

# ROZHLEDY

ročník 35

1

1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO - FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 1

Toto číslo vyšlo 25. ledna 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

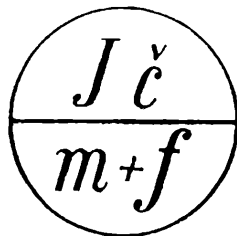
Výkonný redaktor *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada: Pavel Bartoš, JSS, Zlaté Moravce; Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, KU, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; prof. Dr. Zdeněk Horák, ČVUT, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, VŠP, Praha; Václav Müller, KU, Praha; Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, KU, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ČVUT, Praha; Jaroslav Vachek, MŠK, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, PŠS, Praha.*

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## O B S A H

Ministr Dr. Fr. Kahuda: Úvodní projev k čtenářům	1
Redakce: Naším čtenářům	2
O. Setzer: O posloupnosti mocnin lichých čísel	4
Doc. J. Vyšín: Problém křížovky	8
S. Horák: Mocnost bodu ke kružnici	14
Doc. Dr. K. Havlíček: Nevlastní elementy v geometrii	19
Doc. Dr. M. Menšík: Základy kinematické geometrie v rovině	23
J. Kopáček: Jak vznikají oblaky	27
J. Tichý: O zvucích v přírodě, které neslyšíme	36
Ing. Dr. V. Šindelář: Dopplerův princip	38
Úlohy k řešení	43
Prof. MUDr. J. Štefl: Lékařství a matematika	45
Dr. T. Gajdoš: Jubileum prof. Dr. Josefa Zahradníčka	48
J. Sedláček: O matematické olympiádě	3. str. obálky
Doc. Dr. M. Menšík: Naším přispěvatelům	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné prostřednictvím ředitelství škol u poštovních úřadů. - A - 12516

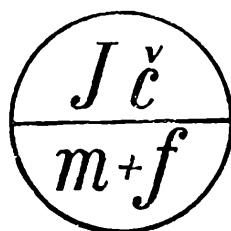
Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

*Časopis pro studující a učitele škol všeobecně vzdělávacích i odborných*

VEDOUcí REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER



ROČNÍK 35  
1957

*Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství a kultury  
za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.*

*Redakční rada: Pavel Bartoš, JSS, Zlaté Moravce; Jaroslav Bejsta, OSS, Praha; Petr Benda, JSS, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr Josef Dibelka, KU, Praha; doc. Dr Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; prof. Dr Zdeněk Horák, ČVUT, Praha; doc. Dr Josef Korous, VŠZ, Praha; doc. Emil Kraemer, VŠP, Praha; Václav Müller, KU, Praha; Jiří Sedláček, kand. věd, ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr Václav Šindelář, ČVUT, Praha; Jaroslav Vachek, MŠK, Praha; prof. Dr Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, PŠS, Praha.*

*Redakce: Praha 6, Zikova 4, telefon 322241 až 6, linka 570.*

## O B S A H

### Úvodníky:

Kadeřávek František: 250 let inženýrských škol v Praze . . . . .	193
Kahuda František: Úvodní článek ministra školství a kultury . . . . .	1
Korous Josef: 1917—1957 . . . . .	385
Tichý Karel: Třetí dělnický prezident . . . . .	433
Vaculík Vítězslav: ...ukazoval cestu, obohatil život, zůstavil dílo . . . . .	vložka

### Matematika:

Bartoš Pavel: O lineárních rovnicích s jednou neznámou, které mají dva kořene . . . . .	49
Buchta Oldřich: K jedné otázce z planimetrie . . . . .	439
Havlíček Karel: O jedné úloze z geometrie kružnic . . . . .	152
Havlíček Karel: Vypořádejme se se složenými zlomky . . . . .	289
Holubář Josef: Řešení jedné planimetrické úlohy . . . . .	341
Horák Stanislav: Mocnost bodu ke kružnici . . . . .	14, 60
Horák Stanislav: Dvě věty o rovnoběžnicích vepsaných trojúhelníku . . . . .	298
Horák Stanislav: Trojúhelníková čísla . . . . .	337
Jeništa Oldřich: O hodnotách goniometrických funkcí některých speciálních úhlů . . . . .	350
Jůza Miloslav: O jedné vlastnosti trojúhelníka . . . . .	150
Kejzlar Antonín: Zlatý řez úsečky . . . . .	55
Kubálková Svatava: Konstrukce s nepřístupnými prvky . . . . .	119, 157
Kučera Vladimír: Rozšíření Pythagorovy věty . . . . .	194
Langhammer Rudolf: O funkcích s absolutní hodnotou . . . . .	241
Langhammer Rudolf: O diskusích řešení rovnic s parametry . . . . .	434
Langr Josef: Trojúhelník o úhlech $\gamma = 2\beta = 4\alpha$ . . . . .	386
Marek Jiří: Obecné pravidlo dělitelnosti pro dělitele, jejichž poslední cifra jest 1, 3, 7 nebo 9 . . . . .	97
Marek Jiří: Výhodné řešení rovnice třetího stupně . . . . .	197
Menšík Miroslav: Polární souřadnice . . . . .	160
Metelka Václav: Několik poznámek k řešení algebraických rovnic o jedné neznámé . . . . .	51, 106
Sedláček Ladislav: Geometrické konstrukce pravítkem a měřítkem . . . . .	293
Setzer Ota: O posloupnosti mocnin lichých čísel . . . . .	4
Tondl Aleš: Pappovy úlohy . . . . .	347
Valešová Marie: Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty . . . . .	145
Vítek Václav: Dokonalá čísla, Mersennova a Fermatova prvočísla . . . . .	291
Vyšín Jan: Problém křížovanky . . . . .	8
Vyšín Jan: Povídka o geometrické úloze . . . . .	111

### Deskriptivní geometrie:

Drs Ladislav: Úlohy polohy v středové axonometrii . . . . .	354, 392
Havel Václav: O pravidelném čtyřstěnu . . . . .	128
Havlíček Karel: Nevlastní elementy v geometrii . . . . .	19

Horák Stanislav: Kardioida . . . . .	247
Horák Stanislav: Tři věty o hyperbole . . . . .	301
Menšík Miroslav: Základy kinematické geometrie v rovině	23, 64, 163, 202
Setzer Ota: O několika symbolech užívaných v geometrii	352

*Fyzika:*

Halenka Jaroslav: Mezinárodní geofyzikální rok a náš příspěvek k němu	313
Janko Ladislav: O ultrazvukově optickém zobrazování předmětů reliefním obrazem . . . . .	. . . 135
Kašpar Emil: Skládání stejnosměrných harmonických kmitů	410, 444
Klier Emanuel: O fotoelektrickém zjevu	68
Kopáček Jaroslav: Jak vznikají oblaky	27
Kratochvíl Petr: Růst krystalů	75
Lepil Oldřich: Brownův pohyb . . . . .	. . . . . 360
Litzman Otto: Jaké jsou zákony pohybu elektronu	166, 364, 399
Müller Václav: Thermoanemometr	130
Obůrka Oto: Jaká je rychlost světla . . . . .	215
Pacholík Vladimír: Laminární a turbulentní proudění	268
Pátý Libor: O iontových vývěvách . . . . .	. . . 174
Prosser Václav: Co je to spektrální analýza?	318, 367
Rein František: Mlha . . . . .	. . . 261
Růzha Zdeněk: Pohon letadel . . . . .	273, 304
Říman Evžen: Dimenzionálna správnosť fyzikálnych rovníc	219
Schürer Přemysl: Jak měříme nízké tlaky	227
Spěváček Otomar: Vznášení a plování těles	402
Šindelář Václav: Dopplerův princip	38
Šindelář Václav: O rázu těles . . . . .	255
Tichý Jan: O zvucích v přírodě, které neslyšíme . . . . .	36
Tichý Jan a Jiří: Elektret-elektrická obdoba permanentního magnetu	415
Vanovič Ján: Hmota a žiarenie . . . . .	449
Voleský Jiří: O využití sluneční energie	371

*Astronomie:*

Budějický Jaromír: Radiové teleskopy . . . . .	150
Halenka Jaroslav: První umělá družice Země . . . . .	. . . 460
Kleczek Josef: Planety . . . . .	210, 251
mp: Uvidíme Drakonidy? . . . . .	324
Náprstková Jitka: Význam astronomie pro praktický život	417
Ruprecht Josef: Hvězdokupa viditelná pouhým okem . . . . .	277
Sehnal Ladislav: Historie „zavodňovacích kanálů“ na Marsu	185
Sehnal Ladislav: Planety na letním nebi . . . . .	276
Sehnal Ladislav: Dvě elongace planety Merkura	324
Sehnal Ladislav: Meteorické roje v letošním roce	463

*Matematické zábavy:*

Horák Stanislav: Zajímavé posloupnosti . . . . .	. . . 237
H. S.: Skládačka . . . . .	331, 374
Jeništa Oldřich: K příběhu o nevěstě	429
Sedláček Jiří: O jedné zajímavé hře . . . . .	143
Sedláček Jiří: O rozměňování pětadvacetihaléře	236
Setzer Ota: Číselné hříčky . . . . .	190
Urban Alois: Příběh o nevěstě	191
Urban Alois: Bloudění . . . . .	. . . 238
Š. V.: Hádanky	239, 287

*Recenze:*

Menšík Miroslav: J. R. Šafarevič, O řešení rovnic vyšších stupňů	94
Pátý Libor: Zd. Horák, Úvod do molekulové a atomové fyziky	283
Pátý Libor: L. Zachoval, Fyzikální základy fotografie	95
Sedláček Jiří: G. M. Mirakjan, Šroubovice	284
Sedláček Jiří: P. P. Korovkin, Nerovnosti	329

*Různé:*

Gajdoš Tadeáš: Jubileum prof. Dr Josefa Zahradníčka	48
Kadeřávek František: Vzpomínka na 250. výročí založení inženýrských škol v Praze	187
Kosmák Ladislav: Šedesátiny prof. Dr Karla Koutského	375
Kotyk Josef: Alessandro Volta	279
Kotyk Josef: Nikola Tesla	325
Kotyk Josef: Charles Auguste Coulomb	89
Kotyk Josef: K výročí J. A. Komenského	419
Menšík Miroslav: Co jest JČMF	87
Petrův Vladimír: K šedesátým narozeninám akad. V. Jarníka	464
Rychlík Karel: Prof. Dr František Rádl	285
Veselý František: Leonard Euler, nejslavnější petrohradský akademik	92, 140
Zelinka Rudolf: Zemřel PhDr Josef Honzák	376

*Jiní o nás:*

Nejepsa Robert: Milí studenti, ...	286
Štefl Jiří: Lékařství a matematika	45, 86

*Úlohy:*

Úlohy k řešení	43, 84, 139, 186, 235, 278
Řešení úloh	332, 376, 423, 468

*Matematická olympiáda:*

obálka č. 1, 6, 7, 8, 9, 10

*Zprávy z poboček JČMF:*

obálka č. 1, 3, 6

*Redakční sdělení, dopisy čtenářů:*

obálka č. 1, 4, 7; str. 2, 43, 95, 144, 192, 240, 288, 335, 384, 432, 476.

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

ROČNÍK 35 - 1957

ČÍSLO 1

Mladí přátelé,

*po několikaletém přerušení opět vycházejí Rozhledy matematicko-fyzikální pro naši studující mládež. Navazují na slavnou tradici, neboť celá generace našich matematiků a fyziků, která nyní zaujímá významné postavení ve vědeckém světě, byla vychována Rozhledy. Budete-li listovat ve starších ročnících Rozhledů, najdete tam mnoho jmen pracovníků, kteří nyní působí na vysokých školách a ve výzkumných ústavech a jsou vedoucími pracovníky v našem rozvíjejícím se průmyslu.*

*Časopis vás bude informovat o mohutném rozvoji matematiky, fyziky, astronomie a dalších věd. Chce vám předkládat různé náročné problémy k řešení, poradí vám ve vašem studiu a bude vám ukazovat obrovské možnosti, které se vám naskytanou při vašem vysokoškolském studiu i ve vašem budoucím povolání.*

*Vzbudit váš zájem o tyto obory nebude tak těžké. Neboť koho by nezajímaly otázky mírového využití atomové energie, umělé radioaktivity, kosmického záření, teorie a praktického využití polovodičů, matematických strojů a strojů, které mohou překládat z jednoho jazyka do jiného, pokusy o sestavení umělých oběžnic, příprava letů do vesmíru, nové teorie o vzniku hvězd a galaxií a mnoho a mnoho dalších teorií, objevů a vynálezů.*

*Časopis vám jistě i dokáže, že vědecká práce je práce každodenní, vytrvalá a často i „šedivá“ a že žádný vědecký objev nespádl nikomu do klína bez námahy.*

*Věřím, že Rozhledy budou občas přinášet i zprávy od našich předních vědeckých pracovníků o tom, jak pracují a jakým způsobem se vypracovali na ta významná místa, která zaujmají.*

*Jak poznáte, je příprava a výchova vědeckého pracovníka obtížná, trvá mnoho let a je velmi nákladná. K této práci potřebuje člověk mnoho zvláštních osobních a povahových vlastností. Vědeckých pracovníků není nikdy nadbytek. Chápeme proto jako svou svrchovanou povinnost, abychom se starali o každý talent a vytrvalou zálibu mladých lidí pro vědeckou práci.*

*Tento časopis chce být vaším rádcem a pomocníkem.*

*Přeji vám, mladí přátelé, abyste se do těchto vědeckých oborů natrvalo zamilovali, abyste v nich úspěšně pracovali a tak prospěli svým dílem v pospolitém budování naší socialistické vlasti.*

*V Praze dne 30. prosince 1956.*

*Dr František Kahuda  
ministr školství a kultury.*

## Našim čtenářům

Roku 1920 vznikl z přílohy Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, vydávaného Jednotou čs. matematiků a fyziků, časopis *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*. Byl původně určen studujícím tehdejších středních škol a přinášel formou i obsahem přístupné články z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, aby u nich vzbuzoval zájem o exaktní přírodní vědy. Od r. 1953 byly *Rozhledy* vydávány ČSAV jako populárně vědecký časopis pro matematiku, astronomii, fyziku i chemii a přestal vycházet koncem r. 1955.

Po roční přestávce dostávají čtenáři opět do rukou časopis, který navazuje na pokrokové tradice *Rozhledů*, jichž je tedy 35. ročníkem. Časopis pokračuje v nových poměrech ve starém poslání: bude sloužit škole a pokroku a tím i našemu státu. Se současným odborným zaměřením mění také časopis i svůj název na *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

Úkolem *Rozhledů matematicko-fyzikálních* je vzbuzovat u studujících škol třetího stupně - budoucích techniků - zájem o matematiku a fyziku. *Rozhledy* budou prohlubovat a rozšiřovat jejich znalosti v matematice, deskriptivní geometrii a fyzice, a tak stále pomáhat škole. Tím chtějí *Rozhledy* získávat žáky jedenáctiletých středních škol pro studium technických věd a současně zvyšovat jejich kvalifikaci pro toto studium i získávat jejich zájem pro praktická povolání. Uvážíme-li, že matematika i fyzika jsou vědy, bez nichž by moderní výroba nebyla myslitelná, vidíme, že *Rozhledy* mohou mít významnou úlohu při polytechnisaci vyučování, budou-li plnit úspěšně své poslání mezi žáky i učiteli. Plánovitě rozvíjení výroby za účelem neustálého zvyšování hmotného i kulturního blahobytu našeho národa je základem socialistické společnosti, kde bez vysoce kvalifikovaných inženýrských kádrů nelze těchto cílů dosáhnout.

Je známo, že je matematika obávaným předmětem na školách. Obávaným proto, že je obtížná pro svou abstraktnost. Je však zároveň nezbytným nástrojem pro inženýra. Bez dobré znalosti matematiky nelze si dnešní technika představit.

*Rozhledy* budou neustále ukazovat důležitost matematiky pro fyziku a technické vědy. Proto budou uveřejňovat řešení různých problémů fyzikálních a technických pomocí matematiky.

K řešení takovýchto úloh je nezbytná zručnost v numerickém počítání, jemuž na středních školách není pro nedostatek času věnována žádoucí pozornost. *Rozhledy* se vynasnaží všítipit svým čtenářům náležitou zručnost v praktickém počítání.

Časopis chce ovšem věnovat velkou pozornost i t. zv. čisté matematice, neboť chceme-li matematiku aplikovat, musíme ji napřed ovládat i theoreticky. Přitom bude cílem především prohlubovat a upevňovat vědomosti získatné na škole třetího stupně a jen místy je poněkud rozšiřovat.

V algebře si budeme všítmat především rovnic, které často přicházejí v různých zajímavých aplikacích matematiky na vědy fyzikální a technické. Seznámíme čtenáře i s některými přibližnými metodami řešení algebraických i transcendentních rovnic.



*Tim se čtenáři zdokonalí též v numerickém počítání. Také goniometrickým rovnicím bude věnována náležitá pozornost.*

*Rozhledy seznámí časem čtenáře i se základy analytické geometrie a počtu diferenciálního, a to v minimálním rozsahu, nutném pro řešení nejjednodušších úloh v geometrii a fyzice.*

*Dále budou uveřejňovat články z elementární theorie čísel, neboť theorie čísel patří k nejkrásnějším oborům matematiky a je velmi zajímavá.*

*Čtenáři Rozhledů se v nich seznámí také se základy počtu pravděpodobnosti, který je tak důležitý ve vědách přírodních i společenských.*

*V geometrii se budou Rozhledy zabývat jak planimetrií, tak i stereometrií, a to především problémy praktického rázu. Totéž platí i o trigonometrii.*

*Řešením různých úloh z kinematiky a mechaniky se čtenáři Rozhledů seznámí i s některými methodami vektorového počtu.*

*Čtenáři najdou v časopise i poučení o logické výstavbě matematiky a o jejích methodách. Tim jim bude usnadněno hlubší pochopení učiva probíraného ve škole.*

*Rozhledy budou pomocníkem matematické olympiady, která probíhá na našich školách úspěšně již šestý rok, a uveřejní zdařilá řešení úloh olympiady i jména úspěšných řešitelů.*

*V deskriptivní geometrii budeme sledovat prostorové řešení jednotlivých úkolů i jejich grafické provedení. Vypěstování dobré prostorové představivosti je tu ovšem prvním úkolem. Přitom navážeme na známé poučky ze stereometrie, podle potřeby tyto znalosti čtenářů prohloubíme. Rovněž se budeme snažit poskytnout čtenářům i praktické pokyny pro rýsování. Vedle toho si budou Rozhledy všimati i aplikací deskriptivní geometrie v jiných vědních oborech, v technice a v umění. Nezapomeneme ani na historický vývoj matematiky a deskriptivní geometrie.*

*Rozhl'ady budú prinášať články zo všetkých dôležitých oborov fyziky. V prvom rade však pravidelne zoznámia svojich čitateľov s terajším stavom a postupne aj s ďalším vývojom nukleárnej fyziky a jej aplikácií. Pravdaže je dôležité, aby čitatelia nezabúdali, že sa fyzika rozvíja aj v druhých svojich úsekoch a bez týchto výsledkov rozvoja by sa nemohla rozvíjať ani technická ani nukleárna fyzika. Preto okrem nukleárnej fyziky budú Rozhl'ady zoznamovať čitateľov aj s fyzikou pevných látok, elektronikou, mechanikou, obzvlášť mechanikou nadzvukových rýchlostí, s termikou, vedeckou fotografiou, optikou, a to zvlášť kvantovou optikou, s methodami skúmania materiálov či už roentgenovými paprškami alebo ultrazvukom a či inými methodami. Tento výpočet nemá omezovať obory, ktorých si Rozhl'ady budú všimati, ale má len upozorniť na tie obory, ktoré sa dnes ukazujú ako najnaliehavejšie. Ostatné námety sa budú vyberať podľa vývoja fyziky a techniky, pretože chceme dôsledne sledovať význam fyziky pre techniku a ostatné vedy.*

*Námety z daných oborov budú spravované vo forme prístupných článkov, ktoré budú iste niekedy na pokračovanie, napr. v obore nukleárnej fyziky. Okrem toho budú v Rozhl'adoch aj krátke zprávy a drobné upozornenia na nové objavy alebo nové použitie fyziky. Radi by sme zoznamovali čitateľov systematicky s fyzikou aj tak, že im budeme ukazovať v drobných článkoch, kde a ako sa fyzikálne zákonitosti prejavujú v zjavoch každodenného života.*

*Považujeme za veľmi dôležitú povinnosť uverejňovať aj návody k fyzikálnym*

pokusom, ktoré môže čitateľ ľahko previesť s dostupným zariadením buďto sám, alebo ešte lepšie v školských záujmových krúžkoch.

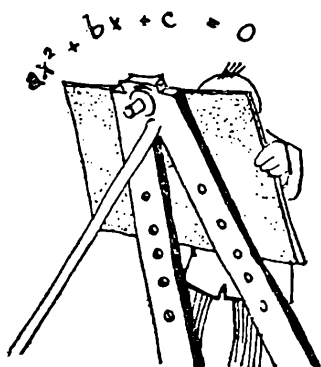
Na záver zdôrazňujeme, že sa pousilujeme, aby všetky uverejnené články boli napísané síce odborné presne, ale prístupne veku a chápaniu našich čitateľov. Nadto okrem článkov každému ľahko zrozumiteľných uverejníme občas aj pojednanie náročnejšie na pozornosť a chápanie čitateľa.

Aby sa čtenáři naučili hlouběji pronikat do podstaty matematických, geometrických i fyzikálních zákonitostí a aby se zvýšila jejich soutěživost, chceme pro ně uveřejňovat i příklady k řešení. Nejlepší řešení těchto příkladů budou odměňována cenami. Při výběru příkladů z fyziky chceme přihlížet k aplikacím jak v technice, tak i v denním životě.

Konečně budeme seznamovat čtenáře s novými knihami a publikacemi uvedených oborů, a to recensemi a zprávami přiměřenými úrovni čtenářů.

Aby styk mezi časopisem a čtenáři byl co nejužší, přejeme si, aby se našlo co nejvíce vhodných příspěvkatelů - nikoliv jako dosud - mezi učiteli vysokých škol, nýbrž právě mezi učiteli škol třetího stupně, případně i mezi vynikajícími žáky.

Redakce.



## Matematika

Ota Setzer, Kralupy n. Vlt.:

### O posloupnosti mocnin lichých čísel

Jestliže pro čísla  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$  platí předpis, že rozdíly  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_{k+1} - a_k, \dots$  jsou stále stejně veliké, říkáme, že čísla  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$  tvoří aritmetickou posloupnost. Čísla  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , obecně  $a_n$ , nazýváme členy posloupnosti a konstantní rozdíl  $d$  mezi kterýmikoli dvěma sousedními členy je t. zv. *diference*.

V dalším se budeme zabývat jen zvláštním případem aritmetické posloupnosti, t. j. posloupnosti lichých čísel: 1, 3, 5, 7, ..., v níž první člen je  $a_1 = 1$  a *diference*  $d = 2$ . Snadno se přesvědčíme, že  $n$ -tý člen této posloupnosti je  $a_n = 2n - 1$ , na př.  $a_{19} = 2 \cdot 19 - 1 = 37$ .

Zajímavý výsledek dostaneme, sečteme-li prvních  $n$  členů posloupnosti lichých čísel. Tento součet označíme  $S_n^{(1)}$ . Součet  $S_n^{(1)}$  rozepíšeme jednou v zestupně, pak sestupně:

$$S_n^{(1)} = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 5 + 2n - 3 + 2n - 1$$

$$S_n^{(1)} = 2n - 1 + 2n - 3 + 2n - 5 + \dots + 5 + 3 + 1$$

Sečteme-li obě rovnice, dostaneme na levé straně  $2 \cdot S_n^{(1)}$ ; na pravé straně sečteme vždy dvě čísla napsaná pod sebou; každý z těchto  $n$  dílčích součtů se rovná  $2n$ , takže celý součet pravých stran je  $2n^2$ ; srovnáním obou stran dostaneme:

$$S_n^{(1)} = n^2 \quad (1)$$

Výsledek vyslovíme větou: Součet prvních  $n$  lichých čísel se rovná dvojmoci jejich počtu.

Je přirozené, že tato věta platí jen pro naši zvláštní aritmetickou posloupnost.

Věty (1) lze užít ke konstrukci tabulek dvojmocí přirozených čísel. Ke známé dvojmoci  $1^2 = 1$  přidáváme totiž postupně za sebou jdoucí lichá čísla 3, 5, 7, ... čímž dostáváme hledané čtverce  $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ .

Uurčíme si nyní součet  $S_n^{(2)}$  čtverců  $n$  prvních členů předchozí posloupnosti, t. j.

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2$$

Již z několika prvních členů se přesvědčíme, že tato posloupnost není aritmetická, neboť rozdíly sousedních členů nejsou stejné.

Vypočteme nejprve trojmoc dvojjčlenu  $n + 2$ :

$$(n + 2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Do této identity dosazujeme za  $n$  postupně lichá čísla: 1, 3, 5, ...  $2n - 1$

$$\begin{array}{rcllcl} 3^3 & = & 1^3 & + & 6 \cdot 1^2 & + & 12 \cdot 1 & + & 8 \\ 5^3 & = & 3^3 & + & 6 \cdot 3^2 & + & 12 \cdot 3 & + & 8 \\ 7^3 & = & 5^3 & + & 6 \cdot 5^2 & + & 12 \cdot 5 & + & 8 \end{array}$$

$$(2n - 1)^3 = (2n - 3)^3 + 6 \cdot (2n - 3)^2 + 12 \cdot (2n - 3) + 8$$

$$(2n + 1)^3 = (2n - 1)^3 + 6 \cdot (2n - 1)^2 + 12 \cdot (2n - 1) + 8$$

Vzniklo nám  $n$  rovnic, jež sečteme, při čemž nepíšeme členy  $3^3, 5^3, \dots, (2n - 1)^3$ , které se vyskytují na obou stranách rovnic:

$$(2n + 1)^3 = 1 + 6 \cdot [1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2] + 12 \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + 8n$$

Na levé straně provedeme naznačený výkon, na pravé straně nahradíme za hranaté závorky příslušné symboly:

$$8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 1 + 6 \cdot S_n^{(2)} + 12 \cdot S_n^{(1)} + 8n$$

Dosadíme-li sem z rovnice (1) za  $S_n^{(1)}$  hodnotu  $n^2$ , dostaneme po sloučení:

$$8n^3 - 2n = 6 S_n^{(2)},$$

odtud

$$S_n^{(2)} = \frac{n}{3} \cdot (4n^2 - 1) \quad (2)$$

Postup při výpočtu součtu  $S_n^{(3)}$  trojmocí prvních  $n$  lichých čísel je obdobný jako pro  $S_n^{(2)}$ .

Určíme čtvrtou mocninu dvojčlenu  $n + 2$ :

$$(n + 2)^4 = n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16$$

a do vzniklé identity opět dosazujeme postupně: 1, 3, 5, ...  $2n - 1$ .

$$3^4 = 1^4 + 8 \cdot 1^3 + 24 \cdot 1^2 + 32 \cdot 1 + 16$$

$$5^4 = 3^4 + 8 \cdot 3^3 + 24 \cdot 3^2 + 32 \cdot 3 + 16$$

$$(2n + 1)^4 = (2n - 1)^4 + 8 \cdot (2n - 1)^3 + 24 \cdot (2n - 1)^2 + 32 \cdot (2n - 1) + 16$$

Stejnými obraty jako dříve vzniknou rovnice:

$$(2n + 1)^4 = 1 + 8 \cdot S_n^{(3)} + 24 \cdot S_n^{(2)} + 32 \cdot S_n^{(1)} + 16n$$

$$16n^4 + 32n^3 + 24n^2 + 8n = 8 \cdot S_n^{(3)} + 8n(4n^2 - 1) + 32n^2 + 16n$$

$$8 \cdot S_n^{(3)} = 16n^4 - 8n^2,$$

čili

$$S_n^{(3)} = (2n^2 - 1) \cdot n^2 \quad (3)$$

Kdybychom předchozí postup opakovali, dospěli bychom snadno k součtu  $S_n^{(4)}$  čtvrtých mocnin lichých čísel od 1 do  $2n - 1$ :

$$S_n^{(4)} = \frac{n}{15} \cdot (4n^2 - 1) \cdot (12n^2 - 7) \quad (4),,$$

o čemž se může čtenář sám přesvědčit.

Ze vzorců (1) a (3) odvodíme zajímavou vlastnost posloupností lichých čísel.

V posloupnosti prvních mocnin lichých čísel hledíme součet:

$s_{n,k}^{(1)} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k}$ , t. j. součet  $k$  členů, počínající  $(n + 1)$ . členem. Snadno nahlédneme, že

$$s_{n,k}^{(1)} = S_{n+k}^{(1)} - S_n^{(1)};$$

užijeme-li opět výsledku (1), obdržíme:

$$s_{n,k}^{(1)} = (n + k)^2 - n^2 = 2nk + k^2$$

$$s_{n,k}^{(1)} = k \cdot (2n + k) \quad (5)$$

Výsledek (5) ukazuje, že součet  $s_{n,k}^{(1)}$  je dělitelný počtem  $k$  sčítaných členů bez ohledu na to, od kterého členu jsme začali sčítat.

Obdobnou vlastnost má i součet trojmocí týchž členů:

$$s_{n,k}^{(3)} = a_{n+1}^3 + a_{n+2}^3 + a_{n+3}^3 + \dots + a_{n+k}^3$$

$$s_{n,k}^{(3)} = S_{n+k}^{(3)} - S_n^{(3)}$$

Užijeme rovnice (3):

$$s_{n,k}^{(3)} = (n+k)^2 \cdot [2 \cdot (n+k)^2 - 1] - n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

$$s_{n,k}^{(3)} = 2[(n+k)^4 - n^4] - [(n+k)^3 - n^3]$$

Vytkneme společný činitel z obou členů pravé strany:

$$s_{n,k}^{(3)} = [(n+k)^2 - n^2] \cdot (4n^2 + 4nk + 2k^2 - 1)$$

$$s_{n,k}^{(3)} = k \cdot (2n+k) \cdot (4n^2 + 4nk + 2k^2 - 1) \quad (6)$$

Z rovnice (6) je zřejmé, že součet  $s_{n,k}^{(3)}$  je opět dělitelný počtem  $k$  sčítaných členů.

Naproti tomu se snadno přesvědčíme z rovnic (2) a (4), že součty  $s_{n,k}^{(2)}$ ,  $s_{n,k}^{(4)}$  druhých po př. čtvrtých mocnin lichých čísel nemají uvedenou vlastnost. Na př. součty  $s_{1,3}^{(2)} = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ ,  $s_{1,3}^{(4)} = 3^4 + 5^4 + 7^4 = 3107$  nejsou dělitelné třemi.

Předchozí výsledky jsou zvláštním případem obecnější věty:

*Aritmetický průměr libovolného počtu týchž lichých mocnin po sobě jdoucích lichých čísel je celé číslo.*

Důkaz této věty si rozdělíme na dvě části:

1. Nejprve dokážeme, že součet prvních  $k$  lichých mocnin lichých čísel je dělitelný číslem  $k$ .

Íde o součet:  $S_k^{(q)} = 1^q + 3^q + 5^q + \dots + (2k-3)^q + (2k-1)^q$ , kde  $q$  je liché číslo.

Součet vždy dvou členů výrazu  $S_k^{(q)}$ , souměrně položených podle středu, je dělitelný  $k$ , neboť podle binomické poučky:

$$1^q + (2k-1)^q = (2k)^q - \binom{q}{1} (2k)^{q-1} + \binom{q}{2} (2k)^{q-2} - \dots + \binom{q}{1} \cdot 2k$$

$$3^q + (2k-3)^q = (2k)^q - \binom{q}{1} (2k)^{q-1} \cdot 3 + \binom{q}{2} (2k)^{q-2} \cdot 3^2 - \dots + \binom{q}{1} \cdot 2k \cdot 3^{q-1}$$

$$5^q + (2k-5)^q = (2k)^q - \binom{q}{1} (2k)^{q-1} \cdot 5 + \binom{q}{2} (2k)^{q-2} \cdot 5^2 - \dots + \binom{q}{1} \cdot 2k \cdot 5^{q-1}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

při sudém počtu členů:

$$(k-1)^q + (k+1)^q = 2 \cdot k^q + 2 \cdot \binom{q}{2} k^{q-2} + 2 \cdot \binom{q}{4} k^{q-4} + \dots + \binom{q}{1} \cdot 2k$$

při lichém počtu členů zůstane nakonec jen člen  $k^q$ , dělitelný opět  $k$ . Protože všechny dílčí součty jsou dělitelné číslem  $k$ , je celý výraz  $S_k^{(q)}$  dělitelný číslem  $k$ .

2. V součtu  $S_k^{(q)}$  vynechme prvních  $m$  členů a přidejme za původní  $k$ -tý člen dalších  $m$  členů, takže vznikne součet:

$$s_{m,k}^{(q)} = (2m+1)^q + (2m+3)^q + \dots + (2k-1)^q + (2k+1)^q + \dots + (2k+2m-1)^q$$

Utvořme rozdíly mezi přidanými a vynechanými členy a to vždy na stejném místě:

$$\text{Rozdíl mezi 1. členy: } (2k+1)^q - 1^q = (2k)^q + \binom{q}{1}(2k)^{q-1} + \binom{q}{2}(2k)^{q-2} + \dots + \binom{q}{q-1} \cdot 2k$$

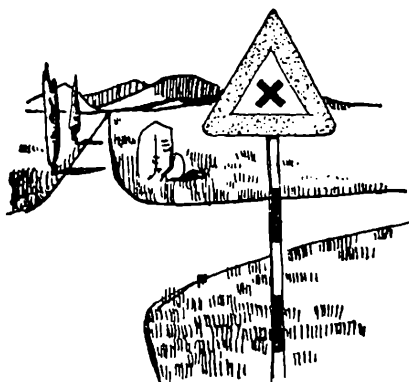
$$\text{mezi 2. členy: } (2k+3)^q - 3^q = (2k)^q + \binom{q}{1}(2k)^{q-1} \cdot 3 + \dots + \binom{q}{q-1} \cdot 2k \cdot 3^{q-1}$$

$$\text{mezi m. členy: } (2k+2m-1)^q - (2m-1)^q = (2k)^q + \binom{q}{1}(2k)^{q-1} \cdot (2m-1) + \dots + \binom{q}{q-1} \cdot 2k \cdot (2m-1)^{q-1}$$

Je zřejmé, že každý z těchto dílčích rozdílů je dělitelný číslem  $k$ , proto i součet  $s_{m,k}^{(q)}$  je dělitelný  $k$ , čímž je celá věta dokázána.

*Cvičení:*

1. Odvoďte vzorec pro součet pátých mocnin prvních  $n$  lichých čísel!
2. Určete součet všech sedmiciferných pátých mocnin lichých čísel!



Doc. Jan Vyšín, Praha:

## Problém křižovatky

Na náměstí ve středu města je rušná křižovatka. Ústí sem několik hlavních ulic - dopravních tepen. Každou dopravní tepnou vedou tratě elektrické dráhy, trolejbusů i autobusů, z nichž pochopitelně žádná na náměstí nekončí, ale pokračuje jinou ulicí dále. Napadlo vás někdy, že je v této situaci nějaký matematický problém? A přece je: počty tratí, které vedou jednotlivými dopravními tepnami, nejsou zcela libovolné a to proto, že mezi nimi a počty tratí, které vedou z jedné ulice do druhé, jsou určité vztahy.

Dáme si tyto dvě úlohy:

a) zjistit, jakými podmínkami jsou vázány počty tratí vedoucích jednotlivými dopravními tepnami;

b) jsou-li tyto počty dány, vypočítat, kolik tratí vedl z kterékoliv tepny do kterékoliv jiné.

Soubor těchto dvou úloh, které se řeší zároveň, nazveme stručně *problémem křižovatky*. Nemyslete si, že je jeho řešení nějak zvlášť snadné. Potřebovali byste mít jisté znalosti a zručnost v algebře, abyste problém křižovatky rozřešili zcela obecně. To poznáte sami, až si problém rozřešíme ve dvou zvláštních případech. Budou to případy, kdy do náměstí ústí tři nebo čtyři dopravní tepny.

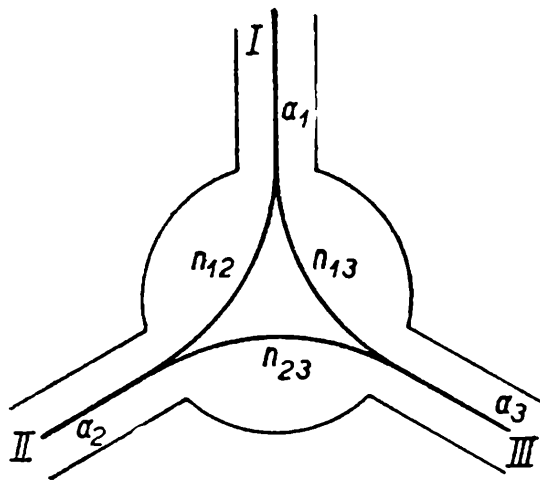
Obr. 1 znázorňuje situaci *tří dopravních tepen*. Počet tratí, které vedou ulicí I, jsme označili  $a_1$ ; obdobný význam mají čísla  $a_2, a_3$ . Počet tratí, které vedou z ulice I do ulice II nebo naopak, je označen  $n_{12}$ ; obdobný význam mají znaky  $n_{13}, n_{23}$ . Možná, že se vám zdá označení s dvěma indexy složité. Uvidíte však, jak se nám osvědčí dále při řešení problému.

Mezi šesti zavedenými čísly platí zřejmě tyto rovnosti:

$$\begin{aligned} n_{12} + n_{13} &= a_1, \\ n_{12} + n_{23} &= a_2, \\ n_{13} + n_{23} &= a_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Začneme s řešením úlohy b). Mysleme si, že  $a_1, a_2, a_3$  jsou známá čísla,  $n_{12}, n_{13}, n_{23}$  neznámá. Rovnice (1) pak tvoří soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých, kterou budeme řešit obvyklým způsobem. Z posledních dvou rovnic vyloučíme odečtením  $n_{23}$  a dostaneme

$$n_{12} - n_{13} = a_2 - a_3. \tag{2}$$



Obr. 1

Připojíme-li rovnici (2) k první rovnici (1), máme soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé  $n_{12}, n_{13}$ . Jejím řešením vyjde

$$\begin{aligned} n_{12} &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 - a_3), \\ n_{13} &= \frac{1}{2} (a_1 + a_3 - a_2). \end{aligned} \tag{3a}$$

Dosadíme-li za  $n_{12}$  do druhé rovnice (1), dostaneme po úpravě

$$n_{23} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1). \quad (3b)$$

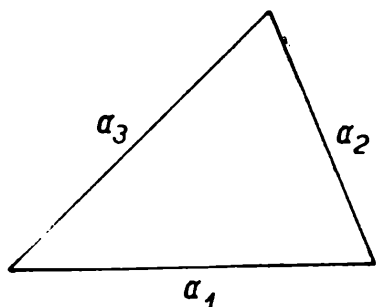
Tento výpočet jsme však nemuseli vůbec provádět, neboť stačilo nahradit v první rovnici (3a) indexy 1, 2 postupně indexy 2, 3, nebo nahradit v druhé rovnici (3a) indexy 1, 3 postupně indexy 2, 3. Zde se nám po prvé ukazuje výhodnost dvojitého indexování.

Vztahy (3a), (3b) dávají řešení soustavy (1). Kdyby nešlo o úlohu ze skutečnosti, mohli bychom se s tímto výsledkem spokojit. Ale my víme, že čísla  $n_{12}$ ,  $n_{13}$ ,  $n_{23}$  znamenají počty tratí; proto musí být celá a kladná. Nejvýš lze připustit, že některé z nich se rovná nule. (Na př.  $n_{12} = 0$  znamená, že z ulice I nevede do ulice II žádná trať.) Matematicky řekneme, že hledáme všechna celá a nezáporná řešení soustavy (1). Přitom ovšem víme, že čísla  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  jsou také celá, a to dokonce kladná. Předpokládáme totiž, že každou dopravní tepnou vede aspoň jedna trať.

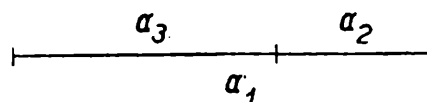
Mají-li být čísla  $n_{12}$ ,  $n_{13}$ ,  $n_{23}$  vyjádřená rovnicemi (3a), (3b) celá, musí být všechna čísla v závorkách sudá. To je možné jen dvojím způsobem:

1. jsou-li všechna tři čísla  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  sudá;
2. je-li jedno z těchto čísel sudé a ostatní dvě lichá.

Vidíte již, že je pravda, co jsme řekli na počátku: čísla  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  nejsou zcela libovolná. Platí však pro ně ještě další omezení. Čísla v závorkách rovnic (3a), (3b) musí být nezáporná. Pokládáme-li čísla  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  za délky úseček a pokoušíme-li se z těchto úseček sestavit trojúhelník, vyjde nám buď útvar z obr. 2a, t. j. trojúhelník, nebo útvar z obr. 2b, t. j. úsečka. První případ nastane, jsou-li všechna tři čísla  $a_1 + a_2 - a_3$ ,  $a_1 + a_3 - a_2$ ,  $a_2 + a_3 - a_1$  kladná, druhý případ nastane, je-li některé z těchto čísel rovno nule; to je známo z planimetrie. Zavedeme si proto tento nový název:



Obr. 2a



Obr. 2b

Jestliže tři čísla  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  splňují nerovnosti

$$a_1 + a_2 - a_3 \geq 0,$$

$$a_1 + a_3 - a_2 \geq 0,$$

$$a_2 + a_3 - a_1 \geq 0,$$

budeme stručně říkat, že *splňují trojúhelníkové nerovnosti*.

Pomocí tohoto nového názvu můžeme vyslovit stručně výsledek, který jsme odvodili:



Čísla  $a_1, a_2, a_3$ , vyjadřující počty tratí, musí splňovat trojúhelníkové nerovnosti a buď jediné z těchto čísel nebo všechna tři musí být sudá.

Obráceně, jestliže čísla  $a_1, a_2, a_3$  splňují vyslovené podmínky, lze řešit soustavu (1) celými nezápornými čísly; řešení je jediné a je dáno rovnicemi (3a), (3b).

Tím jsou rozřešeny obě úlohy a), b) a tedy i problém křižovatky v případě tří dopravních tepen.

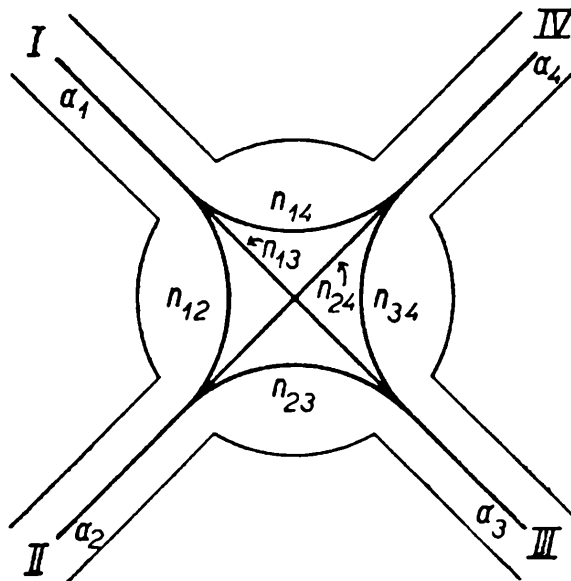
Uvedme číselný příklad. Zvolme  $a_1 = 8, a_2 = 5, a_3 = 7$ ; tato čísla splňují všechny potřebné podmínky. Z rovnic (3a), (3b) dostaneme  $n_{12} = 3, n_{13} = 5, n_{23} = 2$ .

Řešení problému křižovatky v případě čtyř dopravních tepen podáme stručněji, věnujeme se však více matematické stránce řešení. Situaci znázorňuje obr. 3, který obsahuje i potřebná označení.

Vyjdeme opět ze soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} n_{12} + n_{13} + n_{14} &= a_1, \\ n_{12} + n_{23} + n_{24} &= a_2, \\ n_{13} + n_{23} + n_{34} &= a_3, \\ n_{14} + n_{24} + n_{34} &= a_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Tato soustava má šest neznámých  $n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{24}, n_{34}$ . Řešení musí obsahovat opět jen čísla celá a nezáporná; přitom předpokládáme, že čísla  $a_1, a_2, a_3, a_4$  jsou celá kladná.



Obr. 3

Protože soustava (4) obsahuje více neznámých než rovnic, dá se očekávat, že některé neznámé budou aspoň v jistých mezích volitelné.

Sečteme první tři rovnice (4) a odečteme čtvrtou; vyjde

$$2n_{12} + 2n_{13} + 2n_{23} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4,$$

a dále

$$n_{12} + n_{13} + n_{23} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 - a_4). \quad (5a)$$

Záměnou indexů dostaneme

$$\begin{aligned}n_{12} + n_{14} + n_{24} &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_4 - a_3), \\n_{13} + n_{14} + n_{24} &= \frac{1}{2} (a_1 + a_3 + a_4 - a_2), \\n_{23} + n_{24} + n_{34} &= \frac{1}{2} (a_2 + a_3 + a_4 - a_1).\end{aligned}\tag{5b}$$

Sečteme-li první dvě rovnice (4) a odečteme-li od nich druhé dvě rovnice (4), vyjde po dělení dvěma

$$n_{12} - n_{34} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 - a_3 - a_4).\tag{6a}$$

Záměnou indexů dostaneme

$$\begin{aligned}n_{13} - n_{24} &= \frac{1}{2} (a_1 + a_3 - a_2 - a_4), \\n_{23} - n_{14} &= \frac{1}{2} (a_2 + a_3 - a_1 - a_4).\end{aligned}\tag{6b}$$

Všimneme si rovnic (5a), (5b), (6a), (6b). Předně je třeba, aby všechna čísla v závorkách na pravých stranách těchto rovnic byla sudá. To je možné jen tak, že buď všechna čísla  $a_1, a_2, a_3, a_4$  jsou sudá, nebo že dvě z nich jsou sudá a dvě lichá, anebo že všechna jsou lichá. Dále musí být čísla v závorkách na pravých stranách rovnic (5a), (5b) nezáporná. Obdobně jako v předchozí úloze budeme říkat, že čísla, která vyhovují této podmínce, *splňují čtyřúhelníkové nerovnosti*.

Nyní obrátíme pozornost k rovnicím (6a), (6b), které budou podkladem pro řešení soustavy (4). Jsou-li na pravých stranách těchto rovnic čísla nezáporná, zvolíme za  $n_{14}, n_{24}, n_{34}$  tři nezáporná celá čísla tak, aby byla splněna rovnice

$$n_{14} + n_{24} + n_{34} = a_4,$$

což je poslední z rovnic (4). Pak vypočteme z rovnic (6a), (6b) čísla  $n_{12}, n_{13}, n_{23}$ . Tato čísla jsou určitě celá nezáporná. Všech šest čísel  $n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{24}, n_{34}$  vyhovuje soustavě (4), jak se snadno přesvědčíme výpočtem. Tím jsou v tomto případě nalezena její řešení.

Probereme ještě případ, kdy na pravé straně jedné z rovnic (6a), (6b) je číslo záporné. Tak na př. je-li  $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 < 0$ ,  $a_1 + a_3 - a_2 - a_4 \geq 0$ ,  $a_2 + a_3 - a_1 - a_4 \geq 0$ , upravíme rovnici (6a) na tvar

$$n_{34} - n_{12} = \frac{1}{2} (a_3 + a_4 - a_1 - a_2)\tag{7}$$

a připojíme k ní obě rovnice (6b). Na pravých stranách všech tří rovnic (6b), (7) jsou pak celá čísla nezáporná. Zvolíme za  $n_{12}, n_{14}, n_{24}$  celá nezáporná čísla tak, aby byla splněna rovnice

$$n_{12} + n_{14} + n_{24} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_4 - a_3),$$

což je první rovnice (5b). Pak vypočteme z rovnic (6b), (7) čísla  $n_{13}, n_{23}, n_{34}$ . Tato čísla jsou určitě celá nezáporná; všech šest čísel  $n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{24}, n_{34}$  splňuje opět soustavu (4), jak se snadno přesvědčíme výpočtem.

Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku:

Čísla  $a_1, a_2, a_3, a_4$  je třeba zvolit tak, aby byla buď všechna sudá, nebo dvě sudá a dvě lichá nebo všechna lichá a aby přitom tato čísla splňovala čtyřúhelníkové nerovnosti.

Jsou-li čísla  $a_1, a_2, a_3, a_4$  takto dána, zvolíme vhodné tři neznámé tak, aby splňovaly příslušnou rovnici (4) nebo (5a), (5b). Zbývající tři neznámé vypočteme z rovnic (6a), (6b).

Úloha a) problému křižovatky v případě čtyř dopravních tepen je tedy rozřešena. Úloha b) má vždy více než jedno řešení.

*Příklad.* Zvolme  $a_1 = 6, a_2 = 8, a_3 = 5, a_4 = 11$ ; tato čísla vyhovují podmínkám úlohy a). Rovnice (6a), (6b) znějí

$$n_{12} - n_{14} = -1,$$

$$n_{13} - n_{24} = -4,$$

$$n_{23} - n_{14} = -2.$$

Z nich dostaneme úpravou

$$n_{24} = 1 + n_{12},$$

$$n_{24} = 4 + n_{13},$$

$$n_{14} = 2 + n_{23}.$$

(8)

Za  $n_{12}, n_{13}, n_{23}$  zvolíme nezáporná celá čísla tak, aby platila rovnice

$$n_{12} + n_{13} + n_{23} = 4,$$

což je rovnice (5a). Vyhnete-li se řešením obsahujícím nuly, máme jen tyto možnosti:

$n_{12}$	1	1	2
$n_{13}$	1	2	1
$n_{23}$	2	1	1

(9a)

Z rovnic (8) pak dostaneme k nim příslušné hodnoty zbývajících neznámých:

$n_{14}$	4	3	3
$n_{24}$	5	6	5
$n_{34}$	2	2	3

(9b)

Tabulky (9a), (9b) dávají řešení úlohy b).

Jak vidíte, liší se případ čtyř dopravních tepen podstatně od případu tří dopravních tepen. Soustava (1) má totiž jediné řešení, kdežto soustava (4) jich má vždy více. Podmínkou řešitelnosti úlohy b) ovšem je, aby čísla  $a_1, a_2, a_3, a_4$  byla zvolena tak, aby vyhovovala podmínkám úlohy a).

Případ čtyř dopravních tepen ukazuje cestu k obecnému řešení problému: v případě  $k$  tepen dostaneme soustavu  $k$  lineárních rovnic o  $\frac{k(k-1)}{2}$  neznámých.

Protože pro  $k > 3$  je vždy  $\frac{k(k-1)}{2} > k$ , bude mít soustava více neznámých než rovnic a některé neznámé bude možno volit.

Řešení problému křižovatky je poučné i s jiné stránky. Nečiní potíže sestavit soustavu rovnic potřebných pro řešení problému, jak tomu často bývá při slovních úlohách, ale potíž je v něčem jiném a to v uplatnění podmínky, že řešení musí být celá a nezáporná čísla. A tu si opět ověřujeme důležitou zkušenost, že pro řešení problému z praxe je třeba nejen umět řešit rovnice a jejich soustavy, ale také uplatnit omezující podmínky pro kořeny.

A nakonec úloha pro čtenáře. Zkuste řešit problém křižovatky pro pět dopravních tepen, a to třeba ve zvláštním případě, kdy čísla  $n_{12}, n_{23}, n_{34}, n_{45}, n_{15}$  jsou rovna nule. Tyto podmínky mají pro křižovatku jednoduchý a vám známý význam. Úloha b) bude mít v tomto případě jediné řešení.

Stanislav Horák, Praha:

## Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je jedna z velmi důležitých vlastností kružnice. Je vyjádřena větou:

*Poučka 1. Budiž dána kružnice  $k$  a bod  $P$  ležící v její rovině. Libovolná sečna jdoucí bodem  $P$  protne kružnici  $k$  ve dvou různých bodech  $A, B$ . Potom součin  $PA \cdot PB$  je nezávislý na poloze sečny a nazývá se mocností bodu  $P$  ke kružnici  $k$ . Přitom je mocnost záporná, leží-li bod  $P$  uvnitř kružnice  $k$ ; je kladná, jestliže bod  $P$  leží vně kružnice  $k$ ; je rovna nule, leží-li  $P$  na kružnici  $k$ .*

*Důkaz.* Jestliže bod  $P$  je bodem kružnice  $k$ , potom je věta samozřejmá, neboť  $A \equiv P$  a  $PA = 0$ . Součin  $PA \cdot PB = 0$  pro kteroukoliv sečnu vedenou bodem  $P$ . Věta je pro tento speciální případ dokázána. Uvažujme proto případ, kdy bod  $P$  není bodem kružnice  $k$ . (V obr. 1a leží bod  $P$  vně kružnice a v obr. 1b je uvnitř kružnice  $k$ . Označení bodů v obou obrázcích je však voleno tak, že text je možno sledovat v kterémkoliv z nich.) Bodem  $P$  vedme dvě různé sečny; jedna z nich protne kružnici v bodech  $A, B$ , druhá v bodech  $C, D$ . Tu platí

$$\triangle PBC \sim \triangle PDA,$$

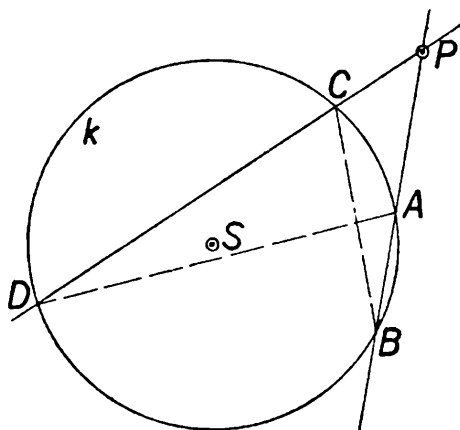
neboť  $\sphericalangle BPC = \sphericalangle DPA$  (společný úhel),

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDA$  (úhly obvodové nad týmž kruhovým obloukem). Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne úměra

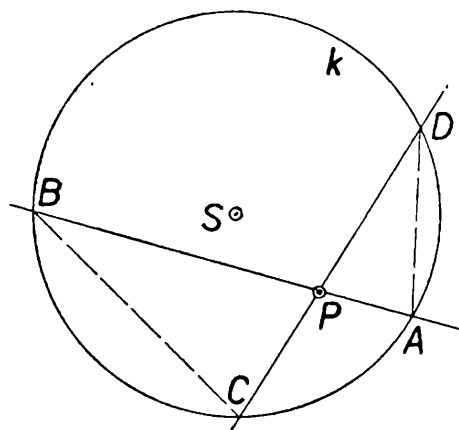
$$PC : PB = PA : PD$$

a odtud máme vztah

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$



Obr. 1a



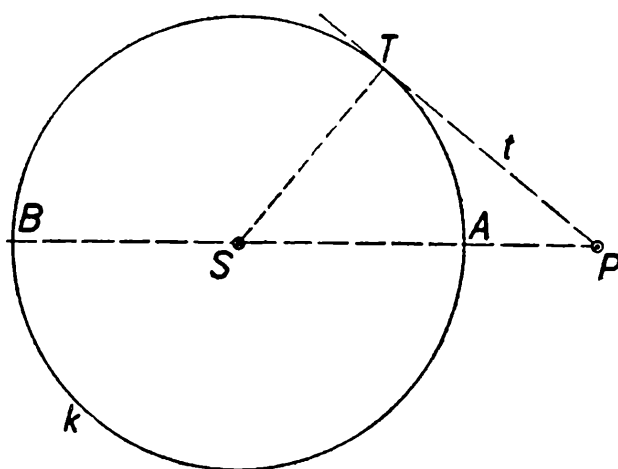
Obr. 1b

Touto rovnicí je již dokázána správnost poučky 1, neboť je okamžitě zřejmé, že součin  $PA \cdot PB$  je pro každou sečnu jdoucí bodem  $P$  tentýž.

Mocnost bodu  $P$  ke kružnici  $k$  budeme označovat  $M_P$ .

*Poučka 2.* Budiž dána kružnice  $k$  a její vnější bod  $P$ . Mocnost tohoto bodu vzhledem k dané kružnici je rovna dvojnásobku délky tečny, sestrojené z bodu  $P$  ke kružnici  $k$ .

*Důkaz.* V obr. 2 je dána kružnice  $k$  o středu  $S$ , její vnější bod  $P$  a sečna  $PS$ , která protne kružnici v bodech  $A, B$ . Z bodu  $P$  je ještě sestrojena ke kružnici  $k$  tečna  $t$ , jejíž bod dotyku je označen  $T$ . Mocnost bodu  $P$  ke kružnici  $k$  se dá vyjádřit takto:



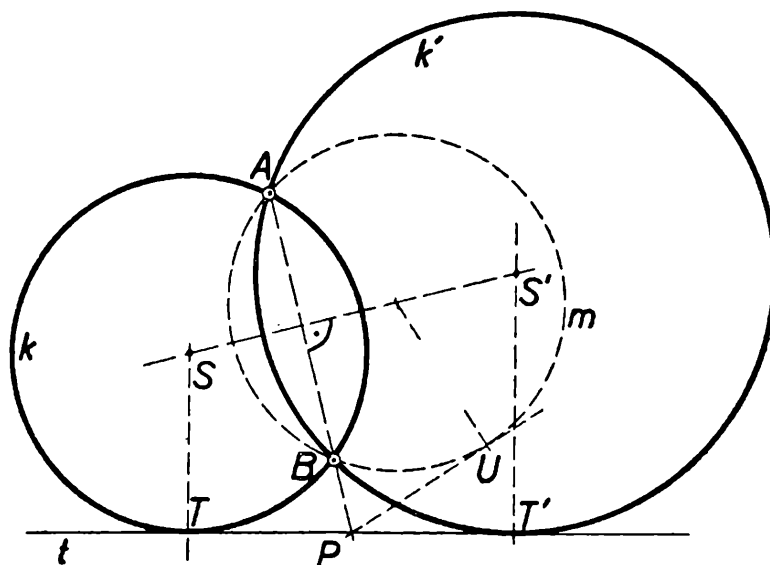
Obr. 2

$$M_P = PA \cdot PB = (PS - SA)(PS + SB) = \overline{PS}^2 - \overline{SA}^2 = \overline{PS}^2 - \overline{ST}^2 = \overline{PT}^2.$$

Tím je důkaz proveden.

Než přistoupíme k příkladům, v nichž si ukážeme použití mocnosti bodu ke kružnici, bylo by dobře, kdyby si čtenář ověřil zvládnutí vyložené látky na několika otázkách a cvičeních.

1. Jakou mocnost má střed kružnice vzhledem k své kružnici?
2. Jakou mocnost má bod  $P$  vzhledem ke kružnici  $k \equiv (S; r)$ , jestliže jeho vzdálenost od středu  $S$  je rovna  $2r$ ?
3. Jaké nejmenší hodnoty může nabýt mocnost bodu vzhledem k určité pevné kružnici? Pro který bod to nastane? (Střed kružnice;  $M_S = -r^2$ .)
4. Geometrické místo bodů, jejichž mocnost vzhledem k dané kružnici je konstantní a různá od nuly, je kružnice s danou kružnicí soustředná. Dokažte!
5. Sestrojte aspoň jeden bod, jehož mocnost vzhledem k dané kružnici je  $r^2$ ,  $-r^2$ ,  $2r^2$ ,  $3r^2$ ,  $-\frac{1}{4}r^2$ ,  $-\frac{1}{9}r^2$ . V každém případě vypočtěte vzdálenost nalezeného bodu od středu kružnice.
6. Do dané kružnice poloměru  $r \neq 0$  je vepsán rovnostranný trojúhelník (čtverec). Vypočtěte mocnost středu jeho strany vzhledem k dané kružnici.
7. Je dán bod  $P$  a jím jdoucí dvě různoběžky  $a$ ,  $b$ . Na jedné polopřímce, kterou na přímce  $a$  vytíná bod  $P$ , zvolme dva různé body  $A, B$  ( $A \neq P$ ,  $B \neq P$ ). Stejným způsobem dostaneme na přímce  $b$  body  $C, D$ . Jestliže platí  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , pak body  $A, B, C, D$  lze proložit kružnicí (jedinou). Dokažte! - Obdobná věta platí i tehdy, jestliže body  $A, B$  a body  $C, D$  jsou v opačných polopřímkách.



Obr. 3

### Příklady.

1. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma různými body  $A, B$  a dotýká se dané přímky  $t$  neprocházející žádným z bodů  $A, B$ .

Jestliže přímka  $AB$  je rovnoběžná s tečnou  $t$ , existuje velmi jednoduché řešení. V dalším budeme tedy řešit případ, kdy přímka  $AB$  je s tečnou  $t$  různoběžná. Průsečík těchto dvou přímek označíme  $P$  (obr. 3). Mocnost  $M_P$  bodu  $P$  k hledané kružnici  $k$  je dána výrazem

$$M_P = PA \cdot PB = \overline{PT}^2,$$

kde  $T$  je bod dotyku hledané kružnice s danou tečnou  $t$ .

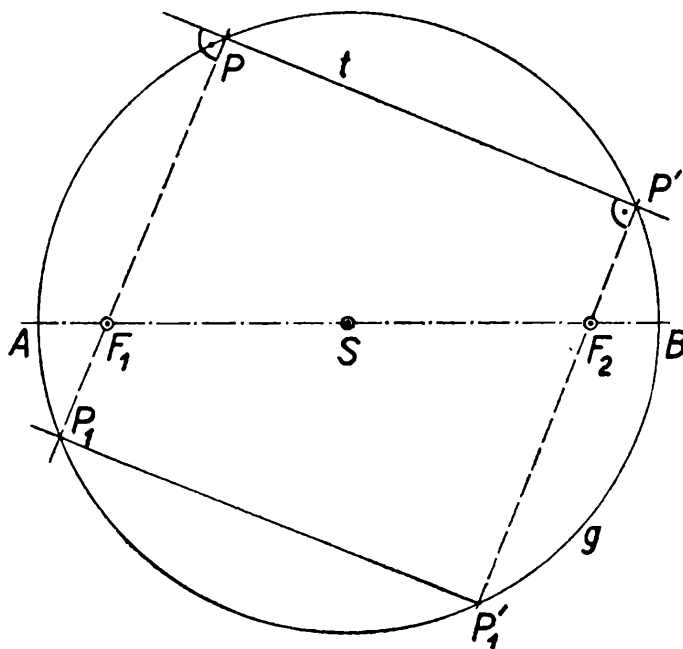
Z toho je patrné, že se vynosnažíme o sestrogení bodu  $T$ . Úsečky  $PA$ ,  $PB$  jsou známé, úsečka  $PT$  je neznámá. Abychom zjistili její velikost, můžeme použít některé Eukleidovy věty nebo - a to je výhodnější - použijeme této konstrukce: body  $A$ ,  $B$  proložíme libovolnou kružnicí  $m$ ; mocnost bodu  $P$  k této kružnici je dána součinem  $PA \cdot PB$ , to jest je tatáž jako mocnost bodu  $P$  k hledané kružnici  $k$ . Jestliže  $U$  je bod dotyku tečny, vedené z bodu  $P$  ke kružnici  $m$ , potom  $PU = PT$ . Úsečku  $PU$  nanese od bodu  $P$  na přímku  $t$  a další postup je již známý.

Je tedy patrné, že úloha je řešitelná jen tehdy, jestliže body  $A$ ,  $B$  jsou vnitřními body téže poloroviny vytáté přímkou  $t$ . A v tomto případě má úloha dvě různá řešení.

2. V elipse (v hyperbole) platí: součin vzdáleností ohnisek od libovolné tečny je roven dvojmoci vedlejší poloosy. Dokažte!

*Důkaz.* V obr. 4 je elipsa dána hlavními vrcholy  $A$ ,  $B$  a ohnisky  $F_1$ ,  $F_2$ . Necht  $t$  je tečna elipsy. Paty  $P$ ,  $P'$  kolmic, spuštěných z ohnisek na tuto tečnu, leží podle známé věty na kružnici  $g$ , opsané nad průměrem  $AB$ . Kolmice  $F_1P$ ,  $F_2P'$  protínají kružnici  $g$  ještě v bodech  $P_1$ ,  $P'_1$ . Body  $P$ ,  $P'$ ,  $P'_1$ ,  $P_1$  jsou vrcholy obdélníka. Počítejme nyní mocnost ohniska  $F_1$  ke kružnici  $g$ :

$$M_F = -F_1P \cdot F_1P_1 = -F_1P \cdot F_2P'.$$



Obr. 4

Tato mocnost se dá však počítat ještě jinak:

$$M_F = -F_1A \cdot F_1B = -(a - e)(a + e) = -b^2,$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $e$  jsou po řadě délka hlavní poloosy, délka vedlejší poloosy a excentricita elipsy.

Stejným způsobem se dokáže věta i pro hyperbolu, kde poučka platí i pro asymptoty.

3. Budiž dán libovolný trojúhelník  $ABC$ . Označme  $r$ ,  $\rho$ ,  $d$  po řadě poloměr kružnice jemu opsané, vepsané a vzdálenost středů vepsané a opsané kružnice. Dokažte, že platí  $d^2 = r^2 - 2r\rho$ .

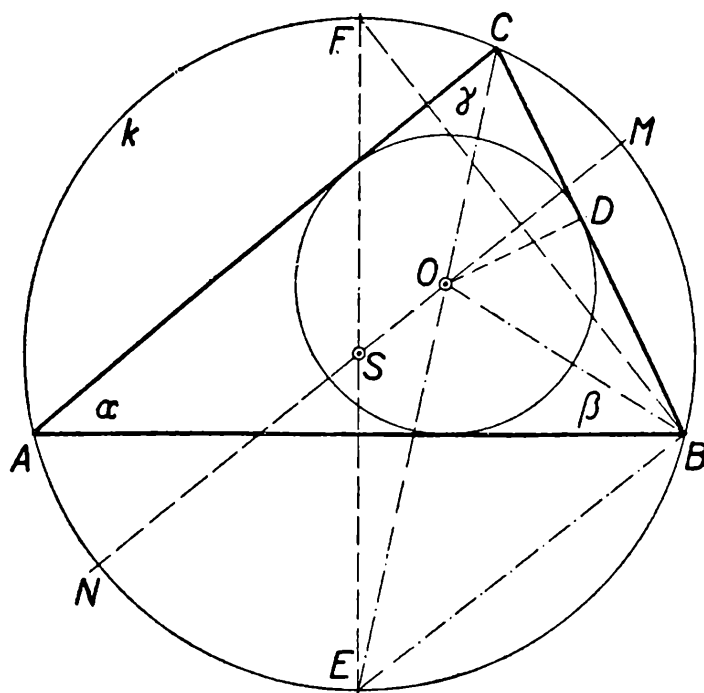
*Důkaz.* V obr. 5 je dán trojúhelník  $ABC$ ; střed kružnice opsané je  $S$ , vepsané je  $O$ . Přímka  $SO$  protne opsanou kružnici  $k$  v bodech  $M$ ,  $N$ . Kolmice na stranu  $AB$  vedená bodem  $S$  protne opsanou kružnici v bodech  $E$ ,  $F$ . Vepsaná kružnice se strany  $BC$  dotýká v bodě  $D$ . Velikosti vnitřních úhlů při vrcholech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  označíme postupně  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Pro stručnost budeme samotné úhly značit týmiž řeckými písmeny.

Všimněme si, že osa úhlu  $\gamma$  prochází bodem  $E$ . To vyplývá z toho, že úhly  $\sphericalangle ACD$ ,  $\sphericalangle OCB$  jsou v kružnici  $k$  obvodové a vytínají tudíž na ní shodné oblouky, t. j.  $\widehat{AE} = \widehat{BE}$ .

$$\triangle COD \sim \triangle FEB,$$

neboť oba jsou pravoúhlé a dále se shodují v úhlech  $\sphericalangle OCD$ ,  $\sphericalangle EFB$  (jsou to obvodové úhly v opsané kružnici nad týmiž kruhovým obloukem  $\widehat{EB}$ ). Odtud dostaneme

$$OC : OD = FE : EB.$$



Obr. 5

Avšak trojúhelník  $BEO$  je rovnoramenný, neboť

$$\sphericalangle EOB = \sphericalangle EBO = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Správnost těchto rovnic plyne z toho, že úhel  $\sphericalangle EOB$  je vnější v trojúhelníku  $BCO$  a úhel  $\sphericalangle EBO$  je složen ze dvou úhlů:  $\frac{1}{2}\beta$  a úhlu  $\sphericalangle ABE = \frac{1}{2}\gamma$ . Tudíž

$$BE = OE$$



a prve napsaná úměra přejde v jinou:

$$OC : OD = FE : OE.$$

Odtud již máme

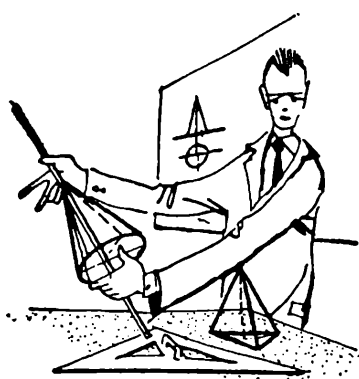
$$OC \cdot OE = FE \cdot OD = 2r\rho.$$

Tato rovnice vyjadřuje až na znaménko mocnost  $M_O$  bodu  $O$  vzhledem k opsané kružnici. Tuto mocnost můžeme vyjádřit ještě jiným způsobem:

$$M_O = -OM \cdot ON = -(r-d)(r+d) = -(r^2 - d^2).$$

Porovnáním obdržíme žádaný výsledek.

(Pokračování.)



## Deskriptivní geometrie

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

### Nevlastní elementy v geometrii

V geometrii se často používá pojmů „bod v nekonečnu“ nebo „přímka v nekonečnu“, aniž se přitom řádně tyto pojmy vymezí. Děje se tak zvláště v běžném hovoru laiků. Tak na příklad kolejnice přímé tratě nejeví se nám při pohledu ze zadního okna posledního vozu vlaku jako rovnoběžné přímky, ale zdá se nám, že se sbíhají v některém hodně vzdáleném bodě. Protože víme, že obě kolejnice jsou ve skutečnosti spolu rovnoběžné, svádí nás tento pohled k tomu, abychom řekli, že se obě kolejnice protínají v nekonečnu. Tak hovoří zvláště děti. Pro ně je taková jízda vzácnější zábavou než pro dospělého člověka a právě popsany pohled na kolejnice může být pro ně při jejich přirozené zvědavosti důležitým poznatkem, na který hned tak nezapomínají. Je ovšem samozřejmé, že právě děti nepodkládají své rčení o průsečíku kolejnic v nekonečnu žádnou pevnou představou. Ale v geometrii se nemůžeme spokojit jen povrchním pozorováním. Musíme se především pokusit vysvětlit dětský objev zdánlivého průsečíku dvou rovnoběžných kolejnic a kromě toho si musíme řádně uvědomit podstatu a účel pojmu „bod v nekonečnu“. Protože čtenáři našeho časopisu se s těmito pojmy občas sejdou, bude jistě užitečné seznámit je s nimi předem aspoň stručně, neboť tyto pojmy se vyskytnou hlavně v člancích, týkajících se deskriptivní geometrie.

Začneme s jednou malou nepříjemností rovinné geometrie. Je vám dobře známo, že dvě různé přímky ležící v jedné rovině protínají se právě v jednom bodě, pokud ovšem nejsou spolu rovnoběžné. Tuto nepříjemnou výjimku týkající se rovnoběžek můžeme odstranit tak, že pojem průsečíku dvou přímek rozšíříme uměle i pro případ, kdy jde o dvě přímky rovnoběžné. Protože však takový

bod vlastně neexistuje, pojmenujeme ho *bod nevlastní*. Pouhé zavedení nového názvu však ještě nepřináší žádné geometrické vlastnosti. Ty získáme teprve vhodnými požadavky kladenými na nový pojem. V našem případě je účelné požadovat, aby všechny navzájem rovnoběžné přímky protínaly se v témž nevlastním bodě. Pak lze nevlastní bod definovat jako směr všech vzájemně rovnoběžných přímek. Není tedy pojmový rozdíl mezi bodem nevlastním a směrem. Jsou to ve skutečnosti jen dva různé názvy pro jeden a týž pojem. Pochopení pojmu nevlastního bodu není tedy věcí matematického talentu, nýbrž je to jen věcí úmluvy. Další závěry jsou již snadné. Řekneme, že na každé přímce leží právě *jeden* nevlastní bod, neboť každá přímka určuje v prostoru právě jeden směr, totiž směr tvořený všemi přímkami, jež jsou s ní rovnoběžné\*). Totéž vyjadřujeme slovy, že všechny vzájemně rovnoběžné přímky procházejí týmž nevlastním bodem. Obráceně dva nevlastní body pokládáme za různé, leží-li na přímkách, které nejsou spolu rovnoběžné, t. j. jde-li o dva různé směry.

Na první pohled se zdá, že snad není účelné zavádět pro týž pojem dva různé názvy. Ale jednu nepatrnou výhodu zavedení nevlastního bodu už čtenář přece poznal. Vezmeme-li vedle obyčejných čili *vlastních* bodů v úvahu i body nevlastní, pak platí bez výjimky tvrzení, že dvě různé přímky v rovině se protínají v jednom bodě. Zavedením nevlastního bodu jsme docílili již toho, že v právě vyslovené větě nemusíme uvádět výjimku dvou rovnoběžek, jak jsme to činili dříve. Tím se zjednodušuje formulace geometrických zákonů. Při složitějších konstrukcích tím získáváme dokonce značné zjednodušení a tím i snadnou přehlednost.

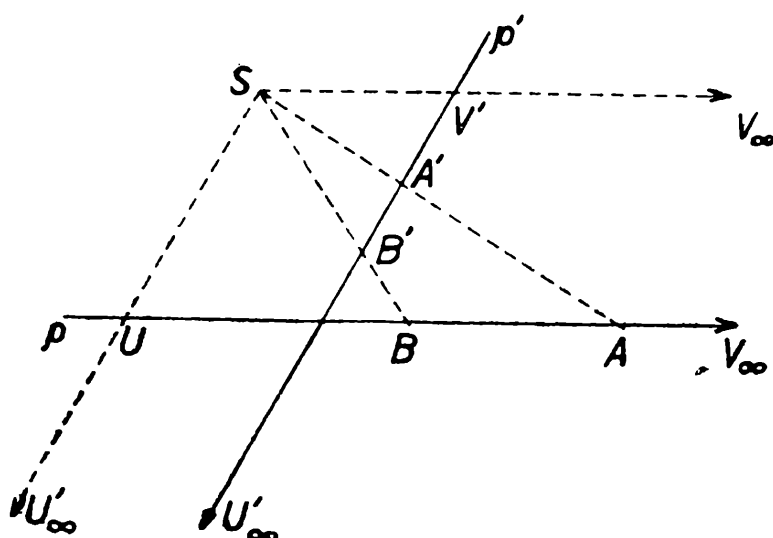
Ale mnohem výrazněji vystoupí užitečnost zavedení nevlastních bodů v těch partiích geometrie, kde body vlastní (obyčejné) i nevlastní mají rovnocenný význam a kde při různých transformacích případně v sebe přecházejí. Nejlépe se to dá ukázat při středovém promítání. Na obr. 1 promítejme body  $A, B$ , přímky  $p$  z bodu  $S$  na přímku  $p'$  do bodů  $A', B', \dots$ . Bod  $S$  se nazývá *střed promítání*, bod  $A'$  je průmětem bodu  $A$ , bod  $B'$  průmětem bodu  $B, \dots$  atd. Vzájemnost jednotlivých bodů a jejich průmětů by nebyla úplná, kdybychom nepřibráli na pomoc body nevlastní. Zvolíme-li na přímce  $p$  bod  $U$  tak, aby spojnice  $US$  byla rovnoběžná s přímkou  $p'$ , pak průmět  $U'$  bodu  $U$  by neexistoval, kdybychom nezavedli body nevlastní. Řekneme-li však, že rovnoběžné přímky  $US$  a  $p'$  se protínají v nevlastním bodě  $U'$ , pak i bod  $U$  má na přímce  $p'$  svůj průmět. Podobně nevlastní bod  $V'$  přímky  $p$  promítá se z bodu  $S$  na přímku  $p'$  do bodu  $V'$ .

Čtenář nechť si zde všimne, že se tu opět projevuje zjednodušení formulací zákonů, jak již dříve o tom byla řeč. Zavedení nevlastních bodů nám umožňuje, že při promítání z bodu  $S$  se nemusíme starat o výjimky, kdy bodu první přímky  $p$  není přiřazen žádný jeho průmět na přímce  $p'$  nebo obráceně, kdy bod přímky  $p'$  není průmětem žádného bodu přímky  $p$ . Přibráním nevlastních bodů docílili jsme toho, že každému bodu přímky  $p$  je přiřazen právě jeden jeho průmět na přímce  $p'$  a obráceně. Ale náš obr. 1 ukazuje ještě další významnou věc. *Středové promítání* z bodu  $S$  je totiž příkladem transformace, při které bod vlastní

\*) Srovnej s učebnicí Geometrie pro desátý postupný ročník, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1955, str. 24.

může přejít v bod nevlastní nebo obráceně. Mají zde tedy body vlastní i nevlastní stejnou roli a bylo by při nejmenším nešikovné rozlišovat zde tyto stejnorodé elementy tak různými názvy, jako jsou bod a směr.

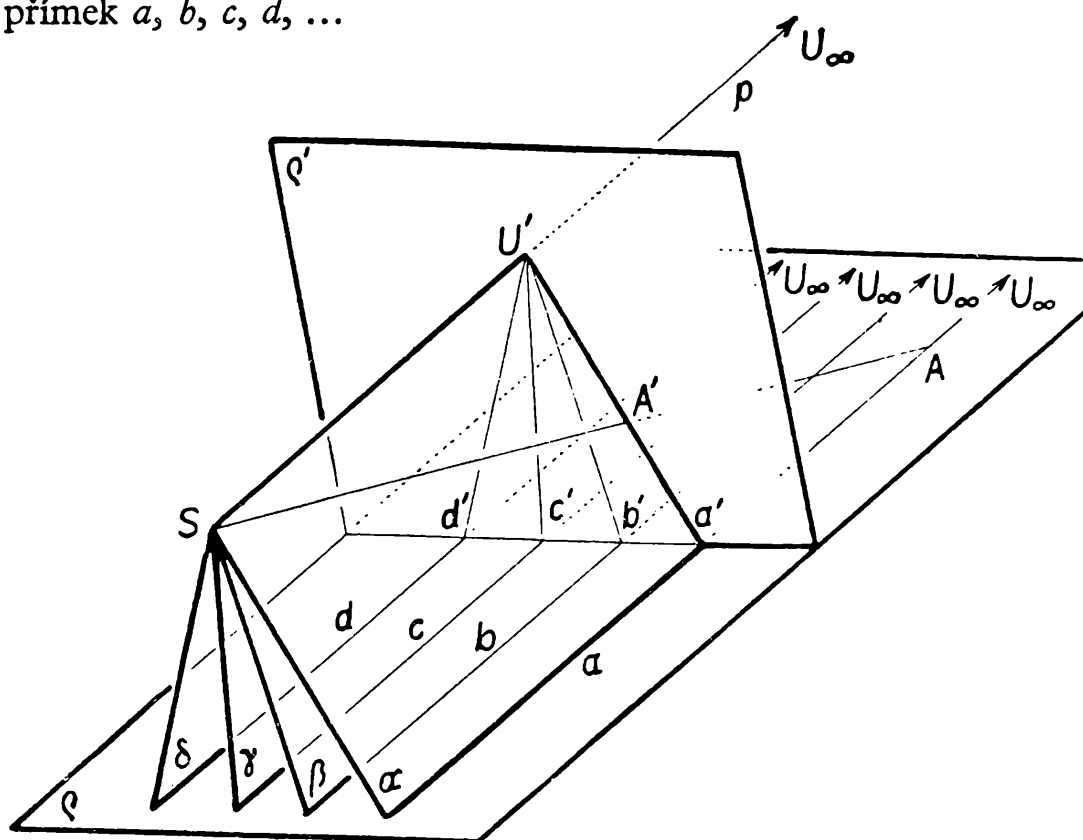
Připomeňme si ještě přirozenou představu. Vzdaluje-li se bod  $A$  na přímce  $p$  (obr. 1) hodně daleko od bodu  $S$ , blíží se promítací přímka  $AS$  poloze  $V'S$  stanovující na přímce  $p$  nevlastní bod  $V$ , jak o tom byla dříve řeč. Tato primitivní představa, že bod  $V$  je v „nekonečnu“, zachovává se dodnes v popise rysů a proto nevlastní body se obvykle v literatuře vyznačují připojením indexu  $\infty$ . Zachovali jsme tento způsob i v našem obr. 1, kde tedy nevlastní bod přímky  $p$  (resp.  $p'$ ) je označen  $V_\infty$  (resp.  $U'_\infty$ ). Ze stejných důvodů se vyskytují v literatuře pro bod nevlastní také názvy *bod v nekonečnu* nebo *bod úběžný*. Od toho musíme rozlišovat pojem *úběžníku*, čímž rozumíme obraz nebo průmět bodu úběžného, t. j. bodu nevlastního. Tak na obr. 1 je bod  $V'$  úběžníkem; je to průmět nevlastního bodu  $V_\infty$ .



Obr. 1

Deskriptivní geometrie se musí důkladně zabývat středovým promítáním z toho důvodu, že právě tento druh promítání se v praxi vyskytuje velmi často. Promítání filmu v biografu je tu nejpřirozenějším příkladem. Lampa, vysílající promítací paprsky, je umístěna ve středu promítání, průmětnou je plátno, na němž obecnostvo předváděný film pozoruje. Obyčejné fotografování je založeno na stejném principu, středem promítání je tu optický střed objektivu, jímž světelné paprsky procházejí a vytvářejí obraz na citlivé vrstvě filmu nebo desky prostřednictvím chemického procesu. S tímto způsobem promítání setkává se lékař při roentgenování; zde ohnisko lampy je opět středem promítání. Ale nejběžnějším příkladem středového promítání je lidské oko. Světelné paprsky procházející středem zornice vytvářejí na sítnici v oku obraz, který vnímáme na základě složitého nervového pochodu. Střed zornice je tu středem promítání, sítnice je průmětnou. Tento geometrický podklad obyčejného vidění uvědomili si správně po prvé slavní mistři malíři Albrecht Dürer (1471—1528) a Leonardo da Vinci (1452—1519) a využili ho k vytvoření dokonalých perspektivních obrazů. My si zde všimneme jen průmětu přímek rovnoběžných.

Nechť v rovině  $\varrho$  je dána soustava rovnoběžných přímek  $a, b, c, d, \dots$  (obr. 2). Promítneme je na rovinu  $\varrho'$  ze středu promítání  $S$ , který neleží v žádné z rovin  $\varrho, \varrho'$ ; předpokládejme přitom, že roviny  $\varrho, \varrho'$  nejsou spolu rovnoběžné. Průmět  $a'$  přímky  $a$  obdržíme takto: Každý bod  $A$  přímky  $a$  spojíme s bodem  $S$  přímkou a vyhledáme průsečík  $A'$  této spojnice s rovinou  $\varrho'$ ; to provedeme pro každý bod přímky  $a$ . Je zřejmé, že všechny tyto spojnice  $AS$  vytvoří rovinu  $\alpha$ , určenou bodem  $S$  a přímkou  $a$ , t. zv. *promítací* rovinu přímky  $a$ . Průsečnice  $a'$  této roviny  $\alpha$  s rovinou  $\varrho'$  je pak hledaným průmětem přímky  $a$ . Promítací rovina  $\alpha$  obsahuje ovšem přímkou  $p$ , vedenou bodem  $S$  rovnoběžně s přímkou  $a$ . Provedeme-li totéž s přímkami  $b, c, d, \dots$ , snadno zjistíme, že jejich promítací roviny  $\beta, \gamma, \delta, \dots$  obsahují touž přímkou  $p$  a že tedy průměty  $a', b', c', d', \dots$  daných rovnoběžek procházejí průsečíkem  $U'$  přímky  $p$  s rovinou  $\varrho'$ . Bod  $U'$  je průmětem nevlastního bodu  $U_\infty$ , v němž se protínají všechny dané rovnoběžky  $a, b, c, d, \dots$  a jímž prochází také přímkou  $p$ . Bod  $U'$  je prostě úběžník, určující směr přímek  $a, b, c, d, \dots$



Obr. 2

Není tedy divu, že dvě rovnoběžné kolejnice zobrazí se nám při středovém promítání jako dvě různoběžné přímky, jejichž průsečík je obrazem bodu v nekonečnu, totiž nevlastního bodu společného daným rovnoběžným kolejnicím. Protože naše vidění je příkladem středového promítání, jak bylo výše naznačeno, je tím vysvětlen i příklad s kolejnicemi, uvedený na začátku tohoto článku.

Je třeba ještě poznamenat, že podobně jako jsme zavedli pojem nevlastního bodu, zavádíme i pojem *nevlastní přímky* a *nevlastní roviny*. To již uvedu jen stručně. Říkáme, že dvě rovnoběžné roviny se protínají v nevlastní přímce, abychom dali všeobecnou platnost tvrzení, že dvě roviny se protínají v přímce.

Vede to ovšem k představě, že všechny nevlastní body, ležící v dané rovině, vytvoří v této rovině přímku, totiž nevlastní přímku té roviny. Podobně přímka rovnoběžná s danou rovinou protíná tuto přímku v bodě nevlastním. Říkáme konečně, že nevlastní body všech přímek v prostoru tvoří rovinu, t. zv. rovinu nevlastní. I tento název je zcela přirozený, neboť rovinu protíná přímka v jednom bodě. Jelikož na přímce máme jeden nevlastní bod, protíná přímka souhrn všech nevlastních bodů prostoru právě v jednom bodě - proto tento souhrn nazýváme rovinou, ovšem nevlastní rovinou.

Pro přehlednost zopakujeme základní vlastnosti nevlastních elementů:

1. Každá vlastní přímka obsahuje jeden nevlastní bod.
2. Každá rovina, která není nevlastní, obsahuje jednu nevlastní přímku.
3. Všechny nevlastní body tvoří rovinu nevlastní.
4. Všechny navzájem rovnoběžné přímky procházejí týmž nevlastním bodem.
5. Všechny navzájem rovnoběžné roviny procházejí touž nevlastní přímkou.
6. Přímka rovnoběžná s danou rovinou protíná ji v nevlastním bodě.
7. Přímka, obsahující dva různé nevlastní body, je nevlastní.
8. Rovina, obsahující tři navzájem různé body nevlastní, jež neleží na téže přímce, je nevlastní.

Závěrem upozorňuji, že je důležité, aby čtenář, který není ještě zvyklý matematickému myšlení, si znovu dobře uvědomil, že nevlastní elementy zde zavádíme čistě uměle na základě potřeb středového promítání. Zavádíme je tak, aby tyto nevlastní elementy měly vlastnosti 1 až 8 právě vypsané. Tím není řečeno, že je to jediný možný způsob zavedení nevlastních elementů v geometrii. Skutečně také v jiných partiích geometrie (na příklad při t. zv. stereografickém zobrazení) zavádějí se nevlastní elementy jinak; na místo zde uvedených vlastností 1—8 mohou pak ovšem nastoupit vlastnosti jiné. Ale to jsou výjimečné případy, jimiž se zde nemusíme zabývat. Lze říci, že jakmile se čtenář v literatuře sejde s nevlastními elementy bez bližšího vysvětlení, pak vždycky půjde o způsob naznačený v tomto článku.

Doc. Dr. M i r o s l a v M e n š í k, Praha: ] ■

## Základy kinematické geometrie v rovině ]

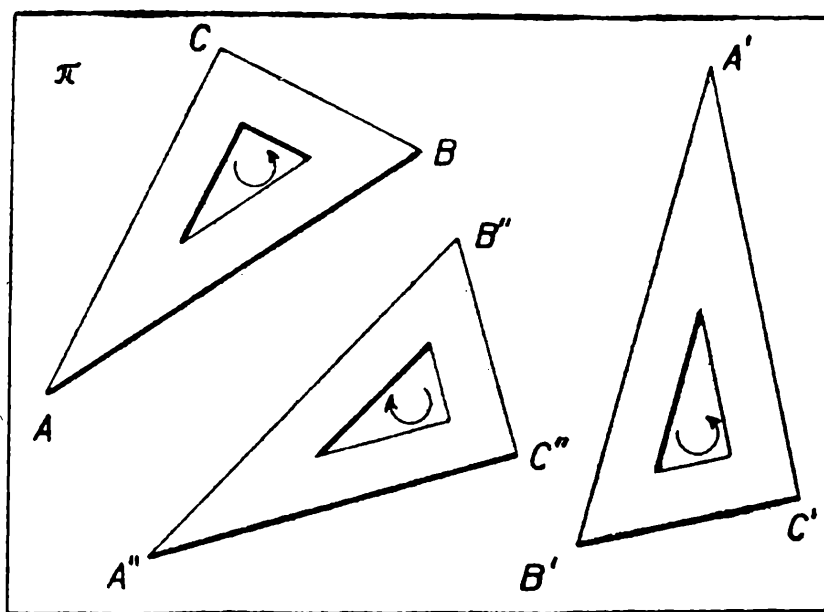
Již jako malí jste jistě se zájmem zblízka pozorovali kolo, motocykl, auto či dokonce lokomotivu. Tyto stroje - výrobky lidského technického pokroku - se vám většinou jevily jako něco tajemného, nepochopitelného. Časem jste překonali koloběžku a osedlali jste kolo či dokonce motocykl právě tak, jako ve škole jste většinou s úspěchem přežili násobilku a nyní vnikáte do „tajů“ algebry.

Teď již v rozvodovém a hnacím mechanismu třeba u lokomotivy nevidíte nic nadsmyslného, nýbrž s dávkou konstruktivní elegance účelně vytvořenou soustavu táhel, ojnic, čepů a podobných strojních součástí, které jsou podrobeny přesným pohybovým zákonům. A tak jsme se opět octli u základů technických věd, kde se vždy nevyhnutelně setkáme s matematikou, geometrií a fyzikou.

Ve fyzice jste se zabývali studiem pohybu těles, a to v její části zvané *mechanika*. Nebudeme-li uvažovat o silách, které nějaký pohyb působí, pak takové části mechaniky říkáme *kinematika*.

Všimněme si nyní pohybu pouze s hlediska čistě geometrického, tedy bez ohledu na čas, v němž byl náš pohyb konán, dále též bez ohledu na příslušné rychlosti a zrychlení pohybujících se bodů nebo celých útvarů. Takovým druhem studia pohybu se zabývá *geometrie pohybu* neboli *geometrie kinematická*.

Pohybující se útvar může se při pohybu libovolným způsobem měnit - jako na př. mraky - nebo se mění jeho tvar podle určitých pravidel, jako je tomu na př. u proudící vody v potrubí různého průřezu. V dalších našich úvahách budeme však předpokládat, že během pohybu mění pohybující se útvar (na př. těleso) sice svou polohu, ale nikoliv tvar. Takové útvary se pak jmenují *neproměnné* neboli *tuhé soustavy* a pouze takovými se dále budeme zabývat.



Obr. 1

Konečně omezíme své úvahy pouze na pohyby neproměnných rovinných útvarů, nebo jak se též říká neproměnných rovinných soustav v rovině, čili budeme zde probírat základní vlastnosti t. zv. *kinematické geometrie v rovině*.

Tato nauka je důležitým podkladem mnoha technických problémů, s nimiž se lidstvo při svém civilizačním vývoji již dávno setkalo a které stále více a častěji docházejí svého uplatnění.

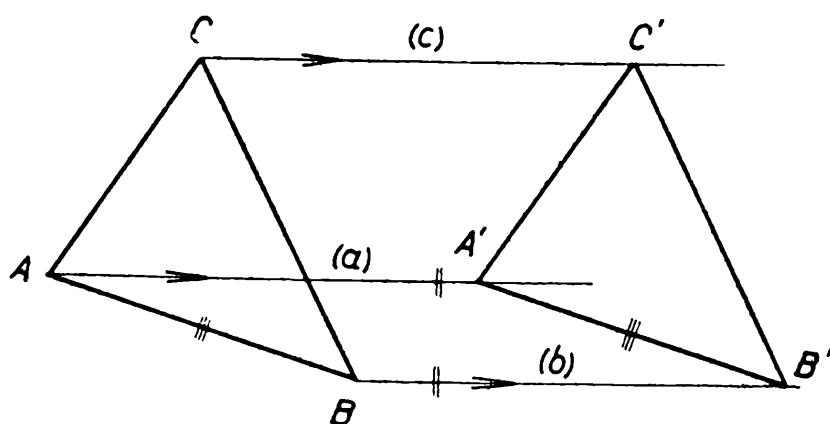
Promluvme si nyní o neproměnné rovinné soustavě, pohybující se v pevné rovině  $\pi$ . Na pomoc současně vezmeme hmotný model, který nám sice geometricky nepřesně, ale zato názorně ukáže pohyb nejjednodušší rovinné soustavy. Takovou rovinnou soustavou je na př. trojúhelník  $ABC$  znázorněný školním pravoúhlým trojúhelníkem  $ABC$  položeným na desku stolu  $\pi$  (obr. 1). Postrkujeme tento trojúhelník v rovině desky stolu až do polohy  $A'B'C'$ . Takový pohyb, při němž neuvažujeme čas potřebný k jeho provedení, se nazývá *přemístění*. Tvar trojúhelníku se přemístěním nezměnil, neboť délky jeho stran jsou při pohybu stále ( $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $AC = A'C'$ ) a tedy  $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$ .

Na obr. 1 jest ještě zakreslena další poloha  $A''B''C''$  trojúhelníku  $ABC$ . Marně byste se však pokoušeli přemísťovat v rovině  $p$  trojúhelník  $ABC$  tak, aby zaujal tuto polohu. Pozorujeme-li smysl oběhu, v jakém následují za sebou vrcholy  $ABC$  trojúhelníku v původní poloze a v poloze  $A'B'C'$  vzniklé přemístěním, pak zjistíme, že v obou případech je smysl souhlasný, a to proti směru otáčení hodinových ručiček (viz šipky v obr. 1). Smysl oběhu čili t. zv. *orientace* trojúhelníku v poloze  $A'B'C'$  je však opačná než byla v původní poloze, jak je opět v obr. 1 vyznačeno šipkou. Do takovéto polohy však můžeme trojúhelník  $ABC$  uvést pouze tak, že bychom jej vyzvedli z roviny desky stolu, v prostoru převrátili a opět položili zpět na stůl, což odporuje úmluvě o konání pohybu výhradně v rovině  $\pi$ .

Závěrem jsme tedy seznali: *Přemístěním v rovině se nemění orientace pohybujícího se pevného rovinného útvaru.*



Obr. 2



Obr. 3

Křivka (a), kterou vytvoří při přemísťování libovolný bod  $A$  pohybující se rovinné soustavy, se nazývá jeho *dráha* neboli *trajektorie* (obr. 2).

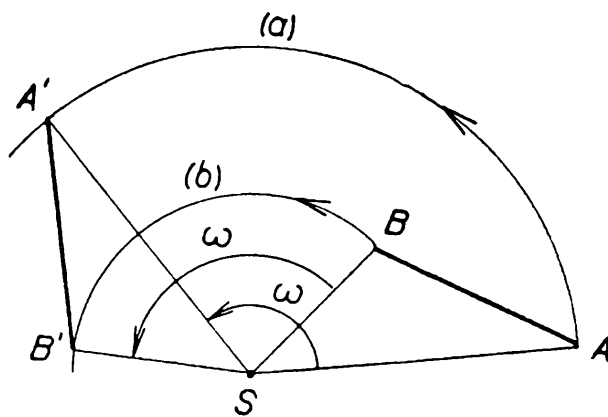
Rozlišujeme dva základní pohyby: *přímočarý posuvný pohyb* a *pohyb otáčivý*. Jsou-li trajektorie (a), (b), (c), ... bodů  $A, B, C, \dots$  pohybujícího se rovinného útvaru vzájemně rovnoběžné, příslušné jejich úseky stejně dlouhé a téhož smyslu,

což označíme  $\vec{AA'} \parallel \vec{BB'} \parallel \vec{CC'} \dots$ , vzniká přímočarý posuvný pohyb v rovině čili t. zv. *pohyb translační* (obr. 3). Velikost posunutí je délka orientované úsečky  $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \dots$ .

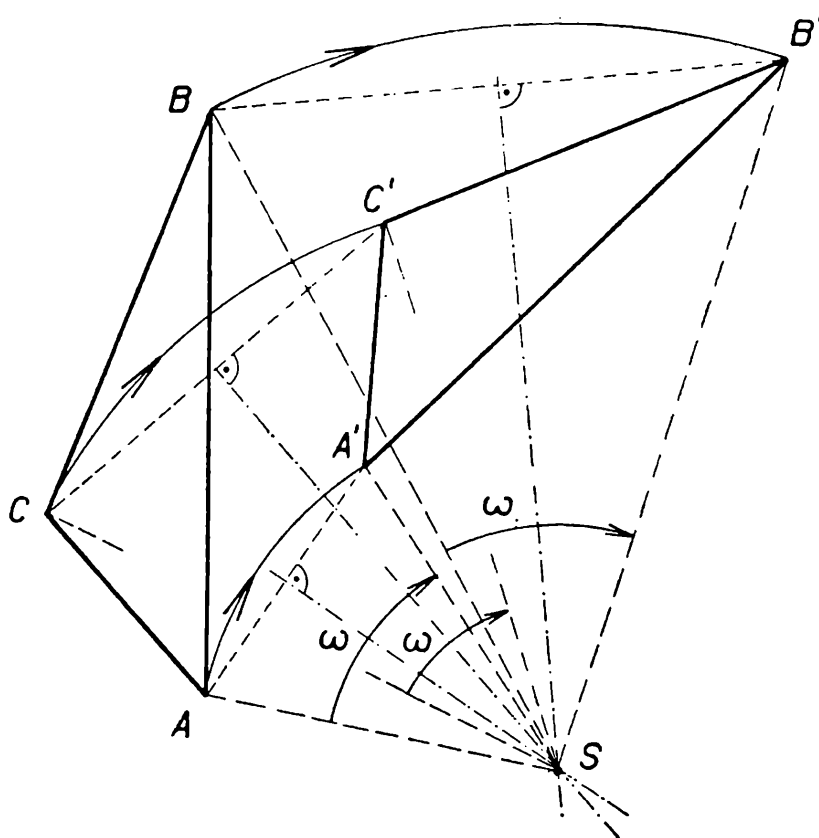
Trajektorie bodů pevného rovinného útvaru při otáčivém neboli *rotačním pohybu* v rovině jsou soustředné kružnice (obr. 4). Bod  $S$ , jenž zůstává za otáčení pevný, je středem otáčení čili středem rotace. Střed otáčení může náležeti rotujícímu útvaru nebo ležet mimo něj, jak je tomu na našem obrázku. V prvním případě se tedy jeden bod pohybujícího útvaru nepohybuje.

Rotační pohyb v rovině je určen středem otáčení a orientovaným úhlem pootočení  $\omega$ , t. j. úhlem, který je dán nejen velikostí, ale i smyslem svého průběhu. Vzniká tak otáčení kladné (proti směru hodinových ručiček), nebo otáčení záporné (ve směru hodinových ručiček).

V rovině jsou dány v obecné poloze dva souhlasně shodné rovinné útvary - na př. trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  (obr. 5). Sestrojme osu souměrnosti úsečky  $AA'$  a úsečky  $BB'$ . Obě se protínají v bodu  $S$ . Ježto jest  $AB = A'B'$ ,  $SA = SA'$  a  $SB = SB'$ , jsou  $\triangle SAB \cong \triangle SA'B'$ . Tyto trojúhelníky mají společný vrchol  $S$  a stejnou orientaci a lze je tedy přemístit pouhým otočením kolem středu  $S$  o úhel  $\omega$ , nebo druhým opačně orientovaným otočením o úhel  $360^\circ - \omega$ .



Obr. 4



Obr. 5

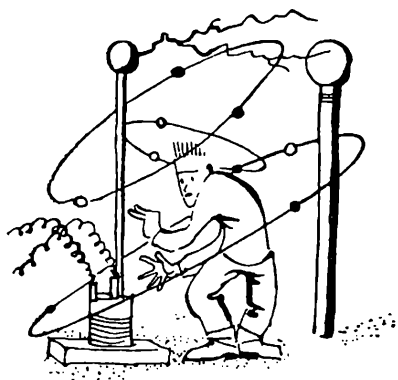
Je-li  $AA' \parallel BB'$ , jsou obě osy souměrnosti těchto úseček rovnoběžné a bod  $S$  je bodem nevlastním. Rotace se tak změnila v translaci neboli posun. Jeví se nám tedy posun jako zvláštní případ otáčení kolem nevlastního středu rotace a můžeme souhrnně vyslovit základní větu kinematické geometrie v rovině:



*Každé přemístění neproměnné rovinné soustavy v rovině můžeme nahradit otočením kolem středu otáčení, který je vlastním nebo nevlastním bodem.*

K provedení důkazu této věty postačilo uvažovat pouze o polohách  $A$ ,  $A'$  a  $B$ ,  $B'$  dvou různých bodů obou poloh téže soustavy v rovině. Poloha každého dalšího bodu  $C'$  útvaru v rovině je totiž dána vrcholem trojúhelníku  $A'B'C'$ .

(Pokračování.)



## Fysika

Jaroslav Kopáček, Praha:

### Jak vznikají oblaky

Při pohledu na oblohu vidíme velmi často hodně rozmanité mraky, lišící se jak tvarem, tak i barvou. Některé jsou čistě bílé a průsvitné, jiné jsou husté, takže nám úplně zakrývají slunce a jejich spodní základna se nám jeví tmavá až černá. Tvarem mohou být mraky nevýrazné, tvořící souvislou pokrývku oblohy, jiné mohou mít okraje jasně ohraničené.

Abychom si usnadnili výklad vzniku oblaků, provedeme nejprve jejich hrubé rozdělení. V zásadě rozdělujeme mraky do čtyř skupin podle výšky, a to:

1. skupina - vysoké oblaky, které leží obvykle výše jak 6 000 m;
2. skupina - střední oblaky, ležící obvykle v hladinách 2 000 až 6 000 m;
3. skupina - nízké oblaky, vyskytující se obvykle níže jak 2 000 m;
4. skupina - oblaky s vertikálním vývojem (vyskytují se v nich výstupné i sestupné pohyby vzduchu řádové velikosti m/vt.). Jejich základna leží v hladině nízkých mraků (1 000 až 2 000 m), jejich vrcholy mohou však za určitých okolností dosáhnout do výšky skupiny vysokých mraků.

Tato klasifikace oblaků byla v nedávné době podrobena revisi a nový Mezinárodní atlas mraků má odstranit nedostatky dosavadního rozdělení oblačnosti. Oblačnost nebude dělena do skupin podle výšky, které jsou někdy nelogické a vedou ke sporům, ale podle tvaru a vzhledu oblaků, který je určen vývojovými pochody vyplývajícími z fyzikálních podmínek tvoření oblačnosti. Oblačnost budeme tedy dělit do deseti rodů (v závorce je uvedena značka příslušného rodu):

1. cirrus (Ci) - řasa,
2. cirrostratus (Cs) - řasosloha,
3. cirrocumulus (Cc) - řasokupa,
4. altocumulus (Ac) - vysoká kupa,
5. altostratus (As) - vysoká sloha,
6. stratus (St) - sloha,

7. stratocumulus (Sc) - slohokupa,
8. nimbostratus (Ns) - nízká sloha - dešťový mrak,
9. cumulus (Cu) - kupa,
10. cumulonimbus (Cb) - bouřkový mrak.

Oblaky jednotlivých rodů se dále dělí na druhy. K názvu druhu může být připojeno i několik výrazů, které popisují co nejpřesněji vlastnosti oblaku. Nebudeme se zmiňovat v tomto článku o jednotlivých druzích oblaků, poněvadž toto podrobné dělení oblačnosti je komplikované a pro naše účely zbytečné.

V dalším si rozebereme základní děje při vzniku oblaků a pro tyto děje určíme oblaky typické. Rozmanitost tvarů oblačnosti souvisí totiž s podmínkami jejich vzniku, t. zn. se zvláštnostmi těch dějů v ovzduší, které vyvolávají ochlazování vzduchu do té míry, že vodní páry v něm obsažené zkondensují v kapalnou vodu. Oblaky jsou totiž složeny z nepatrných vodních kapiček nebo krystalů ledu, které jsou velmi lehké a ve vzduchu se vznášejí. Průměr kapiček se mění a záleží na stadiu vzniku oblaku i na jeho rodu a druhu.

Základní děje, které vytvářejí oblaky, jsou:

1. tepelná konvekce;
2. výkluzný pohyb vzduchu po frontální ploše;
3. vlnový pohyb na ploše rozhraní mezi dvěma vzduchovými vrstvami různých fyzikálních vlastností;
4. turbulentní pohyby;
5. ztráta tepla vyzařováním.

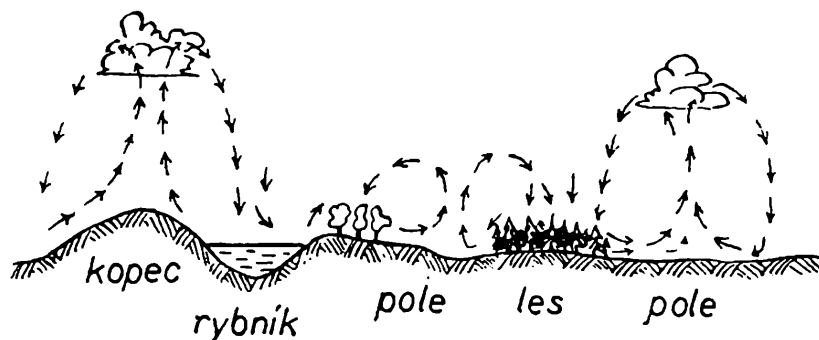
### *1. Oblaky vzniklé konvekcí.*

Tepelná konvekce ve svém počátku představuje celkem neuspořádaný pohyb. Je známo, že teplý vzduch má menší hustotu než studený a proto je teplý vzduch lehčí. Jednotlivá malá množství teplého vzduchu stoupají v podobě pramének vzhůru, současně však v sousedství teplého vzduchu klesají jiná malá množství chladnějšího vzduchu dolů. Těmto pohybům vzduchových částic říkáme tepelná konvekce.

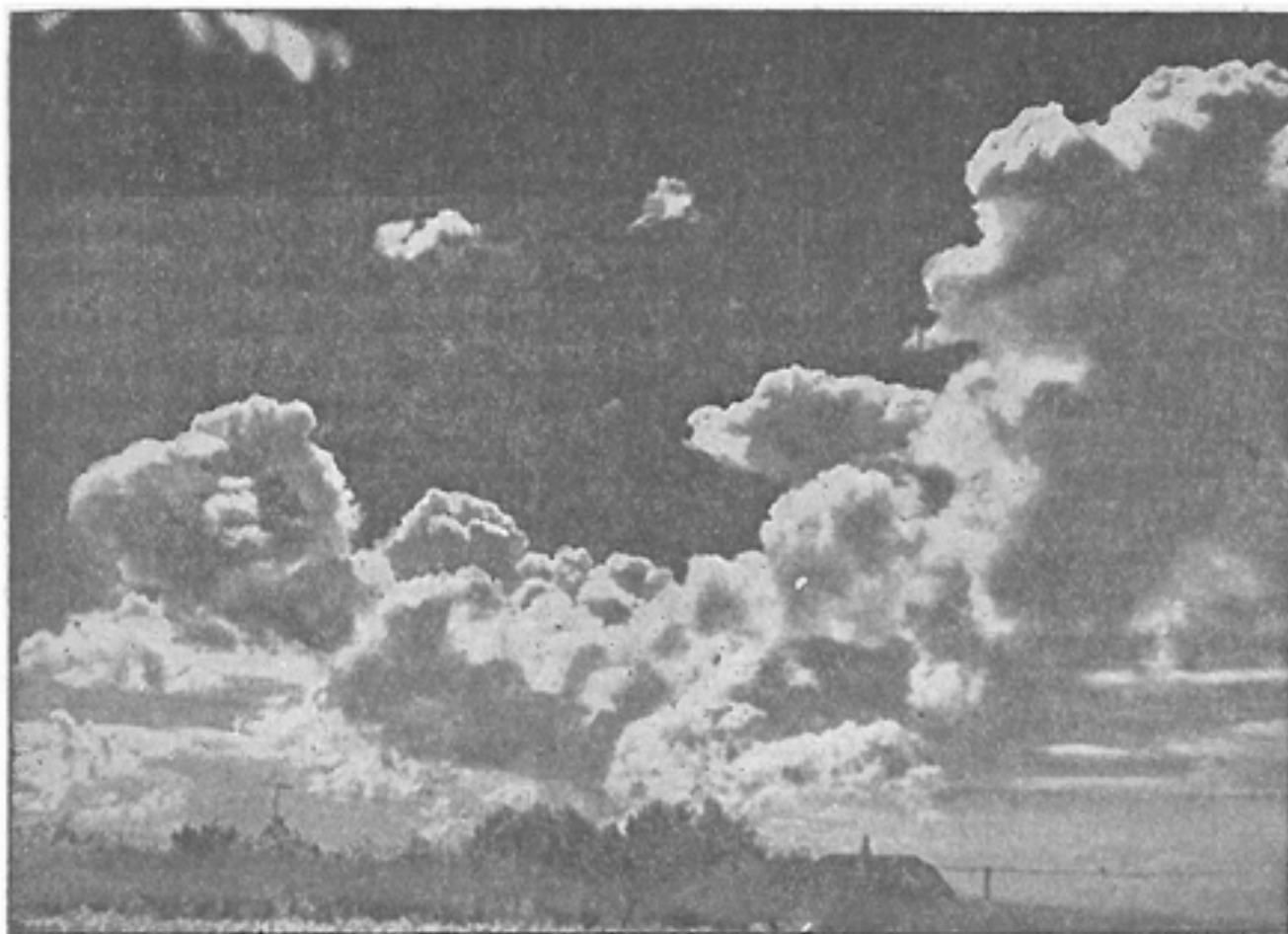
V určitých případech může dojít k značně intenzivnímu vývoji konvekce, při čemž mohou jednotlivé malé hmoty vystupujícího teplejšího vzduchu splýnout a vytvářet mohutnější výstupné proudy, které jsou lokalisovány na určitá místa. Přejítu od neuspořádaného pohybu k celkem uspořádaným výstupným a sestupným pohybům napomáhá nesourodost zemského povrchu. Vhodná místa (pole, písčiny atd.) se vlivem slunečního záření ve dne zahřívají podstatně více než místa pokrytá lesy nebo vodními plochami. Nad písčinami a jiným vhodným terénem vystupuje tedy teplý vzduch určitou rychlostí vzhůru. Protože však úbytek vzduchu musí být nad těmito místy nahrazen, klesá vzduch nad vedlejšími plochami, které se tolik neohřívají a proudí na místa, kde teplý vzduch vystupuje. Zde se znovu ohřívá a dosáhne-li patřičného přehřátí, znovu vystupuje a celý pochod se opakuje (Obr. 1).

Vystupující vzduch se ochlazuje o 1 °C na každých 100 m výšky. Jeho absolutní vlhkost zůstává stálá. Z fyziky je známo, že při dané teplotě může vzduch obsahovat jen určité, nejvýše možné množství vodní páry. Z toho plyne, že při

určité teplotě dojde v určité výšce k nasycení (relativní vlhkost je zde 100 %) a vodní páry zkondensují ve formě kapiček vody. Tímto způsobem vznikne mrak typu cumulus (obr. 2), který ovšem ve většině případů dále roste. Přestane-li z jakýchkoli příčin výstupný pohyb, cumulus přestane růst a rozpadává se. Kapičky vody se opět vypaří a mrak zmizí z oblohy.



Obr. 1. Vznik výstupných a sestupných proudů nad krajinou.

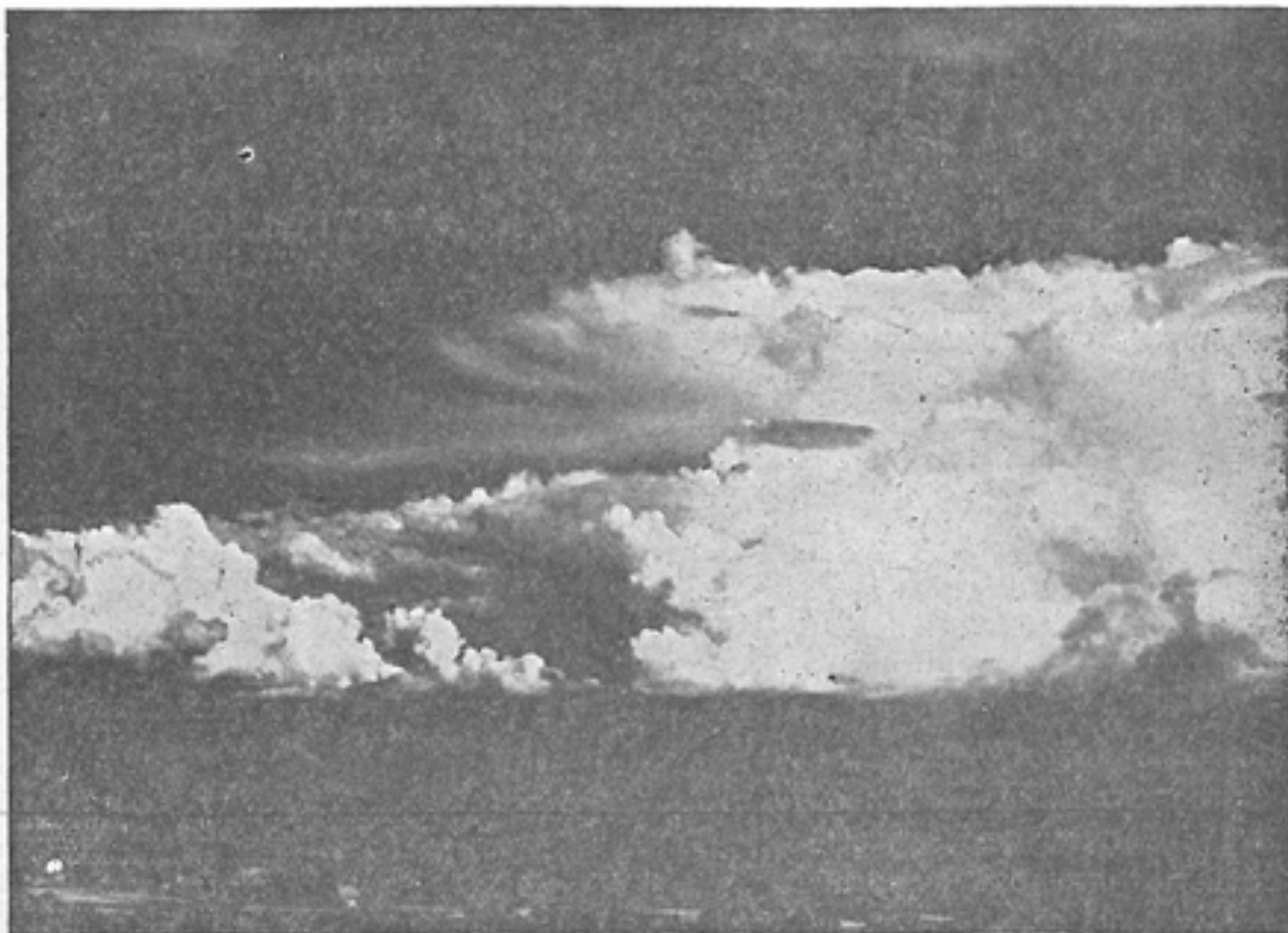


Obr. 2. Cumuly pěkného počasí. Foto Milan Koldovský.

Za určitých vhodných teplotních podmínek v atmosféře se může mrak typu cumulus silně vertikálně vyvíjet, až dosáhne hladiny ledových jader (přibližně hladina, kde je teplota v průměru asi  $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). V tomto případě se cumulus

transformuje v cumulonimbus (obr. 3), jehož vrchol dosahuje někdy až 10 km výšky. Díváme-li se na Cb s boku, vidíme oslnivě bílé hrbolky v podobě kvěťáku. Horní část má již vláknitou strukturu, neboť zde se skládá mrak již ze samých ledových krystalů. V dobře vyvinutém Cb existují dále elektrické výboje (blesky), jejichž vznik není zatím dostatečně znám. Z Cb vypadávají srážky, ve zvláštních případech ve formě průtrží mračen a krupobití.

Popsaný vznik mraků s vertikálním vývojem je pouze schematický, ve skutečnosti jsou zde fyzikální pochody značně složité a nespádají do rámce tohoto článku.



Obr. 3. Cumulonimbus - bouřkový mrak. Foto Milan Koldovský.

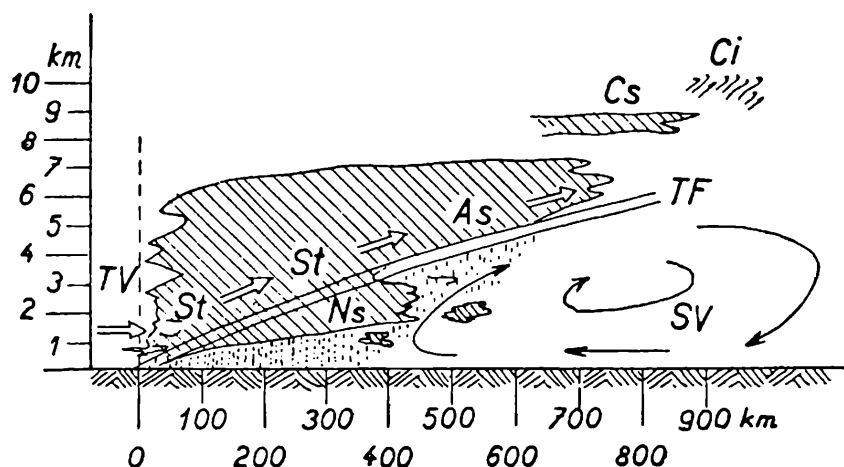
## *2. Oblaky vznikající výkluzným pohybem po frontální ploše*

Frontální plochou rozumíme v našem případě rozhraní mezi teplým a studeným vzduchem. Zkráceně budeme říkat této ploše fronta. Pro naše účely se zmíníme o frontálních systémech oblačnosti na frontě teplé a studené.

### *a) Oblačnost na teplé frontě.*

Teplou frontou rozumíme rozhraní mezi teplým a studeným vzduchem. Teplý vzduch postupuje zde poněkud rychleji než studený, který v důsledku své větší hustoty nutí teplý vzduch vystupovat ve formě výkluzu po rozhraní obou vzduchových hmot. Sklon tohoto rozhraní bývá řádově 1 : 100. Následkem adiabatického ochlazování při výstupu teplého vzduchu dochází ke kondensaci a vzniku

mohutné oblačné vrstvy podél celé fronty (obr. 4). Šířka oblačného systému bývá 700–900 km. Blíží-li se k nám teplá fronta, spatříme nejprve při horizontu (obvykle na jihozápadě či západě) cirry, které s přibližující se frontou přecházejí v cirrostratus, altostratus a nimbostratus, ze kterého obvykle padají srážky v podobě trvalého deště či mrholení. Vznik oblačného systému na teplé frontě je tedy způsoben výstupem po klínu studeného vzduchu, který leží před teplým a adiabatickým ochlazováním. Uvedené typy mraků se, na teplé frontě vyskytují skoro vždy, někdy - hlavně v létě - může chybět nízká oblačnost (stratus a nimbostratus) a v tomto případě obvykle nepadají srážky.



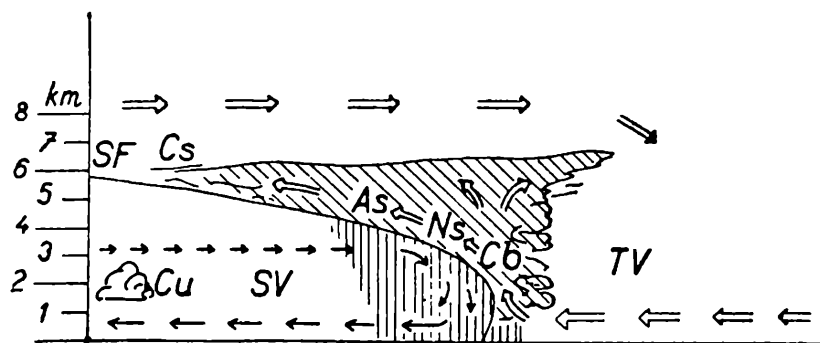
Obr. 4. Teplá fronta ve vertikálním řezu. *TV* - teplý vzduch, *SV* - studený vzduch, *TF* - teplá fronta. Šipky znázorňují směr pohybu vzduchu.

#### b) *Oblačnost na studené frontě.*

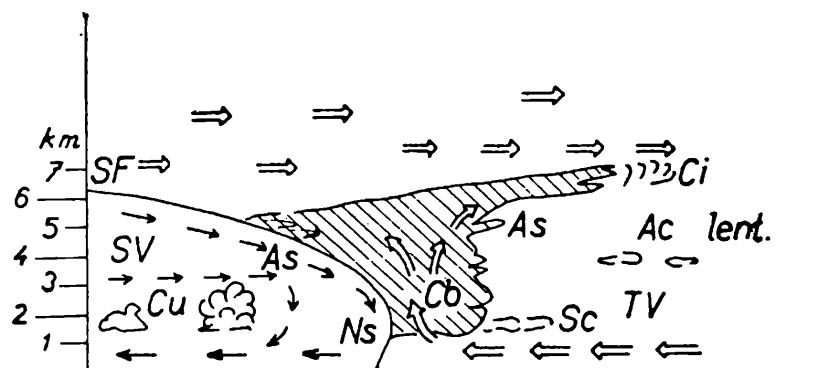
Studená fronta je plocha rozhraní, která odděluje studený vzduch od teplého. Studený vzduch v tomto případě postupuje rychleji a poněvadž má větší hustotu, tlačí se pod teplý vzduch a zdvihá jej. Vlivem tření o zemský povrch postupuje studený vzduch v přízemních vrstvách poněkud pomaleji než ve výšce, takže sklon frontální plochy v blízkosti zemského povrchu je velmi strmý a teprve ve velkých výškách nabývá hodnoty přibližně 1 : 100. Vzhledem k uvedenému je nucen teplý vzduch z počátku stoupat velmi intenzivně skoro kolmo vzhůru a proto oblačnost těsně před frontou má tvar mraků typu Cb, které jsou nahromaděny vedle sebe v podobě hradby. Další vývoj oblačné soustavy na studené frontě může být dvojího druhu:

α) Studená fronta 1. druhu je charakterisována výkluzným pohybem teplého vzduchu po rozhraní obou vzduchových hmot do velkých výšek. Z tohoto důvodu je oblačnost za studenou frontou táž jako v případě teplé fronty, jenže opačného pořadí (obr. 5). Při blížící se studené frontě vidíme nejprve mohutnou hradbu Cb, kde bývají prudké lijavce i prudký nárazový vítr. Po přechodu bouřek zůstává nízká oblačnost typu nimbostratu, která pozvolna přechází v altostratus, dále v cirrostratus a cirry.

β) Studená fronta 2. druhu se od 1. druhu liší tím, že výkluzný pohyb teplého vzduchu se šíří jen do určité výšky (2–3 km). Nad touto výškou trvá sestupný



Obr. 5. Vertikální řez studenou frontou 1. druhu.



Obr. 6. Vertikální řez studenou frontou 2. druhu.



Obr. 7. Cirrus nothus - t. zv. nepravé cirry. Foto Milan Koldovský.

pohyb teplého vzduchu, který ruší další vývoj oblaků. Oblačný systém je v tomto případě úzký, jen asi 90—100 km (obr. 6). Silným proudem teplého vzduchu ve větších výškách jsou vrchní části Cb zanášeny daleko před frontu a jeví se nám jako cirrus nothus (obr. 7), cirrostratus či cirrocumulus. Ve středních výškách se před frontou vyskytují mraky typu altocumulus floccus (vločkovitý) (obr. 8), případně altocumulus lenticularis (čočkovitý), o kterém se zmíníme v příští kapitole.



Obr. 8. Altocumulus floccus - vyskytuje se před studenou frontou. Foto Milan Koldovský.

### *3. Vznik oblaků vlnového charakteru.*

Na horizontální ploše rozhraní dvou vzduchových vrstev, které se liší hustotou a rychlostí proudění v nich, mohou vznikat vlnové pohyby. Délka těchto vln je

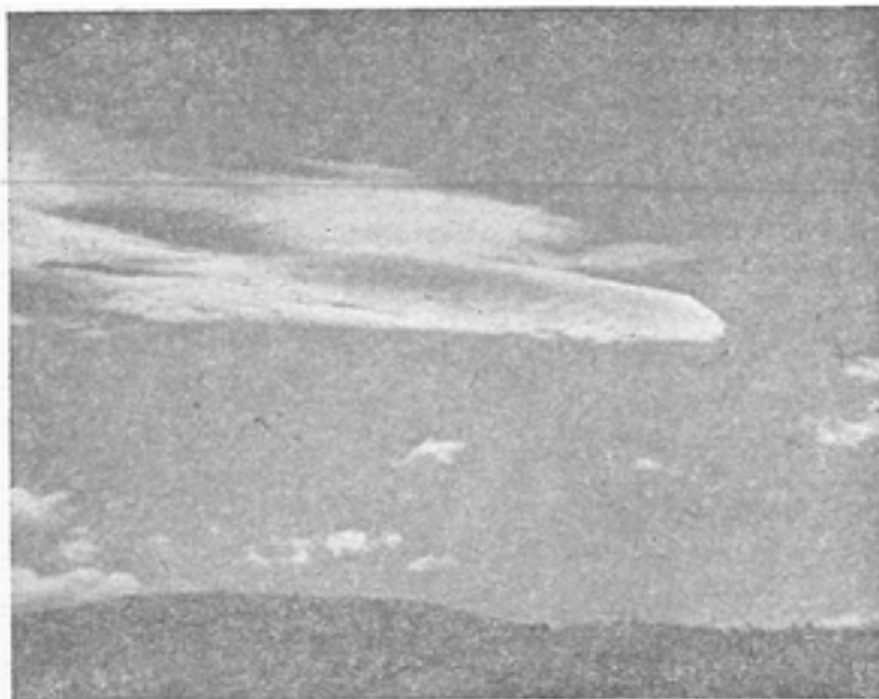
dosti veliká (proti vlnám na vodě), řádově několik stovek metrů. Výška vlny je 50—100 m. Na hřebenu každé vlny vzduch vystupuje, adiabaticky se ochlazuje, a jsou-li příznivé vlhkostní podmínky v atmosféře, dochází v této oblasti ke kondensaci a vytvoření oblaku. Na druhé straně ve spodní části vlny dochází k sestupným pohybům a oteplení vzduchu. Mraky vzniklé na vrcholech vln jsou v průřezu znázorněny na obr. 9. Ve skutečnosti mají tvar rovnoběžných pruhů a valů. Skoro téhož původu bývají mraky typu altocumulus lenticularis (bílý, čočkovité mraky s tmavší spodní základnou), které obvykle zvěstují příchod studené fronty.

Vlnové mraky altocumulus lenticularis mohou vzniknout i jiným způsobem. Proudí-li vzduch v celé mohutné vrstvě kolmo přes horský hřeben, je nucen horskou překážku přetekat. Na návětrné straně hřebene vystupuje, na závětrné sestupuje. Toto je v případě, že rychlost větru je malá. Dostoupí-li proudění určité rychlosti, potom při vhodných teplotních a vlhkostních podmínkách v atmosféře dojde k proudění vlnovému, kdy se atmosféra do určité míry rozvlní jako hladina moře. Za horskou překážkou se v tomto případě vytvoří dvouřadový systém levotočivých a pravotočivých vírů, které jsou impulsem k vytvoření vln. Ve vrcholech vlny mohou vzniknout mraky typu altocumulus lenticularis orographicus (orografického původu) (obr. 10). Délka vlny záleží na tloušťce proudící vrstvy, na převýšení překážky, případně na rychlosti větru. Řádově je délka vlny několik kilometrů. Výška základny těchto orografických mraků se mění v závislosti na podmínkách v atmosféře. Mohou se vyskytovat i v několika patrech nad sebou, což je způsobeno zvláštním teplotním zvrstvením v atmosféře.



Obr. 9.

Vznik zvlňených oblaků.



Obr. 10.

Altocumulus lenticularis  
orographicus  
za Krkonošemi.

Foto Milan Koldovský.

#### 4. Vznik oblaků turbulenci.

Turbulentní pohyb (neuspořádané proudění všemi směry) je dosti často příčinou vzniku oblaků. Přitom je možný vznik oblaků dvojího druhu:



a) Když je vzduch blízký nasycení (jeho relativní vlhkost je blízká 100 %), následuje i při malém pohybu směrem vzhůru kondensace. Vytvoří se jednotlivé oblačné hmoty, jejichž okraje nejsou zaoblené (na rozdíl od mraků vzniklých tepelnou konvekcí). Jsou roztrhané, málo husté, což svědčí o neuspořádaných turbulentních vírech. Vznikají tak roztrhané mraky pod základnou dešťových mraků (nimbostratus), nebo pod bouřkovými mraky.

b) Když nastane turbulentní promíchávání vzduchu ve vrstvě výše položené nad zemským povrchem, teplota v určitých částech této vrstvy klesá. Pokles teploty může mít za následek vznik oblaků, které se rozprostírají ve tvaru více či méně souvislé vrstvy značné horizontální rozlohy. Vertikální mohutnost v této vrstvě je různá, neboť intenzita turbulence se mění od místa k místu zcela nepravidelně. Souvislá vrstva mraků se může za určitých okolností rozčlenit na jednotlivé části, které jsou odděleny mezerami modré oblohy. Tyto oblaky jsou většinou typu stratus, stratocumulus a altocumulus.

Vrstevnaté mraky mohou vzniknout i tehdy, pohybuje-li se teplá vzduchová hmota nad studeným povrchem. Nejprve se vlivem ochlazení spodních vrstev vzduchu od chladného povrchu vytvoří mlha. Potom však vlivem pokračujících turbulentních pohybů začnou se ochlazovat i vyšší vrstvy teplého vzduchu, dojde ke kondensaci vodních par a vznikají mraky typu stratus, které vidíme přes den po rozpuštění přízemní mlhy. Nám se potom zdá, jako by se přízemní vrstva mlhy zvedla do vyšších poloh.

### *5. Oblaky vzniklé vyzařováním.*

Vodní páry obsažené ve vzduchu vyzařují, tím ztrácí teplo a teplota vzduchu klesá. Ochlazení vrstvy vzduchu s velkým obsahem vodních par, způsobené vyzařováním v nočních hodinách (v noci je vyzařování nejintenzivnější, poněvadž není eliminováno slunečním zářením), může být tak veliké, že dojde ke kondensaci a ke vzniku oblaků. Tento děj se odehrává nepřetržitě a klidně a proto vznikající mraky mají tvar hladké, jednotvárné a souvislé vrstvy. Tvoří se obvykle na podzim a v zimě. Jsou to mraky typu stratus. Při oteplení během dne vlivem slunečního záření se rozpouštějí, ale v následující noci vzniknou opět.

Vznik vrstevnatých mraků tímto způsobem je obvykle spojen se vznikem přízemní mlhy, neboť ztráta tepla vyzařováním je intenzivnější v přízemních vrstvách. Přes den se nejdříve rozpustí mlha, protože oteplení vzduchu počíná opět od zemského povrchu a potom teprve se pozvolna ohřívají vyšší vzduchové vrstvy.

### *Z á v ě r .*

Všechny uvedené způsoby vzniku oblaků mohou nastat jen za předpokladu, že v oblastech vzniku mraků existují kondenzační jádra. Kondenzační jádra jsou částičky hygroskopických látek (snadno přijímají vodu), na kterých kondensují vodní páry a které kondensaci umožňují při relativní vlhkosti okolo 100 %. V největší míře to jsou produkty spalovacích pochodů, nad mořem potom krystalky soli, které se do vzduchu dostávají odpařováním drobných kapiček tříště mořských

vln, dále zrnka prachu, někdy však i kapalně částičky. Velikost kondenzačních jader je nepatrná, řádově  $10^{-6}$  cm a jejich množství v  $1 \text{ cm}^3$  je sto až milion. Ledové oblaky (oblaky ve velkých výškách, které jsou složeny jen z ledových krystalů) se tvoří většinou zmrznutím zárodečných oblačných kapiček, vzniklých na zvláštních druzích kondenzačních jader, které zveme ledová jádra. Jejich chemická podstata není ještě dostatečně známa.

Závěrem bych chtěl znovu zdůraznit, že uvedené způsoby vzniku oblaků jsou pouze schematické. Fyzikální pochody odehrávající se při srážení vodních par na kondenzačních jádrech a při vzniku a rozpouštění oblaků jsou velmi složité a někdy i nevysvětlené. Úkol tohoto článku spočívá v tom, aby se čtenář seznámil se základními poznatky z fyziky atmosféry a doplnil si tak vědomosti z fyziky, které mu poskytuje studium na školách všeobecně vzdělávacích.

J a n T i c h ý, Liberec:

## O zvucích v přírodě, které neslyšíme

Každému zvuku, který slyšíme, přisuzujeme určitou výšku. Fyzikálně ji vyjadřujeme frekvencí elastických kmitů způsobených zvukovým rozruchem. Vnímání schopnost našich sluchových orgánů je však omezena na poměrně úzký frekvenční obor asi od  $16 \text{ cs}^{-1}$  do 10 až 20  $\text{kcs}^{-1}$ \*). Kmitočty nižší než  $16 \text{ cs}^{-1}$  nevyvolávají už v našem uchu ucelený zvukový vjem a nazýváme je infrazvukovými. Jde na příklad o kmity různých stavebních konstrukcí (mostů, věží, budov atd.), chvění běžících strojů, otřesy způsobené v zemském povrchu zemětřesením a pod. Horní hranice frekvence, po kterou dovedeme ještě zvuky sluchem zachytiti, se u různých lidí poněkud liší. Všeobecně lze říci, že stárnutím se snižuje s 16 až 20  $\text{kcs}^{-1}$  v mládí až asi na 10  $\text{kcs}^{-1}$  v pokročilém stáří. Všechny zvukové vlny s vyšším kmitočtem, než je tato mez, které jsou pro nás již neslyšitelné, nazýváme ultrazvukovými. Horní hranice ultrazvukových kmitů je podmíněna technickou vyspělostí ultrazvukových zdrojů a neustále se posunuje k vyšším kmitočtům. Dnes dovedeme buditi ultrazvukové kmity s frekvencemi až řádově  $10^9 \text{ cs}^{-1}$ . Ultrazvukové frekvenční spektrum je tedy velmi široké a obsahuje asi 16 oktáv.

Zákonitosti platící pro slyšitelné zvukové vlny platí sice všeobecně i pro vlny ultrazvukové, nicméně se u ultrazvuku setkáváme s mnohými hodně svéráznými vlastnostmi. Vyplývají především z jeho vysokých kmitočtů a s tím souvisící krátké vlnové délky ultrazvukových vln. Vlnová délka  $\lambda$  je totiž s frekvencí  $f$  vázána jednoduchým známým vztahem  $\lambda = \frac{c}{f}$ , ve kterém  $c$  značí rychlost šíření vlnění v uvažovaném prostředí. Ve vzduchu ( $c = 330 \text{ ms}^{-1}$ ) jsou tedy nejkratší vlnové délky ultrazvukových vln srovnatelné s délkami vln viditelného světla.

\*)  $\text{cs}^{-1}$  znamená cykl za sekundu,  
 $\text{kcs}^{-1}$  kilocykl za sekundu.

Proto se u ultrazvuku, zejména při vyšších frekvencích, setkáváme se zákonitostmi obdobnými geometrické optice: s přímočarým šířením, zákonem odrazu a zákonem lomu. A právě především tyto vlastnosti vytvořily jeden z hlavních předpokladů pro velmi rychlý růst pole praktického použití ultrazvuku ať už v technice, chemii, biologii, nebo v lékařství.

Mezi první praktické aplikace ultrazvuku patří jeho použití M. P. Langevinem během první světové války k hledání ponorek a později k měření hloubky moře. Z doby, která uplynula od vyslání ultrazvukového signálu do zachycení jeho ozvěny, usuzovalo se na vzdálenost překážky, na které se ultrazvukový signál mohl odrazit. Vzhledem ke značně směrovým účinkům ultrazvuku bylo možno takto prozkoumávat moře v nejrůznějších směrech od plavidla nesoucího celé zařízení. Ultrazvukové vlny tu měly tedy úlohu velmi připomínající úlohu radarových vln, které se dočkaly velkého rozšíření o čtvrt století později v období druhé světové války.

V posledních letech bylo zjištěno, že i sama příroda vybavila některé živočichy jakýmsi ultrazvukovými radary a umožnila jim na obdobném principu velmi dokonalou orientaci. Máme na mysli především netopýry, kteří se pohybují i v naprosté temnotě s překvapující jistotou. Zalepíme-li jim oči, nic z této jistoty neztratí, zalepíme-li jim však uši nebo ústa, ztratí naprosto schopnost se vyhýbat překážkám a jakkoliv se orientovat. První pokusy v tomto směru byly sice již konány koncem osmnáctého století L. Spallanzaním (1793) a L. Jurinem (1798), ale nevedly k žádnému vysvětlení. Teprve roku 1920 vyslovil H. Hartridge domněnku, že netopýři využívají ke své orientaci ultrazvuku a tato domněnka byla definitivně potvrzena pokusy R. Galambosa a D. R. Griffina (1942 a později). Nejběžnější naši netopýři z čeledi holonosých vysílají při svém letu v pravidelných přestávkách krátké ultrazvukové signály. Jejich frekvence kolísá mezi 30 až  $120 \text{ kcs}^{-1}$  s maximem intenzity asi kolem  $50 \text{ kcs}^{-1}$ . Ve vzduchu jest jejich vlnová délka několik málo milimetrů, a tak i poměrně malé překážky je dobře odrážejí. Podle toho, za jakou dobu zachytí netopýr ozvěnu určitým směrem vyslaného signálu, usuzuje na vzdálenost a polohu překážky. Vysílání ultrazvukových impulsů je u netopýrů umožněno tím, že dobře vyvinutými svaly mohou velmi silně napínati hlasivky. Jednotlivé ultrazvukové signály netrvají déle než asi  $3 \cdot 10^{-3}$  s. Netopýr je počne vysílat, než se zvedne k letu asi 5 až 10krát za vteřinu. Při volném letu jich pak vysílá asi 20 až 30 za vteřinu, a jakmile se objeví nějaká překážka, zvýší jejich počet na 50 až 60 za vteřinu. Okamžitě po minutí překážky poklesne jejich počet na normální hodnotu 20 až 30 za vteřinu. Každý z impulsů je doprovázen slabě slyšitelným tikotem. Netopýři vrápencovití, ke kterým patří na př. vrápenec podkovní, vysílají ultrazvukové impulsy nosem. Nosními otvory soustřeďují ultrazvukové záření do dosti úzkého svazku a neustálým natáčením hlavy prohledávají jím za letu prostor před sebou. Takto zjišťují i velmi nepatrné překážky již ve značné vzdálenosti. Ultrazvukové impulsy, které tato čeleď vysílá, mají 20 až 30krát delší trvání, než impulsy vysílané netopýry holonosými. Proto při překážce bližší než asi 16 m se počne ozvěna překrývat s vysílaným impulsem a zjišťování vzdálenosti překážky z doby mezi vysláním impulsu a zachycením ozvěny se stane nemožným. Netopýři této čeledi pravděpodobně usuzují na při-

tomnost nějaké překážky pouze ze zesílení odraženého ultrazvuku. Jak při tom usuzují na vzdálenost překážky, zůstává do jisté míry prozatím nevyřešeno. C. Kleesattel poukazuje dokonce na možnost, že k tomu využívají Dopplerova zjevu.

Orientace pomocí ultrazvukových impulsů velmi platně pomáhá netopýrům i při lovu nočních motýlů. Netopýři nám po této stránce připomínají stíhací letadla vybavená radarovým zařízením, které jim umožňuje i v noci nebo v mlze spolehlivě vypátrat nepřítele. Příroda však nenechala noční motýly zcela bez ochrany. Vybavila je sluchovými orgány schopnými vnímat ultrazvuk a včas motýla varovati. K jejich ochraně přispívá i povrch jejich těla, který velmi špatně odráží ultrazvukové vlny.

Kromě netopýrů i různý hmyz vydává zvuky vyznačující se ultrazvukovými kmitočty. Přítomnost ultrazvukových vln živočišného původu s frekvencemi asi až do  $30 \text{ kcs}^{-1}$  byla zjištěna v tropických pralesích a v mořích. I domácí včely vydávají zvuky s kmitočtem 20 až  $22 \text{ kcs}^{-1}$ , které dosahují maximální intensity v době rojení. Vnímání schopnost pro ultrazvukové vlny asi až do  $100 \text{ kcs}^{-1}$  byla prokázána u různých hlodavců, jako na př. u myší, krys, křečků, morčat a pod. Je pravděpodobné, že tato zvířata dovedou též ultrazvuk vydávat, aby se vzájemně dorozuměla. Když bylo způsobu hledání ponorek, o němž jsem se již zmínil, použito při lovu velryb, zjistilo se, že velryby vnímají ultrazvukové vlny s kmitočtem od 20 do  $30 \text{ kcs}^{-1}$  až do vzdálenosti 7,5 km a počnou okamžitě prchat. Této okolnosti bylo dokonce později využito i k lovu. Vypátraná velryba byla sevřena mezi dva kužele ultrazvukového záření a přinucena tak plouti určitým směrem, ve kterém mohla být snadno dopadena. Rovněž psi reagují na ultrazvukové signály. K výcviku policejních psů se proto dá použít i ultrazvukových píšťalek, které jsou pro lidský sluch neslyšitelné.

Tím jsme se letmo, bez nároků na úplnost, dotkli hlavních případů výskytu ultrazvuku v přírodě. Ještě veliký počet otázek tu čeká na své vyřešení. Je pozoruhodné, že zatím co člověk většinou čerpal z přímého pozorování přírody náměty k laboratorním pokusům a dále k technickému pokroku, vývoj na tomto poli se děl právě opačně. Teprve, když se fyzikové seznámili s ultrazvukem v laboratoři, povšimli si, že sama příroda ho dovedla velmi vtipně použít a obdařila některé živočichy schopností ultrazvuk vysílat i zachycovat.

Ing. Dr V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

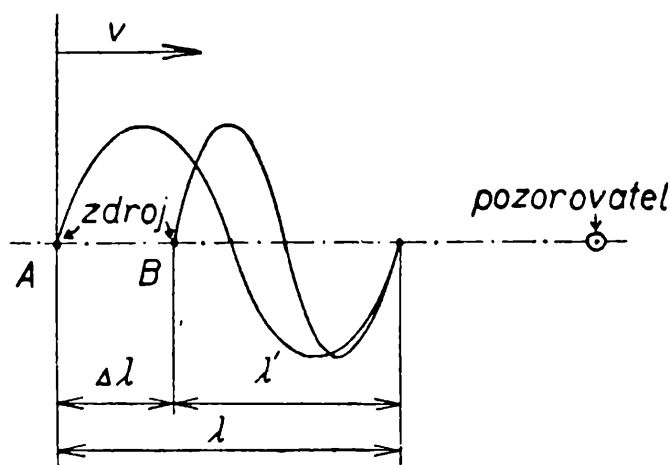
## Dopplerův princip

V roce 1842 byl profesorem pražské techniky Janem Christianem Dopplerem (1803—1854) popsán\*) a theoreticky vysvětlen význačný optický jev, později

\*) Spis, ve kterém prof. Ch. Doppler vyslovil svůj princip, vyšel v Praze roku 1842 v pojednáních Královské české společnosti nauk pod názvem: O barevném světle dvojhvězd a některých hvězd jiných.

pojmenovaný jeho jménem. Doppler pozoroval, že nebeská tělesa, pohybující se relativně vzhledem k Zemi, jeví rozdílné zabarvení podle toho, zda se těleso k Zemi blíží či zda se od Země vzdaluje. V prvním případě se posouvají spektrální čáry tělesem vysílaného světla směrem k fialovému okraji spektra, v případě druhém děje se posuv k červenému okraji spektra. Doppler vyložil tento úkaz zcela uspokojivě na základě představy o vlnové podstatě světla (jež je elektromagnetickým vlněním) změnou kmitočtu vlnění přijímaného pozorovatelem. Proto bylo lze očekávat, že k podobným jevům dochází i u vlnění šířícího se elastickými silami mezi částicemi hmotného prostředí, tedy u vln zvukových. Platnost tohoto principu v oboru akustiky byla též v roce 1845 experimentálně potvrzena holandským fysikem Buys-Balotem (1817—1891). Obecně lze Dopplerův princip vyjádřit takto: *Pohybují-li se oscilátor, který je zdrojem vlnění a pozorovatel relativně k sobě nebo od sebe, přijímá pozorovatel při vzájemném přibližování kmitočet vyšší a při vzájemném vzdalování kmitočet nižší, než je vlastní kmitočet oscilátoru.*

Všimněme si Dopplerova jevu u *zvukových vln* z kvantitativní stránky. Nejprve si probereme případ, kdy se *ke klidnému pozorovateli blíží zvukový zdroj rychlostí  $v$ .*



Obr. 1

Vlnová délka  $\lambda$  zvukových vln se ve směru pohybu (z místa A do B) zdroje zkracuje, jak je patrné ze schematického obr. 1. Je to zcela snadno pochopitelné, protože dvě po sobě jdoucí zhuštění (či zředění) okolní vzdušiny, jež je nositelkou akustického rozruchu, nejsou zdrojem vyslána ze stejné vzdálenosti od pozorovatele (každé zhuštění je vysláno z místa pozorovateli bližšího, než zhuštění předcházející). Zkrácení vlnové délky  $\lambda$  se rovná dráze, kterou zdroj urazí na jednu periodu  $T$  (dobu kmitu), tedy

$$v T = \Delta \lambda. \quad (1)$$

Protože perioda  $T$  se rovná převrácené hodnotě kmitočtu  $\nu$ , můžeme psát

$$v = \Delta \lambda \cdot \nu. \quad (2)$$

Označme si  $c$  rychlost vlnění v uvažovaném prostředí. Mezi touto rychlostí  $c$ , vlnovou délkou  $\lambda$  a kmitočtem  $\nu$  platí známý vztah

$$c = \lambda \nu. \quad (3)$$

Zkrátala-li se vlnová délka  $\lambda$  o hodnotu  $\Delta\lambda$  na  $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$ , musí platit rovnice podobná (3)

$$c = \lambda' \nu', \quad (4)$$

pozorovatelem přijímaný kmitočet se tedy změnil (zvýšil) na  $\nu'$ , protože rychlost  $c$  šíření zvukových vln nezávisí na rychlosti zdroje. Ze srovnání rovnic (3) a (4) pak plyne

$$c = \lambda \nu = \lambda' \nu' \quad (5)$$

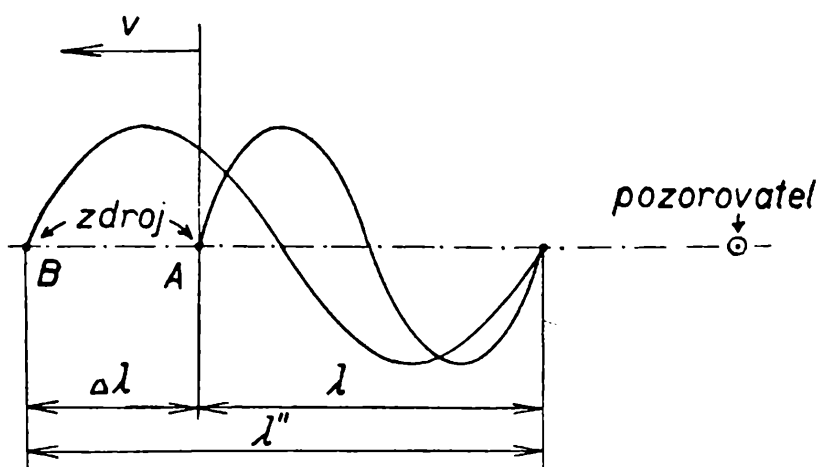
a dále po dosazení z rovnic (2) a (3) dostaneme pro pozorovatelem přijímaný kmitočet  $\nu'$

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{c\nu}{\nu\lambda - \nu\Delta\lambda} = \frac{c}{c - v} \nu = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \nu, \quad (6)$$

což můžeme pro případ  $v \ll c$  psát\*) ve tvaru

$$\nu' \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right) \nu. \quad (7)$$

Tento přibližný vztah, kterého místo vztahu (6) můžeme použít jen při splnění uvedené podmínky, dostaneme rozvedením prvního ze vztahu (7) v řadu a zanedbáním vyšších členů kvadratickým počínaje.



Obr. 2

Podobně bychom dostali vztah pro pozorovatelem přijímaný kmitočet - v případě, že zvukový zdroj se vzdaluje od klidného pozorovatele - ve tvaru

$$\nu'' = \frac{c}{\lambda''} = \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\nu\lambda + \nu\Delta\lambda} = \frac{c}{c + v} \nu \quad (8)$$

kam jsme dosadili  $\lambda'' = \lambda + \Delta\lambda$ . Vlnová délka se při vzdalování (t. j. při pohybu z místa A do B) prodlužuje, jak je patrné ze schematického obr. 2. Pro případ  $v \ll c$  můžeme opět psát zjednodušeně, podobně jako jsme psali v rovnici (7)

\*) značka  $\ll$  znamená „značně menší než“

$$\nu'' = \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \nu \approx \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu. \quad (9)$$

Míjí-li nás zvukový zdroj (nejprve se přibližoval, pak se vzdaluje), změní se  $\nu$  okamžiku, kdy je jeho vzdálenost od nás nejmenší, výška vnímaného zvuku o hudební interval

$$\frac{\nu'}{\nu''} = \frac{c + v}{c - v} \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx 1 + \frac{2v}{c}. \quad (10)$$

Tuto hodnotu jsme dostali podobně jako již v případech předešlých na základě pravidel o počítání s malými čísly (vzhledem k tomu, že  $v \ll c$ ).

Všimněme si nyní druhého případu, kdy *zvukový zdroj je v klidu a pozorovatel se pohybuje*, a to buď se k němu blíží nebo se od něho vzdaluje. Blíží-li se pozorovatel ke zdroji rychlostí  $u$ , zachytí v jednotkovém čase (za 1 s) větší počet kmitů, než zdroj vysílá, protože jde vstříc akustickému rozruchu. Vzdaluje-li se naopak od zdroje, zachytí v jednotkovém čase kmitů méně, než zdroj v téže čase vysílá.

S obdobným případem se setkáváme, půjdeme-li delší dobu podél trati elektrické dráhy a budeme-li počítat zvláště vlaky, jež nás v téže době minou ve stejném směru naší chůze a zvláště vlaky jedoucí opačným směrem proti nám. I když budou časové intervaly mezi jednotlivými vlaky obou směrů stejné, napočteme prvních méně než druhých.

Blíží-li se pozorovatel ke zdroji, zachytí v jednotkovém čase počet kmitů

$$\nu' = \nu + \Delta \nu, \quad (11)$$

kde  $\nu$  je kmitočet zdroje,  $\Delta \nu$  je počet kmitů, jež za 1 s zachytí pozorovatel navíc. Pro tento přírůstek kmitočtu  $\Delta \nu$  musí zřejmě platit podle (3)

$$\Delta \nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{\frac{c}{\nu}} = \frac{u}{c} \nu. \quad (12)$$

Dosadíme-li do (11), dostaneme pro vnímaný kmitočet vztah

$$\nu' = \nu + \frac{u}{c} \nu = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \nu. \quad (13)$$

Vzdaluje-li se pozorovatel od zdroje, dostáváme pro vnímaný kmitočet

$$\nu'' = \nu - \Delta \nu \quad (14)$$

a dosadíme-li za  $\Delta \nu$  z rovnice (12)

$$\nu'' = \left(1 - \frac{u}{c}\right) \nu. \quad (15)$$

Při malých rychlostech zdroje ( $v \ll c$ ) jsou vztahy (7) a (13) a podobně (9) a (15) prakticky stejné.

Zbývá ještě uvážit vliv eventuálního *pohybu prostředí* na změnu kmitočtu prostřednictvím přenášeného zvuku. Nejprve si napíšeme rovnici pro změnu kmitočtu, pohybuje-li se současně i zdroj i pozorovatel po stejném paprsku. Použijeme-li na př. rovnice (6) a (15) a za kmitočet v rovnici (6) dosadíme hodnotu  $\nu'$  z rovnice (15) dostaneme

$$\nu' = \frac{c}{c - v} \frac{c - u}{c} \nu = \frac{c - u}{c - v} \nu. \quad (16)$$

Bude-li  $u = v$ , bude  $\nu' = \nu$ ; přijímaný kmitočet se tedy nezmění, bude-li se zdroj i pozorovatel pohybovat po stejném paprsku, stejným směrem a stejnou rychlostí (jejich relativní rychlost je nulová). Nastane-li takový pohyb v klidné vzdušině a nemá-li vliv na kmitočet, nemůže naopak ani pohyb vzdušiny v případě klidného zdroje i pozorovatele kmitočet ovlivnit. Proto se na příklad větrem nemění výška tónů zvukových zdrojů, jejichž relativní rychlost vzhledem k pozorovateli je nulová.

S důsledky plynoucími z Dopplerova principu setkáme se v denním životě. Změnu kmitočtu vnímaného zvuku uslyšíme, míjí-li nás pískající lokomotiva jedoucí vozidlo, letící projektil a pod.

*Strouhal* uvádí jako praktickou demonstraci tohoto principu sledování výšky tónu píšťaly lokomotivy, jede-li vlak hornatou krajinou. Uslyšíme zde nejen zvuk šířící se přímo od zdroje, ale také ozvěnu po odrazu na nějaké přírodní stěně. Nebudeme-li se ve voze pohybovat, bude přijímaný kmitočet píšťaly stejný, ať vlak bude ve stanici, či v jízdě. Kmitočet ozvěny bude však větší nebo menší, podle toho pojedeme-li ke stěně, od níž se zvuk odrazil, či budeme-li se od této stěny vzdalovat.

*Weinhold* uvádí pokus s ladičkou. Pohybujeme-li ladičkou o vysokém kmitočtu v blízkosti stěny směrem k ní nebo od ní, změní se kmitočet tónu přijímaného pozorovatelem a protože oboje vlnění jak od stěny odražené, tak i od zdroje jdoucí přímo k pozorovateli vzájemně interferuje, uslyšíme zázněje (rázy). Při kmitočtu ladičky  $\nu = 2000$  Hz, jež se blíží ke stěně, či se od ní vzdaluje rychlostí  $v = 1$  m. s<sup>-1</sup>, bude kmitočet stěnou odražených vln a vln jdoucích z ladičky k pozorovateli  $\nu' = 2006$  Hz a  $\nu'' = 1994$  Hz. Pozorovatel tedy uslyší v obou případech dva tóny o blízkých frekvencích  $\nu'$  a  $\nu''$ , jež budou interferovat. Počet záznějí (zvukových rázů) bude  $n = 12$  s<sup>-1</sup>.

*Mach* demonstroval Dopplerův princip tak, že na konci duté tyče umístil píšťalku a tyčí otáčel kolem osy kolmé k podélné osy tyče tak, aby píšťalka opisovala kruh velkého poloměru. Tyčí byl k píšťalce přiváděn proud vzduchu. Pozorovatel v rovině tohoto kruhu uslyší stoupání a klesání tónu píšťalky, když se k němu tato blíží nebo se od něho vzdaluje. V ose rotace nedojde při otáčení ke změně kmitočtu vnímaného zvuku.

O Dopplerově principu v optice zmíníme se podrobněji někdy jindy. Zde jen pro úplnost uvedu, že vzhledem k velkým rychlostem je nutno v optice uvažovat i důsledky plynoucí z teorie relativity. Pro změnu kmitočtu plyne pak vzorec



$$v' = v \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}}, \quad (17)$$

který je stejný pro případy pohybu pozorovatele a klidného zdroje i klidného pozorovatele a zdroje v relativním pohybu vzhledem k němu, či při pohybech obou současně. Rychlost  $v$  zde značí relativní rychlost zdroje a pozorovatele, kterou se k sobě blíží nebo od sebe vzdalují. Horní znaménko v rovnici (17) platí pro přibližování, spodní pro vzdalování. Rozvedeme-li (17) v řadu a členy vyšších mocnin zanedbáme, dostáváme výraz podobný (13) a (15). Na rozdíl od akustiky, kde se Dopplerův jev uplatňuje jen ve směru pohybu zdroje, setkáme se v optice s Dopplerovým jevem podélným, který se uplatňuje podobně jako v akustice ve směru pohybu a s Dopplerovým jevem příčným, který bychom mohli pozorovat ve směru kolmém ke směru pohybu. Dopplerův jev příčný nebyl však pro značné praktické obtíže dosud experimentálně potvrzen.



## Úlohy k řešení

### Našim mladým čtenářům

Budeme zde pravidelně v 1. až 7. čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních uveřejňovat úlohy k řešení z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Těšíme se, že se vám podaří správně je vyřešit a že nám řešení zašlete na adresu dole uvedenou. Nejlepší řešitelé budou odměněni a jejich jména uveřejněna v 10. čísle Rozhledů. Do soutěže se přijímají pouze řešení došlá včas ve lhůtě, která bude uvedena v každém čísle.

Abyste nám usnadnili práci, žádáme vás, abyste úlohy číslovali týmiž čísly jako v zadání. Řešení každé úlohy - tedy nikoliv pouze výsledek - budiž vždy na zvláštním listu papíru rozměru A4 nebo A5; slovní text úlohy již v řešení neopakujte. Pište perem nebo strojem pouze po jedné straně papíru. V pravém dolním rohu uveďte čitelně své příjmení a jméno, jméno i adresu školy a třídu.

Předpokládáme, že budete pracovat samostatně, bez cizí pomoci a přejeme vám hodně úspěchu.

Na ukázkou vám příště otiskneme jeden příklad z fyziky s provedeným řešením.

*Redakce*

1. Jestliže  $0 < p < q < r$ , pak platí

$$p^2r + q^2p + r^2q > 3pqr.$$

Podle toho se dá dokázat, že rovnice

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} + \frac{x^2 - b^2}{x^2 - c^2} - \frac{x^2 - c^2}{x^2 - a^2} = 3,$$

kde  $0 < |a| < |b| < |c|$ , má vždy reálné kořeny. Dokažte obě tvrzení.

*St. Horák*

2. Je dán trojúhelník  $ABC$ . Sestrojte obdélník  $CDEF$  tak, aby přímka  $DE$  procházela vrcholem  $A$ , přímka  $EF$  vrcholem  $B$  a aby platilo  $EF : DE = 2 : 3$ .

*St. Horák*

3. Proveďte prostorové řešení těchto úloh:

Sestrojte rotační komolý kužel, dány-li:

a) body  $A, B$  jedné podstavné kružnice a body  $C, D$  druhé podstavné kružnice;

b) průměr  $d_1$  jedné podstavy a mimoběžný s ním průměr  $d_2$  druhé podstavy (oba polohou nikoli délkou) a tečná rovina  $\tau$  plochy;

c) protější vrcholy  $A, C$  osového řezu, poloha průměru  $d$  opsané plochy kulové a přímka  $p$  protínající podstavnou kružnici!

*Ota Setzer*

4. Na oběžné kolo turbíny je vrháno každou minutu 320 kg vodní páry. Turbinou poháněné dynamo vyrábí elektrický proud 125 A při napětí 5000 V. Určete relativní rychlost vodní páry za předpokladu, že 40 % energie se ztrácí!

*Evžen Říman*

Řešení těchto úloh zašlete do 15. března t. r. na adresu:  
Doc. Dr. M. Menšík, Praha 6, Zikova 4.

## *Jiní o nás*

Milý čtenáři,

požádali jsme vynikající pracovníky vědy, techniky a umění, aby Vám napsali něco ze svých bohatých životních i odborných zkušeností a též o požadavcích, které budou později v praxi nebo na vysoké škole na vás kladeny.

Jistě si rádi úvodem přečtete hned první příspěvek z pera lékaře, profesora lékařské fakulty university v Brně MUDr. Jiřího Štefla, jehož asi znáte z přednášek v rozhlase i z článků v denním tisku a někteří snad i jako spisovatele detektivních románů.



Prof. MUDr Jiří Štefl, Brno:

## Lékařství a matematika

Nedávno jsem se ptal jednoho mladého muže, který chtěl studovat lékařství, když dokončil střední školu, proč si vybral právě tento obor.

„Protože jsem slabý v matematice,“ odpověděl pohotově, a protože jsem za uplynulá léta viděl podobných výtečníků více, namnoze i mezi ženami, nebude snad na škodu, věnovat tomu pár slov.

Především je to politováníhodné, když někdo chce jít na vysokou školu vůbec z důvodu negativního. Půjdu tam, protože něco neumím, co se jinde potřebuje více, to je závěr člověka, který nemá poměr k vědě a ke společnosti, nýbrž člověka, který si pořád ještě počtíle myslí, že medicína mu bez práce přinese bohatou odměnu. Anebo je to ješitník, kterému bude lahodit, když bude poletovat po nemocničních chodbách v bílém plášti a když staré nemocné babičky budou k němu vzhlížeti s úctou, která nebude odpovídat ani jeho věku, ani jeho zkušenostem.

Pro životní dráhu se má člověk rozhodovat jenom z důvodů pozitivních, z jakéhokoli kladného zájmu, z jakého v podrobnostech, to už nebudeme rozvádět, protože bychom tu naváděli třeba k neupřímnosti. Ostatně matematicky dostatečně vzdělaný člověk pochopí snadno, co je to stanovisko vycházející ze záporu nebo z kladu.

Tak to je to, co potřebujeme v medicíně nejvíce, způsob matematického myšlení, třeba bez čísel, ale rozumět a chápat, co je to integrál, co je to asymptota, co je to hysteretická křivka - všichni stárneme více méně podle hysteretické křivky - chápat, kdy se ocítám v záporném prostoru a kdy v kladném, co jsou to množiny, infinitesimální počet a podobně.

Konkrétně se zdá, že toho není mnoho, co by člověk musel nazpaměť ovládat z matematických vzorců, tak houževnatě dřevných na středních školách, jenže vy se s tím nedřete proto, abyste jednou u lože nemocného odříkávali vzorec pro kvadratickou rovnici nebo rovnici hyperboly, zrovna tak, jak se neučíte posloupnosti Přemyslovců proto, že byste někdy tím mohli sytit pacienty místo pilulkami. Na to se učíte, a to jsme se učili všichni proto, abychom získali to, co nám střední škola má dát, to jest encyklopedickou úroveň a schopnost převádět formule pro život a redukovat život na formule, ať jazykové, dějepisné, matematické, fyzikální, tak jak jsou mnohé vědy rozčleněny.

Z matematiky začneme tím nejjednodušším, student si sečte, že studium lékařství trvá šest let, vypočte si, kolik mu bude let, když bude hotov, a co všechno integračně za těch šest let musí inkorporovat do svých mozkových buněk. A na

medicině počítání je denní chleba, ať už je to sčítání červených krvinek, kterých se vejde pět milionů do krychlového milimetru, počítání bílých krvinek, kterých je tu jenom kolem pěti tisíc, vůbec čísla jsou naším denním průvodcem. Vedle těchto jednoduchých početních úkonů ovšem musí mladý lékař mít dokonalou číselnou představu, musí vědět, kolik je to asi milion a jak veliký je ten krychlový milimetr.

Nejdeme v přesnosti nikterak do podrobností, jestliže je krvinek o nějakých dvě stě tisíc více nebo méně, to ještě neznámá nic, to je často v mezích pozorovací chyby. Právě ta fyzikální číselná představa studentům dost často chybí, i když vědí, že metr má sto centimetrů, často jsou překvapeni, že krychlový metr jich má (krychlových centimetrů) jeden milion a krychlový decimetr jich má tisíc, čili v jednom litru že je tisíc krychlových centimetrů. V tom se dělají velké chyby, a někdy by to dokonce mohl odnést nemocný, kdybyste se mu spletli v předpisu léčiva o desetinné místo.

Při farmakologii, což je jeden z nejdůležitějších oborů lékařské vědy, učí se student mimo jiné předepisovat recepty. Nehledíc k tomu, že musí znát druh léčiva, při které nemoci se podává, kdy se podává a jak se podává, jestli ústy, nebo v injekci a v jaké, musí vědět, kolik se ho podává, a tu si studenti statečně pletou miligramy a centigramy, a když má násobit několik miligramů desetinným číslem, při předpisu pilulek, je mnohdy nadobro ztracen. A my nemáme čas, učit vás násobení zlomků, když to neumíte, nepustíme vás dále, to se nedá nic dělat, a ti, kteří šli na medicínu proto, že neumějí počítat, nedopočítají se konce svého studia.

To je to, co bychom od vás v matematice také potřebovali, a ve fyzice ovšem rovněž, určitou přesnost v myšlení a vyjadřování. Řekl jsem na začátku, že krvinek může být o nějaký ten stotisíc více nebo méně, ale to není nepřesnost, to je jen naopak přesná znalost přirozené variace biologického zjevu. Naproti tomu předepsaného morfinu nesmí být ani o centigram více, nežli je nutno, a atropinu dokonce ani ne o miligram, protože ten podáváme jen ve zlomcích miligramu.

Přesnost myšlení, vypěstovaná studiem matematiky a fyziky, musí především vědět, kdy mohu být nepřesný a kdy musím být přesný. Musí vědět, že logaritmické tabulky in puncto přesnosti jsou docela něco jiného nežli analytické váhy a že i tyto pracují s chybou, která je vyjádřena poměrem plus minus jedna desetina miligramu.

A přece si na to studenti nedovedou zvyknout. Přijde u nás takový chlapec ke zkoušce, já se ho zeptám, jak účinkuje adrenalin, a on odpoví, adrenalin dráždí, - e - utlumuje sympatikus. A teď na mne pohlíží oddaným pohledem nejistého člověka a čeká, na kterou stranu kývnu hlavou, nemá představu o pozitivitě a negativitě účinku. Protože mívám důsledně při zkoušení šíji ztrnulou a nikdy hlavou ani nepohnu, ztroskotávají tito mladí telepaté u zkoušky nadobro.

Přesnost myšlení i při faktech někdy nepřesných je u nás naproti tomu nutná a jde často do zlomků miligramů, i když někdy jindy zase generosně přeskakuje statisíce.

A tak elementární početní úkony se stávají složitějšími, a budeme překvapeni,

když najednou začneme počítat s počtem pravděpodobnosti třeba jenom slovně, je pravděpodobné, že nám pacient vydrží, když má epidemickou žloutenku a přitom vrhne, to mluví proti vydržení, kromě toho má na začátku bílkovinu v moči, to mluví také proti vydržení, ale má docela v pořádku štítnou žlázu, to podle Houbala mluví pro vydržení. A tak lékař, uvažující takto nad ložem nemocného, používá sice slov občanských, ale má-li správně rozhodnout, musí mít v hlavě představu o počtu pravděpodobnosti. Nebude si psát rovnici na papír, protože život a smrt se nedají vypočítat, ale jeho hlava musí býti v matematice honěná natolik, aby odhadl s přesností, která je v mezích lidských možností.

Tyto meze jsou případ od případu různě široké. Někdo má větší srdce na roentgeny, ale to není ještě nemoc, vždyť někdo má větší nos, a nemá proto častěji rýmu. Každý biologický zjev se vyskytuje na světě v různém provedení co do velikosti, obsahu, funkce a podobně, a člověk, který stavy nemocného posuzuje a odhaduje dávku léčiva a pracovní schopnost, musí dokonale ovládat variační, respektive Gaussovu křivku, když má správně přemýšlet. Matematika pro nás lékaře není prostředkem k luštění a výpočtům, ale je nám stálým průvodcem a učitelkou myšlení a představ, které dovedou dát pevnou základnu tomu, co je tak úžasně kolísavé, jako je život sám. Vždyť ale matematikové i mořské vlnění spoutali formou rovnice a sinusoida je pro nás modelem od vlnky na rybníce až po rytmické tóny, kterých užíváme, když měříme sluchové choroby audiometrem.

Ano, přemýšlet matematicky, to je to, čemu se musíte naučit, a abyste se tomu naučili, musíte se prokousat suchopárnou kaktusovou pouští vzorečků a formulí, od prostého Pythagorova pravidla až k topologickým záhadám. V lékařství denně, když se pokoušíme o úsudek o komplikované nemoci, narážíme na t. zv. problém čtyř barev, nebo na problém „sedmi mostů“, a nevím, jestli se učíte topologii, ale když ne, tak poproste pana profesora, aby vám někdy o ní řekl několik slov.

Umíral mi jednou kamarád na zánět ledvin, který byl infekční. Dostával penicilin. Většinou dáváme penicillinu veliké dávky, protože se jednak dost rychle v těle rozkládá, jednak se vylučuje ledvinami. Ale zde ledviny nevylučovaly skoro nic, kolik jsme mu tedy měli dát penicillinu. Méně? O kolik ale méně? No o ten podíl, co stačí vyloučit zdravé ledviny. Vypočítalo se to, protože vylučovací schopnost ledviny se dá zachytit matematicky. Ale bude zase stačit ta hladina v krvi? Snad ano, i to se dá vypočítat, kolik ho bude při určité dávce v krvi. Dostával tedy méně, ale zahřáli jsme se, nežli jsme tento vsutku topologický problém dali po všech stránkách dohromady. Zůstal na živu. Ale jiný případ předtím, kde se nepostupovalo takto pečlivě, dostal plnou dávku, a protože z ní nic nevyloučil, lék se v něm nahromadil, pacient dostal nepříjemné komplikace a zemřel.

To je to trapné na medicíně. Když vy nevypočtete nějakou rovnici, tak dostanete kuli, nebo jak se tomu nyní říká (už mám střední školu třicet let za sebou), otřepete se, pak se doma s chutí najíte, jdete spát, a druhého dne se vám to rozleží v hlavě a známku si opravíte. Jenže paní smrt není zdaleka tak vlídná jako ten nejprísrnější profesor matematiky. Něco špatně vypočtete, a už vám za to zardousí vašeho nemocného. A to může zrovna jako z udělání být právě vaše matka.

(Pokračování.)



## *Různé - recenze*

Dr T. Gajdoš, Brno:

### **Jubileum prof. Dr Josefa Zahradníčka**

Brněnská pobočka JČMF věnovala svou první členskou schůzi v tomto školním roce 75. narozeninám svého dlouholetého člena, universitního profesora Dr Josefa Zahradníčka, profesora experimentální fyziky na přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

O životě a díle jubilantově promluvil jeho bývalý asistent, profesor Vysokého učení technického v Brně, Dr Rostislav Košťál.

Profesor Zahradníček se narodil 9. srpna 1881 v Třebíči, vystudoval matematiku a fyziku na Karlově universitě, po studiích působil jako gymnasiální profesor v Boskovicích, Kroměříži a konečně v Brně.

Zde se stal asistentem na fyzikálním ústavě přírodovědecké fakulty nově zřízené university u prof. Dr B. Macků. Při velkém zaneprázdnění prof. Macků ve veřejném životě ležela tehdy veškerá tíha práce v rodícím se ústavu na prof. Zahradníčkovi, který se obětavě staral o vzorné vybavení ústavu přístroji a pomůckami. Po předčasné smrti prof. Macků v roce 1929 se ujal správy ústavu tehdy již habilitovaný docent Dr Zahradníček a brzy potom se stal mimořádným a v roce 1938 řádným profesorem university.

Více než sto prací uveřejnil v různých časopisech, nejen v našem Časopise pro přestování matematiky a fyziky a v Pojednáních vydávaných přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity, ale i ve *Physikalische Zeitschrift*, v *Annalen der Physik* a j. Pro své žáky vydával skripta a napsal čtyři knihy: *Základní pokusy fyzikální*, *Energetika základních úkazů fyzikálních*, *Akustika* a *Záření*.

Na prof. Zahradníčka jako na pedagoga vzpomínají stovky učitelů fyziky. Sám byl žákem vynikajícího fyzika Strouhala a nebylo přednášky, která by nebyla doprovázena názornými pokusy. Profesor Zahradníček nenáviděl „křídovou fyziku“, proto sestavil pro budoucí učitele fyziky praktikum fyzikálních pokusů. Tam naučil své žáky experimentovat a dělat pokusy i s nejjednoduššími prostředky.

Na profesora Zahradníčka vzpomínají i stovky lékařů, kterým od roku 1934 přednášel lékařskou fyziku a kterým se snažil usnadnit pochopení fyziky množstvím názorných pokusů.

Všichni žáci profesora Dr Zahradníčka mu přejí k jeho životnímu jubileu, kterého se dožil v plném zdraví a svěžesti, mnoho zdraví a spokojenosti z vykonané práce.

## O matematické olympiádě

Letos už po šesté probíhá na našich středních školách celostátní matematická soutěž, známá pod jménem „matematická olympiáda“. Soutěž se týká žáků 8. až 11. tříd našich jedenáctiletých a také studentů odborných škol. Za pět uplynulých ročníků prošlo olympiádou už desetitisíce našich žáků a vítězové jednotlivých ročníků se dobře uplatňují při studiu na vysokých školách.

Doporučujeme všem čtenářům, pokud jsou žáky uvedených tříd a pokud mají zájem o matematiku, aby si vyžádali od ředitelství své školy „olympijské“ úlohy. Tyto úlohy vycházejí totiž každoročně na zvláštních letácích a navazují na učivo, které řešitel ve škole právě probírá. Na letácích najdete také bližší informaci o celé soutěži. Souhrnnou zprávu o matematické olympiádě přináší každoročně zvláštní brožura\*), která obsahuje také texty a podrobná řešení všech úloh. Se jmény vítězů se naše veřejnost seznámí každoročně z novin a ministerstvo školství a kultury odměňuje vítěze hodnotnými cenami.

Náš časopis bude v úzkém styku s matematickou olympiádou. Všem řešitelům přejeme v soutěži hodně úspěchů.

\*) Poslední dosud vyšlá brožura má název „Čtvrtý ročník matematické olympiády“ (vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze). Její cena je 5,52 Kčs.

## Upozornění příspěvatelům

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních uvítá s radostí i Váš příspěvek, pokud jeho thema zapadá do našeho plánu. Těšíme se zvláště na vhodné příspěvky autorů z řad učitelských i studentských, neboť nám budou dobrým ukazatelem potřeb i zájmů těch, jimž je časopis určen.

A nyní několik slov těm, kteří ještě nikdy nepsali do novin nebo časopisů. Především se nebojte a neostýchejte napsat. Váš článek posoudí odborník, a bude-li třeba, opraví různá nedoplnění nebo navrhne úpravu celé práce. Pak redakční rada buď navrhne uveřejnění, nebo Vám rukopis vrátí k provedení vhodných úprav. Nebuďte tím nijak rozmrzeni, začátky bývají vždy nesnadné. Důvěřujte nám, neboť naše rady v takových případech jsou vždy dobře míněné a prospějí Vašemu odbornému růstu, avšak nesmí Vás odradit od další práce. Jste-li studentem, doporučujeme Vám, abyste se před odesláním příspěvku nejdříve poradil se svým odborným učitelem.

Každá lidská práce má svá pravidla, která ji zjednodušují a usnadňují. Proto si pečlivě zapamatujte dále uvedené rady, uspíšíte tak případné otištění svého příspěvku a zmenšíte námahu nám i tiskárně.

Rukopis musí být zásadně psaný strojem po jedné straně papíru černou páskou. Píše se vždy s řádkovou mezerou. Na jednotlivých listech budiž nejvíce osm drobných oprav. Neodpovídá-li rukopis těmto požadavkům normy, opatří redakce jeho opis. Počet řádků na jednom listu rukopisu formátu A4 je třicet. Řádka obsahuje asi 60 až 70 úhozů.

Jednotlivé listy rukopisu musí být pořadově očíslovány v horním pravém rohu listu.

Různé druhy písem se v rukopise vyznačují takto:

*Kursíva* (čili ležaté písmo) se značí vlnovkou pod příslušným písmenem nebo textem. Proložený (prostrkáváný) text vyznačíme čárkovaným podtržením nebo jej napíšeme přímo **p r o l o ž e n ě** (p r o s t r k á v a n ě, t. j. s mezerami mezi jednotlivými písmeny). **Po-  
lotučný** text vyznačujeme podtržením. **VERSÁLKY** (t. j. velké litery) vyznačíme dvojím podtržením.

Ostatní běžný text - není-li jinak vyznačeno - sází se obyčejným stojatým písmem, t. zv. antikvou. Nekombinujte polotučné písmo s kursivou.

Pokud se rukopis člení na jednotlivé odstavce, musí být tyto odstavce výrazně odlišeny odrážkou pěti prázdných úhozů psacího stroje od levého okraje řádku.

1. Číslování odstavců, použijte se k jejich číslování arabských řadových číslic s tečkou.

a) Při označování odstavců malými písmeny latinky nebo řecké abecedy, píše se tato písmena se závorkou, ale bez tečky.

A. Při označování odstavců velkými písmeny latinky, píše se tato písmena s tečkou.

Zkratky, značky a vzorce je nutno v rukopisech psát jednotně a matematicky správně. Ve vzorcích se veškeré indexy a exponenty píše zřetelně perem, přiměřeně velké a se správným stupněm snížení nebo zvýšení k základní úrovni řádků.

Poznámky, které jsou tištěny na dolním okraji stránky (obvyčejně malým písmem čili t. zv. *petitem*), píše se v rukopisech bezprostředně za text, kterého se týkají, a to na novou zvláštní řádku.

Vsuvky většího rozsahu než půl strany musí být napsány na zvláštních listech, které se vloží mezi příslušné listy rukopisu, označí čísla předcházející strany a doplní písmeny a), b) atd.

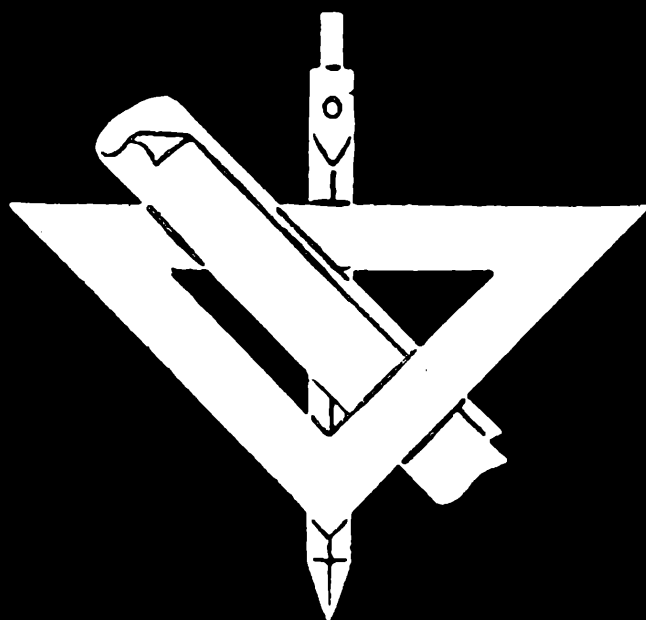
Předlohy obrázků musí být pořadově očíslovány. Po levé straně rukopisu a pak sloupcové korektury (viz dále) označte místo, kam má být při lámání sazby obrázek zařazen, a to tak, že se číslo obrázku po straně připíše a zakroužkuje barevnou tužkou. Na zadní straně každého obrázku musí být jeho číslo, velikost případného zmenšení a jméno autora. Obrázky rýsujte pečlivě tuší (t. zv. *pérovky*) na rýsovací papír nebo průsvitku a pamatujte předem, že budou při reprodukci podle Vašeho přání zmenšeny, obvyčejně dvakrát. Proto tloušťka čar originálu je mezi 0,1 až 0,5 mm. Popis proveďte normalisovaným písmem šablonou 5mm. Indexy musí být čitelné, asi 2 mm vysoké. Písmena a číslice na obrázku nesmějí být překryty jinou čarou. Texty pod obrázky se musí psát na zvláštní přílohu, kterou označíme číslem obrázku. Píše-li se údaje na zadní jeho stranu (na př. na fotografii provedenou na lesklém papíru), je nutno psát lehce, aby se písmo neprotlačilo.

Vysazený článek se autorovi zašle ke korektuře, aby opravil tiskové chyby. Korektury v tak zvaných sloupcových obtazích vyznačujte černým nebo tmavomodrým inkoustem, nikdy barevně nebo dokonce tužkou. Mějte při korekturách na mysli, že pro jedinou Vámi změněnou literu musí sazeč přesadit celý řádek. Jestliže pak přepisujete slovo, musí se pak mnohdy přesadit celý odstavec. Proto rukopis v korekturách zbytečně neměňte! Uvědomte si, že špatným rukopisem a korekturami Vámi zaviněnými poškozujete nejen sazeče na mzdě, ale i sebe, protože autorské korektury, které činí více jak 3 % z částky účtované za sazbu, budou vám sraženy s autorského honoráře.

A na konec to nejdůležitější: čitelný podpis a přesnou adresu.

Dr M. M.





# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO - FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 2

Toto číslo vyšlo 28. února 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

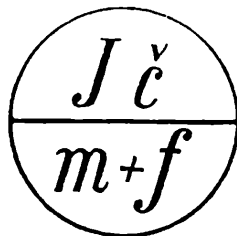
Výkonný redaktor *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JŠŠ, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSŠ, Praha; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; *doc. Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; *prof. Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; *doc. Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; *doc. Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, KU, Praha; *Ing. Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; *prof. Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Žikova 4, těl. 32 22 41 až 6, linka 570

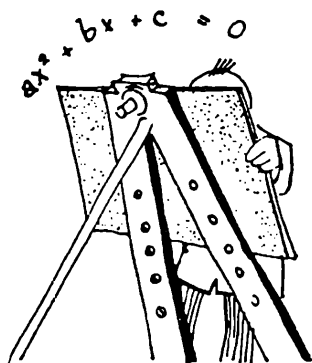
## OBSAH

P. Bartoš: O lineárních rovnicích s jednou neznámou, které mají dva kořeny	49
V. Metelka: Několik poznámek k řešení algebraických rovnic o jedné neznámé.	51
A. Kejzlar: Zlatý řez úsečky	54
S. Horák: Mocnost bodu ke kružnici (Dokončení)	60
Doc. Dr. M. Menšík: Základy kinematické geometrie v rovině (Pokračování).	64
Doc. Dr. E. Klier: O fotoelektrickém zjevu	68
Úlohy k řešení	84
Prof. MUDr. J. Štefl: Lékařství a matematika (Dokončení)	86
Doc. Dr. M. Menšík: Co je JČMF	87
J. Kotyk: Charles Auguste Coulomb	89
F. Veselý: Leonhard Euler - nejslavnější petrohradský akademik.	92
Recenze	94
Sdělení redakce	95
Zprávy JČMF	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné prostřednictvím ředitelství škol u poštovních úřadů. - A - 12616

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze. Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.



## Matematika

Pavel Bartoš, Zlaté Moravce:

### O lineárnych rovniciach s jednou neznámou, ktoré majú dva korene

Azda sa tak pamätáte, že lineárna rovnica s jednou neznámou má jediný koreň? Vec nie je tak jednoduchá. Tu je rovnica

$$2(x - 3) = 3(x - 2) - x, \quad (1)$$

ktorá je lineárna a má dva korene: 1, 2. Presvedčte sa o tom! Ako sa teda vec má? Prečítajte si to v našej učebnici pre 8. ročník (slov. vydanie z roku 1954, strana 107), kde je to dôkladne vysvetlené. Tam sa dozviete, že lineárna rovnica

$$ax = b, \quad (2)$$

v ktorej  $x$  je neznáma, má

1. práve jeden koreň  $x = \frac{a}{b}$ , ak je  $a \neq 0$ ,
2. nemá riešenia, ak je  $a = 0, b \neq 0$ ,
3. každé číslo je jej riešením, ak je  $a = b = 0$

Tým sú vyčerpané všetky možnosti a preto každá lineárna rovnica patrí do niektorej z týchto troch skupín. Naša rovnica (1) zrejme patrí do tretej skupiny, lebo do prvých dvoch nepatrí. Presvedčte sa, že ju ekvivalentnými úpravami možno uviesť na tvar

$$0 \cdot x = 0,$$

je teda jej riešením každé číslo a nielen udané dva korene, takže je vlastne rovnosťou, ktorá platí pre ľubovoľné číslo  $x$ . Pravdaže, platí všeobecne veta:

1. Ak lineárna rovnica s neznámou  $x$  má dva rôzne korene, možno ju upraviť na tvar

$$0 \cdot x = 0$$

a jej riešením je každé číslo.

Myslíte si, že je zbytočné o tomto hovoriť? Takéto výnimočné a zdanlivo bezvýznamné prípady sa v matematike často vyskytujú i na iných miestach a ich bližšie skúmanie neraz viedlo k novým objavom. I tieto výnimočné rovnice - ktoré existujú i pri vyšších stupňoch - majú v matematike dôležitú úlohu. My si ukáže-

me jedno ich použitie pri dokazovaní rovností, čo obvykle robíme úpravami jednej lebo oboch ich strán často veľmi zdĺhavým spôsobom. Pri použití vety 1 sa postup zjednoduší.

*Príklad 1.* Dokážte, že pri  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$  platí

$$\frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-a)(b-c)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)} = 0 \quad (3)$$

*Riešenie.* Rovnosť (3) považujeme za rovnicu s neznámou  $x$ . Snadno ju upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x \left[ \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \right] &= \\ = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}, & \end{aligned} \quad (4)$$

z čoho vidíme, že je lineárna. Ukážeme, že má dva rôzne korene, ktoré si ľubovoľne zvolíme tak, aby skúška bola čo najjednoduchšia. Vhodná voľba bude  $x_1 = a, x_2 = b$ . Ak do ľavej strany rovnice (3) dosadíme  $x = a$ , dostaneme

$$\frac{a-b}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)} = -\frac{1}{b-c} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-b} - \frac{1}{c-b} = 0.$$

Číslo  $a$  je teda vskutku koreňom rovnice (3). Podobne dokážte, že i číslo  $b$  je jej koreňom a keďže  $a \neq b$ , má teda rovnica (3) dva rôzne korene. Podľa vety (1) potom rovnici (3) pri ľubovoľných číslach  $a, b, c$ , splňujúcich podmienku  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ , vyhovuje každé číslo  $x$  a to sme mali dokázať.

Všimnite si, že z rovnice, písanej v tvare (4) podľa vety (1) plynie

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} &= 0, \\ \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} &= 0, \end{aligned}$$

čo sú rovnosti, platné pri  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ .

*Príklad 2.* Dokážte, že pri ľubovoľných číslach  $a, b, c, x$  platí

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x+c) + (x-a)(x+b)(x+c) + (x+a)(x-b)(x+c) + \\ + (x+a)(x+b)(x-c) + (x-a)(x-b)(x+c) + (x-a)(x+b)(x-c) + \\ + (x+a)(x-b)(x-c) + (x-a)(x-b)(x-c) = 8x^3 \end{aligned}$$

*Riešenie.* Považujme rovnosť za rovnicu s neznámou  $a$ . Ako taká je lineárna, nebola by však ňou, keby sme za neznámu určili  $x$ . Ľahko si dokážete, že táto rovnica má korene  $a_1 = x, a_2 = -x$ , teda dva rôzne korene, ak je  $x \neq 0$  a v tomto prípade je rovnosť správna podľa vety 1. Ak je však  $x = 0$ , znie dokazovaná rovnosť

$$abc - abc - abc - abc + abc + abc + abc - abc = 0$$

a je zrejme správna. Teda je správna vždy, pri ľubovoľných číslach  $a, b, c, x$ .

## Několik poznámek k řešení algebraických rovnic o jedné neznámé

Jak známo, je lineární funkce (funkce prvního stupně) dána rovnicí:

$$y = a_1x + a_0, \quad a_1 \neq 0, \quad (1)$$

kde  $a_0, a_1$  jsou daná čísla.

Funkce kvadratická (funkce druhého stupně) je dána vztahem:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0. \quad (2)$$

Grafem funkce (1) je přímka, která není rovnoběžná s žádnou osou souřadnic a grafem funkce (2) je parabola, jejíž osa je rovnoběžná - případně totožná - s osou  $y$ . (Viz ALGEBRA pro devátý postupný ročník str. 117 a 125).

Zcela obdobným způsobem zavedeme funkci  $n$ -tého stupně a to takto:

Funkce  $n$ -tého stupně ( $n$  je přirozené číslo) je dána vztahem:

$$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0^* \quad (3)$$

Nebudeme se zatím zajímat, jak vypadá graf této funkce. Podotýkám jen, že oborem funkce (3) je množina všech reálných čísel. (Pojem „obor funkce“ viz ALGEBRA pro devátý postupný ročník str. 100).

Vraťme se na chvíli k funkci druhého stupně dané rovnicí (2) a položme si otázku:

Lze najít takové podmínky pro čísla  $a_2, a_1, a_0$ , aby na grafu funkce (2) současně s každým bodem o souřadnicích  $(x_0; y_0)$  ležel také bod o souřadnicích  $(-x_0; y_0)$ ?

*Řešení:* Existují-li takové podmínky, pak ke *každému* bodu o souřadnicích  $(x_0; y_0)$ , který vyhovuje rovnici (2), čili splňuje rovnici:

$$y_0 = a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0, \quad (4)$$

musí existovat bod o souřadnicích  $(-x_0; y_0)$ , který rovněž vyhovuje rovnici (2), čili splňuje rovnici:

$$y_0 = a_2x_0^2 - a_1x_0 + a_0 \quad (5)$$

Rovnice (4) a (5) musí tedy platit *současně* a odečteme-li rovnici (5) od rovnice (4), dostaneme:

$$0 = 2a_1x_0. \quad (6)$$

Tato rovnice zřejmě bude platit pro  $x_0 = 0$ . Protože však kvadratická funkce (2) má za definiční obor množinu *všech* reálných čísel, leží tedy na grafu funkce (2) také body, jejichž první souřadnice jsou různé od nuly. Aby pro takový bod ( $x_0 \neq 0$ ) byla splněna rovnice (6), *musí být nutně*  $a_1 = 0$ .

---

\* Pro  $n = 1$  dostáváme z rovnice (3) rovnici (1),  
pro  $n = 2$  dostáváme z rovnice (3) rovnici (2).

Tento postup můžeme také obrátit: Je-li ve funkci (2)  $a_1 = 0$ , pak ke *každému* bodu o souřadnicích  $(x_0; y_0)$ , který funkci (2) vyhovuje, přísluší bod o souřadnicích  $(-x_0; y_0)$ , který rovněž funkci (2) vyhovuje. Je tedy vidět, že podmínka  $a_1 = 0$  *postačuje* k tomu, aby funkce (2) splňovala daný požadavek. *Funkcím těchto vlastností říkáme funkce sudé.* Poznali jsme tedy (a tím odpovídáme na naši otázku), že: *Nutná a postačující podmínka, aby kvadratická funkce (2) byla funkcí sudou jest: Číslo  $a_1$  při první mocnině  $x$  je rovno nule.*

Všimněte si jedné zajímavosti grafu funkce sudé. Víme již, že nalezneme-li na jejím grafu nějaký - jinak zcela libovolný - bod o souřadnicích  $(x_0; y_0)$ , pak na jejím grafu bude také ležet bod o souřadnicích  $(-x_0; y_0)$ . Oba tyto body mají stejnou druhou souřadnici  $y_0$ ; leží tedy oba na jedné přímce  $y = y_0$ , která je kolmá k ose  $y$ . Kromě toho první souřadnice obou bodů  $(x_0; y_0)$ ,  $(-x_0; y_0)$  se liší jen ve znaménku. Jsou tedy oba body položeny souměrně (na přímce  $y = y_0$ ) podle osy  $y$ . Protože jsme však mohli zvolit zcela libovolný bod na grafu naší funkce a protože ke *každému* takovému bodu můžeme na grafu funkce nalézt bod s ním souměrně položený podle osy  $y$ , snadno usoudíme, že celý graf funkce sudé je souměrný podle osy  $y$ .\*

Chtěl bych ještě poznamenat, že v uvedené učebnici algebry na str. 124 je zkoumána funkce  $y = ax^2 + c$ , tedy zřejmě funkce sudá a na obr. 21 může si čtenář ověřit, že graf takové funkce je skutečně souměrný podle osy  $y$ .

Naskytne se nám otázka, za jakých podmínek pro čísla  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  bude také funkce  $n$ -tého stupně - daná rovnicí (3) - sudá. Vidíme ihned, že k tomu postačující podmínkou jest, aby ve funkci (3) byla rovna nule čísla při lichých mocninách  $x$ . Pak totiž takovou funkci můžeme psát ve tvaru:

$$y = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \dots + a_2x^2 + a_0, \quad a_{2k} \neq 0 \quad (7)$$

Důkaz nechť čtenář provede sám dosazením bodů  $(x_0; y_0)$ ,  $(-x_0; y_0)$ , kde  $k$  je číslo přirozené. Je to funkce sudého ( $2k$ -tého) stupně a vyskytují se v ní jen sudé mocniny  $x$ . Tvrdím dokonce, že je to i nutná podmínka, aby byla funkce sudá. Funkce, ve které se vyskytuje třeba jen jediná lichá mocnina  $x$ , nemůže být sudá. Důkaz tohoto tvrzení je však již obtížnější a zcela přesně za daných předpokladů (vzhledem k znalosti průměrného žáka devátého ročníku jedenáctiletky) ho nemožno provést. Naznačil jsem však takové provedení u funkce kvadratické [viz rovnice (4) až (6)].

Vraťme se ještě k funkci kvadratické. Funkce

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (8)$$

není funkcí sudou, pokud  $b \neq 0$ . Můžeme ji však vhodnou substitucí ve funkci sudou převést. Substitucí zde rozumíme nahrazení proměnné  $x$  jinou novou proměnnou. Ukáži zde, jak se převedení provádí a zároveň jaký má geometrický význam, protože to budeme potřebovat k dalším úvahám.

Zavedme substituci lineární

$$x = \bar{x} + k, \quad 9)$$

\*) Doporučuji čtenáři, aby si přitom udělal náčrtek.

kde  $\bar{x}$  je nová proměnná veličina a číslo  $k$  volme tak, aby po dosazení z rovnice (9) do rovnice (8) přešla funkce (8) ve funkci sudou. Zřejmě jest:

$$y = a \cdot (\bar{x} + k)^2 + b \cdot (\bar{x} + k) + c = a \cdot \bar{x}^2 + (2ak + b) \bar{x} + (ak^2 + bk + c)$$

Bude-li tedy číslo  $k$  vyhovovat rovnici  $2ak + b = 0$ , čili  $k = -\frac{b}{2a}$ , t. j. provedeme-li substituci

$$x = \bar{x} - \frac{b}{2a}, \quad (10)$$

přejde funkce (8) v sudou funkci

$$y = a\bar{x}^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (11)$$

Doporučuji čtenáři, aby si výsledek ověřil sám výpočtem. Z toho je patrné, že každou kvadratickou funkci můžeme vhodnou lineární substitucí převést ve funkci sudou.

Podívejme se ještě, jaký je geometrický význam této substituce. Původní kvadratická funkce (8) představovala parabolu s osou rovnoběžnou s osou  $y$ . Nová kvadratická funkce (11) nám představuje opět parabolu, ale s osou totožnou s osou  $y$ . Celý výsledek se tedy na první pohled jeví tak, jako bychom „posunuli“ celou parabolu ve směru rovnoběžném s osou  $x$  a to tak, aby její osa splýnula s osou  $y$ . Skutečně každý bod  $(x; y)$  původní funkce (8) přejde substitucí (10) v bod o souřadnicích  $(\bar{x}; y)$ , tedy v bod  $(x + \frac{b}{2a}; y)^*$  a vidíme tedy, že opravdu každý bod se posunul rovnoběžně s osou  $x$  - neboť jeho druhá souřadnice se nezměnila - a to o délku  $\frac{b}{2a}$ . Substituce (10) má tedy ten geometrický význam, že se při ní posune každý bod roviny, a tedy také každý bod grafu dané funkce, o stejnou délku ve směru rovnoběžném s osou  $x$ . Protože se při této substituci mění první souřadnice každého bodu (druhé souřadnice se nemění), mluvíme také někdy o transformaci prvních souřadnic.

Doporučuji ještě čtenáři, aby si vypočítal souřadnice vrcholu paraboly (8) a porovnal je s rovnicemi (11) a (10). Při vypočítávání vrcholu může čtenář použít třeba toho, že přímka  $y = c$ , t. j. rovnoběžka s osou  $x$  protne naši parabolu ve dvou bodech  $(0; c)$ ,  $(-\frac{b}{a}; c)$  a tedy, že první souřadnice vrcholu paraboly (která je souměrná podle své osy, rovnoběžné s osou  $y$ ) musí být  $-\frac{b}{2a}$ .

Nemůžeme však každou funkci  $n$ -tého stupně vhodnou substitucí převést ve funkci sudou. Jako příklad vyšetřujme třeba funkci čtvrtého stupně:

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_4 \neq 0. \quad (12)$$

\* ) Vypočítej  $\bar{x}$  z rovnice (10)!

Kdyby taková substituce existovala, mohli bychom ji psát ve tvaru:

$$x = \bar{x} + k \quad (9)$$

a postupovat tak, jako v předchozím případě. Dosazením z rovnice (9) do rovnice (12) dostáváme:

$y = a_4(\bar{x} + k)^4 + a_3(\bar{x} + k)^3 + a_2(\bar{x} + k)^2 + a_1(\bar{x} + k) + a_0$ , čili po kratší úpravě, kterou si čtenář propočítá:

$$y = a_4\bar{x}^4 + (4a_4k + a_3)\bar{x}^3 + (6a_4k^2 + 3a_3k + a_2)\bar{x}^2 + (4a_4k^3 + 3a_3k^2 + 2a_2k + a_1)\bar{x} + (a_4k^4 + a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0) \quad (13)$$

Aby funkce (13) byla funkcí sudou, musely by pro  $k$  platit *současně* tyto dvě rovnice

$$4a_4k + a_3 = 0 ; \quad 4a_4k^3 + 3a_3k^2 + 2a_2k + a_1 = 0 \quad (14)$$

Pokud rovnice (14) nebudou platit současně, nemůžeme také žádnou substitucí (9) převést funkci (12) ve funkci sudou. Vypočítáme-li z první rovnice (14) neznámou  $k$  a dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme po kratší úpravě podmínku

$$a_3^3 - 4a_2a_3a_4 + 8a_4^2a_1 = 0. \quad (15)$$

Vidíme tedy, že jen takové funkce čtvrtého stupně, které splňují podmínku (15), se dají substitucí (9) - kde  $k = \frac{-a_3}{4a_4}$  - převést ve funkce sudé.

Jistě chápeme, že funkce stupně vyššího než čtvrtého by musely splňovat ještě komplikovanější podmínky, aby se daly převést ve funkce sudé. Jak by se tyto podmínky vypočítaly, kdyby toho bylo třeba, to již ponechávám čtenáři. Rovněž tak mu ponechávám důkaz, že nelze *za žádných podmínek* převést ve funkce sudé funkce lichého stupně.

Chtěl bych se ještě zmínit o tom, že funkce kvadratické se dají - jak již víme - bezpodmínečně převést ve funkce sudé. Co se dá z toho soudit o jejich grafu? Co se dá obdobně soudit o grafu funkcí stupně čtvrtého, nebo o grafu funkcí stupňů lichých?

Těmito otázkami zároveň zakončuji první část článku. Nechť je čtenář pokládá za kontrolní otázky, aby si mohl ověřit, do jaké míry rozuměl této první části článku. (Pokračování)

Antonín Kejzlar, Liberec:

## Zlatý řez úsečky.

Jméno zlatý řez úsečky pochází z antické doby, kdy Řekové hledali odpověď na otázku, který obdélník je ze všech možných obdélníků nejkrásnější. Šlo tedy o otázku estetickou a podnět k jejímu řešení dalo výtvarné umění. V souhlase se svou tehdejší filosofií se Řekové domnívali, že existuje pouze jediný správný a tedy i krásný poměr stran obdélníka a byli přesvědčeni, že ho našli v pravidle, který pojmenovali zlatý řez. Části úsečky rozdělené podle tohoto pravidla pak udávaly délky sousedních stran hledaného obdélníka.



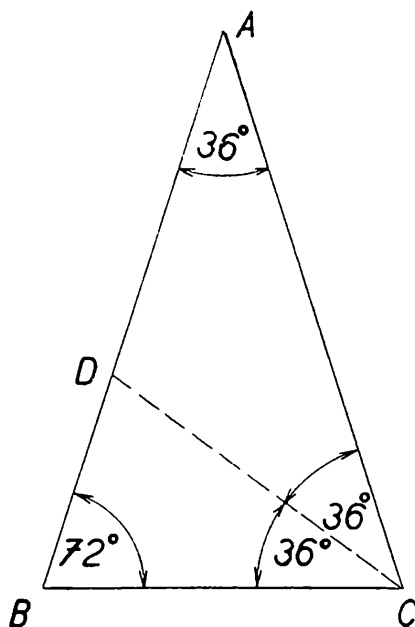
Dnes se nám jeví snad tato problematika jako zbytečná hračka. Protože však konstrukce zlatého řezu, kterou podali Řekové, má praktický význam pro řešení některých úloh z geometrie, uplatňuje se zlatý řez v geometrii dodnes. A toho si všimneme v tomto článku.

Pravidlo zlatého řezu vyjadřujeme dnes touto úlohou:

*Danou úsečku máme rozdělit ve dvě nestejně části tak, aby kratší část se měla k delší části tak jako delší část k celé dané úsečce.*

Máme tedy sestrojít bod, který danou úsečku dělí v žádaném poměru. Jedno řešení lze provést, známe-li přesně úhel o velikosti  $36^\circ$ . Naneseme danou úsečku  $a$  od vrcholu  $A$  na obě ramena tohoto úhlu ( $a = AB = AC$ ; viz obr. 1) a vznikne tak rovnoramenný trojúhelník  $\triangle ABC$  s úhly při základně po  $72^\circ$ . Sestrojíme-li osu jednoho z těchto úhlů, na př. osu úhlu  $\sphericalangle ACB$ , vytne nám osa uvnitř strany  $AB$  bod  $D$ , který dělí stranu  $AB$  podle pravidla zlatého řezu. Trojúhelník  $\triangle BCD$  má úhly  $\sphericalangle DBC = 72^\circ$ ,  $\sphericalangle BCD = 36^\circ$  a tedy podle poučky *uu* o podobnosti trojúhelníků (viz učebnici Geometrie pro IX. post. ročník, str. 55, věta 2) platí

$$\triangle CBD \sim \triangle ABC$$



Obr. 1

O stranách těchto trojúhelníků platí

$$BD : BC = BC : BA \tag{1}$$

Poněvadž trojúhelník  $\triangle CBD$  je rovnoramenný, je

$$BC = DC \tag{2}$$

Avšak i trojúhelník  $\triangle DAC$  je rovnoramenný (úhel u vrcholu  $A$  je rovný úhlu u vrcholu  $C$ ), takže bude též

$$DC = DA \tag{3}$$

Porovnáním rovnic (2) a (3) vyplývá vztah

$$BC = DA$$

a dosadíme-li ho do rovnice (1), dostaneme

$$BD : DA = DA : BA , \quad (1')$$

což právě požaduje pravidlo zlatého řezu. Základna  $BD$  trojúhelníka  $\triangle CBD$  leží totiž proti nejmenšímu úhlu tohoto trojúhelníka a platí tedy  $BD < BC$ , takže je též  $BD < DA$ .

Uvedená konstrukce má však ten závažný nedostatek, že eukleidovsky (t. j. pravítkem a kružítkem) dosud neumíme sestrojiti úhel o velikosti  $36^\circ$ .

Kdybychom dovedli rozdělit úsečku podle pravidla zlatého řezu nezávisle na úhlu o velikosti  $36^\circ$ , mohli bychom naopak tento úhel eukleidovsky sestrojiti, neboť pak již jde o sestrojiti rovnoramenného trojúhelníka o daném rameni a známé základně. Záhy poznáme, že takové řešení je možné a dokonce snadné.

Uvážíme-li ještě, že spojnice středu kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku se všemi jeho vrcholy rozdělí desetiúhelník na shodné rovnoramenné trojúhelníky s úhly o velikosti  $36^\circ$  ležícími proti jejich základnám, máme již návod, jak sestrojiti pravidelný desetiúhelník vepsaný do kružnice o daném poloměru  $r$ . Stačí rozdělit poloměr  $r$  podle pravidla zlatého řezu a delší část poloměru takto rozděleného je stranou hledaného desetiúhelníka. V tom tkví tedy hlavní význam pravidla zlatého řezu.

Tím je v podstatě též rozřešena úloha vepsati do dané kružnice pravidelný pětiúhelník, což není třeba podrobně rozváděti.

Ukážeme si ještě jinou konstrukci rozdělení úsečky zlatým řezem, a to konstrukci nezávislou na předchozím narýsování úhlu o velikosti  $36^\circ$ .

V obr. 1 jsme označili  $a = AB$ ; označme ještě  $BD = x$ , takže pak  $DA = a - x$ . Podle pravidla zlatého řezu má být

$$x < a - x \quad (4)$$

Rovnici (1') můžeme nyní psáti ve tvaru

$$x : (a - x) = (a - x) : a$$

Považujeme-li  $x$  za neznámé, dostáváme tím rovnici pro tuto neznámou a máme najít takové kladné řešení, které by vyhovovalo též nerovnosti (4). Po jednoduché úpravě převedeme rovnici na tvar

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

a snadno určíme její kořeny

$$x_1 = \frac{a}{2} (3 + \sqrt{5}) , \quad x_2 = \frac{a}{2} (3 - \sqrt{5})$$

Kořen  $x_1 > a$  zřejmě nevyhovuje. Kořen  $x_2$  je kladný a splňuje též nerovnost (4), neboť platí

$$\frac{a}{2} (3 - \sqrt{5}) < \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \quad (5)$$

Ekvivaletní úpravou nerovnosti (5) dostaneme totiž nerovnost

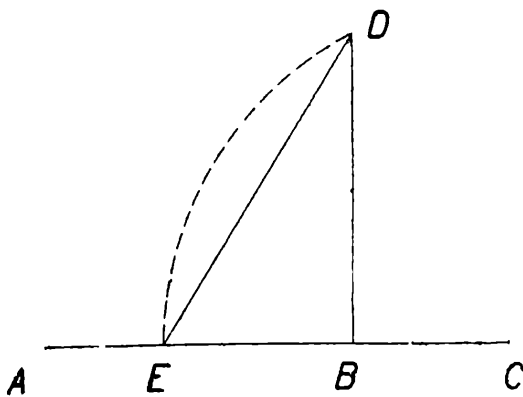
$$2 < \sqrt{5},$$

jež je zřejmě správná.

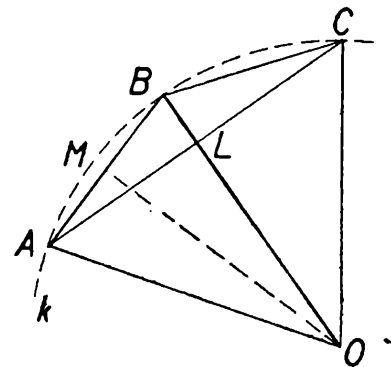
Levá strana nerovnosti (5) udává délku kratší části úsečky rozdělené zlatým řezem, pravá strana délku části delší.

