě $r\varphi \doteq 0,5582 r$, konstrukce popsaná v předcházejícím textu dává po čtyřech krocích ($n = 4$) výsledek $r\varphi \doteq 16 r \sin 2^\circ = 0,5584 r$, zatím co správná hodnota $r\varphi$ (zaokrouhlená na 5 des. míst) je $r\varphi = 0,558 51 r$.

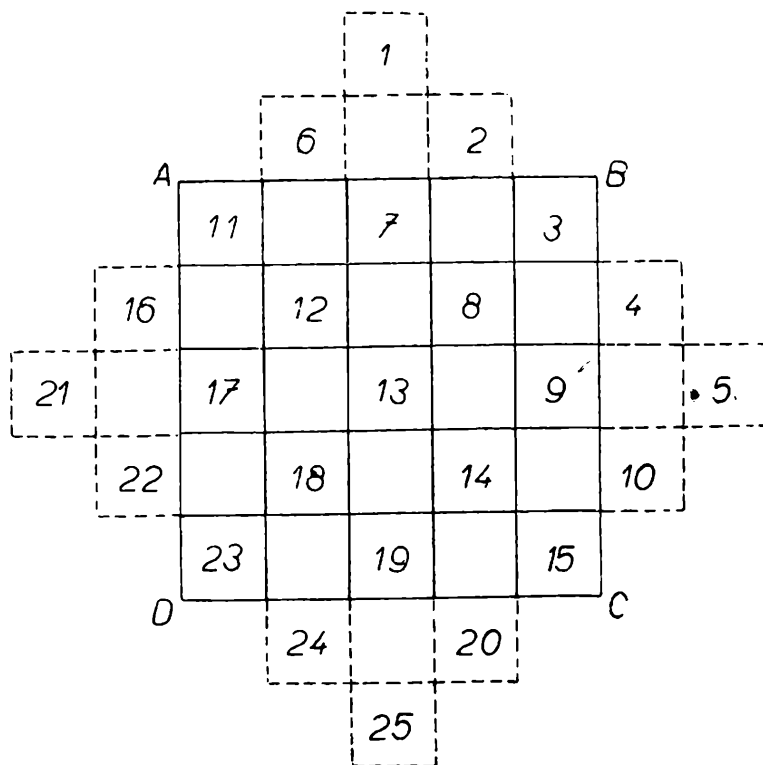
Aleš Tondl, České Budějovice.

Magické čtverce

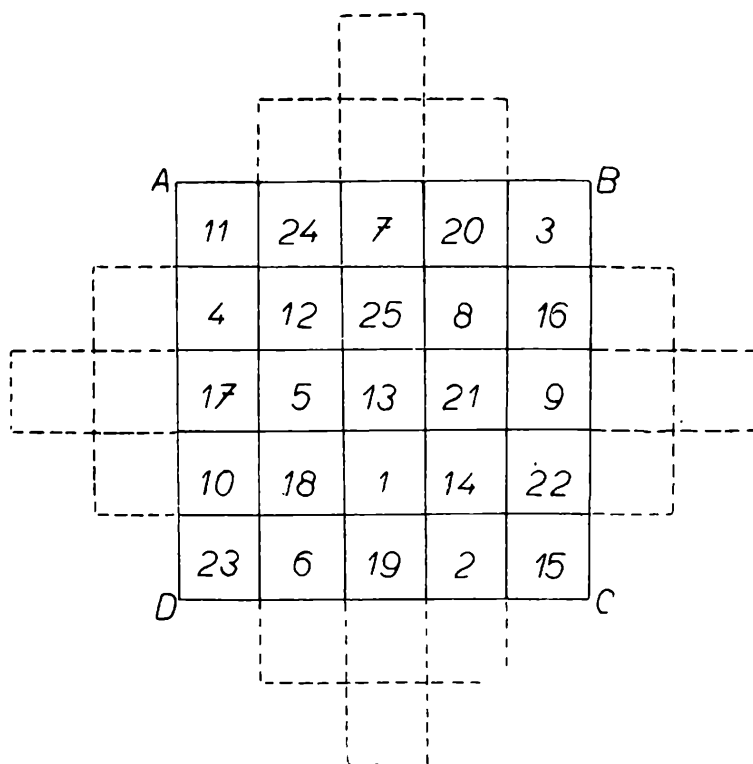
(Dokončení)

Vyřešíme magický čtverec pátého řádu.

Sestrojíme příslušný čtverec, označíme jeho vrcholy písmeny A , B , C , D a doplníme na nový podle obrázku 6. Vepišme do tohoto nového čtverce čísla od 1 do 25 v přirozeném uspořádání, počínaje od nejvýše položeného čtverečku tak,



Obr. 6



Obr. 7

aby číslice byly psány rovnoběžně s úhlopříčkou AC . Každé číslo ležící vně čtverce $ABCD$ přepíšeme do něho tím způsobem, že ho posuneme dolů (nahoru), vpravo (vlevo) do téhož sloupce (řádky), ve kterém leží, o tolik čtverečků, koliká-

tého řádu je magický čtverec. V našem případě posuneme tedy každé číslo ležící vně čtverce $ABCD$ o pět čtverečků. Číslo 1 bude tedy ležet pod číslem 13, číslo 22 bude ležet za číslem 14, číslo 5 před číslem 13 atd. Posuneme-li tedy právě popsaným způsobem všechna čísla ležící vně čtverce $ABCD$, obdržíme magický čtverec, jehož součet je 65 (obr. 7).

Právě popsané konstrukce se používá k sestrojení magických čtverců všech lichých řádů, tedy řádů $2n + 1$.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Obr. 8a

16			13
	11	10	
	7	6	
4			1

Obr. 8b

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Obr. 9

Popíšeme nyní konstrukci magického čtverce čtvrtého řádu. Sestrojíme dva čtverce čtvrtého řádu a v nich úhlopříčky. Do prvního čtverce (obr. 8a) vepíšeme čísla v přirozeném pořádku, počínaje od levého horního rohu tak, že čísla budeme psát jen do těch čtverečků, kterými neprocházejí úhlopříčky. Do druhého čtverce vepíšeme opět čísla v přirozeném pořádku, počínaje od pravého spodního rohu tak, že čísla budeme psát jen do čtverečků, kterými procházejí úhlopříčky (obr. 8b). Položíme-li oba čtverce na sebe, nebo přepíšeme-li oba čtverce do jednoho, obdržíme magický čtverec (obr. 9).

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

Obr. 10a

64			61	60			57
	55	54			51	50	
	47	46			43	42	
40			37	36			33
32			29	28			25
	23	22			19	18	
	15	14			11	10	
8			5	4			1

Obr. 10b

Této metody se používá při řešení magických čtverců, jejichž řád jest násobkem čísla čtyř, tedy řádů $4n$.

Magický čtverec osmého řádu vyřešíme tedy tak, že sestrojíme nejprve dva čtverce osmého řádu, rozdělíme je na čtverce čtvrtého řádu a v kaž-

dém sestrojíme úhlopříčky. Pak vepíšeme do prvního čtverce čísla od 1 do 64 v přirozeném pořádku, počínaje od levého horního rohu vpravo, ale čísla budeme psát jen do čtverečků, kterými neprocházejí úhlopříčky (obr. 10a). Do druhého čtverce vepíšeme čísla jen do čtverečků, kterými procházejí úhlopříčky, ale začneme v pravém dolním rohu směrem vlevo (obr. 10b). Přepíšeme-li čísla z obou čtverců do jednoho (obr. 11), obdržíme hotový magický čtverec.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Obr. 11

A	4	9	2	22	27	20	B
	3	5	7	21	23	25	
	8	1	6	26	19	24	
	31	36	29	13	18	11	
	30	32	34	12	14	16	
	35	28	33	17	10	15	
D							C

Obr. 12a

A	31	9	2	22	27	20	B
	3	32	7	21	23	25	
	35	1	6	26	19	24	
	4	36	29	13	18	11	
	30	5	34	12	14	16	
	8	28	33	17	10	15	
D							C

Obr. 12b

Magický čtverec sudého řádu (nedělitelného čtyřmi) řešíme tak, že jej rozdělíme na čtyři čtverce lichého řádu. Popíšeme-li vrcholy čtverce A, B, C, D , vyřešíme nejdříve čtverec ve vrcholu A , potom čtverec ve vrcholu C , pak v B a nakonec v D . Tyto čtverce jsou stejného lichého řádu a umíme je řešit.

V prvním m. č. jsou tedy čísla od 1 do $\frac{n^2}{4}$, v druhém čísla od $\frac{n^2}{4} + 1$ do $\frac{n^2}{2}$,

v třetím od $\frac{n^2}{2} + 1$ do $\frac{3n^2}{4}$ a v posledním čtverci jsou čísla od $\frac{3n^2}{4} + 1$ do n^2 .

Je zřejmé, že součet čísel ve všech sloupcích je stejný a sloupce tedy vyhovují

podmínce magického čtverce. Aby této podmínce vyhovovaly i řádky a úhlopříčky, musíme „přehazovat“ čísla v sloupcích. První přehození uděláme tak, že vyměníme první číslo z prvního sloupce a prvního m. č. prvním číslem stojícím v prvním sloupci čtvrtého m. č. Druhé číslo ve druhém sloupci v prvním m. č. vyměníme za druhé číslo v druhém sloupci v posledním m. č. Nyní zase vyměníme třetí číslo v prvním sloupci za třetí číslo v prvním sloupci v posledním m. č. atd. První přehození se týká jen prvních dvou sloupců, a to tak, že přehodíme v prvním sloupci jen čísla stojící v lichých čtverečcích v prvním m. č. za čísla stojící v lichých čtverečcích v posledním m. č. V druhém sloupci přehodíme pak jen čísla stojící v sudých čtverečcích.

Toto přehození určuje už m. č. nejnižšího sudého řádu nedělitelného čtyřmi. Na obrázku 12a a 12b je vyřešen magický čtverec šestého řádu.

2	11	58	51	30	39	54	15
59	50	3	12	53	14	31	38
10	1	52	57	40	29	16	55
49	60	9	4	13	56	37	32
64	5	24	45	36	41	28	17
23	48	61	8	25	20	33	42
6	63	46	21	44	35	18	27
47	22	7	62	19	26	43	34

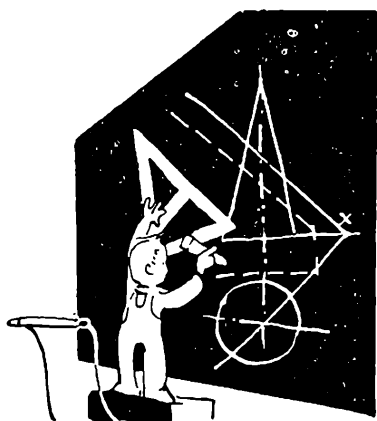
Obr. 13

Řešíme-li magický čtverec vyššího řádu (např. 10, 14 atd.), je třeba přehodit větší počet celých sloupců. První výše popsaná výměna se provádí vždy, ale pak se vymění ještě stejný počet celých sloupců mezi prvním a posledním m. č. a mezi druhým a třetím m. č.

Je-li magický čtverec řádu $4n + 2$, přehodíme v prvním a čtvrtém m. č. n sloupců (v tomto počtu je již zahrnuta i výše popsaná výměna) a v druhém a třetím m. č. $n - 1$ sloupců. Celkem tady provedeme v celém m. č. $2n - 1$ výměn.

S magickými čtverci spojovaly se odedávna také různé i duchaplné hříčky, jejichž řešení nebývalo vždycky snadné. Všimněme si závěrem jedné z nich. Týká se magického čtverce osmého řádu a souvisí se šachovou hrou. Pravidla pohybu koně (jezdce) v šachu jsou vám jistě dobře známa. Naše úloha zní takto: projít celou šachovnicí skoky jednoho koně tak, aby tato figura vstoupila na každé pole šachovnice jen jednou, aby při tom žádné pole nevynechala a aby se nakonec vrátila na původní pole, z něhož vyšla. Tuto úlohu řešila úspěšně a samostatně

řada lidí, mezi nimi i slavný matematik L. Euler (1707—1783). Přidejme k ní však další podmínku. Očíslujme pole šachovnice od 1 do 64 tak, že tato čísla znamenají pořadí jednotlivých výše zmíněných tahů koně a ptejme se, zdali můžeme tímto způsobem dostat na šachovnici magický čtverec. Spokojme se zde jen výsledkem uvedeným v obr. 13 s poznámkou, že součty příslušných čísel v jednotlivých řádcích i sloupcích jsou skutečně stejné, totiž 260, ale součty v úhlopříčkách jsou jiné. Není divu, že se zde nepodařilo úplně vyhovět definici magického čtverce podané na začátku tohoto článku; vždyť podmínka zachování tahů koně je velmi náročná a celou úlohu hodně komplikuje. Zanedbání součtů v úhlopříčkách je vskutku minimální ústupek této nové podmínce a výsledek je tedy jistě pozoruhodný.



Deskriptivní geometrie a rýsování

Dr. Svatava Kubálková, Praha:

Přibližné konstrukce

V tomto článku si povšimneme některých základních konstrukcí, které *nelze přesně provést* jednoduchými rýsovacími prostředky, tj. pravítkem a kružítkem. Ukážeme, jak se takové konstrukce nahrazují - *aproximují* - přibližnými jednoduchými konstrukcemi, které lze již řešit pravítkem a kružítkem. Tyto pomocné konstrukce se nazývají *geometrické aproximace*.

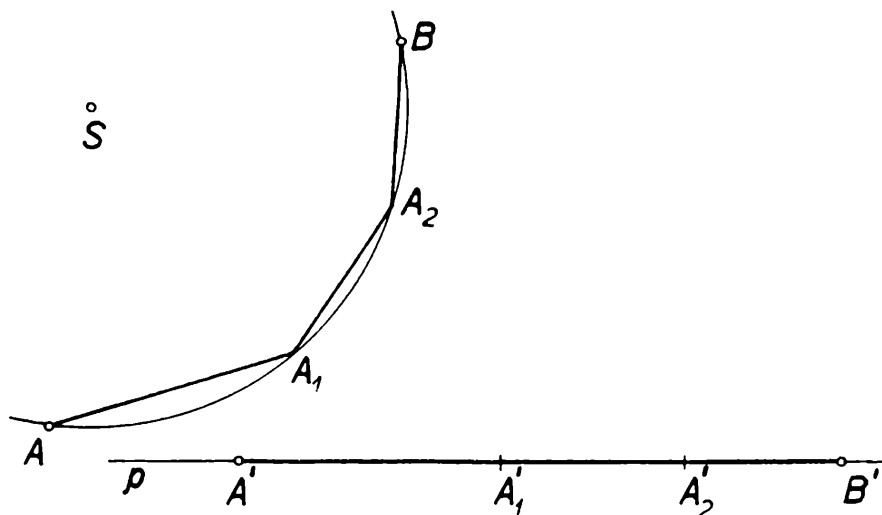
Dříve než je začneme provádět, umluvíme se na tomto označení: přímku p , která spojuje body R, S , budeme značit $p \equiv RS$ nebo krátce RS . Slovy „úsečka AB “ budeme rozumět úsečku o krajních bodech A, B ; rovněž její délku označíme AB . Analogicky symbolem \widehat{AB} budeme rozumět jednak oblouk kružnice o krajních bodech A, B , jednak jeho délku. Budou-li dva body P, Q totožné, budeme psát $P \equiv Q$. Kolmost, resp. rovnoběžnost přímek p, q označíme, jak je zvykem, symbolem $p \perp q$, resp. $p \parallel q$. Dutý úhel α , jehož ramena jsou tvořena polopřímkami VA, VB , budeme značit $\alpha = \sphericalangle AVB$ nebo krátce $\sphericalangle AVB$. A konečně symbolem \doteq budeme rozumět přibližnou rovnost.

V geometrii se často vyskytuje úloha stanovit délku nakresleného oblouku \widehat{AB} kružnice, tj. sestavit úsečku, jejíž délka je rovna délce daného oblouku \widehat{AB} kružnice. Tato úloha, kterou nelze přesně provést pouhým pravítkem a kružítkem, se nazývá *rektifikace oblouku kružnice*. Řeší se někdy tak, že oblouk \widehat{AB} nahradíme - aproximujeme - konečným počtem tětiv $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$, které

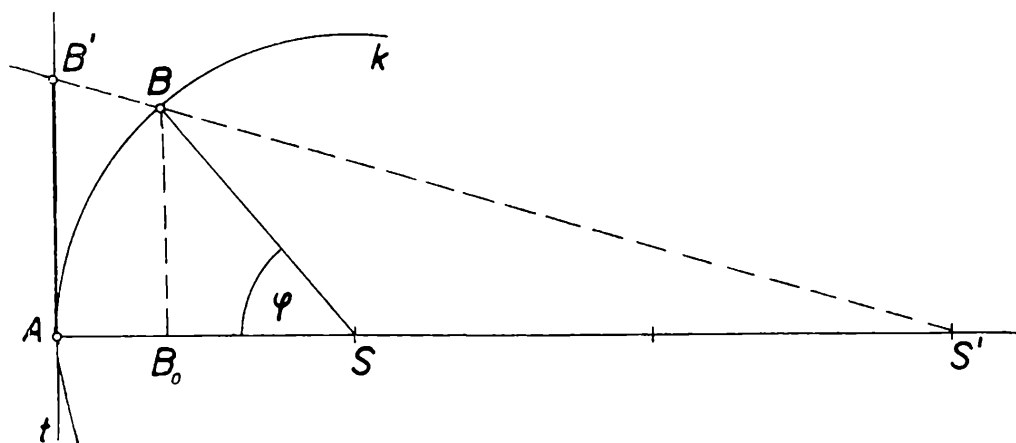
kružítkem přeneseme na přímku p do úseček $A'A_1'$, $A_1'A_2'$, \dots , $A'_{n-1}B'$. Potom jest

$$\widehat{AB} \doteq A'B' = A'A_1' + A_1'A_2' + \dots + A'_{n-1}B'.$$

Viz obr. 1, kde jsme položili $n = 3$. Je zřejmé, že chyba, které se při této přibližné konstrukci dopustíme, tj. rozdíl $\widehat{AB} - A'B'$, je tím menší, čím je počet



Obr. 1



Obr. 2

vepsaných tětiv, tj. číslo n větší. Stanovit velikost této chyby lze však při uvedené konstrukci velmi těžko. Proto uvedeme jiný způsob rektifikace oblouku kružnice.

Ú l o h a 1. Stanovte délku daného oblouku \widehat{AB} kružnice k . (Obr. 2).

Na polopřímce opačné k polopřímce SA (kde S je střed kružnice k), zvolíme bod S' tak, aby $AS' = 3 \cdot AS$. Promítneme-li bod B z bodu S' do bodu B' na tečně t kružnice k sestrojené v bodě A , udává úsečka AB' přibližně délku oblouku \widehat{AB} .

Šprávnost této konstrukce ověříme tím, že určíme rozdíl $\Delta = \widehat{AB} - AB'$, což je chyba, které se dopustíme, když místo délky oblouku \widehat{AB} sestrojíme délku námi zkonstruované úsečky AB' . K tomu účelu označíme patu kolmice spuštěné z bodu B na přímkou AS písmenem B_0 , středový úhel nad obloukem \widehat{AB} , tj. úhel $\sphericalangle ASB$, písmenem φ a délku úsečky AS písmenem r . Trojúhelníky $\triangle AS'B'$ a $\triangle B_0S'B$ jsou podobné, takže platí úměra

$$AB' : AS' = B_0B : B_0S' \quad (1)$$

Dále je

$$\begin{aligned} AS' &= 3r, & B_0B &= SB \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \varphi, \\ B_0S' &= B_0S + SS' = r \cdot \cos \varphi + 2r \end{aligned} \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne

$$AB' = \frac{AS' \cdot B_0B}{B_0S'} = \frac{3r^2 \cdot \sin \varphi}{r \cos \varphi + 2r} = \frac{3r \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi + 2}$$

Hledaná chyba Δ je potom dána výrazem

$$\Delta = \widehat{AB} - AB' = r \cdot \text{arc } \varphi - \frac{3r \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi + 2} = r \cdot \left(\text{arc } \varphi - \frac{3 \sin \varphi}{\cos \varphi + 2} \right);$$

sestavme si její hodnoty do následující tabulky (počítáno na 5 míst za desetinnou čárkou):

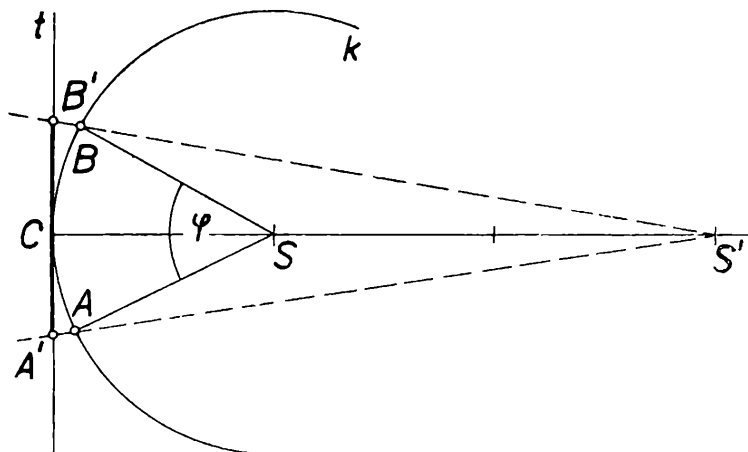
φ	10°	20°	30°	40°	50°
arc φ	0,174 53	0,349 07	0,523 60	0,698 13	0,872 66
Δ	0,000 00 r	0,000 03 r	0,000 23 r	0,000 97 r	0,003 08 r

Z této tabulky je vidět, že pro středový úhel φ až do velikosti $\varphi = 30^\circ$ je chyba Δ , které se dopustíme při nahrazení délky oblouku \widehat{AB} délkou úsečky AB' , velmi malá; například pro $\varphi = 30^\circ$ a poloměr $r = 100$ mm je $\Delta = 0,023$ mm. Tedy pro rektifikaci oblouku \widehat{AB} kružnice příslušného ke středovému úhlu φ , $0 < \varphi \leq 30^\circ$, lze použít s dostatečnou přesností konstrukce z obr. 2.

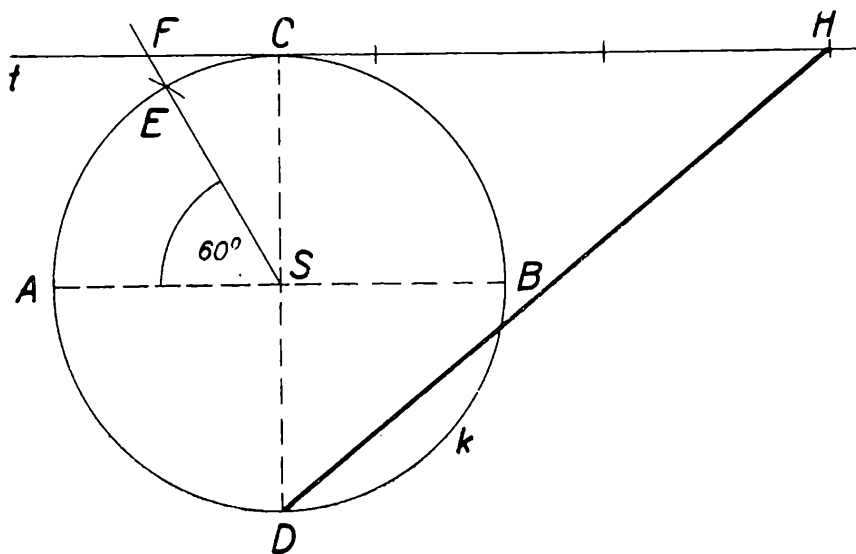
Jestliže oblouk \widehat{AB} kružnice k přísluší k středovému úhlu φ , $30^\circ < \varphi \leq 60^\circ$, potom při jeho rektifikaci postupujeme takto (obr. 3): zvolíme bod C přibližně uprostřed oblouku \widehat{AB} a použitím tečny t kružnice k v bodě C provedeme výše popsanou konstrukci jednak pro oblouk \widehat{AC} a jednak pro oblouk \widehat{CB} . Potom je $\widehat{AB} \doteq A'B'$.

Oblouk \widehat{AB} kružnice k příslušný k středovému úhlu φ , $60^\circ < \varphi$, rozdělíme nejdříve vhodným způsobem na několik kratších oblouků a ty potom rektifikujeme popsáním způsobem každý zvlášť.

Konstrukce z úlohy 1 lze použít také k určení délky obvodu dané kružnice. Tato úloha se nazývá *rektifikace kružnice*. Stanovíme-li totiž popsanou konstrukcí přibližnou délku oblouku dané kružnice příslušného k středovému úhlu 30° ,



Obr. 3



Obr. 4

dostaneme tak s malou chybou Δ (viz tabulka) přibližnou hodnotu - aproximaci - pro $\frac{1}{12}$ délky obvodu dané kružnice. Mnohem lepší aproximaci délky obvodu kružnice však dávají následující dvě konstrukce.

Ú l o h a 2. Určete délku obvodu dané kružnice k o středu S a poloměru r .

K o n s t r u k c e 1. (Obr. 4). V dané kružnici k sestrojíme dva k sobě kolmé průměry $AB \perp CD$. Na oblouku \widehat{AC} , který leží v polovině určené průměrem AB a bodem C , určíme bod E tak, aby $\sphericalangle ASE = 60^\circ$. Průsečík polopřímky SE

s tečnou t kružnice k v bodě C označme F . Naneseme-li nyní na polopřímku FC od bodu F úsečku $FH = 3r$, udává délka úsečky DH přibližnou délku *poloviny* obvodu dané kružnice k . Tento způsob rektifikace dané kružnice se nazývá *konstrukce Kochaňského*.

Přesnost popsané konstrukce je vidět z následujícího výpočtu: Pro stranu FC trojúhelníka ΔSFC platí

$$FC = SC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

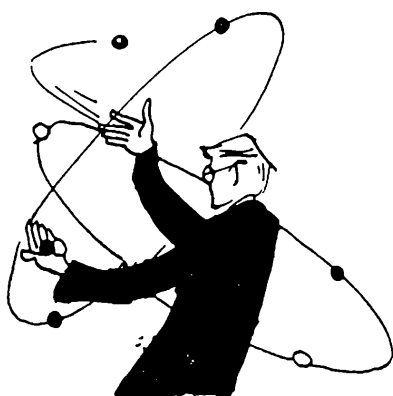
Dále je

$$CH = FH - FC = 3r - \frac{r}{\sqrt{3}} = r \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (3)$$

Konečně z ΔDCH dostaneme použitím Pythagorovy věty a vztahu (3)

$$DH = \sqrt{(DC)^2 + (CH)^2} = \sqrt{4r^2 + r^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \doteq 3,1416r \doteq \pi r.$$

(Pokračování)



Fyzika

Ing. Jiří Bád al, Praha:

Principy radiolokace

Slovo *radar* nebo *radiolokátor* je dnes již běžným pojmem. Četná použití pro mírové i vojenské účely jsou dnes již známa široké veřejnosti. Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře s principem a metodami *radiolokace* pomocí jednoduchých úvah bez rozsáhlejšího použití matematiky.

Radiolokace se zabývá získáváním informací o objektech odrážejících v různé míře elektromagnetické vlnění vhodné vlnové délky. Objektem se rozumí např. letoun, loď nebo terén pod letadlem. Radiolokátor vysílá elektromagnetické vlnění o velké energii a zachycuje vlnění odražené od objektů. Informace obsažené v odraženém signálu slouží pak ke specifikaci objektu. Tak získáváme o objektu soubor údajů, které jej charakterisují. Jsou to například jeho úhlové souřadnice, přibližné rozměry, i jiné údaje. Ve většině případů tyto údaje se nežadají všechny; postačí jen jejich část, důležitá pro příslušná použití radiolokátoru. Vysílač radiolokátoru vysílá buďto *nemodulovaný signál*, nebo *signál frekvenčně* nebo *pulsově modulovaný*. Použití jednoho nebo druhého způsobu modulace závisí na úkolech, které má lokátor plnit. Nejrozšířenější je zatím lokátor impulsově modulovaný, kterým se budeme zabývat.

Nyní provedeme několik úvah o šíření elektromagnetických vln a výsledky budeme aplikovat na problémy radiolokace.

Představme si nejprve, že anténa vysílá energii rovnoměrně do všech směrů prostoru. Označme tuto energii E . Uvažujeme zatím ideální případ vakua, kde elektromagnetická energie není prostředím absorbována. Pak kulovou plochou o poloměru r projde zřejmě stejné množství energie E a hustota energie na povrchu této koule bude $\frac{E}{4\pi r^2}$. Energie odražená objektem, ležícím ve vzdálenosti r od lokátoru, bude úměrná hustotě energie dopadající na cíl. Konstanta úměrnosti, kterou označíme s , bude záviset na rozměrech cíle, jeho geometrickém tvaru, materiálu a na vlnové délce; nazývá se efektivní plochou cíle.¹⁾ Tedy

$$E_{\text{odraž.}} = \frac{E}{4\pi r^2} \cdot s$$

Předpokládejme opět, že energie $E_{\text{odraž.}}$ odražená cílem bude vyzářena *isotropně* (tj. rovnoměrně do všech směrů). Pak v místě radiolokátoru je hustota energie E přicházející do cíle rovna $\frac{E_{\text{odraž.}}}{4\pi r^2}$. Dosazením z prvního vzorce dostaneme

$$E_{\text{prij.}} = \frac{E \cdot s}{16\pi^2 r^4},$$

neboli energie, která se vrací od cíle je nepřímo úměrná čtvrté mocnině vzdálenosti cíle.

Nechť $E_{\text{min.}}$ je minimální hustota energie, kterou radiolokátor dokáže ještě zachytit (neboť přijímač radiolokátoru má jistou minimální citlivost); pak dosah radiolokátoru je

$$r_{\text{max}} = \sqrt[4]{\frac{E \cdot s}{16\pi^2 r^4 E_{\text{min}}}}.$$

Vidíme, že chceme-li zvětšit při stejném cíli a stejné citlivosti přijímače dosah r radiolokátoru dvakrát, je nutno zvýšit vysílaný výkon 16krát. Protože výkon vysílače lze jen velmi těžko stupňovat nad určitou hodnotu, udává tento základní vztah omezení dosahu radiolokátoru.

Nyní si všimneme způsobu, jakým se určují úhlové souřadnice objektu. Pokrok techniky v oboru radiových vln o velmi krátké vlnové délce dovolil použití vysoce směrových antén, které při prakticky vyhovujících rozměrech antény umožňují koncentraci elektromagnetických vln do úzkého svazku.

Je-li elektromagnetická energie vysílána v takovém úzkém svazku, budou přijímány pouze odrazy od objektů zasažených svazkem, tj. objektů ležících vzhledem k radiolokátoru ve směru, kterým míří svazek. Leží-li objekt uvnitř svazku,

¹⁾ Výpočet efektivní plochy je velmi obtížný a prakticky je možno jej provést pouze pro nejjednodušší geometrické útvary a při mnoha zjednodušeních.

dostaneme nejsilnější odražený signál, leží-li objekt na okraji svazku, je tento signál slabší, a konečně, leží-li objekt zcela mimo svazek, nedostaneme žádný odražený signál. Známe-li tedy i velikost odraženého vlnění pro všechny polohy svazku v prostoru, můžeme určit úhlové souřadnice všech objektů, nalézajících se v dosahu radiolokátoru.

Soustředění elektromagnetické energie do úzkého svazku má ještě jeden zajímavý následek. Zaujímá-li svazek prostorový úhel ω , pak ve vzdálenosti r od antény není jako u isotropního zářiče hustota energie rovna $\frac{E}{4\pi r^2}$, ale $\frac{E}{\omega r^2}$,

neboť nyní všechna energie soustředěná uvnitř svazku prochází plochou ωr^2 a nikoliv jako dříve plochou $4\pi r^2$ u isotropního zářiče. Proto v případě, že objekt je ozářen svazkem, dopadá naň mnohem větší energie, neboť hodnota ω ve jmenovateli zlomku, určujícího hustotu energie, je pro ostře směřové anteny velmi malá. Výraz pro hustotu energie svazku je pak mnohonásobně větší než odpovídající výraz pro isotropní zářič, což má za následek zvýšení dosahu radiolokátoru.

Soustředění elektromagnetického vlnění do úzkého svazku naráží však na potíže. Jak plyne z teoretických závěrů vlnové optiky, je v takovém případě nutno, aby anténa měla rozměry řádově rovné několikanásobku vlnové délky. Tak například šířka d svazku (ve stupních) vytvořeného parabolickým zrcadlem o průměru D při vlnové délce λ , je přibližně

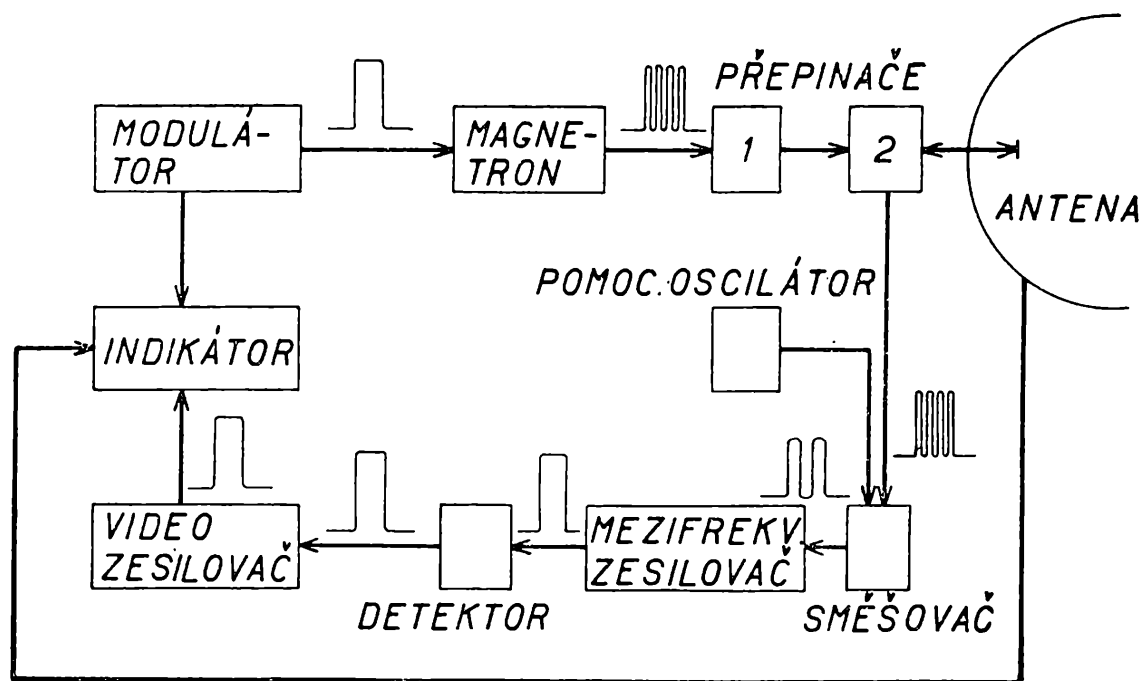
$$d = 60 \frac{\lambda}{D} .$$

Požadujeme-li šířku svazku 3° , je $D = 20 \lambda$. Při vlnové délce 1 m ($f = 300$ Mc/sec) by to znamenalo zrcadlo o průměru 20 m. To jsou rozměry na hranici technických možností a pro praktické účely zcela nevyhovující. Při vlnové délce $\lambda = 10$ cm ($f = 3000$ Mc/sec) by byl průměr $D = 2$ m, což je velikost dobře vyhovující pro pozemní radiolokátor. Při $\lambda = 3$ cm ($f = 10\,000$ Mc/sec) je, $D = 60$ cm, což je rozměr vhodný i pro zařízení nesené na palubě letounu.

Zdálo by se, že zkracováním vlnové délky můžeme při zachování ostatních parametrů zařízení libovolně zmenšovat rozměry antény. Z uvedených příkladů však vidíme, jak současně s poklesem vlnové délky roste frekvence vlnění. Se zvyšováním frekvence však neustále stoupají obtíže s konstrukcí příslušného zařízení a hlavně se projevuje nedostatek vhodných výkonových generátorů elektromagnetických vln (se stoupající frekvencí rychle klesá výkon známých generátorů). Dalším závažným omezením je absorpce vlnění ve vodních parách a dešti, která také stoupá se zvyšováním frekvence a od frekvence odpovídající vlnové délce asi 1,9 cm nabývá nepřijatelných hodnot a přispívá pak podstatně ke snížení dosahu radiolokátorů. Proto pro pozemní zařízení o velkém dosahu (300 až 400 km) se volí vlnová délka kolem 10 cm. V tomto oboru vlnové délky jsou k dispozici velmi výkonné generátory, absorpce ve vodních parách je malá a velké rozměry antény (několik m) u pozemního zařízení nevadí. Pro přehledové palubní lokátory o středním dosahu se volí vlnová délka 3 cm. Jsou k dispozici generátory o středním výkonu, absorpce ve vodních parách se ještě příliš neprojevuje a rozměry antény jsou přijatelně malé. Pro přesné lokátory používané k zaměřování

nebo bombardování, kde se žádá velmi úzký svazek (užší nežli 1°), bylo použito i vlnových délek mezi 1 a 2 cm. Generátory mají zde malý výkon, je značná absorpce ve vodních parách. To však nevadí, neboť u takových zařízení postačuje dosah několika km. Podstatná je však možnost zachování malých rozměrů antény při extrémně úzkém svazku.

Protože směr svazku je pevně svázán s orientací antény, spočívá měření úhlových souřadnic cíle v měření veličin, charakterisujících polohu anteny. Je to prosté měření úhlů natočení antény kolem dvou k sobě kolmých os. K úplnému určení polohy objektu v prostoru potřebujeme kromě jeho úhlových souřadnic znát ještě jeho vzdálenost od radiolokátoru. Všimneme si nyní měření vzdálenosti u impulsově modulovaného radiolokátoru. Radiolokátor vyšle krátký impuls elektromagnetických vln, které dopadnou na cíl, odrazí se od něj a jsou zachyceny přijímačem lokátoru. Je-li cíl ve vzdálenosti r , proběhne impuls dráhu $2r$ (od lokátoru k cíli r a zpět ještě jednou r). Protože rychlost šíření elektromagnetických vln je rovna rychlosti světla $c \doteq 300\,000$ km/sec, je doba t za kterou se odražený



Obr. 1

signál vrátí k radiolokátoru $t = \frac{2r}{c}$. Například pro cíl ve vzdálenosti 300 km od

lokátoru je doba $t_{300} = \frac{2 \cdot 300}{300\,000}$ sec, tedy rovna dvěma tisícinám vteřiny. Požadujeme-li přesnost určení vzdálenosti Δr , pak chyba Δt při měření času nesmí

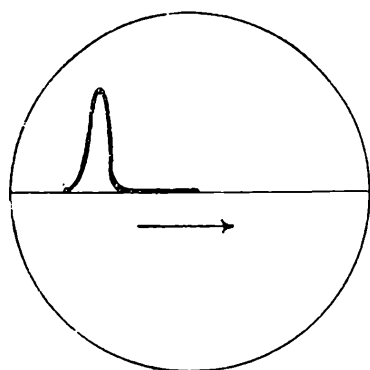
být větší nežli $\Delta t = \frac{2\Delta r}{c}$. Požadujeme-li tedy například přesnost $\Delta r = 30$ m,

je $\Delta t = \frac{2 \cdot 30}{300\,000\,000}$ sec = $\frac{2}{10\,000\,000}$ sec, tj. dvě desetiny mikrosekundy. Mez

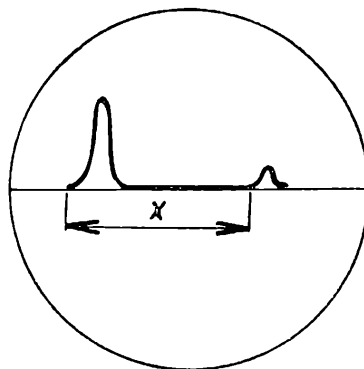
technických možností je přesnost mezi pěti a deseti metry. Z uvedených příkladů

vidíme, že měření vzdálenosti je převedeno na měření časových intervalů v délce od nuly do dvou tisícín vteřiny s přesností řádově (podle účelu lokátoru) jednotek nebo desetin mikrosekund. Tyto požadavky na měření času moderní elektronika splňuje.

Blokové schema impulsního radiolokátoru je na obr. 1. Podrobnosti o jednotlivých součástech budou uvedeny v dalších článcích. Nyní si jen stručně všimneme jejich funkce. Modulátor vysílače vyrábí impulsy stejnosměrného napětí o vysokém výkonu, které jsou vedeny na *magnetron*, který je výkonovým generátorem vysokofrekvenční energie. Z magnetronu vystupují impulsy vysokofrekvenční energie vlnovodem přes výhybky tvořené výbojkami, umístěnými v rezonančních dutinách do antény. Přijde-li výkonový impuls do vlnovodu, zapálí se nejprve výbojka v prvním přepínači¹) a umožní signálu další cestu směrem k přepínači 2. Zapálením výbojky v přepínači 2 se uzavře cesta do přijímače (neboť impuls o značném výkonu by vstupní část přijímače zničil) a impuls postupuje do antény, odkud je vyzářen do prostoru. Vyzářený signál dopadne na cíl, odrazí se zpět a je zachycen anténou. Mezitím je výbojka v přepínači 2 zhaslá (slabý odražený signál ji nestačí zapálit) a tím otevřela signálu cestu do přijímače. Zhaslá výbojka v přepínači 1 zamezí proniknutí signálu směrem k magnetronu. Přijímač pracuje na principu superhetu. Signál přichází do směšovače, kde je smíšen se signálem



Obr. 1



Obr. 2

přicházejícím z místního oscilátoru. Vzniklý rozdílový kmitočet (řádově desítky Mc/s) je pak dále zesilován mezifrekvenčním zesilovačem na hodnotu vhodnou pro detekci. Po detekci jsou vzniklé impulsy zesilovány tzv. *video* - zesilovačem a posléze přiváděny do indikátoru, kde jsou vyhodnocovány.

Jedná-li se například o prosté měření vzdálenosti, probíhá proces v indikátoru takto (viz obr. 2): impuls z modulátoru přijde také do indikátoru, kde spustí časovou základnu osciloskopu, jehož paprsek se začne pohybovat konstantní rychlostí směrem doprava. Svislé vychýlení paprsku je dáno signálem z přijímače. Přepínač 2 sice uzavře výkonovému impulsu cestu do přijímače, ale uzavření není úplně dokonalé a část proniklého výkonového impulsu, byť i velmi nepatrná, stačí po zesílení v přijímači způsobit značnou svislou výchylku na stínítku osciloskopu a tím určit okamžik vyslání signálu. Výkonový impuls zatím opustí lokátor, běží k cíli, odrazí se a běží zpět. Mezitím se paprsek osciloskopu posunuje konstantní rychlostí doprava. Jakmile se odražený signál vrátí do lokátoru, je

zesílen přijímačem a způsobí menší svislou výchylku ve vzdálenosti x od prvě. Je-li rychlost, kterou se paprsek osciloskopu pohybuje doprava, v , je časový interval t , který uplyne mezi vysláním a přijmutím impulsu $t = \frac{X}{v}$. Víme-li dále, že

$t = \frac{2r}{c}$, pak $\frac{x}{v} = \frac{2r}{c}$ a máme pro vzdálenost cíle $r = x \cdot \frac{c}{2v}$. Rychlost světla c

je konstantní, rychlost pohybu paprsku může být také konstantní, pak $r = x \cdot \text{konst.}$, tj. vzdálenost cíle je přímo úměrná vzdálenosti x mezi počátkem vyslaného a odraženého impulsu. Vodorovná stupnice pak může být cejchována přímo v kilometrech. Podle výchylky, kterou způsobí odražený signál, můžeme zhruba usuzovat na velikost cíle; větší cíl způsobí větší výchylku a naopak.

Tím jsme ukončili výklad principů radiolokace, které jsme ilustrovali na nejjednodušším případě impulsního lokátoru pro měření vzdálenosti. Popis jednotlivých částí a různých typů lokátorů bude následovat v dalším článku.

Ing. Dr. Václav Šindelář, Praha:

Skupenské přeměny a kinetická teorie tepla

Než přejdeme k vlastnímu výkladu, zopakujeme si několik důležitých pojmů. *Soustavou (systémem)* rozumíme v termodynamice souhrn fyzikálních těles, který jako celek považujeme oddělený od ostatního světa, tvořícího vnější prostředí (okolí) soustavy. *Tělesa* pak (ovšem v širším slova smyslu) nerozumíme jen pevné hmotné útvary, nýbrž i kapalné a plynné, prostě souhrn nějakého počtu hmotných částíček, zpravidla vázaných v tomtéž skupenství. Soustava se může skládat z jednoho nebo několika fyzikálně i chemicky stejnorodých (homogenních) těles zvaných obecně *fáze*. Tvoří-li soustavu pouze jediná fáze, která má v každém místě stejné vlastnosti a stejné složení, nazýváme soustavu *stejnorodou (homogenní)*. Soustava o více fázích se jmenuje *heterogenní*. Tvoří-li soustavu určité množství ledu z destilované vody, jde o soustavu homogenní - nutno ovšem dodat - jen v tom případě, nemá-li teplota v různých jejích místech příliš rozdílné hodnoty a je-li tomu podobně i s poměry tlakovými. Proč se o této podmínce zmiňujeme, uvidíme dále. Podobně je homogenní soustavou roztok modré skalice ve vodě, zde jde ovšem o jednu fázi, ale o dvě složky. Příkladem heterogenní soustavy může být soustava kapalina-pára, led-kapalina téže látky, či též látek různých, mokrá pára, směs jednoklonné a kosočtverečné síry (což jsou dvě různé fáze), nerozpuštěné krystalky modré skalice v nasyceném vodním roztoku téže látky a pod. **O p t i c k é a n t i p o d y**, tj. látky, jež krystalují levotočivě nebo pravotočivě, nepokládáme však za rozdílné fáze.

Fázi lze tedy definovat jako homogenní hmotný útvar, který je v heterogenní soustavě fyzikálně oddělen od jiných útvarů. Pevný, kapalný a plynný stav téže látky jsou tři různé její fáze. Také každý krystalický stav téže látky představuje její samostatnou pevnou fázi. Přitom nezáleží na tom, zda pevná fáze tvoří souvislý celek nebo oddělené krystalky. Tak bylo pečlivými výzkumy zjištěno, že led H_2O se vyskytuje v šesti různých pevných modifikacích, tedy v šesti různých

fázích. Tlaky, při nichž se tyto modifikace vyskytují jsou však vysoké a činí až několik desítek tisíc atmosfér. Za ještě vyšších tlaků lze předpokládat existenci dalších modifikací. Kdybychom zkoumali krystalickou stavbu i jiných pevných látek za vysokých tlaků, objevili bychom jistě i u nich větší počet pevných modifikací.

Je-li v rovnovážné soustavě přítomno více fází, nazýváme je *koexistující*. Jak již bylo dříve na uvedených příkladech ukázáno, nemusí být fáze chemicky čistá látka, může ji tvořit také roztok, plynná směs apod. Chemicky čisté látky, z nichž se soustava dá složit, nazýváme *složkami (komponentami)* soustavy. Tak soustava, kterou tvoří nenasycený roztok modré skalice, je soustavou o jedné fázi a dvou složkách. Směs jednoklonné a kosočtverečné síry je soustavou o dvou fázích a jedné složce, podobně mokrá pára a mj.

Po tomto krátkém úvodu přejdeme k vlastnímu rozdělení skupenských přeměn.

Hlavní fáze různých látek nazýváme *skupenstvím* těchto látek. Hlavní fáze říkáme zde proto, že celkový počet fází téže látky může být i značně vyšší než počet jejich skupenství (viz případ ledu H_2O) a že kritériem pro jejich určení je, jak dále uvidíme, stupeň vzájemné pošinutelnosti molekul. Jsme zvyklí dělit skupenství na *pevné, kapalné a plynné* podle toho, zda látka má určitý tvar a objem, či můžeme u ní mluvit jen o určitém objemu, nebo konečně, zda u ní neshledáváme ani pevný tvar, ani objem. Někdy dělíme látky jen do dvou skupin a mluvíme o látkách pevných a látkách tekutých neboli o *tekutinách*, jimiž rozumíme kapaliny i plyny. Je to správné s toho hlediska, že velké množství různých základních vlastností je kapalinám i plynům společné. Někdy můžeme však za tekutinu pokládat i látky zdánlivě pevné, u nichž není však patrný krystalický charakter, který je nám skryt a který lze pokládat za ultramikroskopický, podobně jako u kapalin. Příkladem mohou být umělé hmoty a skloviny, jež se sice v krátkém časovém úseku chovají jako skutečné pevné látky, ale za delší a někdy hodně dlouhou dobu jeví charakter kapalin. Bylo například zjištěno, že skleněné tabulky v oknech, staré několik staletí, jsou na spodní straně zřetelně tlustší než na straně horní. Vyložit to lze jen skutečností, že i takové zdánlivě pevné látky tekou, ovšem rychlostmi nepatrnými. Jinou podobnou demonstraci, sice méně přesvědčující, zato však krátkodobou, můžeme provést s tyčí pečetního vosku, kterou podložíme na koncích při vodorovném umístění. Tyčka se i při normální teplotě místnosti patrně prohne, ovšem po několikahodinové době. Pro přesnou definici rozdělení skupenských fází museli bychom přihlížet k délce časového působení nějaké vnější síly, tedy zvolit časové měřítko. My však pro jednoduchost volíme zpravidla jako kritérium pevné fáze její krystalickou nebo mikrokrytalickou strukturu.

Zmiňme se nyní v hrubých rysech o jednotlivých skupenských přeměnách a o jejich vysvětlení pomocí základních představ kinetické teorie tepla.

U pevných těles kmitají kolem svých rovnovážných poloh molekuly (atomy, ionty, dále jen molekuly), tvořící prostorovou mřížku. Pevnými tělesy zde ovšem rozumíme, jak již bylo dříve naznačeno, hmotné útvary povahy krystalické a mikrokrytalické. Sousední molekuly na sebe působí vzájemně vyrovnávanými silami přitažlivými a odpudivými a udržují si tak pevné rovnovážné polohy v prostorových mřížkách, určených krystalickou povahou látky. Přivádíme-li

pevné látce teplo, zvyšuje se energie oscilačního pohybu molekul, zvětšuje se výkmit. S rostoucím výkmitem dochází k posunutí rovnovážných poloh molekul v krystalické mříži, těleso se roztahuje. Dosáhne-li kinetická energie některé z těchto oscilujících molekul větší hodnoty než je potenciální energie její vazby se sousedními molekulami, počne se molekula posouvat vůči molekulám sousedním; těleso začne m ě k n o u t. Vzájemná soudržnost molekul může být pak tak malá, že se na jednotlivých molekulách projevují účinky zemské tíže, těleso se samovolně b o r t í. Při jistém energetickém stavu oscilací, tedy při jisté teplotě, dochází již k úplnému porušení prostorové mříže, molekuly se stávají velmi snadno pošinutelnými, těleso se t a v í. Teplotu, při níž se to děje, nazýváme t a v i c í t e p l o t o u nebo t e p l o t o u (bodem) t á n í (tavení). Opačně, ochlazujeme-li kapalinu, klesá vzájemná pošinutelnost molekul, vzájemná vzdálenost molekul se zmenšuje, až při jisté teplotě, jež je obrazem energetického stavu molekul, počne se vytvářet makroskopická nebo mikroskopická stavba původně kapalné fáze; látka t u h n e. Teplotu, při níž tento děj probíhá, nazýváme t e p l o t o u (bodem) t u h n u t í. U čistých látek je teplota tání shodná s teplotou tuhnutí.

U k a p a l i n již nelze mluvit o kmitavém pohybu v pravém slova smyslu, pohyb molekul je postupný, ovšem neuspořádaný. Molekuly sice na sebe působí vzájemně přitažlivými silami, avšak menšími než u pevných těles. Molekuly se tu již mohou vzájemně pohybovat, avšak vzhledem k jejich velkému počtu v objemové jednotce často na sebe narážejí, takže se jen zvolna vzdalují od nějaké výchozí polohy. Thermický pohyb u kapalin je translační, což se potvrzuje d i f u z n í m i j e v y. Difuze u kapalin je ovšem pomalejší než u plynů. Difundují patrně ty molekuly, které náhodnými rázy získaly velkou energii. Je zajímavé, že difuze byla zjištěna i u pevných těles, ovšem pomalá, patrná až po několikaleté době, například difuze zlata do olova.

Všechny molekuly v kapalině nemají ovšem ani při zdánlivě vyrovnané teplotě soustavy stejné rychlosti. Každé látce při různých teplotách přísluší nějaký zákon rozdělení rychlostí. Ty z molekul, jež jsou blízko volnému povrchu kapaliny a mají velkou rychlost (a tedy i pohybovou energii), mohou se uvolnit z přitažlivých sil molekul sousedních a mohou opustit kapalinu; nastane v y p a ř o v á n í. Vypařování probíhá za každé teploty. Je však pochopitelné, že molekul majících velkou rychlost s klesající (průměrnou) teplotou ubývá, molekul vystupujících z kapaliny je tedy při nižších teplotách méně než při teplotách vyšších, což se ihned projeví t l a k e m (t e n s í) p a r; uzavřeme-li prostor nad kapalinou, v němž vypařování probíhá. Některé molekuly, jež opustí kapalinu, vracejí se do ní opět po odrazu na stěnách omezujících uzavřený prostor, nebo po vzájemném odrazu mezi sebou. Molekul nebude tedy nad kapalinou přibývat neomezeně. Vrátili-li se v časové jednotce do kapaliny stejný počet molekul, jaký z ní v téže době vystoupil, zůstane počet molekul nad kapalinou přibližně stálý, pára bude nasycena. Při nasycení nastává rovnováha mezi kapalinou a její parou, je to však patrně rovnováha odlišná od rovnováhy statické; nazýváme ji proto r o v n o v á h o u d y n a m i c k o u. Při nižších teplotách dosáhne se této rovnováhy při relativně menším počtu molekul nad kapalinou než při teplotách vyšších; napětí

nasycených par se tedy bude s klesající teplotou snižovat a naopak. Bude-li napětí nasycených par právě rovno okolnímu tlaku, budou se molekuly nad kapalinou, nebude-li ovšem prostor uzavřen, snadněji vzdalovat, mohou tak vystupovat z kapaliny molekuly jiné, vypařování bude velmi intenzivní; nastane var. Protože při kolísání tlaku nad kapalinou je napětí nasycených par různé, jsou různé i teploty (body) varu.

Vystupují-li z kapaliny molekuly, mající největší rychlost, tedy i největší pohybovou energii, bude se kapalina ochlazovat, protože průměrná energie zbývajících molekul se sníží. Bude-li naopak plyn značně zhuštěn, může dojít při jistých teplotách k tomu, že molekuly na sebe začnou působit přitažlivými silami; plyn bude zkapalňovat. K tomu musí mít plyn ovšem přiměřenou teplotu, průměrné rychlosti jednotlivých molekul nesmějí přestoupit jistou mez. V blízkosti bodu zkapalnění, který pro čisté látky je shodný s bodem varu, ovšem za týchž podmínek, nazýváme plyn obyčejně parou a děj jmenujeme kondenzací (srážením). Není-li teplota plynu při stlačování dostatečně nízká (je-li nad kritickou teplotou), nenastane zkapalnění, i když při vysokých tlacích bude hustota plynu větší než hustota kapaliny téhož složení. Takovým stavům říkáme nadkritické.

Také u pevných látek mohou některé molekuly opustit prostor molekulárního působení okolních molekul. Nastává tak děj obdobný vypařování, který však u pevných látek nazýváme sublimací. Protože počet molekul, jež mají takovou kinetickou energii, že mohou přemoci velké přitažlivé síly, je u pevných látek malý, je zpravidla i sublimace málo intenzivní. Pro správné posouzení museli bychom zvolit opět vhodné časové měřítko. Jen u některých látek je sublimace dobře patrná. I za velkých mrazů se sníh sublimací zvolna ztrácí, mokré prádlo vysychá. Sublimací se projevují i páchnoucí nebo aromatické pevné látky apod.

Vedle těchto dynamických rovnovážných stavů existují za určitých okolností i tak zvané stavy metastabilní. Je to například přechlazení kapaliny pod její bod tuhnutí, přehřátí kapaliny nad její bod varu, přescení par nad kapalinou apod.

Skupenské přeměny jsme prošli jen stručně. Za zmínku by ještě stála přeměna části kinetické energie v potenciální nebo přeměna opačná u skupenských, či obecně fázových přeměn, jimiž bychom mohli vysvětlit skutečnost, že teplota při skupenských přeměnách se nemění (jsou-li ovšem vnější podmínky stálé). Dobře je taková přeměna patrná při tak zvaném Joule-Thomsonově jevu, s kterým se setkáme při škrcení plynu. Při něm se totiž plyn zpravidla ochlazuje, ač bychom to podle výsledku Gay-Lussacova pokusu a podle teoretických předpokladů neočekávali. Molekuly dokonalého plynu se mají totiž ovlivňovat jen při vzájemných srážkách, jiné silové působení mezi nimi se nepředpokládá. Joule-Thomsonův jev však ukazuje, že tomu tak není, že není možno zanedbat potenciální energii mezi molekulami, jež se při vzájemném vzdálení molekul zvětšuje a jejíž přírůstek se kryje úbytkem kinetické energie. To se ovšem nutně projeví poklesem teploty.

Plasma

V elektronkách, katodových trubicích a elektronových mikroskopech se pohybují elektrony. Kladné ionty se zase pohybují v urychlovačích několika typů: cyklotronech, fázotronech, lineárních urychlovačích, elektrostatických urychlovačích a dále v hmotových spektrografech. V elektrických výbojích se spolu vyskytují volné elektrony i kladné ionty. Podle prostředí v kterém se výboj tvoří, bývají to ionty vodíku, dusíku, kyslíku, těžkého vodíku - deuteria - apod. Jestliže je značná část molekul a atomů ionisována, avšak přesto jsou kladné ionty a záporné elektrony v prostoru tak vzájemně rozptýleny, že navenek nepůsobí ani kladné částice, ani záporný náboj elektronů, nýbrž celek se chová jako neutrální plyn, mluvíme o *plasmatu*.

V elektronkách naproti tomu např. mrak elektronů tvoří záporný prostorový náboj, který má na okolí podobný účinek jako záporně nabitě těleso.

Plasma tvoří podstatnou část hmoty slunce a stálic, tedy podstatnou část hmoty vesmíru vůbec. V poslední době se vlastnosti plasmatu pečlivě studují i v nákladných zařízeních, poněvadž je naděje, že v plasmatu z deuteria, případně ještě z dalšího isotopu vodíku, tritia, dají se uskutečnit regulované thermonukleární reakce. Jsou to srážky, při kterých se sloučí dvě jádra deuteria, případně jádro deuteria a tritia a utvoří jádro helia a neutron, případně proton. Přitom se uvolní energie a to větší než při štěpení uranu.

V uvedených případech, to je ve stálicích a v elektrických výbojích, se dosáhne vysoké ionisace vzájemnými nárazy částic. Mohou to být nárazy molekul plynu, které neuspořádaně se prudce pohybují následkem vysoké teploty nebo nárazy iontů, nebo elektronů, které se dostaly do prudkého pohybu účinkem elektrického pole mezi elektrodami.

Z tohoto mechanismu odhadneme, při jakých teplotách je plyn skoro úplně ionisován. Když ionty proběhnou beze srážky rozdílem potenciálů 1 V, mají stejnou kinetickou energii jako mají částice o teplotě:

$$1,16 \cdot 10^2 \text{ } ^\circ\text{K} .$$

V tabulkách najdeme, že ionisační potenciál vodíku je 13,5 V. Když budou mít částice kinetickou energii odpovídající tomuto urychlovacímu potenciálu, ionisují při srážce molekulu. Potenciál 13,5 V odpovídá teplotě: $1,6 \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{K}$.

Nelze říci, že by takovou teplotu musil mít úplně ionisovaný plyn, poněvadž při této teplotě se vyskytují částice s větší i s menší kinetickou energií. Může tedy již při nižší průměrné teplotě, jak ji změříme přístroji, značný počet molekul dosáhnout dostatečné energie, aby nárazem ionisoval ostatní molekuly.

Ve skutečnosti teploty plasmatu na slunci a ve stálicích bývají uvnitř řádu milionů stupňů a na povrchu nejméně několik tisíc stupňů. Při pokusech s regulovanými thermonukleárními reakcemi byly dosaženy zatím na kratičký okamžik trvající několik miliontin vteřiny teploty několika milionů stupňů.

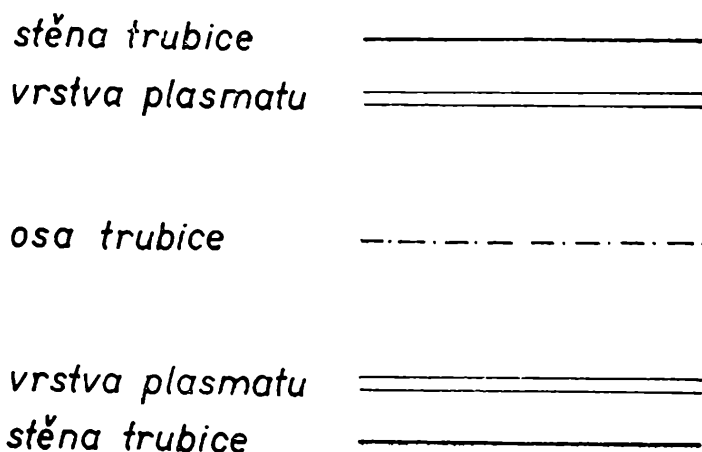
Zároveň se dá očekávat, že elektrická vodivost plasmatu bude záležet na teplotě; s větší teplotou bude větší vodivost. Přesný vzorec je:

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot T^{3/2},$$

kde σ je vodivost. Např. při teplotě 10^9 °K je vodivost plasmatu $3 \cdot 10^8$

Vodivost mědi při pokojové teplotě je 1 % této hodnoty. Vodivost plasmatu je tedy velmi vysoká.

Hustotu je možno udat v počtu částic na 1 cm^3 . Atmosférický vzduch má hustotu okolo 10^{19} molekul / cm^3 . Hustoty iontů v plasmatu stálíc nebo ve světovém prostoru mohou být větší i menší než hustota molekul za atmosférického tlaku. Při pokusech s regulovanými thermonukleárními reakcemi se pracuje s hustotami 10^{14} až 10^{17} iontů/ cm^3 , to je s hustotou okolo tisícinu hustoty vzduchu za atmosférického tlaku. Menší hustota by nedávala postačující výkon z jaderných reakcí a větší hustota by měla za následek velké tlaky při velikém ohřátí plasmatu.



Obr. 1. Průřez trubicí plasmatu.

Jak ve vesmíru, tak při použití v laboratořích je důležitý účinek magnetického pole na plasma.

Nechť plasmatem v nějaké trubici prochází velmi silný proud. Sloupec plasmatu si představíme jako vodič, na který působí magnetické pole, které vznikne účinkem samotného proudu. Účinkem magnetického pole na vodič, protékany proudem kolmo na směr magnetického pole, vzniká síla F . Je kolmá i na směr magnetického pole a na směr proudu a platí (obr. 1):

$$F = I \cdot H$$

Magnetické pole však vzniká účinkem proudu I :

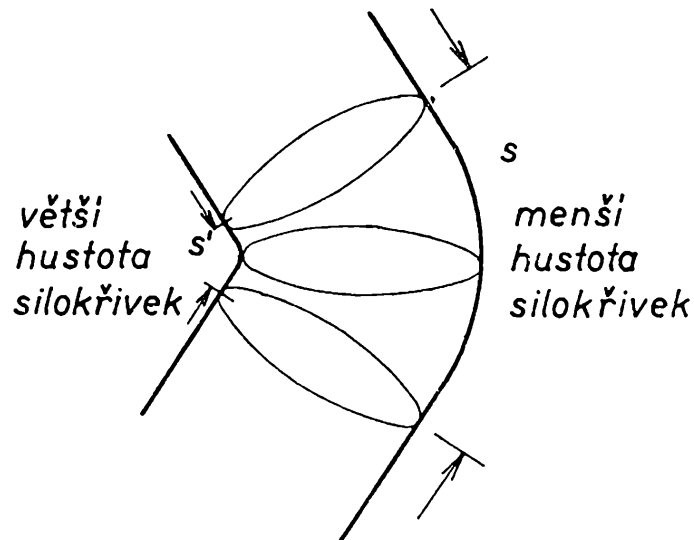
$$H = \frac{2 I}{a}.$$

Tlak p , to jest síla na jednotku plochy, je:

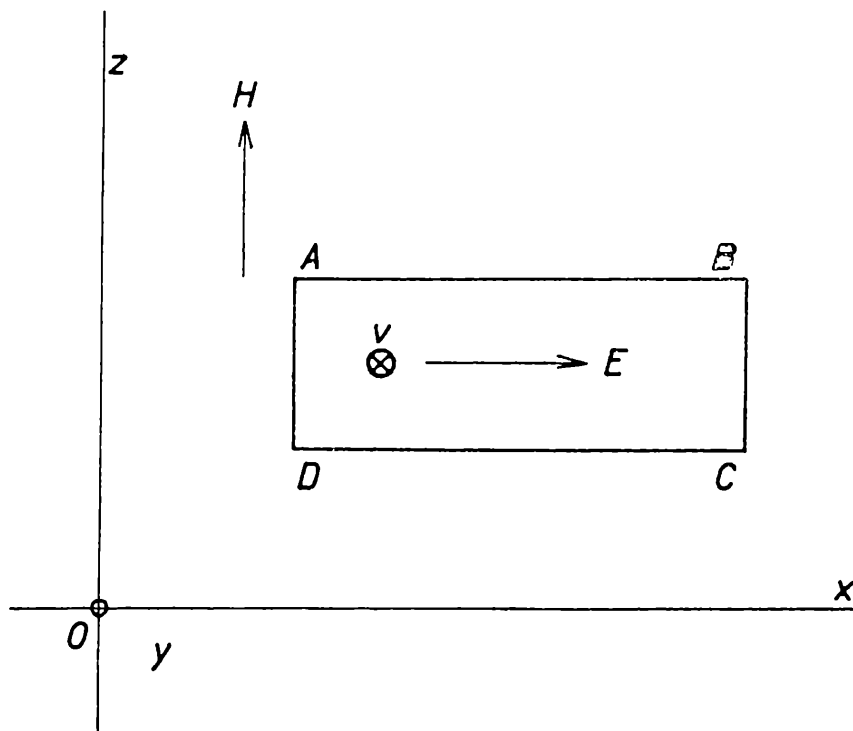
$$p = \frac{2 I^2}{2 \pi a^2}.$$

Tento elektromagnetický tlak dovnitř sloupce plazmatu musí být větší než tlak p' plynoucí ze vzájemných srážek iontů.

Když např. je plasma v trubici kde prochází silný proud, smrští se směrem k ose trubice a vytvoří jakousi vodivou šňůru. I když se silným proudem zahřeje a tím se zvětší tlak, může být sevření tak mocné, že se vyrovná tlaku směrem ke



Obr. 2

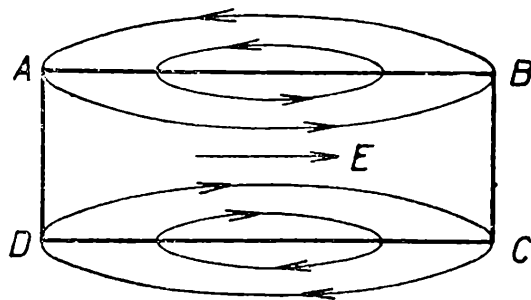


⊗ směr za nábresnu

Obr. 3

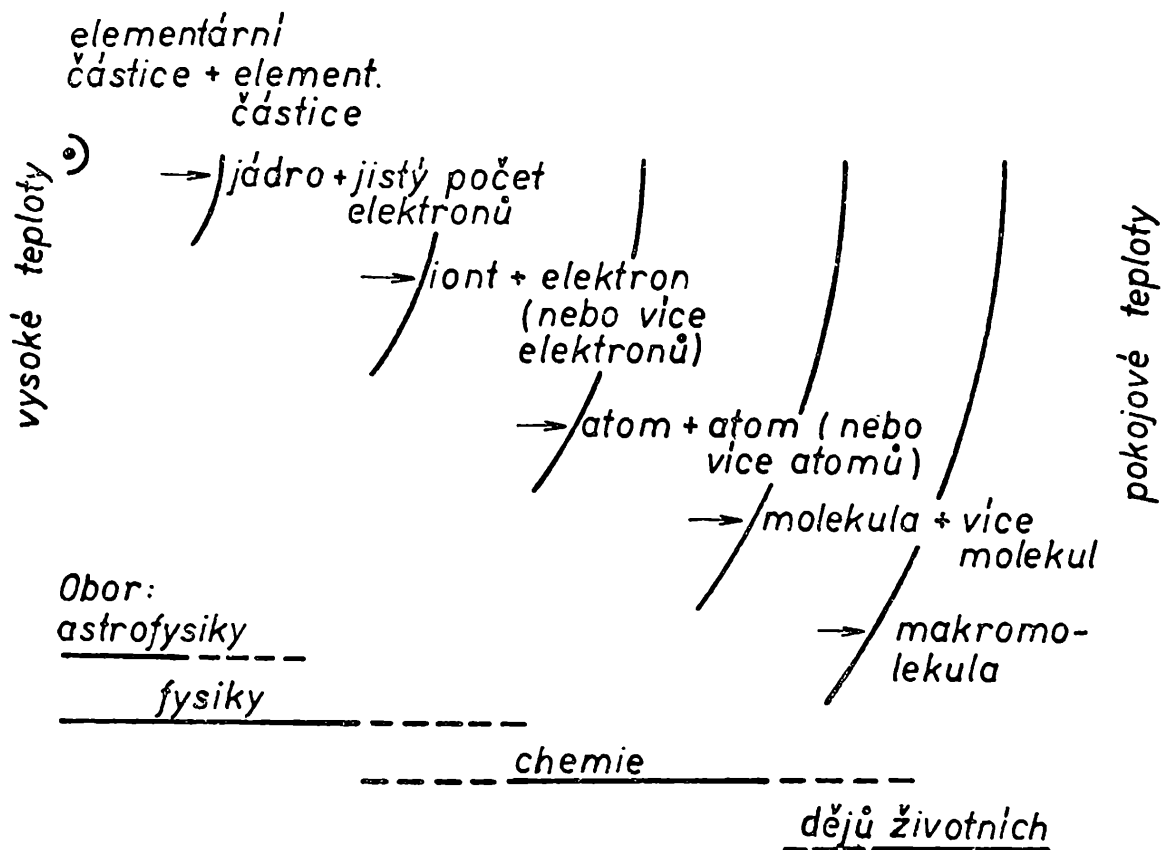
stěnám. Na stěny trubice nepůsobí pak nijak zvlášť veliký tlak, i když uvnitř plazmatu může být tlak okolo 1000 atm. V laboratořích na velmi krátký okamžik bylo takto plasma skutečně sevřeno. Průměry trubice byly asi 10 cm.

Taková šňůra plazmatu je však velice nestálá. Stačí, když (obr. 2) na některém



Obr. 4

rozpad, rozbijení, štěpení	úplná ionisace	ionisace	disociace	rozklad
←	←	←	←	←
→	→	→	→	→
slučování jader (fuse), záchyt	rekombi- nace	rekombi- nace	asociace	slučování, polymerisace



Obr. 5

místě se nepatrně prohne. Tím se na vnitřní straně oblouku sloupce zhustí magnetické siločáry a proto na té straně je i magnetický tlak větší. Ten způsobí, že se plasma ještě více prohne, což vede k úplnému rozrušení sloupce plasmatu.

Že plasma je v neustálém neklidu, ukazuje i jiný zjev, tzv. hydro magnetické vlny.

V nějakém prostoru s magnetickým polem o intenzitě H se prostírá plasma. Myslíme si uvnitř plasmatu hranol, na obr. 3 označený v průřezu obdélníkem $ABCD$. Plasma nechť je v určitém okamžiku v klidu s výjimkou hranolu. Tam se pohybuje ve směru y rychlostí v . Pohybem plasmatu, tj. vodiče nesoucího náboj, vzniká elektrické pole E , pro které platí (v je rychlost částic plasmatu)

$$E = \frac{1}{c} \cdot v H .$$

Vlivem elektrického pole o intenzitě E vznikají v plasmatu elektrické proudy, jak vidíme na obr. 4.

Obrázek zároveň ukazuje, že se proudy uzavírají v prostoru mimo hranol $ABCD$, kde se zatím nepředpokládá pohyb částic.

Na proudy v magnetickém poli působí síla F (kolmá na I i na H), která je

$$F = I \cdot H ,$$

kde I má směr osy x , H osy z .

Síla F má směr proti kladnému směru osy y , snaží se totiž zabránit pohybu částic ve směru y . Avšak nad hranolem i pod ním, jak je vyznačeno na obr. 4, mají proudy opačný směr. Uvádějí proto do pohybu plasma ve směru osy y . Výsledek tedy je, že pohyb částic ve vyznačeném hranolu $ABCD$ za určitý okamžik přestane, zato však se začnou pohybovat částice nahoře a dole, postupně dál a dále od místa rozruchu. Za místy rozruchu následují místa klidu, pak opět místa rozruchu. Máme tedy obraz vln.

Hydromagnetické vlny v některých oblastech světového prostoru přispívají asi k urychlení kosmických paprsků.

O plasmatu nemůžeme dobře mluvit jako o nějakém výjimečném stavu hmoty, když uvážíme, že tvoří značnou část hmoty vesmíru. Jak souvisí se stavy hmoty, které známe z ostatních zkušeností, ukazuje tato tabulka (obr. 5).

L i t e r a t u r a

Alfvén: Cosmical Electrodynamics.

Post R.: Primenenije fiziki vysokotemperaturnoj plazmy k osuščestvleniju upravljajennych reakcij slijanija atomnych jader. Překlad v: Uspechi fizič. nauk 1957, IV, č. 4, 491—533.

Ing. Jiří Machalický, Praha:

Avogadrovo číslo a metody jeho určování¹⁾

Poznatky o složení hmoty na počátku minulého století byly ještě velmi primitivní. Ačkoliv už starořeční filosofové Leukippos a Demokritos vyslovili domněnku, že veškerá hmota se skládá z nepatrných částic dále nedělitelných, upadla tato myšlenka v zapomenutí až právě do konce osmnáctého století. Atomistická představa hmoty byla oživena na základě úvah a pokusů Proustových (vyslov prust),

¹⁾ Avogadro di Quarenzo, italský chemik a fyzik (1776—1856).

Daltonových, Humboldtových, Gay-Lussacových (vyslov gej-lyszakových), Lomonosových, Lavoisierových (vyslov lavoazijé-) aj.

Při prvních skutečně fyzikálních pokusech o poznání struktury hmoty bylo zjištěno, že se působením různých druhů energie (zejména tepelné a elektrické) a někdy i samovolně rozkládají látky složitější na jednodušší. Ty látky, které těmito způsoby nelze dále rozložit, nazýváme prvky. Dnes je známo přes sto prvků a jsou přehledně sestaveny v tzv. periodickou soustavu (Mendělejev 1869).

Na mnoha případech slučování (synthesy) i rozkladu (analysy) bylo zjištěno, že *při chemických reakcích hmoty ani nepřibývá, ani neubývá.*

Tento poznatek platí pro chemické děje obecně a vyjadřuje jej *zákon zachování hmoty*²⁾ (Lomonosov 1748, Lavoisier 1774). Jeho správnost přezkoušeli experimentálně r. 1908–1909 H. Landolt a R. Eötvös, a to s chybou nepřevyšující 10^{-6} %. Při chemických reakcích, které prováděli v zatavených skleněných trubkách, zůstala hmota v mezích uvedené přesnosti stejná. Na jeho základě je možno také vyjadřovat chemické děje rovnicemi.

Druhý důležitý zákon klasické atomové teorie je *zákon zachování energie*. Je rovněž podložen velkým množstvím pokusů a vyslovil ho Lomonosov (1748) a později J. R. Mayer (1842) ve formě postulátu:

Energii nelze z ničeho vytvořit ani ji zničit.

Dále bylo zjištěno:

Váhový poměr složek nějaké sloučeniny je vždy týž.

To znamená, spojí-li se při slučování celistvý počet atomů každého z reagujících prvků, jsou jejich poměrná váhová množství určena hmotami jejich atomů. To vyjadřuje *zákon stálých váhových poměrů* (J. B. Richter 1791, J. L. Proust 1799). Např. slučuje-li se železo se sírou na sirník železnatý, pak se tak děje v téměř váhovém poměru 7 : 4.

Tvoří-li některé prvky několik sloučenin, jsou váhová množství jednoho a druhého prvku v poměru malých celých čísel.

Např. mangan tvoří pět různých kysličníků, v nichž na jeden gram připadá 0,291 3 g, 0,436 9 g, 0,582 6 g, 0,873 8 g a 1,019 5 g kyslíku. Tato množství jsou v poměru 2 : 3 4 7.

Na základě těchto poznatků vyslovil Dalton (1803) znovu hypotézu o nespojitém charakteru hmoty, podle níž se každý prvek skládá ze stejných už nedělitelných částic - *atomů*. I když tato myšlenka není původní, byl Dalton první, který svá tvrzení doložil kvantitativními výsledky svých pokusů. Svou práci uveřejnil v knize *A new system of chemical philosophy* (1808) a položil tak základy klasické atomové teorii.

Protože slučování prvků je vlastně slučování jejich atomů, můžeme váhové poměry, podle nichž se prvky slučují, vyjadřovat atomovými vahami nebo jejich násobky. Nemusíme však znát skutečné váhy, resp. hmoty atomů,³⁾ nýbrž stačí

²⁾ Vzhledem k velmi malým rychlostem částic při chemických reakcích není tu třeba přihlížet ke změně hmoty ve smyslu Einsteinovy spec. teorie relativnosti.

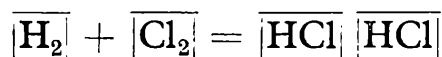
³⁾ Skutečné hmoty atomů jsou nesmírně malé. Tak např. atom nejjednoduššího prvku, vodíku, má hmotu $m = 1,672 \cdot 10^{-27}$ kg.

znát jejich poměrné hmoty. Proto rozumíme ve fyzice *atomovou hmotou číslo*,⁴⁾ vyjadřující kolikrát větší je hmota atomu nějaké látky než 1/16 hmoty atomu izotopu $^{16}_8\text{O}$.

Atomistická hypotéza byla brzy doplněna dalšími poznatky. Zejména je třeba uvést výsledky pokusů Humboldtových a Gay-Lussacových (1805), z nichž vyplývá:

Plyny se při stejných podmínkách (tlaku a teplotě) slučují tak, že jejich objemy a objemy vznikající sloučeniny jsou v poměru jednoduchých celých čísel.

To vyjadřuje *zákon jednoduchých objemových poměrů*. Např. jeden litr vodíku a jeden litr chloru se sloučí beze zbytku na dva litry chlorovodíku:



Otázkou zůstává, proč vznikají právě dva litry chlorovodíku. Aby tuto nesnáz odstranil, vyslovil **Avogadro** (1811) předpoklad:

Všechny látky (prvky i sloučeniny) tvoří pravidelné shluky (skupiny) atomů, kterým říkáme molekuly.

Molekuly plyných prvků jsou složeny zpravidla ze dvou atomů (O_2 , N_2 , H_2 , Cl_2 , CO , vzduch...). Jen tzv. *inertní plyny* tvoří jednoatomové molekuly. Naproti tomu počet molekul ostatních nekovových prvků bývá různý a mění se. Molekuly čistých kovů jsou téměř vždy jednoatomové.

Poměry při slučování si doplníme ještě těmito příklady, které napíšeme ve tvaru chemických rovnic



Druhá z těchto rovnic vyjadřuje matematicky skutečnost, že 2 litry vodíku a jeden litr kyslíku se slučují na 2 litry vodní páry, jejíž molekuly se skládají ze dvou molekul vodíku a jedné molekuly kyslíku. Označme v další úvaze znakem x počet molekul ve dvou litrech vodíku. Tento počet se podle hořejšího spojí s $x/2$ molekulami kyslíku a vzniká x molekul vodní páry. Protože x molekul vodíku zaujímá za zvolených podmínek objem dva litry, x molekul vodní páry za týchž podmínek rovněž objem dva litry a $x/2$ molekul kyslíku objem jednoho litru, lze z toho usoudit:

Ve stejných objemech plynů je za stejných podmínek (zejména teploty a tlaku) stejný počet molekul.

To je slavná *Avogadrova hypotéza* (r. 1811), která se dnes nazývá *Avogadrův zákon*. Správnost hypotézy byla potvrzena obecně až později. Je třeba podotknout, že jak zákon jednoduchých objemových poměrů, tak Avogadrův zákon platí přísně

⁴⁾ V chemii byl za základ stanoven přirozený kyslík, jehož atomová hmota byla zvolena $\mu = 16$. Proto, že přirozený kyslík obsahuje vedle izotopu $^{16}_8\text{O}$, jehož obsah je 99,76 %, ještě izotopy $^{17}_8\text{O}$ (0,04 %) a $^{18}_8\text{O}$ (0,20 %), činí jeho atomová hmota nikoliv 16,00000, nýbrž

16,00435. Proto je hmota lib. prvku podle fyzikální stupnice číslem $\frac{16,00435}{16,00000} = 1,000272$ - krát větším než podle stupnice chemické.

vzato jen pro ideální plyn, jemuž se svými vlastnostmi blíží skutečné plyny, mají-li malou hustotu.

Známe-li počet atomů v molekule a jejich atomové hmoty, můžeme určit molekulovou hmotu,

Molekulová hmota u je číslo, které určuje kolikrát větší je hmota molekuly libovolné látky než $1/16$ hmoty atomu izotopu $^{16}_8\text{O}$.⁵⁾

Z atomistické představy hmoty si odvodíme další výsledek. Mějme m_1 gramů nějaké látky libovolného skupenství, jejíž molekulová hmota je μ_1 . Toto množství nechť obsahuje n_1 molekul. Označíme-li m_2, μ_2, n_2 stejné veličiny nějaké jiné látky, pak pro poměr hmot obou látek plyne

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1 n_1}{\mu_2 n_2}.$$

Zvolíme-li m_1 rovno právě μ_1 gramům a m_2 rovno μ_2 gramům, pak ihned vidíme, že

$$n_1 = n_2.$$

Taková množství látky v gramech, kolik činí její atomová hmota, nazýváme grammolekula, zkráceně mol. Např. 32 g kyslíku, 28,016 g dusíku, 64,066 g kysličníku uhličitého atd.

Docházíme tedy k důležitému výsledku:

Grammolekuly všech látek v libovolném skupenství obsahují za libovolných podmínek vždy stejný počet molekul, který udává tzv. Avogadrovo číslo.

Jak patrně, je tento výsledek plynoucí naprosto samozřejmě z atomistické představy hmoty a definice molekulové hmoty, mnohem obecnější než Avogadrův zákon. Avogadro sám neznal počet molekul v grammolekule. První stanovil toto číslo r. 1865 J. L o s c h m i d t (prof. teoretické fyziky ve Vídni), a to z představ kinetické teorie plynů.⁵ Hodnota, kterou určil, je ovšem jen přibližná ($N = 6 \cdot 10^{23}$). V některé literatuře (zejména německé) se také někdy označuje L o s c h m i d t o v ý m č í s l e m.

Ve spojení s Avogadrovým zákonem vede uvedený poznatek k dalšímu důležitému výsledku: poněvadž grammolekuly obsahují stejný počet molekul a stejný počet molekul plynů zaujímá podle Avogadrova zákona za stejných podmínek stejný objem, je zřejmé, že *grammolekuly plynů mají za týchž poměrů stejný objem.* Platí to ovšem přesně jen pro ideální plyn, protože Avogadrův zákon platí také (jak jsme už zdůvodnili) jen pro ideální plyn.

Např. objem grammolekuly kyslíku za normálních podmínek (0°C , 760 tor) je

$$V = \frac{\text{hmota grammolekuly}}{\text{hustota}} = \frac{32,000 \text{ g}}{0,001 429 \text{ gcm}^{-3}} = 22 394 \text{ cm}^3 \doteq 22,4 \text{ l}.$$

Avogadrovo číslo činí zhruba $N = 6,0 \cdot 10^{23}$ a je to pouhé číslo. Je třeba od něho odlišovat *Avogadrovu konstantu N_0 , definovanou jako podíl počtu molekul*

⁵⁾ Molekulové hmoty jsou v tabulkách uvedeny většinou podle chemické stupnice, t. j. pro základ $\mu = 16$. Na př. pro dusík $\mu_{\text{N}_2} = 28,016$, kysličník uhličitý $\mu_{\text{CO}_2} = 64,066$.

nějaké látky a hmoty vyjádřené v grammolekulách. Je konstantou úměrnosti mezi počtem molekul látky a hmotou látky v grammolekulách a je ovšem číselně rovna Avogadrovu číslu. O tom, zda je třeba uvažovat v nějaké rovnici Avogadrovo číslo nebo konstantu, je třeba rozhodnout vždy *překontrolováním* *dimensionální správnosti rovnice.* Rozměry fyzikálních rovnic musí být totiž vždy na obou stranách stejné. Tento dvojí význam není ve fyzice ojedinělý. Podobně je tomu např. také u Faradayova náboje, molekulových tepel a jiných fyzikálních konstant.

O velikosti Avogadrova čísla je těžké učinit si nějaké konkrétní představy. Přece však má pro fyziku takovou důležitost, že ho považujeme za jednu z universálních konstant. Jeho určení věnovali význační fyzikové velké úsilí. V dalším pojednáme stručně o některých způsobech jeho měření.

1. Tak lze např. určit Avogadrovo číslo z jevu, kterému říkáme *molekulární rozptyl.* Světlo při průchodu prostředím se rozkládá (disperse) na své barevné složky, pohlcuje se (absorpce) a rozptyluje (difuse). Podrobné řešení všech tří jevů je složité. Omezíme se zde proto jen na nejdůležitější poznatky.

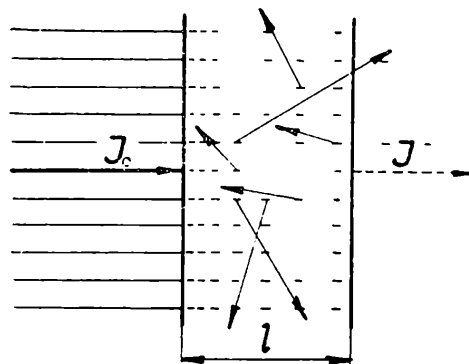
Dopadá-li svazek rovnoběžných světelných paprsků (obr. 1) na vrstvu prostředí tloušťky l , pak se hustota světelného toku \mathcal{J}_0 (tj. množství světelné energie připadající na jednotku plochy za sek.) zmenší vlivem absorpce a rozptylu na hodnotu \mathcal{J} podle vztahu

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-(k+k')l},$$

kde k je koeficient absorpce, který závisí na druhu prostředí, ale také na vlnové délce. Ve viditelném oboru je pro vzduch při atmosferickém tlaku $k \approx 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$, pro sklo $k \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, k' je tzv. koeficient extinkce, vyjadřující úbytek hustoty světelného toku vlivem rozptylu; činí $k' \approx (10^{-6} \text{ až } 10^{-7}) \text{ cm}^{-1}$.

Rozptyl světla vzniká v látkách, které světlo příliš nepohlcují (jsou tedy průsvitné, resp. průhledné) a projevuje se tím, že světlo se odchyluje od původního směru ve všech možných úhlech, ostrých i tupých. Vzniká na částicích makroskopických (prachu, kouři, mlze, kalných kapalinách atd.), ale nás bude zajímat zejména rozptyl na ultramikroskopických částicích, jejichž průměr je řádově 10^{-6} cm .

Z pozorování plyne, že se světlo rozptyluje tím více, čím má kratší vlnové délky a intesity ubývá s úhlem rozptylu. Proto má rozptýlené světlo modravou barvu a naopak prošlé světlo barvu žlutočervenou. Nejlepší doklad tohoto poznatku nacházíme v přírodě; při bezmračném počasí se nám obloha jeví modrou; sluneční světlo se totiž rozptyluje na nerovnoměrnostech hustoty, vzniklých statistickým kolísáním rozložení molekul v důsledku jejich termických pohybů.



Obr. 1

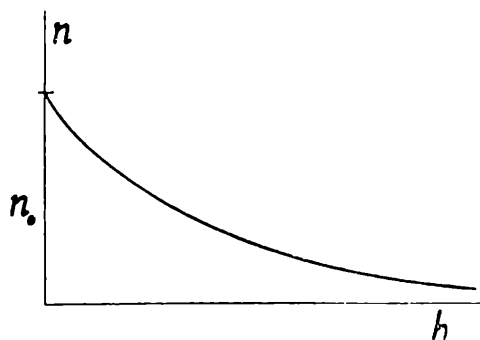
Teoreticky se těmito otázkami zabývali zejména Rayleigh, Smoluchowski a Einstein. Z teoretického vztahu pro koeficient extinkce

$$k' = \frac{8 \pi^2}{3 N_0 \rho} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4},$$

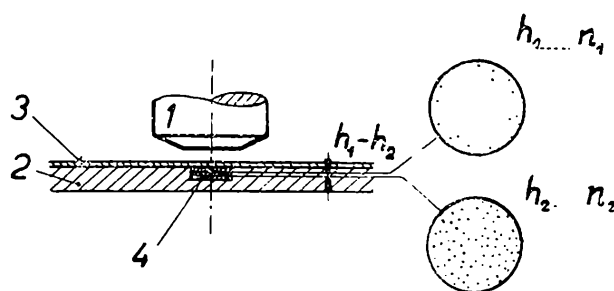
kde ρ je hustota rozptylujícího prostředí, ε dielektrická konst. a λ vlnová délka světla, lze vypočítat Avogadrovu konstantu, když ostatní veličiny byly změřeny. Z pozorování z r. 1912, konaných na ostrově Teneriffě na Kanárských ostrovech, vyplynula pro délku vlny $\lambda = 0,37 \mu$ hodnota koeficientu extinkce přepočtená na normální tlak a teplotu $k' = 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$. Dosazením do hořejšího vztahu byla pro Avogadrovu konstantu vypočtena hodnota

$$N_0 = 6,0 \cdot 10^{23} [\text{mol}^{-1}]$$

2. Jiná metoda, kterou propracoval Perrin (1924), je založena na teoreticky velmi důležitém *Brownově pohybu* (viz článek O. Lepila v 8. č. Rozhledů 1957, str. 362).



Obr. 2



Obr. 3. 1 - objektiv mikroskopu, 2 - podložní skličko, 3 - krycí skličko, 4 - suspence.

Brownovy částice suspendovány v jakékoliv tekutině neklesnou ani po delší době ke dnu, nýbrž právě vlivem Brownova pohybu se rozdělí tak (obr. 2), že jejich hustoty ubývá s výškou exponenciálně podle vztahu

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad (\text{a})$$

kde n_0 , n_h jsou počty částic v jednotce objemu u dna ($h = 0$) a ve výšce h , m hmota částice, T absolutní teplota a k tzv. Boltzmannova konstanta rovná podílu plynové konstanty R a Avogadrova čísla N .

Perrin měřil rozložení hustot Brownových částic tak, že spočítal částice, které byly v kruhovém zorném poli mikroskopu (obr. 3) zaostřeném na určitou tenkou vrstvu; mikroskop měl malou hloubku ostrosti. V jednom konkrétním příkladě byl poměr hustot α ve vrstvách vzdálených o $h_1 - h_2 = 30 \mu$

$$\alpha = \frac{n_2}{n_1} = 2,08,$$

takže napíšeme-li vztah (a) pro hustotu n_1 ve výšce h_1 a hustotu n_2 ve výšce h_2 a dělíme-li první rovnici druhou, dostaneme

$$\alpha = \frac{n_2}{n_1} = e^{\frac{Nmg}{RT}} (h_1 - h_2) \quad (\text{b})$$

Odtud vyšla z Perrinových měření pro Avogadrovo číslo hodnota

$$N = 7,85 \cdot 10^{23}$$

Tato hodnota se liší od současné standardní hodnoty asi o 25 %. Později opakovatel měření touto metodou A. W e g s t r e n s koloidními částicemi zlata a selénu a určil přesnější hodnotu $N = 6,024 \cdot 10^{23}$.

(Pokračování)



Jiní o nás

Málokdy se v denním tisku objeví zmínka o matematicích. Zaznaménali jsme tedy v minulém čísle článek význačného spisovatele, i když jsme s jeho obsahem nesouhlasili. Ježto šlo zde o řadu nedorozumění, jimž by mohl žák-čtenář snadno podlehnout, zařadili jsme jako následující článek odpověď a vysvětlení matematika. Dnes uzavíráme diskusi příspěvkem jazykovědce. Pro vás mladé čtenáře vyplývá z toho poznání, jak i v odborných a technických předmětech je nutná jazyková čistota naší mateřštiny. Vidíte, že za tímto cílem šli všichni tři autoři.

Dr. Karel Hausenblas, Praha:

Matematika a jazykověda

nejsou zdaleka tak ve sporu, jak se domnívá A. C. Nor ve svém fejetonu (Lidová demokracie 25. 5.), v němž bije na poplach proti některým obrátům, jichž se užívá v matematických pojednáních a které v běžném vyjadřování nejsou obvyklé. Ostře kárá např. vyjádření „přímka je kolmá k rovině *tehdy a jen tehdy*, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny“, vytýká časté uvozování vedlejší věty slůvkem *pak* aj. Proti výtkám Norovým se ovšem ozvali, a ještě asi ozvou matematici - a nebude jim nešnadné se obhájit. Je ještě potřeba, aby se ozvala i druhá strana:

z článku A. C. Nora by se mohlo zdát - autor se tak alespoň tváří -, že zastává ve sporu stanovisko jazykovědy. Tu je na omylu a nebylo by dobré, aby do tohoto omylu byli uváděni i čtenáři. A. C. Nor je naší veřejnosti znám svými staršími romány. V názorech na jazyk zastává stanovisko brusičské, které bylo českou jazykovědou již před čtvrtstoletím překonáno, ale v některých poloodborných kruzích přes snahy o popularisování pokroků vědy dosud bují.

Spisovný jazyk je útvar složitý a bohatě a jemně odstíněný. Má velmi rozmanité úkoly: je nejen prostředkem běžného dorozumívání, ale i prostředkem odborného styku hospodářského, technického, činnosti publicistické, tvorby umělecké a práce vědecké. Necháme-li stranou umění, kladou se největší nároky na jazyk ve vědecké práci, při formulaci přírodních a společenských zákonitostí. Tu jde o vyjádření velikého množství pojmů, jevů a vztahů, s nimiž se mimo vědeckou práci ani npracuje, ale které pro rozvoj poznání jsou nezbytné. Je nasnadě, že tyto složité podmínky práce v nejrůznějších vědních oborech, kromě jiných právě také v matematice, si nutně vyžadují, aby speciálním potřebám vědy byly přizpůsobeny i jazykové prostředky a aby byl vypracován vědecký sloh, styl. Je omyl domnívat se - jako A. C. Nor -, že odlišnost jazyka odborných projevů je jen v terminologii: požadavek úplnosti a přesnosti prostupuje všechny stránky jazykového vyjádření, všechen výběr slov a obrátů i celou větnou stavbu. Pro stručnost zůstaneme jen u jednoho případu. Pro matematika jsou důležitými pojmy „podmínka nutná“ a „podmínka postačující“. V poučce o tom, kdy je přímka k rovině kolmá, se postačující podmínka vyjádří výrazem . . . *tehdy*, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám . . . , nutná podmínka se vyjádří výrazem . . . *jen tehdy*, je-li Při formulaci matematických zákonitostí je často potřebí právě uvést, že jde o podmínku zároveň postačující i nutnou: proto se užívá formulace: . . . *tehdy a jen tehdy* Toto spojení je tedy věcně potřebné a není na něm nic jazykově ani slohově nesprávného; že se tak nevyjadřujeme v běžném hovoru, je sice pravda, ale tu právě nejde o běžný hovor, ale o formulaci matematické poučky: Je to asi tak, jako bychom vytýkali, že se při popisu gymnastických cvičení říká např. *ve stoji jednož kroužení únožmo*, když přece „přirozené“, „normální“ běžné vyjádření by asi bylo *stát na jedné noze a druhou kroužit stranou* (hovorově: *dělat kolečko*). Jenže brusiči nepřihlížejí k potřebám různých stylů a nemohou jim ani pomáhat, protože měří všechno jedním loktem. Nesnaží se ani porozumět problému, o který jde, a přesto odsuzují. Náhrady, které za vytýkané výrazy nabízejí, bývají sice jazykově správné, ale věcně se nehodí, protože zpravidla pisatel potřebuje vystihnout něco jiného. Není pak divu, že odborníci takové rady nemohou přijmout a na podobné opravářství, které jim nemůže být k prospěchu, se dívají spatra. A přece jazyk matematických i jiných vědeckých prací má své potíže a zaslouží si pozornost jazykových odborníků, též pozornost kritickou. Ta však musí být jinak zaměřena, než je tomu u Nora. Takřka ve všech případech, kterých se jeho výtky týkají, je třeba dát za pravdu matematikům.

Moderní jazykověda, logika a matematika mají mnoho styčných bodů a stále více obdobných metodických stanovisek v teoretických otázkách: uveďme jen teorii informací, problémy překládání strojem aj. Nikdy dosud nebyla příznivější situace pro vzájemné sblížení těchto oborů. Matematikové mohou počítat s tím,

že u lingvistů najdou porozumění i v otázkách praktických. Jako při léčení chorob už dnes nikdo nebere na pomoc zaříkávání, tak také jazykové potíže při práci v jednotlivých oborech vyžadují, abychom tak řekli, diagnózu a terapii skutečně odbornou, která vychází z rozboru vlastností a potřeb organismu, struktury. A to je ovšem práce odpovědnější, náročnější a - bohužel - většinou méně líbivá než mentorské hartusení.

Z Ústavu pro jazyk český.



Řešení úloh

Redakce uveřejňuje řešení příkladů č. 1 až 10, daných v č. 1 a 2 Rozhledů matematicko-fyzikálních. Dáváme přitom přednost řešením zasláným studujícími škol třetího stupně, i když někdy jimi užitý postup není ve všech podrobnostech dokonalý. Z úsporných důvodů podáváme u některých úloh řešení autorovo, je-li kratší a výstižnější.

Seznam všech řešitelů bude uveden v čísle 10 i s jejich oceněním.

1. Součin plošných obsahů trojúhelníků A_0SA_i , kde $A_0, A_i (i = 1, 2 \dots, n - 1)$ je n prvních za sebou jdoucích vrcholů pravidelného $2n$ -úhelníka, vepsaného do kružnice o středu S , je roven dvojnoci součinu výšek, spuštěných ze společného vrcholu S . Dokažte!

Josef Brejcha

Řešil Karel Kunc, XI.D žSŠ ve Znojmě:

Plocha trojúhelníka A_0SA_k je dána výrazem $P = \frac{1}{2} r^2 \sin k \frac{2\pi}{2n} = \frac{1}{2} r^2 \sin k \frac{\pi}{n}$, kde r je poloměr dané kružnice. Výška v tomto trojúhelníku je $v = r \cos k \frac{2\pi}{4n} = r \cos \frac{\pi}{2n} k$.

Máme dokázat relaci:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin 2 \frac{\pi}{n} \dots \frac{1}{2} r^2 \sin (n - 1) \frac{\pi}{n} = \\ & = \left[r \cos \frac{\pi}{2n} \cdot r \cos 2 \frac{\pi}{2n} \dots r \cos (n - 1) \frac{\pi}{2n} \right]^2 \end{aligned}$$

Výrazy na levé straně rozložíme jako $\sin k \frac{\pi}{n} = 2 \sin k \frac{\pi}{2n} \cos k \frac{\pi}{2n}$, tedy

$$\begin{aligned} r^2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} \cdot r^2 \sin 2 \frac{\pi}{2n} \cos 2 \frac{\pi}{2n} \dots r^2 \sin (n-1) \frac{\pi}{2n} \cos (n-1) \frac{\pi}{2n} &= \\ &= r^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n} \cdot r^2 \cos^2 2 \frac{\pi}{2n} \dots r^2 \cos^2 (n-1) \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Dělme rovnici výrazem $r^{2n-2} \cdot \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos 2 \frac{\pi}{2n} \dots \cos (n-1) \frac{\pi}{2n}$.

Tento výraz není roven nule, protože i nejmenší člen $\cos (n-1) \frac{\pi}{2n}$ je větší než nula. Obdržíme

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin 2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin 3 \frac{\pi}{2n} \dots \sin (n-1) \frac{\pi}{2n} &= \\ &= \cos \frac{\pi}{2n} \cos 2 \frac{\pi}{2n} \cos 3 \frac{\pi}{2n} \dots \cos (n-1) \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Protože platí $\sin (n-k) \frac{\pi}{2n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - k \frac{\pi}{2n} \right) = \cos k \frac{\pi}{2n}$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \cos (n-1) \frac{\pi}{2n} \cos (n-2) \frac{\pi}{2n} \cos (n-3) \frac{\pi}{2n} \dots \cos \frac{\pi}{2n} &= \\ &= \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos 2 \frac{\pi}{2n} \cdot \cos 3 \frac{\pi}{2n} \dots \cos (n-1) \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

K této úpravě jsme např. $\sin \frac{\pi}{2n}$ psali jako $\sin [n - (n-1)] \frac{\pi}{2n}$. Poslední vztah je již samozřejmý (podle zákona komutativního). Opačným postupem můžeme z tohoto vztahu dojít k vztahu prvému, jež bylo úkolem dokázat.

2. Součin plošných obsahů rovnoramenných trojúhelníků A_0SA_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $n > 1$, liché, kde A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) je n prvních za sebou jdoucích vrcholů pravidelného $2n$ -úhelníka, vepsaného do kružnice o středu S , je roven součinu plošných obsahů rovnoramenných trojúhelníků A_0SB_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), kde A_0, B_i jsou vrcholy pravidelného n -úhelníka, vepsaného do téže kružnice o středu S . Dokažte!

Josef Brejcha *

Riešil Peter Preisler, X.A JSS v Trenčine:

Máme dokázat:

$$\triangle A_0SA_1 \cdot \triangle A_0SA_2 \dots \triangle A_0SA_{n-1} = \triangle A_0SB_1 \cdot \triangle A_0SB_2 \dots \triangle A_0SB_{n-1}$$

(n -nepárne).

Nakresleme si kružnici o středu S , na jejímž obvodu zvolíme body $A_0 \equiv A_{2n}, A_1, A_2(B_1), A_3 \equiv A_{n-2}, A_4 \equiv A_{n-1}(B_2), A_5 \equiv A_n, A_6 \equiv A_{n+1}(B_3), \dots, A_8 \equiv A_{2n-2}(B_4 \equiv B_{n-1}) \dots$

Z toho (vzhľadom k označeniu v obrazci)

$$\triangle A_0SA_1 \cdot \triangle A_0SA_2 \dots \triangle A_0SA_{n-2} \cdot \triangle A_0SA_{n-1} = \triangle A_0SA_2 \cdot \triangle A_0SA_4 \dots \\ \dots \triangle A_0SA_{n-3} \cdot \triangle A_0SA_{n-1} \cdot \triangle A_0SA_{n+1} \dots \triangle A_0SA_{2n-2}.$$

Delením odpadne z poslednej relácie každý párny činiteľ na strane ľavej v celkovom počte $\frac{n-1}{2}$, na strane pravej prvých $\frac{n-1}{2}$ činiteľov. Vychádza:

$$\triangle A_0SA_1 \cdot \triangle A_0SA_3 \dots \triangle A_0SA_{n-2} = \\ = \triangle A_0SA_{n+1} \cdot \triangle A_0SA_{n+3} \dots \triangle A_0SA_{2n-2}. \quad (1)$$

Nakoľko vrcholy $2n$ -uholníka s indexmi, ktorých rozdiel je n , ležia na spoločnom priemere. Je $A_1S = A_{n+1}S$ a A_0 je spoločný vrchol $\triangle A_0SA_1$ a $\triangle A_0SA_{n+1}$.

Preto

$$\triangle A_0SA_1 = \triangle A_0SA_{n+1} \\ \triangle A_0SA_3 = \triangle A_0SA_{n+3} \\ \triangle A_0SA_{n-4} = \triangle A_0SA_{2n-4} \\ \triangle A_0SA_{n-2} = \triangle A_0SA_{2n-2}$$

Ak tieto rovnice medzi sebou vynásobíme, obdržíme vzťah (1), čím je úloha dokázaná.

3. Z výsledku úlohy 2. odvodte pro $n > 1$, liché, vzťah

$$\cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Josef Brejcha

Riešil Peter Preisler, X.A žSŠ v Trenčíne:

V úlohe č. 2 je dokázané:

$$\triangle A_0SA_1 \cdot \triangle A_0SA_2 \dots \triangle A_0SA_{n-1} = \\ \triangle A_0SA_2 \dots \triangle A_0SA_{n-1} \cdot \triangle A_0SA_{n+1} \dots \triangle A_0SA_{2n-2}. \quad (1)$$

Zavedieme pojem orientovanej plochy:

Je stredový uhol trojuholníka menší ako π , je plocha kladná, ak stredový uhol trojuholníka väčší ako π , je plocha záporná (napr.: $A_0SA_1 = -A_1SA_0$).

Preto vymeníme indexy v posledných $\frac{n-1}{2}$ trojuholníkov na pravej strane rovnice (1)

$$\triangle A_0SA_1 \cdot \triangle A_0SA_2 \dots \triangle A_0SA_{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \triangle A_0SA_2 \quad \triangle A_0SA_{2n-2}.$$

Plochy vyjadríme pomocou stredových uhlov a polomeru opísanej kružnice:

$$\triangle A_0SA_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_0A_1} \cdot \overline{MS} = r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ kde } \alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$\triangle A_0SA_i = r^2 \sin i \frac{\alpha}{2} \cdot \cos i \frac{\alpha}{2} \quad (i = \text{prirodzené}).$$

Po dosadení vychádza:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2 \frac{\alpha}{2} \cos 2 \frac{\alpha}{2} \dots \sin (n-1) \frac{\alpha}{2} \cos (n-1) \frac{\alpha}{2} = \\ & = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin 2 \frac{\alpha}{2} \cos 2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 4 \frac{\alpha}{2} \cos 4 \frac{\alpha}{2} \dots \\ & \dots \sin (2n-2) \frac{\alpha}{2} \cos (2n-2) \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Nakoľko: $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\alpha}{2}$ platí

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sin 2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 4 \frac{\alpha}{2} \dots \sin (2n-2) \frac{\alpha}{2} = \\ & = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin 2 \frac{\alpha}{2} \cos 2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 4 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 4 \frac{\alpha}{2} \dots \\ & \dots \sin (2n-2) \frac{\alpha}{2} \cos (2n-2) \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Činitelia obsahujúci funkciu sínus sa krátia a obdržíme $\left(\alpha = \frac{\pi}{n}\right)$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos 2 \frac{\pi}{n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Nakoľko $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ je prirodzená mocnina (-1) môže mať hodnotu len 1 alebo -1 a preto je to číslo, ktoré sa rovná svojej prevrátenej hodnote. Dostaneme konečný výsledok

$$\cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{3\pi}{n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{č. b. t. d.}$$

4. Sečtete

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$$

Jiří Sedláček

Řešil Vojtěch Bartík, XI.B 1. žSŠ ve Znojmě:

Pro každé přirozené číslo k je:

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Daný součet můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} & \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \\ = & \frac{0}{1!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!} + \\ & + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Závěr: Hledaný součet je $1 - \frac{1}{n!}$.