Konstrukce je jednoduchá (viz obr. 2). Daná úsečka je  $a = AB$ . Dále sestrojeno  $DB \perp AB$ ,  $DB = AB$ . Na prodloužení úsečky  $AB$  za bod  $B$  určen bod  $C$  tak, že platí  $BC = \frac{a}{2}$ . Konečně sestrojen uvnitř úsečky  $AB$  bod  $E$  tak, že je  $CD = CE$ .

Bod  $E$  dělí úsečku  $AB$  podle pravidla zlatého řezu,  $AE$  je kratší část,  $EB$  delší část úsečky  $a$ .  $EB$  tedy udává délku strany pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru  $a$ . Správnost této konstrukce ověří si čtenář užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku  $\triangle BCD$  (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Ještě se dá ukázat, že úsečka  $DE = a_5$  (obr. 2) udává délku strany pravidelného pětiúhelníka vepsaného do téže kružnice. Je-li toto tvrzení správné, musí platit rovnice

$$a_5^2 = r^2 + a_{10}^2, \quad (6)$$

kde  $a_{10} = EB$  značí stranu pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru  $r = BD$ . Rovnice (6) je postačující podmínkou a musíme její správnost dokázat nezávisle na pravoúhlém trojúhelníku  $\triangle BED$ .

Jsou-li  $A, B, C$  tři sousední vrcholy pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice  $k$  o středu  $O$  (viz obr. 3), je úsečka  $AB = BC = a_{10}$  stranou pravidelného desetiúhelníka a úsečka  $AC = a_5$  stranou pravidelného pětiúhelníka vepsaného do kružnice  $k$ . Trojúhelníky  $\triangle ABO$  a  $\triangle CBO$  jsou osově souměrné podle přímky  $BO$ , takže platí  $AC \perp BO$ ,  $AL = LC$ , kde  $L \equiv AC \cdot BO$ .

Sestrojíme ještě výšku rovnoramenného trojúhelníka  $\triangle ABO$  jdoucí vrcholem  $O$ . Její pata  $M$  půlí základnu  $AB$ . Pravoúhlé trojúhelníky  $\triangle AMO$ ,  $\triangle BLA$  mají při vrcholech  $A$  resp.  $B$  úhly o velikosti  $72^\circ$ , takže podle poučky *uu* o podobnosti trojúhelníků jsou podobné a jejich strany jsou úměrné. Platí tedy

$$AO : OM = BA : AL,$$

což lze psát též jinými symboly

$$r \quad OM = a_{10} : \frac{a_5}{2}$$

Odtud vychází (provedeme-li ještě umocnění)

$$a_5^2 = \frac{4a_{10}^2 \cdot \overline{OM}^2}{r^2} \quad (7)$$

Do této rovnice dosadíme jednak

$$a_{10}^2 = \left[ \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) \right]^2 = \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}) ,$$

jednak z pravoúhlého trojúhelníka  $\Delta AMO$

$$\overline{OM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AM}^2 = r^2 - \left( \frac{a_{10}}{2} \right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{8} (3 - \sqrt{5}) = \frac{r^2}{8} (5 + \sqrt{5}) ,$$

takže rovnice (7) bude mít tvar

$$a_5^2 = 4 \frac{r^2 (3 - \sqrt{5})}{2r^2} \cdot \frac{r^2 (5 + \sqrt{5})}{8}$$

Její pravá strana se dá po vynásobení ještě upravit

$$\frac{r^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4} \left[ 4 + (\sqrt{5} - 1)^2 \right] = r^2 + a_{10}^2 .$$

Po poslední úpravě má rovnice (7) tvar

$$a_5^2 = r^2 + a_{10}^2 ,$$

což jsme chtěli dokázat.

Dovedeme tedy sestrojít pravidelný pětiúhelník i desetiúhelník vepsaný do kružnice daného poloměru. Jak však sestrojíme tyto obrazce, známe-li jejich stranu?

Mohli bychom tuto úlohu řešit pomocí stejnolehlosti hledaného obrazce s pravidelným pětiúhelníkem, případně desetiúhelníkem vepsaným do libovolné kružnice. Ukážeme si ještě, že i tuto úlohu můžeme nyní řešit přímo, bez použití stejnolehlosti.

Na obrázku 4 je sestrojen pravidelný pětiúhelník  $ABCDE$ . Je-li bod  $O$  středem kružnice tomuto obrazci opsané, pak úhel  $\sphericalangle COD = 72^\circ$ , úhel  $\sphericalangle CAD = 36^\circ$ , neboť obvodovému úhlu  $\sphericalangle CAD$  přísluší středový úhel  $\sphericalangle COD$ . Trojúhelník  $\Delta CAD$  je rovnoramenný a má proti základně úhel  $36^\circ$ . Podle toho, co jsme odvodili na začátku tohoto článku, je délka základny  $CD$  rovna větší části ramene  $AC$ , rozděleného zlatým řezem. To tedy znamená, že strana pravidelného pětiúhelníka je rovna délce větší části úhlopříčky tohoto obrazce, rozdělené podle pravidla zlatého řezu. Známe stranu, čili větší část úhlopříčky rozdělené zlatým řezem, a máme sestrojít neznámou délku úhlopříčky. Sestrojení pětiúhelníka nebude pak již žádným problémem a čtenář si ho sám rozřeší. Podobně to bude při sestrování pravidelného desetiúhelníka, kde strana udává větší část poloměru rozděleného zlatým řezem a kde hledáme neznámý poloměr opsané kružnice.

Máme tedy najít délku celé úsečky, známe-li její delší část, jež vznikla rozděle-

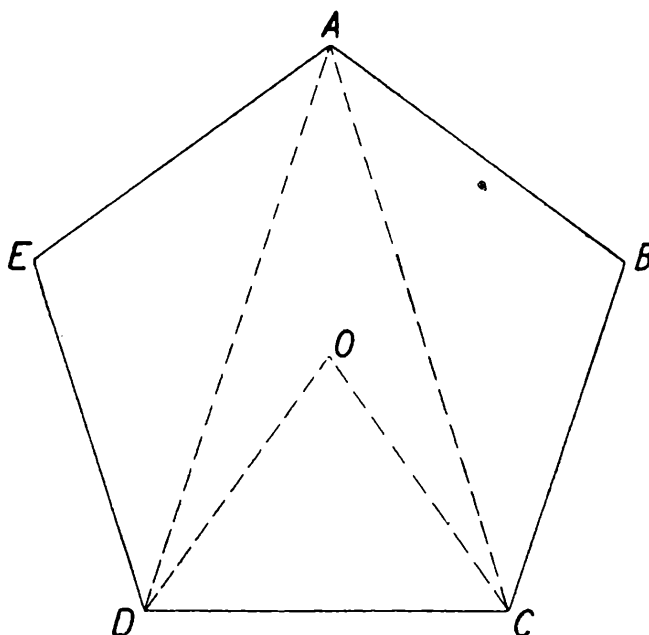
nám hledané úsečky podle pravidla zlatého řezu. Označíme-li délku hledané úsečky  $m$ , délku její známé větší části  $a$ , musí platit

$$a = \frac{m}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

jak plyne z pravé strany nerovnosti (5). Odtud snadno vypočteme  $m$ :

$$m = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2a(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) + a$$

První člen na pravé straně (v její konečné úpravě) znamená delší část dané úsečky  $a$ , již jsme rozdělili zlatým řezem. Tím tedy máme otevřenu cestu k sestrojení pravidelného pětiúhelníka nebo desetiúhelníka z jeho známé strany.



Obr. 4

Nakonec si ještě všimněme toho, že z pravoúhlého trojúhelníka  $\Delta AMO$  (obr. 3) můžeme vypočítat

$$\sin 18^\circ = \frac{AM}{AO} = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{4r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos 18^\circ = \frac{MO}{AO} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

Použijeme-li vzorců

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

[viz učebnici Trigonometrie, vzorec (4) na str. 68], můžeme ze vztahu  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  vypočítat sinus a kosinus úhlu  $15^\circ$  a použitím vzorců pro sinus a kosinus rozdílu úhlů (viz Trigonometrie str. 52, cv. 5) můžeme bez tabulek odvodit velikost sinu i kosinu úhlu  $3^\circ$  a pak i všech jeho násobků, pokud již nejsou dříve určeny.

## Mocnost bodu ke kružnici

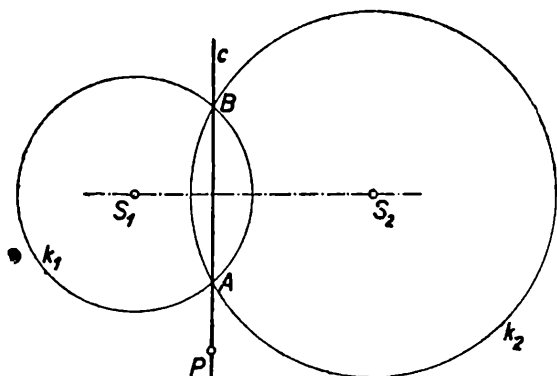
(Dokončení)

*Chordála dvou kružnic.* Jestliže jsou dány dvě různé kružnice, vzniká otázka, zda existují body, které mají tutéž mocnost k oběma kružnicím. Ukazuje se, že takové body existují, jestliže dané kružnice nejsou soustředné. Všechny tyto body pak vyplňují přímku. Dokažme to!

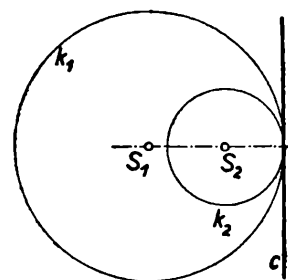
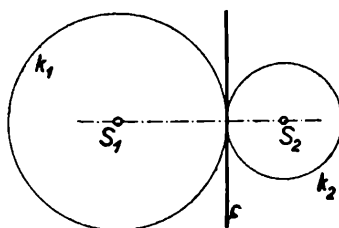
*Poučka 3. Geometrické místo bodů, které mají stejnou mocnost k daným dvěma nesoustředným kružnicím, je přímka kolmá ke středné. Této přímce říkáme chordála daných kružnic. Jsou-li dané dvě kružnice soustředné a různé, neexistuje žádný bod, který by měl stejnou mocnost k oběma kružnicím.*

Důkaz této věty rozdělíme na několik částí.

a) Budtež dány dvě různé kružnice  $k_1, k_2$ , které mají společné dva různé body  $A, B$  (obr. 6). V tomto případě je chordálou přímka  $c \equiv AB$ . Skutečně je patrné,



Obr. 6



Obr. 7

že body  $A, B$  mají stejnou mocnost k oběma kružnicím. Zvolíme-li na přímce  $c \equiv AB$  libovolný bod  $P$ , kde  $P \neq A, P \neq B$ , potom jeho mocnost je dána součinem  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , je tudíž k oběma kružnicím stejná.

Mějme obráceně bod  $P'$ , jehož mocnost k oběma kružnicím je táž. Přímka  $P'A$  protne kružnici  $k_1$  v bodě  $B_1$  a kružnici  $k_2$  v bodě  $B_2$ . Potom vzhledem k předpokladu platí

$$P'B_1 \cdot P'A = P'B_2 \cdot P'A.$$

To však není jinak možné, než že  $B_1 \equiv B_2 \equiv B$ . Ale pak bod  $P'$  leží na přímce  $c$ .

b) Jestliže se kružnice  $k_1, k_2$  vzájemně dotýkají, potom jejich chordála je společná tečna ve společném bodě dotyku. Toto tvrzení nebudeme dokazovat. Důkaz je stejný jako v případě předešlém. V obr. 7 jsou vyznačeny obě možnosti.

c) Předpokládejme nyní, že obě kružnice  $k_1 \equiv (S_1; r_1), k_2 \equiv (S_2; r_2)$  nemají žádný společný bod a že o jejich poloměrech a středné  $s$  platí  $r_1 + r_2 < s$  (obr. 8).

Předpokládejme, že bod  $P$  má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Vedme

z něho tečnu  $t_1$  ke kružnici  $k_1$  a bod dotyku označme  $T_1$ ; vedme z něho ještě tečnu  $t_2$  ke kružnici  $k_2$  a bod dotyku označme  $T_2$ . I platí

$$\overline{PT_1}^2 = \overline{PS_1}^2 - \overline{S_1T_1}^2 = \overline{PS_2}^2 - \overline{S_2T_2}^2 (= \overline{PT_2}^2)$$

čili

$$\overline{PS_1}^2 - \overline{PS_2}^2 = r_1^2 - r_2^2. \quad (1)$$

Došli jsme zatím k tomuto výsledku: Jestliže bod  $P$  má stejnou mocnost ke kružnicím  $k_1, k_2$ , platí rovnice (1). Ale platí též obráceně: každý bod  $P$ , pro nějž platí rovnice (1), má stejnou mocnost k oběma kružnicím.

Z bodu  $P$  vedme kolmici  $c$  na střednou kružnic  $k_1, k_2$  a její patu označme  $K$ . Z pravoúhlých trojúhelníků  $S_1KP, S_2KP$ , které mají společnou odvěsnu, vyplývá

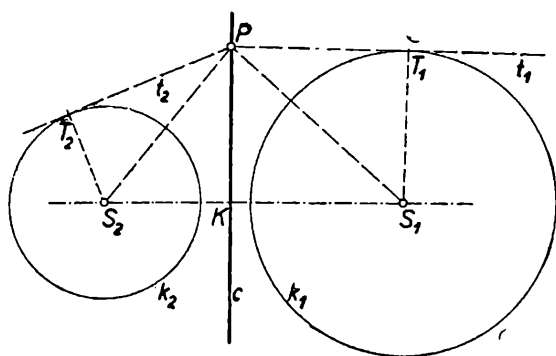
$$\overline{PS_1}^2 - \overline{KS_1}^2 = \overline{PS_2}^2 - \overline{KS_2}^2$$

čili

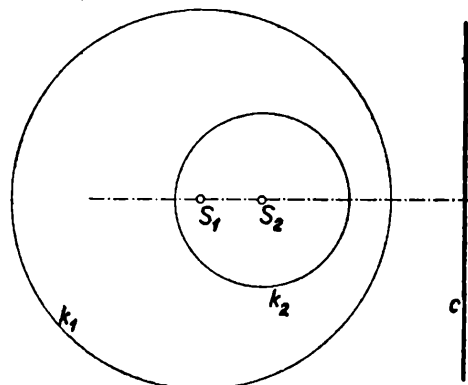
$$\overline{PS_1}^2 - \overline{PS_2}^2 = \overline{KS_1}^2 - \overline{KS_2}^2.$$

Porovnáním s rovnicí (1) dostáváme

$$\overline{KS_1}^2 - \overline{KS_2}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$



Obr. 8



Obr. 9

což vyjadřuje, že i bod  $K$  má tutéž mocnost k oběma daným kružnicím.

Nyní je již patrné, že každý bod přímky  $c$  má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Zbývá ještě dokázat, že mimo přímku  $c$  neexistuje žádný bod této vlastnosti. Ale to už provede čtenář snadno sám.

d) Stejným způsobem bychom postupovali i v případě, kdy dané kružnice mají polohu naznačenou v obr. 9. To přenechávám čtenáři.

e) Nakonec si ještě všimneme případu dvou soustředných (různých) kružnic  $k_1 \equiv (S; r_1), k_2 \equiv (S; r_2)$ . Ukážeme, že tyto dvě kružnice nejen nemají chordálu, ale že neexistuje ani jeden bod, který by měl stejnou mocnost k oběma kružnicím.

*Důkaz.* Zvolme libovolný bod  $P$  ležící vně kružnic  $k_1, k_2$ . Dokážeme o něm, že jeho mocnosti k oběma kružnicím jsou různé. Sestrojme z něho tečny  $t_1, t_2$  k oběma kružnicím a body dotyku označme  $T_1, T_2$  (obr. 10). Mocnosti  $M_P, M'_P$  bodu  $P$  k oběma kružnicím vypočteme užitím poučky 2:

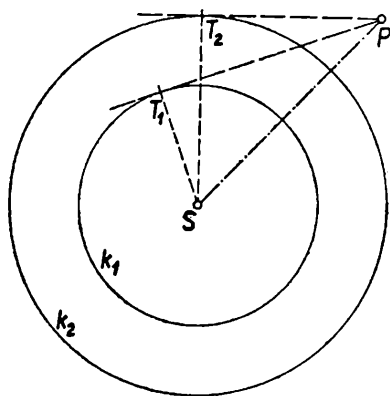
$$M_P = \overline{PT_1}^2 = \overline{PS}^2 - r_1^2,$$

$$M'_P = \overline{PT_2}^2 = \overline{PS}^2 - r_2^2.$$

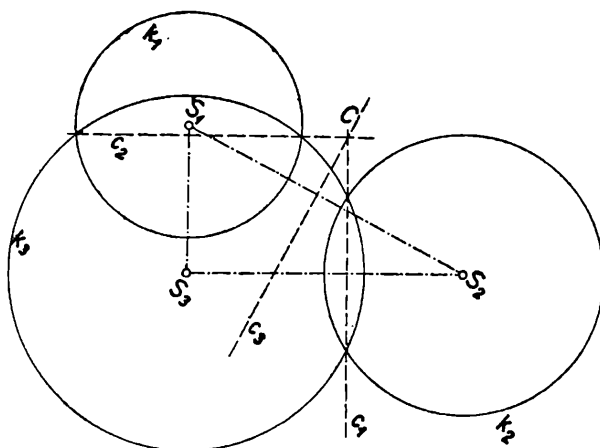
Poněvadž podle předpokladu  $r_1 \neq r_2$  (kružnice jsou různé), plyne z těchto dvou

rovnic, že též  $PT_1 \neq PT_2$ . To však znamená, že ani bod  $P$ , ani kterýkoliv jiný bod ležící vně kružnic  $k_1, k_2$ , nemá k těmto kružnicím stejnou mocnost. Bod s žádanou vlastností nemůže však ležet ani na žádné z kružnic  $k_1, k_2$ , ani nemůže být vnitřním bodem mezikruží, ani nemůže být vnitřním bodem kružnice  $k_1$ . Důkazy těchto tvrzení jsou jednoduché a jejich provedení přenechávám čtenářům. Z toho, že neexistuje žádný bod, který by měl stejnou mocnost k dvěma soustředným kružnicím, usuzujeme, že dvě soustředné kružnice nemají chordálu.

Ke konci si ještě všimneme tří (různých) kružnic a tří chordál, které se tu vyskytují. O nich platí:



Obr. 10



Obr. 11

*Poučka 4. Chordály tří různých kružnic, jejichž středy leží v přímce, jsou mezi sebou rovnoběžné. Chordály tří kružnic, jejichž středy neleží v přímce, procházejí jediným bodem t. zv. potenčním středem.*

*Důkaz.* První část poučky je samozřejmá a nemusíme ji dokazovat. Obrátíme se proto k důkazu druhé části. Jsou dány tři kružnice,  $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ ,  $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ ,  $k_3 \equiv (S_3; r_3)$ , jejichž středy neleží v přímce a nechť tyto kružnice procházejí jediným bodem. Ihned je patrné, že poučka 4 v tomto případě platí.

Věnujme nyní pozornost případu, kdy středy kružnic neleží v přímce a kružnice neprocházejí jediným bodem (obr. 11). Kružnice  $k_1, k_3$  mají chordálu  $c_2$ , kružnice  $k_2, k_3$  mají chordálu  $c_1$ . Obě tyto chordály nemohou být rovnoběžné (proč?) a protínají se proto v bodě  $C$ . Bod  $C$  má stejnou mocnost ke kružnicím  $k_1, k_3$ , neboť leží na jejich chordále  $c_2$ . Má však stejnou mocnost i ke kružnicím  $k_2, k_3$ , neboť leží na jejich chordále  $c_1$  a má proto stejnou mocnost ke všem třem kružnicím. To však znamená, že bodem  $C$  prochází chordála  $c_3$  kružnic  $k_1, k_2$  a tím je poučka 4 dokázána.

*Příklady.*

1. Sestrojte chordálu dvou kružnic, které nemají žádný společný bod.

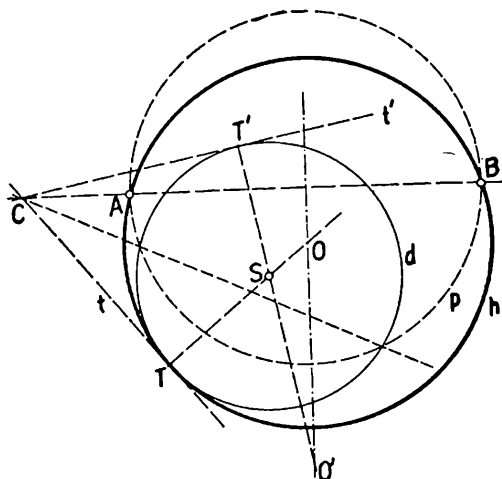
Řešení poskytuje obrázek 11. Dané kružnice jsou  $k_1, k_2$ . Abychom sestrojili žádanou chordálu, použijeme pomocné kružnice  $k_3$ , kterou zvolíme libovolně, ale tak, aby kružnice  $k_1, k_2$  protínala. Chordály  $c_1, c_2$  můžeme snadno sestrojit a hledaná chordála  $c_3$  prochází jejich průsečíkem  $C$  kolmo na střednou  $S_1 S_2$ .

2. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma různými body  $A, B$  a dotýká se při tom dané kružnice  $d$ , která neprochází žádným z bodů  $A, B$ .



Z celého řešení uvedeme jen to nejpodstatnější. Podrobnější úvahy a diskuse přenechávám péči čtenářů.

V obr. 12 je dána kružnice  $d \equiv (S; r)$ , kružnice  $h$  je kružnice hledaná. Půjde nám o určení bodu  $T$ , v němž se dotýká kružnice  $d$  s kružnicí  $h$ . K tomu použijeme pomocné kružnice  $p$ , jdoucí body  $A, B$ . Tím máme v obrázku narýsovány tři kružnice, jejichž středy neleží v přímce a proto jejich chordály procházejí jediným bodem. Kružnice  $p, h$  mají chordálu  $AB$ , kružnice  $p, d$  mají chordálu v přímce  $s$ , která spojuje jejich průsečíky a kružnice  $h, d$  mají chordálu ve společné tečně  $t$ , sestrojené v jejich společném bodě dotyku  $T$ . Všechny tyto tři chordály procházejí bodem  $C$ , který snadno sestrojíme a vedeme z něho pak tečny k dané kružnici  $d$ . Jejich body dotyku jsou hledané body  $T, T'$ .



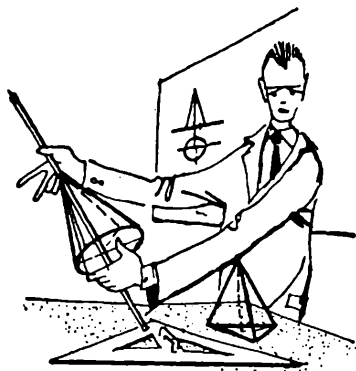
Obr. 12

V obr. 12 byly dané prvky zvoleny tak, že úloha má dvě různá řešení, což je také nejvyšší počet řešení, který tato úloha může mít. Druhá kružnice  $h' \equiv (O'; O'T')$  narýsována není. Při diskusi uvažte i případ, kdy přímka  $AB$  je rovnoběžná s chordálou  $s$ . I zde existují dvě různá řešení, k nimž však dospějeme jednodušší cestou.

### Cvičení.

1. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky  $t$  v bodě  $T$  a kružnice  $k$ , neprocházející bodem  $T$ .
2. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1, k_2$ . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic  $k_1, k_2$ , a to kružnice  $k_1$  v daném bodě  $T_1$ . Bod  $T_1$  neleží na  $k_2$ .
3. Sestrojte bod, z něhož lze k daným třem kružnicím, jejichž středy neleží v přímce, vést tečny stejně dlouhé.
4. Sestrojte kružnici, která dané tři kružnice, jejichž středy neleží v přímce, protíná kolmo.
5. Ukažte, že chordálu dvou různých kružnic, které mají společné vnější tečny, lze sestavit takto: Sestrojíme společnou vnější tečnu obou kružnic. Středem úsečky, která je omezena jejími body dotyku, prochází již chordála.
6. Je dán svazek kružnic, t. j. souhrn všech kružnic, jdoucích dvěma různými body. Sestrojíme libovolnou kružnici  $k$ , jejíž střed leží na přímce, spojující body společné kružnicím svazku, pak chordály kružnice  $k$  a libovolné kružnice svazku procházejí pevným bodem. Dokažte toto tvrzení.

# Deskriptivní geometrie



Doc. Dr. Miroslav Menšík, Praha:

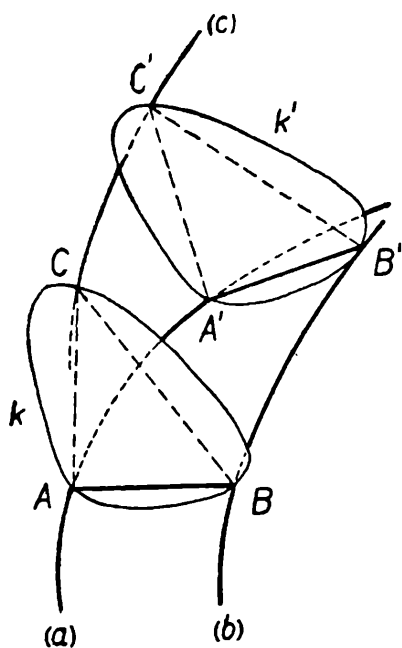
## Základy kinematické geometrie v rovině

(Pokračování)

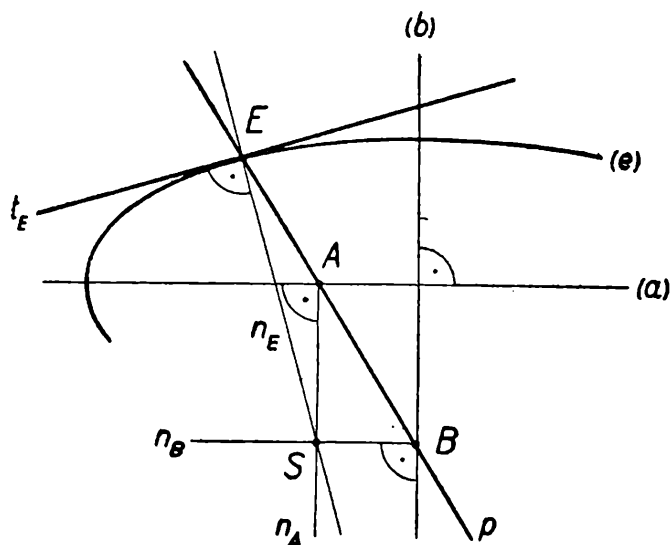
Studujme další jednoduché vlastnosti spojitě se pohybujících útvarů v rovině.

1. Úsečka  $AB$  se pohybuje v rovině a nabývá poloh  $A'B'$ , ... tak, že její body  $A, B$  opisují dráhy čili trajektorie  $(a), (b)$ . Tím je současně určen pohyb celé neproměnné soustavy  $ABC \dots$  (jejíž částí je úsečka  $AB$ ) do nové polohy  $A'B'C' \dots$  (obr. 6). Lze totiž sestavit trajektorii  $(c)$  libovolného dalšího bodu  $C$  soustavy. Pro jeho jednotlivé polohy  $C', \dots$  platí  $AC = A'C', BC = B'C', \dots$ , ježto trojúhelník  $ABC$  je při pohybu neproměnný. Tento poznatek vyslovíme větou:

*Pohyb neproměnné rovinné soustavy - na př. křivky  $k$  - je určen, známe-li trajektorie  $(a), (b)$  dvou jejích různých bodů  $A \neq B$ .*



Obr. 6



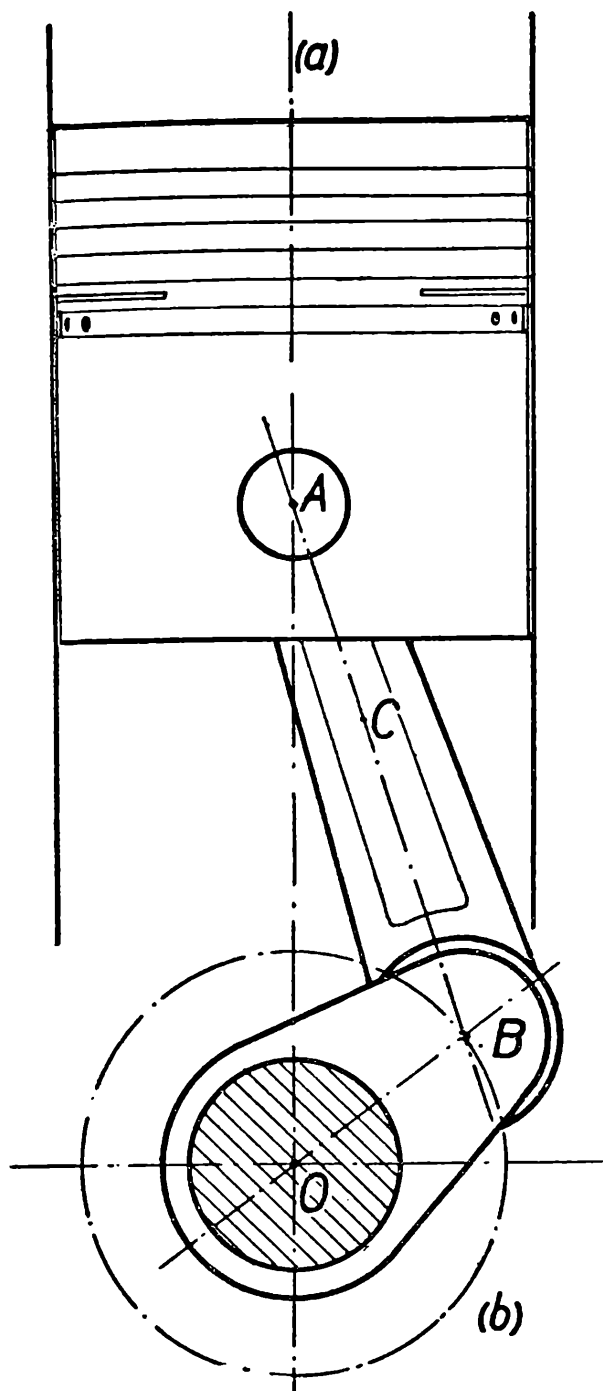
Obr. 7

Dále uvedme několik jednoduchých příkladů.

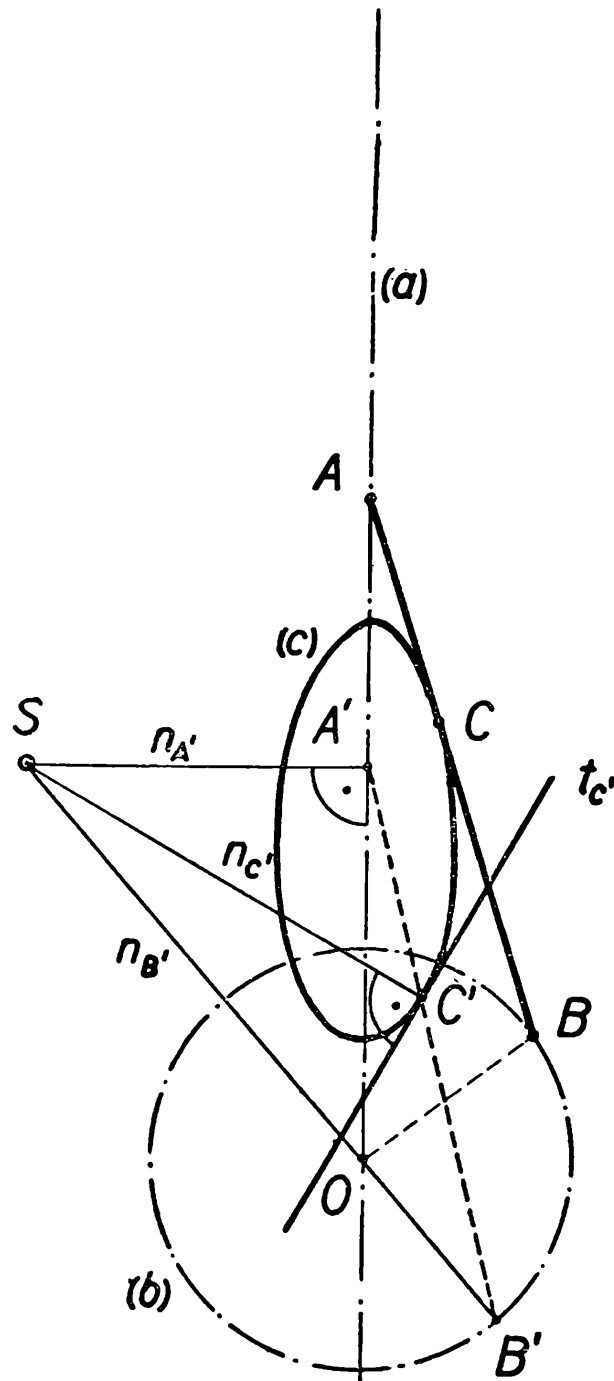
a) Nechť jsou trajektorie dvou bodů  $A \neq B$  neproměnné rovinné soustavy přímkami kolmé  $(a) \perp (b)$ . (Obr. 7.)

Přímka  $p$  se pohybuje tak, že dva její body  $A, B$  o stálé vzdálenosti opisují k sobě kolmé přímkové dráhy  $(a), (b)$ . Pak každý bod  $E$  této přímky opisuje trajektorii  $(e)$ , která je elipsou o středu  $O$  a délkách poloos  $BE = a, AE = b$ , jak známe z její proužkové konstrukce.

Tohoto kinematického vytvoření elipsy bylo již v minulém století užito k sestavení přístroje - jemuž říkáme *elipsograf*. Trajektorie  $(a) \perp (b)$  jsou tam realizovány dvěma drážkami, v nichž se pohybují kluzátka s čepy  $A, B$  upevněnými na objímkách, kterými prochází tyč  $p$ . Vzdálenosti  $BE = a, AE = b$  lze v určitých mezích, daných rozměry elipsografu, nastavit. Na tyči  $p$  je dále upevněn hrot (tužka), opisující při pohybu tyče elipsu o žádaných délkách os.



Obr. 8



Obr. 9

b) Uvažte sami, jaký zvláště jednoduchý pohyb vznikne v případě, kdy obě trajektorie jsou přímkami  $(a) \parallel (b)$  nebo  $(a) \equiv (b)$ .

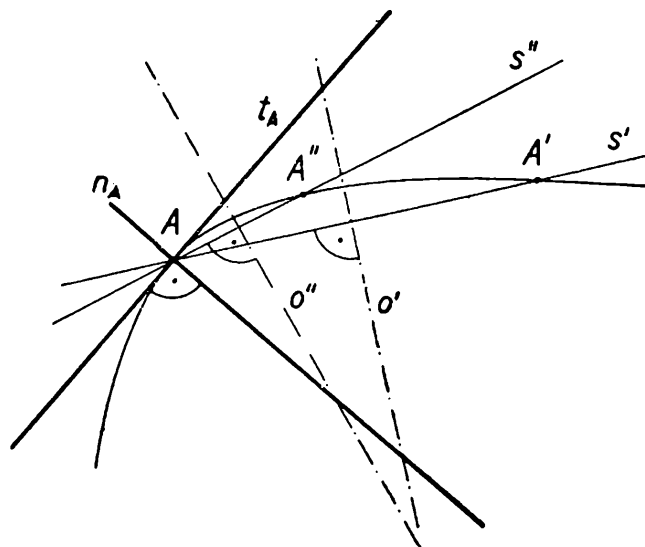
c) Je-li jednou trajektorií bod  $O \equiv (a)$  a druhou kružnice  $(b)$  o středu  $O$ , pak pohyb soustavy je rotací kolem středu  $O$ .

d) Jaký pohyb vznikne, jsou-li obě trajektorie soustředné kružnice týchž nebo různých poloměrů?

e) Ve strojnictví je jedním z nejčastějších úkolů převedení pohybu přímočarého v otáčivý nebo naopak. S tímto převedením se setkáme na př. u parních a spalovacích motorů, jak vidíme na schematickém obr. 8 technické skutečnosti i na jejím geometrickém podkladu (obr. 9).

Úsečka  $AB$  je osou ojnice, jejíž bod  $A$  opisuje přímou trajektorii ( $a$ ) - t. j. osu válce parního stroje nebo osu válce spalovacího motoru - a bod  $B$  trajektorii kruhovou ( $b$ ) o středu  $O$  ležícím na ( $a$ ).

Bod  $C$  na ose ojnice opiše trajektorii ( $c$ ), kterou zakreslíme bod po bodu  $C', \dots$ , rýsujeme-li postupně jednotlivé polohy  $A'B', \dots$  úsečky  $AB$  při jejím pohybu (obr. 9). Vzniklá křivka ( $c$ ), jak je vidno z konstrukce, má osu souměrnosti ( $a$ ); tato křivka není elipsou. Zvolte si sami několik bodů na přímce  $AB$ , a to i mimo úsečku  $AB$  a sestrojte jejich trajektorie.



Obr. 10

2. Spojnice dvou sousedních bodů  $A \not\equiv A'$  křivky  $k$  je sečna křivky  $s' \equiv AA'$ . Přiblíží-li se bod  $A'$  po křivce  $k$  k bodu  $A$  do polohy  $A''$ , je opět  $s'' \equiv AA''$  jinou sečnou této křivky (obr. 10). Při tomto přibližování otáčí se sečna  $s^n \equiv AA^n$  kolem bodu  $A$  a blíží se určité své mezní čili limitní poloze  $t_A$ , které říkáme tečna křivky  $k$  v bodu  $A$ . Když konečně body  $A$  a  $A^n$  splynou v jediný bod  $A \equiv A^n$ , přejde sečna  $s^n$  křivky v tečnu  $t_A$ . V grafickém zobrazení uvedeného postupu nerozeznáme při malých vzdálenostech  $AA^n$  bodů  $A, A^n$  sečnu  $s^n$  od tečny  $t_A$  v bodu  $A$  křivky  $k$ .

Sestrojme současně osy souměrnosti  $o', o''$ , tětivy  $AA', AA'', \dots$ ; v limitním případě, když je  $A \equiv A^n$  a  $s^n \equiv t_A$ , přejde osa  $o^n$  v normálu křivky  $k$  v bodu  $A$ ; označme ji  $n_A$ .

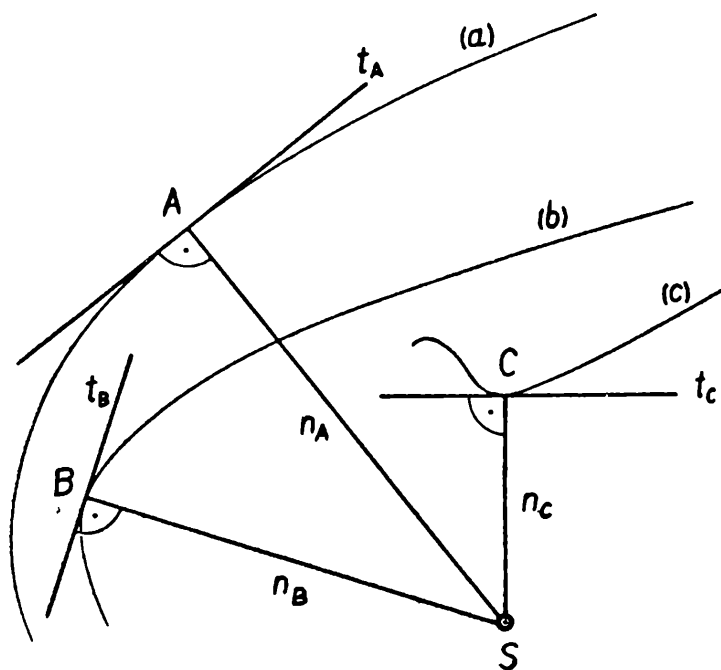
Budiž dán pohyb útvaru  $ABC \dots$  v rovině trajektoriemi ( $a$ ), ( $b$ ) dvou jeho bodů  $A, B$ ; další body  $C, \dots$  opisují trajektorie ( $c$ ),  $\dots$  (obr. 11).

Minule jsme si dokázali, že neproměnný útvar  $ABC \dots$  můžeme v rovině vždy z jedné jeho polohy  $ABC \dots$  do jiné dané polohy  $A'B'C' \dots$  přemístit otočením kolem určitého středu otáčení  $S$ , čili že osy souměrnosti úseček  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ... procházejí tímto pevným bodem  $S$ . V limitním případě, kdy pohyb útvaru  $ABC \dots$  je nekonečně malý a kdy tudíž uvedené osy souměrnosti přejdou - jak právě jsme ukázali - v normály  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_C$  trajektorií (a), (b), (c) v bodech  $A, B, C$ , platí věta:

*V každém okamžiku pohybu neproměnného rovinného útvaru v rovině - t. j. v každé jeho poloze - procházejí normály sestrojené v bodech útvaru k jejich trajektoriím jedním bodem.*

Tento bod (vlastní nebo nevlastní), měnící za obecného pohybu stále svoji polohu, se nazývá *okamžitý střed otáčení*  $S$  (obr. 11).

Provedená, ne dosti přesná úvaha, sloužila k nástinu důkazu a opírala se o názor, aby mohla být jednoduchá. Zůstává správná pouze za určitých matematických podmínek. Větu lze přesně matematicky dokázat, avšak prostředky, které přesahují vám známou látku. V běžných praktických případech však nenarazíme po této stránce na obtíže.

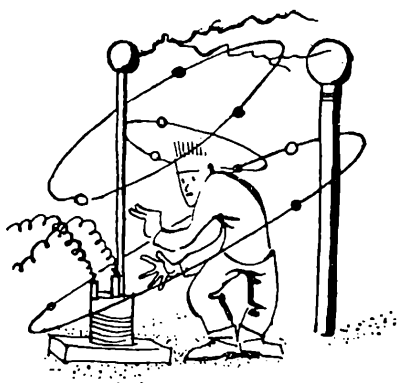


Obr. 11

Vyzbrojeni znalostí této, přes dvě stě let staré věty, vrátíme se k příkladům a) a e), abychom jí prakticky užili k sestrojení tečny v libovolném bodu trajektorie.

Tak v příkladu a) jsou obě dané trajektorie (a) a (b) bodů  $A$  a  $B$  přímkové. Sestrojíme v bodech  $A$  a  $B$  „normály“ trajektorií  $n_A \perp (a)$  a  $n_B \perp (b)$ , ty se protnou v okamžitém středu otáčení  $S$ , jímž prochází normála  $n_E$  trajektorie (e) v bodě  $E$ . Tečna elipsy (e) v bodu  $E$  jest pak  $t_E \perp n_E$  (obr. 7).

V příkladu e) je trajektorie (a) bodu  $A$  přímka a trajektorie (b) bodu  $B$  kružnice (obr. 9). Máme-li na př. v bodu  $C'$  sestroit tečnu křivky (c), sestrojíme normály  $n_{A'} \perp (a)$ ,  $n_{B'} \equiv OB'$  (normála kružnice jde jejím středem). Okamžitý střed otáčení  $S$  je průsečíkem normál  $n_{A'}, n_{B'}$ ; dále narýsujeme normály  $n_{C'} \equiv C'S$  a konečně hledaná tečna v bodu  $C'$  je  $t_{C'} \perp n_{C'}$ . (Pokračování)



## O fotoelektrickém zjevu

**Úvod.** Jistě většina čtenářů zná elektrický exposimetr. Přístroj se namíří okénkem směrem k předmětu, který chceme fotografovat a ručička měřicího přístroje ukáže na stupnici na značku, pomocí níž najdeme v posuvné tabulce expozici pro libovolnou clonu.

A uvažovali jste, jak se z pásku zvukového filmu získá hudba a řeč? V projektoru je zařízení, kterým se osvětlení kolísavé intensity mění ve střídavý proud - fotoelektrický článek čili fotočlánek nebo fotonka - a střídavý proud po zesílení ve zvuk v reproduktoru.

Obě zařízení mají cosi společného. Jejich základem je *fotoelektrický zjev*, o němž si chceme v tomto článku promluvit, hlavně o jeho fyzikální podstatě a významu pro fyziku.

Fotoelektrickým zjevem v širokém slova smyslu rozumíme takový děj, při němž v okruhu elektrického proudu buď vzniká nebo se mění proud, jestliže některá část obvodu je osvětlena. Víme, že světelný tok dopadající na některou část obvodu se úplně nebo alespoň částečně absorbuje a tím předává fotoelektricky aktivní látce určitou energii. Studium fotoelektrických jevů je jedním ze způsobů, jak zkoumat vzájemné působení světla s materií. Může nás poučit o složení a energetických poměrech v různých látkách pevných, kapalných i plynných. Přednost fotoelektrického zjevu při takovém zkoumání se projevuje v tom, že změny proudu jsou celkem snadno přístupné měření. V tomto článku se budeme zabývat jen fotoelektrickými zjevy v pevných látkách.

Dosud známé fotoelektrické zjevy v pevných látkách lze rozdělit do tří skupin:

1. *Vnější fotoefekt* či *fotoemise* záleží v tom, že z osvětleného povrchu vystupují elektrony.

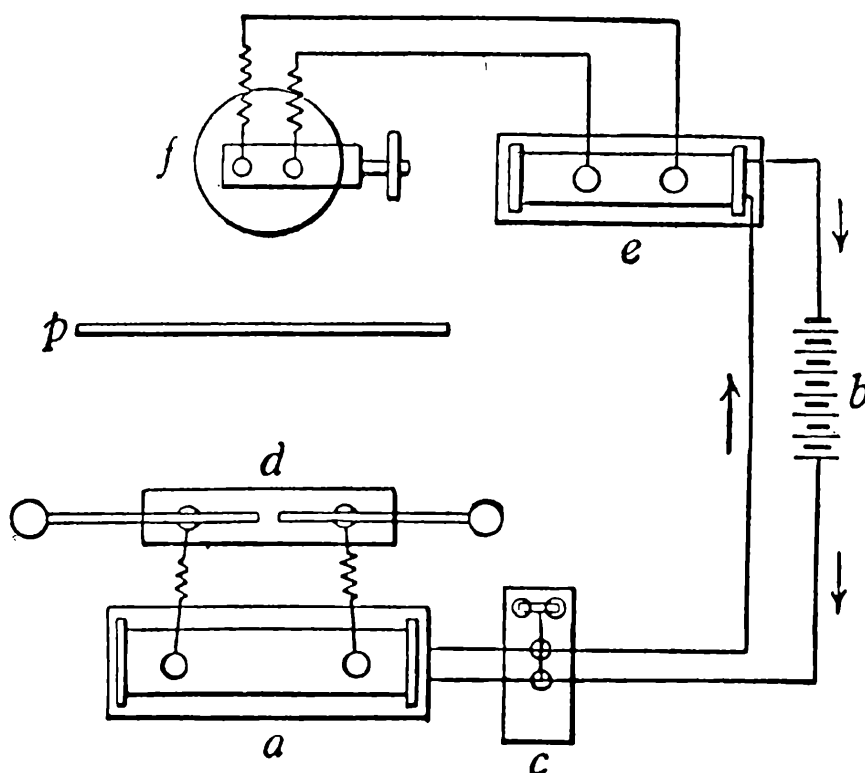
2. *Fotovodivost* záleží ve snížení odporu osvětlené části některých polovodičů a izolátorů.

3. *Hradlový fotoefekt* se projevuje vznikem elektrického napětí mezi dvěma prostředími, jako na př. mezi polovodičem a kovem nebo dvěma polovodiči, jestliže je osvětlena hraniční vrstva.

Historický vývoj šel sice opačným směrem než zde uvedené pořadí, pro snazší pochopení je však lépe vyjít při výkladu z vnějšího fotoefektu, který je zároveň toho času nejdůležitější pro praktické použití. V první části článku se budeme zabývat jen vnějším fotoefektem.

Objevitelem vnějšího fotoefektu je H. Hertz v r. 1887. Hertz při svých základních

pokusech o důkazu existence elektromagnetických vln užíval jiskrového generátoru krátkých vln a jako detektoru okruhu s jemně nastavitelným jiskřištěm. Vzdálenost jiskřiště, při níž ještě přeskakovala v sekundárním okruhu jiskra, mu byla mírou intenzity dopadajících vln. A tu Hertz zjistil, že za jinak stejných podmínek přeskakovala jiskra při větší vzdálenosti, jestliže sekundární jiskřiště bylo přímo osvětleno světlem jiskry primární. Jestliže vložil mezi primární a sekundární jiskřiště sklo, dostal v sekundárním obvodu jen kratší jiskry. (Obr. 1.) Jestliže nahradil sklo neprůhlednou přepážkou a kovovým zrcadlem vrhl světlo primární jiskry na měrné jiskřiště, doskok se opět prodloužil. Osvětlování jiskřiště ultrafialovým světlem vedlo rovněž k prodloužení jiskry, kdežto viditelné světlo nemělo takový účinek. Zjistil dále, že účinek na čerstvě vyleštěném povrchu elektrody jiskřiště je větší tehdy, když ozářená elektroda je záporná.



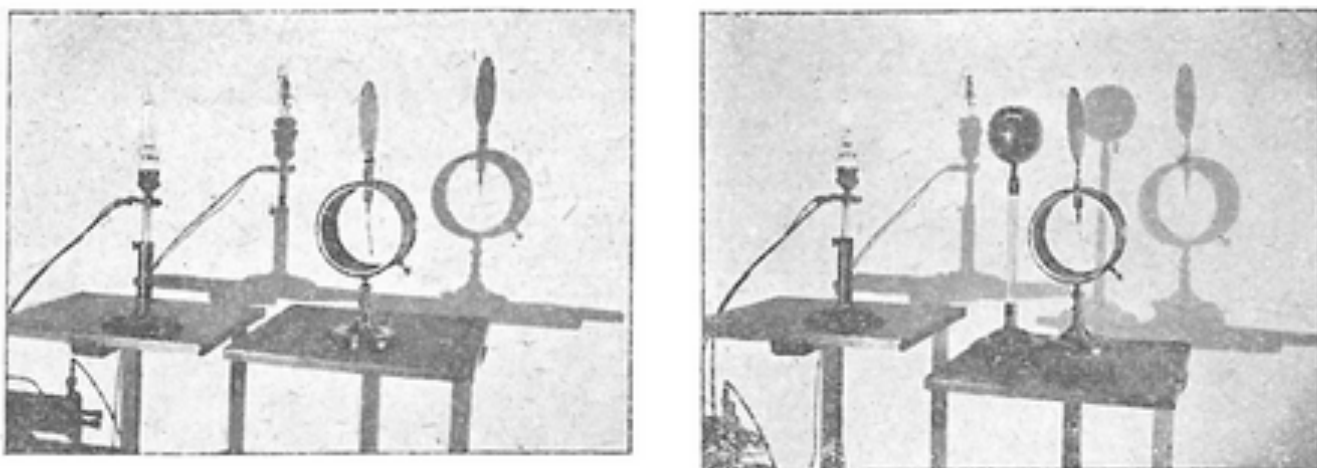
Obr. 1. Hertzův pokus.

a) Induktor primárního okruhu, b) baterie, c) přerušovač, d) primární jiskřiště, e) sekundární induktor, f) sekundární jiskřiště, p) sklo nebo jiná překážka.

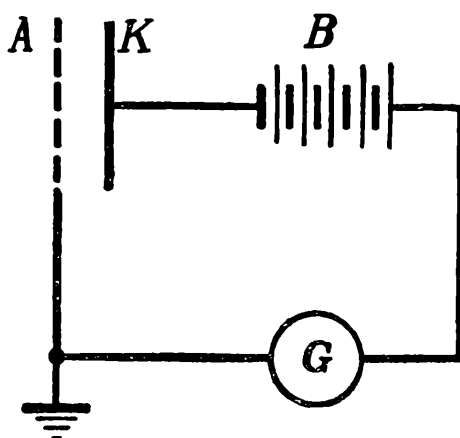
Další krok k poznání podstaty tohoto zjevu učinil W. Hallwachs. Jeho pokus se dá snadno demonstrovat a je naznačen na obr. 2a. K lístkům elektrometru je připojena zinková destička, která je před pokusem pečlivě očištěna smirkovým papírem. Jestliže elektrometr nabijeme záporně, na př. zelektrovanou ebonitovou tyčí a osvětlíme destičku ultrafialovým světlem (oblouk, rtuťová výbojka bez skleněné baňky „horské slunce“), elektrometr se rychle vybije. Jestliže nabijeme elektrometr kladně (skleněnou zelektrovanou tyčí), osvětlování nemá žádný účinek. Vložíme-li mezi světelný zdroj a zinkovou destičku skleněnou desku, která jak známo zadržuje ultrafialové paprsky, účinek se rovněž neprojeví. Jestliže umístíme do blízkosti

záporně nabitě osvětlené destičky nějaké těleso nabitě kladně (obr. 2b), ztratí toto těleso svůj náboj. Z tohoto pokusu Hallwachs vyvodil, že působením ultrafialového světla se uvolňují z osvětleného tělesa záporně nabitě částice, které se v elektrickém poli pohybují po silokřivkách od záporného pólu ke kladnému.

Podrobněji prozkoumal zákony tohoto zjevu A. G. Stoletov, profesor Moskevské university. Jako první užil při svých měřeních nízkých napětí několika desítek nebo stovek volt. Uspořádání pokusu je na obr. 3. Záporná deska - katoda  $K$  - je osvětlována skrze kladnou elektrodu - anodu  $A$ , která má podobu drátěné sítě. Elektrody jsou připojeny přes citlivý galvanometr  $G$  k baterii  $B$ .



Obr. 2. Hallwachsův pokus.



Obr. 3. Stoletovův pokus.

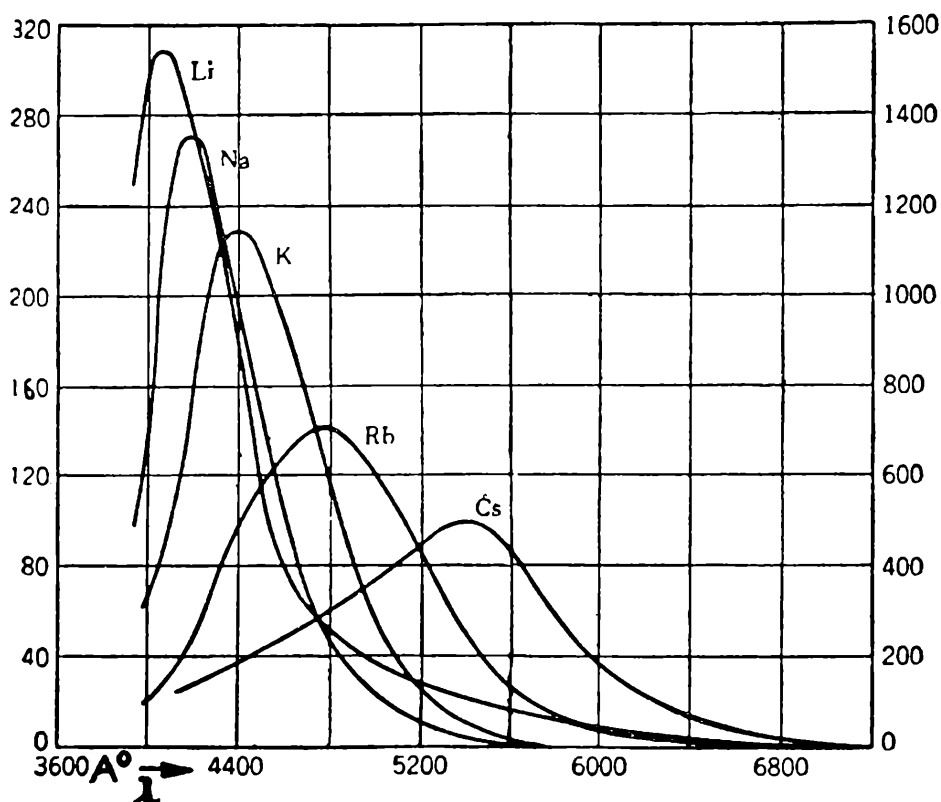
Pokud katoda není osvětlena, galvanometrem neprochází žádný proud. Stoletov zjistil, že proud při osvětlení je přímo úměrný intenzitě dopadajícího světla. Uspořádání pokusu podle Stoletova se v podstatě užívá při aplikacích fotoefektu dodnes jen s tou změnou, že elektrody se nacházejí ve vakuu nebo v atmosféře inertních plynů, aby se povrch aktivní elektrody - fotokatody - neznečistil chemickými reakcemi.



Pozdější měření Lenardova a Thomsonova s odkláněním vyletujících částic v magnetickém poli dokázala, že podstatou tohoto vnějšího fotoefektu je uvolňování elektronů z kovu katody.

Značně vyšších proudů fotoelektronů dosáhli J. Elster a H. Geitel tím, že užíli jako katody rtuťových amalgamů alkalických kovů, sodíku a draslíku. Tyto *fotokatody* jeví vnější fotoefekt už při použití viditelného světla. Poněvadž alkalické kovy velmi rychle oxydují na vzduchu, počalo se užívat fotočlánků uzavřených ve vyčerpané baňce.

Pomocí vakuových fotočlánků byla prozkoumána především spektrální citlivost různých fotokatod. Toto měření se provádí tak, že světlo ze zdroje prochází nejdříve spektroskopem zařízeným tak, že okulár dalekohledu je nahrazen svislou štěrbinou ležící v ohniskové rovině objektivu. Takto vychází ze štěrbin jen velmi úzká část spektra, prakticky světlo jen jediné vlnové délky (monochromatické). Použijeme-li

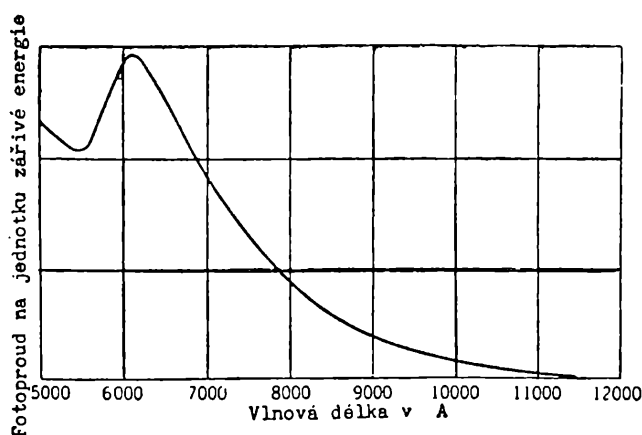


Obr. 4. Spektrální citlivosti alkalických fotokatod. Měřítka proudu jsou různá pro jednotlivé kovy.

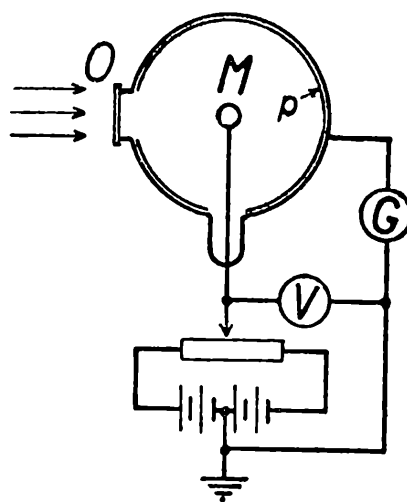
zdroje dávajícího spojité spektrum, můžeme posunováním výstupní štěrbinu podél spektra dostat monochromatické světlo libovolné vlnové délky. Příklad měření spektrálního rozložení fotoefektu u alkalických kovů je na obr. 4. Grafem jsou vyjádřeny fotoproudy přepočtené na stejnou intenzitu dopadajícího monochromatického světla (na svislé ose) v závislosti na jeho vlnové délce  $\lambda$  v angströmech (na vodorovné ose). Je vidět, že se stoupajícím pořadovým číslem prvku se maximální citlivost zmenšuje a přitom se maximum citlivosti posouvá do viditelné části.

Později bylo zjištěno, že lze citlivost posunout daleko do viditelného spektra, nebo i do infračervené oblasti, použitím složených fotokatod. Tyto fotokatody se připravují postupným vypařováním různých kovů ve vakuu, po př. oxydaci v určitém stadiu výroby. Příklad spektrální citlivosti složení fotokatody obsahující vrstvy Ag, Cs<sub>2</sub>O, Cs je na obr. 5.

Kromě spektrální citlivosti zajímá fyzika ještě jedna charakteristická vlastnost fotokatody a tou je rozdělení rychlostí elektronů vyletujících z povrchu katody. K měření rychlosti elektronů se užívá metody brzdícího pole podle Lenarda. Princip této metody je naznačen na obr. 6. Zkoumaná vrstva je nanášena na kovovou kuličku *M*, která se nachází uprostřed kulové vyčerpáné skleněné baňky. Vnitřní stěna baňky je pokovena a tento kovový povlak *p* slouží jako sběrná elektroda. Okénkem *O* je ozařována kulová emitující elektroda (t. j. elektroda, která vysílá elektrony) monochromatickým světlem. Mezi emitující a sběrnou elektrodou je možno vložit proměnné napětí obojí polarity pomocí potenciometru. Fotoproud se



Obr. 5. Spektrální citlivost složené fotokatody.



Obr. 6. Metoda brzdícího pole.

měří galvanometrem. Elektron vyletí z vrstvy s určitou rychlostí *v*, takže má kinetickou energii  $\frac{1}{2}mv^2$ , kde *m* je hmota elektronu. Jestliže sběrná elektroda je na záporném potenciálu *U* proti emitující elektrodě, pohybuje se elektron proti síle elektrického pole a může dospět až ke sběrné elektrodě jen tehdy, když jeho kinetická energie je rovna nebo větší než práce *eU* vykonaná proti silám elektrického pole (*e* je náboj elektronu). Při daném napětí *U* dospějí ke sběrné elektrodě všechny elektrony, jejichž kinetická energie je větší než určitá mezní energie daná vztahem

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU$$

Při dostatečně velkém záporném *U* jsou všechny elektrony odpuzovány od sběrné elektrody a proud neprotéká. Zmenšujeme-li nyní napětí *U* k nule, začne při určitém napětí *U*<sub>max</sub> protékat proud, který pak dále roste (obr. 7) a od určitého kladného napětí *U*<sub>1</sub> se stává nasycený, na *U* nezávislý. Z hodnoty napětí *U*<sub>max</sub> můžeme najít maximální kinetickou energii a tudíž i rychlost vyletujících elektronů:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2eU_{\max}}{m}}.$$

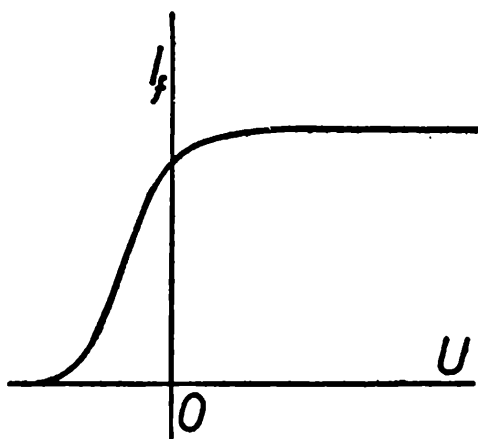
Nasycený proud  $I_n$  udává celkový náboj elektronu emitovaných za jednotku času.

Těmito měřeními provedenými na různých emitujících kovech a při různé vlnové délce monochromatického světla byly nalezeny dva nejdůležitější zákony fotoelektrického jevu:

1. Počet emitovaných elektronů (úměrný  $I_n$ ) je přesně úměrný intenzitě monochromatického světla.

2. Nejvyšší výstupní kinetická energie emitovaných elektronů nezávisí na intenzitě světla, nýbrž je lineární funkcí kmitočtu použitého monochromatického světla.

Další velmi důležitou charakteristikou vnějšího fotoefektu je, že nejeví žádnou setrvačnost, což znamená, že emise nastává ihned s osvětlením a přestává, jakmile se osvětlení přeruší.



Obr. 7. Závislost fotoproudu  $I_f$  na napětí  $U$  sběrné elektrody proti emisní elektrodě.

Vysvětlení prvního zákona je nasnadě. K uvolnění jednoho elektronu z kovu je zapotřebí určité průměrné energie. Čím větší je energie dopadajícího monochromatického světla, tím více elektronů se uvolňuje.

Zato druhý zákon už vůbec není samozřejmý a ukázalo se, že z klasických představ o podstatě světla jej vůbec nelze vylčít. Matematicky jej lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = k(\nu - \nu_0),$$

kde  $\nu$  je kmitočet dopadajícího světla,  $\nu_0$  je nejmenší kmitočet, při němž je možno u daného kovu ještě zjistit fotoefekt a  $k$  je konstanta.

Kdybychom si představovali, že světelná energie je rozložena rovnoměrně po vlnoplochách šířících se ze zdroje, mohli bychom vypočítat, kolik energie může absorbovat na př. atom kovu za určitý čas, po který na něj dopadá světlo. Při známých malých rozměrech atomu ( $\approx 10^{-8}$  cm) a přibližně známých energiích, jichž je třeba k odtržení elektronu od atomu, dospěli bychom k výsledku, že i při značných intenzitách osvětlení by bylo třeba mnoho dní, než by atom nastřádal potřebnou

energii k uvolnění elektronu. To je v naprostém rozporu se zkušeností, neboť víme, že fotoefekt i při nepatrných intenzitách nastává ihned nebo s neměřitelně krátkým zpožděním. Zde se fyzikové setkali se skutečnostmi, které se s dosavadními teoriemi nedaly srovnat.

Důmyslný výklad fotoefektu podal r. 1905 A. Einstein, v němž zavedl radikálně nové představy o podstatě světla. Podle Einsteina se nešíří energie ze světelného zdroje spojitě, tak jako na př. rozruch na vodní hladině způsobený vhozením kamene, nýbrž po jakýchsi dávkách, v nichž je soustředěna energie v malém prostoru, asi tak, jako když vyletují jiskry z vánoční prskavky na všechny strany. Že se nám zdá, že světlo se šíří spojitě, to je způsobeno jen nesmírným množstvím těchto dávek, světelných *kvant* čili *fotonů*, jak je Einstein nazval. Stejně tak se nám na pohled jeví spojitá i látka, skládající se z nesmírného množství částic - atomů. Každé kvantum nese energii  $E$ , která je podle Einsteina úměrná kmitočtu vysílaného světla  $\nu$ :

$$E = h\nu ,$$

kde  $h$  je universální t. zv. *Planckova konstanta*, rovná  $6,55 \cdot 10^{-27}$  erg. s.

Nyní si ještě objasníme, jakým mechanismem dochází k výměně energie mezi světelným kvantem a elektronem.

Víme, že izolované neutrální atomy jsou tvořeny jádrem a elektronovým obalem. Vnější elektrony jsou poměrně slabě vázány k jádru a jejich počet rozhoduje o valenci kovu. Jestliže se jednotlivé atomy seskupí tak, že vytvoří pravidelně uspořádanou krystalovou mříž kovového krystalu, odpoutají se vnější valenční elektrony působením blízkých atomů a pohybují se téměř volně uvnitř krystalu kovu mezi kladnými zbytky atomů - ionty. Nemohou však samy o sobě opustit kov, neboť jsou v kovu poutány elektrickými silami. K tomu, aby elektron opustil kov, je nutno mu dodat určitou dodatečnou energii k té, kterou má už uvnitř kovu. Tuto energii nazýváme výstupní prací a ukazuje se, že je charakterická pro každý jednotlivý kov nebo sloučeninu a kromě toho velmi závislá na čistotě povrchu. Budeme ji označovat  $W$ .

Při jednotlivém fotoelektrickém ději odevzdá jeden foton celou svou energii  $h\nu$  jedinému elektronu. Jestliže tato energie je nejméně rovna nebo větší než výstupní práce  $W$ , může elektron opustit povrch kovu. Minimální kmitočet fotonů, které ještě způsobí fotoemisi, je dán rovnicí

$$W = h\nu_0$$

Jestliže energie fotonů je větší než  $W$ , pak vyletující elektron má při výstupu ještě nějakou kinetickou energii

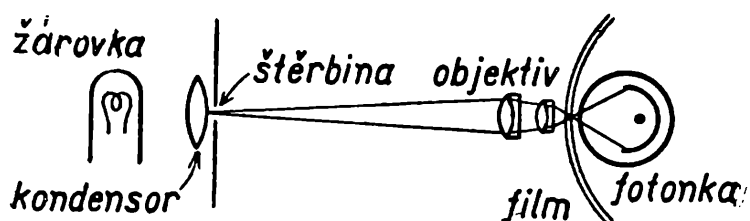
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= h\nu - W \\ &= h(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

Tyto rovnice se nazývají *Einsteinovy* a popisují druhý zákon fotoemise. Einsteinovi se podařilo takto vysvětlit všechny známé vlastnosti fotoelektrického jevu, neboť je patrné, že k fotoemisi může dojít při libovolně malé intenzitě světla, t. j. i při nepatrném počtu fotonů, dopadajících na povrch fotokatody a zároveň, že k ní dochází bezprostředně při dopadu světla na kov.

Tímto působením patří fotoefekt k fyzikálním jevům, které způsobily úplný převrat ve fyzice a vedly k vybudování nových teorií, mezi nimiž hraje právě *kvantová teorie* neobyčejně důležitou roli.

Kromě tohoto zásadního významu pro fyziku má však vnější fotoelektrický zjev velmi široké uplatnění v praxi. Nejjednodušší zařízení, používající fotoelektrického zjevu, jsou t. zv. *fotonky*. Dnes se nejčastěji používá složených fotokatod, které obsahují buď antimon a cesium (pro modrou a ultrafialovou část spektra), nebo stříbro, kysličník cesný a cesium (pro zelenou až blízkou infračervenou část).

Pro měrné účely, jako na př. k měření osvětlení, se užívá vakuových fotonek. Jejich výhodou je přesná úměrnost mezi intenzitou dopadajícího světla a fotoproudem (v oblasti nasyceného fotoproudu). Nevýhodou je, že proud je poměrně slabý a je proto nutno užívat zvláštních zesilovačů. Pro zesílení proudu se někdy plní fotonky vzácnými plyny při nízkém tlaku. Jestliže nastavíme napětí mezi katodou a anodou na vhodnou hodnotu, nastává působením pohybu fotoelektronů ionisace plynu, která vede ke značnému zesílení proudu, neboť kromě fotoelektronů se zúčastní vedení též ionty plynu. Těchto fotonek se užívá na př. při přeměně optického záznamu na zvukovém filmu ve zvuk. Princip je naznačen na obr. 8.



Obr. 8. Princip přeměny zvukového záznamu na filmu v elektrický proud.

Intenzivně osvětlená štěrba  $S$  se zobrazí objektivem na záznam zvuku na okraji filmu. Záznam se skládá buď z různě tmavých čar nebo různě širokého světlého proužku. Světlo periodicky zeslabované dopadá na fotonku. Jak se film rovnoměrně posouvuje, mění se podle záznamu intenzita procházejícího světla a tím i fotoproud. Fotoproud se zesiluje v elektronkovém zesilovači, k jehož výstupu je připojen reproduktor.

Nemůžeme v tomto článku uvádět nejrozmanitější aplikace fotonek v průmyslu a ve vědecké práci, neboť jsme se chtěli zabývat hlavně fyzikální stránkou fotoelektrického zjevu.

Petr Kratochvíl, Praha:

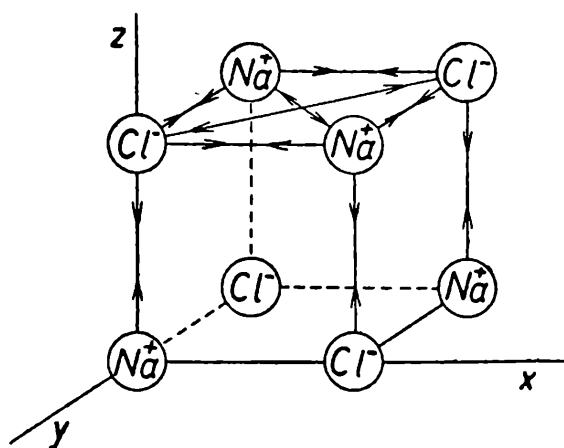
## Růst krystalů

### 1. Ideální a reálný krystal.

Tento článek se zabývá některými otázkami růstu krystalů a jeho účelem je objasnit s fyzikálního hlediska některé děje, souvisící s růstem krystalů. Dále budou

vysvětleny některé novější představy o mechanismu růstu krystalů. Nejprve je nutno objasnit pojmy a představy, které budeme potřebovat.

Máme-li se zabývat otázkou tvorby krystalů, musíme nejprve vědět, co to krystal je. Atomy v pevných látkách jsou uspořádány určitým geometrickým způsobem. Toto uspořádání, které nazýváme *krystalografickou mříží*, se vyznačuje různým stupněm symetrie. Jak rozmístění atomů v pevné látce vypadá, záleží na látce samé, t. j. na tom, obsahuje-li jeden prvek, nebo je-li to nějaká sloučenina, slitina a pod. Seskupení jednotlivých částic v mříži musí odpovídat vazebným silám, které drží všechny částice v krystalu pohromadě. Jako příklad uvedu jeden typ vazby charakteristický pro NaCl. Nejméně vázaný elektron ve vnější slupce sodíku je snadno pohyblivý a přeskočí do vnější slupky chloru, která se tak zcela naplní. Tím vzniknou dva velmi stabilní a elektricky nabitě útvary: ionty  $\text{Na}^+$  a  $\text{Cl}^-$ . Mezi nimi nastane silná elektrostatická atrakce. Na obr. 1 je znázorněna mříž NaCl. Vidíte, že iont  $\text{Na}^+$  má jednak za sousedy v mříži ionty opačně nabitě ( $\text{Cl}^-$ ), s nimiž se přitahuje, jednak ionty souhlasně nabitě ( $\text{Na}^+$ ), s kterými se odpuzuje. Výsledkem těchto přitažlivých a odpudivých sil mezi všemi ionty v mříži je právě uspořádání, které je na obr. 1. Krystal, jehož mříž je složena z iontů, se nazývá *iontový krystal*.



Obr. 1

Na obr. 1 máme znázorněno 8 iontů, tvořících rohy krychle. Jejím opakováním ve směru  $x$ ,  $y$  a  $z$  dostaneme celou krystalografickou mříž. Takovému geometrickému uspořádání částic, jehož posuvem můžeme dostat celou mříž, říkáme *elementární buňka*. Každé látce bude zřejmě příslušet jiná elementární buňka. U NaCl je elementární buňka krychle, v jejíchž rozích jsou ionty  $\text{Na}^+$  a  $\text{Cl}^-$ . Krystal, který vznikne opakováním naprosto stejných elementárních buněk ve třech směrech, nazývá se *ideální krystal*.

Podívejme se nyní, jak vypadá skutečný krystal a čím se liší od ideálního krystalu. Na obr. 2a, b je srovnání ideálního (b) a reálného krystalu (a) ve dvojrozměrném případě. Reálný krystal se skládá z velkého počtu krystalických bloků, jejichž stěny jsou skoro paralelní. Uvnitř bloků je možno považovat krystal za ideální. Rozměr bloků je řádově  $10^{-4}$  cm a pootočení jejich stěn navzájem činí půl až několik úhlo-

vých minut. Toto rozdělení reálného krystalu na bloky se nazývá *mosaika* a bylo experimentálně potvrzeno pomocí ohybu paprsků X. Příčinou mosaikovosti krystalu je nepravidelný růst krystalů a nečistoty v nich obsažené. Blíže si příčinu mosaičnosti krystalu objasníme na konci dalšího odstavce. Dále se již budeme zabývat růstem krystalů.

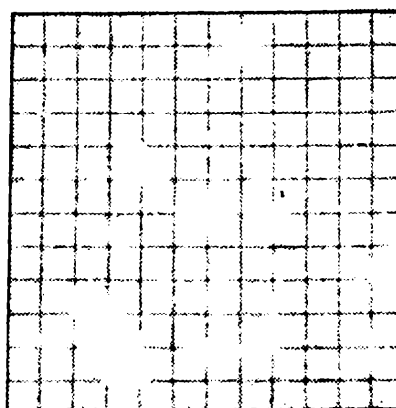
## 2. Tvoření krystalizačních zárodků.

Chceme získat krystaly NaCl. Budeme je získávat z roztoku NaCl ve vodě. Jak může krystalisace začít a o tom, jak ji urychlíme, povíme si v tomto odstavci.

Nejprve se musí vytvořit nějaký velice malý shluk iontů  $\text{Na}^+$  a  $\text{Cl}^-$ , jejichž uspořádání bude shodné s krystalografickou mříží NaCl. Takovému geometricky pravidelně uspořádanému shluku částic, které je shodné s mříží budoucího krystalu, říkáme *krystalizační zárodek* nebo *centrum krystalisace*. Celý krystalizační zárodek je velmi malý a není postřehnutelný ani pod mikroskopem. Důkazem existence takových krystalizačních center byly snímky získané ohybem X-paprsků na roztocích různých látek. Těmito pokusy bylo dokázáno, že v roztoku existuje určitý počet krystalizačních zárodků. To jsou tedy místa, ve kterých může za vhodných podmínek, o nichž budeme dále mluvit, začít krystalisace.



Obr. 2a



Obr. 2b

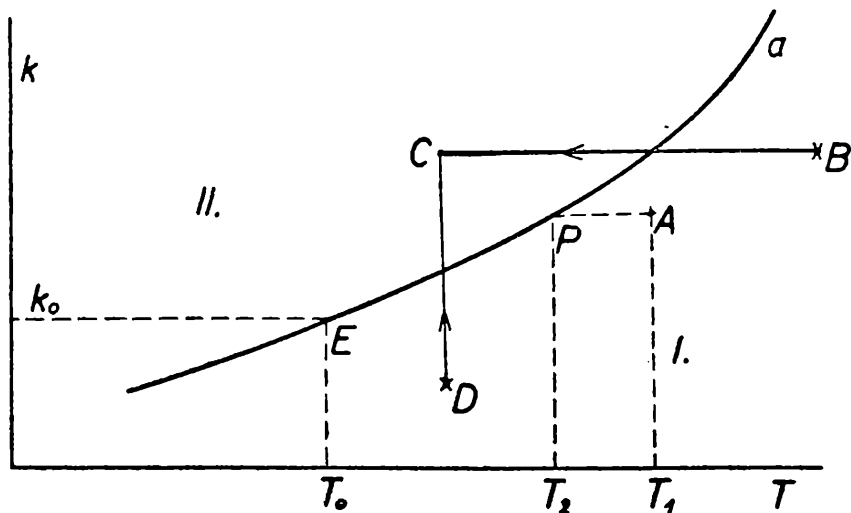
Je ovšem otázka, co se stane, jestliže počet krystalizačních center snížíme umělým zásahem zvenčí. Můžeme na příklad uvažovaný roztok po dlouhou dobu zahřívát a tím úplně roztrháme všechny krystalizační zárodky. Tyto malé celky neodolají dlouhým a vytrvalým thermickým nárazům všech částic roztoku. Tím se silně potlačí schopnost krystalisace roztoku. Přesným měřením bylo zjištěno, že tento efekt je velmi silný a dá se pozorovat u většiny roztoků.

Krystalizačním centrem nemusí být jen konglomeráty rozpuštěné látky. Žádná látka není nikdy absolutně čistá. Vyskytují se v ní příměsi jiných látek v rozpustidle nerozpustných. Za teplot, při nichž je všechna uvažovaná látka již rozpuštěna, jsou tyto příměsi ještě nerozpustné. Kromě toho existují v roztoku cizí tělíska, která jsou v něm nerozpustná. I taková tělíska mohou sloužit jako zárodky krystalisace. Zvláště výhodná situace nastane, když toto cizí tělísko nebo příměs v roztoku

má stejnou nebo podobnou krystalografickou mříž jako rozpuštěná látka. V takovém případě může snadno začít ukládání částic rozpuštěné látky na mříž příměsi. Je sice pravda, že je možné velmi složitým a zdlouhavým filtračním procesem odstranit z roztoku tyto příměsi a cizí tělíška, ale tento efekt, i když byl pozorován, je malý.

Krystalisace začne obyčejně tam, kde se roztok chladí. Stěny nádoby budou takovým rozhraním, které způsobí ochlazení roztoku. Nyní si podrobně vysvětlíme, jak tento chladicí efekt ovlivní krystalizační schopnost roztoku.

Schopnost krystalisace rozpuštěné látky závisí na dvou veličinách a to na koncentraci roztoku a na jeho teplotě. Podle toho jaká bude teplota a jaká bude koncentrace roztoku, bude systém buď ve stavu stabilním nebo ne. Na diagramu (obr. 3) si znázorníme, co znamená pojem *stabilní stav*. Křivka *a* je *křivka rozpustnosti*. Na vodorovnou osu byly nanášeny teploty  $T$ , při nichž byl  $k$  procentní roztok nasycen. Z diagramu je vidět, že rozpustnost stoupá se stoupající teplotou. Každý bod plochy diagramu představuje přesně definovaný stav systému. Na příklad bod *E* ukazuje, že  $k_0$  % roztok NaCl je nasycen při teplotě  $T_0$ . Oblast I. pod křivkou rozpustnosti je oblast, v níž všechny body odpovídají nenasyčenému roztoku. Nenasyčený roztok *A* (na diagramu) nasytíme, ochladíme-li jej s teploty  $T_1$  na teplotu  $T_2$ . Říkáme, že roztok (rozpuštěná látka + rozpustidlo) je ve stavu stabilním, jestliže



Obr. 3

se jeho koncentrace nemění ať je nasycen nebo nenasyčen. Uvažujme nyní roztok ve stavu, který odpovídá na diagramu bodu *B*. Ochlazením tohoto roztoku přejdeme ve směru šipky do stavu *C*. V tomto stavu je roztok při nižší teplotě než nasycený roztok uvažované koncentrace. Říkáme, že roztok je *přechlazen*, čili je ve *stavu nestabilním* (oblast II. nad křivkou rozpustnosti). Kdybychom do roztoku ve stavu *D* přidali kousek NaCl, zvýšili koncentraci, dostali bychom také nestabilní stav *C*. Roztok by byl přesycen (při uvažované teplotě je při vyšší koncentraci než nasycený roztok). Zahřátím bychom opět dostali nenasyčený roztok *B*.

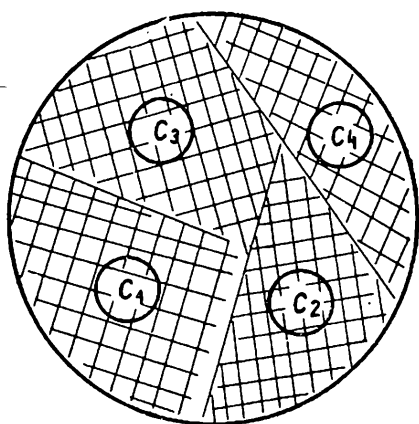
V přesyceném stavu může roztok existovat, pokud se v něm nenajdou zárodky pevné fáze tedy krystalizační zárodky. Aby nastala krystalisace, je nutno přivést



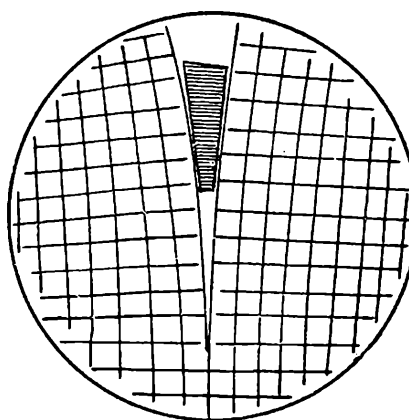
roztok do nestabilního stavu - přesytit jej nebo přechladit. Pak teprve může v přítomnosti krystalizačních center začít krystalisace.

Při malém přechlazení (roztok je při nižší teplotě než nasycený roztok při uvažované koncentraci) se krystalizační zárodky nahodile vzniklé zase rozpadají vlivem tepelného pohybu ostatních částic v roztoku. Dalším ochlazením se počet krystalizačních zárodků zvětšuje a stále méně jich zaniká. Je zřejmé, že nejnárodněji se utvoří krystalizační zárodek u látek s velkou symetrií krystalografické mříže. Tím se vysvětluje snadná krystalisace kovů. Je důležité, aby krystalizační zárodek narostl do takových rozměrů, kdy počet částic, na povrchu vystavených nárazům okolních částic, je nesrovnatelně menší než počet částic uvnitř krystalizačního zárodku. Tím vzroste stabilita krystalizačního zárodku, nastane krystalisace. Jejím výsledkem je makroskopický, očima pozorovatelný krystal. Jak probíhá tento růst - ukládání částic do mříže - osvětlíme si dále.

Nyní ještě zbývá zdůvodnit mosaikovou strukturu krystalu. Na obr. 4a je znázorněn první případ. Předpokládejme, že současně začíná růst z mnoha krystalizačních center ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ). Jejich orientace nejsou pak v důsledku náhodného uspořádání krystalizačních zárodků stejné. Obr. 4b ukazuje druhý případ, kdy do cesty jednomu krystalizačnímu zárodku se dostane cizí tělíčko, které rozštěpí krystalek na dvě různě orientované části.



Obr. 4a

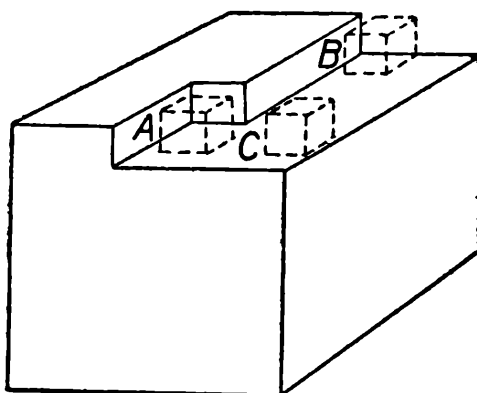


Obr. 4b

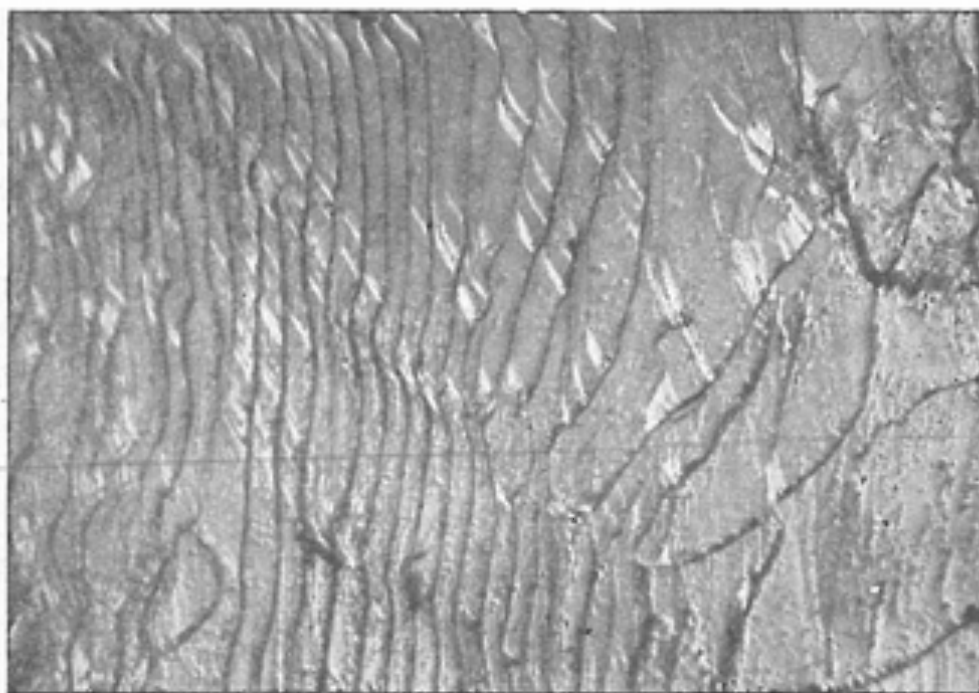
### 3. Mechanismus růstu krystalů.

Uvažujeme o bloku ideálního krystalu v okamžiku růstu. Na obr. 5 je takový blok znázorněn schematicky. Stěny bloku jsou *krystalografické roviny*. Schod na horní krystalové rovině odpovídá výšce jedné atomové roviny. Každá částice je znázorněna krychličkou. Tak si snadněji učiníme představu o mechanismu růstu. Přisečne-li další částice do místa *A*, je zřejmě držena se tří stran, t. j. větší silou než částice, která by se umístila do polohy *B*. Zde by byla držena jen se dvou stran a v místě *C* jen s jedné strany. To nás vede ke zcela správnému závěru, že se totiž

spíše zachytí částice v poloze *A* a v polohách s ní ekvivalentních. Tak se zaplní celá řada s počátkem v místě *A*, potom se obsadí *B* a další řada. Toto se stále opakuje až do zaplnění celé atomové roviny. Pak je nutné, aby se na uzavřené hladké atomové rovině vytvořil zárodek typu *C*.



Obr. 5

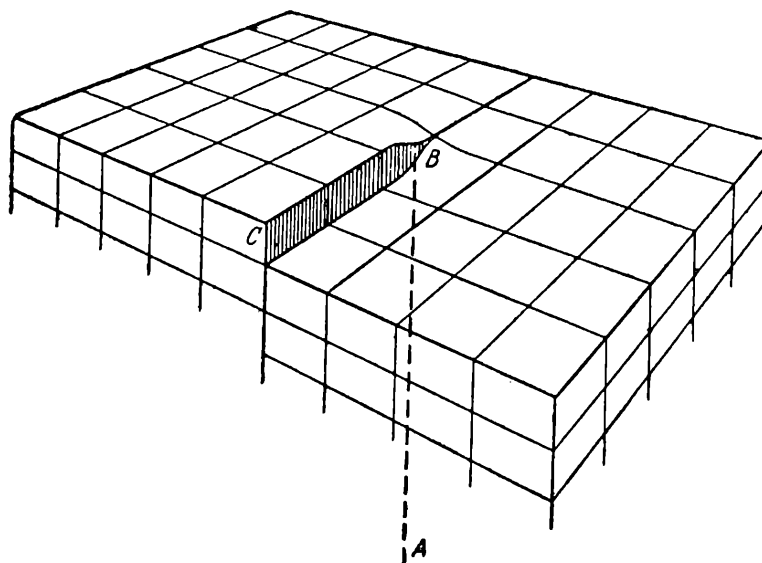


Obr. 6

Zachycení tohoto zárodku si představujeme takto: Na rozhraní kapalně a tuhé fáze (resp. pevné a plynné) se utvoří vrstva, v níž částice už sice pozbyly část své energie, ale přece jsou ještě pohyblivé podél plochy krystalu. Tato t. zv. *absorpční vrstva* je v rovnovážném stavu. Počet částic, které z ní vlivem tepelných nárazů vejdou do roztoku (do fáze plynné), nebo které se zachytí na krystalu, se rovná počtu částic, které jsou z krystalu vytrženy tepelným nárazem a přejdou do absorpční

vrstvy, nebo které přijdou do absorpční vrstvy z roztoku (z fáze plynné). V absorpční vrstvě se vytvoří nahodilou srážkou shluk částic (krystalizační zárodek), který se zabrzdí a přisedne na hladkou krystalovou plochu. Pak již růst pokračuje způsobem výše popsaným. Takový schodovitý růst byl pozorován nejen při růstu krystalů z roztoku, ale i při růstu z par a v poslední době i při růstu z taveniny. Na obr. 6 je ukázka takové *schodovité* - říkáme *lamelové* - *struktury* krystalu Zn rostlého z taveniny (zvětšeno  $450\times$ ).

Je velmi zajímavé, že krystalisace byla pozorována za podmínek, za kterých by krystalizační zárodky vůbec nebyly schopny existence (při malých přesyceních a přechlazeních). I v tomto případě se podařilo celý problém vyřešit. Je to jeden z nejnovějších způsobů, jak vysvětlit schodovitý růst krystalů, aniž bychom museli zavádět představy o tvorbě zárodku na zaplněné atomové rovině. Představme si zvláštní druh schodu, zobrazený na obr. 7. Tento schod, který je určitým typem



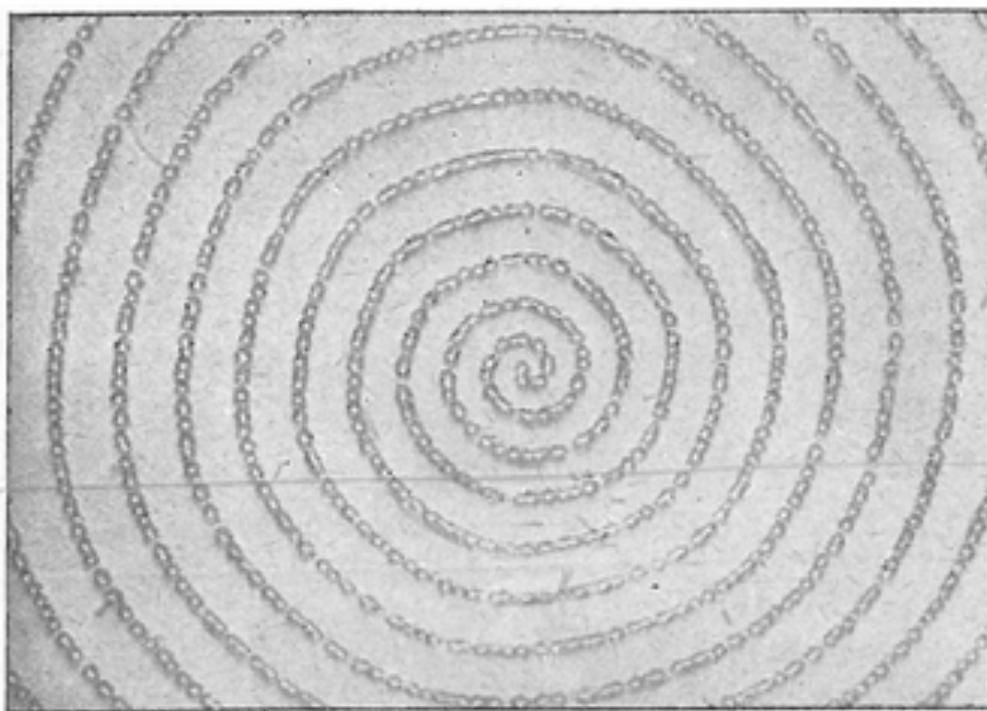
Obr. 7

pokřivení krystalové mřížky podél čáry *AB*, se nazývá *dislokace*. Snadno si představíme, že přisednutím částice do schodu *BC*, nikdy tento stupeň nezmizí a růst pokračuje stále dále. Tyto *šroubové* čili *spirálové* *růsty* se vyskytují při růstu krystalů z par, z roztoku i z taveniny. Na obr. 8 je zobrazena spirála na SiC. Spirálové růsty byly již pozorovány na velkém množství organických i anorganických látek.

#### 4. Růst kovových krystalů z taveniny.

Ukázali jsme si, jak vypadá mechanismus růstu ideálního krystalu. Jedním z činitelů, které ovlivňují růst reálného krystalu, je obsah nečistot. Ukážeme si to na růstu kovových krystalů z taveniny. Je naprosto zřejmé, že není možno použití úplně čistého kovu. Vždycky jsou v něm nějaké příměsi (jiné kovy), které nelze odstranit ani nejpečlivějším technologickým postupem. Použijeme na příklad zinek s 0,01 % příměsí. To znamená, že na  $10^{-2}$  atomů připadajících na jeden krychlový centimetr je v každém krychlovém centimetru kovu ještě  $10^{18}$  atomů příměsi. To je počet velmi značný.

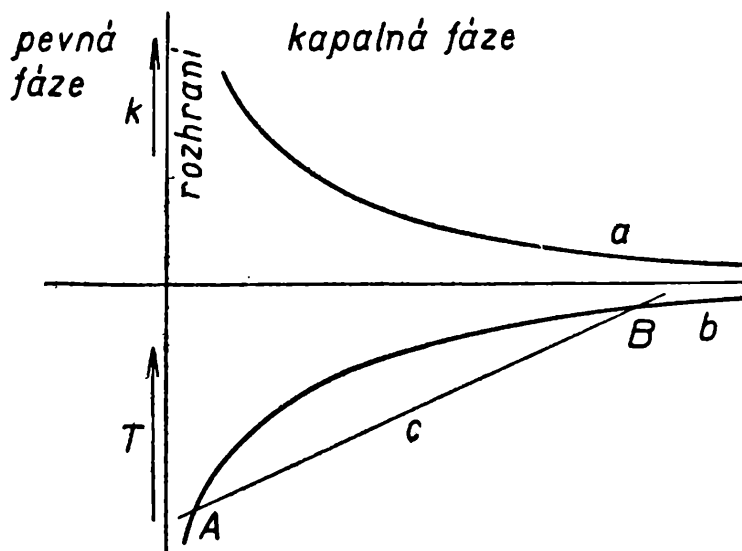
Představme si nyní rozhraní roztaveného a pevného kovu, který obsahuje určité procento příměsí. Bod tuhnutí kovu závisí na obsahu příměsí v kovu; čím je v něm příměsí více, tím je nižší teplota tuhnutí. Rychlost krystalisace kovů je tak velká, že příměsí nestačí difundovat rozhráním mezi pevnou a kapalnou fází kovu při jeho krystalisaci. Taková difuze je nutná k udržení stejné koncentrace jak v tavenině, tak i ve ztuhlém kovu. U rozhraní se tedy vytvoří přebytek přímíšenin, jinak řečeno: koncentrace příměsí  $k$  klesá se vzdáleností od rozhraní. Tuto závislost znázorňuje křivka  $a$  na obr. 9. Protože teplota tuhnutí je tím nižší, čím je koncentrace příměsí větší, měl by kov v různých vzdálenostech od rozhraní tuhnout rovněž při teplotách různých. Tuto závislost zachycuje křivka  $b$  na dolní části obr. 9;  $y$ -souřadnice každého bodu křivky  $b$  stanoví teplotu  $T$  tuhnutí kovu v určité vzdálenosti od rozhraní (tuto vzdálenost udává  $x$ -souřadnice). Předpokládejme nyní, že teplota  $T$  v blízkosti rozhraní roste lineárně se vzdáleností od rozhraní, jak znázorňuje přímkou  $c$  na obr. 9. Z obrázku je patrné, že ve vrstvě  $AB$  bude kapalný kov při nižší teplotě než je teplota, při níž by tuhl při uvažované koncentraci příměsí. U rozhraní tak vznikne vrstva přechlazeného kovu.



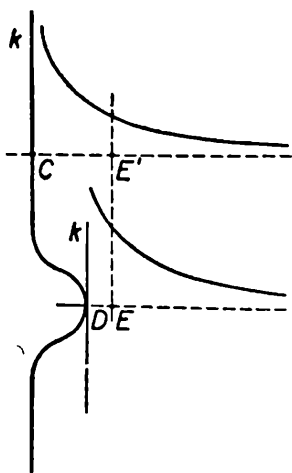
Obr. 8

Předpokládejme, že na rovném rozhraní obou fází jest hrbol. Situace je znázorněna na obr. 10 v průřezu. Jsou na něm křivky  $a$  z obr. 9 pro běžný bod rozhraní  $C$  a vrchol hrbolu  $D$ . Mezi body  $E$  a  $E'$  vznikne koncentrační spád, který má za následek odvod příměsí s hrbolu do stran. Na hrbolu se tím sníží obsah příměsí. Proto může hrbol ztuhnout dříve než tavenina, která jej obklopuje. Je to v důsledku zvýšení teploty tuhnutí, způsobeného snížením koncentrace příměsí v hrbolu. Představme si, což je zcela pochopitelné, že celé rostoucí rozhraní je nerovné

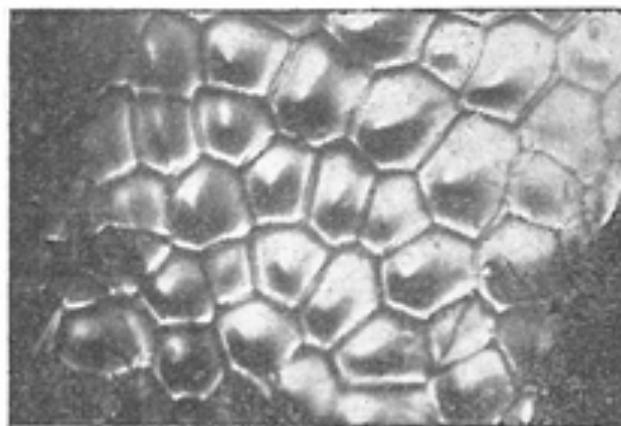
a že se všech hrboleů jsou přimíšeniny odváděny do stran. Nyní bude zcela pochopitelný obr. 11. Je na něm růstová struktura Zn, rostlého z taveniny podle představ právě zde naznačených. Na rozhraní mezi jednotlivými hrbolely jsou uloženy příměsi. Tato struktura, nazývaná *buněčná struktura*, byla pozorována při růstu kovových krystalů z taveniny.



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

Je tedy možno říci, že základním určujícím faktorem při růstu krystalu je přechlazení nebo přesycení. Přechlazením nebo přesycením je ovlivněna stabilita krystalizačního zárodka a jeho další růst. Ten probíhá ve formě lamelového ukládání částic na mříž. Celý růstový proces je velmi složitý. Ukázali jsme si na jednoduchém případě, jak je růst krystalu ovlivněn obsahem příměsí. Faktorů, které se objeví ve struktuře rostoucího krystalu, je však celá řada. Tento článek měl přispět k seznámení jen s nezákladnějšími pojmy a představami. K dalšímu podrobnému rozboru bylo by třeba hlubokého seznámení s fyzikální podstatou celého problému.



## Úlohy k řešení

Řešení dále uvedených úloh zašlete do 20. dubna t. r. na adresu Doc. Dr. M. Menšík, Praha 6, Zikova 4. Současně vám na ukázkou otiskujeme jeden příklad z fyziky s provedeným řešením.

5. Dokážte, že při  $a \neq b$ ,  $b \neq c$ ,  $c \neq a$  platí

$$\frac{(x-a)(y-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-b)(y-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-c)(y-c)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

Důkaz podajte dvojakým spôsobom: 1. podľa vety 1 (P. Bartoš: O lineárnych rovniciach s jednou neznámou, ktoré majú dva korene); 2. úpravami ľavej strany rovnosti.

*P. Bartoš*

6. Jsou dány rovnoběžky  $a$ ,  $b$ , ve vzniklém pásu bod  $C$  a na přímce  $a$  bod  $A$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která má střed  $S$  na přímce  $a$ , prochází bodem  $A$  a přímku  $b$  protíná v bodě  $B$  tak, aby spojnice  $BS$  procházela bodem  $C$ .

*O. Setzer*

\* \*  
\*

7. Starý stavitel stavěl věž lichoběžníkového půdorysu  $ABCD$  [ $AB = a = 8$  m,  $BC \perp AB$ ,  $AD = d = 6$  m,  $AD \perp AB$ ]. Stranu půdorysu  $BC = b$  měl tak zvolit, aby bylo možno provést t. zv. stanovou střechu ve tvaru jehlanu, jehož pobočné stěny svírají s vodorovnou rovinou týž úhel. Pamatoval si ze školy pouze základy planimetrie a deskriptivní geometrie, trigonometrii již zapomněl. Nedivte se, že byl smutný a dlouho po papíře psal a kreslil. Až náhle se uhodil do čela a - úlohu nejen snadno narýsoval několika přímkami, ale i bez tabulek vypočítal zbývající strany půdorysu a na staveništi jej doplnil.

*M. Menšík*

\* \*  
\*

8. Olověná střela letící vodorovně se nárazem na terč zastaví. Původní teplota střely byla  $t = 17$  °C, bod tání olova jest  $t_1 = 327$  °C, specifické teplo olova  $c = 0,03$  kcal  $\text{kg}^{-1}$   $\text{grad}^{-1}$ , skupenské teplo tání olova  $q = 6$  kcal  $\text{kg}^{-1}$ . Určete minimální rychlost, při níž by se střela úplně roztavila při nárazu na terč. Je nutno znát hmotu střely? To jest theorie, nastane tento případ ve skutečnosti?

*E. Říman*

9. V nádobě s terpentínovým olejem, jehož hustota při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  je  $s_1 = 0,87\text{ g cm}^{-3}$  a koeficient objemové roztažnosti je  $\beta_1 = 0,001\text{ grad}^{-1}$ , plove dřevěná kulička hustoty  $s_2 = 0,85\text{ g cm}^{-3}$  (při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), mající objemový koeficient roztažnosti  $\beta_2 = 2 \cdot 10^{-5}\text{ grad}^{-1}$ . Při které teplotě klesne kulička ke dnu?

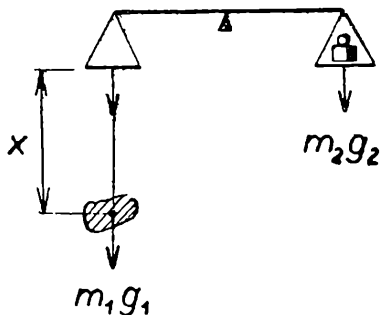
E. Říman

*Ukázka fyzikální úlohy s příslušným řešením.*

Teleso neznámej hmoty  $m_1$ , zavesené na tenkom drôte o dĺžke  $x$  pod ľavou miskou presných rovnoramenných váh, je vyvážené závažím o hmote  $m_2$  položeným na pravej miske. (K nemu je pridaný na pravú misku rovnako dlhý závesný drôt o tej istej hmote, ako je závesný drôt naľavo, takže hmoty závesných drôtov prakticky možno zanedbať.) Aká veľká je hmota  $m$  - Vypočítajte číselne pre  $x = 1,2\text{ m}$ ,  $m_2 = 0,8\text{ kg}$ . (Ináč povedané: Ide o to, či pri presnom vážení nesterjná výška zavesených predmetov má neaký zistiteľný vplyv na zmenu gravitačného urýchlenia. Trebárs zisťuje sa hustota pomocou Archimedovho zákona, kedy vážeme teleso ponorené vo vode.)

*Riešenie:* Váhy sú vraj presne rovnoramenné; keby teda obidve telesá boli v teže výške, potom by ozaj váha prvého bola  $m_1g$ , druhého  $m_2g$  a platilo by  $m_1g = m_2g$  čiže  $m_1 = m_2$ , ako sme čakali.

Ale v našom prípade je teleso hmoty  $m_2$  (vo vzdialenosti  $R$  od stredu Zeme) priťahované k zemi s menším gravitačným urýchlením  $g_2$  a teleso hmoty  $m_1$  (ktorého vzdialenosť od stredu Zeme je menšia totižto  $R - x$ ) je priťahované s väčším gravitačným urýchlením  $g_1$ , pričom platí  $m_1g_1 = m_2g_2$ , z čoho  $m_1 = m_2 \frac{g_2}{g_1}$ . (1)



Musíme vyrátať pomer  $\frac{g_2}{g_1}$ , čo najrýchlejšie urobíme pomocou vety: Gravitačné urýchlenie je nepriamo úmerné štvorcu vzdialenosti od stredu Zeme - ako plynie z gravitačného zákona; platí teda

$$g_2 : g_1 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(R - x)^2} \text{ z čoho}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{R-x}{R}\right)^2 = \left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 = 1 - \frac{2x}{R} + \frac{x^2}{R^2} \doteq 1 - \frac{2x}{R}, \quad (2)$$

kde sme zanedbali druhú mocninu výrazu  $\frac{x}{R}$ , pretože jeho hodnota je veľmi malá.

Máme teda po dosadení výrazu (2) do (1) obecný výsledok: Hľadaná hmota =  $m_1 = m_2 \left(1 - \frac{2x}{R}\right)$ , čo číselne dá

$$m_1 = 0,8 \text{ kg} \left(1 - \frac{2 \cdot 1,2 \text{ m}}{6,372 \cdot 10^7 \text{ m}}\right) = 0,8 (1 - 4 \cdot 10^{-7}) \text{ kg} = 0,799\,999\,7 \text{ kg}.$$

*Odpoveď:* Teleso zavesené na drôte dĺžky 1,2 m má hmotu o 4 desaťmilióntiny menšiu, t. j. 0,799 999 7 kg. Vidno, že pri presnom vážení treba vziať v úvahu aj zmenu gravitačného urýchlenia pri výškovom rozdieli rádu 1 m!

*E. Říman*



## *Jiní o nás*

Prof. MUDr. Jiří Štefl, Brno:

### **Lékařství a matematika**

(Dokončení)

Nechodte raději na medicínu, slečny, když neumíte počítat, mohly byste vyhubit vlastní rodinu a třeba byste ani nepřišly na to, kde je chyba.

Vědecká medicína pak jde v matematice dále. Statistický výpočet, signifikantní úchylka, významnost jsou termíny, které čteme ve vědeckých pracích všech národů, a není divu. Vždyť počítáme při vědeckých pokusech právě proto, že biologické projevy jsou přirozeně variabilní, vždycky s většími čísly, a ta pak musíme - jak se říká - statisticky hodnotit. A pak logaritmy, to je zase pojem, se kterým se pracuje pořád, celá řada projevů nejde v přírodě podle přímky, nebo podle jiné křivky, ale podle logaritmického projevu. Bělehrádek byl první, kdo zkoumal vliv teploty na živočišné projevy a dostával vždycky zajímavé prohnuté čáry, křivky dosti pravidelné. Srdeční tep se na příklad zrychloval při stoupající teplotě a zrychlení dalo se zobraziti křivkou. Tu Bělehrádek náhodně logaritmoval, a hle, vyšla mu přímka, a vyšla mu přímka skoro ve všech případech. Uzavíral z toho, že život ve veliké většině běží podle pravidel exponenciálního počtu.



Ale dost, abych vás neodpudivil. O fyzice nebudeme dnes vykládati, stačí říci, že z fyziky je v medicíně zapotřebí všechno, i zákony astrofyziky, proč a jak, to bychom si mohli říci, kdyby vás to ještě někdy zajímalo, ale z matematiky si můžeme říci, že vzdělaný lékař z ní upotřebí všechno, ne snad přímo k nějakému počítání, ale k správnému ocenění medicinských fakt. A tu přijdou na řadu i Lorenzovy transformace, které musíte znát, chcete-li pochopit poškození atomovou pumou, nebo pravidla Roentgenova záření, přijde na řadu i Einsteinova relativita a typická příkladná komůrka s badatelem, který letí prostorem, a který má v komůrce dvě dírky, jimiž proniká světelný paprsek, nám v medicíně neslouží ovšem k tomu, abychom vypočítali při zatmění slunce ohyb světla kolem obrovské hmoty této naší stálice, nýbrž k tomu, abychom se dovedli postavit na stanovisko nemocného, když nám líčí své obtíže, které my jsme nikdy neměli. Dobře matematicky vzdělaný lékař dovede přesně vycítit bolest nemocného, kterou sám třeba nikdy neměl, a dovede ji léčit, a jenom díky myšlení podloženému relativitou dovedou i muži býti dokonalými porodníky.

Všechno potřebujeme z matematiky, nemusíte to umět tak zrovna doslova, ale musíte umět tímto způsobem myslit. Snad se vám zdám neskromný, ale pohleďte na to takto: středoškolské vzdělání je předpoklad pro vzdělání vysoké školy, kde byste měli tento předmět nahrazen něčím jiným. Ale to nechceme. Jak jsem řekl, už proto ne, že jednou budete léčit své spoluobčany, a tu budete potřebovat ne snad nějaké vzorce, ale matematické myšlení, a k tomu se můžete prokousat jenom po hořkých stupíncích těch vzorců a úmorného počítání.<sup>6</sup>

Je mi líto, že jsem vám to nedovedl dost osladit.



## *Různé - recenze*

Dr Miroslav Menšík, Praha:

### **Co jest JČMF?**

Jednota československých matematiků a fysiků, založená r. 1862, je z nejstarších a z nejúspěšnějších našich vědeckých společností.

Po čtyři generace sloužila a slouží pokroku a těmto základním přírodním vědám. Dlouholetým obezřetným vedením řadou dobrovolných pracovníků získala nejen u nás, ale i za hranicemi mnohé uznání naší vědě i české a slovenské odborné a vědecké literatuře. Z řad Jednoty vzešli téměř všichni naši vědečtí pracovníci v matematice a fyzice. Z nepatrných a po generace strádaných příspěvků pečlivým hospodařením dosáhla i úspěchů hospodářských. Jednota se stala po-

stupem doby majitelkou knihkupectví, vydavatelství, výroby rýsovacích a fyzikálních pomůcek, dokonale vybavené odborné tiskárny, rozsáhlé matematicko-fyzikální knihovny a domu.

Po roce 1945 Jednota postupně předávala hospodářské zařízení socialistickému sektoru, až v roce 1951 věnovala i domy a knihovnu pro účely Československé akademie věd. Nyní je Jednota československých matematiků a fyziků vědeckou výběrovou a nestavovskou společností, přidruženou k Československé akademii věd. Sdružuje vědecké a odborné pracovníky z oboru matematiky, fyziky i příbuzných věd a tak napomáhá rozvoji vědy a jejímu spojení s praxí. Ve své činnosti se řídí Jednota směrnicemi Československé akademie věd.

Citujme přímo z jejího organizačního řádu, jaké má úkoly:

Podněcování a pěstování vědecké a odborné práce, zejména se zřetelem na potřeby výstavby socialismu.

Utuzování spolupráce vědy s praxí a přenášení nových poznatků vědy do širokých řad vědeckých a odborných pracovníků.

Podněcování a podporování vědecké a odborné publikační činnosti.

Podněcování a podporování snah o zvyšování odborné a ideologické úrovně vyučování.

Péče o zvyšování odborné a ideologické úrovně členů.

Propagace a popularisace výsledků pokrokové, hlavně sovětské vědy.

Proto bude Jednota pořádat nejen přednášky, diskuse, zájezdy, exkurse i konference, sjezdy a výstavy, ale i vydávat časopisy a jiné publikace. Samozřejmě bude spolupracovat s ministerstvem školství, vysokými školami, školami odbornými a všeobecně vzdělávacími i s kulturními institucemi. Jednota bude též školit členy, udělovat jim stipendia a podpory i zajišťovat v mezích možností použití sociálních a rekreačních zařízení.

Členové Jednoty jsou činní, mimořádní a čestní. Činným členem se může státi osvědčený vědecký nebo odborný pracovník v oborech matematiky, fyziky, astronomie, geofyziky, meteorologie, geodesie, fotogrammetrie, vědecké fotografie i v oborech příbuzných. Mimořádným členem se může stát student vysoké školy nebo žák vyšší odborné školy starší 17 let. Členský příspěvek je pro činného člena 20 Kčs, pro mimořádného 15 Kčs.

Členové JČMF mohou se účastnit vědeckých a kulturních podniků, jež Jednota pořádá, přednostně získávat za členské ceny časopisy a publikace, které vydává.

Člen může používat některých knihoven a též obdržet osvědčení o případné vědecké činnosti pro úřední potřebu.

Veškerou činnost Jednoty v době mezi celostátními sjezdy řídí Ústřední výbor, složený z předsedy (nyní ministr školství a kultury Dr František Kahuda), dvou místopředsedů (akademik Vladimír Kořínek a akademik Dionýs Ilkovič), jednatele, hospodáře a dalších devatenácti členů volených na dobu tří let. Výkonným orgánem ústředního výboru je předsednictvo, které tvoří předseda Jednoty, dva místopředsedové, jednatel, hospodář a další dva členové ústředního výboru.

Na Slovensku vyvíjí svoji činnost Jednota československých matematiků a fyziků v součinnosti se Slovenskou akademií věd. Slovenský výbor Jednoty v Bra-

tislavě má 12 členů a 6 náhradníků. Jeho předsednictvo se skládá z předsedy (akademik J. Hronec), místopředsedy, jednatele a dvou členů.

Pobočky Jednoty zřizuje ústřední výbor, na Slovensku na návrh slovenského výboru. Výbor každé pobočky je složen z předsedy, místopředsedy, jednatele a dalších dvou až tří členů.

K hospodářskému zajištění plnění úkolů Jednoty slouží nyní pouze členské příspěvky, zápisné, dotace ČSAV a subvence, případně jiná další vlastní činnost.

Z uvedeného stručného přehledu je zřejmé, jak široké pole zahrnuje činnost Jednoty. Je přáním nás všech, aby JČMF po několikaletém odmlčení opět nabyla své bývalé aktivity. Proto by nemělo být učitele matematiky, fyziky a příbuzných oborů nejen na osmileté, jedenáctileté i odborné škole, ale i na vysokých školách, který by nebyl členem Jednoty.

Hlavně zdůrazňujeme, že zvláště naše studující mládež najde v Jednotě československých matematiků a fyziků vhodné prostředí pro svůj odborný a později i vědecký růst, pokud má zájem o uvedené vědy. Tak mohou všichni přispět nejen k vzestupu našeho kulturního a vědeckého života, ale i technického pokroku našeho státu, neboť matematika s fyzikou jsou jeho nezbytným podkladem.

Členské přihlášky přijímá a veškeré dotazy zodpovídá JČMF, Praha 2, Žitná 25, telefon 22-73-88.

Josef Kotyk, Pardubice:

## Charles Auguste Coulomb

Sto padesát let, jež letos uplynulo od smrti francouzského fyzika Ch. A. Coulomba,<sup>1)</sup> je příležitostí, abychom vzpomněli obsáhlé vědecké činnosti a nehynoucích zásluh tohoto badatele.

Charles Auguste Coulomb se narodil roku 1736 v Angoulême. Dokončiv studia v Paříži, věnoval se zprvu vojenské službě. Po léta řídil jako inženýr a ženíjní důstojník na př. opevňovací práce na ostrově Martinique, v Cherbourgu a j. Teprve později se oddal činnosti badatelské. Ve Zprávách pařížské Akademie, proslulých Comptes Rendus, uveřejnil četná vědecká pojednání z rozmanitých oborů fyziky, zejména z nauky o magnetismu a elektřině. V uznání zásluh byl poctěn mnoha hodnostmi, na př. jmenován členem Akademie věd, gen. inspektorem pařížské university a pod. Zemřel v Paříži roku 1806<sup>2)</sup> jako badatel světového jména a uznávaný zakladatel experimentální fyziky ve Francii.

---

<sup>1)</sup> Poznámka o výslovnosti: Cou - čteme ve francouzštině Ku-. Koncová souhláska je nemá.

<sup>2)</sup> Učebnice fyziky pro 11. roč. uvádí u Coulombova portrétu omylem rok 1827, což zároveň opravují.

Zabývá se studiem úkazů *torse* (kroucení), dospěl Coulomb ke zkušenosti, že se tenká vlákna (na př. vlákna křemenná) i malou dvojicí sil značně stočí z původní polohy. Odvodiv zákony *torse*, ukázal, jak lze na nich založiti *váhy zv. torsní*, jimiž mohl měřiti i velmi malé dvojice sil. S jejich pomocí přistoupil Coulomb první k úloze vyšetřiti magnetické a elektrické jevy také kvantitativně a odvoditi zákony o vzájemném silovém působení magnetických pólů, resp. elektrických nábojů. Při svých měřeních používal s úspěchem zejména metody dynamické. Vahadlo, zavěšené na vlákně, nechal kolem vlákna jako osy rotace kývat a měřil dobu kyvu při různých momentech setrvačnosti; odtud vypočítal moment *torse*.

Výzkumné práce, jež Coulomb vykonal zejména v letech 1780 až 1785, jsou právem počítány k mistrovským kouskům experimentálního umění ve fyzice té doby. Studuje, jak závisí odpudivá síla mezi dvěma souhlasnými elektrickými náboji na vzdálenosti, potvrdil četnými měřeními pomocí svých torsních vah, že její velikosti ubývá s dvojnásobkem vzdálenosti. Tomuto vztahu říkáme, jak známo, *Coulombův zákon elektrostatiky*. V zájmu pravdy je však třeba dodat, že sice také již Priestley roku 1767 a nezávisle na něm i Cavendish roku 1771 v podstatě k němu dospěli. Zásluhy Coulombovy, zejména pak věhlas jeho měřicích method, se tím ovšem nesnižují. Coulombovi předchůdci odvodili experimentálně sice mnoho faktů, avšak teprve bystrý Coulomb dal jim pohotově jednotící hledisko. Zasluguje mimo to pozornosti, že také síla, jež působí mezi dvěma bodovými póly magnetickými, splňuje Coulombovu zákonitost. Závislost této síly na vzdálenosti studoval Coulomb s pečlivostí, která by mohla být klasickým příkladem jedině správného vědeckého postupu ve fyzice. Určiv velikost síly přímým měřením pomocí svých torsních vah, zkontroloval výsledek, k němuž dospěl, další methodou. Z pozorování odvodil, jak se mění doba kyvu malé magnetky, jestliže k ní přibližujeme - a to do různých vzdáleností - tíž pól dlouhého magnetu. Také z tohoto nepřímého postupu shledal Coulomb, že *síla zmenšuje svou velikost úměrně s dvojnásobkem rostoucí vzdálenosti*.

Zákon Coulombův zní proto *v elektrostatice* i *v magnetostatice* obecně stejně. Označíme-li uvažovaná elektrická resp. magnetická množství  $m_1$ ,  $m_2$ , platí pro velikost síly  $F$ , kterou na sebe navzájem ze vzdálenosti  $r$  působí, vztah  $F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ . Jeho *formální shoda s Newtonovým zákonem gravitačním*, v době té již sto let známým, zvyšovala jen důležitost Coulombova objevu. Ta okolnost, že hodnota konstanty  $k$  je na rozdíl od zákona gravitačního podmíněna také volbou jednotky pro elektrické, resp. magnetické množství, skýtala vědě možnost dále budovati absolutní soustavu fyzikálních jednotek. Zavedení absolutní jednotky elektrického, resp. magnetického množství na základě Coulombova zákona je pak zvláště jednoduché. V technické praxi se používá pro množství elektriny mezinárodní jednotky, stanovené usnesením el. kongresu v Londýně roku 1908 a nazvané k počtě Coulombově právě jeho jménem [*internacionální coulomb*<sup>3)</sup>].

<sup>3)</sup> O jeho velmi přesné realizaci vykládá učebnice fyziky pro 11. roč., čl. 78, a to na základě I. Faradayova zákona o elektrolyse. Dodávám, že i přístroje, jimiž měříme intenzitu proudu pomocí jeho účinků chemických, nazýváme rovněž k počtě Coulombově *coulombmetry*. Užívá se na př. coulombmetrů na vodu, měď, stříbro, olovo a j.

Položiv základy matematickému zpracování elektrostatiky a magnetostatiky, zasloužil se Coulomb o další velmi rychlý a netušený vývoj těchto oborů. Byl však činný i v jiných oborech fyziky. V jedné ze svých posledních prací vyšetřoval na př. viskozitu (vnitřní tření) kapalin. Významné jsou i jeho práce o pasivních odporech při pohybu; známé zákony vlečného (neboli klouzavého) tření jsou také dílem Coulombovým.

Na sklonku svého plodného života mohl se Coulomb ještě dožít plného vítěství svých vynikajících metod měřících. Veliké potíže činilo vědě na př. experimentální určení velikosti gravitační konstanty, nepatrné síly, kterou se přitahují dvě hmoty rovné 1 g ze vzdálenosti 1 cm. Po prvé ji zjistil připomenutý již anglický fyzik Cavendish. Stalo se to roku 1798 pomocí - *torsních vah Coulombových*. Jimi naměřil  $6,67 \cdot 10^{-8}$  dynu.<sup>4)</sup> Zprávy o tom, jak si jeho pracovní metody vítězně razí cestu do světa, vnesly stárnoucímu Coulombovi mnoho jasu do podzímku jeho života.

### Poznámky.

1. Je zajímavé, že síly dané týmž vztahem  $F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ , t. j. síly vzájemného působení mezi elektrickými náboji částic a gravitační síly mezi jejich hodnotami, jsou spoluúčastny na struktuře atomu. Síly Coulombovy jsou však nesrovnatelně větší než síly Newtonovy. Přesvědčte se o tom na př. v případě, že na sebe působí dva elektromy ze vzdálenosti 1 angströmu =  $10^{-8}$  cm! (Hmoty elektronů =  $9,1 \cdot 10^{-28}$  g, jeho náboj =  $-4,8 \cdot 10^{-10}$  abs. jedn., konstanta gravitačního zákona =  $6,66 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>3</sup>/g . sec<sup>2</sup>, konstanta Coulombova zákona pro vacuum = 1.)

2. V elektrostatice nabyla významu *věta Coulombova*, jež zní: Elektrické posunutí, dané součinem dielektrické konstanty  $\epsilon$  a vektoru intensity el. pole  $E$ , je rovno hustotě náboje  $\sigma$  na povrchu vodiče, násobené  $4\pi$ . Je-li náboj rozestřen po povrchu tělesa rovnoměrně, rozumíme jeho plošnou hustotou  $\sigma$  množství elektřiny, jež sídlí na 1 cm<sup>2</sup> povrchu vodiče. Z rovnice  $\epsilon \cdot E = 4\pi\sigma$  lze pak určití intensitu elektrického pole v bodech rozhraní vodiče a dielektrika. Učiňte tak pro případ kulového tvaru vodiče!

3. Některé učebnice (na př. Nachtkalova Technická fyzika, čl. 214) užívají místo *coulombmetr* stručnějšího *coulometr*. Snaha zkrátit slovo skončila však nešťastně; vypuštěním pouhých dvou hlásek vznikla zkomolenina, jež jméno Coulombovo hanobí. Neužívejme jí!

---

<sup>4)</sup> Delikátnost problému vystoupí nápadněji, uvědomíme-li si, že dyn je přibližně jen o 2 % větší než váha miligramu.

Výsledek Cavendishův mohl ověřiti teprve roku 1880 Jolly. O jeho metodě poučí čtenáře učebnice fyziky pro 9. roč., čl. 124.

## Leonhard Euler — nejslavnější petrohradský akademik

Když roku 1689 se ujal sám vlády v Rusku car Petr I., byl to počátek nového období dějin a rozvoje ruského státu. Tento panovník bývá historiky označován často jménem Petr Veliký, a to nejen pro obrovitou postavu siláka, který prý holýma rukama dovedl ohýbati podkovy, ale i pro organizační schopnosti a státnickou moudrost, jimiž dovedl podstatně změnit vnitřní poměry i mezinárodní postavení Ruska do té doby ještě zaostalého. Již ve svém mládí se živě zajímal o stavbu lodí, mořeplavectví a problémy vojenské techniky. Jeho zvědavost a vědyčtivost ho neopustila po celý život. Stále využíval každé příležitosti k tomu, aby se naučil něčemu novému.

V letech 1697—1698 vypravil do západní Evropy velké poselstvo o 270 členech, které vedl jeho oblíbený rádce a spolupracovník švýcarského původu František Jakub Lefort. Petr se sám zúčastnil této cesty jako prostý člen poselstva s krycím jménem Petr Michajlov a navštívil tak Braniborsko, Hanoversko, Holandsko, Anglii a Rakousko. Byl též v Praze a v Karlových Varech. Tato cesta, při níž Petr navštěvoval průmyslové závody všeho druhu, loděnice, v nichž sám po několik měsíců pracoval jako prostý tesař, nemocnice, musea a jiné vědecké instituce, měla veliký význam pro další vývoj Ruska, neboť Petr se na ní přesvědčil o nutnosti mnohých reforem hospodářských a společenských poměrů v Rusku.

Mimo diplomatické úkoly mělo toto poselstvo do západní Evropy za úkol získati pro práci v Rusku odborníky různých oborů, zejména v technických vědách. Využívaje jejich pomoci, prováděl Petr I. v Rusku reformy vojenské, hospodářské, administrativní i kulturní. Chápal správně význam moře pro rozvoj obchodních a kulturních styků Ruska s cizinou a proto se snažil zajistit ruskému státu přístup ke všem mořím, což se mu podařilo. V květnu roku 1703 založil na jednom z ostrovů tvořených řekou Něvou pevnost Petropavlovsk a na podzim téhož roku při jejím ústí do Finského zálivu námořní pevnost Kronšlot, nynější Kronštadt. Kolem petropavlovské pevnosti budoval nové město, které se mělo státi hlavním městem Ruska místo Moskvy. Toto město, Petrem plánovitě budované za spolupráce s technickými odborníky, vyrůstalo tak rychle, že na počátku dvacátých let 18. století mělo již asi sedmdesát tisíc obyvatel, t. j. asi dvakrát tolik jako Praha v téže době.

Petrovými spolupracovníky byli nejen cizinci, nýbrž i lidé domácího původu, které si dovedl vybírat z každého prostředí. Významným pokrokovým rysem tohoto panovníka bylo jeho stálé úsilí o demokratisaci ruského společenského života. Lidé schopní a ke spolupráci ochotní měli otevřenou cestu i k nejvyšším úřadům ve státě, ať byli jakéhokoli sociálního původu. Z toho důvodu prováděl Petr i školské reformy a zřizoval odborné školy pro výchovu pracovníků v technické praxi. Roku 1701 zřídil v Moskvě odbornou školu pro práce v matematice

a navigaci. Tato škola byla roku 1715 přeložena do Petrohradu a organisována jako námořní akademie.

Dne 24. ledna 1724 vydal Petr I. dekret, podle něhož měla býti v Petrohradě zřízena akademie věd a k ní měla býti přidružena universita a gymnasium. Provedení tohoto rozhodnutí se Petr Veliký již nedočkal, neboť roku 1725 zemřel. Jeho plán však provedla jeho nástupkyně Kateřina I., která vládla v Rusku dva roky po smrti Petrově (1725—1727). Ta pozvala do Ruska mimo jiné pracovníky též Leonharda Eulera, kterého dnes pokládáme za největšího matematika 18. století.

Dne 15. dubna 1957 bude tomu právě 250 let, kdy se narodil tento všestranně vzdělaný přírodovědec a geniální polytechnik. Toho dne budou jeho významu vzpomínati vědečtí pracovníci celého světa a jeho práci pro rozvoj matematiky budou si připomínati zejména sovětští lidé, neboť Euler strávil největší část svého života v jejich vlasti a věnoval Rusku mnoho svých sil a schopností.

Švýcarské město Basilej, ležící na březích řeky Rýna, tam, kde řeka opouští švýcarskou půdu, bylo v té době významným střediskem nejen obchodním a průmyslovým, nýbrž i uměleckým a vědeckým. Na basilejské universitě, založené roku 1459, působila v 17. a 18. století řada mužů, kteří svými pracemi v oboru matematiky a přírodních věd získali si světovou pověst. K těmto mužům patří zejména četní příslušníci rodiny Bernoulliů. Mikuláš Bernoulli (starý způsob psaní je Bernouilli a proto správná výslovnost toho jména je „bernúji“), který opustil Holandsko v době vlády vévody z Alby a přesídlil nejprve do Frankfurtu n. M., pak do Basileje a tam se stal významným činitelem společenského života. Dva z jeho synů, Jakub Bernoulli (1654—1715) a Jan Bernoulli (1667—1748), patřili k nejvýznamnějším matematikům té doby. S jejich jmény a s jmény jejich potomků se při hlubším studiu matematiky a přírodních věd setkáte velmi často.

Mezi žáky Jakuba Bernoulli patřil Pavel Euler, pozdější theolog a od roku 1708 evangelický kazatel v malém městečku Rūhen (asi deset kilometrů severovýchodně od Basileje). Ještě za jeho pobytu v Basileji narodil se mu tam dne 15. dubna 1707 syn Leonhard, který své dětství strávil v Rūhen. Otec byl jeho jediným učitelem. Poněvadž otec miloval matematiku a velmi si jí vážil, zejména pro její výchovný a vzdělávací význam, není divu, že dovedl zájem o matematiku vzbuditi i u svého syna. Když pak Leonhard byl poslán do Basileje, aby tam studoval na filosofické přípravce při universitě, poznal vynikajícího matematika Jana Bernoulli a velmi se spřátelil zejména se dvěma z jeho synů Mikulášem (1695—1726) a Danielem (1700—1782). Roku 1723 dosáhl Leonhard Euler hodnosti magistra, která jej opravňovala k vyučování humanistickým předmětům a filosofii. Toho roku se přátelé rozešli, neboť Mikuláš se stal profesorem právnické fakulty v Bernu a Daniel odešel do Italie, aby se v Benátkách zdokonalil v praktické medicíně. Euler pak vstoupil na přání svého otce na theologickou fakultu, studoval však dále horlivě matematiku pod vedením Jana Bernoulli. Otec brzy však svolil k tomu, aby se Leonhard věnoval výhradně studiu matematiky.

Roku 1725 odešli jeho přátelé Mikuláš a Daniel do Petrohradu, kam byli pozváni jako profesoři na zřizovanou akademii věd. Oba bratři si přáli, aby i Leonhard Euler odešel za nimi do Petrohradu, jakmile se k tomu naskytne příležitost.

Poněvadž Eulerovy snahy o získání profesury fyziky v Basileji nebyly úspěšné (byl považován za příliš mladého pro tento úřad), souhlasil s návrhem svých přátel a začal studoval horlivě anatomii a fyziologii. Jeho přátelé se domnívali, že by mohl býti povolán do Petrohradu nejspíše jako pracovník v těchto vědách. Euler se zajímal dále nejen o matematiku, ale i o problémy technické. Jako devatenáctiletý jinoch vypracoval vědecké pojednání o nejlepší rozmístění stěžňů na plachetnicích, jímž se zúčastnil soutěže vypsané pařížskou akademií na toto thema. Francouzská akademie poctila Eulera za tuto práci přiznáním t. zv. „akcessit“, t. j. jakési druhé ceny, která při takových příležitostech bývala udělována. Roku 1727 odjel Euler do Petrohradu, kam přijel právě v den smrti Kateřiny I. Nestihl zde také již ani Mikuláše Bernoulli, neboť roku 1726 v Petrohradě zemřel. Euler byl ustanoven adjunktem matematiky při akademii, poněvadž již nebylo zatím třeba pracovníka v anatomii a fyziologii. Za zmatených poměrů, které nastaly po smrti Kateřiny I., stalo se postavení akademie a tím i Eulerovo poněkud nejisté a tak Euler vážně pomýšlel na povolání námořního důstojníka.

Brzy po příchodu prvních akademiků do Petrohradu začala akademie vydávat první ruský vědecký časopis *Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae* (Zápisky carské petrohradské akademie věd). Od druhého svazku počínaje, vycházely tam pravidelně po mnoho desetiletí vědecké práce Eulerovy i jiných vědeckých pracovníků zvučných jmen. Proto tento vědecký časopis se stal jedním z nejvýznamnějších vědeckých časopisů evropských. Roku 1730 byl Euler jmenován profesorem fyziky a roku 1733 se stal profesorem matematiky, když se Daniel Bernoulli vrátil do Basileje, aby tam přijal místo profesora botaniky a anatomie. Do té doby vyšlo již tiskem aspoň 24 vědeckých pojednání od Eulera.

(Pokračování)

## Recenze

Knižnici *Populární přednášky o matematice* vydává Státní nakladatelství technické literatury, Praha II, Spálená 51. Tyto drobné knížky, jichž cena málo přesahuje 1 Kčs, jsou určeny jak žákům a učitelům na jedenáctiletkách a na odborných školách, tak i širokému okruhu zájemců o matematiku. Škoda, že jsou uveřejňovány pouze překlady.

Knížka *I. R. Šafareviče: O řešení rovnic vyšších stupňů* (Sturmova metoda) je svazkem č. 13 této knižnice, který vyšel koncem roku 1955. Přeložil ing. M. Ullrich, odborně upravil doc. Dr. K. Hruša. Cena 1,20 Kčs, str. 35, obr. 10.

Všichni jste se již učili nebo se učíte řešit rovnice prvního a druhého stupně. Mnozí z vás se jistě dostali při řešení různých úkolů i na rovnice vyšších stupňů. A právě těm doporučujeme tuto knížku. Jsou zde úvahy pro vyhledávání reálných kořenů rovnice jakéhokoliv stupně a číselný výpočet je pak ukázán na řešení rovnice kubické čili třetího stupně. Nebojte se knížku přečíst a prostudovat; nevyžaduje to větších znalostí, než má žák 10. třídy jedenáctiletky nebo žák druhého ročníku odborné školy.

Dr. M. M.



Univ. prof. RNDr *Ladislav Zachoval: Fyzikální základy fotografie*, vydalo nakladatelství ČSAV v Praze 1956, 115 stran formátu A5, 21 obrázků, 9 tabulek, cena váz. výtisku 9, — Kčs.

Dílo našeho předního pracovníka v oboru vědecké fotografie, je určeno čtenářům, kteří hledají poučení o základech fyziky fotografického procesu.

Obsah knihy je rozvržen na dvanáct kapitol. V první kapitole podává autor stručný přehledný výklad o záření, jeho povaze a vlastnostech, jichž se využívá při fotografickém procesu, o absorpci světla a barvách těles. V druhé kapitole jsou uvedeny fotometrické jednotky a jsou připomenuty některé způsoby zobrazování těles na citlivou vrstvu (problémy optického zobrazování nejsou v knížce rozbírány, autor v předmluvě odkazuje na českou literaturu z oboru fotografické optiky). Třetí kapitola je věnována zákonitostem fotochemických dějů. Čtvrtá latentnímu obrazu, to jest změnám, které vyvolá osvit v citlivé vrstvě. Pátá kapitola pojednává o základních sensitometrických pojmech (sensitometrie = měření citlivosti), charakteristické křivce citlivé vrstvy a o zákonech zčernání. V šesté kapitole jest zpracováno vyvolávání - fyzikální a chemické - ustalování a praní. Sensitometrické hodnocení negativu je vyloženo v kapitole sedmé. Kratší kapitola osmá je věnována metodám zeslabení a zesílení negativu. V kapitole deváté je ukázáno na citlivost různých druhů citlivých vrstev pro různé barvy a funkci korekčních a ochranných filtrů. Kapitola desátá a jedenáctá jsou věnovány pozitivnímu a negativnímu procesu a materiálům užívaným v černobílé fotografii. Poslední kapitola popisuje zásady moderní barevné fotografie.

Knížka má sloužit jako úvodní vysokoškolská učebnice. Jasným slohem a způsobem podání látky je srozumitelná i žákům nejvyšších ročníků jedenáctiletky.

Doporučujeme ji proto těm, kteří se zajímají o fotografii a touží po hlubším poznání podstaty fotografického děje. Knížka by měla být i v knihovničkách zájmových fotoamatérských kroužků.

Libor Pátý



*Redakce hovoří se čtenáři*

## **Sdělení redakce**

Prosíme všechny zájemce o *Rozhledy matematicko-fyzikální*, aby objednávky časopisu prováděli jednotlivě nebo hromadně za celou školu pouze u Poštovní novinové služby, t. j. na nejbližším poštovním úřadě. Pokud jsme již obdrželi písemné objednávky některých předplatitelů, postoupili jsme je Poštovní novinové službě. Tam se musí laskavě obrátit i ti, kteří budou mít přání a stížnosti týkající se doručování jednotlivých čísel.

★ ★ ★

Žádáme všechny členy JČMF, aby nás laskavě činně podpořili v naší práci na znovuvybudování tohoto časopisu, jehož cílem je pomáhat škole, studentům i jiným zájemcům při studiu matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Je zejména prosíme o individuální osobní propagační práci mezi mládeží, která nejen že většinou není těmto oborům nakloněna, ale dokonce volivá si svá budoucí zaměstnání i přípravu k nim tak, aby se co nejvíce vyhnula matematice. Tím vznikají zbytečné národohospodářské ztráty odvedením zájmu kvalitních mladých jedinců od povolání technických směrů vyžadujících právě znalost uvedených disciplin. Naší stálou snahou bude odstranit strach z matematiky zaviněný někdy nevhodnou učebnicí, jindy chybným pojetím podávané látky bez ohledu na věk studenta nebo i výběrem látky.

V těchto místech budeme otiskovat krátká oznámení o činnosti místních poboček JČMF (konání přednášek a pod.). Jsme ochotni uveřejnit i sdělení jiných veřejných institucí, pokud se týkají matematiky, deskriptivní geometrie nebo fyziky a která by prospěla našim čtenářům. Redakční uzávěrka je šest týdnů před vyjitím každého čísla.

Přejeme si navázat písemný nebo osobní styk našich čtenářů s redakcí, abychom znali jejich přání a jejich nesnáze. Proto je žádáme, aby nám napsali svá mínění o článcích, které uveřejňujeme, o tom, čemu nerozuměli a o čem by rádi více věděli. Každý jejich námět uvažíme a v této rubrice na něj odpovíme. Pokud naše možnosti dovolí, přijmeme a provedeme úpravu podle podnětů směřujících k zlepšení úrovně a posláni Rozhledů.

Konečně autory-příspěvatele znovu upozorňujeme, aby dodržovali pokyny, jež jsme dali o vnější úpravě rukopisů. Žádáme je, aby obrázky nebyly širší než 232 mm a vyšší než 340 mm, ježto jsou dvakrát zmenšovány. Neužívejte šířek obrázků pod 60 mm ani od 116 mm do 160 mm!

Urgování rychlého otištění zasláných příspěvků je bezúčelné. Každý došlý příspěvek ihned prohlédne vedoucí redaktor a přidělí jej příslušnému odborníkovi k posouzení. Jsou-li úpravy malé, provede je sám, vyžadují-li úpravy zásah do autorova pojetí, je článek autorovi vrácen k doplnění, úpravě nebo přepracování. Nehodící se příspěvky vracíme s udáním důvodu. To vše přirozeně vyžaduje hodně času, někdy dva měsíce i déle.

Žádáme autory, aby články - vzhledem k rozměru časopisu i s ohledem na čtenáře - psali co nejkratší, nejvíce na šest strojem psaných stránek. Příspěvků, zvláště z matematiky, máme již na několik čísel dopředu. Ihned bychom otiskli krátké informativní články z fyziky, zvláště o jejím technickém užití. Uvítáme též zajímavé příklady z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky.

Příspěvky nemůžeme otiskovat s ohledem na jejich časové pořadí, v němž nám byly zaslány. Rozhodne zde nejen obsah, náročnost na čtenáře, ale často i velikost článku a jakost obrázků. Tak na př. v matematice jsme zatím odsunuli všechny příspěvky užívající rovnic vyšších stupňů, analytické geometrie, křivek vzniklých pohybem a pod., pokud nedáme - a to ještě letos - čtenářům stručný elementární podklad, aby i tyto články mohli sledovat.

★ ★ ★

Řešitele úloh žádáme, aby v příkladě č. 1 v 1. č. Rozhledů si laskavě opravili znaménko - před třetím zlomkem na +. Lhůta k zaslání řešení se prodlužuje o jeden měsíc.

## Založení pobočky JČMF v Praze.

Dne 14. prosince 1956 byla založena v Praze pobočka Jednoty československých matematiků a fyziků. Její činnost se bude vztahovat jen na Prahu. Předsedou pobočky byl zvolen Ing. Dr J. B. Slavík, profesor ČVUT v Praze a jednatelem Dr Jaromír Linhart, odborný asistent VŠP v Praze.

Základem činnosti pobočky JČMF jsou pravidelné přednášky, jimiž se má zvyšovat odborná vzdělanost v matematice a ve fyzice pracovníků na různých pracovištích. V přednáškách se bude pobočka zabývat i problematikou matematiky a fyziky všeobecně vzdělávacích a odborných škol, zvláště pak rozvine širokou diskusi o nových učebních osnovách matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky i o nových učebnicích těchto předmětů. Trvalým úkolem pobočky JČMF je, aby kolem sebe sdružovala mladé vědecké pracovníky a všestranně jim pomáhala.

V matematických přednáškách, pořádaných matematickou komisí pobočky, budou záměrně sledovány problémy týkající se matematiky všech stupňů a druhů škol. Občas budou zařazovány odborné referáty a přednášky o nejnovějších výsledcích matematického bádání a o stavu řešení význačných matematických problémů, o matematických sjezdech a kongresech, o nových matematických knihách a učebnicích i o úspěších matematiky v příbuzných oborech.

Komise fyziky při pobočce hodlá vyvíjet činnost v několika směrech. Předně rozvine cyklus přednášek o tom, co je nového ve fyzice. Další cyklus bude obsahovat přednášky odborníků o výsledcích jejich bádání. Rovněž budou pořádaný přednášky zabývající se problémy vyučování fyzice na různých druzích a stupních škol. Komise připravuje i přednášky určené zvláště pro žáky všeobecně vzdělávacích a odborných škol.

Obec pražských matematiků a fyziků získává takto ustavením pražské pobočky JČMF základnu, na níž se může bohatě rozvíjet pěstování matematiky a fyziky.

Uvítáme podněty a náměty z řad zájemců o matematiku a fyziku i od žáků našich všeobecně vzdělávacích a odborných škol. Zprávy lze zasílat jednatelem pobočky Dr Jaromíru Linhartovi na adresu: Vysoká škola pedagogická, katedra fyziky, Praha II, Ulice M. Rettigové 4.

Pro kraj KNV Praha-venkov byla založena pobočka JČMF.

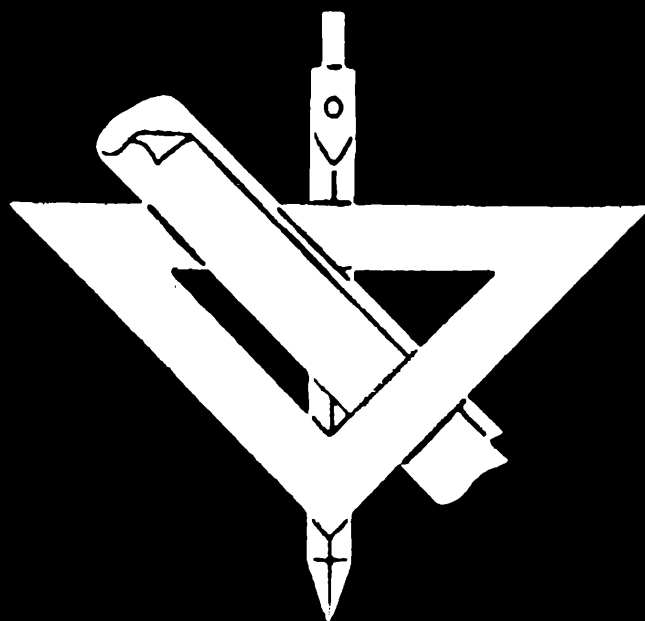
Ustavující schůze této pobočky se konala 9. ledna 1957 v zasedací síni KNV v Praze na Smíchově, Zborovská 11. Předsedal Jar. Koreš. Za presidium Ústředního výboru JČMF se dostavili akademik V. Kořínek, prof. Dr F. Vyčichlo a M. Jelínek z MŠK.

Předsedající seznámil přítomné s úkoly JČMF a zdůraznil, že je nutno při organizaci pobočky přihlídnout k místnímu rozložení měst v pražském okolí a k možnostem komunikačního spojení. Proto bude vytvořeno pět středisek, aby se členové mohli zúčastňovat plánovaných přednášek, jež budou konány v okresních městech. Přednášky jsou určeny nejen pro studující a učitele, ale i pro technické pracovníky a ostatní zájemce.

Do čela výboru byli zvoleni prof. Dr A. Urban a V. Forejt.

Závěrem vyslechli přítomní přednášku Dr J. Pernegera o kosmickém záření.

Adresa pro korespondenci pobočky JČMF pro KNV Praha-venkov je: J. Koreš, Říčany u Prahy, Světická 1292 nebo J. Bureš, Rakovník, J. V. Stalina 152.



# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 3

Toto číslo vyšlo 31. března 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

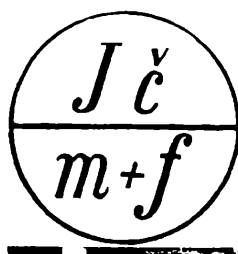
Výkonný redaktor *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSŠ, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, KU, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## O B S A H

J. Marek: Obecné pravidlo dělitelnosti pro dělitele, jejichž poslední cifra jest 1, 3, 7 nebo 9	97
V. Metelka: Několik poznámek k řešení algebraických rovnic o jedné neznámé (Dokončení)	106
Doc. J. Vyšín: Povídka o geometrické úloze	111
Dr. S. Kubálová: Konstrukce s nepřístupnými prvky	119
Dr. V. Havel: O pravidelném čtyřstěnu	128
V. Müller: Thermoanemometr	130
L. Janko: O ultrazvukově optickém zobrazování předmětů reliefním obrazem	135
Úlohy k řešení	139
F. Veselý: Leonhard Euler - nejslavnější petrohradský akademik (Dokončení)	140
J. Sedláček: O jedné zajímavé hře	143
Sdělení redakce	144
Zasedání Ústředního výboru JČMF	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 17058

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.



## Matematika

Jiří Marek, Rokycany:

### Obecné pravidlo dělitelnosti pro dělitele, jejichž poslední cifra jest 1, 3, 7 nebo 9

1. Úvod. Známá pravidla dělitelnosti čísel nejsou jednotná. Pro dělitelnost třemi a devíti máme zcela jiné pravidlo než pro dělitelnost jedenácti, pro dělitelnost sedmi nebo třinácti jsou uváděna jiná složitá pravidla, jež snadno zapomeneme atd. Kromě toho mohou být tato různá pravidla stanovena jen pro malý počet dělitelů. V tomto článku bude proto odvozeno pravidlo, které pokud vím, nebylo ještě nikde tímto způsobem řešeno. Toto obecné pravidlo dělitelnosti platí pro všechny dělitele (prvočísla i čísla složená), s výjimkou čísel 2, 5 a čísel, v nichž jsou tato prvočísla obsažena. To však není na závadu, protože dělitelnost dvěma a pěti je patrna na první pohled, podobně jako dělitelnost čtyřmi, osmi, dvaceti pěti a pod. Máme-li na př. rozhodnout, je-li číslo dělitelno padesáti čtyřmi, přesvědčíme se v první řadě, je-li číslo sudé; je-li tomu tak, zkusíme dále, zda je dělitelno dvaceti sedmi. Obdobně postupujeme v ostatních případech.

Pravidlo, které bude později dokázáno, zní:

*Pro každého dělitele  $a$  - kromě svrchu uvedených násobků 2, 5 - lze nalézt činitele  $n_a$  tak, že platí: je-li v určitém čísle daný dělitel a obsažen beze zbytku, je obsažen beze zbytku i v čísle, jež vznikne tím, že od původního čísla odtrhneme poslední číslici, násobíme ji činitelem  $n_a$  a tento součin přičteme k číslu zbavenému poslední cifry.*

Tím dostaneme podstatně nižší číslo, jež je daným dělitelem rovněž dělitelno. Můžeme tedy tento postup opakovat, a to tak dlouho, až výsledné číslo je zmenšeno natolik, že je dělitelnost na první pohled zřejmá (případně, nebylo-li původní číslo dělitelno, je to rovněž zjevně patrné).

Ještě než přistoupíme k důkazu, uvedeme pro objasnění návodný příklad. Máme rozhodnout, zda je číslo 3 692 dělitelno třinácti. Pro  $a = 13$  je činitel  $n_{13} = 4$  (jak poznáme z dalšího). Poslední cifru 2 násobíme čtyřmi ( $2 \cdot 4 = 8$ ), což přičteno k 369 dává 377. Postupujeme obdobně dále:  $7 \cdot 4 = 28$ ;  $37 + 28 = 65$ . Další krok:  $5 \cdot 4 = 20$ ;  $6 + 20 = 26$ , což je číslo, jak na první pohled poznáme, dělitelné třinácti. Je tedy i 3 692 dělitelno 13. Celý postup můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{r}
 3692 \\
 \underline{8} \\
 377 \\
 \underline{28} \\
 65 \\
 \underline{20} \\
 26 .
 \end{array}
 \quad n_{13} = 4$$

Vyjde-li při tomto postupu číslo, o němž na první pohled můžeme rozhodnout že není dělitelno daným dělitelem, pak ani původní číslo jím není dělitelno. Na př.

$$\begin{array}{r}
 8011 \\
 \underline{4} \\
 805 \\
 \underline{20} \\
 100 \\
 \underline{0} \\
 10
 \end{array}
 \quad n_{13} = 4$$

8 011 není dělitelno třinácti.

**2. Dělitelé, jejichž poslední cifra je devět.** Provedeme důkaz tohoto pravidla dělitelnosti nejprve pro dělitele zakončené devítkou. Napišme celé číslo  $P$  ve tvaru

$$P = 10p + q ,$$

kde  $p$ ,  $q$  jsou čísla celá kladná, a mimo to číslo  $q$  je jednociferné. Na příklad  $P = 9557 = 10 \cdot 955 + 7$ . Předpokládejme, že číslo  $P$  je dělitelno některým z čísel  $a$ , utvořených tak, že jejich poslední číslice je devět, tedy číslem tvaru  $a = 10A + 9$  ( $A = 0, 1, 2, 3 \dots$ ). Je tedy:

$$10p + q = k \cdot (10 \cdot A + 9) ,$$

kde  $k$  (číslo celé kladné) udává, kolikrát je číslo  $a$  obsaženo v čísle  $P$ . Je pak:  $10 \cdot p = k \cdot (10 \cdot A + 9) - q$ , a konečně

$$p = \frac{k \cdot (10 \cdot A + 9) - q}{10}$$

Protože  $p$  je číslo celé kladné, musí být za uvedeného předpokladu i pravá strana této rovnice číslem celým kladným. Přičteme k číslu  $p$   $q$ -násobek  $(A + 1)$ :

$$p + q \cdot (A + 1) = \frac{k \cdot (10 \cdot A + 9) - q}{10} + q \cdot (A + 1) \quad (1)$$

Součet můžeme upravit takto:

$$\frac{1}{10} \left[ k(10A + 9) - q + 10q(A + 1) \right] = \frac{1}{10} \left[ k(10A + 9) + q(10A + 9) \right] =$$



$$= (10 \cdot A + 9) \cdot \frac{k + q}{10}$$

Je zřejmo, že číslo  $(10A + 9)$  není dělitelno deseti, ani dvěma či pěti. Protože však součet (1) musí být číslem celým kladným (neboť vznikl sečtením dvou čísel celých kladných), musí být  $\frac{k + q}{10}$  číslem celým kladným (t. j.  $k + q$  je dělitelno deseti).

Výsledek dále praví, že *takto vytvořený součet je dělitelný číslem  $a = (10A + 9)$  právě tak, jako původní číslo  $P = 10p + q$ .*

Je nutno ještě dokázat, že součet  $p + q(A + 1)$  není dělitelný číslem  $a = 10A + 9$ , není-li jím dělitelno číslo  $P = 10p + q$ . Toho dosáhneme též tím, jestliže dokážeme, že původní číslo  $P$  je nutně dělitelno číslem  $a$ , je-li jím dělitelno číslo  $p + q(A + 1)$ . Dělitelnost čísla  $p + q(A + 1)$  je vyjádřena rovnicí

$$p + q(A + 1) = k \cdot (10 \cdot A + 9) ,$$

kde  $k$  je celé kladné číslo. Další postup jest:

$$p = k(10A + 9) - q(A + 1) ,$$

$$10p + q = 10k(10A + 9) - 10q(A + 1) + q$$

a odtud po úpravě

$$10p + q = (10A + 9) \cdot (10k - q)$$

Z výsledku plyne, že číslo  $P = 10p + q$  je též číslem  $a = 10A + 9$  dělitelno (neboť  $10k - q$  je číslo celé kladné, protože číslo  $q$  je jednociferné). Obrácený důkaz je tedy proveden.

Tím je vlastně již dáno pravidlo pro dělitelnost čísla zakončenými devítkou, t. j. pro dělitele 9, 19, 29, 39. Jak je z tvaru  $10A + 9$  patrné, udává číslo  $A$  počet desítek dělitele (na př. pro  $a = 179$  jest  $A = 17$ ). Činitel  $n_a$ , jímž násobíme číslo  $q$ , dříve než takto zvětšené číslo přičteme k číslu  $p$ , je pak rovný

$$n_a = A + 1 ,$$

jak je patrné ze součtu (1):

*Odtrhneme od čísla poslední cifru (t. j. devítku) a celkový počet desítek zvětšíme o jednotku.* (I)

Na př. pro dělitele 49 dostaneme  $n_{49} = 5$ ; zkoušíme-li tedy, je-li některé číslo, na př. 10 437, dělitelno čtyřiceti devíti, postupujeme takto:

$$\begin{array}{r} 10437 \\ \underline{35} \\ 1078 \\ \underline{40} \\ 147 \\ \underline{35} \\ 49 ; \end{array} \quad n_{49} = 5$$

49 je tedy obsaženo beze zbytku v čísle 10 437 (je totiž  $10\,437 = 213 \cdot 49$ ).

3. *Dělitelé, jejichž poslední cifra je 1, 3, 7.* Pravidlo, které jsme odvodili jen pro dělitele zakončené devítkou, rozšíříme nyní, aby mělo obecnou platnost, pro všechny dělitele neobsahující prvočísla 2 a 5. Postup bude podobný jako v předchozím případě.

Budiž nyní číslo  $a = 10A + 9$  číslem složeným; pak je možno rozložit je na součin dvou celých kladných čísel  $\alpha, \beta$

$$10A + 9 = \alpha \cdot \beta$$

Odtud dostáváme:  $\alpha = \frac{10A + 9}{\beta}$  Je-li dané číslo  $P = 10p + q$  dělitelno číslem

$\alpha = (10A + 9) : \beta$ , platí

$$10 \cdot p + q = k \cdot \frac{10 \cdot A + 9}{\beta},$$

kde  $k$  je opět číslo celé kladné. Po úpravě dostaneme:

$$p = \frac{1}{10} \left[ k \cdot \frac{10A + 9}{\beta} - q \right]$$

Výraz na pravé straně je zřejmě číslem celým. Přičteme dále k číslu  $p$  součin  $q \cdot (A + 1)$ :

$$\begin{aligned} p + q \cdot (A + 1) &= \frac{1}{10} \left[ k \cdot \frac{10A + 9}{\beta} - q + 10q \cdot (A + 1) \right] = \\ &= \frac{1}{10\beta} \left[ k \cdot (10A + 9) + q\beta(10A + 9) \right] = \\ &= \frac{10A + 9}{\beta} \cdot \frac{k + q\beta}{10} = \alpha \cdot \frac{k + q\beta}{10} \end{aligned} \quad (2)$$

Protože číslo  $10A + 9$  není dělitelno deseti (ani dvěma či pěti), nemůže být těmito děliteli dělitelno ani  $\alpha$ . Je tedy výraz  $\frac{k + q\beta}{10}$  číslem celým kladným a proto

je součet  $p + q(A + 1)$  dělitelný číslem  $\alpha$ . Podobně je možno postupovat v případě, kdy  $P$  je dělitelno číslem  $\beta$ , případně jiným číslem, jež je v čísle  $a$  obsaženo (je-li na př. možno  $a$  rozložit ještě jiným způsobem:  $a = \gamma \cdot \delta$  a pod.).

Je zřejmo, že platí:

*Je-li číslo  $P = 10p + q$  dělitelno kterýmkoliv dělitelem složeného čísla  $a = 10A + 9$ , je též ve výrazu  $p + q(A + 1)$  tento dělitel obsažen beze zbytku.*

Je třeba ještě podati obrácený důkaz: Je-li výsledné číslo dělitelno dělitelem  $\alpha$ , je jím vždy dělitelno i číslo  $P$ . To opět provedeme, dokážeme-li, že původní číslo  $P = 10p + q$  je nutně dělitelno číslem  $\alpha = (10A + 9) : \beta$ , je-li jím dělitelno číslo  $p + q \cdot (A + 1)$ .

Musí pak být:

$p + q(A + 1) = k \cdot \frac{10A + 9}{\beta}$ , kde  $k$  je celé kladné číslo.

Potom jest

$$p = k \frac{10A + 9}{\beta} - q(A + 1) \text{ čili}$$

$$p = \frac{k(10A + 9) - q\beta(A + 1)}{\beta}, \quad (3)$$

a dále

$$10p + q = \frac{10k(10A + 9) - 10q\beta(A + 1) + q\beta}{\beta},$$

což po úpravě vede k rovnosti

$$10p + q = \frac{10A + 9}{\beta} \cdot (10k - q\beta) = \alpha \cdot (10k - q\beta)$$

Výraz  $(10k - q\beta)$  je číslem celým, protože  $k, q, \beta$  jsou čísla celá. Musí být i číslem kladným, což je patrné z poslední rovnosti: levá strana je číslo celé a kladné, na pravé straně je součin uvedeného výrazu s číslem  $\alpha$ , jež je rovněž kladné. Jinak toto tvrzení dokážeme, vypočteme-li  $-q\beta$  z rovnice (3) a dosadíme-li do výrazu  $10k - q\beta$ . Po úpravě dostaneme

$$10k - q\beta = \frac{p\beta + k}{A + 1} > 0$$

Je proto za uvedených podmínek i číslo  $P = 10p + q$  dělitelno dělitelem  $\alpha$ . Důkaz je tedy podán.

Tím jsme dospěli ke konečnému výsledku:

*Daného dělitele vynásobíme předem vhodně zvoleným činitelem  $\beta$  tak, abychom dostali nejmenší číslo, jehož poslední číslicí je 9, a v němž je tedy dělitel beze zbytku obsažen.* (II)

Čísla končící jednotkou násobíme tedy devíti, končící třemi vynásobíme trojkou a čísla zakončená sedmičkou sedmi (čísla končící devítkou přirozeně již nenásobíme); konečně určíme příslušné  $n_\alpha$ , postupující podle pravidla (I).

Na př. je-li dělitelem 13, postupujeme takto:  $\beta = 3, 13 \cdot 3 = 39 = 10A + 9; A = 3, A + 1 = 4 = n_{13}$ . Pro 11 ( $11 \cdot 9 = 99, A = 9$ ) jest  $n_{11} = 10$  atd.

Pro čísla 3 a 9 vychází stejný činitel  $n_3 = n_9 = 1$ . Shoduje se tedy tento způsob určování dělitelnosti třemi i devíti se známým pravidlem (dělitelnost ciferného součtu).

Zde je třeba připomenout, že činitel  $n_\alpha$  může mít pro některé dělitele, z nichž jeden je ve druhém obsažen, stejnou hodnotu, jako na př.  $n_{11} = n_{33} = n_{99} = 10$ , nebo  $n_{13} = n_{39} = 4$ . Schematický postup při zkoušení dělitelnosti je pak pro příslušné dělitele shodný, ovšem konečné rozhodnutí závisí na tom, který z dělitelů je ve výsledném čísle obsažen. Číslo může být dělitelno některým menším dělitelem, aniž by bylo dělitelno dělitelem větším. Uvádíme dva příklady:

$$\begin{array}{r} 8019, n_{11} = n_{33} = n_{99} = 10 \\ \underline{90} \\ 891 \\ \underline{10} \\ 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9044, n_7 = n_{49} = 5 \\ \underline{20} \\ 924 \\ \underline{20} \\ 112 \\ \underline{10} \\ 21 \end{array}$$

První příklad ukazuje, že 8 019 je dělitelno jedenácti, třiceti třemi i devadesáti devíti, druhý, že číslo 9 044 je dělitelno sedmi, nikoliv však čtyřiceti devíti.

4. Činitel  $N$ . Je-li číslo  $n_\alpha$  pro dělitele  $\alpha$  činitelem vypočteným podle předchozího návodu, pak i čísla  $N_\alpha = n_\alpha + k' \cdot \alpha$  ( $k'$  je libovolné celé číslo) jsou činiteli, jimiž se může stejným způsobem zjišťovat dělitelnost číslem  $\alpha$ . Činitel  $n_\alpha$  je ovšem nejmenším kladným číslem ze všech čísel  $N_\alpha$ . Dělitel  $\alpha$  je totiž obsažen beze zbytku v čísle  $10A + 9$ , z něhož vypočteme  $n_\alpha$  podle vzorce  $n_\alpha = A + 1$ . Ale  $\alpha$  je obsaženo i v čísle  $(10A + 9) + 10k' \cdot \alpha = 10 \cdot (A + k'\alpha) + 9$  a odtud

$$N_\alpha = A + k'\alpha + 1 = n_\alpha + k'\alpha$$

Je-li na př. pro dělitele 3  $n_3 = 1$ , jest  $N_1 = 1 + 3k'$ . Tedy je možno užít činitele 1, 4, 7, 10 ..., případně  $-2, -5, -8$ , atd. Pro dělitele 9 je podobně  $N_9 = 1, 10, 19 \dots$ , případně  $-8, -17$ , atd.

Jestliže je činitel  $n_\alpha$  velký v poměru k děliteli  $\alpha$ , pak můžeme s výhodou použít odvozeného činitele  $N_\alpha = n_\alpha - \alpha$  (t. j. dosadíme do vzorce pro  $N_\alpha$  za  $k' = -1$ ). Tak na př. pro  $\alpha = 17$  jest  $n_{17} = 12$  a uvedený činitel  $N_{17} = -5$ . Postup je pak zcela obdobný; zkusíme na př., zda je 3 638 dělitelno sedmnácti:

$$\begin{array}{r} 3638 \\ \underline{-40} \\ 323 \\ \underline{-15} \\ 17 \end{array} \quad N_{17} = -5$$

Číslo 3 638 je dělitelno sedmnácti. Zde je nutno připomenout, že při tomto postupu je třeba nulu pokládat za číslo, v němž je daný dělitel obsažen: provedte zkoušku, zda je číslo 3 621 dělitelno sedmnácti! Rovněž tak může vyjít záporné číslo, jež je násobkem dělitele; i pak je výsledek zkoušky kladný. Zkuste, zda je 17 obsaženo v čísle 2941!

Jakého činitele  $N$  použijeme s výhodou při zkoušce dělitelnosti dvaceti sedmi? ( $N_{27} = -8$ ). Při dělitelnosti jedenácti? ( $N_{11} = -1$ ).

Uvedená pravidla jsou velmi jednoduchá a jednotná pro všechny dělitele (s vyzraženými výjimkami). Menší potíže, které snad mohou vzniknout při rychlém hledání příslušného činitele, lze snadno překonat cvikem. Uvedeme ještě jednu připomínku, umožňující rychlé praktické využití tohoto způsobu určování dělitelnosti: lehce si zapamatujeme, že podobně snadno, jako jsme našli činitele pro

čísla končící devítkou (počet desítek o jednu zvětšený), najdeme výhodného (odvozeného) činitele  $N$  pro čísla končící jedničkou. Tento činitel  $N$  je rovný zápornému počtu desítek. Tak pro dělitele 31 jest  $N_{31} = -3$ , pro 71 použijeme  $N_{71} = -7$ , a dále platí na př.  $N_{101} = -10$ ,  $N_{121} = -12$  atd.

Důkaz: Označme celkový počet desítek dělitele znakem  $C$ . Můžeme tedy psát  $\alpha = 10C + 1$ . Protože u čísla končícího jedničkou jest  $\beta = 9$ , platí dále

$$10 \cdot C + 1 = \frac{10A + 9}{9} \quad \text{čili } A = 9C$$

Odtud dostaneme již snadno pro  $k' = -1$  dělitele  $N_\alpha$ :

$$N_\alpha = n_\alpha - \alpha = A + 1 - (10 \cdot C + 1),$$

a po dosazení

$$N_\alpha = 9 \cdot C + 1 - (10 \cdot C + 1) = -C,$$

čím je tvrzení dokázáno.

Rozhodněte, kterými z čísel 19, 29, 39, 49, 59 je číslo 124 903 dělitelno. Kterými děliteli 11, 21, 31, 41, 51 je dělitelno číslo 123 287.

Poznámka. Pravidlo dělitelnosti můžeme dále rozšířit. Lze dokázat, že je možno při zkoušce odtrhnout poslední dvojčíslí, které po vynásobení určitým činitelem  $m$  a po přičtení ke zbylému číslu, dává s ním součet dělitelný původním dělitelem. Základem jsou zde čísla končící dvěma devítkami, pro něž je činitel  $m$  rovný počtu stovek zvětšenému o jednu. Tak na př. pro dělitele 499 jest  $m_{499} = 5$ . Postup je pak obdobný, jak je patrné z příkladu, v němž zkoušíme dělitelnost čísla 151 197 číslem 499:

$$\begin{array}{r} 151197 \\ \underline{485} \\ 1996 \\ \underline{480} \\ 499 \end{array} \quad m_{499} = 5$$

Číslo 151 197 je dělitelno číslem 499. Hledání činitele ostatních dělitelů je poněkud obtížnější. Tak pro 13 jest  $m_{13} = 3$  (13 je obsaženo v 299). Dále bychom našli na př.  $m_7 = 4$  (neplatí však pro 49),  $m_{19} = 4$ ,  $m_{23} = 3$ ,  $m_{17} = 8$ , atd. Stejně by bylo možno pokračovat v pravidlech pro trojčíslí a dále.

5. Výpočet podílu  $\frac{P}{\alpha}$ , je-li  $\alpha$  dělitelem čísla  $P$ . Víme-li již, že číslo  $P$  je dělitelno

určitým dělitelem  $\alpha$  (zakončeným cifrou 1, 3, 7 nebo 9), můžeme snadno vypočítat podíl  $P : \alpha$ , aniž bychom prováděli zdlouhavé dělení. Význam znaků zde ponecháme stejný jako v předešlých úvahách. Číslo  $P$  je opět rovno výrazu  $10p + q$ . Při odvození postupu vyjdeme z rovnosti (2)

$$p + q(A + 1) = \alpha \frac{k + q\beta}{10}$$

Celé a kladné číslo  $k$  tedy udává, kolikrát je dělitel  $\alpha$  obsažen v čísle  $P$  a vyjadřuje proto hledaný podíl  $k = \frac{P}{\alpha}$ . Z výše uvedeného vztahu vyplývá

$$k = 10 \cdot \frac{p + q(A + 1)}{\alpha} - q\beta$$

Výraz  $p + q(A + 1)$  jest, jak víme, součet desítek čísla  $P$  a jeho jednotek znásobených činitelem  $(A + 1) = n_\alpha$ . Tento součet však již máme vypočtený ve třetím řádku schematického postupu při zjišťování dělitelnosti. Součin  $q\beta$  vypočteme vynásobením zatržených jednotek  $q$  (u čísla o dva řádky výše) a činitele  $\beta$ , daného vztahem  $10A + 9 = \alpha \cdot \beta$ ; je-li  $\alpha$  zakončeno cifrou 1, pak  $\beta = 9$  atd. (t. j. nejmenší činitel, jímž je třeba násobit dělitele, abychom dostali číslo zakončené devítkou).

Podíl  $\frac{p + q(A + 1)}{\alpha} = k_1$  udává, kolikrát je daný dělitel  $\alpha$  obsažen v prvním zmenšeném čísle (stojícím ve třetím řádku). Můžeme jej tedy odvodit zcela stejným způsobem jako podíl  $k$ . Označíme-li  $p + q(A + 1) = P_1 = 10 \cdot p_1 + q_1$ , vychází

$$k_1 = 10 \cdot \frac{p_1 + q_1 \cdot n_\alpha}{\alpha} - q_1\beta$$

Výraz  $p_1 + q_1 n_\alpha$  je opět v daném schematickém postupu dán součtem v řádku pátém,  $q_1$  jsou zatržené jednotky čísla stojícího o dva řádky výše. Takovým způsobem možno pokračovat, až dostaneme podíl

$$k_{n-1} = 10 \cdot \frac{p_{n-1} + q_{n-1} \cdot n_\alpha}{\alpha} - q_{n-1} \beta,$$

u něhož hodnotu zlomku  $\frac{p_{n-1} + q_{n-1} \cdot n_\alpha}{\alpha} = k_n$  určíme snadno z paměti.

Celý numerický výpočet je jednoduchý, neboť je již připraven předchozí zkouškou dělitelnosti.

V poslední řádce jsme při této zkoušce dospěli k malému číslu  $P_n$ , o němž můžeme z paměti rozhodnout, zda je dělitelno daným dělitelem  $\alpha$  a určit i podíl  $P_n : \alpha = k_n$ . Odtud dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} k_{n-1} &= 10 \cdot k_n - q_{n-1} \cdot \beta \\ k_{n-2} &= 10 \cdot k_{n-1} - q_{n-2} \cdot \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 10 \cdot k_2 - q_1 \cdot \beta \\ k &= 10 \cdot k_1 - q \cdot \beta \end{aligned}$$

Uvedeme dva příklady. a) Máme určit, zda je číslo 9 685 923 dělitelno číslem

$\alpha = 39$ ; jestliže ano, kolikrát jest 39 v tomto čísle obsaženo. Jak patrně ze zkoušky dělitelnosti dole provedené, je poslední číslo  $P_n = 39$ .

$\begin{array}{r} 9685923 \\ \underline{12} \\ 968604 \\ \underline{16} \\ 96876 \\ \underline{24} \\ 9711 \\ \underline{4} \\ 975 \\ \underline{20} \\ 117 \\ \underline{28} \\ 39 \end{array}$	$n_{39} = 4$  $k_n = \frac{39}{39} = 1,$  $k_{n-1} = 10 - 7 = 3$	$\beta = 1$   Dále jest <table style="margin-left: 20px;"> <tr><td><math>30 - 5 = 25</math></td></tr> <tr><td><math>250 - 1 = 249</math></td></tr> <tr><td><math>2\ 490 - 6 = 2484</math></td></tr> <tr><td><math>24\ 840 - 4 = 24836</math></td></tr> <tr><td><math>248\ 360 - 3 = 248357</math></td></tr> </table>	$30 - 5 = 25$	$250 - 1 = 249$	$2\ 490 - 6 = 2484$	$24\ 840 - 4 = 24836$	$248\ 360 - 3 = 248357$
$30 - 5 = 25$							
$250 - 1 = 249$							
$2\ 490 - 6 = 2484$							
$24\ 840 - 4 = 24836$							
$248\ 360 - 3 = 248357$							

Dané číslo  $P = 9\ 685\ 923$  je dělitelné třiceti devíti; podíl  $P : 39$  jest 248 357.

b) Dělitelnost čísla  $P = 6\ 449\ 706$  číslem  $\alpha = 27$ .

$\begin{array}{r} 6449706 \\ \underline{114} \\ 645084 \\ \underline{76} \\ 64584 \\ \underline{76} \\ 6534 \\ \underline{76} \\ 729 \\ \underline{171} \\ 243 \\ \underline{57} \\ 81 \end{array}$	$n_{27} = 19$  $k_n = \frac{81}{27} = 3,$  $k_{n-1} = 30 - 21 = 9$	$\beta = 7$   Dále dostaneme <table style="margin-left: 20px;"> <tr><td><math>90 - 63 = 27</math></td></tr> <tr><td><math>270 - 28 = 242</math></td></tr> <tr><td><math>2\ 420 - 28 = 2392</math></td></tr> <tr><td><math>23\ 920 - 28 = 23892</math></td></tr> <tr><td><math>238\ 920 - 42 = 238878</math></td></tr> </table>	$90 - 63 = 27$	$270 - 28 = 242$	$2\ 420 - 28 = 2392$	$23\ 920 - 28 = 23892$	$238\ 920 - 42 = 238878$
$90 - 63 = 27$							
$270 - 28 = 242$							
$2\ 420 - 28 = 2392$							
$23\ 920 - 28 = 23892$							
$238\ 920 - 42 = 238878$							

Podíl  $P : \alpha = 238\ 878$ .

V takovém případě je ovšem výhodnější použít odvozeného činitele  $N_\alpha = n_\alpha + k' \cdot \alpha$ . Dosadíme  $N_\alpha = A + 1 + k' \cdot \alpha$  a upravme pro tento případ součet (2):

$$\begin{aligned} p + q(A + 1 + k' \cdot \alpha) &= \frac{1}{10} \left[ k \cdot \frac{10A + 9}{\beta} - q + 10q(A + 1 + k' \cdot \alpha) \right] = \\ &= \frac{1}{10} \left[ k \cdot \alpha + q(10A + 9 + 10k' \cdot \alpha) \right] \end{aligned}$$

Protože jest

$$10A + 9 = \alpha \cdot \beta ,$$

dostaneme

$$p + q(n_\alpha + k' \cdot \alpha) = \alpha \cdot \frac{k + q(\beta + 10k')}{10}$$

odkud

$$k = 10 \cdot \frac{p + q(n_\alpha + k' \cdot \alpha)}{\alpha} - q(10 \cdot k' + \beta)$$

Pokračujeme-li jako v předešlém případě, dospějeme konečně k výsledku

$$k_{n-1} = 10 \cdot k_n - q_{n-1} \cdot (10 \cdot k' + \beta)$$

Výhodno je zde užít  $k' = -1$ . Potom jest

$$k_{n-1} = 10 \cdot k_n + q_{n-1} \cdot (10 - \beta)$$

Místo odečítání  $\beta$ -násobku  $q$  se zde přičítá  $(10 - \beta)$ -násobek  $q$ ; postup demonstrujeme na předchozím příkladě:

$\begin{array}{r} 6449706 \\ \underline{-48} \\ 644922 \\ \underline{-16} \\ 64476 \\ \underline{-48} \\ 6399 \\ \underline{-72} \\ 567 \\ \underline{-56} \\ 0 \end{array}$	$N_{27} = -8$	$(10 - \beta) = 3$
	$k_n = 0$	
	$k_{n-1} = 0 + 21 = 21$	
	$210 + 27 = 237$	
	$2370 + 18 = 2388$	
	$23880 + 6 = 23886$	
	$238860 + 18 = \underline{238878}$	

Václav Metelka, Liberec:

## Několik poznámek k řešení algebraických rovnic o jedné neznámé

(Dokončení)

V učebnici algebry na str. 86 je provedeno řešení kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \tag{16}$$



Vím, že řešení kvadratických rovnic není pro žáky vyšších tříd jedenáctiletky žádným „problémem“. Přesto však bych chtěl toto řešení provést znovu, ale poněkud jiným způsobem, než je v učebnici.

Uvažujme totiž funkci:

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0, \quad (8)$$

kde čísla  $a, b, c$  jsou táz, jako v rovnici (16).

Hledáme-li průsečíky grafu funkce (8) s osou  $x$  (jejíž rovnice je  $y = 0$ ), t. j. řešíme-li rovnici (8) s rovnicí  $y = 0$ , dojdeme k rovnici  $ax^2 + bx + c = 0$ , ze které vypočítáme první souřadnice těchto průsečíků.

Řešit rovnici (16) znamená tedy vlastně hledat první souřadnice průsečíků grafu funkce (8) s osou  $x$ .\*)

Jeden ze způsobů řešení rovnice (16) by tedy také byl: Nakreslit graf funkce (8) a zjistit jeho průsečíky s osou  $x$ . Zřejmě však tento způsob řešení by měl veliké nevýhody. Jiný ze způsobů řešení - již mnohem lepší - je tento:

Posuňme nejprve parabolu (8) tak, aby její osa byla totožná s osou  $y$ . Najdeme průsečíky s osou  $x$  (budou-li ovšem existovat). Tyto průsečíky budou zřejmě souměrné podle počátku. Pak zase parabolu posuňme zpět.

Jinak řečeno: Převedme funkci (8) vhodnou substitucí ve funkci sudou - což umíme v ž d y - a vypočítejme „nové“ souřadnice průsečíků s osou  $x$  (stále za předpokladu, že tyto průsečíky budou existovat). Z „nových“ souřadnic pak vypočítejme původní.

Provedeme-li tedy ve funkci (8) substituci (10), dostaneme sudou funkci (11). Řešíme-li tuto funkci s přímkou  $y = 0$  (osou  $x$ ), dostaneme rovnici:

$$a\bar{x}^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0, \text{ čili po úpravě}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \text{ která má zřejmě řešení jen když } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ a to:}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \bar{x}_2 = -\frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Vypočítáme-li nyní z rovnice (10) „původní“ souřadnice  $x_1, x_2$ , dostaneme po úpravě, kterou čtenář provede jistě sám:

$$x_1 = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \quad x_2 = \frac{1}{2a} \left( -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right)$$

Tyto vzorce již čtenář zná, ale celý tento výklad byl prováděn jen proto, že takovýmto způsobem se dají obdobně řešit i některé rovnice vyšších stupňů, což právě chci v následujícím ukázat. Začneme příkladem:

Řešit rovnici

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (17)$$

\*) Doporučuji čtenáři, aby si tuto větu dobře promyslel.

nedá jistě mnoho práce ani začátečníkovi - ačkoliv je to rovnice čtvrtého stupně - zvláště uvědomí-li si, že může s výhodou použít „pomocné“ substituce

$$x^2 = t, \quad (18)$$

čímž z rovnice (17) dostaneme rovnici:

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

která má (zřejmě) kořeny  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = 1$ , takže nyní z rovnice (18) dostane snadno všechny čtyři kořeny rovnice (17), t. j.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = -1$ . Tyto kořeny jsou souměrně položeny na číselné ose podle počátku, neboť funkce  $y = x^4 - 5x^2 + 4$  je sudá.

Mnohem obtížnější by však bylo řešit rovnici:

$$x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = 0 \quad (19)$$

A tuto rovnici bychom sotva dovedli řešit, ačkoliv má čtyři reálné kořeny, kdybychom již předem neznali theorii o sudých funkcích.

Funkce

$$y = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 \quad (20)$$

ačkoliv není sudá, dá se vhodnou substitucí v sudou funkci převést.\*) Provedeme-li totiž substituci  $x = \bar{x} + k$ , kde  $k = -\frac{a_3}{4a_4}$ , t. j. v našem případě  $k = \frac{1}{2}$ , čili substituci

$$x = \bar{x} + \frac{1}{2}, \quad (21)$$

dostaneme z rovnice (19) rovnici:

$\bar{x}^4 - \frac{45}{2}\bar{x}^2 + \frac{729}{16} = 0$ , kterou již umíme řešit (třeba opět s použitím „pomocné“ substituce  $\bar{x}^2 = t$ ) a vychází  $t_1 = \frac{9}{4}$ ,  $t_2 = \frac{81}{4}$ , takže  $\bar{x}_1 = \frac{3}{2}$ ;  $\bar{x}_2 = -\frac{3}{2}$ ;  $\bar{x}_3 = \frac{9}{2}$ ;  $\bar{x}_4 = -\frac{9}{2}$ . Opět z pochopitelných důvodů jsou tyto kořeny položeny

na číselné ose souměrně podle počátku. Užijeme-li tedy ještě substituce (21), dostaneme kořeny původní rovnice (19), t. j. kořeny:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_4 = -4$ .

Z toho je patrné, že v některých případech - vzpomeňme na podmínku (15) - můžeme poměrně snadno řešit i rovnice vyšších stupňů. Výslovně však upozorňuji znovu, že takového způsobu řešení se dá použít jen ve zvláštních případech, z nichž jeden jsem právě uvedl.

Abyste si čtenář mohl zopakovat probranou látku, dávám mu zde ještě jeden příklad na cvičení:

---

\* ) Doporučuji čtenáři, aby se přesvědčil, že skutečně funkce (20) vyhovuje podmínce (15).

Řešte rovnici

$$2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$$

\* \* \*

Ukáži v dalším, jak lze tímto způsobem také nepřímo počítat kořeny některých rovnic třetího stupně. Ovšem s použitím jistého umělého obratu - který však čtenář jistě pochopí - neboť jak již víme, rovnice lichých stupňů se touto methodou p ř í - m o počítat nedají.

Pokusme se řešit rovnici:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \quad (22)$$

Návod: Násobme celou rovnici dvojčlenem  $(x - u)$ , kde  $u$  je nějaké číslo. Tím dostaneme rovnici stupně čtvrtého:

$$x^4 - (4 + u)x^3 + 4(u - 1)x^2 + 4(4 + u)x - 16u = 0 \quad (23)$$

Protože rovnice (23) vznikla násobením rovnic (22) a  $x - u = 0$ , bude mít zajisté tytéž kořeny jako rovnice (22) [bude-li ovšem rovnice (22) mít vůbec nějaké kořeny] a kromě toho ještě kořen  $x = u$ .\*)

Vytvořme „pomocnou“ funkci

$$y = x^4 - (4 + u)x^3 + 4(u - 1)x^2 + 4(4 + u)x - 16u \quad (24)$$

Tato funkce bude sudá pro  $u = -4$ . V tomto případě totiž dostaneme  $y = x^4 - 20x^2 + 64$ , takže z rovnice (23) pro  $u = -4$  dostaneme rovnici

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0,$$

kteřá má zřejmě kořeny  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = -4$ . Má tudíž původní rovnice (22) kořeny  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 4$ .

*Poznámka:* Uvědomíme-li si, jak jsou tyto kořeny rozloženy na číselné ose, zjistíme snadno, proč jsme rovnici (22) museli násobením výrazem  $(x - u)$  „doplnit“ kořenem  $u = 4$ . Čísla 2, -2, 4, -4 pak jsou na číselné ose položena souměrně podle počátku a „pomocná“ funkce je sudá.

Další příklad:

Řešíme rovnici

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0 \quad (25)$$

Násobením celé rovnice dvojčlenem  $(x - u)$ , kde  $u$  je nějaké číslo, dostaneme rovnici stupně čtvrtého:

$$x^4 - (u + 7)x^3 + 7(u + 1)x^2 + (15 - 7u)x - 15u = 0 \quad (26)$$

Vytvořme tedy pomocnou funkci:

$$y = x^4 - (u + 7)x^3 + 7(u + 1)x^2 + (15 - 7u)x - 15u \quad (27)$$

Tato funkce není sudá, protože číslo  $u$  nemůže s o u č a s n ě splňovat rovnice  $u + 7 = 0$ ,  $15 - 7u = 0$ . Pokusme se však, zda bychom tuto funkci nemohli vhodnou substitucí převést ve funkci sudou. Víme, že musí být splněna podmínka

---

\*) Je nutno, aby si čtenář tuto větu dobře promyslel, než půjde dál.

(15). V našem případě jest  $a_4 = 1$ ,  $a_3 = -(u + 7)$ ,  $a_2 = u + 1$ ,  $a_1 = 15 - 7u$ . Dosadíme-li tyto hodnoty do podmínky (15), dostáváme po úpravě

$$-u^3 + 7u^2 + 21u - 27 = 0 \quad (28)$$

Dostali jsme tedy opět rovnici třetího stupně jako podmínku pro číslo  $u$ . Zdánlivě se tedy náš problém nezjednodušil, neboť místo původní rovnice (25) máme nyní počítat novou rovnici třetího stupně. Naše námaha však přesto nebyla marná, neboť u rovnice (28) můžeme dosti snadno „uhodnout“ jeden kořen. Vidíme totiž, že dosadíme-li do rovnice (28)  $u = 1$ , bude tato rovnice splněna. Jest tedy jednotka kořenem rovnice (28) a další kořeny nemusíme počítat. Dosadíme-li pak za  $u$  jednotku do funkce (27), dostaneme funkci

$$y = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15, \text{ která substitucí} \quad (29)$$

$$x = \bar{x} + 2^* \quad (30)$$

přejde ve funkci:

$$y = \bar{x}^4 - 10\bar{x}^2 + 9, \quad (31)$$

která protíná osu  $x$  v bodech, jejichž čtverce prvních souřadnic jsou:

$$\bar{x}^2 = 1, \quad \bar{x}^2 = 9, \text{ takže rovnice}$$

$$\bar{x}^4 - 10\bar{x}^2 + 9 = 0 \text{ má řešení } \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = -1, \quad \bar{x}_3 = 3, \quad \bar{x}_4 = -3$$

A užijeme-li opět substituce (30), zjistíme, že rovnice (25) má kořeny

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -1^{**}$$

K tomuto příkladu dávám čtenáři ještě jedno kontrolní cvičení, kterým zároveň článek uzavírám:

Na ose číselné najdi body 3; 5;  $-1$  [kořeny rovnice (25) viz nahoře]. Tyto tři body s bodem 1 dávají čtveřici, která je souměrná podle bodu 2. Porovnej tento výsledek s kořenem  $u = 1$  v rovnici (28) a s hodnotou  $k = 2$  v substituci  $x = \bar{x} + k$ .

Kterými jinými body bys mohl doplnit trojici čísel 3; 5;  $-1$  na ose číselné, aby opět vznikla čtveřice souměrná?

Kolik je tedy celkem takových bodů?

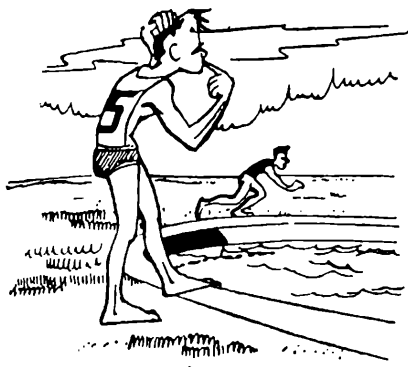
Porovnej tyto body s kořeny rovnice (28)!

Pokus se řešit rovnici (25) užitím jiného kořenu rovnice (28)!

\* ) Užili jsme opět substituce  $x = \bar{x} + k$ , kde za  $k$  dosazujeme  $k = -\frac{a_3}{4a_4} = -\frac{-8}{4 \cdot 1} = 2$

\*\* ) Proč jsme nepoužili také kořenu  $\bar{x}_2 = -1$ ?

Čtenář necht' si uvědomit, že jsme rovnici (22) násobili činitelem  $(x - u)$  a podívá se na poznámku na konci minulého příkladu.

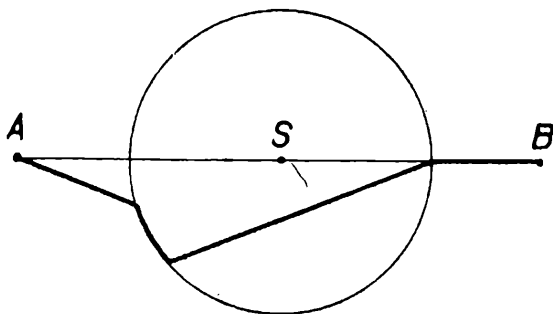


Doc. Jan Vyšín, Praha:

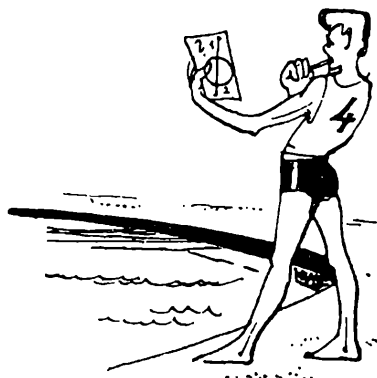
## Povídka o geometrické úloze

V jednom studentském internátě byl ředitelem učitel matematiky. Když se blížily závěrečné zkoušky nejvyššího ročníku, napadlo ho, že uspořádá pro studenty tohoto ročníku sportovní podnik, který jim poskytne příležitost zopakovat si mnoho věcí, kterým se naučili v matematice, a použít jich při řešení úlohy ze života.

U internátu byl na rovném travnatém prostranství velký kruhový bazén (obr. 1). Ředitel si vymyslel tento závod: dal vytyčit na travnatém prostranství kolíky dva body  $A$ ,  $B$  tak, aby byly stejně vzdáleny od středu bazénu a aby jejich spojnice procházela středem bazénu. Cílem závodu bylo dostat se co nejdříve během i plaváním z bodu  $A$  do bodu  $B$ . Závodníci byli vázáni jedinou podmínkou: nesměli běžet po okraji bazénu; jakmile doběhl závodník k okraji bazénu, musil skočit do vody a plavat; jakmile vylezl z vody, musil se vzdálit od okraje bazénu. To znamená, že nebyla přípustná taková dráha, jaká je na př. naznačena na obr. 1 tlustou čarou.



Obr. 1



Když ředitel internátu studentům závod vyhlásil, řekl: „Bude to nejenom soutěž v tělesné zdatnosti, ale i v theoretické připravenosti. Těžko vyhraje ten, kdo se pustí naslepo cestou, která ho právě napadne. Je třeba si napřed zjistit trať, po které poběžíte a poplavete. Ale ta trať nebude možná pro všechny závodníky táž; bude záležet na tom, kolikrát kdo rychleji běží po zemi, než plave ve vodě. Je v tom skryta jistá geometrická úloha: pokuste se ji rozřešit. Přeji vám hodně úspěchu při řešení i pak v samotném závodě“.

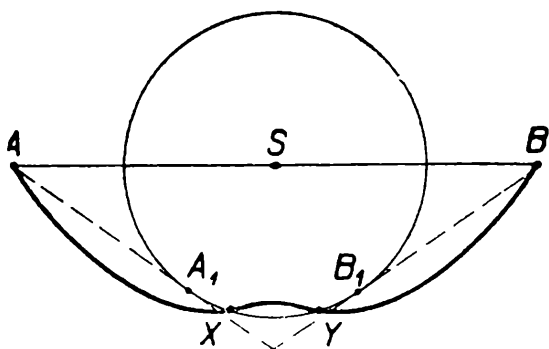
Hoši se nad tou „geometrickou úlohou“ ušklibali; někteří slabší matematici navrhovali, že by bylo nejlépe svléci se do plavek a vyzkoušet to prakticky. Ale pak přece jen zvítězil názor těch přemýšlivějších, že bude spolehlivější „to spočítat“. A nakonec zaujala úloha celý kolektiv tak, že se hoši dokonce zřekli pro jednu

i večerní vycházky a kina, aby úlohu společnými silami rozřešili. Budeme je při tom sledovat a sem tam jim trochu pomůžeme.

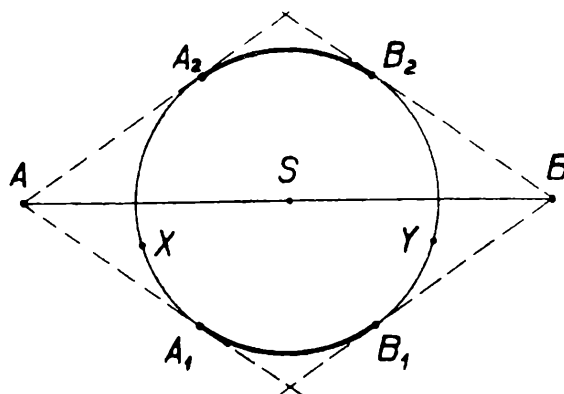
„Je jasné, že to nemůžeš vzít od startu přímo do cíle“, počal uvažovat Mirek, nejlepší plavec třídy, „to bys musel přelovat bazén podél průměru a to je nejdelší cesta přes bazén,\*) tím bys se nejvíc zdržel“. „Tak docela jasné to není“, pochyboval Karel, který platil ve třídě za matematickou autoritu, „to záleží na rychlostech. Kdyby někdo běžel jen o málo rychleji, než plave, mohlo by se mu nevyplatit, kdyby si prodloužil trať. I kdyby byl kratší dobu ve vodě, měl by delší čas, než kdyby to vzal přímo“.

„Já myslím, že na příklad pro mne by bylo nejvýhodnější co nejdelší kus běžet“, prohodil Emil, který nijak nevynikal plaveckým uměním. „Já bych to vzal nejraději nějak takhle“, pokračoval Emil, načrtl obrázek (obr. 2) a vytáhl silně zamýšlenou trať  $AXYB$ .

„Nesmysl“, zkritisoval jeho návrh Karel, „cesta z  $A$  do  $X$ , jak jsi ji nakreslil, není nejkratší; nejkratší cesta půjde z bodu  $A$  po tečně do dotykového bodu  $A_1$  a pak po oblouku - to je po okraji bazénu - do bodu  $X$ . A víš přece, že po kraji bazénu nesmíš běžet; to dal řída do podmínek závodu,“ dodal Karel.



Obr. 2



Obr. 3

„A proč je nejkratší ta cesta po tečně a pak po oblouku?“, zapochyboval někdo. „To já dokázat nedovedu“, pravil Karel, „ale zkus si to, člověče, s gumičkou. Dej na stůl krabičku místo bazénu a natáhni gumu mezi body  $A$ ,  $X$ ; uvidíš, že se guma napne po tečně a po obvodu krabičky. A guma přece znázorní nejkratší cestu“.

Karel měl skutečně pravdu; i v tom, že není tak snadné dokázat, že cesta po tečně  $AA_1$  a po oblouku kružnice je nejkratší drahou spojující body  $A$ ,  $X$ . Zkrátka podle podmínky závodu měli závodníci „zakázané“ silně vytažené oblouky  $A_1B_1$  a  $A_2B_2$  na obr. 3. Do vody směli skočit jen v některém bodě  $X$  slabě vytaženého oblouku  $A_1A_2$  a z vody směli vylézt jen v některém bodu  $Y$  slabě vytaženého oblouku  $B_1B_2$ .

Hoši to uznali, Emil ovšem s těžkým povzdechem.

„Tak, kluci, abychom se dostali kupředu“, ujal se teď Karel opravdového vedení. „Předně je jasné, že dráha z bodu  $A$  do bodu  $X$ , kde skočíš do bazénu, je přímá,

\*) Mirek má zřejmě na mysli větu, že průměr je nejdelší tětiva kružnice.

protože celou dráhu  $AX$  běžíš stejnou rychlostí a protože úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů. Zrovna tak poplaveš v bazénu po přímce z bodu  $X$  do bodu  $Y$ , tam vylezeš a poběhneš po přímce do bodu  $B$ . To se ví, nebudeme počítat se zdržením při rozběhu, při skoku do vody, při rozplavání a při vystoupení z vody. Bude to vypadat asi nějak takhle“, pravil Karel a nakreslil obrázek (obr. 4):

„A proč ne třeba takhle?“, ozval se potměšile Jirka a načrtl tento náčrt (obr. 5):

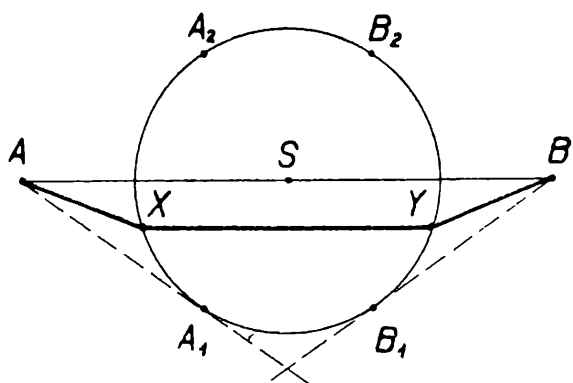
Jirka byl štoural, který rád zapléтал věci zdánlivě jasné a dával všetečné otázky, při nichž se učitel matematiky někdy pěkně zapotil.

„Jirko, neblázni“, vrhli se na něj všichni hoši kromě Karla, „přece musíš plavat ve směru  $AB$  a ne takhle cikcak, to by nebylo časově nejkratší“.

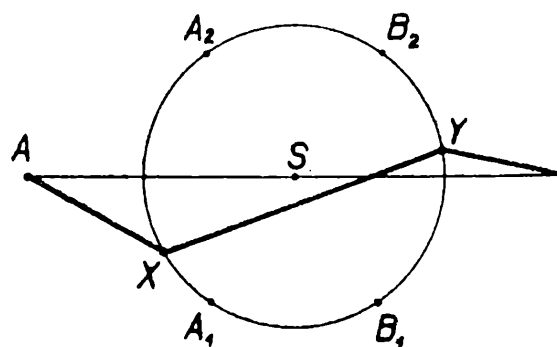
„To se neví“, ušklíbl se Jirka „to by se muselo dokázat“.

„Přece ta trať musí být symetrická“, prohlásil rozhorleně Mirek. „Samozřejmě, symetrická“, přidal se hned nekritický dav.

Je na čase, abychom se hochům vložili do jejich úvah. Jejich poslední „důvod“ nebyl ovšem žádným odůvodněním, ale zdá se, že instinktivně cítili, v čem je princip odůvodnění. Skutečně, lze odůvodnit osovou souměrností, že časově nejkratší cesta nemůže vypadat tak, jak ji nakreslil škodolibý Jirka, ale že musí být  $XY \parallel AB$ , jak to naznačil předtím Karel (obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

Podívejme se na obrázek (obr. 6):

Sestrojíme osu  $o$  úsečky  $AB$ ; ta prochází ovšem středem  $S$ . Souměrnost podle osy  $o$  převede lomenou čáru  $AXYB$  v lomenou čáru  $BY'X'A$ ; obě lomené čáry se protínají v bodě  $Z$  ležícím na ose  $o$ . Bod  $Z$  rozdělí čáru  $AXYB$  ve dvě části: označme  $t_1, t_2, t_3, t_4$  doby (třeba ve vteřinách), které závodník potřebuje, aby uběhl nebo uplaval trati  $AX, XZ, ZY, YB$ . Tytéž doby potřebuje zřejmě k vykonání drah  $BY', Y'Z, ZX', X'A$ . Doba potřebná na celou dráhu  $AXYB$  je tedy

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

Nyní zvolme ze součtů  $t_1 + t_2, t_3 + t_4$  ten, který není větší než zbývající. Na př. situace na obr. 6 je taková, že platí vztah

$$t_3 + t_4 \leq t_1 + t_2 \quad (1)$$

K vykonání cesty  $AX'ZYB$  by závodník potřeboval dobu

a podle (1) je

$$2(t_3 + t_4) \leq t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \quad (2)$$

Jestliže přímka  $XY$  není rovnoběžná s přímkou  $AB$  (jak to nakreslil Jirka), padne bod  $Z$  mimo přímku  $X'Y$  a vznikne trojúhelník  $YX'Z$ . Podle známé věty z planimetrie platí

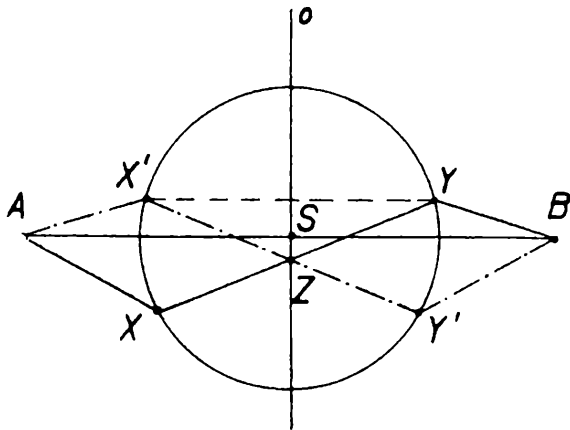
$$X'Y < X'Z + ZY$$

Doba  $t_5$  potřebná k uplavání trati  $X'Y$  bude tedy zřejmě menší než by byla doba  $2t_3$  potřebná k uplavání trati  $X'ZY$ , t. j. platí

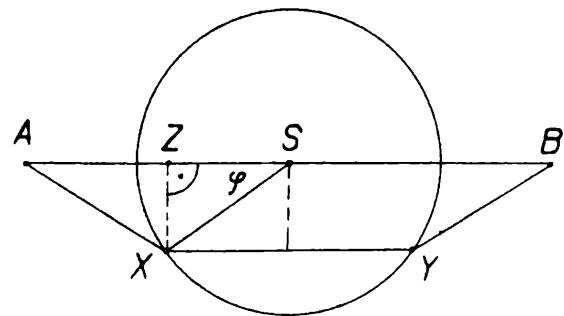
$$t_5 < 2t_3 \quad (3)$$

Jestliže tedy závodník zvolí trať  $AX'YB$ , urazí ji za dobu  $t_4 + t_5 + t_4$  (vteřin), pro niž platí podle (2) a (3) nerovnost

$$t_4 + t_5 + t_4 = t_5 + 2t_4 < 2t_3 + 2t_4 \leq t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$



Obr. 6



Obr. 7

To znamená, že trať  $AX'YB$  je časově kratší než původní trať  $AXYB$ ; trať  $AXYB$  nemůže být tedy časově nejkratší.

Tak, Jirku jsme vyřídili; situace bude opravdu taková, jak ji nakreslil Karel na obr. 4. Body  $X, Y$  leží na obloucích omezených body dotyku  $A_1, A_2, B_1, B_2$ ; přímka  $XY$  je rovnoběžná s přímkou  $AB$ .

„A teď jen vyjádřit dobu  $t$  potřebnou k uražení trati  $AXYB$  jako funkci... - safra čeho?“, zarazil se Karel. „Učili jsme se toho o funkcích ve škole dost a dost, ale tohle se nám nestalo, abychom neměli danu nezávisle proměnnou a měli si ji teprve vyhledat.“

Opravdu, možností je tu řada. Za nezávisle proměnnou můžeme zvolit třeba délku úsečky  $XY$  nebo  $AX$  nebo vzdálenost přímky  $XY$  od přímky  $AB$  nebo i velikost úhlu  $\sphericalangle ASX$ .... Co si vybrat? Podle toho, jakou si zvolíme nezávisle proměnnou, vyjde nám různě složité výsledná funkce. Zvolíme-li na př. délku  $XY$ , vyjdou v rovnici funkce odmocniny; zvolíme-li velikost úhlu  $\sphericalangle ASX$ , vyjdou



goniometrické funkce. Zkoušením bychom zjistili, že nejvýhodnější nezávisle proměnná bude délka  $x$  úsečky  $AX$ .

Tak, a nyní už jen vyjádříme  $t$  jako funkci  $x$ . Nejdříve ovšem musíme zavést nějaká písmena: označíme  $a$  vzdálenost  $AS = BS$  a  $r$  poloměr hraniční kružnice bazénu; dále označíme  $c$  rychlost závodníka na suchu,  $v$  jeho rychlost ve vodě.\*) A teď se podíváme na obrázek (obr. 7).

Hoši se dohadují, jak vyjádřit délku  $XY$ . Už přišli na to, že je to dvojnásobná délka úsečky  $SZ$ , kde  $Z$  je pata kolmice spuštěné z bodu  $X$  na přímkou  $AB$ . Vlastně je úsečka  $SZ$  pravouhlý průmět úsečky  $SX$  na přímkou  $AB$ , čili platí

$$SZ = SX \cdot \cos \varphi, \quad (4)$$

kde  $\varphi$  je velikost úhlu  $\sphericalangle ASX$ . Ale jak se zbavit toho nepohodlného kosinu? „Věta kosinová!“, napadlo někoho z chlapců. Opravdu, kosinová věta pro trojúhelník  $ASX$ ; ta zní

$$\overline{AX}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SX}^2 - 2AS \cdot SX \cdot \cos \varphi;$$

čili

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2a \cdot SX \cdot \cos \varphi$$

A když tuto rovnici spojíme s rovnicí (4), vyjde

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2a \cdot SZ$$

z toho

$$XY = 2 \cdot SZ = \frac{a^2 + r^2 - x^2}{a} \quad (5)$$

„Teď už to půjde“, libuje si Karel. „Doba  $t$  je dána funkcí

$$t = \frac{AX}{c} + \frac{XY}{v} + \frac{YB}{c}$$

neboli podle (5)

$$t = \frac{2x}{c} + \frac{a^2 + r^2 - x^2}{av} \quad (6)$$

a to je funkce docela jednoduchá.“

„Platí to, i když bude ležet bod  $X$  na přímce  $AB$ ?“, pokouší Karla nedůvěřivý Jirka. „Pak přece nevznikne žádný trojúhelník  $ASX$  a předcházející odvození neplatí“. „No, to se přesvědčíme“, je svolný Karel, „dosadíme do (5)  $x = a - r$ ; a opravdu, vyjde nám  $XY = 2r$ , je to tedy všechno v pořádku a funkce je nalezena.“

„A pro která  $x$  je definována, řekl by náš matikář“, zašklebil se Pepík. „No, samozřejmě pro všechna“, odpověděl Karel, ale hned se zarazil. „Vlastně, počkejte,

---

\*) Budou-li vyjádřeny délky  $a, r, x$  v metrech a rychlosti  $c, v$  v metrech za vteřinu, vyjde doba  $t$  ve vteřinách.

v naší úloze přicházejí v úvahu jen ta  $x$  mezi délkou  $AA_1$  (obr. 8) a délkou  $AA_2$ , vlastně nám stačí mezi  $AA_1$  a  $AA_0$ , protože se budeme zajímat jen o dolejší polovinu omezenou přímkou  $AB$ . Pak se mění  $x$  od  $AA_1$ , a to má podle Pythagorovy věty délku  $\sqrt{a^2 - r^2}$  do  $AA_0$ , a to má délku  $a - r$ . Která mez je menší? Přece  $a - r$ ; opravdu platí

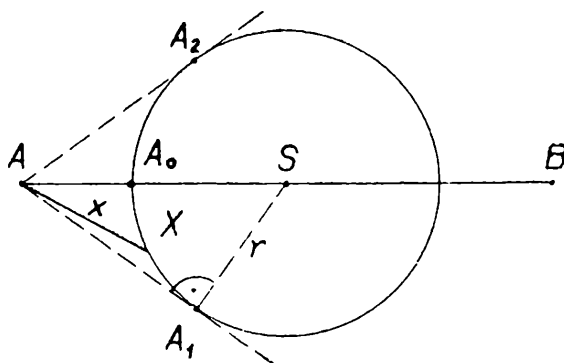
$$a - r = \sqrt{a - r} \quad \sqrt{a - r} < \sqrt{a - r} \quad \sqrt{a + r} = \sqrt{a^2 - r^2}$$

to se ví, vždyť podle podmínky úlohy je  $a > r$ ."