Poznámka redakce: Úlohu lze řešit též užitím matematické indukce, jak také postupovala většina řešitelů.

5. Jsou dány tři body A, B, C neležící v přímce a přímka t různoběžná s rovinou $\rho \equiv (A, B, C)$. Sestrojte kulovou plochu procházející body A, B, C a dotýkající se přímky t .

Alois Urban

Řešil Jaroslav Pech, XI.A JŠŠ v Ústí n. L.:

Jestliže úloha má řešení, pak rovina $\rho \equiv (A, B, C)$ protne hledanou kulovou plochu v kružnici k , která prochází body A, B, C . Geometrické místo středů kulových ploch, které procházejí kružnicí k , je průsečnice p rovin souměrnosti úseček AB, AC .

Bud' P průsečík přímky t s rovinou ρ .

Jestliže P leží uvnitř kruhu omezeného kružnicí k , neexistuje řešení, neboť žádná tečna kulové plochy neprochází jejím vnitřním bodem.

Je-li P bodem kružnice k , pak tečna u kružnice k v bodě P a přímka t určí rovinu τ , která je tečnou rovinou hledané kulové plochy v bodě P . Kolmice v bodě P k rovině τ protíná přímku p v jediném bodě S , který je středem hledané kulové plochy. Úloha má v tomto případě právě jedno řešení.

Jestliže P leží vně kružnice k , pak lze úlohu převést na úlohu sestavit kulovou plochu, která prochází čtyřmi body, které neleží v jedné rovině. Bodem P vedeme tečnu u ke kružnici k ; její dotykový bod nechť je U . Bud' T hledaný dotykový bod kulové plochy na tečně t . Úseky na tečnách, které jsou vedeny z vnějšího bodu P ke kulové ploše, měřené od bodu P k dotykovým bodům jsou stejně velké a tedy pro bod T nutně platí $PT = PU$. Protože známe PU , můžeme na přímce t sestavit bod T (dvoznačně). Tím známe čtyři body A, B, C, T kulové plochy, které neleží v jedné rovině. Rovina souměrnosti úsečky AT (nebo BT, CT) protíná přímku p v hledaném středu kulové plochy, která řeší úlohu. V tomto případě úloha má dvě různá řešení.

Při řešení jsme mohli použít také mocnosti bodu P ke kulové ploše. Mocnost bodu P k hledané kulové ploše je \overline{PT}^2 . Jestliže přímka PA protne kružnici k ještě v bodě A' , pak $\overline{PT}^2 = PA \cdot PA'$. Protože známe PA, PA' , můžeme PT sestavit pomocí Eukleidovy věty.

6. Jsou dány dvě roviny ρ , σ a přímka p různoběžná s ρ a nikoliv k ní kolmá. Sestrojte čtverec, jehož jedna strana leží na přímce p , druhá strana v rovině ρ a jeden vrchol v rovině σ .

Alois Urban

Řešil Jiří Mída, XI.B ŽSŠ v Brandýse n. L.:

Rozbor provedeme pro případ, že dané roviny ρ a σ jsou různoběžné, σ protíná přímku p a současně i přímku k , která prochází bodem $A \equiv p \cdot \rho$, leží v rovině ρ a je kolmá na přímku p .

Nechť čtverec $ABCD$ řeší úlohu; přitom předpokládáme, že strana AB leží v rovině ρ , tj. na přímce k , a strana AD na přímce p . Rovina čtverce je $\lambda \equiv pk$.

Každý čtverec, který řeší úlohu, náleží jednomu z těchto čtyř typů:

1. Vrchol A leží v rovině σ ,
2. vrchol B leží v rovině σ (na průsečnici $r \equiv \rho \cdot \sigma$, tj. $B \equiv k \cdot r$),
3. vrchol C leží v rovině σ (na průsečnici $l \equiv \lambda \cdot \sigma$, tj. $C \equiv l \cdot o$, kde o je osa úhlu, který tvoří přímky p , k),
4. vrchol D leží v rovině σ (v průsečíku přímky p s rovinou σ , tj. v průsečíku přímky p s přímku l).

Odtud plyne konstrukce. Nejprve sestojíme bodem $A \equiv p \cdot \rho$ rovinu kolmou k přímce p . Její průsečnice s rovinou ρ je přímka k . Protože p je různoběžná s rovinou ρ a není k ní kolmá, leží v ρ právě jedna přímka k . Dále najdeme osy o_1 , o_2 úhlů, které tvoří přímky p , k . Každý bod (různý od A) přímky k , resp. o_1 , o_2 , resp. p ležící v rovině σ je vrcholem B , resp. C , resp. D nějakého čtverce, který řeší úlohu. Důkaz konstrukce vyplývá z rozboru.

V diskusi je nutno především si všimnout vzájemné polohy rovin σ a $\lambda \equiv pk$.

1. Nechť roviny σ a λ jsou různoběžné. Jejich průsečnice je $l \equiv \sigma \cdot \lambda$. Další diskuse se pak týká jen vzájemné polohy přímky l a přímk p , k , o_1 , o_2 .

a) Jestliže l neprochází bodem A a protíná všechny přímky p , k , o_1 , o_2 , existuje šest různých řešení (průsečík s přímku p nebo k vede ke dvěma řešeními, průsečík s přímku o_1 nebo o_2 k jednomu řešení).

b) Jestliže l neprochází bodem A a je rovnoběžná s přímku o_1 nebo o_2 , existují tři různá řešení.

c) Jestliže l neprochází bodem A a je rovnoběžná s přímku p nebo k , existují dvě různá řešení.

d) Jestliže l prochází bodem A , úloha má nekonečně mnoho řešení. Každý čtverec o vrcholu A a o stranách na přímkách p , k a jen takový čtverec řeší úlohu.

2. Nechť roviny σ a λ splývají; $\sigma \equiv \lambda$. Úloha má nekonečně mnoho řešení. Jsou to tatáž řešení jako v případě 1d).

3. Nechť roviny σ a λ jsou rovnoběžné a různé. Úloha pak nemá řešení.

Kdybychom položili dodatečnou podmínku, že v rovině σ má ležet právě jeden vrchol, pak v případech 1c) a 2. by neexistovalo řešení. V případě 1d) bychom museli ještě rozeznávat, zda přímka l splývá s některou z přímk p , k , o_1 , o_2 nebo nikoliv. V prvním případě by neexistovalo žádné řešení, v druhém případě nekonečně mnoho jako předtím.

7. Po vodorovné hladké vozovce se valí dutý rotační válec, jehož vnější průměr je $d_1 = 0,6$ m, vnitřní průměr $d_2 = 0,5$ m a délka $l = 1$ m. Materiál válce je stejnorodý a má hustotu $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaká je celková kinetická energie válce (v joulech), je-li úhlová rychlost rotace válce kolem jeho podélné osy rovna $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$? Tření přitom pomíjíme.

Moment setrvačnosti dutého rotačního válce kolem jeho podélné osy je dán vztahem: $I = \frac{1}{8} m (d_1^2 + d_2^2)$, kde m je hmota válce).

Václav Šindelář

Řešil Jiří Mída, XI.B JŠŠ v Brandýse n. L.:

Pohyb dutého rotačního válce se rozkládá na posuvný pohyb okamžitou rychlostí v těžiště a na otáčení kolem osy, jdoucí těžištěm úhlovou rychlostí ω . Rychlost pohybu podélné osy je současně rychlostí těžiště, a poněvadž tření pomíjíme, platí $v = \frac{1}{2} d_1 \cdot \omega$. Pohybová energie válce je dána součtem energie posuvného pohybu a energie otáčivého pohybu kolem osy jdoucí těžištěm.

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{4} d_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} m (d_1^2 + d_2^2) \cdot \omega^2 = \\ = \frac{1}{16} m \omega^2 (3d_1^2 + d_2^2).$$

Ze zadaných hodnot snadno určíme $m = \rho \cdot V$. Dosadíme-li

$$V = \frac{1}{4} d_1^2 \cdot \pi \cdot l - \frac{1}{4} d_2^2 \cdot \pi \cdot l = \frac{1}{4} \pi \cdot l (d_1^2 - d_2^2),$$

pak

$$m = \frac{1}{4} \pi \cdot l \cdot \rho (d_1^2 - d_2^2)$$

Po dosazení dostáváme:

$$W_k = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot l \cdot \rho (d_1^2 - d_2^2) \cdot \omega^2 (3d_1^2 + d_2^2) = \\ = \frac{1}{64} \pi \cdot l \cdot \rho \cdot \omega^2 (d_1^2 - d_2^2) \cdot (3d_1^2 + d_2^2).$$

Číselný výpočet:

$$W_k = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot l [\text{m}] \cdot 8 \cdot 10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot 36 [\text{s}^{-2}] \cdot (0,36 - 0,25) [\text{m}^2] \cdot \\ \cdot (1,08 + 0,25) [\text{m}^2] = \frac{1}{2} \pi \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 0,11 \cdot 1,33 [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}] = \\ = 495,133 \cdot \pi [\text{J}] = 2\,068,27 \text{ J}$$

Celková kinetická energie válce je zhruba 2 068 J.

Poznámka autora: Řada došlých řešení byla chybných, protože řešitelé uvažovali pouze pohyb rotační kolem podélné osy procházející těžištěm, a zapomínali na současný translační (posuvný) pohyb při valení daného tělesa.

8. Ve výšce $h_1 = 5$ m nad zemským povrchem je umístěno dělo, z něhož je vystřelen projektil. Hlaveň děla je při výstřelu vodorovná a směřuje k pólu. Jakou rychlost by musel projektil mít, aby obíhal v kruhové dráze kolem Země, kdyby nebylo odporu vzduchu? Zemi přitom pokládejme za dokonalou kouli (nikoli tedy za geoid s nepravidelným povrchem) o poloměru $R = 6,37 \cdot 10^6$ m, na jejímž povrchu je tíhové zrychlení $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$. Počítejme s hmotou Země $M = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Gravitační konstantu, kterou pro výpočet budeme potřebovat,

určíme si podle zadaných hodnot. Určete také tíhové zrychlení ve výšce h_1 (podobně i h_2 u druhé části úlohy) nad zemským povrchem. Jaké rychlosti by bylo potřeba v podobném případě, kdyby výška hlavně nad povrchem Země byla $h_2 = 1 \text{ km}$? Je v obou případech nutno uvažovat také tvar a hmotu projektilu?

Václav Šindelář

Řešil Jaroslav Pech, XI.A JSS v Ústí n. L.:

Projektil má konat rovnoměrný kruhový pohyb.

$$\begin{aligned} \text{Platí: } G = mg &= k \cdot \frac{mM}{r_i^2}, \text{ kde } r_1 = R + h_1, \text{ resp. } r_2 = \\ &= R + h_2, F_i = \frac{m \cdot v^2}{r_i}, \frac{k \cdot m \cdot M}{r_1^2} = \frac{m \cdot v^2}{r_i}, \\ v &= \sqrt{\frac{k \cdot M}{r_i}}. \end{aligned}$$

Je nutno ještě určit gravitační konstantu k . Na povrchu Země je:

$$F_0 = \frac{k \cdot m \cdot M}{R^2} = m \cdot g, \quad k = \frac{g \cdot R^2}{M}$$

Máme určit tíhová zrychlení g_i :

$$\frac{m \cdot g_i}{m \cdot g} = \frac{k \cdot m \cdot M}{r_1^2} \cdot \frac{k \cdot m \cdot M}{R^2}, \quad g_i = \left(\frac{R}{r_i}\right)^2 \cdot g$$

Vidíme, že tíhové zrychlení klesá se čtvercem vzdálenosti, neboť

$$r_i = R + h_i > R, \quad \frac{R}{r_i} < 1$$

Dimensionální zkoušky:

$$[v] = \sqrt{\frac{[k] \cdot [M]}{[r_i]}}, \quad [k] = \frac{[g] \cdot [R^2]}{[M]} = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}} = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

což je skutečně dimenze, odpovídající konstantě k z Newtonova gravitačního zákona. Po dosazení je

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}}{\text{m}}} = \sqrt{\text{m}^2 \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vzorec je dimensionálně správný.

Zanedbáme-li odpor vzduchu, nemusíme uvažovat hmotu a tvar projektilu. Hmotu nemusíme uvažovat také proto, že $m \neq 0$, $m \neq \infty$, a proto ji můžeme zkrátit.

V ý p o č e t g r a v i t a č n í k o n s t a n t y :

$$k = \frac{9,8 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = \\ = \frac{4,9 \cdot 6,37^2}{2,98 \cdot 10^{12}} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} .$$

V ý p o č e t r y c h l o s t i v_1 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{6,672 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{6,370\,005 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{4,448 \cdot 5,96 \cdot 10^6}{0,424\,667}} \doteq 7,900\,98 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Rychlost projektilu ve výšce 5 m nad ideálním zemským povrchem je zhruba 7901 ms^{-1} .

V ý p o č e t t í h o v é h o z r y c h l e n í g_1 :

$$g_1 = \left(\frac{6\,370\,000}{6\,370\,005} \right)^2 \cdot 9,8 \doteq 9,799\,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} .$$

V ý p o č e t r y c h l o s t i v_2 ($h_2 = 10^3 \text{ m}$):

$$v_2 = \sqrt{\frac{6,672 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{6,371 \cdot 10^6}} \doteq 7\,900,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Rychlost projektilu ve výšce 1 km nad ideálním zemským povrchem je zhruba $7\,900,5 \text{ ms}$.

V ý p o č e t t í h o v é h o z r y c h l e n í g_2 :

$$g_2 = \frac{39,765\,12 \cdot 10^{13}}{40,589\,641 \cdot 10^{12}} \doteq 9,797 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} .$$

9. Je dán obdélník $ABCD$ ($AB = 9$, $BC = 7$) a uvnitř jeho strany BC bod E ($CE = 3$). Narýsujte stoupající oblouk (ve stavitelství zvaný k o b y l í h l a v a), který se skládá ze dvou vzájemně se dotýkajících kruhových oblouků k_1 a k_2 . Oblouk k_1 se dotýká strany AD v bodě A , oblouk k_2 se dotýká strany CD a strany BC v bodě E .

Ota Setzer

Řešil Karel Kunc, XI.D 1. žSŠ ve Znojmě:

Rozbor: Oblouk kružnice k_2 se dotýká strany BC v bodě E , proto střed S_2 leží na kolmici k BC v bodě E . Oblouk k_2 se dále dotýká dvojice stran CD , BC , proto S_2 leží na ose úhlu DCB . Tím je střed S_2 i poloměr r_2 kružnice k_2 určen. Střed kružnice k_1 je S_1 , bod dotyku kružnic k_1 , k_2 budiž T . Je zřejmé, že bod S_1 leží na polopřímce AB a bod S_2 na S_1T . Platí:

1. trojúhelník AS_1T je rovnoramenný. Zvolme na polopřímce AB bod F tak, že $AF = CE (= r_2)$. Nyní platí $S_1F = r_1 - r_2$, $S_1S_2 = r_1 - r_2$, takže

2. trojúhelník FS_1S_2 je rovnoramenný a stejnohlehlý s $\triangle AS_1T$.

Z 1. plyne, že osa úsečky AT prochází bodem S_1 , z 2. pak, že také osa úsečky FS_2 jde bodem S_1 .

Řešení: Bod S_2 určíme jako průsečík osy úhlu DCB a kolmice v bodě E k úsečce BC . Poloměr kružnice k_2 je $r_2 = CE$. Na úsečce AB zvolíme bod F tak, aby $AF = CE$. Potom střed S_1 určíme jako průsečík osy úsečky FS_2 s polopřímku AB . Poloměr kružnice k_1 je $r_1 = S_1A$.

Poznámka redakce: Jinak správně řešili úlohu *ř. Baštecká* z Prahy 16 (na základě stejnolehlosti obou kruhových oblouků se středem stejnolehlosti v bodě dotyku), *řUDr. K. Blažek* z Olomouce (chordálou tří kružnic), *P. Mateásko* z Prahy 6 (pomocnou hyperbolou) a konečně *ř. Pech* z Ústí n. L. numericky.

10. Vypočtete, kde musíme volit v předchozím příkladě bod E (uvnitř strany BC), aby střed oblouku k_1 ležel v bodě B ? Pro tento zvláštní případ určete - za jinak nezměněných podmínek - obsah plochy omezené kobyílí hlavou a úsečkami AB, BE . Kolik % celého opsaného obdélníka zaujímá tato plocha?

Ota Setzer

Řešila Marie Melicharová, X.D řSŠ ř. K. Tyla v Hradci Králové:

Budiž: $AB = a = 9$, $BC = b = 7$, $CE = r_2$, S_2 střed oblouku k_2 , $S_2B = a - r_2$. Trojúhelník S_2EB je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty platí

$$\begin{aligned}(a - r_2)^2 &= r_2^2 + (b - r_2)^2 \\ r_2^2 + 2r_2(a - b) - (a^2 - b^2) &= 0 \\ r_2 &= -(a - b) \pm \sqrt{2a(a - b)} \\ r_2 &= -2 \pm \sqrt{36} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -8 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Záporný kořen nevyhovuje.

Je-li tedy $CE = 4$, pak střed S_1 oblouku k_1 leží v bodě B .

Obsah plochy omezené kobyílí hlavou a úsečkami AB, BE se rovná součtu obsahů kruhových výsečí S_1AT a S_2TE a trojúhelníka S_2S_1E .

Označme úhel $AS_1T = ES_2S_1 = \alpha$, $TS_2E = 180^\circ - \alpha$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S_1E}{S_2E} = \frac{4}{5} = 0,75, \text{ z toho } \alpha = 36^\circ 52'$$

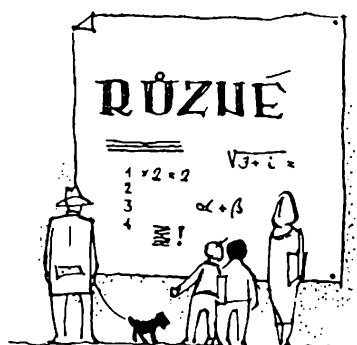
Obsah hledané plochy je

$$P = \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360} + \frac{\pi r_2^2 (180^\circ - \alpha)}{360} + \frac{r_2 (b - r_2)}{2}$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme $P = 52,04$. Obsah obdélníka $ABCD$ měří $P' = ab = 63$.

Hledaný počet % $x = \frac{P}{P'} \cdot 100$, čili $x = 82,6 \%$.

(Pokračování)



Oldřich Jeništa, Praha:

Matematika a deskriptivní geometrie v zrcadle nových pravidel českého pravopisu

Nová pravidla českého pravopisu z roku 1957, která vešla 1. ledna 1958 v platnost v našem občanském životě, zavádějí se na školách teprve od počátku školního roku 1958/59, tj. od 1. září 1958. Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních začala v 5. sešitě letošního ročníku uveřejňovat v abecedním sledu ta slova z oboru matematiky a fyziky, jejichž pravopis se proti dřívějšímu změnil, nebo v nichž se často chybuje.

V tomto článku bych chtěl seznámit čtenáře Rozhledů se všeobecnými zásadami nových pravidel, pokud se dotýkají matematiky a deskriptivní geometrie.

V první řadě se to týká použití předložek *s* a *z*. Podle nových pravidel budeme nyní výhradně psát *z* nebo *ze* např. v těchto frázích: Promítání *z* bodu, pozorování určitého předmětu (tělesa) *ze* stanoviska, průmět tělesa *ze* předu, *ze* strany, *z* boku, úvaha *ze* všech hledisek, spuštění (vedení) kolmice *z* bodu na přímku, volit určitý případ *z* případů možných, *z* řady, *z* posloupnosti apod. Ve všech těchto a podobných případech, kde jde o spojení s 2. pádem, budeme tedy zásadně psát předložku *z*.

Někdy se však stane, že bude třeba přesně rozlišit např. pohyb určitého útvaru (bodů) z jeho dosavadní polohy a tato poloha může být dvojitá. Útvar je buď *na* tělese nebo *v* tělese. Pak pohyb bude nutno v písemném vyjádření opticky zpřesnit tím, že v prvním případě půjde o pohyb útvaru *s* tělesa a v druhém případě *z* tělesa. V takových případech budeme tedy i nadále rozlišovat příslušný význam použitím buď předložky *s* nebo *z*. Někdy při takovém dvojitým pojetí nebo dvojitým výkladu je velmi obtížné rozhodnout se pro tu nebo onu předložku. V takovém případě dáme přednost předložce *z*.

Půjde-li však o spojení se 7. pádem, pak ovšem budeme jako dříve užívat předložky *s* nebo *se*.

Do určité míry obdobný je způsob použití předpon *z-* a *s-*. Předpona *s-* je na místě, kde jde o význam směřování k sobě, dohromady, nebo kde jde o sdružování prvků k sobě navzájem. Např. nároží dvou střešních rovin se sběhnou v sběžišti, při afinitě budeme užívat pojmu sdružených útvarů. Podobně budeme psát, že dva útvary splývají, budeme mluvit o sčítání sčítanců, spočteme možná řešení, spojíme dva body, seskupíme stejnojmenné zlomky apod. Předpony *s-* budeme užívat také u sloves s významem směřování dolů nebo s povrchu, např. spouštět kolmici na přímku nebo sklápět útvar do půdorysny.

Předponu *z-* píšeme tam, kde z podstatných a přídavných jmen tvoříme do-

konavá slovesa např. zúročit jistinu, zkombinovat dvě řešení, zkonstruovat příčku, zkosit těleso, zkomplikovat úlohu, zpověšchnit řešení, ztotožnit dva útvary, zpodobit těleso, zkomolit kužel, zkreslit výsledek aj. Je ustáleno psaní předpony z- např. ve slovech zkoumat, zkoušet, způsob ap.

Obdobný způsob psaní předpony z- je i u příslovcí: zcela vydělit, zčásti zobrazit, zpředu promítnout atd.

Důležitá je také otázka délky samohlásek. V psaní musíme přesně dodržovat délku, i když v běžné mluvě je kolísání. Tak např. píšeme *ú* v slově trojúhelník (jde o začátek druhé části složeného slova, tedy nikoli *ů*). Rozlišujeme *úhel* (geometrický pojem) od *uhel* (prostředek ke kreslení), vždy píšeme jen *kužel* a nikdy *kůžel*, u sloves *půlit* a *rozpůlit* je rozkazovací způsob *půl* a *rozpůl*, kdežto *půl* má význam poloviny. Píšeme vždy jen *násobitel*, *zásobitel*, *úročitel*. Rýsujeme (jen dlouhé *y*) rýsovadlem nebo rysovadlem (přípustné krátké *y* i dlouhé *y*) a výsledek naší práce je pak *rys* (vždy jen krátké *y*). Krátké *i* píšeme však ve slovech počítadlo a kružidlo výhradně, i když u prve jmenovaného slova slyšíme někdy nesprávnou výslovnost *í*.

V denním tisku se nyní ujalo psaní *milión* jen s *ó*, ačkoliv pravidla připouštějí psaní obojí, tedy *milión* i *milion*. Je však zajímavé, že *bilion*, *trilion* atd. jsou v pravidlech uvedeny jen s krátkým *o*. Rovněž slovo *binom*, kde vyslovujeme většinou *ó*, má v pravidlech jen tvar s krátkým *o*.

(Dokončení)

J o z e f J a n o v i č, Bratislava:

Objavenie nového chemického prvku

Skupine švédskych, amerických a anglických vedeckých pracovníkov sa podarilo objaviť nový chemický prvok s atómovým číslom $Z = 102$. Objav bol prevedený v Nobelovom fyzikálnom ústave v Stockholme.

Bombardovaním prvku curia (Cm) uhlíkovými iónmi C^{13} získali látku vysielajúcu α — lúče s energiou 8,5 MeV, ktorú považujú za nový chemický prvok. Curium, obsahujúce 95 % Cm^{244} , 1 % Cm^{245} a 4 % Cm^{246} bolo nanosené vo vrstve 1 mg/cm^2 na alumíniovú fóliu veľkosti $0,5 \text{ cm}^2$ a hrúbky $2,7 \text{ mg/cm}^2$, tvorilo terč, na ktorý s energiou 65 až 100 MeV dopadali uhlíkové ióny urýchľované v 225 centimetrovom cyklotróne.

Hmotové číslo (atómová váha) získaného izotopu sa veľmi pravdepodobne rovná 253 alebo 251. Také izotopy môžu byť výsledkom jadrových reakcií



Objavitelia navrhujú nazvať nový prvok *n o b é l i u m* (symbol No) na pamiatku Alfréda Nobela a na počesť ústavu nesúceho jeho meno, v ktorom bola prevedená objavná práca.

Literatura: Problemy sovremennoj fiziki, č. 2, 1958.

Zdar a nezdar aparatury Zeta

V aparatuře Zeta v Harwellu v Anglii bylo před časem výbojem elektrického proudu o 200 000 A, stabilizovaného magnetickým polem dosaženo ve zředěném

deuteriu po dobu 5 miliontin vteřiny teploty 5 milionů °C. Na základě dosažených zkušeností s tímto zařízením doufají britští badatelé v čele s dr. Cockroftem dosáhnout koncem t. r. teploty 25 milionů °C. K dosažení termonukleární reakce je však třeba teploty 100 milionů °C při použití deuteria, kdežto při užití směsi deuteria a tritia lze ji vznítit již při 40 milionech °C. Praktická energetická bilance aparatury Zeta je však krajně neuspokojivá, jelikož pro extrémní krátkost reakce pouze jedna miliardtina přiváděné energie byla zužita k dosažení této vysoké teploty.

Fr. Komurka (Research applied in Industry, March 1958).

Perspektivy mírového využití atomové energie

V září loňského roku podnikla kalifornská universita v Nevadě pokus s explozí malé atomové bomby o kapacitě 1,7 kilotun, odpovídající 1 700 t trinitrotoluolu. Akce, nazvaná „Projekt Plowshare“ zahrnovala uvolnění atomové energie pod zemí, jejímž výsledkem bylo rozdrčení 400 000 t hornin, jež byla z části roztavena vzniklou teplotou mnoha tisíc stupňů C. Zkušeností z tohoto pokusu bude v budoucnosti využito jednak k odkluzu nadloží nad ložisky rud za účelem jejich hospodárného vytěžení, jež jinak je při podzemní těžbě více méně omezeno a jednak k tak zvané druhotné těžbě nafty následkem rozdrčení naftonosné horniny. Ohřevem bude současně snížena viskozita nafty. Mimoto je zde ještě perspektiva energetická, protože vháněním vody do horniny, roztavené výbuchem atomové bomby pod zemí, lze získat velké množství přehřáté páry k pohonu turbosoustrojí, přičemž všechny nežádoucí zplodiny rozkladu atomového paliva zůstanou pod zemí bez nejmenšího ohrožení okolí.

Fr. Komurka (Technische Rundschau 18/1958).

Zpráva o činnosti pobočky JČMF v Gottwaldově

Pobočka JČMF v Gottwaldově uspořádala pro žáky gottwaldovských výběrových škol cyklus tří přednášek s názvem **Z á k l a d y a s t r o n a u t i k y**. Cyklus vedl s. O. Lepil z JSS v Gottwaldově.

První přednáška se konala v pátek 11. dubna 1958 na téma **Z á k l a d y b a l i s t i k y r a k e t**. S. Lepil promluvil o principu raketového motoru a seznámil posluchače se základními poznatky z vnitřní balistiky raket tak, jak je formuloval K. E. Ciolkovskij. V další části přednášky zaměřené technicky, poukázal přednášející na cesty, kterými lze zvyšovat rychlost raket a podal přehled vývoje raket a současné raketové techniky. Závěrem popsal některé způsoby řízení raket v prostoru.

Ve středu 23. dubna byla proslovena druhá přednáška s názvem **U m ě l é d r u ž i c e s l o u ž í v ě d ě**. Přednášející promluvil o vývoji metodiky výzkumu vysokých vrstev atmosféry od stratosférických letů, přes výzkum pomocí raket, až k umělým družicím Země. Dále seznámil posluchače s některými projekty umělých satelitů a podal přehled úkolů řešených pomocí družic. Úkoly rozdělil na měření pro potřeby činnosti na Zemi a měření pro přípravu kosmických letů. Přednášku uzavřel přehledem metod sledování umělých družic Země.

Závěrečná přednáška ve středu 16. května 1958 měla název *Problémy meziplanetárních letů*. Přednášející nejprve seznámil posluchače s výpočtem únikové rychlosti a s některými otázkami kosmického letu z hlediska nebeské mechaniky. Potom promluvil o technických a biologických problémech, které bude nutné vyřešit než dojde k realizaci meziplanetárních letů.

Každá beseda byla doplněna serií světelných obrazů a potom odpovídal s. Lepil na dotazy posluchačů. Přednášek se zúčastnilo 107 (48, 26, 33) žáků.

Otto Berka



Recenze

Fyzika v úlohách

Kniha dr. Metoděje Ostrého: *Fyzika v úlohách* obsahuje 516 řešených příkladů ze všech oborů fyziky. Objasňuje základní pojmy jakými jsou síla, práce, výkon a energie i seznamuje čtenáře s pracovními metodami a postupem při řešení úloh. Právě v tomto směru je pro žáky přínosem, neboť řešení fyzikálních příkladů činí často žákům potíže. Příručka je vhodnou pomocnou knihou pro žáky jedenáctiletých i pedagogických škol, poněvadž se výběrem i obsahem látky přizpůsobila příslušným učebnicím fyziky.

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze, str. 226, cena Kčs 4,80. Dostanete ji v obchodech drobným spotřebním zbožím (bývalé Narpy), na venkově v prodejnách Jednoty.

M. M.



Redakce hovoří se čtenáři

Žádáme ředitelství jedenáctiletých a odborných škol i učitelé vyučující matematice, fyzice a deskriptivní geometrii, a to zvláště členy JČMF, aby ve smyslu doporučení ministerstva školství a kultury provedli laskavě na počátku školního roku nábor předplatitelů *Rozhledů matematicko-fyzikálních*. Objednávky provádějte pouze prostřednictvím místní Poštovní novinové služby. Včasné provedenou objednávkou lze se vyvarovat nesnázi v doručování jednotlivých čísel, neboť náklad bývá zcela rozebrán. Děkujeme za spolupráci.

Redakce



Matematika

Marie Valešová, Praha:

Některé zvláštní typy algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře s takovými algebraickými rovnicemi 3. a 4. stupně, při jejichž řešení můžeme pohodlně užít znalostí o kvadratické rovnici (zejména vzorce pro její řešení). Takových rovnic je několik druhů:

1. rovnice tzv. *binomické* (3. i 4. stupně),
 2. rovnice tzv. *bikvadratická* (4. stupně),
 3. rovnice tzv. *reciproké* (3. i 4. stupně) a rovnice, které lze na reciproké převést.
1. A. *Rovnicí binomickou 3. stupně* nazýváme rovnici tvaru

$$x^3 + a^3 = 0 \quad (1)$$

nebo

$$x^3 - a^3 = 0 \quad (2)$$

(předpokládejme stále $a > 0$).

Víte, jak lze tuto rovnici řešit pomocí Moivreovy poučky v oboru komplexních čísel, ale ukážeme si nyní řešení algebraické, v těchto případech výhodnější. Můžeme ukázat, že součet nebo rozdíl třetích mocnin lze rozložit takto:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \quad (3)$$

Jestliže použijeme tohoto rozkladu pro první rovnici, je

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0.$$

Protože však víme, že součin dvou činitelů je roven nule, jestliže aspoň jeden z nich je roven nule, položíme nejprve

$$x + a = 0,$$

z čehož

$$x_1 = -a,$$

za druhé

$$x^2 - ax + a^2 = 0,$$

z čehož

$$x_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{a \pm ai\sqrt{3}}{2}.$$

Tím jsme dostali právě tři kořeny rovnice 3. stupně, z nichž jeden je reálný a druhé dva komplexně sdružené.

Podobně bychom postupovali pro rovnici (2).

Příklad 1.: Řešte rovnici $x^3 - 8 = 0$.

Řešení: Platí

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4),$$

tedy buď

$$x - 2 = 0,$$

z čehož

$$x_1 = 2,$$

nebo

$$x^2 + 2x + 4 = 0,$$

z čehož

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 4},$$

tedy

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

B. Binomickou rovnicí 4. stupně rozumíme rovnici tvaru

$$x^4 - a^4 = 0, \quad (4)$$

nebo

$$x^4 + a^4 = 0. \quad (5)$$

Každým z těchto případů musíme se zabývat odděleně.

a) Mějme rovnici (4). Víme, že levá strana se dá rozložit jako rozdíl čtverců

$$(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$$

a první činitel odtud znovu týmž postupem, takže máme

$$(x - a)(x + a)(x^2 + a^2) = 0.$$

Opět platí věta o součinu rovném nule, můžeme tedy postupně položit

$$x - a = 0, \quad x + a = 0, \quad x^2 + a^2 = 0,$$

z čehož

$$x_1 = a, \quad x_2 = -a, \quad x_{3,4} = \pm ai,$$

čímž jsme dostali žádané čtyři kořeny rovnice 4. stupně.

b) S rovnicí (5) budeme mít trochu více práce, neboť většinou asi neznáte rozklad dvojčlenu $(x^4 + a^4)$ a bude třeba tedy postupovat jiným způsobem.

Dvojčlen $(x^4 + a^4)$ můžeme upravit přidáním a současným odečtením čísla $2a^2x^2$ na rozdíl čtverců:

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2.$$

Nyní můžeme použít známého vzorce pro rozklad rozdílu čtverců a rovnice (5) se nám objeví ve tvaru

$$(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2) = 0. \quad (6)$$

Opět můžeme použít věty o součinu rovnajícím se nule a řešit takto vzniklé dvě kvadratické rovnice:

$$x^2 + a\sqrt{2}x + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-a\sqrt{2} \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2}}{2}$$

$$x_1 = -a\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$x_2 = -a\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$x^2 - a\sqrt{2}x + a^2 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{-2a^2}}{2}$$

$$x_3 = a\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$x_4 = a\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Příklad 2.: Řešte rovnici $x^4 + 256 = 0$.

Řešení: Platí

$$x^4 + 256 = (x^2 + 4\sqrt{2}x + 16)(x^2 - 4\sqrt{2}x + 16).$$

Je tedy buď

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 16 = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 - 4\sqrt{2}x + 16 = 0.$$

Potom

$$x_{1,2} = -2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}$$

$$x_{1,2} = -2\sqrt{2}(1 \mp i)$$

a podobně

$$x_{3,4} = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}$$

$$x_{3,4} = 2\sqrt{2}(1 \pm i).$$

2. *Rovnicí bikvadratickou* nazýváme rovnici

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (7)$$

tedy rovnici 4. stupně, která na levé straně má mnohočlen, obsahující pouze čtvrtou, druhou a nultou mocninu neznámé x . Tuto rovnici můžeme považovat za kvadratickou pro neznámou x^2 (odtud také její jméno), což se nejlépe ukáže po provedení substituce $x^2 = y$. Daná rovnice přejde pak v rovnici o neznámé y

$$ay^2 + by + c = 0,$$

jejíž kořeny snadno nalezneme:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vrátíme-li se k substituční rovnici, je zřejmé, že buď

$$x^2 = y_1, \quad \text{potom} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1},$$

nebo

$$x^2 = y_2, \quad \text{potom} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}.$$

Čtenář sám by jistě dovedl určit, kdy všechny čtyři kořeny rovnice (7) jsou reálné, kdy jsou dva reálné a dva imaginární, nebo konečně všechny čtyři imaginární (po dvou komplexně sdružené).

3. Rovnice reciproké:

A. Rovnici 3. stupně $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ nazveme reciprokou, jestliže její koeficienty mají tyto vlastnosti: $a = d$, $b = c$, tedy má-li rovnice tento tvar:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0. \quad (8)$$

Zde můžeme ze členů, obsahujících stejné koeficienty, vytknout a upravit rozkladem:

$$\begin{aligned} a(x^3 + 1) + b(x^2 + x) &= 0, \\ a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) &= 0, \\ (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) &= 0. \end{aligned}$$

Opět platí, že součin se rovná nule, je-li buď

$$x + 1 = 0, \quad \text{tedy} \quad x_1 = -1,$$

nebo

$$ax^2 + x(b - a) + a = 0.$$

Odtud použitím vzorce pro řešení kvadratické rovnice bude

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 - 4a^2}}{2a}, \\ x_{2,3} &= \frac{a - b \pm \sqrt{-3a^2 - 2ab + b^2}}{2a}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že vždy jeden kořen reciproké rovnice (8) je -1 ; o zbývajících dvou snadno rozhodneme, kdy jsou reálné nebo imaginární komplexně sdružené.

Téhož postupu při řešení můžeme užít i pro rovnici, která je reciproké pouze „podobná“, tj. pro rovnici 3. stupně, která má koeficienty těchto vztahů: $d = ak^3$, $c = bk$, tedy rovnici tvaru

$$ax^3 + bx^2 + b k x + ak^3 = 0 .$$

Opět lze k sobě seřadit první člen se čtvrtým a druhý s třetím, vytknout a postupovat v rozkladu, jak uvedeno při rovnici reciproké.

Příklad 4.: Řešte rovnici $3x^3 + 4x^2 + 8x + 24 = 0$.

Řešení: Protože je $24 = 3 \cdot 2^3$, $8 = 4 \cdot 2$, můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned} 3(x^3 + 8) + 4x(x + 2) &= 0 , \\ 3(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 4x(x + 2) &= 0 , \\ (x + 2)(3x^2 - 6x + 12 + 4x) &= 0 . \end{aligned}$$

Nyní je

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 , \\ 3x^2 - 2x + 12 &= 0 , \\ x_{2,3} &= \frac{2 \pm \sqrt{-140}}{6} \\ x_{2,3} &= \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{3} . \end{aligned}$$

Poznámka: Je-li speciálně $k = -1$, máme rovnici

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 .$$

Odtud

$$\begin{aligned} a(x^3 - 1) + bx(x - 1) &= 0 , \\ (x - 1)(ax^2 + ax + a + bx) &= 0 . \end{aligned}$$

Z toho

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 , \\ ax^2 + x(a + b) + a &= 0 , \\ x_{2,3} &= \frac{-(a + b) \pm \sqrt{b^2 + 2ab - 3a^2}}{2a} . \end{aligned}$$

B. Rovnici 4. stupně $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$, jejíž koeficienty splňují vztahy $a = e$, $b = d$, nazveme reciprokou rovnicí 4. stupně. Je to tedy vlastně rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 . \quad (9)$$

Členy se stejnými koeficienty můžeme opět seřadit k sobě a vytknout příslušné činitele:

$$a(x^4 + 1) + b(x^3 + x) + cx = 0 .$$

Protože zajisté je $x \neq 0$ (kdyby $x = 0$, bylo by též $e = 0$ a tudíž také $a = 0$ a rovnice by nebyla 4. stupně!), můžeme provést dělení číslem x^2 . Bude

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0. \quad (10)$$

Považujme na chvíli výraz $\left(x + \frac{1}{x} \right)$ za novou neznámou:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad (11)$$

Potom bude

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = y^2$$

a tedy

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Lze tedy v rovnici (10) nahradit neznámou x jinou neznámou y podle vztahu (11):

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici pro y , kterou umíme řešit:

$$ay^2 + by + c - 2a = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}$$

Označme $y_1 = A$, $y_2 = B$. Dále řešíme substituční rovnici:

$$x + \frac{1}{x} = A,$$

tedy po úpravě

$$x^2 - Ax + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

Druhé dva kořeny získáme stejným způsobem, dosadíme-li

$$x + \frac{1}{x} = B,$$

tedy

$$x_{3,4} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4}}{2}$$

Pro rovnice 4. stupně, které mají s reciprokými jen „podobnost“, tj. jejichž koeficienty vzhledem k obecné rovnici 4. stupně jsou $d = bk$, $e = ak^2$, platí:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + b k x + a k^2 = 0$$

$$a(x^4 + k^2) + b(x^3 + b k x) + cx^2 = 0.$$

Dělíme opět číslem x^2 (od nuly různým):

$$a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0.$$

Položme

$$x + \frac{k}{x} = y,$$

potom

$$x^2 + 2k + \frac{k^2}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k.$$

Další postup je shodný s řešením reciproké rovnice. Ukažme na příkladě (pro $k = -1$):

Příklad 5.: Řešte rovnici $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Řešení: Upravíme

$$(x^4 + 1) - 2(x^3 - x) - 5x^2 = 0 \quad | : x^2 \neq 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0.$$

Zavedeme substituci

$$x - \frac{1}{x} = y;$$

vychází

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2.$$

Daná rovnice má po substituci a úpravě tvar

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Řešíme:

$$y_{1,2} = 1 \pm 2,$$

tedy $y_1 = 3$, $y_2 = -1$.

Potom nejprve

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{x} &= 3, \\x^2 - 3x - 1 &= 0, \\x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},\end{aligned}$$

za druhé

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{x} &= -1, \\x^2 + x - 1 &= 0, \\x_{3,4} &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Připomeňme ještě, že řešení reciproké rovnice 4. stupně nebo rovnice jí podobné nalezneme vždy tehdy, vyjdou-li dílčí řešení $y_{1,2}$ reálná, tj. budou-li poslední dvě kvadratické rovnice mít reálné koeficienty. Vyjde-li $y_{1,2}$ imaginární, pak poslední dvě rovnice budou kvadratické s komplexními koeficienty, jejichž řešení je úloha speciální.

Stanislav Horák, studující VŠP, Praha:

O součtech některých konečných řad

1. Vyjdeme z posloupnosti přirozených čísel

$$1, 2, 3, \dots, (n-1), n, \dots \quad (1)$$

Z ní utvořme řadu

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n + n(n+1), \quad (2)$$

jejíž součet označíme písmenem s_n . Položme si otázku, jakým výhodným postupem lze tuto konečnou řadu (2) sečíst. Použijeme této identity:

$$(x-1)x(x+1) - (x-2)(x-1)x = 3(x-1)x. \quad (3)$$

O její správnosti se ihned přesvědčíme, když vlevo vytkneme $x(x-1)$.

Dosazujeme do identity (3) za x postupně čísla

$$2, 3, 4, \dots, n, (n+1).$$

Tak obdržíme pro:

$$x = 2: \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 = 3 \cdot (1 \cdot 2)$$

$$x = 3: \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot (2 \cdot 3)$$

$$x = 4: \quad 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot (3 \cdot 4)$$

$$x = r - 1: \quad (r-2)(r-1)r - (r-3)(r-2)(r-1) = 3(r-2)(r-1)$$

$$x = r: \quad (r - 1)r(r + 1) - (r - 2)(r - 1)r = 3(r - 1)r$$

$$x = n: \quad (n - 1)n(n + 1) - (n - 2)(n - 1)n = 3(n - 1)n$$

$$x = n + 1: \quad n(n + 1)(n + 2) - (n - 1)n(n + 1) = 3n(n + 1).$$

Tuto soustavu rovností sečteme. Na pravé straně dostaneme trojnásobný součet řady (2), tedy $3 \cdot s_n$. Na levé straně se nám vždy zruší prvý člen jedné rovnosti s druhým členem ihned následující rovnosti. Obdržíme tedy tento výsledek:

$$n(n + 1)(n + 2) = 3s_n$$

a odtud

$$s_n = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$$

2. Z prvků posloupnosti (1) můžeme utvořit řadu o něco složitější

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2), \quad (4)$$

jejíž součet opět označíme písmenem s_n . Abychom sečetli tuto řadu, použijeme identity

$$\begin{aligned} (x - 1)x(x + 1)(x + 2) - (x - 2)(x - 1)x(x + 1) &= \\ &= 4(x - 1)x(x + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

O její správnosti se přesvědčíme, vytkneme-li na levé straně součin

$$(x - 1)x(x + 1).$$

Jestliže do pravé strany identity (5) dosadíme za x libovolné přirozené číslo r takové, že

$$1 < r \leq n + 1,$$

obdržíme čtyřnásobek $(r - 1)$ -tého členu řady (4). Toho se využije při dalším postupu, který je analogický s postupem v části 1. Proto jej přenechávám čtenářům. Výsledek zní:

$$s_n = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Z posloupnosti (1) bychom mohli vytvořit řady ještě složitější; každý člen řady by byl součinem čtyř, pěti, ... po sobě následujících přirozených čísel. Vyhledání příslušné rovnosti a vypočtení součtu může si provést čtenář za cvičení.

3. Posloupnost (1) nahradíme libovolnou aritmetickou posloupností o diferencii $d \neq 0$. Ta je

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

Z ní sestavme řadu

$$a(a + d) + (a + d)(a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d](a + nd). \quad (6)$$

Abychom ji sečetli, použijeme rovnosti

$$(x - d) x (x + d) - (x - 2d) (x - d) x = 3d (x - d) x,$$

jejíž správnost vychází vytčením součinu

$$(x - d) x$$

vlevo.

Dosazujeme-li do této identity za x postupně čísla

$$a + d, a + 2d, \dots, a + nd,$$

obdržíme

$$\begin{aligned} (a + d - d) (a + d) (a + d + d) - (a + d - 2d) (a + d - d) (a + d) &= \\ &= 3d \cdot a (a + d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + 2d - d) (a + 2d) (a + 2d + d) - (a + 2d - 2d) (a + 2d - d) (a + 2d) &= \\ &= 3d (a + d) (a + 2d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + nd - d) (a + nd) (a + nd + d) - (a + nd - 2d) (a + nd - d) (a + nd) &= \\ &= 3d [a + (n - 1) d] (a + nd). \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme vlevo menšence poslední rovnosti zmenšeného o menšitele první rovnosti a vpravo součin čísla $3d$ a součtu s_n řady (6), tj. dostáváme

$$\begin{aligned} (a + nd - d) (a + nd) (a + nd + d) - (a + d - 2d) (a + d - d) (a + d) &= \\ &= 3d \cdot s_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Vlevo je

$$\begin{aligned} [a + (n - 1) d] (a + nd) [a + (n + 1) d] - (a - d) a (a + d) &= \\ = [nd + (a - d)] (nd + a) [nd + (a + d)] - (a - d) a (a + d) &= \\ = n^3 d^3 + n^2 d^2 (a - d + a + a + d) + nd [(a - d) a + (a^2 - d^2) + a (a + d)] &= \\ = n^3 d^3 + 3an^2 d^2 + 3a^2 nd - nd^3, \end{aligned}$$

takže podle (7) dostáváme

$$(n^3 - n) d^3 + 3an^2 d^2 + 3a^2 nd = 3d \cdot s_n,$$

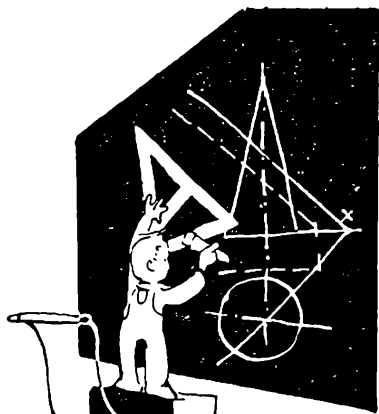
$$s_n = \frac{n^3 - n}{3} \cdot d^2 + an^2 d + a^2 n.$$

Cvičení.

Sečtěte prvních n členů řady:

a) $4 \cdot 7 + 6 \cdot 9 + 8 \cdot 11 + \dots + 2(n + 1)(2n + 5);$

b) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots$



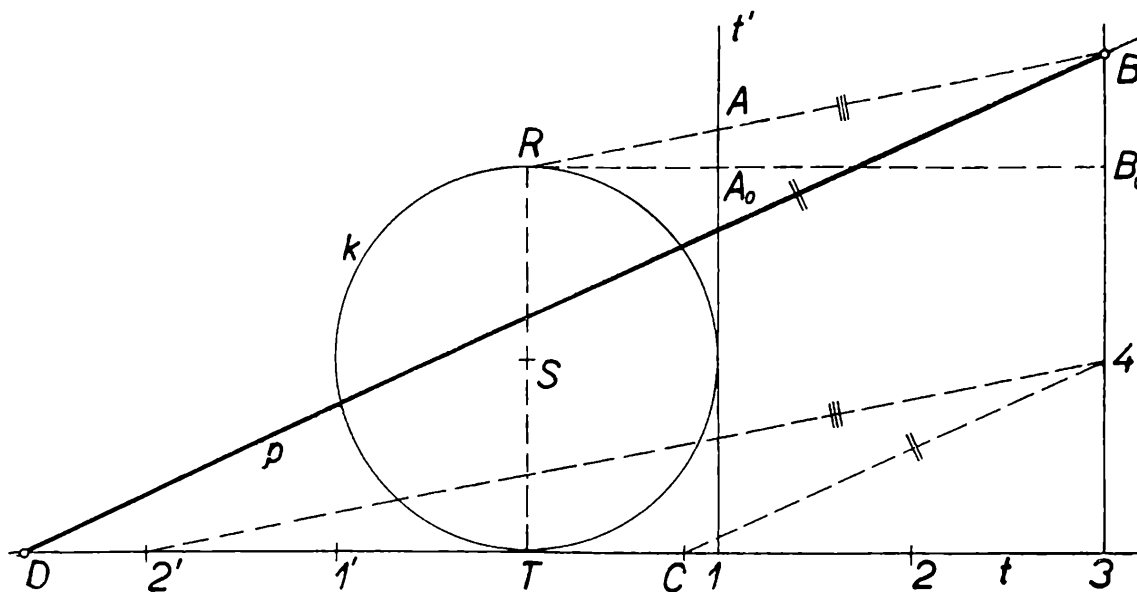
Deskriptivní geometrie a rýsování

Dr. Svatava Kubálková, Praha:

Přibližné konstrukce

(Dokončení)

Konstrukce 2. (Obr. 5). Konstrukci opět nejdříve popíši a teprve potom ji odůvodním. V dané kružnici k vedeme libovolný průměr TR a na tečnu t kružnice k , sestrojenou v bodě T , nanese vedle sebe úsečky $T1 = 12 = 23 = T1' = 1'2' = r$. Bodem 3 vedeme rovnoběžku s průměrem TR a určíme na ní (v polorovině dané tečnou t a bodem R) bod 4 tak, aby úsečka $34 = r$. Rovnoběžka s přímkou $2'4$ vedená bodem R protne přímkou 34 v bodě B a tečnu t' ($t' \perp t$) kružnice k v bodě A . Sestrojíme na tečně t bod C tak, aby $C3 = 1A$ a vedme bodem B přímkou $p \parallel C4$; ta protne tečnu t v bodě, který označíme D . Úsečka DB udává potom přibližnou délku celého obvodu dané kružnice k .



Obr. 5

Odůvodnění popsané konstrukce provedeme tímto výpočtem: Označme patu kolmice spuštěné z bodu R na tečnu t' , resp. na přímkou $3B$, písmenem A_0 , resp. B_0 . Trojúhelníky $\triangle RA_0A$ a $\triangle RB_0B$ jsou podobné a tedy

$$RA_0 : A_0A = RB_0 : B_0B ,$$

tj.

$$B_0B = \frac{A_0A \cdot RB_0}{RA_0} = \frac{A_0A \cdot 3r}{r} = 3 \cdot A_0A . \quad (4)$$

Délku úsečky A_0A určíme na základě podobnosti trojúhelníků ΔRA_0A a $\Delta 2'34$. Je

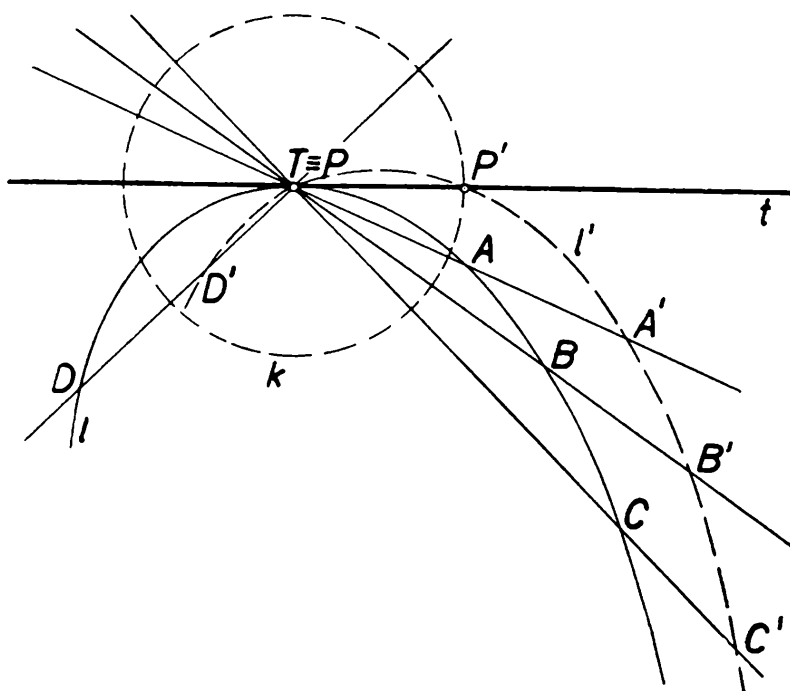
$$2'3 : 34 = RA_0 : A_0A ,$$

tedy

$$A_0A = \frac{RA_0 \cdot 34}{2'3} = \frac{r^2}{5r} = \frac{r}{5} . \quad (5)$$

Z Pythagorovy věty použité v trojúhelníku $\Delta C34$ a ze vztahu

$$C3 = 1A = 1A_0 + A_0A = 2r + \frac{r}{5} = \frac{11}{5} r$$



Obr. 6

plyne, že

$$C4 = r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{r}{5} \cdot \sqrt{5^2 + 11^2} . \quad (6)$$

Protože také trojúhelníky $\Delta D3B$ a $\Delta C34$ jsou podobné, platí úměra

$$DB : 3B = C4 : 34 . \quad (7)$$

Ze (7) dostaneme, použijeme-li vztahů (4), (5) a (6)

$$\begin{aligned} DB &= \frac{3B \cdot C4}{34} = \frac{1}{r} \cdot \left(2r + \frac{3}{5}r\right) \cdot \frac{r}{5} \sqrt{5^2 + 11^2} = \\ &= \frac{13}{25} r \cdot \sqrt{5^2 + 11^2} \doteq 6,283r \doteq 2\pi r \end{aligned}$$

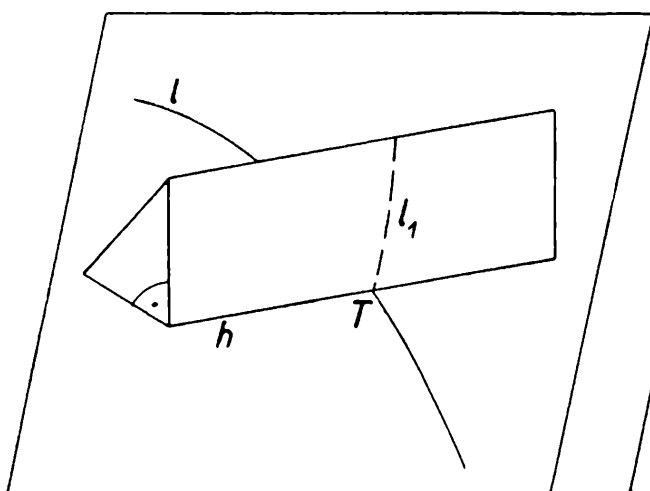
Přibližné konstrukce, o kterých pojednáme v další části tohoto článku, budou

poněkud jiného druhu než ty, o kterých jsme již mluvili. Doposud jsme si totiž všimli pouze kružnice, což je křivka, která je dána v nejjednodušším tvaru rovnicí (x, y jsou pravouhlé souřadnice bodu kružnice o poloměru r a o středu v počátku souřadnic)

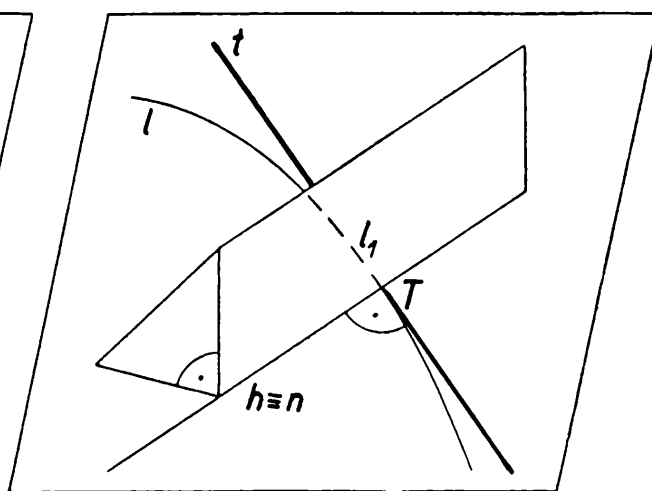
$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (8)$$

Můžeme říci, že rovnice (8) udává výtvarný zákon pro kružnici. Nyní se budeme zabývat křivkami, pro které neznáme jejich výtvarný zákon a které jsou dány pouze svým grafickým obrazem na nákresně. Takovým křivkám říkáme *empirické křivky*. Začneme základní úlohou.

Úloha 3. (Obr. 6). Empirická křivka l je dána svým grafickým obrazem; sestrojte její tečnu t v bodě T .



Obr. 7a



Obr. 7b

Bodem T vedeme svazek přímek, jejichž druhé průsečíky s křivkou l v okolí bodu T označíme A, B, C, D, \dots . Na přímky svazku nanese ve stejném smyslu od bodů A, B, C, D, \dots libovolnou konstantní délku

$$a = AA' = BB' = CC' = DD' = \dots$$

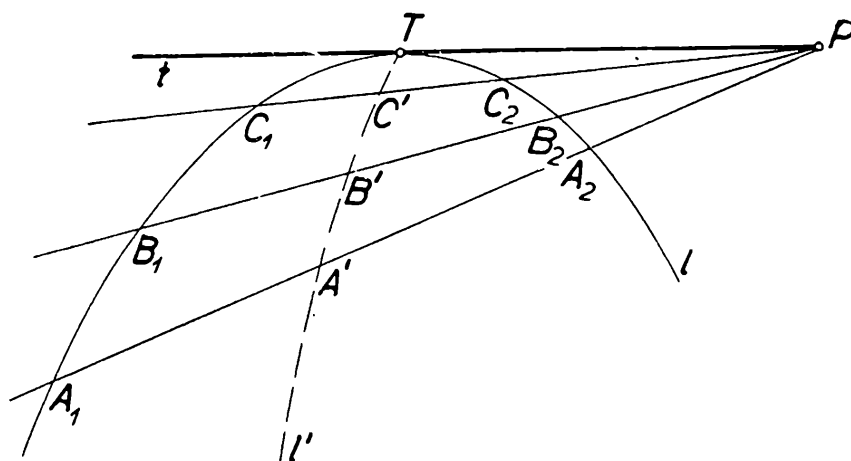
spojením takto získaných bodů A', B', C', D', \dots dostaneme pomocnou křivku l' . Průsečíkem P' křivky l' a pomocné kružnice k , opsané kolem bodu T poloměrem a , prochází potom hledaná tečna t křivky l v bodě T .

Správnost konstrukce plyne okamžitě z této úvahy: Přímka t patří do svazku přímek vedených bodem T a tedy jeden její průsečík s danou křivkou l je bod T . Její druhý společný bod P s křivkou l dostaneme, když na přímku t nanese od bodu P' ve smyslu $A'A$ úsečku a . Podle provedené konstrukce bude však $P \equiv T$, tedy přímka t má v bodě T s křivkou l dva splývající společné body a je proto její tečnou v bodě T .¹⁾

¹⁾ Srovnej s článkem K. Havlíčka: O tečnách a normálách křivek, Rozhledy matem.-fyzikální, roč. 36 (1958), č. 3, str. 102–106.

P o z n á m k a : Uvedená konstrukce je dosti pracná. Úlohu 3 je však možno řešit jednoduše a prakticky velmi přesně použitím tzv. *zrcadlového pravítka*, což je zrcátko mající tvar trojbokého kolmého hranolu, jehož základnou je pravoúhlý trojúhelník. Chceme-li sestrojiti tečnu t v bodě T empirické křivky l , položíme zrcadlové pravítko na nákresnu tak, aby hrana h hranolu při pravém úhlu procházela bodem T křivky l . Není-li hrana h normálou křivky l v bodě T , tvoří křivka l se svým obrazem l_1 v zrcátku hrot v bodě T (obr. 7a). Otáčíme-li hranou h kolem bodu T tak dlouho, až hrot v bodě T zmizí (obr. 7b), je hrana h zrcadlového pravítka - podle optického zákona o rovnosti úhlu dopadu a odrazu - právě normálou n křivky l v bodě T . Hledaná tečna t křivky l v bodě T je potom kolmicí vztyčenou v bodě T na přímkou $n \equiv h$.

Zrcadlové pravítko lze zřejmě nahradit v konstrukci popsané v této poznámce obyčejným kapesním zrcátkem. Je však třeba dbáti toho, aby při provádění konstrukce byla jeho rovina kolmá na nákresnu.



Obr. 8

Ú l o h a 4. (Obr. 8). Empirická křivka l je dána svým grafickým obrazem; sestrojte její tečnu t procházející daným bodem P , ležícím mimo křivku l a příslušný bod dotyku T .

Daným bodem P vedeme svazek přímek, které jsou sečnami dané křivky l . Křivka l vytíná na přímkách tohoto svazku tětivy $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots$; označme jejich půlící body A', B', C', \dots . Spojením takto získaných bodů A', B', C', \dots dostaneme pomocnou křivku l' ; ta protne danou křivku l v dotykovém bodě T hledané tečny t procházející bodem P .

Uvedená konstrukce je správná, neboť bod T jakožto bod křivky l' je půlícím bodem tětivy T_1T_2 vyřáté na přímce t danou křivkou l . Bod T leží však zároveň na křivce l ; je proto nutně $T_1 \equiv T_2 \equiv T$, takže přímka t má v bodě T s křivkou l dva splývající společné body a je tedy její tečnou v bodě T .

Speciálním případem 4. úlohy je úloha následující:

Ú l o h a 5. Empirická křivka l je dána svým grafickým obrazem; sestrojte její tečnu t rovnoběžnou s danou přímkou p , jakož i bod dotyku T tečny t .

Konstrukce je analogická ke konstrukci z úlohy 4., pouze svazek sečen křivky l ,

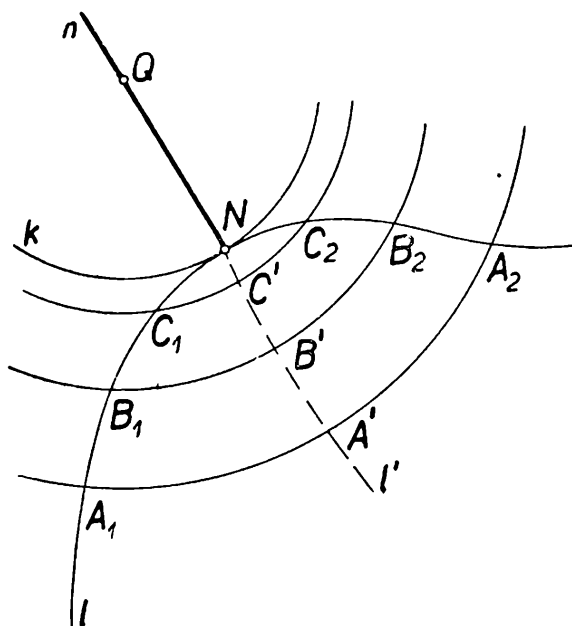
procházejících daným bodem P , nahradíme v tomto případě soustavou sečen křivky l rovnoběžných s danou přímkou p .

Úlohu sestrojiti normálu n empirické křivky l v jejím bodě N řešíme tak, že určíme nejdříve tečnu t křivky l v bodě N ; potom je $n \perp t$. Všimneme si nyní obecnější úlohy.

Úloha 6. (Obr. 9). Empirická křivka l je dána svým grafickým obrazem; sestrojte její normálu n procházející daným bodem Q , ležícím mimo křivku l .

Daná křivka l vytíná na soustředných kružnicích se středem v bodě Q oblouky $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{C_1C_2}$, ...; označme půlicí body těchto oblouků písmeny A' , B' , C' , ... Souhrnem bodů A' , B' , C' , ... je pomocná křivka l' , která protne danou křivku l v patě N hledané normály n .

Správnost provedené konstrukce ověříme takto: Bod N jakožto bod křivky l' je půlicím bodem oblouku $\widehat{N_1N_2}$, který na kružnici k (což je kružnice o středu Q



Obr. 9

procházející bodem N) vytíná daná křivka l . Protože bod N leží také na křivce l , je nutně $N_1 \equiv N_2 \equiv N$, a tedy křivka l a kružnice k se dotýkají v bodě N . Z toho plyne, že křivka k a l mají v bodě N společnou tečnu a proto i společnou normálu n , která ovšem prochází středem Q kružnice k a řeší tedy naši úlohu.

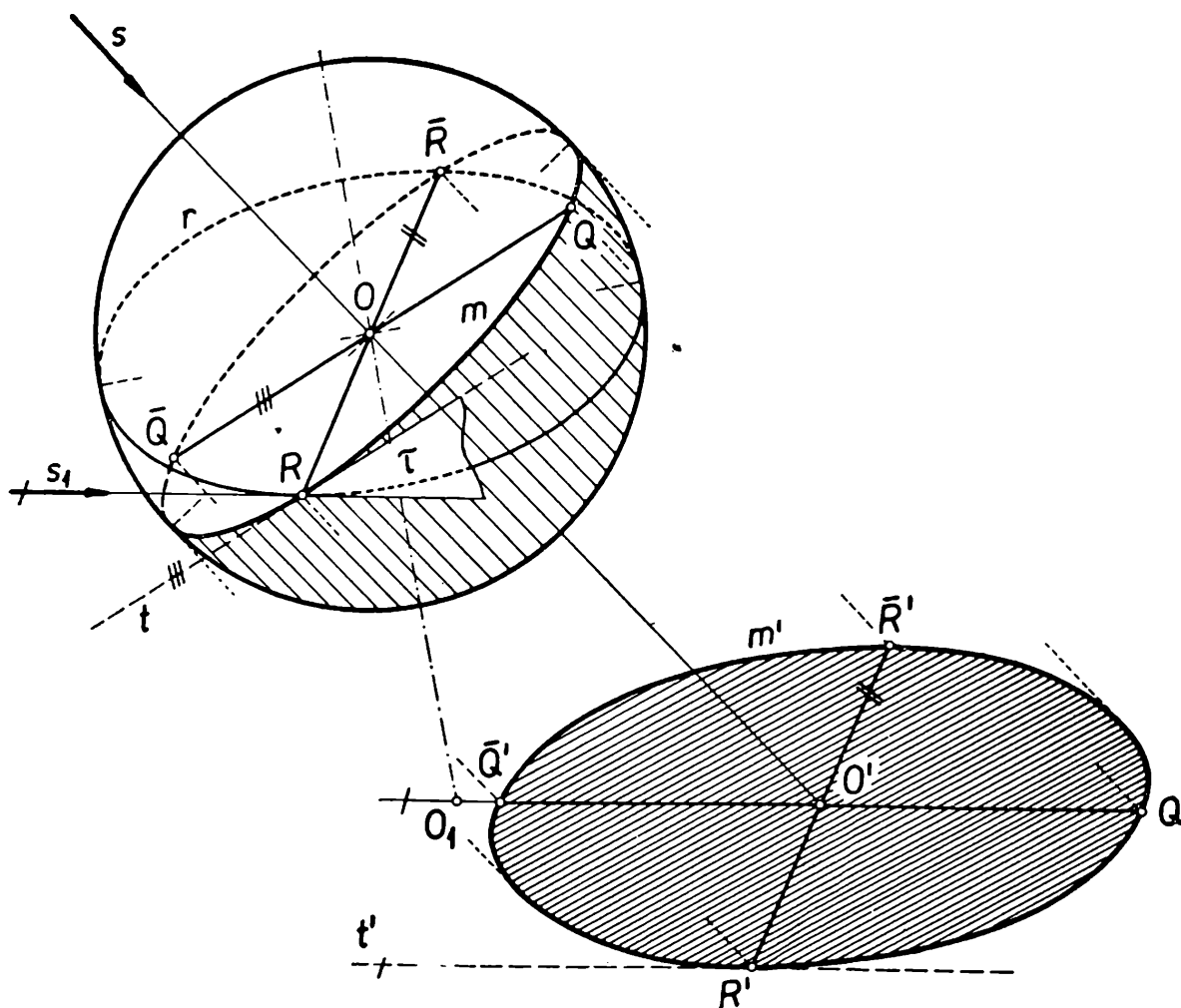
Probranými úlohami nejsou ovšem zdaleka vyčerpány všechny úlohy, které se řeší přibližnými konstrukcemi. O některých dalších pojednává J. Sobotka v knize [1], nebo V. Hruška v knize [3].

L i t e r a t u r a :

- [1] S o b o t k a, J.: Deskriptivní geometrie promítání paralelního. Praha, Česká matice technická, svazek II., str. 580–624; 1906.
- [2] K a d e ř á v e k, F. - K l í m a, J. - K o u n o v s k ý, J.: Deskriptivní geometrie; díl I., Praha, JČMF; 1946.
- [3] H r u š k a, V.: Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. Praha, JČMF, Cesta k vědění, svazek 7; 1940.

Poznámka k paralelnému osvetleniu guľovej plochy v ortogonálnej axonometrii

Medzu vrhnutého tieňa guľovej plochy na vodorovnú rovinu xy zostrojujeme ako rovinný rez svetelnej rotačnej valcovej plochy touto rovinou. Ukážme si, ako zostrojíme medzu m' vrhnutého tieňa ako vrhnutý tieň medze m vlastného tieňa guľovej plochy.

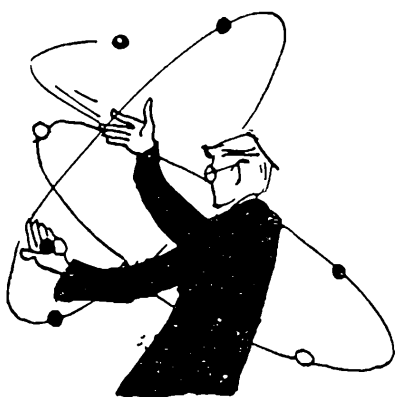


Obr. 1

Na obrázku 1. je zobrazená guľová plocha v ortogonálnej axonometrii. Rovník r je rezom guľovej plochy vodorovnou rovinou prechádzajúcou stredom O guľovej plochy. Obrazom ortogonálneho priemetu stredu O do vodorovnej roviny xy je O_1 . Smer svetla je určený obrazom s smeru svetla a obrazom s_1 ortogonálneho priemetu smeru svetla do roviny rovníka r .

Medza m vlastného tieňa guľovej plochy je hlavná kružnica v rovine kolmej na smer svetla. Jej obrazom je elipsa, ktorej hlavná os je na s kolmá a má dĺžku priemeru guľovej plochy. Myslená zvislá tangenciálna rotačná valcová plocha ψ sa dotýka guľovej plochy v rovníku r . Medza vlastného tieňa plochy ψ pretína rovník r v bodoch R a \bar{R} , ktoré sú tiež bodmi medze m vlastného tieňa guľovej plochy. Z hlavnej osi a jedného bodu (R alebo \bar{R}) zostrojíme elipsu m .

Medza m' vrhnutého tieňa guľovej plochy je vrhnutým tieňom medze m jej vlastného tieňa. Zostrojíme si združené priemery $R\bar{R}$ a $Q\bar{Q}$ elipsy m . Ich vrhnuté tieňe na vodorovnú rovinu xy sú združenými priemermi elipsy m' , ktorá je obrazom medze vrhnutého tieňa guľovej plochy. Priemer $R\bar{R}$ je s rovinou xy rovnobežný, preto jeho vrhnutý tieň $R'\bar{R}'$ je s $R\bar{R}$ rovnobežný a zhodný. Priemer $Q\bar{Q}$ je rovnobežný s tangentou t medze m v bode R . Tangenty t a s_1 určujú zvislú svetelnú tangenciálnu rovinu guľovej plochy (i plochy ψ) v bode R . Vrhnutý tieň t' tangenty t do xy je s s_1 rovnobežný. Pretože $Q\bar{Q}$ je s t rovnobežné, je i $Q'\bar{Q}'$ rovnobežné s t' , resp. s s_1 .



Fyzika

Ing. Jiří Pazderák, Praha:

O televizi

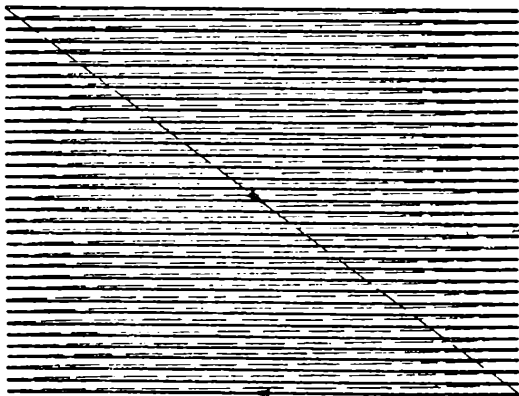
O významu televízie není třeba obšírně se zmiňovat. Televízie není už jen důležitým činitelem kulturně-politickým, ale její působnost proniká i do oboru vědy a techniky. Přináší člověku nejen zábavu a poučení jako televízie programová, ale pomáhá i ve výrobě, v provozu, ve vědních oborech, ve školství apod. jako televízie průmyslová. O tom jaký je princip televízie, pojednává tento článek.

Z fyzikálního hlediska můžeme televizní přenos obrazů považovat za transformaci (přeměnu) snímané scény ve tvar elektrických signálů. Tyto signály nesou potřebné informace o scéně a jsou po zpracování ve vysílacím zařízení vysílány do prostoru. V televizním přijímači vytvářejí tyto signály opět viditelný obraz. Televizní přenos je tedy *opticko-elektrickou transformací* na straně vysílací a *elektricko-optickou transformací* na straně přijímací.

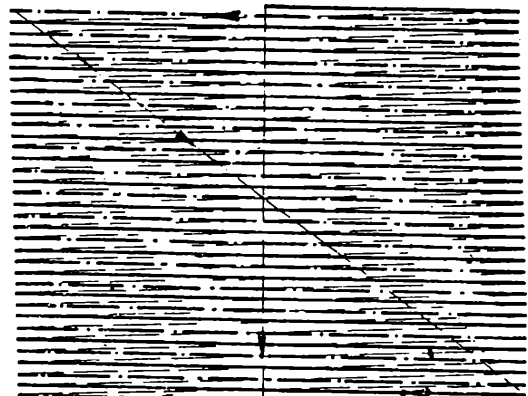
Princip televizního snímání.

Snímací opticko-elektrická soustava, elektrický přenosový kanál a reprodukční soustava jsou hlavní prvky televizního přenosu. Jejich vlastnosti spolu se schopnostmi lidského zraku umožňují televizní přenos obrazů.

Důležitou vlastností elektrického přenosového kanálu je, že nedovoluje přenášet obraz snímané scény celý současně, jako je tomu u filmu, kde se celý obraz promítá najednou. Elektrický signál může totiž přenášet pouze *lineární sled informací*, zatím co obraz má *plošný obsah informací*. Tento problém nelze v televizi

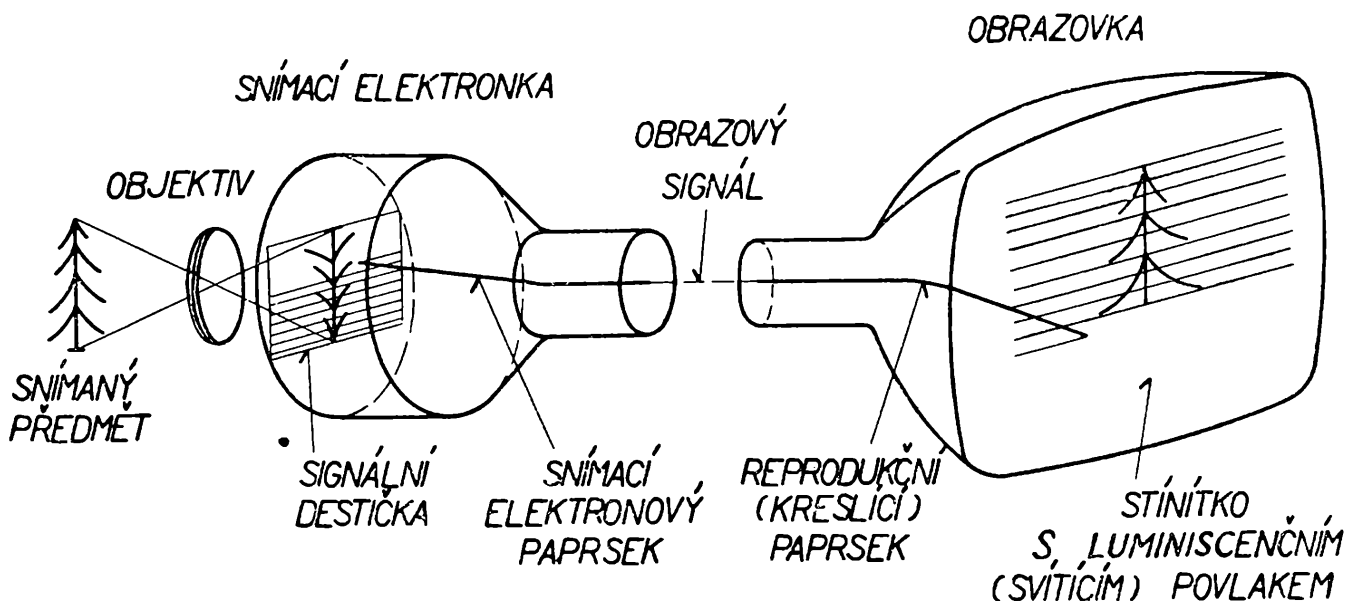


Obr. 1. Rozklad obrazu na řádky.



Obr. 2. Prokládané řádkování.

řešit jinak než postupným přenosem jednotlivých detailů obrazu, tzv. *časovým rozkladem* obrazu. Nejvhodnější je rozklad obrazu na řádky podle obr. 1. Dnešní televizní technika používá výhradně elektronického způsobu rozkladu. Připomeňme však, že rozklad byl dříve prováděn mechanicky např. rotujícím kotoučem Nipkovovým nebo rotujícím kolem Weillerovým.

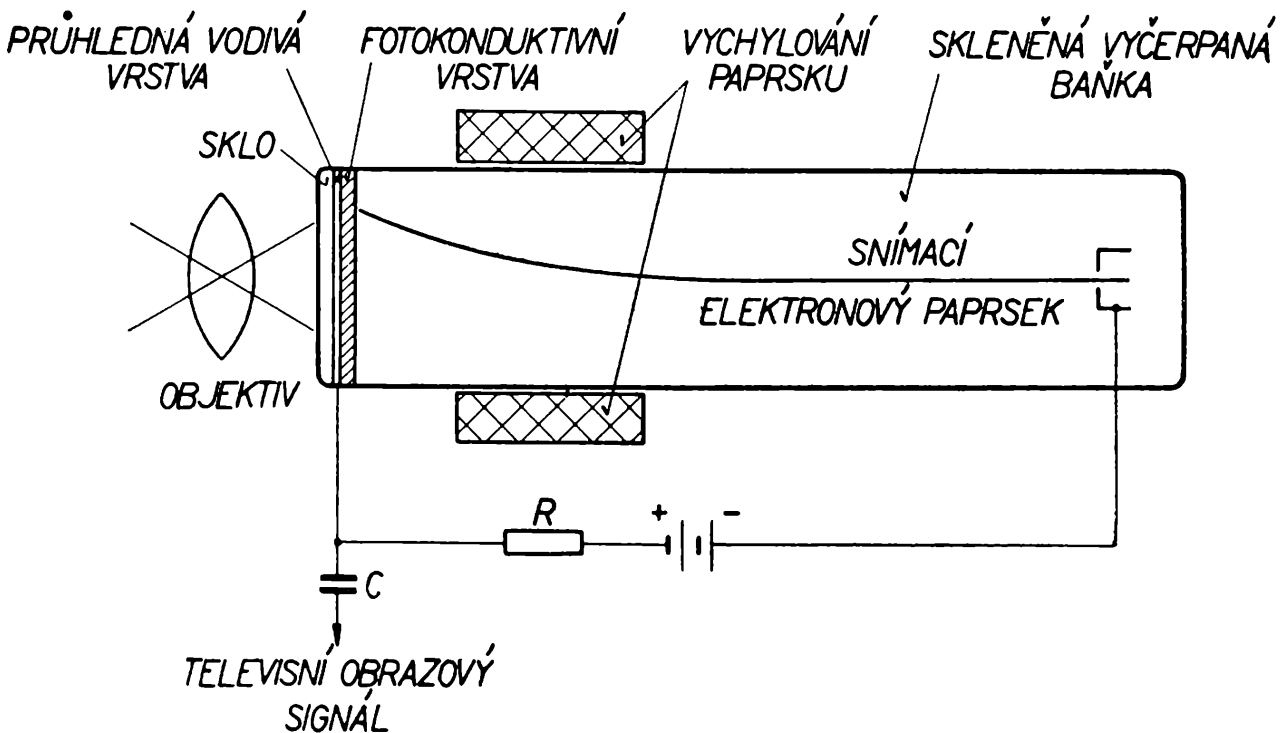


Obr. 3. Schéma televizního přenosu obrazů.

Princip televizního snímání a reprodukce budeme sledovat na obr. 3. Optická soustava televizní kamery (objektiv) zobrazí snímaný předmět na *signální destičce snímací elektronky*. Snímaný předmět je ovšem prostorový útvar a obraz vytvořený objektivem je pouze plošný. Dochází tedy už v tomto úseku televizního přenosu k zjednodušující transformaci. Nepředpokládáme totiž televizi plastickou, jejíž řešení je v dnešní době ještě velmi problematické. Naštěstí lidský

zrak jako konečný zhodnocující prvek se spokojí s dvojrozměrným obrazem trojrozměrné skutečnosti. Je-li jinak kvalita televizního obrazu dokonalá, nemusí být výsledný dojem o nic horší, což je skutečnost známá z filmu.

Sledujme dále princip snímání (obr. 3). Elektronový paprsek snímací elektronky je vychylován tak, že dopadá na signální destičku, na které je z vnější strany vytvořen světelný obraz snímaného předmětu, a probíhá obraz po řádkách (podle obr. 1). Současně převádí jas každého bodu na který dopadá, v úměrný elektrický signál. Činnost elektronového paprsku můžeme srovnat s činností oka, čteme-li např. knihu, poněvadž i snímací paprsek začíná snímat v jednom rohu obrazu, probíhá jednotlivé řádky a po proběhnutí celého obrazu se vrací, aby začal snímat další obraz.

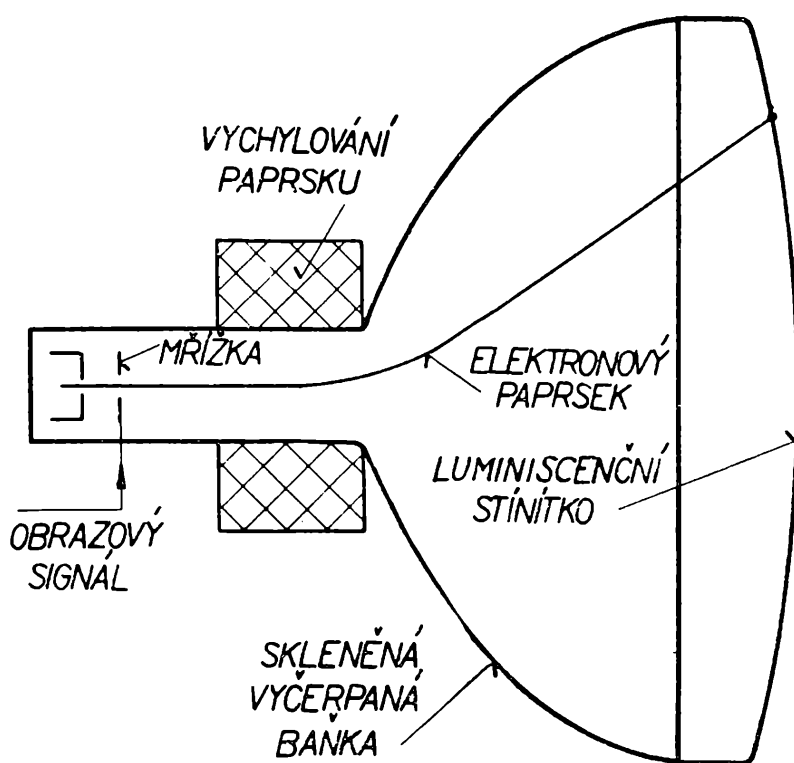


Obr. 4. Funkční schéma snímací elektronky typu vidikon.

Televizních snímacích elektronek bylo již vyvinuto mnoho typů. Dnes se ještě používá *superikonoskopu*, který má však malou citlivost a vyžaduje důkladné osvětlení snímané scény. Proto je nahrazován mnohem citlivějším *superortikonem*, který dá obraz i při osvětlení scény pouhou svíčkou. Obě tyto snímací elektronky jsou výrobně velmi složité a v provozu choulostivé. V posledních letech byla vyvinuta nová snímací elektronka typu *vidikon*. Proti předcházejícím je výroba vidikonu podstatně jednodušší, elektronka má velmi malé rozměry a velkou citlivost. Její zjednodušenou funkci sledujme na obr. 4. Světelný obraz snímaného předmětu, který vytvoří objektív, dopadá sklem baňky a průhlednou vodivou vrstvou na *fotokonduktivní signální destičku*. Materiál této destičky - dnes používaná sloučenina antimonu a síry - má tu vlastnost, že mění svůj odpor s dopadem světla. Probíhá-li snímací elektronový paprsek celý obraz po řádkách, zapojuje do obvodu baterie - odpor R různý odpor fotokonduktivní vrstvy (podle toho, jak je kde osvětlena) a vytváří tak obrazový signál odebíraný přes kapacitu C .

Po odstranění menších nedostatků bude mít vidikon předpoklady, aby se stal všestranně používanou snímací elektronkou blízké budoucnosti. Jeho předností je i to, že je vhodný pro použití v barevné televizi.

Sledujme dále princip televizního snímání podle obr. 3. Obrazový signál, který vyrobila snímací elektronka je zesílen a vysílán do prostoru. Televizní přijímač jej zachytí, zesílí a přivede na mřížku televizní obrazovky. V obrazovce je opět elektronový paprsek, který je vychylován zcela souhlasně s paprskem ve snímací elektronce, takže též probíhá obrazovou plochu po řádkách. Jestliže je intenzita paprsku v obrazovce řízena obrazovým signálem, vytvoří se na stínítku obraz předmětu, který snímá televizní kamera. Aby se oba paprsky - ve snímací elektronce i v obrazovce - pohybovaly skutečně souhlasně (synchronně) a aby dopadaly v každém okamžiku na stejné místo obrazu, přidává se k obrazovému signálu ve vysílacím zařízení ještě *synchronizační signál*, který se též vysílá a způsobuje naprosto synchronní chod obou paprsků.



Obr. 5. Funkční schéma televizní obrazovky.

Na obr. 5 je funkční schéma obrazovky. Elektronový paprsek dopadá na *luminiscenční stínítko*, které je zevnitř pokryto *luminoforem*. Luminofory (sirníky, křemičitany aktivované manganem, stříbrem) mají tu vlastnost, že svítí v místě, kde na ně dopadá elektronový paprsek. Jestliže tedy přivádíme na mřížku obrazovky obrazový signál, mění se intenzita elektronového paprsku, paprsek méně nebo více rozsvěcuje luminiscenční vrstvu v příslušném místě stínítka a vytváří viditelný obraz. Velikost obrazu na přijímači je dána použitou obrazovkou. Požadavek diváka a snaha výrobce obrazovek byla donedávna taková, aby obrazovka byla co největší. Dnešní světový standard odpovídá velikosti obrazu, jehož úhlopříčka je 43 až 53 cm. Ve vývoji je nový typ obrazovky, která nemá typický tvar (obr. 5), nýbrž je plošný a předpokládá se, že umožní vhodnější konstrukci televizních

přijímačů. Kromě toho se této obrazovce předpovídá výhodné použití v barevné televizi.

Rozlišovací schopnost televizní soustavy (tj. jak malé detaily obrazu televizní soustava ještě přenáší) je závislá na počtu řádek, na které je obraz rozkládán. Rozlišovací schopnost obrazu má stejný význam jako *o s t r o s t o b r a z u*. Rozlišovací schopnost je tím větší, čím je větší počet řádek. Prakticky není možné počet řádek neomezeně zvyšovat, ale musí být především tak velký, aby divák pozorující obraz *z o p t i m á l n í v z d á l e n o s t i* neviděl již jednotlivé řádky, nýbrž souvislý obraz. Optimální pozorovací vzdáleností rozumíme takovou vzdálenost, ze které lidský zrak pohodlně přehlédne celý obraz a nemusí stále třehtat z jednoho místa obrazu na druhé. Tato vzdálenost - potvrzená i kinematografickou praxí - se rovná asi 5 až 6 násobku výšky pozorovaného obrazu.

Za těchto podmínek je *mezni rozlišovací schopnost* zraku taková, že oko již nerozliší od sebe dva body, je-li zorný úhel v kterém je vidí průměrně menší než jedna úhlová minuta. Tato úhlová rozlišovací schopnost zraku kolísá u různých lidí v rozmezí od poloviny do dvou úhlových minut ($\frac{1}{2}' \div 2'$) a je závislá na podmínkách pozorování, především na jasů pozorovaných detailů, kontrastu, zabarvení atd. Oko běžně tedy již nerozezná dvě televizní řádky, pozoruje-li je pod úhlem jedné minuty.

Uvážíme-li již zmíněnou optimální pozorovací vzdálenost a mezni rozlišovací schopnost oka, vychází potřebný počet televizních řádek 400 až 800. Nestejný vývoj televize v různých státech způsobil, že není dnes jednotný počet řádek obrazu u různých televizních soustav. V Anglii např. zvolili počet řádek 405, ve Spojených státech 525, ve střední Evropě (i u nás) a v SSSR je počet řádek 625, ve Francii dokonce 819. Uvážíme-li mezni rozlišovací schopnost snímacích objektivů kamery, která se pohybuje, přepočteme-li ji na počet televizních řádek obrazu, kolem 600 řádek a vezmeme-li do počtu zmíněné vlastnosti lidského zraku, jeví se počet řádek 625 optimální. Tato soustava má přitom předpoklady pro přenos kvalitního televizního obrazu.

Avšak nejen počtem řádků je dána kvalita televizního obrazu. Má-li v oku vzniknout dojem dokonalého obrazu, i když se snímáný předmět pohybuje, musí televizní soustava přenášet úplné obrazy tak rychle za sebou, že v oku vzniká vlivem jeho *setrvačnosti* dojem plynulého pohybu, což je stejný princip jako ve filmu.

Počet obrazů za vteřinu, neboli *obrazový kmitočet*, při kterém oko již nevnímá jednotlivé obrazy, ale jen souvislý plynule se měnící obraz, je závislý především na *j a s u o b r a z u* (podle Talbotova zákona), dále na *s t ř í d ě* (poměru trvání světla a tmy), na *z a b a r v e n í o b r a z u* a i na individuálních schopnostech zraku různých lidí. *Kritický kmitočet blikání*, při kterém oko právě přestává vnímat jednotlivé obrazy a začíná mít dojem souvislého obrazu, pohybuje se kolem 14 c/s. Určitá reserva je nutná a proto např. u filmu je počet obrazů 25 za vteř., takže zdání plynulého pohybu je dokonalé. Přesto však u velmi jasných ploch by mohl vzniknout dojem blikání, a proto se ve filmovém promítacím stroji promítání každého obrazu ještě dvakrát nebo třikrát přerušuje, takže obrazový kmitočet je pak dosti vysoký (75 c/s), než aby mohl ještě vzniknout dojem blikání.

Právě tak jako ve filmu, ani v televizi nelze z důvodů hospodárného technického řešení počet přenášených obrazů za vteřinu neomezeně zvyšovat a není toho ani třeba (podle zmíněných vlastností zraku). Např. u naší televizní soustavy je obrazový kmitočet 25 c/s. Protože však při tomto kmitočtu při přenosu jasných ploch by mohl vzniknout dojem blikání, je ve skutečnosti proveden rozklad obrazu nikoliv podle obr. 1, ale podle obr. 2 tak, že elektronový paprsek probíhá nejdříve všechny l i c h é ř á d k y (plnou čarou) a pak všechny ř á d k y s u d é (čerchovaně). Tomuto způsobu řádkování se říká *prokládané řádkování*. Obraz je rozložen na dva *půlobrazy*. Kmitočet blikání je pak dvojnásobný, tj. 50 c/s a dojem blikání je vyloučen.

Je zřejmé, že systémem prokládaného řádkování musí pracovat jak snímací paprsek v televizní kameře, tak i reprodukční paprsek obrazovky přijímače, což zaručí synchronizační signál.

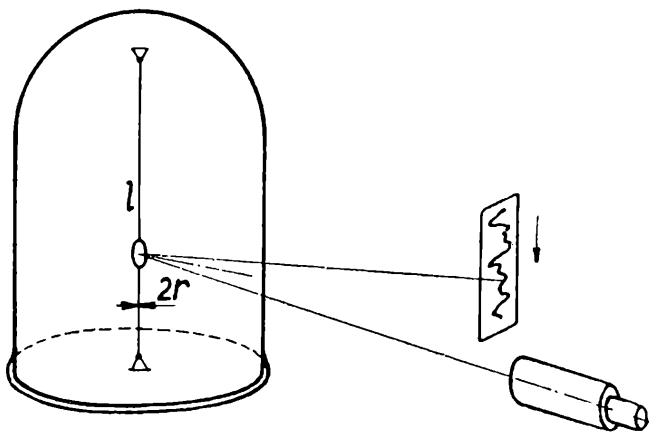
(Pokračování)

Ing. Jiří Machalický, Praha:

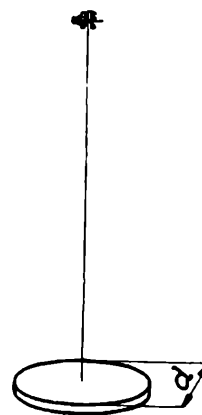
Avogadrovo číslo a metody jeho určování

(Dokončení)

3. Podstatně přesnější hodnota byla získána při studiu tzv. *rotačního Brownova pohybu*. Molekuly zředěného vzduchu, resp. jiného plynu, dopadají na lehké zrcátko (obr. 4) připevněné na jemném křemenném vlákně a způsobují stáčení, které lze pozorovat např. pomocí značkové lampy nebo registrovat na citlivý



Obr. 4



Obr. 5

fotografický pás. Vlákně odporuje tomuto stáčení torsní dvojicí D , jejíž velikost je úměrná vychylce φ

$$D = -K\varphi$$

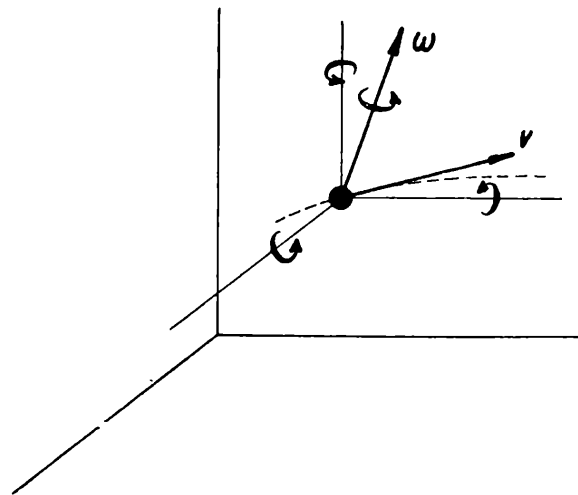
K je konstanta úměrnosti zvaná *d i r e k č n í m o m e n t*, tj. moment potřebný k otočení o jednotkový úhel v míře obloukové. Pro kruhový průřez vlákna ji lze určit ze vztahu $K = \frac{\pi G r^4}{2 l}$, (G je modul torse), dá se však určit také experi-

mentálně. Jestliže totiž na vlákno zavěsíme např. malý kotouč (obr. 5) a vychýlíme ho z rovnovážné polohy, bude vykonávat harmonické torsní kmity, pro jichž dobu kmitu platí známý vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{K}}$$

Změříme-li tedy dobu kmitu, lze z této rovnice vypočítat direkční moment K . Moment setrvačnosti \mathcal{J} vypočteme z jednoduchého vztahu $\mathcal{J} = \frac{1}{8}md^2$, v němž m je hmota kotouče a d jeho průměr.

Abychom určili Avogadrovo číslo, uplatníme velmi důležitý výsledek klasické statistické teorie, tzv. zákon o rovnoměrném rozdělení energie (ekvipartiční teorém) podle stupňů volnosti pohybu. Jen stručně se o tomto principu zmíníme. Představme si, že máme jednu grammolekulu nějakého jednoatomového plynu. Úhrnná energie E_k tohoto plynu je rovna součtu energií všech molekul. Vzhledem k termickým pohybům je ovšem energie



Obr. 6

každé molekuly různá a také energie téže molekuly se s časem velmi mění. Průměrná energie připadající na jednu molekulu má však při určité stálé teplotě zcela určitou hodnotu, takže platí

$$E_k = \sum_1^N \frac{1}{2} m v^2 = N \frac{1}{2} m \bar{v}^2.$$

Současně však platí stavová rovnice ve tvaru

$$p V = R T = \frac{1}{3} N m \bar{v}^2$$

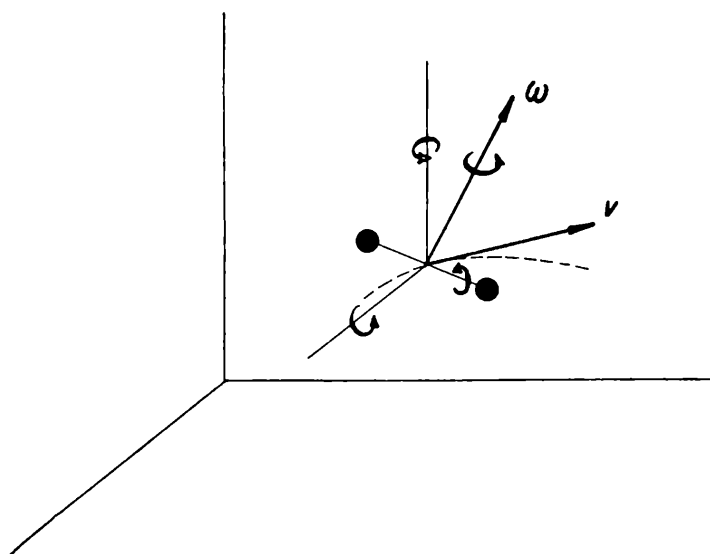
Spojením obou rovnic dostáváme pro energii všech molekul grammolekuly plynu

$$E_k = \frac{3}{2} R T$$

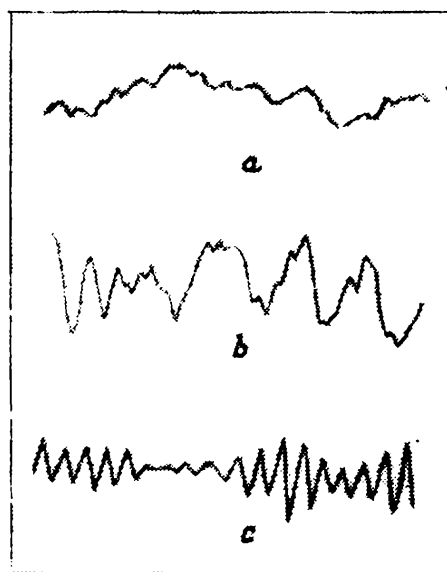
Energie jedné molekuly je

$$e_k = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T = \frac{3}{2} k T$$

Představme si, jaké pohyby může konat každá molekula jednoatomového plynu. Kromě posuvného pohybu může se molekula otáčet. Protože výsledná rychlost je určena třemi složkami do souřadných os (viz obr. 6) a také úhlová rychlost má tři složky, říkáme, že molekula má 6 stupňů volnosti. Vzhledem k malým rozměrům molekuly je energie rotační zanedbatelná proti translační, takže pro výpočet energie jsou směrodatné pouze tři složky translačního pohybu. Má tedy molekula jednoatomového plynu tři *platné* stupně volnosti. Podle ekvipartičního theoremu připadá na každý platný stupeň volnosti energie $\frac{1}{2}kT$. Plyn s dvouatomovými molekulami (obr. 7) má pět *platných* stupňů volnosti, neboť kromě tří složek translačního pohybu se uplatňují dvě složky rotace; k rotaci kolem spojnice obou atomů se prakticky nespotřebuje žádná energie. Celková energie molekuly je tedy v průměru $5/2 kT$.



Obr. 7



Obr. 8. Optický záznam rotačního Brownova pohybu zrcátka připevněného k velmi tenkému pružnému vláknku. Křivky byly získány a) při atmosférickém tlaku, b) při tlaku $4 \cdot 10^{-3}$ tor, c) při tlaku 10^{-4} tor.

Podobně bychom mohli pokračovat u složitějších molekul. Při vyšších teplotách se kromě uvedených pohybů, tj. translačního a rotačního, uplatňují ještě kmitavé pohyby atomů v molekule, u nichž však je třeba složitějších úvah.

Nárazy molekul na zrcátko jsou nepravidelné, takže zrcátko koná neuspořádané (nepravidelné) torsní kmity. Přitom otáčivému pohybu zrcátka kol pevné osy lze přisoudit jeden stupeň volnosti, vyznačený např. úhlovou rychlostí ω nebo úhlem otočení φ . Při určité teplotě T má střední kinetická energie translačního pohybu molekuly vzduchu připadající na jeden stupeň volnosti a střední energie rotačního Brownova pohybu zrcátka stejnou hodnotu $1/2 kT$. Průměrná kinetická energie těchto kmitů má stejnou hodnotu jako průměrná potenciální energie

$$E_p = \frac{1}{2} K \overline{\varphi^2},$$

kde $\overline{\varphi^2}$ je průměrná hodnota čtverce úhlové výchylky φ .

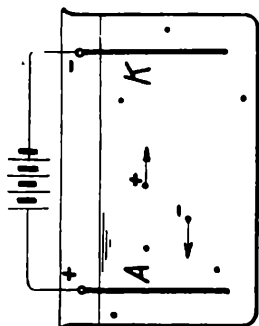
Podle ekvipartičního teorému je

$$\frac{1}{2}K\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} \frac{R}{N} T \quad (c)$$

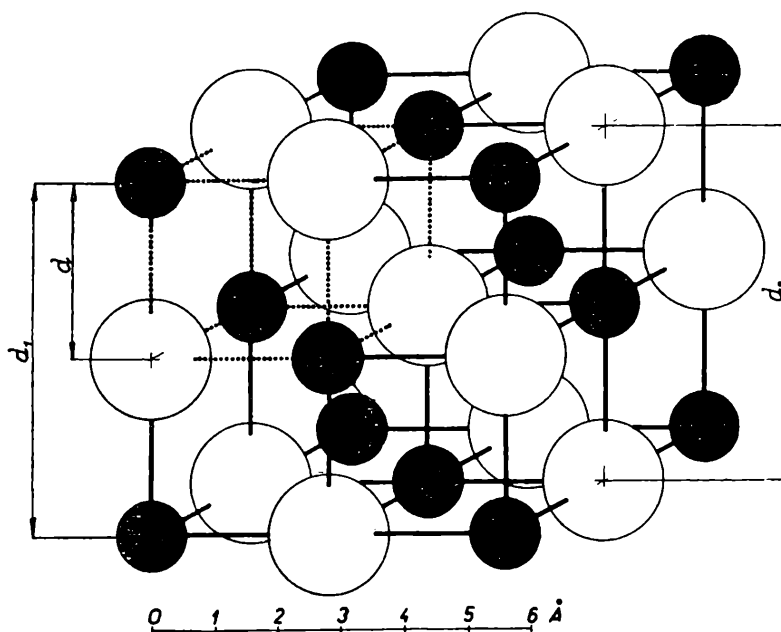
Z této rovnice můžeme vypočítat N , neboť všechny ostatní veličiny lze změřit. Velmi pečlivá měření prováděl K a p p l e r. Úhlové výchylky registroval fotograficky na pohybující se citlivý pás; na obr. 8 jsou zachyceny tři takové zápisy. Jeden takový zdařilý pokus trval 101 hodinu. Při teplotě $T = 287^\circ\text{K}$ naměřil $\overline{\varphi^2} = 4,178 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2$. Direkční moment byl změřen s přesností asi $\pm 0,2\%$. Ze vztahu (c) vyšlo s přesností asi 1%

$$N = 6,059 \cdot 10^{23}$$

To však není stále ještě dostatečně přesný výsledek pro tak důležitou veličinu.



Obr. 9



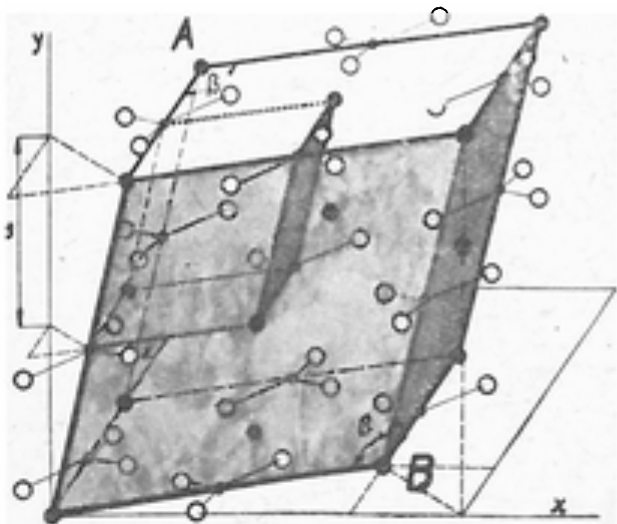
Obr. 10

4. Jiný způsob měření Avogadrova čísla spočívá na F a r a d a y o v ý c h zákonech o elektrolyse. Některé kapaliny (tzv. elektrolyty, tj. disociované roztoky, v nichž neutrální atomy jsou rozštěpeny na ionty) vedou elektrický proud, ponoříme-li do nich kovové elektrody připojené ke zdroji *ems* (např. baterii, viz obr. 9). Je to způsobeno tím, že ionty jsou urychlovány elektrickým polem a pohybují se k příslušným elektrodám; záporné ionty (anionty) k anodě A a kladné ionty (kationty) ke katodě K . Přitom ovšem dochází také k přenášení hmoty, což se projevuje tím, že se mění hmota elektrod, resp. v okolí elektrod, nebo přímo na nich dochází k chemickým změnám.

Množství látek vyloučená na elektrodách závisejí pouze na náboji, který projde elektrolytem (I. zákon elektrolytický) a nezávisejí na potenciálním rozdílu, teplotě, tlaku, rozměrech a tvaru nádoby a elektrod ani na jiných veličinách.