Tak tedy všechno je připraveno. Je třeba najít nejmenší hodnotu funkce

$$t = \frac{2x}{c} + \frac{a^2 + r^2 - x^2}{av}, \quad (6)$$

když  $x$  probíhá od  $a - r$  do  $\sqrt{a^2 - r^2}$



OBR. 8

Takovéto úlohy se na naší střední škole neřeší. Studenti z vysoké školy by beze všeho použili metody z diferenciálního počtu a dostali by se rychle k cíli. Ale úloha, najít nejmenší hodnotu funkce (6), se dá řešit docela elementárně. Hoši z internátu ten způsob znají. Funkce (6) se uvede na tvar:

$$t = \frac{a^2 + r^2}{av} - \frac{1}{av} \left( x^2 - \frac{2av}{c} x \right) \quad (7)$$

Výraz v závorkách lze psát takto:

$$x^2 - \frac{2av}{c} x = \left( x - \frac{av}{c} \right)^2 - \frac{a^2 v^2}{c^2}$$

dosadíme-li do (7), dostaneme

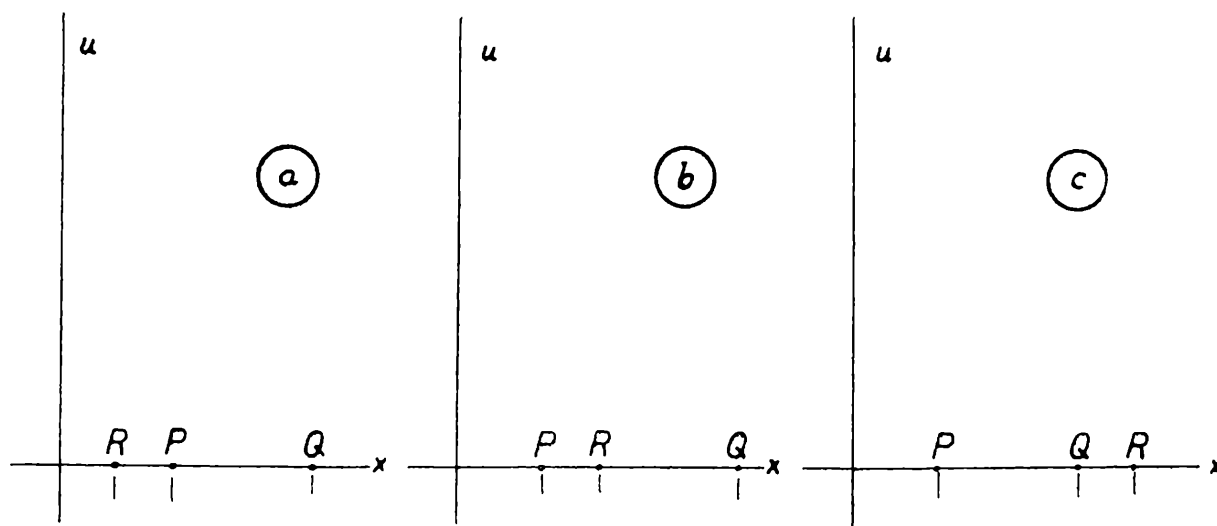
$$t = \frac{a^2 + r^2}{av} + \frac{av}{c^2} - \frac{1}{av} \left( x - \frac{av}{c} \right)^2 \quad (8)$$

Součet prvních dvou členů na pravé straně rovnice (8) je konstantní (nezávisí na  $x$ ). Proměnná  $t$  nabude nejmenší hodnoty, bude-li číslo  $\left( x - \frac{av}{c} \right)^2$  co největší. To

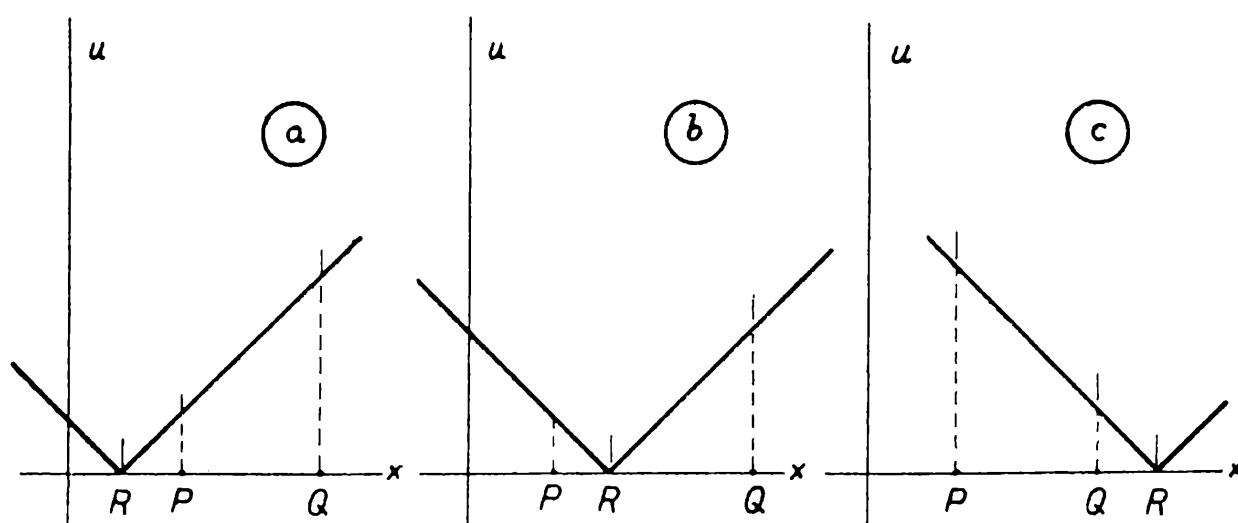
znamená, že proměnná  $t$  nabude nejmenší hodnoty (minima) pro takové  $x$  ležící mezi  $a - r$  a  $\sqrt{a^2 - r^2}$ , pro které nabude funkce

$$u = \left| x - \frac{av}{c} \right| \quad (9)$$

největší hodnoty (maxima).



Obr. 9



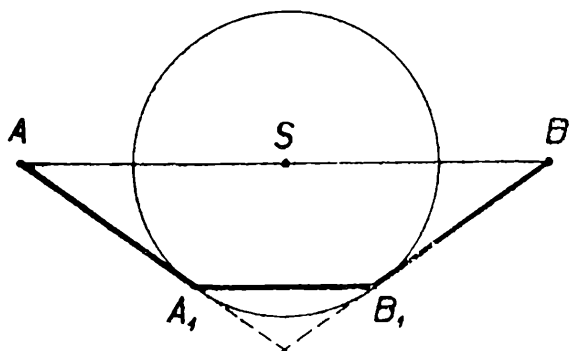
Obr. 10

„Které  $x$  to je, uvidíme na grafu“, prohlásil Karel, když hoši došli až k tomuto závěru. „Tak si nakreslíme navzájem kolmé osy  $x$ ,  $u$ , zvolíme si na ose  $x$  body  $P$ ,  $Q$  o souřadnicích  $a - r$ ,  $\sqrt{a^2 - r^2}$ . Bod  $P$  bude vlevo od bodu  $Q$ , protože je  $a - r < \sqrt{a^2 - r^2}$ , ale oba body  $P$ ,  $Q$  budou na kladné poloose  $x$ , protože obě čísla  $a - r$ ,  $\sqrt{a^2 - r^2}$  jsou kladná. Teď bychom si potřebovali ještě znázornit bodem  $R$  na ose  $x$  číslo  $\frac{av}{c}$ . No, ale to budeme musit rozlišit nějaké případy“, pravil Karel a nakreslil tyto tři obrázky (obr. 9a, b, c):

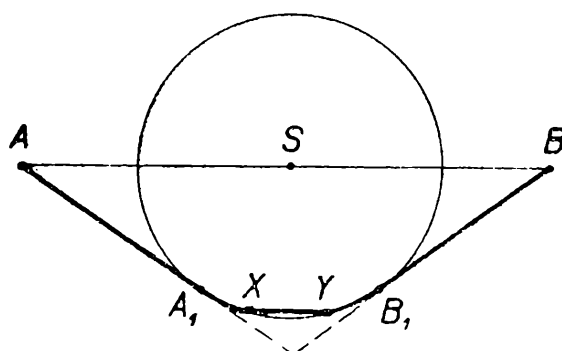
A pak to už šlo jako po másle. Funkci (9) lze nahradit „vlevo od bodu  $R$ “, t. j. pro  $x \leq \frac{av}{c}$  funkcí  $u = \frac{av}{c} - x$  a „vpravo od bodu  $R$ “, t. j. pro  $x \geq \frac{av}{c}$  funkcí  $u = x - \frac{av}{c}$ . Tyto funkce jsou znázorněny přímkami, vlastně jen polopřímkami, které

svírají s osou  $x$  úhly velikosti  $45^\circ$ . A tak za chvíli měli hoši grafy funkce (9) ve všech třech případech (obr. 10a, b, c):

„Sláva, že je to tak jednoduché“, zvolal Karel, „v prvním případě má  $u$  maximum pro  $x = \sqrt{a^2 - r^2}$ , v třetím případě pro  $x = a - r$ ; v druhém případě buď pro  $x = \sqrt{a^2 - r^2}$  nebo pro  $x = a - r$ ; to záleží na tom, kde leží bod  $R$  mezi body  $P, Q$ : zda leží blíže bodu  $P$  nebo bodu  $Q$ .\*)



Obr. 11



Obr. 12

Teď potřebujeme jen vědět, který z případů pro každého z vás nastane. Nikdo neplavete rychleji než na př. třetinou rychlosti běhu. To znamená, že je vždycky  $v \leq \frac{c}{3}$  a  $\frac{v}{c} \leq \frac{1}{3}$ . A teď jaké jsou vzdálenosti? Náš bazén má průměr 60 metrů; je tedy  $r = 30$ . Každý z bodů  $A, B$ , má k nejbližšímu bodu okraje bazénu 20 m; to znamená, že je  $a = 50$  m. Tož si napíšeme:

$$a - r = 20, \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

$$\frac{av}{c} \leq 50 \cdot \frac{1}{3} = 16 \frac{2}{3}$$

No, a to je první případ  $\left(\frac{av}{c} < a - r\right)$ . Tak, kluci, běží se po tečně k bodu dotyku  $A_1$ , pak se plave ve směru  $AB$  do bodu  $B_1$  a odtamtud se běží po tečně do bodu  $B$ , nakreslil Karel konečný výsledek (obr. 11).

\*) Musíme doplnit Karlův výklad: případ a) zahrnuje i situaci  $R \equiv P$ , případ c) i situaci  $R \equiv Q$ . Tím jsou skutečně vyčerpány všechny možné polohy bodu  $R$ . Hoši mohli použít k vyšetřování minima funkce (9) vlastností kvadratické funkce, na což zřejmě nevzpomněli.

„Stačí, abychom si vytyčili body  $A_1, B_1$ “, pravil Mirek, „a jsme připraveni k odstartování.“ „Štěstí, že nám šerif zakázal běhat po okraji bazénu“, dodal ještě Karel, „to by to s tím minimem bylo horší: mohlo by to dopadnout nějak takhle... (obr. 12). A to bychom těžko hledali body  $X, Y$ ; na to bychom možná se svou matikou ani nestačili...“.

Naše povídka končí; ptáte se asi, proč bylo tolik řečí kolem úlohy celkem jednoduché. To proto, že jsme chtěli ukázat několik věcí. Hlavně, co námahy dá někdy převést problém ze života na matematickou úlohu. Nejen řešení, ale dokonce už vyslovení úlohy nemůžeme vysypat z rukávu. Často musíme ledacos zkoušet, opustit cestu, která nevede k cíli nebo je nevhodná, a hledat jinou. V geometrii se snažíme uhodnout výsledek z názoru, v aritmetice počítáním speciálních číselných příkladů. Teprve pak se pokoušíme uhodnutý výsledek odůvodnit; je tedy také matematika svým způsobem věda experimentální.

Řešení matematických úloh, a zejména úloh ze života, je práce tvořivá, která - jak jsme snad trochu ukázali naší povídkou - vyžaduje hodně trpělivosti a času. Ale je to jistě práce zajímavější a užitečnější než pouhé bezduché dosazování do vzorců.

Dr S v a t a v a K u b á l k o v á, Praha:

## Konstrukce s nepřístupnými prvky

Při grafickém řešení nejrůznějších úloh v geometrii a v deskriptivní geometrii se často stane, že papír, na kterém rýsujeme a který budeme nazývat dále nákresnou, není dost velký, takže některé body nebo přímky, které při řešení nutně potřebujeme, leží mimo něj. Jistě jste se již octli při rýsování v takové situaci a vypomáhali jste si třeba tím, že jste k nákresně přidali další papír, na který se již celá potřebná konstrukce vešla a nebo jste odhadli „od oka“, kde asi bude takový nepřístupný bod nebo přímka ležet. Všechna taková „pomocná“ řešení však nepřidají prováděné konstrukci na přesnosti. Jsou však metody, jimiž lze tyto nesnáze odstranit. S některými z nich se seznámíme v tomto článku. Jde o základní konstrukce, v nichž se vyskytují nepřístupné body a přímky, t. j. body a přímky, které leží mimo nákresnu, v níž rýsujeme.

Aby nedošlo při popisování konstrukcí k nedorozumění, umluvíme si předem tato označení: přímku  $p$ , která spojuje body  $A, B$ , budeme značit, jak je zvykem  $p \equiv AB$  nebo krátce  $AB$ ; je-li bod  $P$  průsečíkem přímek  $a, b$ , označíme ho  $P \equiv a \cdot b$  nebo  $a \cdot b$ . Pod slovy „úsečka  $CD$ “ budeme rozumět úsečku o krajních bodech  $C, D$ ; rovněž její délku označíme  $CD$ . Budou-li dva body  $P, Q$  totožné, resp. různé, budeme psát  $P \equiv Q$ , resp.  $P \not\equiv Q$ .\*)

---

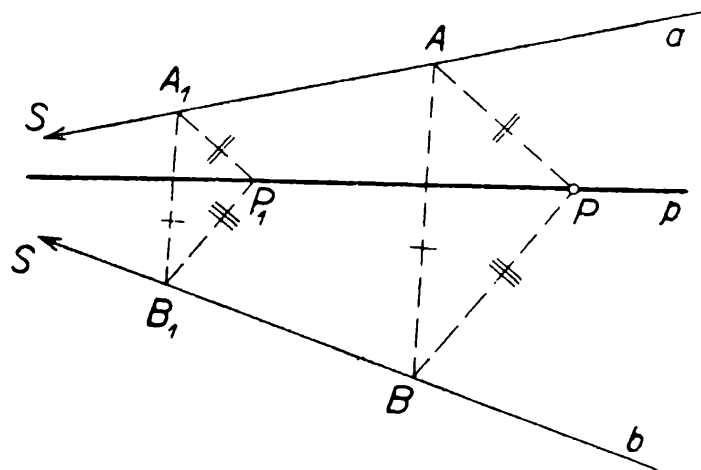
\*) V odborné literatuře se často setkáte s tímto způsobem zkráceného vyjadřování. Věta „Budou-li dva body  $P, Q$  totožné, resp. různé, budeme psát  $P \equiv Q$ , resp.  $P \not\equiv Q$ “, jest složena ze dvou vět a to: „Budou-li dva body  $P, Q$  totožné, budeme psát  $P \equiv Q$ “ a pak „Budou-li dva body různé, budeme psát  $P \not\equiv Q$ “.

Zkratka „resp.“ slova respektive (čti respektýve), česky „vlastně“, vyjadřuje tuto úpravu. (Poznámka red.).

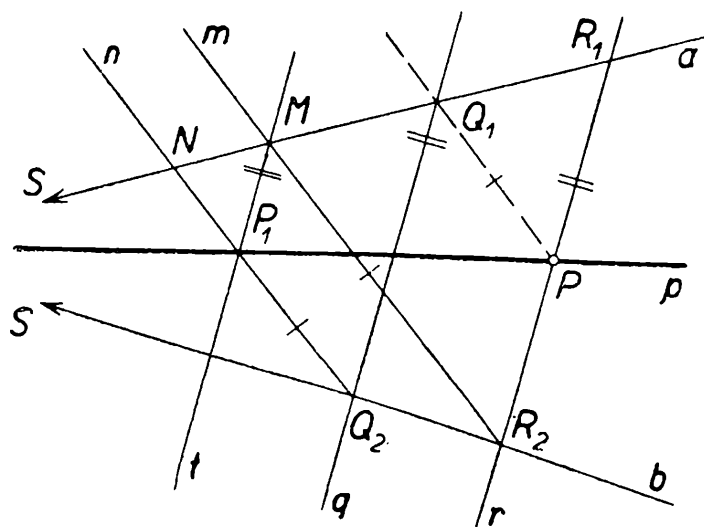
A nyní přikročíme k první úloze, která se často vyskytuje při rýsování.

*Úloha 1. Sestrojiti přímku  $p$ , která prochází daným bodem  $P$  a nepřístupným průsečíkem  $S$  daných přímek  $a, b$ .*

Tuto úlohu je možno řešit mnoha způsoby. Uvedeme některé z nich.



Obr. 1

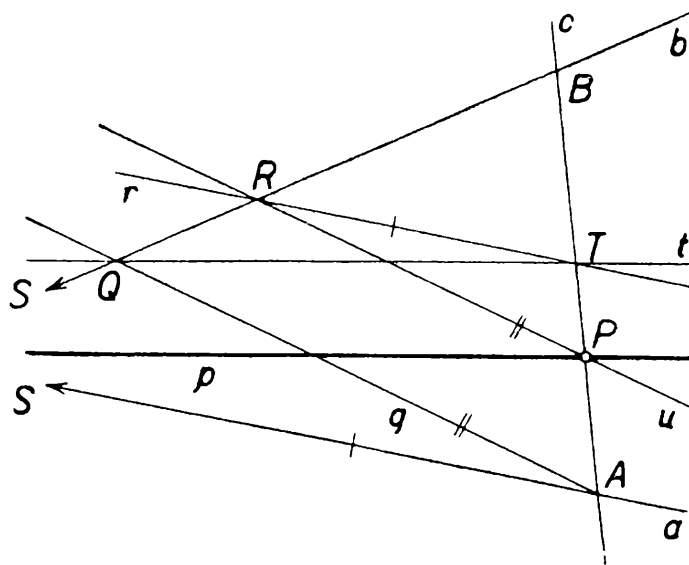


Obr. 2

**Konstrukce 1.** (Obr. 1). Na přímce  $a$ , resp.  $b$  zvolíme libovolně bod  $A$ , resp.  $B$  a sestrojíme trojúhelník  $\triangle ABP$  (samozřejmě body  $A, B, P$  nesmí ležet v přímce). Dále sestrojíme trojúhelník  $\triangle A_1B_1P_1$  tak, aby pro jeho strany platilo  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $A_1P_1 \parallel AP$ ,  $B_1P_1 \parallel BP$  a aby jeho vrcholy  $A_1$ , resp.  $B_1$  ležely na přímkách  $a$ , resp.  $b$ . Trojúhelníky  $\triangle ABP$  a  $\triangle A_1B_1P_1$  jsou zřejmě stejnohlelé vzhledem ke středu  $S$ , který je průsečíkem přímek  $a, b$ . Bodu  $P$  odpovídá v této stejnohlelosti bod  $P_1$ . Proto prochází spojnice  $PP_1$  bodem  $S$ , takže hledaná přímka je  $p \equiv PP_1$ .

**Konstrukce 2.** (Obr. 2). Použijeme opět základních vlastností stejno-  
 lehlosti. Konstrukci nejdříve popíšeme a teprve potom ji odůvodníme. Libovolným  
 bodem  $R_1$  na přímce  $a$  a daným bodem  $P$  vedeme přímku  $r$ ; ta nechť protne přímku  
 $b$  v bodě  $R_2$ . Dalším libovolným bodem  $Q_1$  ( $Q_1 \neq R_1$ ) přímky  $a$  vedeme přímku  
 $q \parallel r$ ; přímka  $q$  protne přímku  $b$  v bodě  $Q_2$ . Rýsujte si zároveň obrázek, abyste  
 měli úkol přehlednější. Bodem  $R_2$ , resp.  $Q_2$  vedeme rovnoběžku  $m$ , resp.  $n$  s přím-  
 kou  $Q_1P$ , která protne přímku  $a$  v bodě  $M$ , resp.  $N$ . Rovnoběžka  $t$  s přím-  
 kou  $q$ , vedená bodem  $M$ , protne přímku  $n$  v bodě  $P_1$ . Spojnice  $PP_1$  je hledaná přímka  $p$ ,  
 která spojuje daný bod  $P$  s nepřístupným průsečíkem  $S$  daných přímek  $a, b$ .

Odůvodnění této konstrukce je jednoduché. Stačí, když dokážeme, že námi  
 zkonstruovaný bod  $P_1$  je obrazem daného bodu  $P$  při nějaké stejnolehlosti o středu  
 $S$ . Zkoumejme proto stejnolehlost se středem  $S$ , v níž bod  $R_2$  je obrazem bodu  $Q_2$ .



Obr. 3

Tuto stejnolehlost označíme pro zkrácení  $\mathbf{S}$ . Ve stejnolehlosti  $\mathbf{S}$  je obrazem bodu  
 $Q_1$  bod  $R_1$  a obrazem bodu  $N$  je bod  $M$ , jak je ihned zřejmé z konstrukce těchto bo-  
 dů. Platí tedy úměra

$$SR_1 : SQ_1 = SM : SN,$$

kteřou můžeme přepsat takto

$$SN : SQ_1 = SM : SR_1. \quad (1)$$

Ze vztahu (1) je vidět, že bod  $N$ , resp.  $M$  je obrazem bodu  $Q_1$ , resp.  $R_1$  v jisté  
 stejnolehlosti  $\bar{\mathbf{S}}$  se středem  $S$ . Ve stejnolehlosti  $\bar{\mathbf{S}}$  je přímka  $n$  obrazem spojnice  
 $Q_1P$  a přímka  $t$  je obrazem přímky  $r$ . Proto bod  $P_1$ , jakožto průsečík přímek  $n, t$ ,  
 je ve stejnolehlosti  $\bar{\mathbf{S}}$  obrazem daného bodu  $P$ , jakožto průsečíku přímek  $r, Q_1P$ .  
 Prochází tedy spojnice  $p \equiv PP_1$  středem  $S$  stejnolehlosti  $\bar{\mathbf{S}}$ . Tím je naše kon-  
 strukce odůvodněna.

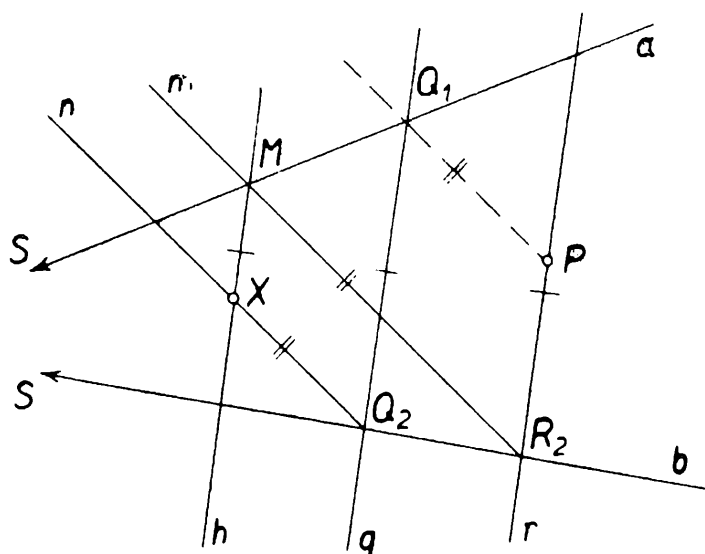
**Konstrukce 3.** (Obr. 3). Daným bodem  $P$  vedeme libovolnou přímku  $c$ ,





s přímkou  $AP$  vedená bodem  $A_1$  protne danou přímkou  $h$  v bodě  $X$ , kterým prochází podle konstrukce 1. z úlohy 1. přímkou  $p \equiv PS$ . Je tedy bod  $X$  hledaným průsečíkem přímek  $p$  a  $h$ .

**K o n s t r u k c e 2.** (Obr. 5). Jiné řešení naší úlohy vyplyne snadno z obrázku 2, jestliže ztotožníme tam uvažovanou přímkou  $t$  s danou přímkou  $h$ . Tím dostaneme tento způsob řešení: bodem  $P$  vedeme přímkou  $r \parallel h$  a označíme její průsečík s přímkou  $b$  jako bod  $R_2$ . Získáme tak přímkou  $m \equiv R_2M$  (nezapomeňme, že bod  $M$ , který je průsečíkem přímek  $a, h$ , známe); přímkou  $PQ_1 \parallel m$  protne přímkou  $a$  v bodě  $Q_1$ , takže můžeme sestrojiti přímkou  $q \parallel h$ . Jejím průsečíkem  $Q_2$  s přímkou  $b$  vedeme přímkou  $n \parallel m$  a ta protne danou přímkou  $h$  v hledaném průsečíku  $X$  přímek  $h$  a  $p \equiv PS$ , jak plyne z druhého způsobu řešení úlohy 1.



Obr. 5

Všimněte si, že ani při jedné z obou uvedených konstrukcí není třeba přímku  $p$  vyrýsovat. Je zřejmé, že v úloze 2. nemusíme ověřovat správnost konstrukce 1., ani konstrukce 2., neboť oba způsoby jsou specialisací příslušných způsobů řešení úlohy 1. a byly tam dokázány. Totéž platí i pro úlohu 3. a pro úlohu 4.

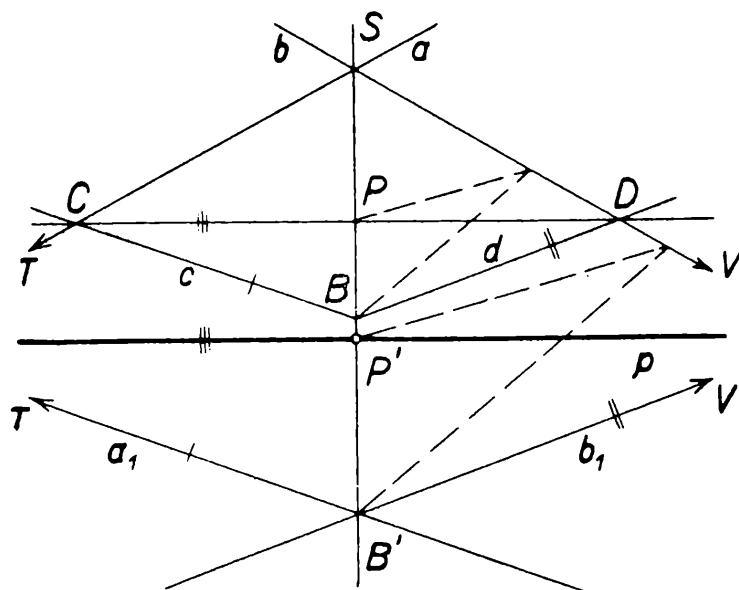
**Úloha 3.** (Obr. 6). Sestrojiti přímkou  $p$  rovnoběžnou s danou přímkou  $t$  a procházející nepřístupným průsečíkem  $S$  dvou daných přímek  $a, b$ .

K řešení dané úlohy můžeme s výhodou použít vztahu (2), který jsme odvodili při ověřování konstrukce 3. v úloze 1. Stačí totiž, abychom v obr. 3 ztotožnili přímkou  $QT$  s danou přímkou  $t$ . Tím dostaneme tuto konstrukci: libovolnou přímkou  $c$  protne přímky  $a, b, t$  postupně v bodech  $A, B, T$ . Bodem  $T$  vedeme přímkou  $r \parallel a$ , která protne  $b$  v bodě  $R$ . Přímkou  $u$  procházející bodem  $R$  rovnoběžně s přímkou  $q \equiv AQ$ , kde  $Q$  je průsečík přímek  $t, b$ , protne přímkou  $c$  v bodě  $P$  hledané přímky  $p$ .

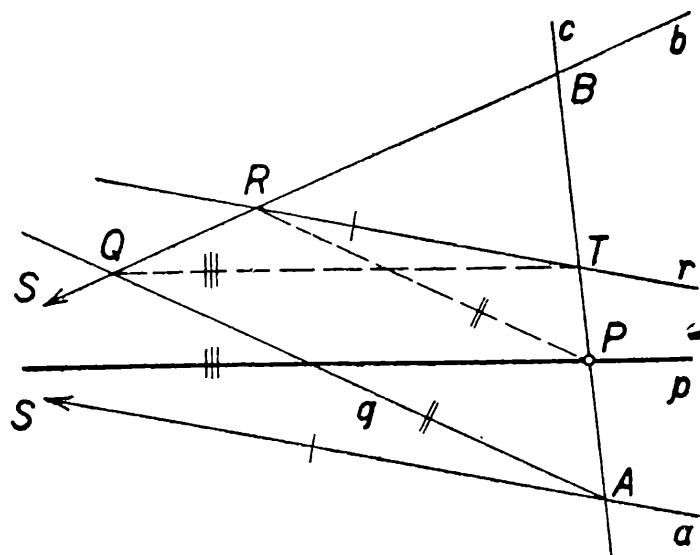
Z úlohy 3. plyne bezprostředně řešení další úlohy.

Úloha 4. Sestrojiti průsečík  $P$  dané přímky  $u$  s přímkou  $p$ , která je rovnoběžná s danou přímkou  $t$  a prochází nepřístupným průsečíkem  $S$  daných přímek  $a$ ,  $b$ .

Aby byla daná úloha vyřešena, stačí, aby bod  $P$  z obr. 6, který určuje přímku  $p \parallel t$ , ležel zároveň na dané přímce  $u$ . Ztotožníme proto přímku  $c$ , která je při ře-



Obr. 6



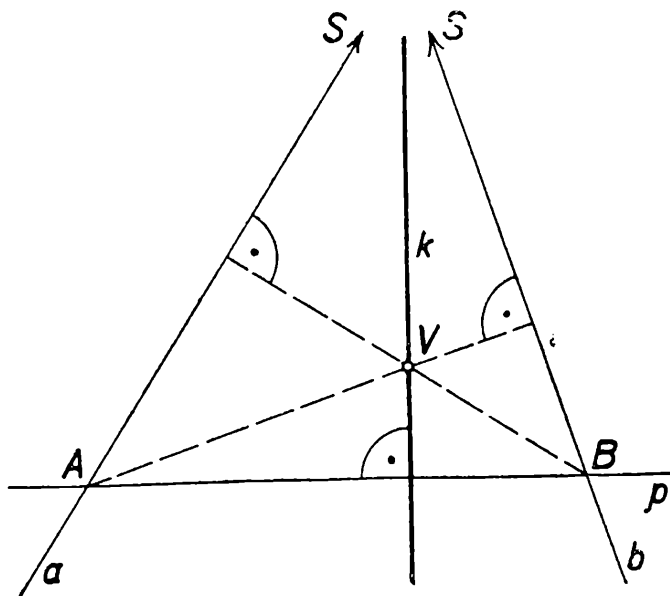
Obr. 7

šení úlohy 3. libovolná, s danou přímkou  $u$ . Detailní provedení úlohy 4. přenechávám čtenáři.

Dovedeme již spojit, dokonce několika způsoby, daný bod  $T$  s nepřístupným bodem  $V$ . Může se však stát, že i bod  $T$  leží mimo nákresnu. Sestrojení přímky  $TV$  v takovém případě si všimneme v další úloze.

Úloha 5. (Obr. 7). *Nepřístupný bod  $T$ , resp.  $V$ , je dán jako průsečík přímek  $a, a_1$ , resp.  $b, b_1$ . Sestrojiti přímku  $p \equiv TV$*

K provedení dané úlohy použijeme základních vlastností stejnolehlosti. Uvnitř úsečky  $SB'$ , kde  $S \equiv a \cdot b$ ,  $B' \equiv a_1 \cdot b_1$ , zvolme libovolně bod  $B$ , ale tak, aby rovnoběžka  $c$ , resp.  $d$ , vedená bodem  $B$  s přímkou  $a_1$ , resp.  $b_1$  protнула přímkou  $a$ , resp.  $b$ , v mezích nákresny. Vyšetřujme stejnolehlost, označme ji třeba  $\mathbf{S}$ , o středu stejnolehlosti  $S$ , ve které bod  $B'$  je obrazem bodu  $B$ . Ve stejnolehlosti  $\mathbf{S}$  je bod  $T$ , resp.  $V$ , obrazem bodu  $C \equiv a \cdot c$ , resp.  $D \equiv b \cdot d$  a tedy hledaná přímka  $p \equiv TV$  je obrazem přímky  $CD$ . Z toho plyne, že přímka  $p \parallel CD$ . Stačí proto sestrojiti jeden bod, kterým hledaná přímka  $p$  prochází. Označme písmenem  $P$  průsečík



Obr. 8

přímek  $SB$  a  $CD$ . Obrazem bodu  $P$  ve stejnolehlosti  $\mathbf{S}$  je bod  $P'$ , který je průsečíkem přímek  $SB' \equiv SB$  a  $p \equiv TV$ . Podaří-li se nám tedy sestrojiti bod  $P'$ , známe tím i hledanou přímku  $p$ . Konstrukce bodu  $P'$  je velmi jednoduchá a zakládá se na úměře

$$SP' : SP = SB' : SB ,$$

která platí vzhledem k tomu, co jsme řekli o dvojicích bodů  $P, P'$  a  $B, B'$ ; je provedena v obr. 7 čárkovaně. Hledaná přímka  $p \equiv TV$  prochází bodem  $P'$  a je  $p \parallel CD$ .

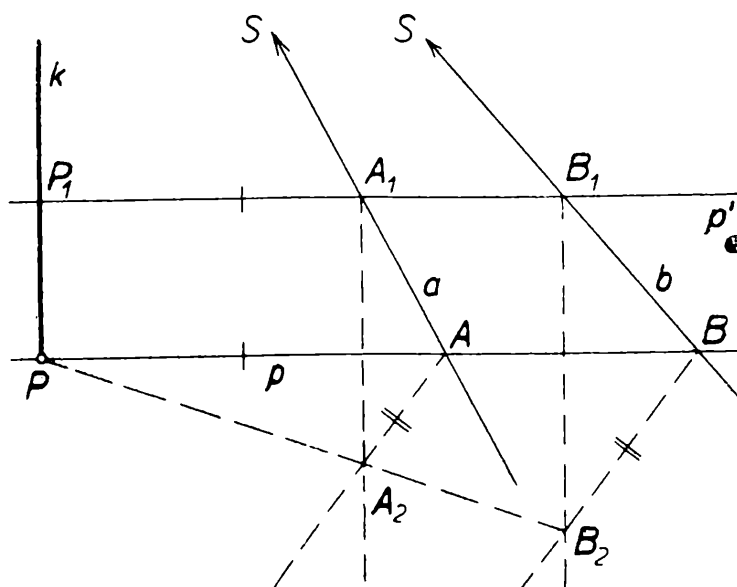
Poněkud jiného druhu než předcházející úlohy jsou další dvě úlohy.

Úloha 6. (Obr. 8). *Spustiti kolmici  $k$  na přímku  $p$  s nepřístupného průsečíku  $S$  daných přímek  $a, b$ .*

K řešení dané úlohy použijeme známé vlastnosti trojúhelníka, podle níž se tři výšky trojúhelníka protínají v jediném bodě. Dané přímky  $p, a, b$  určují trojúhelník  $\Delta ABS$ . Kolmice spuštěné z bodu  $A \equiv a \cdot p$ , resp.  $B \equiv b \cdot p$  na přímku  $b$ , resp.  $a$ ,

jsou jeho výškami a protínají se v bodě  $V$ , kterým prochází také třetí výška  $k$ . Přímka  $k$  jde tedy bodem  $S \equiv a \cdot b$  a je  $k \perp p$ . K provedení této konstrukce lze použít také libovolné přímky  $p' \parallel p$ , takže lze vždy docílit toho, aby body  $A, B$  ležely v mezích nákresny.

Tento postup ovšem selže, když bod  $V$  je nepřístupný. V takovém případě uvedeme pak tuto konstrukci (obr. 9): Průsečíky přímky  $p$  s přímkou  $a$ , resp.  $b$ , označme  $A$ , resp.  $B$ . Vedeme libovolnou přímku  $p' \parallel p$ , která protne přímku  $a$ , resp.  $b$ , v bodech  $A_1$ , resp.  $B_1$ . Kolmici vedenou z bodu  $A_1$  k přímce  $p$  protne libovolnou přímku vedenou bodem  $A$  v bodě  $A_2$  a kolmici vedenou z bodu  $B_1$  na přímku  $p$  protne přímku vedenou bodem  $B$  rovnoběžně s  $AA_2$  v bodě  $B_2$ . Potom spojnice  $A_2B_2$  stanoví na přímce  $p$  bod  $P$ , který je patou kolmice  $k$  vedené z nepřístupného bodu  $S \equiv a \cdot b$  na přímku  $p$ .



Obr. 9

Správnost uvedené konstrukce bude prokázána, jestliže dokážeme, že body  $P, P_1 \equiv p' \cdot k, S \equiv a \cdot b$  leží v jedné přímce. Platí však úměra

$$PA_2 : PB_2 = PA : PB$$

a zároveň úměra

$$PA_2 : PB_2 = P_1A_1 : P_1B_1$$

Odtud plyne

$$PA : PB = P_1A_1 : P_1B_1$$

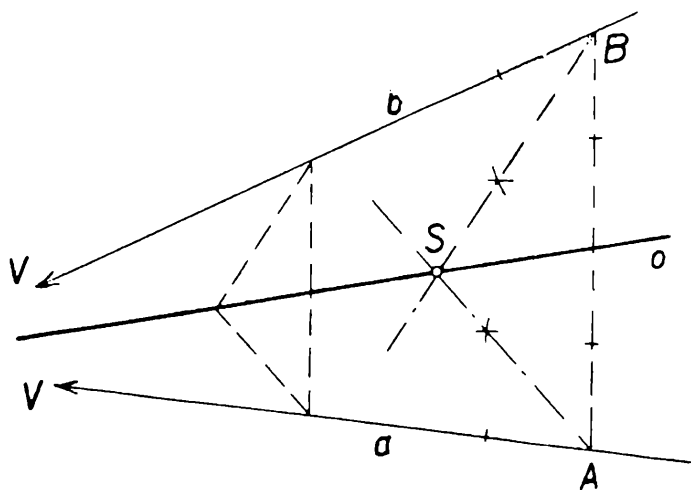
což znamená, že přímky  $a, b, k \equiv PP_1$  se protínají v témže bodě  $S$ .

**P o z n á m k a :** Obrázku 8 lze užít také k novému způsobu řešení úlohy 1.,

totiž k sestrojení přímky  $k$ , která je spojnicí bodu  $V$  s nepřístupným průsečíkem  $S$  daných přímek  $a$ ,  $b$ .

*Úloha 7. (Obr. 10). Sestrojiti osu  $o$  úhlu dvou přímek  $a$ ,  $b$ , jehož vrchol  $V$  leží mimo nákresnu.*

Zřejmě můžeme předpokládat, že daný úhel je dutý. Zvolíme-li na přímce  $a$ , resp.  $b$ , libovolný bod  $A \neq V$ , resp.  $B \neq V$ , leží celá úsečka  $AB$  uvnitř uvažovaného dutého úhlu a body  $A$ ,  $B$ ,  $V$  určí trojúhelník  $\triangle ABV$ . Osy úhlů  $\sphericalangle AVB$ ,  $\sphericalangle VAB$  a  $\sphericalangle VBA$  se protínají, jak známo, v jediném bodě  $S$ , totiž ve středu kružnice vepsané  $\triangle ABV$ . Sestrojíme-li tedy osy úhlů  $\sphericalangle VAB$  a  $\sphericalangle VBA$ , protínají se tyto osy v bodě  $S$ , kterým prochází také přímka  $o$  půlicí daný úhel  $\sphericalangle AVB$ . Tím je naše úloha převedena na úlohu 1., neboť hledanou osu  $o$  dostaneme jako spojnicí  $S$  s nepřístupným průsečíkem  $V$  přímek  $a$ ,  $b$ . Příslušná konstrukce je vyznačena v obr. 10.



Obr. 10

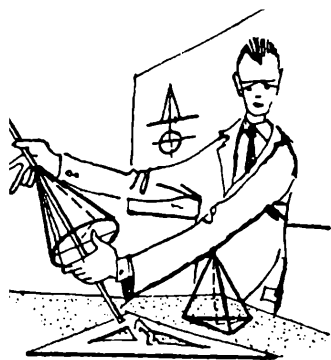
Uvedenými konstrukcemi nejsou samozřejmě vyčerpány všechny možné úkoly týkající se nepřístupných elementů. Velmi obsažně pojednává o těchto úlohách J. Sobotka v knize [1], ve které jsou mnohé z probraných konstrukcí provedeny ještě jinými způsoby. Úlohy, v nichž se vyskytují nepřístupné body nebo přímky, lze často řešit výhodně afinitou nebo středovou kolineací (viz [1] nebo O. A. Volberg v knize [2]).

#### L i t e r a t u r a

- [1] Sobotka, J.: Deskriptivní geometrie promítání paralelního. Praha, Česká matice technická, svazek II., str. 544–564; 1906.
- [2] Volberg, O. A.: Osnovnye idej proektivnoj geometrii. Moskva, Učpedgiz 1949.
- [3] Hruška, V.: Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. Praha, JČMF, Cesta k vědění, svazek 7; 1940.

(Pokračování)

# Deskriptivní geometrie



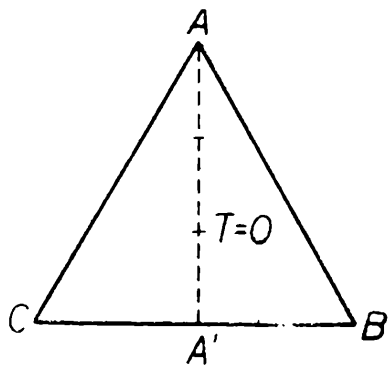
Dr Václav Havel, Praha:

## O pravidelném čtyrstěnu

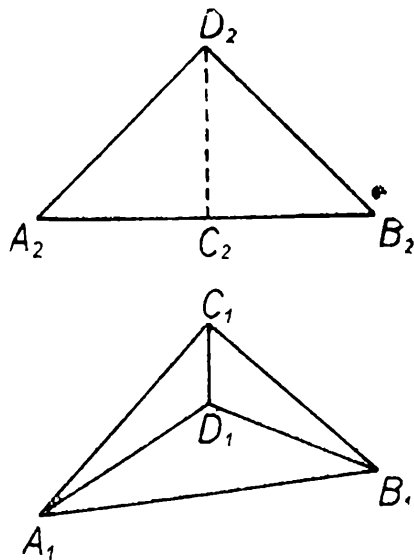
Nejprve dokážeme jednoduchou větu o trojúhelníku. Připomeňme, že orthocentrum trojúhelníka je společný průsečík prodloužených výšek a těžiště je společný průsečík těžnic.

Věta 1. a) *Splývá-li v trojúhelníku těžiště s orthocentrem, pak je pravidelný.*  
b) *V každém pravidelném trojúhelníku splývá těžiště s orthocentrem.*

*Důkaz.* (Viz obr. 1). a) Předpokládejme, že v daném trojúhelníku splývá těžiště s orthocentrem. To však znamená, že těžnice vždy splývá s příslušnou výškou. Z toho dále plyne, že prodloužená těžnice je vždy osou kolmé souměrnosti daného trojúhelníka, a proto jsou obě strany, přilehlé k těžnici, vždy stejně dlouhé. Tedy každé dvě strany daného trojúhelníka jsou stejně dlouhé a daný trojúhelník je pravidelný.



Obr. 1



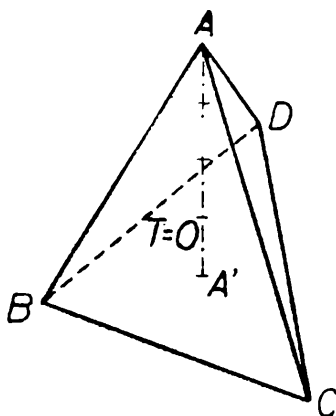
Obr. 2. Půdorys a narys čtyrstěnu.

b) Je-li daný trojúhelník pravidelný, pak každá jeho těžnice splývá s příslušnou výškou, a tedy též těžiště splývá s orthocentrem. Věta 1. je dokázána.

Ve větě 1. je popsána charakteristická vlastnost pravidelného trojúhelníka. Ptejme se, zda platí analogická vlastnost pro pravidelný čtyrstěn. Jak poznáme z věty 2., odpověď kladná. Avšak než vyslovíme větu 2., definujme ještě několik pojmů.

Protínají-li se přímky, vedené vždy vrcholem čtyrstěnu kolmo k protější stěně,

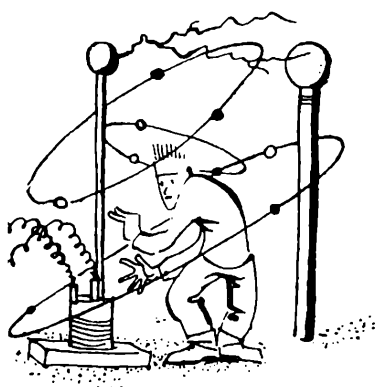




Obr. 4. Vojenská perspektiva čtyřstěnu.

**P o z n á m k a** zejména pro čtenáře, který má hlubší zájem o geometrii:

Kdybychom byli obeznámeni s vícerozměrnými prostory, pak by bylo možno v našich úvahách pokračovat. Dokázali bychom pak, že „vícerozměrný mnohostěn“ je pravidelný právě tehdy, když jeho těžiště je též orthocentrem. Takové úvahy by přesahovaly rámec tohoto časopisu.



## Fysika

Václav Müller, Praha:

### Thermoanemometr

Vhodným příkladem k širšímu procvičení látky z fyziky pro 11. třídu jedenáctileté střední školy, pojednávající o změně odporu čistého kovu s jeho teplotou použitím *metody Wheatstoneova mostu*,\*) je metoda měření rychlostí proudících plynů *thermoanemometrem*. Žáci si mohou takto experimentálně ověřit též základní poznatky z aeromechaniky. Uvedené metody se používá hlavně v leteckém výzkumu.

Metoda thermoanemometru se zakládá na zjišťování tepelné ztráty, kterou dozná tenký elektricky žhavený drátek (Pt, Pt-Ir, Wo, Ni) v proudu plynu.

Přednost této metody spočívá v možnosti přesného měření odporu kovového drátku elektrickými měrnými metodami, v malých rozměrech drátku, i v jeho

\*) Výklad i experimentální použití metody Wheatstoneova mostu je pro pedagogické účely vhodně podáno v knize: Vladimír Pilát: Návody k základním fyzikálním měřením, r. 1955, str. 123–125.



malé tepelné setrvačnosti (setrvačnost žhaveného drátku je tím menší, čím menší je jeho tepelná kapacita, t. j. čím menší je jeho průměr), čímž je možno zkoumati proudová pole se silnými gradienty, stejně jako rychlá kolísání rychlosti. Nevýhoda je v tom, že použitý thermoanemometr musí být pro každý plyn zvlášť cejchován, že je lehko poškoditelný, cejchovní křivka thermoanemometru se během času mění, a že jeví patrný pokles citlivosti při vysokých rychlostech a citlivost ke změnám teploty proudícího plynu.

Pro tepelnou ztrátu  $Q$  žhaveného drátku, redukovanou na jeho délkovou jednotku a jednotku doby, v poloze kolmo ke směru rychlosti proudu  $v$ , plyne z theorie za předpokladu

$$\frac{s \cdot c_p \cdot v \cdot d}{\lambda} > 0,08$$

vztah:

$$Q = \lambda (t_d - t_p) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2\pi \cdot s \cdot c_p \cdot v \cdot d}{\lambda}} \right\}, \quad (1)$$

kde  $d$  je průměr žhaveného drátku,  $\lambda$  tepelná vodivost plynu,  $c_p$  jeho specifické teplo při stálém tlaku,  $s$  jeho hustota a  $t_d$ ,  $t_p$  teplota drátku a plynu.

Jestliže drátek odporu  $R_d$  ( $\Omega$ ) je žhaven elektrickým proudem  $I_d$  (A), pak za ustálených poměrů platí:

$$0,239 \cdot I_d^2 \cdot R_d = Q \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) plyne při stálých  $s$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ,  $d$

$$I_d^2 \cdot R_d = (t_d - t_p) \cdot \left\{ \frac{\lambda}{0,239} + \frac{\lambda}{0,239} \sqrt{\frac{2\pi \cdot s \cdot c_p \cdot d}{\lambda}} \cdot \sqrt{v} \right\}$$

čili:

$$I_d^2 \cdot R_d = (t_d - t_p) \cdot \{ a \sqrt{v} + b \} \quad (3)$$

kde konstanty:

$$a = \frac{\sqrt{2\pi \cdot \lambda \cdot s \cdot c_p \cdot d}}{0,239}$$

$$b = \frac{\lambda}{0,239}$$

Tento vztah mezi žhavicím proudem drátku  $I_d$ , odporem drátku  $R_d$  a rychlostí proudícího plynu  $v$  je důležitý při použití metody thermoanemometru.

Ze vztahu (3) plyne, že pro  $R_d = \text{konst.}$  bude  $I_d = f(v)$  a pro  $I_d = \text{konst.}$  lze sledovati závislost  $R_d = f(v)$ . K měření se používá dvou úprav metody Wheatstoneova mostu (obr. 1a, b):

Z Kirchhoffových zákonů plyne pro proud tekoucí drátkem:

$$I_d + I' = I; \quad I_d \cdot R_1 = I' \cdot R_2 \quad \Rightarrow \quad I_d = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

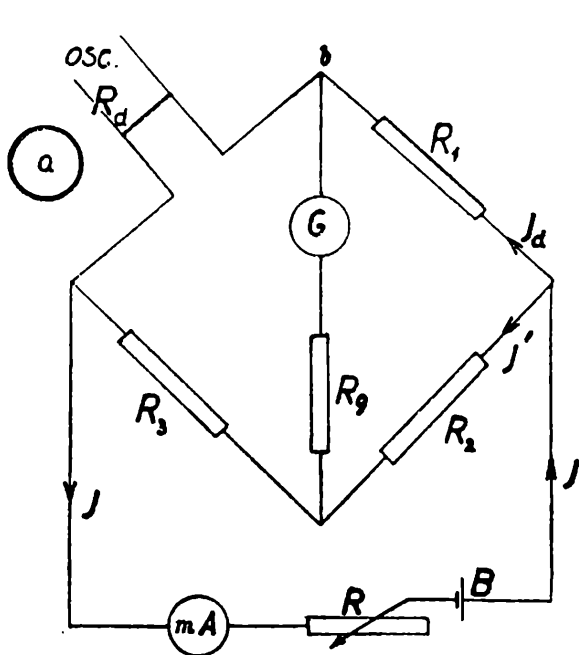
Z podmínky rovnováhy Wheatstoneova mostu plyne pro odpor drátku:

$$R_d = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3$$

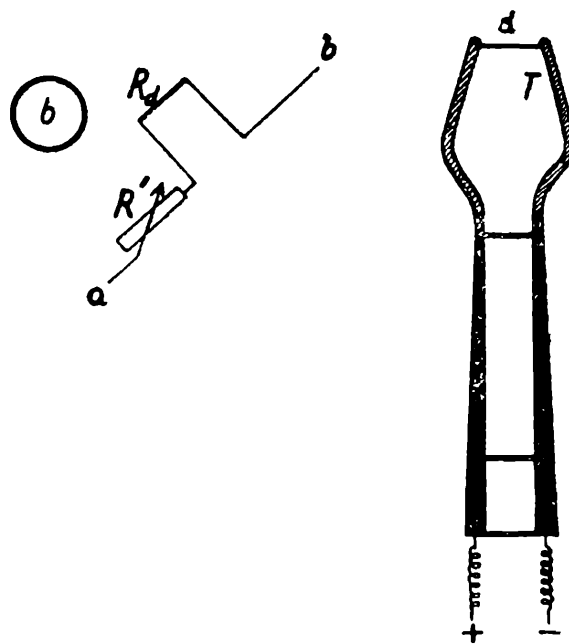
V zapojení je nutno volit pokud možno krátké a stejné měděné spojovací dráty od thermoanemometru k mostu.

Jinak je nutno použít metody Thomsonova dvojmostu (viz na př. knihu: V. Petržílka - S. Šafrata: Elektřina a magnetismus, r. 1953, str. 174).

Odpor  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (na př. manganinové regulační odpory) musí být neinduktiv-



Obr. 1



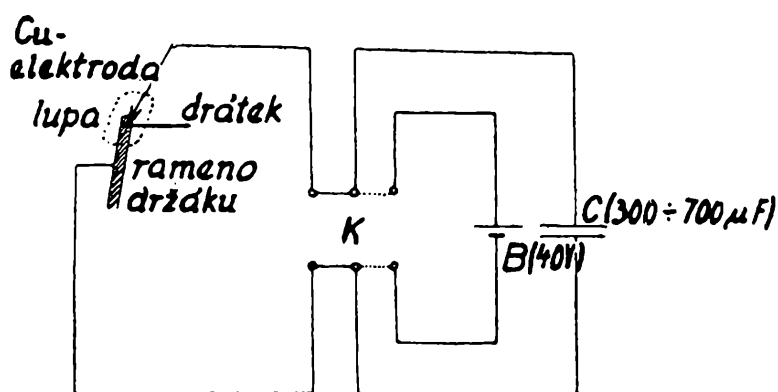
Obr. 2

ní a nezávislé na teplotě. V diagonále mostu je vepjat galvanometr  $G$  v serii s regulačním odporem  $R_g$ . Ve vnější větvi mostu je zařazen regulační odpor  $R$ , miliampérmetr  $mA$  a zdroj stejnosměrného proudu  $B$ . Ve větvi  $ab$  je zapojen držák s tenkým žhaveným drátkem ( $\varnothing 0,01 - 0,1$  mm podle potřeby). Měděné spojovací dráty jsou vyvedeny ze spodního konce držáku (obr. 2). Mezi pérujícími nosníky  $T$  je mírně napjat drátek  $d$ . Bodové navaření drátku na ramena držáku se provádí elektrickým proudem z kondensátoru při jeho vybití, což je zobrazeno schematicky obr. 3. Poněvadž drátek je tenký, je nutno navaření provést pod lupou, použitím ostré Cu elektrody, při čemž se Cu elektroda nesmí dotknout ramene držáku. Drátek při tom přidržujeme vhodným isolačním držáčkem. Vhodnou velikost náboje je nutno předem vyzkoušet.

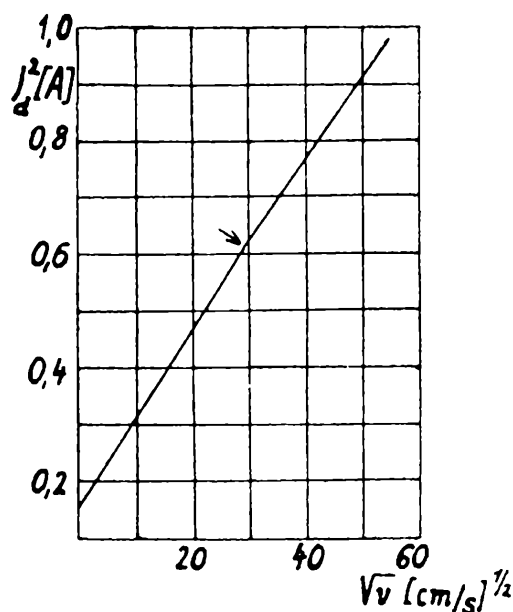
Most vyvážíme pro nulovou rychlost proudu plynu nebo vhodnou jeho rychlost. (Pozor na přepálení drátku!). Když pozměníme velikost rychlosti proudu plynu, změní se teplota drátku a tím i jeho odpor, což se projeví porušením rovnováhy mostu. Změnou proudu  $I_d$  odporem  $R$  nebo odporem větve  $ab$  odporem  $R'$  opět můstek vyrovnáme. V druhém případě měříme při stálé hodnotě odporu větve  $ab$ ,

čili při  $I_d = \text{konst.}$  Před každým měřením pro určitý plyn je nutno thermoanemometr ocejchovat. [ $I_d = f(v)$ ;  $R_d = f(v)$ ]. Na obr. 4 je cejchovní křivka  $I_d^2 = f(\sqrt{v})$  Pt-Ir drátku tloušťky 0,05 mm a 25,8 mm délky. Jak patrně, křivka se skládá ze dvou přímkových částí. Zlom leží v místě, kde laminární přechod tepla přechází v turbulentní. K ocejchování thermoanemometru použijeme na př. Prandtlovy trubice s citlivým mikromanometrem. (Viz na př. knihu: Vladimír Pilát: Návod k základním fyzikálním měřením, r. 1955, str. 58–61).

Abychom drátek při počátečním vyrovnávání mostu nepoškodili, je nutno alespoň předem odhadnout jeho odpor v  $\Omega$ , známe-li příslušný teplotní součinitel odporu. Pro drátek Pt  $\alpha = 38 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$ ; Ni  $\alpha = 62 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$ ; Wo  $\alpha = 3,96 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ .



Obr. 3



Obr. 4

Jsou-li známy rozměry drátku, lze  $R_d$  vypočísti ze vztahu

$$R_d = \frac{4 l \cdot \rho}{\pi \cdot d^2} (\Omega) \quad (4)$$

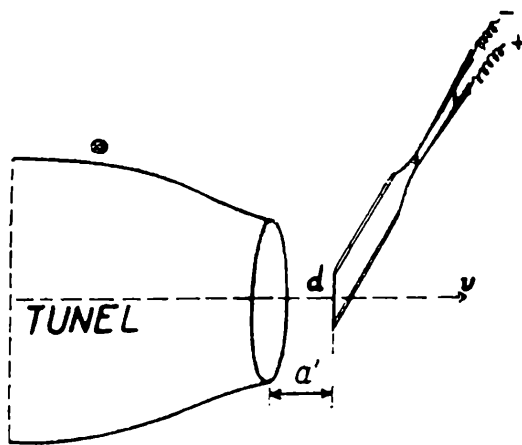
kde  $\rho$  je jeho měrný odpor.

Měření thermoanemometrem bude tím přesnější, čím větší bude rozdíl teploty drátku a teploty atmosférické, tedy  $t_d \gg t_{atm}$  (zn.  $\gg$  znamená „mnohem větší“), neboť tím poklesne vliv změn atmosférické teploty na měření. Byla na př. zjištěno, že je nutno drátek vyžhavit na teplotu  $t_d = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$  při  $t_{atm} = 17 \text{ }^\circ\text{C}$ ; aby chyba měření rychlosti plynu nepřevyšovala 1 %. Doporučuje se tedy používat k přesným měřením velmi tenkých drátků (řádově  $10^{-2} \text{ mm}$ ). Pro školní demonstrační účely stačí úprava měření na obr. 5.

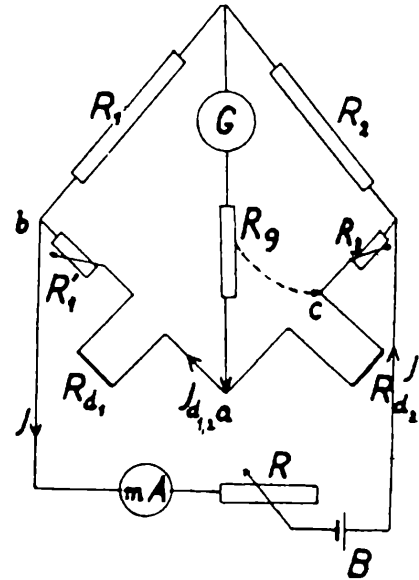
Poznámka. K ústí tunelu lze připojit na př. trubici s různými průřezy a studovat závislost průtokových rychlostí na velikostech průřezů. Chceme-li sledovat rychlá kolísání rychlosti proudícího plynu na př. při turbulencích, ponecháváme žhavicí proud stálý a sledujeme výchylky galvanometru. Ten se dá zcitlivět použitím

osciloskopu tak, že turbulence snímáme na osciloskop přímo ze žhaveného drátku (obr. 1).

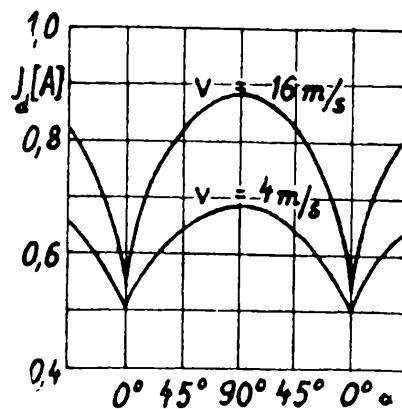
Methody thermoanemometru se dá též použít pro proměřování směru rychlosti proudícího plynu. Při použití shora uvedeného thermoanemometru s jedním žhaveným drátkem, jak patrně z obr. 7, je elektrický proud potřebný k udržení určité teploty drátku silně závislý na úhlu  $\alpha$  sevřeném drátkem a směrem rychlosti proudu. \* Jak lze očekávat, jeví křivka pro  $\alpha = 0^\circ$  jasné, ostré minimum. Pro přesná měření



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

jak velikosti, tak směru rychlosti proudu, se používá na př. dvou žhavených drátků, svírajících úhel  $8^\circ$  až  $10^\circ$  a žhavených týmž proudem. Dva drátky mající společný bod  $a$  ve vrcholu ostrého úhlu, lze upnout na jeden držák se třemi pérujícími nožkami a tudíž třemi vývody: jedním ze společného bodu  $a$ , dvěma z obou zbývajících konců drátků. Tuto soustavu dvou žhavených drátků zapojíme do dvou větví Wheatstoneova mostu (obr. 6).

Odpory  $R_1$  a  $R_2$  volíme sobě rovny,  $R_3 = 0$ . Poněvadž se těžko podaří zvolit drátky  $R_{d_1}$  a  $R_{d_2}$  naprosto stejných odporů, slouží ke kompensaci větví žhavených drátků regulační odpor  $R'_1$ . Vyvážíme-li most, anuluje se výchylka galvanometru,

jestliže plyn proudí ve směru osy ostrého úhlu sevřeného dvěma drátky. Abychom mohli současně tímto způsobem měřiti také velikost rychlosti proudu plynu, přepneme diagonální spoj (obr. 6) na kontakt  $c$  (tečkovaně) a volíme  $R_3 \doteq R_{d_1} + R_{d_2}$ .

Pro školní demonstrační i polytechnické účely stačí provádět indikaci směru proudu plynu použitím sondy s jedním žhaveným drátkem.

#### L i t e r a t u r a :

- [1] Popov: Někatorije zadači i metodi experimentalnoj aeromechaniki, r. 1952, str. 67—72.  
[2] Ower: Measurement of air flow, r. 1952.

L a d i s l a v J a n k o, Praha:

## O ultrazvukově optickém zobrazování předmětů reliefním obrazem

Optické zobrazení předmětu předpokládá existenci paprsků, vycházejících z každého bodu předmětu všemi směry. Tyto paprsky jsou spojovány soustavou čoček nebo zrcadel. Každý bod předmětu se zobrazí v obrazové rovině použité optické soustavy, v níž tak vznikne obraz pozorovaného předmětu. Dříve bylo bráno v úvahu pouze působení světelných paprsků a za jediné optické zobrazení bylo pokládáno zobrazení světlem. Dnes je k tomu třeba dodat, že se k optickému zobrazení podařilo využít i elektronových paprsků a *ultrazvuku*, t. j. zvuku s kmitočtem vyšším než je kmitočet zvuku pro člověka slyšitelného. Zákony, kterými se řídí průchod elektronových paprsků nebo ultrazvuku silovými poli nebo hraničními plochami rozličných prostředí, jsou analogické zákonům šíření světla a jsou již dnes dostatečně prostudovány.

Možnost ultrazvukově optického zobrazení ukázal poprvé R. Pohlman v r. 1939. Princip metody je v přeměně ultrazvukového obrazu ve světelný.

Velmi jemné ploché částičky hliníku, *suspendované*\*) v xylenu,\*\*) jsou působením ultrazvuku orientovány, a to v tím větší míře, čím větší je intenzita ultrazvuku. Suspence je v ploché kyvetě, umístěné v rovině obrazu, vytvořeného ultrazvukovými paprsky. *Kyvetu* je nádobka na př. válcová, jejíž čelní stěny jsou přesně rovnoběžné a rovinné. V našem případě je na straně přivrácené ke zdroji ultrazvuku uzavřena tenkou měděnou folií, propouštějící ultrazvuk. Na druhé straně je uzavřena skleněnou deskou. Osvětlíme-li kyvetu se strany skleněné desky, přemění se ultrazvukový obraz v obraz optický a stane se tak viditelným. Předmět ozařovaný

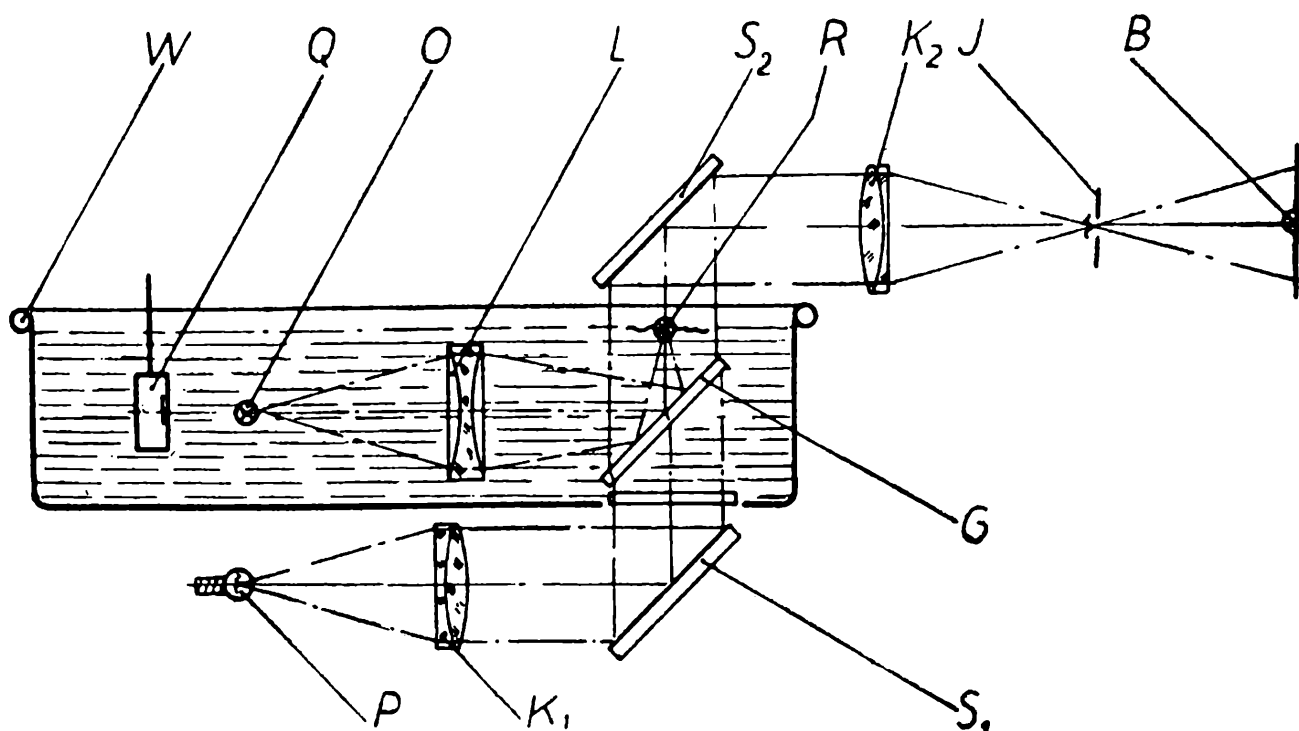
---

\*) Suspence je směs kapaliny a nesmírně malých tuhých částiček, které se v kapalině vznášejí.

\*\*\*) Xylen je bezbarvá, organická, s vodou se nemísící kapalina, charakteristického zápachu, silně hořlavá.

ultrazvukem pohlcuje částečně ultrazvuk; silnější části předmětu působí větší absorpci a takovou částí prochází tedy menší intenzita ultrazvuku. Tato nestejná intenzita způsobí v obrazové rovině nestejný stupeň orientace hliníkových částeček. To má za následek, že při osvětlení jsou některá místa ultrazvukového obrazu jasnější a některá tmavší. Přeměnil se tedy ultrazvukový obraz v obraz optický.

Při ultrazvukově optických pokusech, prováděných v Jeně, bylo použito nové myšlenky. Pokusné zařízení bylo uspořádáno tak, že ultrazvuková obrazová rovina ležela v hladině kapaliny. Tlak ultrazvukového záření způsobuje zvednutí hladiny kapaliny. Toto zvednutí závisí na intenzitě ultrazvuku, takže ultrazvukový obraz přímo tvoří obraz reliefní. Vhodné světelné zařízení může reliefní obraz přenést na stínítko, kde může být pohodlně pozorován i fotografován.



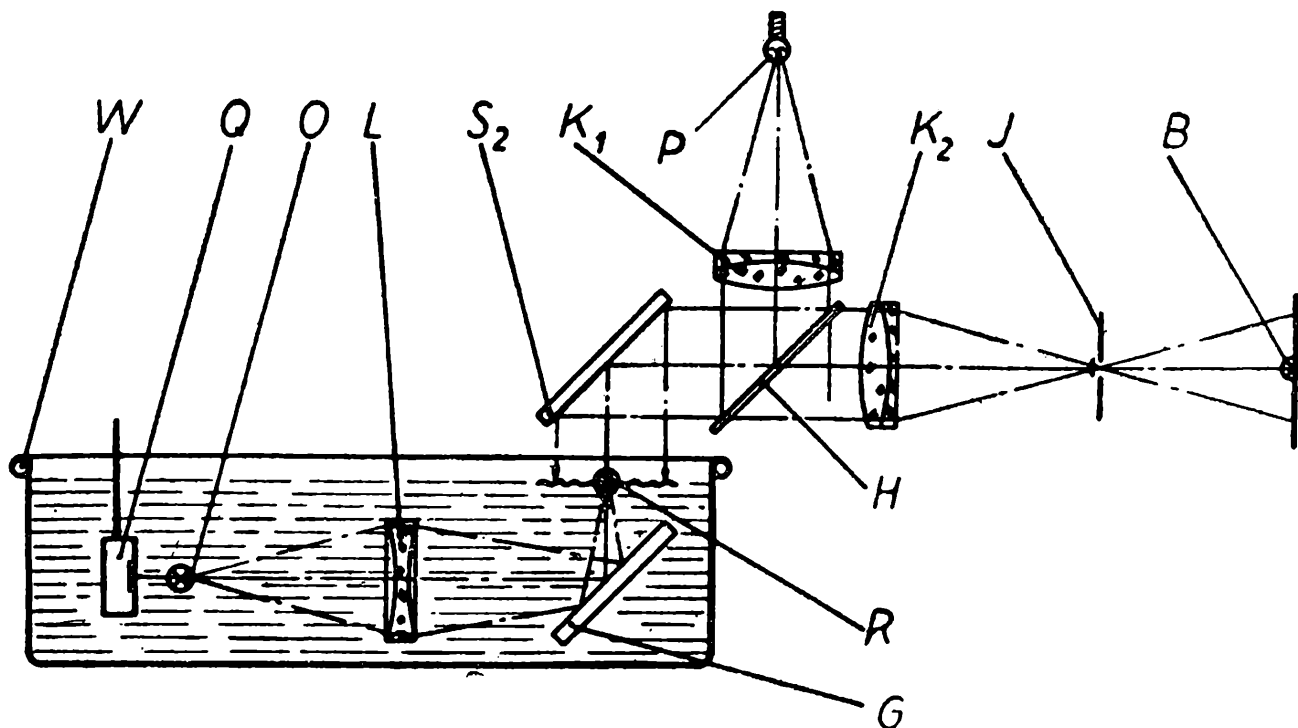
Obr. 1

Jako zdroje ultrazvuku bylo použito křemenné destičky kruhového tvaru, na kterou je přiváděno střídavé napětí z vysokofrekvenčního generátoru. Střídavé napětí vysoké frekvence vyvolává v destičce kmity vysoké frekvence - ultrazvuk. Jako zdroje je však možno také použít soustavy malých křemenných destiček, složených vedle sebe do jakési mosaiky.

Obr. 1 ukazuje schéma aparatury pro případ, že obraz na matnici je tvořen světlem, procházejícím reliefním obrazem. *W* je vana obsahující obyčejnou vodu, *Q* je zdroj ultrazvuku, *O* zkoumaný předmět, *L* rozptylka z umělé hmoty, *G* skleněná destička, odrážející ultrazvuk tak, jako odráží zrcadlo světelné paprsky, *P* zdroj světla, *K<sub>1</sub>* čočka, *S<sub>1</sub>* a *S<sub>2</sub>* zrcadla, *R* ultrazvukový reliefní obraz pozorovaného předmětu, *K<sub>2</sub>* čočka, *J* kruhová clonka a *B* optický obraz předmětu na matnici.

Průchod ultrazvuku i světelných paprsků aparaturou je z uvedeného schématu zřejmý.

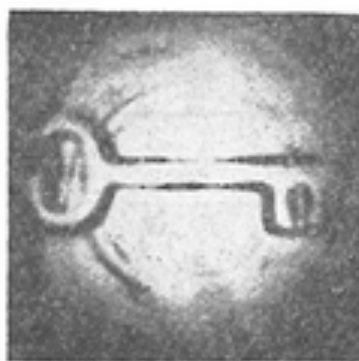
Schema aparatury pro případ, že obraz na matnici je tvořen světlem odraženým od reliefního obrazu, je znázorněno na obr. 2.  $W$  je opět vana s vodou,  $Q$  zdroj ultrazvuku,  $O$  pozorovaný předmět,  $L$  čočka,  $G$  skleněná destička,  $R$  reliefní obraz předmětu,  $P$  zdroj světla,  $K_1$ ,  $K_2$  čočky,  $H$  destička polopropustná pro světlo,  $S_2$  zrcadlo,  $J$  kruhová clonka a  $B$  optický obraz předmětu na matnici.



Obr. 2



Obr.



Obr. 4

Průchod ultrazvuku i světelných paprsků aparaturou je zřejmý i v tomto případě z uvedeného schématu.

Při pokusech bylo použito ultrazvuku o frekvenci od 0,8 do 4,6 MHz.

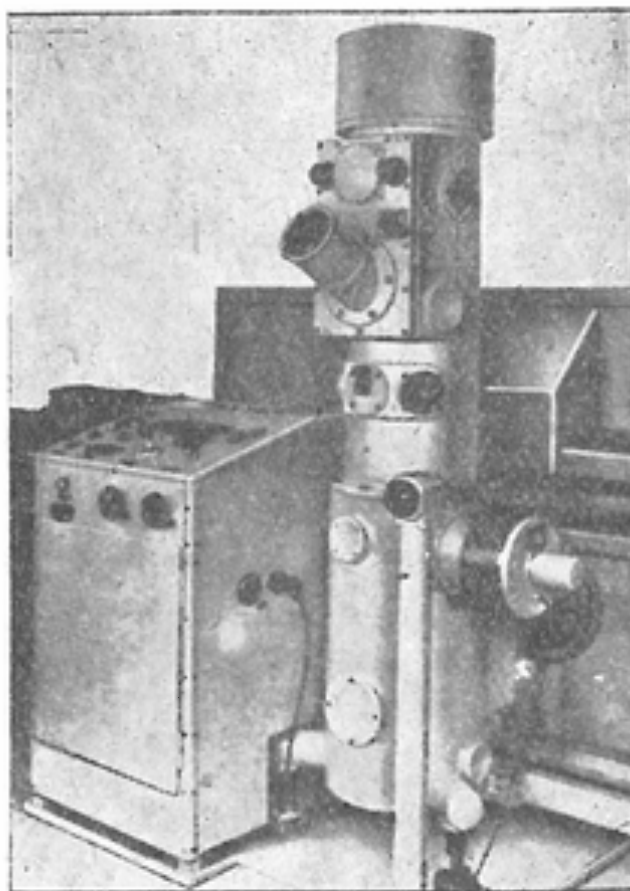
Obr. 3 ukazuje ultrazvukově optický obraz zubu klíče, vytvořený křemennou destičkou průměru 50 mm při frekvenci 4,6 MHz.

Obr. 4 ukazuje zobrazení klíče pomocí křemenné mosaiky průměru 110 mm při frekvenci 2,4 MHz.

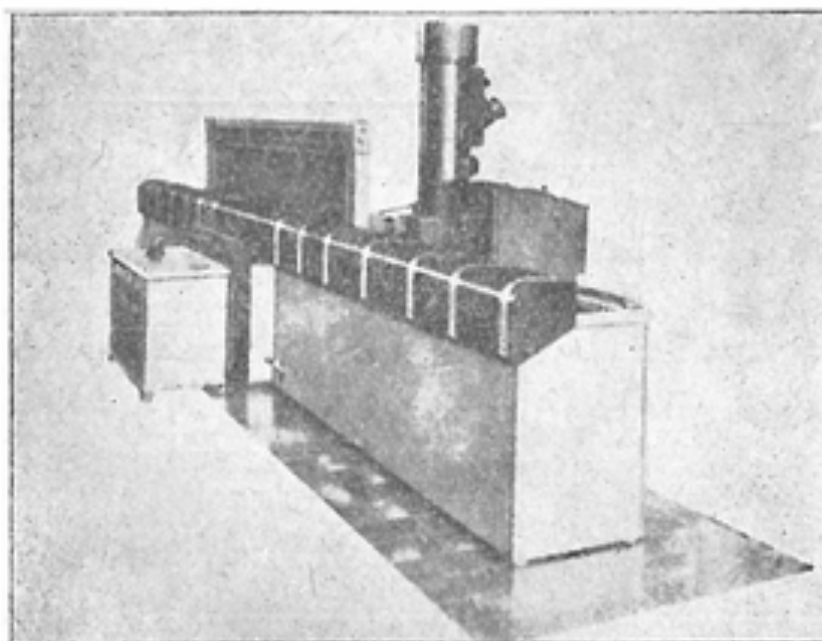
Ultrazvukově optického zobrazování je možno též používat ke kontrole jakosti

plechů a desek. Vzduchové bubliny v desce, zdvojeniny (vzniknou rozválčováním bubliny) a nestejná tloušťka plechu se jasně projeví na matnici.

Celá aparatura, od ultrazvukové čočky až po matnici, byla vestavěna do jednoho zařízení, nazvaného „ultrazvuková komora“.



Obr. 5. Ultrazvuková komora s řídicím pultem. Výrobek VEB Carl Zeiss, Jena.



Obr. 6. Ultrazvuková komora - pohled zezadu.



Vlevo od pozorovatele, sledujícího obraz na matnici, je řídicí pult, odkud lze manipulovat celou komorou. Vana je 5 m dlouhá, takže tímto zařízením lze prohlížet plechy a desky až 2,5 m dlouhé. Rychlost posuvu vzorku ve vaně lze regulovat od 2 do 6 cm/sec.

Na obr. 6 na levé straně je vysokofrekvenční generátor. Ten je také ovládán knoflíky s řídicího pultu.

V komoře je užito světelného zdroje, který dovoluje sledovat obraz na matnici i při denním světle. V zatemnělé místnosti stačí 50 W žárovka.

Jako zdroje ultrazvuku je použito křemenné mosaiky s průměrem 125 mm s vlastní frekvencí 1 MHz. Pracovní frekvence je 3 MHz.

Stupeň pohlcení ultrazvuku ve zkoumaném vzorku závisí na materiálu vzorku a při stejném materiálu ještě na způsobu zpracování. Nelze proto udat obecně maximální tloušťku vzorků, kterou lze ještě prozářit a prozkoumat. Pro ocelový plech se pohybuje tato hodnota kolem 10–15 mm, pro mosazný plech kolem 10 mm, pro slitiny lehkých kovů kolem 20 mm.

Zařízení je schopno při frekvenci 3 MHz rozlišit dva body, které jsou od sebe stranově vzdáleny 2 mm.

Ultrazvukově optické zobrazování není tedy již pro praxi zdánlivě bezcenným fyzikálním pokusem, který dokazuje možnost využití ultrazvuku pro optické pozorování předmětů, ale je to metoda, která má v technické praxi obrovskou budoucnost, neboť se při ní zkoumané vzorky vůbec neporuší.

Obr. 1 až 4 jsou převzaty z dále uvedené literatury [1], 5 a 6 ze [2].

#### L i t e r a t u r a

[1] K. Schuster, Jenaer Jahrbuch; 217, 1951.

[2] K. Schuster, H. Trommler, Jenaer Jahrbuch; 108, 1955/1.



## Úlohy k řešení

Řešení dále uvedených úloh zašlete do 31. května t. r. na adresu Doc. Dr M. Menšík, Praha 6, Zikova 4. U každého řešení uveďte vždy číslo příkladu.

10. Jistě víte, jak může táhnout na šachovnici dáma (královna). Představte si šachovnici, která má  $n^2$  polí. Pokládáme-li tah z pole  $x$  na pole  $y$  za různý od tahu z pole  $y$  na pole  $x$ , může na této šachovnici královna provést celkem  $\frac{2}{3} n(n-1)$  ( $5n-1$ ) tahů. Dokažte!

J. Sedláček

11. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník, v němž delší základna je shodná s úhlopříčkou a kratší základna je shodná s ramenem. Delší základna má délku 7.

St. Horák

12. Zobrazte kulovou plochu, která prochází body  $A(-3; 5; 3)$ ,  $B(2; 2; 3)$  a která se po otočení o  $90^\circ$  kolem přímky  $AB$  dotkne půdorysny a po dalším otočení o  $90^\circ$  nárýsny.

O. Setzer

★ ★ ★

13. Odstředivý regulátor, skládající se ze dvou kulových závaží, z nichž každé je na rameni délky  $f$ , se otáčí s dobou oběhu  $T$ .

a) Ukažte, že vzdálenost vodorovné roviny, v níž závaží obíhají, od bodu upevnění je dána vztahem

$$x = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

čili nezávisí vůbec na délce ramena.

b) Propočítejte číselně pro  $T = 0,01$  min!

c) Pro pomalé oběhy tento vzorec však vede ke zřejmě nesprávným výsledkům; proč a jak nutno vzorec doplnit?

E. Říman



## Různé - recenze

František Veselý, Plzeň:

### Leonhard Euler — nejslavnější petrohradský akademik

(Dokončení)

Členům akademie byly ukládány četné úkoly praktického významu. Při plnění těchto úkolů osvědčoval Euler takové schopnosti a neúnavnou pracovitost, že s ním nemohl soutěžit žádný z akademiků. Když na př. v roce 1735 ruská vláda potřebovala velmi složité výpočty, k jejichž provedení si ostatní akademikové vyžadovali lhůtu několika měsíců, přijal tento úkol Euler a splnil jej za tři dny. V obdobích takového pracovního zatížení zanedbával Euler jídlo i spánek. Neopřekvapuje tedy, že vypětí duševních sil způsobilo u něho vážné nervové onemocnění, provázené vysokými horečkami. Při tomto onemocnění vytvořil se také Eulerovi vřed v pravém oku, který způsobil, že Euler přestal vidět na toto oko. Po zotavení dal se Euler znovu do práce a již následujícího roku vyšlo jeho dílo z oboru mechaniky *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (2 svazky, Petrohrad 1736). Toto dílo založilo evropskou pověst Eulerovu. Také za tuto práci dostal cenu pařížské akademie. Tato akademie jej vyznamenala cenou desetkrát za jeho života.

Euler pečoval též o to, aby se žákům akademického gymnasia dostalo vhodné

učebnice matematiky. Učebnice *Rukovodstvo po arifmetike* ve dvou dílech, které vyšly roku 1738 a 1740, je první učebnicí matematiky, která vyšla v ruském jazyku a byla určena pro školní potřebu.

V letech 1730—1741 vládli v Rusku formálně Anna Ivanovna (1730—1740) a Ivan VI. (1740—1741). Skutečným vládcem Ruska byl však komoří Biron, na jehož vládu má ruský lid smutné vzpomínky. Názvem „bironščina“ je dodnes označováno toto období absolutismu, krutosti, donašečství a vykořisťování země. Není proto divu, že Euler nebyl spokojen v práci za tak nejistých politických poměrů a že proto, když se přidružily ještě jiné důvody, přijal nabídku pruského krále Bedřicha II., aby pracoval v berlínské akademii.

Dne 29. května 1741 byl Euler na svou žádost uvolněn ze služeb petrohradské akademie. Jeho rozchod s akademií byl přátelský. Při té příležitosti mu bylo uděleno čestné členství akademie s příjmem 200 rublů ročně. Ostatně, jak ještě uvidíme, zůstal Euler i za berlínského pobytu v trvalém styku s petrohradskou akademií a nikdy se nevzdal myšlenky na návrat do Ruska.

Do Berlína odjel Euler v červnu roku 1741. Hned po příjezdu obdržel od Bedřicha II. lichotivý dopis, který mu král vlastnoručně napsal za válečných operací z vojenského tábora v Reichenbachu. Tento dopis byl svědectvím toho, jak velice si pruský král vážil toho, že se mu podařilo získati Eulera pro Berlín. Euler se pustil ihned do práce v akademii, která v té době byla v úpadku. Brzy tam začala vycházeti jeho vědecká pojednání z různých oborů matematiky a přírodních věd. Přitom však stačil Euler i na to, aby přibližně stejný počet vědeckých pojednání posílal akademii v Petrohradě. I na tomto novém pracovišti byly Eulerovy ukládány četné úkoly inženýrského rázu z oboru vojenské i civilní techniky. Tak na př. pořídil i překlad Robbinsova díla z oboru balistiky. Bylo to však spíše úplné přepracování a doplnění původního anglického díla, v němž Euler řešil prakticky použitelným způsobem všechny závažné problémy tehdejší dělostřelecké techniky. O ceně této Eulerovy práce svědčí nejlépe to, že toto dílo bylo přeloženo do francouzštiny a zavedeno jako učebnice na pařížském dělostřeleckém učilišti. Mimo jiné práce z oboru fyziky a civilní techniky, na př. z theorie stavby lodí a navigace, pracoval Euler v ryzí matematice tak, že jeho dílo *Introductio in analysin infinitorum* (Úvod do analýsy nekonečně malých, který po prvé vyšel v Lausanne r. 1748), stalo se začátkem nové epochy ve vývoji matematiky. K ní se řadí i důležitý spis z oboru počtu diferenciálního *Institutiones calculi differentialis* (Berlín 1755).

Když se po roce 1760 množily důvody k Eulerově nespokojenosti s prací v Berlíně, projevovala se u něho stále silněji touha po návratu do Ruska. Po nastoupení Kateřiny II., roku 1762, poměry v Rusku se značně zlepšovaly. Euler napsal na počátku roku 1766 hraběti Voroncovovi, kancléři Kateřiny II., dopis, v němž projevil zájem o návrat do Petrohradu. Po překonání některých obtíží, které vznikly z toho, že Bedřich II. chtěl Eulera udržeti v Berlíně, dostal povolení k odjezdu do Petrohradu. Svůj hněv však projevil Bedřich II. vůči Eulerovi tím, že jeho nejmladšímu synovi, dělostřeleckému poručíku, byl odepřen pas k odjezdu a musil zůstat v Prusku.

V červnu roku 1766 odjel Euler z Berlína a po desetidenní zastávce ve Varšavě,

kde byl hostem polského krále, cestoval do Petrohradu. Tam přijel se svou početnou rodinou dne 17. července 1766. Sotva se Euler zařídil v novém domově, byl postižen vážným onemocněním. Nemoc sice přestál, avšak s následkem pro vědeckého pracovníka tragickým. Pro zákal ztratil téměř úplně vidění též na levé oko. Takové neštěstí, které postihlo tohoto téměř šedesátiletého muže, bylo by zlomilo mnohého jiného člověka a pravděpodobně mu znemožnilo další vědeckou činnost. Vášnivá láska k vědě i k práci vedla Eulera k tomu, že si ověřil schopnost k další práci sepsáním díla z oboru algebry. Diktoval je svému sluhovi, kterého si přivezl z Berlína. Tento muž, původně krejčovský tovaryš, prý si při zapisování Eulerova výkladu úplně osvojil znalost algebry, ač se jí předtím nikdy neučil. I když si toto tvrzení nemůžeme ověřit, nezní nepravděpodobně, neboť tento Eulerův spis překvapuje svou jasností a srozumitelností i uspořádáním látky. Vyšel hned v ruském překladu a byl vydán i v jiných jazycích. Potom již rychle za sebou následovaly jiné závažné spisy, zejména z oboru integrálního počtu *Institutiones calculi integralis* (3 svazky - Petrohrad 1768—1770).

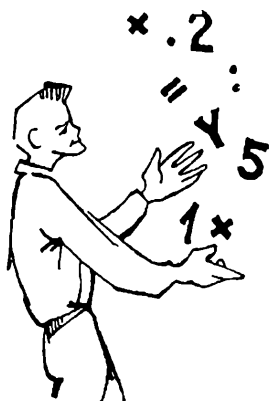
Mimo četné jiné vědecké spisy a pojednání, která Euler napsal v době své slepoty, připravil do tisku též populárně-vědecký spis *Pis'ma k nemeckoj princesse* (Petrohrad 1768—1770), který vyšel později i v německém originále a francouzském překladu. Jsou to vlastně Eulerovy výklady o některých otázkách z oboru fyziky a filosofie, které spisoval v Berlíně, když tam vyučoval dcery braniborského markraběte Schwedta. Tyto „dopisy“ přispěly nemálo k tomu, aby se s Eulerovými názory na matematiku a přírodní vědy seznámila inteligence, která nemohla číst jeho odborné spisy. Uvádím toto dílo proto, že s některými poznatky se ještě dnes ve škole seznamujete tím způsobem, kterého používal Euler. V těchto dopisech užívá na př. geometrických obrazců k tomu, aby znázornil vztahy mezi soudy tak, jak to nacházíte v učebnicích logiky (Eulerovy kruhy).

Eulerova vědecká práce byla umožněna v době jeho slepoty vynikající pamětí, obdivuhodnou představivostí a také tím, že mnozí z jeho přátel mu pomáhali a zapisovali to, co on diktoval. Byli to zejména akademikové Kraft, Lexell, Golovin a Fuss. Fuss po smrti Eulerově vydal též jeho životopis a ukázal statisticky, že období Eulerovy slepoty bylo dobou jeho nejplodnější publikační činnosti. Vypráví se o tom, že Euler asi sedm let před svou smrtí dal jisté vládní osobnosti slib, že zanechá po své smrti tak velký počet vědeckých prací, aby je petrohradská akademie mohla otiskovat ve svých sbornících ještě po dalších dvacet let. Tento svůj slib Euler splnil, a to v míře mnohem větší, než údajně slíbil, neboť po své smrti zanechal dalších asi 250 vědeckých pojednání, která byla otiskována ještě 80 let po jeho smrti. Dnes víme, že Euler za celý svůj život napsal celkem asi 865 spisů a vědeckých pojednání.

Dne 7. září 1783 se Euler dobře bavil v kruhu svých žáků a členů rodiny, když byl náhle stižen záchvatem mrtvice. Konec jeho života charakterisoval prostými slovy francouzský matematik Condorcet (1743—1794) takto: „Přestal počítat a žít.“ Euler byl pohřben v Petrohradě na Smolenském hřbitově, kde nad jeho hrobem je pomník s nápisem: *Leonardo Eulero Academia Petropolitana* (Leonardu Eulerovi petrohradská akademie).

Tvůrčí vědecká práce Eulerova je tak mnohostranná a tak neuvěřitelně rozsáhlá,

že by bylo sotva možno stručně charakterisovat všechno to, čím tento největší, nejplodnější a nejvšestrannější matematik 18. století přispěl k rozvoji matematiky a přírodních i technických věd. Budete-li jednou hlouběji studovat kterýkoli obor matematiky či přírodních věd, všude se setkáte se stopami vědecké činnosti tohoto geniálního myslitele.



## Matematické zábavy

Jiří Sedláček, Praha:

### O jedné zajímavé hře

V našich obchodech s hračkami se objevila před určitým časem zajímavá hra zvaná „Patnáctka“. V nízké krabičce čtvercového půdorysu je uloženo šestnáct destiček označených čísly 1, 2, 3, ..., 16. Destičku s číslem 16 vyjmete a nyní už můžeme přikročit k vlastní hře. Posouváním destiček přes jediné volné pole máme z libovolně daného postavení destiček přejít k „základní“ situaci, znázorněné v tomto schématu:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Při hře nesmíme však destičky z krabičky vyndavat.

Pravidlo hry je tedy jednoduché; pokud by snad některý z čtenářů hru v hračkářstvích nesehnal, vyrobí si ji jistě snadno sám z tuhého papíru (krámská cena hry je 2,60 Kčs).

Bude vás možná zajímat několik slov z historie této hry. Hra vznikla v druhé polovině minulého století a tehdy se rozšířila do celého civilisovaného světa pod různými názvy: v anglosaských zemích „Fifteenth Puzzle“, v Německu „Boss Puzzle“, ve Francii „jeu du taquin“. Hrál se v restauracích a kavárnách, v kancelářích, ba i v pouličních koňských drahách. Vzhledem k této popularitě není divu, že ani matematická theorie této hry nedala na sebe dlouho čekat.

Hráči brzy zjistili, že z některých postavení není možno dosáhnout „základní“ situace (uvedené na našem schématu). Šachový problemista Loyd určil nutné a postačující podmínky, podle nichž se pozná, zda libovolné rozmístění destiček v krabici se dá převést na „základní“ situaci. Je zajímavé, že po jeho objevu pomalu ustal ve světě zájem o tuto hru.

Jak vypadají tyto nutné a postačující podmínky? Než je vyslovíme, řekneme si, co rozumíme *inverzí* v nějakém uspořádání destiček. Předchází-li destička s větším číslem před destičkou s číslem menším, říkáme, že tato dvě čísla tvoří inverzi. Tak na př. ve schématu

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	15	11
13	14	12	

jsou právě tyto čtyři inverze: (15 ; 11), (15 ; 13), (15 ; 14), (15 ; 12); je jich tedy *sudý* počet.

Nyní už můžeme vyslovit Loydovu podmínku:

Nutnou a postačující podmínkou pro řešitelnost úlohy je, aby se v uspořádání destiček vyskytoval sudý počet inverzí.

Důkaz tohoto tvrzení zde podávat nebudeme, neboť přesahuje rámec informativního článku.



## *Redakce hovoří se čtenáři*

- \* Dr Josef H., Pardubice. Děkujeme za připomínku. Provedli jsme.
- \* První řešení úloh zaslala Jarmila Hábová, JŠŠ, Strážnice na Moravě.
- \* Čtenář si laskavě opraví na str. 91 ve 2. a 3. řádku „Poznámky 1“ slovo hodnotami slo-  
vem **h**motami a v 5. řádku slovo elektromy slovem **e**lektrony.

## Zasedání ústředního výboru JČMF.

Dne 13. února 1957 se konala v místnostech Národního klubu v Praze II, Na příkopě 10, celodenní schůze ústředního výboru JČMF.

Schůzi zahájil předseda JČMF ministr školství a kultury Dr František Kahuda v 9,15 hodin, uvítal přítomné a informoval je o programu schůze.

Nato účastník zasedání ženevské konference o vyučování matematice Miloš Jelínek referoval podrobně o diskusích na této konferenci. Je pozoruhodné, že mnoho ze sporných otázek a nesnází, které máme my, jsou aktuální i u jiných kulturních států. Uvedme jen na př. pojetí a rozsah učebné látky i způsob vyučování, nouze o kvalitní učitele, nedostatek školních budov, nevhodné učebnice a pod. Po této přednášce se rozvinula delší debata.

Závěrem předseda formuloval návrh usnesení:

„Ústřední výbor JČMF ukládá předsednictvu, aby posoudilo všechny náměty z diskuse a podniklo různá opatření na jejich uskutečnění. Zvláště se ztotožňuje s návrhem s. Veselého, aby PÚV žádalo ministerstvo školství a kultury o urychlené přetvoření časopisu *Matematika ve škole a Přírodní vědy ve škole* na časopis *Matematika a fyzika ve škole*.

Ústřední výbor JČMF se dále ztotožňuje s návrhem s. Borůvky a vybízí všechny pobočky, aby neodkladně zahájily porady s abiturienty jedenáctiletých středních škol, na nichž by pracovníci vysokých škol universitního i technického směru promluvili se studenty a pokusili se je získat pro studium učitelství matematiky a fyziky na vysokých školách.“

Návrh byl jednomyslně přijat.

Druhý referát - který byl na programu - přednesl prof. Dr L. Zachoval: „Oslavy padesátiletí fyzikálního ústavu Karlovy university a konference čs. fyziků.“ Přednášející seznámil Ústřední výbor s cílem konference, která má jednak ukázat prostředí, v němž vyrůstala naše fyzika, a dále být přehlídkou práce čs. fyziků. Konference ve své zvláštní sekci se bude také zabývat vyučováním fyzice a výchovou učitelů.

Také po této přednášce byla delší diskuse o mnoha aktuálních otázkách. Všemi schválené usnesení jest:

„Ústřední výbor JČMF souhlasí s účastí Jednoty na oslavách padesátého výročí fyzikálního ústavu Karlovy university. Souhlasí rovněž s tím, aby činnost pedagogické sekce na konferenci čs. fyziků zajišťovalo předsednictvo Ústředního výboru. K tomu se zřizuje pracovní komise v tomto složení: prof. Ing. Dr Slavík - předseda, prof. Dr Zachoval - místopředseda (a sedm dalších členů).“

Jednota československých matematiků a fyziků podpoří tuto konferenci též finančně.

Odpolední zasedání Ústředního výboru řídil místopředseda JČMF akademik V. Kořínek. Nejprve byly postupně schváleny: zápis předchozí schůze, zpráva předsedy i zpráva jednatele.

Diskuse, jež následovala, zabývala se hlavně propagací časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*, který má svojí prací mezi studující mládeží pomoci odstranit strach z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Zvláště jednatele poboček i členové Jednoty musí v tomto směru vyvinout náležitou propagaci. Ukázková čísla budou rozeslána, jakmile se podaří překonat nesnáze, které má redakce časopisu s jeho kolportováním Poštovní novinovou službou.

Po zprávě hospodáře byly přečteny návrhy na usnesení, které bylo schváleno. Týká se hospodářských záležitostí Jednoty, výše členského příspěvku (15 Kčs, resp. 20 Kčs) na rok 1957 a zakoupení příslušného počtu výtisků časopisu *P o k r o k y m a t e m a t i k y, f y s i k y a a s t r o n o m i e*, které budou postupně dostávat členové Jednoty za svůj členský příspěvek.

Též zpráva Slovenského výboru, přečtená docentem Harantem, byla schválena.

Jednota zřizuje své pobočky pro ÚNV Praha, KNV Praha, České Budějovice, Hradec Králové, Pardubice, Jihlava, Ostrava, Nitra, Zvolen (pro kraj Banská Bystrica), Žilina, Košice (zatím i pro kraj Prešovský).

Bylo též schváleno, že sporné případy při přijímání nově přihlášených členů, navržených pobočkami, budou předkládány Ústřednímu výboru k rozhodnutí.

Přítomní dále vyslechli zprávy předsedů komisí matematické a fyzikální a schválili usnesení, aby byla sestavena komise, která by prostudovala opětné vydávání knižnic, jakými byly *C e s t a k v ě d ě n í a K r u h*, vydávané dříve Jednotou.

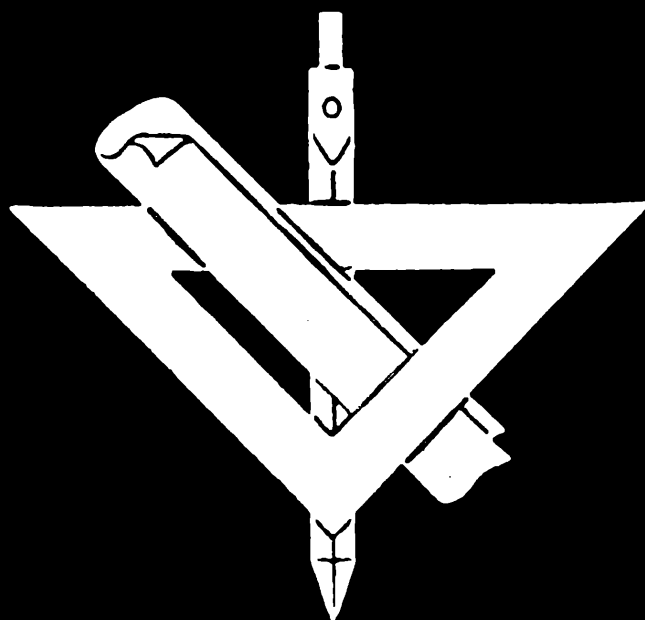
Dále bylo diskutováno o obtížích při distribuci odborné literatury.

Závěrem předsedající upozornil na konání sjezdu JČMF v roce 1959 a poděkoval účastníkům za jejich účast i živou diskusi. Schůze skončila v 18 hodin. Dr. M. M.

### Přednáška o L. Eulerovi.

Ústřední sekce pro matematiku, fyziku a chemii Čs. společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí pořádá k oslavě 250. výročí narozenin slavného petrohradského akademika, německého matematika L. Eulera přednášku s názvem „*P o l y t e c h n i c k ý g e n i u s L . E u l e r*“. Přednášku přednese František Veselý, odb. asistent VŠE v Plzni, v zasedací síni sekci Krajského výboru Společnosti v Praze 3, Václavské nám. 53, II. p. v pondělí dne 15. dubna 1957 v 16 hod.





# ROZHLEDY

ročník 35

4

1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 4

Toto číslo vyšlo 30. dubna 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

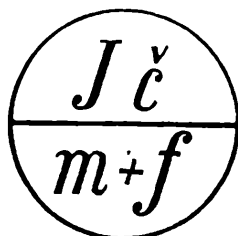
Výkonný redaktor *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSS, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

M. Valešová: Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty	145
M. Jůza: O jedné vlastnosti trojúhelníka	150
Doc. Dr. K. Havlíček: O jedné úloze z geometrie kružnic	152
Dr. S. Kubáková: Konstrukce s nepřístupnými prvky, (II. část)	157
Doc. Dr. M. Menšík: Polární souřadnice	160
Doc. Dr. M. Menšík: Základy kinematické geometrie (Pokračování)	162
Dr. O. Litzman: Jaké jsou zákony pohybu elektronu	166
L. Pátý: O iontových vývěvách	174
J. Budějický: Radiové teleskopy	180
L. Sehnal: Historie „zavodňovacích kanálů“ na Marsu	185
Úlohy k řešení	186
Prof. Ing. Dr. F. Kadeřávek: Vzpomínka na 250. výročí založení inženýrských škol v Praze	187
O. Setzer: Číselné hříčky	190
Δ: Příběh o nevěstě	191
Sdělení redakce	192
Jak se dříve rýsovalo	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 12748

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Höning.



## Matematika

Marie Valešová, Praha:

### Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty

Mějme kvadratickou rovnici

$$x^2 + px + q = 0, \quad (1)$$

kde  $p, q$  jsou čísla komplexní:  $p = a + bi, q = c + di$ . Zabývejme se vztahem kořenů této rovnice a jejich koeficientů  $p, q$ .

1. *Kdy je jeden kořen reálný?* Dá se dokázat, že kvadratický trojčlen na levé straně rovnice (1) lze rozložit v součin  $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , kde  $x_1, x_2$  jsou komplexní čísla, která jsou kořeny rovnice (1). Tuto rovnici lze tedy psát ve tvaru

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0. \quad (2)$$

Provedeme-li násobení, dostáváme  $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2 = 0$ . Vidíme tedy, že

$$\begin{aligned} -p &= x_1 + x_2 \\ q &= x_1 x_2. \end{aligned} \quad (3)$$

a) Jestliže nyní  $x_1, x_2$  jsou čísla reálná, pak jejich součet a součin musí být též reálný. Obráceně: Mají-li být oba kořeny reálné, musí čísla  $p = a + bi, q = c + di$  být reálná, to jest, musí být  $b = d = 0$ .

b) Vezměme druhou možnost: Je-li jeden kořen reálný a druhý imaginární

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 i \end{aligned}$$

je podle (3)

$$\begin{aligned} -a - bi &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 i \\ c + di &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 i. \end{aligned}$$

Víme, že dvě čísla komplexní se sobě rovnají, jestliže reálná část čísla prvního je rovna reálné části čísla druhého a stejně pro části imaginární. Proto je

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= -a \\ \beta_2 &= -b \\ \alpha_1\alpha_2 &= c \\ \alpha_1\beta_2 &= d,\end{aligned}$$

což jsou čtyři rovnice pro tři neznámé. K výpočtu  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$  je však zapotřebí jen tří rovnic. Vezměme proto na př. první, druhou a čtvrtou rovnici, z nichž vypočteme:  $\beta_2 = -b$ , dále je-li  $b \neq 0$ , je  $\alpha_1 = -\frac{d}{b}$ ,  $\alpha_2 = -a + \frac{d}{b}$ . Vypočtené hodnoty musí ovšem vyhovovat i zbývajícím, t. j. třetí rovnici, tedy po dosazení je  $-\frac{d}{b} \cdot (-a + \frac{d}{b}) = c$ . Odstraníme-li zlomky a upravíme, dostaneme

$$d^2 + b^2c - abd = 0. \quad (4)$$

Pro to, aby rovnice (1) měla jeden kořen reálný a jeden imaginární, je nutné, aby  $d^2 + b^2c - abd = 0$ , ovšem při  $b \neq 0$ .

Ukážeme nyní, že tato podmínka též stačí (dokážeme t. zv. postačující podmínku). Vyjádříme výraz  $d^2 + b^2c - abd$  pomocí komplexních kořenů dané rovnice. Protože o nich napřed ještě nic nevíme, napíšeme je obecně ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 i \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 i.\end{aligned}$$

Jak jsme ukázali na začátku, musí pro ně platit (3), tedy:

$$\begin{aligned}-a &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ -b &= \beta_1 + \beta_2 \\ c &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \\ d &= \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1.\end{aligned} \quad (5)$$

Dosadíme-li nyní za  $a, b, c, d$  právě vypočtené hodnoty, je

$$\begin{aligned}d^2 + b^2c - abd &= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) (\beta_1 + \beta_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = \alpha_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \\ &+ \alpha_1\alpha_2\beta_2^2 - \beta_1^3\beta_2 - 2\beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1\beta_2^3 - \alpha_1^2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \alpha_1^2\beta_2^2 - \alpha_1\alpha_2\beta_2^2 - \\ &- \alpha_1\alpha_2\beta_1^2 - \alpha_2^2\beta_1^2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \alpha_2^2\beta_1\beta_2 = 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \beta_1^3\beta_2 - 2\beta_1^2\beta_2^2 - \\ &- \beta_1\beta_2^3 - \alpha_1^2\beta_1\beta_2 - \alpha_2^2\beta_1\beta_2 = -\beta_1\beta_2 \cdot [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2].\end{aligned}$$

Jestliže je nyní tento výraz roven nule, musí být buďto  $\beta_1 = 0$  nebo  $\beta_2 = 0$ , případně  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 = 0$ . Poslední výraz je součtem čtverců reálných čísel, který se rovná nule jen tehdy, jsou-li oba sčítance rovny nule. Předpoklad při celé úvaze však byl  $b \neq 0$ , z čehož je vidět, že  $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ , tedy výraz v hranaté závorce být roven nule nemůže.

Je-li tedy  $\beta_1 = 0$ , je  $x_1 = \alpha_1$  kořen reálný, je-li  $\beta_2 = 0$ , je  $x_2 = \alpha_2$  reálné. Obojí současně nenastane, neboť  $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ . Můžeme proto odpovědět na otázku položenou na začátku této úvahy:

*Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovnice  $x^2 + (a + bi) \cdot x + (c + di) = 0$  měla jeden reálný a jeden imaginární kořen, je:*

$$1) b \neq 0,$$

$$2) d^2 + b^2c - abd = 0$$

Položme otázku, podobnou předcházející:

2. *Kdy je jeden kořen ryze imaginární?* Vyjdeme z toho, co jsme právě našli, totiž z podmínky pro reálnost jednoho kořenu rovnice (1). Jestliže nyní v této rovnici nahradíme neznámou  $x$  jinou neznámou  $X$ , kterou dosadíme podle vztahu  $x = iX$ , vznikne místo rovnice

$$x^2 + (a + bi) \cdot x + (c + di) = 0$$

rovnice nová

$$- X^2 + (a + bi) \cdot Xi + (c + di) = 0,$$

jež po úpravě má nové koeficienty:

$$X^2 + (b - ai) \cdot X + (-c - di) = 0$$

U této rovnice umíme určit podmínku, aby právě jeden její kořen byl reálný:

$$d^2 - a^2c - abd = 0 \text{ při } a \neq 0.$$

Jestliže však rovnice s neznámou  $X$  má jeden kořen reálný, na př.  $X_1$ , pak  $x_1 = iX_1$  je kořen původní rovnice a to zřejmě ryze imaginární.

Můžeme tedy opět shrnout:

*Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovnice  $x^2 + (a + bi) \cdot x + (c + di) = 0$  měla právě jeden kořen ryze imaginární, je: 1)  $a \neq 0$ ,*

$$2) d^2 - a^2c - abd = 0$$

3. Všimněme si blíže výrazu  $d^2 + b^2c - abd$ . Je roven nule v případě uvedeném v odstavci 1. b), nebo je-li současně  $\beta_1 = 0$  i  $\beta_2 = 0$ . Pak jsou oba kořeny reálné a je podle 1. a)  $b = 0$ ,  $d = 0$ . Nebo může být sice  $\beta_1\beta_2 \neq 0$ , ale  $\alpha_1 = \alpha_2$  a  $\beta_1 = -\beta_2$ , t. j. jsou-li kořeny rovnice (1) čísla komplexně sdružená. V tom případě je ovšem, přihlédneme-li k rovnicím (5), opět  $b = 0$ ,  $d = 0$ . Konečně může být současně  $\beta_1\beta_2 = 0$ ,  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 = 0$ , což znamená  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ , t. j. rovnice má reálný dvojnásobný kořen.

Výraz  $d^2 + b^2c - abd$  je kladný, jestliže  $\beta_1\beta_2 < 0$ , je záporný, je-li  $\beta_1\beta_2 > 0$ , neboť výraz  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2$  je vždy kladný, platí-li aspoň jedna z nerovností  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ,  $\beta_1 \neq -\beta_2$ , t. j. neplatí-li současně  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = -\beta_2$ , což nastane tehdy, nejsou-li kořeny čísla komplexně sdružená.

Můžeme tedy shrnout:

a)  $d^2 + b^2c - abd = 0$ : *Právě jeden kořen je reálný při  $b \neq 0$ . Oba kořeny jsou reálné (různé nebo splývající) nebo jsou komplexně sdružené, je-li  $b = d = 0$ .*

b)  $d^2 + b^2c - abd > 0$ : *Imaginární části kořenů jsou opačných znamení, ale kořeny nejsou komplexně sdružené.*

c)  $d^2 + b^2c - abd < 0$ : *Imaginární části kořenů mají stejná znamení.*

Sestavíme-li tedy tento výraz, můžeme podle jeho velikosti stanovit některé vlastnosti kořenů, aniž tyto kořeny známe.

4. Jestliže již víme, že daná kvadratická rovnice má jeden kořen reálný a jeden imaginární, můžeme oba kořeny snadno přímo vypočítat, při čemž není třeba odmocňovat.

Je totiž

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -a - bi \\x_1x_2 &= c + di\end{aligned}$$

a) Je-li  $x_1 \neq 0$ , můžeme jím druhou rovnici dělit a je potom

$$x_2 = \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_1}i. \quad (6)$$

Dosadíme-li do první rovnice, je

$$x_1 + \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_1}i = -a - bi$$

Protože zase jde o rovnost dvou komplexních čísel, musí se vzájemně rovnat reálné části obou čísel a rovněž jejich imaginární části. Proto

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{c}{x_1} &= -a \\ \frac{d}{x_1} &= -b.\end{aligned}$$

Odtud  $x_1 = -\frac{d}{b}$ , neboť z 1. b) víme, že je  $b \neq 0$ . Je-li však již určen kořen  $x_1$  a to jednoznačně, je dáno též  $x_2$  vztahem (6), opět jednoznačně.

b) Jestliže je reálný kořen  $x_1 = 0$ , pak v rovnici (1) musí scházet absolutní člen (neboť pak  $q = x_1x_2 = 0$ ), a tedy rovnice zní

$$x^2 + (a + bi) \cdot x = 0$$

Levá strana rovnice se dá rozložit a potom máme

$$x \cdot (x + a + bi) = 0$$

Zde musí být buď  $x = 0$  nebo  $x + a + bi = 0$ . Je tedy

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, \\ x_2 &= -a - bi\end{aligned}$$

Nyní si ukážeme na příkladech, jak lze při řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty použít výsledků předchozích úvah.

**Příklad 1.** Řešte rovnici

$$x^2 + (3 - 2i) \cdot x = 0$$

Levou stranu rozložíme

$$x \cdot (x + 3 - 2i) = 0 ,$$

z čehož plyne

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3 + 2i$$

**Příklad 2.** Řešte rovnici

$$x^2 + (-5 + i) \cdot x + (6 - 2i) = 0$$

(Závorek je zde užito pro názorné vyznačení koeficientů  $a + bi$ ,  $c + di$ ). Nejprve zjistíme jakost kořenů, vypočteme hodnotu výrazu (4).  $d^2 + b^2c - abd = 4 + 6 - 10 = 0$ . Protože k tomu ještě je  $b \neq 0$ , poznáváme, že jeden kořen je reálný a druhý imaginární. Proto k vypočítání kořenů nebude třeba odmocňování.

Platí

$$x_1 + x_2 = 5 - i$$

$$x_1 x_2 = 6 - 2i$$

Z toho (protože  $x_1 \neq 0$ ) je

$$x_2 = \frac{6}{x_1} - \frac{2}{x_1} i ,$$

což dosadíme do první rovnice:

$$x_1 + \frac{6}{x_1} - \frac{2}{x_1} i = 5 - i$$

Imaginární části na obou stranách se sobě rovnají, tedy  $-\frac{2}{x_1} = -1$ .

Vypočítáme

$$x_1 = 2 ,$$

$$x_2 = 3 - i$$

**Příklad 3.** Řešte rovnici

$$x^2 + (-1 - 3i) \cdot x + (-2 + 2i) = 0$$

Opět sestavíme  $d^2 + b^2c - abd = 4 - 18 - 6 = -20$ . Protože tento výraz není roven nule, budou oba kořeny imaginární a to se stejnými znameními imaginárních částí. Podíváme se ještě, zda některý z kořenů není ryze imaginární. Je  $d^2 - a^2c - abd = 4 + 2 - 6 = 0$ , a protože je též  $a \neq 0$ , je právě jeden kořen ryze imaginární.

Výpočet kořenů provedeme podobně jako v předcházejícím příkladě. Je opět

$$x_1 + x_2 = 1 + 3i$$

$$x_1 x_2 = -2 + 2i.$$

Protože  $x_1 \neq 0$  je ryze imaginární, lze je psát  $x_1 = iX_1$ , kde  $X_1 \neq 0$  je číslo reálné. Můžeme jím druhou rovnici dělit a uvědomíme-li si, že  $\frac{1}{i} = -i$ , dostáváme po úpravě

$$x_2 = \frac{2i}{X_1} + \frac{2}{X_1}$$

To dosadíme do první rovnice

$$iX_1 + \frac{2i}{X_1} + \frac{2}{X_1} = 1 + 3i$$

Srovnáme reálné části čísel na obou stranách rovnice:  $\frac{2}{X_1} = 1$ , tedy  $X_1 = 2$ , z čehož

$$x_1 = 2i$$

a z toho snadno vypočteme

$$x_2 = \frac{2i + 2}{X_1} = 1 + i$$

Miloslav Jůza, Bratislava:

## O jedné vlastnosti trojúhelníka

Je dán libovolný trojúhelník. Tento trojúhelník rozdělíme na menší nepřekrývající se trojúhelníky tak, aby libovolné dva trojúhelníky vzniklé tímto rozdělením buď vůbec neměly společné body nebo měly společný vrchol nebo měly společnou stranu (t. j. žádné dva trojúhelníky se nesmějí dotýkati částí strany jednoho z nich). Přípustné způsoby dělení jsou na obr. 1 až 4, rozdělení na obr. 5 je nepřípustné, neboť na př. trojúhelník  $ABC$  má s trojúhelníkem  $ADE$  společnou jen část strany). Tři vrcholy velkého trojúhelníka označíme číslicemi 1, 2, 3. Vrcholy malých trojúhelníků označíme týmiž číslicemi 1, 2, 3 tak, aby všechny vrcholy, ležící na straně 12 velkého trojúhelníka, byly označeny číslicemi 1 nebo 2; všechny vrcholy, ležící na straně 13 označíme číslicemi 1 nebo 3; všechny vrcholy, ležící na straně 23 číslicemi 2 nebo 3; ostatní vrcholy označíme číslicemi 1, 2, 3 zcela libovolně (obr. 1, 2, 4; na obr. 3 je označení nepřípustné, neboť na straně 12 leží vrchol označený 3). Potom tvrdím, že

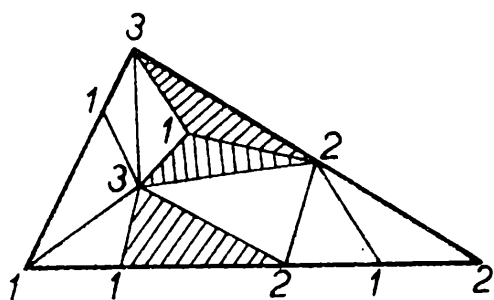
*mezi trojúhelníky, na něž je velký trojúhelník rozdělen, je vždy jeden, jehož vrcholy jsou označeny třemi různými číslicemi 1, 2, 3.*

Příklady na tuto větu vidíme na obr. 1, 2, 4.

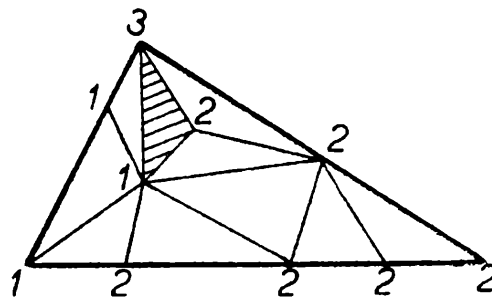
Abychom větu dokázali, předpokládejme, že máme trojúhelník rozdělený na menší trojúhelníky označené tak, jak jsme na začátku popsali. Spočítáme nejprve, kolik stran malých trojúhelníků, na něž je velký trojúhelník rozdělen, má koncové body označené číslicemi 1, 2; přitom úsečku, která je současně stranou dvou



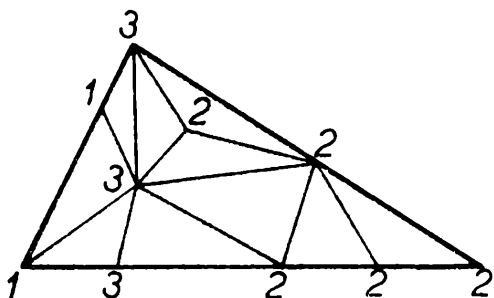
trojúhelníků, budeme počítat za dvě strany. Nejprve si všimneme stran, jejichž koncové body jsou označeny 1, 2 a které leží na obvodu trojúhelníka. Žádná taková strana nemůže ležet na straně 13 velkého trojúhelníka, neboť podle podmínek věty na této straně neleží žádný vrchol označený 2. Z podobného důvodu nemůže žádná strana s koncovými body označenými 1, 2 ležet na straně 23 velkého trojúhelníka. Tedy všechny takové strany musí ležet na té straně velkého trojúhelníka, která je označena 12. Spočítáme si na této straně všechny takové úsečky, počínaje od vrcholu 1 strany velkého trojúhelníka (obr. 6).



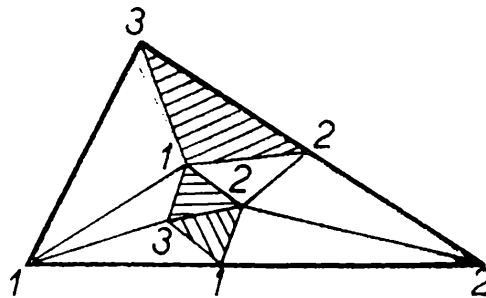
Obr. 1



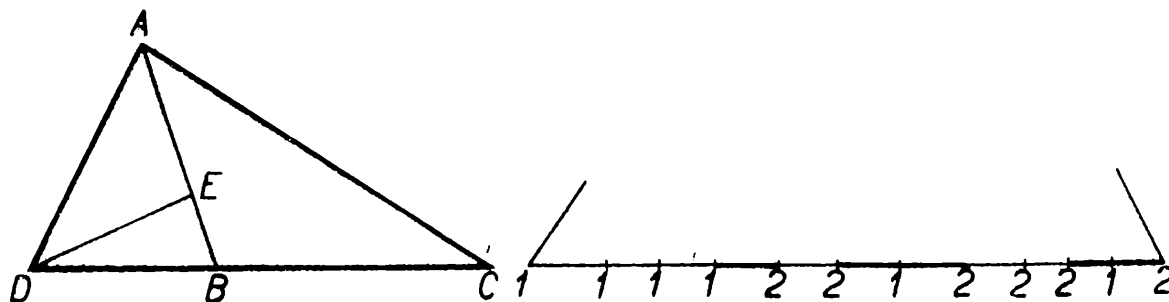
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Obr. 6

Jestliže se tedy pohybujeme po straně 12 od vrcholu 1 k vrcholu 2, nejprve přejdeme několik (jeden nebo více) bodů, označených číslem 1. Jakmile po prvé přejdeme úsečku 12, dostaneme se do bodu označeného číslicí 2. Pak může následovat několik bodů 2; teprve když přejdeme úsečku 21, opět se dostaneme do bodu 1. Jakmile znovu přejdeme úsečku 12, dostaneme se zase do bodu 2, po přejití další úsečky 21 do bodu 1 atd. Je vidět, že po lichém počtu úseček, jejichž koncové body jsou označeny 1, 2, budou následovat vrcholy, označené číslicí 2, po sudém počtu takových úseček vrcholy označené 1. Protože však poslední vrchol, ke kterému se nakonec dostaneme, je vrchol 2 velkého trojúhel-

níka, celkový počet úseček 12, které jsou na straně 12 velkého trojúhelníka, je tedy lichý. Také celkový počet těch stran malých trojúhelníků, jež leží na obvodu velkého trojúhelníka a jejichž koncové body jsou označeny číslicemi 1, 2, je lichý.

Celkový počet všech stran malých trojúhelníků, jejichž koncové body jsou označeny číslicemi 1, 2, je též lichý: uvnitř velkého trojúhelníka je takových stran sudý počet, neboť každá úsečka ležící uvnitř velkého trojúhelníka je stranou dvou trojúhelníků rozdělení. Celkový počet stran s koncovými body 1, 2 je tedy lichý.

Nyní si všimneme, že v každém trojúhelníku rozdělení, jehož vrcholy jsou označeny různými číslicemi 1, 2, 3, je právě jedna strana s koncovými body 1, 2. V trojúhelníku s vrcholy 1, 1, 2 nebo 1, 2, 2 jsou dvě takové strany, v ostatních trojúhelnících není žádná taková strana. Odtud plyne, že v trojúhelnících, jejichž vrcholy nejsou označeny třemi různými čísly, leží celkem sudý počet stran s konci 1, 2. Protože však celkový počet takových stran je lichý, plyne odtud, že existuje trojúhelník rozdělení, jehož vrcholy jsou označeny třemi různými čísly. Zároveň vidíme, že takových trojúhelníků je vždy lichý počet.

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

## O jedné úloze z geometrie kružnic

Jádrem článku je řešení úlohy 3 (viz str. 154), jejíž znění nechť si čtenář osvojí dříve, než bude pokračovat v dalším čtení. Zadal jsem tuto úlohu před časem pro naši matematickou olympiadu, ale pro obtížnost řešení nebyla do ní pojata. Tato obtížnost je v tom, podat řešení elementárními prostředky, čímž zde rozumím prostředky, které máte k dispozici vy, žáci jedenáctiletých ve svých učebnicích. Užítím vyšších prostředků je tato úloha (dokonce zobecněná) řešena na příklad v knize L. Seiferta: *Cyklografie*, JČMF, Praha 1949, str. 32–33. Mne přivedl k této úloze přítel Ing. F. Čepelík, který podal jiné, rovněž neelementární řešení. Řešení elementární, které zde uvádím, může posloužit účastníkům matematické olympiady jako ukázka, jak řešit složitější úlohy.

Složitější problémy řešíme obyčejně tak, že je rozložíme na řadu jednodušších problémů, jež směřují k hlavnímu řešení. Tomu ovšem předchází povšechná orientace, která - případně i po několika marných pokusech - vyústí nakonec v pevném plánu tím, že zvolíme vhodný cíl své práce. V naší úloze 3 můžeme na příklad vyhledat středy hledaných kružnic, nebo jejich poloměry, nebo také bod  $T$  (viz obr. 4), v němž se obě dotýkají. Tato poslední možnost vede v našem případě nejlépe k cíli.

Po tom, když jsme se rozhodli hledat zmíněný bod dotyku  $T$ , rozložíme daný úkol na úkoly jednodušší. Uvádím je zde opět ve formě úloh 1 a 2 tak, jak byla celá tato skupina úloh původně pro matematickou olympiadu připravena.

Úloha 1. *Je dán rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  ( $AC = BC$ ). Budiž na přímce  $m \equiv AC$  dán bod  $P$  a na přímce  $n \equiv BC$  bod  $Q$  tak, že body  $P, Q$  neleží v téže polorovině určené přímkou  $p \equiv AB$  a že úsečky  $AP$  a  $BQ$  jsou stejně dlouhé. Do-*

kažte, že potom průsečík přímky  $p$  s úsečkou  $PQ$  je střed úsečky  $PQ$ . - Lze tuto větu obrátit? Jinými slovy, zjistěte, platí-li následující tvrzení: Je-li bod  $R$  libovolný bod přímky  $p$  a je-li  $PQ$  úsečka procházející bodem  $R$  taková, že bod  $R$  je jejím středem a bod  $P$  je na přímce  $m$  a bod  $Q$  na přímce  $n$ , potom úsečky  $AP$  a  $BQ$  jsou stejně dlouhé a body  $P, Q$  neleží v téže polorovině vyřáté přímkou  $p$ .

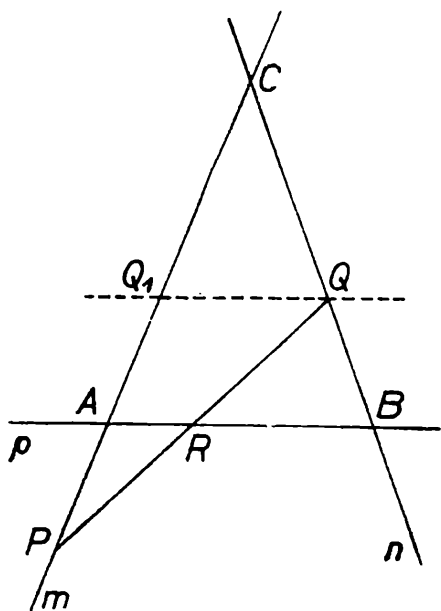
*Řešení* (obr. 1). Bodem  $Q$  vedme rovnoběžku s přímkou  $p \equiv AB$ . Tato rovnoběžka protne přímku  $m \equiv AC$  v bodě  $Q_1$ . Z úměrnosti úseček na ramenech úhlu  $QPQ_1$  mezi uvedenými rovnoběžkami plyne

$$PR : QR = PA : Q_1A$$

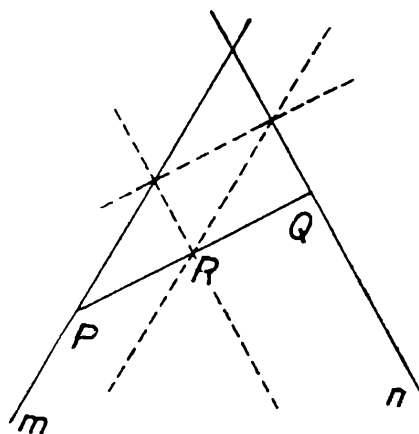
Ze souměrnosti trojúhelníka  $ABC$  plyne  $BQ = AQ_1$ , takže

$$PR : QR = PA : QB$$

Protože předpokládáme  $PA = QB$ , vychází z poslední úměry  $PR = QR$ , což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1



Obr. 2

Obrácená věta je také správná a dokáže se stejným postupem, ovšem za předpokladu, že daným bodem  $R$  dovedeme předem proložit úsečku  $PQ$  požadované vlastnosti. Taková úsečka je jediná a její konstrukce je patrná z obr. 2.

**Úloha 2.** Přímky  $m, n$  se protínají v bodě  $V$ . Na přímce  $m$  budiž dán bod  $M$  a na přímce  $n$  bod  $N$ . Budiž  $MA$  úsečka ležící na přímce  $m$  a  $NB$  úsečka ležící na přímce  $n$ . Předpokládejme, že úsečky  $MA$  a  $NB$  jsou stejně dlouhé a příslušnou délku označme písmenem  $u$ , takže  $MA = NB = u$ . Co vytvoří střed úsečky  $AB$ , mění-li se délka  $u$ ?

*Řešení.* Střed úsečky  $MN$  označme  $R$  a vedmě jím přímky  $p, p'$  rovnoběžné s osami úhlů přímek  $m, n$ . Dokážeme, že platí:

Přímky  $p, p'$  jsou hledanou množinou středů úseček  $AB$ , mění-li se body  $A, B$  na přímkách  $m, n$  podle výše uvedeného předpisu.

*Důkaz.* Přímka  $p$  protne přímku  $m$  v bodě  $A_0$  a přímku  $n$  v bodě  $B_0$  (viz obr. 3). Zřejmě je

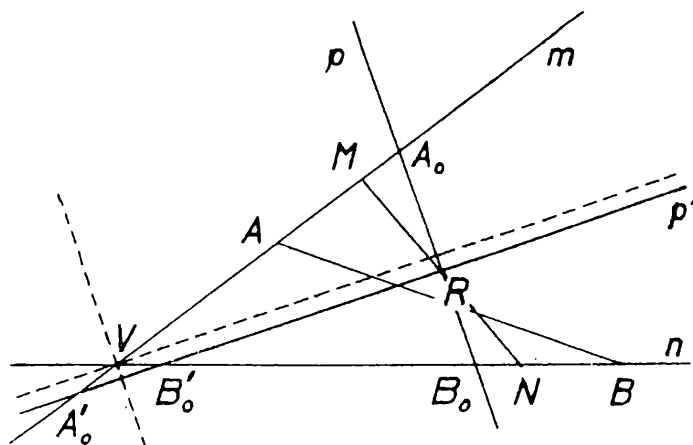
$$MA_0 = NB_0, \quad (1)$$

jak plyne z úlohy 1. Podobně přímka  $p'$  protne přímku  $m$  v bodě  $A'_0$  a přímku  $n$  v bodě  $B'_0$  a zase platí

$$MA'_0 = NB'_0 \quad (1')$$

Zvolme nyní na přímce  $m$  libovolně bod  $A$  (případ  $A \equiv M$  je triviální a můžeme ho při řešení opominout). Úsečku  $MA$  přenesme na přímku  $n$  do úsečky  $NB$ . Podle toho, na kterou stranu od bodu  $N$  úsečku  $NB$  nanese, rozlišujeme dvě možnosti, jež se navzájem vylučují: buď je  $A_0A = B_0B$ , nebo je  $A'_0A = B'_0B$ , jak snadno zjistíme ze vztahů (1) a (1'); jiné případy nastat nemohou.

Vyšetřujeme první případ  $A_0A = B_0B$ . Ze souměrnosti rovnoramenného trojúhelníka  $A_0B_0V$  a z úlohy 1 plyne, že střed úsečky  $AB$  leží na přímce  $p$ . Obráceně každý bod přímky  $p$  má tu vlastnost, že je středem právě jedné úsečky  $AB$  s krajními body  $A$ , resp.  $B$  na přímkách  $m$ , resp.  $n$  a stejnou konstrukcí jako dříve uká-



Obr. 3

žeme, že pak  $AA_0 = BB_0$ , tedy vzhledem k (1) je i  $AM = BN$ . Tím je vyčerpán důkaz v prvním možném případě.

Druhý možný případ, kdy  $A'_0A = B'_0B$ , vede k tomu, že střed úsečky  $AB$  leží na přímce  $p'$ , jak se dokáže stejnou úvahou jako v prvním případě, pouze trojúhelník  $A_0B_0V$  se nahradí trojúhelníkem  $A'_0B'_0V$ .

Tím je úloha 2. vyřešena.

**Úloha 3.** Jsou dány dvě různoběžné přímky  $u, v$ . Na přímce  $u$  budiž dán bod  $M$  a na přímce  $v$  bod  $N$ , přičemž předpokládáme, že je  $M \neq N$ . Sestrojte dvě stejně velké kružnice tak, aby jedna z nich se dotýkala přímky  $u$  v bodě  $M$ , druhá aby se dotýkala přímky  $v$  v bodě  $N$  a aby obě kružnice se dotýkaly navzájem. Kolik je řešení?

*Řešení.* Řešení je rozděleno do tří částí, a to: 1. Rozbor s důkazy. 2. Sestrojení kružnic. 3. Vymezení počtu řešení.

1. *Rozbor s důkazy.* Průsečík přímek  $u, v$  označme  $O$ . Bod dotyku, v němž se hledané kružnice dotýkají, označme  $T$ . Celé řešení zaměříme k tomu, že bu-

deme hledat bod  $T$ . Pak už lze obě kružnice snadno sestrojít, protože pro každou z nich známe jednu tečnu s bodem dotyku a ještě jeden bod  $T$ .

Délky jednotlivých úseček označme pro stručnost takto:  $OM = a$ ,  $ON = b$ . V obr. 4 snadno určíme délku úsečky  $OT = x$ . Označíme-li obě hledané kružnice  $k_1$  a  $k_2$  a jejich středy  $S_1$  a  $S_2$ , bude  $a$  délka tečny vedené z bodu  $O$  ke kružnici  $k_1$  a  $b$  délka tečny vedené z bodu  $O$  ke kružnici  $k_2$ . Označme dále  $OS_1 = y$ ,  $OS_2 = z$ . Písmenem  $r$  označme délku poloměru hledaných kružnic  $k_1, k_2$ . Z pravoúhlých trojúhelníků  $OMS_1$  a  $ONS_2$  vyčteme tyto vztahy (Pythagorova věta):

$$y^2 = a^2 + r^2, \quad z^2 = b^2 + r^2 \quad (2)$$

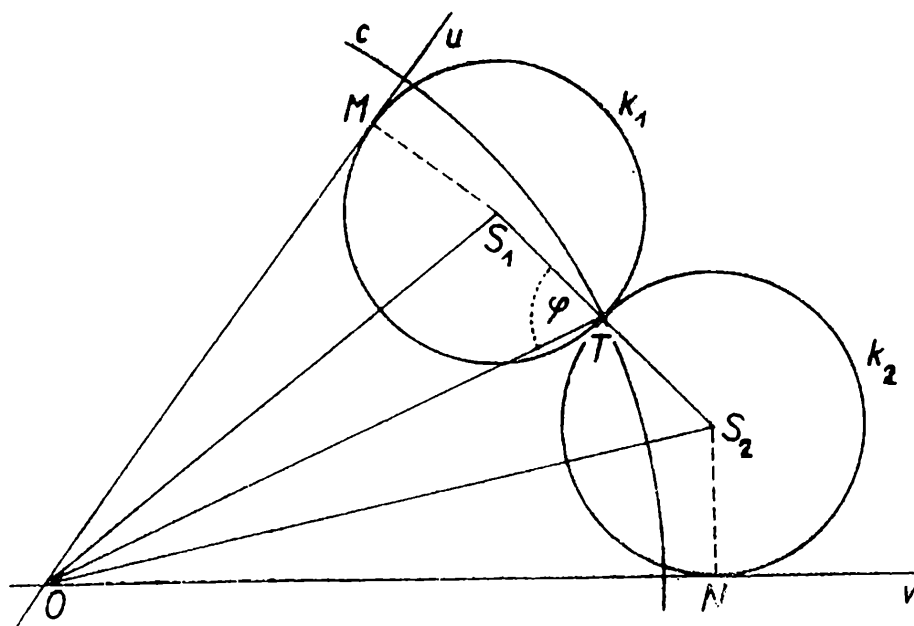
Užijme kosinové věty pro trojúhelníky  $OTS_1$  a  $OTS_2$ , přičemž  $\varphi$  je vnitřní úhel na příklad v trojúhelníku  $OTS_1$  při vrcholu  $T$ . Vychází

$$y^2 = x^2 + r^2 - 2xr \cos \varphi, \quad z^2 = x^2 + r^2 + 2xr \cos \varphi$$

Dosadíme-li sem z rovnic (2), máme

$$a^2 = x^2 - 2xr \cos \varphi, \quad b^2 = x^2 + 2xr \cos \varphi$$

Sečtením těchto rovnic vychází pro  $x$  konstanta, totiž:



Obr. 4

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2} \quad (3)$$

Máme tedy první pomocný výsledek:

**Věta 1.** *Bod  $T$  leží na kružnici  $c$ , opsané z bodu  $O$  poloměrem  $x$ , kde  $x$  je dáno rovnicí (3).*

Délka  $x$  se sestojí snadno. Je to polovina úhlopříčky čtverce, jehož strana je přeponou pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách  $a, b$ , jak se o tom přesvědčíte ze vzorce (3).

Najdeme nyní ještě další čáry, na nichž leží bod  $T$ . Užijeme k tomu řešení úloh 1 a 2. Označme písmenem  $m$ , resp.  $n$  kolmici, vztyčenou k přímce  $u$ , resp.

$v$  v bodě  $M$ , resp.  $N$  a uvažujme takto: bod  $T$  je středem úsečky  $S_1S_2$ , při čemž body  $S_1, S_2$  leží na zmíněných kolmicích  $m, n$  a vedle toho je  $MS_1 = NS_2$ . Platí (viz obr. 5):

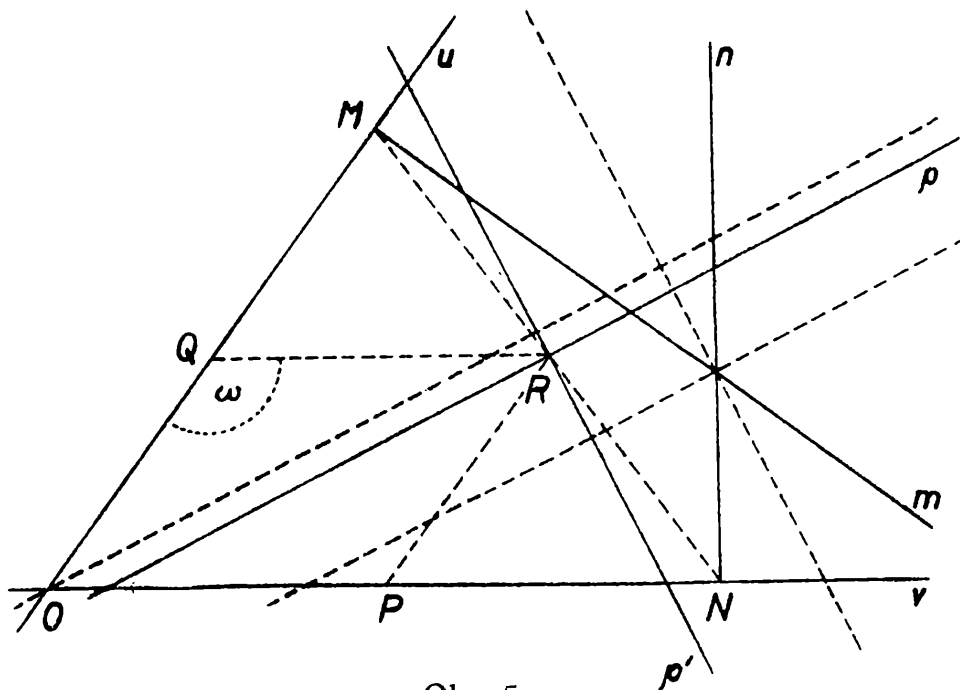
**Věta 2.** *Množina středů úseček  $S_1S_2$ , kde bod  $S_1$  leží na přímce  $m$  a bod  $S_2$  na přímce  $n$  a kde  $MS_1 = NS_2$ , jsou dvě přímky  $p, p'$ , procházející středem  $R$  úsečky  $MN$  a rovnoběžné s osami úhlů přímek  $m, n$ .*

1. Důkaz této věty byl podán řešením úlohy 2, jen označení jsme poněkud změnili; místo písmen  $A, B$  užili jsme zde pro tytéž body označení  $S_1, S_2$ .

Přímky  $p, p'$  procházející bodem  $R$  rovnoběžně s osami úhlů přímek  $m, n$  jsou ovšem také rovnoběžné s osami úhlů přímek  $u, v$ . Podle věty 2 leží tedy bod  $T$  na některé z právě uvedených přímek  $p, p'$ .

Tím je skončena první část řešení, totiž rozbor.

2. *Sestrojení kružnic.* Podle věty 1 sestrojíme kružnici  $c$  o středu  $O$  a polooměru  $x$ , který určíme ze vzorce (3). Potom sestrojíme přímky  $p, p'$  podle obr. 5 a určíme průsečíky  $T_1, T_2, T_3, T_4$  přímek  $p, p'$  s kružnicí  $c$ . Každý z těchto bodů



Obr. 5

vede k reálnému řešení úlohy 3; stačí pak sestrojit kružnici procházející bodem  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) a dotýkající se přímky  $u$ , resp.  $v$  v bodě  $M$ , resp.  $N$ , což je elementární. Příslušný obrázek nechť si čtenář vyrýsuje sám.

3. *Vymezení počtu řešení.* Průsečík  $R$  přímek  $p, p'$  je středem úsečky  $MN$ . Vypočteme jeho vzdálenost od bodu  $O$ . Označme ji  $OR = t$ , ostatní označení ponechme tak, jak jsme je v této úloze zavedli. Bodem  $R$  vedené rovnoběžky s přímkami  $u, v$  vytvoří s nimi rovnoběžník  $OPRQ$  (viz obr. 5) a označíme-li na příklad úhel při jeho vrcholu  $Q$  písmenem  $\omega$ , vypočteme snadno délku jeho úhlopříčky z kosinové věty. Strany tohoto rovnoběžníku mají totiž délky  $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b$ ; tedy:

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2} \cos \omega$$

Porovnejme velikost délky  $t$  s délkou  $x$  ze vzorce (3). Máme

$$x^2 - t^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} \cos \omega = \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} \cos \omega.$$

Protože předpokládáme, že přímky  $u, v$  jsou různoběžné, je vždycky  $\cos \omega > -1$ . Vzhledem k předpokladu  $M \not\equiv N$  nemůže být současně  $a = b = 0$ .

Rozlišujeme tedy dva případy.

1. Necht'  $a > 0, b > 0$ . Potom

$$\frac{ab}{2} \cos \omega > -\frac{ab}{2}.$$

Tedy

$$x^2 - t^2 > \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{ab}{2} = \frac{(a - b)^2}{4} \geq 0,$$

takže máme

$$x > t$$

2. Je-li  $a = 0, b > 0$ , nelze použít horního výpočtu, protože rovnoběžník  $OPRQ$  pak neexistuje. Ale tu je  $t = \frac{1}{2}b$  a podle vzorce (3) je  $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ , tedy zase

$x > t$ . Ke stejnému výsledku dojdeme ovšem i v případě  $a > 0, b = 0$ .

Celkem tedy je vždycky  $x > t$ . To znamená, že bod  $R$  leží vždy uvnitř kružnice  $c$  z věty 1, takže přímky  $p, p'$  jím procházející protínají kružnici  $c$  vždy ve čtyřech různých bodech. Jsou tedy v každém případě čtyři reálná řešení naší úlohy 3. Tomu je rozumět tak, že existují vždy čtyři páry kružnic, jež vyhovují podmínkám naší úlohy. Obvyčejně to je pak osm kružnic, ale ve zvláštních případech jich může být méně, protože se může stát, že v oněch čtyřech párech kružnic některá z nich vystupuje dvakrát. Ale vždy existují čtyři páry kružnic, jež řeší naši úlohu. Víc jich samozřejmě nemůže být.

Dr S v a t a v a K u b á l k o v á, Praha:

## Konstrukce s nepřístupnými prvky

(II. část)

V první části stejnojmenného článku v minulém čísle tohoto časopisu bylo uvedeno několik základních konstrukcí s nepřístupnými prvky. Byly to vesměs úlohy, které bychom mohli stručně označit jako úlohy o přímce dané nějakým nepřístupným prvkem. V této části si všimneme čtyř úloh o kružnici, jejíž střed leží mimo nákresnu.

Při popisování konstrukcí budeme používat označení z první části tohoto článku. Řešení úlohy 1., úlohy 2. a úlohy 4. se zakládá na vlastnostech chordály kružnic a mocnosti bodu vzhledem ke kružnici. O obou uvedených pojmech pojednává článek S. Horáka: Mocnost bodu ke kružnici v 1. a 2. čísle letošních

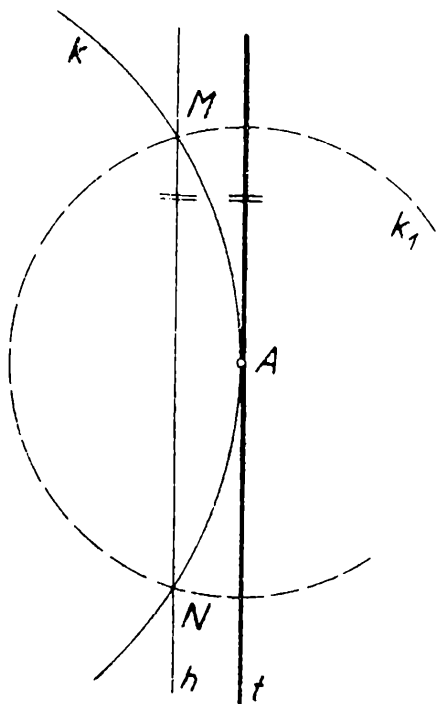
Rozhledů. Čtenář v něm nalezne odvozeny všechny vlastnosti chordály kružnic a mocnosti bodu vzhledem ke kružnici, které budeme ještě dále potřebovat.

K nejzákladnějším úlohám o kružnici patří úloha sestrojiti tečnu kružnice v některém jejím bodě. Uvažovali jste již někdy o tom, jak by se tato úloha řešila v případě, že střed kružnice neleží v nákrese? Odpověď na tuto otázku dává řešení následující úlohy.

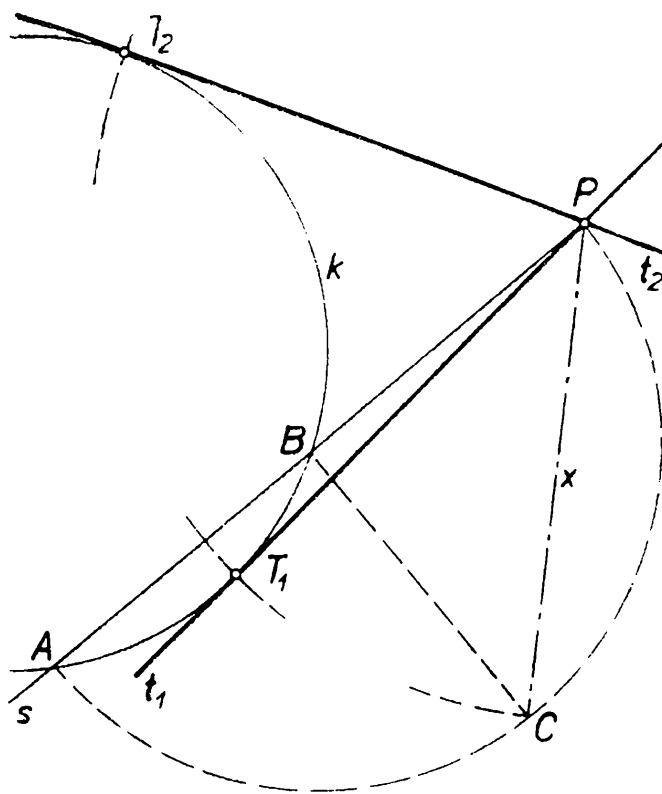
Úloha 1. (Obr. 1.) Sestrojte tečnu  $t$  kružnice  $k$  v jejím daném bodě  $A$ , není-li střed  $S$  kružnice  $k$  dán, nebo je-li nepřístupný.

Kružnici  $k$  protněme pomocnou kružnicí  $k_1$ , se středem v daném bodě  $A$ , v bodech  $M, N$ . Označíme-li písmenem  $h$  přímku  $MN$ , prochází hledaná tečna  $t$  bodem  $A$  rovnoběžně s přímkou  $h$ .

Správnost konstrukce plyne z toho, že přímka  $h$  je chordálou kružnic  $k, k_1$  a je proto  $h \perp AS$ , kde  $S$  je nepřístupný střed dané kružnice  $k$  a  $A$  je střed pomocné kružnice  $k_1$ . Zároveň musí být  $t \perp AS$  a tedy podle známé věty z planimetrie, je  $t \parallel h$ .



Obr. 1



Obr. 2

Je-li dána kružnice  $k$  o středu  $S$  a bod  $P$ , který leží vně  $k$ , umíme sestrojiti tečny z bodu  $P$  ke kružnici  $k$ . V příslušné konstrukci používáme podstatně bodu  $S$ ; leží-li tedy bod  $S$  mimo nákrese, musíme postupovat jiným způsobem.

Úloha 2. (Obr. 2.) Z daného bodu  $P$  veďte tečny  $t_1, t_2$  ke kružnici  $k$ , jejíž střed  $S$  není dán, nebo leží mimo nákrese.

Danou úlohu vyřešíme tím, že sestrojíme délku  $x$  úseček  $PT_1 = PT_2$ , kde  $T_1, T_2$  jsou dotykové body hledaných tečen  $t_1, t_2$  na kružnici  $k$ . K tomu účelu

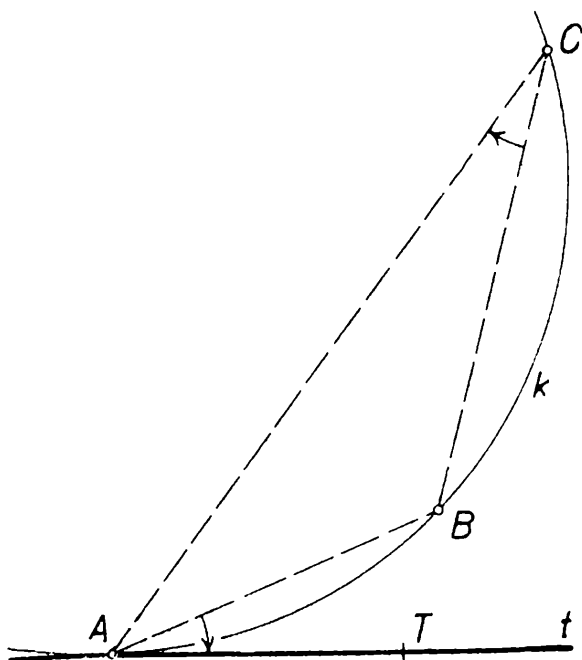


vedeme bodem  $P$  libovolnou sečnu  $s$  kružnice  $k$ , která ji protíná v bodech  $A, B$ . Číslo  $PA \cdot PB$  je mocností daného bodu  $P$  vzhledem ke kružnici  $k$  a platí, jak je známo, rovnost

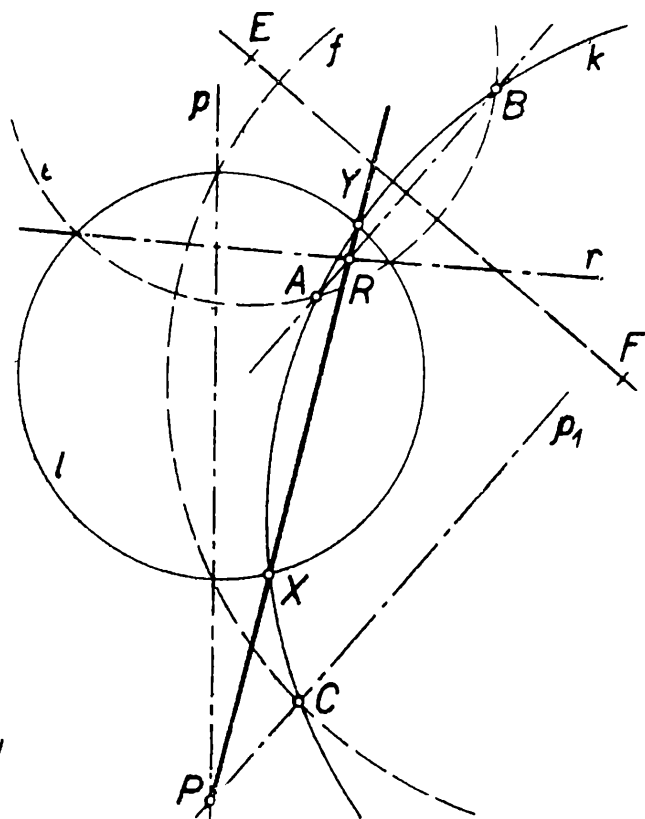
$$PA \cdot PB = \overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 \quad (1)$$

Pomocí první Eukleidovy věty sestrojíme snadno na základě vztahu (1) úsečku  $x$  o délce  $PT_1 = PT_2$  (na obr. 2 je příslušná konstrukce úsečky  $x = PC$  provedena). Kružnice o středu  $P$  a poloměru  $x$  protíná danou kružnici  $k$  v dotykových bodech  $T_1, T_2$  hledaných tečen  $t_1, t_2$ .

V obou předcházejících úlohách byla kružnice  $k$  o nepřístupném středu  $S$  dána svým obloukem. Uvažujme dále případ, že kružnice  $k$  je dána třemi body  $A, B, C$ , které ovšem neleží v přímce. Její střed  $S$  dovedeme sestroit jako průsečík os  $o_1, o_2, o_3$  úseček  $AB, BC, CA$ . Leží-li střed  $S$  v nákresně, lze kružnici  $k$  vyrýsovat a řešit pro ni různé úlohy. Může se však velmi snadno stát, že osy  $o_1, o_2, o_3$  úseček  $AB, BC, CA$  se protnou v bodě  $S$ , který leží mimo nákresnu. Jak potom sestrojíme na příklad tečnu  $t$  kružnice  $k$  v jejím bodě  $A$ ? Na tuto otázku ihned odpovíme.



Obr. 3



Obr. 4

Úloha 3. (Obr. 3.) Kružnice  $k$ , jejíž střed  $S$  leží mimo nákresnu, je dána třemi body  $A, B, C$ ; sestrojte tečnu  $t$  kružnice  $k$  v bodě  $A$ .

Řešení dané úlohy se zakládá na známé větě, že totiž úsekový úhel je roven obvodovému úhlu nad týmž obloukem. Předpokládejme na chvíli, že již známe tečnu  $t$  kružnice  $k$  v bodě  $A$ . Na tečně  $t$  zvolme bod  $T \neq A$  tak, aby ležel v opačné polorovině vyřezané přímku  $AB$ , než bod  $C$ . Podle zmíněné věty platí, že úhel  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAT$ . Stačí tedy přenést úhel  $\sphericalangle BCA$  i co do smyslu tak, aby

jeho vrchol  $C$  přešel do bodu  $A$  a rameno  $BC$  se ztotožnilo s přímkou  $AB$ . Druhé rameno je potom hledanou tečnou  $t$  kružnice  $k$  v bodě  $A$ .

Článek zakončíme touto úlohou.

Úloha 4. (Obr. 4.) Kružnice  $k$ , jejíž střed  $S$  leží mimo nákresnu, je dána třemi body  $A, B, C$ ; sestrojte průsečíky  $X, Y$  kružnice  $k$  s danou kružnicí  $l$ .

Řešení dané úlohy nejdříve popíšeme a teprve potom dokážeme jeho správnost. Sestrojíme pomocnou kružnici  $e$  o středu  $E$ , která prochází danými body  $A, B$ . Kružnice  $e$  protíná danou kružnici  $l$  ve dvou bodech. Průsečík jejich spojnice  $r$  s přímkou  $AB$  označme  $R$ . Na ose úsečky  $AB$  zvolíme dále libovolný bod  $F$  jako střed další pomocné kružnice  $f$ , která prochází daným bodem  $C$ . Přímka  $p$ , spojující průsečíky kružnic  $l$  a  $f$ , protíná přímkou  $p_1$  vedenou bodem  $C$  rovnoběžně s  $AB$  v bodě, který označíme  $P$ . Společné body přímky  $PR$  a dané kružnice  $l$  jsou potom hledané průsečíky  $X, Y$  kružnic  $k$  a  $l$ . Všimněte si, že průsečíky  $X, Y$  lze určit, aniž rýsuje kružnici  $k$ .

Správnost uvedeného postupu řešení snadno ověříme na základě této známé věty: Jsou-li  $k_1, k_2, k_3$  tři kružnice, protínají se chordály kružnic  $k_1, k_2$ ;  $k_1, k_3$ ;  $k_2, k_3$  v témže bodě  $P$ . V našem případě uvažujeme nejdříve o trojici kružnic  $e, l, k$ . Chordály  $AB$ , resp.  $r$  kružnic  $e, k$ , resp.  $e, l$  procházejí bodem  $R$ , kterým jde tedy také chordála kružnic  $k, l$ . Analogickou úvahu provedeme pro tři kružnice  $f, l, k$ . Chordály  $p$ , resp.  $p_1$  kružnic  $f, l$ , resp.  $f, k$  procházejí bodem  $P$ , který obsahuje také chordála kružnic  $k, l$ . Přímka  $PR$  je proto chordálou daných kružnic  $k, l$  a protíná kružnici  $l$  v hledaných průsečících  $X, Y$  obou kružnic  $k$  a  $l$ .

Jiné řešení úlohy 1 a další úlohy podobné úlohám tohoto článku nalezne čtenář v knize J. Sobotka: Deskriptivní geometrie promítání paralelního. Praha, JČMF 1906, str. 567—579 a V. Hruška: Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. Praha, JČMF, Cesta k vědění, svazek 7, 1940.

Doc. Dr. Miroslav Menšík, Praha:

## Polární souřadnice

V článku o radiových teleskopech jste se setkali s novým druhem souřadnic. Pro některé úlohy v geometrii i v technické praxi zavádíme t. zv. polární souřadnice.

V rovině si zvolíme pevný bod  $O$  (obr. 1) zvaný počátek čili pól a jím vedeme orientovanou polopřímku  $o$ , t. zv. polární osu. Daný bod  $A$  v téže rovině spojíme s pólem a označíme jeho průvodič (též radius vektor)  $r = \vec{OA}$ . Velikost polárního úhlu  $\varphi$  sevřeného orientovanou osou  $o$  a orientovanou polopřímku  $\vec{OA}$  měříme kladně proti směru otáčení hodinových ručiček.

Obecný bod  $A$  v rovině je pak jednoznačně určen dvojicí čísel  $r, \varphi$ , z nichž první je podle úmluvy velikost průvodiče při určité jednotkové úsečce (na př. 1 cm) a druhé je velikost úhlu při určitém jednotkovém úhlu (na př.  $1^\circ$  nebo

radian). To zapíšeme ve tvaru  $A(r; \varphi)$ , kde je  $r \geq 0$  a  $0 \leq \varphi < 360$  nebo  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . V obr. 1 je podle toho  $A(3; 30)$ , nebo  $A(3; \frac{\pi}{6})$ .

Obráceně každému bodu v rovině náleží jeho určité polární souřadnice vyhovující těmto podmínkám. Pouze pól činí výjimku, neboť jeho polární úhel je neurčitý.

Polární souřadnice můžeme převést (transformovat) na souřadnice pravoúhlé o tomtéž počátku  $O$ , které mají kladnou osu  $x$  totožnou s polární osou  $o$  (obr. 1). Pak jest

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

a odtud

$$x^2 + y^2 = r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

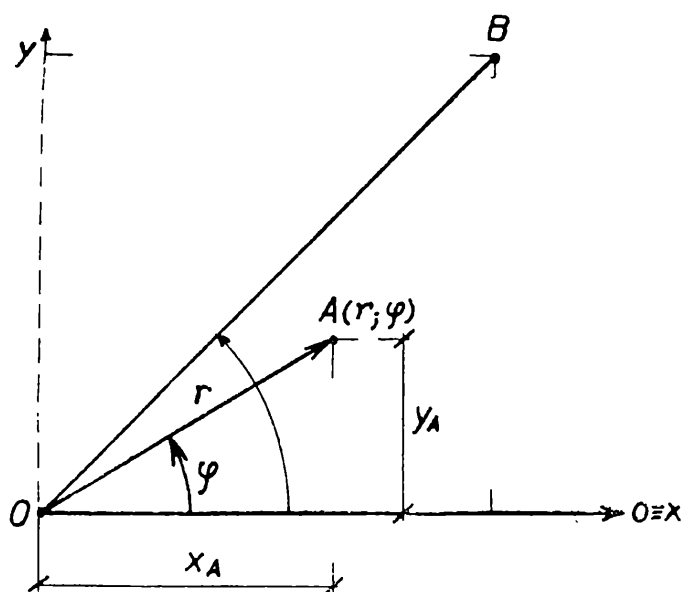
$$r^2 = x^2 + y^2$$

čili

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$



Obr. 1

Podle toho má bod  $A(3; 30)$  daný polárními souřadnicemi v obr. 1 pravoúhlé souřadnice

$$x_A = 3 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{2} \sqrt{3},$$

$$y_A = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

tedy píšeme  $A\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ .

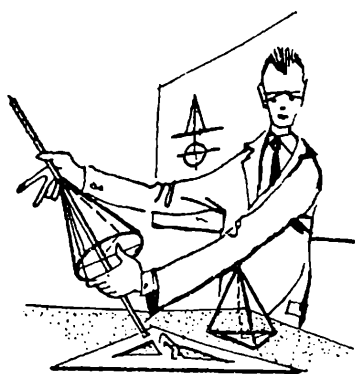
Opačně bod na př.  $B(4; 4)$  v pravouhlých souřadnicích transformujeme do souřadnic polárních takto:

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{4} = 1 \text{ (t. j. } \varphi = 45^\circ),$$

tedy napíšeme  $B(4\sqrt{2}; 45)$  nebo  $B\left(4\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$

Podrobné poučení o různých typech souřadnic v rovině najdete v knížce Z. Pírko: O souřadnicích v rovině. Sběrka C e s t a k v ě d ě n í, sv. 15., Praha 1942, str. 92, obr. 14.



## Deskriptivní geometrie

Doc. Dr. Miroslav Menšík, Praha:

### Základy kinematické geometrie

(Pokračování)

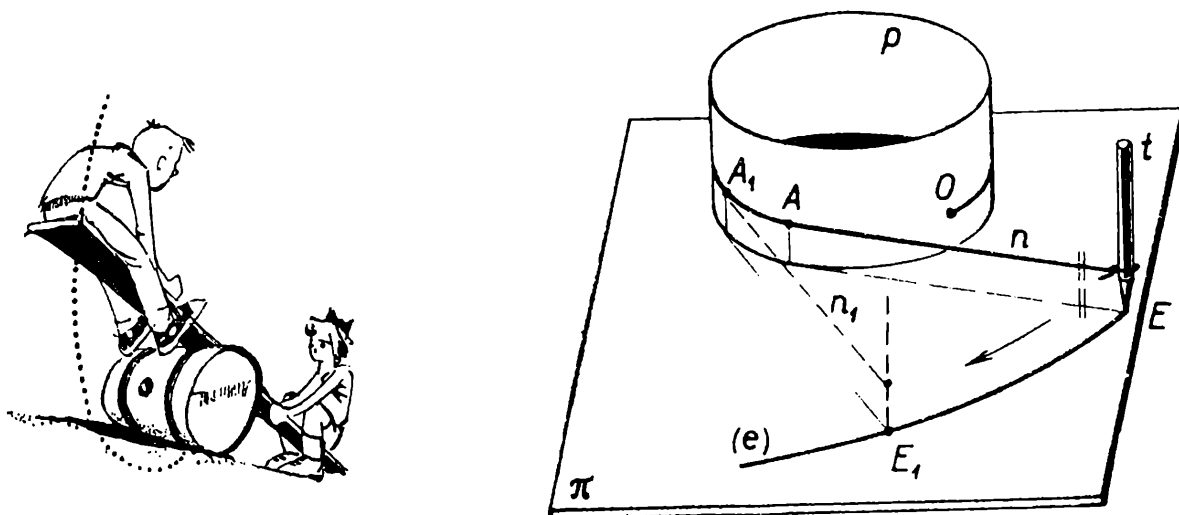
Jako použití toho, co jsme si až dosud vyložili ze základů kinematické geometrie v rovině, nakreslíme si křivky, které vzniknou pohybem přímky po kružnici a pak opačně pohybem kružnice po přímce, k o t á l e n í m.

Zamysleli jste se někdy nad tím, jakou křivku opisuje některý bod klády, uprostřed podepřené válcovým kmenem, na níž jste se houpli? Zkusili jste zakreslit si křivku, kterou opisuje určitý bod nitě navíjené na válcovou cívku? A přesto takovou křivku můžete lehce sami narýsovat.

Na rotační válec - na př. na plechovku  $p$  - navíňte nit  $n$  (na př. jeden závit ve vodorovné rovině), jejíž jeden konec upevníte k válci (obr. 12). Nejlépe když prorazíte hřebíčkem do plechovky malou díрку  $O$  a jí protáhnete nit s uzlíkem na konci. Na druhý konec nitě upevníme smyčkou tužku s kreslicím hrotem  $E$ . Jednou rukou přidržíme válec v pevné poloze na rovinném podkladu  $\pi$  - na př. na rýsovací desce - a druhou rukou uchopíme tužku a držíme ji tak, aby byla jednak v kolmé poloze k rovině  $\pi$  a aby přitom nit  $n$  byla napnutá stále ve vodorovné poloze.

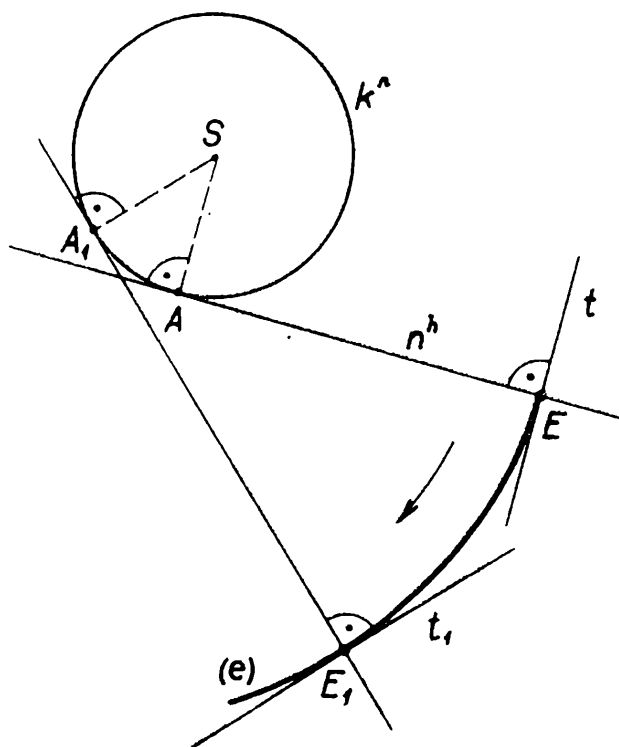
Pohybujeme-li tužkou dodržíme obě tyto podmínky, odvinuje nebo navinuje se nit (podle směru pohybu) a hrot  $E$  kreslí na rovině  $\pi$  křivku ( $e$ ), jež je jeho trajektorií. Na obr. 12 je čárkovaně zobrazena ještě jedna z dalších okamžitých poloh našeho kreslicího zařízení. Při tomto odvinování se nit  $n$  stále dotýká válcové plochy v bodech  $A, A_1, \dots$

Považujme rovinu  $\pi$  za naši nákresnu a současně za půdorysnu. Pak rotační válcová plocha o ose kolmé k této průmětně se promítne jako kružnice  $k^n$  a polohy nitě jako jednotlivé její tečny (obr. 13). Tak přecházíme z hmotného modelu k úloze v rovině.



Obr. 12

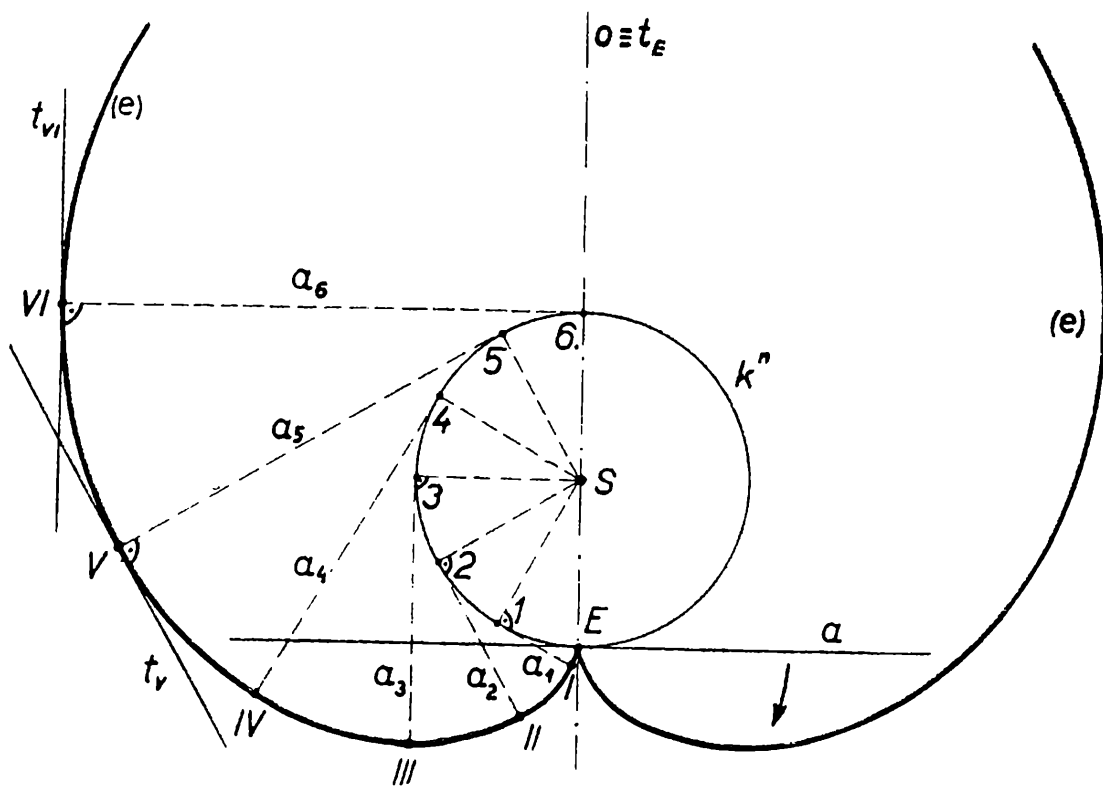
Budiž dána v rovině p e v n á (n e h y b n á) kružnice  $k^n$  o středu  $S$  a tečna  $n^h$  v jejím bodě  $A$ . Tečna  $n^h$  se bude kotálet (je p o h y b l í v á, h y b n á) po kružnici  $k^n$  a nabývat tak postupně poloh  $AE, A_1E_1, \dots$  (obr. 13). Pak každý bod  $E$  ležící na kotálející se tečně vytvoří křivku  $(e)$ , které říkáme *kruhová evolventa*.



Obr. 13

Je tedy patrné, že při tomto pohybu - vzpomeňme si na nit v obr. 12 - bude  $A_1E_1 = \widehat{A_1A} + AE$ . Okamžitý střed otáčení pro pohybující se bod v poloze  $E$  je bod  $A$  a v poloze  $E_1$  bod  $A_1$ , tedy jsou to dotykové body odvalující se tečny  $n^h$  po kružnici  $k^n$ . Proto jsou tečny evolventy ( $e$ ) v bodech  $E, E_1, \dots$  kolmé k příslušné poloze pohybující se tečny ( $t \perp n^h, t_1 \perp E_1A_1, \dots$ ).

Na obr. 14 je sestrojena kruhová evolventa ( $e$ ) dotykového bodu  $E$  přímky (tečny)  $a$ . Kružnici  $k^n$  o středu  $S$  rozdělíme na libovolný počet stejných dílků, nejlépe na dvanáct  $\widehat{E1} = \widehat{12} = \widehat{23} = \dots$ . Bude-li se tečna  $a$  odvalovat po kružnici ve směru (záporném) označeném šipkou, nabude postupně poloh  $a_1, a_2, \dots$  s dotykovými body  $1, 2, \dots$ . Bod  $E$  opisuje přitom kruhovou evolventu ( $e$ ), pro jejíž body  $I, II, \dots$  platí  $1 I = \widehat{1E}, 2 II = \widehat{2E}, \dots$ . Délky můžeme buď vypočítat:  $1 I = \frac{2 \pi r}{12} = \frac{\pi r}{6}, 2 II = \frac{\pi r}{3}, \dots$  nebo přibližně sestrojiti graficky:

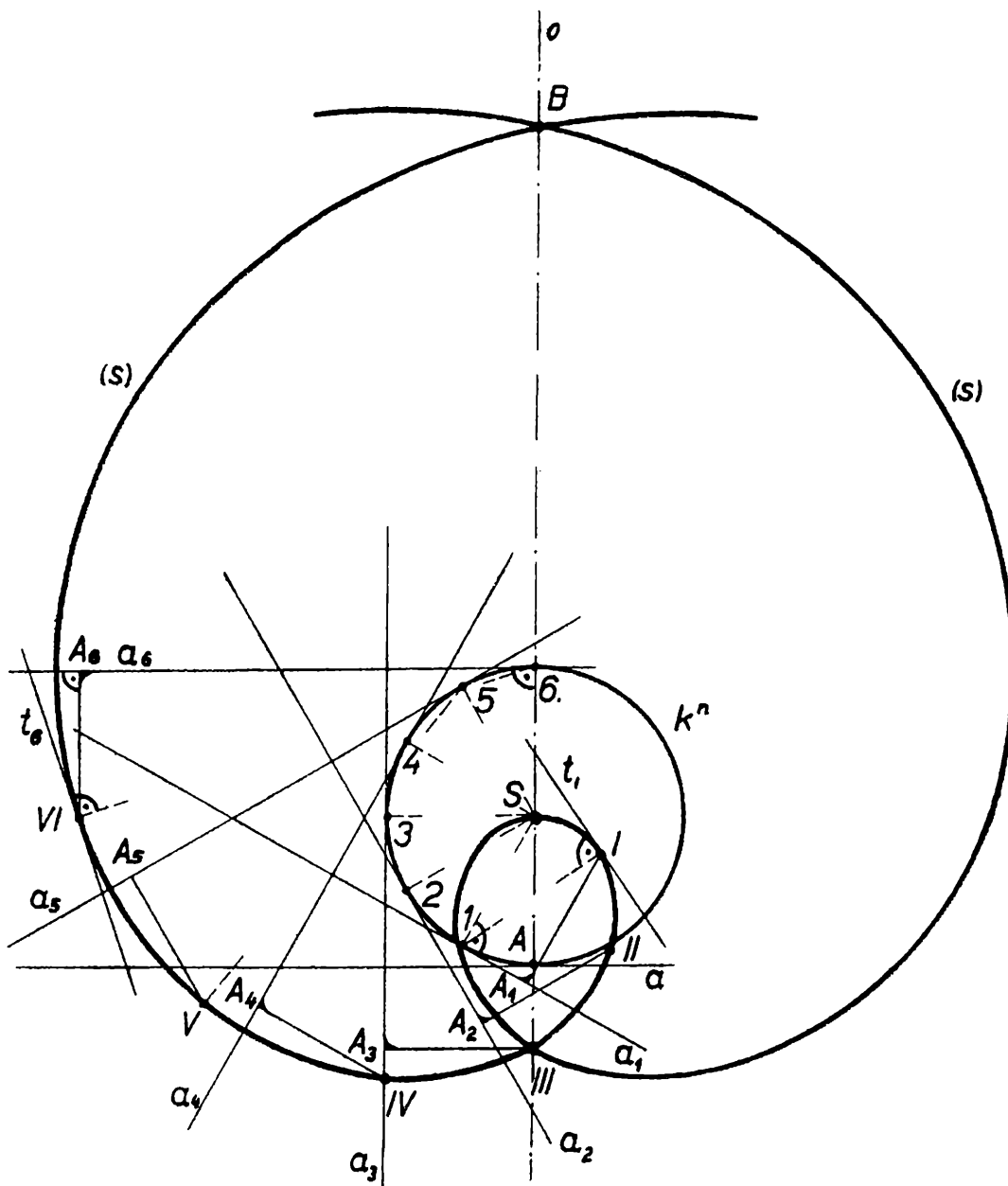


Obr. 14

$1 I = 1E \doteq \widehat{1E}, 2 II = 2 \cdot 1E \doteq \widehat{2E}, 3 III = 3 \cdot 1E, \dots$ . Nahradíme tak v našem případě při této přibližné *rektifikaci* (čili rozvinutí) kružnice  $k^n$  její obvod vepsaným pravidelným dvanáctiúhelníkem. Takto vzniklá chyba při rozměrech obrazce, jaký kreslíme na papír formátu A4, je malá a v mezích rýsovacích chyb. Na obr. 14 je provedena konstrukce až do šesté polohy kotálejší se přímkou spolu s tečnami v některých bodech ( $t_V, t_{VI}, t_E \equiv o$ ).

Odvalováním tečny  $a$  kladným směrem vznikne další část evolventy, osa  $o$  souměrnosti je  $o \equiv SE$ . S kotálením můžeme pokračovat do nekonečna a vytváříme tak stále další závity evolventy, která náleží mezi t. zv. *křivky transcendentní*.

Spojme pevně střed  $S$  nehybné kružnice  $k^a$  s kotálející se tečnou  $a$  (obr. 15), pak i tento bod vytvoří trajektorii  $(s)$ , kterou nazýváme *Archimedova závitnice* nebo *Archimedova spirála*.



Obr. 15

Její nakreslení je patrné z obr. 15 na př. pro polohu tečny  $a_1$  s dotykovým bodem  $I$ , kde jest  $I A_1' = \widehat{IA}$ . Pak  $A_1I \perp a_1$ ,  $A_1I = AS$  určí polohu bodu  $I$  trajektorie  $(s)$ . Tečna spirály v bodě  $I$  je opět  $t_I \perp I I$ , neboť dotykový bod  $I$  je okamžitým středem otáčení. Tak byly sestrojeny body  $II, \dots, VI, \dots$  s příslušnými tečnami, které usnadní nakreslení křivky.

Osa souměrnosti je  $o \equiv AS$ ; souměrnou zbývající část Archimedovy spirály můžeme sestrojit též kotálením opačným směrem. Závitnice vytváří smyčku  $S I II III \dots$  a protíná osu  $o$  v bodech  $B, \dots$ , jimiž vždy dvakrát prochází.

(Dokončení)

Dr Otto Litzman, Praha:

## Jaké jsou zákony pohybu elektronu

### I. Klasická a kvantová mechanika



Jednou z nejdůležitějších úloh moderní fyziky jest vysvětlit různé experimentálně zjištěné vlastnosti hmoty, na příklad optická spektra atomů a molekul, nebo mechanické, tepelné, elektrické a magnetické vlastnosti pevných látek, na základě představ o struktuře hmoty a podle zákonů, jimiž se řídí pohyb elementárních částic hmoty, t. j. především pohyb elektronů.

Každá fyzikální theorie se opírá o některá základní experimentální fakta. O elektronu bylo pokusy zjištěno, že je to částice o velmi malé hmotě ( $m=9,106 \times 10^{-28}$  g) a o záporném elektrickém náboji ( $e = -4,80 \times 10^{-10}$  abs. j. elst.). Bylo zcela přirozené, že se fyzikové nejprve domnívali, že je možno si elektron prostě představovat jako malou kuličku, jejíž pohyb se řídí zákony klasické Newtonovy mechaniky. Když se však snažili vysvětlit na příklad vlastnosti pevných látek na základě těchto klasických představ, jejich theoretické výsledky nesouhlasily s pokusem.

Nebudeme blíže uvádět tyto prvotní neúspěchy fyziků z počátku našeho století. Dnes známe velmi názorný pokus, který dokazuje, že elektron se nepohybuje tak, jak mu to předpisují Newtonovy pohybové zákony. Představme si proud elektronů, které se pohybují ve směru osy  $OX$  kolmo na clonku  $a$  se štěrbinou, za níž je umístěna fotografická deska  $b$  (obr. 1). V těch místech fotografické desky, do nichž dopadnou elektrony, dojde k ionisaci atomů fotografické desky a při vyvolání ke zčernání, takže můžeme určit počet elektronů  $N(y)$ , jež dopadly do jednotlivých bodů  $y$  fotografické desky  $b$ .

Představujeme-li si, že elektrony se pohybují jako klasické částice, očekáváme přirozeně, že dopadnou do místa  $O$  přímo proti štěrbině. Pokus však ukazuje něco jiného. Do místa  $O$  dopadne sice největší počet elektronů, do míst  $A$  nedopadnou téměř žádné elektrony, avšak do míst  $B$  dopadne opět poměrně velký počet elektronů. Na obr. 1 jsme nanesli ve směru osy  $x$  počet elektronů, jež dopadly při pokusu do bodů  $y$  fotografické desky  $b$ . Pokus tedy ukazuje, že paprsek elektronů se po průchodu štěrbinou rozdělil na několik paprsků, z nichž prostřední dopadající do bodu  $O$ , obsahoval největší počet elektronů, kdežto krajní paprsky, dopadající do bodů  $B$ , obsahovaly mnohem menší počet elektronů. Víme, že k podobnému rozdělení paprsku dochází při průchodu světelného paprsku štěrbinou (ohyb světla na štěrbině). Ukazuje se, že křivka  $x = N(y)$  jest stejná jako křivka, znázorňující intenzitu světla, ohýbajícího se na téže štěr-



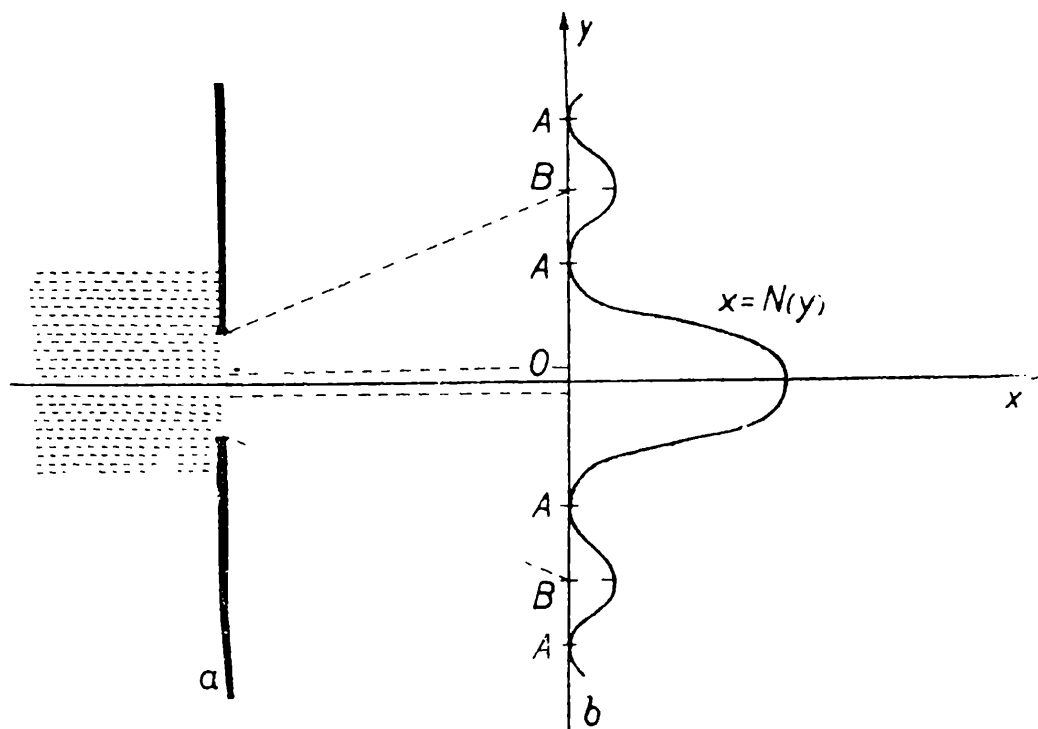
bině, jestliže mezi impulsem  $p = mv$  dopadajících elektronů a vlnovou délkou  $\lambda$  ohýbajícího se světla platí vztah

$$p = \frac{h}{\lambda}; \quad (1)$$

$h$  jest t. zv. *Planckova konstanta*, jejíž hodnota je  $6,06 \times 10^{-27}$  erg. s.

Těchto ohybových vlastností elektronů na štěrbinách užívá se dnes ve fyzikální praxi stejně jako ohybu Roentgenových paprsků ke studiu struktury pevných látek.

Uvedený pokus o ohybu elektronů, provedený Davissonem a Germerem v r. 1927, ukazuje, že pro elektrony neplatí Newtonovy pohybové zákony. To je na prvý pohled jistě překvapující a fyzikové to nemohli dosti dlouho dobře pochopit a vysvětlit. Avšak ještě před Davissonovými-Germerovými pokusy, počátkem našeho století, ukazovaly theoretické snahy o vysvětlení na příklad elektrické vodivosti pevných látek na rozpory mezi Newtonovou klasickou mechanikou a mezi skutečným pohybem elektronu.



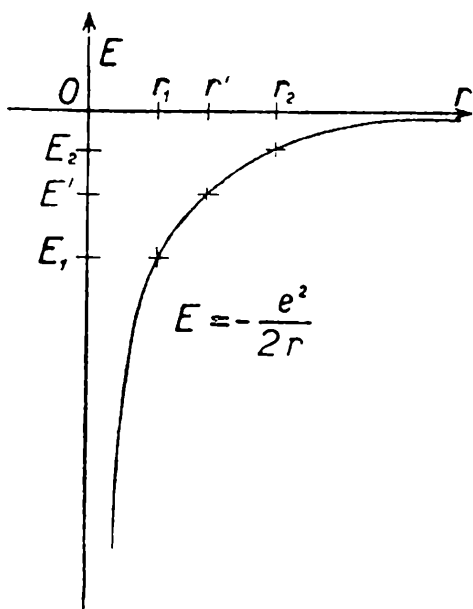
Obr. 1

Newtonovy pohybové zákony vznikly z pozorování pohybů velkých těles s malými rychlostmi v silových polích, která se mění od místa k místu poměrně málo. Elektron jest však částice o nesmírně malé hmotě a silová pole, která na něj působí na př. v krystalu, jsou značně proměnná. Jest proto zcela přirozené, že Newtonova mechanika nemusí pro tyto případy platit. Další tak zvané relativistické efekty nastanou při velkých rychlostech elektronu. Těmi se však nebudeme zabývat. Dnes nás již tento nesouhlas chování elektronu s Newtonovou klasickou mechanikou nepřekvapuje, avšak začátkem našeho století vyvolal v kruzích fyziků i filosofů značný rozruch, takže se jimi zabýval i Lenin ve své knize *Materialismus a empiriokriticismus*.

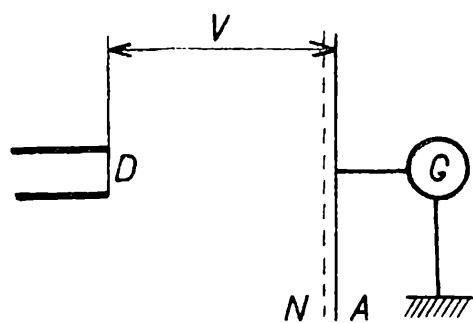
Zákony, jimiž se řídí pohyb elektronu, zabývá se dnes t. zv. *kvantová mechanika*, která nahradila v této oblasti fyzikálních jevů Newtonovu klasickou mechaniku. Nemůžeme se zde samozřejmě podrobně zabývat jejími principy, ukážeme jen na několik jejich zvláštností, jimiž se liší od mechaniky klasické.

## II. Kvantování energie elektronu v atomu

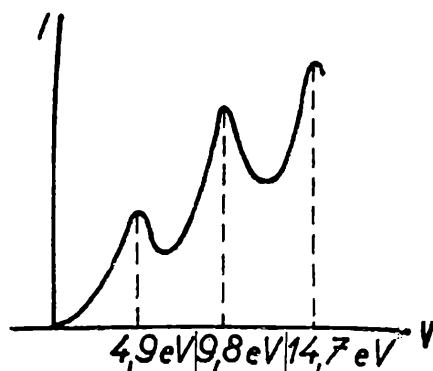
Vyjdeme z nejjednoduššího případu - atomu. Atom libovolného prvku skládá se jak známo z jádra a z elektronů, jež obíhají kolem jádra jako planety kolem Slunce. U atomu vodíku obíhá kolem jádra s nábojem  $+e$  jediný elektron. Jde tedy o centrální pohyb; na elektron působí podle Coulombova zákona elektrostatická síla  $-\frac{e^2}{r^2}$ , směřující stále do středu jádra ( $r$  je vzdálenost jádra od elektronu).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Podle klasické mechaniky měl by se tedy elektron pohybovat kolem jádra v elipsách, případně v kružnicích. Počítejme celkovou energii při takovém pohybu, při čemž pro jednoduchost počítejme jen pohyb po kružnicích. Elektron, pohybující se po kružnici v poloměru  $r$ , musí mít takovou rychlost, aby odstředivá síla  $m \frac{v^2}{r}$  se rovnala přitažlivé síle  $\frac{e^2}{r^2}$ , t. j.  $v^2 = \frac{e^2}{m r}$ . Kinetická energie elektronu při tomto pohybu je tedy  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{2 r}$ . Pro potenciální energii platí:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{r}, \text{ takže pro celkovou energii jest } E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Podle klasické mechaniky může se elektron pohybovat po kružnici o libovolném poloměru  $r$  a může tedy nabýt libovolných energií od  $-\infty$  do 0 podle toho, po které kružnici se pohybuje. Na obr. 2 jsme znázornili tento průběh energie v závislosti na poloměru kruhové dráhy  $r$ . Aby mohl přejít elektron z dráhy o poloměru  $r_1$  na vzdálenější o poloměru  $r_2$ , je třeba elektronu dodat energii  $E_2 - E_1$ .

*Ionizační energii* rozumíme nejmenší energii, které je třeba, abychom odtrhli obíhající elektron od jádra, t. j. abychom jej převedli na dráhu o nekonečně velkém poloměru. Ionizační energie elektronu, obíhajícího po dráze  $r_1$ , jest tedy  $E_1$ .

Co nám říkají pokusy o energii elektronů, obíhajících v atomu kolem jádra? Franck a Hertz konali v r. 1913 pokusy, jejichž schema uvádíme na obr. 3:  $D$  je žhavené kovové vlákno a  $A$  je kovová deska, spojená přes galvanometr  $G$  se zemí. Elektrony, vylétující ze žhaveného vlákna, jsou urychlovány potenciálem  $V$ , vloženým mezi  $D$  a  $A$ . Počet elektronů, jež dopadnou na  $A$ , jest úměrný proudu, který prochází galvanometrem. Roste-li potenciál  $V$ , roste intenzita proudu  $I$  v galvanometru (stejně jako u diody).  $N$  jest síťka, mající potenciál o něco vyšší než deska  $A$ . Mezi  $D$  a  $A$  byly nyní vloženy páry rtuti. Elektrony prolétající mezi  $D$  a  $A$  se srážely s atomy těchto rtuťových par. Ty elektrony, které při srážkách s atomy rtuti ztratily téměř všechnu svou kinetickou energii (a tedy i rychlost), sítkou neprojdou, zachytí se na ní a neúčastní se na proudu, který zaznamenává galvanometr  $G$ .

Výsledky pokusu jsou na obr. 4. Z něho je zřejmé, že pokud energie bombardujících elektronů nepřesáhla hodnotu  $4,9 \text{ eV}$ , je průběh závislosti  $I$  na  $V$  obdobný jako v diodě, t. j. elektrony nepředávají atomům rtuti při srážkách žádnou energii. Jakmile však energie bombardujících elektronů nabude hodnoty  $4,9 \text{ eV}$ , nastává pokles proudu  $I$ , který se vysvětluje takto: Některé z elektronů, majících energii něco přes  $4,9 \text{ eV}$ , předají atomům rtuti část své kinetické energie, čímž zmenší svou vlastní kinetickou energii (a tedy i rychlost) natolik, že už nemohou projít sítkou, zachytí se na ní a tím se zmenší proud  $I$  jdoucí galvanometrem. Další pokles intenzity  $I$  u  $2 \times 4,9 = 9,8 \text{ eV}$  je způsobován elektrony, které se dvakrát srazí s atomy rtuti a při každé srážce ztratí energii  $4,9 \text{ eV}$ . Podobně se vysvětlí i další poklesy u  $3 \times 4,9 = 14,7 \text{ eV}$  atd.

Bombardující elektrony předávají svou energii atomům rtuti při srážkách tím, že zvětšují energii valenčního elektronu rtuti. Na obr. 2 to odpovídá převedení elektronu z dráhy o poloměru  $r_1$  na dráhu o poloměru  $r_2$ , přičemž pro rozdíl energií pro tyto dráhy platí

$$E_2 - E_1 = 4,9 \text{ eV}.$$

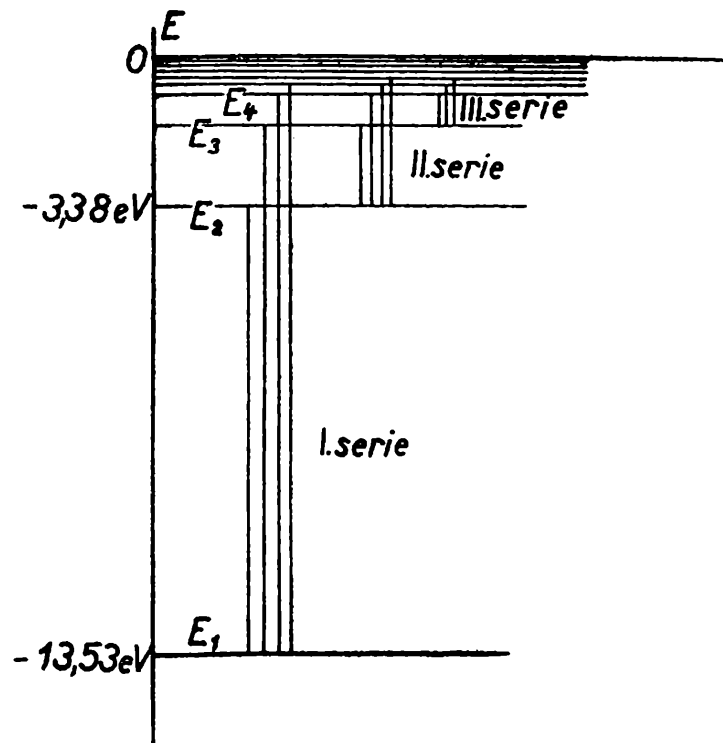
Uvedené pokusy ukazují, že elektron nemůže obíhat kolem jádra po dráze o libovolné energii, nýbrž jen po dráze o energii  $E_1$  nebo  $E_2$ , případně po dalších drahách o vyšší energii. Kdyby totiž byl na příklad možný i pohyb po dráze  $r'$  o energii  $E'$ , docházelo by při bombardování k přechodům mezi  $E_1$  a  $E'$ , což by

se muselo projevit poklesem proudu mezi 0 a 4,9 eV, jakož i dalšími poklesy mezi 4,9 eV a 9,8 eV, k čemuž však nedochází, jak vidíme z obr. 4.

Franckovy a Hertzovy pokusy tedy ukazují, že elektron, obíhající kolem jádra, může obíhat jen po drahách, jimž přísluší určitá energie. Energie elektronu může tedy nabýt při pohybu elektronu kolem jádra jen určitých hodnot. Říkáme, že *energie elektronu je kvantována*. Možné hodnoty energie (čili „*energetické hladiny*“) tvoří t. zv. *spektrum energie*, které se tedy v tomto našem případě skládá z od sebe oddělených - t. zv. *diskretních hodnot*.

Podrobnější výpočet, provedený pomocí zákonů kvantové mechaniky, ukazuje, že v případě, kdy kolem jádra o náboji  $+Ze$  (kde  $Z$  je celé číslo) obíhá jediný elektron, jsou možné hodnoty energie při tomto pohybu dány vzorcem

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (2)$$



Obr. 5

Na obr. 5 jsou tyto možné hodnoty energie  $E_1, E_2 \dots$  elektronu ve vodíkovém atomu (energetické spektrum) vyznačeny vodorovnými čarami.

### III. Optická spektra

Pomocí energetického spektra můžeme velmi lehce vysvětlit strukturu optických spekter atomů. Pro jednoduchost všimněme si nejjednoduššího atomu - vodíku, jehož energetické spektrum je na obr. 5. Je-li atom v tak zvaném normálním stavu, pohybuje se jeho valenční elektron po dráze, již přísluší nejnižší možná energie  $E_1$ . V případě vodíku má elektron v normálním stavu energii  $-13,53 \text{ eV}$ . Vlivem vnějšího působení, na příklad při srážce s jiným elektronem (jak tomu bylo na př. při Franckových-Hertzových pokusech), nebo s jiným atomem, nebo

působením světla, může elektron přejít na dráhu o vyšší energii, na př.  $E_3$ . O atomu pak říkáme, že je ve „vzbuzeném“ nebo „excitovaném“ stavu. Na této vyšší energetické hladině se však elektron dlouho neudrží a v době asi  $10^{-8}$  s spadne opět na nižší hladinu  $E_1$ . Energetický stav atomu se při tomto přechodu, který označíme  $E_3 \rightarrow E_1$ , zmenší o hodnotu  $E_3 - E_1$ . Tato energie se ovšem nemůže ztratit a ukazuje se, že se vyzáří ve formě světelné energie. Přechody elektronů jsme na obr. 5 naznačili svislými čarami.

Odověď na otázku, proč se elektron vždy snaží spadnout na nižší energetickou hladinu a proč se úbytek energie atomu při tomto přechodu vyzáří jako světlo, je značně obtížná. Můžeme to však považovat prostě za experimentálně potvrzenou skutečnost. Pokusy dále ukazují, že pro frekvenci světla  $\nu$ , jež se vyzáří při přechodu z  $m$ -té na  $n$ -tou energetickou hladinu ( $E_m \rightarrow E_n$ ), platí jednoduchý vztah

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h}, \quad (3)$$

kde  $h$  je opět Planckova konstanta.

Známe-li energetické spektrum atomu, můžeme podle uvedeného vztahu ihned vypočítat frekvence a vlnové délky  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  jeho optických spektrálních čar.

Je-li elektron na příklad na hladině  $E_4$ , nemusí spadnout hned na nejnižší hladinu  $E_1$ , ale mohou se uskutečnit třeba dva přechody po sobě. Nejdříve  $E_4 \rightarrow E_2$  a pak  $E_2 \rightarrow E_1$ . Ke každému z těchto dvou přechodů přísluší jedna spektrální čára. Spektrální čáry, které vznikly při přechodu elektronů na stejnou spodní hladinu (na př.  $E_5 \rightarrow E_2$ ,  $E_4 \rightarrow E_2$ ,  $E_3 \rightarrow E_2$ ), leží poměrně blízko vedle sebe a tvoří jednu t. zv. serii. Na obr. 5 jsme tři takové serie naznačili.

Stejně lze vysvětlit optická spektra i jiných složitějších atomů, případně molekul.

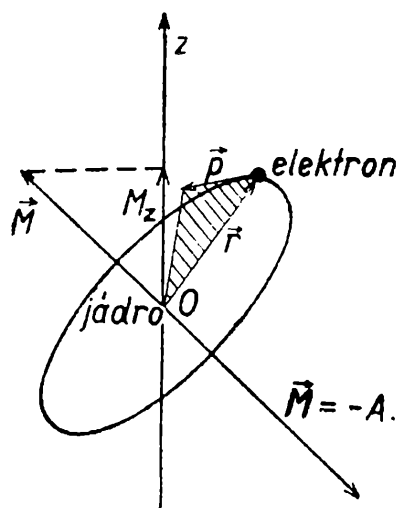
#### IV. Kvantování momentu hybnosti

Poněvadž již víme, že energie elektronu v atomu je kvantována, napadá nás přirozeně otázka, zda i jiné veličiny, charakterisující pohyb elektronu, nejsou kvantovány. Důležitou veličinou, která charakterisuje pohyb elektronu kolem atomového jádra a kterou lze měřit, jest tak zvaný *moment hybnosti*  $\vec{M}$  elektronu, počítaný vzhledem k jádru.

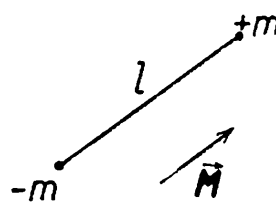
Na obr. 6 jsme znázornili vektor hybnosti  $\vec{p} = m\vec{v}$  elektronu v určitém místě jeho dráhy kolem jádra. Máme-li vypočítat moment hybnosti  $\vec{M}$  elektronu vzhledem k bodu  $O$ , postupujeme takto: Spojíme koncové body vektoru  $\vec{p}$  s bodem  $O$ , čímž dostaneme trojúhelník, naznačený na obrázku šrafovaně. Moment hybnosti  $\vec{M}$  je pak definován jakožto vektor, který vychází z bodu  $O$ , je kolmý na rovinu trojúhelníka a jeho velikost je rovna dvojnásobné ploše onoho trojúhelníka. Směr vektoru  $\vec{M}$  je dán pravidlem pravé ruky: ukazují-li prsty pravé ruky směr vektoru  $\vec{p}$ , ukazuje palec směr vektoru  $\vec{M}$ .

S pohybem elektronu kolem jádra je spojen *drahový magnetický moment elektronu*. Elektron, obíhající po uzavřené dráze kolem jádra, představuje totiž jakýsi elektrický proud v uzavřeném kruhu. O magnetických účincích takového uzavřeného proudu víme, že jsou stejné, jako u malého magnetu - *magnetického dipólu* - jehož osa je kolmá na rovinu proudokruhu. Soustava „jádro - obíhající elektron“ chová se tedy, pokud jde o magnetické vlastnosti, stejně jako magnetický dipól. Magnetický dipól (obr. 7) charakterisujeme tak zvaným *momentem dipólu*  $\vec{M}$ . Je to vektor, směřující od pólu k pólu a jeho velikost je dána součinem  $|\vec{M}| = l \cdot m$ , kde  $m$  je (pomyslné) magnetické množství soustředěné v pólu. Podrobnější výpočet ukazuje, že moment tohoto dipólu  $\vec{M}$ , kterým lze po magnetické stránce soustavu „jádro-elektron“ nahradit, souvisí s momentem hybnosti elektronu  $\vec{M}$  velmi jednoduchým vztahem

$$\vec{M} = -A \vec{M} \quad (4)$$



Obr. 6



Obr. 7

kde  $A$  jest jakási známá kladná konstanta, která nás nebude blíže zajímat. Magnetický moment  $\vec{M}$  má tedy opačný směr než mechanický moment  $\vec{M}$  (viz obr. 6). Souvisí to s tím, že elektron má záporný náboj a elektrický proud, který působí, má proto opačný směr než pohyb elektronu.

Změříme-li tedy drahový magnetický moment elektronu, můžeme podle uvedené rovnice (4) lehce vypočítat mechanický moment hybnosti elektronu vzhledem k jádru.

Stern a Gerlach provedli v r. 1922 pokusy, kterými dokázali, že i hodnoty momentu hybnosti jsou kvantovány podobně jako hodnoty energie, t. j. dokázali, že moment hybnosti nemůže nabýt libovolných hodnot, nýbrž jen zcela určitých hodnot. Uvedeme opět princip Sternových-Gerlachových pokusů (obr. 8).

Svazek atomů prochází nehomogenním magnetickým polem o intenzitě  $\vec{H}$  mezi dvěma póly. Velikost intenzity  $\vec{H}$  nechť roste směrem osy  $OZ$ . Po průchodu



dopadaly jen do dvou míst  $\alpha$  a  $\beta$  stínítka  $S$ , t. j. že průmět momentu hybnosti do osy  $z$  může nabýt jen dvou hodnot.

Ze Sternova-Gerlachova pokusu tedy vyplynulo, že průmět momentu hybnosti elektronu  $\vec{M}$  do směru magnetického pole  $\vec{H}$  může nabýt jen určitých hodnot. Z toho soudíme, že i sám moment hybnosti může nabýt jen určitých hodnot, t. j. jeho hodnoty jsou kvantovány. Bližší rozbor ukazuje, že možné hodnoty absolutní velikosti momentu hybnosti jsou

$$|\vec{M}| = \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

kde  $l$  je buď nula nebo libovolné celé nezáporné číslo. Tyto hodnoty tvoří tedy „spektrum momentu hybnosti“, v obdobném smyslu jako jsme mluvili o energetickém spektru. Elektron může při pohybu kolem jádra vykonávat jen takový pohyb, při němž je jeho moment hybnosti roven některé z uvedených hodnot v (5).

Spektrum průmětu momentu hybnosti do určitého směru, na př. do směru osy  $z$ , je tvořeno, jak ukazují Sternovy-Gerlachovy pokusy přímo, hodnotami

$$M_z = m \frac{h}{2\pi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

*Závěrem této kapitoly můžeme shrnout naše dosavadní výsledky takto:*

Pokusy dokazují, že elektron, obíhající v atomu kolem jádra, nemůže obíhat po všech drahách, jež plynou z klasické mechaniky, nýbrž jen po takových, při nichž jeho energie  $E$  a moment hybnosti  $\vec{M}$  splňují rovnice (2), (5) a (6).

(Pokračování)

Libor Pátý, Praha:

## O iontových vývěvách

Ve vakuové fyzice a technice - t. j. ve fyzice velmi nízkých tlaků a v technice výroby elektronek, zářivek, výbojek a jiných vakuových systémů - se používá k vyčerpání aparatury, baňky elektronek a pod. různých druhů vývěv. Nejvíce jsou užívány difusní vývěvy rtuťové a olejové, předčerpávané pomocnými vývěvami, nejčastěji vývěvami rotačními.