K vyloučení jednoho gramatomu libovolných jednomocných (resp. dvoj-trojmocných) iontů je třeba vždy stejného náboje $F = 9,652 \cdot 10^4 \text{ C}$, zv. Faradayův náboj (resp. jeho dvoj-trojnásobku). Vzhledem k velké přesnosti elektrolytických zákonů je možno jich užít k určení Avogadrova čísla. Víme totiž, že 1 gramatom obsahuje N částic, tzn., že přenesení gramatom náboje F , připadá v průměru na každý ion náboj

$$e = \frac{F}{N} . \quad (d)$$



Obr. 11

Měření Millikanova však ukázala, že e není ve skutečnosti jen průměrnou (statistickou) hodnotou náboje jednomocných iontů, nýbrž že je to nejmenší existující náboj (zv. elementární). Každý jiný náboj si můžeme představit jako součet konečného počtu těchto elementárních nábojů. Z velkého množství měření vyplynula po určitých opravách pro elementární náboj hodnota

$$e = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (e)$$

Pro Avogadrovo číslo plyne z těchto měření hodnota

$$N = \frac{F}{e} = \frac{9,652 \cdot 10^4 \text{ C}}{1,601 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 6,025 \cdot 10^{23} .$$

5. Dnes nejpresnější metoda spočívá na velmi přesných průzkumech krystalické struktury látek v pevném skupenství. Krystalické látky se vyznačují zákonitým prostorovým uspořádáním svých základních částic (iontů, atomů, molekul) v krystalové struktuře. Říkáme, že tvoří krystalovou mříž. Ačkoliv existence pravidelného uspořádání základních částic v krystalech byla poznána už dříve, teprve rentgenová spektroskopie umožnila podrobné a přesné vyšetření a proměření základních rozměrů krystalových mřížek. Bylo zjištěno, že všechny, někdy dosti složité mřížky si můžeme představit jako vzniklé složením několika základních typů mřížek. Např. chlorid sodný NaCl krystaluje v tzv. krychlové soustavě a jeho elementární krystalová buňka je tvořena průnikem dvou stejných plošně středěných mřížek. Jednu mříž tvoří kladné ionty Na^+ , druhou záporné ionty Cl^- . Tyto ionty jsou umístěny nejen v rozích elementární buňky, ale také ve středu jejích stěn. Pečlivými měřeními byla určena tzv. mřížková konstanta, rovná v tomto případě hraně základní elementární buňky. Je stejná pro obě základní mříže a činí $d_1 = d_2 = 5,642 \text{ \AA}$ ($\text{\AA} = 10^{-8} \text{ cm} = \text{angström}$). Výsledná mřížka je znázorněna na obr. 10. Tečkovanými čarami je zakreslena její elementární buňka. Hrana této krychle a současně vzdálenost tzv. strukturálních rovin určuje mřížkovou konstantu výsledné mříže ($d = \frac{1}{2} d_1 = \frac{1}{2} d_2 = 2,821 \text{ \AA}$).

V této buňce je celkem 8 iontů (4 Na^+ a 4 Cl^-), každý však je společný osmi sousedním buňkám, takže na každou buňku připadá po jednom iontu ($4/8 + 4/8 = 1$).

Objem elementární buňky je d^3 , a protože grammolekula obsahuje $2N$ iontů (N molekul a každá obsahuje jeden iont Na^+ a jeden Cl^-), bude mít objem $2Nd^3$. Tento objem lze však také vyjádřit jako poměr hmoty grammolekuly M a hustoty ρ . Pak platí

$$2Nd^3 = \frac{M}{\rho} . \quad (\text{f})$$

Odtud plyne, dosadíme-li za $M = 58,469 \text{ g}$, $\rho = 2,16 \text{ gcm}^{-3}$ (při 20° C) pro Avogadrovo číslo

$$N = \frac{M}{2d^3\rho} = \frac{58,469}{2 \cdot (2,821 \cdot 10^{-8})^3 \cdot 2,16} = 6,025 \cdot 10^{23}$$

K nejpřesnějším měřením bylo však užito vápence CaCO_3 , jehož krystaly tvoří tzv. klence (obr. 11). Jsou to rovnoběžnostěny, jejichž stěny jsou shodné kosočtverce s tupým úhlem $\beta = 101^\circ 54'$. Ve dvou protilehlých vrcholech klence se sbíhají tři hrany svírající tento úhel, v ostatních rozích se stýkají vždy tři hrany tak, že svírají dva tupé úhly a jeden úhel ostrý.

Objem elementární buňky je určen vztahem

$$V = d^3 \frac{(1 + \cos \beta)^2}{\sin \beta (1 + 2 \cos \beta)} = 1,096 06 d^3 \quad (\text{g})$$

Pro mřížkovou konstantu, rovnou vzdálenosti sousedních strukturních rovin, plyne z přesných měření hodnota $d = 3,035 6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Stejně jako pro NaCl lze vyjádřit objem grammolekuly rovnicí

$$2 N \cdot 1,096 06 d^3 = \frac{M}{\rho} . \quad (\text{h})$$

Dosadíme-li sem za $M = 100,143 \text{ g}$ a $\rho = 2,710 25 \text{ gcm}^{-3}$, dostáváme pro Avogadrovo číslo

$$N = 6,0247 \cdot 10^{23} .$$

Avogadrovo číslo, o jehož měření tu bylo stručně pojednáno, je neustále pro-
věřováno různými metodami a z různých hledisek. Podléhá tak neustálému vývoji a nelze proto očekávat, že by byla stanovena jeho absolutní hodnota.

Poslední autoru známá hodnota

$$N = (6,02486 \pm 0,00016) \cdot 10^{23}$$

je uvedena v připravované normě fyzikálních veličin, jednotek a značek a pochází od autorů Jesse W. M. Monda a E. R. Cohena.

400 let balistiky

Balistika (od řeckého *balein* = vrhati) je věda o pohybu střel. Nemá tak starou historii jako její starší sestry matematika a fyzika, neboť balistice je jenom něco málo přes 400 let. Neznamená to však, že by snad její dějiny byly méně zajímavé. Naopak, bývala to tajná věda, jejímž vysoce náročným a obtížným studiem se zabýval jen úzký okruh zasvěcenců. Výsledky těchto bádání však děsily lidstvo. Středověcí puškaři zahajovali účinnou palbu asi na 500 m.¹⁾ V březnu 1917 dopadl na Quai de Siene v Paříži první granát vystřelený ze vzdálenosti 110 km.

Balistika dychtivě zužitkovávala nejnovější poznatky vědy a techniky, ale sama jen nepatrně přispívala do pokladnice lidského vědění. Byly též výjimky. Christian Huygens a Denis Papin (čti papén) předvedli v r. 1674 v Paříži ministru Colbertovi pumpu poháněnou střelným prachem, první výbušný motor. Parní stroj by zůstal realizován jen ve vynálezcových myšlenkách, kdyby vyspělá technika výroby děl nedodala válce vzdorující velkým tlakům a neumožnila tak lidem ovládnout strašnou sílu páry. Takové pevnostné válce nemohl tehdy dodat žádný výrobce strojů, a proto také parní válce prvních strojů byly vyrobeny z hlavní děl. Hřmění dělostřelecké palby nebývalo všude slyšeno se stejnou intenzitou. Byla zjištěna pásma slyšitelnosti, ale i pásma ticha. Zkoumání těchto jevů dalo podnět k vybudování zvláštního odvětví meteorologie, a t m o s f é r i c k é a k u s t i k y. Tento nový obor podstatně přispěl k výzkumu složení ovzduší ve velkých výškách. Takových příkladů bychom mohli uvést mnoho. Tyto cenné přínosy vědě a technice se však ztrácely ve spoustě škod, které balistika natropila lidem.

Teprve vynikající úspěchy sovětské balistiky, zvláště mezikontinentální raketové střely, vyvedly balistiku, pečlivě se skrývající v konstrukcích a laboratořích zbrojovek, na výsluní světové pozornosti a co je nejdůležitější, balistiku jako vědu úplně rehabilitovaly. V nové socialistické společnosti stává se obávaná věda, dříve nositelka smrti a ničení, nositelkou života do vesmíru. Bez mezikontinentálních raket nebyly by ani umělé družice. „... můžeme zdvojnásobit a víc než zdvojnásobit váhu družice, protože sovětská mezikontinentální střela má obrovskou sílu, umožňující vypustit družici ještě větší váhy do ještě větší výšky...“, prohlásil s. Chruščov dne 25. 1. 1958 v Minsku.

Než však balistika dospěla k této své podivuhodné přeměně, musila urazit krušnou cestu, vroubenou prostými kříži jejich obětí.

V prosinci minulého roku uplynulo 400 let od smrti otce balistiky, matematika N i c c o l o T a r t a g l i a. Narodil se asi v r. 1506 v Brescii (čti bresčie), zemřel 14. 12. 1557 v Benátkách. Čtenářům bude asi více znám sporem s Cardanem o prioritu řešení kubických rovnic ve tvaru: $x^3 + ax = b$. Balistika si našla v Tartagliovi skutečně důstojného představitele. Muž koktal a přes obličej se mu táhla

¹⁾ Zajímavé zprávy o dostřelu středověkých děl uvádí Bernhard Rathgen v díle: *Geschütz im Mittelalter* (Berlin, 1928), str. 266–7 a nejnověji Jan Durdík v knize *Husitské vojenství* (Praha, 1953), str. 75–77. Durdík uvádí případy dostřelu na 800 m až 1 km.

šeredná jizva po ráně mečem. Již jako šestiletý hoch poznal všechny hrůzy dobytého města. Když Francouzi vnikli do ulic jeho rodné Brescie, utíkala zoufalá matka s malým Niccolou do katedrály, kam se sbíhali i ostatní obyvatelé, poněvadž věřili, že posvátnost místa odradí žoldnéře od dalšího vraždění. V řeži, která se strhla v kostele, zahynula Niccolova matka a hošíka sekl surový žoldněř do hlavy. Chlapce potom našli, uzdravili, ale následky zranění nesl po celý život: koktal. Tartaglia je pouze jeho přezvisko a italsky značí „koktal“. Snad se původně jmenoval Fontana. Tento muž tedy první psal o balistice, ať již v díle *Nuova scienza* (1537) nebo *Quesiti et inventioni diverse* (1546).

Středověcí dělostřelci si představovali dráhu střely jako přímku, která se ve vrcholu dráhy opět jako přímka láme a padá k zemi. Učenci v Tartagliově době vykládali dráhu střely podle Aristotela, hlavně z jeho díla *De coelo*. Rozznávali dva druhy pohybu: přirozený a nucený. Přirozený pohyb nepotřeboval, smíme-li tak říci, již žádný další impuls. K přirozenému pohybu čítali i volný pád. Všechny jiné pohyby, měly-li dále probíhat, potřebovaly však trvale působící cizí podnět (*impetus*). Takové pohyby byly však považovány za protipřírodní, za pohyby nucené. Dráhu střely pokládali za přímku, ale jenom na počátku a na konci dráhy. Střední část byla prý zakřivená. Počáteční pohyb byl pokládán podle výše uvedených definic, za nucený, na konci dráhy za přirozený a v střední části za pohyb smíšený. Tartaglia s tím nesouhlasil. Přisuzoval nucenému pohybu ubývání rychlosti, přirozenému pohybu přibývání rychlosti a smíšený pohyb zavrhoval proto, že se těleso nemůže zároveň pohybovat stoupající a klesající rychlostí. V tom ovšem nespočívá význam Tartaglia-balistika. Při výkladu dráhy střely sám zabředl do vzájemně si odporujících výkladů a problém nevyřešil. Dráhu střely však pokládal za křivku.

Tartaglia byl samouk. Neoddával se planému filosofování, necitoval Aristotela a církevní otce, ale snažil se vyřešit problém pokrokově, pokusem.

(Pokračování)



Řešení úloh

Redakce uveřejňuje řešení příkladů č. 11 až 21, daných v č. 2 až 4 Rozhledů matematicko-fyzikálních. Dáváme přitom přednost řešením zasláným studujícími škol třetího stupně, i když někdy jimi užitý postup není ve všech podrobnostech dokonalý. Z úsporných důvodů podáváme u některých úloh řešení autorovo, je-li kratší a výstižnější.

Seznam všech řešitelů bude uveden v čísle 10 i s jejich oceněním.

11. Sestrojte rotační hyperboloid jednodílný, je-li dána osa rotace, poloměr hrdelní kružnice a dva body plochy.

J. Glivický

Řešil Jiří Mída, XI.B JŠŠ v Brandýse n. L.:

Označme osu rotace o , hrdelní kružnici h , její poloměr a a X, Y dané body plochy, ρ rovinu hlavního meridiánu a hyperbolu, která je hlavním meridiánem m .

Body X, Y při rotaci kolem o vyplní kružnice k, k' , jejich středy S, S' leží na o a poloměry r, r' jsou rovny vzdálenostem X, Y od osy o . Kružnice h, k, k' mají po dvou průsečících s rovinou ρ (označme je A, B, X', X'', Y', Y''), jedna ze dvojice průsečíků (A, X', Y') leží na jedné větvi hlavního meridiánu, druhá (B, X'', Y'') na druhé větvi.

Pro hyperbolu m jsou zřejmě A, B jejími vrcholy, o vedlejší osou a a velikostí hlavní poloosy. Ohniska označme E, F . Pro body X', Y' platí podle ohniskové definice hyperboly:

$$|EX' - FX'| = 2a, |EY' - FY'| = 2a.$$

Body E a F, X' a X'', Y' a Y'' jsou souměrně sdružené podle osy o , proto $FX' = EX'', FY' = EY''$, z toho

$$|EX' - EX''| = 2a \quad (1)$$

$$|EY' - EY''| = 2a \quad (2)$$

Rovnice (1), (2) určují dvě pomocné hyperboly, ležící v rovině ρ . První má ohniska X', X'' a hlavní osu $2a$, druhá má ohniska Y', Y'' a hlavní osu velikosti $2a$. Průsečíky pomocných hyperbol - dva a dva souměrně sdružené podle osy o - jsou ohnisky hlavního meridiánu.

Diskuse: 1. Úloha nemá řešení, je-li vzdálenost bodů X a Y od osy rotace menší než poloměr hrdelní kružnice, nebo jestliže oba dané body X a Y leží v téže rovině kolmé k ose rotace. Leží-li body X a Y v různých rovinách kolmých k ose rotace ve vzdálenosti rovné poloměru hrdelní kružnice, neexistuje též řešení.

2. Úloha má jedno řešení, leží-li body X a Y v různých rovinách kolmých k o a jsou-li jejich vzdálenosti od osy větší než poloměr hrdelní kružnice a přitom sobě rovné, nebo je-li jedna vzdálenost rovna a a druhá je větší než a .

3. Existují dvě řešení, jestliže dané body X, Y neleží v téže rovině kolmé k ose rotace, jejich vzdálenosti od osy jsou různé a větší než poloměr hrdelní kružnice.

4. Úloha má libovolně mnoho řešení, leží-li body X a Y v téže rovině kolmé k ose rotace a jejich vzdálenosti od osy jsou rovny poloměru hrdelní kružnice, nebo větší než poloměr hrdelní kružnice, avšak sobě rovny.

12. Na elektrickém vařiči se nějaké množství vody počne vařit za dobu $\tau_1 = 10$ min., je-li napětí v síti, na níž je vařič připojen $U_1 = 220$ V. Poklesne-li napětí na $U_2 = 210$ V, vaří se totéž množství vody, ohřívané ze stejné počáteční teploty za $\tau_2 = 14$ min. Na kolik by se prodloužil ohřev τ_3 až do varu, kdyby

napětí bylo pouze $U_3 = 200 \text{ V}$? Při výpočtu uvažujeme také ztráty tepla do okolí, pro jednoduchost jako přímo úměrné době ohřevu.

Václav Šindelář

Řešil František Kružík, XI.B ěSŠ v Gottwaldově:

Podle zákona Jouleova-Lencova platí pro energii elektrického proudu: $Q = 0,24 U \cdot I \cdot t$, kde Q je získané množství tepla v cal.

Množství tepla, kterého je potřeba k zahřátí daného množství vody k varu beze ztrát, nazveme Q' ; toto teplo bude tedy pro všechny tři případy společné. Ztráty tepla do okolí za jednu minutu jsou q . Potom platí:

$$Q' + \tau_1 q = 0,24 U_1 \cdot I_1 \cdot \tau_1 \quad (1)$$

$$Q' + \tau_2 q = 0,24 U_2 \cdot I_2 \cdot \tau_2 \quad (2)$$

$$Q' + \tau_3 q = 0,24 U_3 \cdot I_3 \cdot \tau_3 \quad (3)$$

Jelikož ve všech třech případech je stálý odpor, platí: $R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_3}{I_3}$ a z toho

$$I_2 = \frac{U_2}{U_1} \cdot I_1, \quad I_3 = \frac{U_3}{U_1} \cdot I_1,$$

potom

$$Q' + \tau_2 \cdot q = 0,24 U_2 \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot I_1 \cdot \tau_2, \quad (4)$$

$$Q' + \tau_3 \cdot q = 0,24 U_3 \cdot \frac{U_3}{U_1} \cdot I_1 \cdot \tau_3. \quad (5)$$

Z rovnic (1) a (4) pak vypočteme

$$q = \frac{0,24 U_1 \cdot I_1 \cdot \tau_1 - Q'}{\tau_1} = \frac{0,24 \cdot U_2 \frac{U_2}{U_1} \cdot I_1 \cdot \tau_2 - Q'}{\tau_2},$$

$$0,24 U_1^2 \cdot I_1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 - Q' \cdot U_1 \cdot \tau_2 = 0,24 U_2^2 \cdot I_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 - Q' \cdot U_1 \cdot \tau_1$$

$$0,24 \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot I_1 (U_1^2 - U_2^2) = Q' \cdot U_1 (\tau_2 - \tau_1),$$

$$I_1 = \frac{Q' \cdot U_1 \cdot (\tau_2 - \tau_1)}{0,24 \tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}.$$

Z rovnice (1) je

$$q = \frac{0,24 U_1 \cdot \frac{Q' \cdot U_1 (\tau_2 - \tau_1)}{0,24 \tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)} \cdot \tau_1 - Q'}{\tau_1} =$$

$$= \frac{Q' \cdot U_1^2 (\tau_2 - \tau_1) - Q' \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}{\tau_2 (U_1^2 - U_2^2)},$$

$$q = \frac{Q' [U_1^2 (\tau_2 - \tau_1) - \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)]}{\tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)} .$$

Vypočtené veličiny dosadíme do rovnice (5):

$$\begin{aligned} Q' + Q' \frac{U_1^2 (\tau_2 - \tau_1) - \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}{\tau_1 \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)} \cdot \tau_3 = \\ = 0,24 \dot{U}_3 \frac{U_3}{U_1} \cdot Q' \frac{U_1 (\tau_2 - \tau_1)}{0,24 \cdot \tau_1 \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)} \cdot \tau_3 \quad \left| \frac{\tau_1 \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}{Q'} \right. \\ \tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2) + \tau_3 [U_1^2 (\tau_1 - \tau_2) - \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)] = U_3^2 (\tau_2 - \tau_1) \tau_3 \\ \tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2) = \tau_3 [U_3^2 (\tau_2 - \tau_1) - U_1^2 (\tau_1 - \tau_2) + \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)] \\ \tau_3 = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}{(\tau_2 - \tau_1) (U_3^2 - U_1^2) + \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)} \end{aligned}$$

Do získaného vzorce dosadili bychom skutečná čísla a zjistili bychom, že $\tau_3 = 22,63 \text{ minut} = 22 \text{ min. } 37,8 \text{ sek.}$

Ohřev τ_3 by se prodloužil za daných podmínek asi na 22 min. 37,8 sek.

Poznámka autora: Ke stejnému výsledku můžeme dojít kratší cestou při této úvaze:

Ve všech třech případech musí být stejný rozdíl Jouleova tepla vyvinutého elektrickým proudem a ztrát tepla do okolí, protože se jedná o ohřev téhož množství vody ve stejném teplotním intervalu. Tedy podle Ohmova zákona

$$\frac{U_1^2}{R} \cdot \tau_1 - k \cdot \tau_1 = \frac{U_2^2}{R} \tau_2 - k \tau_2 = \frac{U_3^2}{R} \tau_3 - k \tau_3 , \quad (a)$$

kde R je odpor vařiče a k konstanta úměrnosti mezi tepelnými ztrátami a časem. Rozepišme si z (a) dvě rovnice a upravme je

$$\frac{U_1^2}{R} \tau_1 - \frac{U_2^2}{R} \tau_2 = k (\tau_1 - \tau_2) , \quad (b)$$

$$\frac{U_1^2}{R} \tau_1 - \frac{U_3^2}{R} \tau_3 = k (\tau_1 - \tau_3) \quad (c)$$

Dělíme rovnici (c) rovnicí (b) a tím vyloučíme neznámé veličiny R a k :

$$\frac{U_1^2 \tau_1 - U_3^2 \tau_3}{U_1^2 \tau_1 - U_2^2 \tau_2} = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2}$$

a řešením pro τ_3 dostáváme

$$\begin{aligned} \tau_3 = \frac{\tau_1 \tau_2 (U_1^2 - U_2^2)}{U_1^2 \tau_1 - U_2^2 \tau_2 - U_3^2 (\tau_1 - \tau_2)} = \frac{10 \cdot 14 (484 - 441)}{484 \cdot 10 - 441 \cdot 14 + 400 \cdot 4} = \\ = \frac{6020}{266} \doteq 22,63 \text{ min.} \end{aligned}$$

Vidíme, že snížením napětí se značně prodlouží doba ohřevu.

13. Vedení z elektrárny, jež vyrábí stejnosměrný proud, ke spotřebiteli je z měděného drátu o průřezu $S = 2,5 \text{ mm}^2$. Délka dvou vodičové přípojky je $L = 49 \text{ m}$. V elektrárně je napětí $V = 120 \text{ V}$. Má-li být připojen u spotřebitele elektrický vaříč o výkonu $P_s = 600 \text{ W}$, jaký musí být jeho odpor? Měrný odpor přírodních drátů budiž $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$.

Václav Šindelář

Řešil Jiří Mída, XI.B žSŠ v Brandýse n. L.:

Nechť má spotřebič odpor R_s , nechť lze na jeho svorkách změřit napětí U_s , a nechť celým obvodem protéká proud I . Pak

$$P_s = U_s \cdot I$$

Podle Ohmova zákona platí $U_s = I \cdot R_s$ a proto lze psát:

$$I^2 = \frac{P_s}{R_s} \quad (1)$$

Odpor přírodních drátů, jejichž celková délka je $2L$, je $R = \rho \cdot \frac{2L}{S}$. Podle Ohmova zákona platí pro celý obvod:

$$I = \frac{V}{R_s + \rho \cdot \frac{2L}{S}}$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (1).

$$\left(\frac{V}{R_s + \rho \cdot \frac{2L}{S}} \right)^2 = \frac{P_s}{R_s} \quad (2)$$

Z rovnice (2) určíme R_s .

$$V^2 \cdot R_s = P_s \cdot \left(R_s + \rho \cdot \frac{2L}{S} \right)^2$$

$$V^2 \cdot R_s = P_s \cdot R_s^2 + \frac{4L \cdot \rho \cdot P_s \cdot R_s}{S} + \frac{4L^2 \cdot \rho^2 \cdot P_s}{S^2}$$

$$P_s \cdot S^2 \cdot R_s^2 - S(V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s) R_s + 4L^2 \cdot \rho^2 \cdot P_s = 0$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$\begin{aligned} D &= S^2 (V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s)^2 - 4^2 L^2 \cdot \rho^2 \cdot P_s^2 \cdot S^2 = \\ &= V^2 \cdot S^3 (V^2 \cdot S - 8L \cdot \rho \cdot P_s) \end{aligned}$$

O diskriminantu dále platí (neboť $P_s = U_s \cdot I$, $2L \cdot \rho = R \cdot S$ a $R \cdot I = V - U_s$)

$$D = V^2 \cdot S^3 (V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s) = V^2 \cdot S^4 \cdot (V^2 - 4V \cdot U_s + 2 \cdot U_s^2) = V^2 \cdot S^4 (V - 2U_s)^2 \geq 0$$

a proto má tato rovnice reálné kořeny.

Tyto kořeny jsou:

$$R'_s = \frac{S(V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s) + V \cdot S \sqrt{S(V^2 \cdot S - 8L \cdot \rho \cdot P_s)}}{2P_s \cdot S^2} =$$

$$= \frac{V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s + V \sqrt{S(V^2 \cdot S - 8L \cdot \rho \cdot P_s)}}{2P_s \cdot S};$$

$$R''_s = \frac{S(V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s) - V \cdot S \sqrt{S(V^2 \cdot S - 8L \cdot \rho \cdot P_s)}}{2P_s \cdot S^2} =$$

$$= \frac{V^2 \cdot S - 4L \cdot \rho \cdot P_s - V \sqrt{S(V^2 \cdot S - 8L \cdot \rho \cdot P_s)}}{2P_s \cdot S}.$$

Podívejme se na rovnici (2). Její levá strana je větší než nula, také $P_s > 0$, a proto i vyhovující R_s je větší než nula, a tedy R'_s i R''_s jsou řešením dané úlohy. $R_s = R'_s$, jestliže $D = 0$, tj. $V^2 \cdot S = 8L \cdot \rho \cdot P_s$.

Řešení numerické:

Nejdříve vhodně převedeme jednotky:

$$S = 2,5 \text{ mm}^2, \quad L = 49 \text{ m}, \quad V = 120 \text{ V}, \quad P_s = 600 \text{ W}, \quad \rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm} = \\ = 1,7 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}.$$

$$R_s = \frac{M}{2.600 \text{ W} \cdot 2,5 \text{ mm}^2} = \frac{34\,000,8 \pm 33\,936}{3000} [\Omega], \text{ kde}$$

$$M = 120^2 [\text{V}^2] \cdot 2,5 [\text{mm}^2] - 4 \cdot 49 [\text{m}] \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \left[\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right] \cdot 600 [\text{W}] \pm 120 [\text{V}] \cdot$$

$$\sqrt{2,5 [\text{mm}^2]^2 \cdot (120^2 [\text{V}^2] \cdot 2,5 [\text{mm}^2] - 8 \cdot 49 [\text{m}] \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \left[\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right] \cdot 600 [\text{W}]);}$$

$$R'_s = \frac{34\,000,8 + 33\,936}{3000} [\Omega] \doteq 22,6 \Omega,$$

$$R''_s = \frac{34\,000,8 - 33\,936}{3000} [\Omega] \doteq 0,02 \Omega.$$

Kořen R''_s nemá smysl, neboť odpor $0,02 \Omega$ neodpovídá odporu topných spirál (Odpor $0,02 \Omega$ má přibližně 1 m měděného drátu průřezu 1 mm^2). Odpor vaříče je $R_s = 22,6 \Omega$.

14. Vyhledejte všechny pravidelné mnohoúhelníky, u nichž velikost vnitřního úhlu (ve stupních) je dána celým číslem.

Jiří Sedláček

Řešila Marie Melicharová, X.D žSŠ ž. K. Tyla v Hradci Králové:

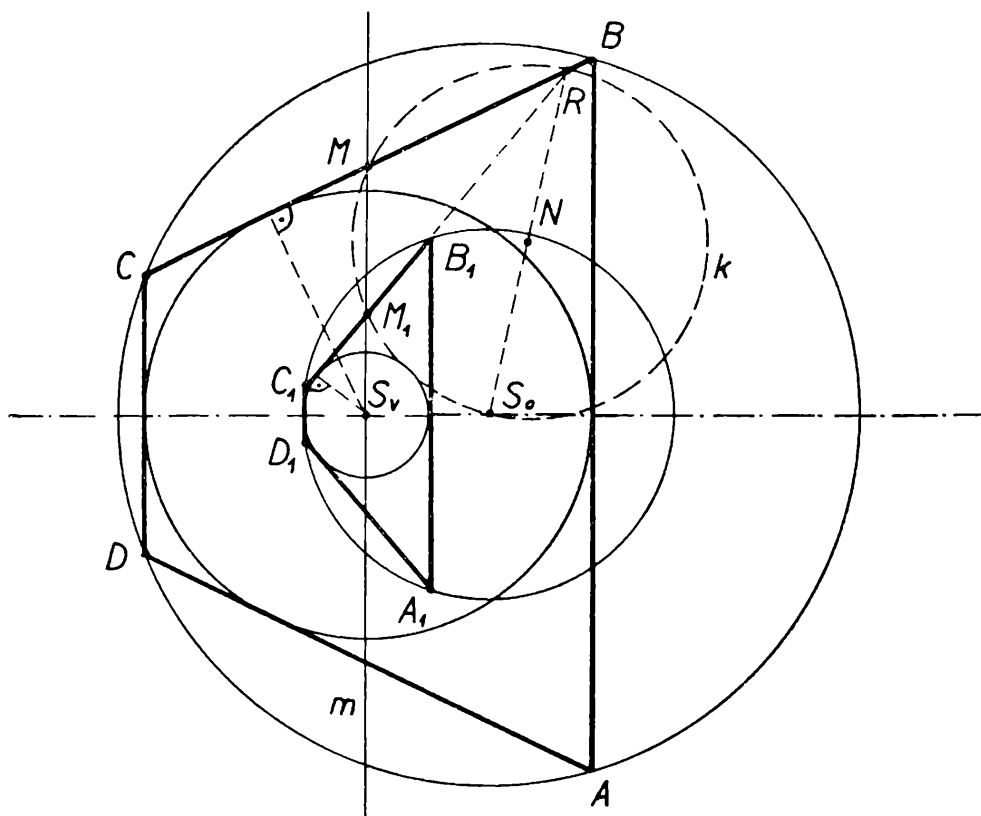
Velikost (ve stupních) vnitřního úhlu pravidelného n -úhelníka se rovná $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Toto číslo bude celé tehdy, když n bude dělitelem čísla 360. Při-

tom musí platit, že $n \geq 3$. Pravidelné n -úhelníky, které mají velikost vnitřního úhlu (ve stupních) danou celým číslem, dostáváme pro tyto hodnoty n : 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 a 360.

Úloze tedy vyhovuje 22 mnohoúhelníků.

15. Sestrojte rovnoramenný dvojtředový lichoběžník (tj. lichoběžník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici), znáte-li střed S_0 kružnice opsané, střed S_v kružnice vepsané a bod R na jeho rameni (nebo na jeho prodloužení).

Ota Setzer



Riešil Peter Preisler, Xa, žSŠ v Trenčíne:

1. R o z b o r : Predpokládajme, že sme už úlohu vyriešili. Označme M stred strany BC lichobežníka $ABCD$. M je krajným bodom strednej priečky, ktorá prechádza bodom S_v . Súčasne prechádza bodom M symetrála strany BC , na ktorej leží bod S_0 . Preto body M , S_v a S_0 tvoria pravouhlý trojuholník. Nakoľko

bod R leží na směru strany BC a $S_0M \perp MR$, je $\triangle MS_0R$ pravouhlý, preto existuje nad preponou S_0R Tháletová kružnica.

2. **K o n š t r u k c i a** (obr.). Zostrojíme Tháletovú kružnicu k nad priemerom S_0R ($S_0N = NR$). V bode S_v vztýčíme kolmicu m na S_vS_0 . Priesečíky kružnice k a kolmice m sú body M a M_1 , tj. stredy strán lichobežníka. Zostrojíme priamky MR a M_1R , na ktorých ležia strany. Vzdialenosť bodu S_v od týchto priamok sú polomery vpísaných kružníc. Priemery vpísaných kružníc sú výšky lichobežníka. Zostrojenie hľadaných lichobežníkov je už jednoduché.

3. **D ô k a z**: plynie z rozboru.

4. **D i s k ú z i a**:

a) Ak priamka m pretína kružnicu $k \equiv \left(N; \frac{S_0R}{2}\right)$, má úloha dve riešenia.

b) Ak priamka m sa dotýka kružnice k , má úloha len jedno riešenie.

c) Ak je priamka m nesečnica kružnice k , úloha nemá riešenie.

P o z n á m k a: G. m. bodov N , pri ktorých úloha má len jedno riešenie, je parabola p' ($F \equiv S_0$; $V \equiv K$). G. m. bodov R , pri ktorých má úloha len jedno riešenie je parabola p , ktorá je s parabolou p' rovnolahlá (stred rovnolah. je S_0 ; koef. je $\frac{S_0R}{S_0N} = 2$), má ohnisko v S_0 a vrchol v S_v .

Táto parabola rozdeľuje rovinu na dve oblasti:

1. oblasť I., čo je g. m. bodov R , pri ktorých má úloha dve riešenia.

2. oblasť II., čo je g. m. bodov R , pri ktorých úloha riešenia nemá.

16. V rovine je dána priamka a (b), na ní bod A (B) tak, že A (B) neleží na b (a). Určete geometrické miesto dotykových bodů dvou vzájemně se dotýkajících kružnic, z nichž jedna se kromě toho dotýká přímky a v bodě A , druhá přímky b v bodě B .

Alois Urban

Řešení autorovo:

Při řešení je třeba rozeznávat čtyři případy.

1. Je-li $a \parallel b$ a $AB \perp a$, pak snadno najdeme, že hledané geometrické místo je přímka $p \equiv AB$ a kružnice k opsaná nad průměrem AB . Přitom pro každý bod kružnice k obě kružnice řešící úlohu splývají s kružnicí k .

2. Je-li $a \parallel b$, ale AB není kolmé k a , pak hledané geometrické místo je opět složeno z přímky $p \equiv AB$ a z kružnice k opsané nad průměrem AB . Přitom jsou však nyní vyloučeny společné body kružnice k a přímek a , b .

D ů k a z se opírá o zcela elementární vlastnost dvou dotýkajících se kružnic. Jejich společný bod T je totiž středem stejnolehlosti, v níž si obě kružnice odpovídají. Středů kružnic vedme rovnoběžné průměry různé od středné. Krajiní body jednoho průměru nechť jsou M , M' , druhého N , N' . Jestliže si ve stejnolehlosti odpovídají body M , N , pak T zřejmě leží na přímkách MN , $M'N'$ a na kružnicích o průměrech MN' , $M'N$. Jsou-li nyní k_1 , k_2 dvě kružnice, které řeší úlohu, a zvolíme-li průměry kolmé k přímkám a , b , pak můžeme položit $A \equiv M$. Je-li $B \equiv N$, pak T leží na přímce AB , je-li $B \equiv N'$, pak T leží na kružnici o průměru

AB. A to platí vždy, ať jsou k_1, k_2 jakékoliv dvě kružnice, které řeší úlohu. Obráceně se snadno ukáže, že každý bod přímky p a kružnice k , s výjimkou společných bodů kružnice k s přímkami a, b , je dotykovým bodem dvou kružnic, které řeší úlohu.

3. Jsou-li a, b různoběžné a mají-li body A, B stejnou vzdálenost od bodu $S \equiv a \cdot b$, pak hledané geometrické místo je složeno ze dvou kružnic $k_1 \equiv (S; SA)$ a $k_2 \equiv (S'; S'A)$. Přitom z kružnice k_1 jsou vyňaty její průsečíky s přímkami a, b . Bod S' je průsečík kolmic a', b' sestrojených v bodech A, B k přímkám a, b . Pro každý bod kružnice k_2 obě dotýkající se kružnice, které řeší úlohu, splývají s k_2 .

K d ů k a z u tvrzení o kružnici k_1 užitíme známé vlastnosti dvou dotýkajících se kružnic. Geometrické místo bodů, z nichž lze vést stejně veliké tečny ke dvěma dotýkajícím se kružnicím, je jejich společná tečna, z níž je vyňat dotykový bod. Protože předpokládáme $SA = SB$, musí S ležet na společné tečně každých dvou kružnic, které řeší úlohu. Přitom vzdálenost dotykového bodu od bodu S se rovná SA ; leží proto na k_1 . Obráceně lehko se přesvědčíme, že každý bod kružnice k_1 , s výjimkou jejích společných bodů s přímkami a, b , je dotykovým bodem kružnic, které řeší úlohu. Tvrzení o kružnici k_2 je zřejmé.

4. Jestliže konečně a, b jsou různoběžné a body A, B nemají stejnou vzdálenost od bodu $S \equiv a \cdot b$, pak hledané geometrické místo je složeno ze dvou kružnic k_1, k_2 , které procházejí body A, B a středy mají na osách souměrnosti přímk a, b . Z kružnic k_1, k_2 jsou vyňaty jejich průsečíky s přímkami a, b .

Nechť k_A, k_B jsou dvě vzájemně se dotýkající kružnice a necht' $k_A (k_B)$ se dotýká přímky $a (b)$ v bodě $A (B)$. Je-li jejich společný dotykový bod T , pak úhel ATB se vždy rovná právě jednomu z úhlů $\frac{\omega}{2}, 2R - \frac{\omega}{2}, R + \frac{\omega}{2}, R - \frac{\omega}{2}$, kde ω je úhel přímk a, b . Všechny body T leží tedy nutně na kružnicích, z nichž je možno spatřit úsečku AB pod úhlem $\frac{\omega}{2}$ a $R + \frac{\omega}{2}$, případně pod výplňkovými úhly.

Tyto kružnice musí nutně procházet body $A', A'' (B', B'')$, které leží na $b (a)$ a mají od S vzdálenost rovnou $SA (SB)$. Body A', A'' jsou dotykové body kružnic, které se dotýkají přímky a v bodě A a přímky b . Podobně B', B'' jsou dotykové body kružnic, které se dotýkají přímky b v bodě B a přímky a . Body A a A' a body A a A'' jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti přímk a, b , proto musí středy kružnic, na nichž leží dotykové body T , ležet na osách souměrnosti o_1, o_2 přímk a, b . Protože osa souměrnosti úsečky AB neprochází bodem S a je různoběžná s přímkami o_1, o_2 , existují právě dvě kružnice k_1, k_2 , na nichž leží body T . Snadno se přesvědčíme, že každý bod kružnic k_1, k_2 , s výjimkou jejich průsečíků s a, b , je bodem dotyku kružnic, které řeší úlohu.

Protože středové úhly v kružnicích k_1, k_2 , které přísluší společné jejich tětivě AB , jsou ω a $2R - \omega$, protínají se k_1 a k_2 pod pravým úhlem.

17. Baterie se skládá z $n = 5$ stejných galvanických článků seriově zapojených. Každý z článků má elektromotorickou sílu $E = 1,4 \text{ V}$ a vnitřní odpor $R_v = 0,3 \Omega$. Při jakém proudu bude užitečný výkon baterie roven $P = 8 \text{ W}$?

Václav Šindelář

Řešil Jiří Mída, XI b, JSS v Brandýse n. L.:

Svorkové napětí jednoho článku, jestliže obvodem teče proud I , je $U_1 = E - I \cdot R_v$. Články jsou zapojeny seriově, a proto je svorkové napětí baterie $U_n = n \cdot U_1 = n(E - IR_v)$. Intensita proudu je v celém obvodě I , a proto je užitečný výkon baterie

$$P = n(E - IR_v) I \quad (1)$$

Tohoto vztahu použijeme k určení intenzity I :

$$I^2 R_v - IE + \frac{P}{n} = 0.$$

Diskriminant této rovnice je $D = E^2 - 4R_v \frac{P}{n}$. Má-li rovnice (1) reálné

kořeny, a tedy úloha smysl, pak $D \geq 0$. Platí: $D = E^2 - 4R_v \frac{nU_1 I}{n} = E^2 - 4R_v I U_1 = E^2 - 4(E - U_1) U_1 = E^2 - 4EU_1 - (2U_1)^2 = (E - 2U_1)^2$. Vždy je $(E - 2U_1) \geq 0$, a proto je splněno $D \geq 0$.

Rovnice má kořeny:

$$I' = \frac{E + \sqrt{D}}{2R_v}, \quad I'' = \frac{E - \sqrt{D}}{2R_v},$$

kde $D = E^2 - 4R_v \frac{P}{n}$.

Podívejme se ještě jednou na rovnici (1). Jestliže jsou články neopotřebované, pak $P > 0$, $(E - IR_v) > 0$: n je přirozené číslo, a proto musí mít pak rovnice (1) pro I kladné kořeny a tudíž I' i I'' jsou řešení dané úlohy. Jestliže $E^2 = 4R_v \frac{P}{n}$, pak $I' = I''$.

$$\text{Numericky: } D = 1,4^2 [\text{V}^2] - 4 \cdot 0,3 [\Omega] \cdot \frac{8 [\text{W}]}{5} =$$

$$= 1,96 [\text{V}^2] - 1,2 \cdot \frac{8}{5} \left[\frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{A} \cdot \text{V} \right] = 0,04 [\text{V}^2],$$

$$I' = \frac{1,4 [\text{V}] - 0,2 [\text{V}]}{2 \cdot 0,3 [\Omega]} = \frac{1,6}{0,6} \left[\frac{\text{V}}{\Omega} \right] = \frac{8}{3} \text{ A} = 2\frac{2}{3} \text{ A},$$

$$I'' = \frac{1,4 [\text{V}] - 0,2 [\text{V}]}{2 \cdot 0,3 [\Omega]} - \frac{1,2}{0,6} \left[\frac{\text{V}}{\Omega} \right] = 2 \text{ A}.$$

Užitečný výkon baterie bude 8 W při proudu a) $2\frac{2}{3}$ A, b) 2 A; řešení je tedy dvojnásobné.

18. Máme vypočítat celkovou kapacitu dvou soustav kondenzátorů, nakreslených schematicky na str. 134. Kapacity čtyř kondenzátorů jsou C_1 , C_2 , C_3 a C_4 .
Václav Šindelář

Riešil Peter Preisler, X a, JŠŠ v Trenčine:

Pre kapacity kondenzátorov platia nasledovné vety:

1. Kapacita batérie paralelne spojených kondenzátorov sa rovná súčtu kapacít jednotlivých kondenzátorov: $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$.

2. Prevratená hodnota výslednej kapacity batérie kondenzátorov spojených seriove sa rovná súčtu prevrátenej hodnoty kapacít jednotlivých kondenzátorov:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

a) Počítame celkovú kapacitu prvej sústavy:

Podľa vety 2. platí pre obe vetve:

$$C_5 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{a} \quad C_6 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4};$$

pre C^* podľa vety 1. platí:

$$C^* = C_5 + C_6 = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2) \cdot (C_3 + C_4)}.$$

b) Teraz vypočítame kapacitu druhej sústavy:

Platí: $C_7 = C_1 + C_3$ a $C_8 = C_2 + C_4$.

Potom pre C podľa vety 2. vyplýva

$$C = \frac{C_7 \cdot C_8}{C_7 + C_8} = \frac{(C_1 + C_3) \cdot (C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Teraz skúmame, aký vzťah platí pre C a C^* . Položme $C \geq C^*$. Po dosadení

$$(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) \geq C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2) \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4);$$

$$(C_1 C_2 + C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_3 C_4) \cdot (C_1 C_3 + C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_2 C_4) \geq (C_1 C_2 C_3 + C_1 C_2 C_4 + C_1 C_3 C_4 + C_2 C_3 C_4) \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4).$$

Po jednotlivých úpravách obdržíme

$$C_1^2 C_4^2 + C_2^2 C_3^2 \geq 2 \cdot C_1 C_2 C_3 C_4,$$

z toho

$$(C_1 C_4 - C_2 C_3)^2 \geq 0.$$

Nakolko druhá mocnina reálneho čísla je nezáporne číslo, platí

$$(C_1 C_4 - C_2 C_3)^2 \geq 0$$

- a preto 1. ak $C_1C_4 = C_2C_3$, tj. $C_1 : C_2 = C_3 : C_4$, potom $C = C^*$,
 2. ak $C_1C_4 \neq C_2C_3$, potom $C > C^*$.

19. Určete nutnou a postačujúcu podmítku pro koeficienty rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

aby její dva kořeny byla čísla opačná (různá od nuly).

J. Holubář

Řešil Peter Preisler, X a, JSS v Trenčíně:

a) Podľa úlohy, koreňmi danej rovnice budú: $x_1, x_2 \neq 0, -x_2 \neq 0$. Vytvoríme súčin koreňových činiteľov, ktorý sa rovná nule.

$$(x - x_1)(x - x_2)(x + x_2) = 0, \text{ tj.}$$

$$(x - x_1)(x^2 - x_2^2) = 0.$$

Po úprave dostaneme

$$x^3 - x_1x^2 - x_2^2x + x_1x_2^2 = 0.$$

Porovnávaním koeficientov tejto rovnice s koeficientmi rovnice danej vypoynú vzťahy

$$a = -x_1, b = -x_2^2, c = x_1x_2^2 = (-x_1)(-x_2^2),$$

takže platí

$$ab = c, b \neq 0, \tag{1}$$

čo je podmienka nutná.

b) Ak z tejto podmienky dosadíme do danej rovnice, dostaneme

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0,$$

$$x^2(x + a) + b(x + a) = 0$$

a po úprave

$$(x + a)(x^2 + b) = 0.$$

Činitel $x^2 + b$ je rýdzo kvadratický a riešenia príslušnej rovnice $x^2 + b = 0$ sú pre $b \neq 0$ opačné čísla ($\neq 0$), čím sme dokázali, že nutná podmienka $c = ab$ pre $b \neq 0$ je aj podmienka postačujúca.

Ak je $b = 0$, potom z podmienky $ab = c$ je tiež $c = 0$. Daná rovnica má tvar

$$x^3 + ax^2 = 0, \text{ tj. } x^2(x + a) = 0$$

a teda dva korene rovné nule.

V ý s l e d o k : Ak v rovnici $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ platí $c = ab, b \neq 0$, má rovnica vždy za korene dve opačné čísla $x = \sqrt{-b}, x = -\sqrt{-b}$, a to len v tomto prípade. Tretí koreň je $x = -a$.

(Viz poznámku redakce k řešení úlohy 24.)

Z á v ě r : Nutnou a postačujúcu podmítkou pro koeficienty dané rovnice, aby její dva kořeny byla čísla opačná, různá od nuly, udává vztah (1).

Poznámka redakce: Většinu řešitelů nebylo bohužel jasné, co se rozumí podmínkou nutnou a postačující. Odvodili pro danou rovnici vztah (1) z předpokladu, že její dva kořeny jsou čísla opačná různá od nuly, tj. podmínku nutnou, a s tím se spokojili. Nedokázali však obráceně, že při platnosti vztahu (1) jsou dva kořeny dané rovnice opačná čísla různá od nuly, tj. podmínku postačující. Tím jejich řešení byla podstatně neúplná.

20. Dokažte, že paty výšek v trojúhelníku T o úhlech $4\alpha = 2\beta = \gamma$ jsou vrcholy trojúhelníka nepřímo podobného T a zjistěte poměr podobnosti obou trojúhelníků.

Josef Langr

Řešil Jaroslav Pech, XI a, JSS v Ústí n. Labem:

Budtež V_1, V_2, V_3 paty výšek v_1, v_2, v_3 . Z pravouhlých trojúhelníků AV_3C a AV_2B máme: $AV_3 = b \cdot \cos \alpha$, $AV_2 = c \cdot \cos \alpha$. Podle kosinové věty v trojúhelníku AV_2V_3 jest:

$$\overline{V_2V_3}^2 = \overline{AV_3}^2 + \overline{AV_2}^2 - 2 \cdot AV_3 \cdot AV_2 \cdot \cos \alpha = b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos^3 \alpha = \cos^2 \alpha (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) = a^2 \cos^2 \alpha, \text{ a tedy } V_2V_3 = a \cos \alpha.$$

Užijeme-li výsledků z článku Dr. J. Langra, RMF 1957 (Trojúhelník o úhlech $4\alpha = 2\beta = \gamma$), kde $\cos \alpha = \frac{b}{2a}$, $\cos \beta = \frac{c}{2b}$, $\cos \gamma = -\frac{a}{2c}$, máme $V_2V_3 = a \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$. Obdobně z trojúhelníka BV_1V_3 , kde $BV_1 = c \cos \beta$, $BV_3 = a \cos \beta$, máme:

$$\overline{V_1V_3}^2 = \overline{BV_3}^2 + \overline{BV_1}^2 - 2 \cdot BV_3 \cdot BV_1 \cdot \cos \beta = a^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \beta - 2ac \cos^3 \beta = \cos^2 \beta (a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta) = b^2 \cos^2 \beta, \text{ pročež } V_1V_3 = b \cdot \frac{c}{2b} = \frac{c}{2}$$

Z trojúhelníka CV_1V_2 , kde $CV_1 = b \cos \gamma$, $CV_2 = a \cos \gamma$, obdržíme $V_1V_2 = \frac{a}{2}$.

Vidíme, že patří trojúhelník $V_1V_2V_3$ je podoben původnímu a že poměr podobnosti je 1 : 2.

Poznámka autora: Trojúhelník o úhlech $4\alpha = 2\beta = \gamma$ (zvaný též heptální, ježto souvisí s pravidelným sedmiúhelníkem) je kromě rovnostranného jediný, jehož trojúhelník z pat výšek je mu podoben.

21. Jsou dány dvě různé přímky p, t a bod M neležící na žádné z nich. Sestrojte kulovou plochu, která prochází bodem M , dotýká se přímky t a střed má na přímce p .

Alois Urban

Řešil Jiří Mída, XI b, JSS v Brandýse n. Labem:

Nechť kulová plocha κ řeší úlohu. Potom řezem roviny $\pi \equiv (M, t)$ a kulové plochy κ je kružnice k o středu S_1 , který je pravouhlým průmětem středu S kulové plochy κ do roviny π . Bod S_1 leží na pravouhlém průmětu p_1 přímky p do roviny π . Není-li $p \perp \pi$, pak p_1 je přímka, v opačném případě bod. Kružnice k prochází bodem M a dotýká se přímky t .

Odtud plyne konstrukce středu S kulové plochy κ . V rovině π najdeme geometrické místo středů kružnic, které procházejí bodem M a dotýkají se přímky t . Protože M neleží na t , hledané geometrické místo je parabola o řídicí přímce t a ohnisku M . Každý společný bod sestrojené paraboly a průmětu p_1 přímky p je zřejmě průmět S_1 středu S kulové plochy, která řeší úlohu. Každý společný bod kolmice sestrojené v S_1 k rovině π s přímkou p je středem S hledané kulové plochy. Její poloměr se rovná SM .

Je-li p_1 bod a leží-li p_1 na parabole, pak úloha má nekonečně mnoho řešení. Úloze vyhovují všechny kulové plochy, jejichž střed S leží na přímce p . Neleží-li p_1 na parabole, úloha nemá řešení.

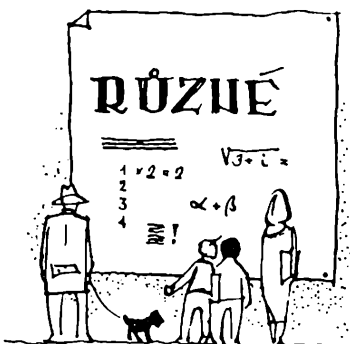
Je-li p_1 přímka, pak mohou nastat tyto případy: 1. přímka p_1 nemá s parabolou žádný společný bod, úloha nemá řešení, 2. přímka p_1 je tečnou paraboly nebo je rovnoběžná s její osou (to nastane v případě když $p \perp t$), úloha má právě jedno řešení, 3. přímka p_1 je sečnou paraboly, úloha má právě dvě řešení.

P o z n á m k a : Při řešení jsme mohli také užít roviny ρ proložené bodem M kolmo k přímce p . Hledaná kulová plocha musí procházet kružnicí $k \equiv (S'; S'M)$, kde $S' \equiv \rho \cdot p$, která leží v rovině ρ .

Jestliže t leží v ρ , pak úloha má řešení právě tehdy, když t je tečnou kružnice k . Úlohu řeší každá kulová plocha, která má střed na p a prochází bodem M .

Jestliže t neleží v ρ , ale je $t \parallel \rho$, najdeme tečnu t' kružnice k tak, aby $t' \parallel t$. Rovina souměrnosti přímek t, t' protíná p v bodě S , který je středem jediné kulové plochy, která v tomto případě řeší úlohu. Její poloměr je ovšem SM .

Je-li t různoběžná s rovinou ρ , úloha přechází v úlohu 5 z č. 1.



Různé

Matematici se sjeli na Slovensku

Ve dnech 15. až 20. září tr. se konala v Domově vědeckých pracovníků ve Smolenicích na Slovensku konference slovenských matematiků za účasti matematiků z českých zemí. Konference se zúčastnili akademikové Juraj Hronec, Vladimír Kořínek, Štefan Schwarz, zástupci ministerstva školství, povereníctva, četní učitelé ze škol středních i vysokých, i pracovníci z jiných vědeckých oborů.

Konference, která byla zároveň 1. sjezdem slovenských matematiků sdružených v JČMF, byla svolána proto, aby na široké základně byly prodiskutovány některé otázky týkající se vyučování matematice na školách, otázky týkající se rozvoje matematiky a technických věd, směřující k urychlení výstavby socialismu, ve smyslu požadavků XI. sjezdu KSČ.

Přítomní vyslechli řadu přednášek, v nichž byli informováni o problémech vyučování matematice na středních i vysokých školách, o politickovýchovné práci ve vyučování matematice, o polytechnizaci, pohledech na moderní matematiku z hlediska vědecké práce, vývoji algebry a geometrie, o pokrokových tradicích československé matematiky, o matematických problémech v technickém a přírodovědeckém výzkumu a vyslechli referáty zaměřené na metodiku určitých partií matematického učiva střední školy, vymezení základního učiva apod. Na všechny přednášky navazovala bohatá diskuse, v níž přednesli přítomní kritické poznámky k projednávaným problémům.

V tomto informativním článku není možno ani stručně se zabývat všemi otázkami, které přicházely v diskusi. Zmíním se jen o dvou, které by vás, mladí přátelé, mohly zajímat.

„O organizaci školství v ČSR“ hovořil ústř. insp. MŠK s. M. Jelínek. Z jeho projevu uvedu jen některá sdělení.

Prožíváme dnes období plné revolučních změn, které jsou událostmi světového významu, jejichž konce dosud nedohlédáme. Jsou to převratné události politické, ekonomické a technické, kulturní a ideologické. Sdělil, že školská reforma z r. 1953 nesplnila, co bylo od ní očekáváno, a naznačil změny v organizaci našeho školství, k nimž pravděpodobně dojde.

Nové devítiletky budou podávat základní vzdělání pro všechnu naši mládež. Jejich zřízením se zajistí též lepší rozmístování dorostu. Na tuto všeobecně vzdělávací školu budou navazovat tři typy škol výběrových: 1. vyšší všeobecně vzdělávací střední škola, 2. systém škol odborných, 3. odborná učiliště pro různá povolání. Tím se bude moci lépe vyhovět schopnostem žáků a věnovat větší pozornost mládeži odcházející do různých povolání.

Změní se obsah všeobecně vzdělávací výběrové školy a od základu se změní pojem všeobecného vzdělání. Dnes je zřejmé, že nestačí, aby se vzdělání humanitní rozšířilo o poznatky z věd přírodních a technických. Naše mládež musí ve škole získat nejen solidní znalosti z jednotlivých předmětů, ale musí být připravena i pro práci v jistých výrobních odvětvích. Nová škola musí překlenout rozpor mezi prací fyzickou a intelektuálním vzděláním. Žáci musí umět poznatky získané ve škole užívat i prakticky. Tato otázka zaměstnává pedagogy na celém světě. Náš stát chce také svým podílem přispět k řešení této velmi obtížné otázky. U nás pak k tomu přistupuje i požadavek vybudování socialistického státu v době co nejkratší. Škola musí tento pokrok urychlovat tím, že bude žáky záměrně připravovat na jejich budoucí poslání. Bude třeba nalézt rozumnou rovnováhu mezi teoretickým vzděláním a výrobní praxí.

Někteří pedagogové chtěli najít tuto rovnováhu v polytechnizaci učiva, v práci žáků v dílnách, na školních pozemcích apod. Toto řešení bylo však shledáno

nepostačujícím. Proto se od letošního školního roku na pokusných dvanáctiletkách zavádí výrobní praxe žáků v továrnách, v zemědělství, ve stavitelství, ve strojnictví apod., kterou si žáci zvolí podle svých schopností a zájmů. Absolvent dvanáctiletky dostane vedle maturitního vysvědčení i osvědčení o základní dělnické kvalifikaci pro některý výrobní obor. Očekává se, že se žáci lépe sžijí s dělnickou třídou, poznají a oblíbí si práci fyzickou, získají zkušenosti z určitého výrobního odvětví.

Poněvadž však výrobní praxi bude věnována celá třetina vyučovacích hodin (dva dny v týdnu), musí být látka na vyšší střední škole podstatně redukována. Také v matematice a v deskriptivní geometrii musí být některé části učiva vypuštěny, neboť počet hodin těchto předmětů bude také na tomto stupni značně snížen. Bude velmi nutné tyto nové návrhy pozorně vyzkoušet nejdříve na pokusných školách. Zároveň bude s navrženou reformou nutno řešit otázku přijímání posluchačů na vysoké školy.

V další části vás chci informovat o velmi slibném rozvoji matematiky na vysokých školách na Slovensku.

Na konferenci podávali pracovníci z vysokých škol slovenských zprávy o vědecké činnosti na poli matematiky. Z přednesených referátů je vidět veliký pokrok, který učinila matematická věda na Slovensku. Slovenské vysoké školy v Bratislavě, v Košicích a ve Zvolenu mají řadu pracovníků, kteří každým rokem obohacují matematickou literaturu hodnotnými příspěvky. Pozoruhodná je i spolupráce Ústavu pro aplikovanou matematiku v Bratislavě s nejrůznějšími pracovišti, inženýry, biology, lékaři atd. To plně ocenil na sjezdu senior slovenských matematiků, akademik Juraj Hronec, jehož slova uvádím v doslovném znění:

„Vážení přítomní, súdružky a súdruhovia! Po týchto referátoch som nútený pod vplyvom určitej hrdosti sa prihlásit ku slovu. Keď sa pozerám na minulosť, vidím, že ešte v r. 1935 pri oslave trnavskej univerzity som musel konštatovať, že slovenská univerzita v Bratislave stojí na tej istej úrovni, ako stála trnavská univerzita pred 250 rokmi. V tom čase mala naša univerzita len tie isté obory ako univerzita trnavská. O matematike a prírodných vedách nebola ani reč. Ešte v r. 1945 sme mali na slovenskej univerzite len jedného profesora matematiky a dvoch asistentov, z ktorých jeden bol terajší akademik Schwarz. Keď sa teraz pozerám na ohromný rozvoj, vidím, že z matematikov máme 6 univerzitných profesorov, 11 docentov a asi 90 vedeckých matematických pracovníkov. Aký to rozvoj od r. 1945! A za to môžeme ďakovať len ľudovo demokratickému zriadeniu, ktoré podporuje hmotne i morálne rozvoj matematiky aj prírodných vied na Slovensku.

V minulosti sme boli my Slováci odkázaní len na Prahu a na Brno. V tom čase som napísal ne jeden článok požadujúci, aby prírodné a technické vedy boli v dostatočnej miere fedrované aj na Slovensku, ale našiel som len hluché uši. Ani Slováci sami, ktorí stáli pri kolíske ČSR, nemali pre tieto veci porozumenie. Iba neskôr nastalo isté porozumenie, a to zo strany Čechov. Som veľmi povďačný profesorovi Petrovi a Sobotkovi z Karlovej univerzity v Prahe, ktorí sami vo veľkej miere podporovali Slovákov a chceli, aby i Slováci sa podielali na rozvoji matematických a technických vied. Vďačne spomínam i ďalšej pomoci. Keď sme mali po r. 1945 najväčšie ťažkosti, ochotne k nám prišiel pomáhať profesor Borůvka z Brna. Veľa ráz nedostal ani honorár za svoju prácu a doplácaval i na svoje cesty na

Slovensko. Bol to iste veľký idealizmus a láska k Slovákom a slovenskému národu. Zato zasluhuje najsrdečnejšiu našu vďaku.

Počuli ste, hoci nechcem to zdôrazňovať, koľko sa u nás na Slovensku publikovalo. Je to iste výsledok toho, že matematické vedy sú u nás silne podporované. Akademia a univerzita vydávajú svoje časopisy matematické, VŠP, vysoké školy technické v Košiciach a Zvolene vydávajú svoje Zborníky. Rozvoj a možnosť práce je ohromná. A my, Slováci, sme za tu podporu vďační, sme vďační aj za podporu, ktorú dostávame od bratov Čechov. Chcem, aby vzájomná podpora a spoločná práca bola tak intenzívna aj v budúcnosti.“

František Hradecký, Praha

Pracovní konference učitelů fyziky

Ve dnech 8. až 12. září 1958 konala se ve Fyzikálním ústavě Karlovy university v Praze Pracovní konference o vyučování fyzice na všeobecně vzdělávacích školách, které se účastnilo více než 150 učitelů fyziky a matematiky ze středních i vysokých škol.

Prof. Dr. L. Zchoval (KU Praha) a prof. Ing. Dr. J. B. Slavík (ČVUT Praha) referovali o významu fyziky pro všeobecné vzdělání a pro studium technických oborů. O některých problémech výchovy k vědeckému materialismu promluvil prof. Dr. A. Bělař (VPS Brno), o koordinaci fyziky s matematikou prof. Dr. J. Vanovič (VŠP Bratislava), a o problémech středoškolských učebnic prof. J. Fuka (VŠP Olomouc).

Další projednávané otázky byly: Jak plní všeobecně vzdělávací škola cíle vyučování fyziky (Dr. M. Špaček, VÚP Praha a J. Vachek, VŠP Praha), materiální vybudování výuky fyziky (Dr. J. Dibelka, KU Praha), odborná a metodická příprava učitele fyziky (V. Müller, KU Praha a Dr. F. Lehár, VŠP Praha). O literatuře z fyziky pro učitele a žáky referoval Dr. J. Linhart (VŠP Praha), dále referováno o školním filmu (Dr. M. Chytilová, VŠP Brno), o chystané Fyzikální olympiádě (E. Říman, ČVUT Praha), o vědeckém výzkumu v otázkách didaktiky fyziky (prof. Dr. E. Kašpar, VŠP Praha), o zkušenostech se soustavami jednotek ve vyučovací praxi (J. Tesař, JSS Praha), o postavení učitele fyziky (J. Konrád, JSS Boskovice), o nových aprobačních skupinách s fyzikou a j.

V závěru konference schválena byla resoluce, v níž shrnuty veškeré závěry a náměty konference. Žádá se zřízení stálé pedagogické komise (při Jednotě čs. matematiků a fysiků), jež by připravovala podklady pro výběr fyzikálního učiva a učebnic fyziky, které by odpovídaly potřebám nové socialistické generace. Konference dále doporučuje, aby na nižším stupni byla fyzika jen v 7., 8. a 9. ročníku (2, 3, 3 hodiny týdně), kdežto na vyšším stupni posunuta fyzika o rok s počtem hodin 0, 4, 4.

Rovněž v prvních ročnících škol průmyslových a hospodářských se žádá zvýšení na 4 vyučovací hodiny týdně.

Ke zvýšení úrovně vyučování se doporučuje, aby byl zaveden systém odborné inspekce, kterou mají provádět zkušení a kvalifikovaní odborníci z Krajského pedagogického ústavu.

Revisí osnov a učebnic matematiky má být zajištěno bezpečné osvojení základ-

ních praktických matematických poznatků a dovedností. Při přípravě učebnic fyziky budiž zachována zásada maximálně dvou autorů a zmenšení rozsahu učebnic. Je nutno zlepšit ilustrační stránku i ostatní grafickou úpravu učebnic fyziky.

Budiž provedena náprava ve výrobě fyzikálních pomůcek, zlepšení jejich kvality a snížení cen. Doporučuje se sjednání dohod s lidově demokratickými státy o rozdělení výroby podle určitých typů pomůcek, aby bylo možno vyrábět ve velkých seriích. Nutno zřídit též opravny pomůcek.

Pro zvýšení kvality vyučování fyzice a zajištění dobrého stavu sbírek je nutné, aby učitelé fyziky působili na téže škole delší dobu. V zájmu koordinace vyučování M a F se doporučuje, aby oběma předmětům učil pokud možno jeden učitel v téže třídě.

Fyzice přísluší v souboru učebních předmětů zvláště významný úkol, neboť fyzika je věda, na které je vybudována celá řada důležitých průmyslových odvětví a mimo to výsledků fyzikálních objevů využívají i ostatní složky našeho hospodářského a kulturního života. Na tento důležitý význam fyziky vezme zřetel i nová nastávající etapa v rozvoji našeho školství.

Evžen Říman, Praha

Oldřich Jeništa, Praha:

Matematika a deskriptivní geometrie v zrcadle nových pravidel českého pravopisu

(Dokončení)

Mnohá slova v matematice i deskriptivní geometrii se píší se zdvojenou souhláskou, i když v hovorovém projevu zdvojeně nevyslovujeme. Jsou to např. slova: *rovnostranný*, *čtyřhranný*, *rovnoramenný*, *stejnoujmenný*, *desetinný*. Toto psaní tkví v mluvnickém složení slov (např. podstatné jméno *strana* a koncovka přídavných jmen *-ný*) a proto je pravidla dále ponechávají.

Zajímavá jsou slova *měřičský* a *měřický*, *měřičství* a *měřictví*. Od slova *měřič* dostaneme příponami *-ský* a *-ství* slova *měřičský* a *měřičství*, která vyznačují činnost *měřičovu*, tj. měření. Takovou činnost však již dnes nespojujeme se smyslem *geometrický* a *geometrie* a proto pro tyto pojmy užíváme nyní slov *měřický* a *měřictví*. Na našich osmiletkách a jedenáctiletkách žáci se tedy neučí *měřičství*, neškolí se výhradně na *měřiče*, ale učí se *měřictví*, tj. počítají obvody obrazců, jejich obsahy, úhly atd. Podobně píšeme např. *zeměměřický inženýr*.

Zkratky se nyní píší dohromady a klade se za ně tečka. Píšeme tedy atd., aj., ap., apod., např., tj., . . . Za mezinárodní zkratky (vlastně značky) různých jednotek se obvykle tečka nedělá, např. cm, kg, HP apod. Mezi celky a desetinná místa desetinného zlomku klademe čárku, např. 3,141 59 . . . , ale mezi časový údaj hodin a minut děláme podle pravidel tečku, např. 7.30 hodin. Jinak tečka za číslicí udává, že jde o řadovou číslovku.

Složené číslovkové výrazy píšeme odděleně, např. dva tisíce tři sta sedmdesát pět, ale jde-li o čísla od 21 do 99 (kromě plných desítek), je vedle psaní např. sedmdesát devět (psáno zvláště) přípustné i psaní devětasedmdesát (psáno dohromady). Myslím však, že matematici budou vždy raději užívat prvního (logic-

kého) způsobu psaní a budou se snažit omezovat užívání tvaru druhého. Další způsob vyjadřování číslovek již v dnešní češtině nemáme, takže mnohý čtenář nebude již asi znát třeba číslovku čtyřmécítma (tj. čtyři mezi desítkami: $10 + 4 + 10$, tedy 24).

Jména řeckých písmen, jichž je v matematice i deskriptivní geometrii hodně užíváno, jsou nesklonná. Neříkáme tedy, že rozpůlíme alfu nebo betu, nýbrž budeme půlit vždy jen alfa nebo beta.

Pravopisně i tvaroslovně je velmi tvárná číslovka čtyři a její odvozeniny. Můžeme např. psát *čtverhranný*, *čtyřhranný* i *čtyrhranný*, můžeme říkat *čtvereční* i *čtverečný* metr, *čtyřicetina* i *čtyřicítina*, *čtyřstý* i *čtyrstý*, *čtyřúhelník* i *čtyrúhelník*, *čtyřsetletý*, *čtyrsetletý* i *čtyřistaletý*, *čtyřka* i *čtyrka*. Jen se různí svými významy slova *čtvrt* (čtvrtina) a *čtvrť* (část města).

Avšak i u jiných číslovek je někdy možný ne jeden tvar. Tak u deset, dvacet, . . . píšeme *deseti* i *desíti*, *desetičlenný* i *desítičlenný*, *desetina* i *desítina*, *dvacetina*, *dvacítina* atd. Od číslovky dvě odvodíme *dvojstranný* i *dvoustranný*, *dvojramenný* i *dvouramenný*, *dvojčlen* i *dvoučlen*, *dvěstěletý* i *dvouseletý*.

A na konec něco o čtení úměr. Předložka *k* má před některými skupinami souhlásek tvar *ke* a před retnicemi *p* a *b* tvar *ku*. Podle toho by se měla např. úměra $a : b = c : d$ čísti *a* má se *ku* *b* jako se má *c* *k* *d*, ale vždy jsme říkali jen *a* má se *ku* *b* jako se má *c* *ku* *d*, i když to odporovalo mluvnickým předpisům. Nová pravidla českého pravopisu tento faktický stav petrifikují a proto v úměře budeme říkat *ku* *a*, *ku* *m*, *ku* *t* atd.

Ještě více míst v pravidlech bychom mohli konfrontovat s matematikou a deskriptivní geometrií, ale to už by spíše patřilo do některého časopisu filologického nežli do našich Rozhledů matematicko-fyzikálních, od čísla 7 však Rozhledů matematicko-fyzikálních, jak jste se snad všimli.



Recenze

Rozkladný transformátor ve školní praxi

Tyto metodické pokyny napsal prof. dr. Josef Fuka a jsou určeny učitelům fyziky na všeobecně vzdělávacích a pedagogických školách. Příručka obsahuje návody k pokusům s rozkladným transformátorem a ukazuje na rozsáhlé možnosti využití této pomůcky při vyučování. Knížka je vhodná také pro žáky posledního ročníku jedenáctiletých škol, kteří se chtějí věnovat učitelskému povolání.

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství jako druhé vydání, str. 138, 4 str. obrázkových příloh, cena Kčs 5,80. Je k dostání ve „Službě škole“, n. p.

M. M.

Přehled elementární matematiky

Ve Státním nakladatelství technické literatury vychází právě druhé revidované vydání publikace nazvané *Přehled elementární matematiky*. O této knize, kterou napsali K. Hruša, E. Kraemer, J. Sedláček, J. Vyšín a R. Ze-linka, přinesl náš časopis podrobnější zprávu před krátkým časem při příležitosti jejího prvního vydání.

Příručka je určena studentům a absolventům středních škol k opakování, doplnění a ucelení matematických vědomostí. Kromě vlastních matematických poznatků, obsažených v definicích a poučkách, je zde téměř 500 řešených příkladů a řada konstrukcí. Více než 500 obrázků usnadňuje čtení textu. J. S.

Matematika pro kursy z učiva osmileté střední školy

Příručka *Matematika pro kursy z učiva osmileté střední školy*, kterou napsali Miloš Jelínek a Vlastimil Macháček, je určena dospělým čtenářům, kteří jsou zpravidla již delší dobu mimo školu a kteří se rozhodli, že si při svém pravidelném zaměstnání doplní všeobecné vzdělání. Výkladový text této učebnice je co nejvíce omezen a hlavní důraz je kladen na řešení příkladů. Kniha je napsána jasnou a srozumitelnou formou, takže se hodí pro samouky, neboť čtenář ji může studovat bez pomoci učitele. Je vhodná pro opakování i pro slabší žáky jedenáctiletých a odborných škol.

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze, str. 238, cena Kčs 6,60. Dostanete ji v n. p. „Služba škole“, Praha II, Ostrovní 30. M. M.



Redakce hovoří se čtenáři

* *Redakční rada děkuje za vzornou spolupráci svému odcházejícímu členu s. Jaroslavu Vachkovi.*

* *Upozorňujeme čtenáře, aby nečekali s předplatným až vyjde opět 1. číslo Rozhledů (tj. v lednu 1959); mohlo by se totiž stát, že vzhledem k omezenému nákladu nebude jim již možno vyhovět. Nejlépe je provést roční předplatné počínaje zářijovým 7. číslem.*

* *Poznámka uveřejněná na str. 336 v č. 7 k článku J. Kotyka je bezpředmět-ná. K nedorozumění autorů došlo jazykovou úpravou onoho článku.*



Matematika

František Hradecký, Praha:

Konstrukce trojúhelníků, mezi jejichž určovacími prvky jsou středy a poloměry kružnic opsaných a vepsaných

A. Úvod

Při konstrukci budu užívat některých vět, které uvedu předem.

Věta 1a: Osa vnitřního úhlu trojúhelníka o různých stranách se protíná s osou protější strany v bodě, který leží na kružnici opsané danému trojúhelníku. Vzdálenost tohoto průsečíku od středu vepsané kružnice se rovná jeho vzdálenosti od krajních bodů uvažované strany.

První část věty je důsledkem známé věty o vzájemném vztahu mezi obvodovým úhlem v kružnici a k němu příslušným úhlem středovým. Ježto je $\sphericalangle BAH = \sphericalangle HAC$, jsou shodné příslušné středové úhly a také k nim příslušné oblouky a tětivy, tj. $BH = HC$ (obr. 1).

Označíme-li α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku při vrcholech A, B, C , je $\sphericalangle CBO = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle BCO = \frac{\gamma}{2}$ a $\sphericalangle BOC = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}$. Dále platí $\sphericalangle BHC = \beta + \gamma$, neboť $\sphericalangle BHA = \sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ABC$ (podle věty o obvodových úhlech v kružnici nad týmž obloukem). Nekonvexní (tj. větší než 180°) úhel BHC má velikost $360^\circ - (\beta + \gamma)$. Je tedy $\sphericalangle BOC$ roven polovině nekonvexního úhlu BHC . Z toho plyne, že body B, O, C leží na kružnici opsané kolem bodu H a platí $HO = HB = HC$.

Obráceně platí:

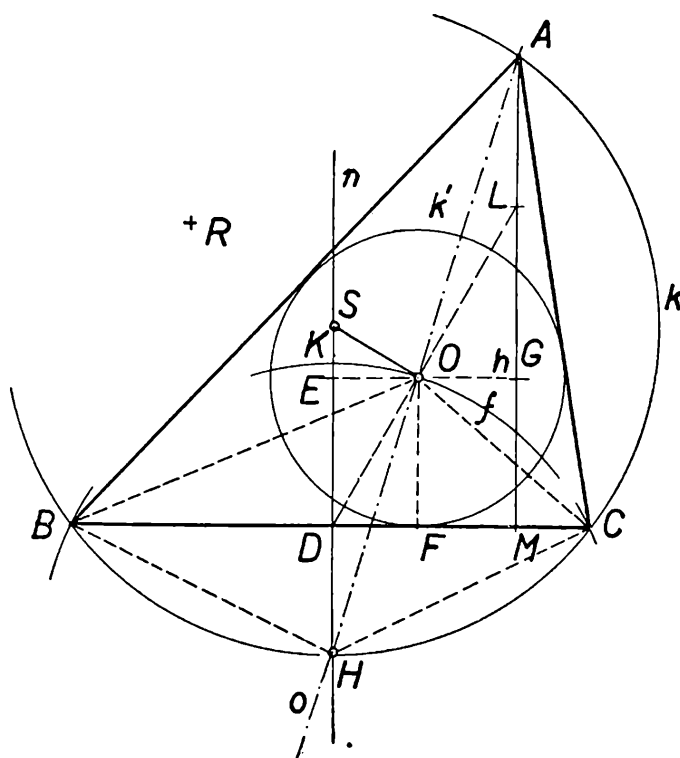
Věta 1b: Protíná-li osa strany BC trojúhelníka přímku procházející protějším vrcholem v bodě, který leží na kružnici opsané danému trojúhelníku, je tato přímka osou protějšího úhlu. Naneseme-li na polopřímku HA úsečku $HB = HC$, dostaneme střed kružnice vepsané danému trojúhelníku.

Důkaz provedeme podobně jako důkaz věty 1a s tím rozdílem, že předpoklady, z nichž vycházíme, jsou obsaženy v závěru věty 1a. Přenechávám jej čtenáři.

P o z n á m k a : Je-li trojúhelník rovnoramenný (rovnostanný), splývá jedna osa strany s osou protějšího úhlu (všechny osy stran jsou zároveň osami protějších úhlů). I v těchto případech platí druhá část věty 1a, resp. 1b, tj. platí $HO = HB = HC$, kde H je průsečík osy strany a osy protějšího úhlu s kružnicí, která je danému trojúhelníku opsána.

Věta 2a: Označíme-li r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC , ρ poloměr kružnice vepsané a m vzdálenost středů těchto kružnic, platí vztah

$$m^2 = r(r - 2\rho).$$



Obr. 1

Označme podle obr. 1 S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC , velikosti úseček $DS = h$, $BC = a$, $DE = FO = \rho$.

Z trojúhelníku SEO plyne podle Pythagorovy věty

$$\overline{EO}^2 = \overline{SO}^2 - \overline{SE}^2, \text{ tj. } \overline{EO}^2 = m^2 - (h - \rho)^2. \quad (1)$$

Z trojúhelníku HEO plyne

$$\overline{EO}^2 = \overline{HO}^2 - \overline{HE}^2.$$

Podle věty 1a je $HO = HB$; $\overline{HB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2 = \frac{a^2}{4} + (r - h)^2$ a $HE = r - h + \rho$.

$$\overline{EO}^2 = \frac{a^2}{4} + (r - h)^2 - (r - h + \rho)^2. \quad (2)$$

Z (1) a (2) dostaneme

$$m^2 - (h - \rho)^2 = \frac{a^2}{4} + (r - h)^2 - (r - h + \rho)^2.$$

Po jednoduché úpravě a vzhledem k tomu, že $h^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$ dostaneme

$$m^2 = r(r - 2\rho). \quad (3)$$

Poněvadž je $m \geq 0$, musí být $r \geq 2\rho$, aby vztah (3) měl smysl.

P o z n á m k a : Je-li $m = 0$, $r > 2\rho$, je trojúhelník ABC rovnoramenný; je-li $m = 0$, $r = 2\rho$, je rovnostranný.

Vztah (3) vyjadřuje podmínku nutnou, ale i postačující, jak plyne z věty 2b.

Věta 2b: Platí-li mezi čísly r , ρ , m vztah (3), je možno sestavit trojúhelník (a to nekonečně mnoha způsoby), pro který je r poloměr kružnice opsané, ρ poloměr kružnice vepsané a m délka středné těchto kružnic.

Narýsujeme kružnici $k \equiv (S, r)$ a kružnici $g \equiv (S, m)$, na které zvolíme bod O , kolem něhož opíšeme kružnici $k' \equiv (O, \rho)$. Na kružnici k zvolíme libovolný bod A , jím vedeme přímkou AO a určíme její průsečík H s kružnicí k . Z bodu O sestrojíme kolmici OE na SH a učiníme $ED = \rho$. Bodem D vedeme stranu $BC \perp \perp SH$ trojúhelníka ABC , který je do kružnice k vepsán. Je-li splněn vztah (3), dokážeme, že bod O je středem kružnice vepsané do trojúhelníka ABC a její poloměr je ρ .

Z trojúhelníku SOE ($SD = h$, $SE = h - \rho$, $EO = x$) plyne

$$\overline{EO}^2 = \overline{SO}^2 - \overline{SE}^2, \text{ tj. } x^2 = r(r - 2\rho) - (h - \rho)^2; \overline{SO}^2 = r(r - 2\rho) \text{ podle (3),}$$

z trojúhelníku HEO , kde $EH = r - h + \rho$ plyne

$$\overline{HO}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{EO}^2 = [(r - (h - \rho))]^2 + x^2 = r^2 - 2r(h - \rho) + (h - \rho)^2 + + r(r - 2\rho) - (h - \rho)^2 = 2r^2 - 2rh = 2r(r - h) = \overline{HB}^2 \text{ (věta Eukleidova).}$$

Leží tedy bod O s body B, C na kružnici o středu H .

Dále platí $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AHC = \sphericalangle OHC = 2 \cdot \sphericalangle OBC$; je tedy

$$\sphericalangle OBC = \frac{\beta}{2}.$$

Podobně $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BHA = \sphericalangle BHO = 2 \cdot \sphericalangle OCB$ a $\sphericalangle OCB = \frac{\gamma}{2}$.

Bod O je průsečíkem os úhlů $\sphericalangle B$ a $\sphericalangle C$ a tudíž středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC a její poloměr je ρ .

Poněvadž jsme bod A zvolili na kružnici k zcela libovolně, je zřejmé, že existuje nekonečně mnoho trojúhelníků, které jsou kružnici k' opsány a které jsou zároveň vepsány do kružnice k .

Je-li splněna rovnost (3), pak existuje nekonečně mnoho trojúhelníků, které mají právě uvedenou vlastnost.

Poznámka: Tuto vlastnost první našel francouzský matematik Poncelet, po němž se takové trojúhelníky nazývají Ponceletovy trojúhelníky.

Věta 3a: Příímka, která spojuje střed strany trojúhelníka se středem kružnice vepsané, protíná výšku, jdoucí protějším vrcholem v bodě, který má od tohoto vrcholu vzdálenost rovnou poloměru vepsané kružnice.

Označíme-li poloviční obvod trojúhelníka ABC $s = \frac{a + b + c}{2}$, pak je známo, že dotykové body kružnice vepsané mají od vrcholů A, B, C vzdálenosti $s - a, s - b, s - c$ a obsah trojúhelníku je $P = \rho \cdot s$, kde ρ je poloměr vepsané kružnice.

Nejdříve určíme velikosti úseček DF, DM a ML (viz obr. 1)

$$DF = BF - BD = s - b - \frac{a}{2} = \frac{c - b}{2}. \quad (4)$$

Označíme-li velikost úsečky $MC = y$, určíme z rovnosti odvěsen MA v trojúhelnících MAC a MAB vztah

$$b^2 - y^2 = c^2 - (a - y)^2$$

a odtud

$$y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

$$DM = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}. \quad (4')$$

Velikost úsečky ML určíme ze stejnohlých trojúhelníků DFO a DML . Platí

$$ML : DM = FO : DF$$

Dosadíme-li sem $FO = \rho$ a z rovností (4) a (4'), dostaneme po úpravě

$$ML = \rho \cdot \frac{b + c}{a} = \rho \cdot \frac{2s - a}{a}. \quad (5)$$

Označíme-li v_a velikost výšky AM , je

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{2\rho \cdot s}{a}. \quad (6)$$

Užitím rovností (5) a (6) určíme

$$MA - ML = \frac{2 \cdot \rho \cdot s}{a} - \rho \cdot \frac{2s - a}{a} = \rho$$

Tím je věta dokázána.

Věta 3b: Přímka spojující střed strany trojúhelníka a bod na výšce jdoucí protějším vrcholem, jenž má od tohoto vrcholu vzdálenost ρ (a leží mezi patou výšky a vrcholem), prochází středem kružnice vepsané.

Důkaz je snadný a přenechávám jej čtenáři.

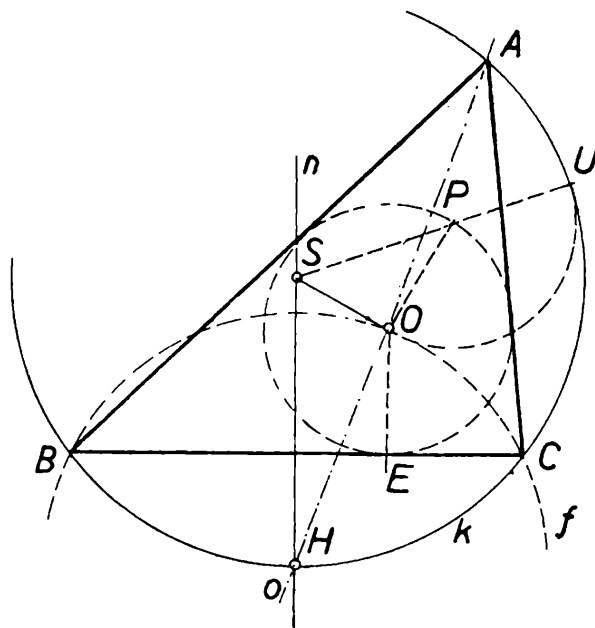
Další vztahy. Ze stejnoolehých trojúhelníků HDO a ALO plyne (obr. 1)

$$DH : AL = OE : OG = DF : FM$$

$$DH = \frac{AL \cdot DF}{FM}$$

Dosadíme-li sem $FM = DM - DF = \frac{c^2 - b^2}{2a} - \frac{c - b}{2} = \frac{(c - b)(s - a)}{a}$, je

$$DH = \frac{\rho \cdot \frac{c - b}{2}}{\frac{c - b}{a}(s - a)} = \frac{\rho \cdot a}{2 \cdot (s - a)}. \quad (7)$$



Obr. 2

B. Úlohy polohové

1. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby střed kružnice opsané byl v bodě S , střed kružnice vepsané v bodě O a strana ležela na přímce p . Body S, O leží v téže poloovině vyřezané přímkou p (obr. 2).

Řešení: a) Vzdálenost bodu O od přímky p je ρ , vzdálenost $SO = m$. Podle (3) platí $m^2 = r^2 - 2r\rho$. Řešíme-li tuto rovnici, pro neznámou r dostaneme $r = \rho + \sqrt{\rho^2 + m^2}$; kořen se znaménkem $-$ nevyhovuje, neboť je $r > 0$.

Je proto

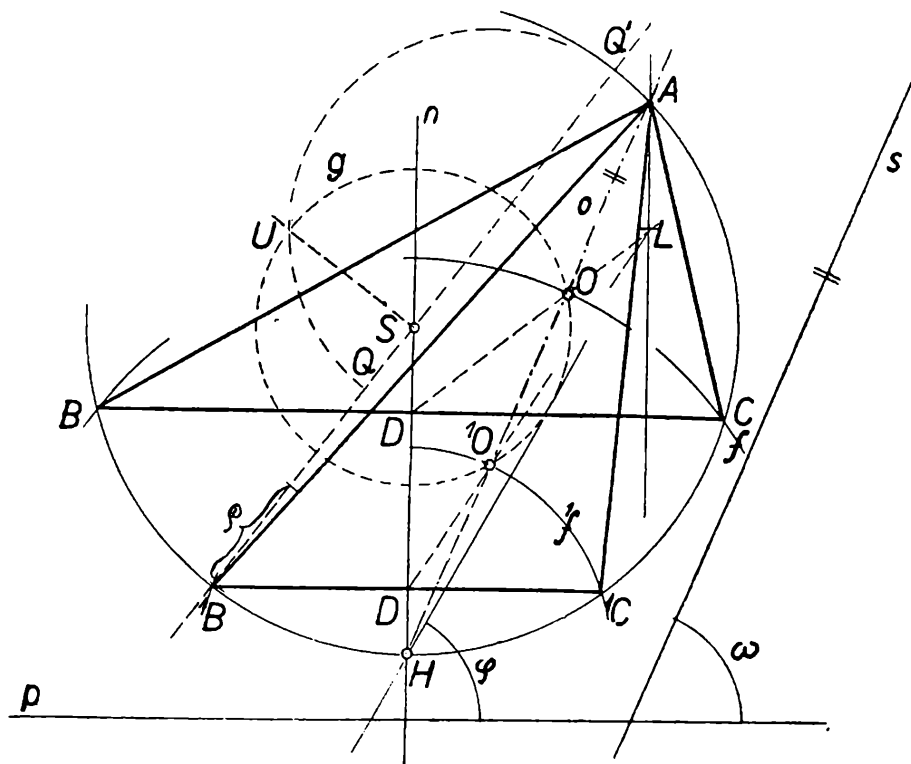
$$r = \rho + \sqrt{\rho^2 + m^2}. \quad (8)$$

Na základě (8) můžeme sestrojít úsečku, jejíž velikost je r .
Známe-li poloměr, je další postup zřejmý.

b) Konstrukce: Sestrojíme $OP \perp SO$, $PO = \rho$ a na prodloužení úsečky za bod P nanese $PU = PO = \rho$, $SU = r$. Kružnice $k \equiv (S, r)$ vytíná na přímce vrcholy B, C . Přímka HO protíná kružnici k ve vrcholu A .

c) Poněvadž čísla r, ρ a m splňují vztah (3) a trojúhelník ABC je kružnici vepsán a přímka HA prochází bodem O , který leží na kružnici $f \equiv (H, HB)$, je bod O středem kružnice vepsané podle věty 1b.

d) Pokud je splněna podmínka $r \geq 2\rho$, kde $\rho = OE$ a pokud jsou splněny předpoklady uvedené v textu úlohy, má úloha vždy jediné řešení.



Obr. 3

2. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány středy S, O kružnice opsané a vepsané a vrchol A . ($S \neq O$) (obr. 2).

Řešení:¹⁾ Sestrojíme kružnici $k \equiv (S, r)$, $r = SA$, a na ní určíme bod $H \equiv OA \cdot k$. Pro tento bod podle věty 1a platí $HO = HB = HC$. Kružnice $f \equiv (H, HO)$ protíná kružnici k ve vrcholech B a C .

Úloha má vždy jediné řešení.

3. Sestrojte trojúhelník ABC , jehož strana $BC \parallel p$ a osa o úhlu $\sphericalangle A$ je $o \parallel s$. Je dána poloha kružnice $k \equiv (S, r)$

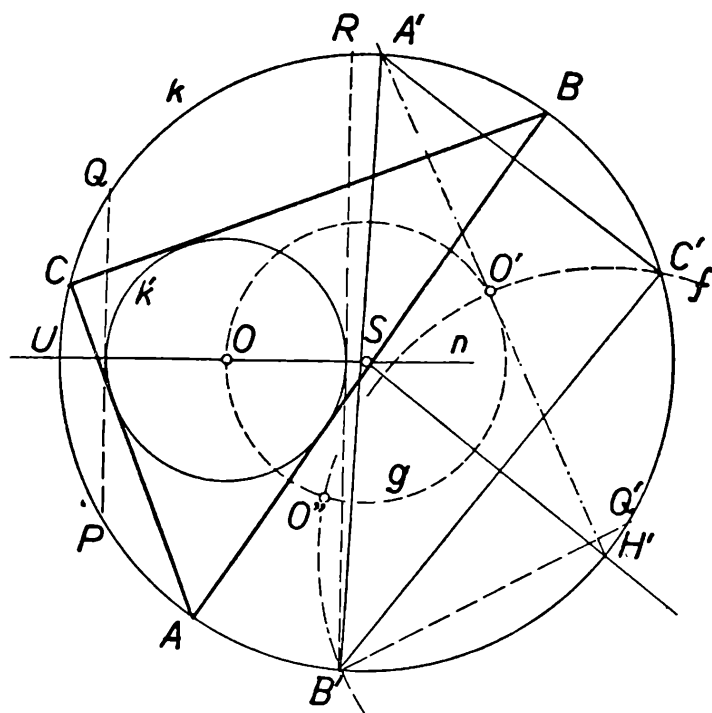
¹⁾ Pro zestručnění nebudu v některých dalších úlohách uvádět všechny čtyři fáze řešení, tj. rozbor, sestavení, důkaz a diskusi a omezím se jen na vysvětlení konstrukce, případně uvedu diskusi řešení.

a přímek p a s a poloměr ρ vepsané kružnice trojúhelníka ABC .

Řešení: Užitím vztahu (3) sestrojíme poloměr kružnice $g \equiv (S, m)$ (obr. 3). Pak určíme na kružnici $k \equiv (S, r)$ bod H tak, aby $SH \perp p$. Bodem H vedeme pak přímku $o \parallel s$ a určíme její průsečíky $O, {}^1O$ (pokud existují) s kružnicí g a průsečík A s kružnicí $k \equiv (S, r)$. Tím převedeme tuto úlohu na úlohu předcházející.

Aby úloha měla řešení musí být $r \geq 2\rho$. Další podmínkou řešitelnosti je, aby přímka procházející bodem H měla s kružnicí g aspoň jeden bod společný. Tato podmínka bude splněna, jestliže pro velikost úhlu ω směru s a p platí

$$\varphi \leq \omega \leq 180^\circ - \varphi,$$



Obr. 4

kde φ je úhel přímky p a tečny vedené z bodu H ke kružnici g . Úloha má pak buď čtyři nebo dvě řešení, podle toho, zda přímka o má s kružnicí dva nebo jeden bod společný. V obr. 3 jsou zobrazena jen dvě řešení; další dvě řešení by byly trojúhelníky, které jsou se zobrazenými trojúhelníky středově souměrné podle středu S . Došli bychom k nim, kdybychom vyšli z bodu 1H , který je protilehlým bodem k bodu H v kružnici k . V obr. 3 není tento bod zakreslen.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a kružnice $k' \equiv (O, \rho)$; k' leží uvnitř kružnice k a $r \geq 2\rho$. Do kružnice k vepište trojúhelník ABC tak, aby jeho strany se dotýkaly kružnice k' a strana BC měla danou velikost a (obr. 4).

Řešení: a) Ze vztahu (3) plyne, že středy všech kružnic vepsaných trojúhelníkům, jichž vrcholy leží na kružnici $k \equiv (S, r)$, leží na kružnici $g \equiv (S, SO)$. Narýsujeme-li libovolný trojúhelník o straně $B'C' = a$, který je vepsán do kružnice k a má poloměr vepsané kružnice ρ , je tento trojúhelník $A'B'C'$ shodný s hledaným trojúhelníkem, není však opsán kružnicí k' . Jeho otočením kolem

středu S dosáhneme, aby kružnice $k' \equiv (O, \rho)$ se dotýkala všech jeho stran.

b) V kružnici k umístíme libovolně tětivu $B'C' = a$. Na kružnici k určíme na menším oblouku $B'C'$ bod H tak, aby $SH' \perp B'C'$. Kružnice $f \equiv (H', H'B')$ protne kružnici g v bodech O' , resp. O'' (v obr. 4 je dolní konstrukce provedena jen pro bod O') a přímka $H'O'$ protne kružnici k v bodě A . Otočením trojúhelníku $A'B'C'$ o úhel $O'SO$ v kladném smyslu dostaneme hledaný trojúhelník ABC .

c) Pro trojúhelník ABC jsou splněny předpoklady věty 2b a mimo to podle konstrukce je $AB = a$, vyhovuje tudíž všem zadaným podmínkám.

Řešitelnost úlohy závisí na velikosti úsečky a . Určíme, v kterých mezích lze velikost této úsečky volit.

d) Sestrojme tečny kružnice k' , jež jsou kolmé k přímce SO . Kružnice k vytíná na nich tětivy PQ a $B'R$. Platí-li pro velikost úsečky a vztah $PQ \leq a \leq B'R$, má úloha dvě nebo jediné řešení.

Druhé řešení v obr. 4 bychom dostali, kdybychom k trojúhelníku ABC sestrojili souměrně položený trojúhelník podle osy $n = SO$.

Další úlohy přenechávám čtenáři:

1. Sestrojte trojúhelník, je-li dán střed S kružnice opsané, přímka p , na níž leží strana BC , poloměr ρ kružnice vepsané a délka středné obou kružnic $SO = m$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán vrchol A , střed S kružnice opsané, poloměr kružnice vepsané a a) strana BC má velikost a , b) úhel BAC má velikost α .

3. Jsou dány kružnice $k \equiv (S, r)$ a $k' \equiv (O, \rho)$, $S \neq O$, k' leží uvnitř k . Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný kružnici k a opsaný kružnici k' , aby úhel BAC byl 60° .

4. Je dána svou polohou strana trojúhelníka BC a mimo ní bod O . Jak je třeba volit polohu tohoto bodu, aby byl středem kružnice k' vepsané trojúhelníku ABC . Narýsujte trojúhelník ABC , aniž byste rýsovali kružnici k' a tečny z bodů B, C k této kružnici.

C. Úlohy nepolohové

1. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno $a, r, \rho; r \geq 2\rho$. (Řešení sledujte na obr. 1.)

a) Označme H krajní bod průměru kružnice $k \equiv (S, r)$, který je kolmý k BC a leží v opačné polorovině k polorovině BCS . Podle věty 1a je $HO = HB = HC$, O je průsečíkem kružnice $f \equiv (H, HB)$ a přímky HA . Také je $FO = DE = \rho$. Na základě těchto vztahů provedeme konstrukci takto:

b) V polorovině BCR sestrojíme bod S tak, aby $BS = CS = r$ a kolem bodu S opišeme kružnici k . Na ní určíme bod H , aby $SH \perp BC$ a sestrojíme kružnici $f \equiv (H, HB)$. Učiníme $DE = \rho$ a bodem E vedeme rovnoběžku s BC . Určíme její průsečíky O resp. 1O (pokud existují) s kružnicí f (v obr. je zakresleno jen jedno řešení). Přímka HO protne kružnici k v bodě A .

c) Bod S je podle konstrukce středem kružnice opsané. Bod O leží na ose úhlu BAC a je $(HO = HB)$ podle věty 1b středem kružnice vepsané. Sestrojený trojúhelník splňuje všechny dané požadavky.

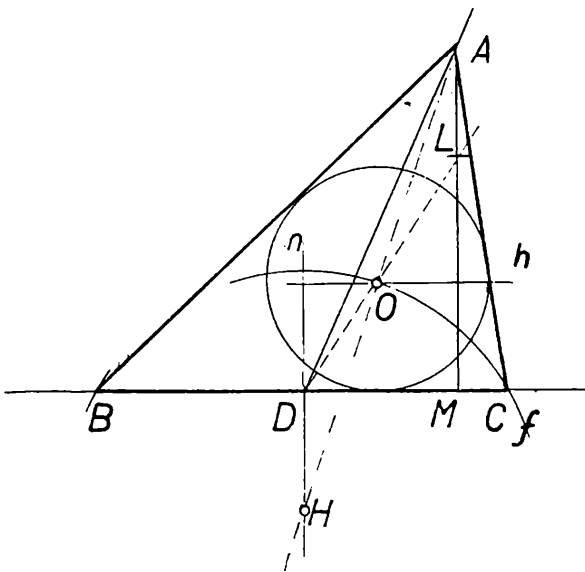
d) Označme K průsečík kružnice f s polopřímku HS . Pokud je vedle v textu

uvedené podmínky $r \geq 2\rho$ splněna podmínka $DK > \rho$, má úloha dvě a v případě $DK = \rho$ jediné řešení.

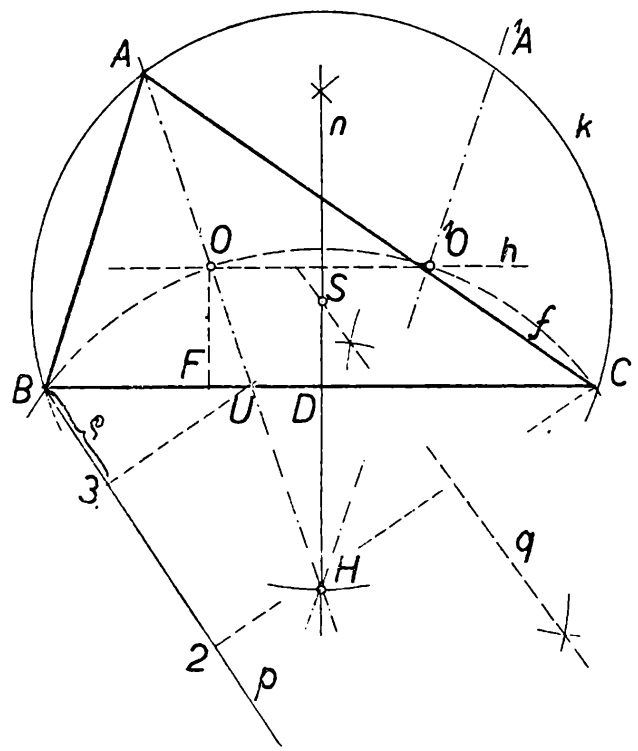
2. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $v_a, t_a (t_a > v_a), \rho$.

Řešení: Nejprve sestrojíme pravouhlý trojúhelník DMA (obr. 5) ($MA = v_a, DA = t_a$) a na polopřímce AM nanese úsečku $AL = \rho$. Přímka LD prochází podle věty 3b středem kružnice vepsané. Vedeme-li v polorovině DMA přímku $h \parallel DM$ ve vzdálenosti ρ , je její průsečík O s přímkou DL středem vepsané kružnice. Přímka AO protíná kolmici n sestavenou v bodě D k přímce DM v bodě H . Kružnice $f \equiv (H, HO)$ protne přímku DM ve vrcholech B a C .

Pokud je splněna podmínka v textu, má úloha vždy jediné řešení.



Obr. 5



Obr. 6

3. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $b + c, a, \rho; b + c > a$.

Řešení: Užitím vztahu (7) sestrojíme úsečku $DH = d = \frac{\rho \cdot a}{b + c - a}$ a

sestrojíme (obr. 6) bod H tak, aby $DH \perp BC$ a $BD = DC, DH = d$. Na kružnici $f \equiv (H, HB)$ určíme bod O tak, aby $OF = \rho$. Přímka $h \parallel BC$ vedená ve vzdálenosti ρ vytíná na kružnici f body O , resp. 1O . V obr. 6 je provedeno jen řešení pro bod O . Osa úsečky HC protíná přímku n v bodě S , který je středem kružnice opsané. Průsečík přímky HO s kružnicí $k \equiv (S, r)$ je zbývající vrchol trojúhelníka.

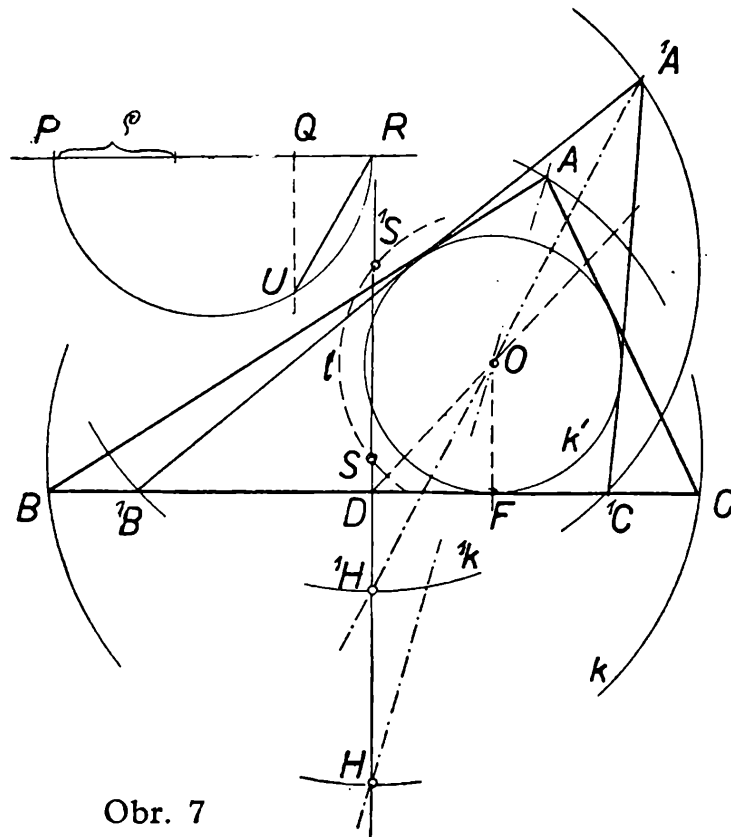
Řešitelnost úlohy závisí na vzájemné poloze přímky $h \parallel BC$ a kružnice f .

Úloha má nejvýš dvě řešení.

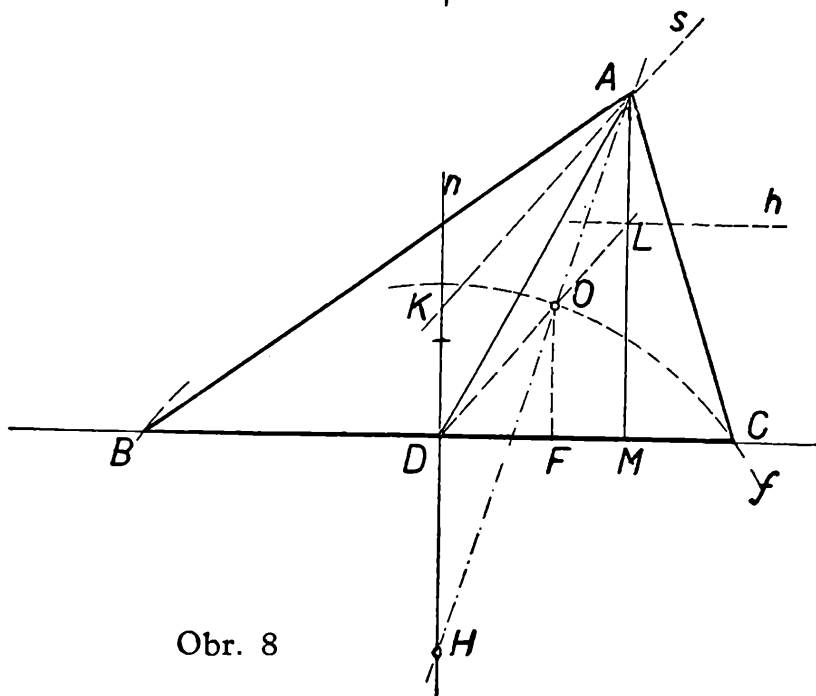
4. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno $r, \rho, r > 2\rho, c - b$.

Řešení: Podle (4) je $DF = \frac{c - b}{2}, FO = \rho$ (obr. 7). Na základě vztahu (3)

sestrojíme úsečku velikosti m . Ve vedlejším obrázku je $PR = r$, $PQ = 2\rho$, $UR = m$. V bodě D sestrojíme kolmici n k přímce DF a sestrojíme na ní body S , resp. 1S , aby $SO = m$. Tyto body vytíná na přímce n kružnice $l \equiv (O, m)$. Dále řešíme úlohu známým způsobem (viz úlohu 1 v části B).



Obr. 7



Obr. 8

Pokud je $\sqrt{r^2 - 2r\rho} \geq \frac{c-b}{2}$, má úloha dvě nebo jedno řešení.

Řešitelnost úlohy závisí na vzájemné poloze přímky n a kružnice $l \equiv (O, m)$.

5. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $c - b, \rho, v_a$ (obr. 8).

Řešení: Nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník DFO ; jeho odvěsny jsou $DF = \frac{c - b}{2}$, $FO = \rho$. Ve vzdálenosti $v_a - \rho$ vedeme v polorovině DFO

rovnoběžku $h \parallel DF$ a určíme její průsečík L s přímkou DO . Tímto bodem prochází výška MA trojúhelníka ($MA = v_a$). Přímka AO protíná přímku $n \perp DM$ jdoucí bodem D v bodě H . Kružnice $f \equiv (H, HO)$ protíná přímku DF ve vrcholech D, C .

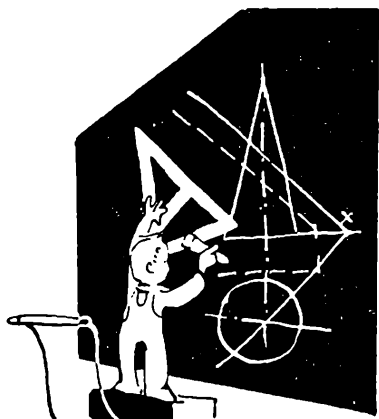
Úloha má vždy jediné řešení.

6. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $c - b, \rho, t_a$.

Řešení: Jako v předcházejícím příkladu sestrojíme nejprve trojúhelník DFO . Na přímku $DK \perp DF$ přeneseme úsečku $DK = \rho$ (obr. 8) a bodem K vedeme přímku $s \parallel DO$ a na ní určíme bod A tak, aby $DA = t_a$. Další postup je stejný jako v předcházejícím příkladu.

Další příklady:

1. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $r, \rho, r > 2\rho, \alpha$.
2. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $c - b, \rho, \alpha$.
3. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $c - b, \rho, a; c - b < a$.
4. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: $c - b, \rho, \beta$.



Deskriptivní geometrie a rýsování

Soutěž

Typickým znakem technika je zručné a úhledné ovládnutí grafického projevu. Sebelepší plán či projekt v jeho mozku nebyl by obyčejně nic platný, kdyby dělník, který má takové dílo zhotovit, nedostal do ruky jasný a spolehlivý náčrt nebo plán. Nepodceňujte proto rýsování, jehož praktická potřeba vystupuje do popředí zvláště nyní, kdy zaměření jedenáctiletky i budoucí dvanáctiletky směřuje polytechnisací k výrobě.