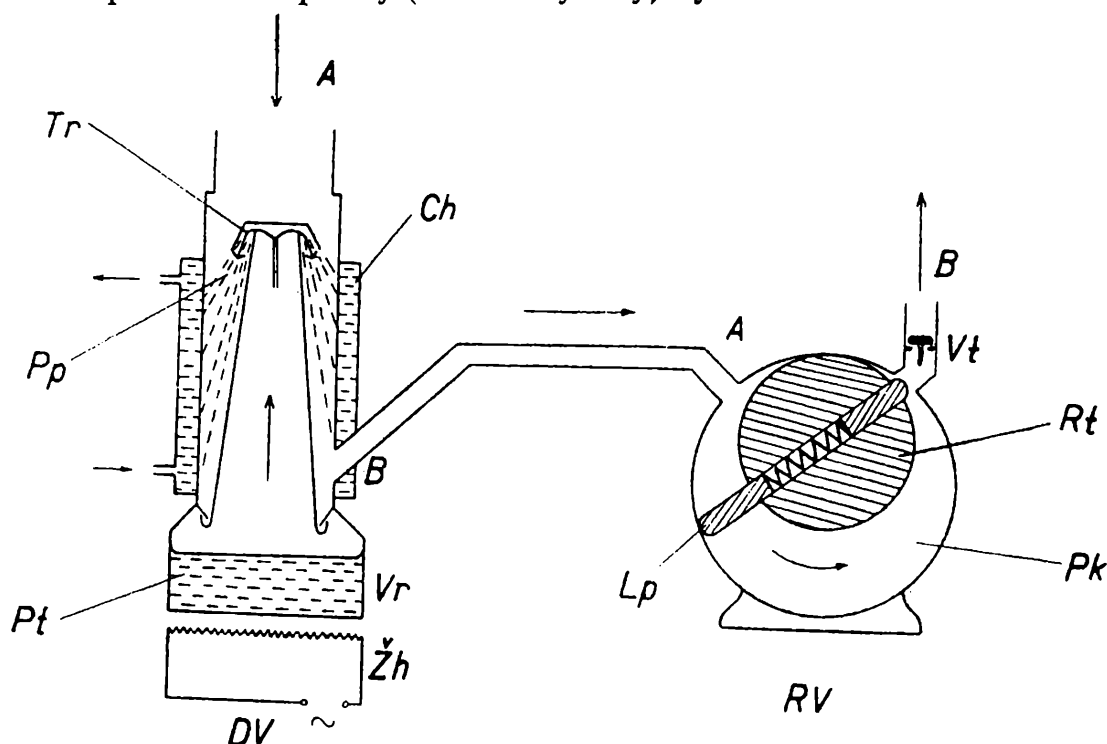
Princip *difusních vývěv* je založen na jevu difuze čerpaného plynu do proudu rtuťových nebo olejových par. Tento proud páry, která vystupuje z varníku, zahříváného elektrickým proudem, do parovodu a trysky, odvádí molekuly z t. zv. vstupního otvoru vývěvy (obr. 1) do prostoru, spojeného s výstupním otvorem, kde pára kondensuje a odvádí se zpět do varníku k dalšímu koloběhu. K výstupnímu otvoru difusní vývěvy je připojena mechanická *rotační vývěva*, která čerpá podobně jako dobře známá vývěva pístová, takže nejprve nassává plyn do pracovní komory a potom jej po dostatečném stlačení vyhání výstupním otvorem ven.

Výkonnost a vhodnost vývěv posuzujeme podle několika hledisek. Je to jednak *mezní tlak vývěvy*, t. j. nejnižší dosažitelný tlak, jehož se dá touto vývěvou dosáhnout, jednak *čerpací rychlost* (v jednotkách litr/s nebo m<sup>3</sup>/hod), což jest veli-



čina charakterisující rychlost, s jakou vývěva vyčerpá uzavřený objem plynu. Dále je to *hospodárnost provozu* vývěvy, určená poměrem mezního tlaku a čerpací rychlosti k příkonu vývěvy (topnému příkonu u difusních a příkonu elektromotoru u rotačních vývěv). V neposlední řadě rozhoduje o vhodnosti vývěvy odolnost vývěvy, zejména pracovní kapaliny, k náhlým tlakovým změnám v čerpaném objemu. Méně vhodné jsou vývěvy, při nichž je nutno odstraňovat vymrazování z čerpaného prostoru páry pracovní kapaliny.

Difusní vývěvy mají čerpací rychlosti podle své velikosti až tisíc litrů za vteřinu, nejběžnější jsou však vývěvy s rychlostmi do 100 l/s. Předčerpávány jsou rotačními olejovými vývěvami s rychlostmi 1 až 10 m<sup>3</sup>/hod; mezní tlak těchto vývěv bývá až  $1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg. Mezní tlak difusních vývěv podle způsobu uspořádání trysky případně více trysek (vícestupňové difusní vývěvy) a podle způsobu cirkulace pracovní kapaliny (frakční vývěvy) bývá  $1 \cdot 10^{-5}$  až  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg



Obr. 1. Difusní vývěva předčerpávaná rotační olejovou vývěvou.

*A* - vstupní otvor, *B* - výstupní otvor, *DV* - difusní vývěva, *Ch* - vodní chladič, *Lp* - lopatka, *Pk* - pracovní komora, *Pp* - proud páry, *Pt* - pracovní kapalina, *Tr* - tryska, *RV* - rotační vývěva, *Vr* - varník, *Vt* - ventil, *Žh* - topné těleso difusní vývěvy.

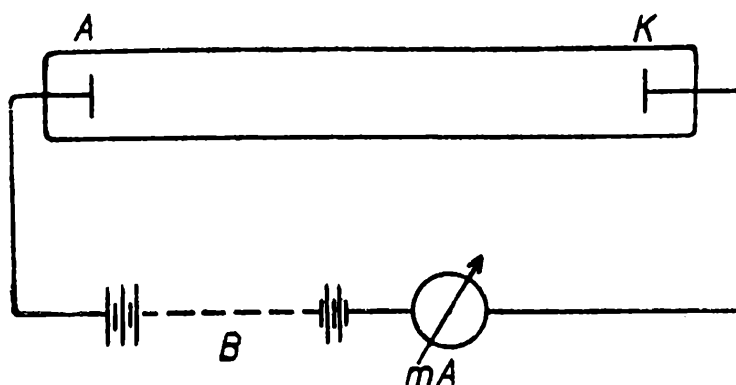
a ve výjimečných případech vývěv pro zvláštní laboratorní užití i  $5 \cdot 10^{-8}$  mm Hg. Vývěvy rtuťové jsou stabilnější než olejové, bez snížení čerpací rychlosti a mezního tlaku odolávají náhlému vniknutí vzduchu. Vývěvy olejové nepotřebují vymrazování par oleje z čerpaného prostoru,<sup>1)</sup> jsou však většinou velmi citlivé na vniknutí vzduchu.

Vývěvy difusní byly v průběhu rozvoje vakuové techniky zdokonalovány. Odstranit některé jejich nedostatky se však zdařilo jen zčásti. Vystala tak otázka,

<sup>1)</sup> Tense par oleje difusní vývěvy bývá menší než  $1 \cdot 10^{-8}$  mm Hg, tense par rtuti při normální teplotě je přibližně  $1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg.

bylo-li by možno difusní proces nahradit jiným fyzikálním procesem, který by byl vhodnější. V nedávné době byly konstruovány vývěvy, které pracují na principu ionisace plynu. V našem článku si povíme něco o tomto novém druhu vývěv.

Již před dvaceti lety byl podroben prvnímu studiu známý zjev, že u výbojky (obr. 2), která byla delší dobu v provozu, bylo nutno postupně zvyšovat napětí na elektrodách, aby proud jí protékající se udržel na stálé výši. Přišlo se na to, že je to způsobeno úbytkem molekul, které ve výboji byly ionisovány a nějakým zvláštním mechanismem, tehdy neznámým, z výbojky odstraněny. Tento zjev byl nazýván „pohlcování plynu výbojem“ a první jej vyložil fyzik H. Schwarz před třinácti lety. Přesvědčivě ukázal, že ve výbojce jsou ionty vzniklé ionisací molekul ve výboji upoutávány na skleněné stěny výbojky, které se nabíjejí záporně následkem dopadu negativních elektronů. Tímto způsobem se zmenšuje ve výbojce počet molekul, klesá tlak, snižuje se pravděpodobnost ionisace a tím se zmenšuje anodový proud. Abychom udrželi proud na stálé výši, je nutno tedy zvětšit anodové napětí. Rychlost poklesu tlaku ve výbojce je velmi malá a čerpací rychlost takovéto výbojky není možno obvyklými prostředky měřit. Dále poznamenejme, že tlak klesne jen na hodnotu, která odpovídá nasycení stěn výbojky ionty.<sup>2)</sup> Čerpací rychlost je možno zvýšit vhodným uspořádáním



Obr. 2. Výbojka.

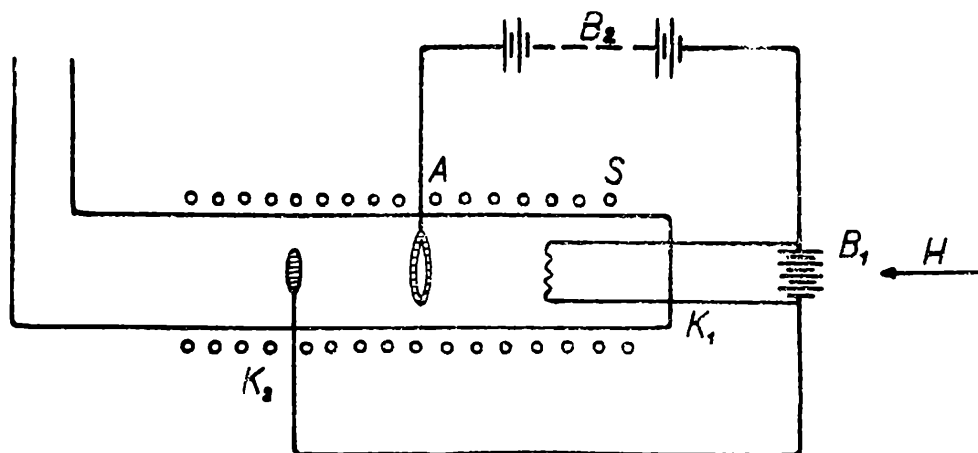
*A* - anoda, *K* - kathoda, *B* - anodová baterie, *mA* - miliampérmetr.

elektrod a vložením výbojky do magnetického pole. Na obr. 3 je taková výbojka.

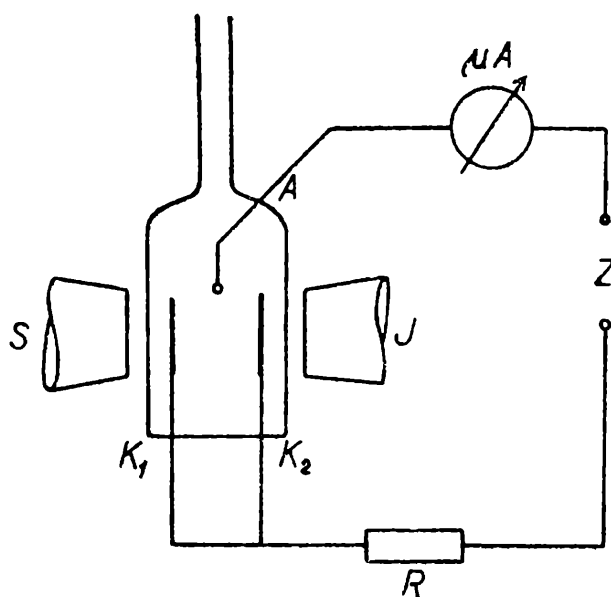
Kolem skleněné výbojky je vinutí solenoidu, vytvářejícího v ní magnetické pole o intenzitě  $H$ , elektrody výbojky jsou: žhavená wolframová spirála, kathoda  $K_1$ , studená terčovitá kathoda  $K_2$  a mezi nimi prstencovitá anoda  $A$ . Elektronky, které vystupují ze žhavé kathody, procházejí anodovým otvorem - magnetické pole jim totiž brání dopadnout na anodu, pokud mají energii dosti velikou - dostávají se do opačného elektrického pole druhé kathody a opět letí zpět k první kathodě. Toto kmitání elektronu mezi kathodami trvá tak dlouho, až elektron ztratí v srážkách s molekulami tolik energie, že dopadne na anodu. Tímto způsobem se dosahuje intenzivní ionisace plynu, ve výboji se vytváří za jednotku času daleko více iontů než ve výbojce bez magnetického pole. Výhodou tohoto uspořádání je, že výboj trvá i při velmi nízkých tlacích a to až do tlaků řádu  $10^{-7}$  mm Hg, zatímco výboj bez magnetického pole vyhasíná při tlaku řádově  $10^{-3}$  mm Hg. Další

<sup>2)</sup> Takové nasycení nastává, když se na stěně usadí přibližně dvě molekulární vrstvy.

výhodou je, že se stěny výbojky s magnetickým polem nabíjejí na nižší potenciál než stěny výbojky bez magnetického pole, jelikož při dopadu pomalejších elektronů na stěnu se zmenšuje počet sekundárních elektronů, vystupujících ze stěny.



Obr. 3. Výbojka se dvěma kathodami v magnetickém poli solenoidu.  $A$  - anoda,  $K_1$  - žhavená kathoda,  $K_2$  - terčovitá studená kathoda,  $B_1, B_2$  - žhavicí a anodová baterie,  $S$  - vinutí solenoidu.



Obr. 4. Penningův manometr (v řezu).  $A$  - prstencová anoda,  $K_1, K_2$  - studené terčovité kathody,  $S, J$  - pólové nástavce magnetu,  $R$  - zatěžovací odpor,  $Z$  - zdroj napětí (kolem 2 kV),  $\mu A$  - mikroampérmetr.

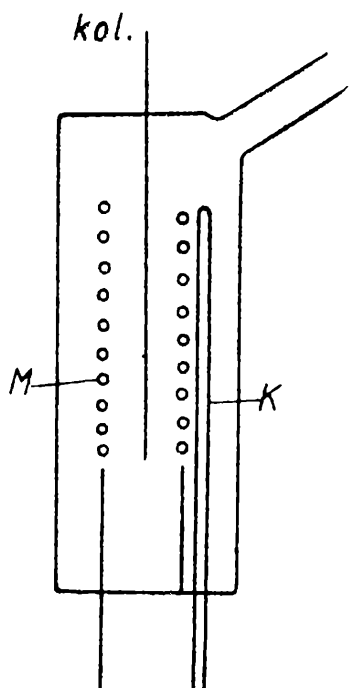
Stejný zjev byl zjištěn u manometru Penningova. *Penningův manometr* je vlastně výbojka v magnetickém poli magnetu (obr. 4) s podobným uspořádáním elektrod jako u výbojky na obr. 3; pouze kathoda  $K_1$  je studená, stejná jako kathoda  $K_2$ . V tomto manometru - manometr měří tlak pomocí iontového proudu, zaznamenávaného mikroampérmetrem - dochází k značnému úbytku tlaku v tlakovém rozmezí  $10^{-4}$  až  $10^{-5}$  mm Hg. Největší čerpací rychlost<sup>3)</sup> takového

<sup>3)</sup> Ve vakuové fyzice jsme zvyklí označovat každou příčinu poklesu tlaku jako *čerpací rychlost*.

manometru je až 4 l/s, mezní vakuum asi  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg. V tomto manometru se odčerpává plyn jednak adsorpcí molekul a iontů na stěny baňky, jednak chemickým slučováním plynu s kovem elektrod (hlavně vzdušného kyslíku), který se ve výboji rozprašuje. Zajímavé je, že při čerpání tímto manometrem nebylo pozorováno nasycení stěn adsorbovanými molekulami a pokles čerpací rychlosti i po delším čerpání.

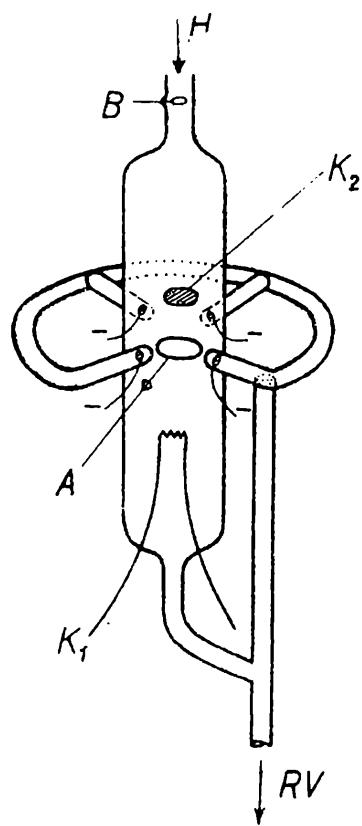
Sovětský fyzik Reichruděl se svými spolupracovníky zkonstruoval iontovou vývěvu, která se skládala z několika vedle sebe spojených systémů Penningova manometru. Touto vývěvou je možno dosáhnout tlaku až  $5 \cdot 10^{-8}$  mm Hg, čerpací rychlost má však velmi malou.

Ještě se zmíníme o čerpání *ionisačním manometrem*. Ionisační manometr (obr. 5) jest trioda s wolframovým žhaveným vláknem, v níž elektrony vystupující z katody jsou urychlovány mřížkou a dostávají se do prostoru mezi mřížkou a ko-



Obr. 5. Ionisační manometr (v řezu).

*K* - žhavená katoda, kol. - kolektor z tenkého vlákna, *M* - cylindrická mřížka.



Obr. 6. Schwarzova pokusná iontová vývěva.

*K<sub>1</sub>* - žhavená katoda, *K<sub>2</sub>* - terčovitá studená katoda, *A* - anoda prstencová, čtyři terčovité elektrody jsou označeny znaménkem —, jsou na záporném potenciálu, *B* - elektroda kladně nabitá, sloužící tomu, aby se ionty nedostávaly do vstupního otvoru a nesnižovaly vakuum v čerpaném prostoru, *RV* - výstupní otvor vývěvy připojený k pomocné vývěvě.

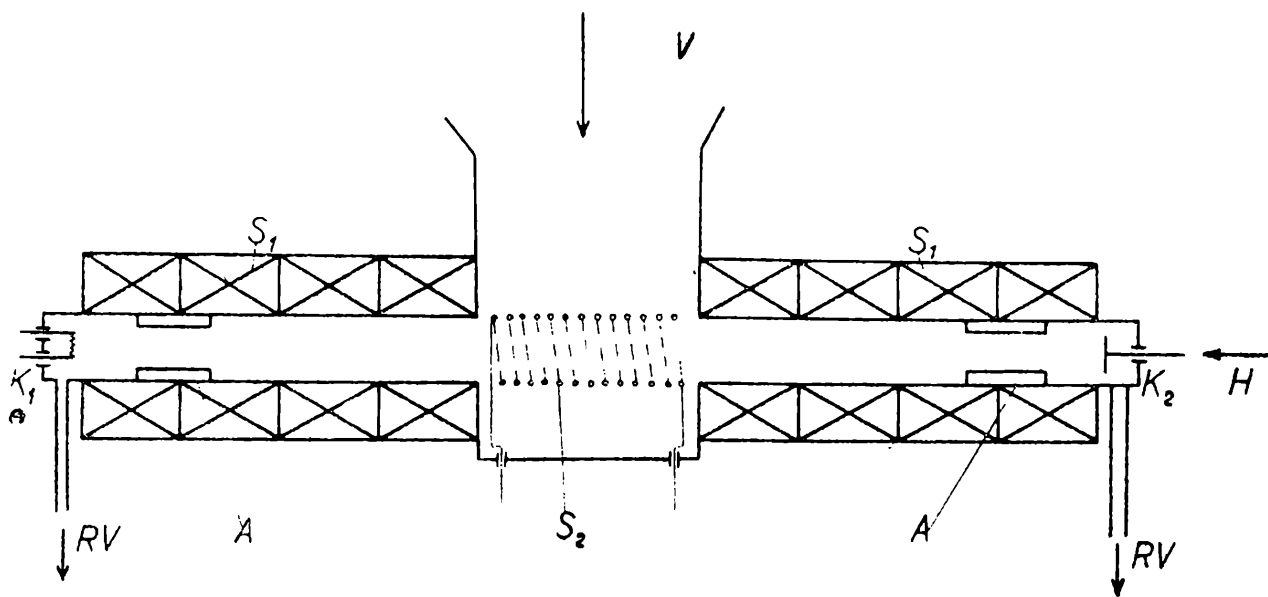
lektorem, kde ionisují molekuly. I zde se měří tlak iontovým proudem, který prochází obvodem kolektoru. Ionisační manometr čerpá - pomocí adsorpce iontů na povrch stěn a elektrod manometru - s velmi malou čerpací rychlostí (řádově desetin litru za vteřinu), dosahuje však velmi malých tlaků, t. zv. *ultravysokého*

*vakua* až  $10^{-11}$  mm Hg (první užil D. Alpert). Užívá se k čerpání malých objemů malých aparatur, v nichž je zapotřebí dosáhnout tak malých tlaků. Tato vývěva vyžaduje vždy po určité době obnovení adsorpční schopnosti stěn odplyněním, to jest dlouhodobým zahříváním za stálého odčerpávání difusní vývěvou.

Adsorpční princip odčerpávání ve své podstatě vylučuje konstruování iontové vývěvy s velkými čerpacími rychlostmi. U iontové vývěvy s velkou čerpací rychlostí je nutno se postarat o jiný způsob odstraňování iontů z prostoru než adsorpcí. V pokusné vývěvě H. Schwarze (obr. 6) se ionty elektrickým polem přivádějí k záporným elektrodám, zejména k elektrodám v otvorech, kde se spojují s elektrony, neutralisují se a jako molekuly jsou odssávány předvakuovou vývěvou. Tato laboratorní vývěva dosahuje až tlaku  $5 \cdot 10^{-6}$  mm Hg a nevykazuje nasycení; čerpací rychlost má přibližně  $1/2$  l/s. Schwarz a Váradí se pokusili o přibližný výpočet parametrů iontové vývěvy. V něm vycházeli z požadavku, že proud iontů  $\eta_i$ , to je elektrický proud procházející vývěvou, musí být u dobře pracující vývěvy vždy větší, než proud molekul  $\Delta N$  difundujících zpět v důsledku rozdílu tlaků z prostoru výstupního otvoru do prostoru vstupního otvoru, t. j.

$$\eta_i > \Delta N$$

Tuto podmínku je možno splnit jedině při užití magnetického pole dostatečné intenzity a při dostatečně dlouhé vývěvě.



Obr. 7. Kalifornská iontová vývěva s velkou čerpací rychlostí.

*A* - prstencové anody, *K*<sub>1</sub> - žhavená katoda, *K*<sub>2</sub> - studená katoda, *RV* - k pomocné vývěvě, *S*<sub>1</sub> - vinutí solenoidu, *S*<sub>2</sub> - vinutí solenoidu v prostoru vstupního otvoru, *V* - vstupní otvor.

První iontovou vývěvu s velkou čerpací rychlostí, která nevykazuje nasycení, konstruovali v Kalifornii Foster, Lawrence a Lofgren. Vývěva se skládá z válcového trupu, dlouhého přes 3 m (obr. 7). Ve střední části trupu je vstupní otvor, kterým se vývěva spojuje s čerpaným prostorem. V jednom konci trupu je žhavá katoda z wolframu, v druhém konci chladná katoda. Dvě prstencové anody jsou v blízkosti kathod. Okolo trupu je vinutí velkého solenoidu s příkonem 40 kW.

V prostoru vstupního otvoru je vinutí ze silného drátu s příkonem 12 kW, které dovoluje získat magnetické pole dostatečné intensity a nebrání příliš vstupovat molekulám z čerpaného prostoru do vývěvy. Na anody se vkládá napětí 300 V, které urychluje elektrony, emitované žhavou katodou. Elektrony oscilují mezi oběma katodami a ionisují molekuly plynu, které proudí do vývěvy vstupním otvorem. Ionty přicházejí ke katodám, kde neutralisují a jako neutrální částice, na které nepůsobí magnetické pole opouštějí prostor výboje a jsou odssávány předvakuovou vývěvou potrubím, které je připojeno k oběma koncům trupu vývěvy. Při nízkých tlacích je ve střední části vývěvy počet vzniklých iontů tak malý, že výboj by měl nepříznivé parametry. Proto se do prostoru poblíž katod připouští vzduch. Tato vývěva má čerpací rychlost až 7000 l/s a mezní tlak až  $8 \cdot 10^{-7}$  mm Hg. V provozu je hospodárná a je vhodná k vyčerpávání velkých objemů, na př. velkých urychlovačů.

Iontové vývěvy mají vzhledem k dosud užívaným vývěvám difusním značné výhody. Je to především velmi nízký tlak - u vývěv typu ionisačního manometru - a velká čerpací rychlost při značné hospodárnosti provozu - u vývěv typu výbojového s magnetickým polem. Iontové vývěvy všech typů dále nevnašejí do čerpaného prostoru nevítané páry jako je tomu u difusních vývěv a není proto nutno se starat o odstraňování těchto par. Zdá se proto, že iontové vývěvy naleznou brzy širokého uplatnění jak v průmyslu, tak v laboratoři.

Jaromír Budějický, Praha:

## Radiové teleskopy

V posledním desetiletí došlo k velikému rozmachu nového oboru astronomie, t. zv. *radioastronomie*. Jejím úkolem je pozorovat radiové vlny přicházející z vesmíru podobně jako vlny světelné, které se od radiových vln liší jen mnohem menší délkou. Radiové záření z nebeských útvarů bylo předpověděno již dávno. Jeho možná existence vyplynula prostě z fyzikální teorie. Přesto však bylo po prvé pozorováno teprve těsně před druhou světovou válkou. V této době totiž byly sestrojeny první radiové přijímače na velmi krátké radiové vlny (vlny metrové a decimetrové) takových vlastností, že bylo možno jimi zjistit slabé radiové vlny z prostoru.

Přístroje, jimiž přijímáme radiové vlny ze Slunce a jiných nebeských útvarů, nazýváme *radioteleskopy* nebo *radiometry*. Hlavní části radioteleskopu jsou (obr. 1):

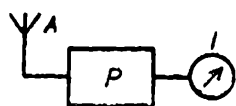
1. Antenní soustava *A* s montáží, která mnohdy umožňuje plynulé sledování zdroje v jeho pohybu na obloze.

2. Přijímač *P*, který zesiluje elektrické proudy vznikající z radiových vln, jež dopadají na antenu a mění je zpravidla ve stejnosměrný proud.

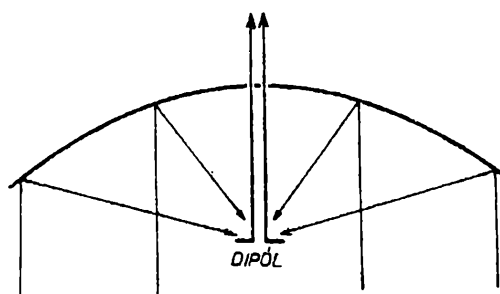
3. Indikátor nebo zapisovací přístroj *I*, který vhodným způsobem indikuje nebo i zapisuje přítomnost a intenzitu vlnění.

Od radioteleskopu vyžadujeme, aby umožňoval měření poměrně malé hustoty toku energie s dostatečnou přesností, po dlouhou dobu a stanovení co nejpřesněji směru, odkud energie přichází. Tím je také dán charakter anteny a přijímače.

Ježto energie dopadající na  $1 \text{ m}^2$  zemského povrchu je malá, musí být účinná plocha anteny ve směru ke zdroji co největší. V ostatních směrech musí být antena pokud možno necitlivá, t. j. její účinná plocha pro ty směry musí být co nejmenší. Účinná plocha anteny  $A_{ef}$  je u rozměrných antenních soustav přímo úměrná ploše ústí anteny. V radioastronomii se často používá jako anten kovových zrcadel, která mají tvar rotačního paraboloidu. V ohnisku paraboloidu je umístěna vlastní antena, t. zv. *dipól*. Jak známo, má rotační parabolická plocha tu vlastnost, že odráží do ohniska paprsky, vstupující rovnoběžně s osou rotace (obr. 2). energii vln soustředěnou v ohnisku, přeměňuje dipól na elektrické



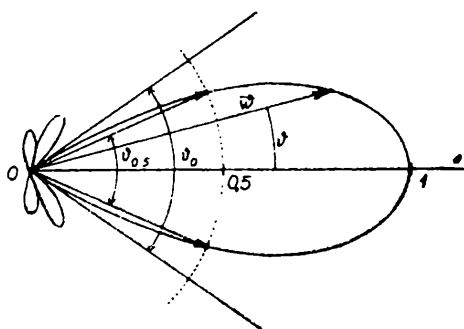
Obr. 1



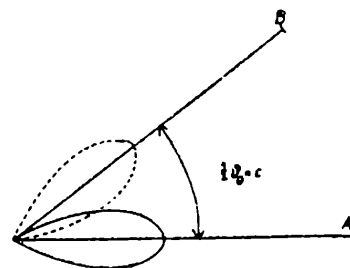
Obr. 2

střídavé proudy. Ústí rotačního paraboloidu je kružnice daná okrajem paraboloidické úseče.

Zdalo by se, že v tomto případě se účinná plocha anteny rovná geometrické ploše ústí  $A_g$ . Ve skutečnosti tomu tak není. Všechna energie, která prošla ústím zrcadla se nezachytí dipólem; část se jí znovu neúčinně odrazí ven ze zrcadla. Prakticky je účinná plocha parabolického zrcadla asi polovina plochy ústí.



Obr. 3



Obr. 4

Soustředování vln parabolickou plochou je rušeno jejími okraji, na nichž nastává ohyb vln. Důsledkem ohybu je, že zrcadlo vrhá do ohniska také část energie, přicházející ze směrů mimo rotační osu; antena pak již nepřijímá vlny jen z jediného směru, nýbrž je citlivá (třeba méně) i na vlny ze směrů blízkých. Obr. 3

ukazuje typický průběh poměrné výkonové citlivosti (vektor  $\vec{w}$ ) anteny v rovině v polárních souřadnicích.\*) Délka vektoru  $\vec{w}$  vyjadřuje prostou hodnotu citlivosti ve směru daném jeho odchylkou  $\vartheta$  od polární osy  $o$ , kterou klademe do směru největší citlivosti ( $|w| = 1$ ). Úhel  $\vartheta_{0,5}$ , který svírají paprsky vedené z  $O$  do bodů na křivce, kde  $|w| = 1/2$  (poloviční citlivost), nazýváme šířkou antenního svazku. Antenní svazek je tím užší, čím větší je ústí anteny a čím kratší je pracovní vlnová délka, neboť pak je vliv ohybu menší. Jde tedy směrovost anteny na štěstí souběžně s účinnou plochou. Typické hodnoty šířky antenního svazku pro různé průměry kruhového zrcadla uvádí tab. 1.

Tabulka 1

Průměr zrcadla v metrech	Plocha ústí (m <sup>2</sup> )	Šířka svazku ve stupních					
		$\lambda = 1 \text{ cm}$	3 cm	10 cm	30 cm	1 m	3 m
1	0,78	0,69	2,05	6,9	20,5	69	205
3	7,1	0,23	0,69	2,3	6,9	23	69
10	78	0,069	0,205	0,69	2,05	6,9	20,5
30	710	0,023	0,069	0,23	0,69	2,3	6,9
100	7 800	0,007	0,021	0,07	0,23	0,7	2,3

Zde je patrný obrovský rozdíl proti optickým zrcadlům. Na př. zrcadlo průměru 10 cm má při vlnové délce  $0,5 \mu$  (zelené světlo) šířku svazku asi  $0,00035^\circ$ , tedy ještě  $20\times$  méně než zrcadlo radioteleskopu průměru 100 m při vlnové délce 1 cm. Proto také nelze v radiovém oboru mluvit o nějakém zobrazení, jakému jsme zvyklí u optických dalekohledů, nýbrž se spokojujeme jen měřením celkové energie sebrané zrcadlem.

S tím souvisí otázka, jaká musí být úhlová vzdálenost dvou radiových zdrojů, aby je bylo možno daným radioteleskopem rozlišit. Odpoví nám na ni obr. 4, z něhož je patrné, že zdroj  $B$  musí být vzdálen od zdroje  $A$  alespoň o úhel  $\varepsilon$ , rovný úhlu mezi osou a tečnou antenního svazku. Úhel  $\varepsilon$  nazýváme *rozlišovací schopností* radioteleskopu; rovná se zhruba úhlu  $\vartheta_{0,5}$ .

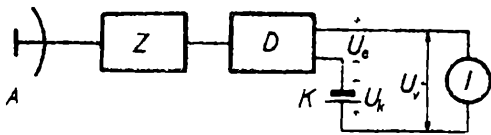
Existuje mnoho dalších různých druhů antenních soustav, které na rozdíl od parabolického zrcadla s jedinou antenkou v ohnisku se skládají z mnoha malých anten seřazených vedle sebe, takže pokrývají jistou plochu. Velikost této plochy zpravidla považujeme za ústí soustavy a odpovídá jí účinná plocha jen asi o 10 až 30 % menší. Jejich výhodou je, že není třeba tak velké přesnosti ve výrobě jako u zrcadel. Nevýhodou je, že se hodí jen pro jednu vlnovou délku, kdežto zrcadlo se přemění na jinou vlnovou délku pouhou výměnou dipólu. Jinak zde platí

\* ) Viz článek Doc. Dr. M. Menšíka: Polární souřadnice, str. 160.

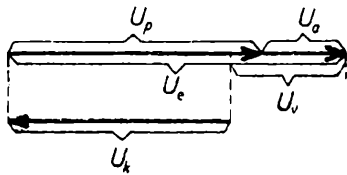


stejně vztahy jako u zrcadel. Čím delší je antenní soustava v některém směru, tím užší je její antenní diagram v tom směru.

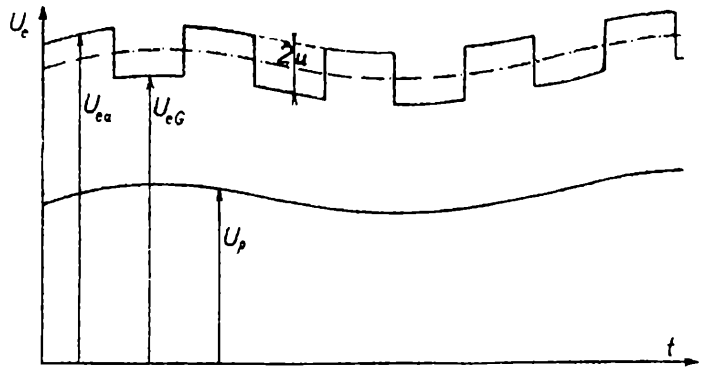
Přijímač pro radioastronomická měření musí splňovat dva hlavní požadavky: musí mít malou úroveň vlastního šumu a musí být velmi stabilní. V každém radiovém přijímači vznikají samovolně malíčká elektrická napětí, která se dále zesilují společně s užitečným napětím radiových vln a projevují se ve sluchátkách jako nepřetržitě syčení nebo šumění. Stejným šuměním se projevují i kosmické radiové vlny. Je zřejmé, že velmi slabé šумы z anteny zaniknou ve vlastním šumu přijímače tím spíše, čím je tento vlastní šum větší. Jestliže intenzita tohoto šumu se mění, třeba změnou zesílení v přijímači nebo změnou teploty jeho prvků, bude rozlišení žádaného signálu ještě obtížnější. Kromě toho nepravidelné změny (nestabilita) v přijímači znehodnocují přesnost měření.



Obr. 5



Obr. 6



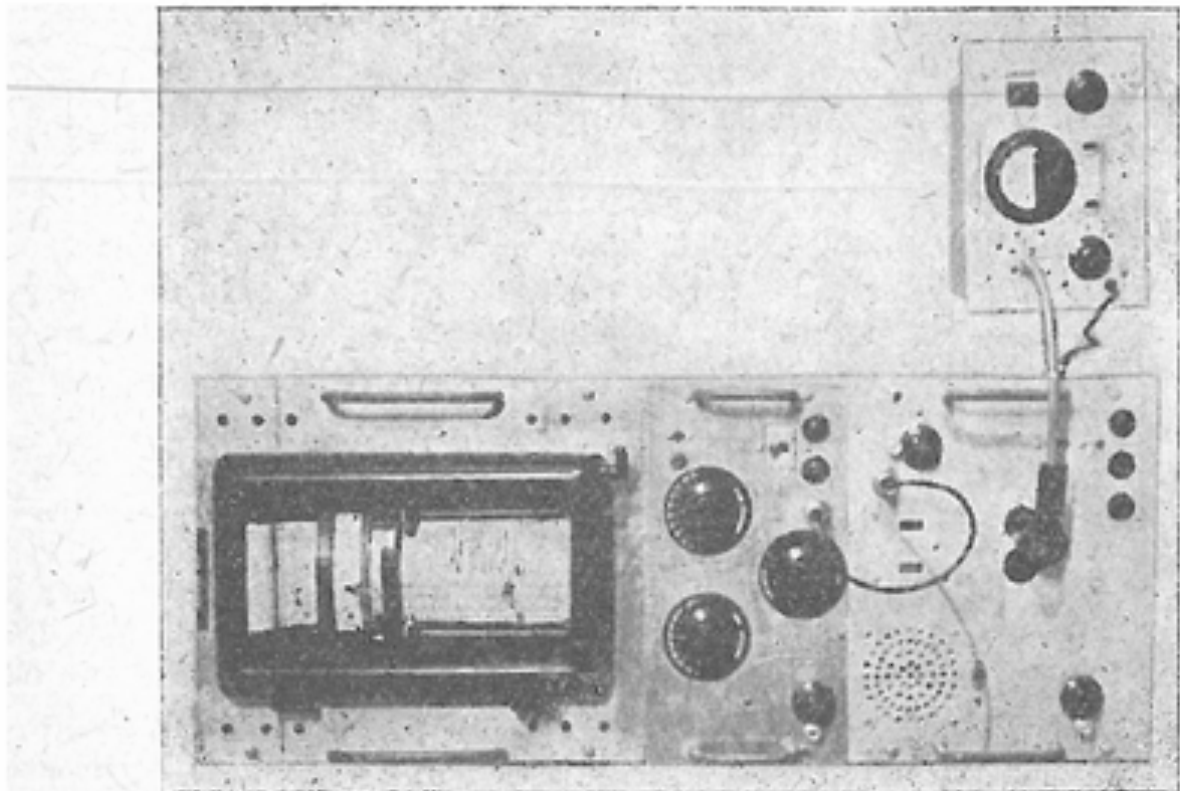
Obr. 7

Z teorie plyne, že při dokonale stabilním přijímači lze rozlišit šumový výkon z anteny asi 1000krát slabší než je vlastní šum přijímače; v praxi však při pečlivé stabilisaci a t. zv. *kompensačním zapojení* přijímače lze rozlišit výkon jen asi 100krát slabší vlastního šumu. Podstata kompensačního zapojení přijímače je na obr. 5. Šумы z anteny *A* přicházejí do zesilovače *Z* a po zesílení do usměrňovače (detektoru) *D*, kde se přemění na stejnosměrné napětí  $U_e$ . Podstatnou část  $U_p$  tohoto napětí však vytváří vlastní šum přijímače. Aby bylo možno lépe měřit užitečnou složku napětí  $U_a$  (obr. 6), zařazujeme do serie s napětím  $U_e$  kompensační napětí  $U_k$  o málo menší než napětí  $U_p$ . Diferenční napětí  $U_v$  můžeme pak měřit podstatně citlivějším voltmetrem. Každá nestabilita rušivého napětí  $U_p$  se ovšem projeví také přiměřeně zvětšeně.

Tuto nesnáz překonává t. zv. *modulační metoda*, při níž se vstup přijímače připojuje střídavě na antenu a na porovnávací zdroj šumu. Za detektorem přijímače se pak objevuje napětí, znázorněné na obr. 7. Napětí  $U_{ea}$  je napětí za detektorem v okamžiku, kdy je připojena antena,  $U_{eG}$  odpovídá porovnávacímu zdroji,  $U_p$  vlastnímu šumu, který se nepravidelně mění. Vidíme, že napětí  $2u = U_{ea} - U_{eG}$  se mění jen nepatrně, i když se  $U_p$  mění značně. Oddělíme-li



Obr. 8



Obr. 9

tuto střídavou složku usměrněného napětí, můžeme z její velikosti stanovit rozdíl výkonu, přicházejícího z anteny a z porovnávacího zdroje. Tato úprava umožňuje zjistit asi 3 až 5krát menší šumový výkon než metoda kompenzační.

Radioteleskop s parabolickým zrcadlem ukazuje obr. 8. Je to radioteleskop Astronomického ústavu ČSAV v Ondřejově u Prahy. Zrcadlo má průměr 7,5 m. V jeho ohnisku je primární antena, krytá zředu kovovým kotoučem, který zlepšuje směrovost soustavy tím, že kryje antenku před přímým zářením. Všechna energie pak přichází na primární antenku teprve po odrazu od zrcadla. Pracovní vlnová délka je 56 cm. Montáž radioteleskopu je azimutální: zrcadlo je uloženo na čepech ve dvou vodorovných ložiskách, která jsou upevněna na mohutné ocelové skříni. Skříň i se zrcadlem je otáčivá kolem svislé osy. Pohon kolem svislé i vodorovné osy obstarávají dva elektromotory. Ke skříni je připevněna jako protiváha zrcadla ocelová kabina, v níž je umístěn přijímač, poháněcí mechanismus a pracoviště pro pozorovatele. Celé zařízení váží asi 20 t a stojí na pevném betonovém podstavci.

Přijímač je kompenzačního typu, což zcela vyhovuje pro pozorování radiové emise Slunce, které je hlavním úkolem pro tento radioteleskop. Na jeho výstupu je připojen velmi stabilní stejnosměrný milivoltmetr s registračním zařízením. Na obr. 9 je nahoře registrační přístroj, pod ním elektrická část milivoltmetru a vlastní přijímač.

O způsobu pozorování radiové emise Slunce se zmíníme v některém z příštích čísel Rozhledů.

L a d i s l a v S e h n a l, Praha:

## Historie „zavodňovacích kanálů“ na Marsu

Jedním z astronomických problémů, které dodnes vzrušují veřejnost i vědce celého světa, je otázka života na planetě Marsu. K víře v život na Marsu přispěl snad největší měrou objev t. zv. *kanálů*, jejichž vybudování bylo připisováno inteligentním obyvatelům Marsu. Problém těchto kanálů je dnes již vyřešen, avšak dlouho trvaly mezi předními světovými astronomy spory o jejich reálnou existenci.

Asi v polovině minulého století objevovali pozorovatelé Marsu na jeho povrchu jemné, tmavé pruhy, které měly vzhled geometrických linií. Italský hvězdář Schiaparelli pozoroval tyto linie v letech 1877—1878, zakreslil jich velké množství do mapek planety a nazval je *canali*. Schiaparelli sám zprvu příliš neuvažoval o původu těchto zjevů. První, kdo vyslovil domněnku, že tyto linie jsou skutečné kanály vybudované živými bytostmi, byl americký hvězdář Lowell. Ten se svými asistenty horlivě pozoroval Mars a podle svých pozorování vypracoval teorii života na této planetě. Podle Lowella sloužily tyto kanály k rozvádění vody od polárních oblastí planety po pevninách. Kolem kanálů se vytvářela vegetace, jejíž tmavé pruhy nám právě umožňovaly tyto kanály vidět. K Lowellovým názorům na umělý původ kanálů se brzy připojil i sám jejich objevitel Schiaparelli a hypotéza o obyvatelích Marsu, kteří měli být dokonce na ještě vyšším stupni vývoje než lidé na Zemi, se brzy velmi rychle rozšířila hlavně mezi širokou veřejností.

Ale již při vzniku této theorie se v odborných kruzích ozývaly stále častější pochybnosti o její pravdivosti, především pro její přílišnou fantastičnost. Sama existence kanálů byla přijímána se stále rostoucí nedůvěrou. Ukázalo se, že zatím co kanály byly objevovány a pozorovány v malých dalekohledech, velkými přístroji se nedaly vůbec prokázat. Kanály by též měly podléhat perspektivnímu skreslení. Nic takového však ani objevitelé kanálů nepozorovali.

Do celého problému vnesl jasno E. M. Antoniadi svými pozorováními Marsu. Tento francouzský astronom pozoroval Mars velmi pečlivě velkým dalekohledem pařížské hvězdárny Meudon v letech 1909—1924. Podrobným rozбором svých pozorování Antoniadi dokázal, že téměř tři čtvrtiny pozorovaných „kanálů“ jsou stopy stínů, různých tvarů a vzhledu a zbytek jsou okraje různých vyvýšenin nebo skupiny skvrn, tvořících souvislou řadu. Tyto Antoniadovy názory se podařilo asi před dvěma desetiletími dokázat i na fotografiích. Původní kanály se na snímku rozložily na řadu jednotlivých skvrn - a tak se původně souvislé geometrické linie na povrchu Marsu ukázaly býti v nejlepším případě pouhým optickým klamem.

Dnes je hypotéza o uměle vybudovaných kanálech na Marsu definitivně překonána a ukazuje se, že je-li nějaký život na této planetě, pak existuje ve formách mnohem nižších, než jsou myslící lidské bytosti.



## Úlohy k řešení

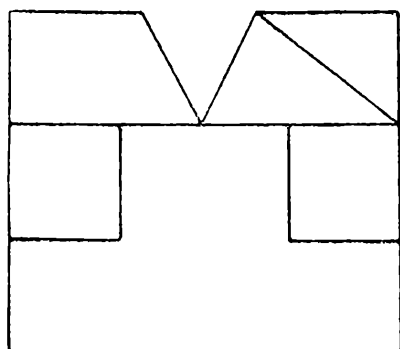
14. Promítneme-li postupně vždy dvě strany trojúhelníka na osu úhlu těmito stranami sevřeného a oba průměty spolu násobíme, jest součet všech tří součinů roven čtverci polovičního obvodu trojúhelníka. Dokažte!

Ing. Dr J. Langr

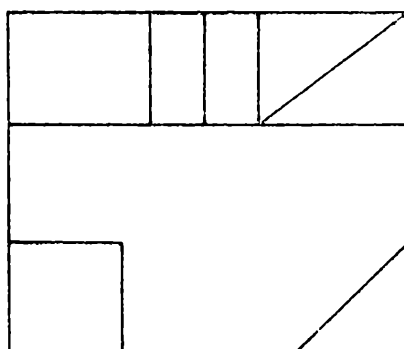
15. Ukažte, že číslo  $N = 43^n - 30^n - 24^n + 11^n$  je pro každé přirozené číslo  $n$  dělitelné číslem 247.

\*\*\*

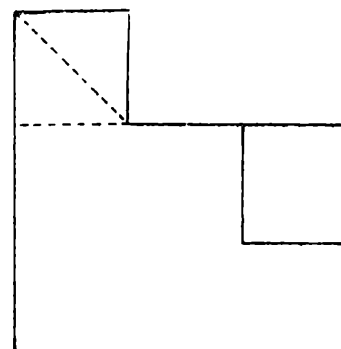
S. Horák



Narys



Púdorys



Bokorys

16. Sestrojte názorný obrázek tělesa, daného nárysem, půdorysem a bokorysem.

Red.

★ ★ ★

17. Chcejąc overit' Joule - Lenzov zákon o množstve tepla vybaveného elektrickým prúdom, ponoríme platinovú špirálu (špecifický odpor platiny  $\rho = 0,12 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$ ), ktorej dĺžka je  $l = 20 \text{ cm}$  a priemer  $2r = 0,8 \text{ mm}$ , do nádoby obsahujúcej  $m = 0,8 \text{ kg}$  oleja, ktorého špecifické teplo je  $c = 0,4 \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}}$ .

O koľko  $^{\circ}\text{C}$  vzrastie teplota oleja každú minútu, ak špirála je pripojená ku zdroju napätia  $U = 2 \text{ V}$ ? Straty tepelné a zohrievanie nádoby samej zanedbajte!

E. Říman

Řešení uvedených úloh zašlete do 30. června t. r. na adresu Doc. Dr. M. Menšík, Praha 6, Zikova 4. U každého řešení uveďte vždy číslo příkladu.



## Různé - recense

Prof. Ing. Dr. František Kadeřávek, Praha:

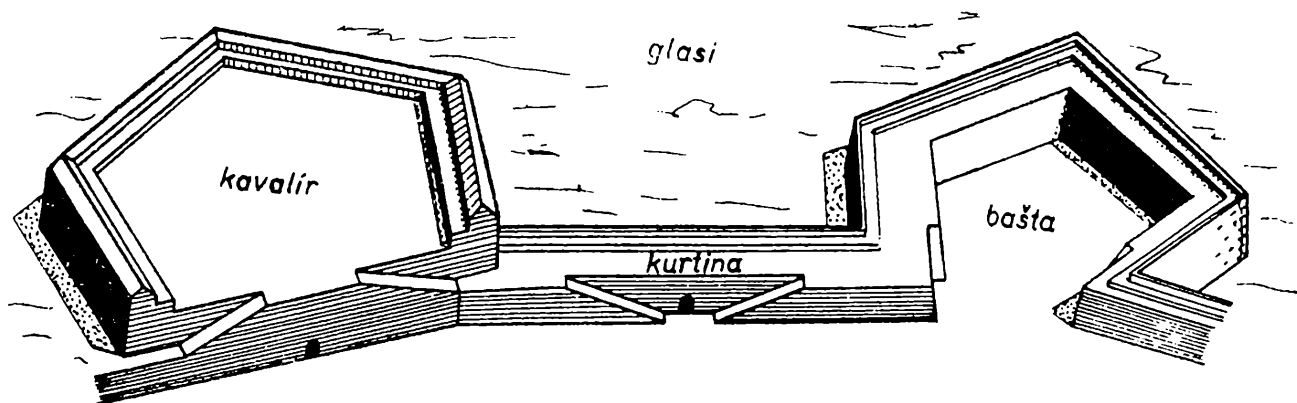
### Vzpomínka na 250. výročí založení inženýrských škol v Praze

Bylo to v září roku 1719. Na g l a s i, pustém a prázdném místě před hradbami, kde nesmělo být ani stroměčku, ani křoví, aby se tu nemohl ukrýt nepřítel, před Píseckou branou na Hradčanech bylo živo. Byli tu mladí páni s dlouhými bujnými vlasy stočenými na konci do vln, v kabátcích, krátkých kalhotách, punčochách a ve stěvících s přezkami. S nimi tu byl čtyřiašedesátiletý vojenský inženýr v dlouhé alonžové paruce, profesor České stavovské inženýrské školy v Praze, pan Christian Josef Willenberg. Čekali na vzácné hosty, kteří se měli dostavit k první veřejné zkoušce školy povolené škole zemským velícím plukovníkem panem Richardem de Rugent.

Jakmile se páni dostavili, ihned se pustili mládenci chutě do práce. Nejprve zarazili do země, kolkolem upravené a pečlivě shrabané, kolík. Kolem kolíku otočili provazce a druhým kolíkem k provazci upevněným rýsovali na zemi kružnici, do níž vepsali opět za pomoci provazce pravidelný šestiúhelník. Tento hexagon potom na základě středové podobnosti znamenitě zvětšili a dostali tak základní šestiúhelník pevnosti, kterou měli v modelu z připravené zeminy vybudovati. U jednoho vrcholu šestiúhelníka pustil se jeden ze žáků do modelování bastionu, pětiboké mohutné zdi s poměrně slabou vrstvou zeminy, u druhého vrcholu druhý budoucí vojenský inženýr modeloval kavalír,

který se liší od bastionu jen tím, že celý jeho střed je vysypán zeminou, která kryje velké klenuté místnosti v ní skryté, tak zvané *k a s e m a t y* (obr. 1). Jistě si mnohý čtenář vzpomene, že se jeden druh šikmé axonometrie jmenuje axonometrií kavalírní, je to proto, protože v ní byly tyto části pevností názorně zobrazovány. Kavalír i bastion spojoval další mladý kavalír modelem *k u r t i n y*, mohutné spojovací zdi, za níž bylo použito hodně zeminy, aby se v ní skryly proti těžkým dělovým střelám další kasematy, do nichž se vcházelo z bašty těžkými obitými vraty. Pilné ruce hochů naznačily v modelu i přístupové rampy na kavalíry a ochozy podél bašt a kurtin a jeden hbitý žáček Willenbergův vymodeloval v kratičké době před modelem kavalíru malou *r e d u t u* o čtvercovém půdorysu. Reduty byly pevnůstky předsunuté před hlavní pevností s jediným vchodem proti kavalíru, které měly zadržovat přímý útok na nepřítele.

Páni byli s modelem velmi spokojeni a jeden z nich počal zkouseti: „Slyšel, On, jakpak by místo hexagonální pevnosti navrhl pentagonální, pětibokou?“ Tázaný ihned vysvětlil, že zná dvě konstrukce pentagonu pravidelného, jak z dané strany, tak i do dané cirkumference či kružnice vepsaného.



Obr. 1

Pak se zas páni zajímali o práci s *p r e t o r i á n s k ý m* *s t o l e č k e m*, či jak se učeně vyjadřovali, *m e n s u l o u*. Ihned žáčkové vysvětlovali, že je to užití podobnosti, že se na desce stolečku za pomoci pravítka spojeného s průhledítkem rýsuje ihned zmenšený obraz dané polnosti, budovy nebo terénu, povrchu zemského. Pan Willenberg jim velmi obsáhle ve škole, kterou měl ve svém bytě, vykládal, jak z rozkazu císaře Karla VI. vyměřoval město Plzeň i jeho okolí, zarýsoval vystavěné i navrhované hrady, navrhoval doplnění, provedl plán i perspektivu města Plzně a i okolí.

Jeden z pánů vojenských chtěl zas vědět, jak se musí postupovat při zakládání mohutných zdí pevnosti, vždyť se často musí příkopy kolem hradeb zatopit vodou, mnohde je toto obklopení vodou stálou součástí opevnění. Nato mladý budoucí inženýr, aniž by byl přiveden do nejmenších rozpaků vykládal, že jim i to pan profesor vysvětlil. Říkal, jak si pan Krčín počínal při stavbě velikých rybníků. Základy zdiva i dna příkopů se musí velmi pečlivě obložit nepropustným jílem, ten se překryje drnem nařezaným na lukách pro ochranu vrstvy jílové. Pan Krčín mohl ještě celek zpevniti stromovím a keři, to však při pevnostech je zakázáno, aby se neposkytovaly skrýše nepříteli, před hradbami smí být jen pusté glasis.

Examinátoři byli velmi spokojeni, jen jeden byl ještě zvědavý: „Co to tu On namaloval za linky, tady od výpadní branky?“ „Vaše Milosti, to je naznačena příprava pro uložení min a f u g a s , sudů naplněných prachem a zasypaných kamením a hlinou. Bude-li nepřítel příliš dotěrný, vyběhne brankou ven ohněstrůjce, zapálí l u n t y, doutnavé šňůry a vrátí se rychle zpět. Za chvíli pak začnou fugasy vybuchovati a zle kropit nepřítele kamením.“ Páni byli opravdu spokojeni.

Pan Willenberg učil každý den své svěřence: šest šlechtických synků, čtyři rytíře a dva syny z městských rodin plnou hodinu v umění inženýrském. Začal s devíti žáky, již druhý rok měl plný počet žáků, dvacetčtyři ve dvou ročnících. Jeden jeho žák pracoval v Bělehradě, další v Miláně. R. 1726 se rozstolal a byl dán na odpočinek.

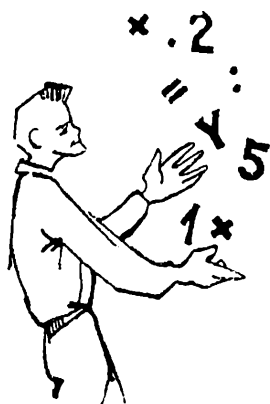
Na jeho místo byl povolán J a n F e r d. S c h o r z Insbrucku v Rakousku. Byl vyučencem římské Akademie inženýra Riccioliniho a byl výborným malířem, architektem a i inženýrem. R. 1709 se usadil v Praze, kde se mimo architekturu a malířství věnoval i úpravě řeky Vltavy. Pořídil její mapu, vyčistil ji až po Kamýk, udivoval současníky odstřelováním velikých balvanů pod vodou a postavil na Vltavě dvě plavební komory pro lodi, jednu u Županovic a druhou u Modřan. Zcela opustil vojenský ráz školy a přebudoval ji na školu ryze civilně inženýrskou, když byl r. 1726 po Willenbergovi jmenován stavy profesorem inženýrské školy v Praze.

Schor zemřel r. 1767 a po něm byl jmenován profesorem inženýrské školy jeho nejlepší žák, který mu ke konci jeho života i na škole pomáhal, F r a n t i š e k H e r g e t z Andělské Hory v Čechách. Velmi zdokonalil školu, rozšířil vyučování na tříleté a musil se věnovati dokonalému vyučení žáků zejména v zeměměřictví.

Tou dobou se prováděly veliké reformy daňové a vyvazování poddaných z nevolnictví a z robot, nucených prací, jimiž si poddaní odpracovávali daňové poplatky. Bylo nutné, aby se vyměřily pozemky jak polní, tak i lesní a jiné, aby se mohla dohodnouti spravedlivá náhrada. Výsledky měření se zarýsovaly do map a tak vzniklá sbírka záznamů se jmenovala k a t a s t r. Práci na vypracování katastru se nesmírně zasloužili žáci Hergetovi o vyvedení pracujícího venkovského lidu jak z poddanství, tak i z roboty. Pracovali nejen u nás, ale i v sousedních zemích a dokonce i v Uhersku. Tam však šlechta jejich práci nepřála, chtěla podržeti darmo pracující lid v područí, a aby oddálila reformy sociální, které po vypracování katastru následovaly, prostě mnohde i české inženýry zavřela do vězení, z něhož se obtížně dostávali na svobodu.

Ježto škola měla po roce 1780 přes dvě stě posluchačů, nemohla již býti v bytě Hergetově, jako tomu bylo z počátku jeho profesury, ale byla po krátkém umístění v Klementinu nastěhována do budovy Svatováclavského semináře v Dominikánské, nyní Husově ulici, kde je naše škola od roku 1786 trvale umístěna. Za Hergeta měla již stavovská inženýrská škola bohatou knihovnu, jejíž základ byl položen r. 1718 již Willenbergem, velmi značné sbírky modelů, přístrojů, dva mechaniky a k ruce profesorově byl přidělen adjunkt J o s e f H a v l e, který při velikém množství žáků profesorovi Hergetovi vypomáhal ve vyučování.

Po smrti Hergetově byla Stavovská inženýrská škola v Praze přeměněna na polytechniku, z níž se časem vyvinulo naše České vysoké učení technické v Praze, ale o tom si povíme až v některém z následujících článků.



## Matematické zábarvy

O t a S e t z e r, Kralupy n. Vlt.:

### Číselné hříčky

Jistě jste si všimli, že při některých numerických výpočtech vycházejí jako výsledek čísla, jejichž cifry vykazují určitou pravidelnost, na př. jsou vesměs stejné ( $3\ 367 \cdot 297 = 999\ 999$ ), nebo se některé z nich opakují ( $192^3 = 7\ 077\ 888$ ), nebo naopak jsou vesměs různé ( $11\ 826^2 = 139\ 854\ 276$ ).

Tyto zvláštnosti lze zjistit při pozorném sledování tabulek mocnin<sup>1)</sup> nebo z tabulek rozkladů čísel v prvočinitele.<sup>2)</sup> Jindy nám zase pomohou kořeny vhodně sestavených rovnic nebo konečně i t. zv. neurčité rovnice, v nichž počet neznámých je větší než počet rovnic, ale kořeny jsou celá čísla.

Na ukázkou vyřešíme úlohu: Určete celé číslo, jehož dvojmoc je napsána třemi dvojčíslími, z nichž krajní dvě jsou stejná a přitom dvojnásobná než prostřední dvojčíslí.

Označíme-li hledané číslo  $x$  a příslušné prostřední dvojčíslí  $d$ , pak z daných podmínek plyne

$$x^2 = 2d \cdot 10^4 + d \cdot 10^2 + 2d,$$

při čemž ovšem

$$10 \leq d < 50; \quad (1)$$

po úpravě dostaneme

$$x^2 = 20\ 102\ d \quad (2)$$

Koeficient při  $d$  rozložíme v prvočinitele

$$x^2 = 2 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot d; \quad (3)$$

přihlédneme-li k (1), můžeme již z (3) snadno určit

$$d = 38 \text{ a k němu z (2) } x = 874$$

Opravdu  $874^2 = 763\ 876$ .

<sup>1)</sup> F. Čuřík - F. Klokner - J. Vojtěch: Matematické tabulky, 1. a 2. část, Praha 1950.

<sup>2)</sup> Dr J. Kaván: Rozklad všech čísel celých od 2 do 256 000 v prvočinitele, Praha 1934.



Složitější je příklad téhož typu: Určíte celé číslo, jehož dvojmoc je napsána třemi dvojčíslími, z nichž obě krajní jsou stejná a přitom o 3 větší než prostřední dvojčíslí. Pokuste se sami určit toto číslo!

\*\*\*

Pomocí tabulek prvočísel určete dále prvočíslo  $abcde$  (napsané lichými ciframi  $a, b, c, d, e$ ) tak, aby i čísla  $eabcd, deabc, cdeab$  byla prvočísla, avšak číslo  $bcdea$  bylo složené.

\*\*\*

Kdysi byly v oblibě příklady, kdy písmena určitých slov se nahradila ciframi. Se vzniklými čísly se provedly naznačené početní výkony a ve výsledku byly opět číslice nahrazeny odpovídajícími písmeny, jež vytvořila slovo určitého významu.

Řešte i v takovou „rovnici“

$$(EDCBA)^2 = ECFADGHBK,$$

víte-li, že stejným písmenům odpovídají stejné cifry ( $\neq 0$ ), různým písmenům různé číslice ( $\neq 0$ ) a že cifry na její levé straně jsou vesměs menší než 6.

Podarí-li se vám úlohu vyřešit, snažte se naopak ve výsledku dosadit za číslice vhodná písmena, aby slova na obou stranách měla smysl.

Uvítáme, zašlete-li nám vtipná řešení uvedené „rovnice“ nebo i jiné vlastní příklady zábavné matematiky.



△:

## Příběh o nevěstě

Jak známo, vše souvisí se vším. A tak i při čtení klasické literatury nic netušící čtenář leccos se dozví také z matematiky, byť jen velmi elementární. Jako doklad budiž uveden poučný příběh, který ukazuje, jak nevalný, ba možno říci špatný výcvik matematického myšlení připravil nápadníka o nevěstu a tím i o veliké jmění.<sup>1)</sup>

Mikuláš Horváth, novopečený šlechtic (šlechtictví mu udělil rakouský císař František I. v odměnu za tisíc volů, které Horváth poslal císaři jako příspěvek na náklady válečného tažení proti Francouzům), si umínil, že dá svou dceru - přirozeně s velikým věnem - jen tomu, kdo bude tak moudrý, že bude znát odpovědi na jeho tři otázky. „Ten starý opičák,“ říká autor, „věděl zřejmě z pohádek, že než dostal dceru hradního pána, musel šavlí utnout tři zlatá jablka.“

<sup>1)</sup> Kálmán Mikszáth: Podivné manželství, Knihovna klasiků, 1955, str. 74.

A tak jednomu nápadníku, velkopodnikateli z Brna, položil jako první otázku:<sup>2)</sup>  
„Kdyby z Prešpurku každý den jely dva dostavníky do Brašova a z Brašova do Prešpurku rovněž dva, a teď předpokládejme, že cesta trvá deset dní, kolikpak potkáte vozů, nežli dojedete dostavníkem z Prešpurku do Brašova?“

„Dvacet.“

„No, no, mladý muži, dobře si to rozmyslete, tolik snad ne!“

„Pak je snad v té otázce nějaké šibalství?“

„Ujišťuji vás, že není.“

„V tom případě zcela určitě dvacet, ...“

„Ne a ne. Velice lituji, vážený mladý příteli.“

Brněnský podnikatel počítal celý den, zuřivě počítal, popsal asi deset archů papíru, počítal, až se mu pot řinul s čela, ale nedopočítal se. Po každé mu vyšlo něco jiného. Konečně požádal kuchařku o ošatku fazolí, kterými pak znázorňoval dostavníky jedoucí po cestě z Prešpurku do Brašova, ale tím se jen ještě více popletl.

Když pak Horváth viděl, že to podnikatel nikam nepřivede, zbavil ho nejistoty.

„Tak vidíte, z vás nebude dobrý podnikatel. Na cestě z Prešpurku do Brašova jsou jednak vozy, které vyjely v předešlých deseti dnech, jednak vozy, které vyjely v těchto deseti dnech. Podle toho je na cestě Prešpurk—Brašov čtyřicet vozů.“

No, a dceru mu nedal.

Právem, neprávem? Budeme zvědaví, co řeknou této historce naši čtenáři. Nejzajímavější odpověď uveřejníme.



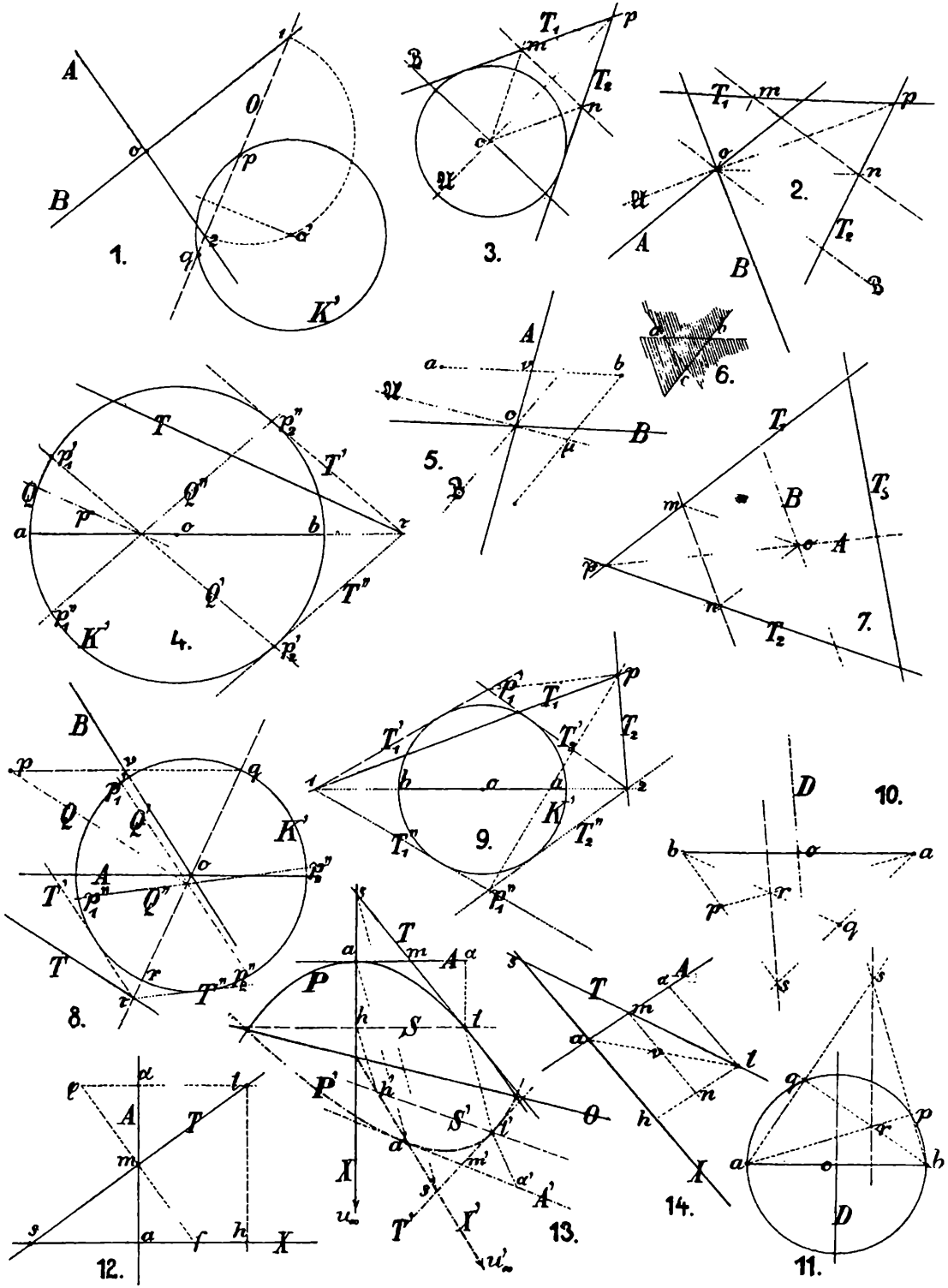
## *Redakce hovoří se čtenáři*

\* Ďakujeme katedre matematiky, fyziky a geodézie vysokej školy lesníckej a drevárskej vo Zvolene (vedúci katedry Doc. Dr. C. Palaj) aj všetkým, ktorí sa tejto akcie zúčastnili, za vzorný nábor predplatiteľ'ov časopisu „Rozhľedy matematicko-fyzikální“, prevedený v Banskej Štiavnici, Šafárikove, Rimavskej Sobote a vo Zvolene (330 odberateľ'ov). Jedenástročná stredná škola vo Zvolene je so svojimi 96-imi predplatiteľ'mi pravdepodobne najväčším predplatiteľ'om na Slovensku.

\* V 10. ř. na str. 144 č. 3 vypusťte slovo „čtyři“ a inverse si doplňte o (13;12) a (14;12).

<sup>2)</sup> V dalším je citováno přímo podle uvedené knihy.

Jak se dříve rýsovalo



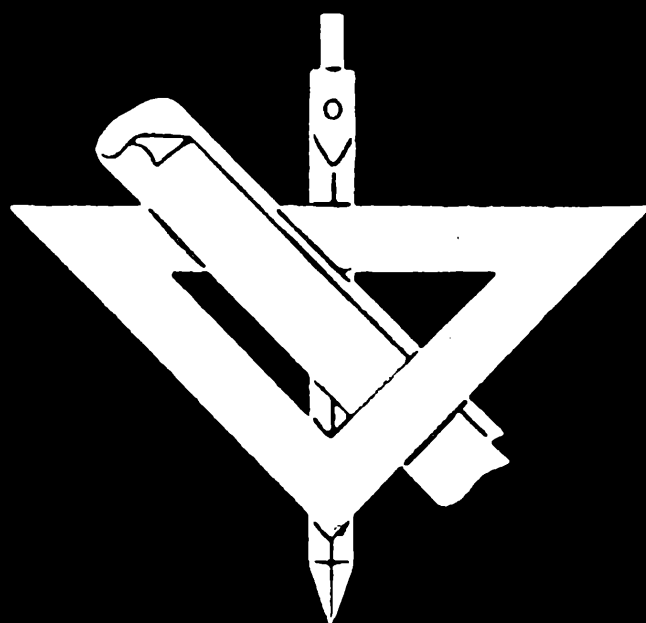
V knihovně jsme našli v knihách určených pro vyřadění pečlivě svázané tři knížky s rýsovaným nápisem: Přednášky o deskriptivní geometrii, jež na c. k. čes. vys. škole technické v Praze konal c. k. dvorní rada prof. Karel Pelz v roce 1903–1904. B. Vlk, Plzeň - 1917.

Uvnitř na papíru časem zažloutlém jsou pečlivě a čitelně zapsány přednášky velkého českého geometra. Posluchač techniky si je takto před více než padesáti lety zaznamenával a v příloze doprovázel krásně doma přerýsovanými obrázky. Na ukázkou jsme vám na předchozí stránce otiskli jednu z těchto tabulek.

I když v nynější době nemohou studenti věnovat záznamu přednášek a jejich grafickému provedení tolik času a péče, přesto je nutné, aby nepodceňovali grafickou úpravu. Právě nyní vyžaduje technická praxe více než kdykoliv předtím, aby bylo dbáno čitelnosti a přiměřené úpravy jak rukopisu, tak rysů. Nedbalost v tomto směru může zavinit nežádoucí národohospodářské škody.

Z uvedené reprodukce vidíte, kolik času a práce věnovala generace vašich otců a dědů na př. popisu, což mnohdy zabíhalo až do formalismu. Dnes máte práci v tomto směru usnadněnu šablonou pro normalisované písmo. Na vysoké škole vám zmenší námahu dostatek české a slovenské literatury.

Jistě ani vy se však nedáte zahanbit a dovedete provést rys dokonalý po všech stránkách. Proto žádáme vaše učitele, aby nám laskavě zaslali rys, který považují za vzorný. Bude-li schopný reprodukce, uveřejníme jej spolu se jménem autora, učitele i školy. Red.



# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 5

Toto číslo vyšlo 31. května 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

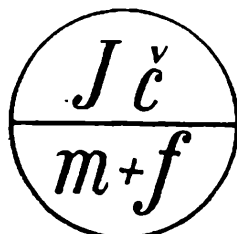
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSŠ, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

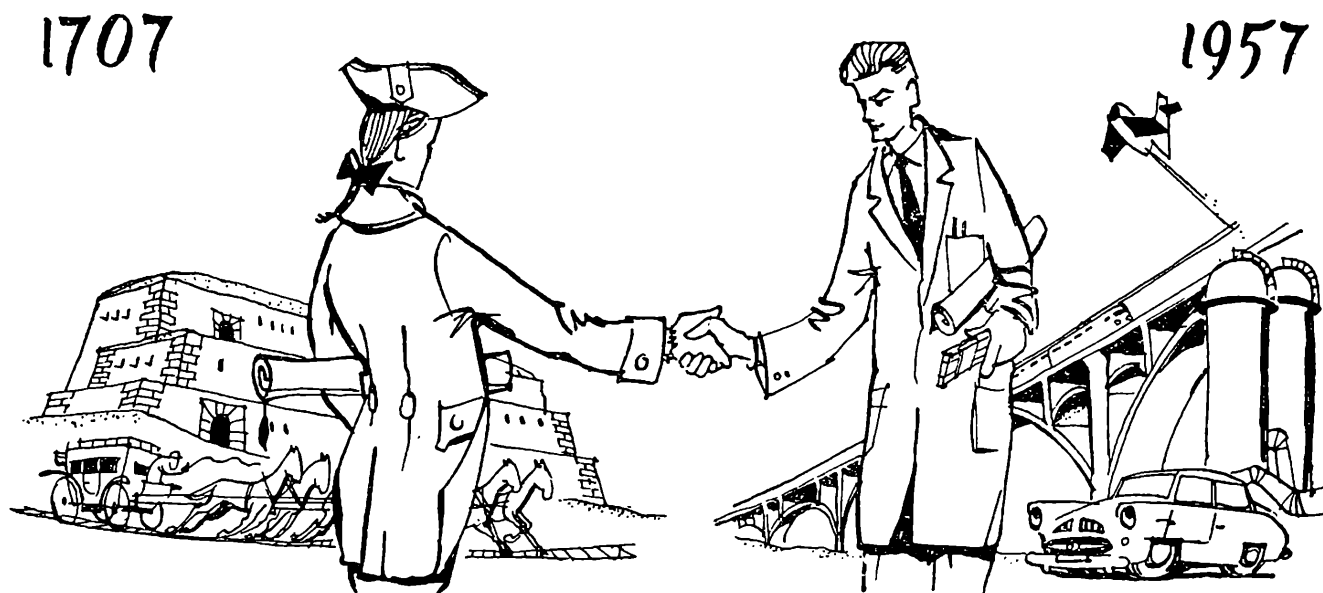
Prof. Ing. Dr. F. Kadeřávek: 250 let inženýrských škol v Praze	193
V. Kučera: Rozšíření Pythagorovy věty . . . . .	194
J. Marek: Výhodné řešení rovnice třetího stupně . . . . .	197
Doc. Dr. M. Menšík: Základy kinematické geometrie (Dokončení)	202
J. Kleczek: Planety . . . . .	210
Dr. O. Obúrka: Jaká je rychlost světla . . . . .	215
E. Říman: Dimenzionálna správnosť fyzikálnych rovníc .	219
P. Schürer: Jak měříme nízké tlaky	227
Úlohy k řešení . . . . .	235
J. Sedláček: O rozměňování pětadvacetihaléře	236
S. Horák: Zajímavé posloupnosti	237
Δ: Bloudění .	238
V. Š.: Hádanky	239
Sdělení redakce . . . . .	240
J. Bouška — J. Pícha: Geofysika v SSSR,	3. a 4. str. obálky.



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 08246

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.

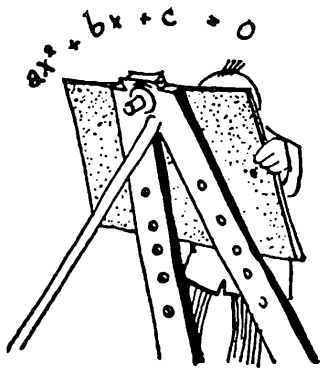


## 250 let inženýrských škol v Praze

*Praha, jediná z evropských měst, má nejstarší veřejnou inženýrskou školu. Před 250 lety nařídil císař Josef I. českým reskriptem stavům v Čechách, aby pro inženýra Ch. Willenberga zřídili tuto školu v Praze. Willenberg přinesl své umění z Francie, jeho nástupce J. F. Schor z Říma. Z této školy vznikla přičiněním F. J. Gerstnera roku 1803 pražská polytechnika, na niž se sice vyučovalo německy, avšak škola měla valnou většinu českých žáků. Z popudu profesora R. Skuherského bylo na ní zavedeno české vyučování. Roku 1879 byla přebudována na českou vysokou školu technickou a r. 1920 nazvána Českým vysokým učením technickým v Praze. Willenberg míval 24 žáků, dnes škola vychovává tisíce mladých inženýrů.*

*Stáří samo není zásluhou ani předností, ale vždy zavazuje. Pražské technické školy měly nejen doma, ale i daleko za hranicemi velmi dobré jméno. Vy, mladí čtenáři, kteří případně hodláte na těchto školách studovat, musíte nejen jejich dosavadní dobrou pověst zachovat, ale povznést ještě výše. K tomu vám přejeme mnoho zdaru a naše technické školy necht' žijí, rostou a vzkvétají.*

Prof. Dr Ing. F. Kadeřávek,  
nositel Řádu republiky.



# Matematika

Vladimír Kučera, Bzenec:

## Rozšíření Pythagorovy věty

Mnohé základní matematické poznatky jsou jen zvláštním případem matematických zákonů, platících mnohem obecněji. Tak třeba některé vztahy mezi geometrickými útvary jednorozměrnými (délkami) mají obdobu u útvarů dvojrozměrných (ploch) a třírozměrných (těles).

To si ukážeme na zvláště zajímavém a důležitém příkladu.

A. Útvary jednorozměrné. Mezi délkami stran trojúhelníků platí známé vztahy. V trojúhelníku pravoúhlém je

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad (1)$$

dvojmoc předpony je rovna součtu dvojmocí obou odvěsen - Pythagorova věta.

Z ní vyplývá, že  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , a to lze jinak psát, že

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1, \quad (2)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly mezi odvěsnami a přeponou, nebo ovšem také mezi odvěsnami a výškou, vedenou na přeponu.

V libovolném trojúhelníku platí

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (3)$$

sinová věta, a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

kosinová věta. Pomocí této věty lze odvodit Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka. Dvojmoc obsahu je  $P^2 = s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)$ , kde je  $s = (a + b + c) : 2$ .

B. Útvary dvojrozměrné. Mějme čtyřstěn  $ABCD$  takový, že jeho hrany délek  $a = AD$ ,  $b = BD$ ,  $c = CD$  jsou navzájem k sobě kolmé. Takovému útvaru budeme říkat *pravoúhlý čtyřroh*. Tři jeho stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky, jejich odvěsny jsou  $a$ ,  $b$  nebo  $a$ ,  $c$  nebo  $b$ ,  $c$ ; budeme jim říkat *odvěsnové stěny*; jejich obsahy jsou  $P_1 = \frac{1}{2} \cdot ab$ ,  $P_2 = \frac{1}{2} \cdot ac$  a  $P_3 = \frac{1}{2} \cdot bc$ .

Čtvrtá zbývající stěna je obecný trojúhelník, jehož strany jsou přepony těch odvěsnových stěn, tedy  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2}$  a  $\sqrt{b^2 + c^2}$ ; řekněme mu *přeponový trojúhelník*. Užijeme-li Heronova vzorce, vypočteme obsah čtvrté přeponové stěny z výrazu trochu složitějšího, který se však rychle zjednoduší až na



$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

Z něho vyplývá obdoba Pythagorovy věty, že

$$P_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \quad (1')$$

*Dvojnoc přeponové stěny rovná se součtu dvojnoci stěn odvěsnových.*

Označíme-li úhly, sevřené odvěsnovými stěnami  $P_1$ ,  $P_2$  a  $P_3$  s přeponovou stěnou  $P_4$  postupně  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , je  $P_1 = P_4 \cdot \cos \alpha'$ ,  $P_2 = P_4 \cdot \cos \beta'$  a  $P_3 = P_4 \cdot \cos \gamma'$ . Dosadíme-li tyto výrazy do (1'), obdržíme vztah  $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1$ . Protože kolmice spuštěná z bodu  $D$  na přeponovou stěnu  $ABC$  svírá s odvěsnovými stěnami  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  po řadě úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , z nichž  $\alpha$  je doplňkový k  $\alpha'$ ,  $\beta$  je doplňkový k  $\beta'$  a  $\gamma$  ke  $\gamma'$ , lze poslední identitu psát jako

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \quad (2')$$

Ze vztahů pro obsahy odvěsnových stěn  $P_1 = P_4 \cdot \sin \alpha$ ,  $P_2 = P_4 \cdot \sin \beta$  a  $P_3 = P_4 \cdot \sin \gamma$  vyplývá potom obdoba sinové věty:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (3')$$

*Obsahy odvěsnových trojúhelníků jsou v poměru sinů úhlů, které svírá jejich rovina s výškou vedenou na stěnu přeponovou.*

Abychom našli obdobu kosinové věty, uvažujme nejprve případ, že stěny pravouhlých trojúhelníků  $P_1$  a  $P_2$  svírají spolu úhel  $A$ , stojíce kolmo k stěně  $P_3$ . Jejich obsahy jsou  $P_1 = \frac{1}{2} \cdot ab$ ,  $P_2 = \frac{1}{2} \cdot ac$  a  $P_3 = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$ . Čtvrtá stěna má strany délek  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$ . Její obsah se najde opět užitím Heronova vzorce:

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \cdot \sin^2 A - 2ab \cdot ac \cdot \cos A}.$$

To znamená, že platí  $P_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - 2P_1P_2 \cdot \cos A$ .

Ve čtyrstěnu obecném nechť svírají hrany  $a$  a  $b$  úhel  $C$ , hrany  $a$  a  $c$  úhel  $B$ , hrany  $b$  a  $c$  úhel  $A$ . Potom jsou obsahy jeho tří stěn  $P_1 = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$ ,  $P_2 = \frac{1}{2} \cdot ac \sin B$ ,  $P_3 = \frac{1}{2} \cdot bc \sin A$ . Čtvrtá stěna je omezena hranami délek  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$  a  $\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$ . Obtížnějším počítáním, při němž se použije Heronova vzorce, dojdeme k výsledku

$$P_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - 2P_1P_2 \cdot \cos \alpha - 2P_1P_3 \cdot \cos \beta - 2P_2P_3 \cdot \cos \gamma, \quad (4')$$

kde nyní značí  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  úhly, sevřené po řadě rovinami  $P_1$  a  $P_2$ ,  $P_1$  a  $P_3$ ,  $P_2$  a  $P_3$ .

*Dvojnoc obsahu kterékoli stěny čtyrstěnu se rovná součtu dvojnoci obsahů ostat-*

ních tří stěn, zmenšenému o všechny možné dvojnásobné součiny obsahů dvojic těchto stěn, násobené vždy kosinem úhlu jimi sevřeného.

Ze společného vrcholu stěn  $P_1 = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$ ,  $P_2 = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin B$  a  $P_3 = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$  vedeme kolmici na stěnu  $P_4$ . Její délku označíme  $v$  a její úhly s hranami  $a$ ,  $b$  a  $c$  buďte po řadě  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ . Užijeme-li vztahů  $v = c \cdot \cos C' = b \cdot \cos B' = a \cdot \cos A'$ , můžeme výraz pro obsah  $P_1$  upravovat takto:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \frac{abc \cdot \sin C}{2c} = \frac{abc \cdot \sin C \cdot \cos C'}{2v}$$

$$\text{Podobně obdržíme } P_2 = \frac{abc \cdot \sin B \cdot \cos B'}{2v} \text{ a } P_3 = \frac{abc \cdot \sin A \cdot \cos A'}{2v}$$

Potom vyplývá obdoba věty sinové:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin C \cos C' : \sin B \cos B' : \sin A \cos A' \quad (3'')$$

C. Útvary trojrozměrné. Mějme takový čtyrstěn  $ABCD$  (říkejme mu pravoúhlý), že jeho hrany závisí na délkách  $a, b, c$  a  $d$  tak, že je  $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $AD = \sqrt{a^2 + d^2}$ ,  $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $BD = \sqrt{b^2 + d^2}$  a  $CD = \sqrt{c^2 + d^2}$ . To znamená, že se dají nad jeho stěnami sestrojiti pravoúhlé čtyřrohy. Jsou-li jejich objemy  $O_1, O_2, O_3$  a  $O_4$ , objem čtyrstěnu

$$O = \frac{1}{6} \sqrt{a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2},$$

obdržíme opět obdobu Pythagorovy věty:

$$O^2 = O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 + O_4^2 \quad (1'')$$

Dvojmoc objemu pravoúhlého čtyrstěnu rovná se součtu dvojmocí objemů pravoúhlých čtyřrohů nad jeho stěnami.

Není-li uvažovaný čtyrstěn pravoúhlý, nedají se k jeho stěnám přiložiti pravoúhlé čtyřrohy. Ukončíme úvahy ukázkou, když sice  $c$  je kolmé k  $a$  a  $b$ ,  $d$  je kolmé k  $a$  a  $b$ ,  $c$  je kolmé k  $d$ , ale  $a$  svírá s  $b$  úhel  $A$ , odlišný od pravého úhlu. Čtyrstěn má potom hrany dlouhé  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos A}$ ,  $\sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + d^2}$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $\sqrt{b^2 + d^2}$ , a  $\sqrt{c^2 + d^2}$ . Čtyrstěny sestrojené nad jeho stěnami budou mít objemy  $O_1 = \frac{1}{6} \cdot abc \sin A$ ,  $O_2 = \frac{1}{6} \cdot abd \sin A$ ,  $O_3 = \frac{1}{6} \cdot acd$  a  $O_4 = \frac{1}{6} \cdot bcd$ .

Ježto je dvojmoc objemu čtyrstěnu  $O^2 = \frac{1}{36} \cdot (a^2 b^2 c^2 \sin^2 A + a^2 b^2 d^2 \sin^2 A + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2 - 2abc^2 d^2 \cos A)$ , je tu opět obdoba kosinové věty, neboť je

$$O^2 = O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 + O_4^2 - 2 \cdot O_3 O_4 \cos A. \quad (4'')$$

## Výhodné řešení rovnice třetího stupně

V praxi často potřebujeme řešit rovnici třetího stupně. Je známo více způsobů, jež vedou k odvození vzorců pro kořeny kubické rovnice, při nichž je nutno odstranit předem vhodnou substitucí některý člen rovnice. Výsledné vzorce nejsou pak vždy vhodné pro výpočet kořenů, protože je možno užít jich prakticky jen v tom případě, kdy daná kubická rovnice má jeden kořen reálný a ostatní dva komplexní. Má-li rovnice všechny tři kořeny reálné, pak vzorec selhává, neboť podává řešení ve tvaru, kterého nelze pro výpočet užít (*casus irreducibilis*). V tomto případě je třeba uchýlit se k řešení goniometrickému. Dále uvedeme způsob řešení, při němž není nutno žádný člen rovnice odstraňovat, a při kterém vychází vzorec ve tvaru jednoduchém, vhodném pro zapamatování. I pro případ tří reálných kořenů se dá tento postup snadno aplikovat; příslušné goniometrické řešení má jednoduchou formu - připomínající kvadratickou rovnici - a pro numerický výpočet je možno použít zde výpočtů předběžně již vykonaných.

Mějme kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

pro niž vypočteme výrazy

$$f = a^2 - 3b, \quad F = ab - 9c, \quad G = b^2 - 3ac.$$

Potom charakteristická rovnice

$$fu^2 + Fu + G = 0 \quad (2)$$

určuje dva kořeny  $u_1, u_2$ :

$$u_{1,2} = \frac{-F \pm \sqrt{D}}{2f}, \quad \text{kde } D = F^2 - 4fG$$

Mohou zde nastati tři případy:

1. Jsou-li kořeny rovnice (2) reálné, t. j. je-li  $D > 0$ , má příslušná kubická rovnice (1) jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené. Reálný kořen v tom případě vypočteme podle vzorce

$$x_1 = u_1 - \frac{u_1 - u_2}{1 - \sqrt[3]{\frac{a + 3u_2}{a + 3u_1}}} \quad (3)$$

Poznámka: Výraz pod odmocninou může být záporný.

Definujme pak třetí odmocninu záporného reálného čísla takto: je-li  $K < 0$ , potom  $\sqrt[3]{K} = -\sqrt[3]{|K|}$ . Zřejmě platí  $(-\sqrt[3]{|K|})^3 = -|K| = K$ .

Další dva komplexní kořeny pak dostaneme, násobíme-li třetí odmocninu ve

vz. (3) buď hodnotou  $\varepsilon$  nebo  $\varepsilon^2$ , kde jest  $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , a tedy  $\varepsilon^3 = 1$ .

2. Je-li  $D = 0$  (a proto  $u_1 = u_2 = u$ ), má rovnice (1) reálné kořeny. Pro první kořen ztrácí vz. (3) smysl. Snadno však zjistíme, že platí  $x_2 = x_3 = u$ . Rovnice (1) má tedy v tomto případě dvojnásobný kořen

$$x_{2,3} = -\frac{F}{2f}$$

a odtud již snadno určíme

$$x_1 = -\frac{a^3 - 4ab + 9c}{f}$$

3. Jsou-li kořeny rovnice (2) komplexní, což nastane, je-li  $D < 0$ , má rovnice (1) všechny tři kořeny reálné, navzájem různé. Vzorec (3) není v tomto případě vhodný pro výpočet kořenů. I zde však, při užití goniometrického řešení, můžeme psát všechny tři reálné kořeny rovnice (1) v jednoduchém tvaru, který si snadno zapamatujeme.

Platí zde:

*Všechny tři reálné kořeny rovnice (1) se rovnají prvému kořenu  $u_1$  rovnice (2), v němž je imaginární jednotka  $i$  nahrazena kotangentou určitého úhlu.*

Tedy:

$$x_{1,2,3} = \frac{-F + \sqrt{-D} \cdot \operatorname{cotg}\left(\varphi + \frac{k\pi}{3}\right)}{2f}, \quad (4)$$

pro  $k = 0, 1, 2$ .

Úhel  $\varphi$  je dán jednoznačně vztahem

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\sqrt{-D}}{3F - 2af} \quad (5)$$

úhel  $3\varphi$  leží v intervalu od 0 do  $\pi$ .

Případ 1. a 2.: Důkazy pro tyto dva případy zde nepodáváme. Čtenář je nalezne v článku „Přímé řešení úplné rovnice třetího stupně“ v *Matematicko-přírodovědeckých rozhledech* roč. 1954, č. 3. Je třeba jen připomenout, že některé výrazy ztrácejí pro  $f = 0$  smysl, což se týká i případu třetího. V tomto případě můžeme rovnici (1) řešit zcela jednoduše takto: napíšeme ji ve tvaru

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27} - c$$

a pak ji prostě odmocníme. Protože jest  $f = 0$ , platí zde  $b = \frac{a^2}{3}$

**Případ 3:** Odvodíme vzorec (4). Zlomek  $\frac{a + 3u_2}{a + 3u_1}$  ze vz. (3) je vlastně poměr dvou čísel komplexně sdružených. Můžeme jej tedy psát ve tvaru  $\frac{a + 3u_2}{a + 3u_1} = A + Bi$ , kde  $A, B$  jsou čísla reálná, pro něž platí

$$A^2 + B^2 = 1$$

Se zřetelem ke vz. (3) je třeba nalézt komplexní číslo  $P + Qi$ , pro něž platí

$$(P + Qi)^3 = A + Bi$$

$P, Q$  jsou čísla reálná (ovšem neznámá), vyhovující rovněž podmínce

$$P^2 + Q^2 = 1$$

Vzorec (3) pak zní

$$x = u_1 - \frac{u_1 - u_2}{(1 - P) - Qi}$$

Po rozepsání dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{F}{2\mathfrak{f}} + i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2\mathfrak{f}} - \frac{2i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2\mathfrak{f}}}{(1 - P) - Qi} = \\ &= -\frac{F}{2\mathfrak{f}} + \frac{\sqrt{-D}}{2\mathfrak{f}} \left[ i - \frac{2i \cdot (1 - P + Qi)}{(1 - P)^2 + Q^2} \right] \end{aligned}$$

Výraz v závorce lze zjednodušit:

$$i - \frac{2i - 2P \cdot i - 2Q}{1 - 2P + (P^2 + Q^2)} = i + \frac{2Q - 2i(1 - P)}{2(1 - P)} = \frac{Q}{1 - P}$$

Podle očekávání je tento výraz reálný, neboť hledaný kořen musí být číslem reálným. Tím dostáváme:

$$x = -\frac{F}{2\mathfrak{f}} + \frac{\sqrt{-D}}{2\mathfrak{f}} \cdot \frac{Q}{1 - P}$$

Zbývá ještě určit poměr  $\frac{Q}{1 - P}$ . Na obr. 1 je znázorněno číslo  $A + Bi$ . Jeho prostá hodnota je rovna 1, jeho amplitudu označme  $3\alpha$ . Podle **M o i v r e o v y** v ě t y jest  $P + Qi$  číslo, jehož prostá hodnota je rovněž 1, amplituda  $\alpha$ .

Označme  $\sphericalangle Qt_1 = \varphi$ ; zřejmě platí  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ . Podle vyobrazení jest  $\frac{Q}{1 - P} = \cotg\varphi$ .

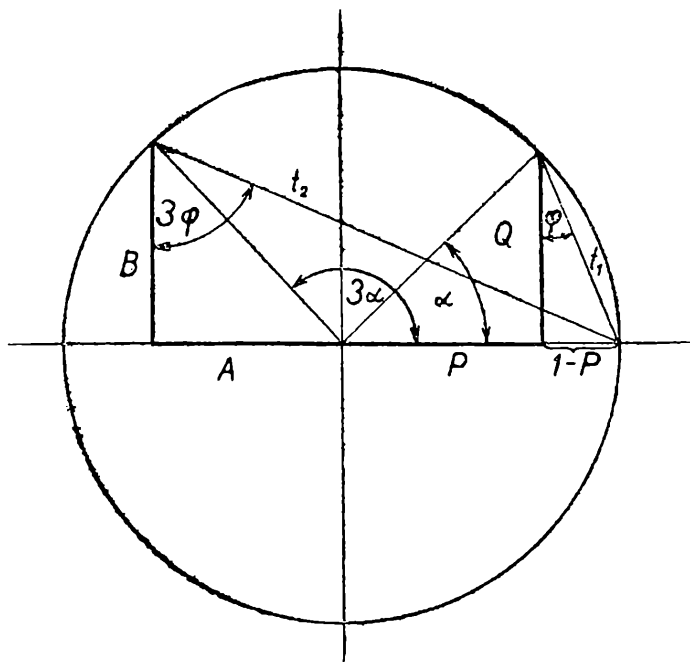
Protože úhel  $\sphericalangle Bt_2 = \frac{3\alpha}{2} = 3\varphi$ , je úhel  $\varphi$  dán vztahem

$$\tg 3\varphi = \frac{1 - A}{B}$$

Určíme hodnoty čísel  $A$ ,  $B$ :

$$\frac{a + 3u_2}{a + 3u_1} = \frac{a + \frac{-3F - 3i\sqrt{-D}}{2f}}{a + \frac{-3F + 3i\sqrt{-D}}{2f}} = \frac{(2af - 3F) - 3i\sqrt{-D}}{(2af - 3F) + 3i\sqrt{-D}} =$$

$$= \frac{(2af - 3F)^2 - 9(-D) - 6(2af - 3F) \cdot \sqrt{-D} \cdot i}{(2af - 3F)^2 + 9(-D)}$$



Obr. 1

Odtud

$$A = \frac{(3F - 2af)^2 - 9(-D)}{(3F - 2af)^2 + 9(-D)} \quad B = \frac{6(3F - 2af) \cdot \sqrt{-D}}{(3F - 2af)^2 + 9(-D)}$$

$\operatorname{tg} 3\varphi$  je rovno poměru  $\frac{1-A}{B}$  tedy:

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\sqrt{-D}}{3F - 2af}$$

Je patrné, že úhel  $3\varphi$  může nabývat hodnot v intervalu od 0 do  $\pi$ , protože interval pro dvojnásobný úhel, t. j. úhel  $3\alpha$ , jest od 0 do  $2\pi$ . Je-li tedy  $\operatorname{tg} 3\varphi > 0$ , je  $3\varphi$  úhel ostrý, pro  $\operatorname{tg} 3\varphi < 0$  jest  $3\varphi$  tupý.

Protože však můžeme hodnotu amplitudy komplexního čísla  $A + Bi$  volit mnohoznačně, t. j.  $3\alpha + 2k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), vyhovují kromě základního úhlu  $3\varphi$  i úhly  $3\varphi + \pi$ ,  $3\varphi + 2\pi$  atd., a tomu odpovídající úhly  $\varphi$ ,  $\varphi + \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi +$

$+\frac{2\pi}{3}$ . Pro hodnoty  $k = 3, 4, 5, \dots$  by se již hodnota kotangenty periodicky opako-  
vala. Bereme tedy postupně tři hodnoty

$$\frac{Q}{1-P} = \operatorname{cotg} \left( \varphi + \frac{k\pi}{3} \right)$$

pro  $k = 0, 1, 2$ . Tím dostaneme tři reálné kořeny.

Poznámka. Vztah mezi výrazy  $\frac{Q}{1-P}$  a  $\frac{1-A}{B}$  můžeme odvodit též takto:

$P + Qi$  je komplexní jednotka, a proto platí  $P + Qi = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$ . Odtud dostaneme  $P = \cos \alpha$ ,  $Q = \sin \alpha$  a dále

$$\frac{Q}{1-P} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

Podle Moivreovy věty jest  $(P + Qi)^3 = A + Bi = \cos 3\alpha + i \cdot \sin 3\alpha$ , a dále  $A = \cos 3\alpha$ ,  $B = \sin 3\alpha$ . Je tedy

$$\frac{1-A}{B} = \frac{1 - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{3\alpha}{2}}{2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$$

Dosazením za  $\frac{\alpha}{2} = \varphi$  dostaneme opět  $\frac{1-A}{B} = \operatorname{tg} 3\varphi$ ,  $\frac{Q}{1-P} = \operatorname{cotg} \varphi$

*Příklad.* Řešte rovnici

$$x^3 + 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Zde je:  $a = 3$ ,  $b = -7$ ,  $c = 2$ ;  $\mathcal{J} = 30$ ,  $F = -39$ ,  $G = 31$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = -\frac{3\sqrt{2199}}{297}, \quad 3\varphi = 154^\circ 39' 15,7''$$

$$x_1 = \frac{39 + \sqrt{2199} \cdot \operatorname{cotg} 51^\circ 33' 5,2''}{60} = 1,270\ 54\dots$$

$$x_2 = \frac{39 - \sqrt{2199} \cdot \operatorname{tg} 21^\circ 33' 5,2''}{60} = 0,341\ 32\dots$$

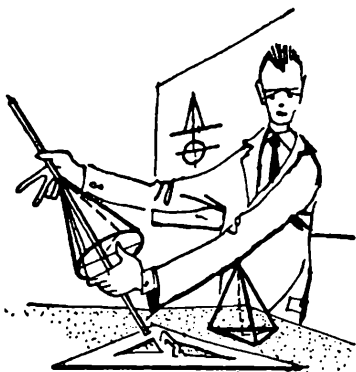
$$x_3 = \frac{39 - \sqrt{2199} \cdot \operatorname{tg} 81^\circ 33' 5,2''}{60} = -4,611\ 91\dots$$

Součet všech tří kořenů je  $-3,000\ 05$ , což se dobře shoduje s hodnotou  $-a$  (s přesností danou při použití pětimístných log. tabulek).

V závěru je třeba ještě dodat, že je možno tři reálné kořeny vyjádřit i pomocí druhého kořene  $u_2$  rovnice (2). Vyjdeme z rovnosti

$$x = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{1 - \sqrt[3]{\frac{a + 3u_1}{a + 3u_2}}}$$

a postupujeme zcela obdobným způsobem jako v případě předcházejícím. Kořeny pak mají obrácené pořadí.



## Deskriptivní geometrie

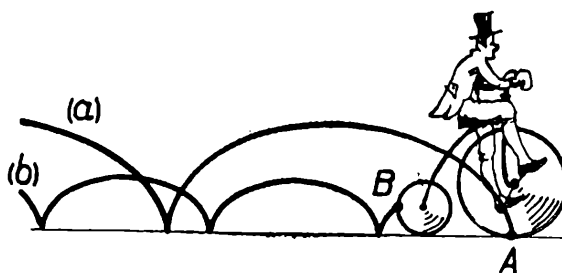
Doc. Dr. Miroslav Menšík, Praha:

### Základy kinematické geometrie

(Dokončení)

A. *Cykloidy*. Kdyby si jezdec na kole upevnil na obruč svítící bod - na př. malou žárovku  $A$  nebo  $B$  - a vy jste ho za jízdy pozorovali s boku, viděli byste, že křivky (a), (b) opisované svítícími body mají tvar vyznačený na obr. 16.

a) S geometrického hlediska se pohybuje (kotálí) kružnice po přímce. Na obr. 17 je dána pevná přímka  $p^n$  a po ní se kotálí kružnice  $k^h$  o středu  $S$  a poloměru  $r$ . V počáteční poloze budiž bod dotyku  $A$ .



Obr. 16. Vznik cykloid.

Rozdělme kružnici  $k^h$  na libovolný počet (na př. na dvanáct) rovných oblouků  $\widehat{A1} = \widehat{12} = \widehat{23} = \dots$ . Při kotálení - vyznačeném šipkou - odvaluje se kružnice po přímce  $p^n$  tak, že obloučky na kružnici se rozvinou v úsečky na přímce:  $\widehat{A1} = A1$ ,  $\widehat{12} = 12$ ,  $\dots$ , čili v našem případě na  $p^n$  je  $A1 = \frac{\pi r}{6}$  a  $A12 = 2\pi r$ .

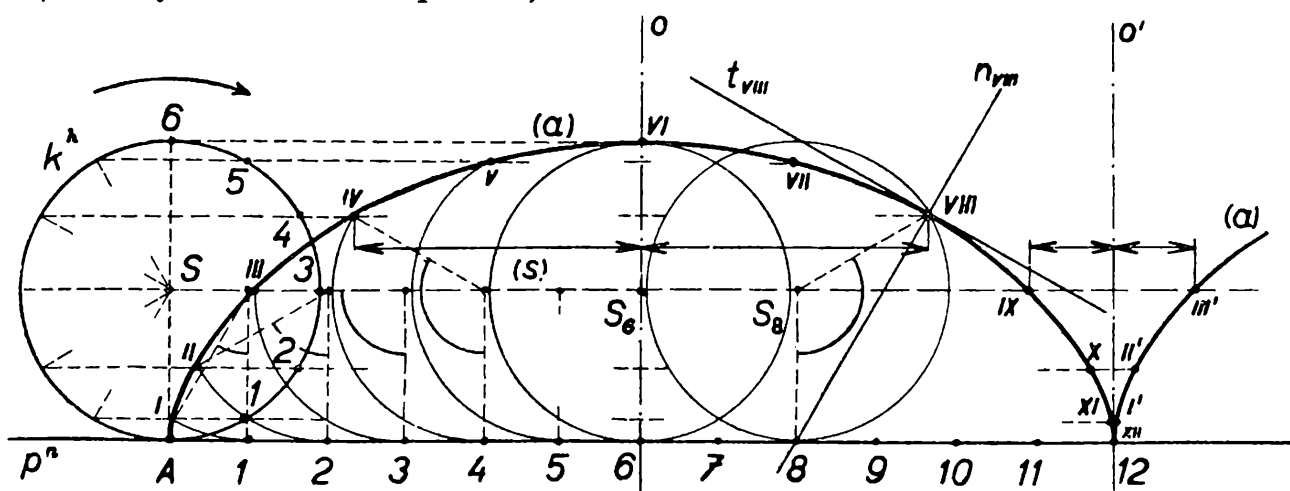
Graficky řešíme přibližně toto rozvíjení čili rektifikaci kruž-



nice v úsečku tak, že kružnici nahradíme pravidelným vepsaným  $n$ -úhelníkem (v našem případě dvanáctiúhelníkem) o obvodu  $O < 2\pi r$ , jehož stranu  $s_n$  považujeme za  $s_n \doteq \frac{2\pi r}{n}$ . Takto vzniklá chyba je u kružnice malých poloměrů -

obvyklých v sešitu - v mezích rýsovacích chyb. Výpočtem se přesvědčíte, že na př. obvod pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice je pouze asi o 1 % menší než obvod této kružnice. Je tedy v obr. 17 na přímce  $A12 = 12 \cdot s_n \doteq 2\pi r$ .

Otočí-li se kružnice  $k^h$  o  $30^\circ$ , odkotálí se tak, že její bod 1 se ztotožní s bodem 1 na přímce  $p^n$ , zatím co bod  $A$  se dostane do polohy I (oblouk II je rovný úsečce AI na přímce). Odkotálením o dalších  $30^\circ$  stane se bod 2 kružnice bodem dotyku s přímkou  $p^n$  a splyne s jejím bodem 2; bod  $A$  přitom zaujme polohu II (oblouk  $\widehat{2II}$  je rovný úsečce A2 na přímce).



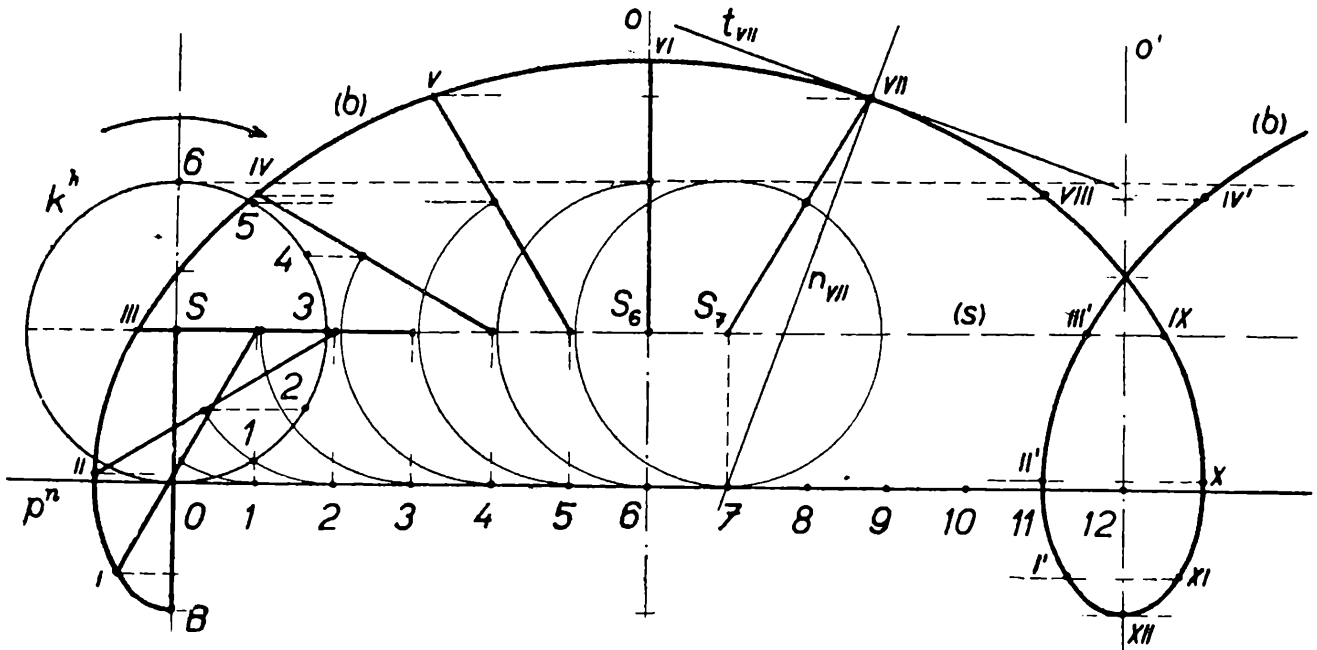
Obr. 17. Cykloida prostá.

Tak kotálíme kružnici a postupně sestavujeme další polohy III, ..., XII bodu  $A$ , čili body trajektorie  $(a)$ . Vzniklá křivka se nazývá *cykloida*, přesněji *cykloida prostá*. Z konstrukce vidíme, že spojnice  $I XI$ ,  $II X$ , ... jsou rovnoběžné s přímkou  $p^n$  a že trajektorie  $(a)$  má mezi body  $A$  až  $XII$  osu souměrnosti  $o \perp p^n$  jdoucí bodem VI ( $o \equiv S6$ ).

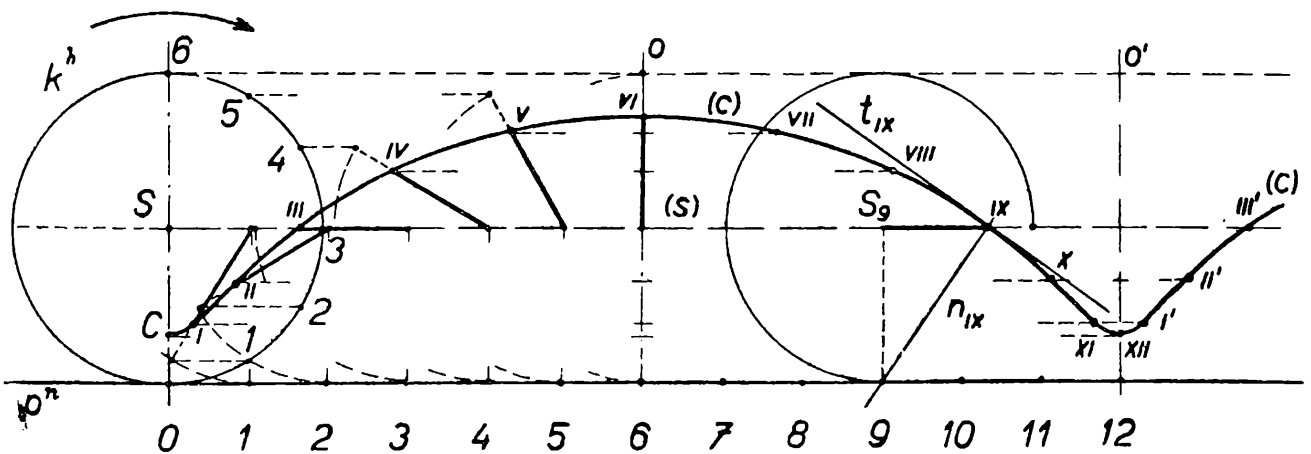
Po odkotálení o  $360^\circ$  - čili po jedné otočce - se tvořící bod  $A$  opět dostane na přímku  $p^n$  do polohy XII, a při dalším pohybu proběhne shodnou část cykloidy  $I'II'III'$  ... souměrnou k první části podle osy  $o' \perp p^n$ . Cykloida se skládá z pravidelně se bez omezení opakujících částí t. zv. *větvi*, které mají *periodu*  $A XII = 2\pi r$ . Střed  $S$  pohybující se kružnice vytvoří při kotálení čili valení přímou trajektorii  $(s) \parallel p^n$ .

Uvažujme okamžitou polohu kružnice  $k^n$ , na př. při otočení o  $8 \times 30^\circ = 240^\circ$  (obr. 17), mající střed v bodu  $S_8$  ( $S_8 \delta \perp p^n$ ). Okamžitý střed otáčení v této poloze kružnice je dotykový bod 8 a tečna  $t_{VIII}$  v bodu VIII cykloidy je kolmá k normále  $n_{VIII} \equiv 8 VIII$ . Podobně sestrojíme tečnu v každém bodě křivky  $(a)$ , což napomůže jejímu správnému narýsování. Tečny v bodech  $A$ , XII, ... jsou kolmé k  $p^n$ ; v bodě VI, VI', ... je tečna s ní rovnoběžná.

b) V obr. 18 je opět dána nehybná přímka  $p^n$  a hybná kružnice  $k^h$  o středu  $S$  a poloměru  $r$ . Zvolme si vně kružnice bod  $B$ , o němž předpokládejme, že je během pohybu stále pevně spojen s kotálející neboli valící se kružnicí, jak je na obr. vyznačeno tlustším vytažením spojnice  $SB$ . Bod  $B$  opíše trajektorii  $(b)$ , jejíž jednotlivé body  $B, I, II, \dots, XII$  sestrojíme takto:



Obr. 18. Cykloida prodloužená.

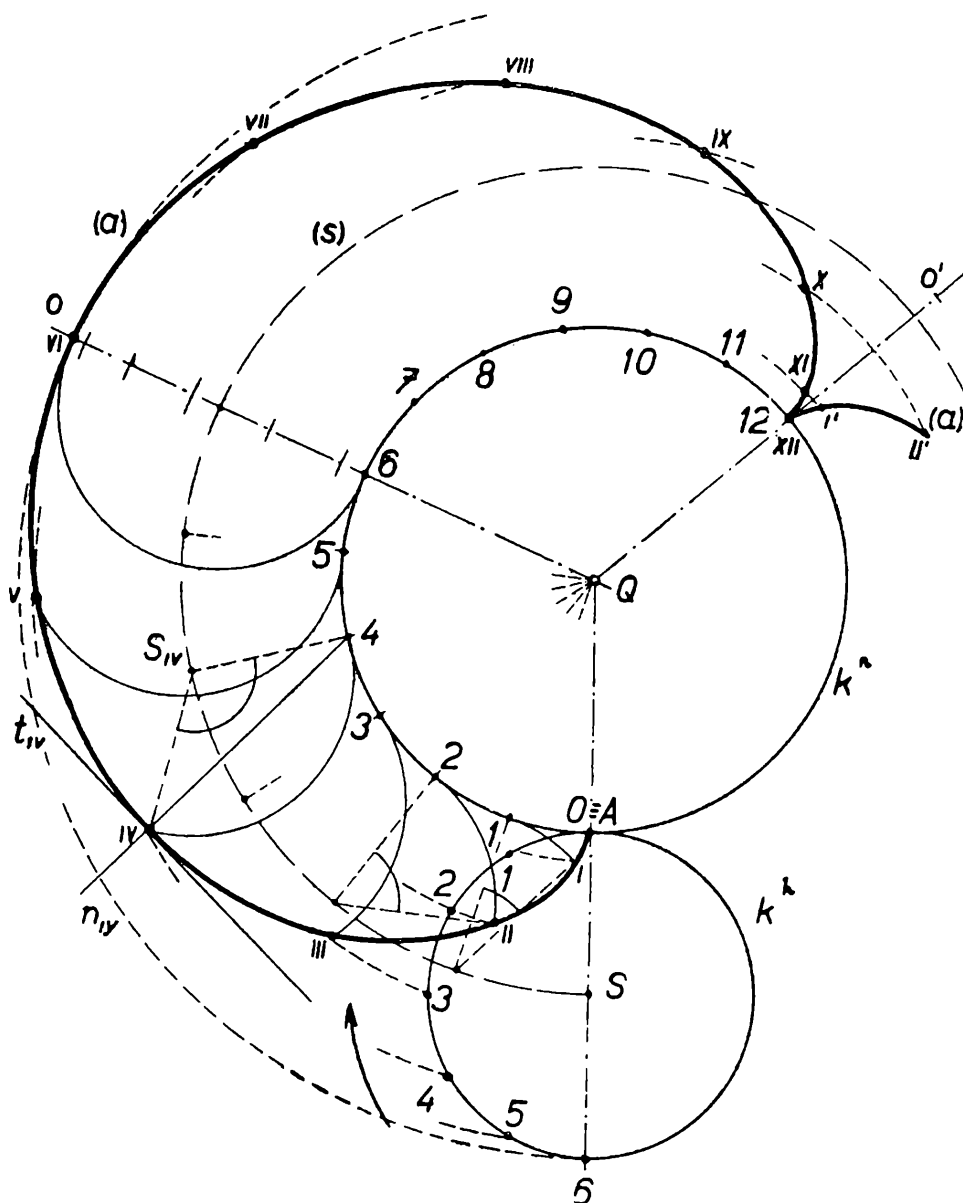


Obr. 19. Cykloida zkrácená.

Nechť v počáteční poloze je  $SB \perp p^n$ , pak při valení opíše průsečík  $O$  této spojnice  $SB$  s přímkou  $p^n$  prostou cykloidu, jejíž body jsou na obrázku vyznačeny tečkou, avšak křivka není zakreslena. V jednotlivých postaveních kotálející se kružnice můžeme vyznačit okamžitou polohu úsečky  $SB$  - na obr. 18 vždy tlustě vytaženou - jak je na př. tam provedeno po odvalení o  $7 \times 30^\circ = 210^\circ$ , kde tato úsečka je v poloze  $S_7VII$  ( $S_7VII = SB$ ); tím je současně určen bod  $VII$  trajektorie  $(b)$ . Této křivce říkáme *cykloida prodloužená*.

Tečna křivky na př. v bodu  $VII$  je  $t_{VII} \perp n_{VII}$ , kde normála  $n_{VII}$  spojuje okamžitý střed otáčení  $7$  s bodem dotyku  $VII$ . Tečny v bodech  $B, VI, XII$ , jsou rovnoběžné s nehybnou přímkou  $p^n$ .

Opět užitíme souměrnosti větve cykloidy podle osy  $o \equiv VI S_6 (o \perp p^n)$ , tedy ke konstrukci bodů  $VII, VIII, \dots, XI$  souměrných k bodům  $V, IV, \dots, I$ , a ke konstrukci bodů  $I', II', \dots$  souměrných podle osy  $o' \equiv XII 12 (o' \perp p^n)$ . Periode, po níž se průběh prodloužené cykloidy opakuje, je opět  $O 12 = 2\pi r$ .



Obr. 20. Epicykloida prostá.

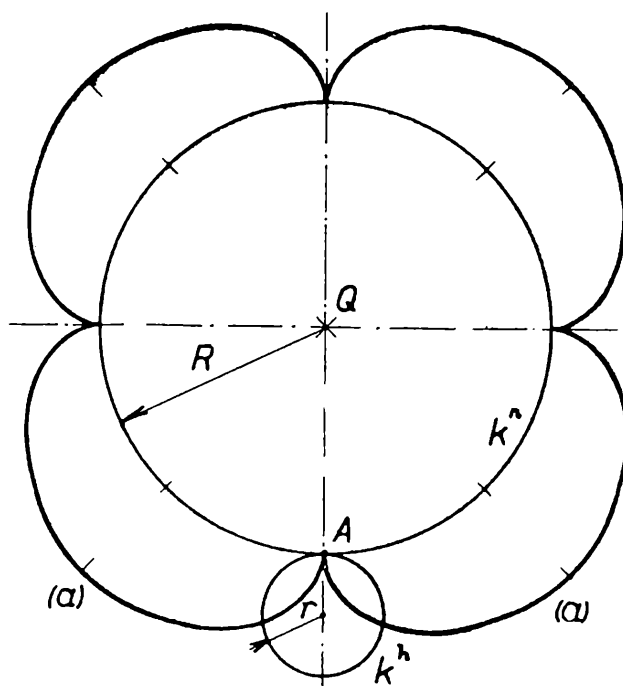
c) Konečně zvolíme tvořící bod  $C$  na poloměru valcí se kružnice  $k^h$  (obr. 19) tak, aby  $C \neq S, C \neq O$ ; vzniklá křivka se nazývá *cykloida zkrácená*. Jednotlivé její body  $C, I, II, \dots, XII$  sestrojíme podobně, jako u cykloidy prodloužené vyšetřováním okamžitých poloh úsečky  $SC$ . Také periode této cykloidy je  $O XII = 2\pi r$ ; opakující se větve mají osy souměrnosti  $o, o', \dots$ . Na obr. 19 je sestrojena tečna  $t_{IX}$  v bodu  $IX$ . Tečny v bodech  $C, VI, XII$ , jsou rovnoběžné s pevnou přímkou  $p^n$ .

B. *Epicykloidy*. Valením kružnice po kružnici vznikne *epicykloida*. Můžeme tedy považovat cykloidy za zvláštní případ epicykloid, kdy nehybná „kružnice“ má nekonečně veliký poloměr.

a) Sestrojení bodů  $A, I, II, \dots, XII$  je patrné z obr. 20. Danou hybnou kruž-

nici  $k^h$  o středu  $S$  a poloměru  $r$  rozdělíme na určitý počet stejných oblouků  $\widehat{A1} = \widehat{12} = \dots$  (na př. na dvanáct). Tytéž obloučky pak přeneseme na nehybnou kružnici  $k^n$  o středu  $Q$  a poloměru  $R$ . Graficky můžeme přenesení provést pouze v některých případech. V obecném případě poměru  $\frac{r}{R}$  postupujeme přibližně tak, že tětivy  $A1 = 12 = 23 = \dots$  na  $k^h$  přenášíme do  $A1, 12, 23, \dots$  na  $k^n$ . Tím provádíme přibližné navinutí kružnice hybné na nehybnou.

Při kotálení se ztotožňují postupně body  $1, 2, \dots$  kružnice  $k^h$  s body  $1, 2, \dots$  kružnice  $k^n$ . Odvalené obloučky jsou na obr. zakresleny a u prvních dvou poloh jsou vyznačeny i příslušné jejich středové úhly  $30^\circ, 60^\circ$ . Tvořící bod epicykloidy budiž dotykový bod  $A$  obou kružnic v základní poloze (obr. 20). Ten při valení zaujme postupně polohy  $A, I, II, \dots, XII$ , při čemž na  $k^n$  měřený oblouk jest



Obr. 21. Epicykloida prostá;  $r : R = 1 : 4$ .

$\widehat{AXII} = 2\pi r$ . Jemu odpovídající středový úhel je *perioda*; po proběhnutí této periody se průběh křivky opakuje. Jednotlivá část křivky, odpovídající periodě, t. j. vzniklá odkotálením jednoho obvodu hybné kružnice, se opět nazývá *větve*. Vzniklá křivka je *epicykloida prostá*.

Trajektorie ( $s$ ) bodu  $S$  je kružnice o středu  $Q$  a poloměru  $QS = R + r$ . Body epicykloidy  $A, I, II, \dots$  a body  $A, 1, 2, \dots$  na  $k^h$  leží na soustředných kružnicích, čehož užíváme k jejich konstrukci spolu se souměrností křivky podle os  $o, o', \dots$

Tečna epicykloidy je na obr. sestrojena v bodu  $IV$ , kde okamžitý střed otáčení kotálejší se kružnice  $k^h$  (v její poloze o středu  $S_{IV}$ ) je dotykový bod  $4$ , čili  $n_{IV} \equiv 4IV, t_{IV} \perp n_{IV}$ . Tečny křivky v bodech  $A, 12, \dots$  jsou spojnice  $AQ, 12Q, \dots$ ; tečny v bodu  $VI$  - a v bodech po periodě se opakujících - jsou naopak kolmé k spojnici se středem  $Q$ .

b) *Epicykloida prodloužená* se vytvoří jako trajektorie (b) bodu  $B$  ležícího v n ě valící se kružnice  $k^h$ , který je s ní při pohybu pevně spojen. Nakreslete si sami tuto křivku.

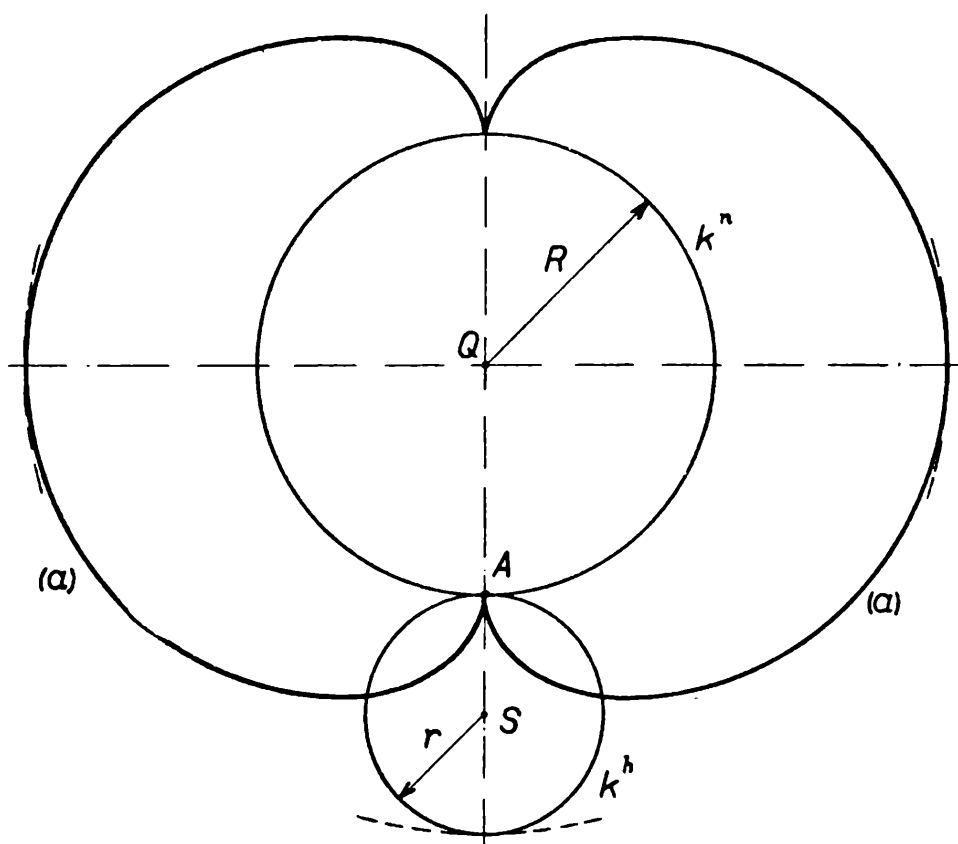
c) *Epicykloida zkrácená* se vytvoří jako dráha (c) bodu  $C$  ( $C \neq S$ ) ležícího uvnitř kotálejší se kružnice  $k^h$ , který je při pohybu s ní pevně spojen. Také tuto křivku si sami proveďte.

\* \* \*

Označíme-li  $r$  poloměr nehybné kružnice  $k^h$  a  $R$  poloměr nehybné kružnice  $k^n$ ; pak obecně poměr obvodů  $2\pi r : 2\pi R$  lze napsat ve tvaru

$$r : R = h : n \quad (1)$$

Jsou-li  $h$  a  $n$  celá čísla, znamená to, že se kružnice  $k^h$  odkotálí  $n$ -krát po  $h$  obvo-  
dech kružnice  $k^n$ , než se tvořící bod dostane do své původní počáteční polohy.



Obr. 22. Nefroida;  $r : R = 1 : 2$ .

Tak na př. budiž  $R = 4r$  (obr. 21), pak je

$$r : R = 1 : 4 ,$$

čili kružnice  $k^h$  se čtyřikrát odkotálí ze základní polohy, aby křivka (a) se uzavřela. Má tedy obecně uzavřená epicykloida  $n$  větví při  $h$  otočkách kolem středu  $Q$  nehybné kružnice.

Na obr. 22 je zobrazena prostá epicykloida pro  $r : R = 1 : 2$ , její ledvinovitý tvar dal jí i jméno, říkáme jí *nefroida*<sup>1)</sup>.

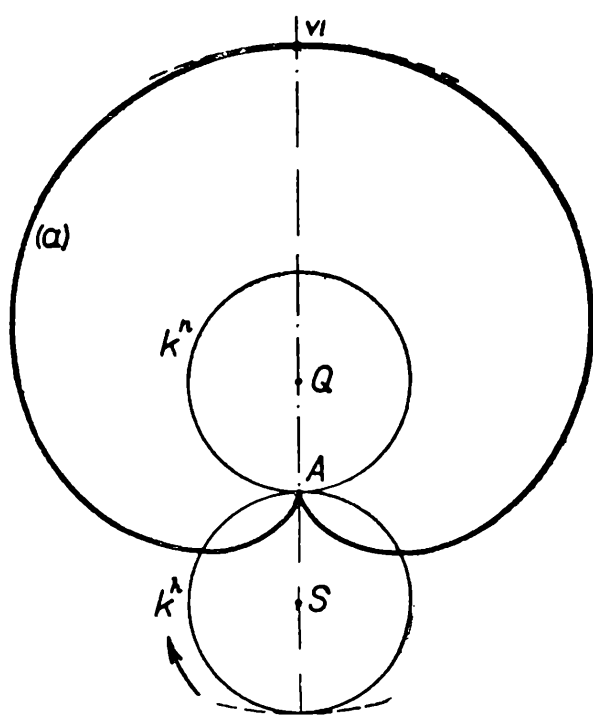
<sup>1)</sup> Nefros = ledvina (řeky).

Jiný zvláštní případ, kdy  $r = R$ , je proveden na obr. 23, vzniklá prostá epicykloida se nazývá - opět vzhledem k svému tvaru - *kardioida*<sup>2)</sup> nebo též *srdcovka*. Tato křivka se též jmenuje *Pascalova závitnice*.<sup>3)</sup>

Není-li poměr  $r : R$  číslo racionální, nemohou být ani čísla  $n$  a  $h$  v (1) čísla racionálními. Epicykloida má pak nekonečně mnoho větví a tvořící bod se nikdy nevrátí do své původní polohy, čili křivka se neuzavře.

C. *Hypocykloidy*. Kotálí-li se hybná kružnice svým vnějším obvodem po vnitřním obvodu kružnice nehybné, vznikne *hypocykloida*. Konstrukce hypocykloid, názvosloví i geometrické vlastnosti jsou podobné jako u epicykloid.

a) V obr. 24 je sestrojena prostá hypocykloida (a) jako trajektorie bodu  $A$  kružnice  $k^h$  o středu  $S$  a poloměru  $r$  jejím kotálením po vnitřním obvodu kružnice  $k^n$  o středu  $Q$  a poloměru  $R$ . Konstrukce jednotlivých bodů křivky i tečny, na př.  $t_{VIII}$ , si čtenář sám provede podle obrázku.



Obr. 23.

Pascalova závitnice čili kardioida;  $r = R$ .

Na obr. 25 je zakreslena *prostá hypocykloida* pro případ  $R = 4r$ . Také u hypocykloid platí rovnost (1), tedy v tomto případě se kružnice  $k^h$  musí čtyřikrát otočit o  $360^\circ$  kolem středu  $S$  a jednou o  $360^\circ$  kolem středu  $Q$ , aby tvořící bod  $A$  se opět dostal do výchozí polohy. Vzniklá uzavřená křivka o čtyřech shodných větvích se jmenuje *pravidelná hvězdice* čili *pravidelná asteroida*<sup>4)</sup>.

Je-li  $r : R = 1 : 3$  (obr. 26), pak vzniklá prostá hypocykloida se nazývá *Steinerova hypocykloida*<sup>5)</sup>.

Budiž dáno  $r : R = 2 : 5$  (obr. 27). Podle rovnosti (1) kružnice  $k^h$  musí vykonat pět otoček a dvakrát oběhnout po kružnici  $k^n$ , aby se křivka uzavřela.

Zajímavý případ nastane při  $r : R = 1 : 2$ , prostá hypocykloida tvořená bodem  $A$  (obr 28) se změnil v průměr kružnice  $A XII = 2R$ .

b) *Prodloužená hypocykloida* se vytvoří pohybem bodu, který leží vně kotálejší se kružnice  $k^h$ , s níž je pevně při pohybu spojen. Doporučuji čtenáři, aby si sám narýsoval jednu větev prodloužené hypocykloidy, na př. pro případ  $r : R = 1 : 3$ .

c) *Zkrácená hypocykloida* vznikne pohybem bodu, jenž je uvnitř kotálejší se

<sup>2)</sup> Cor (čti kor) = srdce (latinsky).

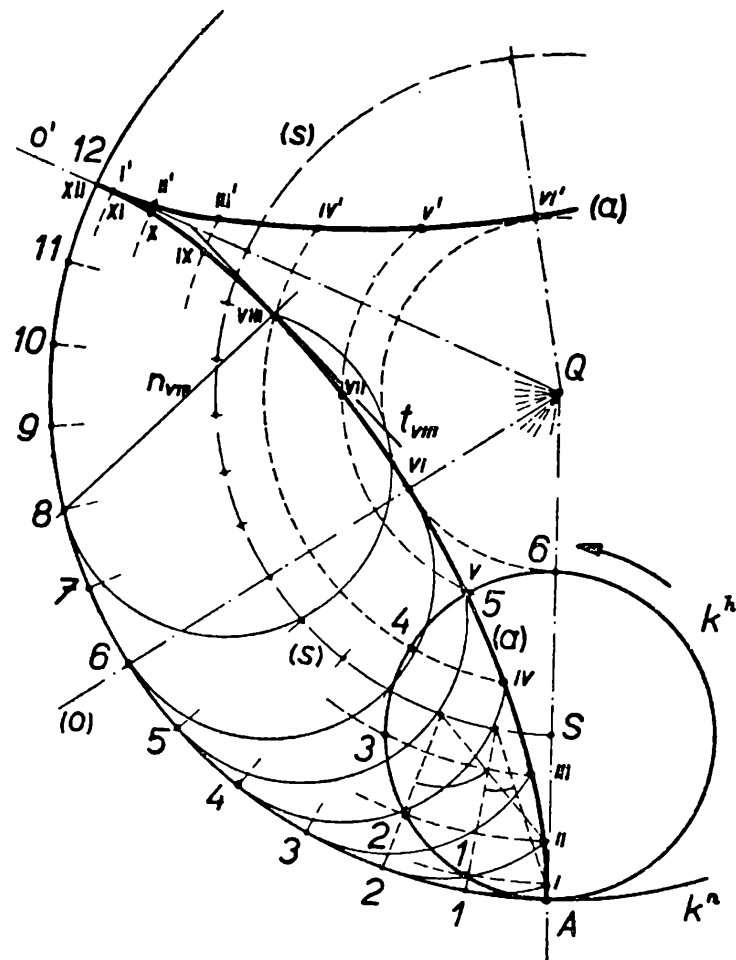
<sup>3)</sup> Blaise Pascal (čti bléz paskal) (1623–1662), filosof a matematik francouzský.

<sup>4)</sup> Astra = hvězdice (latinsky).

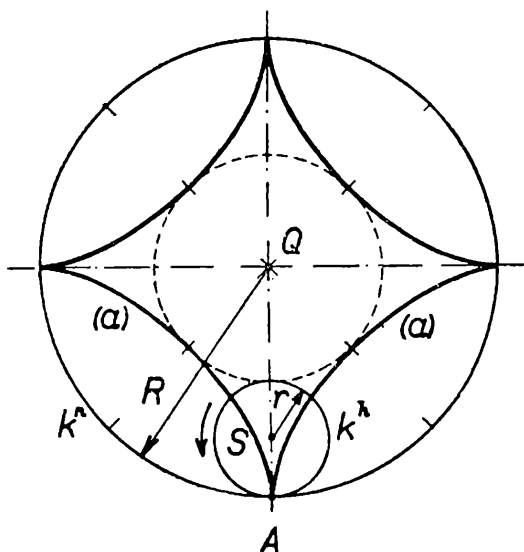
<sup>5)</sup> Jakob Steiner (1796–1863), německý matematik.

kružnice  $k^h$ , nikoliv však v jejím středu (proč?). Také sestavení této křivky nečiní potíží.

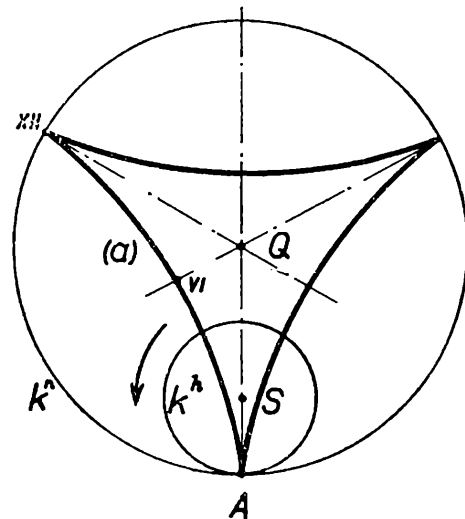
Cykloidy, epicykloidy a hypocykloidy jsou technicky důležité křivky, zvláště ve



Obr. 24. Hypocykloida prostá.



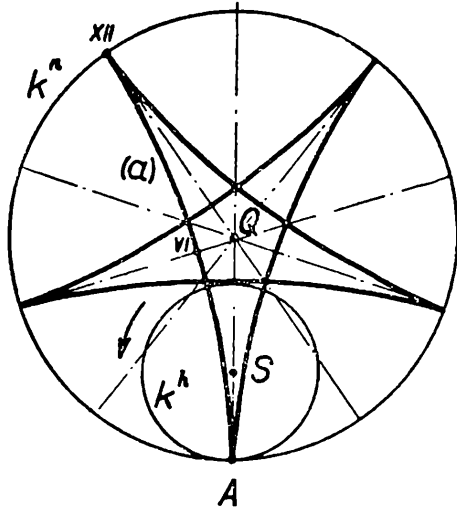
Obr. 25. Asteroida;  $r : R = 1 : 4$ .



Obr. 26. Steinerova hypocykloida;  $r : R = 1 : 3$ .

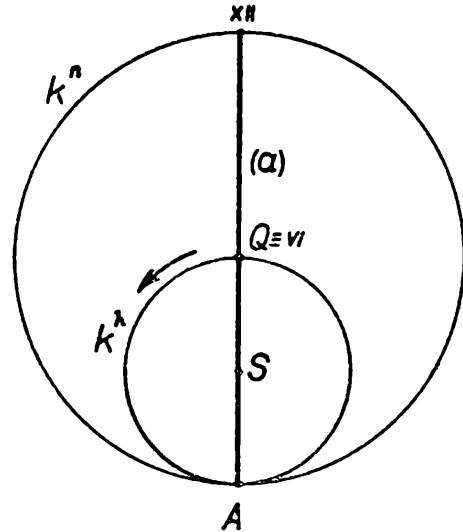
strojnické praxi. Užívá se jich jako profilových křivek válcových ploch, které tvoří boky zubů.

D. *Závěr.* Probrali jsme zde nejjednodušší základy kinematické geometrie v rovině, abyste měli podklad pro případné další studium této zajímavé a technicky použitelné části geometrie. Stručně jsme si ukázali některé způsoby pohybového vytvoření několika - pro vás vesměs nových - rovinných křivek. Časem se ještě k této látce vrátíme, abychom ji rozšířili theoreticky i abychom zdůraznili její praktické užití v různých mechanismech.



Obr. 27.

Hypocykloida prostá;  $r : R = 2 : 5$ .



Obr. 28.

Hypocykloidální pohyb při  $r : R = 1 : 2$ .

Pro podrobnější studium je vhodná kapitola „Základy kinematické geometrie“ v učebnici F. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský, *Deskriptivní geometrie*, díl I, Praha 1953, ČSAV. Až na některé podrobnosti je tato kapitola plně srozumitelná žákovi 10. třídy nebo 2. roč. školy odborné.



## Fysika

Josef Kleczek, Ondřejov:

## Planety

Náš sluneční systém sestává ze Slunce, planet a jejich měsíců, komet, zodiakálního<sup>1)</sup> světla a meteorů. Planety jsou důležitou součástí naší sluneční soustavy. V tomto článku seznámíme se s planetární rodinou všeobecně a podrobně s naší planetou - Zemí. V některém dalším čísle se budeme zabývat podrobně jednotlivými planetami.

<sup>1)</sup> Zodiak = zvěrokruh, zvířetník. (Red.)



Při pohledu dalekohledem na noční oblohu se nám všechny hvězdy jeví jako svítící body, kdežto planety vidíme jako kotoučky. Hvězdy jsou příliš vzdálené, takže ani největší z nich, pozorovány největším dalekohledem světa, neuvidíme jinak než jako svítící body. Světlo z nejbližších hvězd k nám letí několik let, kdežto z nejbližších planet jen několik minut. Planety jsou vychladlá tělesa, svítící světlem odraženým od Slunce. Hvězdy naopak jsou velmi žhavé a svítí vlastním světlem, které vzniká jadrovými reakcemi, probíhajícími v centrálních částech hvězd.

Po mnoho tisíciletí bylo známo člověku, kromě vlastní Země, těchto pět nejjasnějších planet: Merkur, Venuše, Mars, Jupiter a Saturn. Řekové a Římané je považovali za tajemná božstva. Zachovaly se nám z oněch dob mnoho legend. Tak na př. Merkur byl zván poslíčkem bohů, Venuše byla bohyní krásy a lásky, Mars pro svou tmavě červenou barvu byl považován za boha války atp. Šestá planeta, Uran, byla objevena v r. 1781 Herschellem. Byla z počátku považována za kometu. Zatím co pět prvních planet jsou objekty jasné, dobře viditelné pouhým okem, je Uran slabý a může ho spatřit jen bystré oko. Za Uranem je Neptun, jehož objev možno považovat za jedno z největších vítězství lidského ducha.

Uran podléhá vlivu gravitační přitažlivosti nejen Slunce, ale i planet, především Jupitera a Saturna. Jeho pohyby, vypočtené pomocí Newtonova zákona, se však neshodovaly se skutečnými pozorovanými pohyby. Leverrier přisoudil tyto nesrovnalosti neznámé rušící planetě. Z Uranových odchylek vypočetl její polohu a v září r. 1846 oznámil, v kterém směru bylo by možno tuto neznámou planetu pozorovat. Po tomto uveřejnění začali dne 23. září hledat uvedenou planetu berlínští astronomové. V naznačeném směru skutečně našli jasný bod, který nebyl na mapách. Během dvou dnů zjistili, že se po obloze posunul, že se tedy nejedná o stálici. Byla to planeta Neptun.

Historie se téměř opakovala při objevení Plutona. Neptun projevoval nerovnoměrnosti pohybu, které byly přisuzovány neznámé planetě. Lowellovy výpočty a systematická pozorování amerického astronoma Tombaughy vedly k objevení Plutona, jež bylo mnohem nesnadnější, protože z této planety k nám přichází 1000krát méně světla než z Neptunu. Plutona je tedy vidět jen ve velmi silných přístrojích.

Uvedli jsme jednotlivé planety v pořadí jejich vzdáleností od Slunce; Merkur je nejbližší, Pluto nejvzdálenější. Změřené vzdálenosti planet jsou ve třetím sloupci tabulky I. Vzdálenosti planet se řídí Bodeovým-Titiovým zákonem. Podle tohoto zákona však měla mezi Marsem a Jupiterem existovat ještě jedna planeta. Po objevu Urana se astronomové snažili tuto planetu najít. Sicilský astronom Piazzini skutečně objevil 1. ledna r. 1801 malou planetu, kterou nazval Ceres. Za necelé dva roky nato však Olbers objevil druhou malou planetu a nazval ji Pallas. Objev dvou malých planetek tam, kde byla očekávána jen jedna, přivedl Olberse k domněnce (t. zv. katastrofická hypotéza), že obě tělesa vznikla rozlomením větší planety. Počet objevených planetek však pozvolna vzrůstal a dnes jich známe několik tisíc. Téměř všechny obíhají mezi Marsem a Jupiterem. Tato tělesa jsou pouze úlomky, často nepravidelného tvaru, v kaž-

dém případě však velmi malá ve srovnání s ostatními planetami. Proto se nazývají **p l a n e t k a m i** (malými planetami, asteroidami).

Porovnáme rozměry planet (viz tabulku I). Země má téměř 13 000 km v průměru. Venuše je skoro stejně veliká jako Země. Průměr Marsu je menší než polovina průměru zemského a Merkuru dokonce jen  $\frac{2}{5}$ . Jupiter, Saturn, Uran a Neptun mají průměry 11krát, 9krát, 4krát a 3krát větší než Země. Naopak nejbližší planetka měří v průměru toliko 750 km; jen čtyři planety mají průměr větší než 250 km a velká většina má průměr pod 100 km.

Planety sluneční soustavy se tak rozpadají do tří přirozených skupin:

- a) pět planet podobných planetě naší: Merkur, Venuše, Země, Mars, Pluto;
- b) čtyři velké planety: Jupiter, Saturn, Uran, Neptun;
- c) početné planety.

T a b u l k a I

V této tabulce uvádíme základní data o planetách. V jejím druhém sloupci je rok objevení planety. Ve třetím je průměrná vzdálenost od Slunce v milionech km (tedy na př. Merkur je vzdálen 57 milionů km). V dalším sloupci je uvedeno, jak dlouho trvá oběhnutí planety kolem Slunce. V pátém sloupci je zdánlivý průměr kotoučku planety, měnící se podle toho, jak je Země vzdálena od planety. V posledním sloupci je průměr planety v km.

Planeta	Objevena roku	Vzdálenost (10 <sup>6</sup> km)	Oběžná doba (roky)	Zdánlivý průměr (oblouk. vteř.)	Průměr (km)
Merkur		57,85	0,24	4,5 – 12,9	5 140
Venuše		108,10	0,61	9,6 – 66,0	12 620
Země		149,50	1,00	—	12 756
Mars		227,72	1,88	3,5 – 25,7	6 860
Jupiter		777,60	11,86	30,4 – 50,1	143 600
Saturn		1 425,60	29,46	15,0 – 20,9	120 600
Uran	1781	2 868,10	84,01	3,1 – 3,7	53 400
Neptun	1846	4 494,10	164,79	2,0 – 2,2	49 700
Pluto	1930	5 907,94	248,43	0,2 – 0,3?	?

### *Naše planeta Země.*

Nám pozemšťanům se zdá Země tak veliká a její existence tak samozřejmá, že často zapomínáme na její nepatrnou roli v planetárním systému, neřku-li ve vesmíru. Pravda, pohled z některé jiné planety na Zemi a na jejího hezkého partnera - Měsíc - je bezesporu poutavý. To je však chabý důvod pro náš kosmický patriotismus. Avšak i když je Země tak bezvýznamná astronomicky, je nám nejlépe známá planeta a je podstatná pro náš život. Můžeme na jejím povrchu měřit, experimentovat, brát vzorky z hlubinných vrtů v kůře zemské, měřit změnu teploty s hloubkou i výškou nad povrchem a ověřovat si přímo svoje teorie.

V tomto článku pohovoříme o původu zemského tepla, o nitru a atmosféře Země.

*Teplota Země.* Jak známo, mají rozsáhlé oblasti naší planety mírné podnebí s průměrnou roční teplotou kolem +10 °C. Na pólech je teplota pod nulou, na rovníku dosahuje +50 °C. Příčinou těchto teplotních rozdílů je sklon slunečních

paprsků. Na rovník dopadají kolmo k povrchu, kdežto pro póly zůstává Slunce jen velmi nízko nad obzorem, pokud ovšem trvá polární den. Na jednotku povrchu na rovníku dopadá tedy mnohem více slunečního záření než na stejnou plochu na pólech. Sluneční záření je zčásti pohlceno půdou a atmosférou a přeměněno na teplo. Půda ani atmosféra si však pohlcené teplo neponechávají, neboť by tím jejich teplota neustále stoupala. Teplo, dodávané slunečními paprsky, je opět Zemí vyzařováno též ve formě infračerveného záření. Mezi přijatým a vydaným teplem je jistá rovnováha.

Všechno teplo Země však není jen původu slunečního. Je známo, že teplota stoupá s přibývajícím hloubkou, průměrně o 1 stupeň na 30 m. Tedy v hloubce 1 km je teplota kolem 40°, v hloubce 10 km by již dosáhla několika set stupňů. Jinými slovy: teplota kůry zemské klesá směrem k povrchu. Podobně jako stéká voda s hor do údolí, tak proudí teplo z teplejších míst do chladnějších. Teplo tedy neustále proudí z nitra Země k jejímu povrchu. Toto množství tepla lze spočítat a ukazuje se, že je nepatrné v porovnání se slunečním zářením, je totiž asi 10 000krát menší. Nicméně toto teplo bylo po dlouhou dobu závažným problémem pro fyziky a geofyziky.

Do nedávna panoval názor, že teplo nitra zemského je z původní zásoby, kdy ještě Země byla žhavá. Lze však dokázat, že taková zásoba by se vyčerpala vedením k povrchu a odtud vyzařením do vesmíru za několik milionů roků. Stáří Země se však udává v miliardách roků. Vznik tepla zemského nitra byl vysvětlen až po objevu radioaktivity Henri Becquerelem v roce 1896. Atomy uranu, thoria a aktinia se mění v olovo a uvolňují během této přeměny teplo. Odhaduje se, že radioaktivní prvky v 1 km<sup>3</sup> kůry produkují asi 1000 kalorií za 1 vteřinu; tedy tolik tepla, že by se jím přivedlo do varu 10 g vody 0 °C teplé. Toto neustálé uvolňování radioaktivního tepla udržuje teplotu v nitru Země a zabraňuje tak jejímu vychladnutí.

Radioaktivní procesy v kůře zemské jsou klíčem k určení jejího stáří. V laboratořích určují chemikové velmi jemnými metodami (jejich vzorky váží setiny gramu) procentuální zastoupení radioaktivních látek a jejich rozpadových produktů, především olova. Z poločasů rozpadu, zjištěných pro různé radioaktivní prvky, lze pak určit stáří horniny, z níž pochází studovaný vzorek. Tak bylo zjištěno, že zemská kůra existuje asi 3 miliardy roků. Země má za sebou tedy dlouhou historii.

*Nitro Země.* K poznání zemského nitra značně přispělo zemětřesení - metla - která od nepaměti sužovala lidstvo. Vlnění, které při zemětřesení vzniká, zaznamenává se ve vzdálených stanicích pomocí citlivých seismografů. Z těchto záznamů - seismogramů - dovedou geofyzikové vyčíst mnoho údajů o zemském nitru.

Z informací takto získaných vyplývá, že hustota zemského nitra s hloubkou pozvolna vzrůstá, ale v hloubce 2900 km náhle skočí ze 6 na 10. Potom vzrůstá dále ke středu Země, 6300 km pod povrchem. Nejzajímavějším výsledkem studia zemského nitra je poznatek, že jádro s hustotou větší než 10 je kapalné. O jakou kapalinu jde? Předpokládalo se, že jádro je ze směsi železa a niklu, zkapalněných tlakem několika milionů atmosfér, který tam panuje. Vznikla ovšem nesnáze s vý-

kladem, jaký mechanismus během vývoje oddělil železo a nikl od ostatních látek. Dnes se má za to, že se jádro složením neliší od kůry zemské. Vysokým tlakem jsou ovšem vlastnosti hornin tak pozměněny, že bychom v nich asi marně hledali podobnost s našimi skalami. Tak na př. tekuté jádro dobře vede teplo i elektřinu, kdežto jeho obal je vodičem špatným.

*Atmosféra Země.* V poslední době se často hovoří o letech na jiná nebeská tělesa. Při tom se zdůrazňuje, že raketa musí dosáhnouti rychlosti alespoň 11,3 km/s, aby unikla z gravitačního působení Země. Tato **ú n i k o v á r y c h l o s t** představuje nutný práh rychlosti, který musí překročit nejen budoucí rakety na Měsíc, ale i molekuly plynů, které opouštějí Zemi. Pro každou planetu je úniková rychlost  $v_u$ , vypočtená pomocí vzorce

$$v_u = 11,3 \sqrt{\frac{M}{R}} \text{ km/s ,}$$

T a b u l k a II

Hmota Země je ve druhém sloupci vzata za jednotku. Ve třetím sloupci je hustota vody vzata za jednotku. Také přitažlivost Země je ve čtvrtém sloupci vzata za jednotku.

Planeta	Hmota	Hustota	Přitažlivost na povrchu	Doba otočení	Úniková rychlost km/sec	Hlavní molekuly v atmosféře
Merkur	0,056	5,13	0,36	88 dnů	3,8	—
Venuše	0,82	4,92	0,87	?	10,4	CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub>
Země	1,00	5,52	1,00	23 hod 56 min	11,3	N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub> , N <sub>2</sub> O, H <sub>2</sub> O
Mars	0,11	3,99	0,38	24 hod 37 min	5,1	CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub>
Jupiter	318,35	1,25	2,54	9 hod 50 min	61	CH <sub>4</sub> , NH <sub>3</sub> , H <sub>2</sub>
Saturn	95,2	0,62	1,06	10 hod 14 min	36,7	CH <sub>4</sub> , NH <sub>3</sub> , H <sub>2</sub>
Uran	14,6	1,64	1,09	10 hod 8 min	21,6	CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub>
Neptun	17,3	2,16	1,38	15 hod 8 min	23,8	CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub>
Pluto	?	—	—	6 dní 9 hod	—	—

kde  $M$  a  $R$  je hmota a poloměr planety, vyjádřené v jednotkách Země (hmota Země = 1, poloměr Země = 1). Jestliže se nějaká molekula pohybuje rychlostí  $v_u$  nebo větší, unikne do meziplanetárního prostoru. V zemské atmosféře k takovému úniku dochází ve výškách nad 400 km, kde je tak vysoká teplota (sta stupňů), že rychlosti některých lehkých molekul (vodík a helium) jsou větší než  $v_u$ . Země ztrácí volný vodík a helium a tak si vysvětlujeme vzácnost těchto plynů v zemské atmosféře. Připomeňme, že oba plyny jsou zdaleka nejhojnějšími ve vesmíru. Také hvězdy jsou složeny z vodíku, k němuž je přimíšeno něco helia, kdežto všechny ostatní prvky jsou v mizivé menšině. Těžší molekuly se pohybují pomaleji a nedosáhnou  $v_u$ .

Kdyby ve vysokých atmosférických vrstvách byla teplota stejná jako při povrchu, rychlost pohybu vodíkových a heliových molekul by nedosahovala  $v_u$  a Země by si vodík a helium udržela. Ve stejné situaci je i Venuše. Mars při své

únikové rychlosti (viz tab. II) a teplotních podmínkách si může zachovat toliko molekulární kyslík, dusík a kysličník uhličitý, kdežto jeho volný vodík musel již dávno vyprchat do meziplanetárního prostoru. Lze dokázat, že ani jeho sloučeniny s kyslíkem (na př. voda) nemohou být příliš hojné na této planetě. Na Merkuru mohly zůstat jen nepatrné stopy atmosféry. Naopak velké planety jsou dosti masivní (velká úniková rychlost) a díky velké vzdálenosti od Slunce jsou chladné, takže si mohly své atmosféry uchovat celé, včetně velkého kvanta vodíku. Ten se slučuje s uhlíkem a dusíkem a vytváří methan, případně čpavek. O chemickém složení atmosfér planet podrobněji pohovoříme v dalším.

Studium zemské atmosféry je dnes mnohem intensivnější než dříve. Meteorologové analyzují denní sondáže vyšších atmosférických vrstev, aby zjistili souvislost mezi nimi a počasím při povrchu. Ozonová vrstva v atmosféře naší planety chrání všechno živé před smrtícím UV-zářením<sup>2)</sup> Slunce. Ozon, vytvořený slunečním zářením, slouží jako stínítko před ultrafialovými paprsky Slunce, nebezpečnými pro naše zdraví.

Kromě UV-záření zaráží atmosféra velmi rychlé částice, ať se jedná o korpuskulární záření Slunce (působící polární záře), kosmické záření z vesmíru nebo nespočetné množství drobných meteorických částic, které neustále vnikají do naší atmosféry, zažehují se ve výškách kolem 100 km a vypaří se. Studium těchto světelných jevů (lidově „padajících hvězd“), je jednou z method poznání vlastností atmosféry v oněch výškách. Do vyšších výšek zasahují přímé sondáže pomocí raket, které s sebou nesou měřící registrační přístroje. Koncem r. 1957 mají být vystřeleny umělé satelity, které budou kroužit kolem Země rychlostí asi 28 000 km/hod. Očekáváme, že tímto způsobem získáme cenné informace, mimo jiné i o atmosférických vrstvách 300—1500 km nad povrchem Země.

*(Pokračování)*

Dr O t o O b ů r k a, Brno:

## **Jaká je rychlost světla?**

Snad žádná fyzikální konstanta nemá větší důležitost ve fyzikální theorii a praxi než rychlost světla. Tato veličina má dokonce základní význam i pro vyjádření některých zákonů vesmíru. Proto vyvinuli lidé veliké úsilí, aby byla rychlost světla změřena s největší možnou přesností.

Při dřívějších měřeních vznikaly jisté rozdíly ve výsledcích, což vedlo k úvahám, že snad rychlost světla není zcela neměnná, že závisí na době, kdy je měření prováděno a na vlnové délce měřeného světla. Výsledky dosažené nejnovějšími metodami měření tomu však nenasvědčují.

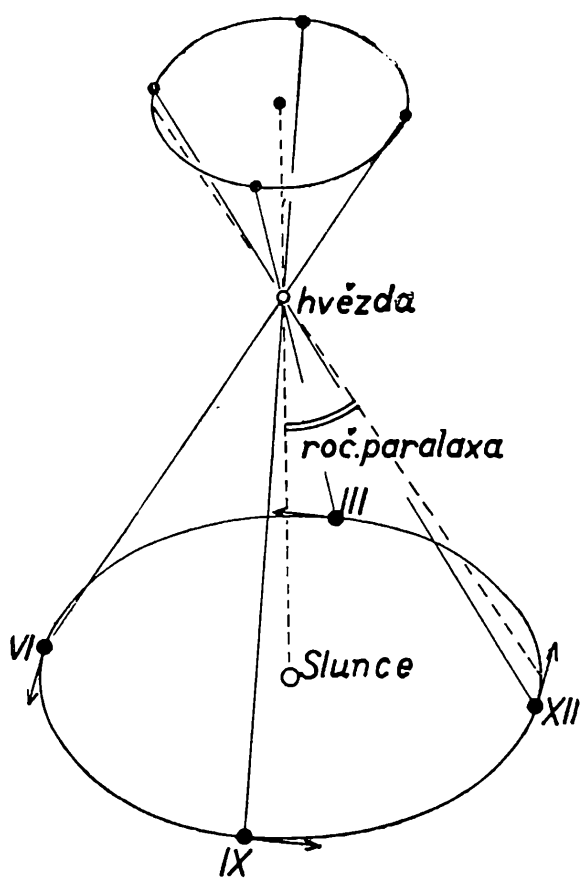
Otázkou světelné rychlosti se zabývali lidé theoreticky v různých dobách již od starověku. Před 2 400 roky vyslovil Empedokles názor, že se světlo pohybuje konečnou rychlostí. V 17. století došel Galileo Galilei k témuž názoru. Naproti

---

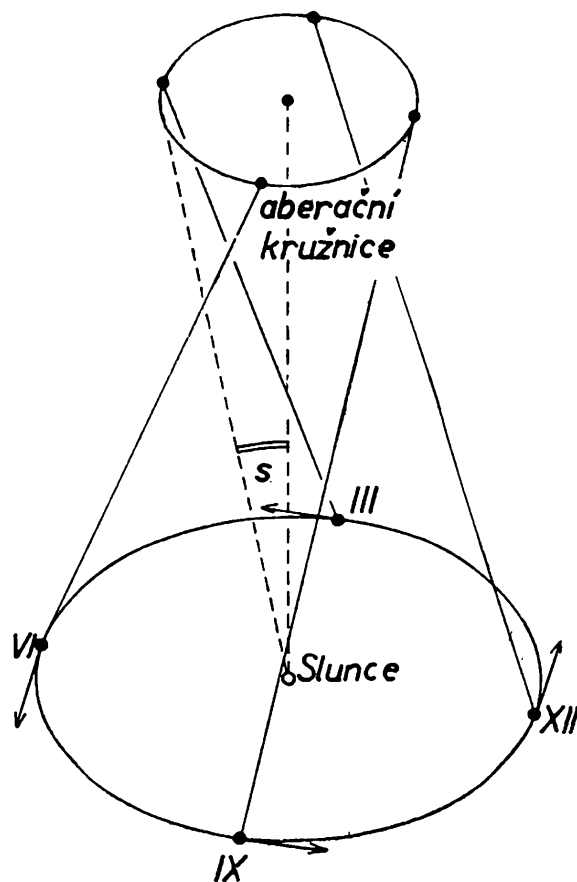
<sup>2)</sup> Ultra-violet = ultrafialový. (Red.)

tomu Descartes vyslovil domněnku, že se světlo šíří nekonečnou rychlostí a nepotřebuje tedy žádného času k překonání jakékoliv vzdálenosti.

První vědecké pokusy o určení rychlosti světla učinil v roce 1676 dánský hvězdář Olaf Römer. Na nově zřízené pařížské hvězdárně studoval pohyby měsíců Jupiterových, které byly objeveny o půl století dříve Galileem. Zjistil, že doba oběhu měsíce *Io* se mění podle toho, zda se Země od Jupitera vzdaluje nebo k němu přibližuje. Při vzdalování se doba prodlužuje, při přibližování opět zkracuje. Po několikaletém soustavném pozorování zjistil, že celkové zpoždění činí za půl roku 22 minuty. Vyslovil názor, že pozorované zpoždění je zdánlivé, je způsobeno konečnou rychlostí světla a tím, že se vzdálenost Země od Jupitera vždy po půl roku zvětšuje. Země se vzdálí od planety za tu dobu o průměr své dráhy kolem Slunce, takže světlo musí proletět o tuto dráhu více. Z toho vypočítal zhruba stejnou rychlost světla, jak ji známe dnes.



Obr. 1. Určení vzdálenosti hvězd pomocí roční paralaxy.



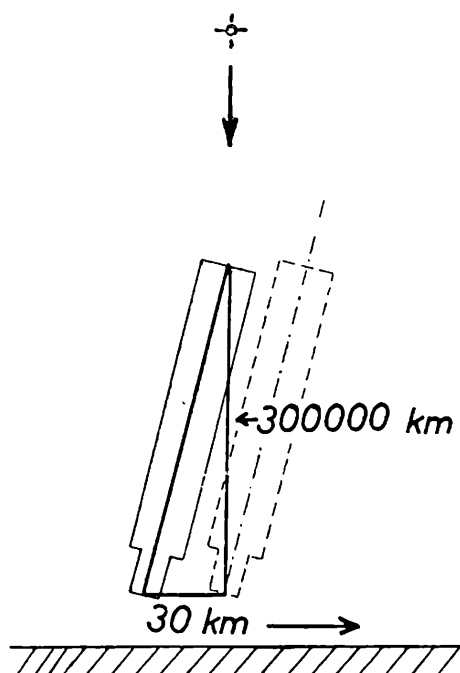
Obr. 2. Aberace stálic.

Ve stejné době zabýval se rychlostí šíření světla v různých prostředích holandský fyzik Christian Huygens, který vysvětloval lom světla na rozhraní různých prostředí tím, že se světlo v lomivém prostředí šíří menší rychlostí.

O půl století později měřil astronom greenwichské observatoře James Bradley polohy blízkých hvězd za účelem určení jejich vzdáleností. Blízké hvězdy promítají se z různých míst zemské dráhy kolem Slunce do různých poloh vzhledem k vzdáleným hvězdám. Tohoto jevu používá se k určování hvězdných vzdáleností.

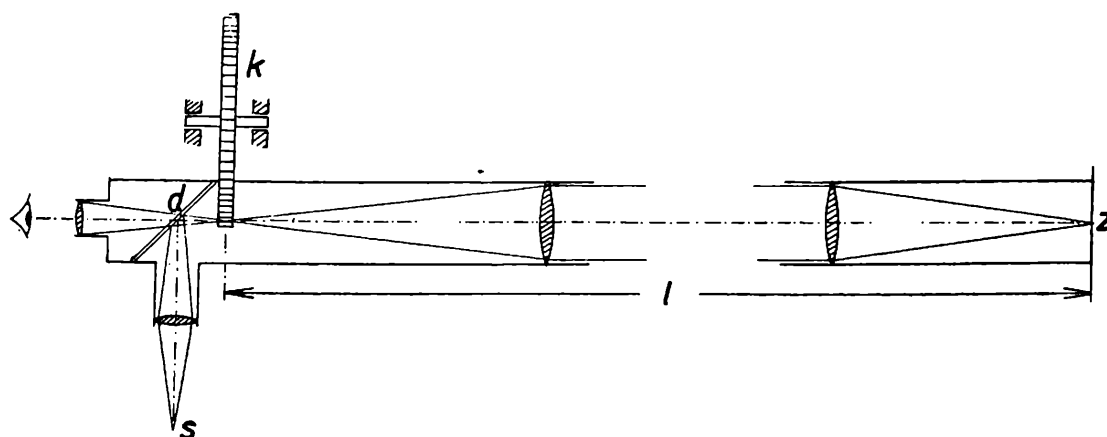
Polovině úhlu, který svírají směry k hvězdě ze dvou protilehlých míst zemské dráhy, říkáme *roční paralaxa*, protože se projeví při ročním oběhu Země kolem Slunce. (Obr. 1.)

Při opakovaných měřeních objevil však Bradley posunutí hvězd proti předpokládaným polohám. Zdálo se, jako by se hvězdy pohybovaly souhlasně se Zemí a opisovaly na obloze elipsy, takže bylo vždy nutno natočit dalekohled nepatrně ve směru pohybu Země - asi  $20\frac{1}{2}$  obloukových vteřin - aby obraz hvězdy padl do středu obrazového pole. Ukázalo se, že tento zjev, nazvaný *aberrace stálic*, je možno vysvětlit jen za předpokladu, že rychlost světla je konečná<sup>1)</sup>. Úhel v obloukové míře je dán poměrem rychlosti pohybu Země v prostoru k rychlosti světla (obr. 2 a 3). Tak došel Bradley v roce 1725 k přibližně stejné hodnotě pro rychlost světla jako dříve Römer a potvrdil vlastně jeho objev. Tyto astronomické práce vycházely z předpokladu, že je znám dostatečně přesně poloměr dráhy Země okolo Slunce.



Obr. 3. Vznik aberrace stálic.

Teprve o 125 let později, v roce 1849, změřil rychlost světla na pozemské dráze svým slavným pokusem Fizeau (obr. 4). Pomocí přístroje opatřeného rychle se otáčejícím ozubeným kolem *k* se 720 zuby, které přerušovalo světelné paprsky zdroje *s*, vysílal krátké světelné signály, které se po odrazu na zrcadle *z*, umístěném ve



Obr. 4. Fizeauova metoda ozubeného kola.

<sup>1)</sup> Podobný zjev nastává, chráníme-li se za deště deštníkem. Dopadají-li dešťové kapky svisle k zemi, držíme vstoje deštník přímo nad hlavou. Jestliže se však pohybujeme, jsme nuceni sklonit deštník poněkud před sebe, abychom chránili dolní část oděvu. Čím rychleji se pohybujeme, tím více je nutno deštník sklonit, i když dešťové kapky dopadají k zemi stále svisle. Úhel závisí na poměru rychlosti našeho pohybu k rychlosti kapek.

Podobně je tomu při zaměřování dalekohledu k hvězdě. Úhel je v obloukové míře určen poměrem rychlosti Země k rychlosti světla  $30 : 300\,000 = 0,000\,1 = \text{arc } 20,5''$ .

vzdálenosti  $l = 8\,633$  metrů, vracely do dalekohledu přístroje přes totéž ozubené kolo. Když dopadly do mezery mezi zuby, viděl pozorovatel nezeslabený obraz, dopadl-li však paprsek na stěnu zubu, neprošel odražený signál do okuláru. Fizeau měnil rychlost ozubeného kola tak dlouho, až zůstal okulár trvale temný, protože světelný paprsek dopadal stále na stěny zubů. Pomocí měření otáček ozubeného kola dostal pro rychlost světla hodnotu  $313\,000$  km za vteřinu.

Během druhé poloviny 19. století objevila se častěji potřeba přesnější znalosti rychlosti světla pro řešení různých theoretických i praktických problémů. Tehdy byla již známa Maxwellova elektromagnetická theorie světla a bylo též známo, že můžeme převádět optická měření na úlohy o elektromagnetickém poli. Z theorie také vyplynulo, že je možno měřit rychlost světla i elektrickými metodami.

Dále bylo zjištěno, že síla mezi dvěma náboji v elektrickém poli nezávisí jen na velikosti nábojů a jejich vzdálenosti, ale také na dielektrické konstantě, která je závislá na prostředí, v němž elektrické pole vzniká. Rovněž v magnetickém poli je síla mezi dvěma bodovými póly závislá na prostředí a tato závislost je určena konstantou, nazývanou *magnetická permeabilita*.

Pokud byly otázky elektrostatiky a elektromagnetismu studovány izolovaně, nebylo nutné znát vztah mezi oběma konstantami. Bylo možné volit hodnoty těchto konstant pro vakuum za jednotky. Při řešení elektromagnetických úloh objevila se nutnost znát poměr mezi těmito jednotkami, vyjádřenými v různých soustavách. Ze vztahu mezi oběma jednotkami vyplývalo podle Maxwellovy theorie elektromagnetického pole, že se v prázdňém prostoru šíří elektromagnetické vlny rychlostí  $299\,800$  km za vteřinu. Protože podle elektromagnetické theorie světla je světlo elektromagnetické vlnění, je tato hodnota také rychlost světla.

Velmi přesnou elektrickou metodou došli později Rosa a Dorsey k hodnotě  $299\,784 \pm 30$  km za vteřinu.

Z klasických optických měření rychlosti světla nejznámější jsou proslulé pokusy Michelsonovy roku 1878 metodou rotujícího zrcátka, které byly později několikrát opakovány a zdokonalovány. Měření Peaseho a Pearsona, prováděná stejnou metodou, dala v roce 1932 výsledek  $299\,774 \pm 11$  km za vteřinu.

Birge provedl v roce 1941 zhodnocení všech experimentálních prací a došel k pravděpodobné hodnotě rychlosti světla  $299\,776 \pm 4$  km za vteřinu, o níž se domníval, že je dostatečně přesná pro použití v nových důležitých oborech, v jaderné fyzice, radiové technice a radaru. Již tehdy se vyskytly hlasy, že uvedená chyba pouhých  $\pm 4$  km za vteřinu, odvozená z tak různorodého materiálu, zatíženého mnohem větší nepřesností, nebyla dost kriticky stanovena.

Po válce byla proto podniknuta řada nových pokusů o určení rychlosti světla novými, na sobě nezávislými metodami optickými i radiovými. Zjištění jejich vzájemného souhlasu nebo rozdílu má pro rozvoj fyzikální theorie značný význam.

Měření optická byla provedena přístrojem nazvaným *geodimetr*. Byl konstruován Dr Bergstrandem k měření vzdáleností dvou bodů na zemském povrchu, pro případ, že lze přesně určit dobu, kterou potřebuje světelný paprsek k cestě od jednoho místa k druhému a zpět. Přístroj je založen na starém principu, použitém v přístroji Fizeauově, jenže k přerušení světelného paprsku užívá elektronického



zařízení místo mechanického. Je v něm používán Kerrův článek. Známe-li vzdálenost mezi dvěma body s dostatečnou přesností, můžeme naopak určit rychlost světla. Měření geodimetrem byla prováděna na dvou tratích přesně změřených pomocí invarových měřidel  $11\,260,677 \pm 0,003$  metrů a  $24\,828,626 \pm 0,010$  metrů. Naměřená rychlost světla činila  $299\,792,4$  a  $299\,792,2$  km za vteřinu. Ve Švédsku Schöldstiöm došel při měření k hodnotě  $299\,792,4$  km za vteřinu. Pravděpodobná chyba uvedených měření činí asi  $0,4$  km za vteřinu. Celá řada dalších pokusů pomocí radaru, uzavřeného resonátoru, měření v úzkém spektrálním oboru a pomocí radiového interferometru dala výsledky téměř stejné.

L. Essen, odborník v oboru přesného měření frekvencí, zhodnotil všechny nové práce a ze šestnácti měření rychlosti světla, podniknutých v letech 1948 až 1954 různými metodami, došel k nejpravděpodobnější hodnotě

$$299\,793,0 \pm 0,5 \text{ km za vteřinu.}$$

Ve výzkumu rychlosti světla není řečeno poslední slovo, lze však předpokládat, že další experimentální i theoretické práce změni jen nepatrně dosud dosažené výsledky.

E v ž e n Ř í m a n, Praha:

## Dimenzionálna správnosť fyzikálnych rovníc

### 1. Fyzikálne veličiny. Jednotkové sústavy.

Pred začiatkom vlastného výkladu zopakujeme niektoré dôležité pojmy.

Slovom *veličina* rozumieme pojem, o ktorom možno povedať, že má neakú veľkosť (kvantitu).

Vo fyzike sa však stretávame s mnohými a rozličnými fyzikálnymi veličinami (teplota, váha, plošný obsah, rýchlosť atď.), ktoré treba merať (t. j. porovnávať) alebo s ktorými treba počítať. Na to potrebujeme pre každú fyzikálnu veličinu stanoviť jej „mieru“ čiže *jednotku*. Podľa fyzika Maxwella stanovme

$$\text{fyzikálna veličina} = \text{číslná hodnota krát jednotka.}$$

Bolo by možné pre každú fyzikálnu veličinu zvoliť celkom ľubovoľnú jednotku, pravdaže by to musela byť veličina tohože druhu. To by však bolo veľmi neprehľadné a každý fyzikálny zákon by sa tým veľmi skomplikoval, pretože by musel obsahovať rozličné číselné konstanty. Preto len pre niekoľko málo *základných veličín* bola jednotka stanovená ľubovoľne a pre všetky ostatné fyzikálne veličiny (nazývame ich *odvodené*) sa určí jednotka jednoduchým dosadením základných - alebo už známych - jednotiek do definujúceho vzorca.

Od roku 1950 je u nás zavedená a vo fyzike sa zásadne užíva jednotková sústava zv. M K S A (Giorgiova), ktorá má päť základných veličín a toľkože základných jednotiek. Sú to:

Základná veličina	značená písmenom	má za základnú jednotku	ktorej značka je
dĺžka ( <i>longitudo</i> )	<i>l</i>	meter	[m]
hmota ( <i>materia</i> )	<i>m</i>	kilogram	[kg]
čas ( <i>tempus</i> )	<i>t</i>	sekunda	[s]
teplota ( <i>thermos</i> )	θ (theta)	stupeň teplotný	[grad]
elektrický prúd ( <i>Intenzita</i> )	<i>I</i>	ampér	[A]

Prehľad najdôležitejších fyzikálnych veličín o d v o d e n ý c h a ich jednotiek bude uvedený v ďalšom. Zatým zopakujme len tri najdôležitejšie:

*Sila* je príčina zmeny tvaru, objemu alebo zmeny pohybu. Podľa Newtonovho zákona sily sa definuje:

*Sila* = súčinu hmoty a zrýchlenia, ktoré spôsobila. Matematicky

$$F = m a$$

Tento vzorec je najdôležitejším vzorcom celej fyziky. Pretože jednotkou hmoty je 1 [kg], jednotkou urýchlenia  $1 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 1 [\text{m s}^{-2}]$ , bude jednotkou sily ich súčin, t. j.  $1 [\text{kg}] \cdot 1 [\text{m s}^{-2}] = [\text{kg m s}^{-2}] = \text{n e w t o n} = [\text{N}]$  (na pamiatku slávneho fyzika I. Newtona)<sup>1)</sup>.

Najdôležitejšou silou je *váha* (*Gravitudo*), označovaná písmenom *G*, to je sila, ktorou naša Zem priťahuje hmotu telesa. Je to jediná zo síl, ktorá je závislá len od hmoty a od žiadnych iných vlastností telesa. Váha sa určí vzťahom  $G = m g$ , kde *g* = gravitačné zrýchlenie (u nás 9,81 [m s<sup>-2</sup>]). Váha telesa o hmote 1 kilogramu, čiže sila, ktorou naša Zem priťahuje teleso o hmote 1 kilogramu, bude teda  $1 [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{m s}^{-2}] = 9,81 [\text{kg m s}^{-2}] = 9,81 [\text{N}]$ . Táto sila, ktorú nazývame tiež *váhový kilogram* čiže *kilopond*, sa označuje [kp] alebo [kg\*] a je základnou jednotkou v staršej jednotkovej sústave zvanej *sústava statická*. Platí pre ňu prevodný vzťah:

$$1 [\text{kp}] = 9,81 [\text{N}] \doteq 10 [\text{N}] \text{ a naopak } 1 [\text{N}] = \frac{1}{9,81} [\text{kp}] \doteq \frac{1}{10} [\text{kp}]$$

Dnešná fyzika, ktorá sa snaží pracovať čím úspornejšie, nemá rada jednotky iných sústav, pretože každá jednotka nepatriaca do sústavy MKSA značí pre fyzikálne výpočty nutnosť zapamätať si - alebo aspoň poznamenať - jeden nový prevodný vzťah. Okrem jednotky [kp] ide hlavne o tieto: [HP], [kpm], kalória,

<sup>1)</sup> Z matematiky je známy pojem mocniny so záporným exponentom, ktorých vo fyzike veľmi často užívame. Na vysvetlenie len toľko: Miesto zlomku  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  možno písať výraz

$[\text{m s}^{-2}]$ ; podobne miesto  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  píšeme  $[\text{m s}^{-1}]$ , miesto  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  sa píše  $[\text{kg m}^{-3}]$  a podobne.

Tento spôsob písania má veľa výhod, najmä tú, že sa môžeme vyhnúť zlomkom hlavne zloženým a že pri logaritmovaní ihneď vieme charakteristiku.

kilowatthodina a jednotky pre merný tlak, t. j. atmosféra fyzikálna i technická, 1 [mm] stĺpca rtuťového alebo vodného, teplotný stupeň Fahrenheita a konečne aj všetky jednotky bývalej sústavy CGS počínajúc dynamom a ergom. Všetky menované jednotky dnes nepotrebujeme a pokiaľ sa s nimi stretáme - cudzia a staršia literatúra ich užíva, ďalej niektoré meracie prístroje sú v nich kalibrované - je najlepší postup ten, že ich ihneď prevedieme do sústavy MKSA, podobne ako to robíme, keď niekde nájdeme údaje v yardoch, stopách, librách, lakťoch, Fahrenheitoých stupňoch atď. Vyhneme sa tým zaťažovaniu pamäti a skomplikovaniu výpočtov.

Poznámka: Niektoré aplikované technické vedy (statika a i.) užívajú miesto presného názvu „váhový kilogram“ pre jednotku sily stručne len slovo „kilogram“ a označujú ho značkou [kg] (bez hviezdičky!). Dôvod je ten, že tieto vedy sa zaoberajú len silami a hmota sa u nich nevyskytuje. Vo fyzike by bolo veľkou chybou nerobiť rozdiel medzi kilogramom (t. j. kilogramom hmotným) označeným [kg] a kilogramom váhovým čiže silovým, ktorý preto radšej nazveme slovom „kilopond“, čiže  $[kg^*] = [kp]$ . Preto vo fyzikálnych výpočtoch musíme každý výraz, v ktorom sa vyskytne „váhový kilogram“ = kilopond, označovať hviezdičkou, teda  $[kg^*]$ . Týka sa to aj jednotky pre prácu  $[kg^*m] = \text{kilogramometer váhový} = \text{kilopondmeter}$ , alebo pre pracovný výkon, t. j.  $\left[ \frac{kg^*m}{s} \right]$

Ak neurobíme v značke  $[kg^*m]$  hviezdičku píšuc len [kgm], potom táto skratka značí nie silu, ale súčin hmoty a dĺžky, čo vedie k ťažkým omylom. Najlepšie je neužívať vo fyzike vôbec slovo „váhový kilogram“, ale zásadne a všade len kilopond. Potom nemusíme ani užívať hviezdičky.

Práca vykonaná silou  $F$ , ktorá pôsobí po dráhe  $s$  (svierajúcej so silou úhol  $\alpha$ ), sa určí vzťahom:

$$\text{Práca} = A = F s \cos \alpha$$

slovami: Práca sa rovná súčinu posunutia a priemetu sily do jeho smeru.

Ak sila aj dráha (= posunutie) majú tenže smer, vtedy  $\alpha = 0$  čiže  $\cos \alpha = 1$  a máme

$$A = F \cdot s$$

slovami Práca = súčinu sily a dráhy.

Pretože jednotkou sily je 1 [N], jednotkou dráhy 1 [m], bude jednotkou práce v sústave MKSA súčin oboch, t. j.

[N · m] = newtonmeter = joule = wattsekunda =  $[kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}]$ . Jednotky iných sústav sú kilopondmeter, erg a v náuke o teple kalória. Vyhneme sa im týmito prevodnými vzťahmi:

$$\begin{aligned} \text{kilopondmeter} = [kpm] = [kg^*m] = 9,81 [J] & \Rightarrow [J] = \frac{1}{9,81} [kpm] \doteq \\ & \doteq \frac{1}{10} [kpm],^2) \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Značku  $\Rightarrow$  čítajte „z toho plynie“

$$\text{erg} = 10^{-7} [\text{J}] \Rightarrow [\text{J}] = \frac{1}{10^{-7}} \text{ ergov} = 10^7 \text{ ergov},$$

$$\text{kalória} = [\text{cal}] \doteq 4,2 [\text{J}] \Rightarrow [\text{J}] \doteq \frac{1}{4,2} [\text{cal}] = 0,24 [\text{cal}],$$

$$\text{kilowatthodina} = [\text{kWh}] = [10^3 \text{ W} \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}] = 3,6 \cdot 10^6 [\text{Ws}] = 3,6 \cdot 10^6 [\text{J}].$$

Pracovný výkon  $P$  sa definuje ako pomer práce  $A$  a času  $t$ , potrebného k jej vykonaniu, čiže:

$$P = \text{výkon} = \frac{\text{práca}}{\text{čas}} = \frac{A}{t};$$

z toho plynie nazpät': práca =  $A$  = výkon krát čas =  $P t$

Jednotkou výkonu je jednotka práce lomená jednotkou času, t. j.  $\frac{\text{joule}}{\text{sek}} = \text{watt}$ ,

$$\text{značkami} \left[ \frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = [\text{W}].$$

Jednotkám nepatriacim do našej sústavy MKSA sa vyhneme prevodnými vzťahmi

$$\frac{\text{erg}}{\text{sek}} = [\text{erg s}^{-1}] = 10^{-7} [\text{W}] \Rightarrow 1 [\text{W}] = 10^7 \left[ \frac{\text{erg}}{\text{s}} \right],$$

$$\text{kilopondmeter za sekundu} = \left[ \frac{\text{kpm}}{\text{s}} \right] = [\text{kpm s}^{-1}] \doteq 9,81 \left[ \frac{\text{J}}{\text{s}} \right] = 9,81 [\text{W}],$$

$$\text{kôň} = [\text{HP}] = 75 \left[ \frac{\text{kpm}}{\text{s}} \right] = 75 \cdot 9,81 [\text{W}] = 736 [\text{W}] = 0,736 [\text{kW}] \doteq$$

$$\doteq \frac{3}{4} [\text{kW}] \Rightarrow 1 [\text{kW}] \doteq \frac{4}{3} [\text{HP}].$$

## 2. Prehľad najdôležitejších fyzikálnych veličín a ich jednotiek.

Fyzikálna veličina (iné názvy)	Jej slovná definícia	Značka	Definujúci vzorec	Jednotka v súst. MKSA (resp. „rozmer“)
Dĺžka ( <i>longitudo</i> )	zákl. veličina	$l$	—	meter = [m]
plošný obsah (= plocha = <i>Superficies</i> )	—	$S$	$S_{\text{obd.}} = a b$	[m <sup>2</sup> ]
objem ( <i>Volumen</i> )	—	$V$	$V_{\text{kvádra}} = abc$	[m <sup>3</sup> ]
hmota ( <i>massa</i> )	zákl. veličina	$m$	—	[kg] = kilogram
hustota (spec. hmota = <i>densitas</i> )	pomer hmoty a objemu	$\delta$	$\delta = \frac{m}{V}$	[kg m <sup>-3</sup> ]
čas ( <i>tempus</i> )	zákl. veličina	$t$	—	sekunda = [s]

Fyzikálna veličina (iné názvy)	Jej slovná definícia	Značka	Definujúci vzorec	Jednotka v súst. MKSA (resp. „rozmer“)
rýchlosť postupná (velocitas)	pomer prírastkov dráhy a času		$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	[m s <sup>-1</sup> ]
zrýchlenie postupné (= accelerácia)	pomer prírastkov rýchlosti a času		$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	[m s <sup>-2</sup> ]
s i l a (Fors = sila)	súčin hmoty a zrýchlenia, ktoré spôsobila	<i>F</i>	$F = ma$ (najdôl. vzorec fyziky!)	[kg m s <sup>-2</sup> ] = = [N] = newton
P r á c a (akcia = činnosť)	súčin posunutia a priemetu sily do jeho smeru	<i>A</i>	$A = F s \cos \alpha$	[N m] = [kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ] = = [J] = joule = = [Ws] = watt- sekunda
Pracovný výkon (= Power)	pomer práce a času v ktorom bola vykonaná	<i>P</i>	$P = \frac{A}{t}$	$\left[\frac{J}{s}\right] = [W] =$ = watt = [kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]
tlak merný (= napätie) (pressio)	pomer sily a plochy, na ktorú sila pôsobí	<i>p</i>	$p = \frac{F}{S}$	[N m <sup>-2</sup> ]
teplota (thermos = teplý)	zákl. veličina	$\vartheta$	—	[°C] = [grad]
t e p l o (Quantitas = množstvo)	pohybová energia molekúl	<i>Q</i>	—	[J] = 0,24 [cal]
špecifické teplo (calor = teplo)	pomer dodaného tepla ku súčinu hmoty a prírastku teploty		$c = \frac{\Delta Q}{m (\vartheta_2 - \vartheta_1)}$	[J kg <sup>-1</sup> grad <sup>-1</sup> ]
skupenské teplo (latentné = skryté)	pomer dodaného tepla a hmoty	<i>l</i>	$l = \frac{\Delta Q}{m}$	[J kg <sup>-1</sup> ]
elektr. množstvo (= náboj) (quantum = množstvo)	zákl. veličina	<i>q</i>	—	[As] = ampér- sekunda = cou- lomb = [C]
elektr. napätie (potenciál) (urgeo = nutím)	pomer práce a prenášaného el. množstva	<i>U</i>	$U = \frac{A}{q}$	$\left[\frac{J}{As}\right] = [V] = \text{volt}$
elektr. prúd (Intenzita = mohutnosť)	pomer elektr. množstva a času	<i>I</i>	$I = \frac{q}{t}$	$\left[\frac{As}{s}\right] = [A] = \text{ampér}$
elektr. odpor (Resistantia = odpor)	pomer napätia a pretekajúceho prúdu	<i>R</i>	$R = \frac{U}{I}$	$\left[\frac{V}{A}\right] = [VA^{-1}] =$ = 'Ω' = ohm

### 3. Označovanie fyzikálnych jednotiek.

Pri fyzikálnych výpočtoch a štúdiu fyzikálnych vzorcov nastávajú často ťažké omyly, zapríčinené tým, že to isté písmeno značí dva celkom odlišné pojmy. Na pr. písmeno „m“ znamená, ak je tlačené kurzívou, h m o t u (massa), alebo - ak je tlačené stojatými písmenami - značí m e t e r (t. j. jednotku dĺžky). Preto pamätajte: V tlačенých učebniciach a v tlačennom texte písmená vysádzané

*kurzívou* (t. j. ležate) značia fyzikálne veličiny všeobecne,  
s t o j a t o (ako obyčajný text) značia fyzikálne jednotky.

Teda písmená *m*, *g*, *h*, *V*, *s* značia postupne:

*m* = hmota (massa); *g* = gravitačné zrýchlenie; *h* = hĺbka; *V* = objem (volumen);  
*s* = dráha (spatium), ale písmená *m*, *g*, *h*, *V*, *s* (vysádzané stojato) značia  
*m* = meter (j e d n o t k a dĺžky); *g* = gram (j e d n o t k a hmoty); *h* = hodina  
(j e d n o t k a času); *V* = volt (j e d n o t k a elektrického napätia); *s* = sekunda  
(j e d n o t k a času).

V tom je určitá ťažkosť: pri čítaní vysádzaného textu treba si všímať tvaru písmen vo vzorcoch a výkladoch a uvedomovať, čo značí kurzíva a čo stojatá sadzba. Ale oveľa väčšie ťažkosti vznikajú pri písaní r u č n o m (alebo na písacom stroji), kde tiež treba rozlišovať fyzikálne veličiny a fyzikálne jednotky. Najjednoduchší spôsob, akým sa vyvarujeme všetkých omylov pri štúdiu fyziky, je tento:

*Všetky fyzikálne jednotky zásadne a vždy označíme hranatou zátvorkou.*

Aby si čitateľ navyknul užívať tohoto spôsobu a presvedčil sa, že je veľmi výhodný a snadný, budeme v ďalšom stále fyzikálne jednotky označovať hranatou zátvorkou (hoci - ako vieme - by v tlači stačilo rozlišovanie kurzívou a stojatou sadzbou) a fyzikálne veličiny akejkoľvek veľkosti - b e z zátvorky. Teda: objem = *V*, volt = [V]; dráha = *s*, sekunda = [s]; energia = *W*, watt (jednotka výkonu) = [W]; výška = *h*, hodina = [h]; omyl je teraz vylúčený!

*Príklad 1.* Lokomotíva o výkone  $P = 1\,500$  [kW] ide rýchlosťou  $100 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$

akou veľkou silou tiahne vlak?

**Riešenie:** Prejdime ihneď do sústavy MKSA:  $P = 1\,500$  [kW] =  
 $= 1\,500 \cdot 10^3$  [W],  $v = 100 \left[ \frac{\text{km}}{\text{hod}} \right] = 10^2 \frac{10^3}{3600} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \frac{10^3}{36} [\text{ms}^{-1}]$ .

$$\text{Výkon} = P = \frac{A}{t} = \frac{\text{práca}}{\text{čas}} = \frac{\text{сила krát dráha}}{\text{čas}} = \frac{F s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F v,$$

pretože  $\frac{s}{t} = v$ . Z toho plynie:

$$\begin{aligned} \text{Sila} = F &= \frac{P}{v} = \frac{1\,500 \cdot 10^3 [\text{W}]}{\frac{10^3}{36} [\text{m s}^{-1}]} = 54\,000 \left[ \frac{\text{J s}^{-1}}{\text{m s}^{-1}} \right] = 54\,000 \left[ \frac{\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}}{\text{m}} \right] = \\ &= 54\,000 [\text{kg m s}^{-2}] = 54\,000 [\text{N}] = 54\,000 \text{ newtonov} \doteq 5\,400 [\text{kp}]. \end{aligned}$$

*Príklad 2.* Akási fyzikálna veličina vyšla v jednotkách  $\frac{\Omega \text{cal}}{\text{V}^2}$ . Prevedením na základné jednotky určite, o ktorú veličinu ide!

**Riešenie.** Potrebne vzťahy sú:  $[\Omega] = \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right]$ ;  $[\text{cal}] = 4,2 [\text{J}] = 4,2 [\text{VAs}]$ .

Potom dosadením dostaneme  $\left[ \frac{\Omega \text{cal}}{\text{V}^2} \right] = \left[ \frac{\text{V A}^{-1} \cdot 4,2 \text{ V A s}}{\text{V}^2} \right] = 4,2 [\text{s}]$ . Daná veličina je čas.

#### 4. Dimenzionálna správnosť.

Každá správna fyzikálna rovnica musí mať tú vlastnosť, že jej obidve strany majú ten istý rozmer (dimenziu), t. j. obidve strany sú vyjadrené v tejže fyzikálnej jednotke.

Rozmerom (t. j. dimenziou) fyzikálnej veličiny budeme kvôli zjednodušeniu<sup>3)</sup> rozumieť jednotku príslušnej fyzikálnej veličiny, vypísanú v základných jednotkách niektorej sústavy (najradšej sústavy MKS). Teda rozmerom pre rýchlosť  $v$  je  $[\text{m s}^{-1}]$ , rozmerom objemu  $V$  je  $[\text{m}^3]$ , rozmerom hmoty bude  $[\text{kg}]$ , rozmerom sily  $F$  bude  $[\text{N}] = [\text{kg m s}^{-2}]$ , zrýchlenie má rozmer  $[\text{m s}^{-2}]$ .

*Príklad 3.* Overte dimenzionálnu správnosť rovnice  $T = 2\pi \sqrt{\frac{r m}{F}}$ , kde  $T =$  doba obehu,  $r =$  polomer,  $m =$  hmota,  $F =$  sila!

**Riešenie.** Overiť dimenzionálnu správnosť rovnice znamená ukázať, že rozmer obidvoch strán rovnice je ten istý. K tomuto úkonu budeme užívať ako symbol t. zv. „zloženú zátvorku“, t. j.  $\left\{ \right\}$ , čo budeme čítať: „Rozmer výrazu ... je“. Výpočet sa urobí tak, že za všetky veličiny v týchto zátvorkách uzavreté dosadíme ich rozmer, pričom eventuelné, vo vzorci sa nachádzajúce, číselné hodnoty (ako  $\pi$ , 2, 10 atď.) jednoducho vynecháme, veď sú to čísla bezrozmerné. Rozmerom veličiny rozumieme jednotku príslušnej veličiny, vyjadrenú v základných jednotkách sústavy MKSA. Tu na príklad sa vyskytuje sila  $F$ , ktorej jednotkou je  $[\text{N}] =$  newton, ale ten musíme previesť na základné jednotky  $[\text{kg}]$ ,  $[\text{m}]$ ,  $[\text{s}]$ , a to podľa vzťahu  $F = m a$  (najdôležitejší vzorec fyziky), čiže: newton = jednotka hmoty (t. j.  $[\text{kg}]$ ) krát jednotka urýchlenia (t. j.  $[\text{m s}^{-2}]$ ), čiže  $1 [\text{N}] = [\text{kg m s}^{-2}]$ . Náš vzťah znie teda

$$\left\{ T \right\} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{r m}{F}} \right\} = \sqrt{\frac{\text{m kg}}{\text{kg m s}^{-2}}} = [\sqrt{\text{s}^2}] = [\text{s}] = \text{sekunda},$$

čo je správny rozmer veličiny  $T$ . Vidno, že obidve strany daného vzorca majú rozmer  $[\text{s}]$ , čiže daný vzorec je dimenzionálne správny.

<sup>3)</sup> Často se užíva pojem „rozmer“ fyzikálnej veličiny v trochu inom tvare: Povie sa na pr. zrýchlenie má rozmer (dĺžka)<sup>1</sup> krát (čas)<sup>-2</sup> čiže značkami  $L T^{-2}$ . Používa sa týchto znakov pre rozmery základných veličín: Pre hmotu znak  $M$  (z lat. massa), pre dĺžku znak  $L$  (longitudo), pre čas znak  $T$  (tempus), pre stupeň teploty znak grad (lat. gradus = stupeň, krok). Rozmer sily teda bude v tomto označení vyjadrený  $M L T^{-2}$ , kým my užívame  $[\text{kg m s}^{-2}]$ . Vidno, že odlišnosť je teda iba formálna.

*Príklad 4.* Energia, ktorá je ukrytá v kondenzátore (o kapacite  $C$ ) nabitom na napätie  $U$ , je daná vzorcom  $W = \frac{1}{2} C U^2$ . Zistite pomocou tohoto vzorca jednotku pre kapacitu!

**Riešenie.** Potrebne vzťahy:

1. Energia (= schopnosť hmoty konať prácu) sa udáva v jednotkách zv. [J] = = joule = [V A s].

2. Elektrické napätie sa udáva vo voltoch.

Pretože z daného vzorca plynie  $C = \frac{2W}{U^2}$  a pretože pri určovaní jednotky, resp. rozmeru možno zvláštne čísla (v našom prípade 2, inokedy  $\pi$  atď.) jednoducho vynechať, jest jednotka kapacity

$$\left\{ C \right\} = \left\{ \frac{2W}{U^2} \right\} = \left[ \frac{\text{J}}{\text{V}^2} \right] = \left[ \frac{\text{V A s}}{\text{V}^2} \right] = \left[ \frac{\text{A s}}{\text{V}} \right]$$

Výsledok: Jednotkou kapacity je  $\left[ \frac{\text{As}}{\text{V}} \right]$ , zvaná - ako vieme - f a r a d.

*Príklad 5.* Kapacita kondenzátora sa určí v sústave MKSA vzorcom  $C = \frac{\epsilon S}{h}$ , kde  $S$  = plošný obsah jedného polepu,  $h$  = hrúbka dielektrika (= izolačnej vrstvy),  $\epsilon$  značí t. zv. dielektrickú konštantu užitého izolantu a  $C$  = kapacita (ktorej jednotkou je 1 [F] = farad =  $\left[ \frac{\text{A s}}{\text{V}} \right] = [\text{A s V}^{-1}]$ ). Zistite pomocou tohoto vzorca jednotku pre  $\epsilon$ !

**Riešenie.** Rozmer veličiny  $S$  je  $[\text{m}^2]$ , čiže symbolicky  $\{S\} = [\text{m}^2]$ ; veličina  $h$  má rozmer [m], t. j.  $\{h\} = [\text{m}]$ . Z daného vzťahu  $\Rightarrow \epsilon = \frac{hC}{S}$ , čiže

$$\left\{ \epsilon \right\} = \left\{ \frac{hC}{S} \right\} = \left[ \frac{\text{m F}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \right]$$

Výsledok: Jednotkou dielektrickej konštanty  $\epsilon$  v sústave MKSA je  $\left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right] = = \left[ \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \right]$

*Príklad 6.* Dôležitým prístrojom v elektrotechnike je t. zv. kondenzátor, t. j. dve vodivé dosky oddelené izolačnou vrstvou zvanou dielektrikom. Elektrickým množstvom  $q$  nabije sa kondenzátor na napätie  $U$ , ktoré je priamo úmerné nabíjajúcemu množstvu  $q$ , takže platí dôležitá rovnica  $q = C U$ . Konštantu priamej úmernosti v tomto vzorci sa volá k a p a c i t a kondenzátora. Zistite pomocou tejto rovnice jednotku kapacity a jej rozmer!

**Riešenie.** Elektrické množstvo (= náboj)  $q$  sa udáva v jednotkách zvaných



a m p é r s e k u n d a, t. j. [As]; symbolicky písané  $\{q\} = [As]$ . Elektrické napätie je vo voltoch, čiže  $\{U\} = [V]$ .

Z danej rovnice  $q = C U$  plynie  $C = \frac{q}{U}$ , takže rozmer kapacity bude  $\{C\} = \left\{\frac{q}{U}\right\} = \left[\frac{As}{V}\right]$ . Násobme čitateľa i menovateľa činiteľom [As], aby sme užitím vzťahu  $[V A s] = \text{joule} = [J] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$  odstránili jednotku „volt“, ktorá nie je veličinou základnou, čím bude:

$$\{C\} = \left[\frac{As}{V}\right] \cdot \left[\frac{As}{As}\right] = \left[\frac{A^2 s^2}{V A s}\right] = \left[\frac{A^2 s^2}{\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}}\right] = [A^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^4].$$

V ý s l e d o k. J e d n o t k o u kapacity je  $\left[\frac{As}{V}\right]$ , ktorá dostala zvláštne meno f a r a d; skratka je [F]. Platí teda  $1 [F] = [A s V^{-1}]$ . R o z m e r kapacity jest  $[A^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^4]$ .

P o z n á m k y. a) Radno si všimnúť, že podľa nášeho dohovoru je r o z m e r totožný s jednotkou vyjadrenou v základných jednotkách fyzikálnych, ktorými sú: meter, kilogram, sekunda, grad, ampér. Keby sme užili iného tiež užívaného spôsobu, bolo by nutné písať miesto [kg] slovo „hmota“, miesto [m] slovo „dĺžka“, miesto [s] slovo „čas“, miesto [grad] slovo „teplota“ a miesto [A] slovo „prúd“.

Rozmer kapacity by potom bol  $\frac{(\text{prúd})^2 \cdot (\text{čas})^4}{\text{hmota} \cdot (\text{dĺžka})^2}$ ; vidno, že tento spôsob písania je zdĺhavejší, ale formálne sa zhoduje s naším.

b) Vidieť, že rozmer býva spravidla komplikovanejší výraz než „jednotka“. Je radno z n a ť n a z p a m ä ť j e d n o t k y všetkých dôležitejších fyzikálnych veličín, ale netreba sa učiť ich rozmery. Stačí, keď vieme rozmer zo známych jednotiek vypočítať!

\* \* \*

V Rozhľedech uverejníme niekoľik príkladů na určování dimense, jichž řešení zašlete redakci.

*Redakce uveřejňuje tento článek jako autorův návrh, jak se vyvarovat nesnázi při rozlišování fyzikálních veličin a jednotek.*

P ř e m y s l S c h ü r e r, Praha:

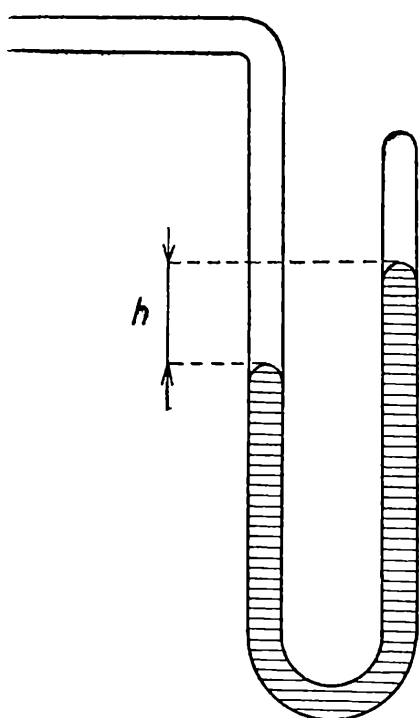
## Jak měříme nízké tlaky

Ve škole jste se seznámili s řadou vakuových přístrojů - s elektronkami, výbojkami, roentgenkami a pod. V takových, jak říkáme vakuových systémech, je velmi nízký tlak, získaný pečlivým odčerpáváním vzduchu rotačními a difusními vývěvami, případně připoutáním plynných molekul na pevnou látku silami fyzikální nebo chemické povahy.

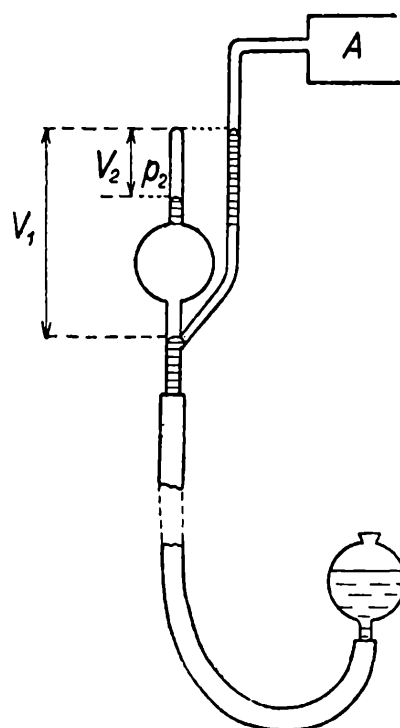
V našem článku se podíváme na zajímavé přístroje, které nám dovolují změřit tyto velmi nízké tlaky.

Především poznamenejme, že dosud nám známé manometry, měřící tlak v okolí jedné atmosféry (na př. barometry), případně tlaky vyšší (na př. membránové manometry u kompresorů), se nehodí na měření tlaků o velikosti až miliontin milimetru rtuťového sloupce a ještě nižších.

Některé manometry, t. zv. p ř í m o m ě ř í c í, měří tlak podle síly, jíž působí plyn na jednotku plochy, ostatní manometry - n e p ř í m o m ě ř í c í - užívají k měření tlaku nějaké fyzikální veličiny, závislé na tlaku (na př. tepelné vodivosti, ionisace). Takový manometr je nutno okalibrovat manometrem přímo měřícím, abychom jím mohli tlak určit. Tuto kalibraci nemusíme však vždy provádět, protože ve vakuových systémech tlak sám se svými mechanickými účinky není podstatnou charakteristickou veličinou; tou je hlavně počet molekul v jednotce ob-



Obr. 1. Manometr je prostá U-trubice s jedním koncem zataveným, druhý konec je spojen s prostorem, v němž se měří tlak. V zatavené části je velmi nízký tlak nasycených par rtuti, takže rozdíl výšek hladin rtuti  $h$  nám udává tlak plynu v přilehlém prostoru v milimetrech rtuťového sloupce.



Obr. 2. M a c L e o d ů v m a n o m e t r. I v tomto manometru je určován tlak plynu z rozdílu hladin rtuti, a to z Boyleova zákona  $p_1V_1 = p_2V_2$ .

jemu, t. zv. k o n c e n t r a c e m o l e k u l. Ve vakuových systémech se snažíme dosáhnout tak malých koncentrací molekul, aby nám tyto rušivě neovlivňovaly procesy emise, ionisace, případně aby nám nenastala rychlá oxydace žhavého kovového vlákna.

Ukažme si, o jaké hodnoty koncentrace molekul ve vakuových systémech běží. Zatím co při teplotě 20 °C je za tlaku 760 mm Hg<sup>1)</sup> v jednom kubickém centi-

<sup>1)</sup> Někde, zejména v německé literatuře, se užívá pro tlak jednotky *tor*, 1 tor = 1 mm Hg.

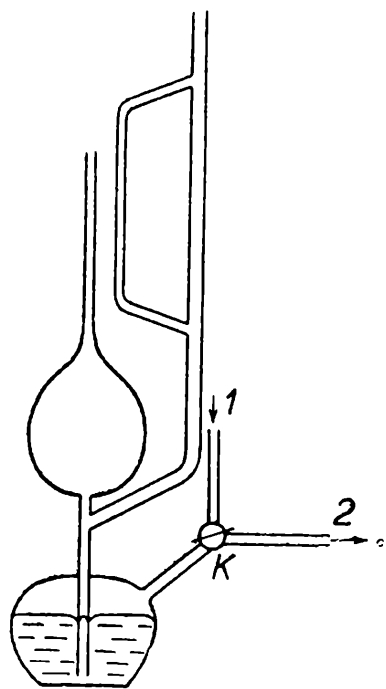
metru  $2,7 \times 10^{19}$  molekul (t. zv. *Loschmidtovo číslo*), klesne při tlaku  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg jejich počet na hodnotu  $10^{10}$ .

V poslední době byly ve Spojených státech objeveny metody k dosažení tlaků ještě nižších, řádově až  $10^{-11}$  mm Hg. Při tomto tlaku je počet molekul v jednotce objemu  $10^7$ .

Manometry můžeme rozdělit do šesti základních skupin:

1. Manometry, užívající rtuti nebo nějaké netečné kapaliny.
2. Manometry, jimiž se měří tlaky optickými metodami podle deformace tenké stěny.
3. Viskosní manometry.
4. Radiometrické manometry.
5. Manometry, založené na vedení tepla v plynech.
6. Ionizační manometry.

Pro tlaky v řádu jednotek milimetrů rtuťového sloupce se dobře hodí jednoduchý rtuťový manometr tvaru *U*, kde rozdíl hladin přímo udává měřený tlak (obr. 1).



Podobným způsobem, avšak při složitějším provedení, pracují další různé manometry, spadající do naší druhé skupiny. Jedná se vždy o rozdíl hladin, způsobený jistým přetlakem. Pro dosažení větší citlivosti se tento rozdíl, pokud je v desetinách a setinách milimetru, zaznamenává zrcátkovou metodou.

1. Jedním z nejrozšířenějších manometrů vůbec je *manometr Mac Leodův*. Také zde se jedná o rozdíl dvou hladin, při čemž plyn měřeného tlaku  $p_1$  je stlačen na tlak  $p_2$ , kdy zaujímá objem  $V_2$ . Tlak  $p_1$  určíme na základě Boyleova zákona:

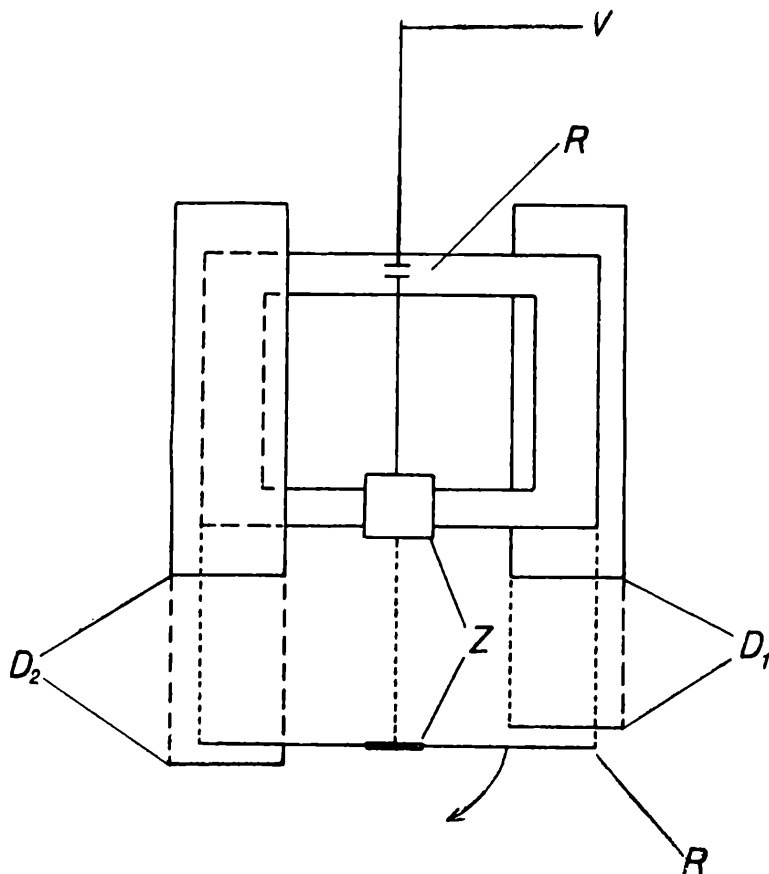
$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Oddělíme plyn neznámého tlaku  $p_1$  do známého objemu  $V_1$  a dále jej stlačujeme na určitý tlak  $p_2$ , kdy zaujímá objem  $V_2$ . Známe-li tři veličiny Boyleova vzorce  $V_1$ ,  $V_2$  a  $p_2$ , můžeme lehce vypočítat neznámý tlak  $p_1$ .

Toto oddělování a stlačování v balonu a kapiláře obstarává rtuť, jejíž hladina stoupá a klesá buď tím, že zvedáme a snižujeme pomocnou nádobu se rtutí (obr. 2), připevněnou k manometru ohebnou pryžovou hadicí, nebo pomocí přetlaku atmosférického vzduchu, který podle potřeby připouštíme nebo odssáváme (obr. 3).

Při přesném provedení a dostatečně velkém poměru  $V_1 : V_2$  lze manometrem MacLeoda měřit tlaky až do oboru  $10^{-2}$  mm Hg. Při těchto velmi nízkých tlacích konstruuje se aparaturu velice pečlivě, odstraní se důkladně netěsnosti, které by umožnily natékání vzduchu a vyloučí se všechny součásti, které by uvnitř aparatury uvolňovaly pohlcené plyny. Proto také použijeme manometru bez gumové hadice (obr. 3), neboť plyny, pohlcené stěnami hadice, se uvolňují a zhoršují dosažené vakuum.

MacLeodův manometr je absolutní a často se ho používá k cejchování jiných



Obr. 4. Radiometrický manometr. Otočný rámeček  $R$ , zavěšený na jemném vlákně  $V$ , se vychyluje ve směru šípky v důsledku dopadu rychlejších molekul ze strany žhavených destiček  $D_1$  a  $D_2$ . Výchylka se zaznamenává podle světelné značky, odražené zrcátkem  $Z$ , na vzdálené stupnici.

druhů vakuoměrů. Jeho nevýhodou je, že vzhledem k svému principu, t. j. stlačování plynu o tlaku  $p_1$  na tlak vyšší  $p_2$ , neměří tlak nasycených par, neboť tyto při vyšším tlaku kondensují.

2. Deformace tenké stěny, která odděluje od sebe dva prostory různých tlaků a pomocí níž měří manometry druhé skupiny, zjišťuje se buď přímo pomocí mikroskopu a pod., nebo se přenáší na pohyb ručičky. Jejich citlivost podle způsobu provedení může sahát až do  $10^{-4}$  mm Hg. Tyto manometry nejsou ovšem absolutní, musíme je nejdříve ocejchovat.

3. Jiný druh manometrů spočívá na poznatku, že tlumení pohybu kmitajícího tělesa ve vakuu je úměrné tlaku; dochází totiž k tření, které tlumí pohyb. Avšak tato úměrnost platí až při nízkých tlacích, při tak malé koncentraci molekul, kdy

nenastávají srážky molekul mezi sebou dříve, než tyto přenesou svůj impuls mezi pohyblivou a pevnou částí manometru. Jinými slovy střední volná dráha molekul musí být dostatečně dlouhá proti vzdálenostem pevných stěn a kmitajícího tělesa.

Pro vzduch je na př. střední volná dráha molekul při pokojové teplotě a tlaku  $10^{-3}$  mm Hg  $L_{stř.} = 4,56$  cm. Přibližně ji můžeme pro vzduch stanovit ze vztahu

$$L_{stř.} = 5/p \text{ cm,}$$

kam za  $p$  dosazujeme tlak v mikronech.

Rozkmitáme pohyblivou část v manometru - ať již jde o jednoduché vlákno či o dvojici vláken k vymezení jediné roviny kmitů, nebo kmitá-li membrána či kotouč - a měříme dobu, za jakou se pohyb utlumí. Tyto manometry potřebují oceňování a lze jimi měřit tlaky do  $10^{-4}$  až  $10^{-5}$  mm Hg.

4. Skutečností, že s teplotou roste kinetická energie molekul, je využito při konstrukci *radiometrických manometrů*. Provedení takového manometru navrhnul před 40 lety *M a r t i n K n u d s e n*. Jeho vakuoměr sestává v podstatě z páru pevných žhavených destiček a otočného rámečku, který se vychyluje v důsledku dopadu rychlejších molekul se strany žhavých destiček (obr. 4). Na rámečku je upevněno zrcátko, takže i malá výchylka rámečku při osvětlení zrcátka způsobí znatelný posuv světelného odrazu na vzdálené stupnici.

Výchylka rámečku je úměrná počtu dopadajících molekul a tedy i tlaku. Známe-li moment setrvačnosti rámečku  $I$ , střední poloměr otočného rámečku  $r$ , plochu průmětu rámečku do žhavených destiček  $A$ , dobu kyvu rámečku  $\tau$ , vzdálenost zrcátka od stupnice  $d$  a rozdíl teploty žhavených destiček proti okolnímu plynu  $T_1 - T_0$ , můžeme podle výchylky  $D$  na stupnici určit tlak z výrazu

$$P = \frac{8\pi^2 ID}{rAd \tau^2} \frac{T_0}{T_1 - T_0} \text{ (dyn cm}^{-2}\text{)}$$

Žádná veličina pravé strany nezávisí na kvalitě plynu; jedná se tedy o absolutní měření tlaku. Knudsenův manometr měří tlaky všech plynů a par nezávisle na jejich molekulové hmotě, dává spojitou a okamžitou indikaci tlaku, nepotřebuje měřicí kapaliny, jako je na př. rtuť s nevíтанými parami a jeho měřicí rozsah lze pohodlně měnit změnou teploty na žhavených destičkách.

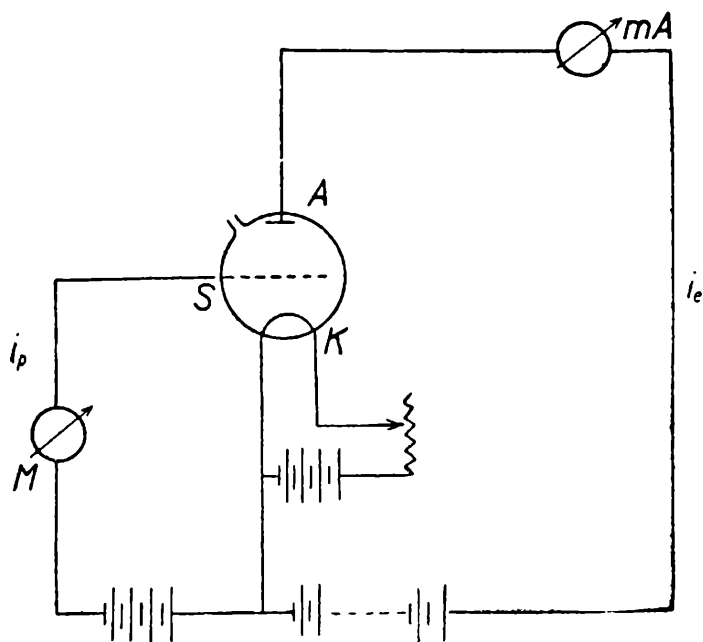
Knudsenova manometru lze užít pro měření tlaků od  $10^{-3}$  mm Hg níže. Pro různé tlakové obory byly sestaveny rozmanité jeho modifikace. Při velké citlivosti je závěs rámečku na jemné křemenné vlákno náročný na provedení a dále pak choulostivý na otřesy.

5. Měření nízkých tlaků pomocí *vakuoměrů*, spadajících do naší páté skupiny, je založeno na poznatku, že teplo odvedené z nějakého zahřátého tělesa za určitý čas  $t$ , je úměrné počtu dopadajících molekul v čase  $t$ . Opět však musí být splněna podmínka o dostatečně dlouhé střední volné dráze molekul jako v případech předchozích, t. j. musí být tak malá koncentrace, aby molekuly prolétly vzdálenosti mezi žhavými a chladnými částicemi manometru bez vzájemných srážek. Tlak plynu, obklopujícího zahřáté těleso, lze potom určit z ochlazování vloženého tělesa. Obvykle vkládáme do vakua odporový drát a množství tepla, jež molekuly

okolního plynu odebírají, můžeme zjišťovat buď podle změny odporu při stálém proudu (Piraniho odporový vakuoměr), nebo ze změny proudu při stálém napětí na koncích drátu anebo pomocí thermoelektrického článku měříme přímo teplotu drátu. Také můžeme změnu teploty určit ze změny délky vlákna. Avšak závislost tepelné vodivosti na tlaku je pro různé molekuly různá a proto budeme potřebovat řadu cejchovních křivek pro různé plyny.

Nejrozšířenějším vakuoměrem této naší skupiny je *Piraniho manometr*. Jeho konstrukce je jednoduchá: tenký odporový drát, vhodně upevněný v baňce. Jako manometru lze užít obyčejné žárovky, což také Pirani ve své práci učinil. Piraniho manometrem můžeme měřit tlaky v oboru jednotek až tisíců milimetrů rtuťového sloupce.

6. Nežli obrátíme svoji pozornost na poslední naši skupinu, řekneme si alespoň zjednodušeně něco o *ionisaci*.



Obr. 5. Schema zapojení ionizačního manometru.

Elektron, který má náboj  $e$  a hmotu  $m$ , nabude v elektrickém poli o potenciálním rozdílu  $U$  rychlost  $v$ , takže jeho kinetická energie bude

$$\frac{1}{2} mv^2 = eU$$

Budeme-li zvyšovat potenciální rozdíl pole  $U$ , bude se zvyšovat rychlost elektronů a jejich kinetická energie může nabýt takové hodnoty, že elektron při srážce s molekulou plynu tuto rozdělí na kladný ion a záporný elektron, tedy že nastane ionisace plynu.

Napětí  $U$ , které musíme vložit na elektrody, aby došlo k ionisaci, zvané *ionisací napětí*, je pro různé plyny různé. Pohybuje se v jednotkách až desítkách voltů; největší je pro helium, kde činí 24,58 V.

Lze si snadno představit, že při stálém počtu elektronů a stálém napětí  $U$  bude vznikat tím více iontů, čím větší počet molekul bude vystaven srážkám. Můžeme potom měřit tlak, zaznamenáme-li velikost iontového proudu  $i_p$  a jeho poměr

k proudu elektronů  $i_e$ , neboť počet vzniklých kladných iontů je úměrný nejen tlaku plynu, ale i počtu ionisujících elektronů.

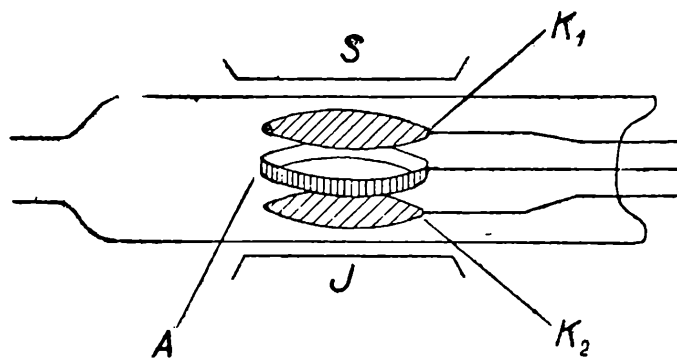
Pro tlak  $p$  můžeme psát

$$p = K \frac{i_p}{i_e}, \quad (1)$$

kde  $K$  je konstanta, závislá na druhu plynu, na geometrickém uspořádání elektrod a na jejich napětí.

Jednoduché zapojení ionisačního vakuoměru, za nějž slouží obvyklá tříelektrodová soustava, je znázorněno na obr. 5, kde mřížka  $S$ , mající záporný potenciál ( $-15$  až  $-25$  V) vůči katodě  $K$ , je sběračem kladných iontů. Jejich proud  $i_p$  měříme mikroampérmetrem  $M$ . Kladná elektroda  $A$  mívá napětí  $100$  až  $300$  V, miliampérmetrem  $mA$  měříme proud  $i_e$ .

Z výrazu (1) plyne lineární závislost tlaku na iontovém proudu. Kalibrační křivky ionisačních manometrů budou proto přímky, různé pro různé plyny. Přes některé nedostatky, jako je na př. změna chemického složení plynu ve styku se žhavou katodou, je ionisačních vakuometrů značně používáno ve vakuové technice.



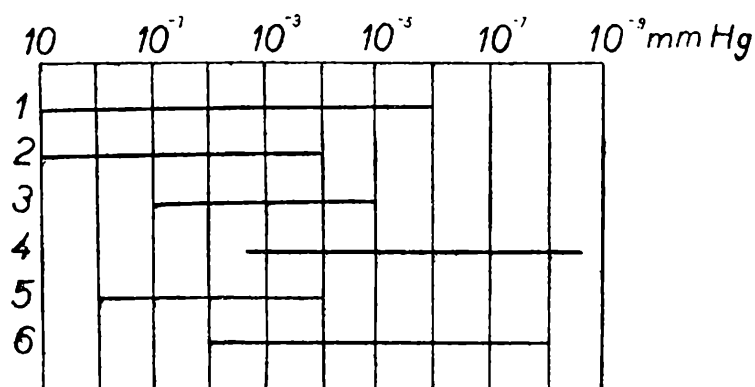
Obr. 6. Penningův manometr. Prstencová anoda  $A$  mezi plochými katodami  $K_1$  a  $K_2$ . Systém je vložen do homogenního magnetického pole  $S - \mathcal{J}$ .

Než se dostaneme k ionisačnímu manometru se studenou katodou, zmíníme se o jednom praktickém a často užívaném, i když málo přesném, určování nízkých tlaků. Děje se tak pomocí výbojky. Vložíme-li na elektrody ve zředěném plynu dostatečně vysoké napětí, může vzniknout doutnavý výboj. Tvar a zabarvení výboje se mění při změně tlaku od jednotek do setin mm rtuťového sloupce, až při tlaku  $10^{-3}$  mm Hg výboj úplně ustává. Jedná-li se nám pouze o řádové určení tlaku, zapálíme pomocí Teslova transformátoru výboj a podle jeho vzhledu odhadneme řád tlaku.

Řekli jsme si, že při tlaku  $10^{-3}$  mm Hg výboj mezi elektrodami uhasíná. To proto, že elektron se sráží se stále menším počtem molekul, které by mohl ionisovat; k ionisaci tedy nedochází a výboj se přerušuje. Aby se mohl výboj udržet i při nižších tlacích než jsou mikrony Hg, museli bychom prodloužit dráhu elektronů. Při zachování malých rozměrů lze toho dosáhnout v magnetickém poli.

Umístíme-li anodu ve formě prstence neb rámečku mezi dvě ploché, navzájem spojené katody (obr. 6) a vložíme-li tento systém do homogenního magnetického

pole tak, aby siločáry procházely kolmo k plochám kathod, elektron, který je nucen konat dráhu po spirálách navinutých na siločáry, prolétne otvorem anody, ale není anodou zachycen, dostává se do působení opačného pole druhé kathody a vrací se zpět. Elektron se na své kmitavé dráze mezi kathodami sráží s molekulami plynu, které ionisuje. Postupně tak ztrácí energii, až nakonec padne na prstenec anody. Je jasné, že celková elektronem opsaná dráha je o několik řádů delší než ve výbojce běžného typu. Na této své delší dráze mohou elektrony ionisovat dostatečný počet molekul, i když tyto mají značně nižší koncentraci. A opět počet iontů, vzniklých rozštěpením molekul, bude úměrný jejich koncentraci a proud ve výbojce bude tedy mírou tlaku. Takto upravený ionisační manometr se nazývá podle svého objevitele *manometr Penningův*. Je nutno jej cejchovat. Měří tlaky v oboru  $10^{-3}$  až  $10^{-6}$  mm Hg, při změně polarity na elektrodách i tlaky vyšší, až jednotky milimetrů rtuťového sloupce. Patří také mezi značně rozšířené vakuoměry.



Obr. 7. Přibližné měřicí rozsahy jednotlivých skupin manometrů: 1. Manometry, užívající rtuti nebo nějaké netečné kapaliny. 2. Manometry, jimiž se měří tlaky optickými metodami podle deformace tenké stěny. 3. Viskosní manometry. 4. Radiometrické manometry. 5. Manometry, založené na vedení tepla v plynech. 6. Ionisační manometry.

Než uzavřeme tento stručný přehled používaných vakuoměrů, připomeňme, že při odčerpávání existuje tlakový spád mezi místy různě vzdálenými od vývěvy podle odporu, jaký klade potrubí proti proudění plynu. Je-li náš manometr umístěn někde mezi vývěvou a prostorem, v němž určujeme získaný tlak a měříme-li za stálého čerpání, jak tomu obvykle bývá, musíme skutečný tlak v našem prostoru vypočítat z údaje manometru, čerpací rychlosti vývěvy a vakuového odporu potrubí mezi manometrem a pracovním prostorem.

Roztřídili jsme si manometry pro měření nízkých tlaků do šesti skupin a řekli jsme si něco o jejich principu a vlastnostech. Závěrem se podíváme na tabulku (obr. 7), která přibližně určuje měřicí rozsah manometrů jednotlivých skupin.

Kdo by měl zájem o hlubší a podrobnější vniknutí do některé z otázek, které byly v tomto článku načrtnuty, tomu doporučuji knížku Ing. Ladislava Zobače „Základy vakuové techniky“.





## Úlohy k řešení

18. Do daného čtverce  $ABCD$  vepište rovnostranný trojúhelník  $AXY$  (vrchol  $X$  necht' leží uvnitř strany  $BC$  a vrchol  $Y$  uvnitř strany  $CD$ ). Úlohu řešte početně i graficky!

*J. Sedláček*

19. Zboží bylo baleno do papírových krabic, které měly tvar kvádrů s určitými rozměry. Později se začalo užívat jiného typu krabic, jejichž jeden rozměr byl o  $p\%$  větší než původně, kdežto každý ze zbývajících rozměrů byl o  $p\%$  menší než příslušný rozměr původní krabice. Rozhodněte, zda se objem krabice zvětšil nebo zmenšil. Jaká byla spotřeba papíru na jednu krabici ve srovnání se stavem původním?

*J. Sedláček*

20. Z definice středové kuželosečky (elipsy nebo hyperboly) odvoďte nejprve větu:

Kružnice, jejichž průměrem jsou ohniskové průvodiče bodů středové kuželosečky, dotýkají se vrcholové kružnice, t. j. kružnice opsané kolem středu kuželosečky poloměrem hlavní poloosy. Na základě odvozené věty řešte bez užití kolineace úlohu: Sestrojte kuželosečku, která jde bodem  $M$ , dotýká se přímek  $p$ ,  $q$  a má ohnisko  $F$ . (Při řešení použijte výsledků z článků S. Horáka z 1. a 2. čísla.)

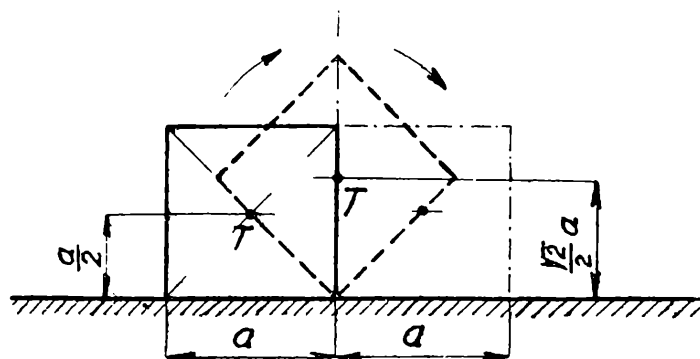
*O. Setzer*

21. Ktorási fyzikálna veličina je daná vzorcem

$$x = \frac{\pi r^2 t U^2}{\rho l m c}$$

kde  $r$  = polomer,  $t$  = čas,  $U$  = elektrické napätie,  $\rho$  = špecifický odpor elektrický (udaná v jednotkách  $[\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}]$ ),  $l$  = dĺžka,  $m$  = hmota,  $c$  = špecifické teplo (udané v jednotkách  $\left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}} \right]$ ). Určením rozmeru (resp. jednotky) pre pravú stranu zistíte, o ktorú veličinu ide!

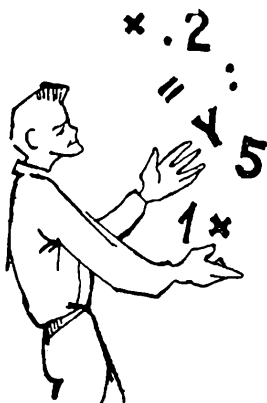
*E. Říman*



22. Hrubý odlitek hmoty  $m$ , tvaru krychle o délce hrany  $a$ , máme přemístit do vzdálenosti  $l$  po vodorovné podlaze dílny. Přemístění můžeme provést buď smykáním po podlaze, nebo převrácením přes hranu (viz obr.). Materiál krychle je sice dosti pružný, zato podlaha je nepružná, takže při každém dopadu krychle přes hranu se energie spotřebuje v teplo a na každé z dalších převrácení musíme vynaložit stejnou energii, jako na převrácení první.

Určete, jak veliký musí být součinitel smykového tření (za pohybu), aby tažení odlitku po podlaze bylo energeticky výhodnější než jeho převrácení. *V. Šindelář*

Řešení těchto úloh zašlete do 6. července t. r. na adresu: Doc. Dr. M. Menšík, Praha 6, Zikova 4.



## Matematické zábavy

Jiří Sedláček, Praha:

### O rozměňování pětadvacetihaléře

V pátém ročníku matematické olympiady byla pro žáky IX. třídy (kategorie C) zařazena také tato úloha:

Kolika způsoby lze v naší měně rozměnit pětadvacetihaléř?

Bude vás možná zajímat několik poznámek k této úloze, neboť jde o otázku, při které nemůžeme snadno a jednoduše použít hned nějaké školské poučky nebo vzorečku. Řešitel se tedy musí nejprve zamyslet nad metodou práce<sup>1)</sup>.

Při rozměňování máme k dispozici čtyři druhy mincí: desetihaléře, pětihaléře, tříhaléře a haléře. Jako příklad můžeme si uvést, že 1 desetihaléř, 1 pětihaléř, 2 tříhaléře a 4 haléře je jeden způsob, jímž lze pětadvacetihaléř rozměnit, neboť

$$1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 25 \quad (1)$$

Zřejmě pořádek, v němž jsou mince vypláceny, není podstatný, takže na př. 2 tříhaléře, 1 pětihaléř, 4 haléře a 1 desetihaléř považujeme za týž způsob rozměnění pětadvacetihaléře, jaký byl prve popsán. Abychom určili počet všech způsobů, jimiž se rozměnění dá provést, musíme postupovat systematicky. Sestavíme si tedy tabulku, z níž musí být patrné, že jsme na žádnou možnost nezapomněli. Čísla v jednom řádku tabulky budou vyjadřovat po řadě počet desetihaléřů, pětihaléřů, tříhaléřů a haléřů, kterých je potřebí při jistém způsobu rozměňování. Zde je tedy příslušná „výplatní listina“:

<sup>1)</sup> Úlohu podobného charakteru najdete též v VI. ročníku matematické olympiady, kategorie A.

2	1	0	0	1	0	4	3	0	2	5	0	0	1	1	17
2	0	1	2	1	0	3	6	0	2	4	3	0	1	0	20
2	0	0	5	1	0	2	9	0	2	3	6	0	0	8	1
1	3	0	0	1	0	1	12	0	2	2	9	0	0	7	4
1	2	1	2	1	0	0	15	0	2	1	12	0	0	6	7
1	2	0	5	0	5	0	0	0	2	0	15	0	0	5	10
1	1	3	1	0	4	1	2	0	1	6	2	0	0	4	13
1	1	2	4	0	4	0	5	0	1	5	5	0	0	3	16
1	1	1	7	0	3	3	1	0	1	4	8	0	0	2	19
1	1	0	10	0	3	2	4	0	1	3	11	0	0	1	22
1	0	5	0	0	3	1	7	0	1	2	14	0	0	0	25
				0	3	0	10								

Zjistili jsme tedy, že pětadvacetihaléř je možno rozměnit celkem 45 způsoby. Je vidět, že jsme při tom vystačili jen se zdravým úsudkem.

Úloze, kterou jsme tak rozřešili pomocí tabulky, je však možno dát také abstraktnější podobu. Víte, že se různé slovní úlohy řeší užitím rovnic a tak lze postupovat i v úloze o pětadvacetihaléři. Označíme-li  $x$  počet desetihaléřů,  $y$  počet pětihaléřů,  $z$  počet tříhaléřů a  $u$  počet haléřů, má platit

$$10x + 5y + 3z + u = 25 \quad (1)$$

Naše otázka se tedy převádí na úlohu řešit rovnici (1). Tato rovnice má čtyři neznámé  $x, y, z, u$ . Ze školy asi víte, že slova „řešte danou rovnici“ mají být vždy provázena údajem, v kterém číselném oboru se řešení hledá<sup>2)</sup>. V našem případě je podle slovního textu úlohy jasné, že řešení hledáme v oboru celých nezáporných čísel  $0, 1, 2, 3, \dots$ <sup>3)</sup>.

Výsledek, k němuž jsme došli užitím tabulky, můžeme nyní formulovat také slovy:

Rovnice (1) má v oboru celých nezáporných čísel celkem 45 řešení.

Stanislav Horák, Praha:

## Zajímavé posloupnosti

Všimneme si aritmetických posloupností, které vzniknou z posloupnosti lichých čísel.

<sup>2)</sup> Není-li takový údaj u rovnice výslovně uveden, rozumí se mlčky „nejširší“ obor, s kterým se právě ve škole pracuje. Tak na př. pro žáky IX. třídy tvoří tento „nejširší“ obor reálná čísla.

<sup>3)</sup> Jedna rovnice o několika neznámých, u které se žádá, aby řešení bylo tvořeno celými čísly, se v matematice často vyskytuje. Takovému problému říkáme neurčitá rovnice.

1. Napišme posloupnost lichých čísel do schematu

```

1
3  5
7  9  11
13 15 17 19
.....

```

A tu platí tyto věty:

- $k$ -tý řádek začíná číslem  $k^2 - k + 1$ .
- Součet čísel v  $k$ -tém řádku je  $k^3$ .
- Jestliže  $k$ -tý řádek obsahuje lichý počet čísel (t. j.  $k$  je liché), pak prostřední číslo je  $k^2$ .
- Jestliže  $k$  je sudé, pak aritmetický průměr prostředních čísel je  $k^2$ .
- Z vlastnosti b) plyne: třetí mocnina každého přirozeného čísla  $k$  se dá vyjádřit jako součet  $k$  po sobě bezprostředně jdoucích lichých čísel.

Tyto vlastnosti uvádíme bez důkazu jen jako zajímavost. Pokuste se sami aspoň některou z uvedených vlastností dokázat. Nejsnadněji se asi dokáže vlastnost poslední.

2. Přesvědčte se, že se dají vyslovit podobné věty o posloupnostech:

```

1                               1
5   9  13                       7  13  19  25
17  21  25  29  33             31  37  43  49  55  61  67
.....

```

(Podle Mathésis r. 1898.)

Δ:

## Bloudění

*Zase jedna kvadratura kruhu.* Nevím, co byste řekli dopisu, nadepsanému „P. T. České vysoké učení technické v Praze“ a pokračujícímu takto: „K oslavám 250letého výročí založení Vašeho učeliště zasílám Vám svůj elaborát pro výpočet *skutečné pravé hodnoty* poměrného čísla kružnice. (Podepsaný míní tím Ludolfovo číslo  $\pi$ .) Jako *první a jediný* (autor dopisu neoplývá tedy přílišnou skromností) vyšetřil jsem z geometrických vztahů rovnici (slovo rovnice napsal větším písmem doprostřed řádku) pro tento výpočet a touto rovnicí vyčíslil jsem jednoznačně a s *konečnou platností skutečnou pravou hodnotu* tohoto tak důležitého poměrného čísla  $\frac{1}{3} \sqrt{89}$  (tak, a ve škole se učíme  $\pi \doteq 3,141\ 59$ ). Dokázal jsem takto, že toto

poměrné číslo je *iracionální, nikoli transcendentní*. Nyní je možná přesná rektifikace a kvadratura omezeným (malým) počtem operací.“ Puntík. Následuje podpis, jakýsi obrázek s popisem jeho sestavení (s obvyklým: zapíchnu . . .), suché konstatování „konstrukce je ustrnulá“ (co tím rozumí, není dobře patrné; kdyby řekl: „Čtenář je ustrnulý“, byl by blíže skutečnosti) a pak už jen čtyři stránky zmateného povídání a počítání, z něhož je zřejmé, že autor viděl analytickou geometrii, že jí nerozuměl a že s kvadraturou kruhu (ba dokonce ani s přibližnou kvadraturou) celý „elaborát“ nemá nic společného.

Co s dopisem? Samozřejmě, nikoho ani nenapadne připustit, aby tento „také příspěvek“ byl přednesen na mezinárodní vědecké konferenci, která bude uspořádána v rámci oslav „250 let inženýrských škol v Praze“. Naši technické znají historii kdysi slavného problému kvadratury kruhu a vědí, že věta „Ludolfovo číslo  $\pi$  je transcendentní“, dokázaná v minulém století, definitivně ukázala marnost všech pokusů najít konstrukci strany čtverce, jehož obsah by byl rovný obsahu daného kruhu.

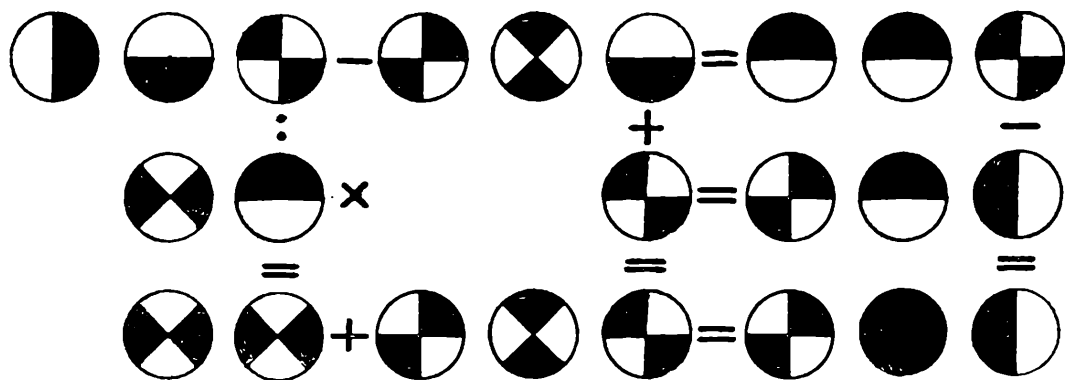
Domníváme se však, že dokonce i mezi našimi mladými čtenáři se najdou mnozí, kteří by dovedli autoru výše uvedeného dopisu jasně a přitom stručně vyloužit, proč jeho námaha je naprosto beznadějná. Nejlepší odpověď uveřejníme a ovšem také pošleme našemu „příspěvateli“ Victoru C. do Brna. Snad bude na něj mít lepší vliv, než náš zamítavý posudek, podrobně odůvodněný, poslaný již před mnoha lety, který nám vynesl stručné, ale jednoznačné jeho odsouzení, že všichni matematici jsou ignoranti.<sup>1)</sup>

V. Š.:

## Hádanky

### 1.

Na obrázku je pomocí značek napsáno celkem 9 čísel. Každá značka zastupuje



některou číslici. Stejně značky patří stejné číslici. Za značky máme dosadit číslice tak, aby byly splněny na obr. naznačené početní úkony ve směru vodorovném i svislém.

### 2.

Skotský obchodník byl ve finančních nesnázích a poslal svému příteli telegram, v němž jej žádá o rychlou půjčku peněz. Ze šetrnosti omezil telegram na tři slova: Send more money<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Také redakce našeho časopisu byla týměž autorem obdařena příspěvkem a později dopisem podobného rázu, jak je ve článku uvedeno. Chtěli jsme jej původně uveřejnit, avšak v oddílu „Matematické zábavy“.

<sup>2)</sup> Vyslov: send mór many, což znamená: pošli více (větší sumu) peněz.

Ježto nebyla uvedena požadovaná částka, pokusil se adresát, který znal svého šetrného avšak vtipného přítele, že rád používá různých náznaků a hádanek částku určit touto operací

$$\begin{array}{r} \text{send} \\ + \text{more} \\ \hline \text{money} \end{array}$$

Hledanou hodnotu požadovaného obnosu skutečně jednoznačně určil. Pokuste se o to i vy a dosaďte za jednotlivá písmena patřičné číslice.



### *Redakce hovoří se čtenáři*

- ★ Žádáme své čtenáře, aby nám napsali, které články uveřejněné v Rozhledech se jim líbily, nebo čemu v nich případně nerozuměli. Rádi podáme vysvětlení nebo uveřejníme - podle možnosti - články pojednávající o látce čtenáři žádané.
- ★ Ježto distribuce prováděná Poštovní novinovou službou stále vázne, takže na př. v Praze ještě v dubnu není dodáno některým předplatitelům první lednové číslo, žádáme čtenáře, aby se se svými stížnostmi na distribuci obraceli pouze - a to důrazně - na svoji místní Poštovní a novinovou službu.
- ★ Nejvíce řešení úloh jsme zatím obdrželi z Moravy. Nejméně ze Slovenska. Neostýchejte se zaslat třeba i jen jednotlivé příklady. Jména všech řešitelů uveřejníme.
- ★ Největším naším předplatitelem je 1. JSS v Ústí nad Labem - Střekov, která odebírá 130 výtisků.
- ★ V. M. Liberec. Právem si stěžujete, že ještě v květnu nejsou vyplaceny autorské honoráře za březnové č. 3. Redakce však včas zaslala vyúčtování tohoto čísla Státnímu pedagogickému nakladatelství, které provádí samo výplatu honorářů a redakce nemá v tomto směru žádného vlivu. Proto se se všemi přáními a stížnostmi obraťte v podobných případech přímo na účtárnu SPN, Praha 2, Ostrovní 30.
- ★ Zaměňte na str. 124 očíslování obr. 6 a obr. 7.

Otiskujeme zde část úvodu z knížky *Jan Bouška—Jan Pícha: Geofysika v SSSR*, str. 99, Praha 1952.

*Geofysika* studuje přirozené fyzikální vlastnosti Země včetně účinků, jimiž na Zemi působí jiná nebeská tělesa, zvláště Slunce a Měsíc. Obírá se tedy geofysika jevy, které nás neustále obklopují a všestranně ovlivňují lidský život. Je to na př. zemská tíže, zemský magnetismus, zemětřesení, elektřina v atmosféře i elektrické proudy v kůře zemské, polární záře, výbuchy sopek, radioaktivita atmosféry, vod i zemské kůry, mořské proudy, jevy povětrnostní a mnoho jiných. Proto také bylo o některých geofyzikálních problémech pojednáváno vědecky dávno již předtím, než se geofysika zařadila do soustavy přírodních věd jako samostatná vědecká disciplína. Geofyzikálnímu bádání se tehdy věnovali četní fyzikové ve spolupráci s matematiky, geodety, geology, astronomy a geografy. Název geofysika počal se však v literatuře vyskytovat teprve ve druhé polovině minulého století. Dnes rozumíme pod tímto názvem fyziku pevného zemského tělesa, vedle níž jako samostatné a rovnocenné obory jsou fyzika atmosféry (meteorologie) a fyzika hydrosféry (hydrologie, oceánografie). Všechny tyto obory bývají však často shrnovány pod pojem geofysika v širším slova smyslu.

Širokého použití se v poslední době dostává praktickému využití geofysiky, geofyzikálnímu průzkumu užitkových nerostů včetně naftových a plynových ložisek. Účelem geofyzikálního průzkumu je vysvětlit geologickou stavbu vyšetřovaného území nebo některých jeho zvláštností, studiem fyzikálních jevů, probíhajících ve svrchních částech zemské kůry.

*Geofyzikální průzkum* je založen na různosti fyzikálních vlastností různých hornin. Z výsledků pozorování a theoretických výzkumů se zjišťuje vliv stavby a skladby různých hornin ve svrchních vrstvách zemské kůry na zemskou tíži, intenzitu geomagnetického pole a j. Některé z hornin jsou samy užitkovými nerosty, na př. rudy kovů a zvláště železa. Jiné horniny obsahují na př. naftu, zemní plyn nebo vodu. Studiem podmínek jejich uložení napomáhá geofysika objevení naftových a jiných oblastí.

V geofyzikálním průzkumu se dnes prakticky užívá čtyř základních geofyzikálních method: gravimetrické, geomagnetické, seismické a geoelektrické. První dvě metody užívají přirozených silových polí, pole tíhového a geomagnetického. V geoelektrickém průzkumu se též v nevelké míře využívá přirozeného elektrického pole. V podstatě však v geoelektrických a v seismických methodách průzkumu se vytvářejí umělá silová pole. Zmíníme se stručně o podstatě vyjmenovaných method průzkumu.

*Gravimetrický průzkum* studuje rozdělení tíže na povrchu Země. Tíhové zrychlení vzrůstá od rovníku k pólům. Kromě toho existují místní změny tíže, jejichž velikost převyšuje nejvýše několik miliontin její plné hodnoty. Takové tíhové změny jsou spojeny s rozmanitou stavbou svrchní části zemské kůry, t. j. s různostmi ve složení a uložení hornin. Tíže vzrůstá tam, kde jsou blíže k povrchu horniny s větší hustotou a ubývá v místech, kde těžké horniny jsou hluboko a blíže k povrchu jsou horniny s menší hustotou. Odchytky tíže od normální hodnoty, které se ukazují ve výsledcích pozorování, nazýváme tíhové anomálie. Geologický význam tíhových anomálií se vykládá změnami hustoty hornin zkoumaného území. Výsledky gravimetrického průzkumu se porovnávají s geologickými daty.

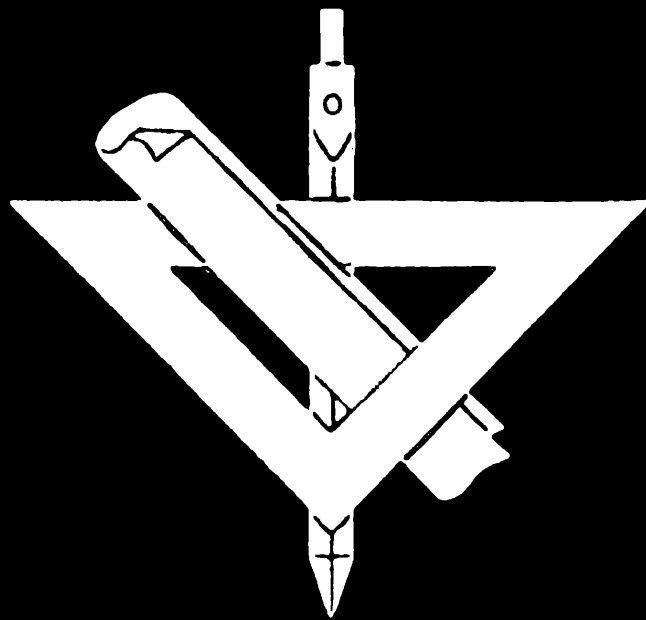
*Geomagnetický průzkum* spočívá na studiu rozložení intenzity geomagnetického pole na povrchu Země. Magnetické pole, kromě regionálních změn, podléhá také místním změnám, vyvolávaným různými magnetickými vlastnostmi hornin ve svrchní části zemské kůry. Zvláště významné odchytky od normální hodnoty geomagnetického pole (geomagnetické anomálie) jsou vázány na ložiska železných rud, obsahujících magnetit, kde velikost geomagnetické intenzity někdy značně převyšuje hodnoty normální. Ale i jiné horniny vyvolávají zjistitelné geomagnetické anomálie. Jejich geologická interpretace se zakládá na studiu

magnetických vlastností hornin vyšetřované oblasti a na srovnání s výsledky geologického výzkumu.

*Seismický průzkum* je založen na studiu šíření pružných (seismických) vln ve svrchní části zemské kůry. Zdroji těchto vln jsou výbuchy, uměle vyvolané v nehlubokých vrtech. Seismický průzkum užívá dvou základních metod: reflektivní a refrakční. Při první z nich seismická vlna, vyvolaná výbuchem, po dosažení hranice dvou horizontů o různých elastických vlastnostech se odráží a vychází na povrch, kde je zaznamenána seismickou aparaturou. Metoda refrakční využívá seismických vln, vznikajících na hranici jen takových horizontů, z nichž ve spodním je rychlost šíření pružných vln větší než v horním. Při seismických průzkumných pracích určují se doby příchodu seismických vln do registračních přístrojů a rychlost šíření těchto vln. Známe-li kromě toho vzdálenost bodu výbuchu od seismografu, je možné vypočítat hloubku uložení a sklon horizontu. Takové výpočty se dělají pro každý horizont. Z nich lze vysvětlit podmínky uložení hornin pro velký rozsah hloubek. Výsledků seismického průzkumu se užívá ke konstrukci seismických profilů a strukturálních map různých seismických horizontů. Stratigrafická poloha těchto horizontů se vysvětluje ověřením seismických pozorování pomocí vrtů. Seismické metody průzkumu se vyznačují vysokou přesností v určení hloubek geologických horizontů. Tato jejich přednost a také možnost jejich použití v nejrůznějších geologických podmínkách vedly k značnému rozšíření seismických metod v naftovém průzkumu. Zvláště často se užívá reflektivní metody seismického průzkumu, která je nyní základní metodou geofyzikálního průzkumu naftových a plynových ložisek.

*Geoelektrický průzkum* představuje souhrn několika elektrických metod výzkumu svrchní části zemské kůry. Část těchto metod je založena na sledování přirozených geoelektrických proudů. Základní význam mají však ty metody geoelektrického průzkumu, které jsou určeny pro studium hornin v uměle vytvořených elektrických polích. Při některých metodách průzkumu se užívá střídavého proudu, ale velmi rozšířené jsou i metody stejnosměrného proudu. Průzkumník má možnost měnit podmínky pozorování změnami polohy a rozměrů měřicího zařízení. Proto může obdržet na každém stanovišti ne jednu hodnotu pro ně charakteristickou, ale řadu hodnot, odpovídajících měnícím se podmínkám pozorování. To umožňuje v řadě případů určit hloubky uložení geologického útvaru nebo horizontu, skládajícího se z hornin, jejichž elektrické vlastnosti se liší od vlastností hornin výše ležících. Tato zvláštnost geoelektrického průzkumu zvyšuje jeho cenu při vyšetřování tektoniky usazeninových hornin, s nimiž souvisí ložiska nafty a plynu.





# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 6

Toto číslo vyšlo 30. června 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

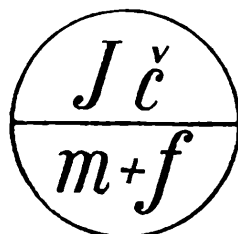
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada: Pavel Bartoš, JŠŠ, Zlaté Moravce; Jaroslav Bejsta, OSŠ, Praha; Petr Benda, JŠŠ, Brno; Michal Boček, KU, Praha; Dr. Josef Dibelka, KU, Praha; doc. Dr. Karel Havlíček, KU, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; prof. Dr. Zdeněk Horák, ČVUT, Praha; doc. Dr. Josef Korous, VŠŽ, Praha; doc. Emil Kraemer, VŠP, Praha; Václav Müller, KU, Praha; Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; Ladislav Sehnal, ČSAV, Praha; Ing. Dr. Václav Šindelář, ČVUT, Praha; Jaroslav Vachek, MŠK, Praha; prof. Dr. Ján Vanovič, VŠP, Bratislava; František Vencálek, PŠS, Praha.*

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

R. Langhammer: O funkcích s absolutní hodnotou .	241
S. Horák: Kardioida . . . . .	247
J. Kleczek: Planety (Dokončení) .	251
Ing. Dr. V. Šindelář: O rázu těles	255
Dr. F. Rein: Mlha . . . . .	261
Ing. V. Pacholík: Laminární a turbulentní proudění	268
Ing. Z. Růzha: Pohon letadel .	273
L. Sehnal: Planety na letním nebi . . . . .	276
J. Ruprecht: Hvězdokupa viditelná pouhým okem	277
Úlohy k řešení . . . . .	278
J. Kotyk: Alessandro Volta . . . . .	279
F. Komurka: K stému výročí narozenin otce moderní elektroniky	282
Recenze . . . . .	283
K. Rychlík: Prof. Dr. F. Rádl	285
Prof. Ing. R. Nejepsa: Studentům .	286
V. Š.: Hádanky	287
Sdělení redakce . . . . .	288
Z činnosti JČMF v Ústí nad Labem	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje výhradně Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A-08288

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönig.



## Matematika

Rudolf Langhammer, Praha:

### O funkcích s absolutní hodnotou

Při pozorování dějů kolem nás vidíme, že žádný jev nenastává bez nějaké příčiny. Každá změna jedné veličiny závisí na změnách veličin jiných. Jistě již víte, že takovouto závislost, kdy jedna veličina závisí na veličině druhé a podle této závislosti se mění, nazýváme v matematice *funkčním vztahem*. Jedním z úkolů matematiky je vybudovat dokonalý aparát ke studiu všech možných funkčních závislostí a seznámit zájemce s chováním a vlastnostmi těchto funkcí.

Předpokládáme, že víte, co je funkce lineární a kvadratická, a že také víte, jak se sestavuje graf funkce. Povíme si nyní něco o funkcích, které ve svém předpisu mají absolutní hodnotu nějakého výrazu.

Nejprve si zopakujme pojem *absolutní hodnoty*. Absolutní hodnotu reálného čísla definujeme takto:

*Pro absolutní hodnotu reálného čísla  $a$  (označení  $|a|$ ) platí:*

$$|a| = a, \text{ jestliže } a \geq 0,$$

$$|a| = -a, \text{ jestliže } a < 0.$$

Tedy absolutní hodnota čísla nezáporného se rovná tomuto číslu, absolutní hodnota čísla záporného se rovná číslu k němu opačnému. Poněvadž číslo opačné k zápornému číslu je kladné, platí, že absolutní hodnota reálného čísla je číslo nezáporné. Je kladná pro všechna čísla různá od nuly a rovna nule pouze pro číslo nula.

Ve funkčních předpisech se však nesetkáváme jenom s čísly, nýbrž hlavně s matematickými výrazy. Musíme proto dobře promyslet, co znamená absolutní hodnota nějakého matematického výrazu.

Mějme na př.

$$|x + 2|$$

Výraz  $x + 2$  představuje pro různé hodnoty písmene  $x$  různá čísla. Na př. je-li

$$x = 2 ,$$

pak je

$$x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Je-li

$$x = -3 ,$$

je

$$x + 2 = -3 + 2 = -1$$

Vidíme, že pro některé hodnoty  $x$  je tento výraz kladný, pro jiné je opět záporný. Pro určení absolutní hodnoty tohoto výrazu je však důležité znát, kdy je tento výraz nezáporný a kdy je záporný. Abychom tuto otázku zodpověděli, řešíme nerovnost

$$x + 2 \geq 0$$

Dostáváme odtud

$$x \geq -2$$

Tedy pro všechna  $x$ , která nejsou menší než  $-2$ , je výraz  $x + 2$  nezáporný. Podle definice absolutní hodnoty je jeho absolutní hodnota rovna tomuto výrazu samotnému, t. j.

$$|x + 2| = x + 2 \text{ pro } x \geq -2$$

Pro  $x < -2$  je výraz  $x + 2$  záporný a tedy podle definice se rovná jeho absolutní hodnota výrazu k němu opačnému, t. j.

$$|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$$

Že tomu tak skutečně je, o tom se můžeme přesvědčit, dosadíme-li za  $x$  nějaká čísla, která splňují předepsané podmínky. Na př.

pro  $x = 4$  dostáváme

$$x + 2 = 4 + 2 = 6 , |x + 2| = |6| = 6 ,$$

pro  $x = -5$  dostáváme

$$x + 2 = -5 + 2 = -3 , |x + 2| = -(x + 2) = -(-3) = 3$$

Označíme-li takto získané hodnoty  $y$ , dostáváme příklad funkce s absolutní hodnotou

$$y = |x + 2| \tag{1}$$

Z toho, co jsme právě vypočítali, vidíme, že pro  $x \geq -2$  je tato funkce shodná s funkcí

$$y_1 = x + 2 ,$$

kdežto pro hodnoty  $x < -2$  je shodná s funkcí

$$y_2 = -x - 2$$

Je tedy funkce

$$y = |x + 2|$$

dána dvěma předpisy, které neobsahují označení absolutní hodnoty, a to

$$y = x + 2 \quad \text{pro } x \geq -2,$$

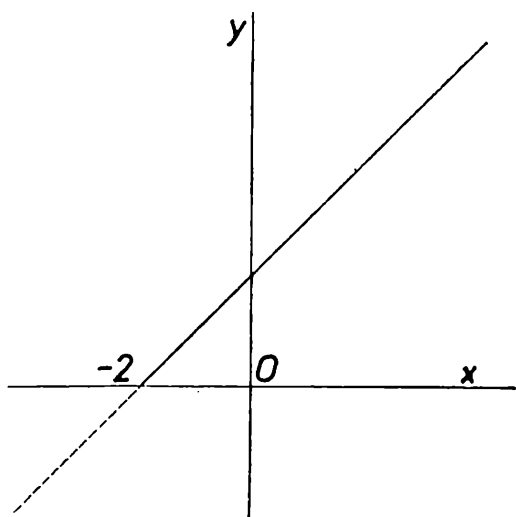
$$y = -x - 2 \quad \text{pro } x < -2$$

První z těchto předpisů platí pouze pro  $x$  větší nebo rovné  $-2$  (t. j. neplatí na př. pro  $x = -3$ ). Druhý naopak platí pouze pro  $x$  menší než  $-2$  (t. j. neplatí na př. pro  $x = -1$ ).

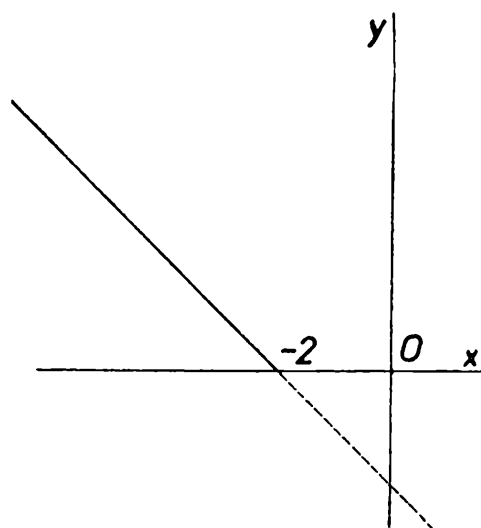
Chceme-li sestrojiti graf této funkce, musíme prozkoumati obě její části. Vidíme, že obě části jsou lineární funkce, jejichž grafy jsou přímky (a tyto grafy umíme sestrojiti).

Sestrojme nejprve graf funkce

$$y_1 = x + 2$$



Obr. 1



Obr. 2

(obr. 1). Poněvadž tento graf je grafem naší funkce (1) pouze pro  $x \geq -2$ , je v obrázku vytažena plně pouze část odpovídající těmto hodnotám  $x$ .

Podobně pro funkci

$$y_2 = -x - 2$$

dostáváme graf sestrojený stejným způsobem v obr. 2.

Graf funkce

$$y = |x + 2|$$

se proto skládá z obou silně vytažených částí grafů funkcí  $y_1$  a  $y_2$ . Má tedy tvar zobrazený na obr. 3. Vidíme, že se skládá ze dvou polopřímek, které mají společný počátek v bodě  $(-2; 0)$ . Dále si všimneme, že graf této funkce leží pouze nad osou  $x$ , neboť absolutní hodnota je číslo nezáporné a naše závisle proměnná se rovná absolutní hodnotě daného výrazu. Graf má v bodě  $(-2; 0)$  „h r o t“.

Vyšetřme jinou funkci s absolutní hodnotou, a to

$$y = |x^2 - 3x + 2| \quad (2)$$

Výraz, jehož absolutní hodnotu vyšetřujeme, nabývá pro některá  $x$  hodnot kladných, pro jiná  $x$  hodnot záporných. Je tedy třeba nejprve zjistit, kdy je tento výraz nezáporný a kdy je záporný. Řešíme proto nerovnost

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

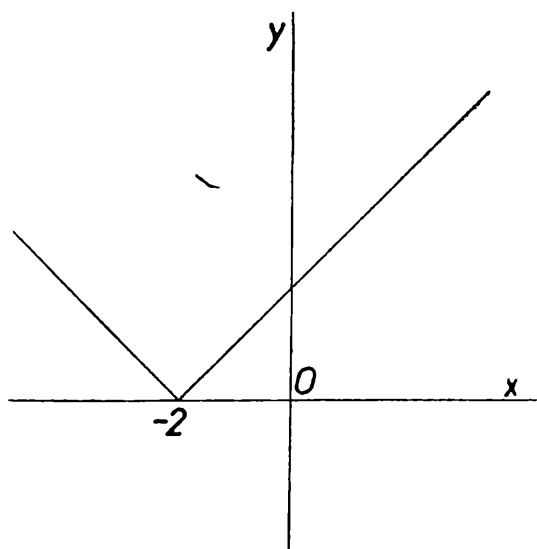
Tuto nerovnost lze upravit na tvar

$$(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

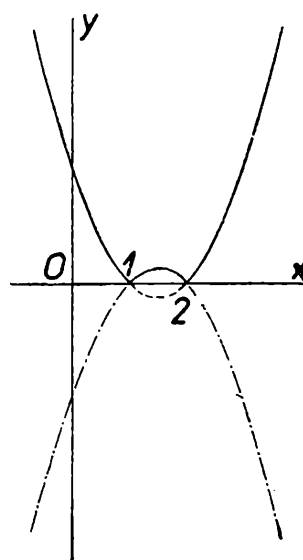
Odtud plyne, že výraz  $x^2 - 3x + 2$  je nezáporný pro  $x \leq 1$  a  $x \geq 2$ . Pro hodnoty  $x$ , pro něž platí

$$1 < x < 2,$$

je pak tento výraz záporný.



Obr. 3



Obr. 4

Platí tedy pro  $x \leq 1$  nebo  $x \geq 2$

$$|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2,$$

kdežto pro  $1 < x < 2$  platí

$$|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2) = -x^2 + 3x - 2$$

Vidíme, že funkci (2) lze opět napsat dvěma předpisy bez označení absolutní hodnoty, a to

$$y = x^2 - 3x + 2 \text{ pro } x \leq 1 \text{ nebo } x \geq 2, \quad y = -x^2 + 3x - 2 \text{ pro } 1 < x < 2.$$

Graf této funkce bude tedy dán opět složením příslušných částí grafu funkce

$$y_1 = x^2 - 3x + 2$$

a grafu funkce

$$y_2 = -x^2 + 3x - 2$$

Graf první funkce je parabola s osou souhlasně rovnoběžnou k ose  $y$ , z níž bereme část pro  $x \leq 1$  a pro  $x \geq 2$ . Graf druhé funkce je parabola s osou nesouhlasně rovnoběžnou k ose  $y$ , z níž bereme část pro  $1 < x < 2$ . (Viz obr. 4.). V obrázku je graf funkce  $y = |x^2 - 3x + 2|$  vytažen silně, zbývající část grafu funkce  $y_1$  čárkovaně a zbývající část grafu funkce  $y_2$  čerchovaně. Vidíme, že graf opět obsahuje hroty a leží celý nad osou  $x$ .

Prostudujme dále jeden složitější případ. Máme danou funkci

$$y = |x + 1| - |x - 1| \quad (3)$$

V tomto funkčním předpisu se vyskytnou dva výrazy s absolutní hodnotou. Bude tedy třeba vyšetřit oba výrazy v absolutních hodnotách. Pro zjednodušení přepíšeme rovnici (3) ve tvaru

$$y = y' - y''$$

kde

$$y' = |x + 1|$$

a

$$y'' = |x - 1|$$

Úvahu provádíme již rychleji, podrobný výpočet přenecháváme čtenáři.

Výraz v  $y'$  je nezáporný pro  $x \geq -1$  a záporný pro  $x < -1$ . Lze tedy psát

$$y' = x + 1 \quad \text{pro } x \geq -1,$$

$$y' = -x - 1 \quad \text{pro } x < -1$$

Výraz v  $y''$  je nezáporný pro  $x \geq 1$  a záporný pro  $x < 1$ . Lze tedy psát

$$y'' = x - 1 \quad \text{pro } x \geq 1,$$

$$y'' = -x + 1 \quad \text{pro } x < 1$$

Vidíme, že funkce (3) je dána různými předpisy pro  $x \geq 1$ , pro  $-1 \leq x < 1$  a pro  $x < -1$ , neboť v těchto úsecích číselné osy jsou různě předepsány její sčítance  $y'$  a  $y''$ .

Pro  $x \geq 1$  bude tato funkce dána výrazem

$$y_1 = (x + 1) - (x - 1) = x + 1 - x + 1 = 2$$

Pro  $-1 \leq x < 1$  bude dána výrazem

$$y_2 = (x + 1) - (-x + 1) = x + 1 + x - 1 = 2x$$

Konečně pro  $x < -1$  bude platit

$$y_3 = (-x - 1) - (-x + 1) = -x - 1 + x - 1 = -2$$

Tedy funkční předpis

$$y = |x + 1| - |x - 1|$$

představuje funkci danou třemi předpisy, neobsahujícími označení absolutní hodnoty, a to

$$\begin{aligned}
 y &= -2 && \text{pro } x < -1, \\
 y &= 2x && \text{pro } -1 \leq x < 1, \\
 y &= 2 && \text{pro } x \geq 1
 \end{aligned}$$

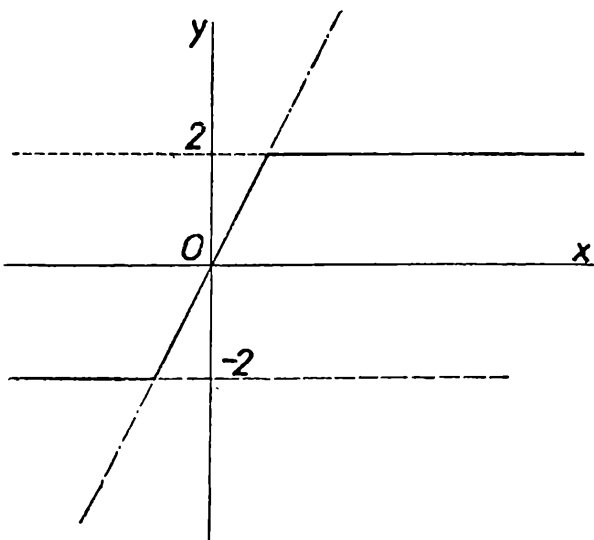
Její graf znázorňuje obr. 5, kdy zbývající část funkce  $y_1$  je vytažena čárkovaně, zbývající část funkce  $y_2$  čerchovaně a zbývající část funkce  $y_3$  čárkovaně delšími čarami. Opět vidíme, že graf obsahuje hroty, ale tentokrát neleží pouze nad osou  $x$ . Proč?

Nakonec vyšetřme ještě příklad, v němž kromě výrazu v absolutní hodnotě je také výraz bez absolutní hodnoty. Vyšetřme průběh funkce

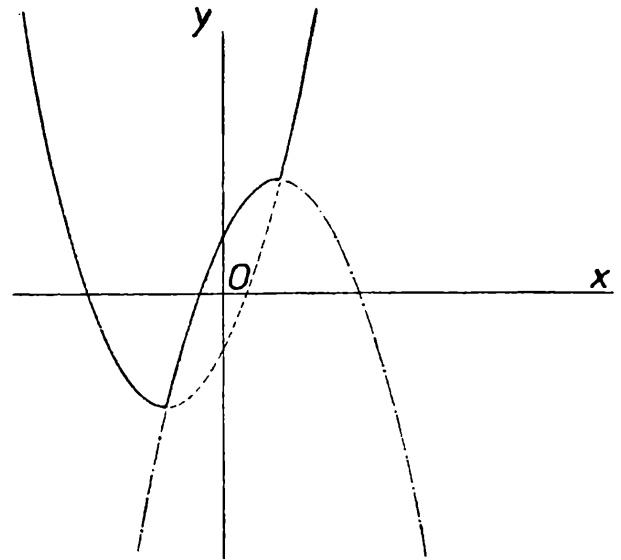
$$y = 2x + |1 - x^2| \quad (4)$$

Potíže v tomto funkčním předpisu působí pouze výraz  $|1 - x^2|$ , který musíme vyšetřit. Výraz  $1 - x^2$  je nezáporný, pokud

$$|x| \leq 1,$$



Obr. 5



Obr. 6

to znamená pro hodnoty

$$-1 \leq x \leq 1$$

bude

$$|1 - x^2| = 1 - x^2,$$

kdežto pro

$$x < -1 \text{ nebo } x > 1$$

bude platit

$$|1 - x^2| = x^2 - 1$$

Tedy funkci (4) můžeme napsat dvěma předpisy, které neobsahují absolutní hodnoty, a to

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 + 2x - 1 && \text{pro } x < -1 \text{ nebo } x > 1, \\
 y &= 1 + 2x - x^2 && \text{pro } -1 \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$



Vidíme, že graf této funkce se bude opět skládat ze dvou čar, a to z paraboly s osou souhlasně rovnoběžnou s osou  $y$  pro hodnoty  $x < -1$  nebo  $x > 1$  a z paraboly s osou nesouhlasně rovnoběžnou s osou  $x$  pro hodnoty  $-1 \leq x \leq 1$ . Graf této funkce je narýsován na obr. 6.

Abyste se dobře seznámili s tímto druhem funkcí, vypracujte ještě několik dalších příkladů. Vyšetřte na př. funkce

$$y = x + |x^2 - 1| ;$$

$$y = x + |1 + 2x - x^2| ;$$

$$y = |x + 1| - |1 - x^2|$$

Kdo z vás již zná funkce goniometrické, exponenciální nebo funkci logaritmickou, může vyšetřit a narýsovat grafy funkcí

$$y = |\sin x| \text{ pro } -2\pi \leq x \leq 2\pi ;$$

$$y = \sin |x| \text{ pro } -2\pi \leq x \leq 2\pi ;$$

$$y = x + |\cos x| \text{ pro } 0 \leq x \leq 2\pi ;$$

$$y = |\log x| ;$$

$$y = \log |x| ;$$

$$y = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$$

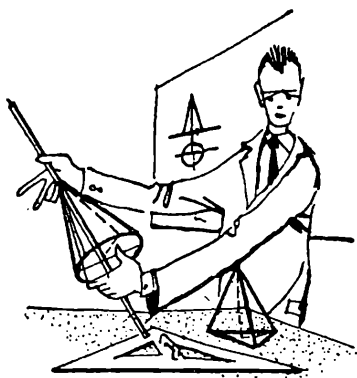
Vyšetřte, jaké důsledky mají absolutní hodnoty také pro definiční obor funkcí, na př. jaký je rozdíl mezi funkcemi

$$y = |\log x| \text{ a } y = \log |x| ,$$

nebo

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \text{ a } y = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$$

Jestliže si tyto příklady dobře promyslíte a nakreslíte jejich grafy, uvidíte jaké možnosti a jakou pestrost přináší do funkčních předpisů pojem absolutní hodnoty. Vidíte, že na grafech těchto funkcí se objevují hroty, které se nevyskytovaly u funkcí, jež jste dosud studovali a jež neobsahovaly absolutní hodnotu. Dovedli byste vysvětlit, proč tomu tak je?



## Deskriptivní geometrie

Stanislav Horák, Praha:

### Kardioida

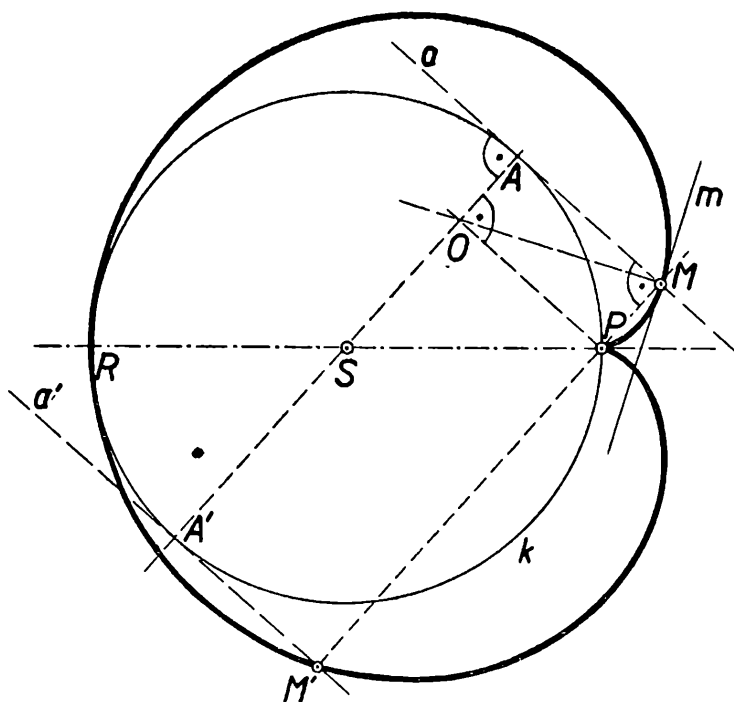
K mladým čtenářům Rozhledů se obracím s otázkou: Kolik znáte křivek? Zároveň s vámi budu tyto křivky vypočítávat: kružnice, parabola, elipsa, hyperbola, sinusoida (kosinusoida), tangentoida (kotangentoida) a možná, že ještě

sekantoida (kosekantoida) a tím by výčet končil, aspoň pro toho, kdo si studiem minulých čísel Rozhledů tento počet nezvětšil. Úkolem tohoto článku je seznámit vás s křivkou zvanou *kardioida*.<sup>1)</sup> Podáme tu její sestavení, a to hned několika různými způsoby.

I. Definice: *Kardioida je geometrické místo pat kolmic, spuštěných z bodu P ležícího na dané kružnici k na tečny této kružnice.*

V obr. 1 je dána kružnice  $k \equiv (S; r)$  a na ní bod  $P$ . V bodě  $A \neq P$  na  $k$  je sestrojena tečna  $a$  kružnice  $k$ . Pata  $M$  kolmice, spuštěné z bodu  $P$  na tečnu  $a$ , je bod kardioidy. Tímto způsobem byla sestrojena tato křivka v obr. 1. Bodu  $P$  říkáme *pól*.

V obr. 1 je ještě sestrojena tečna  $a'$  v bodě  $A'$ , který je k bodu  $A$  diametrálně protilehlý. Na tečně  $a'$  leží bod  $M'$  kardioidy. Všimněme si, že  $MM' = 2r$ . Z toho vyplývá tato konstrukce: Známe-li bod  $M$  kardioidy, můžeme sestrojiti další bod  $M'$  kardioidy tak, že na polopřímku  $MP$  nanese od bodu  $M$  úsečku  $MM' = 2r$ .



Obr. 1

Z toho, jak jsme kardioidu sestrojovali, plyne tato její vlastnost:

*Kardioida je souměrná podle přímky SP.*

Poznámky: 1. Geometrické místo pat kolmic, spuštěných z bodu  $P$  na tečny nějaké křivky  $k$ , se nazývá *úpatnice křivky k* pro pól  $P$ . Definici kardioidy můžeme tudíž vyslovit i takto:

*Kardioida je úpatnice kružnice pro pól ležící na této kružnici.*

2. Patu kolmice, vedené pólem  $P$  k průměru  $AS$ , označme  $O$ . Lze dokázat, že přímka  $OM$  je normála kardioidy v bodě  $M$  a přímka  $m \perp OM$  vedená bodem  $M$  je tečna kardioidy v bodě  $M$ .

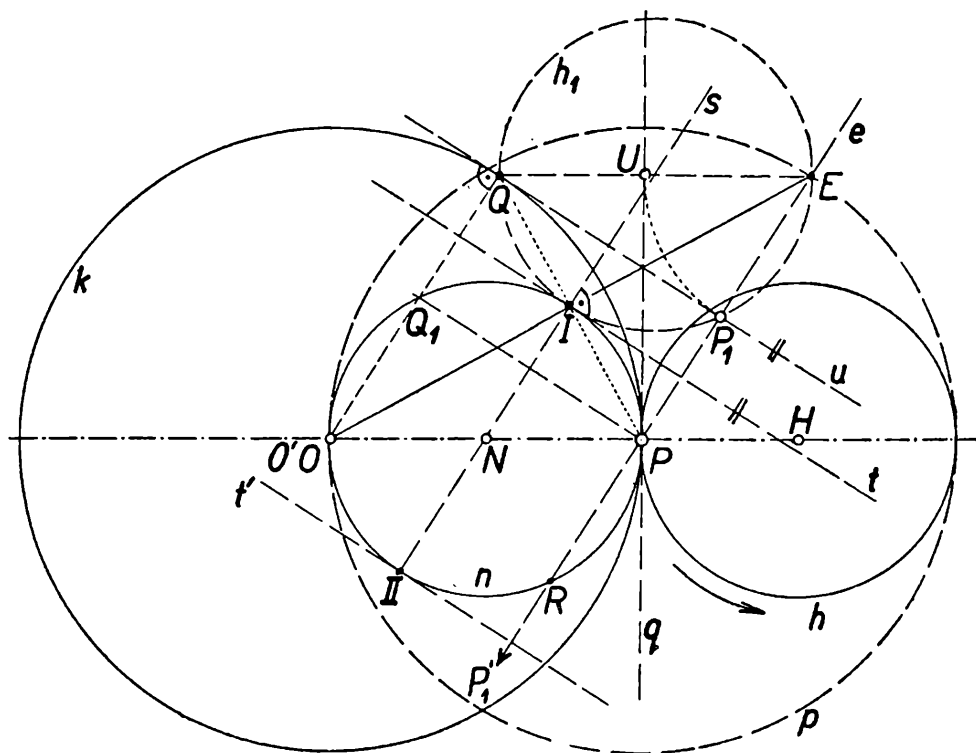
<sup>1)</sup> Viz též 5. č. Rozhledů, str. 208.

3. Bod  $P$  na kardioidě je zvláštní; takový se u křivek, které jsme si prve vyjmenovali, nevyskytuje. Nazývá se *bod vratu* a křivka má zde hrot, vrací se.

II. Z č. 5 Rozhledů znáte kinematické vytvoření kardioidy. Necht' jsou dány dvě různé shodné kružnice  $h, n$ , které se vzájemně dotýkají v bodě  $P$  (obr. 2). Jejich středy označíme postupně  $H, N$ . Jestliže se kružnice  $h$  kotálí po kružnici  $n$ , pak bod  $P$  opisuje kardioidu, která má v bodě  $P$  bod vratu a osu v přímce  $HN$ .

Nyní přistoupíme k důkazu, že křivka získaná takto kinematicky je úpatnicí nějaké kružnice pro pól ležící na této kružnici.

Sestrojíme kružnici  $k$ , která má s kružnicí  $n$  v bodě  $P$  vnitřní dotyk a jejíž poloměr je dvojnásobek poloměru kružnice  $n$ . Její střed, který leží na  $n$ , označme  $O$  (obr. 2). Zvolme určitou polohu  $h_1$  pohyblivé kružnice  $h$  a na ní je bod  $P_1$ , který vznikl z bodu  $P$ , když se kružnice  $h$  odkotálela do polohy  $h_1$ . Z předešlého víme,



Obr. 2

že  $\widehat{IP} = \widehat{IP_1}$ , kde  $I$  je bod dotyku kružnic  $n, h_1$ . Kružnice  $n, h_1$  jsou souměrně sdružené podle společné tečny  $t$  obou kružnic ve společném bodě  $I$ . Tedy i body  $P, P_1$  jsou souměrně sdružené podle tečny  $t$ . Bodem  $P_1$  vedme přímku  $u$  rovnoběžnou s  $t$  a její průsečík s  $h_1$  označme  $Q$ . Body  $P_1, Q$  jsou opět souměrně sdružené podle přímky  $s$ , jdoucí bodem  $I$  kolmo na  $t$ . V bodě  $Q$  vedme kolmici k přímce  $u$  a její průsečík s přímkou  $OP$  označme  $O'$ . Čtyřúhelník  $O'PP_1Q$  je lichoběžník, neboť  $PP_1 \parallel O'Q$ . Přímka  $s$  je v něm střední příčkou, neboť je rovnoběžná s jeho základnami a přitom půlí rameno  $QP_1$ . Proto půlí i druhé rameno  $O'P$ . To však znamená, že  $PN = NO'$  čili  $O' \equiv O$ . Spojme body  $P, Q$ . Z obr. 2 je patrné, že

$$\Delta NPI \sim \Delta OPQ$$

a odtud

$$NP \quad NI = OP \quad OQ$$

čili

$$OP = OQ.$$

Bod  $Q$  leží tudíž na kružnici  $k$ , přímka  $u$  je tečnou této kružnice v bodě  $Q$  a bod  $P_1$  je bodem úpatnice kružnice  $k$  pro pól  $P$  čili bod  $P_1$  je bodem jisté kardioidy, která má v bodě  $P$  bod vratu.

Dokázali jsme, že bod  $P_1$  - a tudíž každý bod naší epicykloidy<sup>2)</sup> - je bodem jisté úpatnice. Dá se však dokázat i obráceně, že každý bod této úpatnice je bodem epicykloidy.

III. Povíme si ještě o jednom vytvoření kardioidy. Budiž dána kružnice  $n \equiv \equiv (N; r)$  a na ní bod  $P$ . Bodem  $P$  proložme libovolnou přímku  $e \neq q$  (obr. 2). Ta protne kružnici  $n$  ještě v bodě  $R$ . Od bodu  $R$  nanesme v obou směrech na přímku  $e$  úsečku velikosti  $2r$ . Na přímce  $e$  dostaneme tím dva různé body  $P_1, P'_1$ , které leží na kardioidě; tuto kardioidu jsme obdrželi podle odstavce II. jako epicykloidu kružnice  $n$ . Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět, v obr. 2 je vše pro něj již připraveno. Čtenáře, kteří by se chtěli o důkaz pokusit, upozorňuji, že cílem je dokázat rovnost  $RP_1 = II I$ .

P o z n á m k a . Budiž dána křivka  $k$  a pevný bod  $P$ , který může, ale nemusí ležet na křivce  $k$ . Bodem  $P$  proložme libovolnou přímku  $e$ , která křivku  $n$  protíná v bodě  $R$ . Od bodu  $R$  nanesme na přímku  $e$  v obou směrech úsečku konstantní (nenulové) velikosti. Tím na přímce  $e$  obdržíme body  $P_1, P'_1$ . Mění-li se přímka  $e$ , mění se i body  $P_1, P'_1$ , které tím vytvoří křivku zvanou *konchoida křivky  $k$  pro pól  $P$* . Vzhledem k dřívějšímu vidíme, že *kardioida je konchoidou kružnice  $n$  pro pól  $P$  ležící na  $n$  a přitom nanášená úsečka je rovna průměru dané kružnice*.

#### Cvičení.

1. Jak vznikne kardioida? Vyslovte její definici! Co je to úpatnice křivky pro daný pól? Co je to konchoida křivky pro daný pól?

2. Co je úpatnicí elipsy (hyperboly, paraboly) pro pól v ohnisku?

3. Sestrojte kardioidu, jestliže je a) dána její osa, na ní bod vratu  $P$  a další bod  $P_1 \neq P$ ; b) dán bod vratu  $P$  a další dva body  $P_1, P_2$  kardioidy tak, že  $P$  leží mezi  $P_1, P_2$ ; c) dán bod vratu  $P$  a další dva body  $P_1, P_2$  kardioidy, které s bodem  $P$  neleží v jediné přímce.

4. Prof. L. Klír uvedl tuto konstrukci kardioidy (Rozhledy, roč. 22, str. 114): Kolem bodu  $P$  opišme kružnici  $p$  shodnou s kružnicí  $k$  a bodem  $P$  vedme přímku  $q \perp OP$  (obr. 2). Označme  $U \equiv q \times QE$ ;  $EU$  je vzdálenost  $E$  od  $q$ <sup>3)</sup>. Jestliže bod  $E$  leží v polorovině napravo od přímky  $q$  (vztaženo na situaci v obr. 2), sestrojme na přímce  $PE$  bod  $P_1$  tak, aby  $EP_1 = EU$ . Jestliže  $E$  je v opačné polorovině, potom k úsečce  $PE$  přičteme úsečku  $EP_1 = EU$ . V obou případech je bod  $P_1$  bodem kardioidy. Dokažte to!

<sup>2)</sup> Viz č. 5. Rozhledů, str. 206.

<sup>3)</sup> Bod  $U$  není středem kružnice  $h_1$ .

(Návod:  $OPEQ$  je kosočtverec;  $\triangle PEU \cong \triangle QEP_1$  a oba jsou souměrně sdružené podle přímky  $OE$ .)

5. Je dána kružnice  $k$  a na ní bod  $P$ . Bodem  $P$  proložíme libovolnou přímku  $s$  a pak sestrojíme tečny  $t, t'$  kružnice  $k$ , které jsou kolmé k přímce  $s$ . Průsečky tečen  $t, t'$  s přímkou  $s$  jsou body kardioidy, pro níž bod  $P$  je bodem vratu. Dokažte!



## Fysika

Josef Kleczek, Ondřejov:

## Planety

(Dokončení)

V minulém článku jsme se zabývali podrobně naší planetou - Zemí. Nyní se seznámíme s ostatními planetami slunečního systému.

### *Planety typu Země.*

Určení vzdáleností planet provádějí astronomové trigonometricky, podobně jako geometři měří vzdálenosti nedostupných míst. Theoreticky je měření velmi jednoduché: základna a oba přilehlé úhly určují všechny ostatní veličiny v trojúhelníku. Praktické provádění však vyžaduje velmi přesných měřicích přístrojů, metod a zkušených pozorovatelů. Ze vzdálenosti planety a jejího úhlového průměru - to jest úhel, pod nímž vidíme kotouček planety se Země - lze snadno vypočítat její skutečný průměr v kilometrech. V tabulce I jsou výsledky pro všechny planety.

Svízelnějším problémem je určení hmoty planet. Hmotu kteréhokoliv tělesa ve vesmíru lze určit z jejího působení na jiné sousední těleso. To platí o hvězdách i o planetách. Od dob Newtonových (17. stol.) víme, že dvě tělesa se přitahují silou, úměrnou součinu jejich hmot a nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti. Na př. dráha Marsu kolem Slunce nemůže být přesně vzato elipsa, neboť Venuše, Země a ostatní planety na Mars působí a pozměňují jeho pohyb. Tak původní dráha - podle prvního zákona Keplerova elipsa, určená sluneční přitažlivostí - je rušena planetami. Pečlivým sledováním poloh Marsu můžeme určit, která z nepravidelností pohybu je způsobena ostatními planetami. Hmotu naší Země je známa. Známe sílu, jakou je přitahováno na povrchu Země závaží 1 g. Hmotu Země si můžeme představit soustředěnu ve středu, takže vzdálenost obou těles, Země a našeho závaží, je 6370 km. V Newtonově zákonu zůstává jediná neznámá, hmota Země.

Hmota Země a Venuše jsou téměř stejné, Merkuru je 18krát menší a Marsu 10krát menší než hmota Země. Ze známých hmot a poloměrů vychází hustota. Tak zjistíme, že hustoty všech čtyř planet jsou zhruba stejné. Hustota Merkuru a Marsu je 4, Venuše 5 a naší Země 5,5. Nitro těchto planet se nemůže lišit od nitra Země. Rozdíly v tlaku v jejich hlubinách zcela vysvětlí rozdíly v průměrné hustotě. Hustota vzrůstá s tlakem. Zatím co tlak ve středu Marsu činí dvě stě tisíc atmosfér, je tlak ve středu Země 4 miliony atmosfér. Středové hustoty Země a Venuše budou větší než středové hustoty Merkuru a Marsu. Rozdíly ve stavbě nitra všech čtyř planet jsou malé. Naopak rozdíly jejich povrchových podmínek jsou značné, týkají se především rozsahu a teploty atmosfér.

Jak jsme viděli na příkladu Země, vyzařují planety infračervené záření. Naše přístroje ho zachytí velmi malé množství. Když je na př. Mars nejbližší Zemi, dopadá k nám tolik tepla, jako ze 40wattové žárovky, vzdálené 4 km. Nicméně i toto malé množství lze měřit a vypočítat z něho teplotu planety. Teplota povrchu Marsu kolísá podle místa s dobou (podobně jako na Zemi) mezi  $-60^{\circ}$  a  $+15^{\circ}$ .

Na Merkuru byla dokázána atmosféra teprve v poslední době. Merkur je podroben mnohem větším teplotním změnám než kterákoliv jiná planeta v sluneční soustavě. V místech osvětlených Sluncem panuje vysoká teplota, kdežto v těch částech povrchu Merkuru, kam sluneční záření nedopadne, je teplota velmi nízká. Merkur pravděpodobně obíhá kolem Slunce tak, že k němu stále obrací stejnou polovinu. Obíhá podobně jako Měsíc kolem Země. Jeho otočení kolem osy a oběh kolem Slunce trvají stejně dlouho, a to 88 dní. Části povrchu Merkuru, vystavené prudkým slunečním paprskům, mají teplotu  $400^{\circ}\text{C}$ .

Gravitační působení ostatních planet na Merkura má za následek, že se jeho eliptická dráha stáčí. Toto stáčení lze pozorovat velmi přesně. Leverrier v r. 1845 vypočetl poruchy Merkurovy dráhy ode všech planet a zjistil, že stáčení je ve skutečnosti rychlejší, než jaké by odpovídalo vlivu planet. Později přisoudil tento nesouhlas neznámé planetě Vulkánu, jež měla být blíže Slunci než Merkur. Přes mnohá pečlivá pátrání během různých zatmění Slunce, Vulkán však nalezen nebyl. Správný výklad podala až v r. 1915 theorie relativity, která zpřesnila Newtonův gravitační zákon, podle kterého Leverrier původně určil stáčení dráhy Merkuru.

Venuše má rozsáhlou atmosféru. Její povrch však nevidíme, protože je stále zahalena v mracích. Tmavé rysy jsou příliš nejasné a nepravidelné, než abychom z nich mohli přesně stanovit dobu rotace planety. Stejně jako Země, tak i Mars a Venuše mají ve svých atmosférách mnoho dusíku. Dusík nemá ve viditelné části spektra spektrální čáry, naopak kysličník uhličitý má intenzivní absorpční pásy. Ve spektru Venuše i Marsu se tyto tmavé absorpční pásy skutečně vyskytují, takže z jejich intensity můžeme určit, v jakém množství se kysličník uhličitý v obou atmosférách nachází. Na Marsu je ho dvakrát více než na Zemi a na Venuši dokonce 400krát více. Polární čepičky na Marsu jsou podle Kuiperových a Dollfusových pozorování z jemných zrníček ledu. Soudíme-li podle teploty, je podnebí na Marsu drsné, je však takové, že v něm mohou žít některé organismy. V průběhu roku můžeme pozorovat změny na povrchu Marsu. Rozsáhlé oblasti, které jsou během Marsova jara modravé, postupně k podzimu žloutnou. Modravé

oblasti svědčí pro přítomnost drobných organismů, jaké žijí u nás na ledovcích. Otázka složitějších organismů na Marsu zůstává stále otevřená. Naše pozorovací prostředky dosud nemohou dát spolehlivou odpověď.

Je život na Venuši? Nedávná pozorování v SSSR nasvědčují tomu, že život na Venuši je. Teplota kolem  $+50^{\circ}$  není tak vysoká, aby při ní nemohly žít jednoduché vegetace.

Ještě bychom měli říci několik slov o nejvzdálenější planetě Pluto, kterou někteří řadí mezi planety podobné Zemi. Přichází z ní však velmi málo světla, které nestačí pro podrobný spektrální rozbor. Pluto je tak studený, že na něm všechny plyny, kromě neonu a helia, musí být ztuhlé. Hmotu planety Pluto, původně vypočtená Lowellem z poruch Uranu dlouho před jeho objevením, by měla být 7krát větší než Země. Je však třeba ještě dlouhých pozorování Neptunových poruch, působených Plutonem, než bude jeho hmota určena s dostatečnou přesností. V r. 1985, kdy se Pluto dostane do příznivých pozorovacích podmínek, bude jej možno spatřit již v dalekohledu s 15centimetrovým objektivem.

### *Velké planety.*

Porovnáme nejprve hustoty velkých planet. Hmoty Jupitera, Saturna, Uranu a Neptuna jsou dobře známy. Jsou totiž obklopeny několika měsíci, z jejichž pohybů lze hmotu planet vypočítat. Jupiter má 12 měsíců, Saturn 9, Uran 5 a Neptun 2. Tak zjistíme, že Jupiter má hmotu 318krát větší než Země, Saturn 95krát, Uran 15krát a Neptun 17krát. Tyto planety jsou však také mnohem větší než Země. Proto jsou jejich průměrné hustoty malé (viz tabulku II v minulém čísle). Saturnova průměrná hustota je tedy menší než hustota vody. Jak zjistíme z pátého sloupce tabulky II, jsou doby rotace velkých planet krátké. V důsledku rychlé rotace jsou velké planety zploštělé. Toto zploštění je patrné na první pohled na př. u Jupitera. Ze změřených zploštění lze stanovit, že středová hustota velkých planet je mnohem větší než hustota průměrná, kdežto ve vnějších částech je hustota velmi malá. Tyto planety jsou zčásti plynné.

Má se za to, že velké planety sestávají především z vodíku a helia. K nim je přimíšeno něco těžkých prvků: kyslík, uhlík, kovy. Se vzrůstajícím tlakem směrem ke středu mění se vlastnosti směsi. Tak u Jupitera v hloubce 1000 km pod povrchem je vodík tuhý a ještě ve větších hloubkách se stává dobrým vodičem tepla a elektřiny. Hustota vodíku v hlubokém nitru za tlaku 50 milionů atmosfér dosahuje podle Fesenkova hodnot 6 až 10. Tato určení jsou na základě theoretického vztahu tlaku a hustoty. V laboratoři takových tlaků nebylo dosaženo.

Absorpční pásy ve spektru Jupitera a Saturna ukazují na přítomnost čpavku a methanu, u Uranu a Neptunu na přítomnost methanu. Atmosféry velkých planet jsou tedy obrovským vodíkovým obalem, v němž je rozpuštěn čpavek a methan. Při určitém tlaku dojde k vytvoření mraků z čpavkových krystalků, které pokrývají na př. celého Jupitera. V důsledku velmi rychlé rotace velkých planet jsou v jejich atmosféře obrovské proudy. Povrch planet se tak zdá být rozdělen na široké pásy, rovnoběžné s rovníkem. Každý pás je ve skutečnosti obrovským proudem v atmosféře, běžícím nad povrchem.

Saturn je obklopen rozsáhlým, velmi plochým prstencem, který sestává z velkého množství drobných i větších těles. Jsou to vlastně nesčetné měsíčky, obíhající kolem Saturna, bližší rychle, vzdálenější pomaleji. Dnes máme za to, že jsou to úlomky ledu, které vznikly roztrháním jednoho ledového Saturnova měsíce v důsledku slapových sil. Několik Jupiterových a Saturnových měsíců je z větší části z ledu. Saturnův Titan má dokonce methanovou atmosféru.

Všechny poznatky o velkých planetách a jejich měsících vedou k důležitým kosmogonickým<sup>1)</sup> závěrům. Otvírají nám často výhled do dávné minulosti naší planetární soustavy.

### *Planetky.*

Jak jsme již řekli, zaplňují tyto malé členové sluneční soustavy převážně prostor mezi drahou Marsu a Jupitera. Některé z nich se však přibližují Slunci více než Merkur a jiné zabíhají až za Jupitera. Je jich velmi mnoho a stále se objevují nové a nové, především fotograficky. Dnes, kdy je fotografie tak důležitá v astronomii, není již uměním objevit novou planetku. Na většině observatoří jim vůbec nevěnují pozornost, někde je dokonce nazývají „havětí na obloze“. Často byly považovány za proměnné hvězdy, komety, nebo měsíce. Mnohá fotografie, exponovaná s nadějí na nový objev, zaznamenala jen nějakou z planetek. Hodinový snímek části oblohy u ekliptiky, pořízený 2,5metrovým dalekohledem hvězdárny na Mt. Wilsonu, zachytil nejméně jednu novou planetku.

Hmoty planetek jsou velmi malé; tak malé, že nemohou nijak rušivě působit na planety. Hmoty největších planetek se vypočítají z objemu za předpokladu, že jejich hustota je stejná jako v pozemských skalách. Je tak malá, že středový tlak nemůže nijak změnit hustotu. Ceres má hmotu 8tisíckrát menší než Země. Pochopitelně, že úniková rychlost na planetkách je tak malá, že by se jejich atmosféra rozptýlila do okolního prostoru během několika hodin. Ceres by neudržela atmosféru déle než tři dny.

Některé planetky jsou kulové (na př. Ceres), jiné jsou nepravidelného tvaru, takže následkem rotace k nám odrážejí různé množství světla, jako na př. E r o s. Některé sice mají kulový tvar, přesto však jejich jasnost kolísá. Je to důsledek různé odrazové schopnosti v různých částech jejich povrchu, jako na př. u E u n o m i e.

Vznik planetek byl předmětem mnoha kontraversí. Kuiper a Brower vyslovili domněnku, která je analogií hypotézy Olbersovy. Původně bylo v sluneční soustavě jen málo větších planetek. Srážkami mezi nimi došlo k drolení na menší tělesa - planetky. Je známo pět skupin planetek s 16 až 81 členy, u nichž skutečně můžeme předpokládat společný původ. K poslední srážce podle výpočtů mělo dojít před 50 miliony lety.

Také studium pohybových a fyzikálních vlastností planetek nám může mnohé prozradit z dávné historie naší planetární soustavy.

<sup>1)</sup> Kosmogonie = nauka o vzniku vesmíru. (Red.)

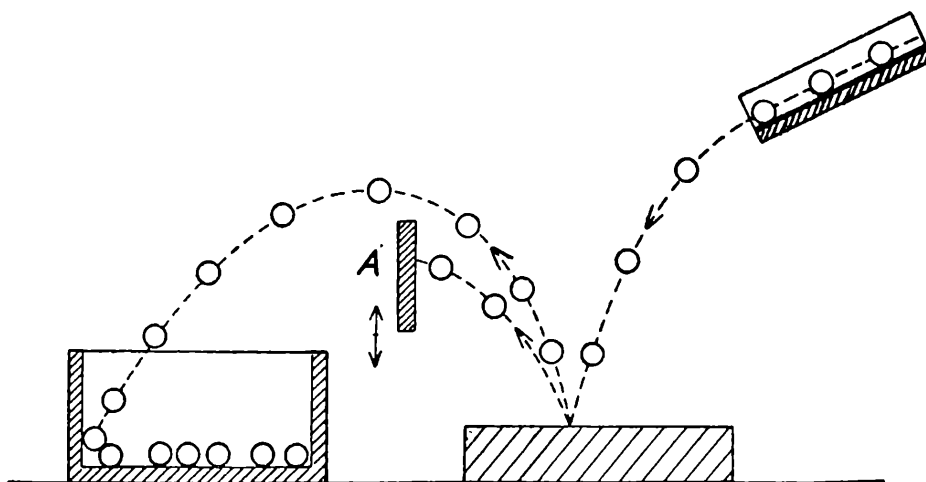
<sup>2)</sup> Nova = nová hvězda. (Red.)



## O rázu těles

Tvoří-li si dvě tělesa (či více těles) vzájemnou překážku ve svém pohybu, tělesa na sebe naráží, dochází k rázu těles. Chceme-li vypočítat pohybové změny, jež se při rázu vyskytnou, musíme znát tvary obou těles, jejich materiál, polohu a rychlosti. Zpravidla rozumíme rázem těles děj probíhající mezi pevnými tělesy. V některých případech bychom mohli snad mluvit o rázu těles pevných s tělesy kapalnými, na př. při házení kamínků - „žabek“ - na vodní hladinu.

S rázem se setkáváme v přírodě na každém kroku. Při vzájemném setkání jakýchkoliv dvou těles dochází vždy k rázu, protože se k sobě přiblížila nutně nenulovými rychlostmi. Nedokonalou pružností těles pak je způsobeno, že tělesa po rázu od sebe neodskočí a tedy děj za ráz „v pravém slova smyslu“ obvykle ne-



Obr. 1

pokládáme. Zvláště patrné jsou však účinky rázu na příklad při dopravních nehodách, při dopadu rychle se pohybujících těles, meteoritů, při pádu s větší výšky (v gravitačním poli) a pod. Známé jsou také účinky rázu při míčových hrách. Také v technické praxi má ráz velkou důležitost, zejména při tváření materiálu kování a lisováním, při rázových zkouškách pevnosti a tvrdosti materiálů a pod. Tak na příklad při tak zvaných odrazových zkouškách bývá někdy v praxi určována tvrdost z výšky odskoku zkušební tělíska, je-li svisle puštěno na zkoumaný povrch s určité výšky. Jako provozní zkouška se podobná metoda uplatnila při zkoumání tvrdosti kuliček pro kuličková ložiska. Na obr. 1 je schematicky nakresleno takové zkušební zařízení. Výškou mezistěny *A*, kterou některé z kuliček přeskočí, můžeme řídit výběr podle požadované tvrdosti.

Zvláště význačnou úlohu hraje ráz v moderní fyzice. Podle kinetické teorie hmoty jsou molekuly každého tělesa ve stálém pohybu. Součet kinetických energií všech molekul tělesa jsou jeho tepelnou energií. Pokud nejsou molekuly vázány na nějaké stabilní rovnovážné polohy, kolem nichž kmitají, jak je tomu u těles

pevných, pohybují se všemi možnými směry. Je-li počet molekul v objemové jednotce značný, dochází při takovém neuspořádaném pohybu i v krátkém časovém úseku k úžasnému počtu jejich vzájemných srážek, rázů. Neuspořádaný pohyb molekul byl u kapalin experimentálně potvrzen po prvé Brownem (1827), který shledal, že pylová zrnka, vznášející se ve vodě, nejsou v klidu, nýbrž v ustavičném trhavém pohybu, jehož směr se zcela nepravidelně měnil. Pozorování prováděl ovšem mikroskopem. Tento úkaz je po objeviteli zván *Brownovým pohybem*.<sup>1)</sup>

Pohyb molekul je nesmírně složitý a je nemožné sledovat přesně pohyb některé z nich. Theoretické závěry je možno činit jen s pomocí statistických zákonů. Ty platí ovšem jen pro velké soubory, tedy jen pro soustavy o velkých počtech molekul. V nepříliš malých objemech látek je tato podmínka za normálního tlaku a teploty dokonale splněna. Tak na př. v  $1 \text{ cm}^3$  plynu je za normálního tlaku a teploty asi  $3 \cdot 10^{19}$  molekul. Počet srážek za časovou jednotku je, jak již bylo naznačeno, značně veliký. Tak na příklad počet rázů molekuly vodíku s ostatními molekulami za 1 sekundu dosahuje za normálních podmínek (t. j. tlaku a teploty) řádu  $10^{10}$ . Tolikrát se za 1 sekundu změní velikost i směr každé z molekul.

K rázu dochází i mezi elementárními částicemi hmoty, protony, neutrony, elektrony a pod. Podobně jako molekuly plynu, sráží se i volné elektrony, tvořící „elektronový plyn“ uvnitř kovů. Pohybem volných elektronů v kovu a jejich vzájemnými srážkami mezi sebou i s ionty tvořícími krystalickou mříž, je umožněno intenzivní vzájemné předávání kinetické energie, čímž vysvětlujeme dobrou tepelnou vodivost u kovů.

Konečně je předpokládáno rázové působení i mezi elektrone m (jednou z elementárních částic) a fotonem, jenž je kvantem elektromagnetického záření. Srážkou fotonu s elektronem je vysvětlován rozptyl paprsků X při jejich průchodu hmotou. Při něm dochází také ke změně vlnové délky dopadajících paprsků. Compton (1923) ukázal, že pro tento předpokládaný ráz platí stejné zákony jako pro ráz pevných těles při velkých rychlostech (srovnatelných s rychlostí světla). Po svém objeviteli byl tento fyzikální jev nazván *Comptonovým jevem*.

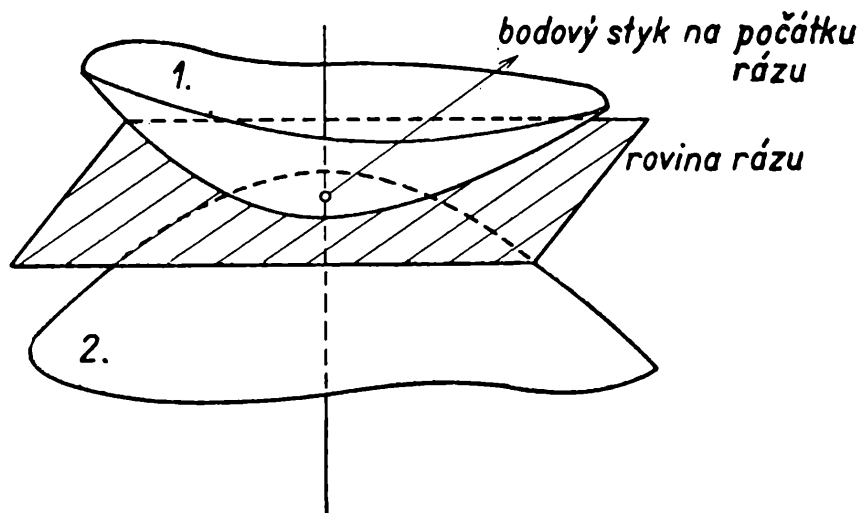
O dalších různých rázových dějích mohli bychom pojednat ještě širěji; omezme se úvodem zatím jen na jejich hrubý výčet. S některými důležitými aplikacemi se blíže setkáme později.

Styk dvou těles může být bodový, křivkový nebo plošný. Omezme se na nejčastější s t y k b o d o v ý. Je ovšem samozřejmé, že bodový styk je bodovým

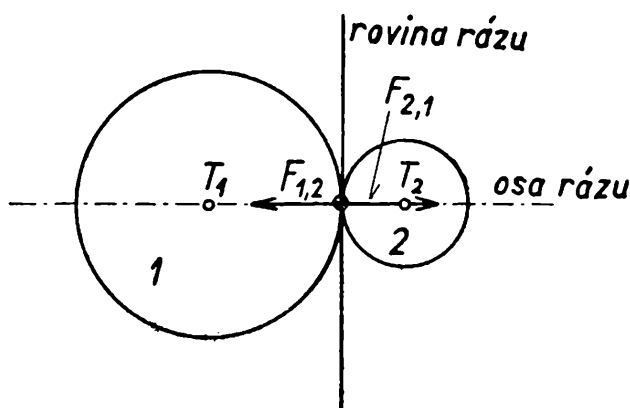
---

<sup>1)</sup> Objevitel se původně domníval, že tento pohyb je projevem života, že je tedy původu organického. Ježto se však ukázalo, že podobné pohyby jevíly i částičky prachu, podobných velikostí jako pylová zrnka, suspendované v kapalinách a poněvadž jejich rychlost se zvětšovala s rostoucí teplotou kapalin, musely všechny hypotézy ustoupit tomuto výkladu: Představujeme si, že molekuly tvořící kapalinu, jsou v neustálém pohybu. Pohybují se všemi směry. Nárazy molekul na větší částici se nijak neprojeví, protože se částice setká v témž okamžiku se stejným počtem molekul se všech stran, takže nárazy udělené jí sousedními molekulami se v celku navzájem ruší. Proto částice velké proti molekulám zůstávají prakticky v klidu. Je-li však částice malá, nejsou již nárazy na její malý povrch ve všech směrech vyrovnány, ježto počet molekul, jež do ní narážejí, není již tak nesmírný. Nerovnoměrnost v rozdělení okamžitých nárazů pak způsobí pohyb částice. Ježto se však s časem mění počet molekul na částici s různých stran narážejících, mění se i okamžitá nevyrovnaná nárazová síla a tudíž i pohyb částice.

jen v okamžiku počátku rázu, případně na jeho konci, protože se při rázu obě tělesa poměrně velkými nárazovými silami deformují a styk se pak stává plošným. *Nárazovými silami* rozumíme síly, jimiž na sebe tělesa vzájemně působí při rázu. Probíhá-li ráz velmi rychle, mohou nabýt i velmi značných hodnot a způsobit velké trvalé deformace. V místě bodového styku mají obě tělesa společnou *tečnou rovinu rázu*. Kolmici na tuto rovinu v místě styku nazýváme *osou rázu* (viz obr. 2).



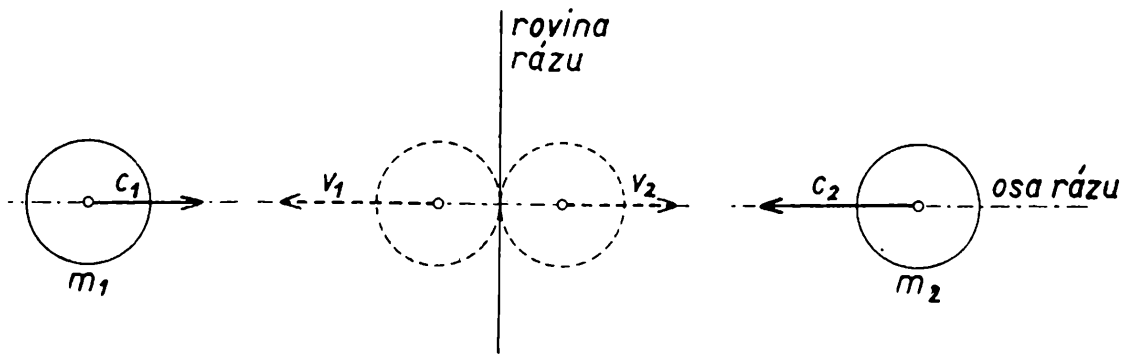
Obr. 2



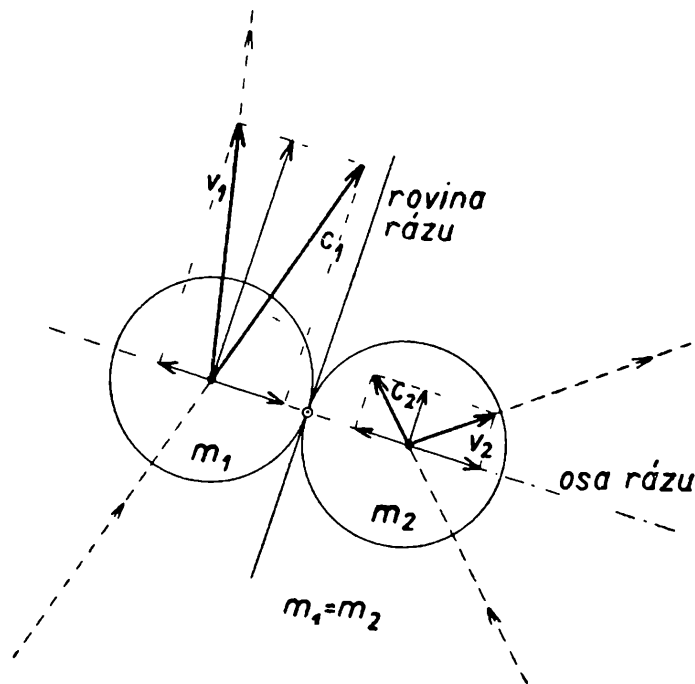
Obr. 3

Prochází-li osa rázu těžišti obou těles, nazýváme takový ráz *rázem středovým* (centrickým) (viz obr. 3). Není-li tato podmínka splněna, jde o *ráz výstředný* (excentrický). Abychom si dále své úvahy zjednodušili, budeme se zabývat rázem kulových těles (koulí); jejich ráz bude vždy rázem středovým. Podle pohybu zvolených těles-koulí před rázem, budeme dělit jejich ráz na *přímý*, s nímž se setkáme tehdy, budou-li se těžiště obou koulí pohybovat po společné přímce (viz obr. 4). Nebude-li tomu tak, půjde o *ráz šikmý* (obr. 5).

S hlediska jakosti materiálu mluvíme o rázu *dokonale pružném*, nesetkáme-li se po rázu s trvalými deformacemi. Opakem je ráz *dokonale nepružný*, při němž jsou veškeré deformace trvalé (plastické). V případě, že se při rázu setkáme s deformacemi jak plastickými, tak i elastickými (pružnými), nazýváme takový ráz *polopružným* nebo *nedokonale pružným*. Je-li povrch kulových těles drsný, objeví se



Obr. 4



Obr. 5

při přímém rázu rotujících koulí, nebo v každém případě u rázu šikmého, tečná nárazová síla, jejímž působením dojde také ke změně rotace koulí. Takovému rázu říkáme *ráz drsný*. Příkladem takového rázu může být *vrtný ráz*, o němž pojednáme později.

Za tělesa, jež se setkají v rázu, jsme zvolili koule. Pojednejme nejprve o přímém rázu dokonale pružných a hladkých koulí.

## Přímý ráz dokonale pružných a hladkých koulí.

Jednoduché řešení rázu plyne ze dvou podmínek. První podmínka je dána *zákonem o zachování hybnosti*, podle něhož celková hybnost obou koulí před rázem musí se rovnat celkové hybnosti koulí po rázu. Tento zákon prostou úvahou plyne z druhého Newtonova pohybového principu, nazývaného také *p r i n c i - p e m s í l y*. Podle něho je časová změna hybnosti úměrná vnější působící síle. Pokládáme-li obě koule za soustavu proti vnějšku silově izolovanou, musí hybnost zůstat stálá.

Druhá podmínka rázu plyne ze zákona o zachování kinetické energie. Podle ní je celková kinetická energie soustav obou koulí před rázem i po rázu stejná. V případě dokonale pružných koulí je to jistě samozřejmé, protože se při rázu nevykytnou ztráty kinetické energie, způsobené její transformací v teplo a deformační práci.

Napišme si nyní obě podmínky rovnicemi. Hmoty obou koulí si označme  $m_1$  a  $m_2$  a jejich rychlosti před rázem  $c_1$  a  $c_2$ . Po rázu budou rychlosti týchž koulí  $v_1$  a  $v_2$ . Podle zákona o zachování hybnosti musí platit

$$m_1c_1 + m_2c_2 = m_1v_1 + m_2v_2, \quad (1)$$

podle zákona o zachování kinetické energie pak podobně

$$\frac{1}{2} m_1c_1^2 + \frac{1}{2} m_2c_2^2 = \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2 \quad (2)$$

O změně potenciální energie nemusíme uvažovat, protože jsme naši soustavu volili jako silově izolovanou a ke gravitačním silám nepřihlížíme. Dosadíme-li nyní do rovnice (2) postupně za  $v_1$  a  $v_2$  z rovnice (1), dostaneme dvě kvadratické rovnice

$$v_1^2(m_1 + m_2) - 2v_1(m_1c_1 + m_2c_2) + c_1^2(m_1 - m_2) + 2m_2c_1c_2 = 0$$

$$v_2^2(m_1 + m_2) - 2v_2(m_1c_1 + m_2c_2) + c_2^2(m_1 - m_2) + 2m_1c_1c_2 = 0,$$

z nichž po neznámé rychlosti  $v_1$  a  $v_2$  plyne

$$v_1 = \frac{m_1c_1 + m_2c_2 \pm m_2(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{m_1c_1 + m_2c_2 \pm m_1(c_2 - c_1)}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

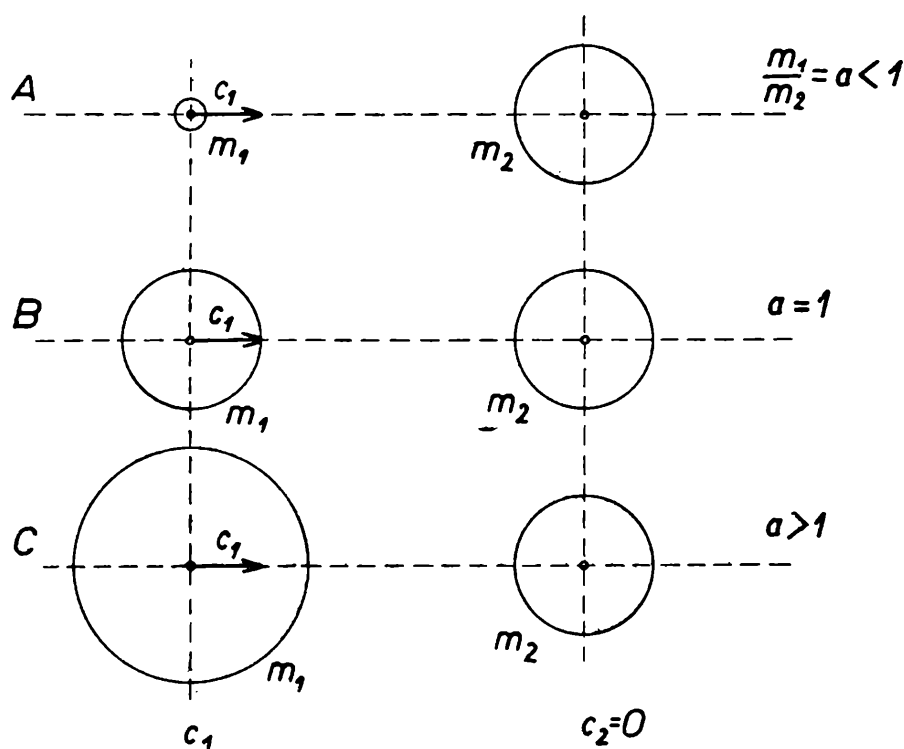
Dostáváme tak pro rychlost každé z obou koulí dvě hodnoty, z nichž jedna (příslušející v daném případě *z á p o r n é m u z n a m é n k u*) odpovídá *s k u - t e č n é m u r á z u*, druhá (pro znaménka kladná) vede - jak se snadno přesvědčíme - k nezměněným rychlostem, což odpovídá *o p a č n ý m* směrům rychlostí před rázem. Koule se před rázem tedy pohybují směrem od sebe, k rázu vůbec nedojde.

Kdyby jedna z koulí byla před rázem v klidu (na př. koule hmoty  $m_2$ ), vztahy (3) a (4) by se ještě zjednodušily

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1, \quad (5)$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1 \quad (6)$$

Uvidíme, že podle toho, zdali poměr hmot  $\frac{m_1}{m_2} = a$  je menší, roven nebo větší než jedna, mohou nastat tři význačné případy. Viz též obr. 5.



Obr. 6

A. Zvolme  $m_1 < m_2$ , tedy  $\frac{m_1}{m_2} = a < 1$ . Narazivší koule má menší hmotu než koule klidná, tedy podle (5) a (6) dostaneme

$$v_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} c_1 = -\frac{m_2(1 - a)}{m_2(a + 1)} c_1 = -\frac{1 - a}{a + 1} c_1,$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1 = \frac{2a}{a + 1} c_1$$

Kdyby nebylo  $c_2 = 0$ , počítali bychom rychlosti po rázu ze vztahů (3) a (4). První koule, jež narazila, se odrazí zpět (znaménko minus) rychlostí menší. Koule druhá dá se do pohybu stejným směrem, jakým se pohybovala první koule před nárazem.

B. Ve druhém případě necht' mají obě koule stejné hmoty  $m_1 = m_2$ ,  $a = 1$ . Rychlost koulí po rázu bude

$$v_1 = 0, \quad v_2 = c_1$$

První koule se zastaví, druhá se dá do pohybu rychlostí stejnou (co do směru i velikosti), jako měla původně první koule. Říkáme, že si stejně hmotné koule vymění rychlosti.

C. Konečně ve třetím případě  $m_1 > m_2$ ,  $a > 1$ . Narazivší koule je hmotnější. Podle (5) a (6) dostaneme

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1 = \frac{a - 1}{a + 1} c_1, \quad v_2 = \frac{2a}{a + 1} c_1$$

Po rázu se obě koule pohybují stejným směrem, jaký měla první koule před rázem. Druhá koule se bude pohybovat rychleji. Kdyby poměr  $a$  byl značně veliký, mohli bychom dojít v limitě

$$\lim_{a \rightarrow \infty} v_2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{a + 1} c_1 = 2c_1$$

k tomu, že menší koule se bude pohybovat rychlostí přibližně dvojnásobnou, než jakou měla před rázem narazivší koule. Je to případ *mechanické rychlostní multiplikace*, o níž si povíme někdy jindy.

Dr František Rein, Praha:

## mlha

*Úvod.* Často pozorujeme, že ovzduší, hlavně v přízemních vrstvách, je zakaleno různými přímíšeninami natolik, že se v o d o r o v n á d o h l e d n o s t (největší vzdálenost ve vodorovném směru, na kterou lze rozeznat předměty v terénu) značně zmenšuje. Příčinou tohoto jevu je buď přítomnost pevných (prachových, kouřových a pod.) částic nebo velmi malých vodních kapek či ledových krystalků ve vzduchu. Podle charakteru částic a podle délky dohlednosti jsou tyto zjevy v meteorologické praxi rozděleny na *mlhu* (vodní částice ve vzduchu při průměrné vodorovné dohlednosti nejvýše 1 km), *kouřmo* (vodní částice ve vzduchu, dohlednost 1 až 2 km) a *zákal* (pevné částice, prach nebo kouř, částičky solí z mořské vody a pod., dohlednost přes 2 km, ovzduší není však jasně průzračné, často má namodralý nádech a detaily vzdálenějších předmětů nelze rozeznati).

Tvoření mlhy a kouřma studujeme nejen proto, že nám do jisté míry přibližují jiné podobné atmosférické děje, totiž tvoření oblaků, nýbrž i pro jejich hospodářskou důležitost. Účinky mlhy mohou být s ekonomického hlediska kladné i záporné. Jedním z příznivých činitelů je na př. to, že za jasných nocí, kdy se přízemní vrstvy vzduchu ochlazují od vyzařujícího zemského povrchu, teplota po vytvoření mlhy dále téměř neklesá. Tak může někdy vznik mlhy zabránit nočnímu mrazu a na jaře a na podzim uchránit před poškozením ovocnářské, zahradní a jiné kultury. Nepříznivých projevů mlhy je však bohužel více. Mlha je velkým nepřítelem dopravy, zvláště letecké a někdy i silniční, a způsobila již velmi mnoho věcných škod a stála i velký počet lidských životů.

Z těchto důvodů se meteorologie stále věnuje studiu mlh, podmínkám jejich

vzniku, správným předpovědím i otázkám umělého odstraňování místních mlh.

V tomto článku ujasníme nejprve základní fyzikální vlastnosti mlhy, potom probereme stručně nejdůležitější povětrnostní podmínky jejího vzniku a nakonec si povšimneme způsobů předpovídání mlhy a jejího umělého odstraňování.

*Základní fyzikální charakteristiky mlhy.* Jak jsme se zmínili již v úvodu, skládá se mlha z drobných vodních kapiček. Jejich rozměry se pohybují od poloměru asi 1 mikronu k 50 až 60 mikronům. Většina kapek v mlze při kladných teplotách Celsia má poloměr o velikosti mezi 7 až 15 mikrony, při záporných teplotách je poloměr většiny přechlazených kapek 2 až 5 mikronů. V kouřmu je poloměr kapiček zpravidla menší než 1 mikron. Přesahuje-li poloměr kapek 60 mikronů, nemohou se zpravidla tak velké kapky vznášeti ve vzduchu, spojují se někdy ve větší kapky a ty se pak pomalu snášejí k zemi. V tomto případě mluvíme o *mžení při mlze*.

Dalšími důležitými charakteristikami mlhy jsou její *vodnost* a počet kapek v jednotce objemu. Vodností rozumíme množství vody (kapalná fáze) v objemové jednotce. Udává se zpravidla v gramech v kubickém metru. Bylo zjištěno, že při kladných teplotách obsahuje mlha v průměru 1 až 1,5 g vody v 1 m<sup>3</sup>, při záporných teplotách řádu -20 až -30 °C (extrémní podmínky výskytu přechlazené vody a tedy i mlhy) asi pouze 0,05 až 0,1 g/m<sup>3</sup>. Rovněž počet vodních kapek v objemové jednotce značně kolísá a do značné míry určuje průhlednost mlhy (spolu s velikostí kapek). Při slabé mlze (dohlednost o málo menší než 1 km) se vyskytuje průměrně 50 až 100 kapek v 1 cm<sup>3</sup>, v husté mlze, při níž je dohlednost snížena pod 200 m, obsahuje 1 cm<sup>3</sup> i 500 až 600 kapek.

Byl rovněž odvozen vztah mezi *dohledností* ( $L$  v metrech), středním poloměrem kapek ( $r_m$  v mikronech) a vodností ( $a$  v g/m<sup>3</sup>). Tento vztah zní

$$L (m) = 2,5 \frac{r_m}{a}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za  $r_m = 15$  mikronů, můžeme ze známé dohlednosti odhadnout vodnost mlhy. Odhad je ovšem jen přibližný vzhledem ke střední dosazené hodnotě  $r_m$ .

Abychom si mohli vyložit fyzikální děje vedoucí k vytvoření mlhy, musíme nejprve vysvětlit, jak vzájemně souvisí teplota a vlhkost vzduchové částice. Suchý vzduch v atmosféře prakticky neexistuje, to znamená, že v každé vzduchové částici je obsaženo určité proměnné množství vody ve formě vodní páry. Lze ji měřit buď v jejím absolutním množství a pak ji udáváme jako množství vodní páry v objemové jednotce vzduchu, či jako parciální tlak vodní páry z celkového tlaku vzduchu (podle Daltonova zákona), nebo ji lze měřit v relativním množství. Maximální obsah vodní páry, kterou může vzduchová částice obsahovat, aniž by došlo ke kondensaci, je totiž závislý na její teplotě. Čím je teplota částice vyšší, tím pojme větší *absolutní vlhkost* (t. j. množství vodní páry). Poměr okamžitého množství vodní páry k maximálně možnému (vzhledem k dané teplotě) nazýváme pak *relativní vlhkostí vzduchu* a udáváme ji v procentech. Vzduch, jehož relativní vlhkost je menší než 100 %, nazýváme *nenasycený vodní parou*. Ochlazováním vzduchové částice lze zvyšovat její relativní vlhkost, Teplotu, kterou dosáhneme *isobarickým*



*ochlazením* vzduchu (t. j. ochlazením za stejného celkového tlaku vzduchu) o relativní vlhkosti 100 %, nazýváme *teplotou rosného bodu*. Každé další ochlazení „pod rosný bod“ má pak za následek vylučování části plynné vodní páry ze vzduchu ve formě kondensace kapalných částic.

Vznik mlhy je tedy závislý především na vzájemném rozdílu teploty vzduchových částic a jejich teploty rosného bodu, dále pak na způsobu a intenzitě isobarického ochlazení. Jiné způsoby ochlazení vzduchových částic, na př. ochlazení vzniklé výdajem vnitřní energie částice na rozpínání při nuceném výstupu (t. zv. *a d i a b a t i c k é o c h l a z e n í*), nevede zpravidla ke vzniku mlhy, nýbrž k vytváření oblaků ve větších výškách. Jelikož mlha vzniká na povrchu zemském, je nutno pro její vznik ochladit vzduch zpravidla isobaricky. Výjimku mohou tvořit některé mlhy v horách, jež však pozorovatel z údolí beztak označuje za nízké vrstevnaté oblaky, nikoli za mlhu.

Z toho co jsme právě řekli vyplývá, že mlha nejčastěji vzniká při takových povětrnostních situacích, jež jsou charakterisovány jasnou, bezoblačnou oblohou, malým pohybem vzduchu nebo bezvětřím a převládajícím vyzařováním tepelné energie, jež vede k ochlazení přizemních vzduchových vrstev od zemského povrchu. Tyto podmínky bývají splněny v oblastech poměrně vyššího tlaku vzduchu (*a n t i c y k l o n á c h*) zpravidla v noci nebo časně ráno. Anticyklony se totiž vyznačují ve vyšších hladinách sestupnými pohyby vzduchu, jež rozpouštějí v důsledku adiabatického ohřátí stlačením vzduchových částic oblačnou pokrývku. V anticyklonách převládá tedy jasné počasí. V noci, kdy neexistuje příjem slunečního záření, povrch zemský vyzařuje tepelnou energii a ochlazuje se. Není-li přítomna nad povrchem země oblačná pokrývka, jsou ztráty tepelné energie zvláště vysoké, čímž se přizemní vrstva vzduchu může od zemského povrchu ochladit až na teplotu rosného bodu i pod ni.

Mlze, která vzniká z těchto příčin, říkáme *mlha radiální*, t. j. mlha vzniklá ochlazením při vyzařování. K tomuto typu mlh náleží v našich krajinách převážná většina ranních mlh za jasného počasí, zvláště v zimě, na jaře a na podzim.

Méně častou u nás, zato však obvyklou na moři a v přímořských oblastech, je t. zv. *mlha advekční*. Vzniká tehdy, když se nad chladný povrch zemský, na př. nad chladnou mořskou hladinu, přisouvá (advehuje) poměrně teplejší a vlhká vzduchová hmota. Vzduch zmíněných vlastností se od studeného podkladu ochlazuje. Je-li dostatečně vlhký, pak rozdíl mezi jeho okamžitou teplotou a teplotou rosného bodu je malý a stačí poměrně malé ochlazení, aby relativní vlhkost dosáhla 100 % a došlo k vytváření mlhy. Advekční mlhy jsou časté právě tam, kde teplý vzduch z pevniny přichází nad moře do oblastí chladných mořských poudů, na př. u severoamerického pobřeží v oblasti Nového Foundlandu. V našich krajinách se advekční mlha vyskytuje jen ojediněle, většinou v zimě, kdy po dlouhotrvajícím chladném období k nám přichází teplejší vlhký vzduch z Atlantického oceánu. Tento typ mlhy není tedy vázán na oblasti anticyklon, nýbrž se vyskytuje jako doprovodný zjev zpravidla na *teplé frontě* (t. j. na rozhraní dvou různě teplých vzduchových hmot pohybujícím se tak, že teplá hmota zaujímá místa, kde dříve byla hmota studená).

Pro úplnost je nutno dodat, že se v našich mírně zvlněných nížinách vyskytují

někdy mlhy, jež nelze zařadit do některého z obou zmíněných typů. Jsou totiž kombinací obou popsanych způsobů vzniku mlhy. Vznikají nejprve zpravidla v údolích jako radiační mlha (chladnější vzduch jakožto těžší kapalina má snahu zaujímat co nejnižší polohu, proto se radiační mlhy vyskytují častěji v údolích), později se vlivem místních systémů atmosférických proudění přesouvají na kratší vzdálenosti až několika kilometrů, kam přicházejí vlastně jakožto mlha advekční až po východu slunce, tedy v době, kdy vlivem dodávání tepelné energie slunečním zářením a oteplováním přízemních vrstev vzduchu obvykle dochází k rozpouštění radiačních mlh. Je to případ dopoledních mlh na úbočích mírných svahů nebo na výše položených planinách, kdy se v údolích mlha již nevyskytuje.

### *Předpověď mlhy a její umělé odstraňování.*

Zmínili jsme se o dvou typech mlhy, radiační a advekční. Předpověď každého z obou druhů vyžaduje zvláštní metodiky. Zmíníme se stručně jak o způsobu předpovídání radiační, tak i advekční mlhy.

Prognosu čili předpověď radiační mlhy lze rozdělit na tyto fáze:

a) Předpověď celkové povětrnostní situace. Pro výskyt radiační mlhy je nejpriznivější oblast vyššího tlaku vzduchu, případně oblast s nevýrazným rozložením tlaku (bez větších tlakových změn v horizontálním směru) a velmi slabým prouděním nebo bezvětrím. Poslední požadavek je pro vznik radiační mlhy velmi důležitý, protože silnější proudění vzduchu v přízemních vrstvách způsobuje turbulentní (vírové) promíchávání spodních vzduchových vrstev, následkem čehož nemůže dojít k postupnému a tudíž intenzivnějšímu prochlazení nejnižší vzduchové vrstvy od chladnoucího zemského povrchu. Tato část předpovědi je prováděna běžnými prognosními metodami, které jsou založeny na kvalitativních či kvantitativních úvahách a výpočtech přesunu a vývoje atmosférických útvarů (oblastí nižšího a vyššího tlaku, front a pod.). Zmínit se podrobněji o metodice těchto celkových předpovědí se vymyká z rámce tohoto článku. Lze se o nich poučit podrobněji na př. v nedávno vyšlé knize S. Hanzlíka „Základy meteorologie a klimatologie“ (NČSAV, 1956).

b) Předpověď nočního ochlazení v místech s jasnou oblohou a bezvětrím. Existuje celá řada metod, které umožňují odhadnout nebo vypočítat za určitých zjednodušujících předpokladů (vzhledem k značné složitosti otázky) pokles teploty v době mezi západem a východem slunce. Jako příklad uvedeme výsledný vzorec pro pokles teploty v noci podle metody Bruntovy:

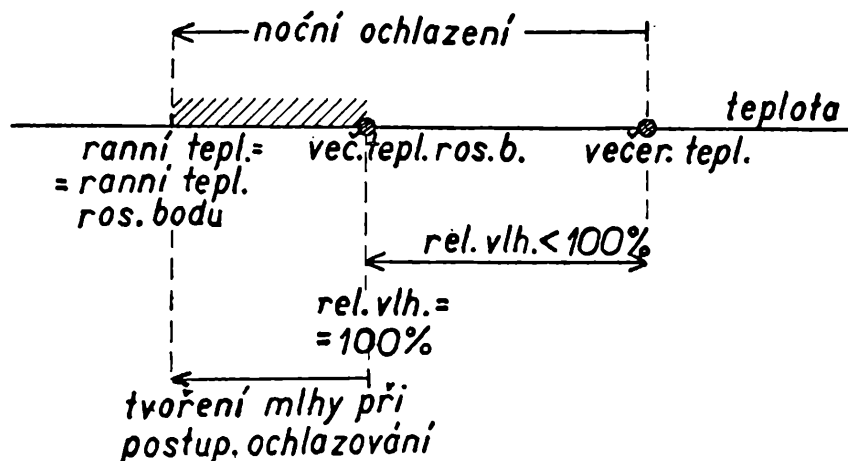
$$\Delta T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{\rho c \sqrt{k}} \cdot \sqrt{t}$$

Ve vzorci znamená  $\Delta T$  pokles teploty v noci ve stupních Celsia,  $R$  střední hodnotu bilance záření na ploše  $1 \text{ cm}^2$  zemského povrchu za minutu,  $\rho$  hustotu půdy na zemském povrchu,  $c$  specifické teplo půdy,  $k$  specifickou vodivost tepla v půdě a  $t$  délku noci v hodinách (doba od západu do východu slunce). *Radiační bilance*  $R$  je algebraickým součtem energie záření na zemském povrchu. V noci je dána prakticky pouze vyzařováním zemského povrchu do světového prostoru, v době okolo východu a západu slunce přistupuje ještě složka krátkovlnného rozptýleného

záření oblohy, jež je zhruba stejně velká a opačného znaménka než vyzařování zemského povrchu. V těchto krátkých časových obdobích je tedy radiální bilance zhruba nulová. Radiální bilanci lze buď měřit, nebo vypočítat ze známých meteorologických podmínek, ostatní údaje je nutno pro dané místo předem zjistit měřením.

Předpověď výskytu mlhy a do jisté míry i její intensity lze tedy provést na základě předpovědi poklesu teploty v noci porovnáním s teplotou rosného bodu v době okolo západu slunce. Je-li totiž předpokládané ochlazení větší než rozdíl mezi okamžitou teplotou a teplotou rosného bodu (obr. 1), dojde velmi pravděpodobně k vytvoření mlhy.

c) Předpověď geografického rozložení mlh v členitém terénu. Je-li předpokládaný pokles teploty poměrně malý, pouze několik málo stupňů Celsia pod rosný bod, lze v členitém terénu očekávat mlhu pouze v údolích, kotlinách a pod., neboť chladný vzduch má snahu stékat po svazích do níže položených míst. Teprve tehdy, dojde-li k vytvoření značně intenzivní mlhy, můžeme předpokládat, že vzduch ochlazený pod rosný bod (v němž mlha vzniká), zaplaví nejen níže polo-

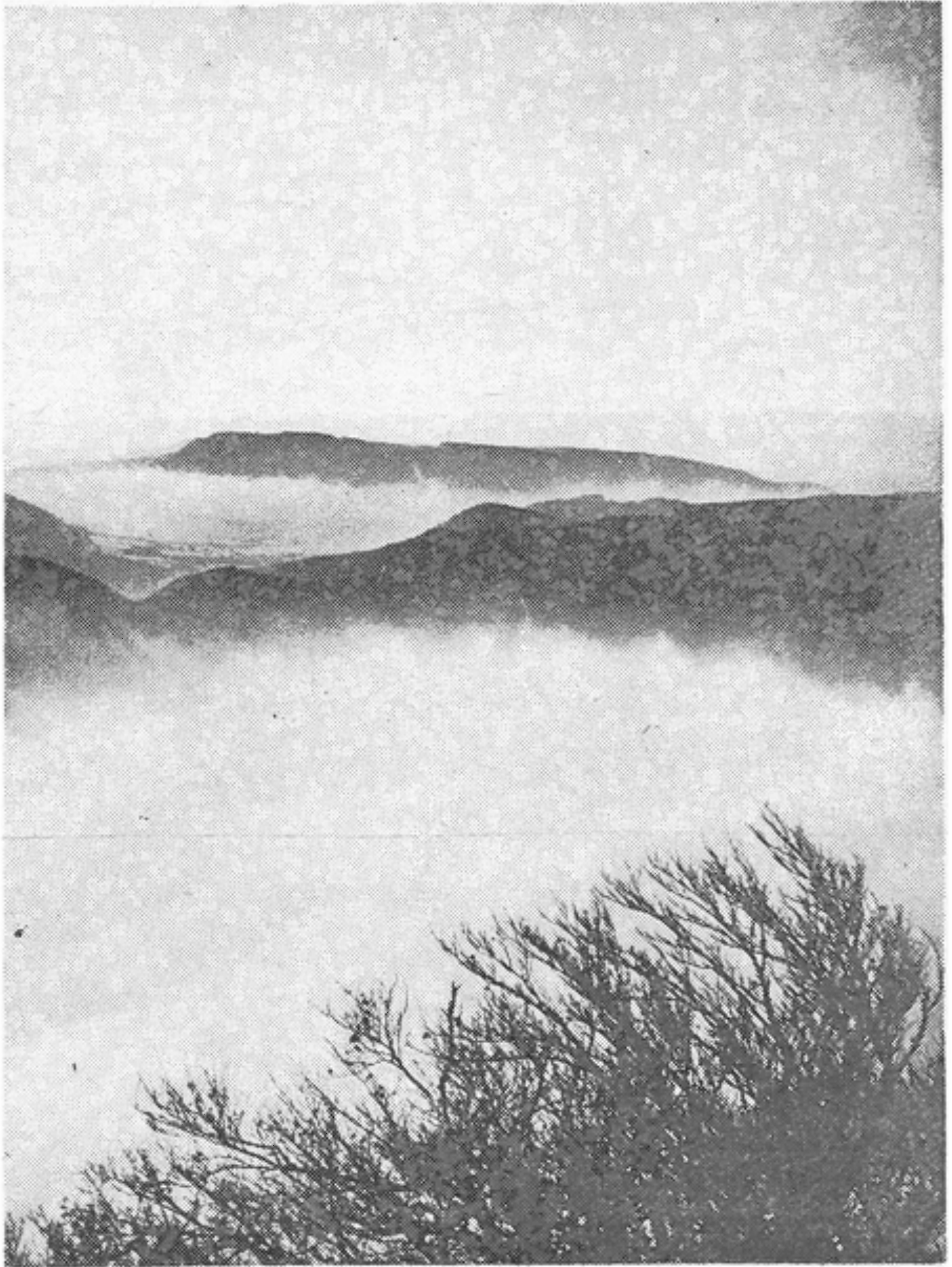


Obr. 1

žená místa, nýbrž i svahy a výšiny mírně zvlněného terénu, takže nad vrstvou mlhy zůstanou pouze ojedinělé vyšší kopce a pod.

Tento postup při předpovědi radiální mlhy je nutno doplnit mnohdy ještě dalšími pomocnými úvahami, jež však zde neuvádíme, protože by výklad příliš komplikovaly. Metodika prognosy advekční mlhy spočívá na tom, že předpokládáme při přísunu vzduchové hmoty o určité teplotě, že za nějakou dobu přijmou její spodní vrstvy teploty podkladu (zemského povrchu nebo mořské hladiny), nad kterou přicházejí. Je-li teplota podkladu nižší než teplota advehované vzduchové hmoty v malých výškách, a současně rozdíl teploty a teploty rosného bodu v ní menší než rozdíl teplot vzduchu a podkladu, lze po určité době - závislé od teplotních rozdílů a rychlosti pohybu vzduchové hmoty - očekávat stoupnutí relativní vlhkosti na 100 % a dále pak vytváření advekční mlhy.

Způsoby předpovědi dalších typů mlhy, na př. kombinované mlhy radiálně-advekční, mlhy v horách, vznikající adiabatickým ochlazením, mlhy za velmi nízkých teplot vzduchu a pod., se zde nemůžeme zabývat z důvodů nedostatku místa a také proto, že popsané metody a typy mlh dávají základní představu o hlavních



Obr. 2. Foto; Ladislav Ježek, meteorolog. observatoř ČSAV, Milešovka.

problémech, spojených s mlhou v našich oblastech. Podotkneme pouze, že k vytváření mlhy přispívají někdy vydatnou měrou též pevné částice obsažené ve vzduchu, na př. prach, kouř a pod., jež působí jako t. zv. *kondenzační jádra*, zárodky, na něž se při vysoké relativní vlhkosti vzduchu usazují vodní kapičky. Vzhledem k tomu, že v průmyslových oblastech zvláště tam, kde jsou průmyslové závody nahromaděny ve špatně větraných údolích, dochází snadněji k vytváření velmi husté mlhy i za takových meteorologických podmínek, za nichž se v jiných oblastech mlha buď vůbec netvoří, nebo vzniká jen ojediněle. Typickou krajinou v Čechách, kde k tomuto zjevu dochází zvláště často, je krajina v okolí Mostu, Duchcova a Ústí nad Labem. V těchto případech mluvíme někdy o *městské* či *průmyslové mlze*.

Jak jsme se zmínili v úvodu, způsobuje mlha značné nepříjemnosti v dopravě, zvláště v letectví. Byly proto konány pokusy o umělé odstraňování mlhy na frekventovaných letištích. Používalo se na př. dvou řad naftových hořáků umístěných v malých vzdálenostech podél přistávacích drah na letišti. Teplo vyvinuté spalováním nafty způsobilo místní ohřátí vzduchu nad rosný bod a tím rozpouštění mlhy nad přistávací drahou. Vystupující teplý vzduch po stranách dráhy vytvářel současně jakousi clonu, jež nedovolila vnikání okolního chladného vzduchu s mlhou na letištní drahu. Spotřeba nafty je však tak značná, že lze z hospodářských důvodů použít tohoto zařízení pouze při současném startu či přistání mnoha letadel, na př. za války při přistávání několika desítek letadel na jednom letišti v intervalu několika minut. Podmínky přistávání se však i za husté mlhy značně zlepšily, neboť popsané zařízení vytvořilo nad přistávací drahou „tunel“ čistého vzduchu bez mlhy asi do výšky 50 m. Jiné pokusy s rozpouštěním mlhy na letištních drahách byly konány pomocí ultrazvukových vln, jež rozkmitávaly vzduchové částice, srážely mlhové kapičky na větší kapky, padající k zemi následkem větší vlastní váhy. Obou popsaných způsobů se používalo pouze pokusně. Jelikož jsou velmi nákladné, není známo, že by některé letiště na světě bylo jimi vybaveno pro běžný letecký provoz.

*Závěr.* V článku jsme se snažili popsat a vyložit základní vlastnosti některých hlavních druhů mlhy a naznačit způsoby jejího předpovídání. Je nutno si uvědomit, že někdy je mlha jev značně komplikovaný, jednotlivé vlivy jejího vzniku se navzájem doplňují nebo i ruší, takže přesný odhad vývoje mlhy, zvláště pokud jde o dobu jejího vzniku a omezení vodorovné dohlednosti, je záležitostí velmi složitou. V základě však zůstává hlavní podmínkou vzniku mlhy ochlazení vzduchu na teplotu rosného bodu, tím dosažení relativní vlhkosti 100 % a další ochlazení, způsobující kondensaci přebytečné vodní páry ve tvaru drobných kapiček, jež se makroskopicky jeví jako mlha, nebo v slabším případě jako kouřmo. Při tom způsoby, jakými k ochlazení dojde, mohou být různé. Ty, které se u nás vyskytují nejčastěji, jsme se pokusili vyložit.

## Laminární a turbulentní proudění

Mohutný rozvoj moderního letectví, stavba parních, vodních a plynových turbin, projekty raketových letů, to vše vyžaduje dokonalou znalost prostředí, ve kterém se pohyb (letadla či rakety) děje, nebo které koná práci (turbiny). Otázkami proudícího prostředí se zabývá samostatná součást mechaniky, nauka o proudění (tekutin - kapalin, plynů).

Jedním z činitelů, který je již několik desetiletí v popředí zájmu theoretiků i experimentátorů, je proudění *turbulentní*, které má pro proudění v přírodě i v technických zařízeních rozhodující význam. Abychom turbulenci správně pochopili, musíme se seznámit i s druhým základním druhem proudění, *prouděním laminárním*.

Při ustáleném proudění mohou v podstatě nastat dva odlišné způsoby, které jsou charakterisovány v libovolně zvoleném okamžiku, rychlostí a směrem pohybu částic kapaliny.

V prvním případě bude směr pohybu sousedních částic rovnoběžný. Kapalina, či plyn mezi dvěma sousedními proudnicemi tvoří vrstvičku, která se pohybuje jako celek určitou rychlostí. Proudění je uspořádáno tak, že se zdá, jako by tyto vrstvičky po sobě klouzaly. Rychlosti, jak bude uvedeno dále, mohou být v každé sousední vrstvičce různé. Pro „vrstvičkový“ charakter je tento způsob proudění zván *vláknový* čili *laminární* (*lamina* = destička nebo vrstvička, lat.).

V druhém případě částice v celku zachovávají směr proudu, avšak při tom konají pohyb všemi směry. Sledujeme-li dráhy částic, vidíme, že jejich pohyb je neuspořádaný, nepravidelný, dráhy jsou křivolaké, navzájem se protínající a rychlosti částic v libovolných okamžicích jsou proměnlivé. Proud však má určitou průměrnou stálou rychlost, přes níž jako by se překládala proměnná rychlost částic. Tomuto druhu proudění se říká *turbulentní* (*turbulentus* = neklidný, lat.).

Oba druhy proudění se vyskytují v běžné praxi jak u kapalin, tak u plynů. Na př. při pomalém vytékání vody kohoutkem vytvoří proud hladký průhledný pramének. Zvýší-li se rychlost otevřením kohoutku, proud se stane neklidným, z hladkého sloupce se začnou odtrhávat kapičky. V prvním případě bylo proudění laminární, v druhém případě při větší rychlosti turbulentní. V hlubokých korytech teče voda klidně - laminárně, v mělkých místech, kde se rychlost zvýší jako na př. u jezu či v peřejích, se proud mění v turbulentní.

Na druh proudů má vliv i povrch dna. Dále na př. v klidné atmosféře stoupá proud kouře z komína přímo vzhůru - laminárně, bude-li však míti velkou rychlost, nebo prostředí atmosféry bude neklidné, sloupec dýmu se bude různě deformovat a vlnit. Totéž platí i o kouři vycházejícím z cigarety. (Poznámka redakce.)

Kvalitativně můžeme oba druhy proudění rozlišit jednoduchým zařízením,<sup>1)</sup> které se skládá z vodní nádrže  $N$ , ze které u dna ústí skleněná výtoková trubice  $T$ . U vstupu do této trubice umístíme tenkou trubičku  $t$ , jejíž druhý konec je vsunut do nádoby s barvivem  $B$ . Trubička  $t$  pracuje jako násoska a barvivo z ní vytéká do tekutiny (vody) proudící trubicí  $T$ . Podle výšky vodní hladiny  $H$  v nádrži  $N$  mohou nyní nastat dva zjevy:

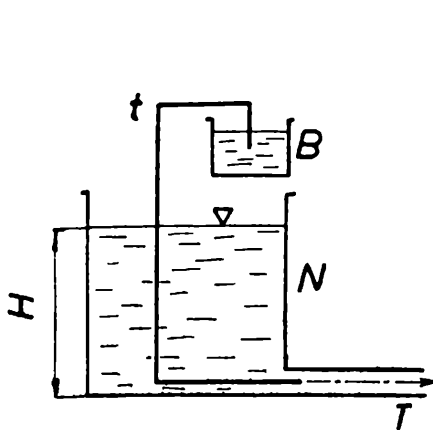
<sup>1)</sup> K vyšetřování proudění v trubici použil tohoto zařízení po prvé anglický fyzik Osborne Reynolds roku 1883.

a) Barvivo vteké do tekutiny vytváří ve směru proudění zvolna se rozšiřující proudnici; pohyb v trubici je laminární.

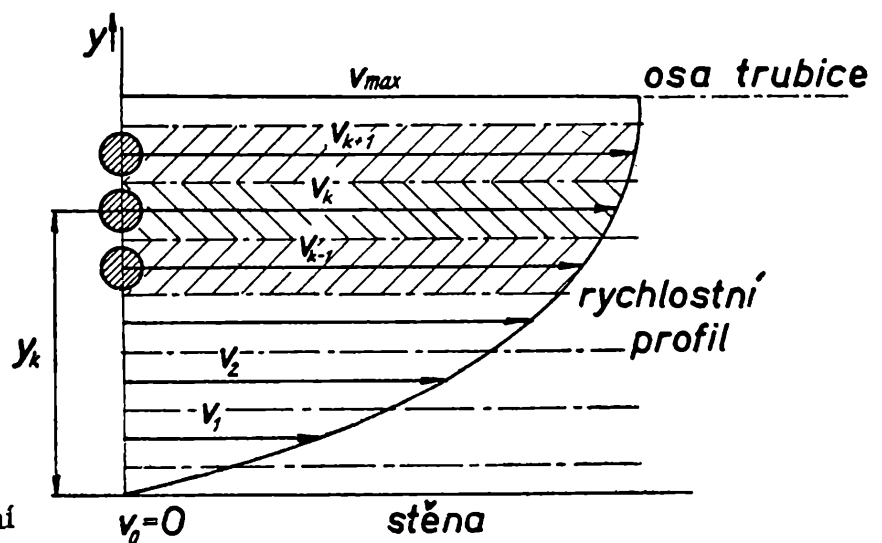
b) Barvivo se okamžitě rozptyluje, pohyb v trubici je turbulentní.

Předpokladem pro správné provedení pokusu je ustálené proudění tekutiny v trubici  $T$  (hladina musí být udržována stále na stejné výšce  $H$ ). Výskyt obou druhů proudění není nijak nahodilý, ale řídí se určitými zákony, o kterých bude zmínka dále. Jak si oba zjevy vysvětlíme?

Všechny látky a tedy i tekutiny se skládají ze základních prvků: molekul. Molekuly se v tekutinách pohybují všemi směry, a to víceméně chaoticky. U kapalin je pohyb molekul kolmo k hladině omezen povrchovou blanou. Nad hladinu proto uniká pouze omezený počet molekul, které mají dostatečnou energii, aby pronikly povrchovou blanou.



Obr. 1. Reynoldsovo zařízení k rozlišování laminárního a turbulentního proudění.



Obr. 2. Laminární rychlostní profil.

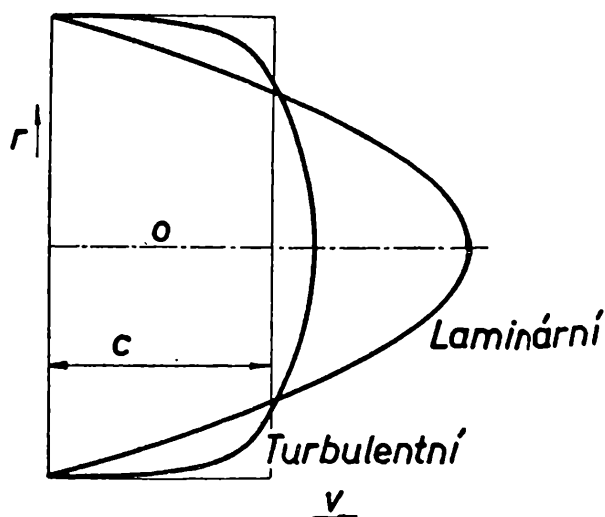
Druhou vlastností, kterou musíme vzít v patrnost v našich úvahách, je *vazkost* a s ní souvisící *tření* v tekutinách. O tření se přesvědčíme jednoduchým způsobem. Pohybujeme-li po uklidněné hladině na příklad plovoucím prkénkem, zjistíme, že i vrstvy hlouběji pod hladinou se dají do pohybu. To je způsobeno právě třením, za jehož přítomnosti pohybující se vrstva kapaliny strhuje do pohybu spodní klidnou vrstvu, třebaže rychlosti poněkud menší než je její vlastní rychlost. Účinek tření se projeví i u stěn, které proudící kapalinu obklopují. Na stěně bude lpět velmi tenká vrstvička kapaliny, jejíž rychlost je tedy nulová.

Všimněme si tekutiny proudící v trubici. Vlivem tření bude u stěn rychlost nulová a v místě nejvíce vzdáleném od stěn, t. j. v ose trubice, bude rychlost maximální. Mezi těmito hodnotami se bude rychlost po průřezu spojitě měnit (obr. 2). Tak dostaneme *rychlostní profil* proudění v řezu kolmém na osu trubice.

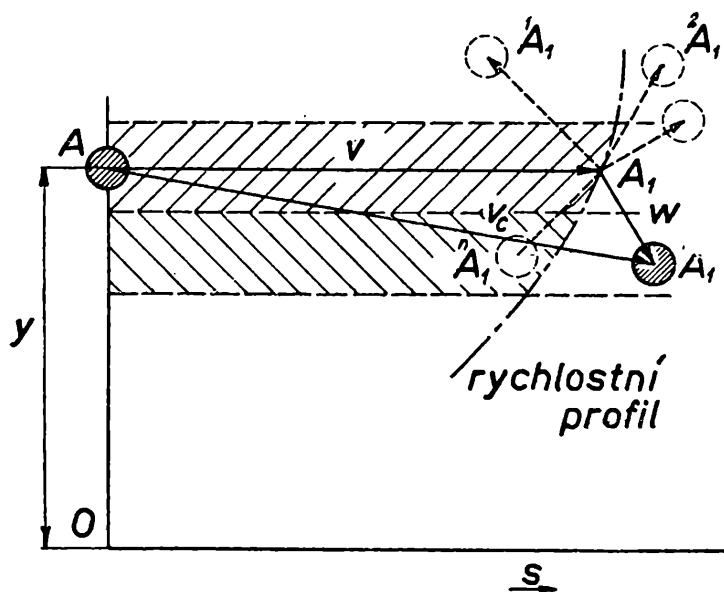
Vraťme se nyní zpět k otázce laminarity, respektive turbulence proudění. Všimněme si částice tekutiny.<sup>2)</sup> Tato se v ustáleném laminárním proudu pohy-

<sup>2)</sup> Částicí rozumíme shluk molekul, jehož rozměry jsou vzhledem k molekule mnohokrát větší.

buje rychlostí, která je dána vytvořeným rychlostním profilem a polohou částice v určité vrstvě. Molekuly sice pronikají z vrstvy do vrstvy, ale nijak podstatně neruší pohyb jednotlivých částic. Mezi jednotlivými částicemi probíhá výměna molekul.



Obr. 3. Srovnání turbulentního a laminárního profilu, kde je  $c$  průměrná rychlost turbulentního profilu;  $o$  osa trubice;  $v$  rychlost;  $r$  vzdálenost od osy trubice.



Obr. 4. Mechanismus turbulentního proudění,  $s$  je směr proudění.

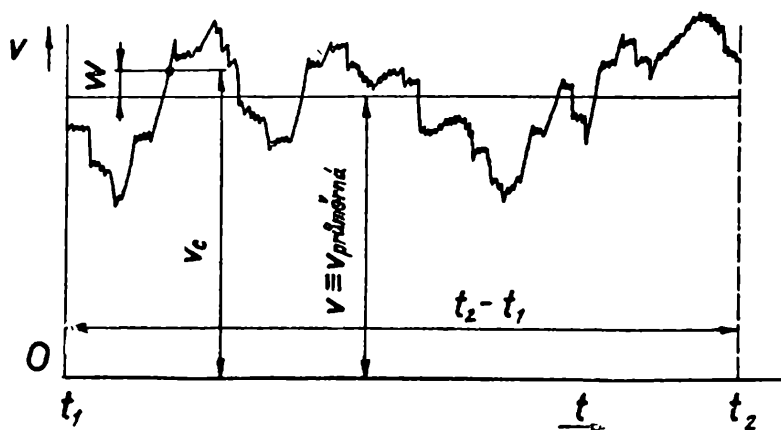
U turbulentního proudu je tomu zcela jinak. I zde se vytvoří rychlostní profil, který je zcela odlišný od profilu laminárního (obr. 3). Zásadní rozdíl v mechanismu proudění spočívá v tom, že v tomto případě nepronikají pouze jednotlivé molekuly z vrstvy do vrstvy, ale celé částice tekutiny (shluky molekul). Snadněji pochopíme celý mechanismus z obr. 4. Ve vzdálenosti  $y$  od stěny je turbulentní



rychlostní profil charakterisován rychlostí  $v$ . Částice kapaliny je v určitém časovém okamžiku v poloze  $A$ . Za jednotku času vykoná tato částice určitou dráhu. Pokud by se pohybovala pouze v příslušné vrstvě, dospěla by do polohy  $A_1$ . Vzhledem k tomu, že z vrstvy uniká, má ještě druhou podružnou složku rychlosti  $w$ . Zaujme tedy částice některou z poloh  $k_{A_1}$ , které přísluší výsledná rychlost  $v_c$ . Toto kolísání rychlosti co do velikosti i co do směru je typické pro turbulenci.

Mnohý ze čtenářů se zeptá, jak bylo změřeno toto kolísání rychlosti. K měření se používá thermoanemometru, o němž se čtenáři dočetli v č. 3 Rozhledů.

Ponoříme-li thermoanemometr do zvoleného místa určitého turbulentního proudu, dostaneme za určitou dobu na filmovém pásku, na který fotografujeme záznamy na obrazovce oscilografu, křivku naznačenou na obr. 5. Budeme-li



Obr. 5. Záznam thermoanemometru v turbulentním proudu ve stálé poloze v závislosti na čase  $t$ .

zjišťovat průměrnou rychlost turbulentního proudu v měřeném místě za dosti dlouhou dobu (řádově desetiny vteřiny), zjistíme, že

$$v_{\text{průměrná}} = v$$

V tom případě je součet podružných rychlostí ve zvoleném časovém intervalu roven nule:

$$\Sigma w = 0$$

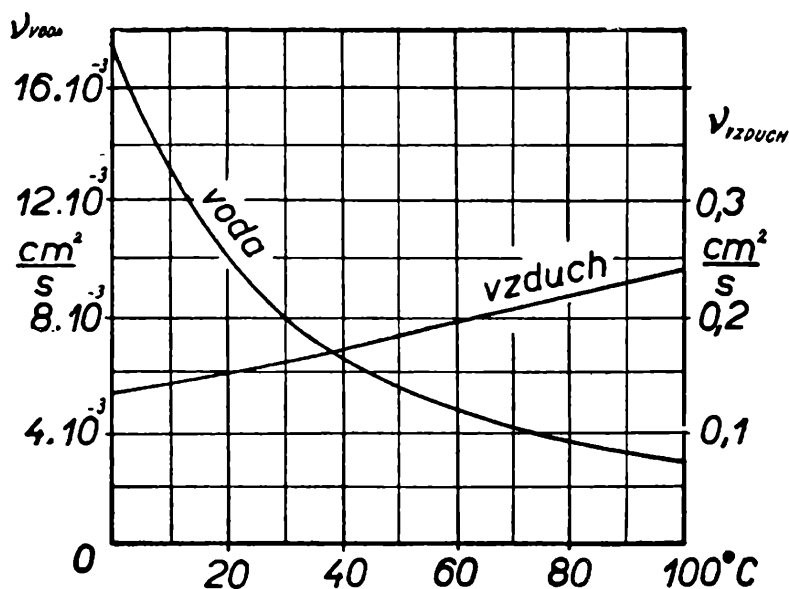
Zda proudění je laminární či turbulentní, to má podstatné následky, na př. mění velikost ztrát třením. To však ponecháme pro některý z příštích článků.

Nyní nám zbývá poslední, a to říci si, kdy vzniká ten či onen druh proudění.

Toto bylo určeno experimenty a zjištěno, že závisí na *Reynoldsově čísle* označovaném  $Re$ , které je bezrozměrné.

$$Re = \frac{c d}{\nu}$$

Ve vzorci je  $c$  střední rychlost proudu v určitém průřezu (obr. 3) vyjádřená v  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $d$  je průměr trubky v  $\text{cm}$ ;  $\nu$  značí *kinematickou vazkost*<sup>3)</sup> měřenou v  $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



Obr. 6. Kinematická vazkost vody a vzduchu v závislosti na teplotě při tlaku 760 mm Hg.

Pokud je  $Re < 2\,300$ , bude proudění laminární, pro  $Re > 4\,000$  je proudění turbulentní. Mezi těmito hodnotami je přechodná oblast, kde se mění druh proudění. Uvedené hodnoty platí, pokud povrch stěn, které proudící tekutinu obklopují, je ideálně hladký. Bude-li povrch stěn drsnější, dojde k rozrušení laminárního proudu a k vzniku turbulence již při menší rychlosti.

Příklad: Určete, jakou střední rychlostí se ještě smí pohybovat a) v o d a či b) v z d u c h skleněnou trubicí o průměru  $d = 1$  cm, aby vzniklé proudění bylo laminární. Teplota proudících tekutin je  $20^\circ\text{C}$ , tlak 760 mm Hg.

Z diagramu na obr. 6 odečteme hodnoty kinematické vazkosti:

$\nu_{\text{voda}} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\nu_{\text{vzduch}} = 0,15 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Hledané rychlosti jsou:

$$\text{a) } c_{\text{voda}} = \frac{Re \cdot \nu_{\text{voda}}}{d} = \frac{2\,300 \cdot 0,01}{1} = 23 \text{ cm/s};$$

$$\text{b) } c_{\text{vzduch}} = \frac{Re \cdot \nu_{\text{vzduch}}}{d} = \frac{2\,300 \cdot 0,15}{1} = 345 \text{ cm/s}$$

<sup>3)</sup> Rozměr vazkosti čili viskozity kapaliny je  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , dělíme-li jej rozměrem hustoty dané látky, obdržíme t. zv. *kinematickou vazkost*, jejíž rozměr je  $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . (Red.)

## Pohon letadel

Pohyb libovolného tělesa ve skutečném prostředí, t. j. stlačitelném a viskózním neboli vazkém, je udržován silou na něj působící. Prostředí naopak působí silou - reakcí - kterou lze rozložit do složky ve směru pohybu a do složky kolmé k předešlé. Prvou silou nazýváme *odpor*, druhou *vztlak*. Nemá-li rychlost, kterou se těleso pohybuje, klesat, musí síla způsobující pohyb být větší nebo při nejmenším rovna odporům.

Potřebnou hnací sílu pro pohyb tělesa v prostředí dává proud plynů či prostředí. Proudění lze získat vrtulí nebo výtokem z trysky. Jakékoliv zařízení, kterého lze použít k vyvození proudu a tím i tahu, se nazývá obecně *propulsořem*.

Vrtule vytváří proud vzduchu tím, že její listy zabírají při otáčení do vzduchu a urychlují jej. Velikost tahu  $T_v$ , který závisí na proudění, je dán součinem rychlosti proudu  $v_v$  a hmoty  $m_v$ , která proteče za jednotku času v r t u l o v ý m k r u h e m, t. j. kruhem vymezeným listy vrtule při otáčení, t. j.

$$T_v = m_v \cdot v_v . \quad (1)$$

Součin  $m \cdot v$  se nazývá h y b n o s t. Hmota vzduchu  $m_v$  je u vrtule při stejné velkém tahu mnohonásobně větší než hmota  $m_t$  plynů u pohonů tryskových vytékajících poměrně malým otvorem trysky. Naopak rychlost výtoku plynů  $v_t$  v trysce je mnohonásobně vyšší než rychlost proudu vzduchu protékajícího vrtulovým kruhem. Velikost tahu tryskového motoru je dána

$$T_t = m_t \cdot v_t \quad (2)$$

V podstatě není však mezi oběma druhy propulze podle rovnic (1), (2) žádný rozdíl.

Uvažujme ideální propulsoř, který pracuje v i d e á l n í m p l y n u, t. j. bezztrátový propulsoř v prostředí nestlačitelném a bez vazkosti. Pod pojmem propulsoř si při této úvaze představujeme jakékoliv zařízení, které v dané rovině - resp. v kruhu ležícím v této rovině - vytvoří proud plynu. Rychlost proudění budiž ve všech místech libovolného řezu kolmého na směr proudění stejná. Předpokládejme, že propulsoř se pohybuje stejnou rychlostí jakou má proud jím vytvořený. V tom případě nevzniká tah a propulsoř nespotřebuje žádnou energii. Poněvadž nevzniká žádné zrychlení proudových vláken čili proudnic, nevzniká v proudu tlakový rozdíl před rovinou a za rovinou propulsořu, takže proudová vlákna zůstávají před propulsořem i za propulsořem stejně od sebe vzdálená. Nebude-li mít propulsoř dopřednou rychlost, nebo jeho rychlost bude menší než proud vzduchu, jsou proudová vlákna v kruhu propulsořu urychlována.

Energií dodanou proudu propulsořem stoupne tlak v proudu za propulsořem. Proudnic budou za propulsořem blíže u sebe, jak je naznačeno na obr. 1. Poněvadž plyn je propulsořem nassáván, je tlak před propulsořem nižší než tlak atmosferický. Tlak proudu ve velkých vzdálenostech od roviny propulsořu bude však vyrovnán s tlakem okolního prostředí.

Rychlost plynu ve velké vzdálenosti před propulsořem označme  $V_0$ , za propulsořem  $V_2$ . Rozdíl obou rychlostí jest

$$v_2 = V_2 - V_0 \quad (3)$$

V dalším budeme uvažovat pouze proud ohraničený, jak je naznačeno silně vytaženými proudnicemi na obr. 1. Ze základní věty o hybnosti lze psát rovnici pro obě krajní uvažovaná místa proudu  $A$ ,  $B$  ve tvaru

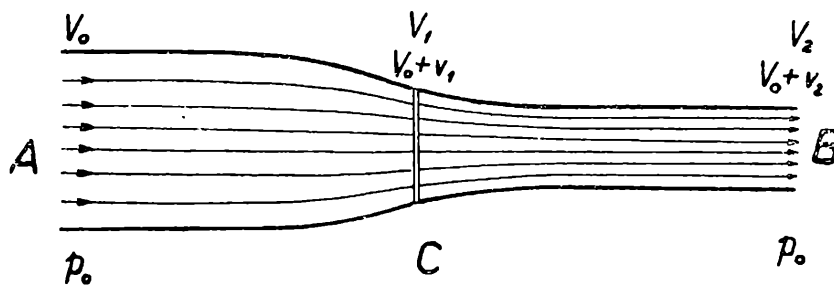
$$T = mV_2 - mV_0 \quad (4)$$

Výkon  $P$  ideálního propulsoru lze určit z věty o změně pohybové energie, podle níž přírůstek pohybové energie za jednotku času je roven výkonu spotřebovanému k zvýšení rychlosti. Pro obě uvažovaná místa  $A$ ,  $B$  lze napsat rovnici

$$P = \frac{m}{2} \cdot (V_2^2 - V_0^2) \quad (5)$$

Dosadíme-li za  $V_2$  z rovnice (3) bude

$$P = \frac{m}{2} (2V_0v_2 + v_2^2) = mV_0v_2 + m \frac{v_2^2}{2} \quad (6)$$



Obr. 1. Proudění ideálním propulsořem při jeho pohybu. Propulsor je v místě C.

S přihlédnutím k rovnici (4) lze rovnici (6) upravit na tvar

$$P = TV_0 + m \frac{v_2^2}{2} \quad (7)$$

Z této rovnice vyplývá, že celkový výkon dodávaný proudu je roven součinu tahu  $T$  a rychlosti  $V_0$  zvětšenému o kinetickou energii protékajícího plynu rychlostí  $v_2$ .

Poměr energie přeměněné v tahu k celkové energii vynaložené k pohonu propulsoru se nazývá *propulsní účinnost*.

$$\eta_p = \frac{TV_0}{P} = \frac{TV_0}{TV_0 + \frac{m}{2}v_2^2} \quad (8)$$

Z identity rovnice (6) a (7) plyne  $TV_0 = mV_0v_2$ , takže rovnici (8) lze upravit na tvar

$$\eta_p = \frac{1}{1 + \frac{v_2}{2V_0}} \quad (9)$$

Z rovnice (9) je patrné, že ani pro ideální plyn účinnost propulsoru nemůže dosáhnout hodnoty rovné 1, neboť pro  $v_2 = 0$  je sice  $\eta_p = 1$ , ale v tom případě je tah roven nule, jak plyne z rovnice (4). Účinnost je rovněž nulová při chodu propulsoru „na místě“, kdy  $V_0 = 0$ , neboť v tomto případě nekoná propulsor práci pro uvažovaný účel použití.<sup>1)</sup>

Má-li propulsor vyvozovat tah, musí být zvyšována hybnost proudu protékajícího propulsořem. Aby byl tah trvalý, musí se tak dít stále, t. j. musí nastat trvalé přitékání a odtékání plynu.

Pro stav, který je naznačen na obr. 1, má proudění za propulsořem složku směřující ke středu proudu. Lze tedy v každém místě proudu rozložit rychlost do složky *axiální* a *radiální*.<sup>2)</sup> Radiální složky způsobují zúžení proudu, vcelku se vyrovnávají a navenek se silově neprojeví. Axiální složku rychlosti označme  $V_1$  a předpokládáme, že je v celém průřezu kruhu propulsoru konstantní. Výkon  $P$  spotřebovaný propulsořem lze vyjádřit jako součin tahu  $T$  a rychlosti  $V_1$  v místě propulsoru:

$$P = T V_1 \quad (10)$$

Tento výkon je pochopitelně totožný s oním, který byl spotřebován na urychlení proudu z rychlosti  $V_0$  na  $V_2$ , takže z identity rovnic (7) a (10) vyplývá

$$T V_1 = TV_0 + \frac{m v_2^2}{2}$$

Po dosazení za  $V_1 - V_0 = v_1$ , kde  $v_1$  je přírůstek rychlosti proudu v kruhu propulsoru, bude

$$T v_1 = \frac{T v_2}{2} ,$$

$$v_1 = \frac{v_2}{2}$$

$$\text{Poněvadž } V_1 = V_0 + v_1 = V_0 + \frac{v_2}{2} = \frac{V_0 + V_0 + v_2}{2} ,$$

je

$$V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2} \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Z propulsoru se zde stal ventilátor, který dodává proud vzduchu.

<sup>2)</sup> *Axiální* = osový (ve směru osy); *radiální* = ve směru od středu k obvodu.

Podle této rovnice je rychlost proudění  $V_1$  v rovině propulsoru rovna polovičnímu součtu rychlosti  $V_0$  ve velké vzdálenosti před propulsorem a rychlosti  $V_2$  za propulsorem.

Leč ve skutečnosti nemáme ani ideální plyn, v němž se pohybují letadla, ani ideální propulsor, který by pracoval bez ztrát. Vlivem vazkosti plynů vznikají ztráty třením, při vyšších a vysokých rychlostech (kolem rychlosti zvuku) vznikají další ztráty, jejichž původ tkví ve stlačitelnosti plynů.

(Pokračování)



## Co vidíme na nebi

Pozorují-li dva lidé tutéž věc, nevidí totéž, zvláště jsou-li rozdílného stáří nebo vzdělání. Jediný pohled technika-odborníka na nějaký stroj řekne mu více než dlouhé pozorování téhož stroje laikovi. Právě tak je tomu i při

pozorování jevů „na nebi“. Oko nynějšího pozorovatele vyzbrojené novodobými dalekohledy nebo jinými pozorovacími přístroji uvidí více než na příklad viděli před staletími naši předkové, kteří nadto byli mnohdy zatíženi různými pověrami, takže tam třeba „viděli“ to, co je nakresleno na našem obrázku, patrně však bez raketového pohonu.

Díváte-li se za krásné noci na jasnou oblohu ani si asi neuvědomíte, co vše tam můžete spatřit, někdy jednoduchými prostředky či dokonce i pouhým okem. Proto vás budeme zde upozorňovat na astronomické zajímavosti a přejeme vám dobré pozorování.

Redakce

## Planety na letním nebi

Letošního roku nebudou letní měsíce příliš příznivé pro pozorování planet. Obě vnitřní planety, Merkur a Venuše, vycházejí a zapadají v těsné blízkosti východu a západu Slunce a ztrácejí se v jeho záři.

M e r k u r vychází v červnu krátce před východem Slunce a v červenci a v srpnu zapadá brzy po Slunci. Nalezení Merkura prostým okem je nesnadné i při největších úhlových vzdálenostech planety od Slunce (v t. zv. elongacích), takže letošního léta patrně tuto planetu nespatříme.

Lepší podmínky pro pozorování nám již dává *Venuše*. Od května až do konce roku září na večerní obloze jako večernice, avšak v letních měsících zapadá ještě dosti brzy po západu Slunce (asi 1 hod.); její pozorování tím bude velmi omezeno, a ani její jasnost nebude největší.

S pozorováním *Marsu* je nutno si přispíšit; koncem července za soumraku zmizí a objeví se až v listopadu v ranních hodinách. Pouze v červnu bude zvečera dobře viditelný v Blížencích a později v Raku.

Také viditelnost *Jupitera* se s postupujícím létem zhoršuje. V červnu ho budeme moci vyhledat ve večerních hodinách v souhvězdí Lva a Panny. V červenci planeta zapadá již brzy večer a v srpnu se již začne ztrácet za večerního soumraku.

Poněkud lépe bude viditelný *Saturn*. Tuto planetu budeme moci spatřit v souhvězdí Štíra v červnu po celou noc, v červenci do půlnoci a v srpnu do 22 hodin.

Planety *Uran* a *Neptun*, k jejichž nalezení je již třeba triedru, nedávají pro svůj brzký západ ve večerních hodinách příznivé podmínky pro pozorování.

Těmito orientačními údaji chceme upozornit naše čtenáře na podmínky při vyhledávání planet na obloze. Podrobnější údaje o polohách a viditelnosti planet na obloze po celý rok je možno nalézt ve „Hvězdářské ročence 1957“, kterou vydalo nakladatelství Československé akademie věd.

L. Sehnal.

## Hvězdokupa viditelná pouhým okem

*Kulové hvězdokupy* patří k zajímavým objektům oblohy. Jsou to soustavy několika set tisíc hvězd v poměrně malém kulovitém objemu - průměr typických kulových hvězdokup je kolem 100 světelných let. Průměrná hustota hmoty v kulových hvězdokupách převyšuje tak stokrát i vícekrát průměrnou hustotu hmoty soustavy Mléčné dráhy v okolí Slunce.

Jednu z nejlépe pozorovatelných kulových hvězdokup - *M 13* v souhvězdí Herkula - můžeme vidět v jarních a letních měsících zvečera i jednoduchým kukátkem a za dobrých pozorovacích podmínek dokonce i pouhým okem. Pozorování neozbrojeným okem může být úspěšné pouze za bezměsíčné noci v místě, kde neruší pouliční osvětlení. Kupu není obtížné nalézt, neboť se promítá přesně na spojnici hvězd  $\eta$  a  $\xi$  souhvězdí Herkula, asi v jedné třetině vzájemné vzdálenosti těchto hvězd blíže hvězdy  $\eta$ . Tyto hvězdy lze snadno určit pomocí dobré hvězdné mapy.

Objekt se jeví v kukátku jako mlhavý obláček okrouhlého tvaru. Na snímcích pořízených velkými dalekohledy jsou vnější oblasti kupy rozloženy na jednotlivé hvězdy. Prostorová hustota hvězd směrem ke středu kupy rychle vzrůstá, a tak nemůžeme zatím ani nejmohutnějšími dalekohledy rozložit části obrazu poblíž středu kupy na jednotlivé hvězdy.

Zdánlivý průměr kupy je 10 obloukových minut a odhad vzdálenosti činí kolem 30 000 světelných let. *M 13* je jednou z blízkých kulových hvězdokup.

J. Ruprecht



## Úlohy k řešení

Řešení dále uvedených úloh zašlete do 15. září t. r. na adresu Doc. Dr. M. Menšík, Praha 6, Zikova 4.

23. Budtež dány tři kvadratické rovnice

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 ,$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0 ,$$

$$x^2 + p_3x + q_3 = 0 ,$$

které mají po řadě kořeny  $\alpha, \beta; \beta, \gamma; \gamma, \alpha$ . Ukažte, že platí

a)  $4q_1q_3 = q_2(p_1 - p_2 + p_3)^2;$

b)  $4(q_1 + q_2 + q_3) = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$

St. Horák

24. Dokažte, že pro libovolný bod  $P$  v rovnoběžníku  $ABCD$  má výraz  $k = \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 - \overline{PD}^2$  konstantní hodnotu nezávislou na poloze bodu  $P$ . Poznámka: Označení zvolte tak, aby bylo  $AC \geq BD$ .

Ing. Dr. J. Langr

★ \* ★

25. Krychle  $ABCD A'B'C'D'$ , jejíž stěna  $ABCD$  je rovnoběžná s narysnou, opírá se o půdorysnu hranou  $CC'$  a o bokorysnu hranou  $DD'$ . Je dán vrchol  $A(3; 6; 5)$ . Na povrchu krychle zobrazte nejkratší lomenou čáru, která spojuje bod  $A$  se středem  $R$  hrany  $CC'$ .

Příklad řešte v libovolném rovnoběžném promítání, jež znáte!

O. Setzer

★ \* ★

26. Určete přetlak vzniklý tahem v komíně  $h = 18$  m vysokém, o příčném průřezu  $S = 0,1$  m<sup>2</sup>, jímž při vnějším barometrickém tlaku  $p = 750$  tor a vnější teplotě  $t_1 = 27$  °C odcházejí spaliny o teplotě  $t_2 = 97$  °C! Dáno: Hmota jedné kilogrammolekuly vzduchu  $\mu_1 = 29,0$  kg; hmota jedné kilogrammolekuly spaliny  $\mu_2 = 28,7$  kg; plynová konstanta pro 1 kilomol jest  $R = 8,313$  J grad<sup>-1</sup>.

Pro přepočtení tlaku do soustavy MKS užitje převodního vztahu  $1 \text{ tor} \doteq \frac{400}{3} \text{ Nm}^{-2}$ .

Jednotka „tor“ znamená tlak rtuťového sloupce 1 mm vysokého.



Návod. Pro řešení se užije t. zv. stavové rovnice ideálního plynu, vyjadřující, že součin objemu  $V$  a tlaku  $p$  plynu jest úměrný absolutní teplotě  $T$  plynu; matematicky  $pV = \frac{m}{\mu}RT$ , kde  $m$  = hmota uvažovaného plynu,  $\mu$  = hmota jedné kilogrammolekuly téhož plynu (je číselně rovna molekulové hmotě plynu) a  $R$  = t. zv. plynová konstanta výše uvedená. Pomocí této rovnice určete hmotu  $m_1$  vzduchu, který by se nacházel v komíně (při teplotě  $t_1$  a barom. tlaku  $p = 750$  tor) a dále hmotu  $m_2$  spaliny v komíně (při teplotě  $t_2$  a tlaku  $p$ ), načež užitím Archimedova zákona vypočtete nadlehčující sílu  $F$ . Podíl nadlehčující síly a průřezu komínu jest hledaný přetlak.

E. Říman

Od 7. čísla Rozhledů začneme uveřejňovat správná řešení zde uváděných příkladů.  
Redakce



## Různé-recenze

Josef Kotyk, Pardubice:

### Alessandro Volta

Dne 5. března t. r. uplynulo 130 let od úmrtí slavného italského fysika **Alessandra Volty**. Jeho zásluh je třeba vzpomínati tím častěji, čím více se chceme honosit technickými pokroky posledního století elektřiny.

Alessandro Volta se narodil dne 19. února 1745 v městě Como. Od roku 1774 působil na gymnasiu ve svém rodišti, o pět let později však již jako profesor na universitě v Pavii. Záhy upoutal pozornost soudobého světa. Zdokonalil na př. elektroskop tím, že použil místo dvou kyvadélek z bezové duše dvou stébel slámy, zavěšených na drátcích. Snaha vyrobit značnější množství elektřiny přivedla ho k hlubšímu studiu elektrostatické indukce, na níž roku 1775 založil přístroj, který nazval elektrofor. Voltův elektrofor ztratil časem sice svůj někdejší význam a není dnešní mládeži pravděpodobně již znám, byl však zcela jednoduchý a čtenáři našeho časopisu by si jej mohli snadno sami sestavit. Byla to ebonitová deska, polepená na spodní straně staniolem nebo vložená do kovového talíře, jenž je spojen vodivě se zemí. Šleháme-li desku srstí, zelektruje se záporně. Přiblížíme-li k ní kovový kotouč, opatřený izolujícím držadlem, indukuje se v něm obojí elektřina; volnou (zápornou) elektřinu lze odvésti do země, takže kotouč, vyzdvižen, je kladně elektrický. Snadno se přesvědčíme, že můžeme tento postup bez opětovného tření desky opakovat a stále elektřinu z kovového

kotouče odvádět. Na myšlence Voltova elektroforu jsou v podstatě založeny všechny indukční elektriky.

Roku 1783 dospěl Volta k soustavě dvou izolovaných vodičů, postavených blízko sebe, zvané k o n d e n s á t o r. Na témž základě sestrojil k o n d e n s a č n í e l e k t r o s k o p. Kolektorem učinil kovovou desku, přišroubovanou k tyčince elektroskopu, na ni položil pak vrstvu izolátoru (slídovou destičku nebo isolační nátěr) a další kovovou desku, kterou spojil vodivě se zemí. Přesvědčil se, že tímto elektroskopem lze zjistit i tak malé potenciální rozdíly, pro které obyčejné elektroskopy a elektrometry té doby nebyly citlivé.

Roku 1792 opakoval Volta proslulé pokusy italského lékaře *Galvaniho*<sup>1)</sup> o domnělé e l e k t ř i n ě ž i v o č i š n é. Jimi měl být odhalen zdroj života vůbec; Volta, snaže se vysvětlit jevy, které Galvani pozoroval na živých organismech zvířecích,<sup>2)</sup> shledal však podstatnou podmínku jejich vzniku v jiné okolnosti. Ze svých jemných pokusů usoudil, že příčinou těchto jevů je potenciální rozdíl, jenž vzniká na stykové ploše dvou různých kovů (z j e v V o l t ů v). Potvrdil, že na př. při dotyku mědi a zinku se zinek nabíjí kladně, měď záporně a naměřil potenciální rozdíl mezi nimi asi 0,8 V. Místo Galvaniho e l e k t ř i n y „ž i v o č i š n é“ zavedl Volta novou e l e k t ř i n u „k o v o v o u“. Kovy a uhlí nazval vodiči I. třídy a sestavil je v zajímavou řadu. Dodnes ji jmenujeme ř a d o u V o l t o v o u. Některé její členy jsou na př. Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd. Každý předcházející kov, stýká se s některým následujícím, nabývá potenciálu vyššího.<sup>3)</sup> Volta také dokázal, že příslušný potenciální rozdíl je roven součtu potenciálních rozdílů všech dvojic, obsažených mezi nimi (s o u č t o v é p r a v i d l o). Jeho výklad, že potenciální rozdíl vzniká pouhým dotykem kovů (t h e o r i e k o n t a k t n í), není ovšem správný. Dnes víme, že vzniká působením stop vlhkosti na obou kovech. Vysušíme-li je úplně a za vysokého vakua, vzniká rozdíl jen asi tisíckrát menší než naměřil Volta, nebo nevzniká žádný.

Pokoušeje se nahradit organické tělo při pokusech Galvaniho slanou anebo okyselenou vodou, vložil Volta postupem času do své řady také vodivé kapaliny, jež nazýval vodiči II. třídy. Dnes jim říkáme elektrolyty. Volta zjistil, že elektrolyt

<sup>1)</sup> L u i g i G a l v a n i (1737–1798) působil jako profesor anatomie na universitě v Bologni. Když však roku 1796 dobyl Napoleon severní Itálie, Galvani odmítl složit příslužnosti na ústavu nové Cisalpinské republiky a byl profesury zbaven.

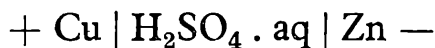
<sup>2)</sup> Čerstvě preparované žabí nožičky, zavěšené měděným háčkem na železném zábradlí, sebou trhly, jestliže vítr je přivedl do styku se zábradlím. Slavný objev Galvaniho, zaznamenaný v jeho deníku s památným datem 20. září 1786, připomíná dodnes pomník Galvaniho před universitní knihovnou (dřívější budovou university) v Bologni; Galvani drží v ruce desku - s preparovanou žábou.

<sup>3)</sup> Členy Voltovy řady uvádím podle učebnice Friš-Timoreva: Kurs fyziky, 1953, § 155. Nachtikalova Technická fyzika uvádí v čl. 199 řadu Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Au, Ag, Pt, C. Srovnání obou pramenů upozorňuje na nesouhlas v umístění některých dvojic a ponechává čtenáře v pochybách o jejich pořadí.

Také číselné hodnoty potenciálních rozdílů mezi členy Voltovy řady budou čtenáři v cit. učebnicích marně hledat. Mohou je však nalézt v starší Novákově Fysice, díl II., 2. vyd., str. 614.

<sup>4)</sup> Již první měření Voltova se týkala vlastně také galvanických článků, v nichž elektrolytem byla voda.

se ve styku s kovy nabíjí kladně. Shledal také, že součtové pravidlo pro elektrolyty již neplatí. Zásadní důležitosti nabyl Voltův poznatek, že potenciální rozdíl mezi kovy vzniká jejich chemickou reakcí s elektrolytem. Na tomto základě sestrojil Volta po mnohých pokusech a četných zkušenostech nový chemický zdroj elektrického proudu, první jednoduchý galvanický článek,<sup>4)</sup> nazývaný dodnes **č l á n k e m V o l t o v ý m**. Jeho složení lze stručně napsat značkami:



Elektromotorická síla Voltova článku činí přibližně 1 V, při upotřebení článku však klesá. Větší elektromotorické síly dosáhl Volta roku 1800 první řadovou (seriovou) galvanickou baterií, zvanou podle tvaru „couronne de tasses“ (baterie misková), v jiném uspořádání pak - když dal elektrodám tvar kotoučků a navrstvil je na sebe v sloup - známým **s l o u p e m V o l t o v ý m**. Tím byl dán zároveň základ k dalšímu studiu i praktickému používání účinků elektrického proudu a pozdějšímu netušenému využití elektrické energie.

Dosažením překvapujících úspěchů nabyl Volta velmi zvučného jména. Jeho objevy byly červánky, ohlašujícími příchod doby, v níž lidský duch pronikne do tajemného šera, obklopujícího tehdy záhadnou podstatu elektriny. Sám Napoleon Bonaparte, první konsul republiky Francouzské, pozval Voltu roku 1801 k přednáškám do Paříže, udělil mu cenu 2 000 tolarů, dal razit na jeho počest zlatou medaili Akademie a když se stal roku 1804 císařem Francouzů, jmenoval ho za zásluhy důstojníkem čestné legie, později také hrabětem a senátorem království lombardského. Volta chtěl však již profesury zanechat, avšak Napoleon zamítl jeho žádost o pensionování s tímto pochvalným odůvodněním: „Odchod tohoto slavného učenice by těžce postihl věhlas university v Pavii. Unavují-li ho však povinnosti jeho přespříliš, nechť požívá úlevy. Nechť koná třeba jen jednu přednášku v roce! Generál vědy má ostatně na bojišti vědy také - umřít!“

Když Lombardie připadla opět Rakousku, císař František I. jmenoval Voltu ředitelem filosofické fakulty v Pavii. Skromný Volta se však sám vzdal všech hodností a vzdálen světské marnivosti, žil v ústraní oddán vědě. Zemřel ve svém rodišti dne 5. března 1827. Na jeho památku byla založena pro vynálezce **V o l t o v a c e n a**<sup>5)</sup> v částce 60 000 franků, po obnovení Napoleonem III. pak 50 000 franků. Také název „**v o l t**“, mezinárodně přijatý pro jednotku potenciálního rozdílu,<sup>6)</sup> zůstane ve všech jazycích trvalým uctěním jeho jména a nehynoucí památkou.

Závěrem připomínám ještě jednu zajímavou a v té době nepochopitelnou zkušenost Galvaniho. Jednou (někdy v roce 1780) pracoval Galvani s elektrickou a opodál ležely opět vypreparované žabí nožky. Jeden z posluchačů dotkl se při cvičení žabího nervu nožem právě v okamžiku, kdy v elektrice přeskočila jiskra.

<sup>5)</sup> **V o l t o v a c e n a** byla udělena na př. roku 1884 Němci Heinrichu Ruhmkorffovi za vynález indukčního stroje (transformátoru), roku 1888 Angličanu Alexandru Grahamu Bellovi za vynález telefonu, roku 1889 Belgičanu Zénobu Théophilu Grammeovi za sestavení prstencové armatury (kotvy) dynamu a j.

<sup>6)</sup> Přístroje, užívané k příslušnému měření, se nazývají **v o l t m e t r y**. Jinému účelu slouží **v o l t a m e t r y** neboli coulombmetry; jich se týká pozn. 3 mého článku o Coulombovi v 2. čísle „Rozhledů“, str. 90 a 91.

Nožičky sebou prudce trhly, ačkoli ve vodivém spojení s elektrikou vůbec nebyly. Objasnění jevu tehdy zcela záhadného, je nyní snadné: výboj elektriky vzbuzuje, jak známo, elektrické kmity, od nichž se do okolního prostoru šíří elektromagnetické vlnění. Žabí nerv s kovovým předmětem tvoří pak citlivý přijímač vln. V době, o které píše, nemohl ovšem nikdo tušit, že se podařilo uskutečnit v podstatě první pokus o - bezdrátový přenos energie. To nezmenšuje ovšem zásluhy slavného Heinricha Hertze (1857—1894), jenž známými pokusy potvrdil roku 1887 existenci a vyšetřil i vlastnosti elektromagnetických vln. O tom však bude u příležitosti 100. výročí jeho narození a 70. výročí jeho klasických pokusů právě letos hojně psáno.

## **K stému výročí narozenin otce moderní elektroniky**

Dne 22. února 1857 se narodil v Hamburku H. Hertz, který po gymnasiálních studiích a semestru stavebního inženýrství studoval fyziku v Mnichově a v Berlíně; zde roku 1880 promoval po disertační práci O rotující vodivé kouli mezi magnety. Byl asistentem Helmholze a po habilitaci v Kielu zabýval se elektrickými výboji ve zředěných plynech a průchodem elektronů kovovými filmy. Na technice v Karlsruhe zabýval se elektromagnetickým vlněním, kterým se proslavil; v Bonnu pak experimentálním ověřením Maxwellovy theorie, kterou matematicky zpracoval a pak věnoval úsilí o jednotné pojetí elektromagnetického a gravitačního pole.

V roce 1894 zemřel po delší nemoci na komplikace zubního kazu. Na jeho počest je nazvána jednotka kmitu za vteřinu Hertzem, zkráceně Hz. Hertz se také neobyčejně zasloužil o rozvoj moderní elektroniky, jejíž začátky je možno spatřovat v roce 1878, kdy Hughes zjistil, že výboj elektrické jiskry byl v mikrofónu telefonu slyšitelný ve vzdálenosti 20 m, avšak domníval se, že jde o indukci. Maxwell vyslovil domněnku, že elektrické poruchy se šíří prázdným prostorem jako elektromagnetické vlny rychlostí světla, což bylo později Hertzem dokázáno. Hertz roku 1887 použil resonátoru v podobě vodivých koulí na izolovaném podstavci, v nichž posuvné měděné tyče umožňovaly měnění doskoku jisker z náboje koulí, spojených s induktorem. Důkaz šíření elektromagnetických vln podal drátěným kruhem, mezi jehož konci přeskakovaly jiskry až 3 mm dlouhé.

Roku 1889 Lodge uskutečnil uzavřený kmitající okruh: Branly zvýšil citlivost obvodu zavedením kohereru a Tesla roku 1892/3 vysokofrekvenčním transformátorem uskutečnil přenos až na 30 km. Righi snížením délky vln dospěl až k vlnám o délce 7,5 cm. Poprvé k zjištění atmosférických poruch spojil uzemněný koherer s anténou a zavedl nárazem kladívka obnovení citlivosti kohereru. Žák Righiho, Marconi,<sup>1)</sup> dosáhl přenosu na vzdálenost větší než 5 km mezi mysem Lavernockém a ostrovem Flatholmem, roku 1901 pak spojení na 400 km a v roce 1902 přes Atlantik.

F. Komurka (Dtsch. Elektrotechnik 2/57).

<sup>1)</sup> Názory na Marconiho práce se v poslední době však různí. (Red.)

## Recenze

*Prof. RNDr Zdeněk Horák: Úvod do molekulové a atomové fyziky.* Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 2. revidované a doplněné vydání, 535 stran formátu A5, s velkým počtem obrázků a tabulek, 130 záznamů literatury, věcný rejstřík, cena vázaného výtisku 36,10 Kčs.

Kniha je samostatně pojatým dílem vysoké pedagogické úrovně, je určena pro posluchače techniky vyšších ročníků, kteří si potřebují ucelit a doplnit znalosti z moderních partií fyziky.

Celé dílo je rozděleno do šesti hlavních oddílů. První oddíl má název *Klasická molekulová fyzika*; je v ní postupně pojednáváno o historickém vývoji názorů na složení hmoty, o základních představách molekulové teorie, názorně se osvětluje povaha, velikost a vzájemné silové působení molekul a souvislost mezi energií molekul a skupenstvím látky. V dalším je podán stručný přehled základů kinetické teorie plynů - z tohoto přehledu uvádíme odvození zákona rychlostního rozdělení molekul podle Maxwella a popis některých method tento zákon potvrzujících, zavedení a osvětlení pojmu střední volné dráhy molekul - a velmi pěkně podanou kapitolu o statistické mechanice. Celý první oddíl končí část věnovaná základům thermodynamiky. Jsou v ní podány základní thermodynamické věty, kapitola pojmu entropie a zvláštní kapitola je věnována Boltzmannově definici entropie založené na předpokladu, že entropie je funkcí pravděpodobnosti stavu.

Druhý oddíl - *Elektrony a ionty* - má tři části: Základy teorie relativnosti, část nazvanou *Elektrony* a část s názvem *Elektronová a iontová optika*. V základech teorie relativnosti jsou vyloženy jen hlavní rysy speciální teorie relativnosti - princip stálé rychlosti světla a některé experimentální metody sloužící k jeho ověřování, Lorentzova transformace a pohybový zákon pro relativistické rychlosti. Tuto část uzavírá kapitola o ekvivalenci hmoty a energie. V části o elektronech autor nejprve podává přehled poznatků potvrzujících existenci elektronu a přehled method určení velikosti elementárního náboje. Dále je probrána klasická elektronová teorie kovů, pohyb elektronu v magnetickém a elektrickém poli, stručně je pojednáno o thermoemisi (Richardsonova a Richardsonova-Dushmanova rovnice). V závěru je velmi pěkně popsán princip betatronu a synchrotronu. Část - elektronová a iontová optika - obsahuje vedle přehledu elektronové optiky, t. j. základů elektronové optiky a její aplikace v elektronických přístrojích - obrazovku, superikonoskop, elektronový mikroskop, též popis detektorů záření a principu hmotového spektrografu. Hlavní těžiště celé této části je v probrání urychlovačů částic: lineární urychlovače, cyklotron, synchrociklotron, kosmotron. U každého typu je uvedena jak stručně teorie, tak popis provedení s obrázky a fotografiemi.

Třetí oddíl *Názorná kvantová fyzika* - se snaží podat přehled teorie kvant. Vychází obvyklým způsobem z přehledu záření, ukazuje vlastnosti elektromagnetického vlnění na příkladech (radar), X záření, tepelného záření, a dostává se k teorii černého záření. Uvádí Planckovu teorii a modely atomu. Ukazuje na souvislost mezi jemnou strukturou spekter a kvantováním

elektronových drah. Závěr je věnován přehledu systematiky spekter a soustavě prvků.

**Čtvrtý oddíl Vlnová mechanika** - obsahuje obvyklý přehled oboru zabírající zdůraznění dvojího charakteru vln a částic, princip vlnové mechaniky a její matematický aparát, Schrödingerovu rovnici, řešení vodíkového atomu, Pauliho princip a heliový atom. Velmi pěkně a osobitě jsou pojaty kapitoly z vlnové mechaniky molekul. Jsou uvedena řešení molekuly vodíku, pojednáno o výměnných silách, o molekulárních spektrech a v závěru celého oddílu o kohesních silách.

**Pátý oddíl - Kvantová fyzika pevných látek** - má na začátku uvedeny základy statistické fyziky. Je zaveden fázový prostor, provedeno jeho kvantování. Statisticky je odvozen Maxwellův zákon a ekvipartiční teorém. Je uvedena statistika Fermiho a Boseho. V dalším jsou probrány procesy příslušející změně skupenství a charakter skupenství pevného a kapalného. Dále jsou kapitoly o stavbě krystalů, polovodičů a theorie magnetismu. Tato je podána zvláště zdařile. Ve všech kapitolách o teoriích stavby látky jsou uváděny jejich aplikace na jednotlivých případech.

**Poslední šestý oddíl** má název **Fyzika atomového jádra**. Nejprve je probírána přirozená radioaktivita a kosmické záření. Jsou vysvětleny charakteristiky prvků - atomové číslo a atomová hmota - a charakteristiky jader. Kapitoulou o základech theorie jádra přechází autor k další části o jaderných reakcích. Jsou probrány jak jaderné reakce vyvolané radioaktivním zářením, tak reakce vyvolané uměle urychlenými částicemi. Je probráno štěpení jader a otázky energetického využití jaderných reakcí. Celý oddíl je ukončen popisem reaktorů, počínaje prvním pokusným reaktorem z roku 1942 až po moderní reaktory.

Celá kniha je uzavřena přehledem soustavy MKSA a převodními tabulkami jednotek MKSA na jednotky absolutní soustavy.

Na závěr je možno konstatovat, že kniha je příkladným dílem moderní učebnice, která nepomíjí výsledky vědy starší doby, didakticky těchto výsledků využívá a přitom uvádí nejnovější poznatky a výsledky současných prací.

Přesto, že kniha je psána jako vysokoškolská učebnice a jako nastavbový kurs pro absolventy vysoké školy, mnohé její partie jsou srozumitelné i studentům jedenáctileté. Je možno ji doporučit zejména těm, kteří se hodlají vysokoškolsky vzdělávat ve fyzice, a zvláště vřele také našim středoškolským učitelům fyziky.

Libor Pátý

*Zajímavá knížka o rotačním válci.* Nedávno vyšla v knižnici „Populární přednášky o matematice“ útlá knížka G. M. Mirakjana s názvem „Šroubovice“. Název brožury není snad příliš výstižný, neboť tato populární přednáška obsahuje celkem osm kapitol, v nichž se středoškolský student může dovědět mnoho nejen o šroubovici, ale též o různých zajímavostech z geometrie rotačního válce. Přitom šroubovici, která dala název celému dílku, je věnována vlastně jen první kapitola.

Rotační válec je těleso, s nímž se velmi často setkáváme v každodenním životě i v technické praxi. Vždyť hřídele strojů, pláště různých trubek, plechovka od konzervy nebo role novinového papíru jsou předměty, které mají tvar rotačního

válce. Avšak autor naší knížky si šel pro příklady i do vědy, která je zdánlivě matematice velmi vzdálená - do botaniky. Víte totiž jistě všichni, že stonky popínavých rostlin (na př. fazolí, chmele, vinné révy, svlačce a pod.) se ovíjejí kolem opěry v jisté prostorové křivce, kterou bychom si mohli nakreslit na plášť rotačního válce; tato křivka se nazývá šroubovice. Při tom je zajímavé, že na př. fazole vytváří jinou šroubovici než chmel; první z nich je totiž „pravotočivá“, druhá „levotočivá“. Z Mirakjanovy brožurky se můžete dovědět o šroubovici ještě další zajímavosti.

Z dalšího obsahu knížky bude naše čtenáře pravděpodobně nejvíce zajímat ještě tato úloha: V továrně se mají vyrábět kovové obaly na konzervy. Objem každé konzervy je dán tím, že je stanoveno, jakou má mít vyráběná konzerva váhu. Jaký tvar máme nyní dát válcovému obalu, aby se zbytečně neplýtvalo materiálem? Tuto úlohu můžeme „přeložit“ do matematické řeči takto: Mezi všemi rotačními válci o daném objemu máme vyhledat ten, který má nejmenší povrch. - Prozradíme vám ještě výsledek výpočtů (ale řešení úlohy si najděte sami v Mirakjanově brožuře): Výška hledaného válce musí být rovna průměru podstavu.

Tolik tedy ve stručnosti o obsahu knížky. Závěrem bychom ještě chtěli říci, že velkým kladem spisku je jeho velmi přístupný sloh: je psán pro mládež a zajisté každý průměrný žák naší jedenáctiletky nebo odborné školy mu dobře porozumí.

Knížku z ruštiny přeložil Inž. Milan Ullrich a vydalo ji v únoru 1957 Státní nakladatelství technické literatury v Praze; má 60 stran a 31 obrázků a stojí pouze 1,52 Kčs.

Jiří Sedláček

## **Prof. Dr František Rádl**

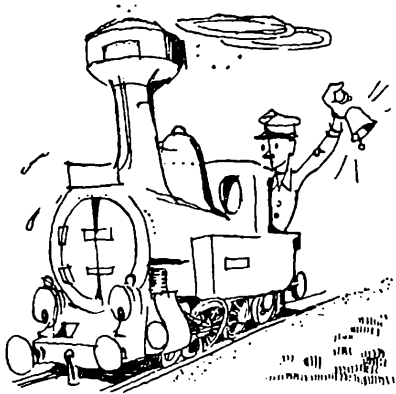
(10. 1. 1876—30. 12. 1956)

Dr František Rádl, profesor matematiky českého vysokého učení technického v Praze ve výslužbě, zemřel 30. prosince 1956 v Praze.

Narodil se 10. ledna 1876 v Pyšelích, v okrese říčanském, v Pražském kraji. Vysokoškolská studia koňal na české universitě v Praze a na Sorbonně v Paříži (1909—10). Na doktora filosofie byl promován v r. 1906. Více než dvacet let působil jako profesor matematiky na různých středních školách. Na české technice v Praze se habilitoval z matematiky r. 1917 a suploval od r. 1921 přednášky z matematiky. Roku 1926 byl jmenován řádným profesorem matematiky na vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství českého vysokého učení technického v Praze, kde působil až do odchodu na odpočinek r. 1948.

Napsal přes třicet pojednání, která se skoro všechna zabývají formální teorií diferenciálních rovnic lineárních obyčejných i parciálních. Je autorem Učebnice matematiky pro vysoké učení technické (první vyd. 1931, druhé pozmeněné vyd. 1946).

Karel Rychlík



## *Jiní o nás*

Tentokrát k vám zase promluví technik, prof. Ing. Robert Nejepsa, doktor technických věd, odborník ve stavbě kolejových vozidel z Vysoké školy železniční v Praze. Uvidíte, jak se na naše vědy a vaše studium dívá zkušený strojný inženýr s dlouholetou úspěšnou tovární praxí.

Milí studenti,

přál bych vám, aby obnovené Rozhledy pomáhaly vytvářet prostředí naplněné zájmem o matematiku a fyziku. Jsem z generace, která před více než 35 lety strávila mnoho chvil nad tehdejšími Rozhledy. Byli jsme realisté, t. j. studovali jsme na sedmitřídní reálce, jež navazovala na 5. třídu obecné školy. Tehdejší reálky, na rozdíl od tehdejších gymnasií, věnovaly velkou pozornost přípravě pro technická povolání. Pěstovaly matematiku, fyziku, deskriptivní geometrii, rýsování, kreslení a chemii v poměrně velkém počtu hodin. V každé třídě bylo tehdy pro tyto předměty dosti nadšenců, kteří se zabývali i úlohami přesahujícími ukládané úkoly. Pamatuji se, jak jsme si sami vytvářeli úlohy z matematiky, geometrie a deskriptivní geometrie a zabývali jsme se jimi v přestávkách vyučování, na cestě do školy a ze školy (chodili jsme pěšky do okresního města z okolních obcí), ve studentském spolku, i na procházkách. Byla to pro nás duševní gymnastika, pěstovaná právě tak pilně jako tělocvik v Sokole. Náplň ve výuce matematiky a geometrie byla tehdy bohatá a pestrá. Uvažte, že v V. třídě (dnešní 10. rok) jsme měli probrány z euklidovské geometrie na př. Apolloniovy úlohy o kružnicích, v VI. třídě jsme probírali trigonometrii, v VII. třídě analytiku a počátky diferenciálního a integrálního počtu. Stejně bohatý materiál poskytovala tehdejší deskriptivní geometrie pěstovaná ve 4 nejvyšších ročnících. Zásluhou vynikajících učitelů a povzbuzujících Rozhledů získali jsme dobré základy, jak jsme si ověřili při přechodu na techniku. Každá zábavou získaná znalost na střední škole se nyní zhodnotila, umožnila překonání prvních velkých náporů a byla podporou při probíjování se k cíli studií - ke II. státní zkoušce a titulu inženýra.

Vstupem do inženýrské praxe byli jsme zařazeni do různých oborů. Stále nás doprovázely zmíněné reálie, domněle theoretické, ve skutečnosti nejvýš praktické v řešení pohybu (na př. vozidel), ve výpočtech pevnostních, elektrotechnických, v řešení konstrukčních tvarů. Celé naše inženýrství se nám jeví a jeví dodnes postavené na matematice, fyzice, geometrii. S přibývajícím lety vystupoval tento poznatek tím zjevněji. Znalost reálií může zabránit v technice pohodlnému skluzu do praktikismu, tak nebezpečného a nemožného v jejím rozvoji.

Tato skutečnost vrací nás ve vzpomínkách často do doby našich středoškolských studií. S radostí jsme při příležitostných sjezdech abiturientů vzpomínali





#### 4.

Ve třech „vodorovných“ a třech „svislých“ rovnicích je v obr. 2 dáno devět čísel, z nichž některá jsou vyjádřena ještě dílčími početními úkony. Místo číslic jsou opět kresleny značky, podobně jako v předchozím příkladu. Za značky vyhledejte číslíčky tak, aby byly splněny všechny naznačené početní úkony.

V. Š.

Obr. 2

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \square \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \blacksquare \blacksquare \\ \square \end{array} \\ & \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \square \blacksquare \\ \square \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešení obou příkladů uveřejníme v některém z dalších čísel Rozhledů.



### Redakce hovoří se čtenáři

★ Mnoho našich čtenářů vykonalo právě závěrečnou zkoušku na jedenáctiletce nebo odborné škole. Blahopřejeme jim k tomuto výsledku mnohaleté práce a doufáme, že i dále zůstanou nejen odběrateli Rozhledů matematicko-fyzikálních, ale že se stanou i jejich přispěvateli. V každém případě však jistě zůstanou nadále příznivci matematiky, deskriptivní geometrie i fyziky a využijí jejich znalosti k prospěchu naší společnosti i pokroku vůbec.

★ Opět a opět docházejí nás urgency, že nebylo doručeno 1. číslo Rozhledů. Redakce však je naprosto bezmocná a nedostane žádná čísla k dispozici, neboť Poštovní novinová služba má monopolní právo k distribuci. Urgujte proto zaslání chybějících čísel u své místní Poštovní novinové služby.

★ Redakce uznává, že časopis nejde někdy s okamžitým krokem dne. Čtenář musí však uvážit, že na příklad toto 6. číslo bylo dáno již 16. dubna k jazykové úpravě a 26. dubna do tisku.

★ S. Musil, Hranice. Příležitostně vyhovíme Vašemu přání o uveřejnění článku týkajícího se komplexních čísel. Neostýchejte se po vykonání maturitní zkoušky zaslat nám svůj příspěvek. Trisekci úhlu se však nezapomívejte.

## Z činnosti JČMF v Ústí nad Labem.

Pobočka JČMF v Ústí n. L. byla založena 29. června 1956. Má nyní 79 členů. Od založení pobočka uspořádala 5 členských schůzí s tímto programem:

- 1) Dne 27. 9. 56 se konala přednáška s. Jar. Loudy (vyšší pedagogická škola Ústí n. L.) „Pohyb elektronu v magnetickém a elektrickém poli“. Diskusi o závěrečných zkouškách na OSŠ a o přijímacích zkouškách na školy výběrové vedli E. Pavlata (1. JŠŠ Ústí) a s. Kukuča (PŠ Chomutov).
- 2) 19. 12. 56 byla přednáška a instruktáž s. A. Niedrleho (Hr. Králové) „Užití geony v planimetrii, stereometrii, deskriptivní geometrii“. Referát „O problému přijímacích zkoušek do výběrových škol“ přednesl E. Pavlata (1. JŠŠ Ústí).
- 3) Přednášky dne 21. 2. 57. „Zobecněný problém Malffatiho“ přednesl s. Fajtl (PŠ Chomutov), „Příspěvek k řešení rovnice 4. stupně“ přednesl s. Dr Ing. Leminger (Chemické závody Ústí) a přednášku „Časová změna koncentrace roztoku v průtočné nádrži“ přednesl s. Mišoň (PŠ Chomutov).
- 4) Dne 14. března 57 přednášel s. Jiří Sedláček z MÚ ČSAV v Praze „O konečných grafech“. Následovala kapitola z rekreační matematiky a konečně o návrhu nových osnov deskriptivní geometrie a rýsování referovali a diskusi vedli E. Pavlata a s. Cipín (oba 1. JŠŠ).
- 5) 18. dubna 57 přednášel s. J. Louda (VPŠ Ústí) na thema „Oscilograf — pomocník vědce, laboranta a učitele“. O návrhu nových osnov fyziky referovali a vedli diskusi s. Jan Stránský (JŠŠ Chomutov) a s. A. Šťastný (2. JŠŠ Ústí).

Konečně přednášel dne 21. května s. Doc. Emil Kraemer, děkan vysoké školy pedagogické „O geometrii“. Přednáška se těšila veliké pozornosti všeho učitelstva nejen z okresu Ústí, ale z celého Ústeckého kraje.

Přednášky a členské schůze jsou navštěvovány průměrně 40-65 účastníky.

*Em. Pavlata.*

## POŘADÍ VÍTĚZŮ VI. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIADY

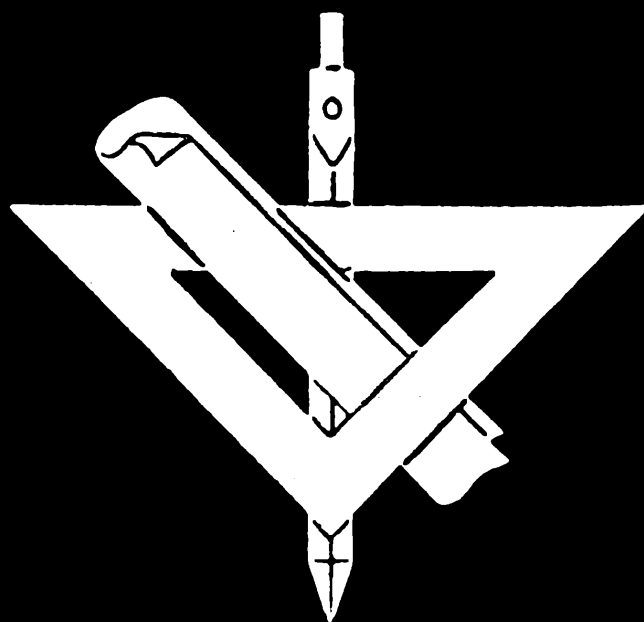
(Jméno a příjmení, třída, škola, adresa školy)

1.	Jaroslav Lukeš;	11a;	21. JSS;	U Santošky č. 1, Praha XVI.
2.	Jaroslav Morávek;	11b;	JSS;	tř. Čs. armády 585, Chrudim.
3.	Karel Najzar;	11b;	JSS;	Paskovská ul. 64, Ostrava VII-Vítkovice.
4.	Josef Musil;	11b;	JSS;	Ledeč nad Sázavou.
5.	Miroslav Hušek;	11a;	21. JSS;	U Santošky 1, Praha XVI.
6.	Bohdan Zelinka;	11b;	1. JSS;	Husova 44, Liberec.
7.	Karel Záleský;	11b;	2. JSS;	Liberec-Horní Růžodol.
8.	Jan Zitko;	11b;	JSS;	Chrudim.
9.	Jiří Turek;	11c;	9. JSS;	U libeňského gymnasia 1, Praha 8.
10.	Petr Hájiček;	11a;	JSS;	Mendlovo nám., Brno.
11.	Tomáš Skotnica;	11a;	JSS;	Ostrava VIII-Hladnov.
12.	Ivan Santar;	11a;	JSS Ant.	Zápotockého; Karlovy Vary.
13.	Václav Panuška;	11b;	JSS;	Nová ulice 7, České Budějovice.
14.	Frant. Kobliha;	11b;	1. JSS;	Hellichova ul. 3, Praha 1-Malá Strana.
15.	Adolf Karger;	11b;	JSS;	Šumperk.
16.	Jiří Šmíd;	11b;	JSS;	Ostrava VII-Vítkovice.
17.	Antonín Postřihač;	11;	JSS;	Vlašim.
18.	Jaromír Hrdý;	4a tř.	průmyslové školy elektrotechnické;	Pod Koželuhy 100, Jičín.
19.	Jaroslav Novák;	11a;	JSS;	Litoměřice.
20.	Milan Hamala;	11c;	2. JSS;	Šrobárova 46, Košice.