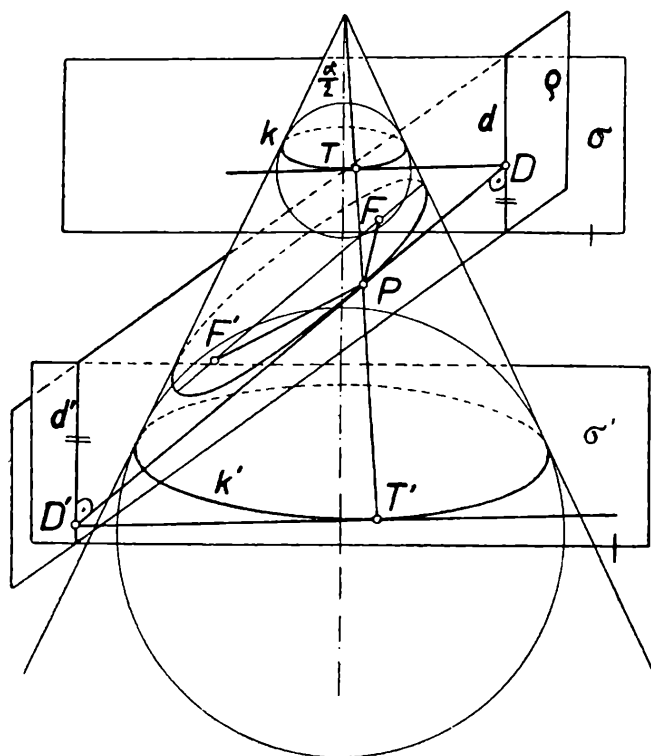
Abychom podpořili mezi studenty zájem o rýsování i abychom zvýšili jeho kvalitu, která byla u nás vždy na vysoké úrovni, vypisujeme pro žáky všeobecně vzdělávacích i odborných škol soutěž:

Nejlepší rys provedený tuší na námět geometrický nebo technický - tematicky zapadající do osnov deskriptivní geometrie nebo rýsování a na odborných školách do technického kreslení - odměníme knižní cenou a uveřejníme jeho reprodukci spolu se jménem žáka - autora, učitele i školy.

Red.

Dandelinova věta a jednotná definice kuželoseček

Vedeme-li z bodu tečny ke kružnici, jsou stejně dlouhé. Rovněž stejně dlouhé jsou tečny vedené z bodu ke kouli. Tyto tečny tvoří pak povrchové přímky rotačního kužele, kterých se dotýká koule v bodech dotykové kružnice. Těmito dotykovými kružnicemi k, k' vedeme roviny σ a σ' , které jsou spolu rovnoběžné. Obě stojí kolmo k rotační ose kužele. Kuželem vedeme rovinný řez. Je-li α úhel při vrcholu kužele, a je-li sklon roviny řezné k ose kužele větší než $\frac{1}{2}\alpha$, pak je řezem elipsa, je-li roven $\frac{1}{2}\alpha$ parabola, a je-li menší než $\frac{1}{2}\alpha$, pak je řezem hyperbola.



Obr. 1

Obrázek 1 nám znázorňuje případ, kdy rovinným řezem je elipsa. Do horní části kužele je vepsána koule, dotýkající se řezné roviny a kužele, do dolní části kužele je vepsána rovněž koule, dotýkající se řezné roviny a kužele. Na elipse volíme libovolný bod P a vedeme z něho tečny PF, PF' k oběma koulím. Dále vedeme druhé dvě tečny PT, PT' . Je tedy $PF = PT, PF' = PT'$, avšak $PT + PT'$ je pro kterýkoliv bod elipsy stálý, totiž TT' . Je tedy také součet $PF + PF'$ pro kterýkoliv bod elipsy stálý. Podle známé definice je součet vzdáleností bodu od obou ohnisek stálý právě u elipsy a ohniska elipsy jsou dotykovými body koulí vepsaných do kužele. Dospěli jsme tak k větě Dandelinově pro eliptický řez:

Rovina, která protíná všechny povrchy rotačního kužele, seče kužel v elipse, jež má ohniska v dotykových bodech koulí dotýkajících se kužele i roviny¹⁾.

¹⁾ Tato věta, původně odvozená Quételetem a Dandelinem (čti kétletem a dandelénem) r. 1822 a 1826, platí i pro hyperbolický a parabolický řez; lze dokázat, že platí i pro řezy rotačních kvadratických ploch s výjimkou zploštělého elipsoidu.

Sečná rovina ρ protíná roviny dotykových kružnic σ, σ' v přímkách d, d' , které jsou spolu rovnoběžné. Obecně platí: jsou-li dvě rovnoběžné roviny protátny libovolnou obecnou rovinou, jsou průsečné přímky rovnoběžné.

Je-li bod P bodem elipsy, body D, D' patami kolmic spuštěných na přímky d, d' z bodu P a body T a T' dotykovými body tečen, vedených bodem P k oběma koulím, platí

$$\Delta PDT \sim \Delta PD'T'$$

($PD \equiv PD'$, úhly při vrcholu P u obou trojúhelníků jsou vrcholové a tudíž stejné a úhly při T a T' jsou střídavé a tedy rovněž stejné.)

Podobné trojúhelníky mají úměrné strany:

$$PT : PD = PT' : PD';$$

protože $PT = PF; PT' = PF'$ je také

$$PF : PD = PF' : PD'.$$

Sečteme-li v první úměře člen první a třetí na místě třetího členu, a dáme-li na místo čtvrtého členu součet druhého a čtvrtého členu, dostaneme:

$$PT : PD = (PT + PT') :$$

$$: (PD + PD') = TT' : DD',$$

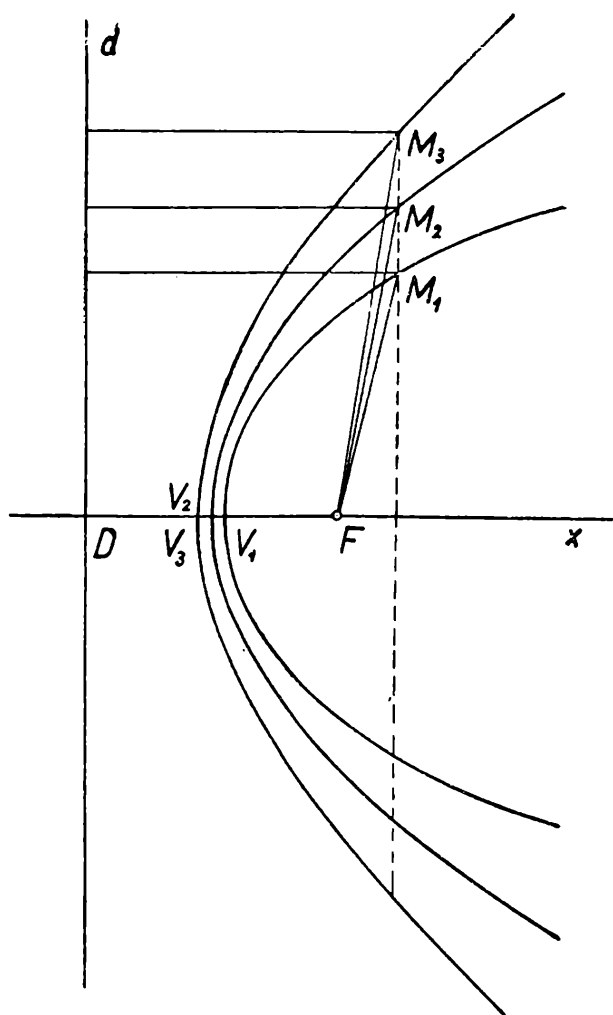
což jest hodnota pro kterýkoliv bod elipsy stálá, neboť TT' je povrchová přímka kužele spojující dva body TT' sečných kružnic a DD' je vzdálenost řídicích přímek v rovině ρ . Touž vlastnost lze dokázat u hyperboly a paraboly.

Poměr vzdáleností bodu P kuželosečky od jejího ohniska a od dané pevné přímky d (tzv. přímky řídicí) je stálý.

Je-li tento poměr vzdáleností $\lambda = PF : PD < 1$, je křivka elipsou, při poměru vzdáleností $\lambda = PF : PD = 1$ je křivka parabolou,

je-li poměr vzdáleností $\lambda = PF : PD > 1$, je křivka hyperbolou. Tak jsme dospěli k jedné definici kuželoseček.

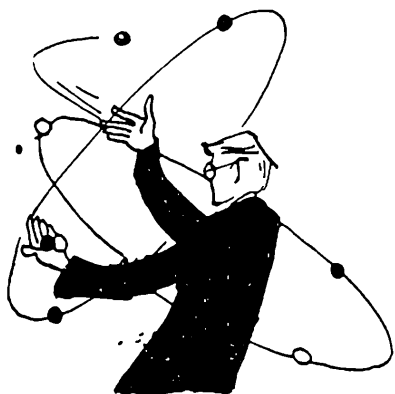
Na obr. 2 jsou znázorněny tři křivky s poměry vzdáleností $\lambda = \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{4}$.



Cbr. 2

Příklady:

1. Postavíme-li rotační kužel objemu V naplněný vodou na vrchol tak, aby jedna strana byla svislá, zůstane v něm množství vody V' . Jak velký je vrcholový úhel α při vrcholu kužele?
2. Jaké zrychlení gravitační má druhá družice sovětská ve vzdálenosti 1 500 km od povrchu země?
3. Jaká je oběžná doba za předpokladu, že dráha kruhová?
4. Jaká je rychlost oběžná z toho plynoucí?



Fyzika

Ing. Dr. Václav Šindelář, Praha:

Určování malých rozdílů hustot pevných těles vznášecí metodou

V tomto článku si všimněme jedné hydrostatické vztlakové metody vhodné k určování hustoty nebo objemové hmoty pevných těles - *metody vznášecí*. Je vhodná i pro měření absolutní, avšak s mnohem větší spolehlivostí ji lze užít jako metody relativní. Jako relativní metody jsem jí užil k měření hustotního pole, resp. pole rozložení objemové hmoty těles z umělých hmot.¹⁾

Stanovení hustotního pole. *Hustotním polem (polem hustoty)* nějakého pevného tělesa nazýváme prostor vyplněný tímto tělesem, v jehož každém místě má hustota tělesa zcela určitou, časově stálou hodnotu za neměnicí se teploty (a tlaku).

Přesné určení hustoty v nějakém místě (bodě) nehomogenního tělesa není možné. K měření potřebujeme vždy *v z o r e k* z daného místa, který i když je malý, má konečné rozměry, takže výsledkem měření není vlastně *hustota místní (bodová)*, nýbrž *průměrná hustota (střední)* části tělesa v okolí příslušného místa. Volíme-li však rozměry vzorků dostatečně malé, můžeme s dostatečnou přesností pro praktické účely pokládat průměrnou hustotu vzorku za místní hustotu jeho těžiště. Velikost „dostatečně malého“ vzorku může se ovšem pohybovat od velikosti prachového zrna až po několik krychlových centimetrů či více, podle stupně nehomogenity tělesa a ovšem také podle požadované přesnosti měření.

Chceme-li si o hustotním poli nějakého tělesa učinit alespoň hrubou představu, je třeba těleso *rozčlenit* podle nějakého systému *na množství vzorků*, při čemž je ovšem nutno znát polohu každého vzorku v tělese, abychom si mohli po změření hustot celé hustotní pole vykonstruovat. Při velkém počtu vzorků je to obtížné a

¹⁾ Viz: V. Šindelář, Rozložení objemové hmoty u odstředivě litých ozubených kol z polyamidu (Strojírnoství č. 8, 1958).

je vhodné volit (připouští-li to ovšem nehomogenita tělesa) vzorky takových rozměrů, abychom přímo na jejich povrchu mohli nějakou *značkou* poznamenat *situaci* vzorku v tělese.

Volbu velikosti vzorku lze provést jednoduše na základě přibližného předběžného měření na jiném tělese týchž rozměrů a kvality. To je možné ovšem jen tehdy, je-li nehomogenita způsobena v převážné míře nějakým technologickým procesem, stejným u celé serie těles. U jediného tělesa neznámé homogenity, nebo u těles s nehomogenitou způsobenou různými nahodilými vlivy, tak ovšem postupovat nemůžeme. Pak musíme velikost vzorku pouze odhadovat podle zkušenosti s podobnými tělesy srovnatelné jakosti.

Hustotu vzorků lze určit různým způsobem. Buď přímo určením hmoty a objemu, nebo některou nepřímou měřicí metodou. Pokud materiál zkoumaného tělesa, a tedy i vzorků není pórovitý, je možno použít metod vztlakových, při nichž na vzorek působí vztlak kapaliny, do níž je ponořen. Hustota této kapaliny musí být ovšem známá a vzorek se v ní nesmí rozpouštět, ani s ní nějak reagovat. U pórovitých materiálů, u nichž vlastně namísto měrné hmoty (hustoty) určujeme hmotu objemovou,²⁾ je nutno objem stanovit výpočtem ze změřených rozměrů, nebo chceme-li jej stanovit z množství vytlačené kapaliny do níž jej ponoříme, povrch vzorku opatřit tenkou blanou nepropustné látky (např. umělé hmoty). U pórovitých vzorků, jež bychom neopatřili tenkou obalovou blanou, by vnikla kapalina do některých nepříliš malých dutin v blízkosti povrchu. Protože by však dutiny uvnitř vzorku nebyly kapalinou vyplněny, nebyla by určená hmota objemové jednotky v tomto případě ani hustotou, ani v pravém slova smyslu objemovou hmotou.

Hydrostatická vznášecí metoda určování hustoty

Touto metodou rozumíme nepřímý měřicí postup určování hustoty pevných těles z hustoty kapaliny (obyčejně roztoku dvou vhodných složek), v níž se vznáší. Při této metodě se ovšem také využívá vztlaku kapaliny. Od dříve uvedených metod vztlakových se však liší zejména tím, že při ní neurčujeme velikost vztlaku, nýbrž snažíme se docílit indiferentní polohy tělesa v kapalině vhodného složení.

Metody lze výhodně použít zejména k určování hustoty drobných těles, práškovitých látek apod. Lze jí použít i k separaci isotopů. *Rozsah* tímto způsobem *měřitelných hustot* je ovšem vázán na hustoty použitelných kapalinných složek a pohybuje se asi v mezích $(0,6 \div 3,3) \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Rozsah by bylo možno ještě rozšířit použitím emulsí nebo suspensí namísto roztoků. Nevýhodou by ovšem byla nutnost nepřetržitého míchání (např. ultrazvukem) a neprůhlednost kapaliny.

Kohlrausch v „Praktické fyzice“ doporučuje roztoky chloroformu CHCl_3 ($\rho = 1,49 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$), bromoformu CHBr_3 ($\rho = 2,89 \cdot 10^3$), nebo methylenjodidu CH_2I_2 ($\rho = 3,3 \cdot 10^3$) s benzenem C_6H_6 ($\rho = 0,88 \cdot 10^3$), toluenem $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{CH}_3$,

²⁾ *Objemovou hmotou* rozumíme hmotu objemové jednotky tělesa složeného ze dvou nebo více látek. Týká se to především různých směsí, slitin, pórovitých materiálů apod. Objemová hmota je vlastně střední hustotou všech složek v jednotkovém objemu.

($\rho = 0,87 \cdot 10^3$), nebo xylenem $C_6H_3 \cdot (CH_3)_3$ ($\rho = 0,86 \cdot 10^3$). K tomuto účelu jsou vhodné i vodní roztoky různých kapalin nebo pevných látek, jako například jodidu rtuťnodraselného Hg_2KJ , tzv. Thouletův roztok, kterého je možno použít až do hustot asi $3,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. V mineralogických měřeních hustot jsou také používány jiné těžké roztoky. Je to vodní roztok boro-wolframanu kademnatého (tzv. Kleiňův roztok) a vodní roztok směsi mravenčanu thalného a jablečnanu thalného (tzv. Clericiho roztok). První z roztoků může být použit až do hustot asi $3,55 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, druhý pak do hustot asi $4,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Pro určování hustoty těles lehčích než voda použil jsem vodního roztoku ethylalkoholu $C_2H_5 \cdot OH$ ($\rho \doteq 0,79 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) a pro tělesa z umělých hmot (zejména silonu) vodního roztoku glycerinu $CH_2 \cdot OH \cdot CHOH \cdot CH_2 \cdot OH$ ($\rho \doteq \doteq 1,26 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). V obou případech je mísitelnost neomezená. Před měřením a přípravou počátečního roztoku je ovšem samozřejmě nutné stanovit kontrolně hustoty jednotlivých složek, protože jak ethylalkohol, tak i glycerin nejsou obvykle k dispozici koncentrované, nýbrž více či méně zředěné vodou a počáteční koncentrace měřicího roztoku, určená výpočtem z hodnot hustoty udávaných v tabulkách, by nebyla správná.

Měřicí postup. Nejprve určíme přibližnou hustotu tělesa nebo zkušební vzorku buď přímo (vážením a změřením objemu), nebo nepřímo některou metodou vztlakovou. Určujeme-li hustotní pole tělesa z většího počtu vzorků, předběžně je potřeba přibližně určit nejmenší a největší hustotu vyskytující se mezi vzorky. Předběžné určení hustoty provádíme jednak z toho důvodu, abychom mohli zvolit kombinaci dvou vhodných složek tvořících měřicí roztok, jednak proto, abychom ve vhodném množství tento roztok připravili.

Označíme-li hledanou hustotu tělesa či vzorku ρ a hustoty obou kapalných složek ρ_1 a ρ_2 , budou objemy obou složek V_1 a V_2 v celkovém počátečním objemu roztoku $V = V_1 + V_2$ o hustotě ρ' určeny vztahem

$$V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2 = V \cdot \rho' \quad (a)$$

Přitom nemusíme prakticky přihlížet ke změně společného objemu po smísení obou kapalných složek.

Jak plyne z dřívějšího, musí nutně být

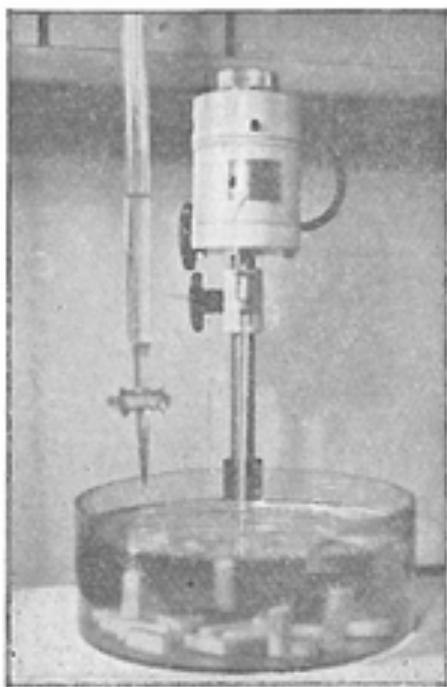
$$\rho' < \rho, \quad (b)$$

tedy počáteční hustota roztoku větší, nežli hustota zkoumaného tělesa nebo vzorku, aby na počátku měření leželo těleso nebo vzorky na dně nádoby, nejlépe skleněné s průhlednými stěnami, abychom mohli dobře sledovat počátek vznášení.

Mohli bychom sice také volit počáteční hustotu $\rho' > \rho$, pak by však těleso nebo vzorky před měřením plavaly na povrchu. Takové uspořádání by však činilo měření méně přehledným (pozorování vznášení se strany by bylo ztíženo) nehledě k tomu, že by přesnější měření bylo silně ovlivněno povrchovým napětím roztoku.

Nyní do počátečního roztoku za intenzivního míchání přidáváme (např. z by-rety) kapalnou složku větší hustoty tak dlouho, až se zkoušené těleso počne v roztoku vznášet. Přidávání této složky do roztoku nutno provádět po malých dávkách

jejichž velikost se ovšem řídí jednak požadovanou přesností měření, jednak i hustotami obou složek a jejich počátečními objemy. Po každém přidání necháme roztok řádně promíchat (elektrickou míchačkou postačí při celkovém objemu roztoku $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ asi 5 minut) a po zastavení míchacího zařízení pozorujeme vzorek, který není třeba v kapalině nijak zvlášť uvádět do pohybu, protože je unášen proudy v kapalině a zvolna se zpomaluje. Přitom je zcela zřetelně patrné, zda vzorek v kapalině klesá, či zda po zastavení zůstává zhruba v poloze indiferentní. Nutno dát pozor na eventuální přítomnost vzduchových bublinek, jež se pak usazují na hranách tělesa a které je nutno odstranit. Měření se musí provádět bez delších přerušení, protože vypařováním se koncentrace roztoku mění a výsledky by mohly být značně nejisté. Je vhodné opatřit skleněnou nádobu krytem,



Obr. 1. Měřicí zařízení použité při určování malých rozdílů hustot pevných látek hydrostatickou vznášecí metodou.

abychom vypařování co nejvíce omezili. Po ukončení měření je vhodné přesvědčit se zvláštním měřením, zda konečná hustota ρ_k roztoku odpovídá hodnotě vypočtené ze vztahu

$$V_1 \rho_1 + \left(V_2 + \sum_{i=1}^n v_{2,i} \right) \cdot \rho_2 = \rho_k \cdot V_k, \quad (c)$$

kde $V_k = V_1 + V_2 + \sum_1^n v_{2,i}$ (poslední člen představuje celkový přidaný objem hustší složky roztoku).

Určujeme-li málo se lišící hustoty většího počtu vzorků, přidáváme do počátečního roztoku hustší složku třeba i jen po kapkách, jejichž velikost můžeme řídit velikostí výtokové kapiláry. Citlivost této metody při relativním určování hustot je velmi značná. Uvedu krátký příklad.

Příklad citlivosti metody. U počátečního roztoku objemu $V = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 2000 \text{ cm}^3$, hustoty $\rho' = 1,148 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ o hustotách složek: vody $\rho_1 = 0,998 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a glycerinu $\rho_2 = 1,212 3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a objemech složek $V_1 = 595,98 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ a $V_2 = 1 404,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ byl zjištěn nejmenší rozdíl hustot při přidání $v_2 = 0,03 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ (dvou kapek) glycerinu, tedy těžší složky. Konečná hustota je rovna

$$V_1 \rho_1 + (V_2 + v_2) \rho_2 = V_k \rho_k,$$

z čehož po dosazení

$$\rho_k = 1,148 503 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Nejmenší zjištěný rozdíl hustot byl v daném případě

$$\rho_k - \rho' = 0,000 003 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

a lze jej zvláště pečlivým uspořádáním ještě zvýšit.

Takovou přesnost můžeme ovšem očekávat jen při měření *relativním*, nikoli absolutním. Kdybychom takový malý rozdíl hustot chtěli určit jako rozdíl dvou absolutně stanovených hustot roztoku při použití běžného měřicího zařízení,³⁾ nebylo by to možné, protože krajní chyba jediného takového měření by mnohokrát převýšila velikost tohoto rozdílu. Krajní chyba relativní by podle Kohlrausche byla rovna

$$\kappa_r = \pm \sqrt{33,64 \cdot 10^{-12} + 1 \cdot 10^{-8}} = \pm 1,00168 \cdot 10^{-4}$$

a krajní chyba absolutní pak

$$\kappa = \kappa_r \cdot 1,15 = \pm 1,152 \cdot 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}.$$

Je patrné, že změny hustoty můžeme takto běžně určit asi se 100násobnou přesností, proti absolutním hodnotám hustoty.

In g. Jiří Pazderák, Praha:

O televizi

(Dokončení)

Televizní zařízení

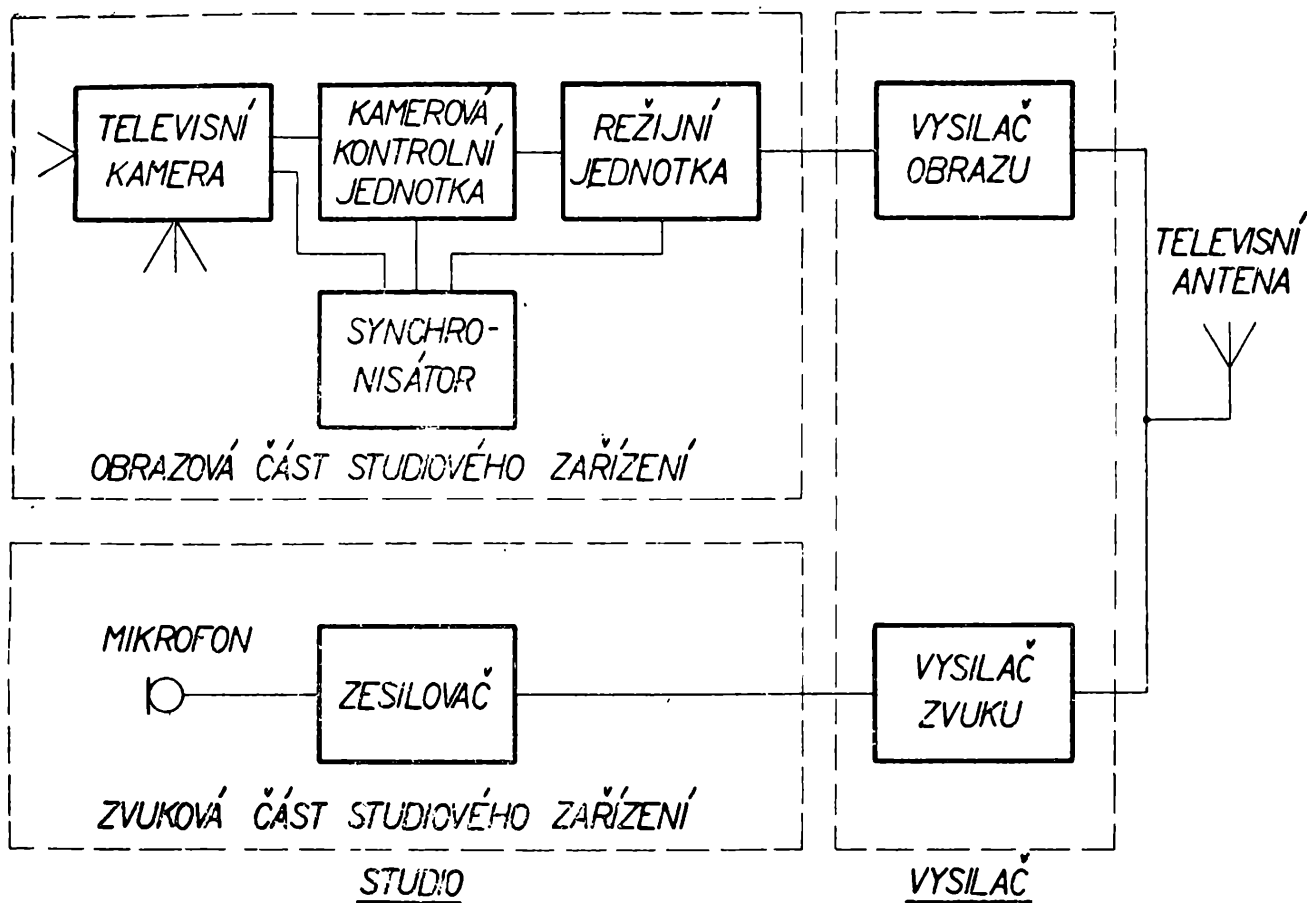
Úplné vysílací televizní zařízení je velmi rozsáhlé. Jeho těžištěm je televizní studio a vysílač. Studio je složeno z *obrazové části*, kde se snímá a přenáší televizní obraz a z části nezbytného *zvukového doprovodu* (obr. 6).

Televizní kamera, kamerová kontrolní jednotka a režijní jednotka vytvářejí *kamerový řetěz*. Výstupní obrazový signál přichází z kamery do kamerové kontrolní jednotky, kde se kontroluje a upravuje po stránce technické. V režijní jednotce se kontroluje obraz z hlediska uměleckého. Kamerové řetězy bývají ve studiu nejméně tři, ale může jich být i několiknásobně více. Kromě nich je v televizním studiu i zařízení pro snímání obrazu s filmu, snímání diapozitivů, zařízení pro záznam televizního obrazu na film nebo magnetofonový pás a zdroj umělého televizního signálu (*monoskop*). Nad přesným chodem celého zařízení bdí *synchronizátor*, který vyrábí impulsy pro synchronní chod elektronových paprsků v televizních kamerách a v kontrolních přijímačích. Synchronizační signály jsou vysílány současně s obrazovým signálem a způsobují též synchronní chod elektronových paprsků v obrazovkách přijímačů.

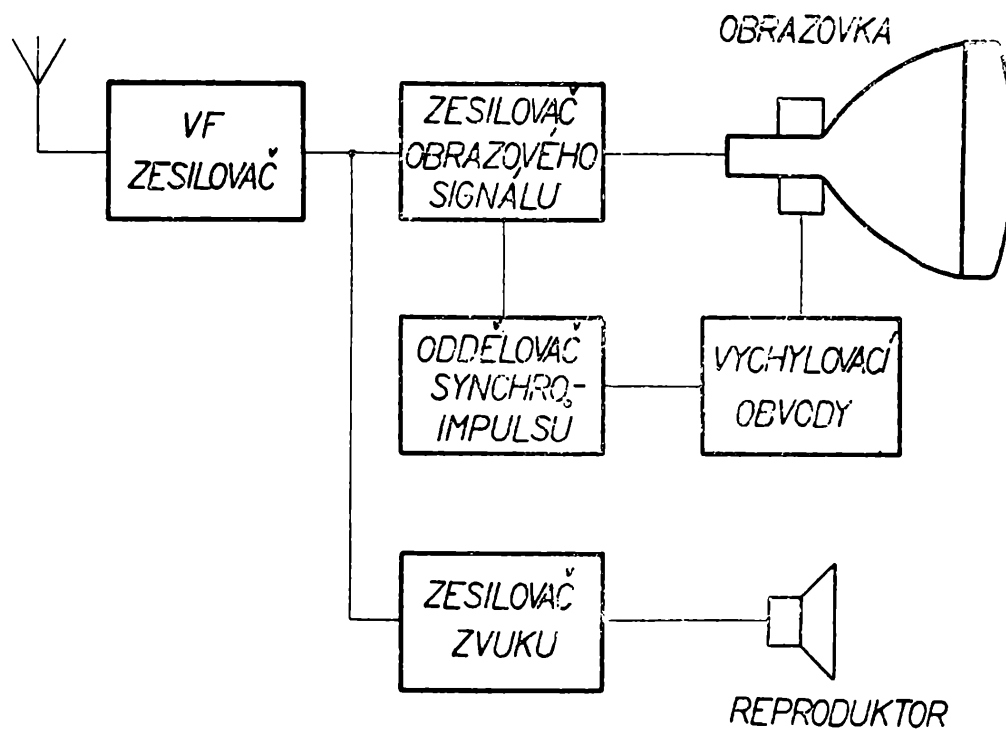
Zvuková část studiového zařízení je složena z prvků známých z rozhlasové techniky.

Obrazový televizní signál přichází do vysílače obrazu a zvukový signál do vysílače zvuku. Výstupní signály obou vysílačů jsou vyzářeny do prostoru společnou anténou.

³⁾ Na brzděných analytických vahách počítejme s krajní chybou $\kappa_1 = \pm 0,002 \text{ g}$, u pyknometru s obsahem 30 cm^3 s krajní chybou $\kappa_2 = \pm 0,003 \text{ cm}^3$. Relativní chyby pak jsou (při hustotě asi $\rho = 1,15 \text{ g.cm}^{-3}$) $\kappa_{1r} = \pm 5,8 \cdot 10^{-6}$ a $\kappa_{2r} = \pm 1 \cdot 10^{-4}$.



Obr. 6. Blokové schéma televizního vysílacího zařízení



Obr. 7. Blokové schéma televizního přijímače

K televiznímu vysílacímu zařízení patří také *přenosové zařízení*, což je vlastně mobilní televizní studio určené pro přenosy z divadel, koncertních a estrádních síní, stadiónů atd. Toto zařízení je složeno ze snadno přenosných jednotek, které jsou umístěny ve vhodném dopravním prostředku. Přenosové zařízení předává televizní signál vysílači přímo vlastním bezdrátovým zařízením.

Na obr. 7 je zjednodušené schéma televizního přijímače. Signály přijaté anténou jsou nejdříve zesíleny. Obrazový signál je přiváděn na mřížku obrazovky, kde řídí intenzitu elektronového paprsku. Z obrazového signálu se ještě oddělují synchronizační impulsy, které řídí chod vychylovacích obvodů. Signál zvuku je též zesilován a přiveden do reproduktoru.

Z předcházejícího přehledného popisu vyplývá rozsah televizního zařízení. V tomto rozsahu pracuje dnes pouze televize programová.

Televize průmyslová používá zařízení mnohem jednoduššího, kdy se často celá soustava skládá pouze z jednoho kamerového řetězu. Obrazový signál se většinou ani nevysílá prostorem, ale spojení mezi kamerou a kontrolním přijímačem obstará *souosý kabel*.¹⁾ I požadavky na rozlišovací schopnost soustavy bývají mírnější, takže počet řádek se snižuje až na polovinu počtu řádek televize programové. To vede i k podstatnému technickému zjednodušení.

Vzhledem k svým možnostem nabývá průmyslová televize stále většího významu. Zařízení průmyslové televize umožňuje např. řídicímu orgánu kontrolovat několik výrobních procesů nebo několik částí výrobního procesu z jednoho místa, při čemž televizní kamera může být i tam, kde by člověk nemohl být bez újmy na zdraví (vysoká teplota, radioaktivní prostředí, pod vodou atd.). Jinde zase zařízení průmyslové televize umožňuje přehlednou kontrolu a řízení dopravy, jako na nádražích, na křižovatkách ve městech. Průmyslová televize nachází uplatnění i ve školství např. unikátní operaci, které může být bezprostředně přítomno jen několik posluchačů medicíny, může prostřednictvím zařízení průmyslové televize pozorovat neomezený počet diváků.

Je patrné, že napříště se televize nebude podílet na budování státu pouze svým kulturně-politickým posláním, ale i svou přímou účastí ve výrobním procesu.

Závěrem můžeme říci, že televize je dnes velmi rozsáhlým oborem, na jehož vývoji až do dnešního stavu se podílí mnoho pracovníků - a co je pro televizi typické - z mnoha různých oborů. Nejmodernější obor radiotechniky - *elektro-nika* - zde jistě dominuje; nemalý podíl má však i *vakuová technika* (snímací, zesilovací elektronky, obrazovky), *optika* (objektivy v televizních kamerách), *technologie*, *chemie* (luminofory pro stínítka obrazovek) a přiřadíme i lékařský obor - *fysiologii lidského zraku*, který zde má podstatné slovo. Bez zvláštních vlastností zraku by dnešní soustava televize nebyla možná.

Úkolem tohoto článku bylo osvětlit princip televizního snímání obrazů a přehledně se zmínit o nejdůležitějších částech televizního zařízení.

Literatura: Havelka: *Televise*, SNTL 1956.

¹⁾ Souosý (koaxiální) kabel je tvořen dvěma vodiči; první je v ose kabelu, druhý - od něho izolovaný - je tvaru souosého válce.

400 let balistiky

(Dokončení)

Dělostřelce tehdy nejvíce zajímal nejdelší dostřel. Ze zkušenosti se vědělo, že čím prudčeji se vymrští kámen, tím dále doletí. Zvyšovat váhu prachové náplně u děl se nikdy zvláště nedoporučovalo, zvláště když zkušenost naznačovala schůdnější cestu. Chceme-li hodit kamenem na větší vzdálenost, musíme ho házet pod větším úhlem. A právě Tartaglia se jako první pokoušel zjistit závislost dostřelu na náměru děla. Jeho pomůcky byly ještě velmi primitivní. Příklad k stanovení náměru je zobrazen v díle „Nuova scienza“, ale takřka se současně objevuje v rukopise našeho Vavřince Kříčky z Bítyšky († 1570): *Návod k lití a přípravě děl, kulí, hmoždířů, etc.*²⁾ Náměr se stanovil dvěma k sobě kolmými pravítky, z nichž jedno, delší, bylo zasunuto do hlavně děla. Náměr byl odečten olovnicí, na čtvrtkruhové úhlové stupnici spojující obě pravítka. Byl to tedy jakýsi dělostřelecký kvadrant. Tartaglia stanovil jako optimální náměr 45° . Postupně svá zkoumání rozšířil a hledal závislost dostřelu na váze nálože a délce hlavně, jakož i na váze a průměru střely.

Tartaglia se domníval, že dráha střely je křivka. Jaká je to křivka, prokázal teprve o 100 let později Galilei v díle: *Discorsi e dimostrazioni matematiche, etc.*, více známém pod koncovým názvem: *... dialoghi delle nuove scienze* (1638). Dílo je psáno ve formě dialogu. V posledním dnu promlouvá Galileo o pohybu vržených těles. „...vržená tělesa se pohybují po parabolách: skutečnost, kterou objevil náš přítel (Galilei) spolu s důkazy, které přináší ve své knize o pohybu...“, podotýká při konstrukci paraboly Salviati. Galileiho zkoumání prohloubil a rozšířil jeho žák Torricelli v díle: *De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum* (1641). Obalová křivka všech parabolických drah vrhů těles, vržených stejnou rychlostí a pod náměrem od 0° do 90° , je opět parabola.

Galilei důrazně v *Discorsi* upozornil, že tvar paraboly bude pozměněn vlivem odporu vzduchu. To však nikterak nevadilo pařížské Akademii, aby ještě v r. 1707 s uspokojením nekonstatovala, že problém dráhy střely ve vzduchu je parabolou úplně vyřešen, takže „zbývá geometrii vykonati pro balistiku jen ještě jedinou službu, totiž zkonstruovat jemnější stroje k cílení.“ A přece tehdy stála balistika na samém prahu svého vývoje.

První balistické studie vznikly v Itálii, kde byly tehdy pro ně nejpříznivější výrobní a hmotné podmínky. Koncem 17. stol. se balistika stěhuje na sever, do Francie a do Anglie, kde vzrůstající se manufakturní průmysl skýtal balistice lepší podmínky než zchudlá a rozdrobená Itálie.

Newton ve svých *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) v knize II. sledoval vliv odporujícího prostředí, působícího snížení rychlosti a vyšetřoval, jak se v takovém prostředí utváří kruhový po-

²⁾ Rukopis byl vydán v r. 1947 v Praze. Dělostřelecký kvadrant je tam znázorněn na obr. 15. Jeho praktické použití na obr. 16 zmíněné publikace.

hyb. V knize II., oddíl 2³⁾ uvedl poučku, že „těleso zakouší odpor, který je úměrný čtverci rychlosti a samo se pohybuje v stejnorodém prostředí nárazem, uděleným mu silou“. Znamená to tedy, že vzroste-li rychlost pohybujícího se tělesa dvakrát, třikrát atd., vzroste odpor vzduchu čtyřikrát, devětkrát atd. A na této větě počala budovat balistika.

Parabola se měnila v balistickou křivku. Od paraboly ve vzduchoprázdném prostoru se balistická křivka značně liší, je nesymetrická. Má menší výšku vrcholu i menší „dostřel“ a při stejném úhlu výstřelu má větší úhel doletu. Rozdíly nejlépe poznáme na praktickém příkladu. U staré pušky M95 byla střela vážící asi 10 g vypálena počáteční rychlostí 895 m/sec. Při náměru 4°30'22" by činil dostřel v rovině ústí 2000 m, zatím co ve vzduchoprázdném prostoru 12 700 m!

Balistika se pustila do problému, který se zdál být nad její síly. Postupně se zjistilo, že odpor vzduchu má zcela zvláštní průběh. Vzdušný odpor totiž roste přibližně se čtvercem rychlosti jen při malých rychlostech střel, jaké mají např. těžké miny. Při nadzvukových rychlostech střel se však odpor vzduchu řídí jinými zákony, poněvadž také kolem střely vznikají nové, dodatečné jevy. Bylo nutno upravit tvar střel. Staré kulaté střely postupně přecházely v protáhlé s ogivální špičkou.⁴⁾ Hlavně děl dostávaly známé šroubovitě rýhy [Leitman v Petrohradě v r. 1723, Robins ve Woolwichi (čti: vulvič) v r. 1742].

Bádání postupovalo velmi zvolna. Nebyly vhodné měřicí přístroje a pokud byly, tedy velmi primitivní, i když vtipné. Tak b a l i s t i c k é k y v a d l o (myšlenka Cassini jun. v r. 1707) byl špalek, do kterého se prostě vystřelilo. Střela v něm uvázla. Kinetická energie střely se projevila tím, že špalek vyhodila ve směru střelby vzhůru do určité výšky. Zvednutím špalku vykonala střela jistou práci a z váhy špalku, váhy střely a z dosažené výšky bylo již možno vypočísti i rychlost střely v okamžiku, kdy vrazila do špalku. Stejně se měřila i rychlost dělových střel, jen špalek byl těžší a vážil i několik centů.

Stále se však objevovaly nové a nové faktory ovlivňující dráhu střely. Balistické dosud marně zápolili s klasickými meteorologickými jevy, jako jsou např. vítr, teplota, tlak, vlhkost, hustota vzduchu atd. Tu již postupující dělostřelecká technika přicházela s novými a novými požadavky. Při střelbě z dalekonosných děl bylo již nutno počítat s C o r i o l i s o v o u s i l o u, tj. s vlivem otáčení Země na dráhu střely. Střela z pušky nebo z děla se odchyluje u nás doprava. Coriolisova síla má tedy na svědomí stranovou odchylku, ale za jistých předpokladů i zvýšení dostřelu a doby letu střely. Střely však měly i jiné vrtochy. Jeden byl pojmenován podle prof. Magnusa, který v r. 1852 činil pokusy s rotujícími válci, M a g n u s o v ý m e f e k t e m. U střely rotující doprava vzniká na pravé straně zhuštění, na levé zředění vzduchu a tím nastává přetlak zprava doleva. Střela se tedy odchyluje vlevo. Magnusovým jevem se zabýval i anglický fyzik lord Rayleigh (čti: roly) v práci *The irregular flight of tennis-ball*, v němž studoval neobvyklé odklony dráhy letu tenisového míče ve

³⁾ Podle překladu prof. Dr. J. Ph. Wolfse: *Sir Isaac Newton's Mathematische Principien der Naturlehre*, Berlin, 1872.

⁴⁾ Obrys střely s ogivální špičkou se podobá gotickému oknu, jaké vidáme na kostelích. Ogivální špička je vytvořena rotací dvou kruhových oblouků, symetrických k ose střely, jejichž poloměry mají dvojnásobnou délku kalibru střely.

vzdušném proudění. Starší čtenáři se jistě pamatují na pokusy s Flettnerovou lodí „Buckau“, poháněnou rotujícími válci.

Nicméně přesný výpočet dráhy střely, který je sám o sobě složitý a jehož řešení se věnovali nejlepší matematici např. Jan Bernoulli, Euler, Legendre (čti: bernuli, ojler, ležánder), stal se vlivem řady činitelů měnících se v čase i prostoru prakticky neproveditelným. Při střelbě se používalo empiricky odvozených pravidel a tabulek, získaných na pokusných střelnicích. Balistikové neváhali při hledání vhodných početních metod navázat styk s astronomy. Tak Adamsovu metodu z r. 1833, zdokonalenou Stürmerem k řešení diferenciálních rovnic 2. stupně, aplikoval k řešení úlohy vnější balistiky akademik Krylov (1918). Také astronomové se stávali balistiky, jako např. Moulton; balistikové se pak s oblibou věnovali astronomii, jako např. N. V. Majeuskij proslavený svými pracemi o vlivu odporu vzduchu na kulaté a protáhlé střely a matematickým řešením těchto otázek. Konečně klasická balistika načerpala nové podněty z obsáhlého díla sovětského badatele K. E. Ciolkovského. Ne nadarmo nazval Charbonnier v úvodu k své pěkné práci: *Traité de balistique extérieure* (1921) balistiku „pozemskou větví astronomie“.

Dalekonosná děla z I. světové války znamenala poslední slovo staré tartagliovské balistiky. Technika a všechny příbuzné vědy přispěly k tomu, že byla vytvořena děla vážící 140 t, s hlavní 36 m dlouhou, která vystřelila střelu takřka 1 m dlouhou a 105 kg těžkou na vzdálenost 110 km. Třídílná prachová nálož vážila 195 kg. Její zanícení hnalo tlakem půl milionu kg střelu, která v ústí hlavně dosáhla rychlosti 1670 m/s. Materiál byl velmi namáhán, vždyť maximální tlak v hlavní činil 4 850 kg/cm². Vypálená střela již po 25 s dospěla do výše 19 km. Po 90 s dosáhla vrcholu dráhy (37 km) s okamžitou rychlostí 680 m/s. Po 186 s celkové doby letu dopadla střela s rychlostí 763 m/s na zem a teprve za ní přikvapila zvuková vlna. Balistikové mohli být tedy spokojeni, vždyť dosáhli téměř nemožného. Avšak nebylo tomu tak, vždyť se celý ten div vlastně zpronevěřil svému účelu. Vojenský význam byl totiž nepatrný. Lidé v Paříži se vyděsili, ale to bylo také všechno. Cítili to též vojáci. Hodně se potom mluvilo o tom, že dělostřelectvo zastaralo a že ho nahradí letectvo. A skutečně také v II. světové válce se klasická balistika zhroutila v konstrukcích nestvůrných moždířů (např. německý „Thor“) nebo obrovských bomb. Jak pokračovat dále?

Ciolkovského myšlenky, jeho matematické vzorce (např. vzorec pro rychlost rakety na konci hoření paliva, odvozený v r. 1903) značí renesanci balistiky. Ciolkovskij pokračoval v tradici ruských raketových odborníků jako byli A. D. Zasljadko, A. A. Šilděr a především K. I. Konstantinov, zakladatel, matematické teorie konstrukce a střelby raket, vynálezce elektrobalistického kyvadla. Pravda, ještě ke konci II. světové války bylo Ciolkovského prací zneužito. Z odpalovacích základů stoupaly svisle vzhůru rakety V-2. Zdálo se, že omlazená balistika směřuje k svému prapůvodnímu účelu ničit lidi a jimi vytvořené hodnoty. Časový programový mechanismus skláněl podélnou osu vypálené rakety na 45° náměr. Zvláštní mechanismus vypínal raketový motor v okamžiku, kdy raketa měla rychlost asi 5500 km a od tohoto okamžiku (asi 60 s po startu) se raketa pohybovala jako střela, vystřelená s náměrem 45° a s počáteční rychlostí asi 5500 km. Ačkoliv

vypočtený dostřel činil 550 km ve skutečnosti V-2 dosahovala s náloží 950 kg výbušin jen 280 km. Dostup činil 95 až 100 km. Takové použití ovšem Ciolkovskij neměl na mysli. Mezikontinentální raketové střely, dílo sovětských balistiků, mají ohromnou rychlost 20 000 až 25 000 km/hod. a mohou právě tak překlenout kontinenty a zasáhnout cíl s přesností 10 až 20 km, jako vynésti umělé družice do hlubin vesmíru. Nová balistika je připravena sloužit lidem.

Jistě jsme se v tomto informativním pojednání nemohli ani stručně zmínit o nejvýznačnějších balisticích a jejich díle. Nezmínili jsme se ani o vývoji vnitřní balistiky, studující pohyb střely v hlavní, zbraně a veškeré zjevy provázející děj výstřelu. Rodištěm vnitřní balistiky je Petrohrad, kde v 1. pol. 18. stol. provedl Daniel Bernoulli pokus, jehož námětem bylo zjistit konstantu, charakterisující vlastnosti prachu ve vzorci pro ústovou rychlost střely. Konečně v disertační práci matematika Jana Bernoulliho, otce předešlého, o kvašení (1690), je popsán pokus, který měl sloužit k výpočtu napětí plynů vzniklých při vznícení střelného prachu. Nejúplnější a nejpřesnější řešení základního úkolu vnitřní balistiky podal prof. N. F. Drozdov, poctěný za své vynikající práce v tomto oboru přijetím do Akademie dělostřeleckých věd, institutu který nikde jinde na světě nemá obdoby.

Nemůžeme se ani zmínit o vývoji výbušných látek, jehož sledování nespadá přímo do dějin balistiky, ale je důležité pro celkové posouzení balistických výkonů. Tak např. s černými prachy mohla být docílena největší počáteční rychlost střely jen asi 530 m/s.

Bylo by však vhodné zmínit se alespoň několika slovy o našich balisticích.

Tradice naší balistiky je velmi stará, i když, bohužel, málo známá široké veřejnosti. Tak první dělo s rýhovanou hlavní a klínovým závěrem bylo vyrobeno v r. 1582 v Praze a bylo uloženo v rudolfinských sbírkách. Tehdy Praha patřila k nejdůležitějším střediskům výroby dělostřeleckého materiálu ve střední Evropě. Známé jsou průkopnické práce bývalých Škodových závodů na vývoji rychlopalných děl se zákluzem hlavně (z r. 1894) a na konstrukci těžkých moždířů (30,5 cm), bez nichž by Němci v r. 1914 nezdolali pohraniční belgická opevnění. Seniolem československých balistiků byl Jan Gebauer (†1945), autor obsáhlé Aplikované matematiky pro vojsko (dva svazky, 1927—1931) a Balistika v nější (1938). Je též nutno zdůraznit, že Gebauer se již v letech 1922/1923 zabýval matematickým řešením problému výstřelu s planety na planetu. V obšírném pojednání vyložil matematické předpoklady „... pro dobu letu a rychlost střel vržených s povrchu jednoho nebeského tělesa na druhé těleso nebeské po spojnici jejich gravitačních středů a za předpokladů, že vzdálenost obou hvězd je neproměnná a že na letící střely nepůsobí jiné síly, kromě gravitačních sil obou hvězd, kteréžto síly pak se řídí přesně Newtonovým zákonem o gravitaci...“. Jinou zajímavou prací z počátků naší balistiky je útlá knížečka prof. Dr. Boh. Kučery *T a j e m s t v í d a l e k o n o s n ý c h d ě l* (Praha, 1918). Autor, známý čtenářům svojí učebnicí geometrické optiky, dospěl k názoru, „... že nemůžeme jediným výbuchem prachu dodatí projektilu dostatečné pohybové energie“ a navrhuje dělo nové konstrukce. Jsou to v podstatě dvě děla. Novinka je v tom, že v prvním děle je zároveň se střelou běžného tvaru nabit

ocelový, dopředu otevřený, ocelový válec nebo, jak ho autor nazývá, píst. Tento válec je nábojnicí druhého propulzivního náboje, položeného tedy mezi pístem a normální střelou. Při výstřelu prvního děla válec před sebou žene střelu, s níž nabude při ústí hlavně prvního děla společnou rychlost v_1 . Jakmile střela vnikne do druhého děla, vypálí mechanické zařízení, umístěné v pístu, druhý náboj, který dá střele novou rychlost v_2 , ale současně touž silou tlačí píst zpět. Náboj a váha pístu i střely musily by být vypočteny tak, aby v okamžiku, kdy střela opouští hlaveň druhého děla, zastavil se píst v druhé hlavni, případně posunul se do výchozí polohy, aby mohl být připraven k novému výstřelu. Celé řešení je velmi zajímavé a částečně upomíná na stupňovité rakety našich dnů; musíme jen litovat, že tak nadaný fyzik se dále nevěnoval balistice.

Čtenářům „Rozhledů“, jsou jistě známa jména jako Lerl, Pírko, Valníček a jiní, jejichž svěží a hodnotná pojednání budila náš zájem o tuto podivuhodnou vědu. Řada prací, ať již originálních (např. Polanského *Vnitřní balistika děl a raket* nebo překladů např. D. A. Ventcela *Vnitřní balistika*, práce Peškovy, Dudovy a jiných svědčí o tom, že zájem o novou balistiku stále roste.

A této nové balistice ve službách lidstva i jejím pracovníkům je třeba přát mnoho dalších úspěchů do budoucna.

Vladislav Malát, Karel Mašek, studující Karlovy university, Praha:

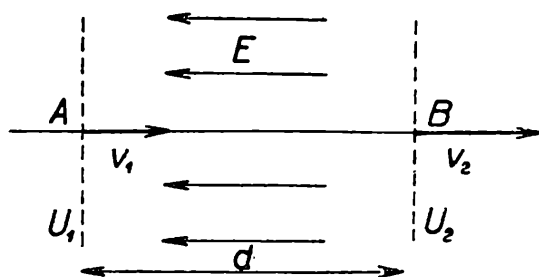
Fyzikální základy emise elektronů z kovů

O důležitosti objevu emise elektronů svědčí značný podíl, jaký mají elektronická zařízení v soudobé technice. První objevy z tohoto oboru jsou z konce minulého století. Roku 1883 pozoroval Edison u svých žárovek, že mezi rozžhaveným vláknem a vloženou studenou elektrodou protéká proud ve směru od elektrody k vláknem. Tento zjev vysvětlil o 14 let později Thompson, když dokázal, že jeho původcem jsou elektrony, vysílané vláknem a nikoli záporně nabitě částice uhlíkového vlákna, jak se dosud soudilo.

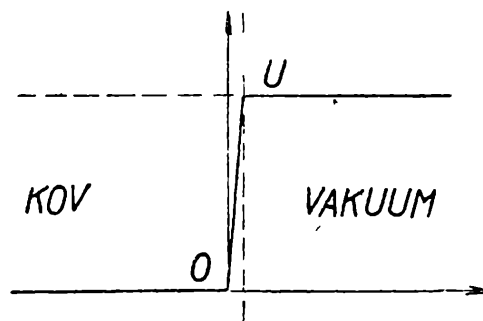
Jako první využil tohoto objevu Fleming, když v r. 1904 zkonstruoval první diodový usměrňovač vysokofrekvenčních elektrických kmitů. Za několik let nato byla Lee de Forestem vynalezena trioda a poznány její usměrňovací, zesilovací a oscilační vlastnosti. Tento vynález se stal počátkem prudkého vývoje nejrůznějších elektronických zařízení, jak je známe dnes. V našem článku se pokusíme objasnit, jak dochází k emisi elektronů, přičemž se pro jednoduchost omezíme hlavně na čisté kovy.

Jak známo, skládá se atom libovolného prvku z kladného jádra a z elektronového obalu, tvořeného záporně nabitými částicemi - elektrony. Tyto částice jsou nositeli tak zvaného elementárního elektrického náboje, který je nejmenším možným elektrickým nábojem vůbec. Jeho hodnota je $e = -1,603 \cdot 10^{-19}$ C. Hmota elektronu je $m = 9,106 \cdot 10^{-31}$ kg. Celkový náboj elektronového obalu je v absolutní hodnotě roven náboji jádra. Atom v takovém stavu je tedy po elektrické stránce neutrální.