Redakce Rozhledů všem blahopřeje!

*Upozorňujeme čtenáře,*

že Státní pedagogické nakladatelství zásadně nepřijímá objednávky pedagogických časopisů. Distribuci provádí jediné Poštovní novinová služba a objednávky přijímají všechny poštovní úřady a poštovní doručovatelé.



# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 7

Toto číslo vyšlo 15. září 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

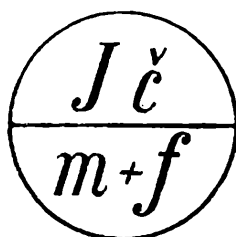
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Ľaroslav Bejsta*, OSS, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Ľirí Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Ľaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ľán Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

Doc. Dr. K. Havlíček: Vypořádejme se se složenými zlomky	289
V. Vitek: Dokonalá čísla, Mersenova a Fermatova prvočísla	291
L. Sedláček: Geometrické konstrukce pravítkem a měřítkem	293
S. Horák: Dvě věty o rovnoběžnicích vepsaných trojúhelníku	298
S. Horák: Tři věty o hyperbole	301
Ing. Z. Růzha: Pohon letadel	304
J. Halenka: Mezinárodní geofyzikální rok a náš příspěvek k němu	313
V. Proser: Co je to spektrální analýza?	318
L. S.: Dvě elongace planety Merkura	324
—mp—: Uvidíme Drakonidy?	324
J. Kotyk: Nikola Tesla	325
Recenze	330
S. H.: Skládačky	331
Řešení úloh	332
Sdělení redakce	335
J. Sedláček: Skončil šestý ročník Matematické olympiady	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 30130

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hömig.



## Matematika

Doc. Dr. Karel Havlíček, Praha:

### Vypořádejme se se složenými zlomky

K těmto řádkům mě nutí zkušenosti z přijímacích pohovorů se studenty, kteří přicházejí do prvního ročníku na vysokou školu. Je přirozené, že někteří studenti jsou v matematice obratnější než jiní, ale když určitý typ příkladů počítají všichni studenti stejně nešikovně, je to známkou šablonovité práce ve škole a zavírání očí před methodikou.

Přemýšleli jste už někdy, mladí přátelé, o tom, že znalost různých způsobů řešení téže úlohy je právě tak užitečná jako nové věcné poznatky? Všimli jste si toho, že vyježděná šablona užívající pro určitý typ úloh stejného způsobu řešení může být i nebezpečná? Vždyť takové šablonovité řešení vede k rutinérství, při kterém myšlenková práce se ztrácí anebo se omezí na minimum; to ovšem právě matematice nemůže mnoho posloužit.

Abychom se dostali k složeným zlomkům, slíbeným v nadpise tohoto článku, začněme s běžným výpočtem, který všichni tak dobře znáte, že už při něm obyčejně ani nepřemýšlíte. Na příklad zlomek

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$$

převádíte na jednoduchý zlomek takto:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}{\frac{9}{12} - \frac{2}{12}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{2}{7}.$$

Všimněte si, že zde složený zlomek převádíte nejdřív na *jiny* složený zlomek a ten pak teprve užitím mechanického pravidla pro dělení zlomku zlomkem převedete na zlomek jednoduchý.

Nevím, proč tento způsob počítání je na všech našich školách přímo zakořeněn, když existuje jednodušší, rychlejší a tedy bezpečnější způsob. Proč daný složený zlomek převádíme nejdřív na jiný složený zlomek, když z něj můžeme hned při prvním početním kroku dostat zlomek jednoduchý?

Znáte přece všichni rozšiřování zlomku. Užijme toho v našem příkladě a rozšířme vhodně daný složený zlomek. Nejmenší společný násobek jmenovatelů všech zlomků, jež se v daném složeném zlomku vyskytují, je v našem případě 12. Tím rozšíříme daný složený zlomek a dostaneme z něho ihned zlomek jednoduchý:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 12}{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot 12} = \frac{6 - 4}{9 - 2} = \frac{2}{7}$$

Protože první zde naznačenou operaci (rozšiřování daného složeného zlomku) obvykle nezapíšeme, ale provádíme ji v duchu, je záznam výpočtu ve skutečnosti kratší, než se zde jeví. V složitějších případech ušetříme někdy při tomto způsobu počítání i dost místa na papíře. Celá tato práce je zřejmě přehlednější než způsob uvedený dříve.

Vedle pravidla vám známého lze tedy udat také toto pravidlo:

*Zlomek složený převádíme na zlomek jednoduchý tím, že tento složený zlomek rozšíříme společným násobkem jmenovatelů všech zlomků, jež se v daném složeném zlomku vyskytují.*

Obvykle je ovšem nejvýhodnější zvolit za číslo, jímž složený zlomek rozšiřujeme, nejmenší společný násobek všech v úvahu přicházejících jmenovatelů. Tak na příklad v příkladě 4, uvedeném na str. 17 vaší učebnice algebry pro devátý až jedenáctý postupný ročník, rozšíříme daný složený zlomek číslem  $2r^2$ . Máme pak

$$\frac{1 - \frac{1}{r^2}}{\frac{r+1}{2r}} = \frac{2r^2 - 2}{r(r+1)} = \frac{2(r-1)(r+1)}{r(r+1)} = \frac{2(r-1)}{r}$$

Přitom se ovšem předpokládá, že  $r \neq 0$ ,  $r \neq -1$

V dalším příkladě našeho článku rozšíříme daný složený zlomek číslem  $r(r-1)(r+1) = r(r^2-1)$  takto:

$$\frac{\frac{r}{r-1} + \frac{r+1}{r}}{\frac{r}{r+1} - \frac{r}{r}} = \frac{r^2(r+1) + (r-1)(r+1)^2}{r^2(r-1) - (r-1)^2(r+1)} = \frac{(r+1)(2r^2-1)}{r-1} ;$$



přítom je nutno předpokládat, že  $r \neq 0$ ,  $r \neq 1$ ,  $r \neq -1$ , jak jste jistě sami při výpočtu zjistili.

Doporučuji vám, abyste ve vaší učebnici vyhledali i další příklady se složenými zlomky a vypočítali je oběma zde uvedenými způsoby; sami se pak rozhodněte pro ten způsob, který se vám bude víc líbit.

Vím, že jste se v tomto krátkém článku nic nového z matematiky nedozvěděli a že tedy vaši touhu po vědění jsem zde neukojil. Ale i methodická práce má v matematice svoji důležitost; nepodceňujte ji a nestyďte se vymýšlet samostatné a nové cesty v řešení úloh ani tam, kde hotová řešení znáte už odjinud. Porovnávejte různé způsoby řešení téže úlohy a hledejte, jaké výhody má jedno řešení před druhým. I touto prací rozšíříte své matematické vzdělání.

V á c l a v V í t e k, Praha:

## Dokonalá čísla, Mersennova a Fermatova prvočísla

V následujícím článku chci vyložit některé zajímavé otázky t. zv. theorie čísel.

Přirozené číslo  $n \geq 1$  nazvu *dokonalým číslem*, jestliže součet všech jeho kladných dělitelů je roven jeho dvojnásobku. Tak na př. číslo 6 je dokonalé: součet všech jeho kladných dělitelů 1, 2, 3, 6 je  $12 = 2 \cdot 6$ . (Číslo 6 je nejmenší dokonalé číslo.) Naproti tomu číslo 8 není dokonalé, neboť  $1 + 2 + 4 + 8 = 15 < 2 \cdot 8$ . Dokonalá čísla první podrobně vyšetřoval E u k l e i d e s (IV. stol. př. Kr.). Jedno tvrzení o *sudých dokonalých číslech* vyjádřené dnes obvyklými symboly nalézáme v jeho známých „Základech“ (kniha IX, věta 36):

*Jestliže přirozené číslo  $n \geq 1$  má tvar  $n = 2^v p$ , kde  $v \geq 1$  a  $p = 2^{v+1} - 1$  je prvočíslo, pak  $n$  je dokonalé číslo.*

Tak na př. pro  $v = 1$  je  $p = 2^2 - 1 = 3$  prvočíslo a  $n = 2 \cdot 3 = 6$  je, jak již víme, číslo dokonalé. Pro  $v = 2$  je  $p = 2^3 - 1 = 7$  prvočíslo a  $n = 2^2 \cdot 7 = 28$  další dokonalé číslo:  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$ . Pro  $v = 3$  je  $p = 15$ , což je číslo složené; v tomto případě  $n = 8 \cdot 15 = 120$  není číslo dokonalé. Pro  $v = 4$  je  $p = 31$  prvočíslo a příslušné dokonalé číslo  $n = 16 \cdot 31 = 496$ . Pro  $v = 5$  je  $p = 63$  číslo složené. Pro  $v = 6$  je  $p = 127$  prvočíslo a příslušné dokonalé číslo  $n = 2^6 \cdot 127 = 8128$ .

Eukleidův důkaz „přeložený“ do dnešní matematické terminologie je veden takto: Budiž  $p = 2^{v+1} - 1$  prvočíslo (což nastává, jak víme, na př. pro  $v = 1, 2, 4, 6$  s  $p = 3, 7, 31, 127$ ). Potom má číslo  $n = 2^v (2^{v+1} - 1)$  dělitele

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{v-1}, 2^v$$

$$p, 2p, 2^2 p, 2^3 p, \dots, 2^{v-1} p, 2^v p,$$

jejichž součet jest

$$(1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^v) = (1 + p)(2^{v+1} - 1) = \underline{2^{v+1}}(2^{v+1} - 1) = 2n,$$

což bylo dokázati.

Otázku, zda dokázané tvrzení lze obrátit, kladně zodpověděl teprve za 2000 let

Leonhard Euler (1707—1783): čísla tvaru  $2^\nu \cdot p$  jsou jediná sudá dokonalá čísla. Jsou tedy shora uvedená čísla 6, 28, 496, 8128 prvá čtyři sudá dokonalá čísla. Abychom určili další, stačí tedy zjistit, pro které hodnoty  $\nu$  je  $p = 2^{\nu+1} - 1$  prvočíslem. Položme  $\nu + 1 = \tau$ .

Snadno dokážeme toto tvrzení:

*Je-li  $2^\tau - 1$  prvočíslo, pak též  $\tau$  je prvočíslo.*

Uvedené tvrzení můžeme vyslovit také takto: je-li  $\tau \neq 1$  číslo složené, pak též  $2^\tau - 1$  je číslo složené. Nechtě tedy  $\tau = \alpha \cdot \beta$  je t. zv. netriviální rozklad čísla  $\tau$ , kde  $1 < \alpha < \tau$ ,  $\alpha, \beta$  jsou přirozená čísla. Pak

$$2^\tau - 1 = (2^\alpha - 1)(1 + 2^\alpha + 2^{2\alpha} + \dots + 2^{\alpha(\beta-1)})$$

je rozkladem  $2^\tau - 1$  na dvě přirozená čísla (přitom netriviálním, neboť  $1 < 2^\alpha - 1 < 2^\tau - 1$ ). Tím je tvrzení dokázáno. Při hledání prvočísel mezi čísly  $2^\tau - 1$  se tedy stačí omezit na prvočíselné mocnitele  $\tau$ : jen ty mohou dát prvočísla.

Eukleidovská forma sudých dokonalých čísel je nyní  $n = 2^{\tau-1} \cdot p$ , kde  $\tau$  je prvočíslo a  $p = 2^\tau - 1$  je rovněž prvočíslo; otevřená zůstává otázka, pro jaká  $\tau$  je  $2^\tau - 1$  prvočíslem. Prvočísla tvaru  $2^\tau - 1$  se nazývají *Mersennova prvočísla* (podle francouzského matematika Marina Mersenna, který si o nich dopisoval s Fermatem). Není pravda, že  $2^\tau - 1$  je prvočíslem pro všechna prvočísla  $\tau$ , jak se domnívali mnozí matematikové, mezi nimi též Leibnitz. Pro  $\tau = 2, 3, 5, 7$ , jak víme,  $2^\tau - 1$  je prvočíslo. Ale již následující  $\tau = 11$  vede na složené číslo  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ . Pro  $\tau = 13$  dostáváme opět prvočíslo  $p = 2^{13} - 1 = 8191$  a tedy páté dokonalé číslo  $n = 33\,550\,336$ . Dosud se neví, zda Mersennových prvočísel je nekonečně mnoho. Jedině je známo, že mezi následujícími prvočíslly  $\leq 257$  čísla  $\tau = 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$  vedou na prvočísla, ostatní na čísla složená, vyjímaje  $\tau = 193$ , které ještě nebylo zkoumáno. - Mersenne kromě uvedených pěti dokonalých čísel znal ještě tři následující: 8 589 869 056, 85 009 891 328, 2 305 843 008 139 952 128, která odpovídají hodnotám  $\tau = 17, 19, 31$ . Deváté dokonalé číslo ( $\tau = 61$ ) našel r. 1885 Paul Seelhoff, desáté ( $\tau = 89$ ) R. E. Powers (1912).

Zatím co otázka o sudých dokonalých číslech je v podstatě vyřešena Eukleidem a Eulerem dokázanou větou (zůstává jediná otázka Mersennových prvočísel), není naproti tomu dosud známo ani jedno *liché dokonalé číslo* a ani není dokázáno, že neexistují. Byly pouze dokázány jisté speciální vlastnosti těchto čísel: na př. liché dokonalé číslo musí mít alespoň šest různých prvočíselných dělitelů (existuje-li).

Závěrem vyšetřujeme jeden problém analogický problému Mersennových prvočísel:

*Pro jaké přirozené  $n \geq 1$  je číslo  $p = 2^n + 1$  prvočíslem?*

Snadno opět dokážeme následující tvrzení:

*Je-li  $2^n + 1$  prvočíslo, pak  $n$  je mocninou dvojky, tedy  $n = 2^\nu$ , kde  $\nu \geq 0$ . (Srovnejte podobné tvrzení pro Mersennova prvočísla!)*

Kdyby totiž  $n$  nebylo mocninou čísla 2, takže  $n = u \cdot m$  je rozklad čísla  $n$  s lichým  $u > 1$ , potom

$$2^n + 1 = (2^m + 1)(1 - 2^m + 2^{2m} - \dots + 2^{(u-1)m})$$

by bylo netriviálním rozkladem čísla  $2^n + 1$  ( $1 < 2^m + 1 < 2^n + 1$ ).

Při hledání prvočísel mezi čísly  $2^n + 1$  se tedy můžeme omezit na hodnoty  $n$ , které jsou mocninami dvojky:  $n = 2^\nu$ ,  $\nu \geq 0$ . Otevřenou však zůstává otázka, pro která  $\nu \geq 0$  je číslo  $p = 2^{2^\nu} + 1$  prvočíslem. Prvočísla tohoto tvaru se nazývají *Fermatova prvočísla*. Mají význam v otázkách spojených s t. zv. dělením kruhu. Tak na př. Gauss dokázal, že pravidelný  $p$ -úhelník ( $p$  prvočíslo větší než 2) je možno sestavit pomocí pravítka a kružítka (t. zv. eukleidovská konstrukce) tehdy a jen tehdy, je-li  $p$  Fermatovo prvočíslo. Fermat sám se domníval, podobně jako Leibnitz o Mersennových, že  $p = 2^{2^\nu} + 1$  je prvočíslem pro každé celé  $\nu \geq 0$ . Tomu však tak není: pro  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$  dostáváme prvočísla

$$3, 5, 17, 257, 65\,537, \quad (1)$$

ale již následující ( $\nu = 5$ ) číslo  $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$  je dělitelno číslem 641. Podobně není o Fermatových prvočíslech známo, zda jich je nekonečně mnoho. V posloupnosti (1) další prvočíslo zatím známo není. Jedině je dokázáno, že  $\nu = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$  vedou na složená čísla.

Ladislav Sedláček, Opava:

## Geometrické konstrukce pravítkem a měřítkem

Jistě je zajímavá otázka, které konstruktivní úlohy v geometrii jsou řešitelné co nejjednoduššími prostředky. Kdy je daná úloha řešitelná pravítkem a kružítkem, je věc celkem známá. Ukážeme si proto některé úlohy, které lze řešit pravítkem a měřítkem. Pravítkem můžeme spojit kterékoliv dva různé body jedinou přímkou a budeme předpokládat, že daným měřítkem můžeme přenášet jednu jedinou úsečku určité nenulové velikosti. Tuto úsečku třeba zvolíme za jednotku délky. Při všech základních úvahách budeme potřebovat jen ty znalosti z planimetrie, které jsou běžně známé žákům 9. třídy.

K sestavení přímky spojující dva různé body a k stanovení průsečíku dvou nerovnoběžných přímek nám zřejmě stačí pouze pravítko. K řešení dalších úloh je nutno použít ještě měřítko.

**Úloha 1.** Daným bodem  $M$  sestrojte přímku  $m$  rovnoběžnou s danou přímkou  $a$ .

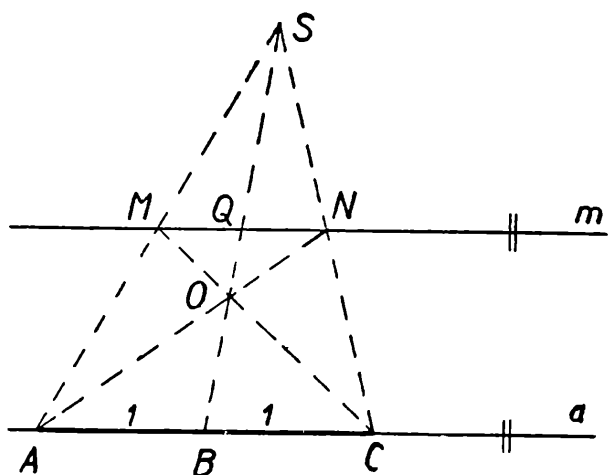
**Řešení.** Leží-li bod  $M$  na přímce  $a$ , je  $m \equiv a$ . Nechť tedy bod  $M$  neleží na přímce  $a$  (obr. 1). Spojme bod  $M$  s libovolným bodem  $A$  přímky  $a$ . Pak na polopřímce s počátečním bodem  $A$  sestrojme body  $B, C$  tak, že úsečky  $AB, BC$  jsou shodné s jednotkovou úsečkou ( $AB = BC = 1$ ) a že bod  $B$  leží mezi body  $A, C$ . Uvnitř úsečky  $MC$  zvolme bod  $O$  tak, že přímky  $AM, BO$  se protnou v bodě  $S$ , jež zřejmě leží vně úsečky  $AM$ . Pak přímky  $SC, AO$  se protínají v bodě  $N$ ,  $N \neq M$ , přímky  $m$ .

**Důkaz.** Bereme-li v úvahu i smysl úseček, pak ve stejnolehlosti o středu  $S$  a kladném koeficientu  $k = \frac{SM}{SA}$  je obrazem přímky  $a$  rovnoběžka  $m$ , jdoucí bo-

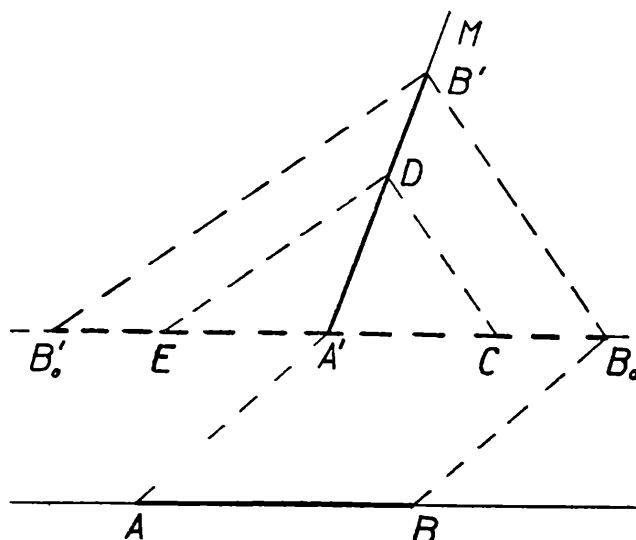
dem  $M$ . Bodům  $A, B, C$  odpovídají po řadě body  $M, Q, N$ . Protože bod  $B$  je mezi body  $A, C$ , proto také jeho obraz  $Q$  je mezi body  $M, N$ . Podle konstrukce je  $AB = BC$  a proto také  $MQ = QN$ .

Uvažujeme-li stejnolehlost se středem  $O$  a záporným koeficientem  $k' = \frac{OM}{OA}$ ,

odpovídá zase přímce  $a$  táž přímka  $m$  jako ve stejnolehlosti  $(S; k)$ . Protože body  $B, O, Q, S$  leží na jedné přímce a obraz bodu  $B$  ve stejnolehlosti  $(O; k')$  musí ležet jednak na přímce  $OB$  a jednak na přímce  $m$ , proto je obrazem bodu  $B$  v této stejnolehlosti nutně bod  $Q$ . Obrazem úsečky  $BC$  je tedy úsečka  $QM$  a obrazem úsečky  $AB$  je úsečka  $N'Q$ , přičemž body  $M, Q, N'$  leží na přímce  $m$  a bod  $Q$  mezi body  $M, N'$ , neboť jeho vzor  $B$  leží mezi body  $A, C$ . Úsečky  $MQ$  a  $QN'$  jsou shodné, protože také  $AB, BC$  jsou shodné. Je tedy úsečka  $MQ$  shodná jednak s úsečkou  $QN$  a jednak s úsečkou  $QN'$ . To však znamená, že také úsečky  $QN$  a  $QN'$  jsou shodné. Přitom body  $N$  a  $N'$  leží na polopřímce opačné k polopřímce  $QM$ . To však znamená, že  $N \equiv N'$ . Tedy bod  $N$  přímky  $m$  je průsečíkem přímek  $SC$  a  $AO$ , přičemž  $M \neq N$ . Tím je správnost konstrukce dokázána.



Obr. 1



Obr. 2

V dalších konstrukcích budeme již předpokládat, že dovedeme k dané přímce sestrojiti daným bodem rovnoběžnou přímku a přistoupíme k řešení dalších úloh.

Ú l o h a 2. Na dané polopřímce  $A'M$  s počátečním bodem  $A'$  sestrojiti bod  $B'$  tak, aby úsečka  $A'B'$  byla shodná s úsečkou  $AB$ .

Ř e š e n í. Budiž  $AB$  daná úsečka,  $A'M$  daná polopřímka a necht

a) jsou přímky  $AB, A'M$  různoběžné,  $A \neq A'$  (obr. 2). Pak bodem  $A'$  vedeme rovnoběžku s přímku  $AB$  a sestrojíme na ní bod  $C$  tak, aby přímky  $A'C, AB$  byly souhlasně rovnoběžné a aby  $A'C = 1$ . Nyní na polopřímce  $A'M$  sestrojíme bod  $D$  tak, aby  $A'D = 1$ . Bodem  $B$  pak vedeme rovnoběžku s přímku  $AA'$  a ta protne polopřímku  $A'C$  v bodě  $B_0$ . Nyní bodem  $B_0$  vedeme rovnoběžku s  $CD$ , která protne  $A'M$  v bodě  $B'$ . Pak  $AB = A'B'$ .

b) Jsou-li přímky  $AB, A'M$  různoběžné a  $A \equiv A'$ , pak řešení a obrázek si čtenář jistě provede sám.

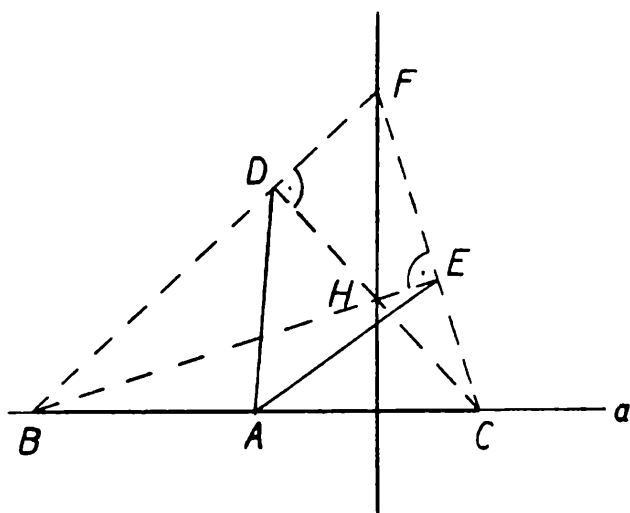
c) Jsou-li polopřímky  $AB$ ,  $A'M$  souhlasně rovnoběžné a různé, je řešení zřejmé. (V obr. 2  $A'B_0 = AB$ .)

d) Jsou-li polopřímky  $AB$ ,  $A'M$  nesouhlasně rovnoběžné a různé, zřejmě stačí bodem  $A$  vést rovnoběžku s  $BA'$ .

e) Leží-li konečně  $A'M$  v přímce  $AB$ , sestrojíme na libovolné polopřímce neležící v  $AB$  úsečku shodnou s úsečkou  $AB$ . K této pomocné úsečce sestrojíme podle předchozího na  $A'M$  úsečku shodnou s pomocnou úsečkou a tím je úloha vyřešena. Chybějící obrázky a důkazy správnosti konstrukcí si na základě vlastností rovnoběžnosti a stejnolehlosti snadno provede čtenář sám.

Ú l o h a 3. Daným bodem  $M$  sestrojte kolmici k dané přímce  $a$ .

Ř e š e n í. Úloha bude zřejmě vyřešena, dovedeme-li sestrojit nějakou kolmici k přímce  $a$ , k níž pak stačí vést bodem  $M$  rovnoběžku. Omezíme se tedy na sestrojení libovolné kolmice k přímce  $a$ . Budiž  $A$  libovolný bod přímky  $a$  (obr. 3). Na obou polopřímkách přímky  $a$  s počátečním bodem  $A$  sestrojíme body  $B$ ,  $C$  tak, aby  $AB = AC = 1$ . Pak na dvou různých polopřímkách s počátečním bodem  $A$ , ležících v téže polorovině vzhledem k  $a$ , sestrojíme body  $D$ ,  $E$  tak, aby  $AD = AE = 1$ . Přímky  $BD$ ,  $CE$  jsou různoběžné a protínají se v bodě  $F$  a přímky  $BE$ ,  $CD$  v bodě  $H$ . Pak přímka  $FH$  je kolmá k přímce  $a$ .



Obr. 3

D ů k a z. Úhly  $\sphericalangle BDC$ ,  $\sphericalangle BEC$  jsou totiž pravé, neboť jsou to úhly s vrcholy na kružnici o poloměru  $r = 1$ , která je opsána nad průměrem  $BC$ . Jsou tedy  $BE$ ,  $CD$  výšky trojúhelníka  $BCF$ , jež se protínají v bodě  $H$ . Pak  $FH$  je výškou tohoto trojúhelníka na stranu  $BC$  a je kolmá k přímce  $a$ .

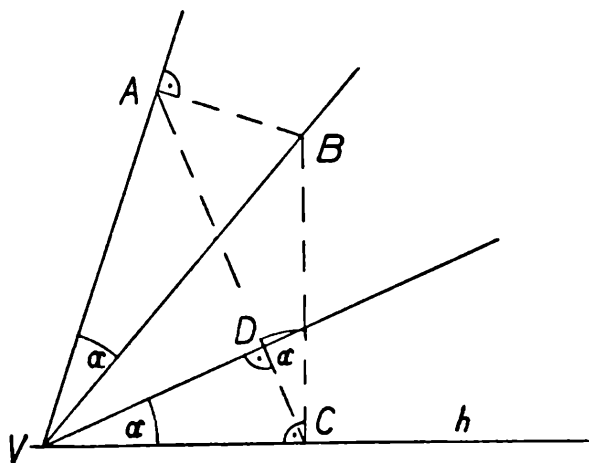
Ú l o h a 4. Je dán úhel  $\alpha = \sphericalangle AVB$ , polopřímka  $V'M$  a bod  $Q$  neležící na přímce  $V'M$ . Sestrojte úhel  $\sphericalangle A'V'B'$  shodný s úhlem  $\sphericalangle AVB$  tak, aby bod  $A'$  ležel na polopřímce  $V'M$  a bod  $B'$  v polorovině  $V'MQ$ . Náčrtek si provede čtenář sám.

Ř e š e n í. Při konstrukci zřejmě stačí uvažovat jen úhel ostrý, neboť kdyby šlo o úhel větší než pravý, lze jej převést na součet násobku pravého úhlu a úhlu ostrého. Za předpokladu, že úhel  $\alpha$  je ostrý, vedme bodem  $V$  přímku  $h$  rovnoběžnou s  $V'M$ . Z libovolného bodu  $B \neq V$  ramene úhlu  $\alpha$  vedme kolmici  $BA$

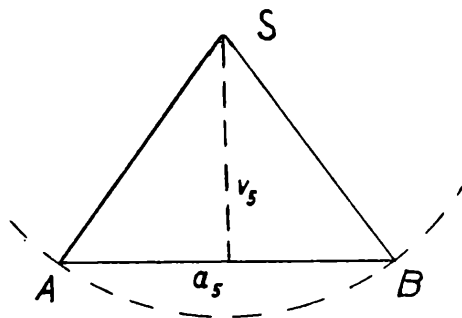
na druhé rameno. Dále sestrojme bodem  $B$  kolmici k přímce  $h$ . Paty těchto kolmic označme postupně  $A$ ,  $C$ . Vedeme-li konečně bodem  $V$  kolmici k přímce  $AC$  a označíme-li její patu  $D$ , pak platí, že  $\sphericalangle AVB = \sphericalangle DVC$ . Daným bodem  $V$  stačí pak vést rovnoběžku k přímce  $VD$  a tím je úloha vyřešena. (Obr. 4).

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že úhly  $\sphericalangle AVB$ ,  $\sphericalangle DVC$  jsou shodné. Protože úhly  $\sphericalangle VAB$ ,  $\sphericalangle VCB$  jsou pravé, proto body  $V, A, B, C$  leží na kružnici s průměrem  $VB$ . Pak obvodové úhly  $\sphericalangle VCA$ ,  $\sphericalangle VBA$  příslušné tětivě  $VA$  jsou shodné, t. j.  $\sphericalangle VCA = \sphericalangle VBA$ . Z pravoúhlého trojúhelníku  $VAB$  vychází, že úhly  $\sphericalangle AVB$ ,  $\sphericalangle VBA$  jsou doplňkové. Bod  $A$  leží zřejmě uvnitř pravého úhlu  $\sphericalangle VCB$  a tedy také úhly  $\sphericalangle VCA$ ,  $\sphericalangle ACB$  jsou doplňkové. Protože úhly  $\sphericalangle VCA$ ,  $\sphericalangle VBA$  jsou shodné, jsou shodné také úhly  $\sphericalangle ACB$ ,  $\sphericalangle AVB$ . Avšak rovněž úhly  $\sphericalangle ACB$ ,  $\sphericalangle DVC$  jsou shodné, neboť pro jejich ramena platí, že  $AC \perp VD$ ,  $BC \perp VC$ . Zvolíme-li bod  $B$  na druhém rameni úhlu  $\alpha$ , padne bod  $D$  do opačné poloroviny vyřezané přímkou  $h$  než v předešlém případě, ale jinak zůstane konstrukce i důkaz beze změny. Tím je důkaz ukončen.

Na základě toho, co jsme ukázali, dovedeme pomocí pravítka a měřítka úsečky sčítat a odčítat, t. j. sestrojít úsečku velikosti  $x = a + b$ ,  $x = a - b$  ( $b < a$ ). Dále dovedeme stejnolehlostí rozdělit úsečku na  $n$  stejných dílů ( $n$  je přirozené číslo) a sestrojít úsečku velikosti  $x = m \cdot a$  (násobení) a  $x = a : m$  (dělení). Pytha-



Obr. 4



Obr. 5

gorovou větou dovedeme sestrojít také úsečku velikosti  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Přitom  $a, b$  jsou velikosti úseček, jež mohou být určeny právě pěti uvedenými operacemi v konečném počtu.

Můžeme tedy na příklad sestrojít úsečku velikosti  $x = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + (1 + \sqrt{2})^2}$ . Nemůžeme však na

příklad sestrojiti úsečku délky  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ ,  $\pi$  atd.<sup>1)</sup> Dále dovedeme rozpůlit úhel, neboť v případě přímého úhlu stačí ve vrcholu  $V$  vztyčit kolmici a v případě dutého úhlu sestrojíme na ramenu body  $A, B$  tak, že  $VA = VB = 1$ . Výška rovnoramenného trojúhelníku  $VAB$ , jdoucí vrcholem  $V$ , půlí pak úhel  $\sphericalangle AVB$ .

Pro zajímavost ještě uvedme, že každý pravidelný mnohoúhelník, který lze

sestrojit pravítkem a kružítkem, je také sestrojitelny pravítkem a měřítkem.<sup>1)</sup> Konstrukci pravidelného mnohoúhelníku stačí provádět za předpokladu, že známe poloměr  $r$  kružnice opsané. Pak stačí umět sestroit úhel s vrcholem ve středu  $S$  kružnice opsané, jehož ramena procházejí dvěma sousedními vrcholy mnohoúhelníku. Postupným otáčením tohoto úhlu kolem bodu  $S$  (úloha 4) a nanášením úsečky délky  $r$  od bodu  $S$  na jednotlivá ramena, dostaneme vrcholy hledaného mnohoúhelníku. Konstrukce pravidelného  $n$ -úhelníka pro  $n = 2^m$ ,  $m \geq 2$  celé, je zřejmá, neboť jde o postupné půlení plného úhlu. Také konstrukce pravidelného šestiúhelníka je jednoduchá a provede si ji jistě čtenář sám. Na ukázkou si provedeme konstrukci pravidelného pětiúhelníku. Necht  $r$  je poloměr kružnice jemu opsané. Pak strana  $a_{10}$  pravidelného desetiúhelníka do kružnice vepsaného je, jak víme, delší úsek poloměru  $r$ , který byl rozdělen zlatým řezem, tedy

$$a_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) \quad (1)$$

Dále platí mezi stranou  $a_{10}$  pravidelného desetiúhelníku, poloměrem kružnice jemu opsané  $r$  a stranou pravidelného pětiúhelníku, vepsaného do téže kružnice, známý vztah

$$a_5^2 = r^2 + a_{10}^2 \quad (2)$$

Odtud po dosazení dostáváme

$$a_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad (3)$$

Stranu  $a_{10}$  dovedeme sestroit a tedy podle vztahu (2) dovedeme sestroit i stranu  $a_5$ . Zbývá jen sestroit střed  $S$  kružnice opsané (obr. 5). K tomu stačí znát výšku  $v_5$  rovnoramenného trojúhelníku  $ASB$ . Použijeme-li Pythagorovy věty a dosadíme-li za  $a_5$  z (3), dostaneme

$$v_5 = \frac{r}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

To však je velikost úsečky, kterou dovedeme sestroit. Nyní stačí, jak již bylo řečeno, otáčet trojúhelník  $ASB$  kolem bodu  $S$  o úhel  $\sphericalangle ASB$ .

Je jisté, že naše konstrukce mají pro praxi význam snad jen ve své nejjednodušší formě a to jen tehdy, nemáme-li po ruce jiné vhodnější prostředky. Po

---

1. Důkaz kriteria, kdy je daná úloha řešitelná pravítkem a měřítkem, se vymyká rámci článku. Čtenář je může najít v knize Dr David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (VII. umgearbeitete und vermehrte Auflage), B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. Dá se říci, že pomocí pravítka a měřítka lze řešit úlohy rovinné geometrie, vyplývající z axiomů incidence, uspořádání, shodnosti, rovnoběžnosti a axiomu Archimedova, jehož si všimneme poněkud blíže. Tento axiom je na příklad uveden v učebnici geometrie pro 9. třídu (str. 37, vyd. 1954) pod názvem *základní věty Archimedovy*: Nanášíme-li na polopřímku  $AB$  postupně úsečku  $CD$ , dostáváme tak vesměs různé body  $P_1, P_2, P_3, \dots$ ; po jistém konečném počtu kroků dojdeme k takovému bodu  $P_n$ , který leží vně úsečky  $AB$ . Tento axiom, jenž je velmi názorný, spolu s potřebnými axiomy uvedených skupin nám umožňuje, zvolíme-li jednotkovou úsečku, přiřadit každé úsečce jisté kladné reálné číslo jako její velikost (str. 38 téže učebnice).

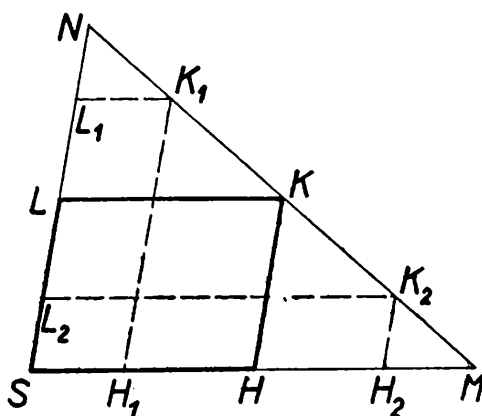
stránce theoretické jsou již zajímavější a to i v tom směru, že v prvním vydání Hilbertových „Základů geometrie“ nebyl uveden axiom úplnosti přímky.<sup>2)</sup> To znamená, že tato geometrie by souhlasila s geometrií budovanou pomocí pravítka a měřítka.

Stanislav Horák, Praha:

## Dvě věty v rovnoběžnících vepsaných trojúhelníku

V obr. 1 je dán trojúhelník  $SMN$ . O rovnoběžníku  $SHKL$  budeme říkat, že je tomuto trojúhelníku vepsán, jestliže bod  $H$  je vnitřním bodem strany  $SM$ ,  $K$  vnitřním bodem strany  $MN$  a  $L$  vnitřním bodem strany  $SN$ .

**P o u ě k a 1.** *Mezi rovnoběžníky vepsanými danému trojúhelníku  $SMN$  má největší obsah ten, jehož vrcholy  $H, K, L$  jsou středy jeho stran.*



Obr. 1

**D ů k a z.** Nejprve vypočítáme obsah tohoto rovnoběžníka. Spojíme-li ještě body  $H, L$ , je pak daný trojúhelník  $SMN$  rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky a rovnoběžník  $SHKL$  je složen ze dvou z nich. Podle toho platí

$$P(SHKL) = \frac{1}{2} P(SMN) ,$$

---

2. Naznačme si, oč vlastně jde. Je dána jednotková úsečka  $a$  na polopřímce s počátečním bodem  $O$  zvolíme bod  $A$  tak, že  $OA = 1$ . Zaplnujeme-li polopřímku  $OA$  pouze těmi body, jejichž vzdálenost od  $O$  je rovna jen velikosti úsečky, kterou dovedeme sestrojít pomocí axiomu Archimedova a ostatních axiomů uvedených ve 2., pak na této polopřímce zůstanou ještě prázdná místa. Je to na příklad takový bod, jehož vzdálenost od  $O$  má být rovna  $\pi$ . Neumíme-li pomocí uvedených axiomů sestrojít úsečku velikosti  $\pi$ , pak nedovedeme také sestrojít úsečku délky  $a + \pi$ , kde  $a$  je velikost úsečky, kterou dovedeme sestrojít. To však znamená, že na polopřímce  $OA$  a tedy také na polopřímce k ní opačné je nekonečně mnoho prázdných míst - mezer. Abychom mohli každému kladnému reálnému číslu při zvolené jednotce délky přiřadit určitou úsečku, je nutno tento nedostatek odstranit. To činí právě *axiom úplnosti přímky*. Když jej zavedeme, nejsou již na přímce žádné mezery, přímka je body úplně zaplněna, a odtud název tohoto axiomu. Podrobnější poučení může čtenář najít na příklad v knize B. V. Kutuzov, Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie (český překlad), Praha 1954.



kde symbol  $P(SHKL)$  značí obsah rovnoběžníka  $SHKL$  a  $P(SMN)$  představuje obsah trojúhelníka  $SMN$ .

Počítejme nyní obsah  $P(SH_1K_1L_1)$  rovnoběžníka  $SH_1K_1L_1$ , kde  $H_1$  je vnitřním bodem úsečky  $SH$  a  $K_1$  je pak vnitřním bodem úsečky  $NK$  a  $L_1$  vnitřním bodem úsečky  $LN$ . Pro stručnost označme délky (obr. 1):

$$SM = c, HH_1 = d \text{ a tudíž } SH_1 = \frac{1}{2}c - d$$

Výšku trojúhelníka  $SMN$  příslušnou straně  $SM$  označíme  $v$ , výšku rovnoběžníka  $SH_1K_1L_1$  na stranu  $SH_1$  označíme  $y$  a tedy výška trojúhelníka  $L_1K_1N$  na stranu  $L_1K_1$  je  $v - y$ . Z podobnosti trojúhelníků  $L_1K_1N$  a  $SMN$  platí

$$c : \left( \frac{1}{2}c - d \right) = v : (v - y)$$

Z úměry vypočteme

$$y = \frac{c + 2d}{2c} \cdot v$$

A nyní můžeme počítat obsah

$$\begin{aligned} P(SH_1K_1L_1) &= SH_1 \cdot y = \left( \frac{1}{2}c - d \right) \frac{c + 2d}{2c} \cdot v = \\ &= \frac{1}{4}cv - \frac{d^2v}{c} = \frac{1}{2}P(SMN) - \frac{d^2v}{c} = \\ &= P(SHKL) - \frac{d^2v}{c} \end{aligned}$$

Odtud je již vidět, že

$$P(SH_1K_1L_1) < P(SHKL)$$

Kdybychom zvolili mezi body  $H, M$  bod  $H_2$ , a to tak, aby  $HH_2 = d$ , dospěli bychom k témuž výsledku:

$$P(SH_2K_2L_2) = P(SHKL) - \frac{d^2v}{c},$$

t. j.

$$P(SH_2K_2L_2) < P(SHKL)$$

Z toho je již patrna správnost vyslovené poučky.

**P o u č k a 2.** Mezi rovnoběžníky vepsanými trojúhelníku  $SMN$  existují právě dva, jejichž obsah  $P_1$  je předem dán; při tom  $0 < P_1 < P(SHKL)$ .

D ů k a z bude proveden, jestliže se nám podaří najít rovnoběžník  $SH_1K_1L_1$  a rovnoběžník  $SH_2K_2L_2 \neq SH_1K_1L_1$  tak, aby platilo

$$P(SH_1K_1L_1) = P(SH_2K_2L_2) = P_1$$

Poněvadž  $0 < P_1 < P$  (SHKL), můžeme vzhledem k poučce 1 položit

$$P_1 = P (SHKL) - \frac{d^2 v}{c},$$

při čemž označení je totéž jako v důkazu poučky 1. Z poslední rovnice vypočteme (místo  $P (SHKL)$  pišme již prostě  $P$ ):

$$d = \sqrt{\frac{c}{v} (P - P_1)}$$

Tento výraz má vždy význam, neboť výraz pod odmocnítkem je vždy kladný. Úsečka délky  $d$  tedy existuje. Kdyby  $c, v, P, P_1$  byly dány číselně, bylo by možné ji vypočítat; když by  $c, v, P, P_1$  byly dány graficky, bylo by možné úsečku velikosti  $d$  sestrojít. Vrcholy  $H_1, H_2$  bychom pak dostali nanesením sestrojené úsečky od středu  $H$  úsečky  $MN$  v obou smyslech na stranu  $SM$ .

Pro úplnost ještě ukážeme, že  $d < \frac{1}{2} c$ . To je snadné.

Položme

$$P_1 = k \cdot P, \text{ kde } 0 < k < 1$$

Potom

$$d = \sqrt{\frac{c}{v} P \cdot (1 - k)}$$

Ale  $P = \frac{1}{4} cv$  a  $1 - k = k'$ , kde  $0 < k' < 1$ . Po dosazení obdržíme

$$d = \sqrt{\frac{1}{4} c^2 \cdot k'} = \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{k'} < \frac{1}{2} c,$$

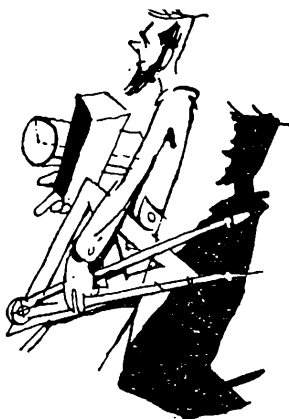
což jsme měli dokázat.

Důsledky dokázaných vět jsou:

1.  $K$  je střed úsečky  $K_1 K_2$ ;  $L$  je střed úsečky  $L_1 L_2$ .
  2.  $\triangle MK_2 H_2 \cong \triangle K_1 N L_1 \cong \triangle H_1 L_2 S$  a odtud  $K_1 N = MK_2$ .
- $K$  čemu se dá našich dvou vět použít, ukážeme si jindy.

Cvičení.

1. Jsou dány dvě různoběžné přímky  $SM, SN$  a mimo ně bod  $K$ . Bodem  $K$  veďte přímku  $t$  tak, aby její úsek mezi danými přímkami byl bodem  $K$  půlen.
2. V obr. 1 je  $MN \parallel H_1 L_2 \parallel HL$ . Dokažte!
3. Je dán rovnoběžník  $SH_1 K_1 L_1$ . Sestrojte rovnoběžník  $SH_2 K_2 L_2$  (s použitím obr. 1), který má danou základnu  $SH_2$  a úhel při  $S$  společný s daným rovnoběžníkem.



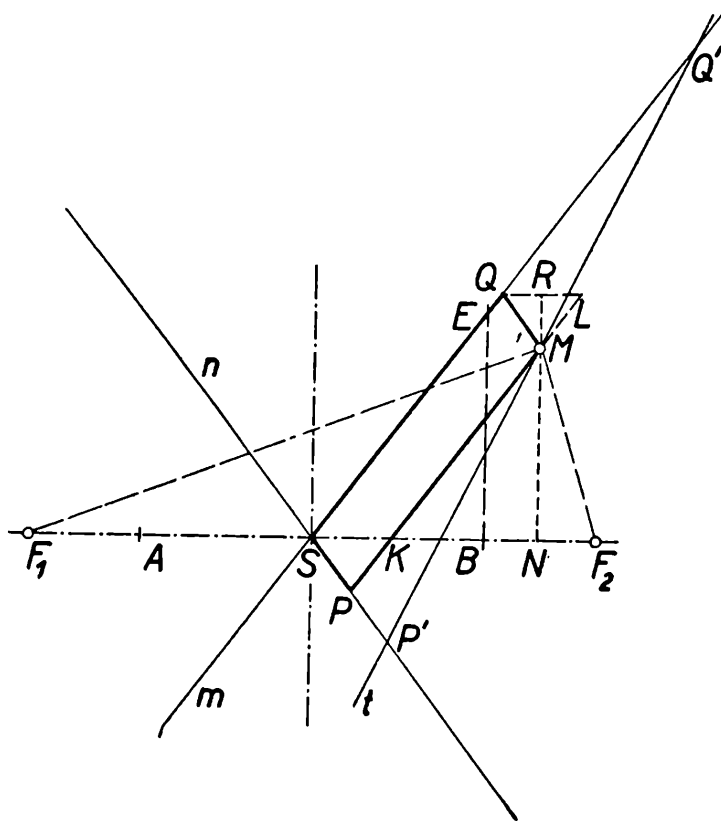
# Deskriptivní geometrie

Stanislav Horák, Praha:

## Tři věty o hyperbole

V tomto sešitu na str. 299 jsme si odvodili dvě poučky o rovnoběžnících vepsaných určitým způsobem trojúhelníku. Nyní si ukážeme, jak těchto vět lze použít k odvození zajímavých vět o hyperbole.

**Poučka 1.** *Rovnoběžník, jehož dvě strany leží na asymptotách hyperboly a jeden vrchol je bodem hyperboly, má obsah konstantní rovný  $\frac{1}{2} ab$ , kde  $a$  je poloosa hyperboly a  $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ , jestliže  $e$  představuje excentricitu hyperboly.*



Obr. 1

**Poznámka.** V deskriptivní geometrii pro 9. postupný ročník v obr. 34 je  $b = AH$ . Této úsečce se říká vedlejší poloosa.

**Důkaz.** V obr. 1 je dána hyperbola; její ohniska jsou  $F_1, F_2$ , vrcholy jsou  $A, B$ , střed je  $S$ . Asymptoty označíme  $m, n$ . Libovolným bodem  $M$  hyperboly

veďme rovnoběžky s oběma asymptotami a na asymptotách tak dostaneme body  $P, Q$ . Čtýrúhelník  $SPMQ$  je rovnoběžník. Tento rovnoběžník proměníme v rovnoběžník  $SKLQ$ , který má tentýž obsah; přitom  $K$  je průsečík strany  $PM$  s hlavní osou hyperboly. Obsah tohoto rovnoběžníka se snadno vypočítá. Pro stručnější vyjadřování označme  $F_1M = x$ ,  $F_2M = y$ ,  $SN = u$ ,  $MN = v$ , kde  $N$  je pata kolmice vedené z bodu  $M$  na hlavní osu. Výšku v rovnoramenném trojúhelníku  $QLM$  sestrojenou na základnu  $QL$  označme  $w$ . Podle toho výška rovnoběžníku  $SKLQ$  je  $v + w$ . Dále označme  $SK = z$ ,  $x + y = 2m$  a víme, že  $x - y = 2a$ , kde  $a = SA = SB$ . Odtud

$$x = m + a, y = m - a \quad (1)$$

I platí

$$P(SKLQ) = z \cdot (v + w) \quad (2)$$

V dalším vyjádříme  $v, w, z$  pomocí  $a, b, e, m$ . Z pravoúhlého trojúhelníku  $F_1MN$  plyne

$$(e + u)^2 + v^2 = x^2 \quad (3a)$$

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku  $F_2MN$  plyne

$$(e - u)^2 + v^2 = y^2 \quad (3b)$$

Odečtením těchto dvou rovnic obdržíme s ohledem na (1)

$$4eu = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 4am$$

a odtud

$$u = \frac{am}{e} \quad (4)$$

Za  $u$  dosadíme do rovnice (3a), a použijeme-li vztahu  $b^2 = e^2 - a^2$ , dostaneme

$$v = \frac{b}{e} \sqrt{m^2 - e^2} \quad (5)$$

Tento výraz má skutečně reálný význam, neboť z trojúhelníka  $F_1F_2M$  plyne, že

$$F_1M + F_2M > F_1F_2, \text{ t. j. } 2m > 2e,$$

a z toho

$$m^2 - e^2 > 0.$$

Vypočítáme dále  $z$ . Všimneme si, že  $\Delta KNM \sim \Delta SBE$ , kde  $E$  je průsečík vrcholové tečny sestrojené v  $B$  s asymptotou  $m$ .

Odtud

$$KN : NM = SB : BE \text{ čili } (u - z) : v = a : b$$

Z této úměry vypočteme  $z$ :

$$z = \frac{bu - av}{b} = \frac{a}{e} (m - \sqrt{m^2 - e^2})$$

A ještě vypočítáme  $w$ , k čemuž použijeme podobnosti trojúhelníků  $MRQ$ ,  $EBS$ , kde  $R$  je střed úsečky  $QL$ . Odtud obdržíme úměru

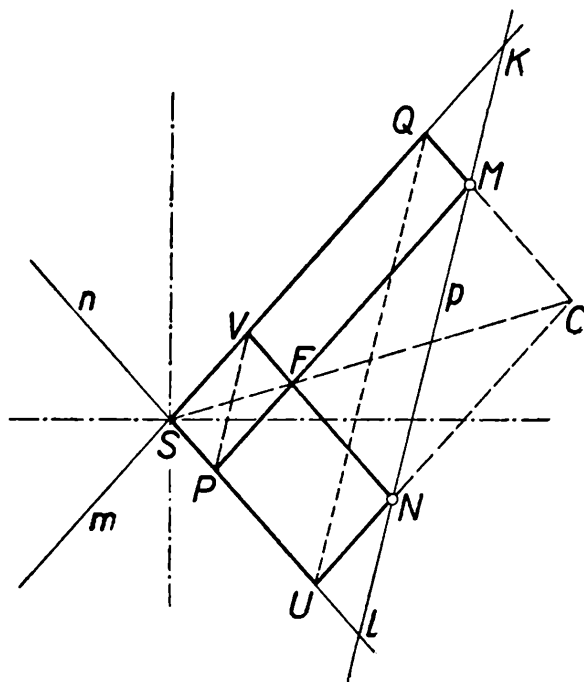
$$MR : RQ = EB : BS \text{ čili } w : \frac{1}{2} z = b : a$$

Pro  $w$  dostaneme

$$w = \frac{bz}{2a} = \frac{b}{2e} (m - \sqrt{m^2 - e^2}) \quad (6)$$

A dále

$$v + w = \frac{b}{2e} (m + \sqrt{m^2 - e^2})$$



Obr. 2

Nyní již můžeme počítat obsah

$$P(SKLQ) = z \cdot (v + w) = \frac{1}{2} ab = P(SPMQ) ,$$

jak vyplývá po dosazení a kratší úpravě. Tím jsme s důkazem vyslovené věty hotovi.

Platí však více: Je dána hyperbola a bod  $M$  ležící v tom úhlu asymptot, v němž leží jedna větev hyperboly. Tímto bodem vedme rovnoběžky s oběma asymptotami. Jestliže rovnoběžník, omezený těmito rovnoběžkami a asymptotami, má obsah  $\frac{1}{2} ab$ , je bod  $M$  bodem hyperboly. Důkaz této věty však provádět nebudeme.

**Poučka 2.** Úsek na tečně hyperboly vyřatý oběma asymptotami je půlen bodem dotyku.

D ů k a z. (Obr. 2.) Sestrojíme úsečku  $SP'$  tak, aby bod  $P$  byl jejím středem. Spojnice  $MP' \equiv t$  protne asymptotu  $m$  v bodě  $Q'$ . Ukážeme, že přímka  $t$  je tečnou hyperboly právě v bodě  $M$ .

Především přímka  $t$  má s hyperbolou společný bod  $M$  a jestliže má s ní společný ještě jeden další bod různý od  $M$ , musí to být bod téže větve hyperboly. Dále pozorujeme, že úsečka  $P'Q'$  je půlena bodem  $M$ , což vyplývá z podobnosti trojúhelníků  $SP'Q'$ ,  $QM'Q'$ , při čemž konstanta podobnosti je 2. Tudíž rovnoběžník  $SPMQ$  má své tři vrcholy ve středech stran trojúhelníka  $SP'Q'$  a podle poučky 1 má ze všech vepsaných rovnoběžníků největší obsah rovený  $\frac{1}{2} ab$ .

Všechny ostatní vepsané rovnoběžníky mají obsah menší, to však znamená, že přímka  $t$  nemá s hyperbolou žádný další společný bod. Poněvadž není rovnoběžná s žádnou asymptotou, je tečnou hyperboly v bodě  $M$ .

P o u č k a 3. Úseky, omezené na libovolné sečně hyperbolou a jejími asymptotami, jsou si rovny.

D ů k a z je důsledkem poučky 2 z článku na str. 299. Stačí porovnat obrázek z onoho článku a obrázek 2 v tomto článku a ihned vidíme, že mezi nimi není v podstatě žádného rozdílu. Podrobnosti přenechávám čtenáři.

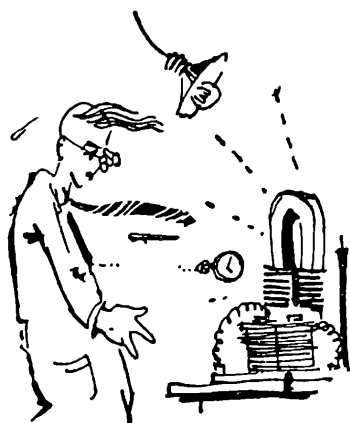
Cvičení.

1. Rovnoběžník  $ABCD$  ( $AB = 8$ ,  $BC = 5$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ) proměňte v rovnoběžník se stejnými úhly a se základnou dlouhou 7.

2. Sestrojte hyperbolu, jestliže jsou dány obě asymptoty a a) bod  $M$  hyperboly; b) tečna  $t$  hyperboly.

3. Sestrojte hyperbolu, jestliže je dána asymptota a a) s m ě r druhé asymptoty a dva různé body  $M$ ,  $N$  hyperboly; b) tři různé body  $M$ ,  $N$ ,  $P$  hyperboly; c) na ní střed hyperboly a dva různé body  $M$ ,  $N$  hyperboly.

4. Hyperbola je dána asymptotami a bodem  $M$ ; v bodě  $M$  sestrojte tečnu hyperboly. (Viz obr. 1.)



## Fysika

Ing. Z d ě n ě k R ů z ě h a , Praha:

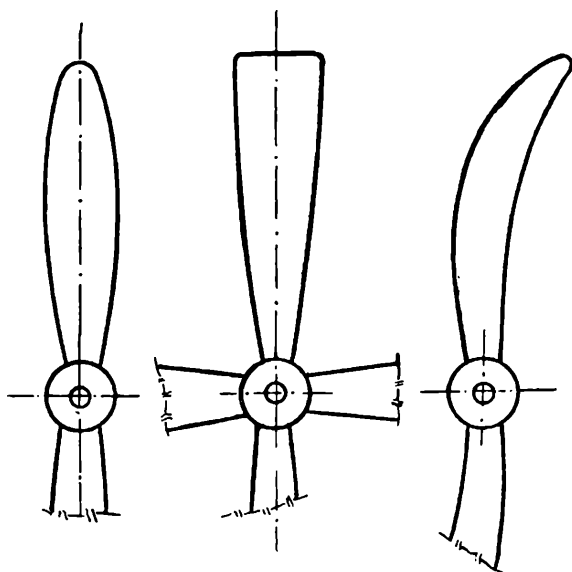
### Pohon letadel

(Dokončení)

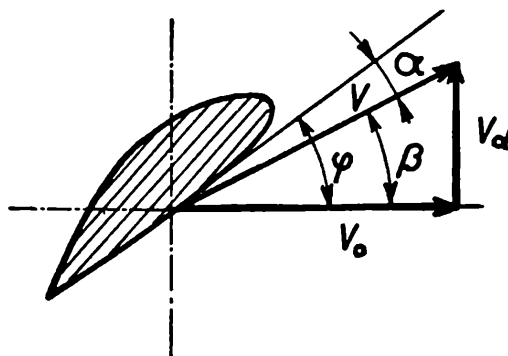
Nyní si proberme hlavní t y p y p r o p u l s o r ů. Jedním z nejrozšířenějších představitelů propulsorů až do nedávné doby byla *vrtule*. Její podstatnou část tvoří l i s t y. Vrtule pro menší výkony mají dva listy, pro větší tři i čtyři, výjimečně až šest. Pro velké výkony se užívají dvě souosé, protiběžné vrtule s menším počtem listů, těsně za sebou uložené. Tvar listu při pohledu ve směru osy otáčení

bývá kopinatý (normální), někdy obdélníkový a lichoběžníkový, pro velké rychlosti šavlovitý (obr. 2).

Profil listu v řezu kolmém na jeho podélnou osu se podobá profilu nosných ploch letadel. U kořene listu, t. j. u osy otáčení, je profil z pevnostních důvodů tlustší, u špičky štíhlejší. Otáčením vrtule dostávají proudová vlákna ještě rychlost ve směru obvodovém. Je proto profil vrtule obtékán proudem, jehož výsledná rychlost - při zjednodušeném způsobu vysvětlení proudění - je dána výslednicí z rychlosti dopředné  $V_d$  (rychlost letu) a obvodové  $V_o$ . Profil listu svírá s rovinou otáčení úhel  $\varphi$ , nazývaný úhlem nastavení a se směrem proudění svírá úhel, který označujeme úhlem náběhu  $\alpha$  (obr. 3). Poněvadž každý profil v různé vzdálenosti  $r$  od osy má jinou obvodovou rychlost  $V_o = \omega \cdot r^3$ , jsou i úhly  $\varphi$  u každého profilu jiné. Neodpovídá-li dopředná rych-



Obr. 2. Tvary vrtulových listů: normální (kopinatý), lichoběžníkový, šavlovitý.



Obr. 3. Obtékání profilu listu vrtule za normálního chodu.

lost  $V'_d$  rychlosti  $V_d$ , pro níž byla vrtule s pevnými listy navrhována, t. j. není-li  $V'_d$  v souladu s obvodovou rychlostí  $V_o$  danou otáčkami motoru - které jsou opět vázány na výkon motoru - pracuje vrtule za nepříznivých podmínek. Listy vrtule nejsou v tomto případě správně obtékány a účinnost vrtule se zhoršuje.

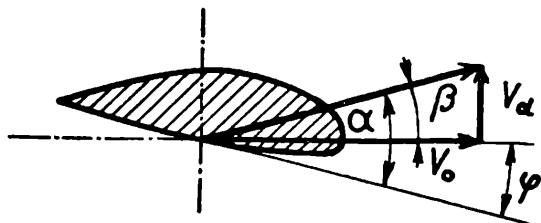
Při velkých obvodových rychlostech listů a při velké rychlosti letu dosahuje rychlost špiček listů rychlosti zvuku. Při této rychlosti, případně i při rychlosti poněkud nižší, vznikají v některých místech profilu t. zv. rázové vlny, t. j. náhlé změny tlaku vzduchu v ohraničených pásmech. V nich je pravidelné obtékání profilu porušeno a účinnost vrtule se proto zhoršuje.

Snížení účinnosti vrtule způsobuje i při nižších rychlostech ta okolnost, že vrtule letadla nepracuje v nerušeném proudě vzduchu, jak je naznačeno na obr. 1. Vrtule je totiž umístěna přímo před motorem, který je v trupu či v gondole, jimiž je ideální proudění porušováno.

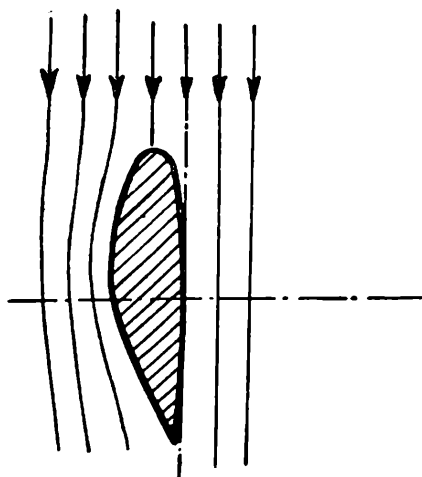
<sup>3)</sup>  $\omega$  je úhlová rychlost měřená v radiánech.

K zlepšení účinnosti vrtule užili konstruktéři různých nových řešení. Aby bylo dosaženo správného obtékání listů za plného využití výkonu motoru i při různých rychlostech, staví se vrtule s listy, které lze natáčet kolem podélné osy. U některých vrtulí je možno nastavit listy i na t. zv. **n e g a t i v n í ú h e l n á b ě h u**, viz obr. 4. V tom případě mění se smysl tahu, čehož lze využít pro zkrácení přistání<sup>4)</sup> letadel. Při vysazení jednoho motoru vícemotorového letounu, lze u některých vrtulí za letu u stojícího motoru postavit listy tak, aby měly co nejmenší odpor. Je to t. zv. vrtule s listy **s t a v i t e l n ý m i d o p r a p o r u** (obr. 5).

U křídel letadel lze oddálit vznik rázových vln do vyšších rychlostí letadla tím, že jejich půdorys má tvar šípů, který vlastně vzniká z tvaru lichoběžníkového, relativním posouváním jednotlivých profilů ke špičce křídla ve směru proudění. U vrtule podobným způsobem vznikne šavlový tvar listů, čímž oddálíme vznik nežádoucích jevů.



Obr. 4. Obtékání profilu listu vrtule při brzdění.



Obr. 5. Obtékání profilu listu při poloze „v praporu“.

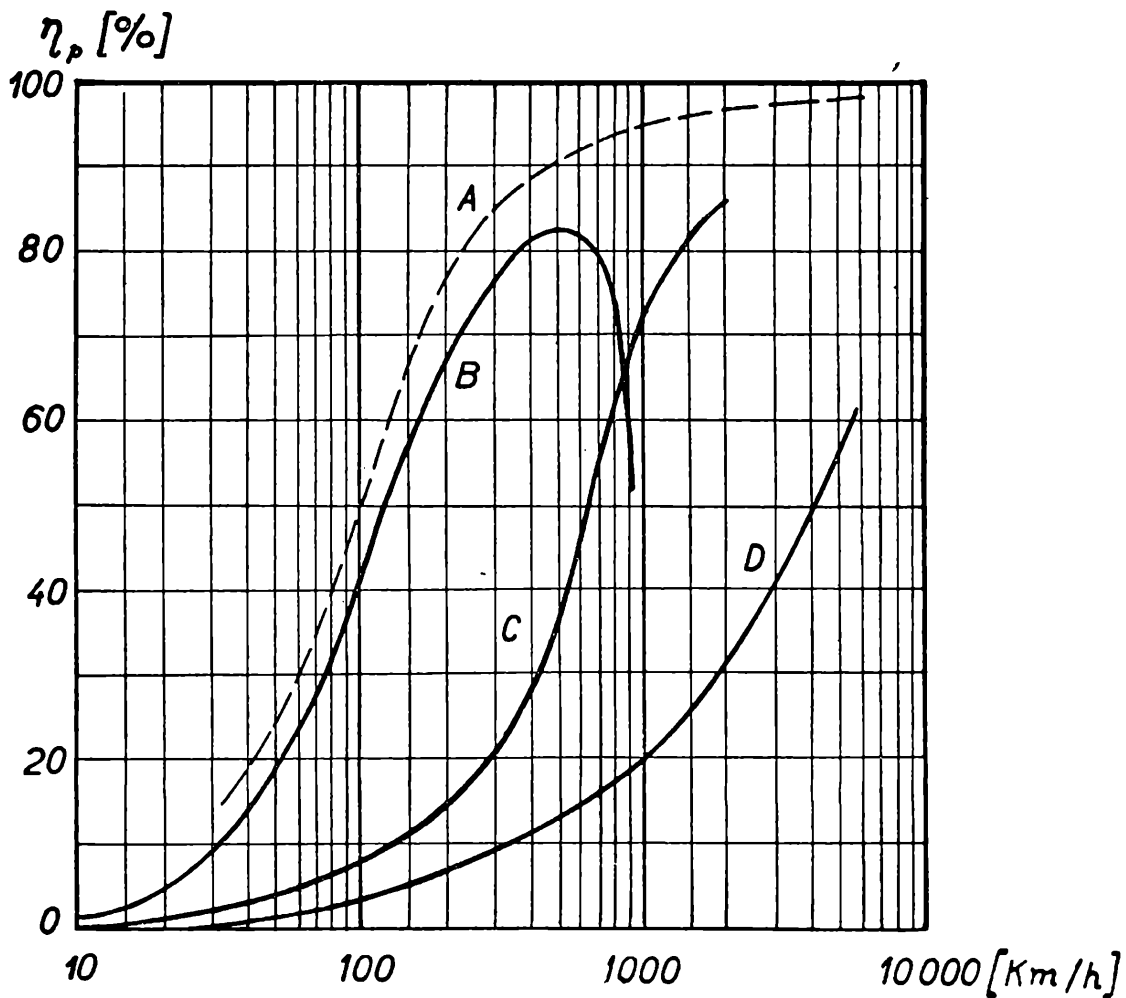
Na obr. 6 je naznačena propulsní účinnost některých pohonů jako funkce rychlosti letu. Při dosažení rychlosti asi kolem 600 km/hod u země, se začne účinnost vrtule snižovat a s přibývajícím rychlostí velmi rychle klesá. Proto se konstruktéři snažili nalézt jiný propulsor, který by měl podstatně lepší propulsní účinnost než vrtule.

Již v dávných dobách měli Číňané rakety hnané spalováním černého prachu. Tohoto principu bylo použito v dnešní době ke konstrukci raketových motorů. Spalováním černého prachu či jiných látek ve spalovací komoře *S*, viz obr. 7, vznikají **s p a l i n y**<sup>5)</sup> o dosti vysokém tlaku a teplotě, které unikají tryskou *D*, jejíž průřez se po přechodném zúžení opět rozšíří. Tím dosahují spaliny při teplotě kolem 2000 °C rychlosti mezi 2000 až 3000 m/s. Tah vyvinutý raketou je podle věty o hybnosti

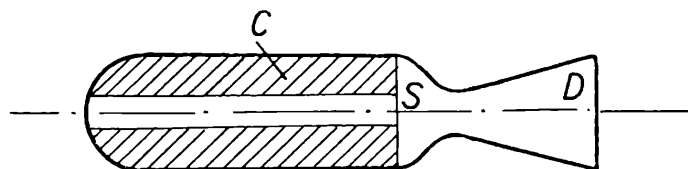
<sup>4)</sup> Pojmem **p ř i s t á n í** rozumíme dráhu letadla sestávající z části **s e s t u p n é h o l e t u** s výše 15 nebo 25 m a **d o j e z d u** po zemi.

<sup>5)</sup> V technické praxi nazývají se zplodiny hoření tekutých nebo plyných látek **s p a l i n y**.





Obr. 6. A. Závislost propulsní účinnosti na rychlosti: A. Ideálního propulsoru; B. Skutečné vrtule; C. Proudovrtulového pohonu; D. Raketového pohonu.



Obr. 7. Schema rakety s tuhou pohonnou látkou.

$$T = mV_2 ,$$

kde  $m$  je hmota spalin vytékajících za 1 vteřinu tryskou,  $V_2$  rychlost v m/s v koncovém průřezu trysky o ploše  $S_2$ . Nedojde-li v průřezu  $S_2$  k úplné expansi plynů na vnější atmosférický tlak  $p_0$ , zvýší se tah o  $S_2(p_2 - p_0)$ , kde  $p_2$  značí tlak spalin v průřezu  $S_2$ . V tomto případě bude tah dán výrazem

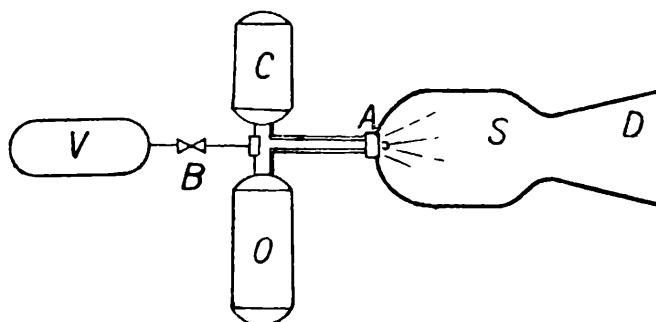
$$T = mV_2 + S_2(p_2 - p_0) \quad (12)$$

Aby se dosáhlo úplné expance spalin, musila by být tryska podstatně delší než je naznačeno v obr. 7. Delší tryskou by se zvýšily ztráty třením na zvětšeném vnitřním povrchu. Proto se delších trysek u raket obvykle neuzívá.

Hnací látky rakety mohou být tuhé nebo kapalné. Tuhá hnací náplň obsahuje jak palivo, tak okysličovadlo nutné pro spalování. Raketa s t u h o u hnací náplní dává tah po dobu kolem 10 sec a jen v ojedinělých případech se docílí delší doby. I když rakety s tuhou hnací náplní jsou jednoduché a v podstatě levné, při srovnání nákladů na jednotku tahu a váhy jsou nevýhodné vzhledem k raketám s k a p a l i n o v o u hnací látkou.

U raket s kapalinovou hnací látkou je palivo *C* i okysličovadlo *O* přiváděno odděleně do spalovací komory *S* obvykle tlakem plynů z nádržky *V*, uzavíratelné kohoutem *B*. (obr. 8). Tlak v nádržce musí být až do konce hoření vyšší než je tlak ve spalovací komoře. U velkých raket je nutno dodávat obě kapaliny vysokotlakými centrifugálními čerpadly, jak tomu bylo na př. u německé raketové zbraně *V-2*.

Palivem může být benzin, petrolej, alkohol a j., okysličovadlem bývá peroxid vodíku nebo tekutý kyslík. Tím však nejsou vyčerpány všechny látky, které kdy byly použity pro pohon raket. Čím jsou teploty a tlaky v komoře vyšší, tím se i rychlost v trysce zvyšuje, takže i účinnost rakety bude dobrá. Materiál trysky snáší špatně vysoké teploty, vysoké tlaky a proudění o vysoké rychlosti, čímž dochází k jejímu vypalování a vyšlehávání. Proto je někdy tryska provedena s dvojitými stěnami, které jsou chlazeny mezi nimi protékajícím palivem.

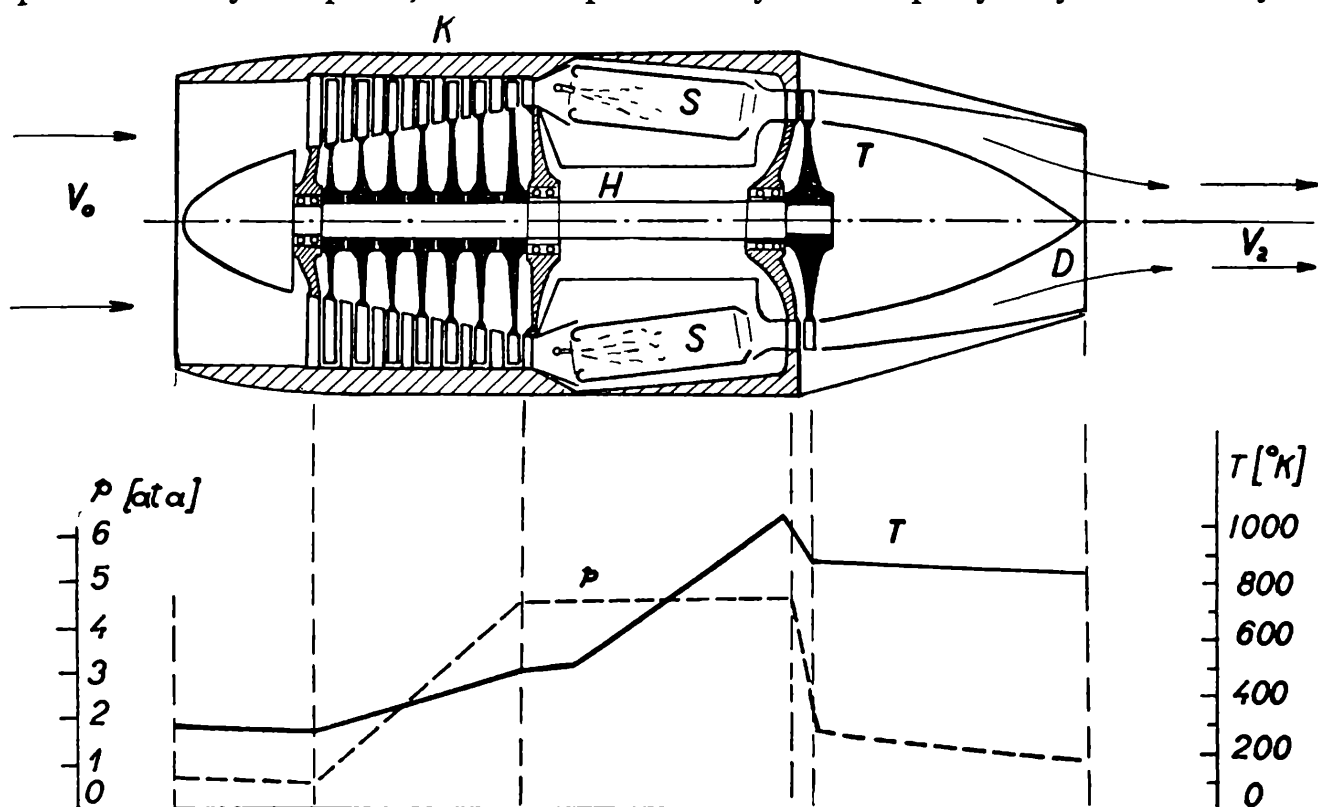


Obr. 8. Schema raketového pohonu s kapalinou pohonnou látkou. *S* je spalovací komora, *D* tryska, *A* hořák, *C* nádrž s palivem, *O* nádrž s okysličovadlem, *V* nádrž se stlačeným plynem, *B* uzavírací ventil.

Menších a středně velkých raketových motorů se používá jako pomocného zdroje tahu ke zkrácení startu přetížených letadel a letadel startujících s mateřských letadlových lodí, případně ke krátkodobému zvýšení rychlosti letadel v boji. Po spotřebování paliva mohou být raketové motory odhozeny, případně i sneseny padákem k zemi. Používá se jich též pro pohon d á l k o v ě ř í z e n ý c h s t ř e l. Velké raketové motory slouží výhradně jako pohonné jednotky velkých a velmi rychlých dálkových střel. Pro lety ve vysoké atmosféře je to jediný použitelný pohon. Raketou již bylo dosaženo výšky přes 400 km a připravuje se raketa (*Vangard*), která má vynést do vesmíru u m ě l o u o b ě ž n i c i z e m ě.

Dalším typickým představitelem leteckého propulsoru je *proudový motor*. Jeho tah vzniká výtokem spalin tryskou, vzniklých spálením tekutého paliva v komorách. Kyslík potřebný k spalování se odebírá ze vzduchu, v němž se le-toun pohybuje. Potřebné výtokové rychlosti v trysce se docílí rozdílem tlaku

spalin v komoře a tlaku vnějšího vzduchu. Vzduch vstupující do motoru je stlačen kompresorem  $K$  (obr. 9). K stlačování vzduchu potřebuje kompresor energii, kterou mu dodává turbina  $T$ . Turbina je hnána spaliny vytékajícími z komor  $S$  do trysky  $D$ . Turbina není přímým hnacím ústrojím, jako jím není ve velkých raketách, kde žene odstředivá čerpadla, dodávající paliva do komory. I když je dnes provedení proudových motorů v podstatě ustálené, je několik typů, lišících se v konstrukčním provedení různých částí. Tak je na př. proudový motor s axiálním kompresorem  $K$  (obr. 9), s radiálním kompresorem  $K$  (obr. 13), s prstencovou spalovací komorou, vícestupňovou turbinou, s různou úpravou průtoku plynu motorem a j. Ke krátkodobému zvýšení tahu proudových motorů se někdy používá dodatečného spalování. Pořádě spalování v komorách se děje za značného přebytku vzduchu, lze i ve spalinách v trysce spálit ještě další palivo. Zvýšením teploty a rychlosti v trysce,



Obr. 9. Proudový motor s axiálním kompresorem. Na spodním diagramu jsou zakresleny křivky, udávající tlak a teplotu v odpovídajících místech nad diagramem zakresleného motoru (v řezu). Na př. tlak vyznačený křivkou  $p$  je ve vstupu do kompresoru asi 1 ata, při výstupu asi 5 ata, při čemž teplota vzrůstá z asi 290 °K na 500 °K atd. Tlak je udán v absolutních atmosférách, které získáme, připočteme-li k hodnotám přetlaku normální barometrický tlak. Teplota je měřena v absolutní Kelvinově stupnici ( $T = 273^\circ + t$  °C; t. j. na př. 20 °C = 293 °K).

zvýší se i tah. Tento způsob je sice jednoduchý, ale neekonomický, proto se ho používá jen krátkodobě.

Tah proudového motoru je dán výrazem, který lze odvodit stejně jako u rakety, t. j.

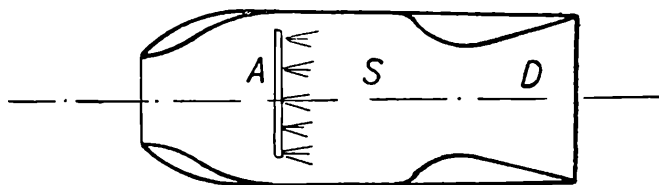
$$T = \frac{G_1}{g} (V_2 - V_0) + \frac{G_2}{g} V_2 + S_2 (p_2 - p_0) \quad (13)$$

V rovnici značí  $G_1$  váhu vzduchu protékajícího motorem za 1 sec,  $G_2$  váhu paliva spáleného za 1 sec a  $g$  zrychlení zemské. Poměr paliva k vzduchu je asi 1 : 40, tlak  $p_2$  se při správném chodu mnoho neliší od tlaku  $p_0$ . Proto v rovnici 13 lze zanedbat druhý a třetí člen pravé strany, takže přibližně platí

$$T \doteq \frac{G_1}{g} (V_2 - V_0) \quad (14)$$

Z této rovnice vyplývají stejné dedukce, jaké byly uvedeny u ideálního propulsoru.

Průtok plynů lopatkami kompresoru a turbíny lze vyřešit optimálně (t. j. nejvýhodněji) jen pro určité omezené provozní poměry. Za jiných podmínek zhoršuje se proudění celým motorem a vznikají ztráty. Proto ani tento motor nemůže dosáhnout účinnosti ideálního propulsoru. Při rychlosti letu asi 2 až 2,5krát vyšší rychlosti zvuku, přestává kompresor stlačovat vzduch a stává se i s poháněcí turbínou bezúčelným.



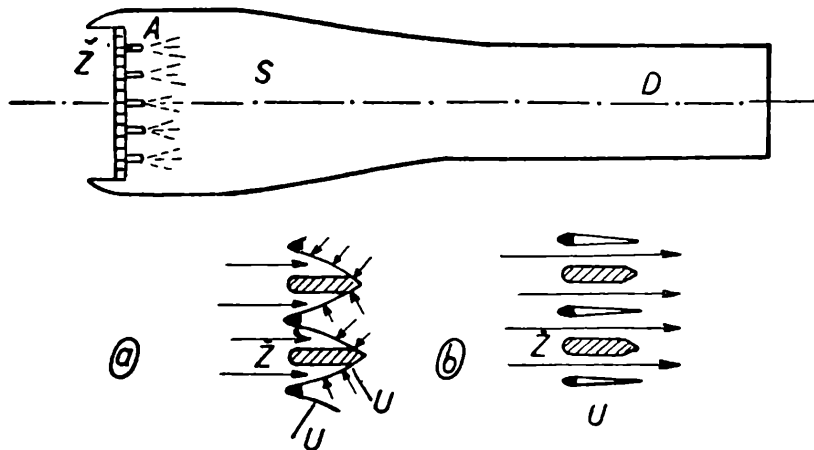
Obr. 10. Schema náporového motoru.

Ve vtokové části *náporového motoru*, t. j. motoru bez kompresoru a turbíny, mění se kinetická energie vtékajícího vzduchu v tlakovou, čímž je vzduch stlačován. Ve spalovací komoře, která je v podstatě pokračováním vstupu, se spaluje palivo (obr. 10). Aby nastalo potřebné stlačení vzduchu, musí být jeho vstupní rychlost do motoru velmi vysoká a snížení rychlosti v komoře co největší. Dobré účinnosti motoru se dosáhne teprve při velmi vysokých rychlostech. Ačkoliv tento motor je svou konstrukcí jedním z nejjednodušších, má podstatnou nevýhodu v tom, že letadla jím opatřená musí být nejprve uvedena do určité rychlosti jiným pohonem, aby náporový motor mohl pracovat.

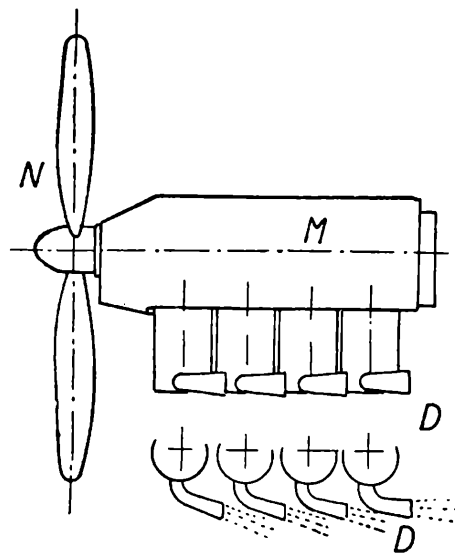
Poměrně jednoduchý je též t. zv. *pulsační motor*. Jeho schema je nakresleno na obr. 11. Vstup spalovací komory  $S$  je uzavřen mříží  $\check{Z}$  s klapkami  $U$  (ventily), které ve své normální poloze jsou uzavřeny a brání vstupu vzduchu do komory (obr. 11a). Bude-li ve zlomku vteřiny vstříknuto tryskami  $A$  do komory palivo a zapáleno, vznikne v komoře  $S$  přetlak, spaliny unikají tryskou, neboť klapky  $U$  uzavírají výtok plynů vpřed. Klapky, které jsou zhotoveny z tenkého plechu, se opírají o žebra mříže  $\check{Z}$ . Za unikajícími spalinami vznikne v komoře podtlaková zóna. Klapky se otevrou (obr. 11b), do komory vnikne vzduch, podtlak zmizí a klapky se samočinně uzavřou. Do komory je znovu vstříknuto palivo a celý cyklus se opakuje. Aby však motor správně pracoval a cyklus probíhal pravidelně, musí být zladěn vlastní kmitočet klapky a tlakové poměry v trysce. Ty jsou podmíněny jejím tvarem. Propulsivní síla, vznikající jen v době kdy vytékají spaliny

tryskou, má tedy charakter pulsující. Vzhledem k dosti velké četnosti pulsů a vzhledem k hmotám, k nimž je motor připevněn, se pulsace tahu na pohybu letadla neprojevuje.

Tohoto motoru bylo použito pro pohon létající střely V-1, jeho cykl se opakoval 46krát za sec. Malých motorků s poněkud jinak upravenými ventily se používá pro pohon modelů. Nevýhodou tohoto motoru je, že do činnosti musí být uveden cizí pomocí, i když podstatně lehčeji než motor náporový. Má též špatnou účinnost a malou životnost. Klapky či ventily se zahřívají, ztrácejí původní vlastnosti, opalují se a během krátké doby netěsní, prošlehávají jimi plameny a pak klapky přestávají pracovat.



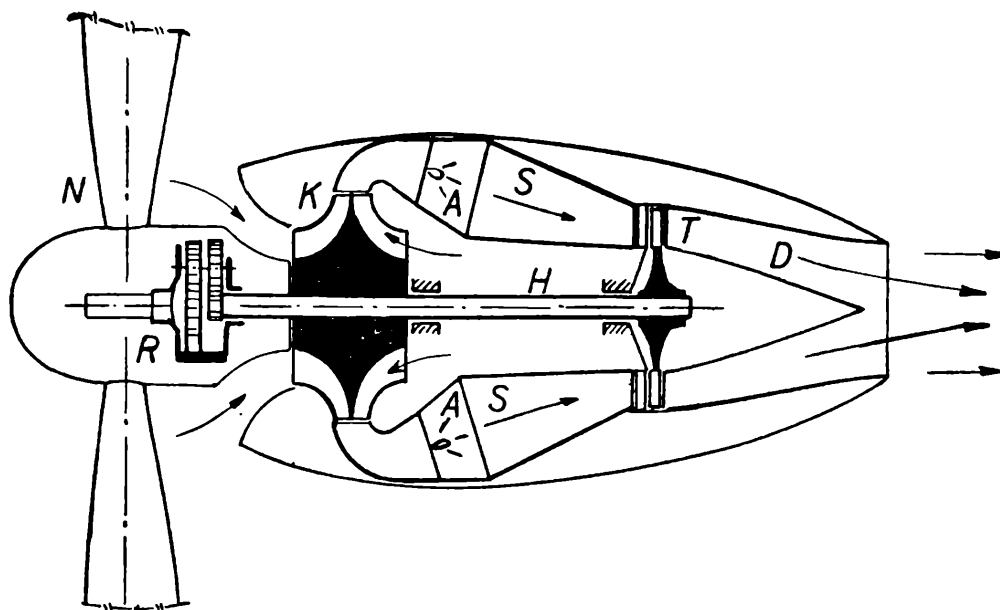
Obr. 11. Schema pulsačního motoru. a. Poloha klapky *U* při vstříknutí paliva. b. Poloha klapky *U* při nassávání vzduchu.



Obr. 12. Schema pístového motoru s reakčními výfuky.

Dosud popsané motory používaly vždy jen jednoho způsobu propulze. Je však možné (a často se používá) spojení dvou druhů propulze. Nejjednodušší je využití reakce výfukových plynů pístového motoru, který pohání vrtuli. Svedou-li se výfukové plyny tryskami *D* tak, že spaliny vytékají po směru letu, je jejich energie využita k propulsi (obr. 12). Celkový tah se tím zvýší asi o 3 až 5 %.

Další kombinace propulzí je t. zv. *turbovrtulový motor*, naznačený na obr. 13, kde na hřídeli turbíny  $T$  a kompresoru  $K$  je reduktor  $R$ , který pohání vrtuli  $N$ . Turbovrtulový motor je vhodný pro letadla o rychlosti asi 500 až 700 km/hod. Část energie spalin se zde předá turbině, ostatek se přemění v tah ve výtokové trysce  $D$ . Výkon turbíny se spotřebuje z části k pohonu kompresoru  $K$ , zbytek je odváděn reduktorem na vrtuli. Reduktor sestávající z ozubených převodových soukolí je nutný, aby se snížily otáčky hřídele turbíny, které mohou být na př. 15 000/min, asi na desetinu této hodnoty, jak vyžaduje vrtule. Na př. u vrtule  $D = 3$  m a při počtu otáček  $n = 2\,000$ /min, je obvodová rychlost špiček listů  $V_0 = \pi D \frac{n}{60} \doteq 314,2$  m/s. Výsledná rychlost  $V$  bude v tomto případě již vyšší rychlosti zvuku, což není žádoucí.

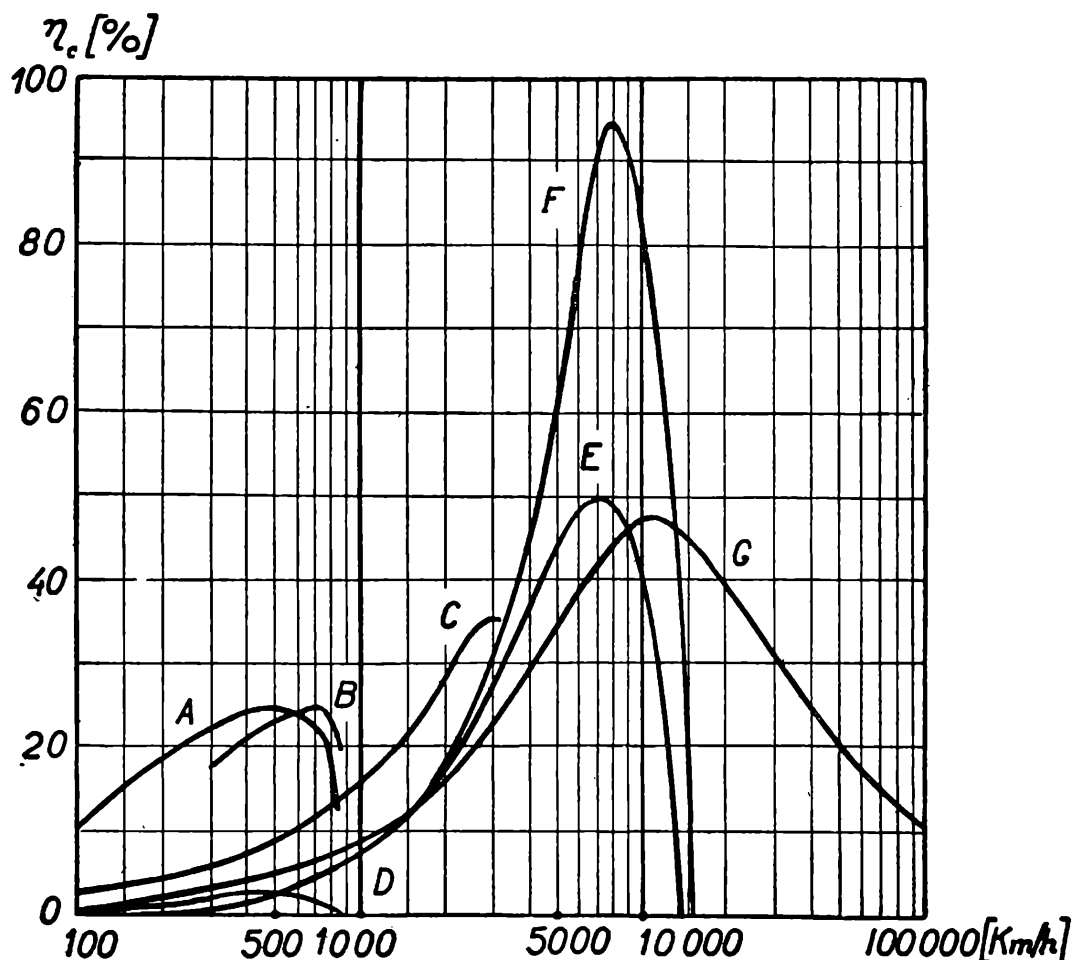


Obr. 13. Schema turbovrtulového motoru s radiálním kompresorem.

Byly navrhovány a provedeny různé jiné kombinace propulsorů, avšak praktického rozšíření a využití dosáhly jen popisované způsoby. Pulsační motor pro dopravní účely nemá vůbec význam, podobně jako zatím náporové motory, s nimiž se však provádějí zkoušky.

Pro volbu toho či onoho druhu propulze, není rozhodující jen propulsní účinnost, která pro hlavní typy propulze byla naznačena na obr. 6. Při volbě pohonu je nutno se zajímat též o celkovou účinnost, t. j. poměr energie, která je do motoru přiváděna palivem, k energii proměněné v tah. Celková účinnost  $\eta_c$  je dána součinem účinnosti tepelné  $\eta_t$  a propulsní  $\eta_p$ . Tepelná účinnost je dána poměrem tepla přeměněného v mechanickou práci k energii tepelné obsažené v dodávaném palivu. Celková účinnost závisí na mnoha podmínkách, a to jak vnitřních (v motoru), tak vnějších (prostředí). Průměrné hodnoty celkové účinnosti, od nichž však jednotlivé druhy propulzí mohou mít značné odchylky, jsou naznačeny pro popisované propulze na obr. 14. Pro volbu vhodného pohonu jsou však rozhodující i další okolnosti, jako na př. rozměry, váha, cena, provozní náklady, životnost, spolehlivost, po př. i jiné.

Ideální pohon pro letadla by byl takový, který by měl co nejmenší váhu a roz-



Obr. 14. Závislost celkové účinnosti  $\eta_c$  na rychlosti letu různých pohonů: A. Vrtulový. B. Proudovrtulový. C. Proudový. D. Pulsační. E. Náporový při stlačení rázem. F. Náporový při isotropickém (ideálním) stlačení. G. Raketový s kapalinovou hnací látkou.

měry, malou spotřebu provozních látek, byl by laciný a jednoduchý a jeho obsluha v provozu a udržování by byla co nejsnazší. I když se dnes jeví, že část těchto požadavků splňuje pohon využívající jaderné energie, vzniká při dosa-  
 vadních projektech mnoho problémů za dnešního stavu techniky neřešitelných. Práce a pokusy i na tomto poli jsou však již v proudu.



Jaroslav Halenka, Praha:

## Mezinárodní geofyzikální rok a náš příspěvek k němu

Stojíme na počátku Mezinárodního geofyzikálního roku, jenž je největší celosvětovou výzkumnou akcí, která nemá v dějinách vědy obdoby. Navazuje na tradici polárních roků, které ovšem i při svém velkém přínosu k roz-

voji vědeckého poznání byly rozsahem i zaměřením nesrovnatelně menšími událostmi než je Mezinárodní geofyzikální rok. Hlavním záměrem polárních roků věnovaných výlučně výzkumu v polárních oblastech bylo soustředěním a zintenzivněním vědeckých pozorování a měření, konaných na dočasných stanicích zakládaných vědeckými výpravami, umožnit řešení některých problémů zejména meteorologických a geomagnetických. Meteorologická situace v polárních oblastech má totiž podstatný vliv na počasí v oblastech středních šířek a geomagnetické bouře doprovázené polárními zářemi jsou tam častější a silnější.

Od posledního polárního roku konaného v letech 1932 a 1933 však vědecké poznání i možnosti jeho rozšiřování nesmírně vzrostlo. Tento vzestup stačí doložit jen tím, že na příklad dnes velmi důležitý a v širokém rozsahu prováděný výzkum ionosféry byl tehdy v naprostém počátku. Pokud jde o rozvoj možností výzkumu, počítá se dnes zcela samozřejmě s rozsáhlým použitím raketových sondáží vysoké atmosféry, a navíc budou k tomuto úkolu použity dokonce i umělé družice Země.

Protože s rozvojem vědeckého poznání vzrůstá i počet nových problémů, byla brzy pocítována potřeba výzkumné akce, která by přispěla k jejich vyřešení. A byla to právě mezinárodní organizace řídící výzkum ionosféry, která dala podnět dalším zainteresovaným světovým vědeckým organizacím k uspořádání této akce. Po letech pečlivých složitých příprav byl zorganizován a vědeckým organizacím všech států předložen projekt Mezinárodního geofyzikálního roku (MGR). Charakteristickým rysem MGR je to, že budou řešeny problémy neřešitelné bez celosvětové vědecké spolupráce a problémy komplexní, ležící v oblasti několika vědních oborů.

Které vědní obory se zúčastní prací v MGR? Jak je z názvu zřejmé, má MGR přispět k vyřešení geofyzikálních problémů.\* Geofyzika v širším slova smyslu se zabývá fyzikálním výzkumem zemského tělesa a jeho vodního i vzdušného obalu a dějů, které v nich probíhají. Zemským tělesem se zabývají *seismologie* a *gravimetrie*. Vzdušný obal je oblastí zájmů *meteorologie*, výzkumu ionosféry a výzkumu polárních září a světla noční oblohy. Obor *geomagnetismu* a *geoelektriny* zaujímá zvláštní postavení, neboť předmětem jeho výzkumu jsou děje, probíhající jak v zemském tělese, tak i v atmosféře. Dále bude v MGR prováděn výzkum v oboru kosmického záření, měření zeměpisných délek a šířek, *oceanografie*, *glaciologie*<sup>1)</sup> a jaderného záření ovzduší a vodních srážek.

Některé význačné geofyzikální děje, jako jsou geomagnetické a ionosférické bouře, polární záře, změny kosmického záření a pravděpodobně i některé meteorologické děje, jsou spolu úzce fyzikálně spojeny a mají společnou příčinu ve sluneční činnosti. A právě řešení tohoto komplexního problému, nalezení nových závislostí a zpřesnění již známých vztahů mezi sluneční činností a geofyzikálními ději je jádrem a hlavním úkolem MGR. Proto jsou široké a nepřetržité sledování a výzkum sluneční činnosti samozřejmě rovněž zastoupeny v oborech MGR. Období MGR bylo záměrně vybráno tak, aby tentokrát připadlo na roky s velkou

---

1) Glaciologie je výzkum ledovců. Red.



sluneční činností, kdy sluneční vlivy na Zemi jsou rozmanitější a silnější a proto také méně prostudovány.

Důkazem toho, že v MGR stojí vlivy sluneční činnosti na geofyzikální děje v popředí zájmu, je důmyslná organizace systému t. zv. světových dnů, světové varovací služby a mimořádných světových intervalů. Jelikož některá nákladná pozorování a měření nelze provádět nepřetržitě, byl předem vypracován kalendář světových dnů, vždy několik dnů v měsíci (v oboru meteorologie jsou to desetidenní intervaly), vhodně rozložených na období výskytu předvídatelných úkazů, jako jsou sluneční a měsíční zatmění a maxima meteorických rojů. V těchto dnech mají být prováděna všechna ohlášená pozorování co nejintenzivněji.

Není však možno předem označit dny, kdy nastane geomagnetická bouře se svými průvodními zjevy a právě pozorování z těchto dnů jsou velmi žádoucí. Byla proto v širokém rozsahu připravena varovací služba, která tuto závalu má do značné míry odstranit. V současné době jsou již totiž určité předpoklady pro předpovídání geomagnetických bouří. Na základě podrobné znalosti okamžitého stavu sluneční činnosti a některých charakteristických geomagnetických a ionosférických příznaků, lze vydat krátkodobou předpověď geomagnetických a ionosférických podmínek.

Varovací služba se uskutečňuje prostřednictvím státních ústředí varovací služby, která byla zřízena ve všech zúčastněných státech. Kontinentální celky mají svá oblastní ústředí, která jsou v pravidelném i mimořádném styku se svými podřízenými ústředími a s celosvětovým ústředím varovací služby pomocí elektrických pojítek. Provoz probíhá tak, že observatoře zašlou potřebný čerstvý pozorovací materiál prostřednictvím svého varovacího ústředí do oblastního ústředí, které připraví předpověď a navrhne ji celosvětovému ústředí varovací služby. To po dohodě se všemi oblastními ústředími vydá konečné rozhodnutí o tom, zda bude vyhlášena pohotovost k pozorování nebo mimořádný světový interval, je-li velká pravděpodobnost příchodu geomagnetické bouře v příštím dnu. Rozhodnutí je odesláno neprodleně oblastním ústředím a ta je sdělí prostřednictvím státních ústředí jednotlivým pracovištím. Popsaný systém, jehož pracovní cyklus netrvá déle než 14 hodin, byl již vyzkoušen ve zkušebních obdobích a dobře se osvědčil, takže je oprávněná naděje, že jen malý počet silných geomagnetických bouří a s nimi spojených dějů unikne organizovanému celosvětovému pozorování.

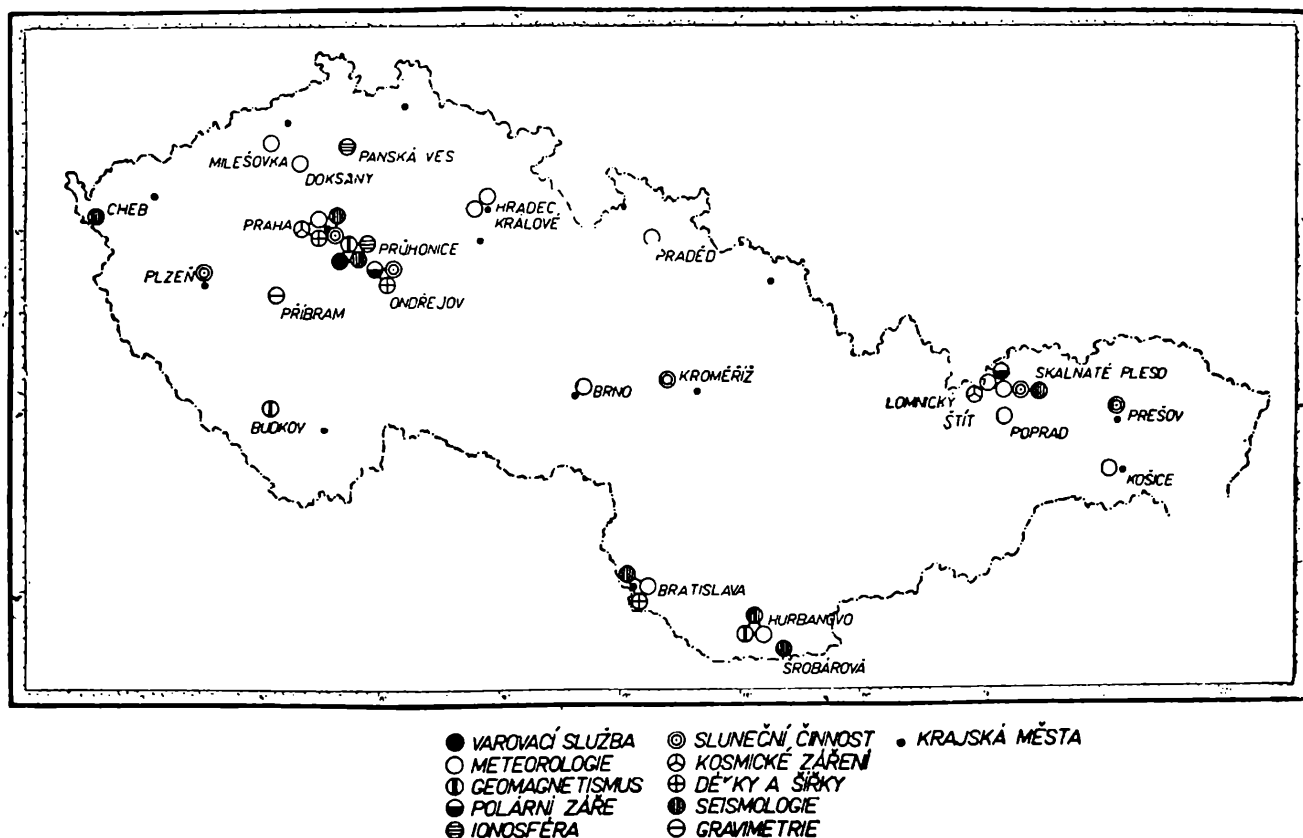
Není možno se zde zabývat podrobně pracovním programem mezinárodně stanoveným pro MGR; lze si však o něm učinit představu z programu naší účasti na MGR, která respektuje téměř všechny hlavní směry výzkumu v MGR.

K vytvoření předpokladů pro úspěšné zvládnutí rozsáhlého pracovního programu stanoveného pro MGR bylo nutno vykonat celou řadu příprav, aby byl MGR u nás dobře připraven po stránce finanční, přístrojové a personální. Ve značné míře bylo třeba vybavit zejména observatoře, které budou po dobu MGR konat rozšířená a nová pozorování. Z definitivního programu naší účasti na MGR je však zřejmé, že naše věda je zastoupena na řešení úkolů MGR opravdu důstojným způsobem a že splnění našeho výzkumného programu bude podstatným

a kvalitním přínosem ke zdaru této celosvětové akce. Stačí podotknout, že kromě oborů oceanografie, glaciologie a raketového výzkumu účastní se naše vědecká pracoviště všech oborů MGR.

Úkoly našeho programu v jednotlivých oborech jsou stručně uvedeny dále, při čemž obory za sebou následují v mezinárodně stanoveném pořadí. Zeměpisné rozložení a pracovní zaměření našich pracovišť zúčastněných na MGR je znázorněno v připojené mapce (obr. 1).

### ROZLOŽENÍ ČS. STANIC ZÚČASTNĚNÝCH NA MGR



Obr. 1. Zeměpisné rozložení a pracovní zaměření našich pracovišť zúčastněných na MGR. V Budkově je kromě geomagnetické stanice též stanice tellurická a výzkum jaderného záření bude prováděn v meteorologické laboratoři v Hradci Králové.

**Světové dny a varovací služba:** Činnost našeho ústředí varovací služby, která je zajišťována ionosférickým oddělením Geofysikálního ústavu ČSAV, odpovídá výše uvedenému schématu. Předpovědi celosvětového ústředí varovací služby jsou oznamovány Čs. rozhlasem, aby tak byla upozorněna i širší veřejnost, jejíž spolupráce je zapotřebí při sledování polárních září.

Dostalo se nám velkého uznání naší předcházející práce, když našemu ústředí varovací služby na observatoři Průhonice u Prahy byl přiznán v tomto oboru charakter pobočky oblastního ústředí varovací služby v Moskvě. Znamená to, že má právo předkládat oblastnímu ústředí své návrhy na vyhlášení mimořádných světových intervalů. Vypracování návrhů provádějí geomagnetické a ionosférické oddělení Geofysikálního ústavu ČSAV a sluneční oddělení Astronomického ústavu ČSAV.

**Meteorologie:** Značný počet observatoří a stanic se bude podílet na pozorovacím programu, který zahrnuje synoptická pozorování přízemní a výšková pomocí radiosond, aktinometrická měření slunečního záření, ozonometrická měření a chemickou analýzu srážek různými metodami. Dále budou prováděna pravidelná častá pozorování oblačnosti, zvláště vysoké, a oblačnosti s prognostickým významem.

**Geomagnetismus a geoelektrina:** V oboru geomagnetismu budou kromě běžných soustavných pozorování řešeny některé zvláštní mezinárodně doporučené úkoly - výzkum geomagnetických bouří a výzkum geomagnetických pulsací o krátkých periodách. Bude spolupracováno při celosvětovém geomagnetickém mapování. Při výzkumu geomagnetických bouří budou konána speciální sluneční pozorování důležitá pro sledování vlivů sluneční činnosti na vnější pole geomagnetické a předpovědi geomagnetické aktivity budou poskytovány průhonickému ústředí varovací služby. Pro řešení hlavních úkolů byly vyvinuty a zhotoveny nové přístroje a zřízena pobočná geomagnetická stanice v Budkově u Prachatic. Pro účely varovací služby byl vyvinut poplachový variograf.

V oboru geoelektriny je zajištěn výzkum variací a poruch časového průběhu tellurických proudů. Přístroje s normální i rychlou registrací jsou umístěny na nově vybudované tellurické stanici v Budkově.

**Polární záře a světlo noční oblohy:** Pro pozorování výskytu polárních září, jejich typů a polohy byla zorganizována síť meteorologických stanic, hvězdáren a astronomických kroužků. Výšky polárních září budou zjišťovány též fotogrametricky.

Světlo noční oblohy bude měřeno na ondřejovské observatoři a v širším rozsahu na výškové observatoři na Lomnickém štítu.

**Ionosféra:** Řada měření a registrací, získávaných nově vybudovanými přístrojovými soupravami, umožní sledovat základní ionosférické charakteristiky, atmosférický šum, Mögelovy-Dellingerovy efekty, absorpci radiových vln v ionosféře, ionosférické větry a drifty, výskyt mimořádné vrstvy *E* a zejména vlastnosti vrstvy *E*. Většina přístrojů pracuje na ionosférické observatoři v Průhonicích, další menší pracoviště je v Panské Vsi v severních Čechách. Tam jsou též přijímána mezinárodní radiová hlášení výsledků pozorování pro účely varovací služby.

**Sluneční činnost:** Sluneční oddělení Astronomického ústavu ČSAV připravilo pozorovací program pro rozsáhlé a pokud možno nepřetržité sledování všech projevů sluneční činnosti řadou speciálních přístrojů. Bude sledována vizuálně<sup>2)</sup> i fotograficky sluneční fotosféra a chromosféra. Každý den bude nepřetržitě registrován sluneční radiový šum na dvou vlnových délkách. V přidělených intervalech budou konána bez přerušování pozorování chromosféry a zjištěné silné erupce (a silná radiová vzplanutí) budou ihned hlášeny ústředí varovací služby. Pomocí monochromatických filtrů bude filmována chromosféra a protuberance. Při fotografickém výzkumu aktivních oblastí spolupracuje ještě několik hvězdáren.

---

<sup>2)</sup> Vizuálně (čti vizuálně) znamená zrakově. Red.

**K o s m i c k é z á ř e n í :** Pozorování časových variací kosmického záření bude prováděno v Praze a na výškové observatoři na Lomnickém štítu. Obě pracoviště jsou vybavena jednak kubickými teleskopy pro sledování variací intenzity tvrdé složky kosmického záření, jednak neutronovými monitory pro sledování variací intenzity neutronové složky.

**Š í ř k y a d ě l k y :** Na několika bodech bude po dobu Chandlerovy periody sledováno kolísání zeměpisných souřadnic různými metodami a různými přístroji. Bude přispěno k řešení otázky rychlosti šíření radiových časových signálů.

**R a k e t y a s a t e l i t y :** V oboru umělých družic se pomýšlí na vizuální pozorování družic pokud budou u nás viditelné a na příjem radiových signálů z umělých družic.

**S e i s m o l o g i e :** Během MGR bude rozšířena seismická služba a mezinárodní výměna požadovaných údajů. Hlavním úkolem je výzkum mikroseismického neklidu a studium seismicky aktivních oblastí ČSR, při čemž bude používáno nově vyrobených vlastních původních aparatur.

**G r a v i m e t r i e :** Soustavná registrace slapových a tektonických pohybů zemské kůry pomocí horizontálních kyvadel Zöllnerova typu bude prováděna na třech stanicích v březohorských dolech u Příbrami v hloubce 1000 m, 1300 m a 1450 m pod zemským povrchem.

**J a d e r n é z á ř e n í :** Radioaktivita srážek a případně i ovzduší bude měřena v meteorologické laboratoři v Hradci Králové.

Celkem lze říci, že splněním našeho hodnotného programu prací v MGR poskytneme významný přínos vědeckému úsilí o dokonalé poznání zejména geofyzikálních dějů.

V á c l a v P r o s s e r , P r a h a :

## Co je to spektrální analýza?

V mnohých případech potřebujeme zjistit, z jakých prvků se skládá materiál, jehož vlastnosti zkoumáme a v jakém množství jsou tyto prvky přítomny. Můžeme to provést různými metodami: *chemickou analýzou* (kvalitativní a kvantitativní), *kolorimetrií*, *spektrální analýzou*. Všimněme si nyní blíže posledního způsobu, spektrální analýzy.

### 1. Princip spektrální analýzy

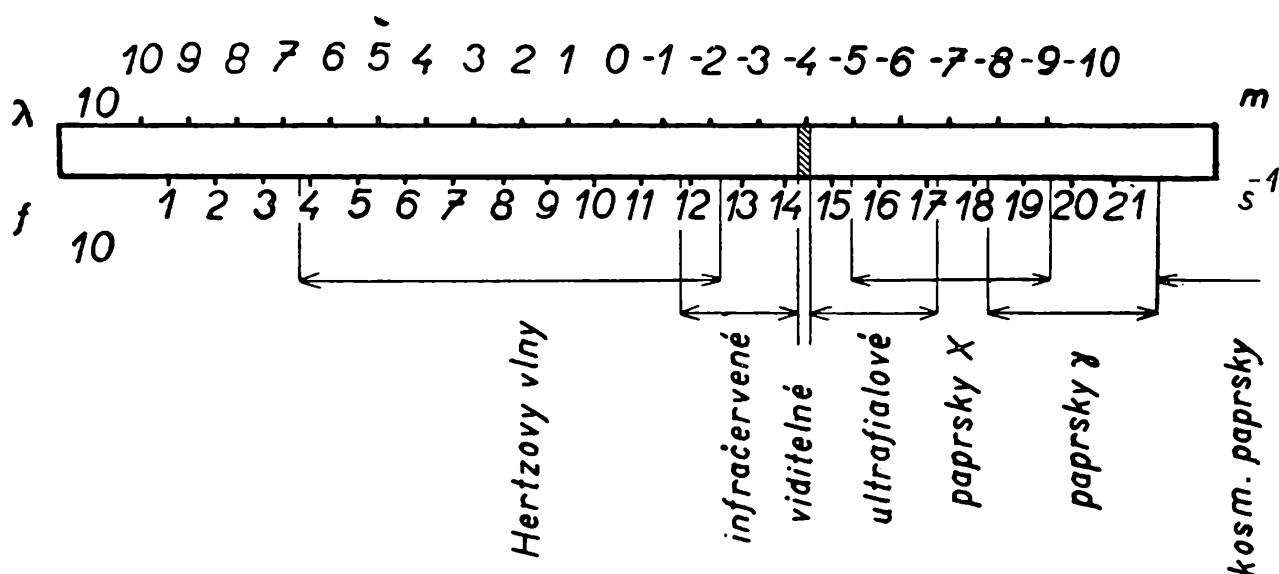
*Spektroskopie* je fyzikální metoda k určení stavby a složení látky, založená na průzkumu jejího spektra. Vhodným a jednoduchým způsobem využívá elektromagnetického záření - ve speciálním případě viditelného světla - jako sondy, kterou můžeme vyšetřovat molekulární, atomické i jaderné vlastnosti a procesy v látkách. Elektromagnetické záření, jak je známo, má vlnový charakter, šíří se rychlostí přibližně  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  a jeho šíření je určeno buď vlnovou délkou  $\lambda$  nebo frekvencí  $f$ . Ve spektrální analýze se užívá obou charakteristik šíření

elektromagnetických vln. Mezi nimi však existují jednoduché převodní vztahy, z nichž lze vypočítat veličinu, se kterou jste zvyklí pracovat:

$$f = \frac{c}{\lambda} . \quad (1)$$

Pro snazší orientaci uvedeme přehledný graf spektrálního rozdělení elektromagnetické energie podle vlnové délky a frekvence (obr. 1). Různé druhy spektrální analýzy liší se právě tím, že užívají různých vlnových délek. Při vzájemném působení čili *interakci* mezi látkou a zářením dochází k výměně energie. Vezměme si jako příklad vzájemné působení elektromagnetického záření o frekvenci  $f$  s atomem, jehož celková energie před interakcí je  $W_1$  a po interakci  $W_2$ . Kvantová mechanika nám udává, jakých energií může příslušný atom nabýt. Jak je známo, neprobíhá podle kvantové teorie výměna energie spojitě, nýbrž po elementárních kvantech energie, určených frekvencí užitého záření podle vztahu

$$W_2 - W_1 = \varepsilon = h f , \quad (2)$$



Obr. 1. Rozdělení elektromagnetické energie podle vlnové délky a frekvence.

kde  $h$  je t. zv. Planckova konstanta  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  erg. s. Atom tedy absorboval energii, čímž se zvýšila jeho celková energie. Podobně naopak je možné, že za vhodných podmínek atom vyše elementární kvantum energie  $\varepsilon$  ve formě elektromagnetického záření o frekvenci  $f$ , čímž zmenší svou celkovou energii o  $\varepsilon = h f$ . Interakce mezi látkou a zářením může probíhat nejrůznějším způsobem. Elektromagnetické záření může vyměňovat energii s atomem, resp. molekulou jako celkem, t. j. může přijít do interakce s jejím rotačním nebo oscilačním (zvláště u látek tvořících krystaly) pohybem a předat jí kvantum energie podle vztahu (2). Energií rotačního nebo oscilačního pohybu odpovídá u většiny látek ve spektrálním rozdělení energie část, připadající na infračervené záření. Tímto oborem frekvencí se pak zabývá *infračervená spektroskopie*. Podobně energetickým stavům vnějších elektronů v atomu odpovídá část viditelného a ultrafialového oboru - zde pracuje *viditelná a ultrafialová spektroskopie*. Energetické přeskoky vnitřních slupek elektronového obalu vyšetřuje *röntgenová spektroskopie*. Energetické po-

měry uvnitř atomového jádra pak *spektroskopie paprsků  $\gamma$*  a j. Vidíme tedy, že máme celý soubor různých spektroskopických zkoumání látek od vyšetřování mikrovlnami až po paprsky  $\gamma$ . I když podstata všech těchto jevů je táž, je patrné, že v každém případě bude třeba různé experimentální techniky a určitý druh spektroskopického vyšetřování nám dá informace o zcela určitých vlastnostech látek.

Spektrální analyza pro zjištění chemického složení látky zahrnuje obor infračerveného, viditelného a ultrafialového záření. Probereme si tedy podrobněji tuto oblast spektroskopického vyšetřování.

## 2. Spektrální analyza v infračerveném, viditelném a ultrafialovém oboru záření

Podle předcházejícího udává kvantová mechanika, jakých energií může nabývat jako celek atom nebo molekula a jaké energie je třeba k přechodu do jiného energetického stavu. Vyšetřme speciální případ: vezměme si na př. jediný atom sodíku. U něho kolem jádra obíhají v první elektronové slupce dva elektrony (sféra *K*), v druhé slupce osm elektronů (sféra *L*) a ve třetí slupce jediný elektron (sféra *M*). Právě tento poslední elektron vytváří t. zv. *optické spektrum*, to je spektrum v infračervené, viditelné a ultrafialové oblasti. Může se pohybovat kolem jádra buď v základní dráze nebo v drahách o vyšší energii; první dráha vyšší energie má proti základní dráze energii o 2,105 eV (elektronvltu) větší; t. zn., že elektron může na tuto dráhu přeskočit jen tehdy, je-li atomu dodána energie 2,105 eV; naopak, je-li elektron ve stavu o vyšší energii, může přeskokem na nižší hladinu vydat energii 2,105 eV ve formě elektromagnetického záření.

Vypočteme si frekvenci, která tomu bude odpovídat. Podle (2)  $f = \frac{\varepsilon}{h}$ , při čemž ovšem musíme počítat s týmiž jednotkami. 1 eV = 1,602.10<sup>-12</sup> ergů<sup>1</sup>); tedy

$$f = \frac{2,105 \cdot 1,602 \cdot 10^{-12}}{6,62 \cdot 10^{-27}} = 5,094 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-1};$$

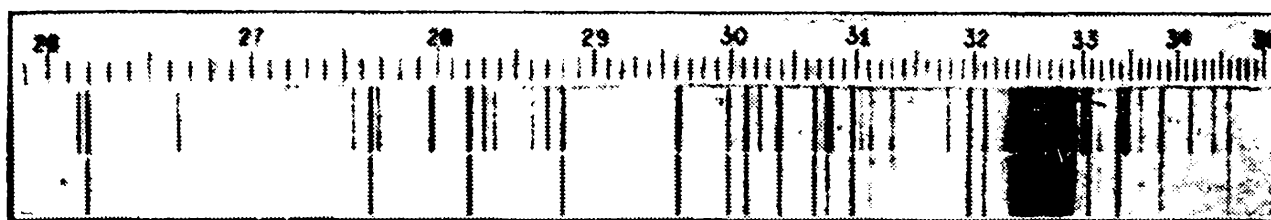
odtud podle (1)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{5,094 \cdot 10^{14}} = 5,889 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 5889 \text{ \AA}$$

---

<sup>1</sup>) Energie 1 eV je kinetická energie, kterou získá elektron, proběhne-li potenciálním rozdílem 1 eV. Uvažujme deskový kondensátor, na jehož deskách je napětí *U* voltů a mezi deskami vzdálenost *d* cm. Pak intenzita elektrického pole *E* mezi deskami je  $E = \frac{U}{d} \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Na elektron, který má náboj  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  coulombů, působí mezi deskami kondensátoru síla  $F = E \cdot e = \frac{Ue}{d}$  newtonů. Proběhne-li elektron celou dráhu *d* mezi deskami, spotřebuje práci  $A = F \cdot d = \frac{Ue}{d} \cdot d = Ue$  joulů; ta se právě rovná kinetické energii, kterou sám získá:  $W = Ue$  joulů. V potenciálním spádu 1 V získá tedy elektron potenciální energii  $W = 1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}$  joulů = 1,602.10<sup>-12</sup> ergů. Tato jednotka energie se nazývá *elektronvolt*; užívá se jí velmi často ve fyzice atomů a jádra.

To je právě čára ve žluté části viditelného spektra - jedna ze dvou čar t. zv. *sodíkového dubletu* - charakteristická pro tento prvek. Je velké množství hladin, mezi nimiž mohou přeskakovat elektrony a vysílat záření o frekvenci, která odpovídá příslušnému energetickému rozdílu. Rozložíme-li světlo, vysílané zářícími sodíkovými parami vhodným zařízením (na př. hranolem) podle frekvencí (vlnových délek), dostaneme jednotlivé čáry rozložené od ultrafialového k infračervenému oboru frekvencí a každá z čar přísluší zcela určitému přeskoku valenčního elektronu v atomu sodíku. A naopak, propouštíme-li světlo všech frekvencí (spojité spektrum) z nějakého vhodného zdroje sodíkovými parami (mají-li ovšem nižší teplotu než zdroj světla), mohou atomy sodíku absorbovat právě jen záření o frekvenci odpovídající dovoleným přeskokům se zcela určitou energií. Dostáváme tak ve spojitěm spektru tmavé čáry na zcela určitých místech, je to t. zv. *absorpční spektrum sodíku*.



Obr. 2. Spektrum mosazi a mědi.

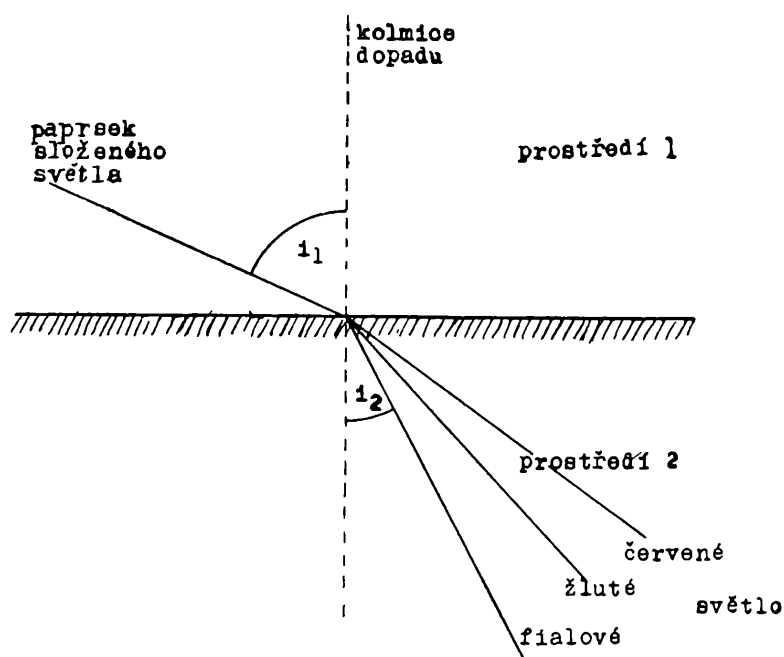
Stejným způsobem vysílají v plynném stavu světlo zcela určité frekvence ostatní prvky, upravíme-li vhodně podmínky záření, odpovídající daným energetickým poměrům, které jsou ovšem - vzhledem k různé struktuře - u každého prvku jiné. Úkolem spektrální analýzy tedy je: určit podle spektra vzorku, který zkoumáme, jaké obsahuje prvky, případně v jakém množství. Na připojeném obrázku (obr. 2) vidíte typický případ. Pod sebou je ofotografováno spektrum (negativy) vzorků mosazi (nahore) a mědi (dole). Měřítka nad spektry udává vlnové délky spektrálních čar v rozmezí 2600 až 3500 Å. Vidíte jasně, že mosaz obsahuje kromě všech čar mědi ještě další čáry (zinek).

Podobně z absorpčního spektra můžeme určit přítomnost příměsí i strukturu vzorku. Poměry jsou zde poněkud složitější, protože jde většinou o vzorky, jež nejsou ve stavu plynném a nebudeme se jimi zabývat. Upozorníme jen, že absorpční analýza je velmi vhodnou methodou pro zkoumání struktury chemických sloučenin, zvláště pak organických. Rovněž zde nebudeme probírat další způsob určování struktury složitých molekul ze spekter *difusního záření* (Ramanova a luminiscentní spektra).

### 3. Emisní spektrální analýza

Když jsme probrali princip spektrální analýzy, můžeme nyní přejít k podrobnějšímu popisu method *emisní analýzy*. Abychom mohli provést rozbor vzorku, je třeba jeho malou část rozžhavit, aby prvky přešly do plynného stavu. To se děje ve speciálním světelném zdroji. Je to buď plamen, nebo elektrický oblouk, nebo konečně elektrická jiskra. Část vzorku se přitom s povrchu vypaří a páry pak vysílají charakteristické záření, které se skládá z množství elektromagnetických

vln o přesně určených frekvencích. Tímto složeným zářením osvětlíme štěrbinu spektrálního přístroje a záření pak rozložíme hranolem nebo mřížkou tak, že na stínítku (fotografické desce) dostaneme jednotlivé čáry jako obraz osvětlené štěrbinu pro různé vlnové délky. Čáry určitého prvku se neliší jen vlnovou délkou - a tedy různou polohou na stínítku - ale i intenzitou podle toho, jak časté jsou přeskoky elektronů mezi hladinami určité energie (pravděpodobnosti přeskoků jsou různé, jde o statistický jev). Prvky ve vzorku identifikujeme pak podle tabulek nebo atlasu spektrálních čar, kde jsou popsány nebo fotografovány spektrální čáry většiny prvků s udáním intenzity a příslušné vlnové délky každé čáry. Podle relativní intenzity čar jednotlivých prvků můžeme pak soudit i na množství obsaženého prvku. Soubor spektrálních čar atomů různých prvků je značně velký. Nejúplnější soudobé tabulky obsahují asi 100 000 čar.



Obr. 3. Schematické znázornění rozkladu světla.

#### 4. Přístroje emisní spektrální analysy

Nyní si promluvíme podrobněji o přístrojích, jimiž se provádí emisní spektrální analysa. Těmto přístrojům se říká *spektroskopy*; v případě, že mohou spektra registrovat na fotografickou desku, říkáme jim *spektrografy*. Umožňují nám analyzovat velmi rozmanitá záření, složená z monochromatických vln různých vlnových délek, vysílaných jednotlivými prvky vzorku, rozžhaveného ve světelném zdroji. Pracují především v ultrafialové a viditelné části spektra. K sestavení takových přístrojů se využívá těchto tří fyzikálních jevů:

a) *Lomu světla* - závislosti indexu lomu  $n$  průhledných látek (na př. skla, křemene) na vlnové délce  $\lambda$  dopadajícího záření. Jak je známo, prochází-li světlo dvěma různými prostředími, na př. vzduchem a sklem, láme se na rozhraní obou prostředí. Oba paprsky svírají s kolmicí k rozhraní mezi prostředími úhly,

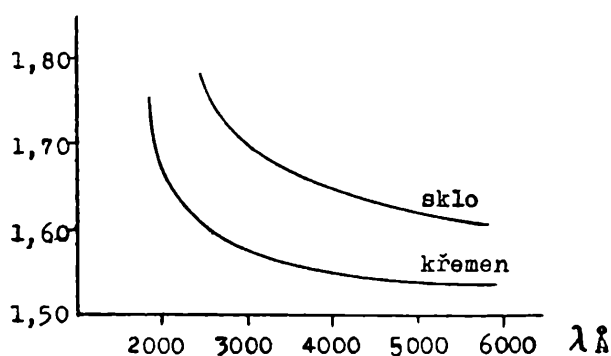
které označíme  $i_1, i_2$ . Pak poměr  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$  je konstanta závislá jen na vlnové délce světla a nazývá se *index lomu*. Závislost indexu lomu na vlnové délce je



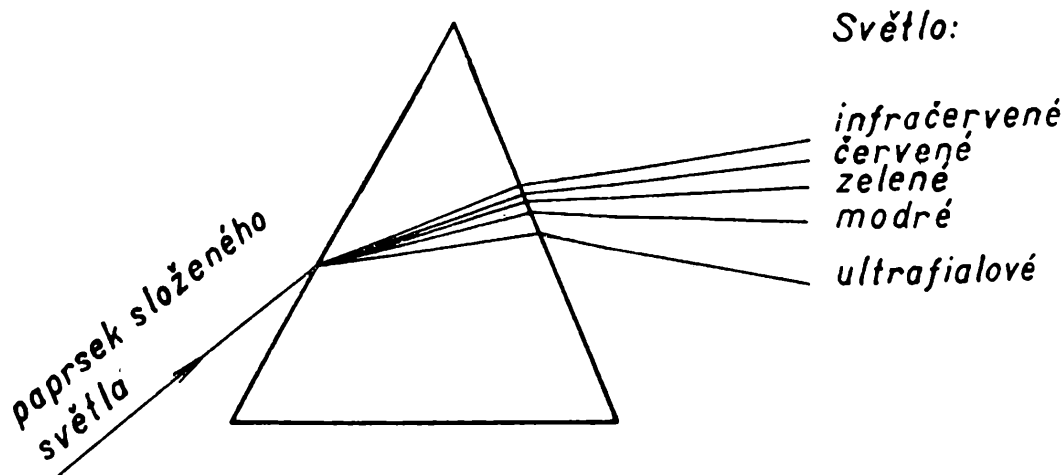
v případech, užívaných ve spektroskopii, toho druhu, že paprsky světla kratší vlnové délky se lámou více, paprsky světla dlouhovlnného méně (viz obr. 3). Proto po průchodu dostáváme ze světla složeného jednotlivé monochromatické složky. Závislost indexu lomu na vlnové délce můžeme vyjádřit přibližně na př. tímto vzorcem:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4},$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jsou konstanty specifické pro každou látku. Grafickému znázornění této závislosti říkáme *dispersní křivka* (viz obr. 4). Na tomto principu jsou založeny hranolové spektrální přístroje, u nichž hranol tvoří součást, jež opticky rozkládá záření různých vlnových délek. Schematický náčrt tohoto rozkladu je znázorněn na obr. 5.



Obr. 4. Dispersní křivka skla a křemene.

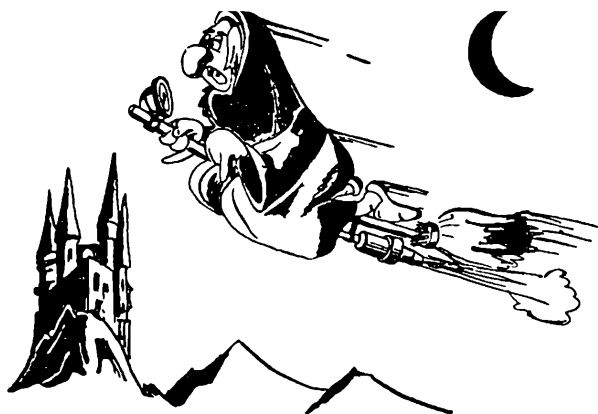


Obr. 5. Schematické znázornění rozkladu světla hranolem.

b) *Ohybu světla* - mřížkou odchýlený světelný paprsek ze svého původního směru je odchylován různě podle vlnové délky dopadajícího záření. Na tomto principu jsou sestrojeny *mřížkové spektrální přístroje*.

c) *Interference světla* - rozdílu optických drah dvou interferujících světelných svazků, jež závisí na vlnové délce. Na tomto principu jsou sestrojeny *interferenční spektrální přístroje*.

Probereme si zde jen hranolové spektrografy, protože jejich princip je velmi jednoduchý a v praxi jsou hranolové přístroje nejrozšířenější. (Dokončení)



## Co vidíme na nebi

### Dvě elongace planety Merkura

Koncem září a začátkem října budeme mít příležitost pozorovat na ranní obloze planetu Merkur. V systému velkých planet, obíhajících kolem Slunce, má Merkur dráhu Slunci nejbližší a proto pro pozemského pozorovatele vychází a zapadá vždy nedlouho před nebo po Slunci.

Pouhým okem lze planetu spatřit jen tehdy, má-li dostatečně velkou úhlovou vzdálenost od Slunce. Poloha, v níž je tato vzdálenost největší, se nazývá *elongace*, a to východní nebo západní, podle toho, v jakém směru od Slunce se planeta nalézá. Z denního zdánlivého pohybu Slunce vyplývá, že při východní elongaci uvidíme planetu večer na západě a při západní elongaci naopak ráno na východě.

Jedna taková elongace nastává 25. září, kdy Merkur bude  $18^\circ$  západně od Slunce. Ve dnech kolem tohoto data uvidíme tedy Merkura asi kolem 5. hodiny ranní.

Východní elongace, příznivá k pozorování, nastane 8. prosince. Merkur bude v tuto dobu  $21^\circ$  východně od Slunce a spatříme jej asi kolem 16,30 hod.

Pro toho, kdo má možnost použít dalekohledu, je pozorování Merkura zajímavou podívanou, neboť planeta jeví fáze, podobné fázím Měsíce.

L. S.

## Uvidíme Drakonidy?

V noci z 9. na 10. října budou mít pozorovatelé meteorů pohotovost. Pozorování meteorů této noci je zvláště důležité, ač je pravděpodobné, že neuvidí více než kteroukoliv jinou noc. Země se má totiž setkat s meteorickým rojem *D r a k o n i d*, který se však pravděpodobně nedostaví.

Prosím vás, zeptá se čtenář, proč se tedy chystat na pozorování, jež pravděpodobně skončí tím, že se oznámí, že nebylo nic vidět? A přece to má svůj velký význam. Večer dne 9. října 1933 se nečekaně snesl na Zemi pravý déšť meteorů, kdy jediný pozorovatel mohl vidět během hodiny několik tisíc meteorů. Protože meteory vyletovaly z hlavy Draka (to je souhvězdí mezi Velkým a Malým vozem), dostal meteorický roj název Drakonidy. Velmi rychle se vysvětlilo, jak vlastně k tak mimořádnému padání meteorů došlo. Onoho dne křížila Země dráhu komety Giacobiniovy-Zinnerovy.

Jako snad každá kometa, i tato se pozvolna rozkládá a dává vznik shlukům meteorů, které putují v její dráze. Jenže Země prochází drahou komety Giaco-

biniovy-Zinnerovy každoročně mezi 9. a 10. říjnem. Proč tedy byl pozorován silný déšť meteorů r. 1933 a potom ještě r. 1946, slabší padání r. 1952 - ale v jiných letech nic? To proto, že r. 1933 a 1946 byla v blízkosti „křížovatky“ i sama kometa. Její oběžná doba je zhruba 6,5 roku, takže po 13 letech, t. j. po dvou obězích, se znovu setká se Zemí přibližně na témž místě. Všimněte si, že mezi dvěma dešti, r. 1933 a 1946, uplynulo právě 13 let. Příští setkání tedy bude r. 1959.

Skutečnost, že déšť meteorů pozorujeme jen tehdy, když křížujeme dráhu roje v těsné blízkosti komety, znamená, že meteory jsou patrně nakupeny jen kolem ní. Výpočet však ukazuje, že meteory nemohou dlouho blízko komety zůstat, že se musí rozptylovat podél celé její dráhy. Jestliže je tedy pozorujeme jen blízko komety, musily se od ní oddělit nedávno. Roj Drakonid je tedy patrně ještě mladý a my máme možnost určit jeho stáří, jestliže zjistíme, kam až se meteory od komety vzdálily. To ovšem znamená, pozorovat každoročně, protože negativní výsledek je vlastně stejně cenný jako pozorování roje. Není nikdy vyloučeno, že se roj neobjeví: r. 1952 přišel také skoro nečekaně. Proto tedy je dobře dívat se z 9. na 10. října pozorně na oblohu.

—mp—



## *Různé-recenze*

Josef K o t y k , Pardubice:

### **Nikola Tesla**

„Z této války, největší, jakou historie poznala, musí se zrodit nový svět, jenž ospravedlní oběti, které lidstvo přináší. Tento nový svět nebude již světem pošlapaných a ponížených, nýbrž svobodných, svobodných lidí i národů, stejných ve vznešenosti a úctě k člověku.“

Těmito krásnými slovy, pronesenými uprostřed hrůz druhé světové války, vyjádřil svou pevnou víru ve vítězství spravedlnosti a v konečné osvobození člověka z pout poroby jeden z největších dobrodinců lidstva, slavný badatel jihoslovanský *Nikola Tesla*, „S l o v a n s k ý E d i s o n“. Na rok 1956, v němž „Rozhledy“ nevycházely, připadlo sté výročí jeho narození.<sup>1)</sup> Jeho památku a význam připomeneme si proto letos.

<sup>1)</sup> Učebnice fyziky pro 11. ročník uvádí u Teslova portrétu omylem rok 1857, což zároveň opravuji.

Nikola Tesla se narodil dne 10. července 1856 ve Smiljanu u Gospiče v Chorvatsku. Pocházel z rodiny pravoslavného duchovního. Vystudoval vyšší reálku v Karlovcí, odebral se po maturitě roku 1875 na vysokou školu ve Štýrském Hradci. Zde projevil se již jeho vřelý zájem o experimentální fyziku, zvláště pak o elektrotechniku, jemuž zůstal věren po celý život.

Většina elektrických přístrojů byla tehdy zařízena na stejnosměrný proud. Jeho zdrojem byly zprvu galvanické články a baterie, v době, o níž píše, pak již také generátory stejnosměrného proudu, zvané dynama. Dynamoelektrickým principem (zvláštním způsobem buzení, na němž jsou založeny), objeveným v letech 1866 a 1867 německým inženýrem Siemensem<sup>2)</sup> a téměř současně anglickým fysikem Wheatstonem,<sup>3)</sup> a sestrojením armatury (kotvy) prstencové<sup>4)</sup> roku 1869 a bubnové<sup>5)</sup> roku 1873, jimiž se dosáhne stejnosměrného proudu s elektromotorickou silou téměř neproměnnou, podařilo se v době podivuhodně krátké vyřešiti v zásadě všechnu problematiku mohutných strojů užívaných k výrobě stejnosměrného proudu. Další úspěšný vývoj elektrotechniky vyžadoval pak jen úvah, jak měnit energii elektrickou opět v energii mechanickou. Zkušenosti, získané na elektrotechnické výstavě ve Vídni roku 1875, přinesly další překvapení: Každého dynama na stejnosměrný proud lze, jak se tehdy po prvé ukázalo,<sup>6)</sup> použít také jako elektromotoru. V konstrukci není mezi generátorem a elektromotorem zásadního rozdílu. Poněvadž pak dynama lze poháněti nejlacinější energií vody, větru nebo uhlí, dochází v těchto letech k propagaci stavby elektráren s dynamy na stejnosměrný proud, vyvstala tehdy v plné životnosti myšlenka možnosti elektrifikace rozsáhlého území rozvodnou sítí, myšlenka přenosu elektrické energie na veliké vzdálenosti. Neběželo vskutku o nic menšího než o realizaci technického zázraku, poslati na př. energii vodopádu neviditelně po drátech tam, kde jí člověk potřebuje, a poháněti jí továrny, od řeky mnoho kilometrů vzdálené . . .

Do této doby, plné tvůrčího ruchu, přichází se svým pracovním elánem mladý, pro technický pokrok zanícený Tesla. Do doby naplněné uspokojením nad úspěchy dosaženými s elektrickým proudem stejnosměrným přináší jako revoluční kvas

---

<sup>2)</sup> W e r n e r v o n S i e m e n s (čti fon símens), 1816—1892, založil s Halskem společnost pro stavbu telegrafů. Roku 1869 vybuodoval telegrafické vedení z Anglie přes Německo, Rusko a Persii do Indie, zmechanisované tak, že na lince 10 000 km dlouhé, nebylo - mimo stanici konečnou - třeba lidské obsluhy. Po něm nazývá se jednotka vodivost

$$\frac{1}{\text{ohm}} = \text{siemens.}$$

<sup>3)</sup> C h a r l e s W h e a t s t o n e (čti čárlz vitstn), 1802—1875, vynalezl můstek, po něm dosud nazývaný, k měření odporu vodičů (viz učebnici fysiky pro 11. roč., čl. 39, obr. 70), vlnostroj k studiu různých druhů vlnění a j.

<sup>4)</sup> Vynalezl ji Ital Antonio Pacinotti (čti pačinoty) a nezávisle na něm Belgičan Z é n o b e T h é o p h i l G r a m m e (čti gram), nazýváme ji proto také armaturou Pacinotti-Grammeovou.

<sup>5)</sup> Vynalezl ji Němec Friedrich von Hefner-Alteneck, inženýr závodů Siemens a Halske (viz pozn. 2), nazýváme ji proto také armaturou Hefner-Alteneckovou.

<sup>6)</sup> Jedno z dynam, instalovaných na výstavě, vypovědělo službu. Aby se zjistilo, není-li přerušeno vinutí, byl do vinutí zaveden proud odjinud. Dynamo se roztočilo jako - motor.

myšlenku nahraditi tento klidný, hladký, ustálený proud proudem jiným, v době té ještě zcela neobvyklým, p r o u d e m s t ř í d a v ý m.

Již za studií na technice ve Štýrském Hradci všímal si Tesla při předvádění elektromotoru ještě velmi nedokonalého různých potíží, jež se objevovaly také při konstrukci generátorů na vyšší napětí. Jednou z největších byla okolnost, že mezi kroužky a kartáčky vznikaly nedokonalým dotykem silné jiskry, jimiž se kartáčky opalovaly a tak brzy opotřebovaly. Mocným jiskřením se mimo to dostavovaly velké ztráty energie. Pozoruje činnost elektromotoru silně jiskřícího, pojal Tesla myšlenku sestrojiti motor bez kroužků a jí byl přiveden k soustavnému studiu vlastností a schopností elektrických proudů vůbec. Vytušiv správně, jakým směrem se pravděpodobně bude ubírat další vývoj elektrotechniky, navrhl přednostovi ústavu pro experimentální fysiku prof. Pöschlovi (čti pešlovi) pohon elektromotorů proudem střídavým. Je příznačné, že Pöschl jeho návrh zamítl. Tesla dokončil nato studia v Praze<sup>7)</sup> a po technické praxi v Budapešti a v Paříži vystěhoval se roku 1884 do Spojených států, v nichž potom jako Američan již naturalisovaný prožil větší část svého plodného života a dne 7. ledna 1943 i zemřel.<sup>8)</sup>

Svůj vynalézavý talent zdokonaloval Tesla nejprve u Edisona v dílnách v Orange (čti orindž), brzy však shledal, že Edison v širší uplatnění střídavého proudu nevěří, a pro ideové rozpory se s ním rozešel. Zatím boj mezi přívrženci stejnosměrného a střídavého rozvodného systému trval a s časem se stupňoval. Tesla shledal, že hospodárnost přenosu elektrické energie do dálky vyžaduje voliti intensitu proudu co nejmenší a tedy napětí co největší. I velké odpory dálkového vedení lze bez velkých ztrát překlenout, avšak proudem o vysokém napětí. Změnu napětí (zv. transformaci) lze pak velmi snadno provésti právě u proudu střídavého. Tak se stalo, že nad Edisonovou stejnosměrnou sítí zvítězila Teslova myšlenka užítí k přenosu proudu střídavého.<sup>9)</sup> Tesla Electric Company (čti ilektrik khampny), založená roku 1887, začala stavět mohutné třífázové generátory, dávající na svorkách zvýšené napětí (6600 V), jehož by stejnosměrné dynamo nevyrobilo; toto napětí se dále libovolně zvyšuje (na př. na 100 000 a více voltů) transformátorem, který pracuje bez dozoru, s velmi vysokou účinností (až 98 %) a neopotřebuje se. Třífázový proud dovede mimo to vytvořit i točivé magnetické pole. V něm se roztočí každý uzavřený a otáčivý vodič, jímž může ovšem býti také rotor (kotva) elektromotoru. Poněvadž rotoru se nepřivádí žádný proud, není přívodních kroužků ani kartáčků třeba. Tak se stalo, že v témž roce 1887 (právě před 70 lety)

---

<sup>7)</sup> V letním semestru roku 1880 navštěvoval na vysoké škole technické přednášky doc. Domalípa. Posluchačů, kteří se v životě tak proslavili, vzpomínalo České vysoké učení technické v Praze zvláště letos u příležitosti 250. výročí svého založení.

<sup>8)</sup> Učebnice fysiky pro 11. ročník uvádí u Teslova portrétu omylem rok 1942, což rovněž opravuji.

<sup>9)</sup> V Evropě byl první velkolepý přenos energie elektrické pomocí třífázového proudu proveden roku 1891 z Lauffenu nad Neckarem do Frankfurtu nad Mohanem na vzdálenost 175 km. Stalo se tak z podnětu ruského badatele Michaila Osipoviče Dolivo-Dobrovolského (1862–1919), jenž žil tehdy jako politický emigrant v Německu.

mohl být Teslovi udělen patent na **asynchronní elektromotor**, ideální motor, o němž léta snil, s rotorem zvaným **kotva nakrátko** (klecové vinutí), konstrukčně velmi jednoduchý, pohotový, v provozu spolehlivý a hospodárný, dnes nejužívanější, všeobecně známý. Tisíce bezkolektorových indukčních motorů bzučí dnes v továrnách všech kontinentů spokojeně svou píseň o velikém životním úspěchu Nikolvy Tesly, genia slovanského.

Tesla se stal rázem slavným. „Byl větším geniem než Edison,“ napsaly po jeho smrti noviny New York Times. A to už něco znamenalo! Edison byl přece „kouzelník z Menlo Parku“, miláček Američanů,<sup>10)</sup> Tesla však cizinec, přistěhovalec chorvatský! Také o stavbě elektrárny při Niagarském vodopádu rozhodly nakonec projekty Teslovy proti návrhům Edisonovým.

Pokusy, které Tesla vykonal v letech 1891 až 1893, znamenaly mimo to epochální začátky **radiotelegrafie**. Objektivně o nich na I. všeruském kongresu elektrotechnickém v lednu roku 1900 referoval slavný fyzik ruský Popov.<sup>11)</sup> Také Ital Marconi, jenž se proslavil svými pokusy bezdrátové telegrafie v Anglii (roku 1897 vysílal do dálky 18 km), doznal později, že mnohá zařízení i příslušná spojení z nich převzal. Úspěchy Teslovy byly vskutku mimořádné. Tesla vysílal rovněž roku 1897 (právě před 60 lety) v okolí New Yorku radiotelegrafické zprávy na vzdálenost 52 mil<sup>12)</sup>. Roku 1899 postavil v Coloradu stanici s výkonem 200 kW, jež vysílala na vzdálenost 1000 km, výstavbou mohutné vysílačky podlomil však své finanční síly a ustal na konec v nerovném boji se soupeřem hospodářsky silnějším sám. Snaha, za níž jdou i dnešní vynálezci, přenášeti energii do dálky bez vodičů (podařilo se mu na př. rozsvítit žárovku na vzdálenost 25 km), jeví se u Tesly přes to velmi výrazně jako plán zcela osobitý a cílevědomý.

Studium **vysokofrekvenčních proudů** byl pak další nový obor, v němž se Tesla záhy proslavil. Střídavým proudem vysoké frekvence je, jak známo, také výboj kondensátoru cívkou. Spojiv dovedně transformační účinek s elektrickou resonancí, dospěl Tesla ke konstrukci transformátoru, v jehož sekundárním vinutí lze vzbuditi napětí o výši i několika milionů voltů při frekvenci několik set tisíc period za vteřinu. S tímto zařízením, jemuž říkáme dodnes **transformátor Teslův**, vykonal Tesla mnohé překvapující pokusy. Ukázal zejména, že jím lze dosáhnouti velmi silných změn elektrického a magnetického pole v okolí, jejichž působením zředěné plyny v žárovkách (doutnavých i obyčejných) světélkují i ve vzdálenosti několika metrů, na př. v celé místnosti, bez jakýchkoli přívodů. Evakuovaná trubice značné délky, nazývaná dnes běžně **trubicí Teslovou**, svítí rovněž při pouhém přiblížení k Teslovu transformátoru.

---

<sup>10)</sup> O jeho záslužné činnosti badatelské viz můj článek, uveřejněný u příležitosti 100. výročí narození Edisonova v „Rozhledech“, roč. 27, čís. 2, str. 33 až 35.

<sup>11)</sup> Alexander Stěpanovič Popov (1859—1906) předvedl na zasedání ruské fyzikálně-chemické společnosti dne 7. května 1895 první radiový přijímač, v němž použil také již anteny, relé, kovového stínění a j. Den 7. května vstoupil proto do dějin vědy jako památný „Den radia“.

<sup>12)</sup> 1 míle je 1760 yardů čili 1609 m; 1 mořská míle anglická měří 1852 m; americké míry se od anglických trochu liší.

K zesílení světelného účinku zatavil Tesla později do trubice elektrodu, kterou připojil na neuzemněný konec sekundárního vinutí transformátoru. Také o s v ě t l o v a c í t e c h n i c e přispěl Tesla mnoha životnými podněty. Vývoj jím zahájený byl orientován snahou sestrojiti světelné zdroje s výbojem ve zředěných plynech, zdroje hospodárnější než žárovky, neboť by se v nich energie elektrická měnila ve světelnou přímo, t. j. bez zprostředkující energie tepelné. Tato snaha byla úspěšná, nabývající časem zcela konkrétních forem v konstrukci zářivek, jež se dnes stávají již vážným konkurentem žárovek.

Po stránce fyziologického působení elektrického proudu je známo, že účinek závisí podstatně na druhu proudu. Proud střídavý (v elektrotechnice se nejčastěji užívá frekvence 50/sec) je při téměř napětí obecně nebezpečnější než proud stejnosměrný. Tesla dokázal, že účinek závisí také na frekvenci proudu. Proudů frekvence velmi vysoké jsou však i při vysokém napětí tělu neškodné, neboť procházejí toliko povrchem, koží<sup>13)</sup> a do nitra vodičů nepronikají. Nemohou tedy býti lidskému životu nebezpečné. Je-li dolní konec sekundární cívky Teslova transformátoru uzemněn, dosahuje napětí na jejím horním konci tak vysoké hodnoty, že nastává mohutný výboj doutnavý; trsy t. zv. T e s l o v a s v ě t l a dosahují délky 1 i více dm. Horního konce cívky můžeme se přesto dotknouti. Naším tělem probíhají pak proudy napětí nadměru vysokého, účinku však necítíme žádného, neboť nezasahují ani nervů, ani svalů. Místo obvyklých účinků fyziologických (bolestí v nervech, trhání ve svalech) způsobují jen oteplení těla. Některých výsledků Teslova badání v oboru vysokofrekvenčních proudů užívá se s úspěchem proto také v lékařství (diathermie, t e s l a i s a c e a j.).

Svůj článek zakončuji vlastními slovy Teslovými: „Nový svět bude světem, v němž díla rozumu, vědy a umění nebudou již sloužit zbohatnutí jednotlivců. Budou sloužit celku, zkrášlení a zlepšení života všech.“ Mohl je vyřknouti jen člověk plný ušlechtilých ideálů. Ukázal jsem, že Tesla, bojovník za nový lepší svět, se také velmi zasloužil o jejich uskutečnění.

## Populární přednáška o nerovnostech

Nauka o nerovnostech zaujímá ve středoškolské matematice význačné postavení. Ptáme-li se, proč je tomu tak, vidíme, že jsou dva důvody, které podtrhují důležitost této partie: V každodenním životě i v technické praxi častěji rozhodujeme, zda je jeden ze dvou naměřených numerických údajů menší než druhý, kdežto zjišťování, zda jsou si oba výsledky „přesně“ rovny, je vzácnější (mnohdy i technicky neproveditelné). Praxe nás nutí počítat s neúplnými čísly a nauka o neúplných číslech není pak nic jiného než jisté použití pojmu nerovnosti. A onen druhý důvod? Žádný, kdo studuje technické vědy, se neobejde bez matematické

---

<sup>13)</sup> Zjevu říkáme odborně s k i n e f e k t; angl. skin = kůže. Jím lze také vysvětliti, proč drát má pro střídavý proud velmi vysoké frekvence větší ohmický odpor než obvykle.

analýzy: diferenciální a integrální počet najdeme jako důležitou pomocnou disciplínu snad ve všech technických učebnicích. Všimneme-li si však prostředků, jimiž pracuje tato „vyšší“ matematika, vidíme, že se zde předpokládá dobrá znalost nauky o nerovnostech. Je tedy školní výklad o nerovnostech vlastně také dobrou přípravou pro budoucí studium vysokoškolské.

Ve známé knižnici *Populární přednášky o matematice* vyšla ve Státním nakladatelství technické literatury před časem v překladu z ruštiny jako 5. svazek, přístupně psaná brožurka *P. P. Korovkina: Nerovnosti*. Okolnost, že knížka byla brzy vyprodána a že Státní nakladatelství technické literatury připravilo právě její druhé vydání, dává jistě spisku dobré vysvědčení. Autor chce seznámit čtenáře s některými důležitými nerovnostmi, které mají upotřebení též ve vyšší matematice. Ukazuje, že jednoduché úlohy o maximum a minimum funkce je možno řešit i pomocí nerovností a že k tomu tedy není někdy potřebí znalostí z diferenciálního počtu. V závěru knížky je na řadě příkladů osvětlen pojem limity a některé limity jsou počítány právě pomocí nerovností. Spisek, který má 70 stran, doplňuje řada cvičení, jejichž řešení jsou vzadu uvedena.

Tato brožurka patří jistě do matematické knihovničky našich studentů. Je psána tak, že jí mohou porozumět žáci nejvyšších tříd jedenáctiletých a odborných škol. Její cena je 2,55 Kčs.

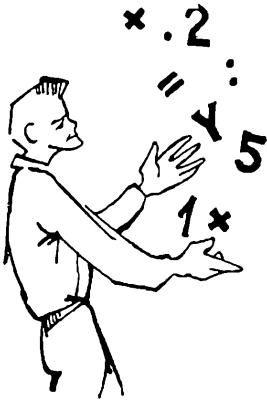
Jiří Sedláček

## Šedesát roků trvání „dieselů“

V roce 1897 se podařilo Ing. Dr. R. Dieselovi ve spolupráci se strojírnami M. A. N. a Sulzer sestrojiti nejehospodárnější spalovací motor, po něm nazvaný. Ačkoliv Diesel zamýšlel jím nahradit menší parní stroje v průmyslu a v lodní dopravě, nastal v posledních desítiletích takový rozvoj Dieselových motorů, že v některých zemích ovládly nejen železniční a lodní dopravu, ale zatlačily skoro na celém světě v nákladních vozidlech benzinový motor. Charakteristickým je vývoj „dieselisace“ železnic. První diesel-elektrická lokomotiva byla postavena v roce 1920 Ch. Kettenringem a dnes je v provozu více než 16 000 těchto lokomotiv. Nákladní vozidla v posledním desítiletí jsou většinou poháněna diesely a tyto jsou dnes vestavovány i do osobních automobilů, ba dokonce i do letadel.

F. Komurka (I. A. A. E. Journal, listopad 1956)

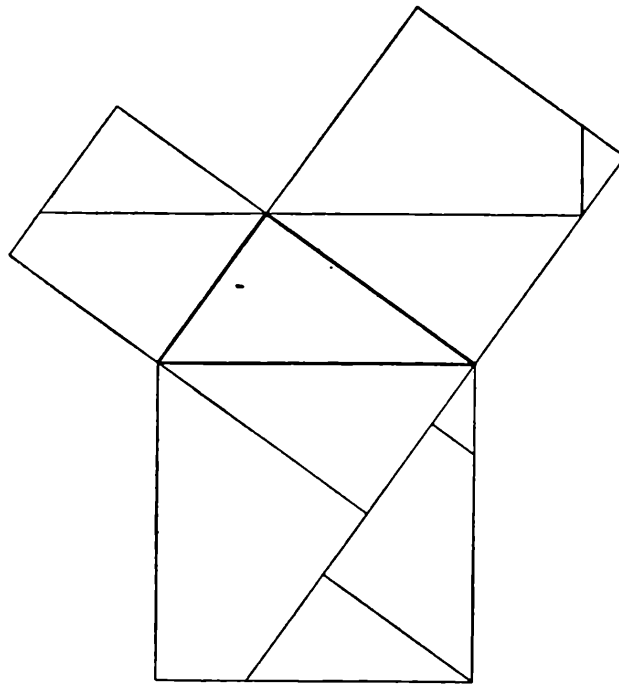




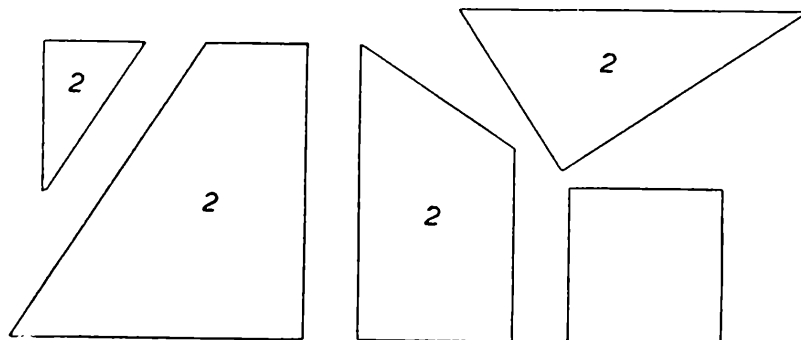
## Matematické zábravy

### Skládačka

Pythagorova věta byla od dob Pythagorových dokázána již mnoha způsoby. Známe teď několik desítek důkazů této věty. Důkazy, které spočívají v tom, že čtverec nad přeponou se rozdělí na několik mnohoúhelníků, z nichž se dají složit

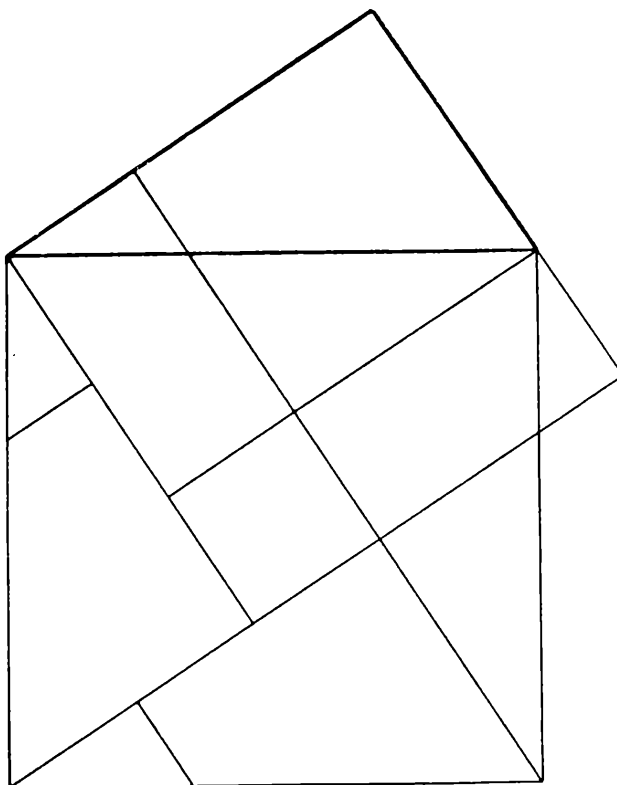


Obr. 1



Obr. 2

dva různé čtverce nad odvěsnami, dávají podnět k různým skládačkám. Nejznámější z nich je znázorněna na obr. 1. Jinou máte připravenou na obr. 2. Odtud si obkreslete všechny mnohoúhelníky a vystříhnete. Přitom obrazce označené



Obr. 3

cifrou 2 si vystříhnete vždy dva a potom z nich složte jednak jeden větší čtverec a pak dva menší. Ke složení použijte všech mnohoúhelníků. Řešení je vyznačeno na obr. 3. S. H.



## Úlohy k řešení

Redakce uveřejňuje řešení příkladů č. 1 až 4, daných v č. 1 Rozhledů matematicko-fyzikálních. Dáváme přitom přednost řešením zaslaným studujícími škol třetího stupně, i když někdy jimi užitý postup není ve všech podrobnostech dokonalý. Z úsporných důvodů podáváme u některých úloh řešení autorovo, je-li kratší a výstižnější.

Seznam všech řešitelů bude uveden v čísle 10 i s jejich oceněním.

Na dotazy z řad čtenářů upozorňujeme, že přijímáme (mimo soutěž) i řešení od nestudentů. Řešení úloh z č. 6 mohou se přirozeně účastnit i letošní abiturienti.

1. Jestliže  $0 < p < q < r$ , pak platí

$$p^2r + q^2p + r^2q > 3pqr \quad (1)$$

Podle toho se dá dokázat, že rovnice

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} + \frac{x^2 - b^2}{x^2 - c^2} + \frac{x^2 - c^2}{x^2 - a^2} = 3,$$

kde  $0 < |a| < |b| < |c|$ , má vždy reálné kořeny. Dokažte obě tvrzení.

St. Horák

*Řešila s. Jarmila Hábová, XIc, JŠŠ ve Strážnici (1. část příkladu):*

$p^2r + q^2p + r^2q > 3pqr$  čili  $p^2r - pqr + q^2p - pqr + r^2q - pqr > 0$ ,  
dále

$$-pr(q-p) - pq(r-q) + qr(r-q) + qr(q-p) > 0$$

a po úpravě

$$r(q-p)^2 + q(r-q)(r-p) > 0$$

Protože hodnoty dvojčlenů v závorkách jsou kladné, je celá levá strana kladná.

*Řešení autorovo (2. část příkladu):*

V dané rovnici položíme

$$a^2 = p, \quad b^2 = q, \quad c^2 = r$$

Po úpravě dané rovnice obdržíme

$$x^2 = \frac{(pq^2 + qr^2 + rp^2) - 3pqr}{p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - qr}$$

Jmenovatel tohoto zlomku je vždy kladné číslo, jak vyplývá ze součtu nerovností:  $p^2 + q^2 > 2pq$ ,  $q^2 + r^2 > 2qr$ ,  $r^2 + p^2 > 2pr$ . Čitatel je také vždy číslo kladné podle výsledku (1). Proto  $x^2 > 0$  a daná rovnice má při splnění vyslovených předpokladů vždy reálné řešení.

★ ★ ★

2. Je dán trojúhelník  $ABC$ . Sestrojte obdélník  $CDEF$  tak, aby přímka  $DE$  procházela vrcholem  $A$ , přímka  $EF$  vrcholem  $B$  a aby platilo  $EF : DE = 2 : 3$ .

St. Horák

*Řešení autorovo:*

**R o z b o r.** Vrchol  $E$ , který je protilehlý vrcholu  $C$ , leží na kružnici  $k$  opsané nad průměrem  $AB$ . Úhlopříčka  $CE$  protne kružnici  $k$  v bodě  $M$ . Úhel  $\alpha = \sphericalangle DEC = \sphericalangle AEM$  je v kružnici  $k$  úhel obvodový. Kromě toho víme, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

**K o n s t r u k c e.** Na  $k$  zvolíme libovolný bod  $E' \neq A$  a sestrojíme úhel  $\alpha = \sphericalangle AE'M$  tak, aby  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ , při čemž bod  $M$  leží na  $k$ . Přímka  $CM$  vytne na  $k$  bod  $E$ . Tím je úloha rozřešena, neboť známe dva protější vrcholy obdélníka a o jeho dvou stranách víme, že procházejí body  $A, B$ .

**D ů k a z** správnosti plyne přímo z konstrukce.

**Diskuse.** Existují obecně dva různé obdélníky, neboť bod  $M$  můžeme sestrojít v polorovině  $ABC$  nebo v polorovině opačné. Každý z těchto bodů vede pak k jednomu řešení. Úloha nemá řešení v případě, když  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ , je-li současně  $AC : BC \neq 2 : 3$ .

\*\*\*

3. Proveďte prostorové řešení těchto úloh:

Sestrojte rotační komolý kužel, dány-li:

- body  $A, B$  jedné podstavné kružnice a body  $C, D$  druhé podstavné kružnice;
- průměr  $d_1$  jedné podstavy a mimoběžný s ním průměr  $d_2$  druhé podstavy (oba polohou nikoli délkou) a tečná rovina  $\tau$  plochy;
- protější vrcholy  $A, C$  osového řezu, poloha průměru  $d$  opsané kulové plochy a přímka  $p$  protínající podstavnou kružnici!

Ota Setzer

*Řešení redakce:*

a) Rovina  ${}^1\rho$  proložená body  $A, B$  rovnoběžně s přímkou  $CD$  je rovinou jedné podstavy; rovina  ${}^2\rho \parallel {}^1\rho$ , jdoucí bodem  $C$ , je rovina druhé podstavy; roviny souměrnosti  ${}^1\sigma, {}^2\sigma$  úseček  $AB$  resp.  $CD$  se protínají v ose  $o$  našeho kužele. Středů  ${}^1S, {}^2S$  obou podstav jsou pak v průsečících osy  $o$  s rovinami  ${}^1\rho, {}^2\rho$ .

Jsou-li úsečky  $AB, CD$  mimoběžné, je úloha jednoznačná, jsou-li rovnoběžné, nemá úloha řešení kromě případu, kdy obě úsečky mají společnou rovinu souměrnosti; pak existuje nekonečně mnoho řešení, neboť každá přímka ležící v této rovině symetrie může být osou hledaného komolého kužele.

b) Přímka  $o$  protínající kolmo oba mimoběžné průměry  $d_1, d_2$  (t. zv. o s a m i m o b ě ž e k  $d_1, d_2$ ) je osou komolého kužele. Roviny  ${}^1\rho, {}^2\rho$ , vedené průměry  $d_1, d_2$  kolmo k ose  $o$ , jsou rovinami podstav a protínají osu  $o$  ve středech  ${}^1S, {}^2S$  podstav, tečnou rovinu  $\tau$  v přímkách  ${}^1t, {}^2t$ , jež jsou tečnami kruhových podstav. Vzdálenosti  ${}^1r, {}^2r$  středů  ${}^1S, {}^2S$  od tečen  ${}^1t, {}^2t$  jsou poloměry podstav.

Je-li  $\tau \parallel {}^1\rho$ , nemá úloha řešení, je-li  $\tau \perp {}^1\rho$ , přejde komolý kužel v rotační válec; protíná-li rovina  $\tau$  úsečku  ${}^1S{}^2S$  v jejím vnitřním bodě, přejde komolý kužel v dvojkužel; v ostatních případech má úloha jediné řešení.

c) Rovina souměrnosti  $\sigma$  úsečky  $AC$  protíná průměr  $d$  ve středu  $S_o$  opsané kulové plochy, kterou lze již sestrojít. Rovina  $\rho \equiv ACS_o$  je osovým řezem kužele. Přímka  $p$  protíná kulovou plochu v bodech  $P_1, P_2$ . Považujeme-li bod  $P_1$  za bod podstavy, v níž leží i bod  $C$ , vedeme přímkou  $CP_1$  rovinu  $\gamma$  kolmou k rovině  $\rho$  a bodem  $A$  rovinu  $\alpha \parallel \gamma$ . Tím jsme získali roviny obou podstav. Kolmice  $o$ , vedená k nim bodem  $S_o$ , je osou kužele a protíná podstavy v jejich středech.

Úloha je obecně čtyřznačná, protože lze každý z bodů  $P_1, P_2$  považovat buď za bod první nebo druhé podstavy. Zvláštní případy nastanou:

- leží-li  $S_o$  na  $AC$ , přejde komolý kužel v rotační válec;
- je-li  $d \parallel \sigma$ , neexistuje žádné řešení;
- leží-li  $d$  v rovině  $\sigma$ , může být každý bod přímky  $d$  středem  $S_o$  kulové plochy, existuje nekonečně mnoho řešení;
- je-li přímka  $p$  tečnou kulové plochy, jsou dvě řešení, neseče-li ji, neexistuje žádné.

\*\*\*

4. Na oběžné kolo turbíny je vrháno každou minutu 320 kg vodní páry. Turbinou poháněné dynamo vyrábí elektrický proud 125 A při napětí 5000 V. Určete relativní rychlost vodní páry za předpokladu, že 40 % energie se ztrácí!  
Evžen Říman

Řešil p. Bohdan Zelinka, XIB, 1. JŠŠ v Liberci:

Poněvadž se 40 % energie ztrácí, je zřejmé, že se elektrická energie, vytvořená dynamem za 1 minutu, rovná 60 % kinetické energie páry, která je vržena za 1 minutu na oběžné kolo turbíny. Platí tedy rovnice

$$U I t = 0,6 \cdot \frac{1}{2} m v^2 ,$$

kde  $U$  je napětí,  $I$  intenzita,  $t$  čas,  $m$  hmota páry vržené za 1 minutu na oběžné kolo turbíny,  $v$  rychlost páry. Z toho

$$v = \sqrt{\frac{U I t}{0,3 m}}$$

Dosadíme  $U = 5000$  V,  $I = 125$  A,  $t = 60$  s,  $m = 320$  kg;

$$v = \sqrt{\frac{5000 \cdot 125 \cdot 60}{0,3 \cdot 320}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 625 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

\* \* \*

Výsledky cvičení k článku doc. Oty Setzera: O posloupnosti mocnin lichých čísel z čísla 1 (str. 4):

1. Součet  $S_n^{(5)}$  pátých mocnin prvních  $n$  lichých čísel jest

$$S_n^{(5)} = \frac{n^2}{3} (16 n^4 - 20 n^2 + 7)$$

2. Součet všech sedmiciferných pátých mocnin lichých čísel jest

$$S_{13}^{(5)} - S_8^{(5)} = 25\,552\,969 - 1\,370\,944 = 24\,182\,025$$



*Redakce hovoří se čtenáři*

\* Š. D. Nitra. Vaši připomínku k článku „Dopplerův princip“ jsme postoupili autorovi.

Dále nám vytýkáte titulní obrázky k jednotlivým kapitolám, že na př. matematik má tam pouze tři vlasy a k tomu ještě naježené.

Dostali jsme totiž za úkol odstraňovat strach z matematiky, geometrie a fyziky. Chceme proto, aby prostředí našeho časopisu nebylo škrobené a suchopárné, jako jim není škola sama, chce-li ovšem učitel vidět její klady i závady a snaží-li se pochopit své svěřence. Proto jsme záměrně pověřili studenta a nikoliv profesionála, aby provedl návrh obálky i jednotlivé vesele zaměřené obrázky. O tom, že jsme volili správnou cestu svědčí úplně rozebraný náklad Rozhledů matematicko-fyzikálních. Vítejme však Vaši výtku a nyní po prázdninách nahrazujeme tyto obrázky jinými, kde učitel - matematik je zobrazen důstojněji, s více vlasy a s plnovousem. Žádáme naše čtenáře, aby nám v tomto směru projevíli svá přání, která by třeba doplnili i kreslenými návrhy.

Matematika i fyzika, jichž propagací se náš časopis zabývá, jsou pevnými základy veškerého přírodního dění a mají takovou posici, že hlasatelé věd takového druhu mohou si bez následků dovolit žert na vlastní adresu, neboť ješitnost bývá znakem spíše operetních než operních zpěváků.

★ Dopis čtenáře S. M. z Hranic na Mor.: Nedávno se mi dostalo do ruky několik starších čísel časopisu Rozhledy matematicko-přírodovědecké. Samozřejmě, že jsem srovnával okamžitě jak obsahovou stránku, tak i grafickou úpravu našeho nového časopisu se starším jeho předchůdcem. Mohu s radostí napsat, že letošní čísla Rozhledů v mnohém předčí starší ročníky. Myslím, že se o pronikavé zlepšení zasloužili nejen samotní odborníci a přispěvatelé, ale též i ostatní pracovníci v redakci a tiskárně. Chtěl bych tímto všem za jejich obětavou práci srdečně poděkovat.

Ještě před maturitní zkouškou jsem redakci napsal, že bych rád přispěl několika články do našeho milého časopisu. Teď, kdy mám po maturitní zkoušce a jsem přijat na brněnskou universitu (obor matematika-fyzika), splním svůj slib.

Potud čtenář, kterému redakce přeje mnoho úspěchů ve studiu na universitě. Rádi slyšíme kritiku své práce a učiníme vše, co je v našich silách, abychom obsah časopisu zlepšili, a tak po všech stránkách mohli navázat na dobrou tradici Rozhledů matematicko-přírodovědeckých vytvořenou našimi učiteli.

★ Vítejme po prázdninách naše čtenáře, kteří jistě načerpali nových sil pro svoji další celoroční práci. Příkladně jim uveřejníme postupně řešení dalších úloh z minulých čísel Rozhledů. Nová soutěž začne opět v leánu.

★ Zatím došlé rysy podle výzvy ze 4. čísla Rozhledů nejsou takové, abychom je jako vzorné mohli otisknout. Počkáme na další.

★ Poštovní novinová služba má ještě k dispozici několik výtisků Rozhledů (č. 5 a 6). Zájemci se mohou ihned o ně přihlásit u své místní Poštovní novinové služby.

★ H. M. Nový Jičín. Vaši poznámku k článku „Obecné pravidlo dělitelnosti pro dělitele...“ z č. 3 jsme zaslali autorovi.

★ S. Z. Velké Opatovice, JZD. Uveřejníme.

★ J. B. Milevsko, 9. tř. JŠŠ. Příkladně uveřejníme.

★ Na anonymní dotazy a dopisy redakce neodpovídá.

## SKONČIL ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

Více než 25 000 žáků středních a odborných škol z celé republiky se ve školním roce 1956/57 účastnilo celostátní matematické soutěže, která je známa pod názvem Matematická olympiada. Matematický ústav Československé akademie věd spolu s ministerstvem školství a kultury a Ústředním výborem ČSM vypisuje totiž každoročně v Matematické olympiadě řadu úloh pro žáky osmých až jedenáctých tříd středních škol, i pro žactvo škol odborných.

Úlohy tištěné na zvláštních letácích jsou žákům k dispozici u ředitelství školy. Letáky obsahují též podrobnější informace o organizaci soutěže a o termínech, v nichž mají být rozřešené úlohy odevzdávány. Úlohám z letáků říkáme úlohy prvního kola.

Úspěšní řešitelé prvního kola jsou pak pozváni k druhému kolu (okresnímu nebo krajskému), které má formu písemné práce. Tak v šestém ročníku naší soutěže se konalo ve všech krajských městech republiky druhé kolo pro žáky osmých tříd v neděli 7. dubna 1957, pro ostatní kategorie soutěže pak v neděli 14. dubna 1957.

Pro žáky jedenáctých tříd, kteří soutěží v nejvyšší kategorii Matematické olympiady, je ještě uspořádáno celostátní třetí kolo. V uplynulém školním roce se třetí kolo konalo v sobotu 25. května 1957 v Praze. Bylo k němu pozváno ze všech krajů republiky 80 studentů, kteří úspěšně obstáli v druhém kole. Sobotní dopoledne bylo věnováno vlastní soutěži, při čemž soutěžící měli za úkol rozřešit čtyři příklady. Odpoledne se pak konala ve velké posluchárně fyzikálního ústavu Karlovy university beseda s olympioniky za účasti široké školské veřejnosti.

Na besedě, kterou řídil předseda Ústředního výboru Matematické olympiady akademik J. Novák, promluvili k naší mládeži akademik E. Čech, prof. Dr. Fr. Kadeřávek a doc. Dr. M. Kolibiar. Na sobotní večer připravili organizátoři soutěže účastníkům třetího kola společnou návštěvu divadla.

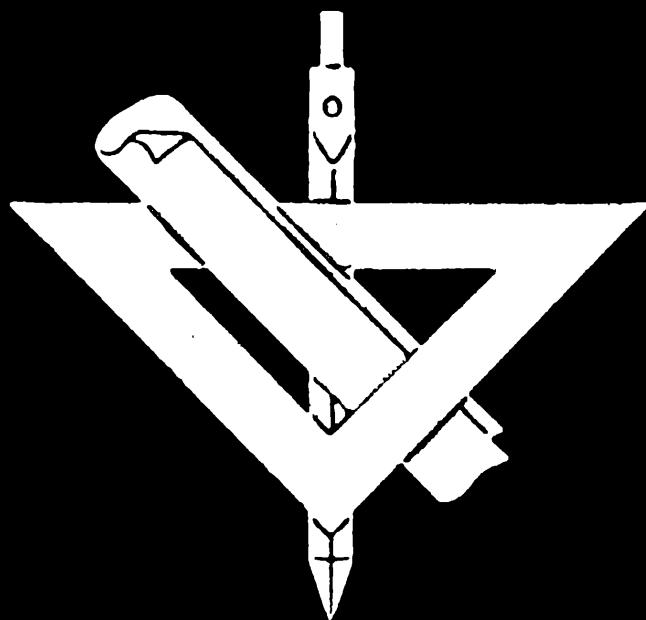
Vítězové šestého ročníku Matematické olympiady byli odměněni hodnotnými knižními a věcnými cenami i diplomy, které pro ně budou pěknou upomínkou na doby, kdy se po prvé začali vážněji zabývat matematikou.

*Jiří Sedláček*

*Žádáme ředitelství jedenáctiletých a odborných škol i učitele vyučující matematice, fyzice a deskriptivní geometrii, a to zvláště členy JČMF, aby ve smyslu loňského doporučení ministerstva školství a kultury provedli laskavě na počátku školního roku nábor předplatitelů Rozhledů matematicko-fyzikálních. Objednávky provádějte pouze prostřednictvím místní Poštovní novinové služby. Včasně provedenou objednávkou lze se vyvarovat nesnází v doručování jednotlivých čísel, neboť náklad bývá zcela rozebrán. Děkujeme za spolupráci.*

*Redakce.*





# ROZHLEDY

ročník 35



1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 8

Toto číslo vyšlo 20. října 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

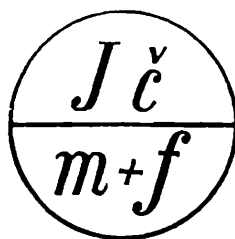
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSS, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠZ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

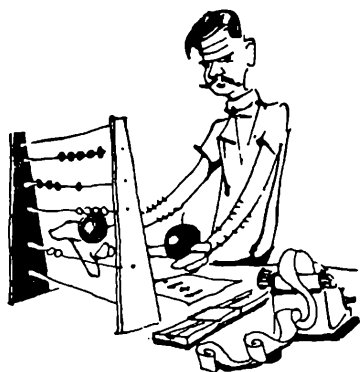
S. Horák: Trojúhelníková čísla . . . . .	337
Doc. J. Holubář: Řešení jedné planimetrické úlohy	341
A. Tondl: Pappovy úlohy . . . . .	347
O. Jeništa: O hodnotách goniometrických funkcí některých speciálních úhlů	350
Doc. O. Setzer: O několika symbolech užívaných v geometrii	352
L. Drs: Úlohy polohy v středové axonometrii	354
O. Lepil: Brownův pohyb . . . . .	360
Dr O. Litzman: Jaké jsou zákony pohybu elektronů (Pokračování)	364
V. Prosser: Co je to spektrální analýza (Dokončení)	367
J. Voleský: O využití sluneční energie	371
S. H.: Skládačka: . . . . .	375
L. Kosmák: Šedesátiny profesora Karla Koutského	375
R. Zelinka: Zemřel PhDr. Josef Honzák	376
Řešení úloh	376
Sdělení redakce	384
Příklady pro Matematickou olympiádu	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 13036

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hömig.



## Matematika

Stanislav Horák, Praha:

### Trojúhelníková čísla

Budiž dána posloupnost rekurentním vzorcem

$$t_n = t_{n-1} + n \quad (1)$$

a podmínkou

$$t_1 = 1 \quad (1a)$$

Dosadíme-li do rovnice (1) postupně za  $n$  čísla 1, 2, 3, 4, 5, dostaneme posloupnost

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots \quad (2)$$

Členy této posloupnosti se nazývají **trojúhelníková čísla** a posloupnost sama je **posloupnost trojúhelníkových čísel**.

Snažme se  $t_n$  vyjádřit jako funkci  $n$ . Ze vzorce (1) obdržíme

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + 2 \\ t_3 &= t_2 + 3 \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= t_{n-2} + (n-1) \\ t_n &= t_{n-1} + n \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovnic obdržíme (členy  $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$  se zruší)

$$t_n = t_1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Avšak  $t_1 = 1$  a proto

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1), \text{ což je žádaný vzorec.}$$

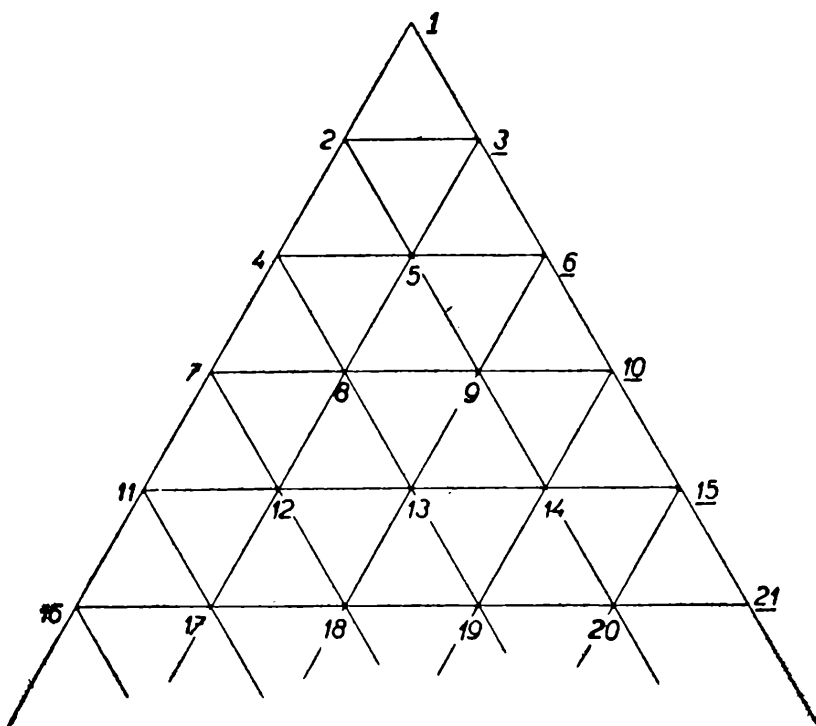
Dosadíme-li do tohoto vzorce po řadě za  $n$  čísla 1, 2, 3, ..., obdržíme posloup-

nost (2). O číslu  $t_n$  budeme říkat, že to je  $n$ -tý člen posloupnosti (2) nebo také, že to je trojúhelníkové číslo s indexem  $n$ .

A nyní si vysvětlíme jejich zvláštní pojmenování, v němž pojem čistě geometrický je spojen s pojmem aritmetickým. Budiž dán libovolný dutý úhel  $\alpha$ , který je vyplněn shodnými trojúhelníky. V obrázku 1 byl zvolen úhel velikosti  $60^\circ$  a trojúhelníky byly zvoleny rovnostranné. Vrchol úhlu označíme cifrou 1. Ostatní vrcholy trojúhelníků leží na přímkách mezi sebou rovnoběžných a ty očíslováme tak, jak je naznačeno v obrázku. Číslováme vždy od leva do prava. Cifry, označující vrcholy na rameni vpravo, nám udávají trojúhelníková čísla.

Trojúhelníková čísla mají řadu zajímavých vlastností, z nichž si některé uvedeme.

1. *Součet dvou trojúhelníkových čísel po sobě jdoucích, jejichž indexy jsou  $n, n + 1$ , je roven dvojmoci čísla  $n + 1$ .*



Obr. 1

D ů k a z. Mějme dána dvě trojúhelníková čísla  $t_n, t_{n+1}$ , která po sobě bezprostředně následují. Poněvadž

$$t_n = \frac{1}{2} n (n + 1) \quad \text{a} \quad t_{n+1} = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2),$$

máme

$$t_n + t_{n+1} = \frac{1}{2} (n^2 + n + n^2 + 3n + 2) = (n + 1)^2$$

Důsledkem této věty je, že dvojmoc každého přirozeného čísla  $n \geq 2$  můžeme napsat jako součet dvou trojúhelníkových čísel, jejichž indexy jsou  $n, n + 1$ .

2. *Součin dvou trojúhelníkových čísel s indexy  $n, n + 1$ , t. j. trojúhelníkových čísel, která po sobě bezprostředně následují, je roven polovině trojúhelníkového čísla s indexem  $n^2 + 2n$ .*

D ů k a z. Necht' jsou dána trojúhelníková čísla  $t_n, t_{n+1}$  a utvořme jejich součin

$$\begin{aligned} t_n \cdot t_{n+1} &= \frac{1}{2} n (n + 1) \cdot \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2) = \\ &= \frac{1}{4} n (n + 2) (n + 1)^2 = \frac{1}{4} (n^2 + 2n) (n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Položme nyní

$$n^2 + 2n = r.$$

Tím náš součin nabude tvaru:

$$t_n \cdot t_{n+1} = \frac{1}{4} r (r + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} r (r + 1) = \frac{1}{2} t_r.$$

3. Součin dvou trojúhelníkových čísel s indexy  $n, n - 1$  lze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel s indexy  $\frac{1}{2} (n^2 + n - 2), \frac{1}{2} (n^2 - n - 2)$ .

Důkaz se bude asi mnohému čtenáři zdát dlouhý, ale přesto bych radil čtenáři, aby si jej přečetl celý, neboť je v mnohém ohledu poučný.

Budtež dána dvě trojúhelníková čísla  $t_n, t_{n-1}$ . Jejich součin je

$$\begin{aligned} t_{n-1} \cdot t_n &= \frac{1}{4} (n - 1) n^2 (n + 1) = \frac{1}{4} (n^4 - n^2) = \\ &= \frac{1}{4} (n^4 + n^3 - n^2 - n^3 + n - n) = \\ &= \frac{1}{8} (2n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 2n^3 + 2n - 2n) = \\ &= \frac{1}{8} (n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n) + \frac{1}{8} (n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n) = \\ &= \frac{1}{8} [(n - 1) n (n + 1) (n + 2)] + \frac{1}{8} [(n - 2) (n - 1) n (n + 1)] = \\ &= \frac{1}{8} (n^2 + n) (n^2 + n - 2) + \frac{1}{8} (n^2 - n) (n^2 - n - 2) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 + n}{2} \cdot \left( \frac{n^2 + n}{2} - 1 \right) + \frac{n^2 - n}{2} \cdot \left( \frac{n^2 - n}{2} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

Položíme-li

$$\frac{n^2 + n}{2} = r, \quad \frac{n^2 - n}{2} = s,$$

obdržíme

$$t_{n-1} \cdot t_n = \frac{1}{2} r(r - 1) + \frac{1}{2} s(s - 1) = t_{r-1} + t_{s-1},$$

což jsme měli dokázat.

Během důkazu jsme přišli k rovnici

$$t_{n-1} \cdot t_n = \frac{1}{4} (n^4 - n^2)$$

Tento vedlejší výsledek můžeme vyjádřit větou: Výraz  $\frac{1}{4} (n^4 - n^2)$ , kde  $n$  je přirozené číslo  $\geq 2$ , můžeme vyjádřit jako součin dvou trojúhelníkových čísel s indexem  $n - 1, n$ .

4. Součet  $s_n$  prvních  $n$  trojúhelníkových čísel je dán vzorcem  $s_n = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 2)$ .

Důkaz. Vzorce pro  $t_n$  dejme tento tvar

$$t_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

a dosazujeme sem postupně  $n = 1, 2, \dots, n$ . Obdržíme

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\vdots$$

$$t_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$$

Sečteme-li všechny tyto rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} s_n &= t_1 + t_2 + \dots + t_n = \\ &= \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2} (1 + 2 + \dots + n) \end{aligned}$$

Avšak

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1),$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

a z toho po kratší úpravě

$$s_n = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 2)$$

Cvičení.

1. Vypočítejte index trojúhelníkových čísel: 36, 55, 5 050.

2. Součet  $s_n$  prvních  $n$  trojúhelníkových čísel je 35, 42, 1 540. Vypočítejte  $n$ . (Řešení této úlohy vede k rovnici  $n (n + 1) (n + 2) = 6 \cdot s_n$ . Pravou stranu této rovnice se snažte rozložit v součin tří přirozených čísel, která po sobě bezprostředně následují.)

3. Součet dvou trojúhelníkových čísel, která po sobě bezprostředně následují je 121 (256, 1 156, 5 625). Která jsou to čísla?
4. Součin dvou trojúhelníkových čísel, která po sobě bezprostředně následují je 150 (588, 1 620). Určete ta čísla!
5. Součet dvou trojúhelníkových čísel je 43 (73) a jejich součin je 420 (1 210). Která jsou to čísla?
6. Správnost vzorce pro  $t_n$  a  $s_n$  dokažte úplnou indukcí.

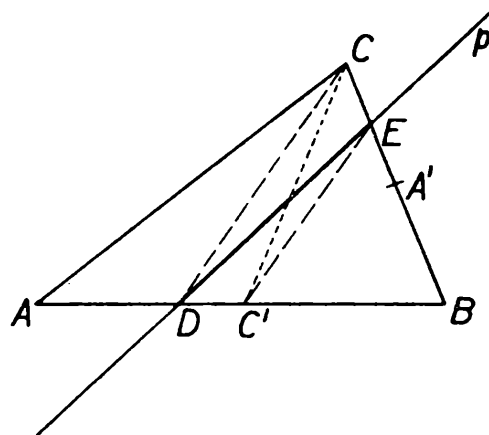
Doc. Josef Holubář, Praha:

## Řešení jedné planimetrické úlohy

Máme řešit úlohu: Je dán trojúhelník  $ABC$  a v jeho rovině bod  $K$ . Sestrojte přímku  $p$ , která prochází bodem  $K$  a rozděluje trojúhelník  $ABC$  na dvě části obsahem rovné.

Tato úloha se někdy provádí v zeměměřičtví: Trojúhelníkový pozemek rozdělit přímkou mezi jdoucí daným bodem ve dvě části o stejné výměře (t. j. na dvě části obsahem rovné). Red.

Řešení této úlohy je zcela jednoduché, jestliže bod  $K$  je dán na některé straně nebo těžnici trojúhelníka  $ABC$ , ale pro každou jinou polohu bodu  $K$  je řešení složitější. V tomto případě se dá úloha řešit pomocí jistých hyperbol a jejich tečen.



Obr. 1

### Řešení.

(1) R o z b o r. Jsou dvě možnosti: a) Hledaná přímka  $p$  prochází některým z vrcholů trojúhelníka  $ABC$ , na př. vrcholem  $C$ . Pak jedním řešením je zřejmě těžnice  $p \equiv CC'$  trojúhelníka  $ABC$  (bod  $C'$  je střed jeho strany  $AB$ ).

b) Přímka  $p$  neobsahuje žádný z vrcholů  $A, B, C$  trojúhelníka. Protože má přímka  $p$  rozdělit trojúhelník  $ABC$  na dvě části (a přitom neprochází žádným vrcholem), protíná<sup>1)</sup> stranu trojúhelníka  $ABC$ , na př. stranu  $BC$  v bodě  $E$  a podle P a s c h o v y v ě t y (viz Matematika pro I. třídu gymnasií, 1952, str. 118) protíná ještě jednu trojúhelníka  $ABC$  na př. stranu  $AB$  v bodě  $D$  (obr. 1).

Přitom žádný z bodů  $D, E$  zřejmě nesplývá se středem  $C'$  strany  $AB$ , nebo se středem  $A'$  strany  $BC$ . Podle požadavku úlohy o obsahích  $P$  vzniklých obrazců platí:

$$P(DBE) = P(ADEC) = \frac{1}{2} P(ABC)$$

<sup>1)</sup> Řčením „protíná stranu trojúhelníka“ budeme v dalším rozumět „obsahuje jediný vnitřní bod této strany“.

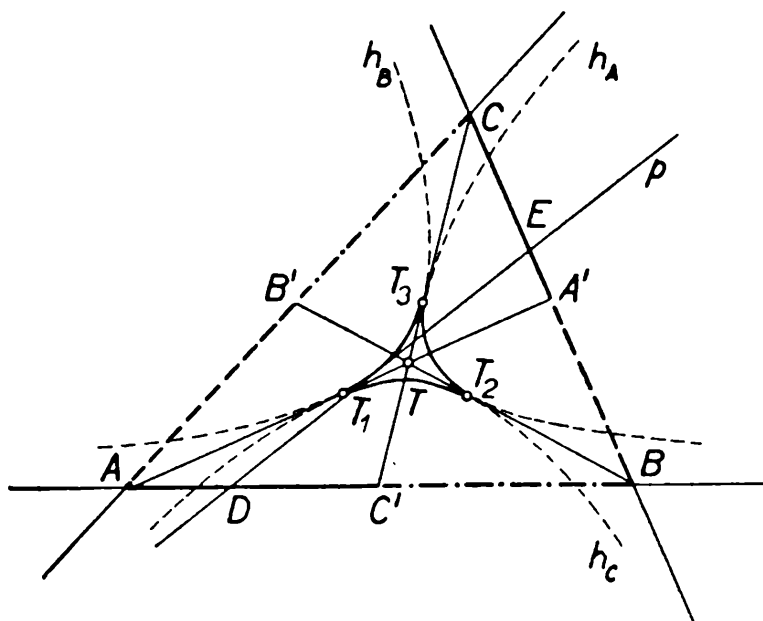
Přitom platí  $P(DBE) = \frac{1}{2} DB \cdot BE \cdot \sin \beta$ , kde  $\beta = \sphericalangle ABC$ .

Pro všechny přímky  $p$ , které vedou k řešení úlohy, pokud protínají strany  $AB$ ,  $BC$  v bodech  $D$ , resp.  $E$  platí tedy vztah

$$BD \cdot BE = \text{konst.} \quad (1)$$

neboť úhel  $\beta$  je všem trojúhelníkům  $DBE$  společný.

Víme, že platí v ě t a: Tečny hyperboly vytínají na jejích asymptotách úseky (měřené od středu hyperboly), jichž součin je konstantní<sup>2)</sup>. Tato věta platí také obráceně, takže uvažované přímky  $p$  jsou tečnami jedné větve hyperboly  $h_B$ , která má asymptoty v přímkách  $BA$ ,  $BC$  a střed v bodě  $B$ .



Obr. 2

Tečnami téže hyperboly  $h_B$  jsou i těžnice  $CC'$ ,  $AA'$  trojúhelníka  $ABC$ , neboť platí

$$P(BC'C) = P(BAA') = \frac{1}{2} P(ABC)$$

Je tedy hyperbola  $h_B$  určena kromě asymptot  $AB$ ,  $BC$  ještě tečnou  $CC'$  nebo tečnou  $AA'$ . Podle věty o poloze dotykového bodu na tečně hyperboly<sup>3)</sup>, dotýká se hyperbola  $h_B$  těžnice  $CC$ , v bodě  $T_3$ , který je středem úsečky  $CC'$  a těžnice  $AA'$  v bodě  $T_1$ , který pólí úsečku  $AA'$  (obr. 2).

Z významu hyperboly  $h_B$  pro uvažované přímky  $p$ , které řeší naši úlohu a přitom protínají strany  $AB$ ,  $BC$ , je patrné, že podobný význam pro přímky  $p$ , které však

<sup>2)</sup> Viz č. 7 Rozhledů, str. 298–304.

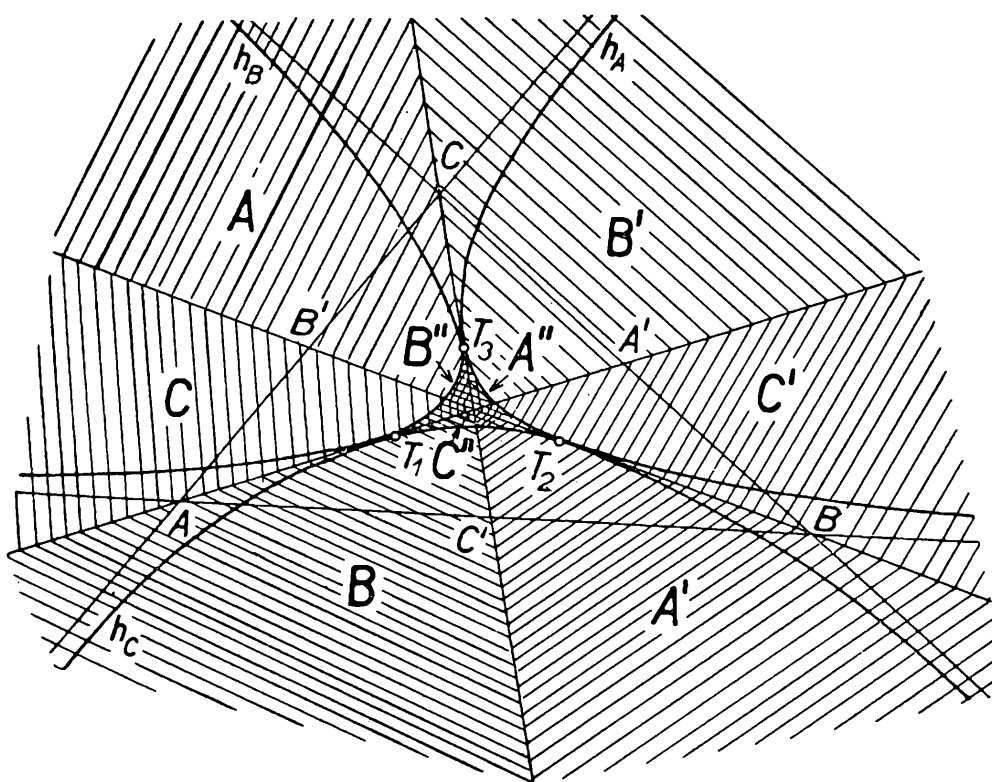
<sup>3)</sup> Dotykový bod pólí úsek tečny vyřatý na tečně oběma asymptotami (viz č. 7 Rozhledů, str. 301).





Probíhá-li bod  $D$  úsečku  $AC'$  (včetně krajních bodů  $A, C'$ ), pak příslušná přímka  $p$  protíná stranu  $BC$  v příslušných bodech  $E, \dots$ , které probíhají úsečku  $A'C$  (včetně krajních bodů  $A', C$ ). Přiřazení bodů úseček  $AC', A'C$  je znázorněno na obr. 2 tučným vyrýsováním těchto úseček.

Souhrn všech přímek  $p \equiv DE$  v uvažované poloze značme  $p_B$ . Přímky  $p_B$  se dotýkají hyperboly  $h_B$  v bodech jejího oblouku  $\widehat{T_1T_3}$ , přecházejíce z jedné krajní polohy  $AT_1A'$  do druhé krajní polohy  $C'T_3C$  a body dotyku tečen  $p_B$  proběhnou právě oblouk  $\widehat{T_1T_3}$ . Všechny body  $K$ , ležící na přímkách  $p_B$  (označíme je  $K_B$ ), náležejí buď úhlu  $\sphericalangle T_1TC'$  (náležejí oblasti **B**), nebo úhlu  $\sphericalangle T_3TA'$  (oblasti **B'**) a nebo konečně patří oblasti **B''**, která je ohraničena obloukem  $\widehat{T_1T_3}$  hyperboly  $h_B$  a úsečkami  $T_1T, T_3T$ . Oblasti **B, B'** jsou znázorněny na obr. 3 jednoduchým šrafováním a oblast **B''** dvojitým šrafováním.



Obr. 4

Obráceně pak platí: Každým bodem  $K_B$ , který náleží oblasti **B** nebo **B'**, je možno k hyperbole  $h_B$  vést jedinou tečnu  $p_B$ , která se  $h_B$  dotýká v bodě oblouku  $\widehat{T_1T_3}$ . Každým bodem oblasti **B''** je však možno vést dvě tečny  $p_B$ , které se  $h_B$  dotýkají v bodech oblouku  $\widehat{T_1T_3}$ . Tuto vlastnost oblastí **B, B'** a **B''**, která je názorně patrna na obr. 4, zde nebudeme dokazovat.

Uvažujeme-li další dvojici těžnic  $BTB', A'TA$ , dospějeme obdobně k úsečkám  $BA', B'A$ , které na obr. 2 jsou vyrýsovány tučně čárkovaně. Každému bodu úsečky  $BA'$  je opět přiřazen jediný bod úsečky  $B'A$  a obráceně. Každá dvojice přiřazených bodů určuje opět jednu přímku  $p_C$ , která je tečnou oblouku  $\widehat{T_2T_1}$

příslušné hyperboly  $h_C$ . Hyperbola  $h_C$  má střed v bodě  $C$  a za asymptoty strany  $BC$ ,  $CA$  trojúhelníka  $ABC$ . Body  $K_C$  přímek  $p_C$  vyplní oblasti  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}'$  a  $\mathbf{C}''$ , obdobně dříve popsáním oblastem  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$  a  $\mathbf{B}''$  s obdobnými vlastnostmi.

Konečně ze třetí dvojice těžnic  $CTC'$ ,  $B'TB$  dospějeme k úsečkám  $CB'$ ,  $C'B$  (na obr. 2 jsou vyrýsovány tučně čerchovaně), dále k přímkám  $p_A$ , tečnám příslušné hyperboly  $h_A$  v bodech jejího oblouku  $\widehat{T_3T_2}$  a nakonec k oblastem  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$  a  $\mathbf{A}''$  s vlastnostmi obdobnými vlastnostem oblastí  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$  a  $\mathbf{B}''$ .

Oblasti  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}'$  pokrývají celou rovinu (viz obr. 4) a přitom se žádné dvě nepřekrývají, každá z nich však pokrývá část některé z oblastí  $\mathbf{B}''$ ,  $\mathbf{C}''$ ,  $\mathbf{A}''$  a to tak, že celé tyto oblasti jsou ve svých částech překryty vždy částí jediné z oblastí  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}'$ , jak je šrafováním znázorněno na obr. 4.

Celkem tedy platí:

a) Každým bodem  $K$  daným v rovině trojúhelníka  $ABC$ , pokud nenáleží oblastem  $\mathbf{A}''$ ,  $\mathbf{B}''$ ,  $\mathbf{C}''$  ani jejich hranicím, lze vést j e d i n o u přímku  $p$ , která je tečnou jednoho z oblouků  $\widehat{T_1T_2}$ ,  $\widehat{T_2T_3}$ ,  $\widehat{T_3T_1}$  hyperboly  $h_C$ , resp.  $h_A$ , resp.  $h_B$  podle toho, náleží-li přímka  $p$  mezi přímky  $p_C$ , resp.  $p_A$ , resp.  $p_B$ . Také body  $K$ , které splývají s body  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , prochází vždy jediná přímka  $p$ , a to těžnice  $AT_1A'$ , resp.  $BT_2B'$ , resp.  $CT_3C'$ . Každá z nich se dotýká dvou uvažovaných hyperbolických oblouků v jejich společném bodě dotyku.

b) Každým bodem  $K$ , který je dán uvnitř oblastí  $\mathbf{A}''$ ,  $\mathbf{B}''$ ,  $\mathbf{C}''$ , lze vést právě t ř í různé přímky  $p$ . Dvě z těchto přímek  $p$ , leží-li na př. bod  $K$  uvnitř oblasti  $\mathbf{A}''$ , jsou tečny oblouku  $\widehat{T_2T_3}$  hyperboly  $h_A$ ; třetí přímka  $p$  je buď tečna oblouku  $\widehat{T_3T_1}$  hyperboly  $h_B$ , nebo tečna oblouku  $\widehat{T_1T_2}$  hyperboly  $h_C$  podle toho, náleží-li daný bod  $K$  současně oblasti  $\mathbf{B}'$  a nebo oblasti  $\mathbf{C}'$ . Obdobně je tomu pro bod  $K$  daný uvnitř oblasti  $\mathbf{B}''$  nebo  $\mathbf{C}''$ .

Také každým bodem  $K$ , který je dán uvnitř úseček  $TT_1$  nebo  $TT_2$  anebo  $TT_3$ , lze vést právě tři přímky  $p$ . Leží-li na př. bod uvnitř úsečky  $TT_1$ , pak jednou přímkou  $p$  je těžnice  $AT_1A'$ , druhou tečna oblouku  $\widehat{T_1T_3}$  a třetí tečna oblouku  $\widehat{T_1T_2}$ . Rovněž těžištěm  $T$  trojúhelníka  $ABC$  lze vést tři přímky  $p$ , t. j. všechny tři těžnice trojúhelníka  $ABC$ .

c) Každým bodem  $K$ , který je dán uvnitř některého z oblouků  $\widehat{T_1T_2}$ ,  $\widehat{T_2T_3}$ ,  $\widehat{T_3T_1}$ , lze vést právě d v ě přímky  $p$ ; jednou z nich je tečna sestavená v daném bodě  $K$  k oblouku, na kterém bod  $K$  leží, a druhou je tečna k jednomu z dalších dvou oblouků podle toho, v které oblasti ze šesti oblastí  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}'$  bod  $K$  současně leží. Tím je rozhodnuto o konstrukci i počtu přímek  $p$ , ať je daný bod  $K$  kterýmkoliv bodem roviny trojúhelníka  $ABC$ .

(3) *Konstrukce.* Rozeznávejme dva případy: a) Leží-li bod  $K$  na některé straně trojúhelníka  $ABC$ , pak provedeme konstrukci podle poznámky <sup>4)</sup>.

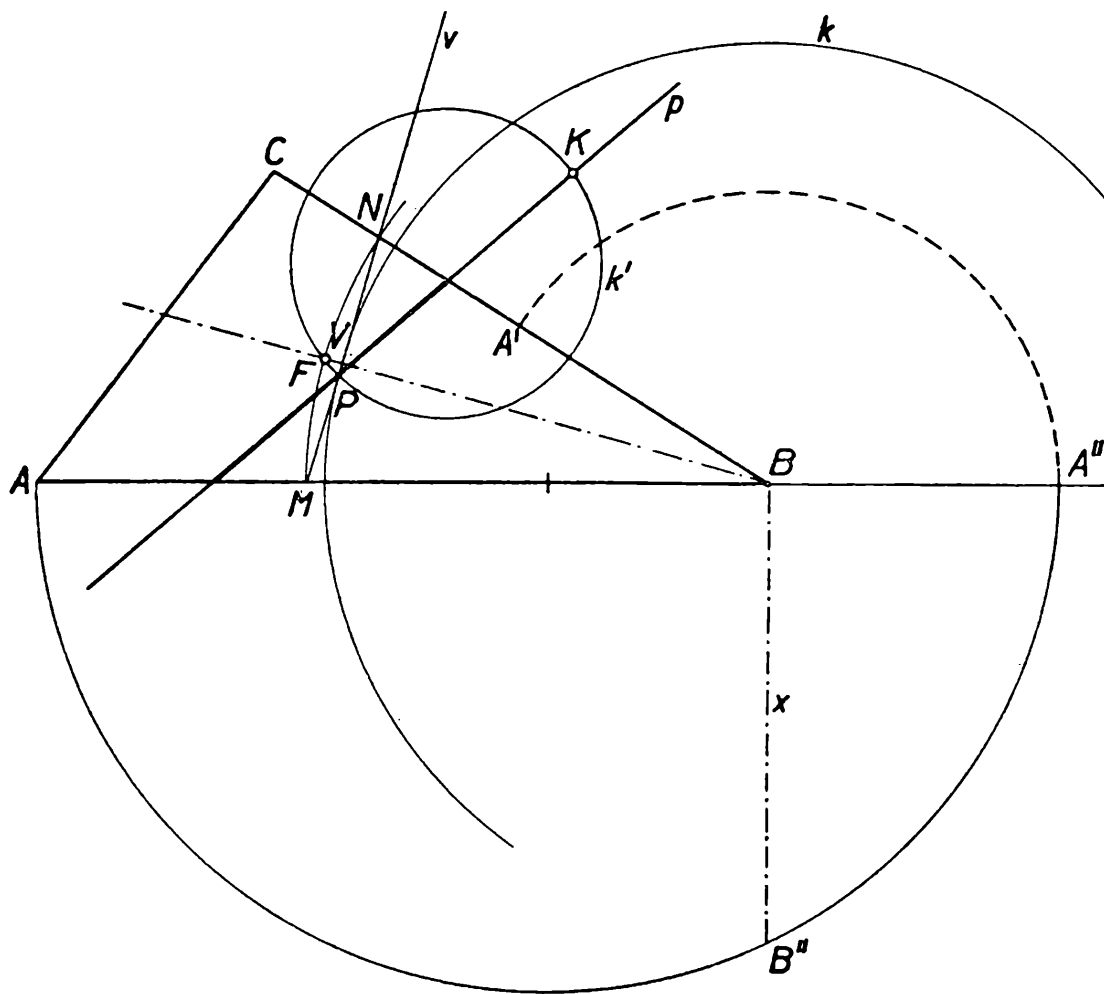
b) Necht' daný bod  $K$  neleží na žádné straně daného trojúhelníka  $ABC$ . Provedme konstrukci na př. pro bod  $K$ , který leží uvnitř oblasti  $\mathbf{B}'$ , takže hledaná přímka  $p$  je tečnou právě větve hyperboly  $h_B$  a dotýká se jejího oblouku  $\widehat{T_1T_3}$  v jeho

vnitřním bodě. Jak už víme, má hyperbola  $h_B$  asymptoty v přímkách  $AB, BC$ , tedy střed v bodě  $B$  a dotýká se přímky  $AA'$ , resp.  $CC'$ . Sestrojíme (obr. 5) vrcholovou tečnu  $v$  hyperboly  $h_B$  podle věty, která platí o úsecích vyřezaných tečnami na asymptotách a které jsme použili už v rozboru.

Buď  $x$  velikost úseků  $BM = BN$ , které vytíná tečna  $v$  na asymptotách  $AB, BC$ ; pak podle (1) platí

$$x^2 = BA \cdot BA' = BC \cdot CC'.$$

Přitom je  $x$  rovno lineární výstřednosti hyperboly  $h_B$ . Úsečku velikosti  $x$  sestroj-



Obr. 5

jíme podle věty Eukleidovy: Naneseme  $BA'' = BA'$  na prodloužení úsečky  $AB$  za bod  $B$ , sestrojíme kružnici nad průměrem  $AA''$  a pak úsečka  $BB'' = x$ . Přeneseme tedy úsečku  $BB''$  na polopřímku  $BA$  a na polopřímku  $BC$  a dostaneme body  $M$  na  $BA$ ,  $N$  na  $BC$ ; přímka  $MN \equiv v$  je vrcholová tečna. Osa úhlu  $\sphericalangle ABC'$  je hlavní osa hyperboly  $h_B$  a  $V$  její vrchol. Sestrojíme ještě ohnisko  $F$  hyperboly  $h_B$  tak, že naneseme  $BF = x$ .

Nyní už můžeme sestavit tečnu  $p$  hyperboly  $h_B$ , která prochází daným bodem  $K$  známou konstrukcí. Sestrojíme kružnici  $k$  ( $BV, B$ ) a kružnici  $k'$  nad průměrem

$KF$ ; jeden z průsečíků kružnic  $k, k'$ , bod  $P$ , je patou kolmice vedené ohniskem  $F$  na tečnu  $p$ , takže  $p \equiv KP$  je hledaná přímka, která dává řešení úlohy.

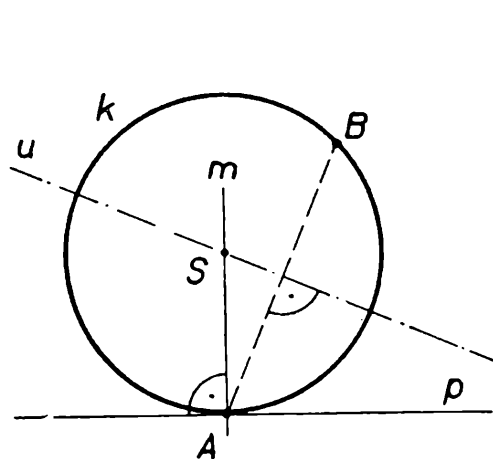
(4) **D ů k a z k o n s t r u k c e** v případě a) viz v poznámce 4). Důkaz konstrukce v případě b) vyplývá z rozboru a ze známých vlastností hyperboly a jejích tečen.<sup>5)</sup>

Podobně se dospěje k hledaným přímкам  $p$ , je-li dán bod  $K$  uvnitř některé z oblastí  $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{C}'$ , resp. v oblastech  $\mathbf{A}'', \mathbf{B}'', \mathbf{C}''$ ; sestrojíme vždy tečny příslušných oblouků hyperboly  $h_A$ , nebo  $h_B$  anebo  $h_C$ , které procházejí bodem  $K$ .

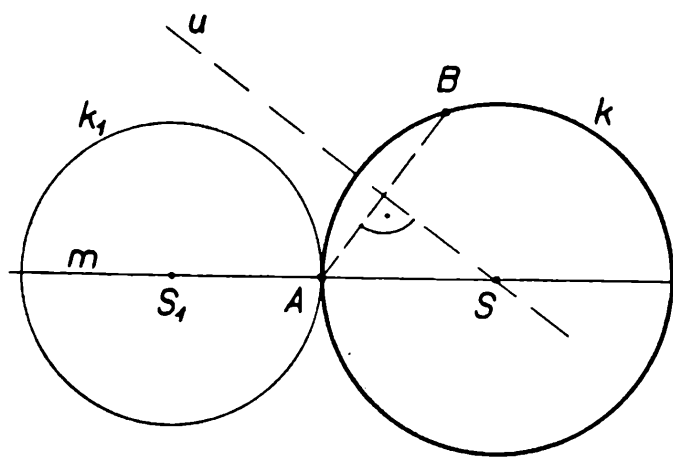
A l e š T o n d l, České Budějovice:

## Pappovy úlohy

Slavná A p o l l o n i o v a ú l o h a<sup>1)</sup>, totiž sestrojení kružnice, která se dotýká tří daných kružnic, má mnoho obměn, když na příklad některá z daných kružnic se redukuje na bod (kružnice o poloměru rovném nule) nebo přejde v přímku



Obr. 1



Obr. 2

(vzrůstá-li poloměr nade všechny meze). Šest takových zvláštních případů, známých pod jménem úlohy Pappovy<sup>2)</sup>, probereme si v tomto článku. (Red.)

1. Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází bodem  $B$  a dotýká se přímky  $p$  v bodě  $A$  (obr. 1).

Řešení provedeme pomocí množin bodů dané vlastnosti. Množinou  $M_1$  středů kružnic, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $A$  je přímka  $m$  kolmá k přímce  $p$  v bodě  $A$ . Množinou  $M_2$  středů kružnic, které procházejí dvěma body  $A, B$  je osa  $u$  úsečky  $AB$ . Průsečík těchto přímek ( $m$  a  $u$ ) je bod  $S$ , který je středem hledané kružnice  $k$ . Kružnice, která má střed v bodě  $S$  a poloměr  $SA$ , dotýká se přímky  $p$  v bodě  $A$ , neboť  $S$  je prvkem množiny  $M_1$ . Protože  $S$  je prvkem také množiny  $M_2$  platí

<sup>5)</sup> Jednotlivé konstrukce tečen hyperboly, kterých jsme zde použili, viz též na př. v učebnici Deskriptivní geometrie pro 9. postupný ročník, 1956, str. 54–56.

<sup>1)</sup> Apollonius z Pergy - řecký matematik, působil v Alexandrii ve 3. století před n. l.

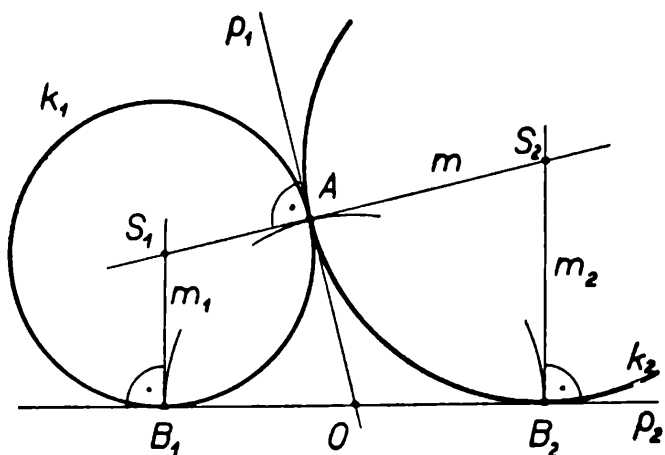
<sup>2)</sup> Pappus - řecký matematik - žil ve 4. století n. l.

$SA = SB$ . Tím je proveden rozbor konstrukce a její důkaz. Přímky  $m$  a  $u$  jsou buď různoběžné a protínají se právě v bodě  $S$  nebo jsou rovnoběžné. V druhém případě úsečka  $AB$  leží v přímce  $p$  (viz Geometrie pro 7. třídu) a úloha nemá význam, protože nelze sestrojiti kružnici, aby jedna přímka byla k ní současně tečnou i sečnou.

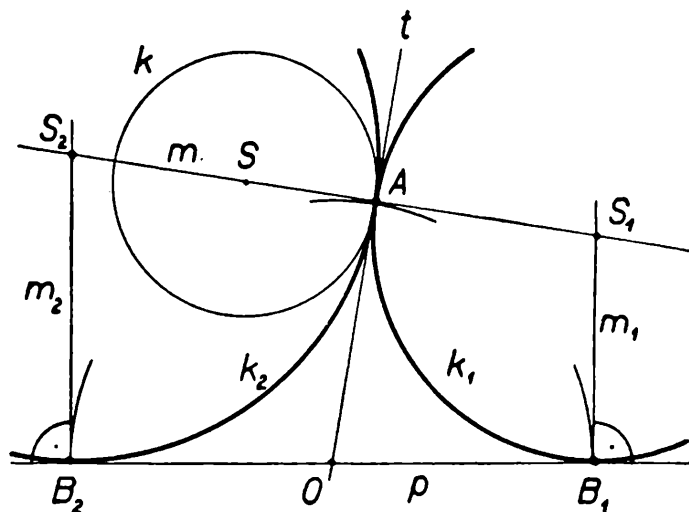
2. Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází bodem  $B$  a dotýká se kružnice  $k_1$  v bodě  $A$  (obr. 2).

**Ř e š e n í:** Množinou středů kružnic, které se dotýkají kružnice  $k_1$  v bodě  $A$  je přímka  $m$ , procházející středem  $S_1$  kružnice  $k_1$  a bodem  $A$ . Množinou středů kružnic, které procházejí body  $AB$ , je osa  $u$  úsečky  $AB$ . Průsečík přímek  $m$  a  $u$  je bod  $S$ , který je středem hledané kružnice  $k$ . Protože přímky  $m$  a  $u$  jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné, má úloha buď jedno nebo žádné řešení. V druhém případě je úsečka  $AB$  kolmá k přímce  $m$ .

3. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímky  $p_1$  v bodě  $A$  a přímky  $p_2$  ( $p_1 \neq p_2$ ); obr. 3.



Obr. 3



Obr. 4

Rozbor: Předpokládejme, že jsme úlohu již rozřešili a sestrojili kružnici  $k_1$  o středu  $S_1$ , jež řeší naši úlohu. Přímky  $p_1$  a  $p_2$  jsou potom tečnami této kružnice. Tečna  $p_1$  se dotýká kružnice  $k_1$  v bodě  $A$  a tečna  $p_2$  se dotýká kružnice  $k_1$  v nějakém bodě  $B_1$ . Označme průsečík tečen  $p_1$  a  $p_2$  písmenem  $O$ ; musí tedy platit  $OA = OB_1$ . Střed  $S_1$  kružnice  $k_1$  je potom průsečíkem přímek  $m$  a  $m_1$ , které procházejí body  $A$  a  $B_1$  a jsou kolmé k tečnám  $p_1$  a  $p_2$ . Úsečku  $OA$  můžeme na tečnu  $p_2$  od bodu  $O$  nanést dvěma způsoby. Tím získáme body  $B_1$  a  $B_2$ . Existují tedy dvě kružnice  $k_1$  a  $k_2$ , které se dotýkají přímky  $p_1$  v bodě  $A$  a přímky  $p_2$  buď v bodě  $B_1$  nebo v bodě  $B_2$ . Středem  $S_2$  kružnice  $k_2$  je opět průsečík přímek  $m$  a  $m_2$ . Přímka  $m_2$  prochází bodem  $B_2$  kolmo k přímce  $p_2$ .

V případě, že tečny  $p_1$  a  $p_2$  se neprotínají v bodě  $O$  a jsou rovnoběžné, má úloha jen jediné řešení. Kolmice  $m$ , vedená bodem  $A$  k tečně  $p_1$  prochází středem  $S$  kružnice  $k$  a průsečík přímky  $m$  s tečnou  $p_2$  je dotykovým bodem  $B$  tečny  $p_2$  s kružnicí  $k$ . Střed  $S$  kružnice  $k$  je potom středem úsečky  $AB$ .

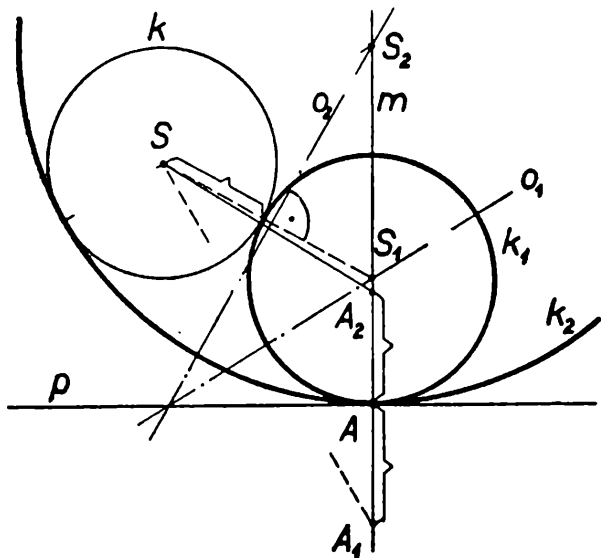
4. Sestrojte kružnici, dotýkající se kružnice  $k$  v bodě  $A$  a přímky  $p$ , přičemž přímka  $p$  neprochází bodem  $A$  (obr. 4).

Rozbor: Předpokládejme, že jsme sestrojili hledanou kružnici  $k_1$  o středu  $S_1$ . Přímka  $p$  jest pak tečnou k této kružnici. Kružnice  $k$  a  $k_1$  se dotýkají v bodě  $A$  a můžeme sestrojit jejich společnou tečnu  $t$ , která prochází bodem  $A$  a je kolmá k přímce  $SA \equiv m$ . Úloha je tedy převedena na předcházející.

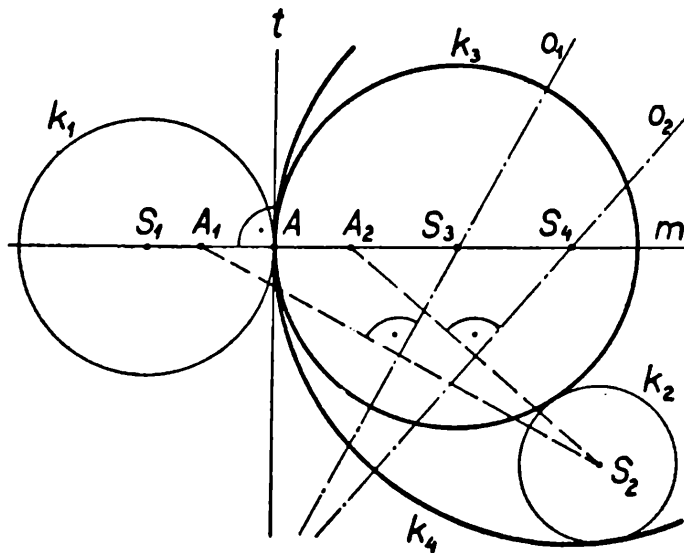
Jestliže přímka  $p$  je nesečnou kružnice  $k$ , má kružnice  $k$  s oběma kružnicemi, které jsou řešením, vnější dotyk. Je-li přímka  $p$  sečnou, potom kružnice  $k$  má s jednou kružnicí vnější a s druhou vnitřní dotyk.

5. Sestrojte kružnici, dotýkající se přímky  $p$  v bodě  $A$  a kružnice  $k$  (obr. 5).

Rozbor: Označme střed kružnice  $k$  písmenem  $S$ . Předpokládejme, že jsme sestrojili kružnici  $k_1$  se středem  $S_1$ , jež vyhovuje dané úloze. Střed  $S_1$  této kružnice leží na kolmici  $m$  vedené bodem  $A$  k přímce  $p$ . Sestrojme na této kolmici úsečku  $AA_1$  rovnou poloměru kružnice  $k$ .



Obr. 5



Obr. 6

Potom platí  $SS_1 = S_1A_1$ ; trojúhelník  $SS_1A_1$  je tedy rovnoramenný. Toho použijeme při konstrukci. Na kolmici  $m$  sestrojíme od bodu  $A$  na obě strany úsečky  $AA_1 = AA_2$ , rovné poloměru dané kružnice  $k$ . Střed kružnice  $S_1$  sestrojíme jako vrchol rovnoramenného trojúhelníka, známe-li základnu  $SA_1$  a směr ramene  $m$ . Střed  $S_1$  leží v průsečíku osy  $o_1$  úsečky  $SA_1$  s přímkou  $m$ . Obdobně střed  $S_2$  leží v průsečíku osy  $o_2$  úsečky  $SA_2$  s přímkou  $m$ .

Úloha má dvě řešení. V případě, že přímka  $p$  je tečnou kružnice  $k$  (bod  $A$  není bodem dotyku), existuje jedno řešení. Jestliže bod  $A$  je dotykovým bodem, existuje nekonečně mnoho řešení. Je-li bod  $A$  jedním z průsečíků přímky  $p$  s kružnicí  $k$ , úloha nemá řešení.

6. Sestrojte kružnici dotýkající se kružnice  $k_1$  v bodě  $A$  a další kružnice  $k_2$  (obr. 6).

Rozbor: Označme středy kružnic  $k_1$  a  $k_2$  písmeny  $S_1$  a  $S_2$ . Předpokládejme, že jsme našli kružnici  $k_3$  se středem  $S_3$ , která vyhovuje úloze. Střed  $S_3$  musí

ležet na přímce  $m$ , určené body  $S_1A$ . Přímka  $t$ , procházející bodem  $A$  kolmo k přímce  $m$  je společnou tečnou kružnic  $k_1$  a  $k_3$ . Kružnice které se dotýkají tečny  $t$  v bodě  $A$  a kružnice  $k_2$  řeší zároveň tuto úlohu. Tím je úloha převedena na předchozí. Úloha má dvě řešení.

Jestliže některá ze společných tečen kružnic  $k_1$  a  $k_2$  je totožná s tečnou  $t$ , má úloha jen jedno řešení. V případě, že se kružnice  $k_1$  a  $k_2$  dotýkají v bodě  $A$ , existuje nekonečně mnoho řešení. Pakli se kružnice  $k_1$  a  $k_2$  protínají v bodě  $A$ , není řešení žádné.

Oldřich Jeništa, Praha:

## O hodnotách goniometrických funkcí některých speciálních úhlů

Je známo, že bylo na světě již dosti jedinců, kteří se mohli pochlubit tím, že znali Ludolfovo číslo třeba na několik desítek desetinných míst. Tím dokázali, že mají obzvláštní paměť na čísla, ale praktický význam to nemělo. Mnohem méně slyšíme, že někdo zná nazpaměť dekadické logaritmy na př. čísel od 1 do 100, ačkoliv je samozřejmé, že při častém počítání s logaritmy vstoupí se nám v paměť aspoň nejčastěji se vyskytující mantisy. Zapamatuje-li si někdo, že  $\log 2 = 0,30103\dots$ , pak snadno a bez tabulek může říci, čemu se rovná  $\log 4$ ,  $\log 8$ ,  $\log 16$  atd., uvědomí-li si, že jde vlastně o logaritmy mocnin čísla 2, že tedy vlastně jde o hodnoty  $2\log 2$ ,  $3\log 2$ ,  $4\log 2$ , atd. Pak může hned z paměti říkat, že  $\log 4 = 0,60206\dots$ ,  $\log 8 = 0,90309\dots$ ,  $\log 16 = 1,20412\dots$ ,  $\log 32 = 1,50515\dots$  atd.

V trigonometrii, kde pracujeme s goniometrickými funkcemi, bylo by jistě neúnosné, abychom požadovali od počtáře, aby znal nazpaměť třeba goniometrické hodnoty celých úhlů od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , i když nepopíratelně bylo by pro něho jen výhodné, kdyby znal hodnoty funkcí alespoň těch speciálních úhlů, které se velmi často vyskytují vůbec, nebo v pracovním oboru dotčeného počtáře. Takové speciální úhly, kde do určité míry lze požadovat hodnoty goniometrických funkcí z paměti, jsou úhly  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  a  $90^\circ$ . Se šetrným úsměvem by každý sledoval absolventa jedenáctiletky nebo průmyslové školy, kdyby v příslušných tabulkách pečlivě a pozorně hledal na př.  $\sin 30^\circ$ . Hodnoty těchto speciálních úhlů mohou maturanti již znát, nebo v nejhorším případě mají je umět odvodit planimetricky bez hledání v tabulkách. Někdy se však ty různé věty starověkých geometrů pletou nebo zapomínají a je těžké si pak odvozovat některé hodnoty goniometrických funkcí. Pro ty čtenáře, kteří si nemohou zapamatovat těch několik zvláštních hodnot a ani je nedokáží odvodit geometricky, máme snadný návod, m n e m o t e c h n i c k o u<sup>1)</sup> p o m ů c k u.

Přiřadíme-li totiž ke každému z úhlů  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  a  $90^\circ$  v tomto vzestupném pořádku (sledu) čísla 0, 1, 2, 3 a 4 jako jejich pořadí, dostaneme tuto tabulku, kterou si nemusíme nikdy psát, ale kterou si velmi snadno zapamatujeme:

<sup>1)</sup> Mnemotechnika je umění pomáhati paměti k pohotovosti.



Úhel:	0°	30°	45°	60°	90°	$\alpha$
Pořadí:	0	1	2	3	4	$p$

Obecně úhel označme  $\alpha$  a příslušné k němu pořadí  $p$ .

Když jsme si zapamatovali hořejší tabulku, zapamatujme si ještě tento jednoduchý vzorec:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{p} \quad (1)$$

Tento vzorec nám říká, že sinus některého z uvedených úhlů v tabulce se rovná polovině odmocniny z pořadí (číslo, které pořadí udává) tohoto úhlu ve zmíněném sledu.

Tabulku i vzorec si velmi snadno zapamatujeme. Známe-li pořadí a vzorec, snadno si již vypočteme sinus kteréhokoliv z uvedených úhlů. Tak na př.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1 \text{ atd.}$$

Známe-li tuto mnemotechnickou pomůcku, nemusíme se lekat ani úhlů, které jsou větší než  $90^\circ$ , jde-li ovšem o takové úhly, které vzniknou z uvedených již úhlů přičtením  $90^\circ$  nebo násobků  $90^\circ$ . Musíme si jen uvědomit, v kterém kvadrantu je daný úhel, jaké znaménko má tedy jeho sinus a mimo to, sinu kterého úhlu v prvním kvadrantu se sinus hledaného úhlu svou velikostí rovná. Tak na př.

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{1} = -\frac{1}{2} \text{ a pod}$$

Víme, že při různých úlohách z trigonometrie pracujeme též s ostatními goniometrickými funkcemi. I pro tyto funkce lze vytvořit podobné mnemotechnické pomůcky:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{4-p}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{p}{4-p}}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{\frac{4-p}{p}},$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{2}{\sqrt{4-p}}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}$$

Není však třeba pamatovat si žádný z těchto vzorců, vždyť je nám známo, že  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , dále že  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  a že  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Když toto víme, pak skutečně vystačíme pro všechny goniometrické funkce s vzorcem (1) a to i pro speciální úhly, které přesahují obor úhlů prvního kvadrantu.

Ostatně ukažme si to na příkladu:

Napišme hodnoty všech goniometrických funkcí úhlu  $30^\circ$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

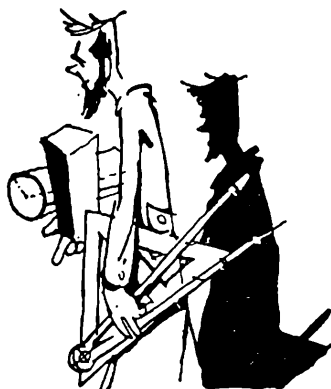
Ježto secans je převrácenou hodnotou cosinu a cosecans sinu, dostaneme:

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

Podobně bychom vyčíslili goniometrické funkce na př. úhlu  $300^\circ$ .

Z příkladu je tedy patrné, že uvedená mnemotechnická pomůcka má široké pole použití. Škoda, že její použití je omezeno jen na úhly speciální. Jaké by to bylo požehnání pro ubohého studentíka, kdyby uměl a mohl jejím použitím - a hlavně bez tabulek - určit ve chvílce na př.  $\operatorname{cotg} 328^\circ 17' 49''$ .



## *Deskriptivní geometrie*

Doc. Ota Setzer, Kralupy n. Vlt.:

### **O několika symbolech užívaných v geometrii**

Aby vyjadřování bylo co nejstručnější, užívá se v geometrii často různých symbolů (znaků). Tím dosáhneme toho, že místo dlouhých souvětí zapíšeme danou poučku, větu, důkaz, často jen několika málo znaky. Je třeba, aby si i mladší čtenáři zvykali na tento stenografický způsob záznamu geometrických vět.

Jako příklad uvedu zde znaky, používané v článku Lad. Drse „Úlohy polohy v středové axonometrii“ (str. 354).

**M n o ž i n o u b o d ů** (geometrickým místem bodů) rozumíme souhrn všech bodů, které mají určitou vlastnost. Body mající uvedenou vlastnost, jsou p r v k y (elementy) dané množiny. Kromě bodů naší množiny žádný jiný bod nemá uvedenou vlastnost.

Na př. kulová plocha  $K$  o středu  $S$  a poloměru  $r$  je množina bodů, které mají od středu  $S$  vzdálenost  $r$ . Chceme-li vyjádřit, že bod  $A$  má od středu  $S$  vzdálenost  $r$ , zapíšeme to:  $A \in K$  a čteme: bod  $A$  je prvkem množiny  $K$  nebo též bod  $A$  leží na ploše  $K$ . Obdobný význam má symbol  $K \ni A$ , množina  $K$  obsahuje prvek  $A$ .

Jestliže bod  $B$  má od středu  $S$  vzdálenost  $\leq r$  (a tudíž neleží na kulové ploše), píšeme:  $B \notin K$  ( $B$  není elementem množiny  $K$ ); tutěž podmínku můžeme také zapsat:  $K \not\ni B$  a číst: množina  $K$  neobsahuje prvek  $B$ .

Mysleme si, že na kulové ploše  $K$  leží kružnice  $k$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  ( $O < \rho \leq r$ ). Tato kružnice tvoří opět množinu bodů, kterou označíme  $k$ . Je zřejmé, že každý prvek množiny  $k$  je prvkem množiny  $K$ ; neplatí však opak, neboť na kulové ploše existují body, které neleží na kružnici  $k$ . Množinu  $k$  nazýváme p o d m n o ž i n o u nebo též č á s t í m n o ž i n y  $K$ . Příslušný zápis je:  $k \subset K$  nebo  $K \supset k$

Uvedenými dvěma znaky lze vyjádřit i i n c i d e n c i bodů, čar nebo ploch.

Rčení „bod leží na křivce“, „křivka prochází bodem“ vyjadřují tutěž geometrickou skutečnost. Slovní vyjádření je různé, protože v prvním případě jsme kladli důraz na bod, v druhém na křivku. Obě rčení lze shrnout v jediné „bod a křivka j s o u i n c i d e n t n í“. V stejném smyslu lze používat pojmu incidence i pro bod a plochu, nebo pro křivku a plochu.

Budiž  $B$  daný bod,  $p$  daná přímka,  $\sigma$  daná rovina. Incidenci bodu  $B$  a přímky  $p$  zapíšeme:  $B \in p$ , incidenci přímky  $p$  a roviny  $\sigma$  znakem  $p \subset \sigma$  a incidenci bodu  $B$  s rovinou  $\sigma$  symbolem  $B \in \sigma$ . Zápisy  $\sigma \supset p$ ,  $p \notin B$  značí: rovina  $\sigma$  obsahuje přímku  $p$ , přímka  $p$  neprochází bodem  $B$ .

P r ů n i k dvou množin je množina všech prvků, které patří do první i do druhé množiny, tedy jejich společná část. Pro průnik množin  $M_1$  a  $M_2$  užíváme znaku  $M_1 \cap M_2$ .

Je-li na př.  $M_1$  množina všech obdélníků a  $M_2$  množina všech kosočtverců, jest  $M_1 \cap M_2$  množina všech čtverců. Jsou-li  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  dvě různé nerovnoběžné roviny, značí  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  jejich průsečnici.

Konečně si ještě připomeňme znak  $\Rightarrow$  pro t. zv. i m p l i k a c i. Jestliže z platnosti věty  $A$  vyplývá platnost jiné věty  $B$ , vyjádříme to znakem  $A \Rightarrow B$ .

Předpokládám-li na př. o třech přímkách  $a, b, c$ , že první je rovnoběžná s druhou a druhá s třetí, plyne z toho závěr, že také první je rovnoběžná s třetí, což píšeme krátce:

$$a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c.$$

Pokuste se sami přechíst implikace, v nichž  $a$ ,  $p$  značí přímky a  $\sigma$  rovinu:

$$1. p \parallel a \subset \sigma \Rightarrow p \parallel \sigma$$

$$2. p \perp \sigma \Rightarrow p \perp a \subset \sigma$$

Rozhodněte, zdali lze v obou případech zaměnit pořadí obou tvrzení!

L a d i s l a v D r s, Praha:

## Úlohy polohy v středové axonometrii

### Úvod.

V článku chci seznámit čtenáře s konstruktivními řešeními polohových úloh v centrální axonometrii, jež nejsou téměř o nic složitější než příslušné konstrukce v rovnoběžném promítání. Přitom úlohou polohy rozumíme úlohu, ve které přihlížíme jen k vzájemné poloze daných útvarů (rovnoběžnost, incidence, průnik), nikoli však k velikosti (délka úsečky, velikost úhlu a pod.).

Předpokládám, že čtenář zná základní pojmy rovnoběžného promítání a že si přečetl v 1. čísle Rozhledů článek doc. Havlíčka „Nevlastní elementy v geometrii“ (str. 19–23).

Význam některých zde užívaných značek ( $\epsilon$ ,  $\subset$ ,  $\cap$ ,  $\Rightarrow$ ) je vyložen v předchozím článku doc. Setzera (str. 352). Zavedení těchto symbolů nám urychlí a podstatně zkrátí zápis prováděných konstrukcí.

### I. Základní pojmy středového promítání.

Zvolme v prostoru vlastní bod  $S$  - střed promítání (obr. 1) a vlastní rovinu  $\alpha$  - průmětnu tak, aby v ní bod  $S$  neležel ( $S \notin \alpha$ ).

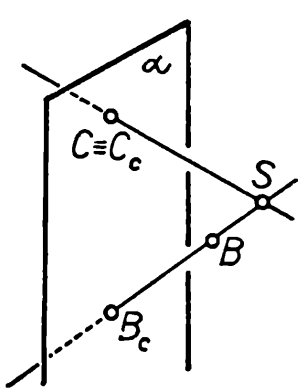
1. Průmět<sup>1)</sup>  $B_\epsilon$  bodu  $B \notin S$  (obr. 1) je průsečík promítací přímky  $SB$  bodu  $B$  (t. j. přímky spojující body  $S$ ,  $B$ ) s rovinou  $\alpha$  ( $B_\epsilon = SB \cap \alpha$ ). Průmět  $C_\epsilon$  bodu  $C$  ležícího v průmětně  $\alpha$  splývá s bodem  $C$  ( $C \cap \alpha \Rightarrow C_\epsilon \equiv C$ ). Bod  $S$  nemá průmět.

2. Průmět  $b_\epsilon$  přímky  $b \notin S$  (obr. 2) je souhrn průmětů  $B_\epsilon, ..$  bodů  $B, ..$  ležících na přímce  $b$ . Průmět  $b_\epsilon$  je též průsečnice promítací roviny  $Sb$  přímky  $b$  (t. j. roviny určené přímkou  $b$  a bodem  $S$ ) s průmětnou  $\alpha$  ( $b_\epsilon = Sb \cap \alpha$ ). Průmět  $c_\epsilon$  přímky  $c$  ležící v průmětně splývá s přímkou  $c$  ( $c \cap \alpha \Rightarrow c_\epsilon \equiv c$ ). Průmět  $d_\epsilon$  přímky  $d \notin S$  je průsečík přímky  $d$  s průmětnou ( $d_\epsilon = d \cap \alpha$ ), čili stopník  $A^d$  přímky  $d$ . Stopník přímky  $b$  na rovině  $\alpha$  budeme značit  $A^b$  ( $A^b = b \cap \alpha$ ). Platí tedy  $A^b \equiv A^b$  podle 1).

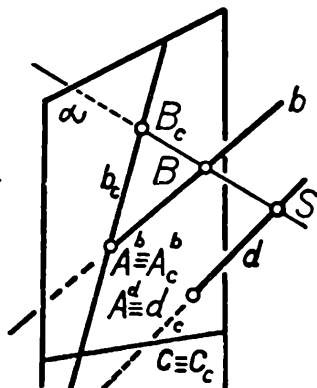
3. Úběžník  $U_\epsilon^b$  přímky  $b$  (obr. 3) je průmět nevlastního bodu  $U^b$  přímky  $b$ . Promítací přímka  $SU^b$  bodu  $U^b$  je tedy rovnoběžná s přímkou  $b$  ( $U_\epsilon^b = SU^b \cap \alpha$ ,  $SU^b \parallel b$ ).

<sup>1)</sup> Není-li nic jiného řečeno, myslíme zde vždy středový průmět. Označení  $B_\epsilon$  čteme „středový (centrální) průmět bodu  $B$ “, případně pouze „průmět bodu  $B$ “.

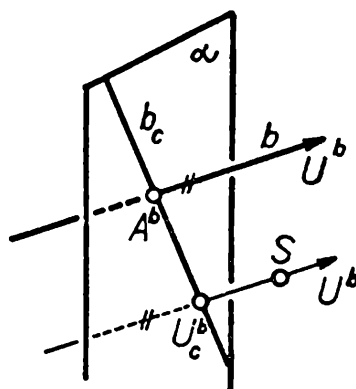
4. Průmět roviny  $\rho$  (obr. 4) je souhrn průmětů  $R_c$ , bodů  $R$ , ležících v rovině  $\rho$ . Je tedy průmětem roviny  $\rho$  celá průmětna, pokud ovšem rovina  $\rho$  neprochází středem  $S$  ( $\rho \text{ non } \ni S$ ). Jestliže rovina  $\sigma$  obsahuje střed  $S$  ( $S \in \sigma$ ), je jejím průmětem  $\sigma_c$  (obr. 5) přímka, a to průsečnice rovin  $\sigma, \alpha$  ( $\sigma_c = \sigma \cap \alpha$ ), t. zv. stopa roviny  $\sigma$ . Stopu roviny  $\sigma$  na rovině  $\alpha$  budeme označovat  $a^e$ . Platí tedy  $a^e \equiv a_c^e$  podle 2. a dále  $\sigma_c \equiv a^\sigma$ .



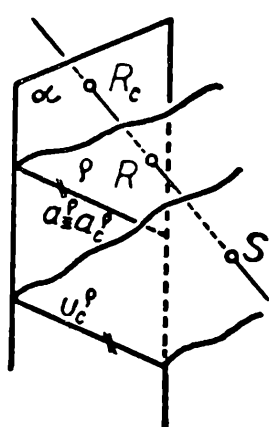
Obr. 1



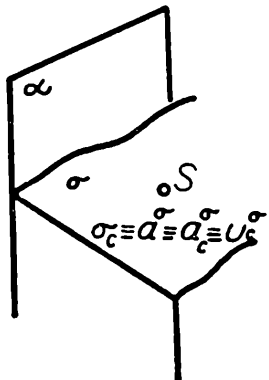
Obr. 2



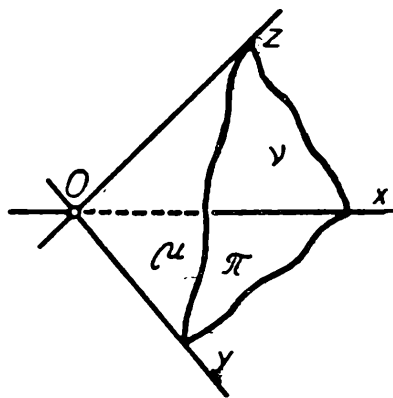
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



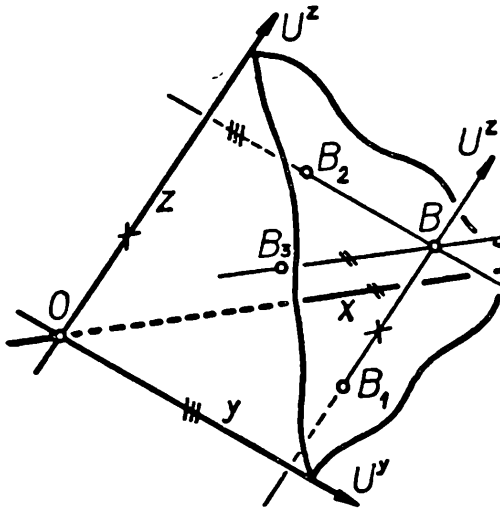
Obr. 6

5. Úběžnice  $u_c^e$  roviny  $\rho$  je průmět (obr. 4 a 5) nevlastní přímky  $u^e$  roviny  $\rho$ . Rovina  $Su^e$  je tedy rovnoběžná s rovinou  $\rho$  ( $u_c^e = Su^e \cap \alpha$ ,  $Su^e \parallel \rho$ ). Obě tyto rovnoběžné roviny protínají průmětnu ve dvou rovnoběžkách, proto je stopa roviny rovnoběžná s úběžnicí roviny ( $u_c^e \parallel a^e$ ).

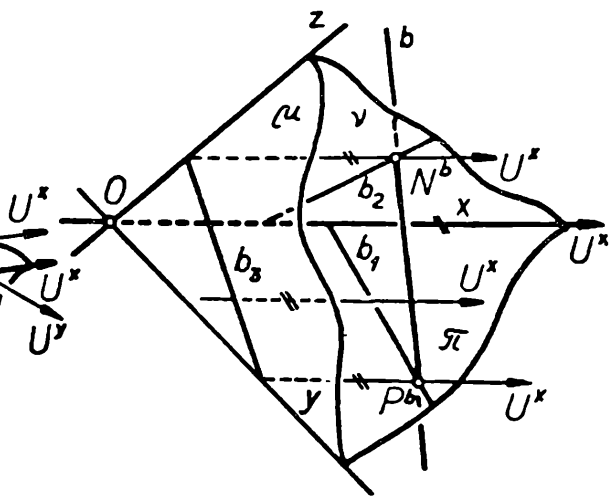
## II. Základní pojmy středově axonometrie.

1. Souřadnicová soustava. Zvolme tři různé vlastní nerovnoběžné roviny  $\pi, \nu, \mu$  - souřadnicové roviny (obr. 6), protínající se ve vlast-

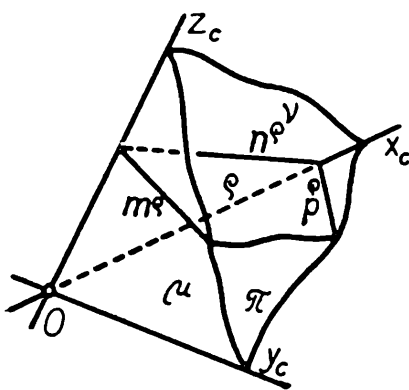
ním bodě  $O$ . Průsečnice  $x = \pi \cap \nu$ ,  $y = \pi \cap \mu$ ,  $z = \nu \cap \mu$  jsou osy souřadnic a tvoří spolu s rovinami  $\pi$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  souřadnicovou soustavu (obecně kosoúhlou). Kdyby roviny  $\pi$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  byly navzájem kolmé, t. j.  $\pi \perp \nu \perp \mu \perp \pi$ , získali bychom pravoúhlou souřadnicovou soustavu, které se v deskriptivní geometrii používá nejčastěji. Pro úlohy polohy však nemají úhly souřadnicových rovin význam a předpoklad kolmosti by jen komplikoval další úvahy.



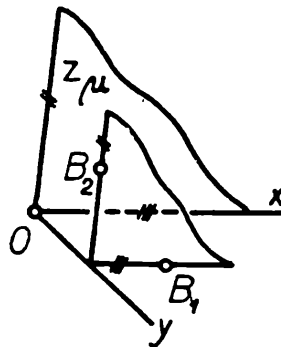
Obr. 7



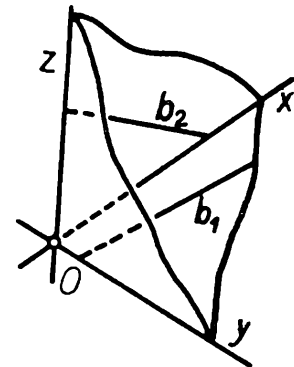
Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10



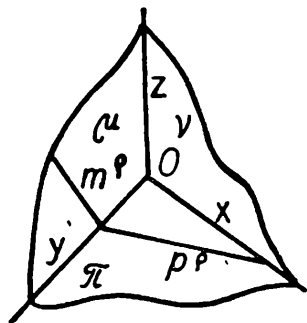
Obr. 11

2. **Určení bodů, přímek a rovin v souřadnicové soustavě.** Nejprve si zopakujeme některé pojmy rovnoběžného promítání. Nevlastní body os  $x$ ,  $y$ ,  $z$  označíme  $U^x$ ,  $U^y$ ,  $U^z$ . Bod  $B$  (obr. 7) určujeme pomocí jeho rovnoběžného průmětu  $B_1$  ( $B_2$ ,  $B_3$ ) do roviny  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ). Přímku  $b$  (obr. 8) určíme jejím rovnoběžným průmětem  $b_1$  ( $b_2$ ,  $b_3$ ) do roviny  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ). Je tedy  $B_1$  ( $B_2$ ,  $B_3$ ) průsečík přímky  $U^z B$  ( $U^y B$ ,  $U^x B$ ) s rovinou  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ). Právě tak  $b_1$  ( $b_2$ ,  $b_3$ ) je průsečnice roviny  $U^z b$  ( $U^y b$ ,  $U^x b$ ) s rovinou  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ).

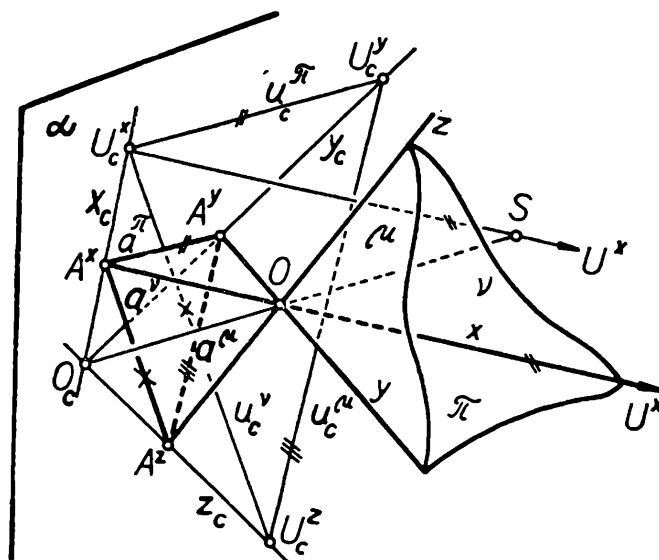
Rovinu  $\rho$  určujeme (obr. 9) buď pomocí rovnoběžných průmětů dvou přímek ležících v rovině nebo častěji pomocí stop  $p^e$ ,  $n^e$ ,  $m^e$  roviny  $\rho$  na souřadnicových rovinách  $\pi$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ .

K určení bodů, přímek a rovin obvykle nepotřebujeme, jak známo, všechny rovnoběžné průměty, resp. stopy. Tak na př. v obr. 10 k určení bodu  $B$  stačí znát rovnoběžné průměty  $B_1, B_2$ , které ovšem musí ležet v rovině vedené bodem  $B_1$  rovnoběžně s rovinou  $\mu$ . K určení přímky  $b$ , pokud není rovnoběžná s  $\mu$ , stačí znát rovnoběžné průměty  $b_1, b_2$  (obr. 11), k určení roviny  $\rho$  procházející osou  $y$  stačí (obr. 12) stopy  $p^e, m^e$ , protínající se na ose  $y$ .

3. Průmět souřadnicové soustavy. Zvolme (obr. 13) vlastní střed promítání  $S$  a vlastní průmětnu  $\alpha$  tak, aby bod  $S$  neležel v žádné z rovin  $\alpha, \pi, \nu, \mu$  a aby  $SO \parallel \alpha$ . Sestrojíme středový průmět souřadnicové soustavy z bodu  $S$  do roviny  $\alpha$ . Průměty  $x_c, y_c, z_c$  os  $x, y, z$  jsou navzájem různé přímky procházející vlastním bodem  $O_c$ . Stopníky  $A^x, A^y, A^z$  os  $x, y, z$  určují stopy  $a^\pi \equiv A^x A^y, a^\nu \equiv A^x A^z, a^\mu \equiv A^y A^z$  rovin  $\pi, \nu, \mu$ ; podobně úběžníky  $U_c^x, U_c^y, U_c^z$  určují úběžnice  $u_c^\pi \equiv U_c^x U_c^y, u_c^\nu \equiv U_c^x U_c^z, u_c^\mu \equiv U_c^y U_c^z$  souřadnicových rovin.



Obr. 12



Obr. 13

Body  $U_c^x, U_c^y, U_c^z$  jsou vždy různé, neboť přímky  $x, y, z$  jsou různoběžné a střed  $S$  neleží v průmětně; tvoří úběžníkový trojúhelník („trojúhelník“ i v případě, že jeho jeden vrchol nebo dva jsou nevlastní body). Trojúhelníky  $A^x A^y A^z, U_c^x U_c^y U_c^z$  jsou podle odst. I. 5) homothetické pro střed stejnolehlosti  $O$ .

Kdyby bod  $O$  (obr. 14) ležel v průmětně  $\alpha$  ( $\alpha \ni O \equiv O_c$ ), pak by stopníky os s ním splynuly ( $O \equiv A^x \equiv A^y \equiv A^z$ ). Pro zjednodušení budeme tento případ dále předpokládat, pokud nebude výslovně stanoveno jinak.

4. Středová axonometrie je středové promítání, při kterém promítáme ze středu  $S$  vždy do axonometrické průmětny  $\alpha$  (obr. 15):

- a) daný útvar  $W$ ;
- b) jeho rovnoběžné průměty  $W_1, W_2, W_3$  do souřadnicových rovin  $\pi, \nu, \mu$ ;
- c) tuto souřadnicovou soustavu.

Tak získáme:

- a) „axonometrický průmět“  $W_c$  útvaru  $W$ ;

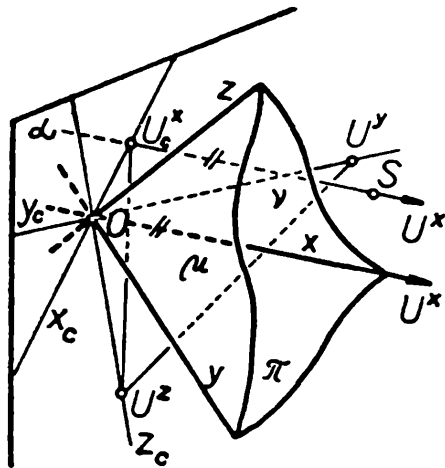
b) axonometrické průměty  $W_{1,c}$ ,  $W_{2,c}$ ,  $W_{3,c}$ , t. j. středové průměty rovnoběžných průmětů  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  z bodu  $S$  do roviny  $\alpha^2$ );

c) axonometrické průměty  $x_c, y_c, z_c$  os  $x, y, z$  souřadnicové soustavy.

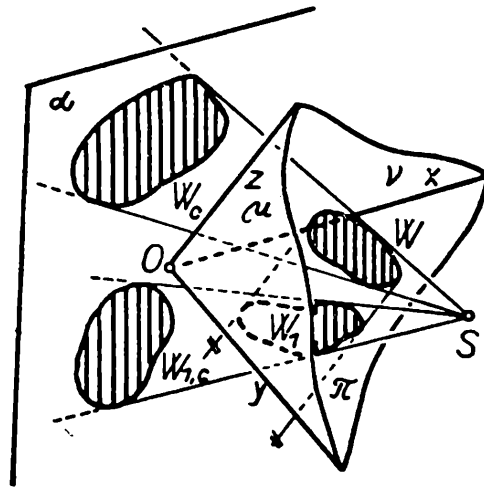
Dále budeme vynechávat slovo „axonometrický“ a útvarům  $W_c, W_{1,c}, W_{2,c}, W_{3,c}$  budeme říkat průmět, první průmět, druhý průmět, třetí průmět útvaru  $W$ .

### III. Úlohy polohy ve středové axonometrii.

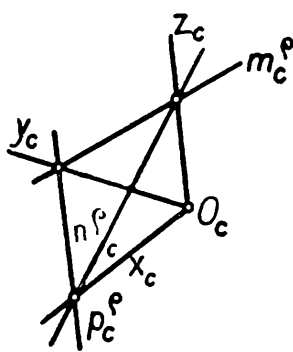
V dalších úlohách předpokládáme, že je dán průmět souřadnicové soustavy, t. j. úběžníkový trojúhelník  $U_c^x U_c^y U_c^z$  a bod  $O \equiv O_c$ .



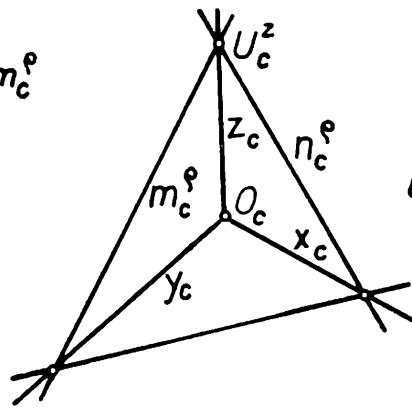
Obr. 14



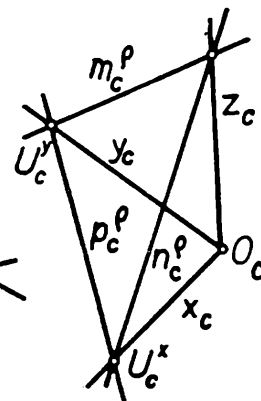
Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

1. Stopy roviny. Průměty  $p_c^e, n_c^e$  ( $p_c^e, m_c^e; n_c^e, m_c^e$ ) stop  $p^e, n^e$  ( $p^e, m^e; n^e, m^e$ ) roviny  $\rho$  se protínají na přímce  $x_c$  ( $y_c, z_c$ ). Obr. 16.

Průměty  $n_c^e, m_c^e$  stop  $n^e, m^e$  roviny  $\rho$ , rovnoběžné s osou  $z$  (t. j. první rovnoběžně promítací roviny) se protínají v bodě  $U_c^z$  (obr. 17).

Průmět  $t_c^e$  stopy  $t^e$  roviny  $\rho$  rovnoběžné s rovinou  $\pi$  je přímka  $U_c^x U_c^y$  (obr. 18).

<sup>2)</sup> Na obr. 15 je tak provedeno pouze u jednoho průmětu.



### Cvičení:

V následujících příkladech zvolte  $U_c^x, U_c^y, U_c^z, O \equiv O_c, x_c \equiv OU_c^x, y_c \equiv OU_c^y, z_c \equiv OU_c^z$ .

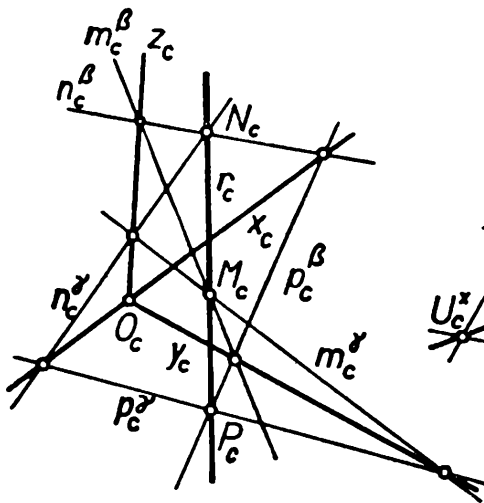
1. Sestrojte průmět zbývající stopy roviny  $\rho$ , zvolíte-li: a)  $p_c^e, n_c^e$ ; b)  $p_c^e, m_c^e$ ; c)  $n_c^e, m_c^e$ .

2. Sestrojte zbývající průměty stop roviny  $\sigma$ , která je rovnoběžná s osou: a)  $y$ , b)  $x$ , znáte-li: a)  $n_c^\sigma$ , b)  $m_c^\sigma$ .

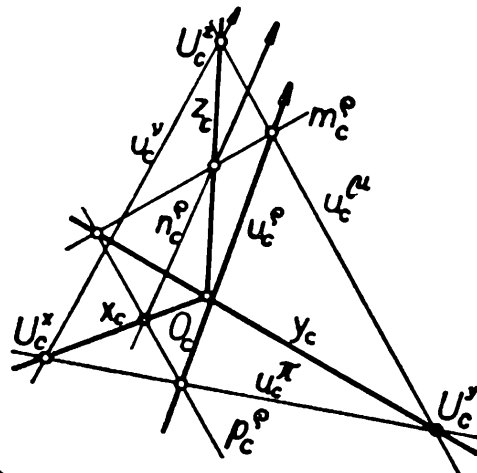
3. Sestrojte průměty dalších stop libovolné roviny  $\tau$ , která je rovnoběžná s rovinou: a)  $\pi$ , b)  $\nu$ , c)  $\mu$ .

4. Sestrojte průměty stop nevlastní roviny  $\omega$ !

2. Průsečnice dvou rovin (nejdoucích bodem  $O$ ). Průmět  $r_c$  průsečnice dvou rovin  $\beta \neq \gamma$  (obr. 19) obsahuje průsečíky  $P_c = p_c^\beta \cap p_c^\gamma, N_c = n_c^\beta \cap n_c^\gamma, M_c = m_c^\beta \cap m_c^\gamma$  průmětů stop obou rovin.



Obr. 19



Obr. 20

### Cvičení:

5. Sestrojte průmět průsečnice obecné roviny  $\rho$  s rovinou: a)  $\sigma \parallel x$ , b)  $\tau \parallel y$ , c)  $\omega \parallel z$ , znáte-li: a)  $p_c^e, m_c^e$ ; b)  $p_c^e, n_c^e$ ; c)  $p_c^e, n_c^e$  a stopy rovin  $\sigma, \tau, \omega$ !

6. Sestrojte průmět průsečnice dvou obecných rovin  $\rho, \sigma$ , znáte-li: a)  $p_c^e, n_c^e, p_c^\sigma, m_c^\sigma$ ; b)  $p_c^e, m_c^e, n_c^\sigma, m_c^\sigma$ ; c)  $n_c^e, m_c^e, p_c^\sigma, n_c^\sigma$ .

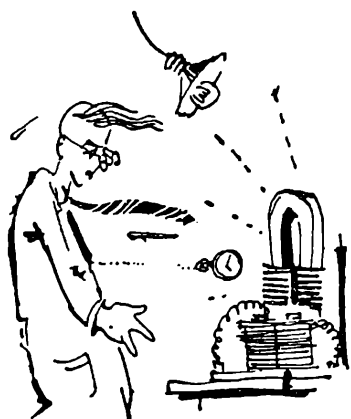
3. Úběžnice vlastní roviny (obr. 20). Úběžnice  $u_c^e$  roviny  $\rho$  je průmět průsečnice roviny  $\rho$  s nevlastní rovinou, obsahuje tedy průsečíky přímek  $p_c^e, U_c^x U_c^y; n_c^e, U_c^x U_c^z; m_c^e, U_c^y U_c^z$ .

### Cvičení:

7. Sestrojte úběžnici roviny  $\rho$ , znáte-li: a)  $p_c^e, n_c^e$ ; b)  $p_c^e, m_c^e$ ; c)  $n_c^e, m_c^e$ .

8. Sestrojte úběžnici roviny  $\rho$  rovnoběžné s: a) osou  $y$ ; b) osou  $z$ ; c) rovinou  $\pi$ ; d) rovinou  $\nu$ , znáte-li: a)  $n_c^e$ ; b)  $p_c^e$ ; c)  $n_c^e$ ; d)  $m_c^e$ .

(Pokračování.)



# Fysika

Oldřich Lepil, Gottwaldov:

## Brownův pohyb

### 1. Historie objevu

Letos je tomu 130 let, co byl objeven jeden z hlavních důkazů pro molekulárně kinetickou teorii hmoty. Tato teorie vznikala už v polovině 18. století v dílech učenců M. V. Lomonosova a D. Bernoulliho. Dlouho však chyběl přímý důkaz pro pohyb předpokládaných molekul hmoty. Zaslouhou anglického botanika Roberta Browna byl tento důkaz objeven. R. Brown popsal r. 1827 zajímavý pohyb rostlinného pelu, rozptýleného ve vodě a pozorovaného mikroskopem. Zjistil, že rozptýlené částice neklesají v nádobě ke dnu, kde by vytvořily souvislou, nehybnou vrstvu, ale že se vznášejí v kapalině a vykonávají neustálý pohyb. Pohyb je naprosto chaotický, trhavý a částice se pohybují po krátkých drahách nejrůznějšími směry a rychlostmi. Brown se zprvu domníval, že je tento pohyb projevem života a je tedy původu organického. Avšak dalšími pokusy zjistil, že nejen látky organické, ale všechny látky vykazují tento zajímavý pohyb, jsou-li dostatečně rozmělněné a dobře rozptýlené v kapalině, ve které se nerozpouštějí. Přitom poznal, že pohyb je tím živější, čím menší jsou částice.

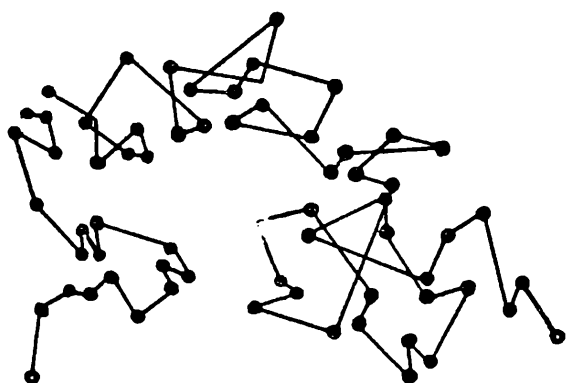
Podobný pohyb pozoroval Brown též v protoplasmatu rostlinných buněk. Rovněž v tomto případě, jak bylo později zjištěno, nejde o projev života, ale o děj čistě fyzikální. Dlouho nebyla poznána souvislost tohoto pohybu s pohybem mechanických částic, rozptýlených v kapalině. Teprve pracemi pozdějších autorů byl přisouzen tento pohyb koloidním roztokům, tedy nepravým roztokům částic, které mohou dosáhnout průměru 1 mikronu ( $= 10^{-3}$  mm).

Když byl *Brownův pohyb* popsán, nestal se ovšem ihned oporou molekulárně kinetické teorie, protože nebyl dostatečně kvantitativně a theoreticky zvládnut. O jeho molekulárně kinetický výklad byly vedeny dlouhé spory. Různé dohady však musely ustoupit, když bylo získáno dostatečné množství experimentálních faktů. Zasluhu o theoretický výklad mají zejména práce fyziků Einsteina a polského fyzika Smoluchovského. Na poli experimentálních vynikají pokusy provedené francouzským fyzikem Jeanem Perrinem, z nichž vyvodil pozoruhodné theoretické závěry. Za své práce dostal Perrin r. 1926 Nobelovu cenu.

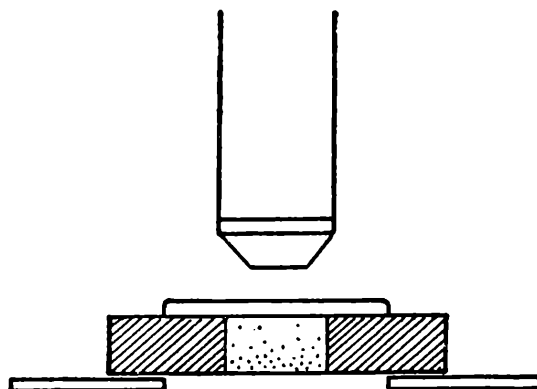
### 2. Výklad Brownova pohybu

Z prací uvedených autorů vyplývá, že každá částice menšího průměru než 4 mikrony ( $4 \cdot 10^{-4}$  cm) vykonává pohyb, který znázornil Perrin tak, že pod mikro-

skopem sledoval určitou Brownovu částici (t. j. částici vykonávající Brownův pohyb) a zaznamenával její polohy ve stejných časových intervalech. Výsledný záznam nám ukazuje obr. 1, kde polohy částice v jednotlivých okamžicích jsou vyznačeny body, spojenými úsečkami. Tyto úsečky jsou však jen pomůckou k zjištění posloupnosti jednotlivých poloh částice. Nesmíme je proto zaměňovat se skutečnou dráhou, která ovšem není mezi jednotlivými body přímočará. Příčinou vyznačeného pohybu jsou nárazy molekul tekutiny na rozptýlené částice. Molekuly kapaliny jsou podle molekulárně kinetické teorie v neustálém pohybu a pohybují se všemi směry. Přitom narážejí na rozptýlené pevné částice a udílejí jim pohybové impulsy. Je-li pevná částice v kapalině větší než 4 mikrony, pak je pravděpodobné, že počet nárazů molekul je v určitém časovém okamžiku ze všech stran stejný. Výslednice všech impulsů je potom rovna nule, nebo je tak malá, že nestačí hmotnou částici dosti vychýlit. Částice zůstává v klidu. Malá částice - menší než 4 mikrony - má malý povrch a počet okamžitých srážek není již tak velký. Je tedy pravděpodobné, že počet nárazů v jednom směru převládne a výsledný impuls částici v tomto směru posune. Poněvadž změny pohybu částice jsou chaotické a jejich počet roste s teplotou, lze předpokládat, že pohyb molekul je chaotický a tím rychlejší, čím je vyšší teplota.



Obr. 1



Obr. 2

Má tedy Brownův pohyb podle kinetické teorie původ v tepelné energii. Brownova částice se může účinkem nárazů molekul pohybovat v kapalině proti zemské tíži; částice tedy neklesají ke dnu, ale mohou konat také vzestupný pohyb. Mechanická energie částice se při tomto vzestupném pohybu zvyšuje na účet energie tepelného pohybu molekul.

### 3. Důkazy a zákonitosti

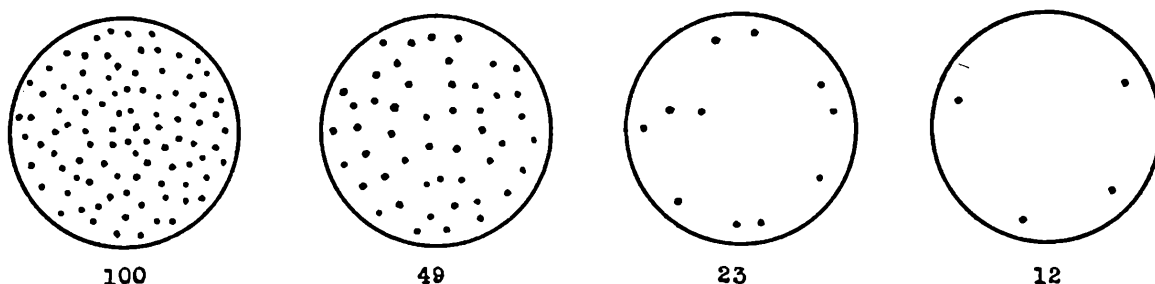
Experimentální důkaz molekulárně kinetického výkladu Brownova pohybu podal Perrin. Připravil z pryskyřice *Garcinia morela* (gummiguty) mnohonásobným odstředováním dokonale stejnorodou emulsi. Částice emulsi měly poloměr řádově 1 mikron a pod mikroskopem vykazovaly intenzivní Brownův pohyb. Podložní sklíčko mělo při pokusu vybroušenou prohlubeň, naplněnou emulsi. Pozorování prováděl Perrin mikroskopem s malou ohniskovou délkou (obr. 2). Postupným zaostřováním do různých hloubek a pořízením mžikových mikrofoto-

gramů bylo možné zjistit průměrný počet částic v zorném poli. Perrin zjistil, že v suspensi gummiguty počty částic ve čtyřech výškách, vzdálených od sebe o 30 mikronů, tvoří geometrickou řadu (obr. 3).

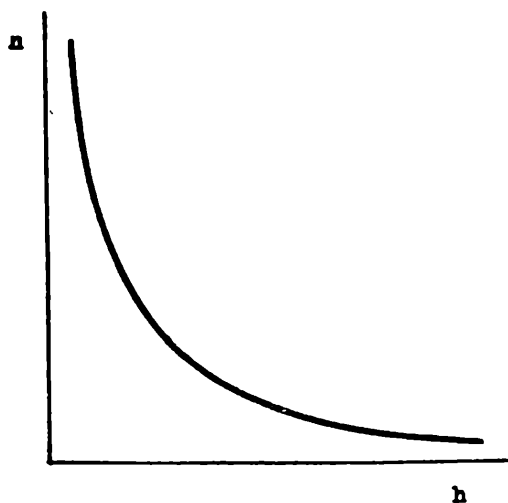
Z těchto pokusů vyvodil Perrin rovnici, která vystihuje výškové rozložení částic

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

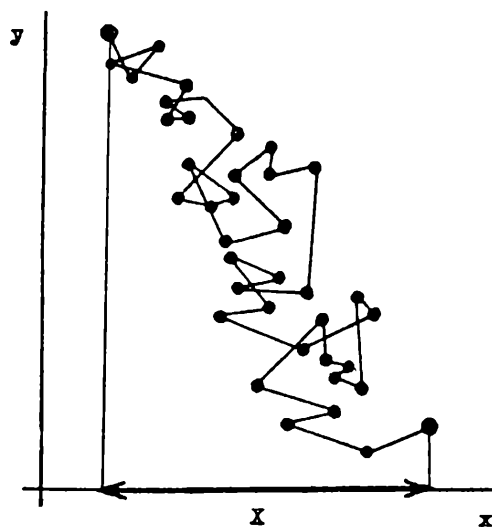
kde  $n_h$  značí počet částic ve výšce  $h$ ,  $n_0$  počet částic v 1 ccm u dna,  $m$  hmotu částice,  $g$  gravitační zrychlení,  $k$  Boltzmanovu konstantu,  $T$  absolutní teplotu. Grafické vyjádření závislosti vidíme na obr. 4.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

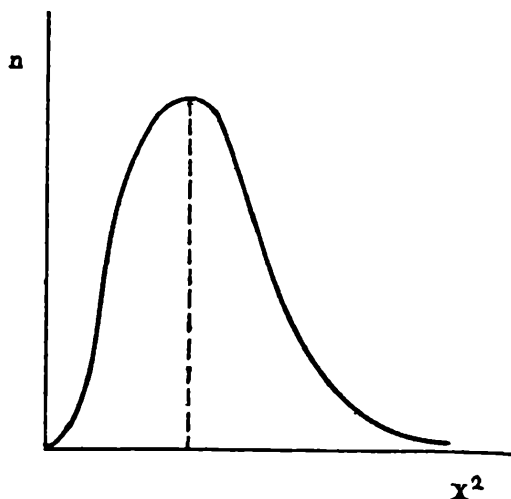
Nejzajímavější na vztahu je, že je přesně totožný se vztahem, který platí pro rozložení plynu v gravitačním poli. Kdyby třeba naše atmosféra obsahovala jen kyslík teploty 0 °C, potom by klesl tlak na polovinu ve výši 5 km a 1 ccm atmosféry by obsahoval v této výšce jen poloviční počet molekul. Poněvadž částice gummiguty mají váhu více než stamilionkrát větší než molekula kyslíku, musí být tolikrát menší výška, ve které klesne počet částic v 1 ccm na polovinu, a to bylo také Perrinovými pokusy potvrzeno.

V dalších pokusech dokázal Perrin, že částice působí na kapalinu tlakem, který se nazývá *osmotický* (z řec. osmós = popud) a je zcela obdobný s tlakem molekul

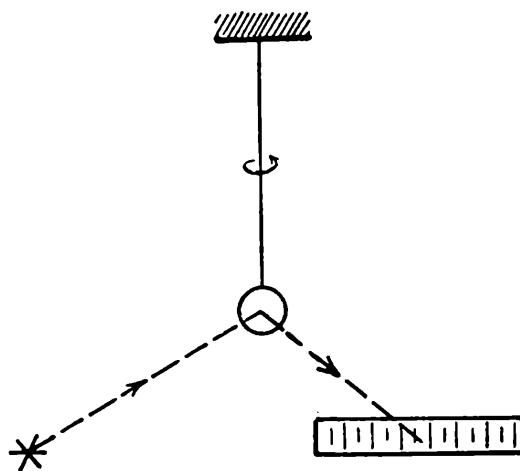
plynu na stěny uzavřené nádoby. Platí tedy pro osmotický tlak Brownových částic rovněž stavová rovnice plynů  $PV = RT$ .

Na základě těchto pokusů můžeme Brownovy částice považovat za zvětšené molekuly. Brownův pohyb je pak jakýmsi modelem, na němž si můžeme ověřit platnost závěrů molekulárně kinetické theorie.

Pro molekulárně kinetickou theorii je také velmi důležité, jakým způsobem je rozložena rychlost jednotlivých molekul. Rovněž tato otázka byla úspěšně rozřešena pomocí Brownova pohybu. Pokusy určit rychlost a tím i kinetickou energii Brownovy částice přímými methodami nevedly k cíli. Einstein ukázal, že mírou rychlosti částice může být její posunutí v časové jednotce. Sledujme průmět posunutí Brownovy částice do osy  $x$ , jejíž směr si libovolně zvolíme (obr. 5).  $X$  značí průmět posunutí, které vykoná částice za dobu  $t$ . Změří-li se  $X$  pro mnoho částic, pak graf závislosti  $X^2$  na počtu částic ( $n$ ) vyjadřuje křivka na obr. 6. Tato dobře souhlasí se závislostí rychlosti molekul plynu na počtu molekul, získanou novějšími methodami. Z grafu pak vyčteme, že většina molekul má rychlost střední, která znamená nejpravděpodobnější rychlost molekul.



Obr. 6



Obr. 7

Brownův pohyb umožňuje také přímé měření Avogadrova čísla  $N$  (t. j. počtu molekul v jedné grammolekule). Přitom obyčejně měříme buď výškové rozložení Brownových částic, nebo podle Einsteina čtverec posuvu částice. Přesnost těchto method není však veliká. Daleko přesnější výsledky dává t. zv. *otáčivý Brownův pohyb*. Zavěsíme-li velmi lehké zrcátko na tenké křemenné niti a pozorujeme-li na dostatečně vzdálené stupnici odražený světelný paprsek (obr. 7), zjistíme, že odraz vykonává nepravidelné kmity. Kmitání je způsobeno nárazem molekul vzduchu na zrcátko. Úkazu říkáme *otáčivý Brownův pohyb*. Zajímavé je, že při atmosférickém tlaku jsou kmity zrcátka úplně chaotické, avšak s postupným snižováním tlaku se kmity mění v sinusové s periodou, určenou pružností křemenného vlákna. S rotačním Brownovým pohybem je třeba počítat u velmi citlivých měřicích přístrojů, jako jsou na př. galvanometry, kde měřicí soustava je tvořena cívkou, zavěšenou na pružném vlákně. Citlivost těchto přístrojů je určena hranicí, při které rotační Brownův pohyb ruší měření.

#### 4. Praktická část

Pozorování Brownova pohybu není problémem, máme-li k dispozici mikroskop s dostatečným zvětšením (1000krát). Potom do kapky vody na podložním sklíčku kápneme tuš a pozorujeme částice sazí v tuši.

Stačí však již zvětšení asi 450krát, abychom Brownův pohyb pozorovali. Větší částice, pozorovatelné při tomto zvětšení, získáme tak, že na podložní sklíčko kápneme tuš, necháme ji chvilku schnout, přikápneme vodu a přiklopíme krycím sklíčkem. Pod mikroskopem pak pozorujeme částice nejrůznějších velikostí, z nichž nejmenší vykazují Brownův pohyb.

Dr Otto Litzman, Praha:

## Jaké jsou zákony pohybu elektronu

(Pokračování)

### V. Spin elektronu

V předešlých kapitolách (Rozhledy č. 4) jsme hovořili o energii elektronu a o jeho momentu hybnosti. Abychom mohli dobře pochopit chování elektronů, obíhajících kolem atomového jádra, musíme se zmínit ještě o další veličině, jež je důležitá pro popis pohybu elektronu, o tak zvaném *spinu*.

Pro naše účely zcela postačí představit si elektron jako velmi malou kuličku, nesoucí záporný elektrický náboj; skutečnost je ovšem jiná. Jestliže se taková záporně elektricky nabitá kulička otáčí kolem své osy, musí budit ve svém okolí magnetické pole, obdobně jako je budí elektron obíhající kolem jádra. Pokusy, jež jsou podobné těm, které jsme popsali v kapitole IV - místo svazku atomů musíme si nyní představit svazek elektronů - bylo skutečně zjištěno, že elektrony se chovají jako malé magnetické dipóly. Kromě magnetického momentu elektronu, který je vyvoláván pohybem elektronu po uzavřené dráze, má tedy elektron vždy ještě další magnetický moment, který je způsoben rotací elektronu kolem vlastní osy. Mluvíme o t. zv. *vlastním* nebo *spinovém magnetickém momentu*. Název „*spin*“ vznikl z anglického slovesa „*spin*“, což znamená točit se, vířiti a dobře tedy vystihuje názornou představu o vzniku tohoto vlastního magnetického momentu elektronu.

Pokusy bylo zjištěno, že spinový magnetický moment je pro všechny elektrony stejný, že jeho průmět do libovolného směru (na př. do osy *OZ*) je kvantován a může nabýt jen dvou hodnot, jež se od sebe liší znaménkem, a to

$$\frac{e h}{2 \pi m c} \text{ nebo } - \frac{e h}{2 \pi m c} \text{ } ^1)$$

Rotační osa elektronu svírá tedy s osou *OZ* vždy určitý úhel  $\alpha$ , při čemž může ovšem směřovat buď „nahoru“ nebo „dolů“ (viz obr. 9). V jednom případě je

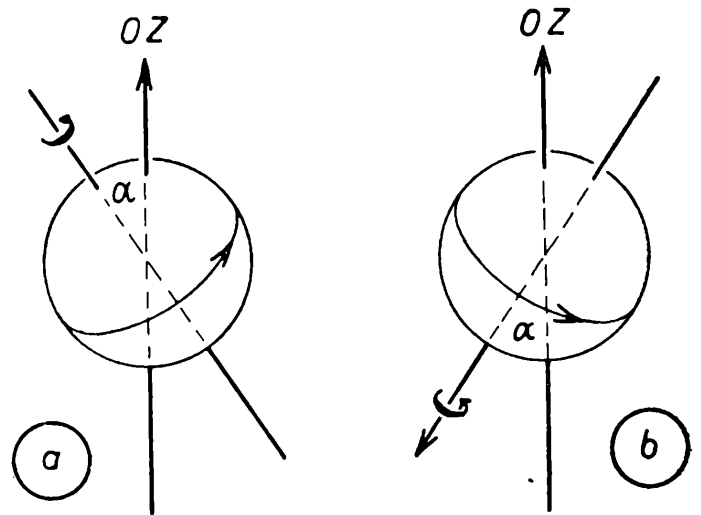
<sup>1)</sup> *e*, *h*, *m* mají význam jako dříve, *c* je rychlost světla.

průmět spinového magnetického momentu do směru osy  $OZ$  kladný, v druhém případě záporný. Pro krátkost budeme říkat, že elektron má v jednom případě spin  $s_z = \frac{1}{2}$  (obr. 9a), v druhém spin  $s_z = -\frac{1}{2}$  (obr. 9b).

Kdybychom připustili, že úhel  $\alpha$  může být zcela libovolný, nemohli bychom kvantování průmětu spinového magnetického momentu vysvětlit a dostali bychom se do sporu s experimentálními zkušenostmi.

### VI. Pauliův princip

Zatím jsme hovořili o jednom rysu, kterým se liší zákony pohybu elektronu od zákonů klasické mechaniky. Shledali jsme, že elektron obíhající kolem atomového jádra může konat jen takový pohyb, při němž jeho energie, moment hybnosti a spin nabývají určitých „kvantovaných“ hodnot. Pro tyto kvantované hodnoty platí podle dřívějšího (viz Rozhledy č. 4)



Obr. 9

$$E = -\frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^2} \frac{1}{n^2}; \quad |\vec{M}| = \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)}; \quad M_z = \frac{h}{2\pi} m; \quad s_z = \pm \frac{1}{2}. \quad (6a)$$

Elektron nemůže na příklad konat pohyb, při němž by jeho moment hybnosti byl jiný, než uvádí vzorec (6a).

Chceme-li popsat v klasické mechanice pohyb bodu, udáme jeho polohu a rychlost. Pro popsání pohybu elektronu v atomu se však poloha a rychlost elektronu nehodí. To vyplývá už z toho, že nemůžeme sestavit pokus, kterým bychom mohli polohu a rychlost tak malé a přitom tak rychle se pohybující částice jako elektron přímo změřit. Naproti tomu můžeme změřit, jak jsme v předchozích kapitolách uvedli, energii, moment hybnosti i spin elektronu. Proto k popisu pohybu elektronu nepoužíváme jeho polohy a rychlosti, ale veličin  $E$ ,  $|\vec{M}|$ ,  $M_z$  a  $s_z$ . Poněvadž přípustné hodnoty těchto veličin jsou kvantovány a platí pro ně vzorec (6a), nemusíme přímo udávat jejich skutečnou hodnotu, ale stačí, udáme-li kvantová čísla  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $s_z$ . O těchto číslech říkáme, že nám určují stav elektronu a budeme je psát do závorky. Řekneme-li na př., že elektron je ve stavu  $(3; 2; 0; -\frac{1}{2})$ , znamená to, že elektron koná pohyb, při němž jsou jeho energie, moment

hybnosti a spin podle (6a) rovny

$$E = -\frac{2\pi^2 Z^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{1}{3^2}; \quad |\vec{M}| = \frac{h}{2\pi} \sqrt{2(2+1)}; \quad M_z = 0; \quad s_z = -\frac{1}{2}$$

Je zřejmé, že průmět vektorů do nějakého směru musí být vždy menší, nebo je nejvýše roven absolutní hodnotě tohoto vektoru, t. j.  $|M_z| \leq |\vec{M}|$ . Při určité hodnotě kvantového čísla  $l$  může tedy nabýt kvantové číslo  $m$  jen hodnot  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ . Pro větší hodnoty  $l$  by bylo  $|M_z| > |\vec{M}|$ , což není možné. Dále se ukazuje, že při dané hodnotě kvantového čísla  $n$  jsou omezeny hodnoty kvantového čísla  $l$ , a to  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Při určité hodnotě energie  $E$  nemůže tedy velikost momentu hybnosti  $|\vec{M}|$  přesáhnout určitou hranici.

Vzorec (6a) doplníme přípustnými hodnotami kvantových čísel  $n, l, m$ , které jsou tedy tyto

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, & l &= 0, 1, 2, \dots, n - 1; \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l; & s_z &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6b)$$

Nyní, když jsme si již vysvětlili, co nazýváme stavem elektronu a kvantovými čísly, můžeme přejít k výkladu tak zvaného *Pauliova principu*, který je - právě tak jako kvantování - základním principem pro pohyb elektronů a který nemá obdoby v klasické mechanice.

Pauliův princip můžeme si pro naše účely formulovat takto:

*Dva elektrony obíhající v atomu nemohou být v témž stavu.*

To znamená, že v atomu nemohou být dva elektrony, jež mají všechna čtyři kvantová čísla ( $n; l; m; s_z$ ) stejná.

Všimněme si podrobněji rozdílu proti klasické mechanice, který tento princip přináší. Podle klasické mechaniky by bylo možné, že by kolem jádra atomu obíhaly dva nebo i více elektronů, jež by měly všechny stejnou hodnotu energie, stejnou absolutní hodnotu momentu hybnosti, průmětu momentu hybnosti do osy  $OZ$  a stejný spin. Podle kvantové mechaniky to není možné. Je-li jeden z elektronů obíhajících kolem jádra ve stavu určeném na př. kvantovými čísly  $(4; 3; -3; \frac{1}{2})$ ,

pak v tomto stavu nemůže být už žádný jiný obíhající elektron. Přípustné stavy jiných elektronů jsou na př.  $(4; 3; -3; -\frac{1}{2})$ ,  $(4; 3; 3; \frac{1}{2})$ ,  $(1; 0; 0; -\frac{1}{2})$

a pod.

Pauliův princip lze dnes odvodit z obecnějších principů kvantové mechaniky, byl však experimentálně dokázán ještě mnohem dříve než vznikla kvantová mechanika, a to při studiu optických spekter atomů. Pauliův princip „řídí“ totiž, jak uvidíme v další kapitole, stavbu elektronového obalu jádra a tím i, jak jsme si vysvětlili v kap. III., optické spektrum atomů.

(Pokračování.)

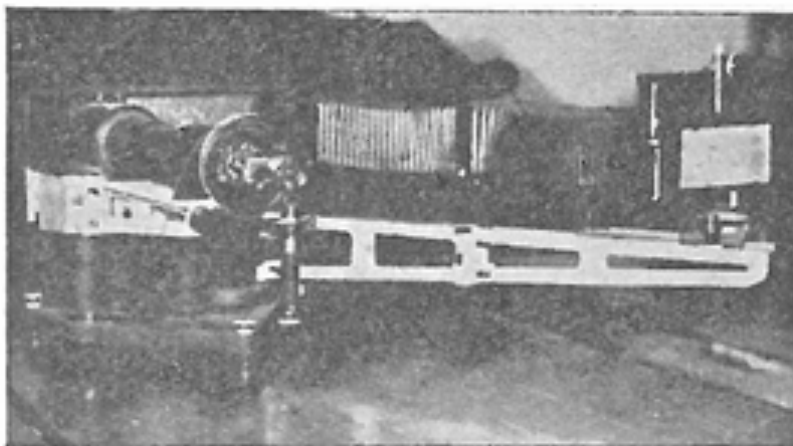


## Co je to spektrální analýza

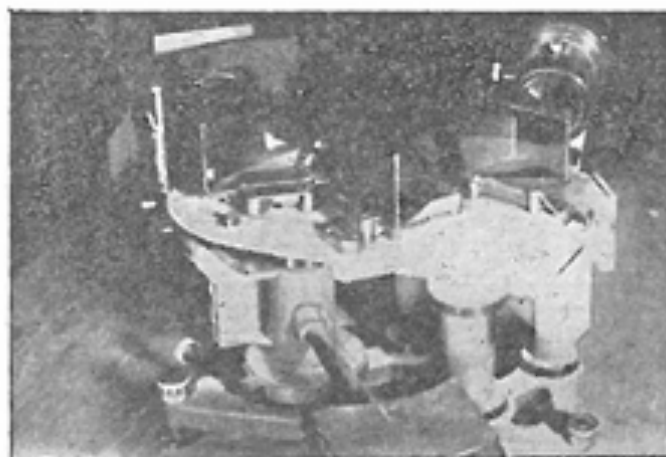
(Dokončení)

### 5. Vlastnosti a funkce hranolového spektrografu

Hranolový spektrograf s příslušenstvím pro provedení spektrální analýzy se skládá ze a) zdroje, b) kondensoru, c) štěrbiny, d) optiky spektrografu a kamery. (Viz obr. 6 a přílohu 1, 2.)



Příloha 1. Spektrograf Steinheilův se třemi skleněnými hranoly.



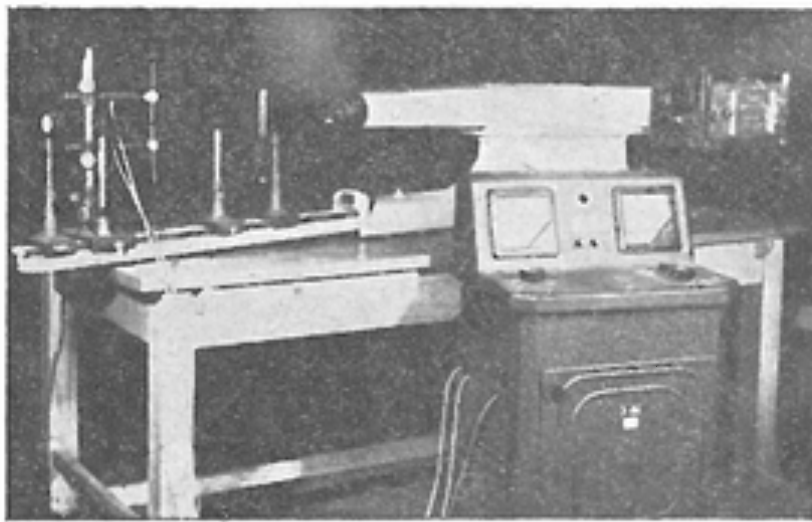
Příloha 2. Spektrograf Steinheilův s třemi skleněnými hranoly - pohled na optiku.

a) **Zdroje záření.** Jako zdrojů záření se ve spektrální analýze používá jednak oblouku mezi dvěma elektrodami, jednak jiskry přeskakující mezi elektrodami, jednak výboje v parách zkoumané látky. Pro kvalitativní spektrální analýzu se vzhledem ke své velké citlivosti nejlépe hodí elektrický oblouk; mezi dvěma vzorky zkoumaného materiálu, upravenými jako elektrody (na př. dvě tyčinky ze železa), vznikne po dotyku a oddálení při napětí asi 120 voltů elektrický oblouk, v němž se vypařují jednotlivé prvky obsažené v elektrodách a vysílají záření. Intenzita oblouku je určena protékajícím proudem, který bývá

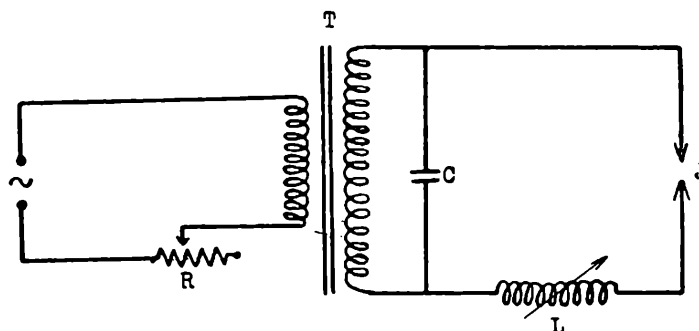
několik ampérů. V mnohých případech se osvědčil i střídavý oblouk o napětí asi 1000 až 4000 voltů.

Elektrická jiskra využívá vybíjení obvodu s kondensátorem přes jiskřiště. Napětí na kondensátoru bývá 10 000 až 20 000 voltů. Základní schema jiskry je znázorněno na obr. 7, kde je  $R$  regulační odpor v primárním obvodu transformátoru  $T$ ,  $C$  kondensátor (0,001 až 0,01  $\mu F$ ),  $L$  proměnná indukčnost,  $J$  jiskřiště.

Zdroje záření jsou různě upravovány podle účelu spektrální analýsy. Těmito otázkami se zde ovšem nemůžeme podrobněji zabývat; podotkněme však, že právě přechod látky do plynného stavu a podmínky záření jsou nejpalcivějšími a dosud neuspokojivě vyřešenými problémy spektrální analýsy.



Obr. 6. Spektrograf Hilgerův (střední) s generátorem jisker a s jiskřištěm.



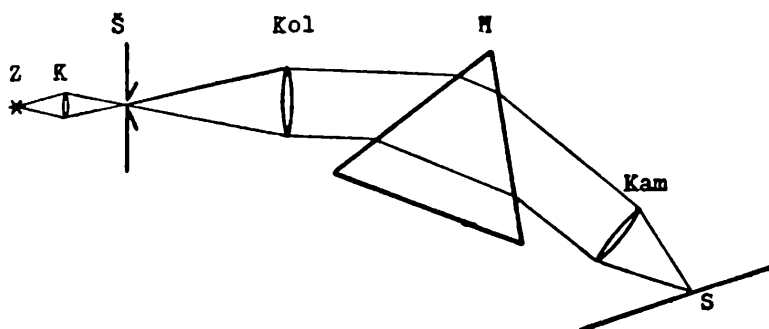
Obr. 7. Schema jiskrového generátoru.

b) K o n d e n s o r je soustava čoček, jíž se má vhodně osvětlit štěrbinu přístroje. I zde se volí taková soustava, která je nejvhodnější pro daný případ.

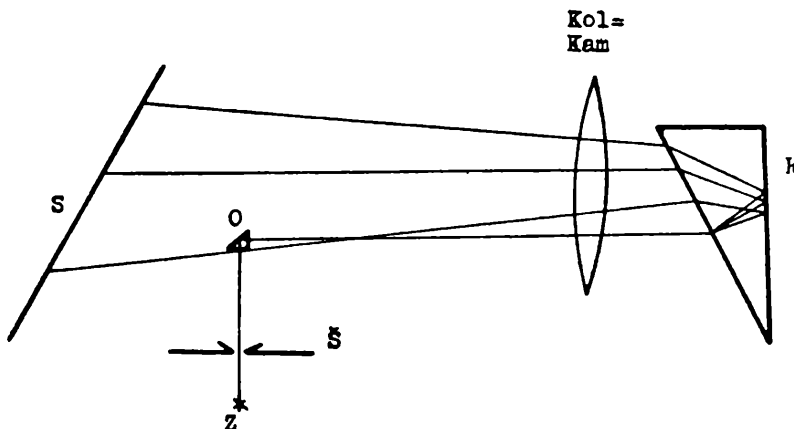
c) Velmi důležitou částí je š t ě r b i n a; její obraz totiž je po rozložení optickým systémem zobrazen na stínítku nebo fotografické desce jako jednotlivé monochromatické spektrální čáry. Má proto vyhovovat mnoha požadavkům: musí být reprodukovatelně říditelná její šířka (bývá 0,02 až 0,03 mm), a to s přesností na 0,001 mm; šířka štěrbiny musí být přesně stejná po celé výšce; štěrbinu musí mít ostré hrany, dokonale hladké, bez nerovností.

d) O p t i k a s p e k t r o g r a f u. Štěrbinu leží v ohnisku kolimátorové

čochky. Proto paprsky, vycházející z kolimátoru na hranol, jsou rovnoběžné. Po rozkladu hranolem se sbírají objektivem kamery, v jejímž ohnisku leží fotografická deska. Na ní pak vzniká ostrý obraz štěrby. Optika spektrografu je buď skleněná nebo křemenná podle toho, v jakém oboru spektra pracujeme. Pro viditelný obor se hodí těžká flintová skla se značně velkým indexem lomu a velkou schopností rozkládat světlo. Avšak již ve fialové části viditelného spektra (kolem  $4100 \text{ \AA}$ ,  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ) se projevuje značný pokles průhlednosti; proto se pro ultrafialovou oblast spektra užívá většinou hranolů křemenných. Mez propustnosti křemene leží kolem  $1600 \text{ \AA}$ . Avšak spektrum končí již v oblasti  $1850$  až  $1900 \text{ \AA}$ , protože pak nastává pohlcování světla vzdušným kyslíkem - v tomto



Obr. 8. Schema běžného hranolového spektrografu.



Obr. 9. Schema autokolimačního hranolového spektrografu.

t. zv. *Schumannovském oboru* je třeba pracovat s *vakuovými spektrografy*. Optika spektrografu je různě uspořádána podle toho, jaký rozklad světla chceme přístrojem dosáhnout. Užívá se proto jednoho nebo více hranolů, kombinace čoček pro vyrovnání chromatické vady a j. Často bývá u spektrografu výměnná křemenná a skleněná optika. Na obr. 8 a 9 je schema běžného systému a systému autokolimačního. Jest tam *Z* zdroj, *K* kondenzor, *Š* štěrbina, *Kol* čočka kolimátoru, *H* hranol, *Kam* čočka kamery, *S* stínítko, *O* odrážející plocha (zrcadlo, hranol).

e) *Kamera spektrografu* je zařízení na upevnění fotografické desky a její posouvání pro zaostření spektra a pro možnost fotografovat více spekter

po sobě a j. V poslední době se často užívá místo desky fotočlánků s registrací, které přímo proměřují intenzity jednotlivých čar.

Spektrální analýza má mnoho velmi cenných vlastností a výhod proti jiným analytickým metodám:

a) Je velmi citlivá; můžeme jí určit nepatrné příměsi v koncentraci  $10^{-2}$  % až  $10^{-5}$  %, to znamená, že můžeme určit na př. množství jednoho dkg niklu ve 100 tunách železa, přirozeně za předpokladu, že stopy niklu jsou pravidelně rozptýleny ve vzorku; u některých prvků je tento poměr ještě lepší. Termín „spektrálně čistý“, který se často užívá k označení stupně čistoty chemického preparátu, znamená pak, že ve vzorku je tak malé množství přímíšenin, že je nelze zjistit spektrálně analytickými metodami.

b) Je velmi rychlá - rovnocenná s nejrychlejšími metodami chemické analýsy; zvláště výhodná je pak při seriové kontrole na př. ve slévárenských laboratořích.

c) Je velmi přesná; při určování malých příměsí (0,001 % až 0,1 %) převyšuje přesnost obvyklých metod chemické analýsy; u středních obsahů příměsí (0,1 % až 2 %) je rovnocenná chemickým metodám; teprve při velkých koncentracích ustupuje přesnosti obvyklých chemických metod.

Další velkou předností je objektivita a dokumentárnost (uschované fotografické desky se spektry dovolují kdykoliv prokázat provedenou analýsu) a spotřeba malých množství látky (někdy i zlomků mg), což umožňuje analyzovat i hotové výrobky, aniž je znatelně poškodíme.

Spektrální analýza má ovšem i své nevýhody. Právě pro svou značnou citlivost je ovšem velmi citlivá i k různým druhům nestejnorodostí v kompaktním vzorku a je proto v tomto případě méně přesná (nemůžeme zjistit průměrné složení vzorku). S tím souvisí i značná citlivost spektrální analýsy ke změně struktury vzorku; na př. různé tepelné zpracování podmiňující strukturální změny má za následek značné změny v intenzitě spektrálních čar. Dále je velmi obtížná analýza preparátů, jež obsahují prvky s velmi složitými spektry; analýza pak vyžaduje značné praxe a pečlivého proměření.

Z toho, co dosud bylo uvedeno, vidíme, že spektrální analýza byla a je velmi cennou metodou theoretických výzkumů jednak pro zjišťování struktury atomů, molekul a poměru v látkách plynných, kapalných i pevných, jednak v astrofysice pro zkoumání složení nebeských těles a poměrů na nich, protože je jedinou metodou podávající přesné údaje o každé hvězdě. Uvedme zároveň, že tyto výzkumy potvrdily, že vesmír se skládá právě jen z těch prvků, které pozorujeme i na zemi.

Dále vidíme, že spektrální analýza, zvláště emisní, je zároveň neobyčejně důležitou metodou pro rychlé zjišťování složení látek v průmyslu, především při získávání velmi čistých prvků nebo sloučenin a při zjišťování obsahu slitin a vlivu technologického postupu na složení slitiny. Tak se může jednak stát přímo vodítkem pro vytváření slitin vhodných vlastností, jednak kritériem správné jakosti výrobků z určitého materiálu. Dnes každý větší strojírenský závod má svou spektrální laboratoř.

Tím jsme si probrali základní principy spektrální analýsy, její užití a stručný

popis běžných spektrálních přístrojů a vytvořili si tak předpoklady, abychom mohli porozumět jednodušším pojednáním o praktické spektrální analýze kvalitativní a kvantitativní a mohli se orientovat v údajích, které nám poskytuje tato velmi užívaná analytická metoda.

Jiří Voleský, Liberec:

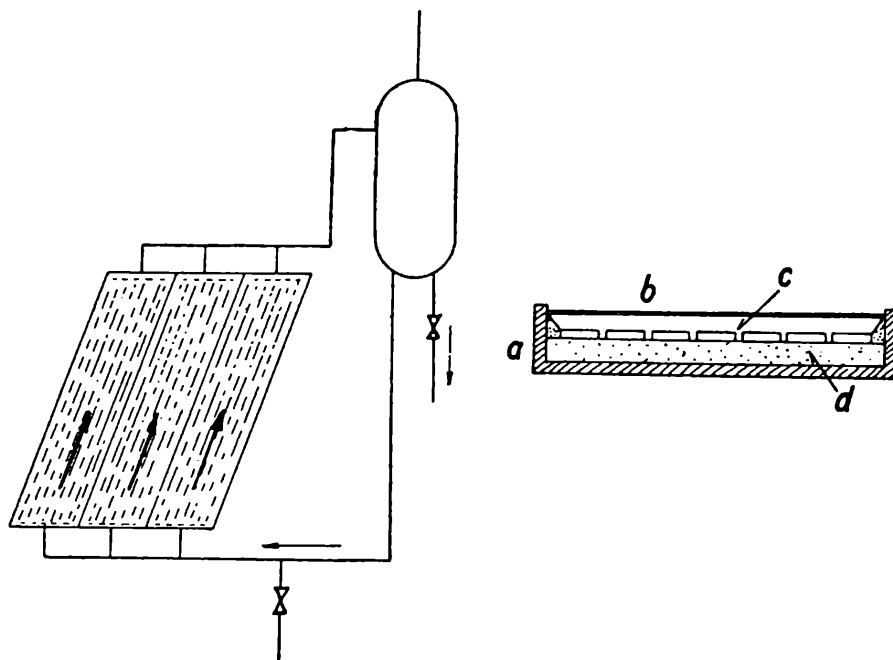
## O využití sluneční energie

Současný vývoj techniky a úrovně našeho života neustále zvyšuje kvantitativní i kvalitativní požadavky na zdroje energie. Avšak i dnes jsme ještě převážnou měrou odkázáni na zdroje uhlí a nafty, které se staly středem zájmu již v prvních počátcích technického rozvoje. Zásoby obou zdrojů se však stále zmenšují a proto věda a technika houževnatě zkoumá použitelnost nových zdrojů energie, i když je to na počátku nevhodné. Dva roky již uplynuly od zahájení provozu v první atomové elektrárně a lidstvo dnes pomalu vstupuje do atomového věku. Uvolňování a využívání jaderné energie se řadí k nejvýznamnějším objevům v dějinách, ale nesmí být důvodem k tomu, aby se opomíjelo využití jiných, méně účinných zdrojů energie. Proto vědci i v dnešní době dále zkoumají různé možnosti, jak využít toho obrovského bohatství energie, kterým sluneční záření zaplavuje Zemi. Pokračují tak vlastně na cestě, kterou různí jednotlivci nastoupili už v dávno minulých dobách.

Množství slunečního záření, dopadající na Zemi, je vyjádřeno t. zv. *solární konstantou*, která udává, kolik energie prochází za 1 vteřinu na hranicích zemské atmosféry plochou  $1 \text{ m}^2$  kolmou ke směru dopadajících slunečních paprsků. Solární konstanta svou velikostí  $\sigma = 1,35 \text{ kW/m}^2$  představuje výkon, kterým bychom za hodinu ohřáli na téže ploše 14 l vody z  $18^\circ \text{C}$  na  $100^\circ \text{C}$ . Avšak průměrně jenom něco více než jedna desetina tohoto množství sluneční energie ( $0,145 \text{ kW/m}^2$ ) dopadne ve stejné době na  $1 \text{ m}^2$  zemského povrchu. Zbytek je odražen, absorbován a rozptýlen v zemské atmosféře. Ze zbývajících množství  $0,145 \text{ kW/m}^2$  připadá  $0,091 \text{ kW/m}^2$  na vlastní sluneční svit a  $0,054 \text{ kW/m}^2$  na difusní světlo oblohy. Zdůrazněme však, že uvedené údaje jsou jen průměrnými hodnotami. Na různých místech povrchu zemského se skutečně naměřené hodnoty značně liší, na př. v afrických pouštích dosahují velikosti  $1 \text{ kW/m}^2$ . A právě z těchto poznatků se dnes vychází při návrzích na stavbu zařízení pro využití sluneční energie. Při tom je možno využít účinků tepelných, fotoelektrických nebo fotochemických.

Pro přímé využití účinků tepelných se konstruuje zvláštní *tepelné sběrače*. Jsou to ploché nádoby z tepelně nevodivého materiálu, přikryté skleněným příklopem, kterým dopadá sluneční světlo. Příklop se skládá z jedné nebo několika skleněných tabulí, mezi nimiž je vzduch. Sklo propouští převážnou část slunečního spektra a pohlcuje jen dlouhovlnné infračervené záření. Propuštěné záření ve sběrači dopadá na různé, většinou černě natřené látky, které je pohlcují a tím se ohřívají. Jejich vlastní záření sklo téměř nepropouští, takže nedochází k úniku tepla ze sběrače vyzařováním. Teplo takto hromaděné ve sběrači se dá proudem vzduchu nebo vody odvádět a dále použít, na př. k pohonu strojů.

Zvlášt' často se s různými druhy podobných zařízení setkáváme na japonském venkově. Japonsko má málo energetických zdrojů, takže na př. pěstitelé rýže topí při ohřívání vody rýžovou slámou, které jinak mohou mnohem výhodněji a hospodárněji použít ke krmení dobytka. Proto tam v poslední době stále stoupá počet těchto slunečních ohřívacích zařízení. Schema jednoho typu je na obr. 1. V okruhu se třemi paralelními ohříváči a zásobníkem teplé vody dochází ke konvekčnímu proudění ohříváné vody. V celém okruhu je asi 230 l vody, která se za příznivého počasí ohřeje až na 65 °C. Podobných ohříváčů se běžně používá v některých sovětských republikách v bytech, prádelnách i zemědělství. Často se s nimi též setkáme jako se součástí sušíren ovoce, tabáku a bavlny. Jsou zárukou úplné čistoty při sušení a tedy i dobré kvality zboží. V jižních oblastech Sovětského svazu, na Krymu, v Zakavkazí a ve středoasijských republikách používají sluneční energie k chlazení bytů a dílen v období velkého vedra. V chladicích zařízeních se odpařuje čpavek, který při tom odebírá z okolí teplo.



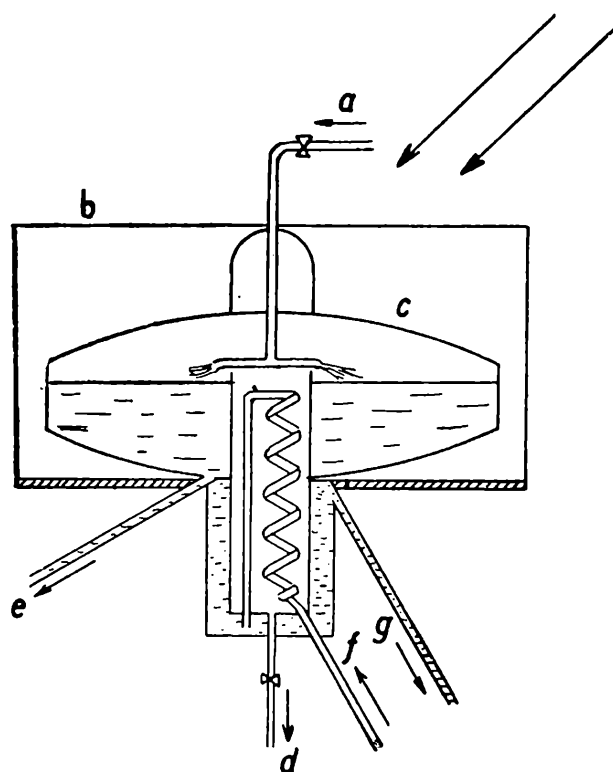
Obr. 1. a) Dřevěný rám; b) skleněná deska; c) ploché měděné trubky; d) izolační vrstva.

V západních oblastech USA, kde jsou často i zimní dny úplně jasné, vytápějí domy slunečními ohříváči, které jsou umístěny na střechách. Přímé vedení tepla do topných těles je však nevýhodné, protože zařízení v noci a při špatném počasí nefunguje. Byly však vypracovány návrhy, které odstraňují i tuto nevýhodu. V starší konstrukci se nevede vzduch přímo do topných těles, nýbrž do dobře izolovaných komor, vyplněných kameny nebo šterkem a tvořících zásobníky, které pak dodávají teplo i po několik nepříznivých dní. Novějším, dokonalejším a dražším tepelným zásobníkem jsou látky, které tají při teplotách mezi 30 až 50 °C, na př. Glauberova sůl. Slunečním teplem roztávají, vedou se do tepelně izolovaného prostoru a dodávají do okruhu teplo tak dlouho, dokud zcela netuhnou.

Ve Spojených státech a zvláště v Severní Africe se dokonce tu a tam používá skleněných ohříváčů k pohonu nízkotlakých parních strojů. Je ovšem jasné, že dosahují jen malých výkonů při poměrně malé účinnosti.

Jinou oblastí, kde lze použít sluneční energie, je destilace mořské vody. Dnes se různá sluneční zařízení, určená k destilaci, z nichž jeden typ je na obr. 2, zkoušejí hlavně na některých místech severoafrických pouští, kde je velký nedostatek vody i paliva a při tom velký nadbytek slunečního záření. Jinde se tohoto způsobu zatím neužívá. Theoreticky by se tak dalo získat za 1 den z každého 1 m<sup>2</sup> povrchu destilační nádrže 10 l sladké vody, avšak při pokusech se maximálně získává jen 6 l vody. Zatím tedy s touto methodou nelze počítat při hlavním úkolu, který chtějí pokusy vyřešit, při velkorysém zavodňování, vyžadujícím velká množství vody.

V tavicích slunečních pecích se využívá vysoké teploty, které dosahujeme soustředěním slunečních paprsků v ohniscích čoček a dutých zrcadel. Tímto způsobem lze dosáhnout teplot až 3000 °C. Při konstrukci slunečních pecí technici většinou používají parabolických zrcadel, neboť jejich konstrukce je snazší než výroba čoček. V některých státech slouží podobné pece k tavení látek s vysokým bodem tání, zvláště když se požaduje co největší čistota taveniny, jako na př. při tavení křemene nebo kyslíčnicku titaničitého. Různá pomocná zařízení automaticky otáčejí zrcadla za Sluncem. Největší taková pec stojí ve francouzských Pyrenejích na hoře Mont Louis a má zrcadlo o ploše 120 m<sup>2</sup>. Podobné pece jsou rovněž v Alžírsku a v Kalifornii, kde slouží většinou metalurgickým účelům. V některých asijských státech, hlavně v oblastech Indie s nedostatkem dřeva, se dnes věnuje velká pozornost výrobě jednoduchých dutých zrcadel, která soustřeďují paprsky do ohniska, v němž je umístěna nádoba s potravinami, určenými k vaření. V Číně nedávno sestrojili jiný jednoduchý přístroj, který využívá sluneční energie k vaření potravy. V dřevěné krabici je menší zinková nádoba, natřená nelesknoucím se lakem. V mezeře mezi oběma nádobami je asbest a bavlna. Celek je přikrytý 3 skleněnými deskami a po straně jsou k němu připevněna dvě zrcadla. Přístroj je velmi laciný a uvaří i při slabém slunečním svitu za 1/2 hodiny 1/2 kg rýže a za 2 hodiny přes 1/2 kg masa.



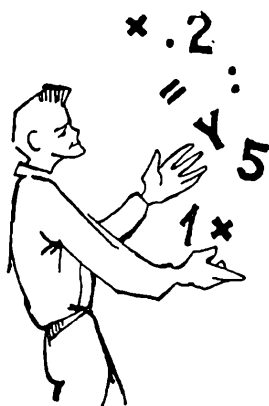
Obr. 2. a) Přítok mořské vody, b) skleněná nádoba; c) zinkový plášť s nátěrem; d) odtok destilátu; e) odtok koncentráту; f) přítok chladicí vody; g) odtok chladicí vody.

V poslední době se dostává do popředí zájmu přímá přeměna sluneční energie v elektrickou, která v příštích letech jistě dosáhne širokého použití ve sdělovací elektrotechnice. Zářivá energie se mění v elektrickou ve fotobuňkách, které nabíjejí sluneční baterie. Při vývoji těchto přístrojů se dnes hlavně soustřeďuje

pozornost na zvýšení jejich účinnosti, která zatím dosahuje 11 %, avšak výpočty dokazují možnost ji zvýšit theoreticky až na 23 %. Veškerá energie záření se však nemění v elektřinu, protože jen asi 40 % dopadajícího záření se účastní energetické přeměny. Sluneční elektrické zdroje nebudou mít význam pro provoz s vysokými výkony, ale hlavně pro dodávání proudu do telefonních sítí.

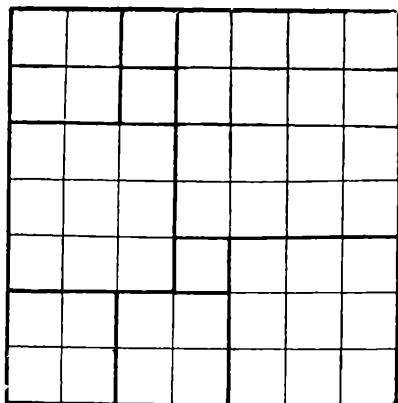
Úlohy slunečního světla v chemických reakcích si dnes vědecký výzkum všímá hlavně při dvou procesech. Je to především přeměna kyseliny uhličité a vody v uhlovodíkové látky, která za působení chlorofylu probíhá v rostlinách. Úloha světla při této reakci ani dnes ještě není uspokojivě vysvětlena. Druhým procesem je rozklad vody na kyslík a vodík pomocí slunečního záření. Až výzkum této reakce dospěje tak daleko, aby se dala technicky provádět ve velkém, bude to představovat veliký pokrok, protože to vyřeší dokonale problém neomezeného hromadění přeměněné sluneční energie. Získaný kyslík a vodík bychom pak totiž mohli shromažďovat a po libovolnou dobu uchovávat v zásobě.

Ze všeho, co jsme uvedli, je patrné, že dnes ještě nemůžeme mluvit o nějakém širokém využívání sluneční energie. Používaná zařízení jsou poměrně nákladná a dosti málo účinná, takže se o jejich konstrukci prozatím zajímají především jižní země, chudé na palivové zdroje. Je však nepochybné, že i v budoucnosti bude užitečné a oprávněné věnovat sluneční energii pozornost, kterou zasluhuje a že další práce vědců a techniků přinese její lepší a hospodárnější využití.



## Matematické zábavy

### Skládačka



Obr. 1

Posledně jsme měli skládačku, která vplynula z Pythagorovy věty, Dnes si ukážeme skládačku založenou na jiném principu. Vyjdeme z jednoduché identity

$$7^2 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 4^2.$$

Tuto identitu můžeme velmi pěkně znázornit geometricky, jak ukazuje připojený obrázek 1. Každá identita takového tvaru se však nedá takto znázornit, ale jde to s identitami



$$a) 9^2 = 5^2 + 2 \cdot 4^2 + 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2;$$

$$b) 13^2 = 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 4^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2;$$

$$c) 25^2 = 16^2 + 2 \cdot 9^2 + 7^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2.$$

Pokuste se o to, není to nic obtížného.

S. H.



## *Různé-recenze*

### **Šedesátiny**

### **profesora Karla Koutského**

Profesor Karel Koutský se narodil 21. října 1897 v Lounech. Již za svých studií na kutnohorské reálce hleděl vypomoci rodičům tím, že dával kondice; později na vysoké škole byl existenčně odkázán zcela sám na sebe. V r. 1922 ukončil státními zkouškami z matematiky a deskriptivní geometrie vysokoškolská studia přerušena válkou a v r. 1926 dosáhl na Karlově universitě doktorátu přírodních věd.

Od roku 1921 působil na různých středních školách. Před příchodem do Brna zabýval se teorií čísel a publikoval řadu původních vědeckých pojednání. V téže době se stal jedním z předních spolupracovníků *Rozhledů* matematicko-přírodovědeckých, do nichž pilně přispíval. V Brně se vlivem akademika Čecha věnoval studiu topologie a pracoval v jeho semináři. Ačkoliv trpěl vleklou chorobou, podílel se po válce s plnou energií na vybudování Matematického semináře pedagogické fakulty Masarykovy university v Brně, na níž působil od r. 1946. V roce 1948 se habilitoval z matematiky na přírodovědecké fakultě této university, kam v r. 1952 přešel jako řádný profesor. Roku 1955 byla mu udělena hodnost doktora fyzikálně-matematických věd.

Vědecké práce profesora Koutského zasahují do teorie čísel, topologie, teorie svazů a elementární geometrie. Svě pedagogické zkušenosti dal k dispozici při zpracování učebních osnov a učebnic matematiky pro jedenáctiletky z r. 1954. Před druhou světovou válkou vydal přehledy středoškolské matematiky.

Profesor Koutský se zajímá o historii a ideologii matematiky. Pracuje na publikaci o dějinách matematiky a fyziky na Slovensku a jeho přednášky a práce o ideologických otázkách v matematice, hlavně kniha *Matematika a dialektický materialismus*, jsou průkopnické. Organizační schopnosti uplatňuje profesor Koutský jako vedoucí katedry matematiky na přírodovědecké fakultě v Brně. Z jeho podnětů vzniklo mnoho prací mladých matematiků, které profesor Koutský kolem sebe shromáždil.

O charakterových vlastnostech profesora Koutského nejlépe svědčí důvěra všech, kteří měli příležitost poznat jeho přímou, čestnou povahu, nezlomnou

energii a lidský vztah k druhým. Přejeme profesoru Koutskému, aby další léta jeho života byla plna úspěchů a aby zůstal tak duševně mlád a svěží jako dosud.

Ladislav Kosmák

## Zemřel PhDr. Josef Honzák

Dne 23. července 1957 zesnul v Pardubicích po kratší nemoci zasloužilý učitel Ph Dr Josef Honzák ve věku 73 let. Školské veřejnosti byl Dr Honzák znám jako vynikající učitel a metodik, který vychoval celou řadu výborných matematiků, i jako autor mnoha metodických a odborných článků. Téměř až do své smrti působil Dr Honzák na jedenáctileté střední škole v Pardubicích a jako předseda krajského výboru Matematické olympiady přispěl k rozvoji této soutěže v Pardubickém kraji.

Za svou obětavou službu škole byl Dr Honzák před časem jmenován zasloužilým učitelem a Jednota československých matematiků a fysiků jej vloni vyznamenala čestnou cenou.

Rud. Zelinka



## Úlohy k řešení

5. Dokážte, že pri  $a \neq b$ ,  $b \neq c$ ,  $c \neq a$  platí

$$\frac{(x-a)(y-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-b)(y-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-c)(y-c)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

Dôkaz podajte dvojakým spôsobom: 1. podľa vety 1 (P. Bartoš: O lineárnych rovniciach s jednou neznámou, ktoré majú dva korene - Rozhľedy č. 2);

2. Úpravami ľavej strany rovnosti.

P. Bartoš

Řešila s. Marie Melicharová, 9. d, JSS v Hradci Králové

1. Řešení podle věty 1: Považuji rovnost za rovnici s neznámou  $x$ :

$$\begin{aligned} x \left[ \frac{y-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{y-b}{(b-a)(b-c)} + \frac{y-c}{(c-a)(c-b)} \right] &= \\ = 1 + \frac{a(y-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(y-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c(y-c)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

Z toho je vidět, že je to rovnice lineární.

Zvolíme si dva kořeny  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  a dosadím do původní rovnice.

Dostanu při  $x_1 = a$ :

$$-\frac{(a-b)(y-b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)} = -\frac{y-b}{b-c} + \frac{y-c}{b-c} = \frac{b-c}{b-c} = 1$$

$$1 = 1.$$

Dosadím  $x_2 = b$ :

$$-\frac{(a-b)(y-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-c)(y-c)}{(b-c)(a-c)} = -\frac{y-a}{a-c} + \frac{y-c}{a-c} = \frac{a-c}{a-c} = 1$$

Číslo  $a$  i číslo  $b \neq a$  je kořenem rovnice. Má-li však tato rovnice dva různé kořeny, vyhovuje jí podle věty 1. při libovolných číslech  $a, b, c, y$  splňujících podmínky  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$  každé číslo  $x$ .

2. Úpravou levé strany dostanu:

$$\frac{(x-a)(y-a)(b-c) - (x-b)(y-b)(a-c) + (x-c)(y-c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{a^2b - a^2c + b^2c - a^2c + ac^2 - bc^2} = 1$$

$$1 = 1.$$

Tím jsem dokázala, že při  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$  platí daná rovnost.

6. Jsou dány rovnoběžky  $a, b$ , ve vzniklém pásu bod  $C$  a na přímce  $a$  bod  $A$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která má střed  $S$  na přímce  $a$ , prochází bodem  $A$  a přímkou  $b$  protíná v bodě  $B$  tak, aby spojnice  $BS$  procházela bodem  $C$ .

Ota Setzer

Řešila s. Marie Melicharová, 9.d žSŠ v Hradci Králové.

*Rozbor:* V rovnoramenném trojúhelníku  $ABS$  označme strany  $AB = k, AS = l, BS = m$ ; protože  $l = m$ , musí i výšky  $v_1 = v_m$ , přitom  $v_1$  je vzdálenost rovnoběžek  $a, b$ . Pata výšky  $v_m$  má od bodu  $A$  vzdálenost  $v_1$ .

*Konstrukce:* Sestrojíme z bodu  $A$  kružnici  $k$  o poloměru  $v_1$  (geometrické místo pat výšek  $v_m$ ). Z bodu  $C$  vedeme tečnu  $m$  ke kružnici  $k$ . Průsečík přímek  $a, m$  je bod  $S$ , průsečík  $b, m$  je bod  $B$ .

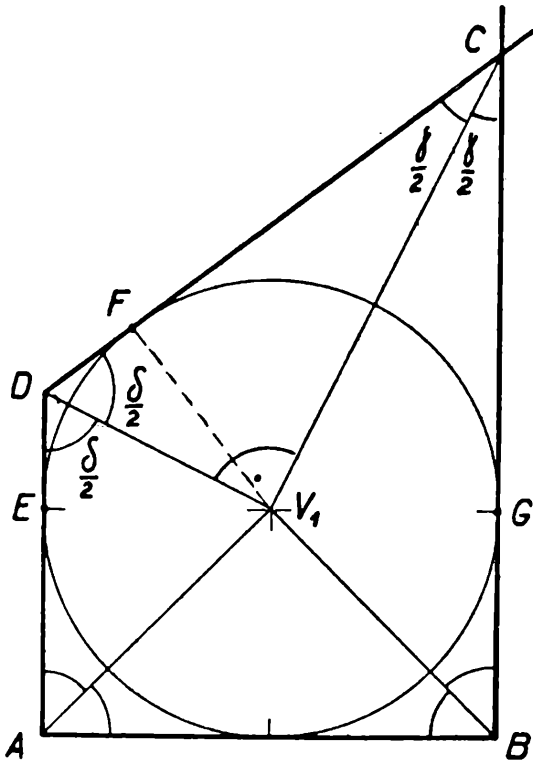
*Diskuse:* Úloha má tehdy a jen tehdy řešení, když  $AC \geq v_1$ ; je-li  $AC > v_1$ , leží bod  $C$  vně kružnice  $k$  a lze k ní vésti dvě tečny  $m$ , existují 2 řešení; je-li  $AC = v_1$ , leží bod  $C$  na  $k$ , existuje jedna tečna  $m$  a tím i jedno řešení.

P. Štefan Bračok z OSS v Lipt. Lúžnej riešil ten istý príklad tak, že zostrojil kružnicu  $h \equiv (A, AC)$ , ktorá pretne priamku  $b$  v bode  $C'$ ; zostrojil os tetivy  $CC'$ . Táto nutne predchádza bodom  $A$  a pretne priamku  $b$  v bode  $B$ ; priamka  $BC$  pretne priamku  $a$  v hľadanom bode  $S$ .

P. Vítězslav Littmann z Berouna užívá k řešení buď pravoúhlých deltoidů (obdoba řešení M. Melicharové) nebo zvláštní kubiky (křivky 3. stupně), jež některé vlastnosti podrobně studuje.

7. Starý stavitel stavěl věž lichoběžníkového půdorysu  $ABCD$  ( $AB = a = 8$  m,  $BC \perp AB$ ,  $AD = d = 6$  m,  $AD \perp AB$ ). Stranu půdorysu  $BC = b$  měl tak zvolit, aby bylo možno provést t. zv. stanovou střechu ve tvaru jehlanu, jehož pobočné stěny svírají s vodorovnou rovinou tých úhel. Pamatoval si ze školy pouze základy planimetrie a deskriptivní geometrie, trigonometrii již zapomněl. Nedivte se, že byl smutný a dlouho po papíře psal a kreslil. Až náhle se uhodil do čela a úlohu nejen snadno narýsoval několika přímkami, ale i bez tabulek vypočítal zbývající strany půdorysu a na staveništi jej doplnil.

M. Menšík



Obr. 1

a) Řešili Z. Hurych, 10.a, JŠŠ z Jihlavy a p. V. Littmann z Berouna:

Řešitelé užíli věty, že pravoúhlý průmět průsečnice dvou rovin stejných spádů půlí úhel jejich stop.

Osy pravých úhlů při vrcholech  $A$  a  $B$  (obr. 1) se protnou v půdorysu  $V_1$  vrcholu věže  $V$ . Proto sestojíme  $\sphericalangle V_1DC = \sphericalangle ADV_1$ , kde  $C$  je průsečík ramene úhlu  $DC$  s polopřímku  $BC \perp AB$ . Úsečky  $AV_1$ ,  $BV_1$ ,  $CV_1$ ,  $DV_1$  jsou půdorysy průsečnic (t. zv. nároží) střešních rovin. Ježto je  $\delta + \gamma = 180^\circ$ , je  $\sphericalangle DV_1C = 90^\circ$ . Dále Eukleidovou větou nebo podobností trojúhelníků vypočteme  $CF = 8$ ,  $CD = 10$  ( $DE = 6 - 4 = 2 = DF$ ) a  $BC = CG + GB = 8 + 4 = 12$ .

b) Řešila s. Melicharová, 9.d, JŠŠ z Hradce Králové:

Pisatelka uvážila, že délky nejdelších spádových úseček všech čtyř střešních rovin o témže spádu jsou si rovné.

Půdorys  $V_1$  vrcholu střechy  $V$  je tedy středem kružnice vepsané lichoběžníkovému půdorysu  $ABCD$  věže; strana  $DC$  je tečnou vedenou z bodu  $D$  k této kružnici. Proti předchozímu řešení je tento postup konstruktivně méně přesný.

Jediný řešitel (Littmann) upozornil též na možnost užití věty: Ve čtyřúhelníku tvořeném tečnami kružnice jsou součty protějších stran sobě rovné. Tedy v našem případě  $AB + DC = AD + BC$ , t. j.  $8 + (2 + CF) = 6 + CB$  a odtud  $CB = 12$

Tentokrát byla zaslána řada správných, byť někdy neúplných řešení. Nikdo neuvážil podmínku pro řešitelnost úlohy ( $d > \frac{a}{2}$ ), ani zvláštní případ  $d = a$ .

8. Olověná střela letící vodorovně se nárazem na terč zastaví. Původní teplota střely byla  $t = 17\text{ }^{\circ}\text{C}$ , bod tání olova jest  $t = 327\text{ }^{\circ}\text{C}$ , specifické teplo olova  $c = 0,03\text{ kcal kg}^{-1}\text{ grad}^{-1}$ , skupenské teplo tání olova  $\varrho = 6\text{ kcal kg}^{-1}$ . Určete minimální rychlost, při níž by se střela úplně roztavila při nárazu na terč: Jest nutno znáti hmotu střely? To je theorie, nastane tento případ ve skutečnosti?

E. Říman

Řešil Bohdan Zelinka, 11. JSS v Liberci I, Ign. Hermann 2.

Zastaví-li se střela, změní se její kinetická energie v teplo. Aby se roztavila, musí získat teplo, které ji ohřeje na bod tání t. j.  $Q_1 = m c (t_1 - t)$  a teplo, kterého je třeba ke změně skupenstva t. j.  $Q_2 = m\varrho$ , tedy celkem  $Q = m c(t_1 - t) + m\varrho$ .

Množství tepla, vzniklé z kinetické energie ( $\frac{1}{2} m v^2$ ) zjistíme znásobením tepelným ekvivalentem práce  $I = 0,24 \frac{\text{cal}}{\text{J}} = 2,4 \cdot 10^{-4}\text{ kcal J}^{-1}$ . Protože platí zákon o zachování energie, můžeme tedy psát rovnici

$$\frac{1}{2} m v^2 I = m c (t_1 - t) + m \varrho$$

Z toho

$$v = \sqrt{\frac{2 c (t_1 - t) + 2 \varrho}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,03 \cdot 310 + 2 \cdot 6\text{ kcal kg}^{-1}}{2,3 \cdot 10^{-4}\text{ kcal J}^{-1}}} = \sqrt{\frac{51 \cdot 10^4\text{ J}}{4\text{ kg}}} \doteq \\ \doteq 357 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ neboť } \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{m}^2 \text{ s}^{-2}} = \text{m s}^{-1}$$

Hmotu znát nemusíme, protože se při výpočtu krátí. V praxi však nutno uvážit, že se kinetická energie spotřebuje částečně také na deformaci terče, na ohřátí terče a okolního vzduchu a část tepla se také vyzáří. Proto se střela neroztaví.

P o z n á m k a r e d a k c e: Někteří řešitelé pochybili užitím převodního vztahu

$$1\text{ kcal} = 427\text{ kg}^* \text{m},$$

jenž však převádí jednotku tepla do statické soustavy (na „kilopondmetry“), ale nikoliv do MKS (na „jouly“), zde potřebné. Kdyby byli řešitelé při číselném výpočtu dosazovali také r o z m ě r (jednotku), byli by chybu sami zpozorovali.

9. V nádobě s terpentýnovým olejem, jehož hustota při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  je  $s_1 = 0,87\text{ g cm}^{-3}$  a koeficient objemové roztažnosti je  $\beta_1 = 0,001\text{ grad}^{-1}$ , plove dřevěná kulička hustoty  $s_2 = 0,85\text{ g cm}^{-3}$  (při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), mající objemový koeficient roztažnosti  $\beta_2 = 2 \cdot 10^{-5}\text{ grad}^{-1}$ . Při které teplotě klesne kulička ke dnu?

E. Říman

Řešil Pavel Aksamit, 10.b, JSS v Pardubicích, Sladkovského 8:

Máme-li předmět objemu  $V$  a hmoty  $m$ , pak hustotu látky, z níž je zhotoven, vypočteme podle vzorce  $s = \frac{m}{V}$ .

Zahříváme-li tento předmět, jeho objem se zvětšuje podle vzorce  $V' = V(1 + \beta t)$ , kde  $V'$  = objem při dané teplotě  $t$ ,  $V$  = původní objem,  $\beta$  = koef. roztažnosti.

Hustotu látky při teplotě  $t$  vypočteme podle vztahu

$$s' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V(1 + \beta t)} = \frac{s}{1 + \beta t}$$

V daném případě nastane při určité teplotě  $t$  případ, že hustota oleje i dřeva bude stejná, čili kulička se bude v oleji vznášet. Pro hustoty daných látek bude potom platit

$$s'_1 = \frac{s_1}{1 + \beta_1 t}, \quad s'_2 = \frac{s_2}{1 + \beta_2 t}$$

Má-li váha kuličky být rovna nadlehčující síle kapaliny, musí  $s'_1 = s'_2$ , t. j. obě látky mají stejnou hustotu. Po dosažení máme

$$\frac{s_1}{1 + \beta_1 t} = \frac{s_2}{1 + \beta_2 t},$$

$$\text{z čehož plyne } t = \frac{s_1 - s_2}{s_2\beta_1 - s_1\beta_2} = 24,02 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Kulička klesne ke dnu, bude-li teplota oleje vyšší než  $24,02 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

10. Jistě víte, jak může táhnout na šachovnici dáma (královna). Představte si šachovnici, která má  $n^2$  polí. Pokládáme-li tah z pole  $x$  na pole  $y$  různý od tahu z pole  $y$  na pole  $x$ , může na této šachovnici královna provést celkem  $\frac{2}{3}n(n-1)$   $(5n-1)$  tahů. Dokažte!

J. Sedláček

*Řešila s. Jarmila Hábová, 11. c, JŠS v Strážnici:*

Uvažujme šachovnici, která má  $n^2$  polí ( $n \geq 2$ ). Ve směru svislém i vodorovném lze z každého pole provést  $n-1$  tahů, to je tedy celkem  $2n^2(n-1)$  tahů.

Šikmým směrem je  $2 \cdot 2 [(n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1] + 2n(n-1)$  tahů.

Je-li  $n$  liché, lze výraz v hranaté závorce upravit na tvar  $2 [1^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2]$ , což je dvojnásobek částečného součtu druhých mocnin lichých čísel (viz článek doc. Setzera „O posloupnosti mocnin lichých čísel“, Rozhledy č. 1, str. 4). Upravíme jej na tvar

$$2 \frac{n-1}{2 \cdot 3} \left( 4 \frac{n^2 - 2n + 1}{4} - 1 \right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

Je-li  $n$  sudé, lze výraz v závorce upravit na tvar

$$\begin{aligned}
& 2 [1^2 + 3^2 + \dots + (n-3)^2] + (n-2)(n-1) = \\
& = 2 \frac{n-2}{2 \cdot 3} \left( 4 \frac{n^2 - 4n + 4}{4} - 1 \right) + (n-2)(n-1) = \\
& = \frac{n-2}{3} (n-1)(n-3) + (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}
\end{aligned}$$

Celkový počet tahů je v obou případech roven

$$\begin{aligned}
& 4 \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + 2n^2(n-1) + 2n(n-1) = \\
& = \frac{n(n-1)}{3} (4n - 8 + 6n + 6) = \frac{2}{3} n(n-1)(5n-1)
\end{aligned}$$

Vidíme, že odvozený počet tahů je shodný se vzorcem, který jsme měli dokázat.

Poznámka redakce: Úlohu lze řešit i pomocí matematické indukce, jak ji také prováděli někteří řešitelé.

11. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník, v němž delší základna je shodná s úhlopříčkou a kratší základna je shodná s ramenem. Delší základna má délku 7.  
St. Horák

Řešila s. Marie Melicharová, 9. d. JSSŠ J. K. Tyla v Hradci Králové.

Hledaný lichoběžník budiž  $ABCD$ , kde  $AB = 7$ ,  $CD$  jsou základny. Podle úlohy platí

$$AB' = AC = BD, AD = CD = BC.$$

Velikost úhlu  $\sphericalangle CAD$  označme  $\alpha$ . Trojúhelník  $ACD$  je rovnoramenný a proto

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = \alpha.$$

Dále platí

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB = \alpha,$$

neboť jsou to střídavé úhly při rovnoběžkách. Vidíme, že úhlopříčka  $AC$  půlí vnitřní úhel  $\sphericalangle DAB$  lichoběžníka  $ABCD$ .

Dále trojúhelník  $DAB$  je rovnoramenný a proto

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB = 2\alpha.$$

Z toho dostáváme

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 3\alpha.$$

Hledaný lichoběžník má podle toho vnitřní úhly po řadě  $2\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ ,  $3\alpha$ . Poněvadž součet vnitřních úhlů lichoběžníka je  $360^\circ$ , plyne z toho

$$\alpha = 36^\circ.$$

Úhel velikosti  $36^\circ$  dovedeme sestavit (viz článek „Zlatý řez“ A. Kejzlara v 2. č. Rozhledů) a tím je úloha rozřešena. Z konstrukce je patrné, že úloha řešení má vždy, a to jediné.

*P. Štefan Bračok z Lipt. Lúžnej* riešil ten istý príklad tak, že vrcholom  $C$  zostrojil rovnobežku s ramenom  $AD$ . Táto pretne  $AB$  v bode  $E$ . Štvoruholník  $AECD$  je kosoštvorec. Ďalej zistil, že

$$\triangle CAB \sim \triangle BCE$$

a preto

$$AB : BC = BC : EB \text{ čiže } AB : AE = AE : EB.$$

Teda  $AE$  je väčším úsekom zlatým rezom rozdelenej základne  $AB$ . Zostrojíme teda bod  $E$  na  $AB$ , potom trojúholník  $EBC$  a t. d.

*Pavel Aksamit, 10 b. JSS z Pardubic* dokázal, že průsečík  $S$  úhlopříček  $AC$ ,  $BD$  dělí úhlopříčku  $BD$  podle pravidla zlatého řezu. Při konstrukci pak vycházel z této vlastnosti.

12. Zobrazte kulovou plochu, která prochází body  $A(-3; 5; 3)$ ,  $B(2, 2; 3)$  a která se po otočení o  $90^\circ$  kolem přímky  $AB$  dotkne půdorysny a po dalším otočení o  $90^\circ$  nárysny.

O. Setzer

*Řešil František Smékal, 11. b JSS v Olomouci:*

Otočíme-li půdorysnu  $\pi$  kolem osy  $AB$  o  $\pm 90^\circ$ , dostaneme roviny  $\pi' \perp \pi$  a  $\pi'' \perp \pi$ , otočením nárysny  $\nu$  kolem téže osy o  $180^\circ$  vznikne rovina  $\nu' \perp \pi$ . Hledaná kulová plocha je pak určena danými body  $A, B$  a tečnými rovinami  $\pi'$  (resp.  $\pi''$ ) a  $\nu'$ .

Půdorys  $S_1$  jejího středu leží v průsečíku přímek  $\sigma_1$  a  $\sigma'_1$  (resp.  $\sigma''_1$ ), kde  $\sigma_1$  je půdorys roviny symetrie  $\sigma$  úsečky  $AB$  a  $\sigma'_1$  ( $\sigma''_1$ ) je půdorys roviny souměrnosti  $\sigma'$  ( $\sigma''$ ) rovin  $\nu'$  a  $\pi'$  ( $\pi''$ ). Vzdálenost bodu  $S_1$  od  $\nu'_1$  je poloměr hledané koule. Roviny souměrnosti  $\sigma', \sigma''$  volíme vždy tak, aby procházely tím poloprostorem rovin  $\pi', \pi'', \nu'$ , který obsahuje i body  $A, B$ .

Úloha má dvě řešení.

13. Odstředivý regulátor, skládající se ze dvou kulových závaží, z nichž každé je na rameni délky  $l$ , se otáčí s dobou oběhu  $T$ .

a) Ukažte, že vzdálenost roviny, v níž závaží obíhají, od bodu upevnění je dána vztahem

$$x = \frac{g T^2}{4 \pi^2},$$

čili nezávisí vůbec na délce ramene  $l$ .

b) Propočtěte číselně pro  $T = 0,01$  min!

c) Pro pomalé oběhy tento vzorec však vede ke zřejmě nesprávným výsledkům; proč a jak nutno vzorec doplnit?

E. Říman

*Řešení autorovo:* a) Zanedbáme-li hmotu ramenové páky, působí na závaží dvě síly: jednak váha, směrem svisle dolů, o velikosti  $G = mg$ , kde  $m$  značí hmotu jedné koule, a jednak odstředivá síla  $F$  směrem vodorovným o velikosti  $F = \frac{mv^2}{R}$ ,



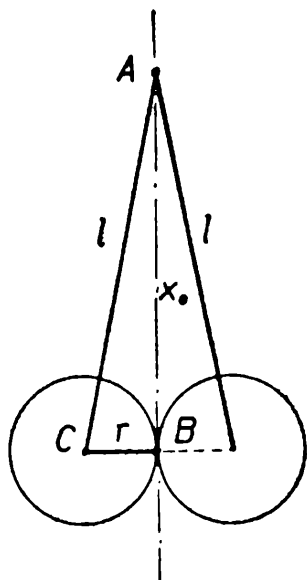
takže výslednice svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ , jehož  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{m v^2 R^{-1}}{m g} = \frac{1}{R g} v^2$ . Protože závaží regulátoru konají kruhový pohyb se stálou rychlostí  $v$ , kterou určíme ze vztahu

$$v = \frac{\text{délka kružnice}}{\text{doba oběhu}} = \frac{2 \pi R}{T}, \text{ bude } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{R g} \frac{4 \pi^2 R^2}{T^2} = \frac{4 \pi^2 R}{g T^2}.$$

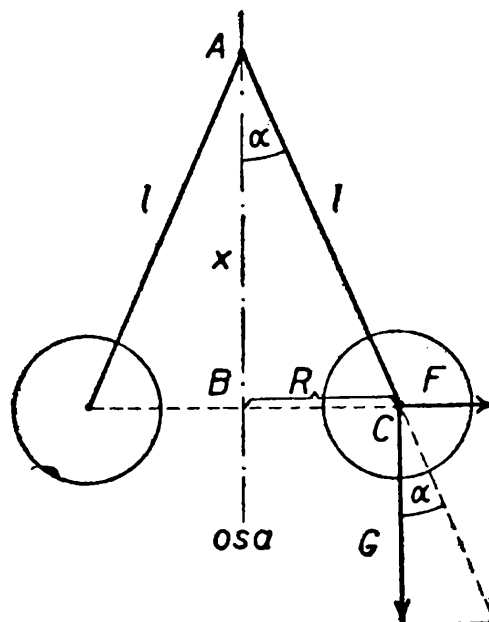
Trojúhelník  $ABC$  (obr. 1) jest pravouhlý (přepona  $l$ , odvěsny  $x$ ,  $R$ ), proto

$$x = R \operatorname{cotg} \alpha = R \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = R \frac{g T^2}{4 \pi^2 R} = \frac{g T^2}{4 \pi^2},$$

čímž je vztah dokázán.



Obr. 1



Obr. 2

b) Číselně:  $T = \frac{1}{100} \text{ min} = \frac{1}{100} \cdot 60 \text{ s} = 0,6 \text{ s}$ , takže

$$x = \frac{9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,36 \text{ s}^2}{4 \pi^2} = 0,089 \text{ m}.$$

c) Pro pomalé běhy, t. j. veliká  $T$ , jest ovšem také  $x$  veliké, což vzbuzuje paradoxní dojem, neboť  $x$  přece nemůže být větší než délka ramene  $l$ . Odvozený vzorec však tvrdí, že  $x$  na délce ramene nezávisí. Příčina sporu je v tom, že pro malé otáčecí rychlosti obě kulovitá závaží (mající jistý vlastní poloměr  $r$ ) se dotýkají osy  $AB$ , takže část váhy obou závaží tlačí na osu (obr. 2). Vzorec tedy začíná platit teprve tehdy, až se závaží opírá o svislou osu nulovou silou a kdy  $x_0 = \sqrt{l^2 - r^2}$ , jak patrně z obrázku. Dosazením do daného vzorce pro  $x$  možno pak určit meznou dobu oběhu  $T_0$  takto:

$$\frac{gT_0^2}{4\pi^2} = x_0 = \sqrt{l^2 - r^2}, \text{ z čehož } T_0 = 2\pi \sqrt[4]{\frac{l^2 - r^2}{g^2}}$$

Vzorec pak nutno vyslovit takto: Vzdálenost roviny kulových závaží odstředivého regulátoru je

$$x = \frac{gT^2}{4\pi^2} \text{ pro } T \leq 2\pi \sqrt[4]{\frac{l^2 - r^2}{g^2}},$$

kde  $r$  je poloměr závaží. Jest vidno, že podobně jako v matematice, nutno i ve fyzice přísně udávat, pro které hodnoty nezávisle proměnné daný vzorec platí!



## Redakce hovoří se čtenáři

✱ *List z ciziny. Obdrželi jsme milý dopis od p. Ju. M. Hajduka z Charkova na Ukrajině v SSSR, z něhož vyjímáme:*

*... měl jsem možnost seznámit se s Vámi redigovaným časopisem pro studující.*

*Pokládám za svoji příjemnou povinnost vyjádřit Vám své hluboké uspokojení nad prvními podařenými kroky znovuvydávaného časopisu.*

*Mám v úmyslu otisknouti v některém z odborných sovětských časopisů podrobný rozbor obsahu vydaných šesti čísel Rozhledů matematicko-fyzikálních. Přál bych si, aby Rozhledy byly zařazeny do katalogu československých publikací, na které se přijímá v SSSR předplatné v pobočkách „Sojuzpečati“. V takovém případě by časopis získal mnoho čtenářů a přátel i v Sovětském svazu...*

*Těší nás takovýto zájem o náš časopis u našich zahraničních přátel:*

✱ *Redakce znovu důrazně žádá přispěvatele, aby zasílali své rukopisy v řádné úpravě a aby zvláště dbali na provedení obrázků podle návodu daného v prvním čísle. Nevyhovující rukopisy i obrázky musí jinak redakce dát vyhotovit na náklad autorů a mimo to se tím značně oddálí uveřejnění takového příspěvku.*

✱ *Abychom vyhověli řadě dotazů, zařadíme do některého z příštích čísel pojednání o historii Ludolfova čísla a o trisekci úhlu. Prameny k studiu důkazu o transcendentnosti čísla  $\pi$  a tedy o nemožnosti provedení t. zv. kvadratury kruhu uvádíme alespoň tyto: Oskar Perron: Irrationalzahlen, VWV Berlín a Lipsko 1921, sv. 1., str. 178—182; Georges Valiron: Cours d'analyse mathématique, Masson Paříž, 2. vydání, sv. 1, 1948, str. 105. Obě knihy vyžadují pokročilého čtenáře.*

# Příklady pro Matematickou olympiádu

Přinášíme devět příkladů pro účastníky letošního ročníku Matematické olympiády (kategorie A, B, C). Podrobnosti o této soutěži vám sdělí buď váš učitel matematiky nebo se je dovíte na zvláštním letáku, který vyjde později. R. Z.

## Kategorie A

(pro žáky 11. ročníků JSS a 3. a 4. ročníků odb. škol)

1. Dokážte, že pro všechny  $x$  platí:

a)  $|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}$ ;

b)  $\cos^4 x + \sin^4 x \geq \frac{1}{2}$ .

2. Zjistěte průběh funkcí:

a)  $y = \frac{x + |x|}{2x^2}$

b)  $\frac{2x^2}{x + |x|}$

3. Nech  $m \geq n \geq p$  sú veľkosti stenových uhlopriečok kvádra. Vypočítajte veľkosti hrán  $a, b, c$  tohto kvádra. Dokážte, že podmienkou riešiteľnosti je, aby sa dal zostrojiť trojuholník zo strán  $m, n, p$  a aby tento trojuholník bol ostrouhlý.

[Poznámka: V kvádri  $ABCD A' B' C' D'$  (kde je  $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ ) voľte označenia takto:  $a = AB, b = AD, c = AA', m = AD', n = AB', p = AC'$ .]

## Kategorie B

(pro žáky 10. ročníků JSS a 2. ročníků odb. škol)

1. Určete všechna reálná čísla  $p$  tak, aby rovnice

$$\frac{px}{x+p} + \frac{x+1}{x-p} = -1$$

měla jeden kořen  $x = 2$ . Vypočtete pak všechny kořeny této rovnice.

2. Nad úsečkou  $AB = 2a$  jako průměrem sestrojme polokružnici  $k_1$  o středu  $S$ . Označme  $SC \perp AB$  poloměr kružnice  $k_1$  a nad úsečkou  $SC$  jako průměrem sestrojme kružnici  $k_2$  se středem  $O$ .

Sestrojte kružnici  $k$ , která se dotýká polokružnice  $k_1$ , kružnice  $k_2$  a přímky  $AB$ . Vypočtete její poloměr pomocí daného čísla  $a$ .

3. Určte všetky reálne čísla  $x$ , pre ktoré platí vzťah

$$\frac{|x| - 1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{2}$$

## Kategorie C

(pro žáky 9. ročníků JSS a 1. ročníku odb. škol)

1. Ve dvou nádobách (označme je  $A$  a  $B$ ) máme dva lihové roztoky, v nádobě  $A$  jsou 2 litry lihu 60%, v nádobě  $B$  pak 3 litry lihu 80%. Z nádoby  $B$  do  $A$  přelejme 1 litr tekutiny, řádně rozmíchejme a pak přelejme 1 litr tekutiny z nádoby  $A$  do  $B$ .

Vypočtete, kolikaprocentní je luh v nádobách  $A$  a  $B$  po obou přelitích.

2. Zostrojte pravouhly trojuholnik  $ABC$  s preponou  $AB$ , ak su dane velkosti taznic  $t_a$ ,  $t_c$ . Urobte diskusiu riesitel'nosti.

3. Je dan zlomek

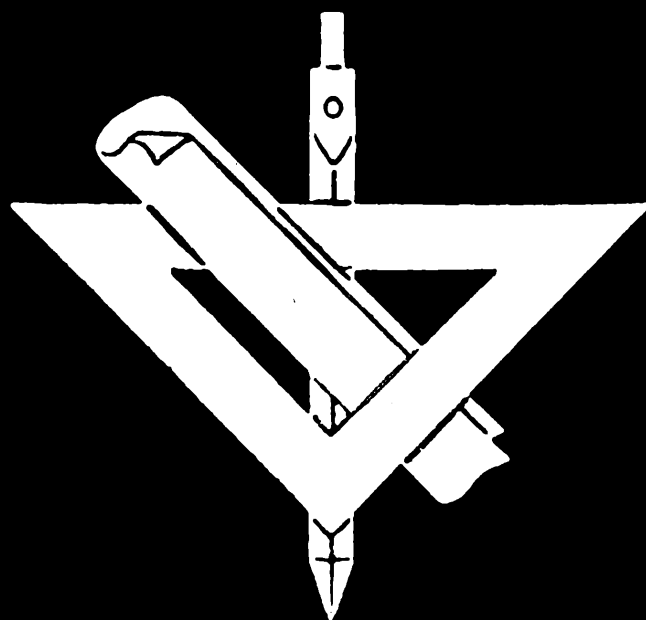
$$Z = \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 16}{ax - 4x + a^2 - 16}.$$

Vysetrite, za kterych predpokladu ztraci zlomek vyznam. Potom zlomek zkratte.

a) Predpokladejme, ze  $a$  je dane cislo; vypoctete, pro ktera  $x$  je dany zlomek roven nule. Potom provedte zkousku dosazenim.

b) Predpokladejme, ze dane cislo  $a$  je vetsi nez cislo 4; urcite vsechna  $x$ , pro ktera je zlomek  $Z$  vetsi nez cislo 1.

Podobne predpokladejme, ze dane cislo  $a$  je mensi nez cislo 4; urcite vsechna  $x$ , pro nez zlomek  $Z$  je vetsi nez cislo 1.



# ROZHLEDY

ročník 35

9

1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 9

Toto číslo vyšlo 30. listopadu 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

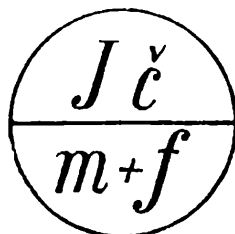
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSŠ, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

Doc. Dr. J. Korous: 1917—1957 . . . . .	385
Ing. Dr. J. Langr: Trojúhelník o úhlech $\gamma = 2\beta = 4\alpha$ . . . . .	386
L. Drs: Úlohy polohy ve středové axonometrii (Dokončení) . . . . .	392
Dr. O. Litzman: Jaké jsou zákony pohybu elektronu (Dokončení) . . . . .	399
Ing. O. Spěváček: Vznášení a plování tělesa . . . . .	402
Prof. Dr. E. Kašpar: Skládání stejnosměrných harmonických kmitů . . . . .	410
Dr. Jan a Jiří Tichý: Elektret - elektrická obdoba permanentního magnetu . . . . .	415
J. Náprstková: Význam astronomie pro praktický život . . . . .	417
J. Kotyk: K výročí Jana Amose Komenského . . . . .	419
Úlohy k řešení . . . . .	423
O. Jeništa: K příběhu o nevěstě . . . . .	429
Sdělení redakce . . . . .	432
Úlohy 4.—6. I. kola VII. ročníku MO (kategorie A až C) . . . . .	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A - 08442

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hönic.



## ANTONÍN ZÁPOTOCKÝ

PRESIDENT ČESKOSLOVENSKÉ REPUBLIKY

† 13. listopadu 1957

## ... ukazoval cestu, obohatil život, zůstavil dílo.

Ve středu 13. listopadu 1957 v časných ranních hodinách navždy dotlouklo srdce velkého občana, jehož jméno po celé dva lidské věky bylo spojeno s osudy, životem a bojem prostého lidu za chléb, práci a dokonalý společenský řád. Odešel člověk, zemřel prezident. Odešel člověk, jehož jméno bylo tolik milováno jako nenáviděno, jméno, ke kterému se s důvěrou a láskou obracelo vše živé a zdravé v národě, před kterým však se vždy třásla špatnost a prohnílost bývalých vykořisťovatelských tříd.

Bezmála padesát let stál soudruh Antonín Zápotocký, dělník, syn velkého revolučního náře-marxisty, na nejpřednějších místech proletářských bojových oddílů: jako prostý voják i vojevůdce. Životní cesta Antonína Zápotockého je cestou boje. Od instinktivního pocitu a touhy po právu a spravedlnosti dětských let až po vědomé pochopení základních přírodních i společenských zákonů a jejich podřízení politickému boji proletariátu za své osvobození. Byl theoretikem i praktikem, ekonomem i politikem, filosofem a umělcem. Celou svou bytostí vsáhl do sebe nezměrnou bolest, bídu a utrpení pracujícího člověka, strašlivou nenávist člověka k vykořisťovatelskému netvoru. Tady, uprostřed hladu, slz a zoufalství milionů bedných a bezprávných vyrůstala a sílila jeho neotřesitelná víra v možnost a nutnost společenské nápravy, víra v sílu dělnické třídy, ve vítězství proletářské revoluce. Tady též třeba hledat tajemství prostoty, skromnosti, vytrvalosti a především čistého lidství a velikost osobnosti Antonína Zápotockého. Mluvil a myslel tak, že lidé viděli v jeho slově to, co cítili a nedovedli vyjádřit. Proto mu věřili. Člověk, občan, hospodář, filosof, politik, organisátor lidu — všechny tyto vlastnosti jsou sloučeny v komunistovi Antonínu Zápotockém. Je spoluzakladatel komunistické strany, ve které vždy viděl nejvyšší prostředek splnění úkolů, které před lidstvem vytýčila historie, formulovala filosofie a zdůvodnila politická ekonomie.

Při neobyčejně bohaté sféře zájmů a rozsáhlé organisátorské činnosti třeba především vyzvednout jeho *smysl pro taktnost* v jednání s celými třídami a skupinami společnosti, které bylo třeba získávat na stranu revoluce. Jeho metody práce *s lidmi* jsou vzorem jednání velkého vůdce lidu. Nejrozhodnější tvrdost revolucionáře vůči nepřítelům je nerozlučně spjata s hlubokým zájmem o život a štěstí pracujících, vírou a úctou k nim. Právě ta pravda, kterou nám soudruh Zápotocký vždy, i v dobách nejtěžších, říkal přímo do očí, je projevem jeho lásky, víry a úcty k člověku. Je jednou z vlastností, která z něho učinila tribuna lidu a tento lid, který mu rozuměl, tuto lásku opětoval.

Soudruh Zápotocký, jako marxista-leninovec, stejně jako Kl. Gottwald, měl velmi úzký a vřelý vztah k vědě a vědeckým pracovníkům. Neustále zdůrazňoval, jakou převratnou úlohu může sehrát práce techniků, matematiků, filosofů, fyziků a lékařů ve výstavbě nového společenského řádu, jak je třeba vědu přibližovat lidu a i vnitřně prožívat a zúčastňovat se velkého zápasu dělnické třídy o nový řád. Zdůrazňoval zvláště ten fakt, že každý komunista i bezpartijní pracovník, ať je na kterémkoliv úseku života a řídí práci lidí, je spoluodpovědný za jejich práci, myšlení i blaho.

Soudruh Zápotocký, člověk-revolucionář, pochopil život a naplnil jeho smysl, od soukromého života po život politika. Ukazoval cestu, obohatil život, zůstavil dílo. Pokračujme v něm a vytrvejme do konce jako on. On vytrval. Věnujme mu vděčnou vzpomínku, neboť toho zasluhuje.

Vítězslav Vaculík, prom. fil.



## 1917—1957

Letos 7. listopadu oslaví pokrokoví lidé celého světa čtyřicáté výročí Velké říjnové socialistické revoluce.

7. listopad 1917 je nejen začátkem nové éry v dějinách národů SSSR, ale zahajuje novou epochu lidstva. Pod vedením Komunistické strany bolševiků zmocnila se tehdy dělnická třída za podpory rolnické třídy vlády na šestině zeměkoule. Definitivně tam odstranila panství vykořisťovatelů a nastolila diktaturu proletariátu. Nová vláda lidu přistoupila k budování socialismu a k postupné likvidaci vykořisťovatelských tříd a uvedla tak v život ideje klasiků marxismu-leninismu. Tím se Velká socialistická říjnová revoluce liší od ostatních revolucí v minulosti, z nichž mnohé také svrhly vládu vykořisťovatelů, avšak nahradily je jinými vykořisťovateli.

Vzpomínajíc čtyřicátého výročí dnů, které otřáslý světem, připomeneme si především hrdinství a obětavost sovětského lidu, který za velikého strádání téměř holýma rukama odrazil dobře vyzbrojené armády interventů, kteří se za podpory domácích vykořisťovatelských tříd sáпали na mladý sovětský stát, aby v krvi utopili socialistickou revoluci. Připomeneme si dále úsilí a pracovní vypětí sovětského lidu, jenž za čtyřicet let vlády sovětů změnil zaostalou zemi v druhou největší průmyslovou velmoc světa, která tempem rozvoje předstihuje kapitalistické státy světa.

S vděčností bude náš lid vzpomínat obětí, které sovětský lid přinesl, aby rozdrtil fašismus a tak zachránil národy světa před otroctvím nebo i zničením. Tato porážka fašismu způsobila, že na cestu socialismu mohly vykročit další národy, mezi nimi i náš národ. S obdivem pohlížíme na sovětský lid, který v krátké době obnovil území zničená nepřitelem a dále rozvíjí výstavbu svého státu. V tom nalézá účinnou pomoc v sovětské vědě.

Sovětská věda zaujímá dnes v mnohých odvětvích vedoucí místo na světě. Není to náhodné. Sovětský stát i lid poskytují vědě největší pomoc, neboť v socialistické společnosti věda slouží lidu, kdežto ve společnosti, kde vládnou vykořisťovatelské třídy, je věda ve službách vládnoucích tříd. Z těch důvodů se těší matematika a fyzika v SSSR větší podpoře než v kapitalistických státech. Tyto vědy jsou klíčové pro výrobu, která v socialistickém státě není zdrojem zisků, nýbrž je základem blahobytu nejširších vrstev. Tím si vysvětlíme, že ve všech oborech je sovětská matematika nejúspěšnější na světě. Sovětští matematikové I. M. Vinogradov, který rozřešil problémy analytické teorie čísel považované za neřešitelné, P. S. Alexandrov, N. N. Luzin, I. P. Natanson a jiní patří mezi nejlepší matematiky světa.

Obrovské jsou úspěchy sovětské fyziky. Sovětští atomoví badatelé předstihli atomové vědce kapitalistického světa. První atomová elektrárna na světě, první atomový ledoborec a největší synchrotrón světa jsou toho dokladem. Sovětští vědci dali svému státu i účinné zbraně na jeho obranu, které jsou způsobilé odstrašit imperialistické útočníky před válečným dobrodružstvím.

Dnes je SSSR nadějí pokrokového lidstva a nerozbornou záštitou míru. My Čechoslováci, oslavující čtyřicáté výročí Velké říjnové socialistické revoluce, s vděčností vzpomeneme toho, co pro nás sovětský lid vykonal. Pro nás bude vždy platit Gottwaldovo heslo: „Se Sovětským svazem na věčné časy a nikdy jinak“. Ve spolupráci s národy Sovětského svazu budeme prací na výstavbě socialismu rozvíjet dílo, jemuž dal základ 7. listopad 1917.

Doc. Dr. J. Korous



## Matematika

Ing. Dr. Josef Langr, Praha:

### Trojúhelník o úhlech $\gamma = 2\beta = 4\alpha$

Mezi zvláštními trojúhelníky je zajímavý trojúhelník, jehož úhly splňují vztahy

$$\gamma = 2\beta = 4\alpha \quad (1)$$

Pro velikosti těchto úhlů platí

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \quad \beta = \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \frac{4\pi}{7}$$

V tomto článku odvodíme několik jeho zajímavých vlastností.

#### I. Úhly a strany daného trojúhelníka.

Nechť je dán trojúhelník  $ABC$ , jehož úhly splňují podmínky (1); velikosti jeho stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  označme postupně  $c$ ,  $a$ ,  $b$ . Podle sinové věty platí

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

Pravou stranu tohoto vztahu můžeme upravovat takto:

$$a \cdot \sin \beta = a \cdot \sin 2\alpha = 2a \cdot \sin \alpha \cos \alpha.$$

Tudíž

$$b \sin \alpha = 2a \sin \alpha \cos \alpha$$

a z toho

$$\cos \alpha = \frac{b}{2a} \quad (2)$$

Podobně ze vztahu

$$b \sin \gamma = c \sin \beta$$

obdržíme

$$\cos \beta = \frac{c}{2b} \quad (3)$$

A posléze platí

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

Avšak

$$\sin \alpha = -\sin(\pi + \alpha) = -\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin 2\gamma$$

Tudíž

$$a : c = (-\sin 2\gamma) : \sin \gamma,$$

z čehož

$$\cos \gamma = -\frac{a}{2c} \quad (4)$$

Vztahy (2), (3), (4) jsou východiskem k dalším zajímavým vztahům. Tak na příklad

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = -\frac{1}{8}$$

K jiné zajímavé relaci dojdeme, použijeme-li na náš trojúhelník kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - \frac{b^2c}{a}$$

Této relaci lze dát tvar

$$a^2 - c^2 = \frac{b^2(a-c)}{a}$$

a poněvadž  $\alpha \neq \gamma$ , platí i  $a \neq c$  a můžeme krátit dvojklenem  $a - c$ . Po menší úpravě tak dostaneme

$$b^2 = a^2 + ac. \quad (5)$$

Vztahy

$$c^2 = b^2 + ab, \quad (6)$$

$$a^2 = c^2 - bc \quad (7)$$

si odvodí již čtenář sám.

Sečtením vztahů (5), (6), (7) dostaneme

$$ac + ab - bc = 0 \quad (8)$$

čili

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (8')$$

A ještě jeden vzorec pro součet čtverců kosinů úhlů:

$$\begin{aligned} S &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4b^2} + \frac{a^2}{4c^2} = \\ &= \frac{a^2 + ac}{4a^2} + \frac{b^2 + ab}{4b^2} + \frac{c^2 - bc}{4c^2} = \frac{a+c}{4a} + \frac{b+a}{4b} + \frac{c-b}{4c} = \\ &= \frac{2ab + bc + a^2}{4ab} + \frac{c-b}{4c} \end{aligned}$$

K další úpravě použijeme relace (8):

$$\begin{aligned} S &= \frac{2ab + (ac + ab) + a^2}{4ab} + \frac{c-b}{4c} = \frac{3ab + ac + a^2}{4ab} + \frac{c-b}{4c} = \\ &= \frac{3b + c + a}{4b} + \frac{c-b}{4c} = \frac{4bc + c^2 + ac - b^2}{4bc} = \\ &= \frac{4bc + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{5bc}{4bc} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Dále dáme čtenářům opět několik příkladů na procvičení, v nichž mají dokázat správnost napsaných identit:

a)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{7}{4}$  ;

b)  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{\sqrt{7}}{8}$  ;

c)  $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma = \frac{1}{8}$

## II. Příčky v daném trojúhelníku.

Na straně  $AB$  daného trojúhelníka  $ABC$  určíme bod  $C_1$  tak, aby  $AC_1 = BC = a$ . (Obr. 1). Příčku  $p_1 \equiv CC_1$  budeme nazývat *první příčkou* daného trojúhelníka. Délku úsečky  $CC_1$  budeme nazývat délkou první příčky. Z bodu  $C_1$  spustíme kolmici na stranu  $AC$  a patu označme  $C'$

Počítejme nyní délku  $AC'$ :

$$AC' = AC_1 \cdot \cos \alpha = a \cdot \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} b$$

Z toho usuzujeme, že trojúhelník  $ACC_1$  je rovnoramenný. Ale i trojúhelník  $BC_1C$  je rovnoramenný, jak se snadno nahlédne. Tak můžeme říci, že

*první příčka  $p_1$  svírá se stranou  $AC$  úhel  $\alpha$ , se stranou  $AB$  úhel  $\beta$  a se stranou  $BC$  úhel  $\gamma$ .*

Na straně  $AC$  najdeme bod  $B_2$  tak, aby  $AB_2 = BC = a$ . Přímku  $p_2 = BB_2$  nazveme *druhou příčkou* daného trojúhelníka a délku úsečky  $BB_2$  budeme nazývat délkou druhé příčky.

Označme ještě

$$\sphericalangle B_2BA = \alpha_2, \quad \sphericalangle B_2BC = \beta_2, \quad \sphericalangle BB_2C = \gamma_2$$

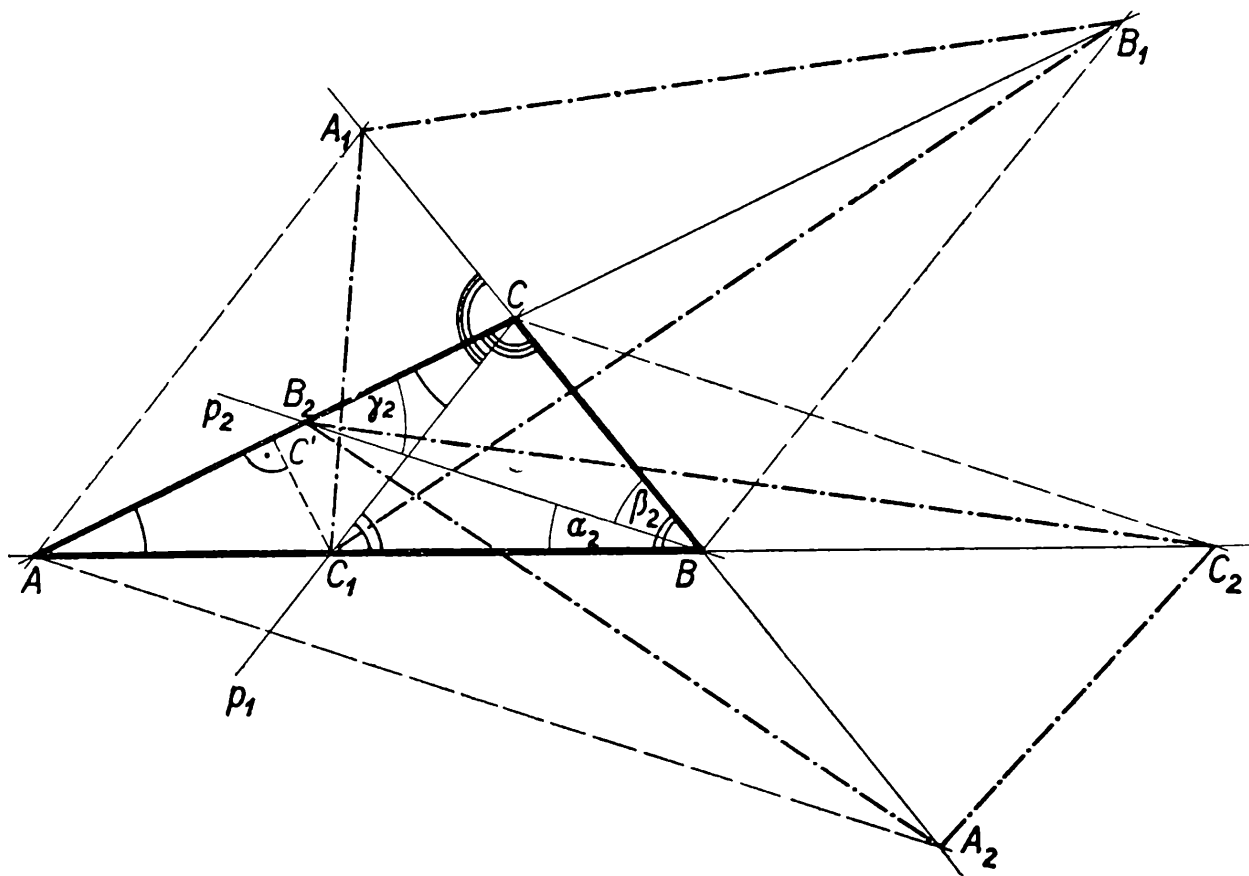
Jsou to ostré úhly, sevřené druhou příčkou se stranami daného trojúhelníka. Ty jsou, jak hned uvidíme, jednoduše závislé na úhlech daného trojúhelníka. Z trojúhelníka  $ABB_2$  totiž plyne

$$\sin \alpha_2 : \sin \alpha = AB_2 : BB_2.$$

Ale

$$BB_2 = a \sqrt{2},$$

jak vyplývá z věty kosinové, použité na trojúhelník  $ABB_2$ . Tím obdržíme



Obr. 1

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}$$

Z trojúhelníka  $AB_2B$  počítejme ještě  $\cos \alpha_2$ .

$$\overline{AB_2^2} = \overline{AB^2} + \overline{BB_2^2} - 2 \cdot AB \cdot BB_2 \cdot \cos \alpha_2$$

čili

$$a^2 = c^2 + 2a^2 - 2ac \sqrt{2} \cos \alpha_2$$

Odtud již máme

$$\cos \alpha_2 = \frac{a^2 + c^2}{2ac\sqrt{2}} = \frac{2c^2 - bc}{2ac\sqrt{2}} = \frac{2c - b}{2a\sqrt{2}}$$

A nyní několik příkladů. Dokažte, že platí:

$$\text{a) } \sin \beta_2 = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}};$$

$$\text{b) } \cos \beta_2 = \frac{2a + c}{2b\sqrt{2}}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{2b + a}{2c\sqrt{2}};$$

$$\text{c) } \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

\* \* \*

Vrcholy  $A, B$  proložme přímkami rovnoběžné s první příčkou a ty protnou strany  $BC, AC$  po řadě v bodech  $A_1, B_1$ .

Potom

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle CAB_1,$$

při čemž *koeficient podobnosti* je  $\sqrt{2}$ .

D ů k a z. Vypočtěme nejprve délky úseček  $AA_1, BB_1$ . Ze stejnosti trojúhelníků  $BAA_1, BC_1C$  máme

$$AA_1 : CC_1 = AB : BC_1$$

a odtud

$$AA_1 = \frac{ac}{c - a} = \frac{abc}{bc - ab} = b$$

Podobně i trojúhelníky  $ABB_1, AC_1C$  jsou stejnoúhlé a proto

$$BB_1 : C_1C = AB : AC_1,$$

z čehož

$$BB_1 = \frac{ac}{a} = c$$

Trojúhelník  $ABA_1$  je podle toho rovnoramenný; hlavní vrchol je  $A_1$  a vnitřní úhel při tomto vrcholu má velikost  $3\alpha$ . I trojúhelník  $AB_1B$  je rovnoramenný; jeho hlavní vrchol je  $B$  a úhel při tomto vrcholu je  $\pi - \beta$ . A nyní můžeme přistoupit k výpočtu stran trojúhelníka  $A_1B_1C_1$ .

Z trojúhelníka  $BB_1C_1$  obdržíme

$$\begin{aligned} \overline{B_1C_1}^2 &= \overline{BC_1}^2 + \overline{BB_1}^2 - 2 \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{BB_1} \cos(\pi - \beta) = \\ &= (c - a)^2 + c^2 - 2c(c - a) \cos \beta = \\ &= 2c^2 - 2ac + a^2 + \frac{c^2(c - a)}{b} = 2c^2 - 2ac + a^2 + \frac{b(a + b)(c - a)}{b} = \\ &= 2c^2 - 2ac + a^2 + ac + bc - a^2 - ab = 2c^2 + bc - ab - ac = 2c^2 \end{aligned}$$

Podobně z trojúhelníka  $AC_1A_1$  dostaneme

$$\overline{A_1C_1}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{AA_1}^2 - 2 \cdot AC_1 \cdot AA_1 \cos \beta = 2a^2 ,$$

Posléze z trojúhelníka  $A_1BB_1$  stejným způsobem

$$A_1B_1 = c \sqrt{2}$$

Tím je vyslovené tvrzení dokázáno.

\* \* \*

Rovnoběžky s druhou příčkou, proložené vrcholy  $A, C$ , protínají strany  $BC$  a  $AB$  v bodech  $A_2, C_2$  a trojúhelníky  $A_2B_2C_2, CAB$  jsou podobné, při čemž *koefficient podobnosti je  $\sqrt{2}$* .

D ů k a z. Z trojúhelníka  $BB_2C$  plyne

$$BB_2 = BC \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_2} = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_2}$$

Ale dříve jsme dokázali, že

$$\sin \gamma_2 = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}$$

a proto

$$BB_2 = a \sqrt{2}$$

Dále, trojúhelníky  $AB_2B, ACC_2$  jsou stejnohelné a společný vrchol  $A$  je středem stejnohelnosti. Proto platí

$$CC_2 : BB_2 = b : a ,$$

z čehož plyne

$$CC_2 = b \sqrt{2}$$

Podobně ze stejnohelnosti trojúhelníků  $CB_2B, CAA_2$  obdržíme

$$BB_2 : AA_2 = (b - a) : b$$

a odtud

$$AA_2 = \frac{ab \sqrt{2}}{b - a}$$

Tento výraz upravíme na jednodušší tímto způsobem. Použijeme vztahu (8'):

$$\frac{ab \sqrt{2}}{b - a} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{c}} = c \sqrt{2}$$

Tudíž

$$AA_2 = c \sqrt{2}$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu stran trojúhelníka  $A_2B_2C_2$ . Tak na příklad použijme kosinové věty na trojúhelník  $B_2C_2C$  :

$$\begin{aligned}\overline{B_2C_2}^2 &= \overline{CB_2}^2 + \overline{CC_2}^2 - 2 \cdot \overline{CB_2} \cdot \overline{CC_2} \cos \sphericalangle B_2CC_2 = \\ &= (b-a)^2 + 2b^2 - 2b(b-a)\sqrt{2} \cos \sphericalangle B_2CC_2.\end{aligned}$$

Ale úhel  $\sphericalangle B_2CC_2 = \sphericalangle AB_2B$  a proto

$$\cos \sphericalangle B_2CC_2 = \cos \sphericalangle AB_2B.$$

Avšak

$$\cos \sphericalangle AB_2B = \frac{2a^2 + a^2 - c^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{3a^2 - c^2}{2a^2\sqrt{2}}$$

Proto je

$$\begin{aligned}\overline{B_2C_2}^2 &= (b-a)^2 + 2b^2 - 2b(b-a)\sqrt{2} \cdot \frac{3a^2 - c^2}{2a^2\sqrt{2}} = \\ &= 3b^2 + a^2 - 2ab - \frac{b(b-a)(3a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{a^3b + a^4 + b^2c^2 - abc^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Užitím vzorců (7), (8) a (8') dojdeme k výsledku

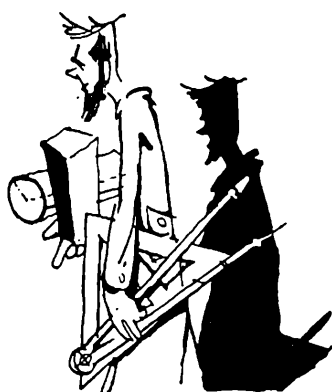
$$B_2C_2 = c\sqrt{2}$$

Výpočet zbývajících dvou stran by se provedl obdobně a tak dokončil důkaz, což přenechávám čtenářům.

\* \* \*

V článku, který redakci dal k dispozici p. Ing. Dr. J. Langr, je uvedeno ještě mnoho jiných zajímavých vlastností tohoto zvláštního trojúhelníka, ale všechny již přesahují rámec učiva jedenáctileté střední školy. Proto redakce *Rozhledů* upustila od jejich uveřejnění a vybrala jen ty vlastnosti, které jsou vám všem přístupné a pochopitelné.

S. Horák.



## Deskriptivní geometrie

Ladislav Drs, Praha:

### Úlohy polohy ve středové axonometrii

(Dokončení)

4. **Přímka v rovině** (obr. 21). Jsou dány průměty stop roviny  $\rho$  a průmět  $l_c$  přímky  $l$  ležící v této rovině ( $l \subset \rho$ ). Sestrojíme průměty  $l_{1,c}$ ,  $l_{2,c}$ ,  $l_{3,c}$ . Stopníky  $P^l$ ,  $N^l$ ,  $M^l$  přímky  $l$  jsou její průsečíky se stopami  $p^e$ ,  $n^e$   $m^e$ . Vedme přímku



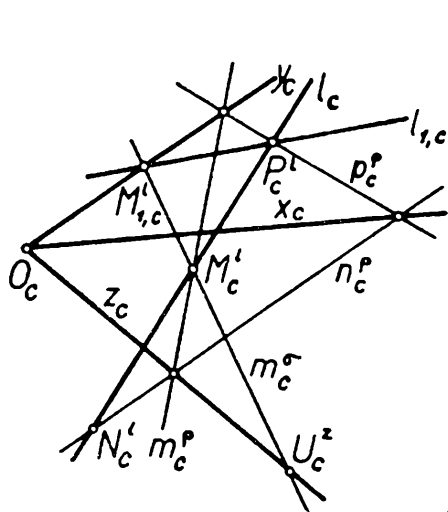
$l$  rovinou  $\sigma \parallel z$ . Její stopa  $m^\sigma$  prochází stopníkem  $M^l$  a protíná osu  $y$  v bodě  $M^l_1$  hledaného prvního průmětu,  $l_1 \equiv P^l M^l_1$ . Podobně bychom sestrojili  $l_2$  a  $l_3$ . Průmět této konstrukce je patrný z obr. 21.

**Cvičení:**

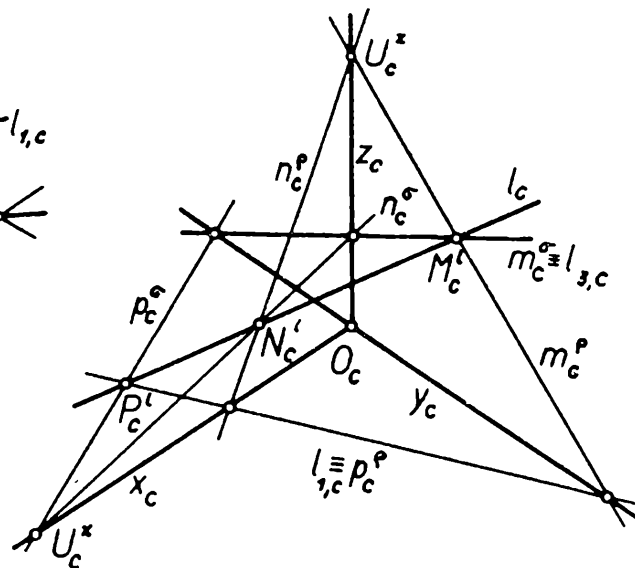
9. Sestrojte zbývající průměty přímky  $q$  ležící v rovině  $\rho$ , znáte-li průměty stop roviny  $\rho$  a průměty a)  $q_c$ ; b)  $q_{1,c}$ ; c)  $q_{2,c}$ ; d)  $q_{3,c}$ .

10. Sestrojte průměty stop roviny  $\rho$ , která je rovnoběžná s osou a)  $x$ ; b)  $y$ , c)  $z$  a obsahuje přímku  $q$ , znáte-li a)  $q_c, q_{1,c}$ ; b)  $q_c, q_{2,c}$ ; c)  $q_{1,c}, q_{3,c}$ !

5. Průměty přímek (obr. 22). Přímka  $l$  nechť je určena průměty  $l_c, l_{1,c}$ . Sestrojme průměty  $l_{2,c}, l_{3,c}$ ! Přímky  $l, l_1$  leží v rovině  $\rho$  rovnoběžné s osou  $z$ , jejíž stopa  $p^e$  je  $l_1$ . Průsečík  $F^l = l \cap l_1$  je stopník přímky  $l$  na  $\pi$ . Další stopníky  $N^l, M^l$  dostaneme na stopách  $n^e, m^e$  roviny  $\rho$  takto:  $N^l = n^e \cap l, M^l = m^e \cap l$ . Vedme přímkou  $l$  rovinu  $\sigma (\tau)$  rovnoběžnou s osou  $x (y)$ . Její stopy  $p^\sigma, n^\sigma (p^\tau, m^\tau)$  prochá-



Obr. 21



Obr. 22

zejí body  $F^l, M^l (F^l, M^l)$ . Tím je určena i stopa  $m^\sigma \equiv l_3 (n^\tau \equiv l_2)$  a tedy i přímky  $l_2, l_3$ . Průmět této prostorové konstrukce je patrný z obr. 22. Rovina  $\tau$  a přímka  $l_2$  není v něm sestrojena.

**Cvičení**

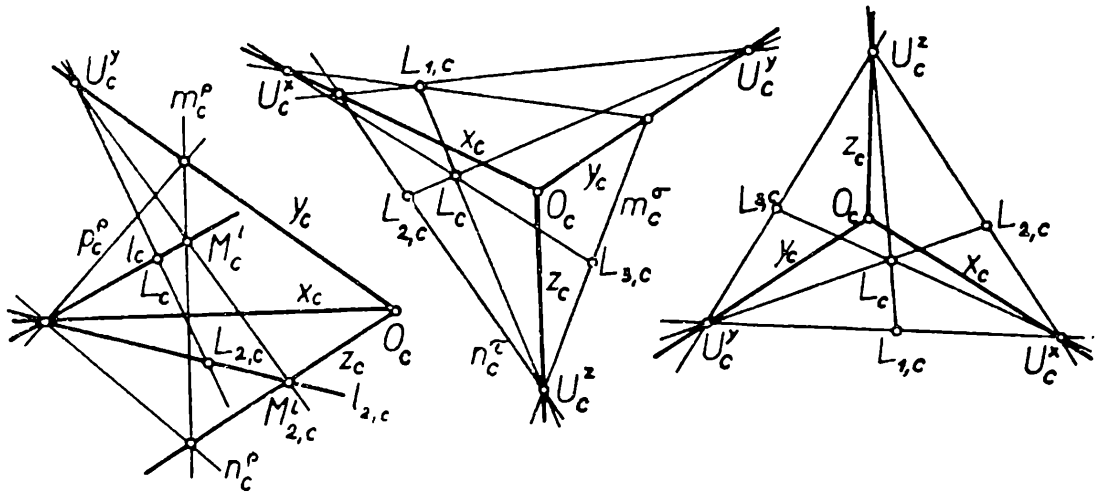
11. Sestrojte průměty stopníků a zbývající průměty přímky  $q$ , znáte-li a)  $q_c, q_{2,c}$ ; b)  $q_c, q_{3,c}$ ; c)  $q_{1,c}, q_{2,c}$ ; d)  $q_c, q_{3,c}$ ; e)  $q_{2,c}, q_{3,c}$ ; f)  $q_c \equiv q_{1,c}$ ; g)  $q_2 \equiv q_{3,c} (\parallel x)$ !

12. Sestrojte průměty průsečnice rovin  $\beta, \gamma$  znáte-li a)  $p_c^\beta, r_c^\beta; p_c^\gamma, n_c^\gamma$ ; b)  $n_c^\beta, m_c^\beta; p_c^\gamma, m_c^\gamma$ !

6. B o d v r o v i n ě (obr. 23). Jsou dány průměty stop roviny  $\rho$  a průmět  $L_c$  bodu  $L$  ležícího v této rovině ( $L \in \rho$ ). Sestrojme průměty  $L_{1,c}, L_{2,c}, L_{3,c}$ ! Bodem  $L$  vedme přímkou  $l \subset \rho$  (podle odstavce 4) a sestrojme přímkou  $l_{2,c}$ . Její průsečík s přímkou  $U_c^y L_c$  je hledaný průmět  $L_{2,c}$  a podobně bychom sestrojili body  $L_{1,c}, L_{3,c}$ .

Cvičení:

13. Sestrojte zbývající průměty bodu  $L \in \rho$ , znáte-li: a)  $p_c^e, n_c^e, L_{1,c}$ ; b)  $p_c^e, m_c^e, L_{2,c}$ ; c)  $n_c^e, m_c^e, L_{3,c}$ !



Obr. 23

Obr. 24

Obr. 25

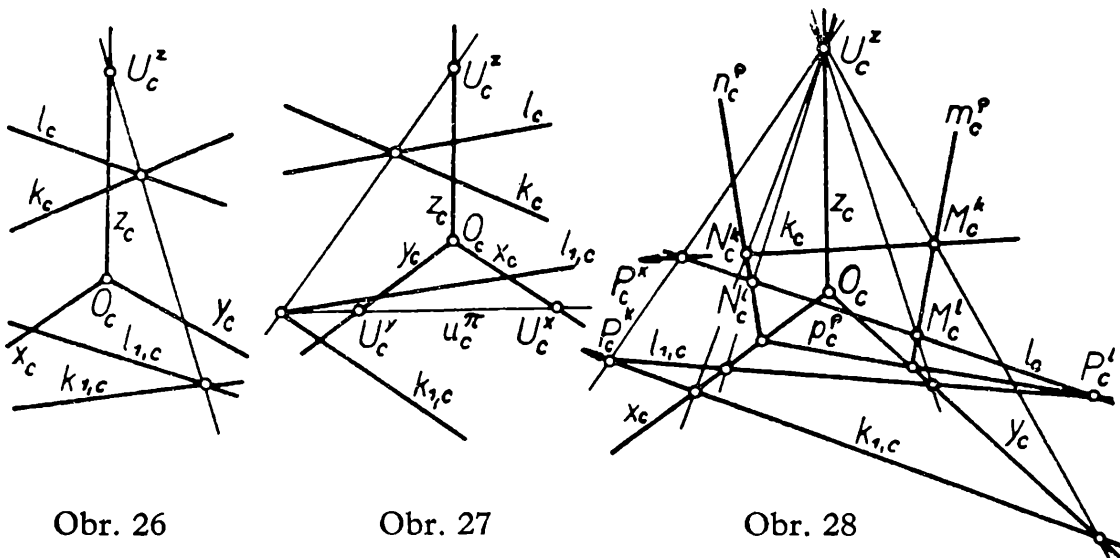
7. Průměty bodu. a) Nechť jsou dány průměty  $L_c, L_{1,c}$  vlastního bodu  $L$ , takže platí  $U_c^z \in L_c, L_{1,c}$  (obr. 24). Sestrojme průměty  $L_{2,c}, L_{3,c}$ ! Přímkou  $LL_1$  vedme rovinu  $\sigma$  ( $\tau$ ) rovnoběžnou s rovinou  $\nu$  ( $\mu$ ). Průsečík stopy  $m^\sigma$  ( $n^\tau$ ) s přímkou  $LU^*$  ( $LU^y$ ) je hledaný průmět  $L_3$  ( $L_2$ ), t. j.  $L_3 = m^\sigma \cap LU^x, L_2 = n^\tau \cap LU^y$ .

b) Nechť je dán průmět  $L_c$  nevlastního bodu (obr. 25). Průmět  $L_{1,c}$  ( $L_{2,c}, L_{3,c}$ ) je průsečík přímky  $U_c^z L_c$  ( $U_c^y L_c, U_c^x L_c$ ) se stranou  $U_c^x U_c^y$  ( $U_c^x U_c^z, U_c^y U_c^z$ ) úběžníkového trojúhelníka.

Cvičení:

14. Sestrojte zbývající průměty bodu  $Q$ , znáte-li jeho průměty a)  $Q_c, Q_{1,c}$ ; b)  $Q_c, Q_{2,c}$ ; c)  $Q_c, Q_{3,c}$ ; d)  $Q_c \equiv Q_{1,c}$ ; e)  $Q_{1,c}, Q_{2,c}$ ; f)  $Q_{1,c}, Q_{3,c}$ ; g)  $Q_c$  nevlastní; h)  $Q_{1,c} \in u_c^\pi; Q_{2,c} \in u_c^\nu$ !

8. Vzájemná poloha dvou přímek. Mějme průměty  $l_c, l_{1,c}; k_c, k_{1,c}$  přímek  $l \neq k$ .



Obr. 26

Obr. 27

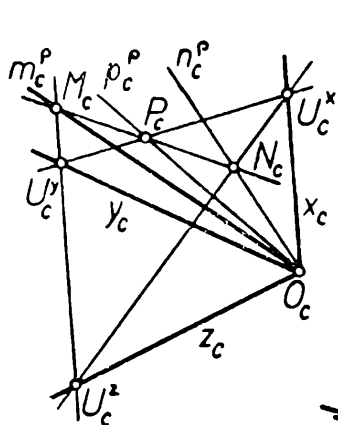
Obr. 28

- a) Přímky  $l, k$  jsou různoběžné (obr. 26), jestliže spojnice průsečíku průmětů  $l_c, k_c$  s průsečíkem průmětu  $l_{1,c}, k_{1,c}$  prochází bodem  $U_c^z$ , t. j.  $U_c^z \in (l_c \cap k_c) \cdot (l_{1,c} \cap k_{1,c})$ .
- b) Přímky  $l, k$  jsou rovnoběžné (obr. 27), platí-li navíc, že průsečík průmětů  $l_{1,c}, k_{1,c}$  leží na straně  $u_c^x$  úběžníkového trojúhelníka.
- c) Přímky  $l, k$  jsou mimoběžné v ostatních případech.

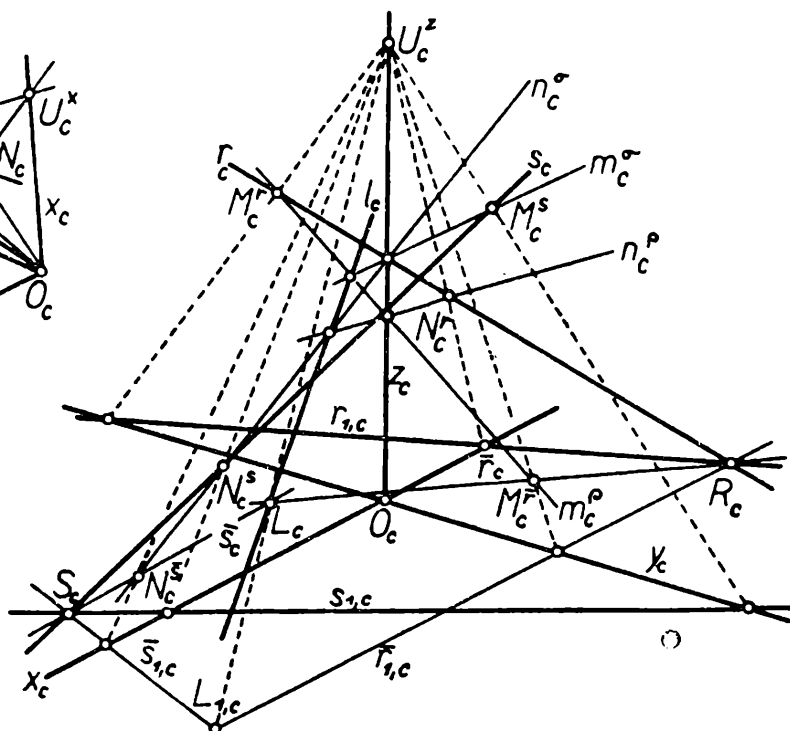
### Cvičení

15. Zvolte průměty a)  $l_c, l_{1,c}; k_c, k_{1,c}$ ; b)  $l_c, l_{1,c}; k_c, k_{2,c}$ ; c)  $l_{1,c}, l_{2,c}; k_{1,c}, k_{2,c}$ ; d)  $l_{1,c}, l_{2,c}; k_{1,c}, k_{3,c}$  tak, aby přímky  $l, k$  byly: 1. různoběžné; 2. rovnoběžné!

9. Stop y roviny. a) Rovina  $\rho$  nechť je určena rovnoběžkami nebo různoběžkami  $l, k$  (obr. 28). Průměty  $p_c^e, n_c^e, m_c^e$  stop  $p^e, n^e, m^e$  jsou spojnice průmětů stopníků  $F_c^l, F_c^k; N_c^l, N_c^k; M_c^l, M_c^k$  přímek  $l, k$ .



Obr. 29



Obr. 30

### Cvičení:

16. Sestrojte průměty stop roviny  $\rho$ , která je určena a) rovnoběžkami  $l, k$ ; b) různoběžkami  $l, k$  znáte-li průměty 1.  $l_c, l_{2,c}; k_c, k_{2,c}$ ; 2.  $l_c, l_{1,c}; k_c, k_{2,c}$ ; 3.  $l_{1,c}, l_{2,c}; k_c, k_{2,c}$ ; 4.  $l_{1,c}, l_{2,c}; k_{1,c}, k_{2,c}$ ; 5.  $l_{1,c}, l_{2,c}; k_{1,c}, k_{3,c}$ ; 6.  $l_c \equiv l_{1,c}; k_{2,c}, k_{3,c}$ !

b) Nechť je průmět roviny  $\rho$  procházející bodem  $O$  určen průměty stop  $p_c^e, n_c^e$  (obr. 29). Sestrojme stopu  $m_c^e$ . Na přímkách  $p_c^e, n_c^e$  zvolme body  $P_c, N_c$  a sestrojme stopník  $M_c$  přímky  $P_c N_c$ . Jím prochází hledaná přímka  $m_c^e \equiv M_c O_c$ . Na obr. 29 byly zvoleny za body  $P_c, N_c$  průměty nevlastních bodů stop  $p^e, n^e$ .

### Cvičení

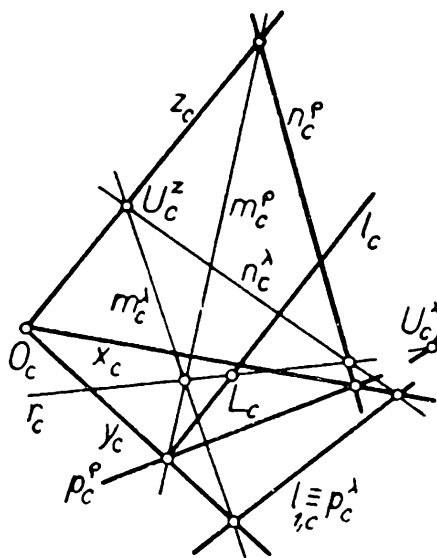
17. Sestrojte průměty stop roviny  $\rho \ni O$  1. znáte-li a)  $p_c^e, m_c^e$ ; b)  $n_c^e, m_c^e$ ; 2. leží-li v ní přímka  $l$ , určená průměty a)  $l_c, l_{1,c}$ ; b)  $l_{1,c}, l_{2,c}$ !

18. Sestrojte průsečnici rovin  $\varrho, \sigma$  procházejících bodem  $O$  a) jsou-li dány průměty stop  $p_c^e, n_c^e; p_c^s, m_c^s$ ; b) jsou-li dány průměty  $r_c, r_{1,c}; s_{1,c}, s_{3,c}$  přímek  $r \subset \varrho, s \subset \sigma$ !

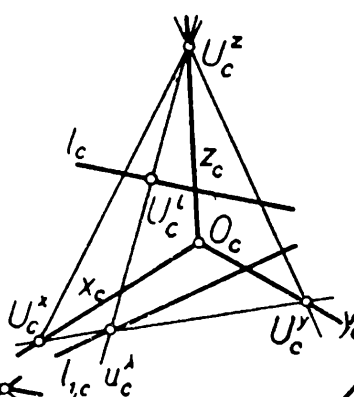
10. Příčka  $l$  mimoběžek  $r, s$  jdoucí bodem  $L$  (obr. 30). Bodem  $L$  a libovolným bodem  $R(S)$  na přímce  $r(s)$  vedme přímku  $\bar{r}(\bar{s})$ . Průsečnice  $l$  rovin  $(r, \bar{r}) \equiv \varrho, (s, \bar{s}) \equiv \sigma$  je hledaná příčka. Na obr. 30 jsou dány průměty  $r_c, r_{1,c}; \bar{r}_c, \bar{r}_{1,c}; s_{1,c}; L_c, L_{1,c}$ ; za body  $R_c(S_c)$  jsou zvoleny průměty stopníků  $F_c^r \equiv R_c, P_c^s \equiv S_c$ .

### Cvičení

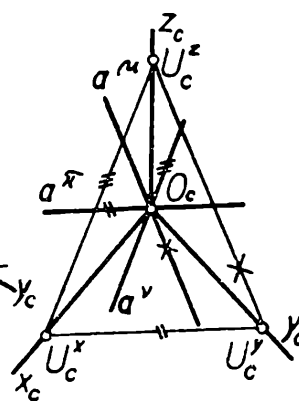
19. Sestrojte příčku mimoběžek  $r, s$  bodem  $Q$ , znáte-li: a)  $r_c, r_{1,c}; s_c \equiv s_{1,c}; Q_c, Q_{1,c}$ ; b)  $r_c, r_{1,c}; n_c, n_{1,c}; Q_c \equiv Q_{1,c}$ ; c)  $r_c \equiv r_{1,c}; n_c \equiv n_{2,c}; Q_c, Q_{3,c}$ ; d)  $r_c \equiv r_{1,c}; n_c \equiv n_{2,c}; Q_c \equiv Q_{3,c}$ !



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

11. Průsečík přímky s rovinou (obr. 31). Mějme dány průměty  $p_c^e, n_c^e$  stop roviny  $\varrho$  a průměty  $l_c, l_{1,c}$  přímky  $l$ . Vedme přímku  $l$  libovolnou rovinu  $\lambda$  (nejlépe podle obr. 31 rovinu  $\lambda \equiv ll_1$ ) a sestrojme průsečnici  $r = \lambda \cap \varrho$ . Průsečík  $L$  přímek  $l, r$  je hledaný průsečík přímky  $l$  s rovinou  $\varrho$ .

### Cvičení

20. Sestrojte průsečík  $L$  přímky  $l$  s rovinou  $\varrho$ , znáte-li: a)  $p_c^e, n_c^e; l_{1,c}, l_{2,c}$ ; b)  $p_c^e, n_c^e; l_c \equiv l_{3,c}$ ; c)  $\varrho = ab, a_c, a_{1,c}; b_c, b_{2,c}; l_c \equiv l_{2,c}$ !

12. Úběžník přímky (obr. 32). Mějme dány průměty  $l_c, l_{1,c}$  přímky  $l$ . Vedme přímku  $l$  rovinu  $\lambda \equiv ll_1$  a sestrojme průmět její úběžnice  $u_c^l$ . Průsečík úběžnice s průmětem  $l_c$  je hledaný úběžník  $U_c^l (U_c^l = u_c^l \cap l_c)$ !

### Cvičení

21. Sestrojte úběžník přímky  $l$ , znáte-li: a)  $l_c, l_{1,c}$ ; b)  $l_{2,c}, l_{3,c}$ ; c)  $l_c \equiv l_{2,c}$ !

22. Sestrojte příčku mimoběžek  $r, s$  rovnoběžnou s přímkou  $l$ , znáte-li: a)  $r_c, r_{1,c}; s_c \equiv s_{1,c}; l_c, l_{1,c}$ ; b)  $r_c, r_{1,c}; s_c, s_{2,c}; l_c \equiv l_{3,c}$ ; c)  $r_c, r_{1,c}; s_c \equiv s_{2,c}; l_c \equiv l_{1,c}$ !

13. Axonometrická stopa roviny. a) Axonometrická stopa  $a^\pi$  ( $a^\nu$ ,  $a^\mu$ ) roviny  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ) je rovnoběžka s úběžnicí  $u_c^\pi$  ( $u_c^\nu$ ,  $u_c^\mu$ ) vedená bodem  $O$  (obr. 33). Předpokládáme stále, že průmětna prochází bodem  $O$ .

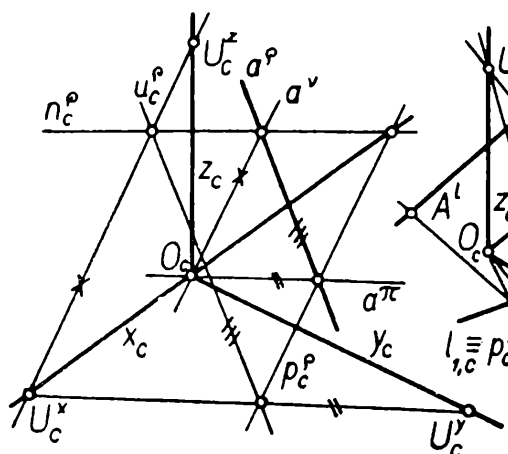
b) Axonometrická stopa  $a^\rho$  obecné roviny  $\rho$  prochází průsečíkem stopy  $p^\rho$  ( $n^\rho$ ,  $m^\rho$ ) a axonometrické stopy  $a^\pi$  ( $a^\nu$ ,  $a^\mu$ ). Axonometrická stopa  $a^\rho$  je rovnoběžná s úběžnicí  $u_c^\rho$  (obr. 34).

### Cvičení

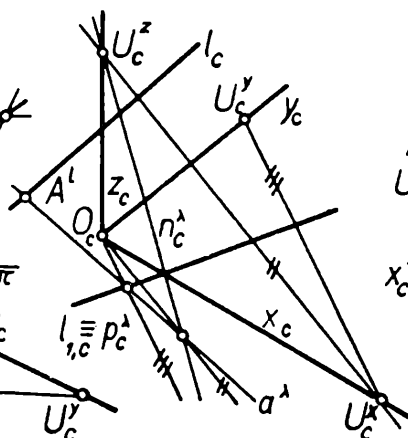
23. Sestrojte axonometrickou stopu roviny rovnoběžné s osou  $x$  ( $y$ ,  $z$ )!

24. Sestrojte axonometrickou stopu roviny  $\rho \equiv bc$ , znáte-li: a)  $n_c^\rho$ ,  $m_c^\rho$ ; b)  $b_c$ ,  $b_{2,c}$ ;  $c_c$ ,  $c_{1,c}$ ; c)  $b_{2,c}$ ,  $b_{3,c}$ ;  $c_c \equiv c_{1,c}$ ; d)  $b_c \equiv b_{2,c}$ ;  $c_c \equiv c_{1,c}$ !

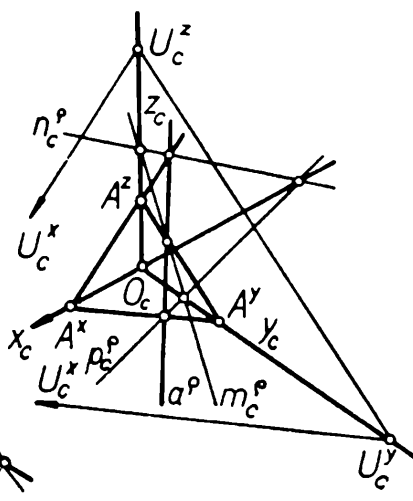
14. Axonometrický stopník přímky (obr. 35). Mějme průměty  $l_c$ ,  $l_{1,c}$  přímky  $l$ . Sestrojme axonometrickou stopu  $a^\lambda$  roviny  $\lambda \equiv ll_1$ . Její průsečík  $A^\lambda$  s přímkou  $l$  je hledaný stopník.



Obr. 34



Obr. 35



Obr. 36

### Cvičení

25. Sestrojte axonometrický stopník přímky  $l$ , znáte-li: a)  $l_{1,c}$ ,  $l_c$ ; b)  $l_{1,c}$ ,  $l_{2,c}$ ; c)  $l_c \equiv l_{3,c}$ !

15. Axonometrická stopa roviny, jestliže bod  $O$  neleží v průmětně ( $O \neq O_c$ ) (obr. 36). Podle odstavce II, 3) je průmět souřadnicové soustavy určen stejnohlými trojúhelníky  $A^x A^y A^z$ ,  $U_c^x U_c^y U_c^z$  se středem stejnolehlosti v bodě  $O_c$ .

a) Axonometrická stopa roviny  $\pi$  ( $\nu$ ,  $\mu$ ) je přímka  $A^x A^y$  ( $A^x A^z$ ,  $A_y A_z$ ).

b) Axonometrická stopa  $a^\rho$  obecné roviny  $\rho$  prochází průsečíky  $p^\rho \cap A^x A^y$ ;  $n^\rho \cap A^x A^z$ ;  $m^\rho \cap A_y A_z$ .

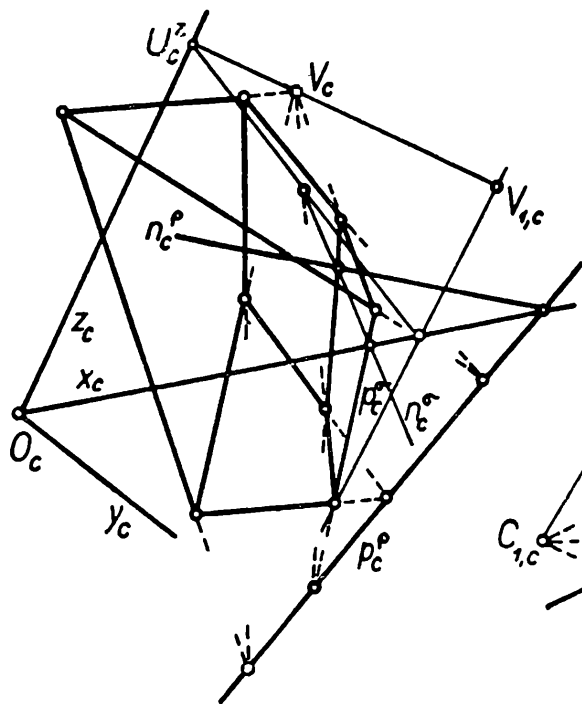
### Cvičení

Průmět souřadnicové soustavy budiž určen homothetickými trojúhelníky  $A^x A^y A^z$ ,  $U_c^x U_c^y U_c^z$  se středem  $O_c$ .

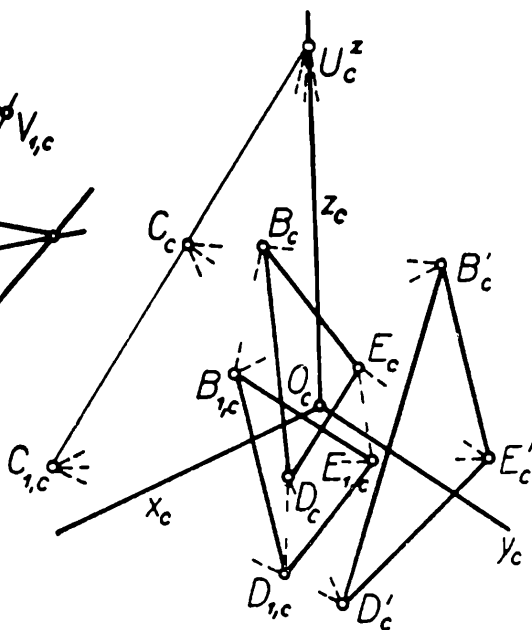
26. Sestrojte axonometrickou stopu roviny  $\rho$ : a)  $\rho \parallel x$ , b)  $\rho \parallel y$ ; c)  $\rho \parallel z$ ; d) znáte-li  $p_c^\rho$ ,  $n_c^\rho$ ; e)  $\rho \equiv bc$ , znáte-li  $b_{1,c}$ ,  $b_{2,c}$ ;  $c_c \equiv c_{1,c}$ !

27. Sestrojte axonometrický stopník přímky  $l$ , znáte-li a)  $l_c, l_{1,c}$ ; b)  $l_c, l_{3,c}$ ; c)  $l_{1,c}, l_{2,c}$ !

16. Rovinné řezy jehlanových a hranolových ploch. Řešíme je jako průsečnice stěn těchto ploch s rovinou řezu. Přitom výhodně používáme kolineárního vztahu mezi průměty dvou rovinných řezů. Mějme na příklad v obr. 37 průmět jehlanové plochy, který je určen průměty  $V_c, V_{1,c}$  vrcholu  $V$  *non*  $\epsilon \pi$  a řídicího čtyřúhelníka ležícího v  $\pi$  a rovinu řezu  $\rho$  určenou stopami  $p^e, n^e$ . Na obr. 37 je sestrojen průmět průsečnice roviny  $\rho$  a stěny  $\sigma$  jehlanu, určující jednu stranu řezu a další část průmětu řezu je sestrojena pomocí kolineace se středem  $V_c$  a osou  $p^e$ . Na obr. 37 je vytažena jen část plochy mezi rovinami  $\pi, \sigma$ .



Obr. 37



Obr. 38

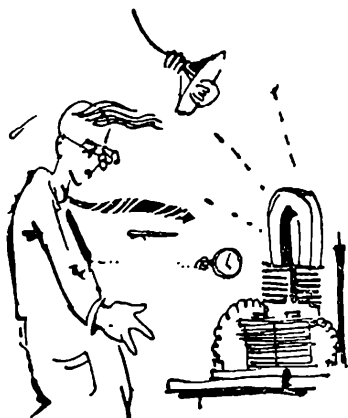
### Cvičení:

28. Sestrojte rovinný řez hranolové plochy a) trojboké; b) čtyrboké. Hranolová plocha je určena nevlastním vrcholem  $V$  a řídicím mnohoúhelníkem a) v  $\pi$ , b) v  $\mu$ . Rovina řezu je určena stopami  $p^e, n^e$ .