V dalším výkladu si všimneme vnitřní stavby kovů. Atomy uvnitř kovu jsou uspořádány v pravidelném prostorovém útvaru, který nazýváme krystalickou mřížkou. Tyto atomy však již nejsou elektricky neutrální. V důsledku malých vzdáleností mezi nimi a z toho vyplývajícího silného vzájemného působení valenčních elektronů sousedních atomů, dochází k odtržení těchto elektronů od mateřských atomů, které se tak stanou kladnými ionty. Valenční elektrony následkem silného porušení jejich původního stavu jsou v kovu volně pohyblivé a vytvářejí v prostoru mezi ionty krystalické mříže, tzv. *elektronový plyn*. Tento název byl zvolen proto, že pohyb volných elektronů ve vodiči je podobný tepelnému pohybu molekul plynu v nádobě. Elektrony vnitřních slupek atomů svůj stav nemění, protože jsou pevněji drženy jádrem. Vzbudíme-li uvnitř kovu elektrické pole, počne se přes původně neuspořádaný pohyb volných elektronů překládat pohyb ve směru tohoto pole; kovem začne protékat elektrický proud opačného směru než je směr uspořádaného pohybu elektronů.



Obr. 1



Obr. 2

Dále je nutné si povšimnout, jak ovlivní pohyb elektronu ve vakuu přítomnost elektrického pole intenzity E . Pro naše účely bude stačit ten případ, kdy směr intenzity E bude rovnoběžný se směrem přímočarého pohybu elektronu. Označme rychlost elektronu před vstupem do podélného elektrického pole v_1 , po vystoupení z pole v_2 . Potenciály v bodech A a B na obrázku 1 označíme U_1 a U_2 , při čemž je $U_2 > U_1$. Vzdálenost mezi A a B je rovna d . Intenzita se zřejmě rovná $E = \frac{U_1 - U_2}{d}$ a působí na elektron silou eE , která se projeví v tom, že rychlost

se zvýší z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 . Rozdíl odpovídajících kinetických energií je vázán s rozdílem potenciálů vztahem

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = e (U_2 - U_1).$$

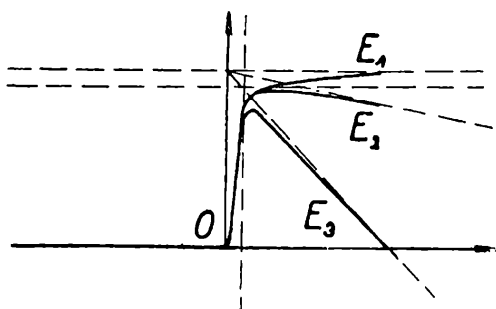
Pomocí tohoto vzorce můžeme vypočítat o kolik se zvýší kinetická energie nebo rychlost elektronu, který proletí potenciálním rozdílem $U_2 - U_1$. Na základě toho můžeme vyslovit definici jedné z jednotek pro energii, jednoho *e* l e k t r o n v o l t u (zkratka eV):

Jeden elektronvolt je roven změně energie elektronu, proletí-li dvěma místy, mezi nimiž je napětí (tj. rozdíl potenciálů) rovno 1 V.

S ostatními jednotkami pro energii je elektronvolt vázán vztahy:

$$1 \text{ eV} = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ joulu} = 3,825 \cdot 10^{-20} \text{ cal.}$$

Bylo zde již uvedeno, že pohyb volných elektronů v kovu je podobný tepelnému pohybu molekul plynu. Rozhraní kov-vakuum působí na elektronový plyn analogicky jako stěny nádoby na molekuly plynu v ní uzavřeného. Podle této analogie elektrony vykonávající v kovu tepelný pohyb, nemohou jej opustit bez vnějšího zásahu. Tento v praxi ověřený poznatek svědčí o existenci nějakých sil, které udržují elektrony uvnitř kovu. Tyto síly zřejmě působí na rozhraní s vakuem. Je to jednak přitažlivá síla kladných iontů na povrchu, která nedovolí elektronu, aby se vzdálil do vakua. Představme si, že některý elektron na okamžik opustí kov. To znamená úbytek jednoho záporného elementárního náboje na povrchu, což je totéž, jako by tam přibyl jeden stejně velký náboj kladný. Podle Coulombova zákona na sebe působí tento nový náboj s původním elektronem přitažlivou silou, jež spolu s přitažlivou silou povrchových iontů nedovolí volným elektronům opustit kov. S elektrostatického hlediska můžeme tento stav chápat tak, že se volné elektrony v kovu nacházejí v jakési potenciální jámě, jejíž průběh ve směru kolmém k povrchu je znázorněn na obr. 2.



Obr. 3

Uvnitř kovu je potenciál U za normálního stavu přibližně konstantní - na elektron tam nepůsobí žádné síly. Na rozhraní podléhá elektron silám přitahujícím jej do kovu, což odpovídá skoku potenciálu mezi dvěma svislými čarami na obr. 2.

Dále si povšimneme vlivu vnějšího elektrického pole na tento průběh potenciálu. Vnější elektrickým polem rozumíme například pole mezi katodou a anodou elektronky, je-li připojeno anodové napětí. Směr intenzity tohoto pole je kolmý k povrchu kovu, jehož vlastnosti sledujeme. Na průběhu potenciálu se to projeví zešikmením horní vodorovné části, což má za následek, že obdržíme potenciální val konečné šířky. Příklady tvaru potenciálního valu pro různé hodnoty intenzity elektrického pole jsou na obr. 3. Vidíme, že se silně mění jen šířka valu, zatím co výška se mění daleko méně.

Chceme-li, aby elektron mohl opustit kov, musíme mu dodat jistou energii, kterou spotřebuje na překonání přitažlivých sil na povrchu, tj. na zdolání potenciálního valu. energii, potřebnou právě k překonání potenciálního valu, tj. k oddálení elektronu na takovou vzdálenost, ve které je možno zanedbat přitažlivé síly, nazýváme výstupní práci. Její hodnota se udává v elektronvoltech a závisí na materiálu. Hodnoty výstupních prací některých kovů jsou uvedeny v tabulce 1.

kov:	Pt	Hg	Cu	Ca	Na
eV	6,0	4,5	4,1	3,2	1,9

Zvýšíme-li nějakým způsobem energii některých valenčních elektronů na hodnotu větší nebo rovnou výstupní práci φ , mohou tyto elektrony opouštět kov - nastává jejich emise do vakua. Toto zvýšení energie není ovšem stejné pro všechny volné elektrony daného kovu. Existuje totiž jakési rozdělení elektronů podle energií, které ke každé hodnotě udává počet elektronů, jejichž energie leží v určitém intervalu kolem dané hodnoty. To znamená, že zvýšíme-li energii některých elektronů na hodnotu větší než je výstupní práce φ , existují i takové elektrony, jejichž energie byla sice také zvýšena, ale na hodnotu menší než φ , takže kov opustit nemohou.

Jak již bylo řečeno, nazývá se tento zjev, kdy elektrony z nějaké látky vystupují do vakua, emisí elektronů. Elektroda, z níž elektrony vystupují, se nazývá katodou. Ve vakuu jsou elektrony strhávány elektrickým polem na druhou elektrodu (anodu), jež má proti katodě vyšší potenciál. Emitované elektrony vytvářejí mezi katodou a anodou emisní proud. Tento proud je zřejmě úměrný velikosti povrchu katody. Tak zvaná *p r o u d o v á h u s t o t a*, emisního proudu je proud, tvořený elektrony, emitovanými z 1 cm^2 katody za 1 s a udává se v ampérech na 1 cm^2 .

Podle způsobu, jakým přimějeme katodu k emisi, rozeznáváme čtyři druhy emise, o nichž je pojednáno v dalších odstavcích.

Termoemise

Zahříváme-li kov, zrychluje se tepelný pohyb volných elektronů a tedy i jejich energie. Tyto elektrony, jak už bylo řečeno, nemají stejné rychlosti, nýbrž vlivem vzájemných srážek, i srážek s ionty krystalické mřížky, se uvnitř kovu ustavuje jisté rozdělení elektronů podle rychlostí. Toto rozdělení je symetrické, tj. pomalé elektrony se v kovu vyskytují přibližně ve stejném množství jako elektrony velmi rychlé. Se zvyšováním teploty kovu roste počet rychlých elektronů a ty, které mají energii dosti velkou k vykonání výstupní práce a směřují k povrchu, opustí kov. Tento druh emise, při níž vylétávání elektronů se děje na úkor tepelné energie dodávané kovu zahřátím, nazýváme *termoemisí*.

Termoemisi teoreticky studoval zejména *R i c h a r d s o n*, který jako první odvodil zákon, jímž se tento jev řídí. Pro proudovou hustotu emisního proudu byl nalezen vztah

$$i = AT^2 \cdot e^{-\frac{\varphi}{kT}},$$

kde značí φ výstupní práci,

T absolutní teplotu,

e základ přirozených logaritmů $e = 2,718 \dots$

k Boltzmannovu konstantu $k = 1,3709 \cdot 10^{-23}$ joule \cdot grad $^{-1}$,
 A konstantu závislou na materiálu katody.

Tento vztah bývá nazýván vzorcem *Richardsonovým - Dushmanovým*. Z předchozího výkladu je zřejmé, že kovy s malou výstupní prací emitují elektrony snáze než s velkou. Z uvedeného vzorce dále plyne, že hustota emisního proudu roste s teplotou. Této vlastnosti se však dá využít jen potud, pokud emitující látka má teplotu značně nižší než je její bod tání (aby se katoda nerozprašovala). Pro názornější příklad uvedeme ještě několik číselných hodnot. Pro čistý wolfram, jehož výstupní práce je 4,5 eV dává Richardsonův-Dushmanův vzorec při $T = 1000$ °K proudovou hustotu $i = 1,3 \cdot 10^{-15}$ A \cdot cm $^{-2}$ a při teplotě $T = 3000$ °K dává $i = 11$ A \cdot cm $^{-2}$, tj. zvýšení teploty o 2000 °K vede ke vzrůstu proudové hustoty téměř 10^{16} krát.

Vyšší emisi z čistých kovů můžeme pozorovat, vytvoříme-li z kovu s nízkou výstupní prací jednoatomovou vrstvičku na kovu s větší výstupní prací (například thorium na wolframu). Atomy této vrstvičky jsou polarisovány tak, že vytvoří elektrickou dvojvrstvu, jejíž záporné náboje jsou orientovány blíže k povrchu kovu tvořícího podložku a kladné náboje ve směru k vakuu.¹⁾ Na povrchu podložky tak vzniká velký potenciální spád, který způsobí snížení potenciálního valu, a tedy i výstupní práce. Tím je vysvětlena vyšší emise z takto upravených katod.

Silně emitující katody, užívané v běžných elektronkách, jsou tzv. kysličníkové katody, tvořené nejčastěji směsí kysličníků barya a stroncia, nanesené na podložce z čistého kovu. Jejich předností je, že při poměrně malé teplotě dávají velký proud. U těchto katod, které se chovají jako polovodivé, probíhá proces emise daleko složitěji než u čistých kovů. Vyšší emise je zde v podstatě opět způsobena snížením výstupní práce, která nyní závisí nejen na specifických vlastnostech polovodivé látky na povrchu kysličníkové katody, ale i na její teplotě. Vedle toho samozřejmě existuje celá řada katod, užívaných v nejrůznějších typech elektronek, které se od sebe liší složením i konstrukcí.

Fotoemise

Je známo, že světlo má vedle charakteru vlnového i tak zvaný kvantový charakter. Ten se projevuje v tom, že světelná energie není vyzařována ani pohlcována po libovolně malých množstvích, nýbrž tato množství jsou vždy násobkem jisté nejmenší možné hodnoty, tzv. kvanta. Energie tohoto kvanta je závislá na barvě světla. Matematicky se dá vyjádřit jako

$$\varepsilon = h \cdot \nu,$$

kde značí ε energii kvanta,

h tzv. Planckovu konstantu, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ joule \cdot s,
 ν frekvenci světla, mající přímý vztah k jeho barvě.

Při dopadu světla na kov se část odráží a část je pohlcována. Energie pohlcovaných kvant je předána buď atomům kovu nebo volným elektronům. Aby volný

¹⁾ Elektrickou dvojvrstvou zde rozumíme dvě rovnoběžné roviny, z nichž jedna je nabitá kladně a druhá záporně.

elektron mohl vystoupit z kovu do vakua, musí vykonat výstupní práci, což mu může být umožněno právě předáním energie světelného kvanta. Část této energie se spotřebuje na zvýšení potenciální energie elektronu, jenž překoná potenciální rozdíl kov-vakuum. Velikost této části je rovna výstupní práci φ . Druhá část energie kvanta se spotřebuje na sdělení kinetické energie $\frac{mv^2}{2}$; v je maximální rychlost, s kterou elektron může opustit kov. Maximální proto, že vlivem srážek se může elektron na své cestě k povrchu zpomalit. Platí tedy

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - \varphi,$$

jak plyne ze zákona zachování energie. Dosaďme zde $v = 0$, což odpovídá případu, kdy energie kvanta je tak malá, že se právě rovná výstupní práci. Pak platí rovnice

$$h\nu - \varphi = 0.$$

Její řešení je

$$\nu_0 = \frac{\varphi}{h}.$$

Frekvenci ν_0 nám určuje nejmenší frekvenci, při které ještě může nastat emise elektronů vlivem světla - tak zvaná *fotoemise*. Existence této hranice, jež je pro různé materiály různá, patří mezi základní vlastnosti fotoemise, plynoucí přímo z kvantového charakteru světla.

Jako další uvedeme *Stoletovův zákon*, který říká, že *fotoelektrický proud je úměrný dopadajícímu světelnému toku* (při nezměněné barvě světla).

Tento zákon nám umožňuje kvantitativně vyjádřit vlastnosti jednotlivých fotokatod, například ve formě integrální citlivosti, která je definována jako emisní proud z fotokatody, na kterou dopadá světelný tok 1 lm ze zdroje bílého světla.

Sekundární emise

Ostřelujeme-li povrch kovu nabitými částicemi, urychlenými elektrostatickým polem, dochází k tak zvané *sekundární emisi* elektronů z této látky. Bombardujícími částicemi bývají nejčastěji elektrony. Abychom je odlišili od elektronů emitovaných, nazveme je *primárními elektrony*. Proud těchto částic se nazývá *primárním proudem*.

Část primárních elektronů se při dopadu na povrch kovu odrazí a část pronikne dovnitř, při čemž dochází k srážkám s ionty krystalické mřížky a s volnými elektrony. Vlivem těchto srážek ztrácí primární elektron svoji kinetickou energii a předává ji částicím, s nimiž se srazil. Zmenšování jeho energie se projeví v klesání jeho rychlosti, takže se po proběhnutí určité dráhy zastaví, přesněji řečeno jeho pohyb se stane podobným pohybu volných elektronů. Tato dráha se nazývá *doběhem elektronu* a závisí na jeho počáteční kinetické energii. Některé z elektronů, s nimiž se primární elektron srazí, získají nárazem energii dostatečnou k překonání potenciálního valu. Přitom samozřejmě ještě podléhají

srážkám s ostatními částicemi, takže jen část z nich se dostane k povrchu s dostatečnou energií a opustí kov. Tyto elektrony se nazývají sekundárními elektrony a spolu s odraženými tvoří sekundární proud. Důležitost sekundární emise spočívá hlavně v tom, že jeden primární elektron může za určitých podmínek v průměru vyrazit více elektronů sekundárních, takže sekundární proud může být značně větší než primární.

Při měření sekundární emise určitého kovu měříme celkový sekundární a primární proud. Jejich podíl

$$\delta = \frac{i_s}{i_p}$$

se nazývá koeficientem sekundární emise. Zjišťujeme-li závislost δ na energii primárních elektronů, pozorujeme z počátku, že s rostoucí energií roste i δ až do určité hodnoty δ_{\max} . Zvětšujeme-li po dosažení této hodnoty primární energii, počne δ klesat. Růst kinetické energie primárního elektronu se projeví zvětšováním jeho doběhu. Je pochopitelné, že čím větší je doběh, tím větší je i počet srážek s elektrony daného kovu. Tím se dá zdůvodnit růst δ . Proti tomuto růstu působí však ta skutečnost, že čím větší je hloubka, v níž volný elektron kovu dostane energii nutnou k výstupu do vakua, tím menší je pravděpodobnost, že s touto energií dosáhne povrchu. Tento zjev začne od určité hodnoty doběhu převládat a způsobí, že se δ začne od určité hodnoty δ_{\max} zmenšovat.

kov:	Al	Ni	Ag	Pt
max	0,96	1,25	1,47	1,78

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty δ_{\max} některých kovů. Speciálními úpravami povrchu některých nekovových látek se tyto hodnoty dají zvětšit až do $\delta = 10 \div 15$. Hodnoty v tabulce jsou uváděny pro kolmý dopad primárních elektronů. Při šikmém dopadu se δ zvětší, protože srážky primárních elektronů probíhají v menší hloubce pod povrchem než při dopadu kolmém.

Autoemise

Vytvoříme-li u studené katody elektrické pole větší intenzity (například $10^6 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$), vzniká emisní proud. Pokusy ukazují, že tento proud rychle vzrůstá s rostoucím vnějším polem a že v širokém teplotním intervalu je prakticky nezávislý na teplotě katody. Nemůže tedy jít o termoemisi, jejíž podstatu jsme již dříve vysvětlili, ani o jiný druh emise dosud uvedený. Tento zjev byl nazván *autoemisí*. Volné elektrony z kovu jsou jako by vytrhovány vnějším elektrickým polem.

Toto pole o intenzitě E (pro jednoduchost předpokládejme E konstantní), mířící k povrchu kovu, způsobuje zúžení potenciálního valu, jak je ukázáno na obr. 3. Čím větší bude intenzita E , tím užší bude potenciální val. Dochází rovněž k jeho snižování, jak vidíme na témže obrázku. Předpokládáme-li, že kov mohou opustit jen ty elektrony, které mají energii dostatečnou k překonání takto sni-

ženého potenciálního valu, dá se vypočítat, že například pro wolframovou katodu je třeba nejméně pole o intenzitě $E = 1,4 \cdot 10^8 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$. Avšak autoemisi lze pozorovat již při $E = 10^6 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$. To vysvětluje kvantová mechanika, podle které existuje jistá pravděpodobnost průchodu elektronu potenciálním valem i pro elektrony, jejichž kinetická energie ve směru k povrchu je menší než výstupní práce (tzv. *tunnelový zjev*). Tato pravděpodobnost je tím větší, čím užší je potenciální val a čím více se pro daný elektron jeho energie ve směru k povrchu blíží výstupní práci.

Pro hustotu emisního proudu při autoemisi platí vzorec, který se svým tvarem podobá vzorci *Richardsona* a *Dushmana* pro termoemisi, ale místo teploty v něm vystupuje intenzita vnějšího pole E . Aby se snadněji dosáhlo velké intenzity elektrického pole u povrchu kovu a tím se zvýšila pravděpodobnost průchodu elektronu potenciálním valem, zpracovává se katoda do tvaru hrotu. Přitom se využívá té skutečnosti, že čím menší je poloměr křivosti hrotu katody, tím větší je při stejném anodovém napětí intenzita vnějšího pole u jejího povrchu.

Tím jsme skončili stručný výklad posledního druhu emise elektronů. Na závěr zbývá vysvětlit, proč jsme se omezili ve svém článku pouze na kovy. Je to proto, že pro nekovové emitéry je mechanismus emise složitější a vyžaduje větších znalostí z oboru pevných látek a také proto, že náš článek by se rozrostl do přílišných rozměrů.



Řešení úloh

22. Dvě koule hmoty $m_1 = 1 \text{ g}$ a $m_2 = 5 \text{ g}$ se setkají v přímém rázu. Protože se jedná o ráz kulových těles, bude ráz středový. Koule jsou dokonale pružné. Rychlosti koulí před rázem jsou:

a) $c_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $c_2 = -2 c_1$ (obr. a, viz str. 190 RMF)

b) $c_1 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $c_2 = 2 c_1$ (obr. b).

Jak je z obrázků patrné, klademe zde osu rázu do osy souřadnic x ; pak též rychlostem v jejím kladném směru připsujeme hodnoty kladné, v opačném směru hodnoty záporné. Vypočtete:

1. rychlost obou koulí (v_1 a v_2) po rázu v případech a) a b),
2. rychlost těžiště hmotné soustavy obou koulí před rázem (c_T) a po rázu (v_T) pro případ a).

Václav Šindelář

Řešil Karel Kunz, XI d, 1. řSŠ v Znojmě:

1. Použijeme výsledku článku ing. Dr. V. Šindeláře, RMF, roč. 1957, str. 259:

$$v_1 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 - m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 - m_1 (c_2 - c_1)}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

a) Dosadíme-li do těchto vzorců $c_2 = -2c_1$, dostáváme

$$v_1 = c_1 \cdot \frac{m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = c_1 \cdot \frac{4m_1 - 2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dosadíme-li $m_1 = 1 \text{ g}$, $m_2 = 5 \text{ g}$, $c_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, vyjde

$$v_1 = -4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Dosadíme-li do vzorců (1), (2) $c_2 = 2c_1$, dostaneme

$$v_1 = c_1 \cdot \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = c_1 \cdot \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

a protože $c_1 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m_1 = 1 \text{ g}$, $m_2 = 5 \text{ g}$, budou rychlosti

$$v_1 = -2\frac{2}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = -1\frac{2}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Pro názornost budeme všechny rychlosti uvažovat v absolutní hodnotě. Bude tedy $|c_1| = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $|c_2| = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $|v_1| = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $|v_2| = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m_1 = 1 \text{ g}$, $m_2 = 5 \text{ g}$. Na koule působí gravitační síly $F_1 = m_1 g$, $F_2 = m_2 g$ navzájem rovnoběžné. Působíště jejich výslednice, tj. těžiště soustavy najdeme jako střed dvojice rovnoběžných sil.

α) Před rázem: Nechť koule 1 se nachází v bodě A , koule 2 ve vzdálenosti d . Vzdálenost těžiště od koule 1, tj. od bodu A nechť je d_1 . Platí: $F_1 d_1 = F_2 (d - d_1)$, tj. $m_1 g d_1 = m_2 g (d - d_1)$, z toho

$$d_1 = d \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Uvažujme obdobnou situaci po době t vteřin. Vzdálenost obou koulí je nyní $d - (c_1 + c_2)t$. Vzdálenost d_1' těžiště od koule 1 je obdobně

$$d_1' = [d - (c_1 + c_2)t] \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Vzdálenost koule 1 od bodu A je $c_1 t$, takže vzdálenost těžiště od bodu A je

$$d_1' + c_1 t, \text{ tj. } [d - (c_1 + c_2)t] \frac{m_2}{m_1 + m_2} + c_1 t.$$

Posunutí s těžiště je rovno rozdílu vzdáleností od bodu A .

$$s = [d - (c_1 + c_2) t] \frac{m_2}{m_1 + m_2} + c_1 t - d \frac{m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= c_1 t - (c_1 + c_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot t .$$

Z toho, že dráha závisí na první mocnině času je vidět, že jde o pohyb rovnoměrný; jeho rychlost je

$$|c_T| = c_1 - (c_1 + c_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (záporným směrem), tedy}$$

$$c_T = -1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

β) Po rázu: Zaveďme označení jako v předchozím. Platí $d_1 = d \frac{m_2}{m_1 + m_2}$;

po t vteřinách jest $d'_1 = [d + (v_1 - v_2) t] \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ a vzdálenost těžiště od bodu A se rovná $[d + (v_1 - v_2) t] \frac{m_2}{m_1 + m_2} - v_1 t$.

Posunutí těžiště za t vteřin bude

$$s = d \frac{m_2}{m_1 + m_2} - [d + (v_1 - v_2) t] \frac{m_2}{m_1 + m_2} + v_1 t$$

$$s = \left[v_1 - (v_1 - v_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right] t .$$

Z toho opět $|v_T| = v_1 - (v_1 - v_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Po dosazení $|v_T| = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (záporným směrem), takže je $v_T = -1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tedy jako před rázem.

23. Osy o_a, o_b stran a, b trojúhelníka ABC protínají jeho výšku v_c v bodech A', B' . Dokažte, že součin vzdáleností CA', CB' je roven čtverci r^2 poloměru kružnice trojúhelníku opsané. *Josef Langr*

Řešila Miroslava Haklová, X a, 6. JŠŠ v Praze 6:

Trojúhelníky $B'CS$ a SCA' jsou podobné (viz obr. 1):

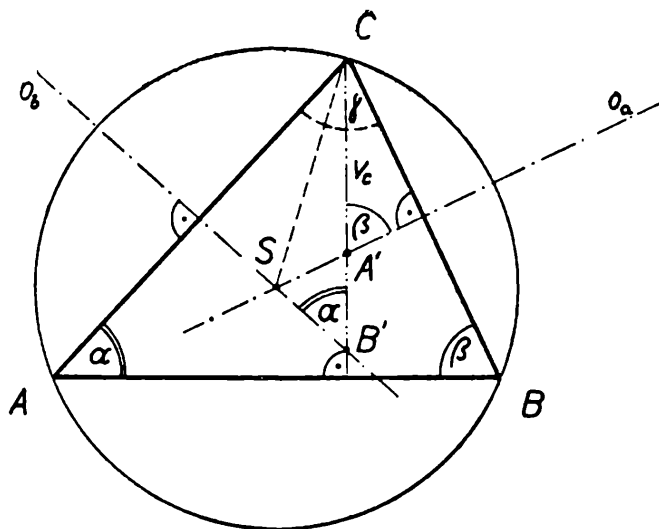
$$\sphericalangle B'CS = \sphericalangle SCA', \sphericalangle SB'C = \sphericalangle A'SC = \alpha ,$$

proto mají úměrné strany:

$$SC : CB' = CA' : SC , \text{ čili}$$

$$CA' \cdot CB' = \overline{SC}^2 = r^2 ,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 1

24. Určete nutnou a postačující podmínku pro koeficienty rovnice $x^4 + ax^3 + cx + d = 0$, aby její dva kořeny byla čísla opačná (různá od nuly).

J. Holubář

Řešil Karel Kunc, XI d, JSS ve Znojmě (část a) a Pavel Aksamit, XI b, JSS v Pardubicích (část b).

a) Předpokládejme, že číslo $p \neq 0$ je kořenem dané rovnice. Potom rovnici vyhovuje i číslo $-p$ a platí:

$$p^4 + ap^3 + cp + d = 0, \quad (1)$$

$$p^4 - ap^3 - cp + d = 0. \quad (2)$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme $2p^4 + 2d = 0$, tj. vztah

$$p^4 = -d. \quad (3)$$

Protože má být $p \neq 0$, musí být $d \neq 0$.

Odečtením (2) od (1) dostaneme $2ap^3 + 2cp = 0$, tj. $p(ap^2 + c) = 0$. Protože je $p \neq 0$, platí vztah

$$ap^2 = -c. \quad (4)$$

Umocněním (4) na druhou dostaneme $a^2p^4 = c^2$ a srovnáním s (3) dostaneme $-a^2d = c^2$, tj. vztah

$$a^2d + c^2 = 0, \quad (5)$$

kde je $d \neq 0$.

Tím je odvozena nutná podmínka, aby dva kořeny dané rovnice byla čísla opačná (různá od nuly).

b) Ukážeme nyní, že vztah (5) je také podmínkou postačující. Dosaďme do dané rovnice $d = -\frac{c^2}{a^2}$ ($a \neq 0$) ze vztahu (5); dostaneme

$$x^4 + ax^3 + cx - \frac{c^2}{a^2} = 0$$

Tuto rovnici upravíme snadno na tvar

$$\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)\left(x^2 - \frac{c}{a}\right) + ax\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) = 0$$

a dále

$$\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)\left(x^2 + ax - \frac{c}{a}\right) = 0$$

Aby byl výraz na levé straně poslední rovnice roven nule, musí platit

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0 \tag{6}$$

nebo

$$x^2 + ax - \frac{c}{a} = 0$$

Platí-li (6), jde o řešení ryze kvadratické rovnice, která má pro $c \neq 0$, $a \neq 0$ dva různé kořeny, kterými jsou opačná čísla.

Je-li $c = 0$, pak podle (5) je $a = 0$ nebo $d = 0$. Daná rovnice má tvar $x^4 + d = 0$ nebo $x^4 + ax^3 = 0$, neboli $x^3(x + a) = 0$. Jen rovnice $x^4 + d = 0$, a to pro $d \neq 0$, má požadovanou vlastnost.

25. Jsou dány mimoběžky a, b, c protínající danou rovinu ρ . Zjistěte směr rovnoběžného osvětlení, při němž vržené stíny a', b', c' na rovinu ρ omezují rovnostranný trojúhelník. *Red.*

Řešení redakce.

Rozbor: Libovolným bodem S , který neleží v rovině ρ , vedme rovnoběžky $\bar{a} \parallel a, \bar{b} \parallel b, \bar{c} \parallel c$ s danými mimoběžkami a, b, c . Průsečíky těchto rovnoběžek s rovinou ρ jsou $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Stíny přímek $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jsou $\bar{a}' \equiv \bar{AS}', \bar{b}' \equiv \bar{BS}', \bar{c}' \equiv \bar{CS}'$, jež nutně jdou stínem S' bodu S , přičemž $SS' \equiv s$ je hledaný směr rovnoběžného osvětlení.

Protože $a' \parallel \bar{a}', b' \parallel \bar{b}', c' \parallel \bar{c}'$ a trojúhelník o stranách a', b', c' je podle předpokladu rovnostranný, musí $\sphericalangle a'b' = \sphericalangle b'c' = \sphericalangle c'a' = 60^\circ$ a tudíž: $\sphericalangle \bar{a}'\bar{b}' = \sphericalangle \bar{b}'\bar{c}' = \sphericalangle \bar{c}'\bar{a}' = 60^\circ$ nebo 120° (výplňkový k 60°). To značí, že $\sphericalangle \bar{AS}'\bar{B} = \sphericalangle \bar{BS}'\bar{C} = \sphericalangle \bar{CS}'\bar{A} = 60^\circ$ nebo 120° .

Konstrukce: 1. Libovolným bodem S mimo rovinu ρ vedeme rovnoběžky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ s danými mimoběžkami a, b, c .

2. Určíme průsečíky $\bar{A} \equiv \bar{a} \cdot \rho, \bar{B} \equiv \bar{b} \cdot \rho, \bar{C} \equiv \bar{c} \cdot \rho$ přímek $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ s rovinou ρ .

3. Užitím věty o obvodových úhlech v kružnici určíme v rovině ρ bod S' , z něhož je vidět strany trojúhelníka \bar{ABC} pod zorným úhlem 60° nebo 120° .

4. Spojnice SS' je hledaný směr rovnoběžného promítání.

Diskuse: a) Leží-li body $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ v přímce, jsou dané přímky a, b, c rovno-

běžné s jednou rovinou, existují dva body S' souměrně položené podle přímky \overline{AB} , úloha má dvě řešení.

b) Neleží-li \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} v přímce a žádný úhel trojúhelníka \overline{ABC} není 60° ani 120° , existují dva body S' a tím i dvě řešení.

c) Neleží-li \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} v přímce, trojúhelník \overline{ABC} má jeden úhel 60° nebo 120° a není rovnostranný, jest jedno řešení.

d) Neleží-li \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} v přímce a tvoří rovnostranný trojúhelník, jsou řešením všechny body S' na obvodě kružnice opsané trojúhelníku \overline{ABC} a kromě toho i jeho těžiště.

26. Máme určit celkový odpor obdélníkové kostry z odporového drátu (viz obr. 1a, b na str. 240) pro případ, že proudové přírady jsou: a) v místech 2 a 3, b) v místech 1 a 4. Všechny odporové dráty mají stejný průřez a stejný měrný odpor. Ve druhém případě musíme odporové spojení do trojúhelníka 123 převést na „odporovou hvězdu“, 123 (obr. 1c na str. 240).

Václav Šindelář

Řešení autorovo. Odporů jednotlivých větví si označme:

$$R_a = R_{13}, R_b = R_{12} = R_{34}, R_u = R_{23} = \sqrt{R_a^2 + R_b^2}. \quad (a)$$

a) V první části úlohy se jedná o určení výsledného odporu celé dané soustavy, v níž jsou jednotlivé odpory dílčí spojeny paralelně. Tedy podle Kirchhoffových zákonů bude

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a + R_b} + \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_a + R_b} = \frac{2}{R_a + R_b} + \frac{1}{R_u}, \quad (b)$$

z čehož

$$R = \frac{(R_a + R_b) \cdot \sqrt{R_a^2 + R_b^2}}{R_a + R_b + 2\sqrt{R_a^2 + R_b^2}} \quad (c)$$

b) Ve druhém případě musíme odporové spojení do trojúhelníka 123 převést na odporovou hvězdu 123 (obr. 1b, c). Přeměnou dostaneme hodnoty náhradních odporů:

$$R_1 = \frac{R_{13}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}},$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (d)$$

Dosadíme-li do rovnic (d) vztahy (a) bude

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_u}, \quad R_2 = \frac{R_b R_u}{R_a + R_b + R_u},$$

$$R_3 = \frac{R_a R_u}{R_a + R_b + R_u}. \quad (e)$$

Přeměnou odporového trojúhelníka na hvězdu dostáváme již jednoduchý výpočet výsledného odporu R' součtem seriově spojeného odporu R_1 s odporem R_k daným zřejmě vztahem

$$\frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_2 + R_{24}} + \frac{1}{R_3 + R_{34}}, \quad (\text{f})$$

který upravíme ve tvar

$$R_k = \frac{(R_a + R_b)(R_a - R_u)(R_b + R_u)}{(R_a + R_b + R_u)(2R_u + R_b + R_a)} \quad (\text{g})$$

Celkový odpor, jak již bylo řečeno, je tedy

$$R' = R_1 + R_k, \quad (\text{h})$$

kam si dosadíme z (e) a (g) a dostaneme konečně

$$R' = \frac{2R_a R_b + (R_a + R_b) \cdot \sqrt{R_a + R_b^2}}{R_a + R_b + 2\sqrt{R_a^2 + R_b^2}}. \quad (\text{i})$$

27. Navrhněte nonius pro stupnici vynesenu v anglické palcové míře. Nejmenší dílek stupnice $\frac{1}{16}$ in. Nonius má mít nonickou diferenci $\frac{1}{128}$ in. Na-

kreslete část stupnice s noniem při čtení $2\frac{5}{64}$ in. Současně určete, jaký je v daném případě nonický poměr a jakou hodnotu má daná nonická diference, vyjádříme-li ji v milimetrech.

Václav Šindelář

Řešil Jiří Mída, XI b, JSS v Brandýse nad Labem:

Nonická diference je v tomto případě $s - s_1 = \frac{1}{128}$ in, tj. $25,4 \cdot \frac{1}{128}$ mm \doteq \doteq 0,2 mm.

Šířka nejmenšího dílku hlavní stupnice $s = \frac{1}{16}$ in. Nonický poměr $\frac{s - s_1}{s} = \frac{1}{n} = \frac{1}{128} : \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ naznačuje, že vedlejší stupnice vznikla rozdě-

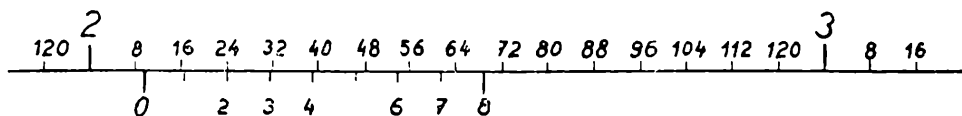
lením sedmi dílků hlavní stupnice (tj. $\frac{7}{16}$ in) na osm dílků stupnice vedlejší a

dále, že dílek hlavní stupnice (tj. $\frac{1}{16}$ in) si rozdělujeme na osminy, tj. na $\frac{1}{16} : 8 =$

$= \frac{1}{128}$ in. Vedlejší stupnici si můžeme označit od 0 až do $\frac{8}{128}$, nebo-li zjedno-

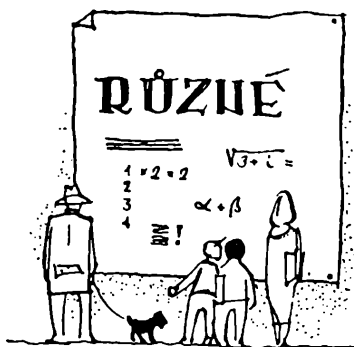
dušeně od 0 až do 8. Aby bylo čtení co nejjednodušší označíme dílky na hlavní stupnici jako $\frac{8}{128}$ in, $\frac{16}{128}$ in, $\frac{120}{128}$ in, nebo-li zjednodušeně 8, 16, ... 120.

Jak budeme na noniu číst? Nulová ryska nonia udává na hlavní stupnici počet celých palců (velké číslice) a dále čísla 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120 napsanými malými číslicemi počet stoosmadvacetin palce. Ryska nonia, která se právě kryje s některou ryskou hlavní stupnice, udává počet, a to 0, 1, 2, ... 8 stoosmadvacetin palce. Celkový počet stoosmadvacetin palce



Obr. 2

získáme, když tyto dva údaje o jejich počtu sečteme. V obrázku je nakreslena část stupnice s noniem při čtení $2\frac{5}{64}$ in, tj. $2\frac{10}{128}$ in. Nulová ryska nonia bude udávat na hlavní stupnici $2\frac{8}{128}$ palce a ryska nonia označená 2 se bude kryt s některou ryskou stupnice hlavní. Nákres je proveden ve zvětšeném měřítku (obr. 2).



Různé

Fyzikální olympiáda

pro školy Pražského kraje

Jednota čs. matematiků a fyziků odbočka v Praze spolu s Krajským pedagogickým ústavem v Praze-ÚNV pořádají v školním roce 1958-59 pro žáky 10. a 11. postupného ročníku škol v Pražském kraji

Fyzikální olympiádu,

jež je určena pro ty žáky, kteří mají zájem o fyziku a studium přírodních věd a technických oborů. Vyžaduje soustavné studium a trpělivost, proto bude všem účastníkům dobrou přípravou pro další vysokoškolské studium a pro pozdější povolání.

Žáci 11. tříd jedenáctiletých středních škol a žáci 4. a 3. ročníku průmyslových škol mají řešit úlohy kategorie A, kdežto žáci 10. třídy jedenáctiletých a žáci 3. a 2. ročníku průmyslových škol řeší úlohy kategorie B.

Soutěž potrvá do 15. května 1959. - Prvé kolo skončí 15. dubna 1959. V něm rozřeší každý účastník soutěže nejméně 8 ze zadaných úloh s úspěchem alespoň dobrým.

Řešení úloh číslo nutno odevzdati učitel fyziky nejpozději do dne	1 až 4 15. ledna 1959	5 až 8 1. března 1959	9 až 12 15. dubna 1959
--	------------------------------	------------------------------	-------------------------------

Nevyřeší-li žák v termínu všechny příklady, může zaslati i menší počet řešení; avšak do druhého kola mohou postoupit jen ti, kteří odevzdali ve stanovených lhůtách aspoň osm vyhovujících řešení úloh.

Řešení každé úlohy nechť vypracuje řešitel na samostatném listu papíru formátu A 4, píše jen inkoustem, úhledně a čitelně. Obrázky a konstruktivní práce se provedou na zvláštním papíru (aby bylo možno srovnávat obrázek s textem). V záhlaví každého listu se uvede jméno, třída a škola s její adresou (razítko školy), dále označení kategorie, číslo úlohy a její text.

V řešení každé úlohy, jež provádějte nejdříve obecně (pokud možno) a pak teprve číselně, připojte výklad postupu, z něhož je patrné, kterých fyzikálních zákonů se při řešení použilo, a odůvodněte, jak jich bylo použito. Při numerickém výpočtu dosazujte nejen číselné hodnoty, ale také jednotky (správně převáděné):

Řešení odevzdejte učitelu fyziky (referentu pro Fyzikální olympiádu) ve stanovené lhůtě. Ten je prohlédne, vyloučí zcela nevyhovující řešení a ostatní odešle (nejpozději třetího dne po uplynutí termínu) na adresu

Jednota čs. matematiků a fyziků (Fyzik. olympiáda) v Praze II, Žitná 25.

Druhé kolo soutěže se bude konat v květnu 1959 v den, který bude účastníkům oznámen. Nejlepší řešitelé druhého kola obdrží čestné knižní i věcné ceny.

A 1: Rychlík jel po vodorovné přímé trati ze stanice A do stanice B , které jsou od sebe vzdáleny 25 km. Nejdříve se rozjížděl se stálým zrychlením po dobu dvou minut a dosáhl rychlosti 86,4 km/hod. Pak jel touto rychlostí dále rovnoměrným pohybem. Ve vzdálenosti 1200 metrů před stanicí B začal brzdit (s rovnoměrným zpožděním) a ve stanici B se zastavil. Určete: a) Jak dlouho jel vlak ze stanice A do stanice B ? b) Jak velikou celkovou práci vykonala lokomotiva za jízdy a jaký byl její průměrný výkon, je-li váha vlaku s lokomotivou 400 tun, průměrný koeficient tření $f = 0,01$ a gravitační zrychlení přibližně $g = 10 \text{ m/s}^2$?

A 2: Předmět, jehož povrch je 200 cm^2 byl elektrolyticky stříbřen stálým proudem 0,4 ampéru. Pokovování trvalo 24 hodin. Jak silná je vrstva stříbra? (Dáno: hustota stříbra $s = 10,5 \text{ g/cm}^3$, atomová hmotnost stříbra je 108.)

A 3: Vypočítejte intenzitu elektrostatického pole ve středu čtverce o straně $a = 20 \text{ cm}$ jsou-li ve vrcholech tohoto čtverce umístěny: 1. čtyři stejně veliké souhlasné náboje $Q = 6 \text{ statcoulombů}$, 2. čtyři stejně veliké náboje (rovněž 6 sC), ale různých znamének. Uvažte všechny možnosti.

A 4: Na obrázcích (1, 2) jsou zakresleny polohy osy o kulového zrcadla, svítícího bodu A a jeho obrazu A' . Najděte konstruktivně vrchol zrcadla a jeho střed.

B 1: Železná kotva hmoty $m_1 = 80$ kg je spuštěna z lodi do mořské vody o hustotě $s_2 = 1,05$ g/cm³. Jakou práci nutno vykonat, aby byla vytažena z hloubky $h = 15$ m? (Tření a odpor prostředí zanedbejte. Hustota železa je $s_1 = 7,73$ g/cm⁻³.)

B 2: Mosazný kvádr hmoty $m_1 = 150$ g byl zahříván dostatečně dlouho v plameni, aby se zahřál na teplotu plamene. Potom byl vložen do mosazného kalorimetru, jehož hmota je $m_2 = 50$ g. V kalorimetru je $m_3 = 400$ g vody teploty 15 °C. Po vložení kvádru do kalorimetru se teplota ustálila na 45 °C. Množství tepla, vyzářené kvádrem, než byl přenesen z plamene do kalorimetru, zanedbáme.

Specifické teplo mosazi je $c_1 = 0,092 \frac{\text{cal}}{\text{g stupeň}}$, spec. teplo vody je $c_2 = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g stupeň}}$. Jaká byla teplota plamene?

B 3: Třístupňová raketa má vynést umělou družici do výše 1000 km nad zemský povrch a udělit jí takovou rychlost ve vodorovném směru, aby se pohybovala kolem země (= koule poloměru 6370 km) po kružnici a rovnoměrně. Druhým stupněm rakety byla družice vynesena do požadované výšky, přičemž má již 50 % konečné rychlosti a směr rychlosti je již vodorovný. Jaké konečné rychlosti musí družice dosáhnout, má-li se pohybovat rovnoměrně po kružnici? Jak velký přírůstek rychlosti musí dodat družici třetí stupeň rakety? Jak veliká je oběžná doba družice? Jak velkou energii musel dodat družici třetí stupeň rakety, je-li hmota družice $m = 80$ kg?

B 4: Granát je vystřelen svisle vzhůru z hlavně děla 19,62 m dlouhé, konečnou rychlostí v hlavni 981 m s⁻¹. Jak dlouho trvá pohyb granátu v hlavni, pokládáme-li jej za rovnoměrně zrychlený bez tření? Jak vysoko by vystoupil granát, kdyby nebylo odporu vzduchu a za jakou dobu by dopadl k zemi? Jak veliká je jeho energie, má-li hmotu $m = 100$ kg? Jak velkou silou působila výbušnina v hlavni?

Oldřich Lepil, Gottwaldov:

J. E. Torricelli

V říjnu jsme vzpomínali 350. výročí narození italského učenice J. E. Torricelliho.

Evangelista Torricelli, znamenitý italský fyzik a matematik, se narodil 15. října 1608. Byl žákem Galileovým a po jeho smrti se stal profesorem matematiky ve Florencii. Za svůj krátký život (zemřel v 39 letech roku 1647) vykonal řadu vynikajících prací, především z fyziky. Nejvíce proslul vynálezem tlakoměru a pokusem o měření tlaku vzduchu. Pokusy se rtutí dokázal Torricelli působení atmosférického tlaku a vyvrátil tvrzení o tom, že „příroda se bojí prázdna“. Klasický pokus, kterým byl tlak vzduchu dokázán, provedl roku 1643 podle návrhu Torricelliho jeho žák Viviani. Vedle pokusů z aerostatiky propracoval teorii svého učitele Castellioho o výtoku kapalin. Zabýval se též optikou; sestrojil mikroskop a zlepšil dalekohled. Jedním z jeho pokračovatelů byl B. Pascal.

Torricelliho vzorec

15. októbra 1958 uplynulo 350 rokov od narodenia talianskeho fyzika Jána Evangelistu Torricelliho. Pri tejto príležitosti vybrala ho Svetová rada mieru za svojho jubilanta, čím sama ocenila a celému svetu pripomenula veľkosť Torricelliho práce a jej význam pre ľudské poznanie a spoločenský pokrok.

Pripomeňme si pri tejto vzácnej príležitosti aspoň jeden problém, na ktorom Torricelli pracoval, rozoberme si ho a uctíme aspoň skromným článkom jeho veľké meno.

Pre rýchlosť kvapaliny vytekajúcej otvorom z nádoby platí vzťah

$$v = \sqrt{2hg},$$

ktorý nazývame Torricelliho vzorcom.

Tento vzorec Torricelli odvodil z roku 1643, keď na vytekajúcu kvapalinu aplikoval Galileov vzorec pre rýchlosť telies pohybujúcich sa po naklonenej rovine. Môžeme si ho však odvodiť priamo zo zákona zachovania energie, resp. z Bernoulliho rovnice.

Zo zákona zachovania energie odvodíme Torricelliho vzorec nasledujúcou úvahou.

Majme nádobu a vnej kvapalinu, hladinu, ktorej napriek stálemu vytekaniu otvorom v dne nádoby udržujeme v konštantnej výške h .

Určité množstvo kvapaliny hmoty m , nachádzajúce v klude sa vo výške h , má v tejto výške potenciálnu energiu

$$E_p = mgh,$$

kde g je hodnota gravitačného zrýchlenia.

Podľa predpokladu je jeho kinetická energia v tejto polohe nulová, teda celková mechanická energia zvoleného množstva kvapaliny vo výške h je rovná jeho potenciálnej energii.

Pri výtoku zvoleného množstva kvapaliny otvorom v dne nádoby (kde $h = 0$) je jeho potenciálna energia nulová a celková hodnota energie je vyjadrená kinetickou energiou

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

S ohľadom na zákon zachovania energie platí, že kinetická energia množstva kvapaliny m pri výtoku otvorom sa rovná potenciálnej energii tohto množstva vo výške h , čo môžeme vyjadriť rovnosťou

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

z ktorej úpravou dostaneme na začiatku uvedený Torricelliho vzorec

$$v = \sqrt{2hg}.$$

Ak udržujeme hladinu kvapaliny v stálej výške h je výtoková rýchlosť kvapaliny konštantná.

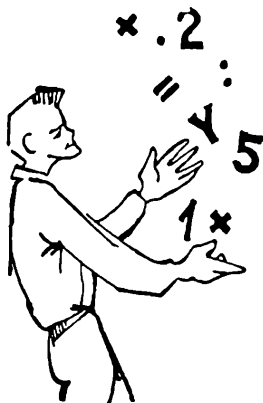
Všimneme si, že odvozený vzorec je totožný so vzorcom pre dopadovú rýchlosť telesa padajúceho voľne vo vákuu z výšky h .

V skutočnosti je však výtoková rýchlosť kvapaliny menšia než jej vypočítaná hodnota z Torricelliho vzorca, čo je spôsobené hlavne vnútorným trením kvapaliny, s ktorým sa v Torricelliho vzorci nepočíta.

Skutočná rýchlosť výtoky kvapaliny je potom daná vzťahom

$$v_s = \varphi \cdot v,$$

v ktorom je tzv. rýchlostný činiteľ ($\varphi < 1$), ktorý nájdeme v hydraulických tabuľkách a v je výtoková rýchlosť vypočítaná z Torricelliho vzorca.



Matematické zábery

Hádanka

Dovedete stanoviť dve čísla tak, aby jejich ciferné součty i ciferný součet jejich součtu byly stejné? To jistě není těžké, takových dvojic je mnoho, například:

180	ciferný součet je 9
225 ciferný součet je 9
405	ciferný součet je 9.

Zkuste však stanoviť obecně nutnou a postačující podmínku pro libovolná dvě čísla, aby byla dvojicí splňující naši úlohu.

Josef Kleiner



Redakce hovoří se čtenáři

Seznam řešitelů úloh

V závorce za jmény řešitelů jsou čísla příkladů řešených dobře nebo jen s menší chybou. Chybně provedené příklady nejsou zde uvedeny.

Pavel Axamit, XI. B, 1. JSS, Pardubice (6, 8, 12, 17, 19, 24). *Vojtěch Bartík*, XI. B, 1. JSS, Znojmo (1 až 6, 15, 17 až 23). *Juliána Baštecká*, XI. B, JSS, Pra-

ha 16 (1, 9 až 15, 17 až 18, 23, 26, 27). *Oldřich Bílek*, XI. A, JSS, Hradec Králové (1 až 3). *ĽUDr Karel Blažek*, Olomouc (1 až 6, 8 až 10, 12, 14, 15, 18, 23, 27). *Miroslava Haklová*, X. A, 6. JSS, Praha 6 (1, 2, 6, 9, 10, 14, 15, 23, 27). *Pavel Hirš*, X., JSS, Havlíčkův Brod (2 až 4, 6, 9 až 11, 14, 19). *Daniela Hýblová*, X. A, 2. JSS, Olomouc (1, 2, 4, 6, 9, 10, 12, 14). *Alois Janás*, XI., Gottwaldov (12, 17, 18). *Eduard Konvalina*, XI. B, JSS, Gottwaldov (8, 17, 18). *František Kružik*, XI. B, JSS, Gottwaldov (12, 13, 17, 18). *Karel Kunc*, XI. D, 1. JSS, Znojmo (1 až 6, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 20 až 24, 26, 27). *Pavel Mateásko*, X. C, 20. JSS, Praha 16 (6, 9, 10). *Marie Melicharová*, X. D, JSS, Hradec Králové (1, 2, 4, 6, 8 až 10, 14 až 16, 22, 23, 27). *Ľirí Mída*, XI. B, JSS, Brandýs nad Labem (1 až 15, 17 až 23, 25, 27). *Miroslav Mikulík*, XI., JSS, Gottwaldov (13, 17, 18). *Petr Moravec*, IX. D, 2. JSS, Pardubice (14). *Ľaroslav Pech*, XI. A, JSS, Ústí nad Labem (1 až 6, 8, 9, 14, 15, 17, 20, 23). *Peter Preisler*, X. A, JSS, Trenčín (1 až 10, 14 až 19, 23, 24, 26). *Vladimír Schejbal*, XI., Holice v Čechách (4 až 6, 8 až 10, 12, 15, 17, 18, 22, 23, 25, 27). *Ivan Zoc*, X. E, 16. JSS, Praha 13 (9, 14 až 16). *Ľan Zvánovec*, IX., 15. JSS, Praha 12 (9, 10, 14).

Udělení cen

Redakce spolu s autory úloh přihlížela při oceňování i k jakosti správně řešených příkladů a třídě, v níž řešitel studuje. Bylo rozhodnuto odměnit knižními cenami tyto řešitele:

- A) z XI. třídy: *Ľirího Mídu*, Brandýs nad Labem, Komenského 601,
Karla Kunce, Znojmo, Ul. Mládeže 7,
Vojtěcha Bartíka, Znojmo, Stojanova 9,
Ľaroslava Pecha, Všebořice 128,
Ľulianu Bašteckou, Praha 16, Plzeňská 4;
- B) z X. třídy: *Petera Preislera*, Trenčín, ul. Nár. povstania 2,
Marii Melicharovou, Hradec Králové, Klumparova 608,
Danielu Hýblovou, Olomouc, Wanklova 4;
- C) z řad čtenářů nestudentů *ĽUDr. Karla Blažka*, Olomouc, Polívkova 7 b.

Zvláště oceňujeme dobrý výkon studujícího X. třídy *Petera Preislera*, který v celkové klasifikaci by dosáhl čestného třetího místa.

Redakce děkuje všem z řad studentů i ostatních čtenářů, kteří zaslali řešení a těší se, že se příští rok počet řešitelů ještě zvětší. Žádáme učitele matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie, aby naši soutěž propagovali, neboť zkušenost ukázala, že mnozí řešitelé loňské soutěže se stali dobrými studenty vysoké školy.

Současně děkujeme ministerstvu školství a kultury i Jednotě československých matematiků a fyziků za věnování hodnotných knižních cen pro naše řešitele.

* *Příklady č. 5 — 12 Fyzikální olympiády Pražského kraje budou otištěny v příštím čísle.*

Oprava:

Na str. 409 v č. 9 otočte obr. 9 o 90°.