17. Osvětlení. Budiž dán střed osvětlení  $C$ . Pak stín  $L'$  bodu  $L \neq C$  do roviny  $\rho$  je průsečík světelného paprsku  $CL$  bodu  $L$  s rovinou  $\rho$ . Sestrojme na příklad (obr. 38) stín trojúhelníka  $BDE$  na rovině  $\pi$ . Jsou dány průměty  $C_c, C_{1,c}$ ;  $B_{1,c}, B_c$ ;  $D_{1,c}, D_c$ ;  $E_{1,c}, E_c$ . Hledaný stín  $B'D'E'$  je řez jehlanové plochy o vrcholu  $C$  a řídicím trojúhelníku  $BDE$  s rovinou  $\pi$ ;  $B' = CB \cap C_1 B_1$  atd.

### Cvičení:

29. Je dán střed osvětlení  $C$ . Sestrojte vržený stín a) bodu  $L$ ; b) přímky  $l$ ; c) čtyřúhelníka  $DEFG$  do roviny  $\pi$ ;  $\nu; \mu; \rho = (p^e, n^e)$ !



# Fysika

Dr Otto Litzman, Praha:

## Jaké jsou zákony pohybu elektronu

(Dokončení)

### VII. Stavba atomů a periodická soustava Mendělejevova

V chemii bývá zvykem užívat při výkladu vlastností prvků tak zvané Mendělejevovy periodické soustavy. Ruský učenec Mendělejev seřadil v r. 1869 chemické prvky po studiu jejich chemických a fyzikálních vlastností do tabulky, kterou jistě znáte z chemie a kterou zde nebudeme proto uvádět. Avšak teprve za půl století se ukázalo na základě prvních výsledků kvantové mechaniky, jak souvisí Mendělejevova tabulka se stavbou atomů. Co jsme si v předchozích kapitolách řekli o kvantové mechanice, to nám bude nyní již úplně stačit k hlubšímu pochopení Mendělejevovy periodické soustavy na základě představ o pohybu elektronů v elektronovém obalu jádra.

Jak známo, skládá se atom libovolného prvku z kladně nabitého jádra, kolem něhož krouží elektrony, které tvoří t. zv. *elektronový obal* jádra. Náboj jádra je celistvým násobkem náboje elektronu  $-e$  a dá se tedy vyjádřit vzorcem  $+Ze$ , kde  $Z$  je celé kladné číslo. Číslo  $Z$  nazýváme *atomovým číslem prvku*. Poněvadž atomy jsou jako celek elektricky neutrální, musí být v elektronovém obalu prvku o atomovém čísle  $Z$  právě  $Z$  elektronů, jejichž záporný náboj  $-Ze$  kompenzuje navenek kladný náboj jádra. Objasníme si nyní na základě vzorců (VI. 6b) pro kvantová čísla  $n, l, m, s_z$  a na základě Pauliova principu podrobněji stavbu elektronového obalu u různých prvků.

Nejjednodušším atomem je atom vodíku, který je v Mendělejevově tabulce na prvním místě. Jeho atomové číslo  $Z$  je 1, kolem jádra obíhá tedy jediný elektron. Elektrony v elektronovém obalu snaží se vždy zaujmout takové stavy, aby jejich energie byla co nejmenší. Jediný elektron vodíku obsadí tedy nejnížší energetickou hladinu  $E_1$ , která odpovídá kvantovému číslu  $n = 1$ . Kvantová čísla  $l, m$  jsou pak nutně rovna nule a  $s_z = +\frac{1}{2}$  nebo  $s_z = -\frac{1}{2}$  (viz VI. 6b). Elektron může

být tedy ve stavu  $\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$  nebo  $\left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$

Druhým prvkem v Mendělejevově tabulce je helium, jeho atomové číslo  $Z = 2$  a kolem jádra krouží tedy dva elektrony. Oba elektrony se opět snaží zaujmout nejnížší energetickou hladinu, Zde se však začíná ve stavbě elektronového obalu již

projevovat Pauliův princip, podle něhož nemohou být dva elektrony v témže stavu t. j. nemohou mít všechna kvantová čísla stejná. Stav jednoho elektronu je tedy určen kvantovými čísly  $\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$  a stav druhého  $\left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ . Oba elektrony se tedy liší orientací spinu. Současně vidíme, že se více než dva elektrony na hladinu  $E_1$  nevejdou. Třetí elektron na této hladině by mohl být opět jen ve stavu  $\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$  nebo  $\left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ , oba tyto stavy jsou však již obsazeny druhými dvěma elektrony a dostali bychom se do sporu s Pauliovým principem.

Atomové číslo  $Z = 3$  a tedy tři elektrony v obalu má lithium. Tyto tři elektrony se snaží obsadit opět nejnižší energetické hladiny. Dva z nich obsadí tedy hladinu  $E_1$ . Poněvadž se jich tam však vzhledem k Pauliově principu více nevejde, musí třetí elektron zaujmout hladinu  $E_2$ , t. j. kvantové číslo třetího elektronu  $n = 2$ . Podle (VI. 6b) může být v tomto případě  $l = 0$  nebo  $l = 1$ . Podrobnějším výpočtem lze ukázat, že stavu  $l = 1$  přísluší poněkud větší energie než stavu  $l = 0$ . Třetí elektron je tedy ve stavu  $\left(2, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$  nebo  $\left(2, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ . Stavy druhých dvou elektronů jsou ovšem, jak jsme uvedli u helia,  $\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$  a  $\left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ .

Podobně můžeme postupovat dále. Berilium má v elektronovém obalu čtyři elektrony, jejich stavy jsou tedy nutně  $\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(1, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(2, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(2, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ . Přibude-li do obalu další pátý elektron (prvek bór), musí se již umístit do některého stavu o kvantových číslech  $n = 2$ ,  $l = 1$ , to je do některého z šesti stavů  $\left(2, 1, 0, \pm \frac{1}{2}\right)$  nebo  $\left(2, 1, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right)$ . Který z těchto šesti stavů pátý elektron bóru obsadí, je lhostejné, neboť všechny mají stejnou energii.

Uvědomíme-li si, že v případě  $n = 2$  mohou nabýt další kvantová čísla hodnot  $l = 0, 1$ ,  $m = 0, \pm 1$ ,  $s_z = \pm \frac{1}{2}$ , vidíme, že na energetické hladině  $E_2$  může se umístit celkem osm elektronů. Tento případ plně obsazené energetické hladiny  $E_2$  nastává u neonu. Neon má atomové číslo 10, dva elektrony obsazují hladinu  $E_1$ , osm elektronů hladinu  $E_2$ .

O elektronech, které přísluší k témuž kvantovému číslu  $n$  pravíme, že přísluší k téže elektronové slupce atomu. Podle toho, co jsme řekli o heliu i neonu vidíme, že oba tyto prvky mají uzavřené, t. j. plně obsazené elektronové slupky. U helia jde o slupku příslušnou k  $n = 1$ , u neonu o slupky příslušné k  $n = 1$  a  $n = 2$ . Naproti tomu na př. berilium nemá uzavřené slupky, neboť kvantové stavy  $n = 2$  nejsou plně obsazené.



Prvek s jedenácti obalovými elektrony je sodík. Jedenáctý elektron se nutně umístí do stavu  $n = 3$ , neboť stavy  $n = 1$  a  $n = 2$  jsou již plně obsazeny. Deset elektronů sodíku je tedy ve stejných stavech jako deset elektronů neonu a jedenáctý je ve stavu  $\left(3, 0, 0, +\frac{1}{2}\right)$  nebo  $\left(3, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$

Podobně bychom mohli postupovat k dalším prvkům periodické soustavy. V následující tabulce uvádíme počet elektronů v jednotlivých stavech  $n, l$  u prvků z počátku Mendělejevovy soustavy.

Pravidla o kvantových číslech (VI. 1b) a Pauliův princip umožnil nám tedy objasnit blíže strukturu elektronového obalu. Srovnáme-li spolu vlastnosti některých prvků z uvedené tabulky, vidíme, že prvky, které mají obdobné elektronové obaly, mají i obdobné vlastnosti. Tak na příklad inertní plyny *Ne*, *Ar* mají stejnou vnější slupku, obsahující 8 elektronů. Stejně je tomu u dalších inertních prvků *Kr*, *Xe*, *Rn*. Každý alkalický prvek *Li*, *Na*, *K*, *Rb*, *Cs* má plně obsazené vnitřní slupky a jeden elektron ve stavu  $l = 0$ . Slupce halových prvků *F*, *Cl*, *B*, *I* chybí jediný elektron, aby z ní vznikla slupka inertního plynu.

Zákony kvantové mechaniky objasňují tedy stavbu elektronového atomového obalu a tím dávají i možnost vysvětlit chemické vlastnosti prvků.

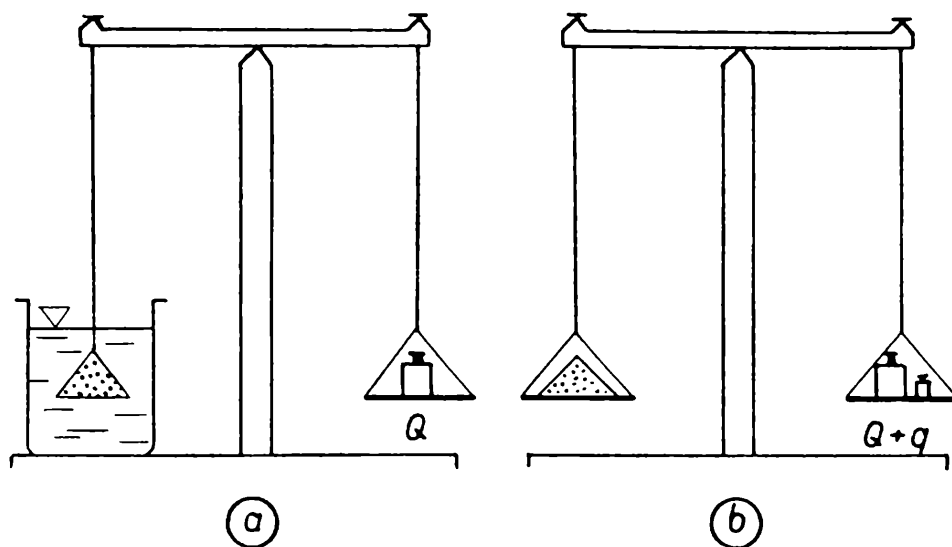
*Stavba elektronového obalu prvků*

Prvek	Z	Kvantová čísla $n, l$			
		1,0	2,0	2,1	3,0
H	1	1	—	—	—
He	2	2	—	—	—
Li	3	2	1	—	—
Be	4	2	2	—	—
B	5	2	2	1	—
C	6	2	2	2	—
N	7	2	2	3	—
O	8	2	2	4	—
F	9	2	2	5	—
Ne	10	2	2	6	—
Na	11	Konfigurace neonu		1	—
Mg	12			2	—
Al	13			2	1
Si	14			2	2
P	15			2	3
S	16			2	4
Cl	17			2	5
Ar	18			2	6

## Vznášení a plování těles

Skočit s letadla nebo balonu se stále považuje za hrdinství, i když skokan používá jednoho nebo dvou padáků. Dokonce ani cestování letadlem mnozí lidé nedůvěřují. Kdybychom si chtěli vysvětlit nedůvěru takového člověka, neměli bychom zapomenout na jeden důvod a to neznalost základních zákonů z hydroaerodynamiky nebo hydroaerostatiky. To jsou vědní obory, které se zabývají výkladem jevů, jež vznikají při ponoření těles do pohybujícího se nebo stojícího prostředí (kapaliny či plynu). Obě tyto látky velmi často nazýváme společně tekutinami.

Každý vědní obor spočívá na základních zákonech. Takovým základním zákonem v hydroaerostatice je zákon Archimedův: Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která se rovná váze tekutiny tělesem vytlačené.



Obr. 1

Podle Archimedova zákona můžeme vypočítat základní údaje pro balony a vzducholodě (letadla lehčí vzduchu), i lodě a ponorky. Vypráví se, že Archimedes na svůj zákon přišel při koupání v lázni a byl svým objevem tak rozradostněn, že jej okamžitě rozhlašoval po městě. V jeho době (r. 287 až 212 před n. l.) samozřejmě tento objev nesloužil k výpočtům balonů nebo lodí. Na to přišli lidé až mnohem později. Přesto měl tento zákon už tehdy praktické upotřebení. Znalost tohoto zákona Archimedovi umožňovala odhalovat podvodníky, kteří nabízeli vladaři jeho země padělané drahé kovy. Jak to zjišťoval? Archimedes zvažil předmět z drahého kovu dvakrát: když byl ponořen do vody (obr. 1a) a potom ve vzduchu, když byl položen na misku vah (obr. 1b). Váha předmětu ve vodě je  $Q$ , váha předmětu na vzduchu je  $Q + q$ . Podle jeho zákona rovnal se rozdíl  $q$  obou vážení váze vody, vytlačené předmětem, tedy

$$q = V \cdot \gamma_v$$

kde  $V$  značí objem předmětu a  $\gamma_v$  měrnou váhu vody (při teplotě  $4^\circ\text{C}$  je  $\gamma_v$  přibližně  $1\text{ kg/dm}^3$ ). Potom dělil váhu předmětu ve vzduchu  $Q + q$  zjištěným objemem  $V = \frac{a}{\gamma_v}$ . Dělením uvedených čísel musel vždy dostat přibližně stejné číslo,

to je měrnou váhu kovu (zlata)  $\gamma_z$ :

$$\frac{Q + q}{V} = \gamma_v \frac{Q + q}{q} = \gamma_z$$

Pokud Archimedes vypočítal hodnotu 18,8 až 19,3, mohl říci, že vážil ryzí zlato. Byla-li však hodnota menší, byl do zlata přimíšen jiný lehký kov (měď, stříbro). Jiný drahý kov, platinu s měrnou váhou 21,45 totiž tehdy ještě neznali. Svět ji poznal teprve roku 1735; některé další těžší kovy jako na př. irridium ( $\gamma = 22,4$  až  $22,6$ ), osmium ( $\gamma = 22,48$  až  $22,6$ ), byly poznány teprve v minulém století.

Vraťme se zase k letadlům. Je známo, že nejprve lidé chtěli vzlétnout tak jako ptáci, máváním křídel. Vzpomeňme si na pověst ze starověku o Ikarovi, který chtěl utéci z vězení a proto si lepil voskem křídla z ptačích per. Stihl ho prý zlý osud. Vylétěl příliš vysoko, takže slunce roztavilo vosk na jeho křídlech, ta se rozpadla a první letec se zřítíl. Teprve mnohem později, až ve středověku a na začátku novověku pokoušeli se lidé o *létání balonem*. První pokusy konali s balonem, pod kterým udržovali oheň. Tím ohřáli vzduch vnikající do balonu. A protože je teplý vzduch lehčí než vzduch studený, byl balon nadlehčován silou, kterou snadno můžeme vypočítat podle Archimedova zákona.

První se tímto úkolem zabýval portugalský fyzik **D o n G u z m a n**. Jeho začátky byly velmi těžké. Musel se potýkat nejen s technickými problémy, ale také s nepochopením doby. Tehdy byla doba náboženských soudů - inkvisice, kdy byli souzeni lidé podezřelí z čarodějnictví, i vědci, kteří otráasali tvrzením bible. Proti Guzmanovi měli inkvisitoři dokonce důkazy. Postavil balon, který se mohl vznášet ve vzduchu, což bylo dosud dopřáno jen ptákům a prý i nadpřirozeným bytostem. Guzman byl proto uvězněn. Proti jiným vědcům své doby měl však to štěstí, že se za něho přimluvil sám král Jan V., takže Guzman byl konečně propuštěn. Své pokusy konal v roce 1736. Prakticky bylo použito balonu až o půl století později. Tehdy sestrojili bratři **J o s e f a Š t ě p á n M o n t g o l f i e r o v é** balon, pod nímž udržovali oheň. Ohříváný lehčí vzduch stoupal do balonu, který tím byl nadlehčován. Téměř současně s Montgolfiery konal pokusy francouzský fyzik **C h a r l e s**, který spolu se schopnými mechaniky bratry **R o b e r t y** postavil balon moderní koncepce - plněný vodíkem. Všechny dosud jmenované balony nenesly lidskou posádku. K tomu došlo nedaleko Paříže až 1. října 1783 před zraky francouzského krále. První vzduchoplavec tehdy přeletěl celou Paříž a po 5 minutách letu šťastně přistál. Konstrukce bratrů Montgolfierů se velmi proslavila a později všechny balony na teplý vzduch byly nazývány „montgolfierami“. Po prvním úspěšném letu s lidskou posádkou se objevovali stále noví vzduchoplavci, kteří na zlepšených balonech, plněných již většinou lehčím vodíkem, dosahovali také lepších výkonů. Tak již roku 1785 přeletěli za dvě hodiny **B l a n c h a r d a J e f f e r y s** Lamanšský kanál z Francie do Anglie.

První stavitelé balonů museli nejdříve výpočtem dokázat, že vůbec balon může vzlétnout.

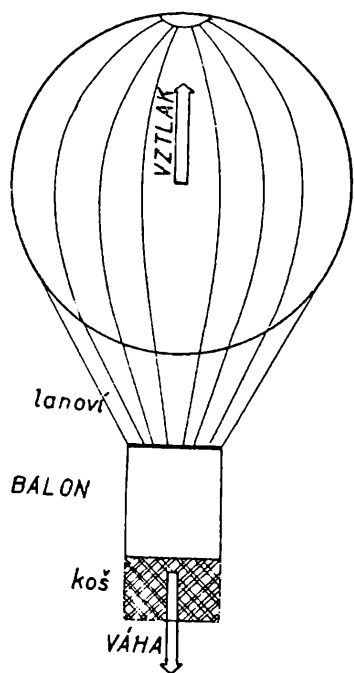
Na balon působí dvě hlavní síly. Je to váha celého balonu  $Q$ , která balon přitahuje k zemi a nadlehčující síla - vztlak  $P$ , která se snaží balon zdvihat (obr. 2). Je pochopitelné, že se balon odlepí od země jenom v případě, kdy síla mířící od země - vztlak  $P$ , bude větší než váha balonu. Je také pochopitelné, že letící balon může přistát jenom v případě, že jeho váha  $Q$  bude větší než vztlak  $P$ . Při vodorovném letu se obě síly sobě rovnají a tedy

$$Q = P. \quad (1)$$

Do váhy balonu patří váha posádky  $Q_p$ , váha koše s celým příslušenstvím  $Q_k$ , váha lanoví  $Q_l$ , váha obalu balonu i s pomocnými zařízeními (klapky)  $Q_b$  a také váha plynu uzavřeného v balonu. Je tedy

$$Q = Q_p + Q_k + Q_l + Q_b + V_b \gamma_p, \quad (2)$$

kde  $V_b$  značí objem balonu a  $\gamma_p$  měrnou váhu plynu.



Obr. 2

Vztlak balonu určíme podle Archimedova zákona: rovná se váze vzduchu, který je vytlačen celým balonem. Do výpočtu zahrnujeme jenom podstatnou část vytlačeného vzduchu, t. j. tu část vzduchu, která je vytlačena vlastním balonem:

$$P = V_b \cdot \gamma_{vz}, \quad (3)$$

kde  $V_b$  značí opět objem balonu,  $\gamma_{vz}$  měrnou váhu vzduchu.

Dosazením do rovnice (1) dostaneme vztah, ze kterého můžeme vypočítat potřebný objem balonu  $V_b$ , jestliže jsou známy  $Q_p$ ,  $Q_k$ ,  $Q_l$ ,  $Q_b$ , a měrnou váhu  $\gamma_{vz}$  a  $\gamma_p$ . Tento vztah má pak tvar

$$V(\gamma_{vz} - \gamma_p) = Q_p + Q_k + Q_l + Q_b. \quad (4)$$

Měrné váhy vzduchu a plynu nalezneme ve fyzikálních tabulkách; měrnou váhu vzduchu můžeme však snadno vypočítat

$$\gamma_{vz} = \frac{p_b}{29,3 (273,2 + t^\circ C)} \quad (5)$$

kde  $p_b$  značí barometrický tlak, asi 10 000 kg/m<sup>2</sup>,  $t^\circ C$  je teplota vzduchu ve stupních Celsia.

Podle uvedeného vzorce vypočítáme měrnou váhu vzduchu při teplotě vzduchu  $t = 10^\circ C$  a  $90^\circ C$  a barometrickém tlaku 10 000 kg/m<sup>2</sup> takto:

$$\gamma_{vz} 10^\circ\text{C} = \frac{10\,000}{29,3 (273,2 + 10)} \doteq 1,2 ,$$

$$\gamma_{vz} 90^\circ\text{C} = \frac{10\,000}{29,3 (273,2 + 90)} \doteq 0,94 . \quad (6)$$

Kdyby se tedy podařilo bratrům Montgolfierům ohřát v jejich balonu vzduch na teplotu  $90^\circ\text{C}$  a váha balonu úplného s posádkou nepřekročila 300 kg, potom by podle (4) musel mít balon objem

$$V = \frac{300}{1,2 - 0,94} = \frac{300}{0,26} \doteq 1\,150 \text{ m}^3 \quad (7)$$

Jeho poloměr by potom byl

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1\,150}{4\pi}} \doteq \sqrt[3]{276} \doteq 6,5 \text{ m}$$

a průměr  $D = 2R \doteq 13 \text{ m}$ .

Mnohém výhodnějším plynem pro plnění balonu je vodík, který na každý krychlový metr objemu balonu unese asi 1,13 kg. Poněkud těžší je helium, které unese asi 1 kg na krychlový metr. Uvedeme pro zajímavost, jakou velikost by měl balon podle předchozího výpočtu, kdyby byl plněn vodíkem místo vzduchem:

$$V = \frac{300}{1,13} \doteq 266 \text{ m}^3 ,$$

takže by stačil poloměr  $R \doteq 4 \text{ m}$ , t. j. průměr  $D \doteq 8 \text{ m}$ .

Sotva první vzduchoplavci rozřešili otázku překonání zemské tíže, stála před nimi celá řada otázek technických, na př. z čeho udělat balon, jakým způsobem balon řídit a pod. Všimněme si teď stručně otázky *ř i d i t e l n o s t i b a l o n u*.

Jak jsme již se zmínili, musí mít balon na startu vztlak větší než váhu a při přistání naopak váhu větší než vztlak. Prvním vzduchoplavcům se podařilo splnit vtípně tyto protichůdné požadavky. Balon totiž vybavili zátěží (pytle s pískem) a klapkou v horní části koule. Když se chtěl vzduchoplavec snést níže k zemi, vypustil klapkou jednoduše trochu plynu. Potřeboval-li se potom opět vznést, shodil část zátěže. Tímto způsobem mohl být ovládán svislý let balonu nahoru a dolů. Vodorovný směr letu ovšem řídit v balonu nelze, neboť balon je unášen větrem.

Aby lidé odstranili hlavní nedostatek balonu - nemožnost řízení ve vodorovném směru - postavili *vzducholod*. Vzducholodě jsou v podstatě balony vybavené motory. Aby taková vzducholod kladla vzduchu malý odpor (aerodynamický), má doutníkový aerodynamický tvar. Směr letu je řízen u vzducholodi směrovým kormidlem, výška letu objemem a druhem plynu, případně výškovým kormidlem a konečně rychlost letu motory, ukrytými obvykle v gondolách. Dnes však je již jasné, že se od staveb vzducholodí a vůbec letadel lehčích vzduchu upouští; letadla tohoto druhu stavějí se jen pro zvláštní účely.

Toto zjištění však není tak staré. Ještě kolem roku 1930 převládala domněnka,

že se vzducholodi uplatní jako rychlé dopravní prostředky na dlouhých tratích, neboť mohou mít poměrně velkou rychlost, tehdy u letadel těžších vzduchu neobvyklou. V tab. 1 a 2 jsou uvedeny základní údaje nejvýznamnějších vzducholodí tehdy postavených.

Typ	Objem m <sup>3</sup>	Plnění	Délka m	Průměr m	Štíhlost*)
LZ 127	105 000	vodík	235	30,5	7,7
LZ 129	190 000	vodík a helium	248	41,2	6,0
Akron	184 000	helium	239	40,5	5,9
R 101	141 000	vodík	220	40,3	5,5

Tab. 1

Typ	Vztlak tun	Užitečná zátěž t	Rychlost km/h	Dolet km	Motory ks
LZ 127	83,2	15	128/117	10 000	2 650
LZ 129	200	37	140/120	14 000	4 800
Akron	182,5	33	140/120	17 000	4 800
R 101	155	24	111/101	6 000	3 250

Tab. 2

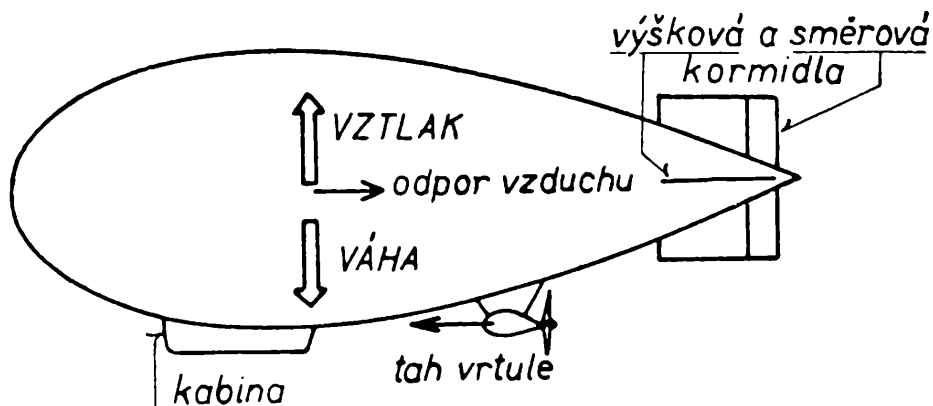
Praktické využití vzducholodi je patrné z těchto údajů: Vzducholod' LZ 127, postavená Zeppelinem, uletěla v letech 1927—1932 celkem 915 000 km za 9 042 hodin a přenesla při 60 přeletech Atlantického oceánu 10 800 cestujících, 25 t pošty a 42 t zboží. I když podle dostupných údajů byl provoz aktivní, t. j. přinášel majitelům zisky, přece jen bylo od stavby dalších vzducholodí upuštěno vzhledem k velkým nákladům na hangary a údržbu.

Na obr. 3 je nakreslena vzducholod' a síly, které na ni při letu působí. Výpočet vztlaku je tu obdobný jako u balonu.

Vlastnosti plynů a kapalin jsou si v mnohém směru podobné. Proto také příbližný výpočet vztlaku *lodi* je podobný výpočtu vztlaku balonu nebo vzducho-

\*) t. j. poměr délky a průměru.

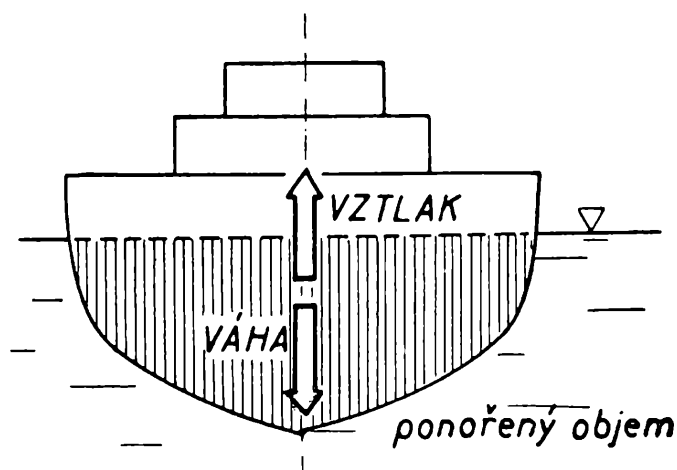
lodi. Vztlak, působící na tyto tři dopravní prostředky, není podmíněn pohybem a působí i na nepohybující se tělesa. Také loď je nadlehčována silou, rovnající se váze vytlačené vody. Protože však je měrná váha vody asi tisíckrát větší než měrná váha vzduchu, unese loď mnohem větší zátěž. Velikost lodi je obvykle udávána výtlakem lodi. Středně velké lodě mají na příklad výtlak kolem 10 000 tun. To



Obr. 3

znamená, že loď ponořená po čáru ponoru vytlačí asi 10 000  $m^3$  vody. Na obrázku 4 je nakreslen schematický řez lodí se silami, které na loď v klidu působí. Jsou to váha lodi  $Q$  a vztlak  $P$ . Obě tyto síly jsou stále v rovnováze. Toho si všimne nejlépe pozorovatel v přístavu. Při vykládání loď vystupuje z vody, při nakládání se do vody ponořuje. Tím se mění vždy ponořený objem v souladu se změnou váhy lodi.

Tak jako dnes mají mnozí lidé ještě strach před cestováním letadly, báli se dříve při cestování lodí potopení. Aby toto nebezpečí cestující neodstrašovalo a aby se skutečně zmenšila možnost potopení, byly postaveny lodě „nepotopitelné“. Za starých časů se stavěly lodě dřevěné, poněvadž nebylo vhodnějšího materiálu.



Obr. 4

Pokud na stavbu takové lodi nebylo použito více železného materiálu, než kolik by vyrovnalo váhu celé lodi na váhu vody stejného objemu, nemohla se loď bez nákladu potopit. Při ztroskotání takové dřevěné lodi měli trosečníci vždy po ruce spoustu ráhen, prken a jiných dřev, kterých se mohli zachytit a případně si z nich

udělat vor a na něm se i zachránit. V dnešní době se však staví lodě převážně ocelové. Ocel je při stejném objemu osmkrát těžší než voda. Aby se zmenšilo nebezpečí potopení lodi při poškození stěn, rozděluje se u některých lodí ponořený objem přepážkami na komory, které se dají vodotěsně uzavřít. Poškodí-li se při havarii lodi její vnější stěna, vytvoří se z přepážek v okolí poškozeného místa taková komora. Voda vyplní pouze tuto komoru a loď je zachráněna. Loď se totiž vždy navrhuje tak, aby měla dostatečnou rezervu výtlačku. Jsou však známy i případy potopení takových „nepotopitelných“ lodí. Vzpomeňme na zaoceánskou loď „Titanic“, nebo v poslední době na „Andreu Doriu“. U obou lodí bylo poškození tak rozsáhlé, že nebylo možno vytvořit vodotěsné komory a voda vnikala do lodi rychleji, než mohla být odčerpávána. Lodi jsou však konstruovány s tak velkou rezervou výtlačku (nevezou tak velké zatížení, kolik by mohly unést) a jsou vybaveny tak, že přibývání vody v poškozené lodi není náhlé a je možno zachránit cestující i posádku. Tak na příklad „Andrea Doria“ se potopila až za 9 hodin, když už nikdo nebyl na palubě.

Na základě Archimedova zákona je možno otázku o „nepotopitelných“ lodích zodpovědět takto: Pokud je výtlačk poškozené lodi větší než její váha, loď se nepotopí. Aby se v případě havarie příliš nezmenšoval vztlak vnikáním vody do lodního prostoru, staví se komory, které kolem poškozeného místa vytvoří vodotěsné stěny, takže voda vyplní pouze tento prostor. Postavením mnoha komor podél stěny lodních boků se však zvětšuje váha lodi, zmenšuje se využitelný prostor, zvětšují se náklady na stavbu atd. Je tedy nutno volit při stavbě lodí kompromis a stavět komory jenom proti takovému poškození, které přichází nejčastěji v úvahu.

Když se loď potopí, znamená to, že je ztracena. Jen málokdy je výhodné vydvihnout loď ze dna na hladinu.

Jsou však stavěny lodi speciální, které se mohou ponořit pod hladinu a zase vynořit. Jsou to *ponorky* nebo *podmořské čluny*. Ponorky jsou určeny pro plavbu po hladině a mohou plout také dlouhou dobu pod hladinou. Podmořské čluny jsou určeny převážně pro plavbu pod hladinou. Oba typy lodí mají pouze vojenský význam. Teprve v poslední době se užívá podmořských člunů i k výzkumu mořského dna, rostlinstva a zvířeny. Vzhledem k tomu, že ponorky představují zajímavý námět pro aplikaci Archimedova zákona, všimneme si tohoto druhu lodí podrobněji.

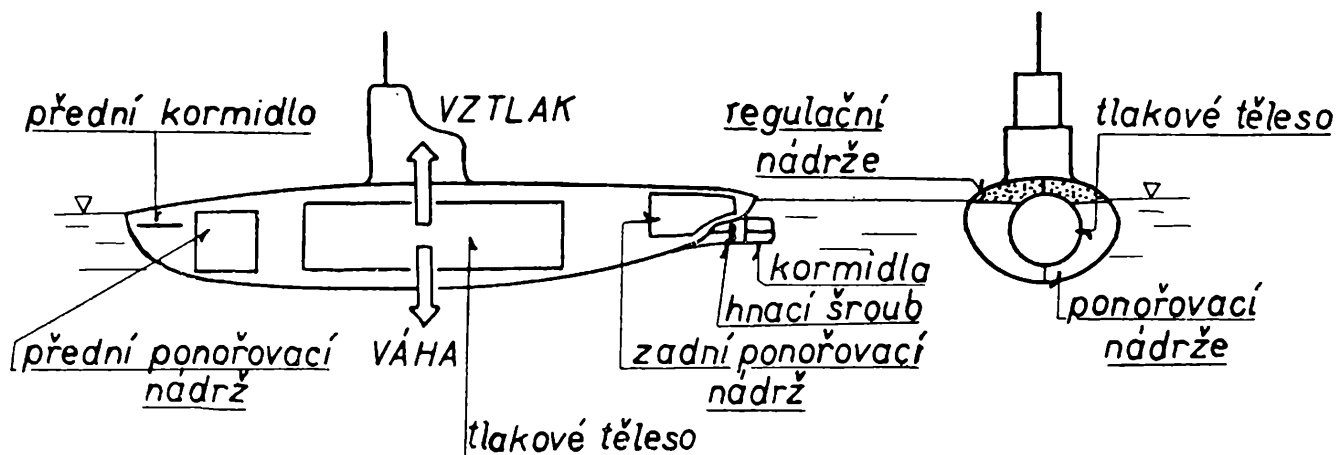
Pokusy o konstrukci ponorného člunu pocházejí již ze 16. století. Tehdy postavil dřevěný člun *B o w e n e*, později na tomto úkolu pracoval Holanďan *D r e b b e l* (1624), Američan *B u s h n e l l* 1771, *F o u l t o n* 1797, Němec *B a u e r* 1848. Významným vojenským prostředkem se stala ponorka teprve po vynalezení akumulátoru *P l a n t é m* 1859, torpeda *L u p p i s e m* a *W h i t e h e a d e m*, objevem periskopu a spalovacího a elektrického motoru. První významný podmořský člun byl postaven ve Francii 1888. Typ *G u s t a v Z é d é* měl vždy jen jediný strojní agregát. Kolem roku 1900 byly vyřešeny nejdůležitější konstrukční problémy a dokázána přednost dvouplášťových ponorek (obr. 5).

První dvouplášťové ponorky typu *N a r v a l* zkonstruoval Francouz *L a u b e u f*. Tyto ponorky tvoří protitlakové těleso schopné odolávat velkým tlakům vody v hloubce. Bývá to kruhový nebo eliptický válec. Kolem něho je ještě jeden plášť,



řešený s hlediska nejmenších ztrát při obtékání vodou při plavbě. V prostoru mezi oběma pláštěmi jsou umístěny všechny části ponorky, které není nutno chránit před tlakem vody a kromě toho ponořovací a regulační nádrže a nádrže na pohonné hmoty, stlačený vzduch a podobně. Tento vnější plášť je poměrně slabý, neboť na něj nepůsobí žádný tlak. Na obou stranách je tlaková voda. Ponořovací nádrže jsou v ponorce rozmístěny podél trupu, na přídi a na zádi. Chce-li se ponorka ponořit, otevrou se ponořovací nádrže na přídi, potom ve střední části a konečně na zádi. Tím se zmenší výtlak ponorky a ponorka se ponořuje. Do nádrží se nabere tolik vody, aby ponorka měla v zásobě asi 1 tunu výtlaku, což je nutné z několika důvodů. Jednak proto, že zastaví-li se stroje, vynese výtlak jedné tuny ponorku na hladinu a potom proto, že taková ponorka se snadněji ovládá kormidly na přídi i na zádi.

Výtlak ponorky se pohybuje v mezích od 200 do 1 500 tun. Vzhledem k tomu, že rezervní výtlak na hladině bývá asi 40<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, musí mít ponorka nádrže na 50 až 600 m<sup>3</sup> vody. Připomeňme si opět síly, které působí na ponořenou a vynořenou ponorku (obr. 5). V obou případech se výtlak a váha ponorky sobě rovnají. Vyno-



Obr. 5

řená ponorka však ještě vyčnívá částečně nad hladinu a tento vynořený prostor představuje uvedenou 40<sup>0</sup>/<sub>0</sub> rezervu výtlaku. Když se chce ponorka ponořit, musí se zbavit této rezervy, což činí vyplněním nadbytečných prostorů vodou. Podle Archimedova zákona by měla ponořená ponorka vytlačit tolik vody, kolik činí její objem. Potom by se ve vodě vznášela. Protože však ponořená ponorka je velmi málo stabilní a je tu nebezpečí, že by ztratila vodorovnou polohu (věží nahoru), ponechává se zmíněný rezervní jednotunový výtlak, který se vyvažuje působením sil na kormidla, takže je ponorka opět v rovnováze. Při vynořování načerpá se do jedné ponořovací nádrže vzduch stlačený na 200 až 300 atp, který vytlačí vodu. Vznikne další výtlaková síla, odpovídající váze vytlačené vody, která zdvihne ponorku na hladinu. Zde se vytlačí voda z ostatních nádrží nízkotlakými kompresory s tlakem asi 0,6 atp.

Ponorka je vybavena obvykle dvěma druhy motoru, jedním pro pohon na hladině, druhým pro plavbu pod hladinou. První motor bývá spalovací, nejčastěji Dieselův. Poněvadž při práci potřebuje vzduch, nemůže být použit pod hladinou, není-li spojen s ovzduším. Pod hladinou se používají elektrické motory poháněné

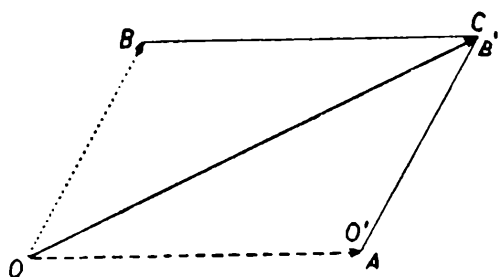
akumulátorovými bateriemi, které se dobíjejí při plavbě na hladině. Spotřebu pohonných látek pro spalovací motory, nebo vystřelením torped, či shozením min při akci, se zmenšuje váha ponorky, takže je obtížné udržet ponorku pod vodou. Na to se musí brát zřetel při stavbě nádrží ponorky. Konstrukteři musí dále pamatovat na to, že ponorka bude plout v různých mořích, s různými měrnými vahami vody. Proto musí být vybavena regulačními nádržemi, které se v takových případech vyplňují vodou.

To byl jen krátký nástin a objasnění jevů, s kterými se setkáváme v oboru nazývaném aerostatika a hydrostatika, t. j. nauky o nepohybujících se tělesech v ovzduší, plynech a kapalinách.

Prof. Dr. Emil Kašpar, Praha:

## Skládání stejnosměrných harmonických kmitů

V přírodě i v technické praxi mají vedle jednoduchých vlnění velký význam také děje, které jsou výsledkem současného šíření dvou anebo několika jednoduchých vlnění v témže prostředí - *složená vlnění* - po případě složité děje, které můžeme na jednoduchá vlnění rozložit. Jako příklady takových dějů lze uvést *chvění* pevných těles nebo *chvění* vzduchu v omezeném prostoru, na př. v píšťale. Jiným příkladem jsou děje, na nichž jsou založeny rozhlasové vysilače nebo přijímače. Tyto děje jsou zpravidla složité. V tomto článku si ukážeme, jaký výsledný pohyb koná jediná částice, která je nucena konat současně dva nebo více harmonických pohybů.



Obr. 1

Jestliže se hmotná částice pohybuje současně dvěma různými pohyby vlivem dvou vnějších příčin, pak její výsledný pohyb může být značně složitý. Jaký pohyb koná, to můžeme říci z jednoduchého názoru nebo z úvahy jen v těch případech, kdy oba pohyby jsou jednoduché, na př. rovnoměrný přímočarý pohyb. Ale na př. není možno předem z jednoduchého názoru vždy říci, jaký je výsledný pohyb částice, která koná současně dva různé harmonické pohyby.

Fysika má obecnou pomůcku, jak zjistit výsledný pohyb částice, která koná současně dva nebo více pohybů, a to i v nejsložitějších případech. Tou pomůckou je *princip nezávislosti pohybů*, který zní: *Koná-li těleso současně dva nebo více pohybů na sobě nezávislých, pak je výsledná poloha tělesa stejná, jako kdyby těleso konalo pohyby po sobě v libovolném pořadí.*

Působí-li na malou volnou částici dvě síly, z nichž jedna by způsobila posuv  $OA$  (obr. 1) a druhá (sama o sobě a v témže čase) posuv  $OB$ , nalezneme výslednou polohu tak, že k bodu  $A$  přeneseme úsečku  $OB$  se stejným směrem; v obr. 1 je to úsečka  $O'B'$ . Výsledná poloha částice je pak dána bodem  $C$ , přesněji řečeno úsečkou  $\vec{OC}$ . Úsečka  $\vec{OC}$ , která určuje polohu bodu  $C$  vzhledem k bodu  $O$ , se nazývá *průvodič*. Šipkou vyjadřujeme, že úsečka  $\vec{OC}$  je vektor.

Výsledný pohyb se nemusí vždy konat po úsečce  $OC$ , která je úhlopříčkou rovnoběžníku  $OACBO$ , sestrojeného ze stran  $OA$  a  $OB$ . V mnohých případech se však částice skutečně po dráze  $OC$  pohybuje, a pak říkáme, že jsme posuv  $\vec{OC}$  sestrojili jako *geometrický* neboli *vektorový součet* posuvů  $\vec{OA}$  a  $\vec{OB}$ . Jestliže se výsledný pohyb neděje po dráze  $OC$ , pak vektorovým sčítáním posuvů  $\vec{OA}$  a  $\vec{OB}$  dospějeme pouze k průvodiči  $\vec{OC}$ , kterým je sice stanovena konečná poloha částice, nikoliv však skutečná dráha pohybu. Abychom i v tomto případě našli dráhu, pak musíme celý pohyb rozložit na velmi krátké úseky a v každém úseku nalézt polohu částice. S příklady na takové postupné vyhledávání pohybu částice se setkáme v dalším textu.

Omezíme se na případ, kdy je částice nucena současně konat pouze dva harmonické pohyby. Dva harmonické pohyby se mohou shodovat nebo lišit<sup>1)</sup>

ve směrech kmitání částic v prostoru:

v kmitočtech (frekvencích), značka  $f$ ;

v rozkmitcích (amplitudách), zn.  $A$ ;

ve fázích, značka pro fázový rozdíl je  $\varphi$ .

V tomto článku se omezíme na jednoduchý případ skládání harmonických kmitů, kdy oba kmity se dějí v téže přímce (stejnoseměrné kmity); případ, kdy kmity se dějí ve směrech navzájem kolmých (kolmé kmity), vyšetříme v příštím článku. Budeme postupovat tak, že oba kmity, které budeme nazývat složky, časově rozvineme a jejich výchylky v každém okamžiku složíme (sečteme). Úvahu však rozdělíme opět na dva různé případy:

1. obě složky mají stejný kmitočet  $f$ ;

2. obě složky mají různý kmitočet  $f$ .

O rozkmitu zatím nebudeme nic zvláštního předpokládat. Obecně jsou tedy rozkmity složek různé. Podobně budeme předpokládat, že mezi oběma složkami existuje nějaký fázový rozdíl.

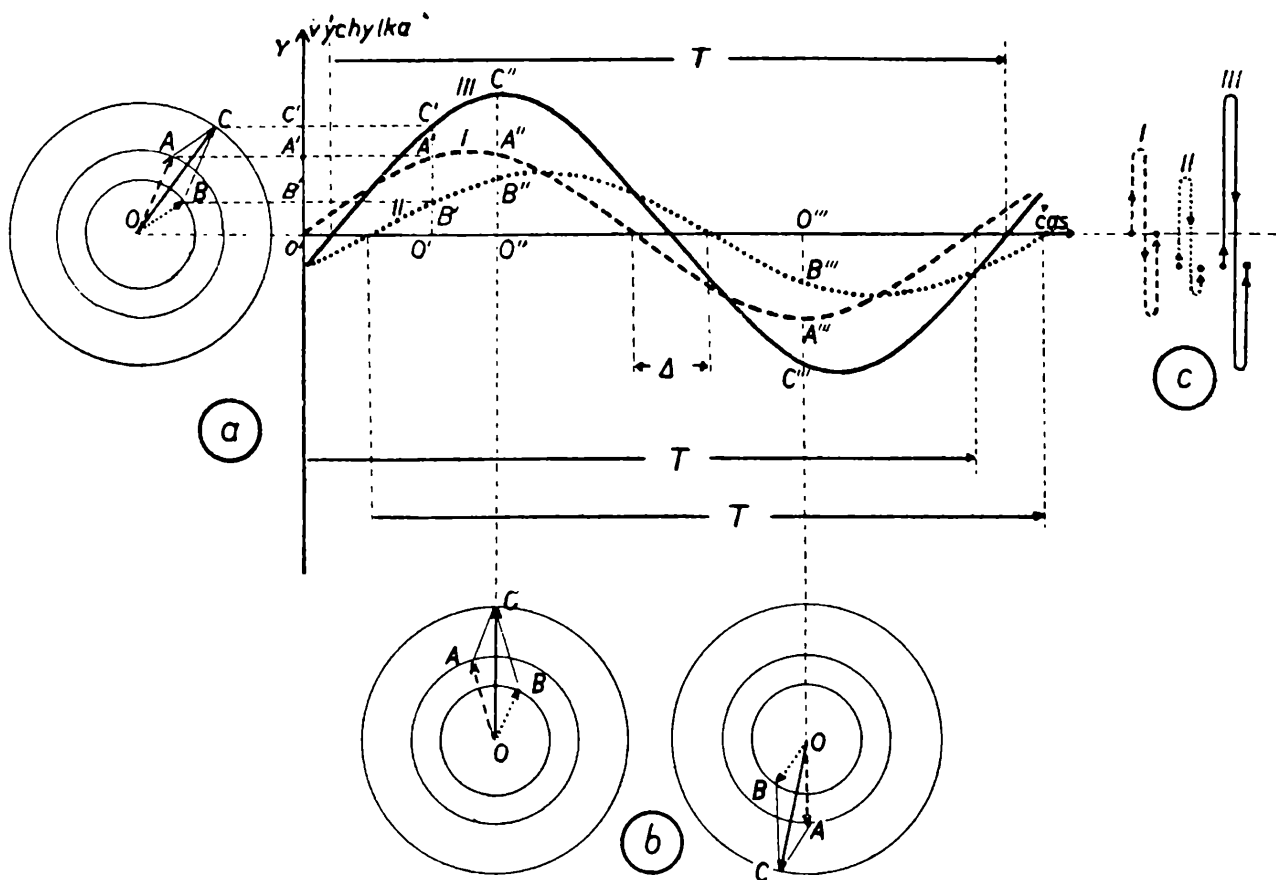
### 1. Skládání dvou stejnosměrných kmitů stejného kmitočtu.

Naše otázka konkrétně zní: Jaký je výsledný pohyb částice, která koná současně dva kmity, jeden s rozkmitem  $A_1$  a druhý s rozkmitem  $A_2$ , a to tak, že kmit s rozkmitem  $A_1$  je opožděn proti kmitu s rozkmitem  $A_2$  o fázový rozdíl  $\varphi$ ?

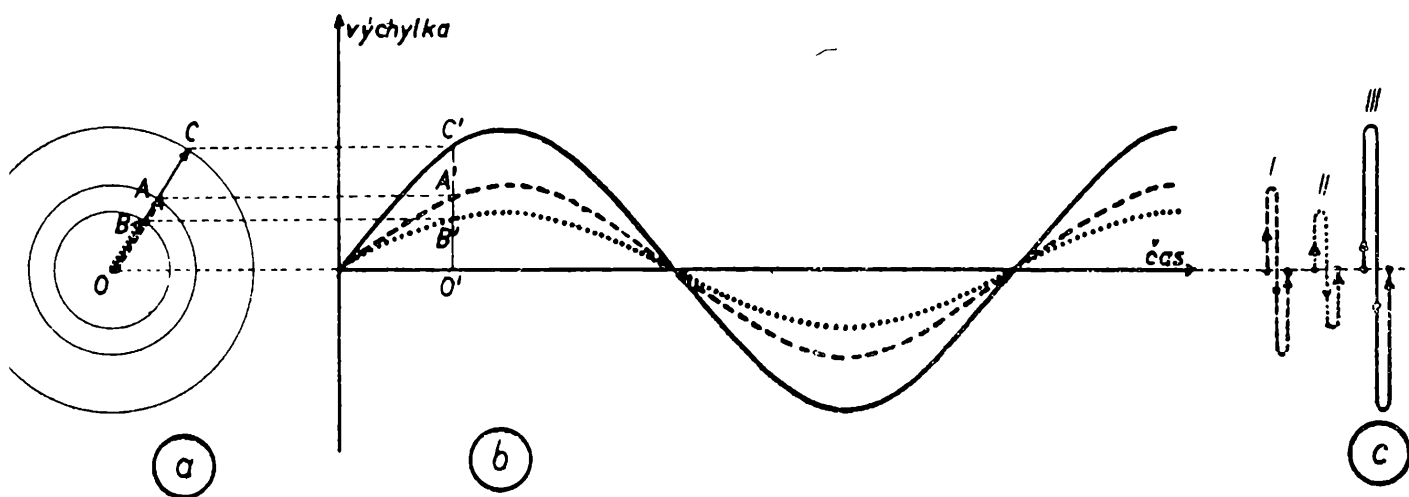
Kmitavý pohyb znázorníme rovnoměrným pohybem bodu po kružnici. Promítneme-li v každém okamžiku bod  $A$  na př. do svislé přímky, koná průmět  $A'$  harmonický pohyb. Takové znázornění je uvedeno na př. v učebnici fyziky pro 10. ročník (str. 130 a dále) a bude nám prospěšné i zde. Jeden kmitavý pohyb (jednu složku) si znázorníme jako pohyb bodu  $A'$ , který je kolmým průmětem koncového bodu průvodiče  $\vec{OA}$  (obr. 2a) na osu  $O'Y$ . Druhou složku si znázorníme pohybem bodu  $B'$ , který je zase kolmým průmětem koncového bodu  $B$  kroužícího průvodiče  $\vec{OB}$ . Výsledný pohyb částice je dán pohybem bodu  $C'$ . Při tom platí, že  $OC' = OA' + OB'$ .

<sup>1)</sup> Viz na př. Fyzika pro desátý postupný ročník str. 130 a další nebo publikace O vlnění od autora tohoto článku (JČMF, 1950, sb. Brána k vědění sv. 13, str. 8 a další).

Z téhož obr. 2a plyne, že bod  $C'$  je také průmětem bodu  $C$ , který je koncovým bodem úhlopříčky  $OC$  rovnoběžníku, jehož strany jsou  $OA$  a  $OB$ . Protože oba průvodiče  $OA$  a  $OB$  krouží stejnou rychlostí kolem středu  $O$ , krouží také úhlopříčka  $OC$  touž rychlostí kolem středu  $O$ . Odtud plyne, že výsledný pohyb částice lze



Obr. 2



Obr. 3

znázornit průmětem koncového bodu úhlopříčky  $OC$ . Je tedy výsledný pohyb částice také harmonický pohyb se stejným kmitočtem, jaký mají obě složky. Rozkmit výsledného pohybu dostaneme podle obr. 2a jako geometrický neboli vektorový součet rozkmitů obou složek. Z obr. 2a také plyne, že výsledný harmonický

pohyb má fázi obecně rozdílnou od fází obou složek. V okamžiku, který je v obrázku zachycen, jsou fáze znázorněny úhly, které svírají průvodiče  $\vec{OA}$ , resp.  $\vec{OB}$ , resp.  $\vec{OC}$  s vodorovným směrem.

Výsledný pohyb se děje ve stejném směru (v obr. 2 svislém) jako u složek.

Časové rozvinutí obou složkových i výsledného pohybu ukazuje obr. 2b. Jsou v něm na kruhovém pohybu také vyznačeny dvě různé fáze. Složky i výsledný kmit se však dějí v přímce. Proto skutečný pohyb názorněji zpodobuje obr. 2c, v němž je vyznačen jeden kmit obou složek (I a II) a výsledného kmitavého pohybu (III) v témže časovém úseku od  $t = 0$  do  $t = T$ . (Pozor, v obr. 2b je zakreslen časový rozvoj pro dobu o něco větší než je perioda  $T$ .)

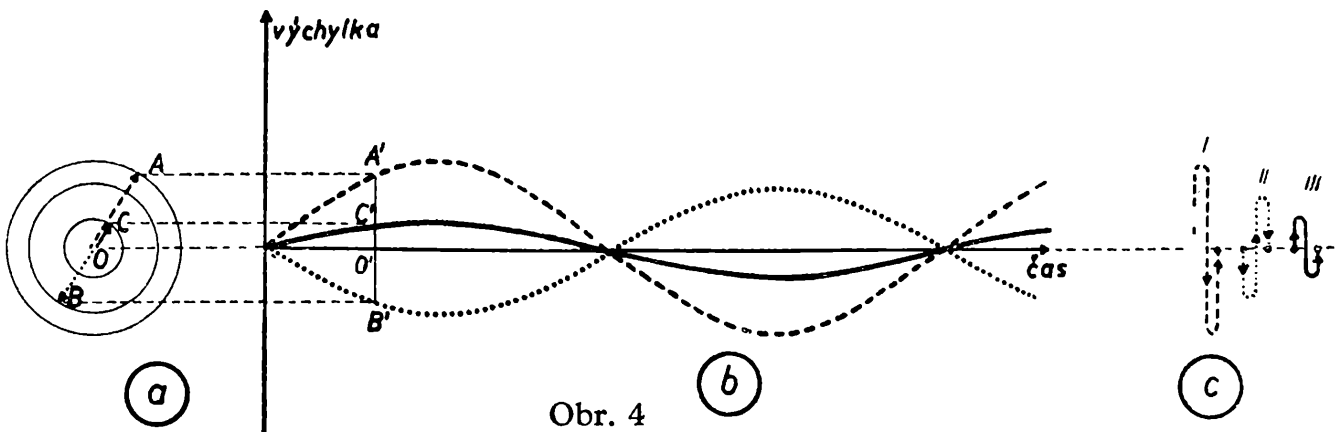
*Některé zvláštní případy:*

$\alpha$ ) *Obě složky mají stejnou fázi, t. j. fázový rozdíl je  $\varphi = 0$ .*

Tento případ je znázorněn na obr. 3. Vidíme, že výsledný kmitavý pohyb je ve fázi s oběma složkami a že se jeho amplituda rovná součtu amplitud obou složek:

$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ . Mají-li obě složky stejnou amplitudu, pak je amplituda výslednice rovna dvojnásobku amplitudy jedné složky. Také výsledná výchylka je v každém okamžiku rovna součtu výchylek obou složek:  $O'C' = O'A' + O'B'$

$\beta$ ) *Obě složky mají obrácenou fázi, t. j. fázový rozdíl  $\varphi = \pi (= 180^\circ)$ .*



Obr. 4

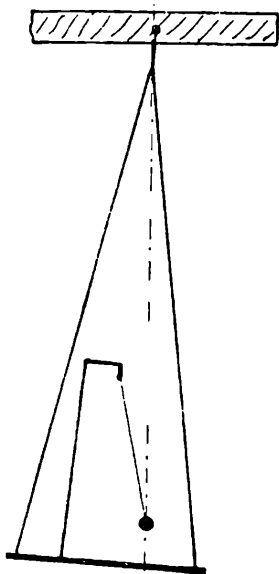
Jak je vidět z obr. 4., je u výsledného pohybu  $\left\{ \begin{array}{l} \text{výchylka } \vec{OC'} \\ \text{amplituda } \vec{OC} \end{array} \right\}$  rovna rozdílu

$\left\{ \begin{array}{l} \text{výchylek } \vec{OA'} \text{ a } \vec{OB'} \\ \text{amplitud } \vec{OA} \text{ a } \vec{OB} \end{array} \right\}$  obou složek a jeho fáze je stejná jako fáze složky, která má větší amplitudu. V obr. 4a je zachycena určitá fáze (pro určitý časový okamžik), v obr. 4b je časové rozvinutí složek a výsledného pohybu pro časový úsek o něco delší, než je doba kmitu  $T$ . V obr. 4c je opět znázorněn průběh pohybu složek a výsledného pohybu během jednoho kmitu.

Ve zvláštním případě, kdy obě složky mají stejný rozkmit, je rozkmit výsledného pohybu roven nule, t. j. oba kmity se navzájem ruší.

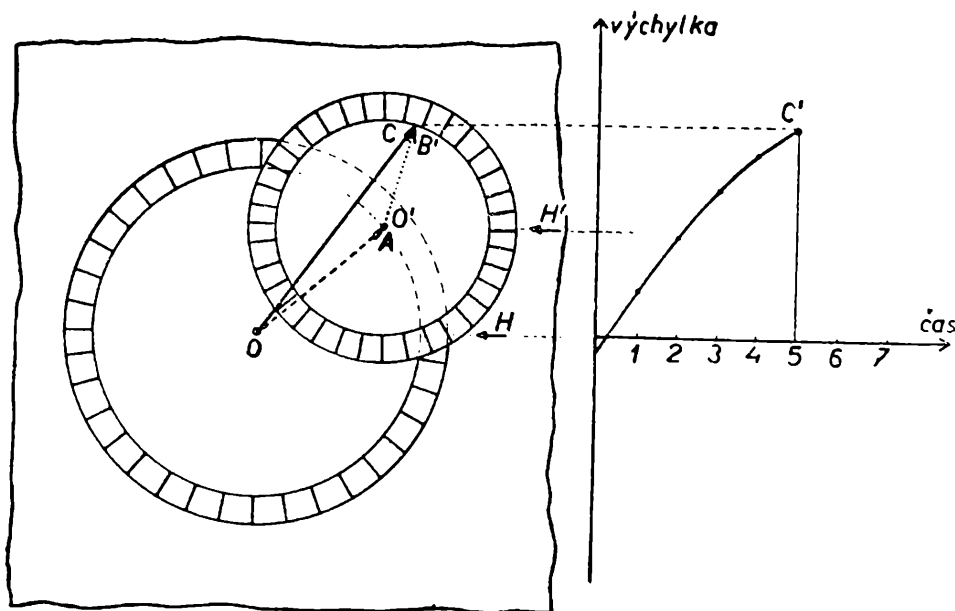
*Poznámky.* 1. Na první pohled by se mohlo zdát podivným, jak by nějaká hmotná částice mohla konat současně dva různé kmitavé pohyby, na sobě nezávislé. Musíme si uvědomit, že částice koná jeden jediný pohyb výsledný. Na existenci dvou nebo více složek můžeme

soudit z přítomnosti dvou nebo většího počtu sil na sobě nezávislých, z nichž každá o sobě by působila kmitavý pohyb částice. Realizovat uměle pohyb, kde nějaké těleso koná současně dva různé kmitavé pohyby, by bylo značně obtížné nebo alespoň umělé. Vidíme to na př. z obrázku 5, kde je znázorněno zařízení, při němž kyvadlo koná kyvy (ty jsou velmi přibližně harmonické) a přitom je unášeno houpačkou, konající také přibližně harmonické kyvy. Výsledný pohyb kyvadla je pak pro vnějšího pozorovatele roven součtu obou pohybů. Ale bližší rozbor i skutečné provedení by ukázalo, že oba pohyby nejsou nezávislé, že se navzájem ovlivňují.



Obr. 5

2. Časový rozvoj složených kmitů si můžeme rychle zakreslit pomocí pomůcky, kterou si snadno zhotovíme. Vystříháme z tvrdého papíru kotouč s poloměrem o něco větším než je amplituda  $\vec{OA}$  (obr. 6). Jeho obvod rozdělíme na určitý počet stejných dílků, na př. 32. Kromě toho z téhož papíru vystříháme kotouč s poloměrem o něco málo větším než je amplituda  $\vec{OB}$ , a jeho obvod rozdělíme na stejný počet dílků jako u prvního kotouče. Střed většího kotouče připevníme na podložku (na př. napínáčkem) a střed menšího kotouče připevníme otáčivě kolem určitého dílku většího kotouče. Otáčení tohoto druhého kotouče umožníme také na př. napínáčkem obráceným hrotem vzhůru. Při práci s přístrojem postupujeme tak, že otočíme větším kotoučem o jeden dílek vzhledem k vodorovnému směru, t. j. vzhledem k přímce  $O'H'$ , jdoucí středem  $O'$ . Druhý kotouč zatím vzhledem k většímu kotouči nemění polohu (viz dále). Časový rozvoj výsledného pohybu pak nalezneme tak, že výslednou výchylku - vzdálenost bodu  $C$  od časové osy - přenášíme do grafu na svislou úsečku v příslušném časovém okamžiku. Postup je zřejmý z obr. 6.



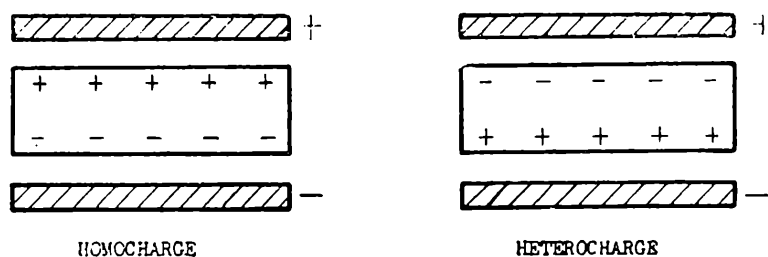
Obr. 6

Čtenář, který si zkonstruuje přístroj, sám zjistí, že pro konstrukci časového rozvoje výslednice dvou kmitavých pohybů *stejných* frekvencí je zbytečně složitý. Nahlédneme to z obr. 6, kde vidíme, že během natáčení kotoučů zůstává trojúhelník  $OAC$  neproměnný. Stačí tedy natáčet současně oběma kotouči tak, jakoby oba byly pevně spojeny v jeden celek. K tomu bychom však vystačili s jedním kotoučem. Náš přístroj bude však velmi užitečný při skládání kmitů o nestejných kmitočtech, vzhledem k možnosti natočení i druhého kotouče.

(Pokračování)

## Elektret - elektrická obdoba permanentního magnetu

Existence přirozených magnetů byla známa již Aristotelovi a každý z nás mě již také nějaký permanentní magnet jistě v ruce. Mnohého však možná překvapí, když uslyší o jakési elektrické době magnetu, o látkách, pro které se vžil označení *elektret*. Tento název pochází od Eguchiho, který pozoroval, že destičky z karnaubského vosku, vystavené za vysoké teploty působení silného stejnosměrného elektrického pole, podržely i po jeho vypnutí za normální teploty na svých koncových plochách elektrické náboje (obr. 1).



Obr. 1

Abychom si tento zjev mohli alespoň přibližně vyložit, musíme se stručně seznámit s některými pojmy. Každou elektricky nevodivou látku považujeme za dielektrikum. Dielektrikum se skládá z molekul, atomů nebo iontů. Dále však pro jednoduchost budeme mluvit jen o molekulách, i když případně podle potřeby budeme mít na mysli atomy nebo ionty. Každá molekula obsahuje kladné elektrické náboje, soustředěné v jádrech atomů a záporné náboje, jejichž nositeli jsou elektrony. Pohyb těchto nábojů může být v jednotlivých molekulách takový, že jejich účinek v okolním prostoru je v časovém průměru nulový. Dielektrika, vyznačující se touto vlastností, označujeme jako *nepolární*. Ve vnějším elektrickém poli se ovšem dráhy elektrických nábojů silovým působením elektrického pole na náboje pozmění a každá molekula se počne v časovém průměru chovat tak, jako kdyby obsahovala dva různorodé, stejně veliké náboje, jejichž vzájemná vzdálenost je přímo úměrná intenzitě elektrického pole. Říkáme, že se nám jednotlivé molekuly jeví jako *elektrické dipóly*, vyznačující se určitým elektrickým momentem. Jeho hodnota se rovná vzájemné vzdálenosti obou nábojů, násobené velikostí jednoho z nich a je tedy také přímo úměrná intenzitě vnějšího elektrického pole. Dielektrikum se polarisovalo. Dielektrická konstanta u nepolárních dielektrik, u nichž se vytvoří elektrické dipóly teprve přítomností vnějšího elektrického pole, je jen mírně závislá na teplotě.

Středy (těžiště) kladných a záporných nábojů mohou být však v molekule posunuty a mohou vykazovat určitý elektrický moment již v normálním stavu, to znamená, když nepůsobí vnější elektrické pole. Mluvíme pak o dielektrikách s *polárními molekulami*. Pokud se takové dielektrikum nenalézá ve vnějším elektrickém

poli, jsou jednotlivé polární molekuly vlivem neuspořádaného tepelného pohybu natočeny nejrůznějšími směry a průměrný účinek jejich momentů v okolním prostoru dostatečného počtu polárních molekul je nulový. Teprve působením vnějšího elektrického pole se počnou molekuly orientovat ve směru tohoto pole a dochází opět k polarisaci dielektrika. Na rozdíl od polarisace nepolárních dielektrik, která se označuje jako *polarisace posuvná*, nazýváme tuto *polarisaci orientační*. Při orientační polarisaci působí tepelný pohyb molekul značně rušivě proti usměrňujícím účinkům elektrického pole. Je příčinou, že souhlasné orientace všech molekul (t. zv. *nasyčené orientace*) můžeme theoreticky dosáhnout pouze při nekonečně velké intenzitě elektrického pole nebo při teplotě absolutní nuly. Dielektrická konstanta polárních dielektrik je silně závislá na teplotě.

Jak jsme se již v úvodu zmínili, je možno u některých látek dosáhnouti i jakési permanentní polarisace. Vhodnou látku, na př. karnaubský nebo včelí vosk, pryskyřici, plexiglas, polyvinylchlorid a p. roztavíme a současně ji podrobíme vlivu dosti silného stejnosměrného elektrického pole, zpravidla mezi deskami kondensátoru. Po zchladnutí, i když odstraníme vnější elektrické pole, můžeme dosti dlouhou dobu pozorovat na koncových plochách dielektrika elektrické náboje. Zásadně mohou nastat dva zcela odlišné případy. Po vypnutí vnějšího elektrického pole může být plocha elektretu, která během polarisace přiléhala ke kladné elektrodě, nabita buď souhlasně, to znamená kladně, nebo nesouhlasně, t. zn. záporně. Obdobně souhlasně či nesouhlasně se zápornou elektrodou je pak současně nabita i opačná plocha elektretu. V prvním případě mluvíme o *elektretu se souhlasnými náboji* (homocharge), ve druhém o *elektretu s nesouhlasnými náboji* (heterocharge).

Vznik prvního druhu nábojů byl uspokojivě vysvětlen Grossem. Při dostatečně silných elektrických polích dochází v obou mezerách mezi elektrodami a povrchem dielektrika k ionisaci vzduchu. Ionty souhlasně nabitě s přilehlou elektrodou jsou jí odpuzovány a mohou se zachytiti na povrchu elektretu a vytvořiti tam souhlasný náboj. Tento druh nábojů tedy vlastně vzniká elektrickým průrazem vzduchu. Ionty vzduchu se přitom pochopitelně nejvíce usazují v místech, kde intenzita elektrického pole je největší, na př. na hrotech dielektrika.

Vysvětlení vzniku nesouhlasných nábojů je poněkud obtížnější a až dosud trochu nevyjasněné. V poslední době se přičítá makroskopickému pohybu iontů v dielektriku (K. Antenen). Tyto ionty vytvoří v roztaveném stavu na plochách elektretu sousedících s elektrodami tenké prostorové vrstvy nábojů opačného znaménka a celý elektret se chová po zchladnutí jako dipól.

Existují takové elektrety, u nichž se v podstatě setkáváme výhradně se souhlasnými náboji (homocharge) a obdobně jiné, u nichž se vyskytují nesouhlasné náboje (heterocharge). Obecně však můžeme pozorovat u elektretu oba způsoby vzniku nábojů současně. Pokud je intenzita pole dostatečně malá a nemůže dojít k výboji mezi elektrodami a povrchem elektretu (při intenzitách pole asi do 0,5 kV/mm až 2 kV/mm), vznikají vlastně výhradně náboje opačné. Při poněkud větších intenzitách počnou vznikat současně i souhlasné náboje, které zeslabují náboje opačné. Při ještě dalším zvyšování intenzity elektrického pole (při intenzitách několika kV/mm) zcela převládnu souhlasné náboje a se vzrůstající intenzitou elektrického



pole jejich velikost téměř lineárně vzrůstá. Konečně dosáhne takové hodnoty, že velká intenzita pole uvnitř dielektrika podmíní určitou elektrickou vodivost; tím se počnou náboje na jeho koncových plochách vyrovnávat. Další zvýšení intenzity elektrického pole může vésti dokonce k elektrickému průrazu elektretu.

Pokusili jsme se velmi stručně nastínit teorii vzniku nábojů na koncových plochách elektretu. Zdá se, že zatím co souhlasné náboje lze vysvětlit zachycením volných nábojů na koncových plochách elektretu v důsledku výboje ve vzduchové mezeře mezi elektretem a elektrodami, je nutno vznik nesouhlasných nábojů přičísti vodivosti elektretu ve formujícím elektrickém poli a makroskopickém pohybu iontů v elektretu. Mnohé otázky zde však čekají ještě na vyřešení.

Ačkoliv se zdá být použití elektretu v praxi velmi výhodné, rozšířilo se dosud málo. V podstatě lze elektretu použít všude tam, kde je zapotřebí existence elektrického pole, třeba i značných velikostí. Lze je tedy použít na př. v elektrometru nebo vláknovém voltmetru. Konstrukce přístroje se v tomto případě poněkud liší od běžného uspořádání. Elektret je možno zavěsit mezi dvě deskové elektrody, na které přivádíme měřené napětí. Příslušný moment, potřebný k otočení ručičky nebo zrcátka, vzniká pak vzájemným působením pole mezi elektrodami a elektretem. Tato konstrukce zachovává výhodu elektrostatického voltmetru, jeho velký odpor, současně však značně snižuje jeho vstupní kapacitu a zvyšuje citlivost. Lze při ní rovněž poměrně snadno dosáhnouti lineární stupnice.

Podobně bylo pokusně použito elektretu k získání potřebného elektrického pole v kondensátorovém mikrofónu. Pomocí elektretu bylo by možno také provést konstrukci mechanického generátoru pro vysoká napětí s malým odběrem proudu, na př. pro napájení obrazových měničů atd.



## *Co vidíme na nebi*

Jitka Náprstková, Praha:

### **Význam astronomie pro praktický život**

Mnozí lidé se dívají na astronomii jako na vědu, která pojednává o objektech velmi od nás vzdálených a nemá tedy s naším životem mnoho společného. Neuvědomují si, jak velký význam má astronomie pro ostatní odvětví vědy a techniky, a tedy pro celý náš život vůbec. Všimněme si alespoň několika příkladů, které ukazují, jak astronomie pomáhala a pomáhá mnohým vědám při jejich rozvoji.

Astronomie, jedna z nejstarších věd, byla platnou pomůckou člověku již při jeho nejprostším způsobu života. Stálé opakování světla a tmy, střídání ročních období, změny měsíčních fází, otáčení nebeské oblohy, to byly úkazy velmi zřetelné a není proto divu, že si lidé podle nich odedávna rozvrhovali svůj čas. Mnohé

kalendáře, t. zv. m ě s í č n í, mají původ v trvání měsíce, t. j. v době, za kterou se vystřídají všechny měsíční fáze. Některé kalendáře jsou založeny na jiných faktech. Tak si lidé při střídání čtyř ročních období, otáčení Země okolo Slunce, vytvořili k a l e n d á ř r o č n í. Sloučením měsíčního a ročního vznikl n á š k a l e n d á ř, který po několika úpravách dostal svoji nynější tvářnost.

Jedním z nejdůležitějších darů, které astronomie lidstvu dala, je přesný čas. Jak bychom žili v nynější moderní době bez přesných hodinek, bez přesného času, kdy rozhoduje nejen každá minuta, ale i zlomek vteřiny? Takový čas je určován v zásadě podle hvězd. A korekce hodin se děje opět astronomickými metodami.

Plavci na lodích, letci v letadlech, vybaveni nejmodernějšími přístroji včetně radarových zařízení, řídí směr svých cest v zásadě podle hvězd. Tak Polárka byla a jest vůdkyní nejen velkých lodí, ale i nepatrných bárek. Ani g e o d e t i, t. j. inženýři zeměměřiči, by se vůbec neobešli bez základních znalostí astronomie. Měření naší Země, udání jejího tvaru, určování zeměpisných souřadnic a mnoho jiných prací by se bez astronomických podkladů vůbec nemohlo konat. A geodetické práce tvoří zase základ prací kartografických. Mnohá odvětví věd byla rozvinuta jediné pro potřeby astronomie. Tak na př. i n f i n i t e s i m á l n í p o - č e t děkuje za svůj vznik nebeské mechanice, nebeská mechanika aplikovaná na fyzikální děje dala vznik speciální části fyziky, dynamice, která jedná o příčinách pohybu vůbec. O p t i k a by nedospěla k své nynější výši, kdyby nebylo astronomie. A t h e o r i e r e l a t i v i t y, kterou způsobil Einstein v celém fyzikálním světě tak velký rozruch a převrat, se zakládá velkou měrou na astronomickém ověření. Úžasné výzkumy o nitru atomů se daly pomocí podobných theoretických metod jako při studiu nitra hvězd. Astronomie také pomáhá fyzikům při přípravě uskutečňování ovladatelných thermonukleárních reakcí. Kdo by před několika desítkami let hledal souvislost mezi těmito dvěma bádáními, na první pohled tak různými? Kdo by hledal souvislost mezi světem mikrokosmu a makrokosmu? A právě tak nemůžeme vědět, kdy bude možno aplikovat i jiné astronomické výzkumy na laboratorní děje a rozhodně nesmíme považovat problémy, které se dnes zdají být čistě theoretickými, jen za samoučelné bádání vědy pro vědu, i když se nyní zdá, že se nemohou prakticky uplatnit.

Astronomie je však i základním pilířem různých filosofických světových názorů. Kde by byla filosofie bez správných znalostí základů astronomie? Astronomické výzkumy nám dávají možnost poznat jednotnou stavbu vesmíru. Člověk si původně představoval, že on je pánem světa a že Země je středem vesmíru, kolem níž se otáčejí všechna nebeská tělesa. Až teprve v 16. století velký polský astronom Koperník vyložil, že Země obíhá jako jiné planety okolo Slunce. Tak zbořila astronomie názor na jedinou možnost života na naší Zemi a ukázala, že takových hvězd, jakou je naše Slunce, existuje nesmírně mnoho, a že tedy bezpochyby je i mnoho planetárních systémů, kde by mohl existovat život podobný našemu. Dříve byli lidé přesvědčeni, že na jejich život má velký vliv postavení planet v době pro ně význačné, jako na př. při jejich narození. A s t r o l o g i e, která se těmito a jim podobnými otázkami zabývala, patří nyní do říše pověr. Nesporný vliv na život všech lidí má Slunce. Dodává nám světlo, teplo i energii a v astronomii se čím dále tím více uplatňuje názor, že sluneční vlivy skutečně existují

hlavně při počasí a při šíření elektromagnetických vln při radiovém styku. Magnetické bouře, polární záře a i mnoho jiných úkazů má svůj základ v existenci Slunce a úkazů na něm. Slapy, známé pro přímořské obyvatele jako příliv a odliv, jsou způsobeny přitažlivostí Měsíce vedle podružného vlivu Slunce.

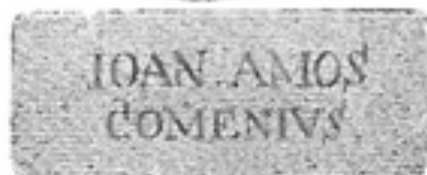
Hvězdářský zeměpis patří nyní k základům všeobecného vzdělání právě tak, jako světový. Často se učíme o zemích, které těžko v životě navštívíme, ale o nichž se přesto můžeme dovědět mnoho zajímavostí.

A totéž platí i o hvězdářském zeměpise zvláště v nynější době velkého rozvoje astronautiky, která právě stojí na prahu svého života, v době, kdy byla vypuštěna první umělá družice Země a další jsou očekávány, kdy mají být v nejbližší budoucnosti vystřeleny rakety na Měsíc, nejprve bez lidské posádky, později i s ní, v době, která nám připravuje nescíslná překvapení každým dnem, kdy nejaburdnější utopie včerejška se stávají skutečností.

## *Různé - recenze*

Josef Kotyk, Pardubice:

### **K výročí Jana Amose Komenského**



*Nechť zajde sláva,  
jen když nezahyne to,  
co samo o sobě je dobré  
ve snahách k rozmnožování obecného dobra.*

J. A. Komenský: Methodus linguarum novissima. (Methoda jazyků nejnovější.)

Připomínáme-li čtenářům našeho časopisu 365. výročí narozenin učitele národů Jana Amose Komenského (\* 28. března 1592) a zároveň 300. výročí vydání jeho amsterodamského souboru „Opera didactica omnia“ (Veškerá díla pedagogická), činíme tak proto, že všechen kulturní svět se sklání před tímto velikým synem českého národa a že dílo Komenského má i jim co říci. I dnešní čtenář je pohnut, čte-li s porozuměním spis tak pevného životního pohledu, jakým jest Komenského „Labyrint světa a ráj srdce“.

Komenský, podle vlastních slov „muž touhy po dokonalosti lidstva“, chtěl ve své pansofii (vševědě) všem lidem všechny věci jasně vyložit a tak všechno lidstvo vědění sjednotit. Tážeme se proto, zdali měl také o matematiku a fyziku zájem a jaké místo vykázal těmto vědám ve své pansofii.

O m a t e m a t i c k é č i n n o s t i našich exulantů byl dlouho naprostý nedostatek zpráv. Veliká úcta, kterou Komenský měl k matematice, byla však obecně známá. Svědčí pro ni na př. slova, jimiž v Labyrintu (XI, 8) líčí Poutník (t. j. Komenský sám) svou návštěvu u aritmetiků: „Nač pak to umění jest? řekl sem. Oni mé hlouposti se podivíc, hned jeden přes druhého divy mi vypravovati začnou. Jeden, že mi poví, kolik husí v stádě letí, nepočítaje jich; druhý, že mi poví, v kolik hodinách čisterna pěti rourkami vyteče. Třetí, že mi poví, kolik v měsčci grošů mám . . . Než když mne do nejzadnější (t. j. síně) vedli, jenž A l g e b r a aneb C o s s a<sup>1)</sup> slove, uvésti chtěli, takových sem tam divokých jakýchsi klik a háků hromady uhlédal, že mne o málo závrat nepopadl; a zavra já oči, prosil sem, aby mne odtud vedli.“

Avšak ani úctou k matematikům se Komenský netajil. Na př. v díle „T r i e r t i u m c a t h o l i c u m “ (kap. VIII.) píše s obdivem „Matematikové, jichž vědomosti jsou nejjistější . . .“ V tomto díle snaží se Komenský uvést v souhlas myšlenky, slova i skutky člověka a na mnoha místech doznává, jak velice si váží m e t h o d m a t e m a t i c k ý c h. V kap. X. vyslovuje přání: „K nesmírnému užitku by bylo, kdyby všechna axiomata<sup>2)</sup> o kterékoliv věci byla a r i t m e t i c k ý m způsobem spojena, g e o m e t r i c k ý m vyměřena a v řetěz skuta.“ V kap. VIII. žádá ještě určitěji: „I jest nutno vynaložiti úsilí, aby vše bylo dokázáno g e o m e t r i c k o u nutností!“

Ke geometrii měl Komenský zřejmě větší náklonnost než k algebře, v níž ne učinil značnějšího pokroku. Dokonce se ukázalo, že ani se stavem vědění soudobé algebry nebyl dobře obeznámen. O základních pojmech elementární geometrie vykládá však na mnoha místech, na př. v díle „O r b i s p i c t u s “ (Svět v obrazech<sup>3)</sup>) a j. Zejména praktická geometrie (geodesie) se Komenskému líbila. V díle „J a n u a e l i n g u a r u m p r a x e o s t h e a t r i c a e “ vystupuje (v části 5, jednání 2, scéně 3) učitel Mathematicus a rozmlouvá se žáky Numerianem, Metritem a Trytaniem o elementární aritmetice, geometrii a geodesii.

V posledním půlstoletí se naše vědomosti o životě a díle Komenského prohloubily studiem neznámých rukopisů, jež našel prof. Dr. St. Souček v Leningradě.<sup>4)</sup> Jeden z nich (G e o m e t r i a ) dokazuje, že Komenský se pokusil dokonce

---

<sup>1)</sup> V souvislosti se značkami (písmeny a j.), zkratkami a různými symboly byla středověká algebra, resp. nauka o řešení rovnic, italsky nazývána a r t e (nebo regola) d e l l a c o s s a, krátce c o s s (ital. cosa = francouzsky chose = věc) a její pěstitelé c o s s i s t é. Významným z nich stal se na př. německý mistr-počtář Christoff Rudolff dílem „C o s z “ z roku 1525.

<sup>2)</sup> Věci zásadní důležitosti pro logické vybudování matematiky jako vědy je vytčení axiomů (základních vět, zásad). Patří k nim na prvním místě axiomu logické - viz můj článek „Z á k l a d y m a t e m a t i k y “ v Rozhledech, roč. 27, čís. 1, str. 17 až 20 - a vlastní axiomu matematické, jež nabývají povahy axiomatických postulátů (požadavků); o nich viz mé články „Z á k l a d y a r i t m e t i k y “ a „Z á k l a d y g e o m e t r i e “ v Rozhledech, roč. 23, čís. 5, str. 132 až 135 a roč. 24, čís. 2 a 3, str. 66 až 70.

<sup>3)</sup> Třísté výročí vydání tohoto díla, jímž se Komenský rovněž proslavil po celém světě, bude připomínáno v roce 1958.

<sup>4)</sup> Obširnou zprávu o tomto objevu podal v „Naší vědě“, roč. 1931.

o sepsání dvoudílné latinské učebnice geometrie. Rukopis se skládá z dvou částí: I. *Geometria theoretica*, II. *Secunda pars Geometriae Geodesia dicta* po sedmi kapitolách a je doprovázen zdařilými náčrtý. Jeho zajímavost tkví však spíše v osobě spisovatele než v obsahu. Ani v geometrii nepřispěl Komenský něčím novým<sup>5)</sup> k vývoji vědy.

Latinský rukopis o geometrii pochází z doby působení Komenského v polském Lešně, kam Komenský přišel jako exulant roku 1628. Ředitelem tamějších škol byl tehdy učený Ondřej Wegierský. Vrchní dozor nad nimi vykonával senior Paliur. Oba tito vzdělaní mužové velmi přáli snahám Komenského. Zdá se, že na jejich popud napsal Komenský též obsáhlou učebnici fyziky „*Physicae ad lumen divinum reformatae synopsis*“, vydanou roku 1633 v Lipsku a v Amsterodamu. Pod názvem „Fyzika“ nesmíme si ovšem ihned představit dnešní fyziku, nýbrž spíše filosofii, v níž se Komenský snažil překlenout spory mezi vírou a přírodními vědami své doby. Práce, kterou Komenský po deset let věnoval sestrojení perpetua mobile, nemohla rovněž vést k cíli.

Neobyčejně vřelý zájem měl Komenský o astronomii. Již v mládí za studií na universitě v Heidelbergu upoutal jeho pozornost rukopis díla Mikuláše Koperníka „*De revolutionibus orbium coelestium*“ (O pohybech těles nebeských). Komenský věděl, že Koperník ukryval tento vzácný rukopis po desítky let.<sup>6)</sup> V době, o níž píší, byl však Komenskému na dosah ruky, neboť patřil vdově po děkanu školy Christmannovi. Komenský neváhal a nabídl paní Christmannové vše co měl a za peníze určené na cestu domů rukopis koupil. Na zadní straně rukopisu nalézáme o tom poznámku, jež byla připojena později a v češtině zní „Tuto knihu od vdovy zesnulého M. Jakuba Christmanna za náležitou cenu vykoupenou ve svou přenesl knihovnu Jan Amos Nivnický (Nivanus)<sup>7)</sup> roku 1614, 17. ledna v Heidelbergu.“ Do domova vzdáleného 700 km musel se Komenský ovšem vydat pěšky. Do vlasti přinesl však drahocenný poklad, který po roce 1628 koupil ve Slezsku pan Otto z Nosticů; byl pak jako převzácná památka chován ve sbírkách Nosticova paláce v Praze a teprve nedávno vrácen polskému národu.

Heliocentrický názor Koperníkův nebyl, jak známo, všeobecně uznán hned za správný. Málo se připomíná, že také Komenský zaujal k němu podobně stanovisko přísné a kritické jako Tycho Brahe, Blaise Pascal, René Descartes a jiní badatelé.<sup>8)</sup> Ve velkém zápolení obou světových názorů nalézáme Komenského proto po jejich boku. Z pobytu v Lešně pochází Komenského česká práce „*O vycházení a zapadání přednějších hvězd oblohy osmé*“, v níž autor

---

<sup>5)</sup> Viz *Archiv pro bádání o životě a spisech Jana Amose Komenského*, ročník XV, stať prof. Dr Karla Čupra.

<sup>6)</sup> Teprve na sklonku svého života odhodlal se Koperník na přímluvu svých přátel vydati svůj slavný spis tiskem. Dílo vyšlo v Norimberku v úmrtním roce autorově roku 1543.

<sup>7)</sup> Otázka rodiště Komenského (Nivnice či Uherský Brod) zůstává nerozřešena dodnes.

<sup>8)</sup> Z písemného styku, v němž byl Komenský s filozofy své doby (péčí prof. Kvačaly byla tato korespondence vydána v několika svazcích), se dovídáme, že zejména Leibnitze připoutal ke Komenskému zájem o vybudování vědeckého světového názoru.

přiřkl také ještě podle představ soustavy geocentrické prvních sedm<sup>9)</sup> obloh planetám Měsíci, Merkuru, Venuši, Slunci, Marsu, Jupiteru a Saturnu; na osmé<sup>10)</sup> obloze umístil pak souhvězdí. Jinou prací astronomického obsahu je Komenského latinské „*Cosmographiae compendium*“ a jeho části „*De astronomia*“ a „*Medulla geographiae*“. Rukopisy těchto prací (objevené rovněž prof. St. Součkem) tvořily pravděpodobně součást připravované pansofické encyklopedie Komenského.

Čtenářům našeho časopisu je známo, že ve svém osobním životě Komenský velmi trpěl.<sup>11)</sup> Utrpení nepodtálo však zdravý kořen jeho osobnosti. Ústředním smyslem života je Komenskému práce: „Naše práce nás tvoří. Práce nalévá oleje do lampy života.“ Komenský neztratil nikdy důvěru v člověka a jeho schopnosti, v moc jeho rozumu. Věřil, že „člověk, veden přírodou, může proniknouti ke všemu.“ Z tohoto přesvědčení (sovětský badatel Medynskij spatřuje v něm ohlasy renesance), vrostlo také Komenského dílo pedagogické, jež nabylo světové proslulosti. V úvodu k „*Didaktice velké*“ vytkl Komenský jako cíl školního vyučování „hledati a nalézati způsob, jak by měli méně učit ti, kteří vyučují, ale jak by se naučili více ti, kteří se učí.“ S mládeží „nebudiž podnikáno nic, leč co věk její nejen dopouští, nýbrž i žádá.“ Učebnice mají být psány srozumitelně a přístupně, aby „podávaly žákům světlo, s jehož pomocí mohou porozumět i bez učitele, sami...“ Přihlížeje k zvláštnostem české povahy, prosil: „Nebuďme, prosím, tak leniví, abychom po jiných toliko vždy hleděli a za jinými se z daleka plaziti chtěli. Nechtě také nás jiní před sebou vidí!“ Jak časově znějí po staletích i národu Komenského všechny tyto tužby učitele národů! Kéž i u nás, v Komenského vlasti, dojdou proto brzy splnění věštecká slova Leibnitzova: „Nadejde, Komenský, čas, kdy zástupy blažených budou ctít, co's vykonal sám, ctít i Tvých nadějí sen!“

\* \* \*

*Poznámka.* V jubilujícím souborném vydání didaktických spisů Komenského z roku 1657 bylo použito grafické značky (signetu), jež se stala námětem jednokorunové známky jubilejní série Komenského. Námět vzbudil však v naší veřejnost rozpaky. Běží o osobní emblém Komenského, načrtnutý pro rytce pravděpodobně vlastní rukou Komenského. Složitý obrázek (viz obr.) znázorňuje koloběh vody

---

<sup>9)</sup> Z předpokladů o domnělém vlivu sedmi tehdy známých planet na lidský život, vznikl sedmidenní týden. Každé z planet byl zasvěcen jeden den, na př. neděle Slunci (něm. Sonntag), pondělí Měsíci (francouzsky lundi), úterý Marsu (francouzsky mardi), středa Merkuru (francouzsky mercredi) a pod. Tvrzení učebnice astronomie (1954, čl. 51), že úterek byl zasvěcen Merkuru, je nepravdivé.

<sup>10)</sup> Představu, že kolem Země jako středu je opsáno osm soustředných křišťálových koulí, na nichž jsou nebeská tělesa upevněna a jež se různými rychlostmi kolem společné osy otáčejí, nalzáme již v 6. stol. před Kr. u řeckého filosofa Pythagora ze Samu.

<sup>11)</sup> „Můj celý život byl putováním a neměl jsem vlasti...“, napsal Komenský pln stesku ve svém posledním díle „*Unum necessarium*“ (Jednoho je třeba). Zemřel dne 15. listopadu 1670 v Amsterdamu. Jeho hrob v Naardenu upadl v zapomenutí. Trvalo to 267 let, než byl v tamější valonské kapli objeven a odevzdán ve správu našeho národa.

v přírodě, který volně a bez násilí plyne a v životodárném cyklu stále se opakuje. Smysl emblému je hluboce symbolický: Komenský jím vyjadřoval cíl svého snaže-



ní. Emblém dokresluje zároveň význam připojeného hesla „Omnia sponte fluant“, etc., t. j. „Vše volně plyne“,<sup>12)</sup> atd., jež vyjadřuje Komenského touhu po nenásilném životě veškerenstva, myšlenku světového míru.



## Úlohy k řešení

14. Promítneme-li postupně vždy dvě strany trojúhelníka na osu úhlu těmito stranami sevřeného a oba průměty spolu násobíme, jest součet všech tří součinů roven čtverci polovičního obvodu trojúhelníka. Dokažte: *Ing. Dr. J. Langr*

*Řešil Jiří Pochobradský, XI b, JSS v Pardubicích.*

Průměty  $b'$ ,  $c'$  stran  $b$  a  $c$  do osy úhlu  $\alpha$  mají délky

$$b' = b \cos \frac{\alpha}{2}, \quad c' = c \cos \frac{\alpha}{2}$$

a jejich součin je tudíž

$$bc \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Podobně součin průmětů stran  $a$ ,  $c$  do osy úhlu  $\beta$  je

$$ac \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

<sup>12)</sup> Jako filosof plynoucích světa proslul již starověký Herakleitos z Efesu, zv. Temný (asi 540 až 480 před Kr.). Klasický výrok „Vše plyne“ bývá v literatuře připomínán zpravidla ve spojitosti s jeho jménem.

a součin průmětů stran  $a$ ,  $b$  do osy úhlu  $\gamma$  je

$$ab \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

Vyjděme ze známé věty o průmětech stran do strany třetí

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta,$$

z níž vyplývá

$$2c(c - b \cos \alpha - a \cos \beta) = 0,$$

čili

$$2c^2 - 2bc \cos \alpha - 2ac \cos \beta = 0$$

Poněvadž

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

lze předchozí rovnici dát tvar

$$2ab \cos \gamma + 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta = a^2 + b^2 + c^2$$

Připočteme-li k oběma stranám této rovnice součet

$$2ab + 2ac + 2bc,$$

dostaneme

$$2ab(1 + \cos \gamma) + 2bc(1 + \cos \alpha) + 2ac(1 + \cos \beta) = (a + b + c)^2$$

Víme, že pro každé  $x$  platí

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

a proto po dosazení a po dělení čtyřmi dostane naše rovnice tvar

$$ab \cos^2 \frac{\gamma}{2} + bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} + ac \cos^2 \frac{\beta}{2} = \left( \frac{a + b + c}{2} \right)^2$$

a to jsme měli dokázat.

Jinak řešil úlohu *Stanislav Musil, 4. r. lesnické t. šk. v Hranicích*. Jeho řešení je v podstatě toto. Máme dokázat správnost identity

$$ab \cos^2 \frac{\gamma}{2} + ac \cos^2 \frac{\beta}{2} + bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \left( \frac{a + b + c}{2} \right)^2$$

Použijeme vzorce

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

a daná identita přejde v jinou

$$2ab \cos \gamma + 2ac \cos \beta + 2bc \cos \alpha = a^2 + b^2 + c^2,$$

což je správná identita, kterou můžeme dostat sečtením rovnic



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

15. Ukaŕte, ŕe číslo  $N = 43^n - 30^n - 24^n + 11^n$  je pro kaŕdÉ pŕirozenÉ číslo  $n$  dĕlitelnÉ 247. St. Horák

Řešil Jiří Pochobradský, XI b, ŕSŠ v Pardubicích.

Pŕi řešení uŕijeme známÉho vztahu

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad (1)$$

který je odvozen v uĕebnici Algebra pro 11. roĕník str. 277. Daný vŕyraz napišme v tvaru

$$\begin{aligned} N &= (43^n - 30^n) - (24^n - 11^n) = (43 - 30)(43^{n-1} + 30 \cdot 43^{n-2} + \dots + \\ &+ 43 \cdot 30^{n-2} + 30^{n-1}) - (24 - 11)(24^{n-1} + 11 \cdot 24^{n-2} + \dots + \\ &+ 24 \cdot 11^{n-2} + 11^{n-1}). \end{aligned}$$

Ponĕvadŕ  $43 - 30 = 24 - 11 = 13$ , je vidĕt, ŕe  $N$  je dĕlitelnÉ číslem 13.

Daný vŕyraz upravíme ještĕ jinak:

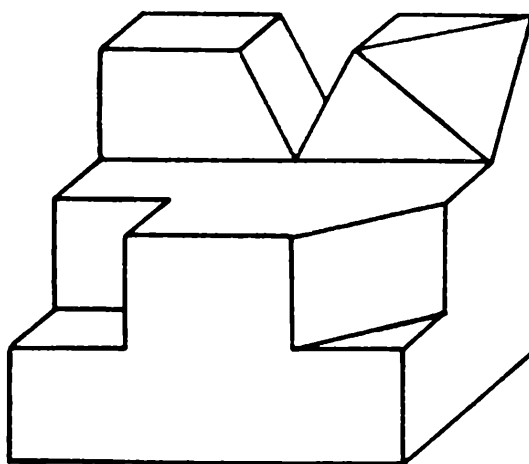
$$N = (43^n - 24^n) - (30^n - 11^n)$$

a vŕyrazy v zÁvorkách rozloŕíme opĕt podle vzorce (1). Jeŕto  $43 - 24 = 30 - 11 = 19$ , je  $N$  dĕlitelnÉ číslem 19.

Protoŕe  $N$  je dĕlitelnÉ čísly 13 a 19, je dĕlitelnÉ i jejich souĕinem, t. j. číslem 247.

Jiné řešení zaslal ŕ. Zitko, XI, ŕSŠ v Chrudimi. Pŕíklad řešil úplnou indukci. Pro  $n = 1$  je  $N = 0$  a tudíŕ je  $N$  dĕlitelnÉ 247. Pŕedpokládejme, ŕe  $N_k = 43^k - 30^k - 24^k + 11^k$  je dĕlitelnÉ 247 a dá se dokázati, ŕe i  $N_{k+1} = 43^{k+1} - 30^{k+1} - 24^{k+1} + 11^{k+1}$  je dĕlitelnÉ 247.

16. Sestojte názorný obrázek tĕlesa, danÉho nárysem, pŕodorysem a bokorysem. Red.



Řešil VÁclav Āinka, XI c, ŕSŠ v MladÉ Boleslavi:

Bylo pouŕito kosoúhlÉho promítání, jehoŕ zkosení  $\omega = 135^\circ$  a pomĕr zkrácení

$$q = \frac{1}{2}.$$

17. Chcejúc overiť Joule-Lenzov zákon o množstve tepla vybaveného elektrickým prúdom ponoríme platinovú špirálu (špecifický odpor platiny  $\rho = 0,12$  [ $\Omega \cdot \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$ ], ktorej dĺžka je  $l = 20$  [cm] a priemer  $2r = 0,8$  [mm], do nádoby obsahujúcej  $m = 0,8$  [kg] oleja, ktorého špecifické teplo je  $c = 0,4$  [ $\frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}}$ ].

O koľko [ $^{\circ}\text{C}$ ] vzrastie teplota oleja každú minútu, ak špirála je pripojená ku zdroju napätia  $U = 2$  [V]? (Straty tepelné a zohrievanie nádoby samej zanedbajte!)

E. Říman

Najlepšie riešenie zaslal *Jan Zitko*, Slatiňany čp. 211, okres Chrudim, ktoré po autorovej úprave je:

Závislosť odporu na dĺžke, prierezu a látke znie  $R = \rho \frac{l}{S}$ . Z Ohmovho zákona

$U = R I$  vyjadríme  $I = \frac{U}{R}$ . Práca el. prúdu je  $A = U I t$ . Spojením týchto vzor-

cov vychádza práca elektr. prúdu  $A = U I t = \frac{U^2}{R} t = \frac{U^2 \pi r^2 t}{\rho l}$ . Táto práca sa

premení v dodané teplo  $Q = m c \Delta\vartheta$ , ktoré sa spotrebuje na zohriatie  $m$  kilogramov látky, ktorej špecifické teplo je  $c$  o teplotný rozdiel  $\Delta\vartheta$  stupňov Celzia. Platí teda (pri zanedbaní strát atď.)  $A = Q$  t. j.

$$m c \Delta\vartheta = \frac{U^2 \pi r^2 t}{\rho l} \text{ z čoho } \Rightarrow \Delta\vartheta = \frac{U^2 \pi r^2 t}{\rho l m c}$$

Pri číselnom výpočte pamätajme, že treba alebo prácu  $A$ , ktorá vyjde v jouloch premeniť na kalorie, alebo previesť špecifické teplo  $c$  do sústavy MKSA. Prevod vykonáme pomocou vzťahu 1 joule = 0,24 [cal] resp. 1 [cal] = 4,2 [J] to je 1 [kcal] =  $4,2 \cdot 10^3$  [J] =  $4,2 \cdot 10^3$  [VAs]. Užime druhý spôsob:

$$c = 0,4 \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}} \right] = 0,4 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg grad}} \right] = 1,68 \cdot 10^3 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg grad}} \right]$$

Pretože  $t = 60$  [s], ďalej  $\left[ \frac{\text{V}^2 \text{s}}{\Omega} \right] = \left[ \text{V} \frac{\text{V}}{\Omega} \text{s} \right] = [\text{V A s}] = [\text{J}]$ , je zvýšenie teploty oleja v čase jednej minúty dané vzťahom

$$\Delta\vartheta = \frac{4 [\text{V}^2] \pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} [\text{mm}^2] \cdot 60 [\text{s}]}{12 \cdot 10^{-2} [\Omega] [\text{mm}^2 \text{m}^{-1}] \cdot 2 \cdot 10^{-1} [\text{m}] \cdot 0,8 [\text{kg}] \cdot 1,68 \cdot 10^3 [\text{J kg}^{-1} \text{grad}^{-1}]} \doteq \doteq 3,9 [\text{grad}] .$$

21. Ktorási fyzikálna veličina je daná vzorcom

$$x = \frac{\pi r^2 t U^2}{\rho l m c}$$

kde  $r$  = polomer,  $t$  = čas,  $U$  = elektrické napätie,  $\rho$  = špecifický odpor elektrický (udaná v jednotkách  $\Omega \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$ ),  $l$  = dĺžka,  $c$  = špecifické teplo (udané

v jednotkách  $\left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}} \right]$ ). Určení rozmeru (resp. jednotky) pre pravú stranu zistíte, o ktorú veličinu ide!

*E. Říman*

*Riešiel Bohdan Zelinka, absolvent JŠŠ v Liberci I., Ing. Hermann 2; jeho riešenie po úprave autora znie:*

Hľadaný rozmer určíme tak, že za každé obecné písmeno na pravej strane daného vzorca dosadíme rozmer (alebo jednotku) veličiny, ktorá oným písmenom je vyjadrená. Pretože číselnú hodnotu nepotrebuje znať, nemusíme uvádzať číselné faktory, ktoré sa vyskytnú v prevodných vzťahoch. Ako symbolu pre určovanie rozmeru použijeme zloženej zátvorky (pretože hranatá je rezervovaná pre označenie jednotky).

Pre praktičnosť budeme rátať v sústave MKSA.

$$\begin{aligned} \text{Keďže } r &= \text{polomer} & \Rightarrow & \{r\} = [\text{m}] \\ t &= \text{čas} & \Rightarrow & \{t\} = [\text{s}] \\ U &= \text{el. napätie} & \Rightarrow & \{U\} = [\text{V}] = \text{volt} \end{aligned}$$

$$\text{Pretože } 1 \text{ ohm} = 1 [\Omega] = 1 \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right], 1 [\text{mm}^2] = 10^{-6} [\text{m}^2],$$

bude jednotka špecifického odporu  $\rho$  daná vzťahom

$$1 [\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}] = 1 \left[ \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right] = 1 \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \frac{10^{-6} \text{ m}^2}{\text{m}} \right] = 10^{-6} \left[ \frac{\text{V m}}{\text{A}} \right]$$

a jeho rozmer bude teda  $\{\rho\} = \left[ \frac{\text{V m}}{\text{A}} \right]$  (netreba zatým uvádzať na základné jednotky).

$$\begin{aligned} m &= \text{hmota} & \Rightarrow & \{m\} = [\text{kg}] \\ l &= \text{dĺžka} & \Rightarrow & \{l\} = [\text{m}] \end{aligned}$$

Pretože 1 kalória = 1 [cal] = 4,2 [J], bude jednotka špecifického tepla  $c$  daná vzťahom  $1 \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kg grad}} \right] = \left[ \frac{10^3 \text{ cal}}{\text{kg grad}} \right] = \left[ \frac{10^3 \cdot 4,2 \text{ J}}{\text{kg grad}} \right]$  a jeho rozmer bude  $\{c\} = \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg grad}} \right]$ , pričom zase zatým neuvádzame na základné jednotky (dúfajúc,

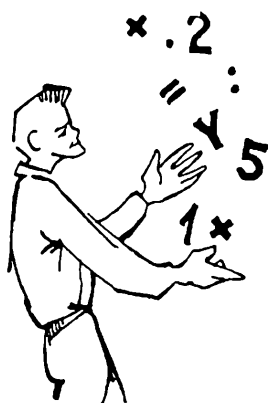
že sa vo výsledku niektoré jednotky vykrátia!).

Výsledný rozmer veličiny  $x$  bude teda

$$\begin{aligned} \{x\} &= \left\{ \frac{\pi r^2 t U^2}{\rho l m c} \right\} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{V}^2}{\text{V m A}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{J kg}^{-1} \text{ grad}^{-1}} = \\ &= \frac{\text{V A s grad}}{\text{J}} = [\text{grad}] \end{aligned}$$

pretože 1 [V A s] = 1 joule = 1 [J].

Hřadaná veličina je udaná v jednotkách [grad] t. j. stupňoch teplotných; je to teda teplota.



## Matematické zábavy

Vyjádřete každé přirozené číslo od 1 do 45 šesti trojkami. Na př.  $37 = 3^3 + 3 \cdot 3 + \frac{3}{3}$ . Nepůjde-li vám některé z uvedených čísel takto vyjádřit, napište nám. Někde přijdete jistě na celou řadu možností.

J. L.

\* \* \*

Řešení „Číselných hříček“ z č. 4, str. 190:

a) Celé číslo, jehož trojmoc je napsána třemi dvojčíslími, z nichž obě jsou stejná a přitom o 3 větší než prostřední dvojčíslí, jest 876, neboť

$$876^2 = 767\,376.$$

b) Hledaná prvočísla jsou 53 917, 75 391, 17 539, 91 753.

c) Výsledek „rovnice“  $(EDCBA)^2 = ECFADGHBK$  je  $(12\,543)^2 = 157\,326\,849$ . K tomu udává *ř. Beneš, 9. tř. JSSŠ, Milevsko*, tato další vtipná slovní řešení:

$(KOLÁČ)^2 = KLÍČ OD NÁS,$	$(MIREK)^2 = MRAK I OLEJ,$
$(PRODÁ)^2 = POHÁR LEDU,$	$(BARVY)^2 = BRDY A PIVO,$
$(VLAKY)^2 = VARY, LENKO,$	$(LOUKA)^2 = LUNA, OTÍKU,$
$(KÁMEN)^2 = KMÍN A SLEĎ.$	

\* \* \*

Hádanka 1 z č. 5, kde bylo pomocí značek napsáno celkem 9 čísel. Úplné řešení jest:

$$\begin{array}{r}
 506 - 170 = 336 \\
 \quad \quad + \quad - \\
 23 \times 6 = 138 \\
 = \quad = \quad = \\
 22 + 176 = 198.
 \end{array}$$

Řešení jsme v tomto případě od čtenářů neobdrželi. V podobných příkladech začínáme na př. takto: Na obrázku si všimneme, že 3. cifra 1. řádky je táž jako poslední cifra téže řádky. Z toho plyne, že 6. cifra 1. řádky musí být vzhledem k odečítání nula a tím je jeden symbol vyhledán. Tak postupujeme dále.

Zasílám rozluštění hádanky 2 z č. 5 - píše p. S. Zatloukal, JZD Velké Opatovice

$$\begin{array}{r} 9\ 567\ L \\ + 1\ 085\ L \\ \hline 10\ 652\ L \end{array}$$

$$\begin{array}{r} SEND \\ MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

Tutéž hádanku můžeme sestavit také v češtině, nemusíme umět anglicky ani chodit až do Skotska. Ovšem libra má větší kurs než Kčs, proto naše hádanka bude o jeden řád vyšší. Zde ji máte:

$$\begin{array}{r} IHNED \\ POŠLI \\ \hline PENÍZE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89\ 302\ \text{Kčs} \\ + 14\ 568\ \text{Kčs} \\ \hline 103\ 870\ \text{Kčs} \end{array}$$

★ ★ ★

Oldřich Jeništa, Praha:

## K příběhu o nevěstě

Jak to vlastně bylo s těmi dostavníky na trati Prešpurk — Brašov (dále P, B) v článku ze čtvrtého čísla Rozhledů? Podle toho, jakým způsobem byly vypravovány dostavníky z B do P, tedy ty, které pan X cestou do B potkával, mohl X říci, že jich potká 38, 39, 40, 41 nebo 42. Proberme si teď jednotlivé možné případy, a to prvý případ podrobněji a ostatní již jen zběžně.

1. Předpokládejme, že dostavníky vyjížděly z P do B i opačně ve stejných intervalech za sebou, t. j. vždy po 12 hodinách, že odjezdové hodiny z P i z B se shodovaly a že dostavníky jely nepřetržitě dnem i nocí, vyměňující jen příprěž. Jestliže tedy vyjížděly dostavníky z obou měst denně na př. o hodině  $h$  a  $h + 12$ , dojely do cíle za 10 dní (tedy 11. kalendářní den) o hodině  $h$  a  $h + 12$ .

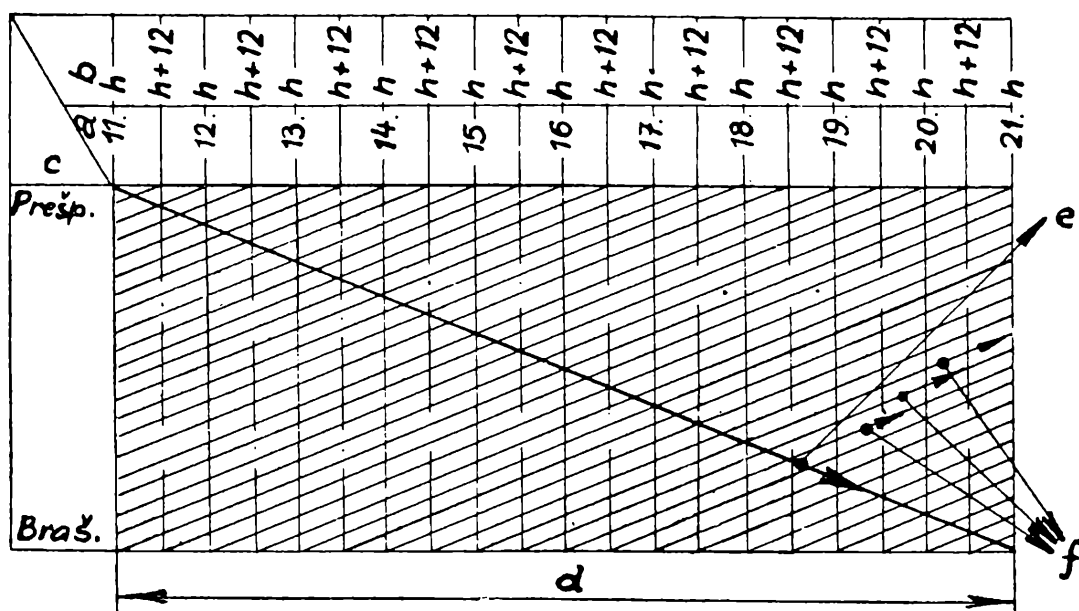
Do určitého dostavníku v P zasedne před úderem hodiny  $h$  cestující X. Ve chvíli úderu hodiny  $h$  dorazí právě do P dostavník z B a v týž okamžik, jakmile brašovský dostavník zastaví, vyjíždí dostavník prešpurský s panem X.

Dostavník s X se začal pohybovat teprve v tom okamžiku, kdy se zastavil příbyvší dostavník z B. Jakmile se dostavník s cestujícím X již pohyboval, dostavník z B stál. Pan X tedy během své cesty, t. j. po opuštění P, tento dostavník nepotkal. Nenáleží proto tento dostavník do počtu vozů, které X cestou z P do B potká.

V týž okamžik, t. j. o hodině  $h$ , je stejná situace v B. Tam právě přijel určitý dostavník z P a v touž dobu má odtamtud vyjet jiný dostavník do P. Ani tento případ, který se každodenně opakuje o hodině  $h$ , a který za 10 dní prožije pan X, až dorazí do B, nemůže být nazván potkáním dostavníku opačným směrem jedoucího.

Jakmile X opustí prešpurské stanoviště dostavníků, je situace už jednoduchá. Abychom měli jasnější představu, zavedme si do úvahy číselné označení dnů. Řekněme, že X vyjel z P dne 11. určitého měsíce. Vyjel-li o hodině  $h$  a je-li na cestě nepatrný zlomek času  $\tau$ , kde  $\tau \rightarrow 0$ , pak o hodině  $h + \tau$  je na cestě z B

do P celkem 20 dostavníků a to jeden vůz, který odjel z B dne 1. toho měsíce o hodině  $h + 12$ , dva vozy vyjedší z B dne 2. t. m. o hodině  $h$  a  $h + 12$ , atd, každý den dva vozy, až posléze dva vozy vyjedší včerejšího dne, t. j. 10. t. m., a 1 vůz, který vyjel v týž den 11. t. m. z B o hodině  $h$ , kdy vyjel pan X z P. Sečteme-li všechny tyto vozy, které jsou již dne 11. t. m. o hodině  $h + \tau$  na cestě z B, dostaneme jich dvacet a všechny pan X potká. Ale potká ještě všechny vozy, které po dobu 10 dní, po kterou pojedou X do B, budou z B vyjíždět denně vždy o hodině  $h$  a  $h + 12$ . Potká tedy jeden vůz, který ještě dne 11. t. m. vyjede z B o hodině  $h + 12$ , dva vozy, které odtamtud vyjedou dne 12. t. m. o hodině  $h$  a  $h + 12$ , dále dva vozy, které opustí B dne 13. t. m. v tytéž hodiny, atd, každý den budou pravidelně opouštět B vždy dva vozy, které pojedou vstříc cestujícímu X. Jako poslední za trvání cesty pana X vyjedou z B v den před skončením jeho cesty, t. j. dne 20. t. m., vozy o hodině  $h$  a  $h + 12$ . Spočteme-li si vozy, které vyjedou z B během cestování pana X, zjistíme jich 19. S dvaceti dostavníky, které již byly na cestě do P, když X vyjel, potká X všeho všudy 39 dostavníků.



Kdyby však X mylně počítal i dostavník, který ve chvíli jeho odjezdu z P právě tam dojel z B, pak by napočítal 40 vozů. A kdyby dokonce počítal i ten dostavník, který za 10 dní právě opustí B, jakmile tam pan X dorazí, napočítal by 41 vůz.

Tuto úvahu si můžeme ověřit i jízdním grafikonem. Vykreslíme si v něm grafy jízd dostavníků z B do P (na součtu těchto dostavníků, které X potká, nám jediné záleží), kdežto v opačném směru stačí si vykreslit jen graf dostavníku, v němž jede X. Ostatní dostavníky v tomto směru jízdy jsou pro naši úvahu nezávažné. (Viz graf!)

2. Uvažme nyní jiný případ. Dostavníky nechť nevyjíždějí za sebou ve dvánáctihodinových intervalech, avšak každodenně v určité hodiny a to stejně z P i z B. Odjezdy buďtež vždy o hodině  $h$  a  $h + 12 + \varepsilon$ , kde  $0 < \varepsilon < 12$ .

Při odjezdu pana X z P dorazí do P právě jeden vůz z B a při příjezdu cestujícího X do B opustí B jeden dostavník jedoucí do P. Pro tyto dva krajní případy

platí totéž, co bylo řečeno v prvním případě. Tyto dva vozy nepatří do počtu potkaných vozů. Jakmile se dal do pohybu vůz s X, je v té chvíli shodně s prvním případem na cestě z B do P 20 vozů, které X potká. Z B během cesty pana X vyjede dalších 19 dostavníků. Napočítá tedy celkem 39 dostavníků. Kdyby však počítal i dostavník, který dojel do P v okamžiku jeho výjezdu, došel by k počtu 40 vozů. A kdyby počítal i dostavník, který vyjel z B při jeho příjezdu, byl by došel k počtu 41 dostavníků.

Je tedy tento druhý případ co do počtu potkaných vozů shodný s prvním případem.

3. Podívejme se nyní na případ, kdy doby odjezdů z P a z B se neshodují, jinak však vozy nechť odjíždějí ve stejných 12hodinových intervalech. Odjezdy z P budtež o hodině  $h$  a  $h + 12$  a z B o hodině  $h \pm \varphi$  a  $h + 12 \pm \varphi$ , kde  $0 < \varphi < 12$ .

Ve chvíli odjezdu pana X z P nedorazí tam právě žádný dostavník z B a rovněž při příjezdu cestujícího X do B neodjede z tohoto města žádný dostavník na P. Po odjezdu pana X z P, na př. již o hodině  $h + \tau$ , kde  $\tau \rightarrow 0$ , je na cestě z B do P 20 vozů a během jízdy pana X vyjede z B do P 19 vozů, takže X potká celkem 39 vozů. Jiný počet vozů se v tomto případě nemůže vyskytnout.

4. Je ovšem také možné, že oba vozy, které denně vyjíždějí z P, a ony dva vozy, které denně vyjíždějí z B, vyjíždějí současně ve dvojici. Odjezd obou vozových dvojic se děje z obou výchozích stanic v stejnou hodinu  $h$ . Stejnou úvahou jako v prvním případě a s vyloučením obou krajních střetnutí dojdeme k závěru, že na cestě z B je po odjezdu pana X z P právě 10 dvojic vozů a během jízdy cestujícího X vyjede z B dalších 9 dvojic vozů. Pan X sedí v jednom dostavníku jedné dvojice a potká 19 dvojic vozů, tedy 38 dostavníků. Kdyby počítal i tu dvojici, která přijela do P ve chvíli jeho odjezdu, napočítal by celkem 40 vozů a kdyby počítal i dvojici vozů, která vyjela z B, když on tam dorazil, pak by napočítal dokonce 42 dostavníky.

5. Uvažme nyní případ, že by sice jezdily dostavníky ve dvojicích, ale z P o hodině  $h$ , kdežto z B o jiné hodině  $h \pm \psi$ , kde  $0 < \psi < 24$ . V tomto případě nenastane žádné střetnutí dvou dvojic vozů ani v P při odjezdu osoby X, ani v B při jejím příjezdu. O tyto dva krajní případy se nám zjednoduší čtvrtý případ a dostaneme výsledkem 38 vozů.

6. Může se ovšem stát, že vozy jezdí jen v jednom směru ve dvojicích a v opačném směru jednotlivě. Kdyby do B jezdily vozy ve dvojicích a zpět jednotlivě, byly by výsledky naší úvahy shodné s prvním až třetím případem, t. j. X potká 39 vozů, nebere-li v úvahu krajní případy. Uvažuje-li jen krajní případ na počátku jízdy, dostane 40 vozů, a bere-li v úvahu i případ na konci jízdy, dostane 41 vůz.

Kdyby dvojice vozů naopak jezdily jen z B, kdežto do B by jezdily dostavníky jednotlivě, pak výsledné počty potkaných vozů by se shodovaly s případy čtvrtým a pátým. Pan X by potkal 38, 40 nebo 42 vozy podle toho, zda by nevzal v úvahu krajní případy nebo jen krajní případ na začátku jízdy nebo též i krajní případ na konci cestování.

7. V nejobecnějším případě vozy nevyjíždějí za sebou ve stejných intervalech po 12 hodinách a doby odjezdů se neshodují pro obě výchozí stanice. Necht' vozy

z P vyjíždějí denně o hodině  $h$  a  $h + \mu$  a z B denně o hodině  $h + \nu$  a  $h + \pi$ , přičemž intervaly na obou výchozích stanicích jsou odlišné, takže  $(h + \mu) - h \neq (h + \nu) - (h + \pi)$ . Obdobnou úvahou jako v prvním případě poznáme, že X by cestou potkal jen 39 *dostavníků*.

Závěrem můžeme říci, že X nezodpověděl danou otázku správně. Ovšem na druhé straně ani Horváth nestyloval svou otázku tak, aby vyloučil několikery výklad. Pan X měl odpovědět, že cestou do B potká 39 vozů, avšak za určitých podmínek třeba jen 38 nebo i 40, 41 nebo 42 vozy. Kdyby byla jeho odpověď správná, mohl se stát manželem bohaté grófovny dcery. Ale snad to právě byl jeho šťastný osud, že se jím nestal.



## Redakce hovoří se čtenáři

\* S obdivem a pozorností sleduje celý svět vypuštění první umělé družice Země. Od 3. listopadu není však již sama, neboť druhá, větší družice s živou bytostí létá nyní též v meziplanetárním prostoru. Blahopřejeme vědcům a technikům SSSR k tomuto dějinnému úspěchu.

Redakce lituje, že vzhledem k dvouměsíčnímu časovému rozpětí mezi dodáním rukopisu a jeho otištěním nemůžeme zde pohotově sledovat tyto události tak jako denní tisk a rozhlas.

\* Na str. 326, 4. řádek v poznámce <sup>2)</sup> místo *vodivost* čtete *vodivosti*.

\* Na str. 328, řádek 2. zdola byla zmínka o *míli*. Při údajích podobného druhu je často možná mýlka, neboť prosté označení „*míle*“ nestačí k tomu, abychom mohli posoudit její velikost. Uvedme zde čtyři různé *míle*, jichž se používá v mezinárodním styku.

*Míle anglická* (*english mile*<sup>1)</sup>), užívaná při pozemních měřeních, je v metrické soustavě rovna 1 760 yardům, t. j. 1 609,35 m, neboť úmluvou mezi *British Engineering Standards Association* a *The American Standards Association* (což jsou tamější normalizační úřady) z r. 1930 a 1933 se přepočítává *yard* na *metr* takto: 1 yd = 0,914 4 m.

*Námořní míle anglická* (*nautical mile*<sup>2)</sup>), kterou se měří vzdálenosti na moři, rychlosti lodí a v nichž jsou zaznamenány údaje na námořních mapách, je rovna šedesátině rovníkového stupně, t. j. 1 855,11 m.

*Námořní míle americká* (*USA nautical mile*) měří 1 853,25 m.

*Námořní míle francouzská* (*mille marin*) byla dohodou stanovena v délce 1 852 m a je rovna šedesátině poledníkového stupně (1 852,01 m).

Vidíme tedy, že je-li v literatuře udáno stručně pouze „*míle*“, je nutno uvážit z ostatního textu a z okolností, s kterou z uvedených délek je nutno počítat.

\* Upozorňujeme čtenáře, že *Pošt. nov. služba* má k dispozici ještě čísla 6. a 7. *Rozhledů*.

<sup>1)</sup> Čti: *ingliš majl.*

<sup>2)</sup> Čti: *nótykl majl.*



## Druhá trojice úloh I. kola VII. ročníku Matematické olympiady (kategorie A až C).

(Řešené úlohy z této trojice odevzdejte referentu MO do 15. ledna 1958.)

### Kategorie A.

4. V rovnici

$$(m + 2)^2 x^2 - 2(m^2 - 4)x + n = 0$$

o neznámé  $x$  jsou  $m, n$  daná reálná čísla.

a) Určete všechna čísla  $m, n$ , pro něž má daná rovnice jediný kořen.

b) Stanovte všechna čísla  $m, n$ , pro něž jsou kořeny dané rovnice převrácená čísla.

5. Určete všechny reálné čísla  $x$ , pro které platí vztah

$$\frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} \geq \frac{1}{2}$$

6. Buď dán trojúhelník  $ABC$  a uvnitř strany  $AB$  buď dán bod  $M$ .

Bodem  $M$  veďte přímku  $PQ$  tak, aby body  $P, Q$  po řadě ležely na polopřímkách  $CA, CB$  a aby trojúhelníky  $ABC, PQC$  měly sobě rovné obsahy.

### Kategorie B.

4. Nech je daný obdélník  $ABCD$ , pro který platí  $AB = 4r, BC = 2r$ , kde  $r$  je dané kladné číslo. Označme  $X$  také bod obdélníka  $ABCD$  (t. j. bod jeho obvodu nebo vnútra), kterým procházejí dvě různé kružnice s poloměrem  $r$ , kterých všechny body patří danému obdélníku.

Čo vyplnia všetky body  $X$  majúce práve opísanú vlastnosť?

5. Buďte  $a, b$  daná reálná čísla. Řešte rovnici

$$\frac{x}{x - a^2} - \frac{x}{x - b^2} = \frac{(a^2 - b^2)(1 - x^2)}{(x - a^2)(x - b^2)}$$

o neznámé  $x$  a proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům  $a, b$ .

6. Trojúhelníkové pravítko z umělé hmoty má tvar pravoúhlého trojúhelníka  $ABC$ , jehož vnitřek je z části vyříznut a má rovněž tvar pravoúhlého trojúhelníka  $A'B'C'$ . Přitom šířky pásů omezených dvojicemi rovnoběžek  $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A'$  jsou si rovny; označme je  $m$ . Jsou dány obě odvěsny  $a = BC, b = CA$  trojúhelníka  $ABC$ .

Dokažte, že trojúhelníky  $ABC, A'B'C'$  jsou stejnohlé a určete střed  $S$  stejnolehlosti. Koeficient  $k$  této stejnolehlosti vyjádřete pomocí čísel  $a, b, m$  a rozhodněte, v jakých mezích při daných číslech  $a, b$  musí ležet číslo  $m$ .

Potom stanovte číslo  $m$  tak, aby pravítko po vyříznutí otvoru  $A'B'C'$  mělo váhu o 25 % menší, než kdyby bylo plné, t. j. bez otvoru.

### Kategorie C.

4. Daný je trojúhelník  $ABC$ , kterého strany označíme  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Na prodloužení úsečky  $BC$  za bod  $C$  zestrojíme bod  $C'$  tak, aby  $CC' = a$ . Na prodloužení úsečky  $CA$  za bod  $A$  zestrojíme bod  $A'$  tak, aby  $AA' = 2b$ . Konečně na prodloužení úsečky  $AB$  za bod  $B$  zestrojíme bod  $B'$  tak, aby  $BB' = 3c$ .

Tím dostaneme trojúhelník  $A'B'C'$ . Vypočítajte, kol'kokrát je obsah trojúhelníka  $A'B'C'$  větší ako obsah trojúhelníka  $ABC$ .

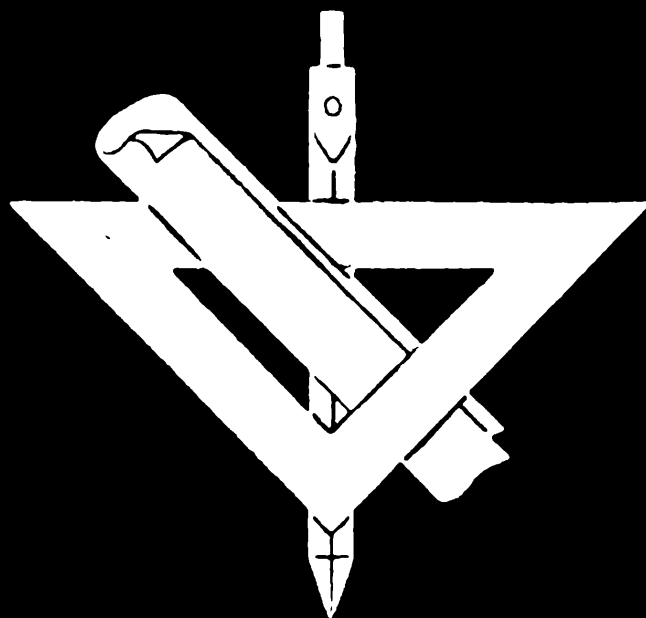
5. Podél přímé železniční trati vede silnice, po níž jel cyklista rychlostí 18 km za hodinu. Cyklistu dostihl po trati jedoucí vlak a předjel jej. Cyklista odhadl, že od okamžiku, kdy jej míjela lokomotiva, do okamžiku, kdy projel konec vlaku, uplynulo asi  $5\frac{1}{2}$  vteřiny. Vlak však musel potom na trati zastavit; cyklista jej dostihl a stojící vlak předjel za 19 vteřin.

Vypočtete přibližnou rychlost jedoucího vlaku.

6. Buď dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . V polorovině opačné k polorovině  $BCA$  sestrojíme nad úsečkou  $BC$  oblouk  $k_1$ , z jehož bodů je úsečka  $BC$  vidět pod úhlem  $60^\circ$ . V polorovině opačné k polorovině  $CAB$  sestrojíme nad úsečkou  $CA$  oblouk  $k_2$ , z jehož bodů je úsečka  $CA$  vidět pod úhlem  $60^\circ$ . Konečně v polorovině opačné k polorovině  $ABC$  sestrojíme oblouk  $k_3$ , z jehož bodů je úsečka  $AB$  vidět pod úhlem  $60^\circ$ .

Na oblouku  $k_1$  zvolme bod  $M$  (různý od bodů  $B$ ,  $C$ ) a sestrojíme polopřímky  $MC$ ,  $MB$ ; označme  $N \neq C$  společný bod polopřímky  $MC$  a oblouku  $k_2$  a dále označme  $P \neq B$  společný bod polopřímky  $MB$  a oblouku  $k_3$ .

Potom body  $A$ ,  $N$ ,  $P$  leží v téže přímce; dokažte.



# ROZHLEDY

ročník 35

10

1 9 5 7

# ROZHLEDY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ

Ročník 35 - 1957 - číslo 10

Toto číslo vyšlo 30. prosince 1957

Vydává Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze z pověření ministerstva školství a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fysiků.

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

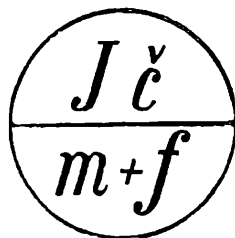
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Kralupy n. Vlt.

*Redakční rada:* *Pavel Bartoš*, JSS, Zlaté Moravce; *Jaroslav Bejsta*, OSŠ, Praha; *Petr Benda*, JSS, Brno; *Michal Boček*, KU, Praha; *Dr. Josef Dibelka*, KU, Praha; doc. *Dr. Karel Havlíček*, KU, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; prof. *Dr. Zdeněk Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Dr. Josef Korous*, VŠŽ, Praha; doc. *Emil Kraemer*, VŠP, Praha; *Václav Müller*, KU, Praha; *Jiří Sedláček*, kand. věd mat., Praha; *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Praha; Ing. *Dr. Václav Šindelář*, ČVUT, Praha; *Jaroslav Vachek*, MŠK, Praha; prof. *Dr. Ján Vanovič*, VŠP, Bratislava; *František Vencálek*, PŠS, Praha.

Redakce: Praha 6, Zikova 4, tel. 32 22 41 až 6, linka 570

## OBSAH

K. Tichý: Třetí dělnický president . . . . .	433
R. Langhammer: O diskusích řešení rovnic s parametry . . . . .	434
O. Buchta: K jedné otázce z planimetrie . . . . .	439
Prof. Dr. E. Kašpar: Skládání stejnoměrných harmonických kmitů (Dokončení) . . . . .	444
Prof. Dr. J. Vanovič: Hmota a žiarenie . . . . .	449
J. Halenka: První umělá družice Země . . . . .	460
L. Sehnal: Meteorické roje v letošním roce . . . . .	463
V. Petrův: K šedesátým narozeninám akademika V. Jarníka . . . . .	464
F. Komurka: K 125. výročí narozenin Williama Crookse . . . . .	466
F. Komurka: Deset let od smrti Max Plancka . . . . .	466
Matematické zábavy . . . . .	467
Řešení úloh . . . . .	468
Seznam řešitelů úloh . . . . .	475
Redakční sdělení . . . . .	476
Matematická olympiáda . . . . .	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné Kčs 20,—; cena jednotlivého čísla Kčs 2,—. Tisknou Pražské tiskárny, n. p., provozovna 01 v Praze 2. - Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky jednotlivé i hromadné u poštovních úřadů. - A-08494

Návrh obálky a grafická výzdoba: Karel Schmied, studující fakulty architektury a pozemního stavitelství v Praze.

Jazyková úprava: Dr. O. Hömig.

## *Třetí dělnický president*

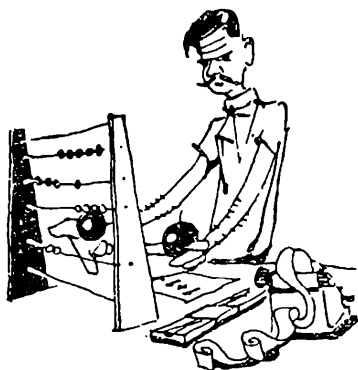
Dne 19. listopadu 1957 zvolilo Národní shromáždění ČSR na doporučení Ústředního výboru Komunistické strany Československa a Národní fronty všemi hlasy do nejvyšší státní funkce s. Antonína Novotného.

Po dvou našich dělnických presidentech s. Klementu Gottwaldovi a s. Antonínu Zápotockém přichází tak na pražský hrad jako nejvyšší představitel našeho státu třetí dělník. Přichází na pražský hrad, aby rozvíjel nový obsah presidentské tradice, jež spočívá v tom, že Hrad je dnes v očích lidu symbolem moci a surchovanosti pracujícího lidu, přichází na pražský hrad, aby pokračoval v duchu a cestě prvních dvou dělnických presidentů na posilování důvěry lidu ke Hradu a upevňování jednoty všech složek našeho národa k dosažení velikých socialistických cílů.

Důležitou okolností při volbě s. Antonína Novotného na funkci presidenta republiky je to, že v jeho osobě je spojován nejvyšší státní úřad s funkcí prvního tajemníka Komunistické strany Československa. Tento fakt je jasným výrazem vedoucí úlohy komunistické strany v našem národě a státě, získané za desetiletých bojů našeho pracujícího lidu proti vykořisťovatelům a okupantům a uznávané dnes všemi vlasteneckými a socialistickými silami země.

V osobě s. Antonína Novotného přichází do funkce presidenta republiky jeden z nejlepších bojovníků za zájmy dělnické třídy a všeho pracujícího lidu u nás. Přichází tam člověk formovaný a vychovaný dělnickým prostředím Vysočan a Libně, jeho tužbami a boji. Proto také jeho životní cesta je tak podobná životu všech těch, mezi nimiž s. Novotný vyrůstal a všech těch, kteří se rozhodli zasvětit svůj život a všechny své síly zápasu za štěstí lidu. Od mládí pracoval v různých organizacích revolučního dělnického hnutí a brzy si svou prací, obětavostí, skromností, rozvážností a zásadovostí získal důvěru a úctu dělníků, zejména pražských. V jejich čele pak vedl s. Novotný nejrozhodnější boje proti všem nepřátelům lidu a vlasti. V jejich čele bojoval v těžkých dnech fašistické okupace i v mrazivých dnech a nocích února 1948, kdy naše reakce, podněcována imperialistickými silami zvenčí, snažila se zvrátit vývoj naší země vpřed k šťastnějším zítřkům. V jejich čele, podporován celou stranou, vedl boj proti byrokratickým metodám v práci strany a za upevnění spojení s masami, za prodchnutí celé stranické práce tvořivým duchem leninismu. Pro to všechno rozhodlo Národní shromáždění jednomyslně zvolit s. Antonína Novotného presidentem republiky. Souhlas pracujících ukázal, že rozhodnutí bylo správné.

Karel Tichý, promováný historik



# Matematika

Rudolf Langhammer, Praha:

## O diskusích řešení rovníc s parametry

Častokrát se setkáváme s rovnicemi, kde se kromě neznámých  $x$ ,  $y$ , případně jiných, vyskytují ještě veličiny, které sice považujeme v daném případě za známé, ale jejichž hodnotu nemáme udánu, veličiny, jejichž hodnota je proměnná. Takovéto veličiny nazýváme pak *parametry*. Na příklad v prvním příkladě kategorie C loňského ročníku MO byla dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= s \\ax + 2y &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Tato soustava nám představuje nesčíslné množství soustav rovnic, které bychom dostali, kdybychom za  $s$  a  $a$  dosadili nějaké určité hodnoty. Tak na př. pro  $s = 1$ ,  $a = 3$  by zněla

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\3x + 2y &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Kdybychom zvolili jiné hodnoty, na př.  $s = 3$ ,  $a = 4$ , dostali bychom soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\4x + 2y &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Jako řešení soustavy (2) dostáváme dvojici hodnot  $x = -2$ ,  $y = 3$ , pro soustavu (3) pak dvojici  $x = -3$ ,  $y = 6$ . (Přesvědčte se dosazením do obou rovnic.)

Tato dvě řešení jsou od sebe různá. Vidíme tedy, že řešení soustavy (1), která je obecným zápisem soustav (2) a (3) a jiných, jim podobných, bude obecným řešením všech takových soustav rovnic. Toto řešení závisí na zvolených hodnotách parametrů. Uvidíme při podrobném rozboru řešení soustavy rovnic, že tato řešení se pro různé hodnoty parametrů od sebe nejen liší, ale existují dokonce takové soustavy rovnic, které získáme pro některé parametry, že nemají vůbec řešení; pro jiné hodnoty parametrů se pak stávají rovnice v soustavě identickými. Tento rozbor řešení je tedy velmi důležitý a říkáme mu *diskuse řešení*. Ukážeme si zde na dvou příkladech, jak máme takovou diskusi provádět.

Pamatujme na to, že správně provedená diskuse nám ukazuje v jakých závislostech je řešení rovnice nebo soustavy rovnic na proměnných hodnotách parametru.

Je tedy prvním důkladnějším cvičením ve velmi důležitém pojmu *funkční závislosti*, který je stěžejním bodem vyšší matematiky. Proto nejen tam, kde je diskuse výslovně vyžadována, ale všude, kde se v příkladu setkáme vedle neznámých s proměnnými veličinami (parametry), provedeme řádnou diskusi. Ovšem musíme rozlišovat veličiny známé, byť i proměnné (parametry) od veličin neznámých, které pomocí parametrů pak vyjádříme. A diskuse musí vždy odpovídat na otázku: Pro které hodnoty parametrů  $a, b$ , existuje řešení.

Studium existence řešení je mnohem důležitější než na př. zjišťování, kdy jsou výsledky kladné a kdy záporné. Diskuse kvality je dobrým cvičením, ale může následovat až po zjištění, kdy vůbec existuje řešení.

Proveďme nyní jako příklad diskusi řešení soustavy rovnic (1). Uvědomme si od počátku, že diskuse řešení rovnice s parametry je nedílnou součástí tohoto řešení a nelze ji provádět odděleně od řešení.

Předem si musíme znovu řádně uvědomit, jak řešíme rovnice. Víme, že rovnice řešíme přechodem k t. zv. *ekvivalentním rovnicím*. To jsou rovnice, které jsou jednodušší než daná rovnice a mají tu vlastnost, že jejich kořeny jsou také kořeny rovnice původní. Naopak zase všechny kořeny rovnice původní jsou také kořeny rovnic s ní ekvivalentních. Jinými slovy: při přechodu od jedné ekvivalentní rovnice k druhé se nesmí žádný kořen „ztratit“ ani „přibýt“. Přechod k ekvivalentním rovnicím je zaručen dodržováním základních pravidel o úpravě rovnic. Zopakujme si je:

1. Rovnici s těmiž kořeny dostaneme, přičteme-li nebo odečteme-li na obou stranách rovnice totéž číslo.

2. Rovnici s těmiž kořeny dostaneme, znásobíme-li nebo dělíme-li obě strany rovnice stejným číslem různým od nuly.

Prvé pravidlo neskrývá žádné záludnosti, zato však druhé je velmi „nebezpečné“ a musíme si na ně dávat pozor.

Přístupme nyní k řešení příkladu.

Řešme soustavu rovnic

$$x + y = s \tag{1}$$

$$ax + 2y = 0.$$

Řešení provedeme methodou dosazovací. Z první rovnice vypočteme

$$y = s - x \tag{4}$$

a dosadíme do rovnice druhé. Dostáváme

$$ax + 2(s - x) = 0$$

nebo po úpravě

$$(a - 2)x + 2s = 0$$

nebo konečně

$$(a - 2)x = -2s \tag{5}$$

Před dalším výpočtem musíme uvážit různé možnosti volby parametrů  $a$  a  $s$ .

Poněvadž výpočet  $x$  vyžaduje dělení rovnice (5) výrazem ( $a - 2$ ), musíme rozlišit dva případy, a to

1.  $a - 2 \neq 0$ , tedy  $a \neq 2$ , kdy lze dělení provádět

a

2.  $a - 2 = 0$ , tedy  $a = 2$ , kdy dělení provádět nelze.

Případ 1. Poněvadž  $a - 2 \neq 0$ , je potom

$$x = -\frac{2s}{a-2} \quad (6)$$

a odtud dosazením do (4)

$$\begin{aligned} y &= s + \frac{2s}{a-2} \\ &= \frac{as}{a-2} \end{aligned} \quad (7)$$

Provedme nyní zkoušku. Dosadíme za  $x$  a  $y$  vypočtené hodnoty do levých stran rovnic soustavy (1). V první rovnici dostáváme

$$-\frac{2s}{a-2} + \frac{as}{a-2} = \frac{s(a-2)}{a-2} = s.$$

Krátit zde můžeme, poněvadž jde o případ 1., kdy  $a \neq 2$ . Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$-\frac{2as}{a-2} + 2\frac{as}{a-2} = 0.$$

Tedy získaná dvojice hodnot  $x$  a  $y$  je řešením soustavy v případě, že  $a \neq 2$ . Má tedy v tomto případě soustava jediné řešení, dané vzorci (6) a (7).

Případ 2. Je-li  $a = 2$ , je  $a - 2 = 0$  a rovnice (5) se změnila v rovnici

$$0 \cdot x = -2s. \quad (8)$$

Vidíme, že v tomto případě záleží ještě na hodnotě parametru  $s$ .

Je-li  $s \neq 0$ , nemá rovnice (8) řešení, neboť neexistuje číslo, které vynásobeno nulou, by dalo číslo různé od nuly.

Je-li  $s = 0$ , vidíme, že rovnice (8) je splněna pro každou hodnotu  $x$ . Skutečně v tomto případě, kdy  $a = 2$ ,  $s = 0$  daná soustava zní

$$x + y = 0$$

$$2x + 2y = 0$$

a druhou rovnici převedeme na rovnici první dělením dvěma. Jsou to tedy dvě totožné rovnice o dvou neznámých, kterým pak vyhovují všechny dvojice hodnot  $x, y = -x$ .

Můžeme tedy shrnout celé řešení soustavy rovnic (1) takto:

1. Nabývá-li parametr hodnot  $a \neq 2$ , nezáleží řešitelnost soustavy na hodnotě



parametru  $s$  a soustava má jedinou dvojici řešení danou vzorci (6) a (7), t. j.

$$x = -\frac{2s}{a-2}, \quad y = \frac{as}{a-2}$$

2. Je-li  $a = 2$  a při tom  $s \neq 0$  nemá soustava žádné řešení.

3. Je-li  $a = 2$  a při tom  $s = 0$ , má soustava nekonečně mnoho řešení, vyhovuje jí každá dvojice  $x, y = -x$ .

Proveďme nyní řešení soustavy rovnic, která byla dána jako 3. příklad kategorie B v loňském ročníku MO:

$$ax + (1 - a)y = 2 \tag{9}$$

$$(2 - a)x + 3ay = 1$$

Tato soustava závisí na jediném parametru  $a$ . Řešme ji tak, že z první rovnice vyjádříme  $x$  a dosadíme do rovnice druhé. Poněvadž musíme dělit parametrem  $a$ , je třeba uvažovat dva případy:

A. kdy  $a \neq 0$  a lze jím dělit,

B. kdy  $a = 0$  a nelze jím dělit.

V případě A je tedy

$$x = \frac{2 - (1 - a)y}{a} \tag{10}$$

a po dosazení do druhé rovnice dostáváme

$$(2 - a) \frac{2 - (1 - a)y}{a} + 3ay = 1$$

Obě strany rovnice vynásobíme  $a$  (což lze, neboť  $a \neq 0$ ) a dostaneme po úpravě

$$y(2a^2 + 3a - 2) = 3a - 4. \tag{11}$$

Abychom vypočetli z této rovnice  $y$ , je třeba dělit výrazem  $2a^2 + 3a - 2$ , který však pro hodnoty  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$  se stává rovným nule. Musíme zde tedy

vyšetřit tyto tři možnosti.

1.  $a \neq -2, a \neq \frac{1}{2}$ ,

2.  $a = -2$ ,

3.  $a = \frac{1}{2}$

V případě 1. tedy máme

$$y = \frac{3a - 4}{2a^2 + 3a - 2} \tag{12}$$

a

$$x = \frac{2 - (1 - a)y}{a} = \frac{7a^2 - a}{a(2a^2 + 3a - 2)}$$

a poněvadž  $a \neq 0$ , konečně

$$x = \frac{7a - 1}{2a^2 + 3a - 2} \quad (13)$$

Tedy v případě A 1., kdy  $a \neq 0$ ,  $a \neq -2$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$  je řešením soustavy rovnic dvojice čísel

$$x = \frac{7a - 1}{2a^2 + 3a - 2}, \quad y = \frac{3a - 4}{2a^2 + 3a - 2},$$

jak se snadno přesvědčíme zkouškou.

Vyšetřme nyní případ A 2., kdy  $a = -2$ .

V tomto případě rovnice (11) zní

$$0 \cdot y = -10 \quad (14)$$

a nemá vůbec řešení.

Další případ A 3. nám dává pro  $a = \frac{1}{2}$

$$0 \cdot y = \frac{3}{2} - 4 \quad (15)$$

a také v tomto případě nemá soustava (9) řešení.

Vidíme tedy prozatím, že soustava má řešení v případě, že  $a$  je různé od 0,  $-2$  a  $\frac{1}{2}$ . Vyšetřme nyní případ B, kdy  $a = 0$ .

Pak se soustava rovnic změní v soustavu

$$0 \cdot x + y = 2 \quad (16)$$

$$2 \cdot x + 0 \cdot y = 1$$

Tato soustava je tvořena dvěma rovnicemi o jedné neznámé, jejichž řešením je dvojice hodnot

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 2. \quad (17)$$

Vidíme, že tuto dvojici hodnot můžeme odvodit z výsledků případu A1., dosadíme-li tam  $a = 0$ .

Tím tedy dostáváme konečnou odpověď:

Soustava rovnic (9) má jediné řešení

$$x = \frac{7a - 1}{2a^2 + 3a - 2} \quad \text{a} \quad y = \frac{3a - 4}{2a^2 + 3a - 2}$$

pro hodnoty parametru  $a \neq -2$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$

V případě, že  $a = -2$  nebo  $a = \frac{1}{2}$  nemá soustava žádné řešení.

Ukázali jsme na dvou příkladech způsob provádění diskuse. Shrňme ještě jednou získané výsledky:

Jakmile při řešení je třeba rovnici násobit nebo dělit výrazem obsahujícím parametry, musíme rozlišovat případy, kdy tento výraz je různý od nuly a kdy je roven nule. Každý z těchto případů vyšetřujeme dále zvlášť.

Vyskytne-li se znovu nutnost násobení nebo dělení nějakým výrazem obsahujícím parametry, dostáváme tím další členění jednotlivých případů.

Nikdy neprovádějíme řešení až do konce, aniž bychom rozlišili zvláštnosti řešení vyplývající pro různé hodnoty parametru, neboť potom tyto výjimky těžko hledáme a obtížně vyšetřujeme odchylky jimi způsobené v řešení.

Abyste si utvrdili, zda jste dobře pochopili podstatu provádění diskuse při řešení rovnic, zkuste provést diskusi řešení příkladů v tomto článku uvedených při použití jiných method řešení soustavy rovnic.

Oldřich Buchta, studující M. U., Brno:

## K jedné otázce z planimetrie

V tomto příspěvku chci se dotknout zajímavého geometrického thematicu. Práce je rozvržena do sedmi úloh, takže čtenář má možnost postupně si dokázat jednotlivá tvrzení a vniknout tak samostatně do podstaty věci. Prvé tři úlohy představují elementární úvod. Na jeho základě se pak řeší úlohy další, jejichž vzájemná souvislost je právě předmětem, který nás zajímá. Každý si pak může srovnat své řešení s řešením, které uvádím a v němž se užívá jen znalostí žáka 10. třídy jednáctiletky.

Čtenář si snadno dokáže tuto poučku, kterou budeme dále potřebovat:

Bud'  $AB$  tětiva kružnice, jíž přísluší v jedné z polorovin vyřatých přímkou  $AB$  obvodový úhel  $\alpha$ . Pak bod  $X$ , ležící uvnitř této poloroviny, leží současně uvnitř příslušného kruhu tehdy a jen tehdy, když  $\sphericalangle AXB > \alpha$  (obr. 1).

**D e f i n u j m e :** Jestliže body  $A_1, A_2, \dots, A_n$  leží vesměs uvnitř a na obvodu kruhu  $k$ , pak říkáme, že kruh  $k$  (příp. kružnice  $k$ ) uzavírá systém bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

### *Text úloh.*

1. Necht' body  $A_1, A_2, \dots, A_n$  neleží všechny v jedné přímce. Pak existuje takový trojúhelník  $A_i A_j A_k$ , že jemu opsaná kružnice uzavírá všechny dané body.

2. Jestliže žádný z možných trojúhelníků, majících vlastnost uvedenou v úloze 1. není ostroúhlý, potom kruh, který má za průměr nejdelší z úseček  $A_i A_j$ , uzavírá všechny dané body.

3. Z  $n$  daných bodů v rovině lze vybrat tři takové, že nejmenší kruh, který je uzavírá, současně uzavírá všechny dané body.

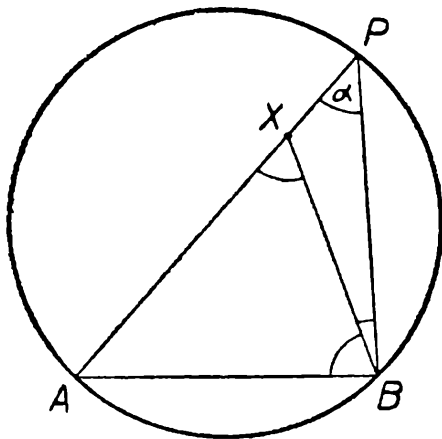
4. V rovině je dáno  $n$  bodů, při čemž je známo, že každé tři z nich je možno uzavřít do kruhu o poloměru jedna. Dokažte, že pak všech  $n$  bodů se dá uzavřít do kruhu o poloměru jedna!

5. Buď dáno  $n$  kruhů o poloměrech vesměs rovných  $r$ . Mají-li každé tři z nich společný bod, pak všech  $n$  kruhů má společný bod. (Je to speciální případ t. zv. věty Hellyho.) Dokažte!

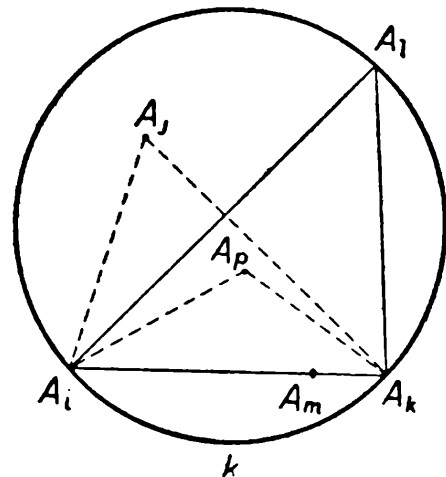
6. V rovině je dáno  $n$  bodů; vzdálenost mezi každými dvěma z nich není větší než jedna. Dokažte, že všechny tyto body mohou být uzavřeny do kruhu o polo-

měru  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (Věta Jungova)!

7. Dokažte, že každý mnohoúhelník o obvodu  $2a$  se dá uzavřít do kruhu o průměru  $a$ ! (Úloha III. kola po.ské Matematické olympiady.)



Obr. 1



Obr. 2

### Řešení.

Nejdříve dokážeme poučku uvedenou na počátku článku.

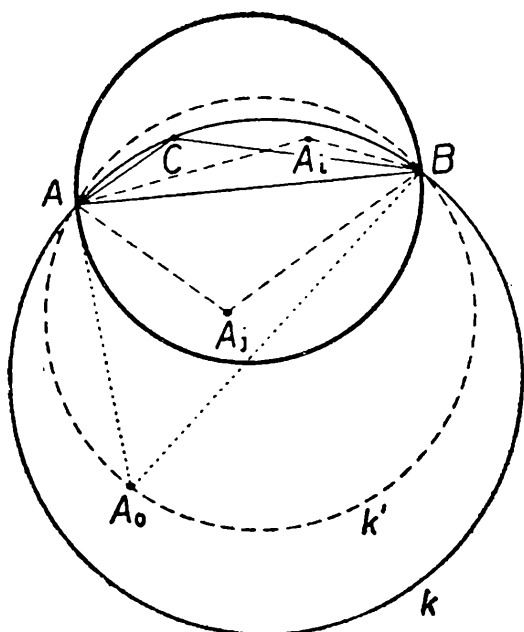
Spojme bod  $A$  s bodem  $X$  a označme  $P$  průsečík spojnice s příslušným obloukem kružnice (obr. 1). Spojuje dále bod  $B$  postupně s body  $X, P$ . Leží-li bod  $X$  uvnitř kruhu, pak zřejmě platí pro úsečky  $AX, AP$ , nerovnost  $AX < AP$ , odtud plyne  $\sphericalangle ABX < \sphericalangle ABP$  a z toho  $\sphericalangle AXB > \sphericalangle APB = \alpha$ . Opačným směrem se dokazuje poučka obdobně.

1. Dají se zvolit dva body  $A_i, A_k$  tak, že všechny další body  $A_j$  leží buď uvnitř jisté poloroviny vyřezané přímkou  $A_i A_k$ , nebo uvnitř úsečky  $A_i A_k$  (obr. 2). Podle předpokladu existuje aspoň jeden bod  $A_j$  mimo přímku  $A_i A_k$ . Nechť  $A_l$  je bod, z něhož se jeví úsečka  $A_i A_k$  pod nejmenším úhlem. Pak kružnice  $k$  opsaná trojúhelníku  $A_i A_k A_l$  uzavírá všechny body úsečky  $A_i A_k$  a podle poučky také ostatní body  $A_j$  leží uvnitř kruhu, tedy kružnice  $k$  uzavírá všechny dané body.

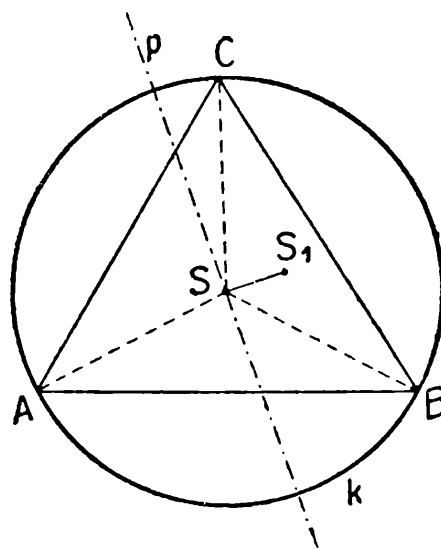
2. Necht  $\triangle ABC$  je ze všech trojúhelníků (tupoúhlých, příp. pravoúhlých) - které mají vlastnost z úlohy 1 - trojúhelník s nejdelší stranou; je-li  $AB$  tato strana, není tedy úhel  $\sphericalangle ACB$  ostrý (obr. 3). Opišme trojúhelníku  $ABC$  kružnici  $k$ . Leží-li nějaký jiný bod  $A_i$  v polorovině  $ABC$ , pak  $\sphericalangle AA_iB \cong \sphericalangle ACB$ , tedy  $\sphericalangle AA_iB$  není ostrý. Dokážeme, že úhel  $\sphericalangle AA_iB$  není ostrý ani tehdy, když  $A_i$  leží v opačné polorovině k  $ABC$ . Kdyby tam totiž existovaly body  $A_i$  s ostrými úhly  $AA_iB$ , uvažovali bychom bod  $A_o$ , pro nějž je tento úhel nejmenší.

Ze vztahu  $\sphericalangle ACB \cong \pi - \sphericalangle AA_oB$ , a z uvedené poučky plyne, že kružnice  $k'$ , opsaná trojúhelníku  $AA_oB$ , uzavírá všechny body  $A_j$ , tedy má vlastnost z úlohy 1. Pak je však buď

a) jeden z úhlů  $\sphericalangle BAA_o$ ,  $\sphericalangle ABA_o$  tupý, příp. pravý a platí, že  $AA_o > AB$ , nebo  $BA_o > AB$ , což je spor, neboť  $ABC$  byl trojúhelník s nejdelší stranou  $AB$  mající vlastnost z úlohy 1, nebo



Obr. 3



Obr. 4

b) trojúhelník  $AA_oB$  je ostroúhlý, což odporuje také předpokladu.

Tedy pro všechny body  $A_j$  jsou úhly  $AA_jB$  tupé, příp. pravé a kružnice opsaná nad průměrem  $AB$  má podle poučky vlastnost předpokládanou v úloze 2. Je bezprostředně patrné, že úsečka  $AB$  je v našem případě úsečkou maximální délky.

3. Předpokládejme nejprve, že dané body neleží vesměs na jediné přímce. Pak podle úloh 1, 2, mohou nastat dva případy:

A. Existuje ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ , kde  $A, B, C$  jsou tři z daných bodů, takže kružnice o středu  $S$  a poloměru  $R$  jemu opsaná uzavírá všechny dané body (obr. 4). Dokážeme, že kružnice  $k$  je nejmenší kružnice uzavírající body  $A, B, C$ .

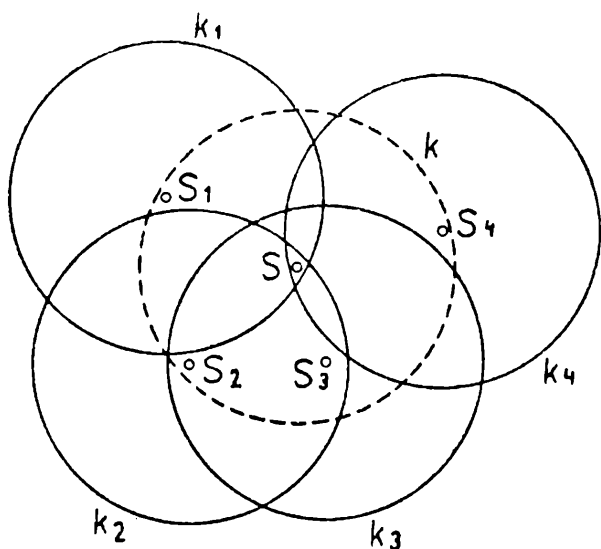
Skutečně je  $k$  nejmenší kružnicí této vlastnosti mezi všemi kružnicemi o středu  $S$ . Je-li dále  $S_1 \neq S$ , pak aspoň jeden z úhlů  $\sphericalangle S_1SA$ ,  $\sphericalangle S_1SB$ ,  $\sphericalangle S_1SC$  je tupý, případně pravý. Kdyby totiž tyto úhly byly vesměs ostré, pak by body

$A, B, C$  ležely všechny v jedné polorovině vyřezané přímkou  $p$ , jdoucí bodem  $S$  kolmo k  $S_1S$ . Tedy i strany  $AB, AC, BC$  by celé ležely v téže polorovině. To je však spor, neboť  $S$  leží uvnitř ostroúhlého trojúhelníka  $ABC$  a přímka  $p$  musí protnout některou z jeho stran (Paschova věta).

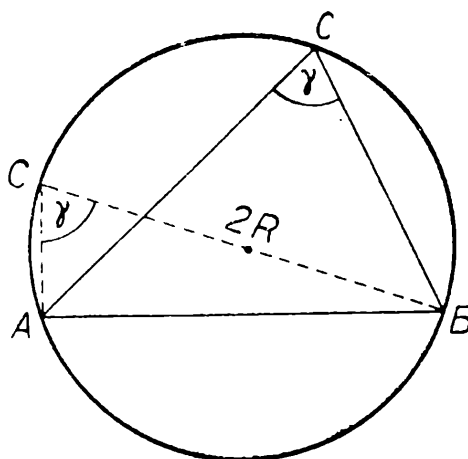
Nechť na př. úhel  $S_1SA$  je tupý. Pak však  $S_1A > SA = R$ . Proto každá kružnice o jiném středu  $S_1 \neq S$  uzavírající body  $A, B, C$  má poloměr větší než  $R$ .

B. Existuje úsečka  $AB$ , která je průměrem kružnice  $k$  uzavírající všechny dané body. Každá jiná kružnice uzavírající body  $A, B$  však musí mít průměr  $d \geq AB$ . Nakreslete si sami k tomu obrázek. Vyberme teď z daných bodů další libovolný bod  $C$ , pak je  $k$  také nejmenší kružnicí uzavírající body  $A, B, C$ .

Jestliže nyní leží všechny body  $A_i$  na jedné přímce, platí úvahy zcela stejně jako v případě B. Tím je důkaz proveden.



Obr. 5



Obr. 6

4. Podle úlohy 3 lze vybrat tři body tak, že nejmenší kružnice o poloměru  $R$ , která je uzavírá, uzavírá všechny dané body. Podle předpokladu platí  $R \leq 1$ , a tím je důkaz proveden.

5. Uvažujme systém středů  $S_i$  daných kruhů; každé tři z nich se dají uzavřít do kruhu o poloměru  $r$  (obr. 5). Skutečně libovolné tři kruhy mají společný bod  $X$ , který je tedy od středů těchto kruhů vzdálen nejvýše  $r$  a kruh o středu  $X$  a poloměru  $r$  tedy uzavírá tyto tři středy. Podle úlohy 4 se dají všechny středy  $S_i$  uzavřít do kruhu o poloměru  $r$ . Střed  $S$  tohoto kruhu je však od všech středů  $S_i$  daných kruhů vzdálen nejvýš  $r$  a je tedy bodem společným všem daným kruhům.

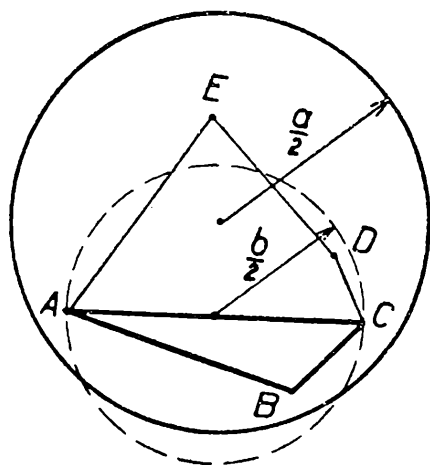
6. Dokážeme, že každé tři z daných bodů se dají uzavřít do kruhu o poloměru  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Buď tedy  $ABC$  trojúhelník, jehož strany nejsou větší než 1,  $AB$  jeho největší strana (obr. 6). Je-li  $\triangle ABC$  tupoúhlý nebo pravoúhlý, pak se dá uzavřít

do kruhu o průměru  $AB \leq 1 < 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ , tedy tím spíše do kruhu o poloměru  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
 Je-li  $\triangle ABC$  ostroúhlý, pak pro poloměr  $R$  jeho kružnice opsané platí  $AB = 2R \sin \gamma$ , kde však  $\frac{\pi}{2} > \gamma \geq \frac{\pi}{3}$ , tedy  $\sin \gamma \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  a snadno plyne  $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  
 odtud důkaz.

Podle úlohy 4 pak plyne tvrzení věty.

7. Dokážeme tvrzení nejprve pro trojúhelník. Nechť  $ABC$  je trojúhelník tupoúhlý nebo pravoúhlý; pak kruh o průměru rovném jeho nejdelší straně uzavírá  $\triangle ABC$ . Z trojúhelníkové nerovnosti však plyne, že tato strana je menší než  $a$ .

Nechť nyní  $\triangle ABC$  je ostroúhlý, nechť  $R$  je poloměr jeho kružnice opsané. Platí známé vztahy  $m = 2R \sin \alpha$ ,  $n = 2R \sin \beta$ ,  $p = 2R \sin \gamma$ , kde  $m, n, p$  jsou strany trojúhelníka  $ABC$ ,  $m + n + p = 2a$  (obr. si nakreslete sami). Dále bude



Obr. 7

$$2\alpha < \pi, \quad \alpha + \beta = \pi - \gamma$$

a z toho odčtením

$$\alpha - \beta < \gamma \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\gamma}{2}.$$

Potom

$$2a = m + n + p = 2R (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) =$$

$$= 2R \left( 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \right) =$$

$$= 2R \left[ 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \right] > 2R \left( 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma \right) =$$

$$= 2R (\sin \gamma + \cos \gamma + 1) =$$

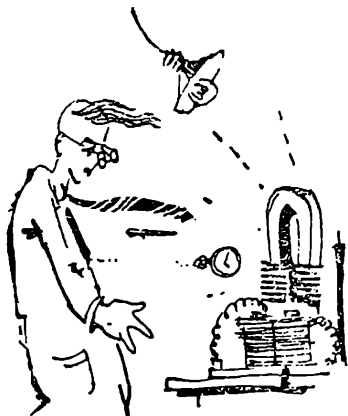
$$= 2R \left[ \sqrt{2} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right] > 2R \left( \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) = 4R,$$

tedy celkem  $2R < a$ ; odtud důkaz.

Tvrzení věty pak plyne podle úlohy 4 takto: Je-li dán libovolný mnohoúhelník (na obr. 7 pětiúhelník  $ABCDE$ ) o obvodu  $2a$ , pak každý trojúhelník (na př.  $ABC$ ) utvořený z jeho vrcholů má obvod  $2b \leq 2a$ , dá se tedy uzavřít do kruhu o průměru  $b_i \leq a$ , tedy i do kruhu o průměru  $a$ . Nyní se již užije výsledku úlohy 4 a tím se dokáže tvrzení úlohy 7.

#### Literatura.

Jaglom, Vypuklyje figury; sv. 4, Bibliotěka matematiceskovo kružka, kde se nejprve dokazuje obecná Hellyho věta a na jejím základě pak mezi jiným i úlohy 4 a 6.



# Fysika

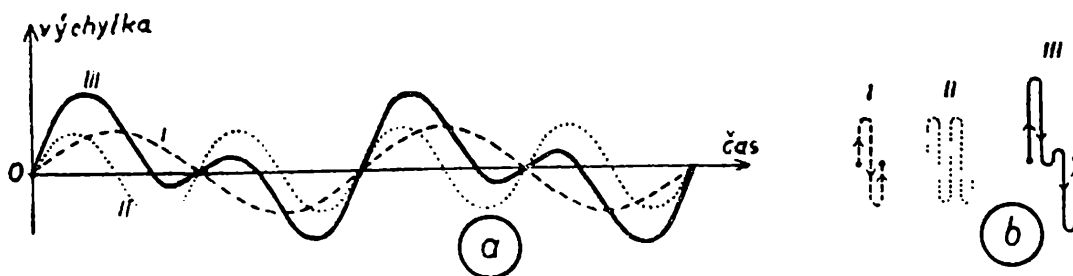
Prof. Dr. Emil Kašpar, Praha:

## Skládání stejnosměrných harmonických kmitů

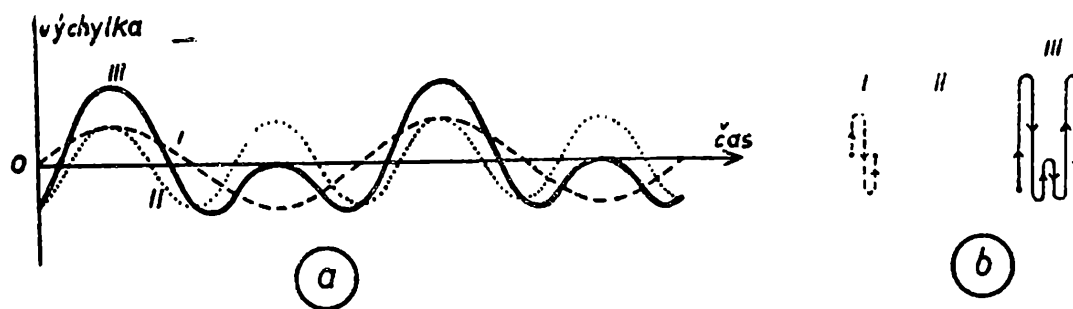
(Dokončení)

### 2. Skládání dvou stejnosměrných kmitů různých kmitočtů.

Mají-li obě složky různý kmitočet, pak výsledný pohyb může být velmi rozmanitý podle toho, jaký je poměr obou kmitočtů, a také podle toho, jaký je počáteční fázový rozdíl obou kmitů.



Obr. 7



Obr. 8

Rozřešíme si zde dva důležité případy. Nejdříve určíme výsledný pohyb, má-li jedna složka *dvakrát větší* kmitočet než druhá, a potom se budeme zabývat skládáním dvou kmitů, které mají velmi *přibližně stejnou* dobu kmitovou, neboli tak zvanými *rázy*.

*α) Druhá složka má dvakrát větší kmitočet než složka první.*

Označíme-li kmitočet druhé složky  $f_2$  a první  $f_1$ , platí  $f_2 = 2f_1$ . Tento případ je rozřešen v časovém rozvoji na obr. 7 a 8. Složky jsou vyznačeny čárkovaně a tečkovaně a výsledný pohyb je vytažen plně.

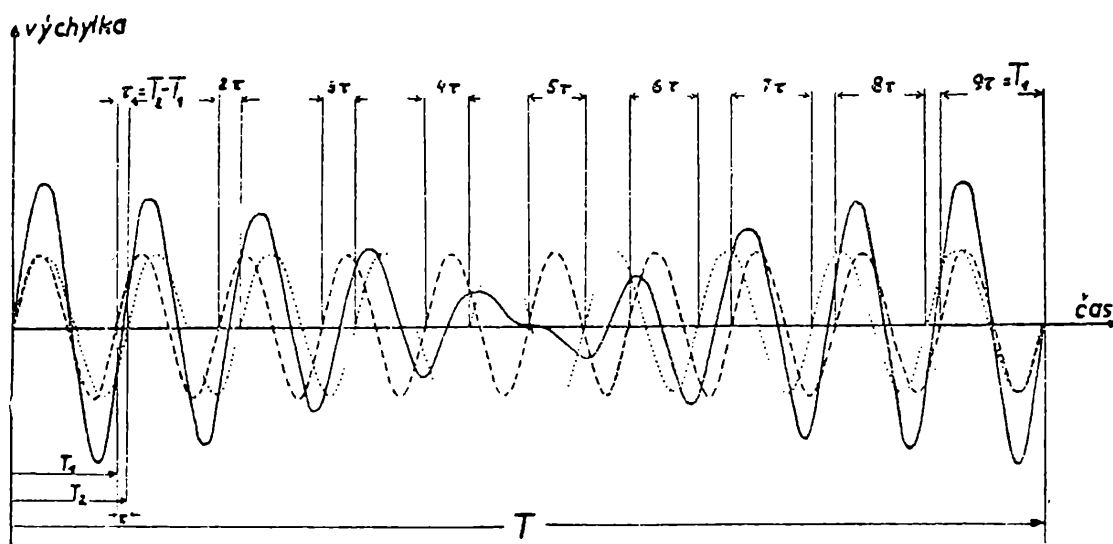


Nesmíme opět zapomenout, že obr. 7a a 8a značí časový rozvoj. Skutečný pohyb nám názorněji ukazuje obr. 7b a 8b. Vidíme, že pohyb vzniklý složením takových dvou harmonických pohybů není již jednoduchý harmonický pohyb, nýbrž pohyb sice také periodický, avšak složitější.

Jakost tohoto výsledného pohybu závisí na fázovém posunutí obou složek na začátku pohybu. V obr. 7ab je vyznačen případ, kdy počáteční fázové posunutí je rovno nule. V obr. 8ab je vyznačen případ, kde složka o větším kmitočtu předchází na začátku pohybu druhou složku o  $1/4$  kmitu. Při jiném fázovém rozdílu bychom dostali opět jiný průběh výsledného periodického pohybu.

V našich úvahách předpokládáme, že amplitudy obou složek jsou stejné. Je samozřejmé, že průběh pohybu závisí i na poměru amplitud. Snadno se přesvědčíme, že průběh výsledného pohybu zůstává přibližně zachován i při různých amplitudách, nejsou-li rozdíly jejich velikostí příliš velké.

Čtenář si pomocí našeho přístroje z obr. 6 sestojí časový rozvoj uvedených složených pohybů ze složek s nestejným kmitočty. Stačí přitom postupovat analogicky jako v poznámce 2 s tím rozdílem, že je nutno při otočení jednoho kotouče o jeden dílek otočiti druhým o dílky dva. Úhly otáčení obou kotoučů vztahujeme opět k pevné přímce, vedené středem kotouče.



Obr. 9

### β) Rázy.

Je-li částice nucena konat současně dva kmitavé pohyby, jejichž kmitočty se od sebe liší velmi málo ( $f_2 \doteq f_1$ ), pak vzniká důležitý pohyb, který se nazývá „rázy“. Protože jde o zjev, který se v praxi často vyskytuje, vysvětlíme si jej podrobněji.

V obr. 9 jsou vyznačeny čárkovaně a tečkovaně obě složky a plně vytažený výsledný pohyb v časovém rozvinutí. Vidíme tu zejména tyto důležité vlastnosti výsledného pohybu: Výsledný pohyb se velmi podobá harmonickému pohybu, neboť má stálý kmitočet, rovný aritmetickému průměru kmitočtů obou složek. Čárkovaná složka má 10 a tečkovaná 9 kmitů, zatím co za tutéž dobu má plně vytažený výsledný pohyb  $9\frac{1}{2}$  kmitu. Pohyb výsledný se však zásadně liší od

jednoduchého harmonického tím, že se jeho rozkmit střídavě zmenšuje a zvětšuje. Doba  $T$ , která uplyne mezi dvěma maximálními hodnotami amplitudy se nazývá *perioda rázů*. Kmitočet čili frekvence  $f$  rázů je počet maxim, resp. minim amplitudy v jedné vteřině. I zde platí známý vztah  $f = \frac{1}{T}$ .

*Pokus.* Rázy vzniknou, necháme-li znít dva tóny přibližně stejné výšky. Pokus vedeme na př. na houslích, kde naladíme dvě struny na přibližně stejný tón a drnknutím rozězvučíme. Uslyšíme jeden tón, který zní střídavě silněji a slaběji. Totéž můžeme demonstrovat na pianě nebo jiném klávesnicovém nástroji, rozězvučíme-li dva sousední tóny (lišící se o půltón) na nižších oktávách. Uslyšíme zřetelně rázy jako kolísání síly tónu.

Kmitočet  $f$  rázů se rovná rozdílu kmitočtů  $f_2$  a  $f_1$  obou složek, t. j.

$$f = f_2 - f_1, \text{ kde } f_2 > f_1.$$

Odvození vzorce pro kmitočet rázů není nijak obtížné, vezmeme-li si na pomoc obr. 9. Z něho vidíme, že časový rozdíl mezi týmiž fázemi složek neustále vzrůstá. Po 1 kmitu je tento rozdíl roven  $\tau = T_2 - T_1$  ( $T_2$ , resp.  $T_1$  jsou periody složek), po 2 kmitech je rozdíl  $2\tau = 2(T_2 - T_1)$ , po 3 kmitech  $3\tau = 3(T_2 - T_1)$  atd., až po  $n$  kmitech dosáhne časový rozdíl hodnoty  $n\tau = n(T_2 - T_1)$ . Z téhož obr. 9 zároveň vidíme, že perioda, t. j. doba  $T$  jednoho rázu, je rovna době, za kterou časový rozdíl mezi oběma složkami dosáhne velikosti periody kmitu složky o větším kmitočtu, t. j. kmitu s periodou  $T$ . To je dobře vidět z obrázku 9, kde 9 kmitů pomalejších trvá stejně dlouho jako 10 kmitů rychlejších. Po této době se děj opakuje na počátku. Vznikne opět periodický děj, jehož perioda trvá  $T$  vteřin.

Trvá-li perioda jednoho rázu po  $n$  kmitů rychlejší složky, pak můžeme psát

$$n\tau = n(T_2 - T_1) = T_1.$$

Je tedy

$$n = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

V obr. 9 je  $n = 10$ .

Doba jedné periody rázů je rovna  $n$ -násobné době kmitu  $T$ , platí tedy

$$T = nT_2 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot T_2.$$

Na jednu vteřinu připadá  $f = \frac{1}{T}$  rázů, t. j.

$$f = \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}.$$

Označíme-li kmitočty  $f_2$ , resp.  $f_1$ , pak dostáváme důležitý výsledek pro počet rázů za jednu vteřinu:

$$f = f_1 - f_2.$$

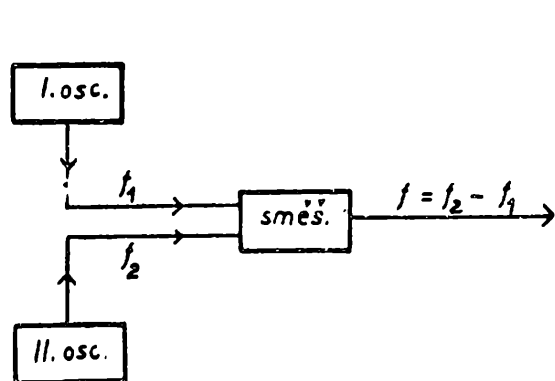
### *Kmitočet rázů je roven rozdílu kmitočtů obou složek.*

*Pokusy.* 1. Podle předešlého je kmitočet rázu tím menší, čím mají složky bližší kmitočty. Čím jsou víc rozladěny, tím je kmitočet rázu větší. To si můžeme ukázat na př. na houslích, kde naladíme dvě struny na tentýž tón. Čím víc rozladujeme, tím slyšíme při rozezvučení strun rychlejší střídání nejsilnější a nejslabší intensity zvuku.

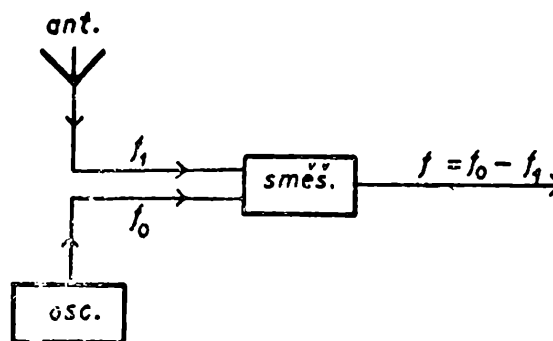
2. Časový rozvoj rázů můžeme sestrojít pomocí přístroje z obr. 6. Amplitudy volíme stejné nebo aspoň přibližně stejné. Rychlost otáčení - nebo úhel, o který vždy pootočíme kotouči - má být přibližně stejná. To vyžaduje nestejně rozdělení obvodů kotoučů: na př. v poměru 9:10. Zde nám náš přístroj velmi usnadní konstrukci, neboť rýsování časového rozvoje složek a provádění sčítání výchylek konstrukcí je dosti pracné.

*Užití rázů.* 1. Rázů se užívá v praxi dosti často. Na př. při sladování dvou tónů na tutéž výšku jsou právě rázy velmi citlivým ukazatelem rozladěnosti. Máme-li na př. v klavíru, kde jak známo tón vzniká úderem kladívka na dvě nebo tři struny, dostat dokonalé sladění strun téhož tónu, musí být odstraněny rázy úplně.

2. V *tónových generátorech*, t. j. v přístrojích na buzení zvukových tónů, se velmi často tón získá tak, že se „směšují“ dvě střídavá napětí elektrická o vysokém kmitočtu. Kmitočet jednoho napětí je stálý (na př.  $f_1 = 100\ 000$  c/s), kmitočet  $f_2$  druhého je proměnný, na př. od 100 000 do 120 000 c/s (schema v obr. 10).



Obr. 10



Obr. 11

Výsledkem je střídavé napětí o proměnné velikosti amplitudy; Frekvence změny amplitudy je rovna rozdílu obou základních frekvencí:  $f = f_2 - f_1$ .

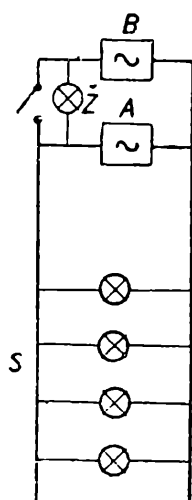
3. Rázových kmitů se užívá často v radiotechnice, na př. při směšování kmitů v *heterodynech a superheterodynech*.

V heterodynu se skládají elektrické kmitů přicházející z anteny s elektrickými kmitů, které vznikají v generátoru elektrických kmitů (oscilátoru) přijímače. Protože elektrické kmitů přijímané antenou mají velmi vysoký kmitočet, nemohou ani po zesílení rozchvět destičku telefonu nebo reproduktoru. I kdyby byla membrána rozchvěna, neslyšeli bychom žádný zvuk, protože kmitočet spadá již do nadzvukových (neslyšitelných) výšek. Složíme-li však vysokofrekvenční kmitů antenní (frekvence  $f_1$ ) s vysokofrekvenčními kmitů vlastního oscilátoru přijímače (frekvence  $f_0$ ), pak lze nastavit kmitočet  $f_0$  tak, že kmitočet rázů ( $f = f_0 - f_1$ ) spadá do slyšitelných výšek. Pak po usměrnění slyšíme v telefonu tón. Je-li vysílané vlnění přerušováno tak, že jsou vysílány Morseovy značky, můžeme poslechem přijímat telegrafické zprávy. Schema heterodynu je na obr. 11.

V superheterodynech (superhetech) se volí frekvence vlastního oscilátoru tak, aby kmitočet rázů (t. zv. mezifrekvence  $f = f_m$ ) byl opět vysokofrekvenční (na

př. 130 kc/s). Mezi frekvence se zesiluje stabilním zesilovačem. Podrobnější poučení nalezne čtenář v radiotechnických příručkách.

4. Za zmínku stojí zajímavé užití rázů v elektrotechnice při t. zv. *fázování generátorů* střídavého proudu. Je-li síť tak zatěžována spotřebiči, že je nutno uvést do chodu další generátor, pak v okamžiku spojení obou generátorů musí být splněny tyto podmínky: napětí a kmitočty obou generátorů musí být stejné, stejná musí být i fáze. Kmitočet střídavého proudu je dán počtem otáček rotoru, napětí při daných otáčkách je dáno konstrukcí generátoru. Je třeba kontrolovat, zda v okamžiku připojení jsou také stejné fáze. Kdyby nebyla fáze stejná, nastal by nebezpečný zkrat. Okamžik stejné fáze zjistíme pomocí rázových kmitů. Situace je schematicky zachycena v obr. 12. V něm *A* značí generátor v chodu a *B* generátor, který se rozbíhá. Chceme-li druhý generátor zapojit do sítě, spojí se jedny svorky obou generátorů nakrátko a druhé přes žárovku *Ž*. Jak se generátor *B* rozbíhá a jak se jeho otáčky přibližují otáčkám generátoru *A*, kmitá světlo žárovky stále pomaleji. V okamžiku zapojení musí být na svorkách generátorů připojených k žárovce stejné napětí. To se projeví tím, že žárovka nesvítí. Proto se nechá pomocný generátor rozbíhat. Světlo žárovky kmitá stále pomaleji, protože počet otáček a tudíž i frekvence střídavého proudu je stále bližší frekvenci  $f_1$  proudu prvního generátoru. Když světlo žárovky kmitá velmi pomalu, spojíme v okamžiku, kdy žárovka nesvítí, svorky generátorů nakrátko. Generátory se pak již samy udržují ve stejném chodu.



Obr. 12

**Úlohy.** 1. V tónovém generátoru vzniká kmitání smíšením dvou elektrických kmitů, z nichž jeden má frekvenci  $f_0$  (na př. 100 000 c/s) a druhý má proměnný kmitočet  $f_1$ . Vypočítejte, jak velký kmitočet musí mít proměnná složka, má-li vzniknout tón o výšce  $a_1$  ( $N = 435$  c/s).

2. Vypočítejte, oč se liší výška  $N$  tónu od výšky  $N_0$  základního tónu, je-li frekvence rázů při spoluznění obou tónů  $f = 0,1$  c/s. Speciálně pro  $N_0 = 440$  c/s, 1 760 c/s, 7 040 c/s.

3. V obr. 9 jsou vyznačeny dva kmitý v časovém rozvoji. Vidíme z něho, že doba jednoho rázu ( $T$ ) se rovná době, po které se obě složky sejdou ve fázi, což znamená, že doba  $T$  je nejmenším společným násobkem dob  $T_1$  a  $T_2$  obou kmitů. Tato doba se může podle tohoto výsledku stanovit i početně. Proveďte výpočet!

4. Při fázování dvou generátorů střídavého proudu zaznamená fázovací žárovka *Ž* (obr. 12) vlastně rozdíl napětí na svorkách generátorů, k nimž je připojena. Odůvodněte podle obr. 9, proč žárovka svítí nejvíce právě v okamžiku, kdy jsou na svorkách obrácené fáze a nejméně při stejných fázích.

**Řešení úloh:**

1.  $f_1 = f_0 \pm N$ ; na př.  $100\,000 \pm 435$  c/s, t. j. proměnná složka musí být buď o 435 c/s větší nebo menší než stálá složka kmitočtu  $f_0$ .

2. Frekvence rázů je rovna rozdílu frekvencí obou složek, proto z rázů nemůžeme rozhodnout, zda druhá složka je o velikost kmitočtu rázů větší nebo menší než první složka. Proto  $N = N_0 \pm 0,1$  c/s. Speciálně:  $440 \pm 0,1$  c/s,  $1\,760 \pm 0,1$  c/s,  $7\,040 \pm 0,1$  c/s.

$$3. T = nT_2 = (n + 1) \cdot T_1. \text{ Odtud } n = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \text{ a dále } T = n \cdot T_2 = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1},$$

$$\frac{1}{T} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}.$$

4. Žárovka svítí nejvíce, jsou-li na svorkách největší, avšak obrácená napětí. Rozdíl napětí na svorkách je v obr. 9 vyznačen svislou vzdáleností křivek čárkované a tečkované. Tato vzdálenost je největší uprostřed obrázku (při obrácené fázi) a nejmenší na okrajích (při týchž fázích). U elektrického proudu se obrácená napětí navzájem neruší na rozdíl od případu obrácených výchylek částice, nýbrž výsledné napětí je rovno součtu absolutních hodnot napětí na obou svorkách. Přitom ovšem myslíme stále na efektivní napětí, neboť proud rozsvěcující žárovku je střídavý.

Prof. Dr. Ján Vanovič, Bratislava:

## Hmota a žiarenie

(Vznik žiarenia a účinky pohlteneho žiarenia.)

V prítomných dňoch, kedy sa dvíhajú hlasy vedcov celého sveta proti pokračovaniu v pokusoch s nukleárnymi explóziami, je veľmi aktuálnou otázkou poznania možností pôsobenia žiarenia na hmotné prostredia. Pôsobenie pohlteneho žiarenia na hmotné prostredie dá sa najlepšie sledovať v súvislosti s jeho vznikom, ako úkaz reciproky. Tak názorne vystúpi zaujímavá súvislosť hmoty a žiarenia. Rovnako presvedčivo vyniknú vážne obavy o osudy ľudstva, aké by sa mohli vyvinúť v tieni vzrastajúcej radioaktivity a intenzity žiarení na našej planéte.

Problém hmoty a žiarenia, zahrnujúci jeho vznik i pôsobenie, mohol byť pochopený až vtedy, keď boli poznané niektoré základné fakty:

1. Skladba hmotného prostredia je nespojitá, atomistická, pritom atóm nie je nedeliteľný, ale zložený z elementárnych častíc.

2. Existencia elementárnych častíc - napred elektricky nabitých - sa prejaví až v hmotnom prostredí stavu veľkej hustoty energie, teda najľahšie v stave zredneného plynu v silnom elektrickom poli.

3. Elektrické náboje sú stavané tiež nespojite, sú atomizované na elementárne náboje hodnoty  $e_0 = 4,802 \cdot 10^{-10}$  abs. jednotiek.

4. Okrem hmotových žiarení - tvorených tokom hmotných častíc - existujú i žiarenia vlnové, elektromagnetickej povahy, vznikajúce pri zrýchlenom pohybe elektrických (elementárnych) nábojov.

5. Zo vzájomnej súvislosti hmotových a vlnových žiarení vyplýva, že vlnové žiarenia dostatočne vysokej frekvencie ( $\nu > 10^{11}$ ), nie sú spojité, ale kvantované na dávky energie tak, ako by každý lúč žiarenia prenášal energiu hodnoty  $h\nu$ , úmernej frekvencii (pritom  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  ergsec značí univerzálnu Planckovu konštantu).

6. Každá zložená častica, pretože obsahuje elementárne elektrické náboje v rôznych možných usporiadaniach, ktorým zodpovedajú rôzne obsahy energie, môže sa stať elektromagnetickým žiaričom, ako malá submikroskopická anténa.

7. V protiklade ku disociácii zložených častíc na elementárne častice (v pod-

mienkach veľkej hustoty energie), prebieha v podmienkach znižujúcej sa hustoty energie dej opačný, t. j. asociácia (napred elementárnych a potom i zložených častíc).

Pri asociáciách častíc sa vždy uvoľňuje energia - energia väzby - a to pôvodne, v mikropodmienkach, vo forme elektromagnetického rozruchu, teda ako fotón  $h\nu$ . Čím väčšia energia väzby  $h\nu$  sa uvoľňuje, tým skôr stáva sa merateľným úbytok hmoty zloženej častice  $\frac{h\nu}{c^2}$  proti súčtu hmôt asociovaných častíc; pritom  $c = 2,9977 \cdot 10^{10}$  cm sec<sup>-1</sup> značí vákuovú rýchlosť svetla.

Všetky asociácie prebiehajú samovoľne (v určitých podmienkach energie), vznikajú vždy sústavy menšieho obsahu energie, pričom mierou ich stálosti je práve veľkosť uvoľnenej energie. Ako väzby medzi časticami vznikajú za emisie väzbových fotónov, naopak môžu sa rozväzovať absorpciou fotónov. Stav vytvorených väzieb, alebo existujúcich hmotných sústav, je závislý od hustoty energie, obsiahnutej vo fotónoch žiarenia, prítomného v svete.

V stave najväčších obsahov energie, museli by byť všetky hmotné prostredia disociované až po samé elementárne častice.

Prv než sa obrátíme k vlastnej téme, urobíme niekoľko poznámok k uvedeným faktom.

## I.

K fyzikálnemu pojmu atómu viedol plynný stav. Kinetickú predstavu plynu, tvoreného z hmotných bodov, pohybujúcich sa všetkými smermi, zaviedol ako prvý D. Bernoulli (1738). Naplnenie predstavy hmotných bodov konkrétnym fyzikálnym obsahom napomohli zákony chemického zlučovania (zákon stálych váhových pomerov, Proust 1799; množných váhových pomerov, Dalton 1802; objemový zákon zlučujúcich sa plynov, Gay-Lussac 1808). V tomto zmysle definoval *atóm* ako najmenšiu časticu chemického prvku Dalton (1803).

Až štúdium elektrických výbojov v zredených plynch prinútilo fyzikov takú predstavu atómu opustiť. Súvislosť troch úkazov vo výbojovej trubici so zredeným plynom: 1. svietiacej výbojovej dráhy, 2. toku nabitých častíc v trubici, 3. zelenkavého svietelkovania stien trubice, poskytla na to dostačujúci základ.

Napred sa stali stredom pozornosti pekné svetelné efekty v trubici (Davy, Faraday, 1822). Potom sa zistila jednoznačná závislosť farby svetla od povahy zredeného plynu (Plücker 1858). Nakoniec im vďačí za svoj vznik spektrálna analýza (Kirchhoff, Bunsen, 1860). Zdrojom svetla vo výbojovej trubici sú častice plynu, ktoré preto nepochybne musia byť zložené.

Príčinu svietelkovania stien trubice prvý vysvetľoval Hittorf (1869) a to dopadom častíc, priamo letiacich od katódy. Goldstein (1876) pridal poznatok, že nakoľko sa let častíc zakrivuje pod vplyvom elektrického poľa, určitým spôsobom, sú záporne elektrické a ich tok nazval katódovým žiarením. Crookes (1879) dokázal okrem vplyvu magnetického poľa na let častíc katódového žiarenia, jeho účinky mechanické (zdeľovanie impulzu), tepelné a chemické. Až J. J. Thomson (1897), zavedením kvantitatívneho opisu pohybu nabitých častíc v elektromagnetickom poli, objavil metódu určovania ich špecifického náboja  $\frac{e_0}{m}$  a rýchlosti. Tak

bola častica katódového žiarenia poznaná ako prvá elementárna častica - *elektrón*.

Predtým už Hertz (1892) objavil prenikanie katódového žiarenia kovovými fóliami a na tom Lenard (1894) založil štúdium absorpcie katódového žiarenia v hmotnom prostredí. Toto štúdium poskytlo prekvapujúci výsledok: pri absorpcii katódového žiarenia miznú fyzikálne a chemické odlišnosti hmotných prostredí. Absorpcia je úmerná len hustote prostredia, čo privádza na myšlienku, že všetky atómy sú stavané z rovnakých elementárnych častíc. Pritom hustota je určená celkovým počtom elementárnych častíc v objemovej jednotke.

## II.

Ešte predtým ako sa zistila povaha katódového žiarenia, položil si Goldstein otázku existencie kladne elektrického hmotového žiarenia, ktoré by postupovalo od anódy výbojovej trubice. Po dôkaze jeho existencie sa ukázalo použitím Thomsonovej metódy, že tvoriace ho kladne elektrické častice závisia od použitého zredeneného plynu v trubici. V prípade vodíka, bol tak dokázaný *protón*, ako druhá elementárna častica, nesúca kladný elementárny náboj.

Analýzou hmotových žiarení kladných - hlavne po zavedení metód určovania elektrického náboja - vyvinula sa presná fyzikálna metóda určovania hmôt iónov a tým i atómových hmôt. Ukázalo sa, že atómy nemajú hmoty rovné celočíselnému násobku hmoty základnej častice, čo je zdanlive v rozpore s predpokladom stavby atómov z rovnakých elementárnych častíc. Naopak, boli objavené atómy odlišných hmôt, patriace na rovnaké miesto v periodickej sústave prvkov - tzv. izotópy (J. J. Thomson, 1913).

Atómová hmota, ktorú Mendelejev (1869) použil ako usporadujúcu vlastnosť atómov do periodickej sústavy, prestáva byť jednoznačnou charakteristikou atómu.

Tu sa stávajú veľmi dôležitými nové zdroje hmotových žiarení. Elektrónovú emisiu zo žeravej katódy pozoroval už Edison (1884) a emisiu elektrónov z osvetlených kovov Hertz (1887). Oba úkazy potvrdzujú prítomnosť elektrónov v hmotnom prostredí. Najdôležitejší však bol objav radioaktivity (H. Becquerel, 1896). V súvislosti s radioaktívnymi prvkami zistil Rutherford (1901), že existujú hmotové žiariče, ( $\alpha$  - žiarenie a  $\beta$  - žiarenie) i žiariče fotónov ( $\gamma$  - žiarenie, veľmi vysokej frekvencie). Pri určovaní špecifického náboja  $\beta$  - žiarenia tvoreného elektrónmi, Kaufmann (1901) zistil závislosť hmoty elektrónu od rýchlosti. Zotrvačná hmota tak stráca svoj, dotiaľ samozrejvý, invariantný charakter. Ťažkosti, týkajúce sa hmoty častíc rozriešila až *teoria relativity* (Einstein, 1905), podľa ktorej existuje úmernosť medzi hmotou a energiou, tvaru  $W = mc^2$  ( $W$  energia,  $m$  hmota,  $c$  vákuová rýchlosť svetla). Mierou zväčšujúcej sa hmoty je ekvivalent kinetickej energie, prepočítaný na hmotové jednotky. Pri zmenšení obsahu energie tvoriacej sa viazanej sústavy častíc, musí sa to prejaviť na zmenšení hmoty sústavy, pri vyžiarení fotónu  $h\nu$  o hodnotu  $\frac{h\nu}{c^2}$ .

Nové zdroje hmotových žiarení vyžiadali si i nový pozorovací prostriedok, ktorý fyzikovia dostali vo forme Wilsonovej hmlovej komory (1897).

Novému pozorovaciemu zariadeniu vďačíme za dôležité objavy: 1. premeny atómového jadra pri bombardovaní  $\alpha$  - žiarením (Rutherford, 1919); 2. existencie elektroneutrálnej elementárnej častice - *neutrónu* (Bethe a Becker, 1930); 3. kladnej

častice, nesúcej elementárny náboj s hmotou rovnakou s elektrónom - *pozitrónu* (Anderson, 1932); 4. umelej radioaktivity, získanej pohltením častíc hmotového žiarenia veľkej energie (manželia Joliotovci, 1934).

Tak sa pomaly experimentálne potvrdzuje predpoklad, že hmotné prostredia sú stavané trojakými elementárnymi časticami, protónmi, neutrónmi a elektrónmi.

### III.

Ostáva už len určiť usporiadanie tých elementárnych častíc v atómoch. Proti Daltonovi už Faraday (1833) predpokladá častice hmotného prostredia za zložené, keď všetky elektrické úkazy vysvetľuje polarizovateľnosťou (čo značí: posunom el. nábojov). O veľkosti nábojov, vstavaných do hmotných častíc, vypovedá úmernosť medzi hmotou a nábojom, vyjadrená jeho elektrochemickými zákonmi. Vyplýva z nich totiž, že na hmotu iónu, pri prechode prúdu elektrolytom, pripadá vždy celistvý násobok elementárneho náboja  $e_0 = 4,802 \cdot 10^{-10}$  abs. jednotiek. Rovnaká hodnota náboja vychádza prekvapujúco i pre elektrón, resp. protón (Millikan, 1911) pri ich priamom meraní.

Atóm je preto sústavou elementárnych nábojov kladných a záporných. O ich usporiadaní podali zprávu Rutherfordove pokusy s rozptylom  $\alpha$  - častíc kovovými fóliami. Predpokladom neprestupnej časti atómu, od ktorej sa priblížené  $\alpha$ -častice odpudzujú a zavedením matematického opisu pohybu  $\alpha$ -častice (nesúcej dva kladné elementárne náboje) vychádza, že vnútorná časť atómu - zvaná atómové jadro - obsahuje  $Z$  kladných elementárnych nábojov, pričom  $Z$  značí poriadkové číslo atómu v Mendelejevovej periodickej sústave prvkov.

Usporiadajúcou vlastnosťou atómov do periodickej sústavy sa tak stáva náboj jadra atómu. Jadro sa neutralizuje elektrónovým obalom, s ktorým tvorí sústavu menšej energie než je jadro samotné.

### IV.

K poznaniu žiarení vlnovej (elektromagnetickej) povahy viedla dlhá a nepriama cesta. Prvým krokom je tu odlišenie vedenie tepla od tepelného žiarenia, a to poznaním, že vedenie tepla predpokladá nositeľa (hmotné prostredie), kdežto tepelné žiarenie sa ukazuje od neho neodvislým. Scheele (1777) si povšimol, že smer šírenia tepelného žiarenia nie je ovplyvnený pohybom vzduchu. Z toho usúdil, že sa tepelné žiarenie šíri veľkou rýchlosťou. Pictet (1790) poznal, že tepelné žiarenie možno sústrediť dutým zrkadlom (ako svetlo). Zaujímavý bol paradoxný pokus o zápalnosti ľahko horľavej látky, sústredením tepelného žiarenia ľadovou šošovkou. Herschel (1800) zistil, že teplomer reaguje nielen vo všetkých farbách viditeľného spektra - najviac v žltej a červenej - ale i za červenou farbou, kde oko už nič nevníma. O rok neskôršie J. W. Ritter poznal, že i za fialovou farbou sa prejavujú zas chemické účinky. Ampère (1835) vyslovil hypotézu, že svetlo nie je nič iné, ako viditeľné tepelné žiarenie.

Po objave interferencie T. Youngom (1807), polarizácie Malusom (1808) a teórie ohybu svetla Fresnelom (1818) sa ukazovalo, že žiarenia tepelné, svetelné a ultrafialové nemôžu mať inú, ako vlnovú povahu a to priečneho, postupového vlnenia.

Vývoj názorov na povahu svetla mal potom nečakaný obrat. Už Faraday poňal



elektrické a magnetické úkazy s takou všeobecnosťou, že ich to uvádzalo do súvislosti so svetlom. Jeho názory v exaktnej matematickej reči, do ktorej ich previedol J. C. Maxwell, bolo možné zhrnúť do štyroch hlavných zákonov elektromagnetického poľa. Z tých zákonov Maxwell odvodil (1873), že by mal existovať vlnový elektromagnetický rozruch, vo forme priečného postupného vlnenia, s fázovou rýchlosťou, rovnou známej rýchlosti svetla. Tá jediná spoločná vlastnosť so svetlom mu stačila, aby vyslovil smelú hypotézu, že svetlo je elektromagnetickým vlnením.

Existenciu elektromagnetických vln dokázal H. Hertz (1888) a to v súvislosti s kmitajúcimi nábojmi v t. zv. Hertzovom dipóle (priamom vodiči, ktorého kapacita bola zväčšená na koncoch pridanými guľami). Z neho sa vyvinuli dnešné antény. Kmitočet  $\nu$  nábojov v dipóle, ostáva i charakteristikou elektromagnetickej vlny, emitovanej z dipólu (jej vlnová dĺžka je  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ). Elektromagnetický rozruch sa odráža, láme a je polarizovaný. Tie fakty pomohli Maxwellovej hypotéze k víťazstvu.

Frekvencie svetla sú pre červenú farbu  $\nu_{\epsilon} = 3,93 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$  a fialovú  $\nu_f = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$ , s vlnovými dĺžkami  $\lambda_{\epsilon} = 7\,600 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_f = 4\,000 \text{ \AA}$ .

Tepelné žiarenia majú menšie a ultrafialové väčšie frekvencie ako svetlo.

## V.

Elektromagnetické žiarenia boli čoskoro uvedené do súvislosti s hmotovými žiareniami, čím sa otvorila cesta k vysvetľovaniu vzniku hmotového a vlnového žiarenia.

Prvým takým úkazom bol už Hertzom pozorovaný výboj (záporne) elektrického kovu pri jeho osvetlení. Hallwachs poznal, že nenabitá kovová deska sa nabíja kladne a to tým viac, čím je žiarenie bližšie k fialovej farbe a najviac pri ožiarení ultrafialovým žiarením. Lenard (1899) poznal príčinu nabíjania v emisii elektrónov, ktorú nazval fotoelektrickým katódovým žiarením. Ním vykonaný rozbor úkazu priniesol veľmi zaujímavý výsledok. Merateľná rýchlosť emitovaných elektrónov - predpokladal - mohla by sa stať objektívnou mierou intenzity žiarenia. Ukázalo sa však, že zmena intenzity žiarenia sa na rýchlosti emitovaných elektrónov neprejaví; v tomto prípade sa mení len počet emitovaných elektrónov. Zmena rýchlosti sa dostavila len pri zmene farby žiarenia, resp. pri zmene jeho frekvencie. Z toho plynie, že každý elektrón získal energiu od jednotlivého lúča a ďalej, že každý lúč nesie vždy len určité kvantum energie, závislé od jeho farby, resp. frekvencie.

Hmota je kvantovaná na množstvá, dané hmotami elementárnych častíc; náboj je kvantovaný na množstvá, dané elementárnymi nábojmi. K tomu pristupuje i kvantovanie energie, prenášanej žiarením, na hodnoty  $h\nu$ , ktorý predpoklad po prvý krát hypoteticky použil M. Planck (1900). Kvantum žiarivej elektromagnetickej energie  $h\nu$  dostalo neskoršie názov: *fotón*.

Výmena energie medzi žiarením a elektrónmi (pri fotoelektrickom efekte) viedla k vyjadreniu vety o energii pre časticu a fotón (Einstein, 1905). Pri kinetickej

energii častice  $\frac{1}{2}mv^2$  a energii  $A$ , potrebnej na jej uvoľnenie, platí

$$\frac{1}{2}mv^2 + A = h\nu, \quad (1)$$

ktorú rovnicu možno čítať v oboch smeroch: 1. Uviaznutím častice danej kinetickej energie v hmotnom prostredí, emituje sa fotón energie, rovnej kinetickej energii, zväčšenej o uvoľnenú energiu pri uviaznutí častice; 2. Absorbovaný fotón sa spotrebuje na prekonanie väzby ( $A$ ) častice k prostrediu a na jej kinetickú energiu.

Prvým prípadom sa dá vysvetliť vznik svetielkovania stien výbojovej trubice a vznik W. Röntgenom (1895) objaveného žiarenia, pri opakovaní Crookesových pokusov, ktoré má ešte vyššiu frekvenciu ako žiarenie ultrafialové. Druhý prípad vysvetľuje fotoemisiu elektrónov.

Rovnici (1) môžeme dať ešte jeden výklad: Keď je počiatočná kinetická energia rovná nule a  $A$  má význam rozdielu potenciálnych energií dvoch častíc (počiatočnej  $W_k$  a konečnej  $W_n < W_k$ ), môže nastať premena úbytku potenciálnej energie zloženej častice na fotón:

$$A = W_k - W_n = h\nu.$$

V tejto forme použil podmienku pre vyžiarenie fotónu N. Bohr (1913), pričom  $W_k$  a  $W_n$  značili obsah energie zloženej sústavy elementárnych nábojov a to pred a po vyžiarení. Naopak, sústava s energiou  $W_n$ , prejde absorpciou fotónu do energetického stavu  $W_k$ .

## VI.

Otázku, ako môžu byť molekuly alebo atómy žiaričmi fotónov, najľahšie zodpovieme, keď si vybereme molekulu, podobnú Hertzovmu dipólu. Takou je na pr. polárna molekula kuchyňskej soli  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$ , tvorená dvoma nesúhlasne elektrickými ionmi  $\text{Na}^+$  a  $\text{Cl}^-$ .

Oba ióny sa priťahujú a keby boli v prázdnom priestore, zaujali by polohu minima potenciálnej energie. Takému ich stavu by zodpovedala teplota absolútnej nuly. Za obyčajnej teploty nebudú v polohe minima energie, ale budú mať istú väčšiu potenciálnu energiu, zodpovedajúcu ich väčšej vzajomnej vzdialenosti. Získali ju absorpciou istého fotónu. Pretože oddialenie ionov je možné len pohybom, budú mať oba ióny aj energiu kinetickú. Budú v takom stave, pri ktorom sa menia navzájom formy energie kinetickej a potenciálnej, budú teda kmitať, podobne ako kmitajú náboje v Hertzovom dipóle.

Pretože kmitajúci dipól emituje elektromagnetický vlnový rozruch, bude tomu tak i u kmitajúcej dvojice iónov, ktorá sa skutočne chová ako submikroskopická anténa. Vyžiaréním elektromagnetickej energie však klesá energia molekuly a tá prechádza zas do stavu menšej energie. Ak straty energie, vznikajúce vyžiaréním nenahradíme, môže molekula vyžiariť len kvantum energie, ktoré získala a o ktoré sa jej energia zväčšila proti minimu energie. To je prirodzené vysvetlenie kvantovania žiarivej energie.

V praktických prípadoch sú pomery komplikované tým, že molekuly  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$  sú vstavané do kubickej mriežky, v ktorej sú vrcholy kociek striedavo obsadené

iónmi  $\text{Na}^+$  alebo  $\text{Cl}^-$ . Ak taká mriežka má určitú teplotu, značí to, že v jej vnútri sa udržiava rovnovážne kmitanie dipólov  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$  a to tak, že nastane rovnováha medzi emitovanou a absorbovanou energiou. Len povrchové antény  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$  vyžarujú fotóny tepelného žiarenia a pretože je ich kmitanie rušené, vplyvom absorpcie fotónov vyžiarených susednými molekulami a preto nie harmonické, sálavé tepelné žiarenie bude obsahovať rôzne, i málo sa lišiace frekvencie; spektrum žiarenia bude spojité.

S rastúcou teplotou rastú i rozdiely potenciálnej energie kmitajúcich iónov a tým i frekvencie vyžarovaného elektromagnetického žiarenia. Nakoniec, pri teplote okolo  $800^\circ\text{C}$  objavajú sa prví poslovia viditeľného červeného žiarenia.

Tu už nebude možné zanedbať absorpciu energie jednotlivými iónmi, ktoré tiež môžu byť žiaričmi elektromagnetickej energie, nakoľko sú tvorené systémami elementárnych nábojov.

Prv než si všimneme atómy zo stránky vyžiarovacej schopnosti, sledujme ešte našu mriežku pri stúpajúcej hustote energie. Pri určitej hustote energie (resp. teplote) nebude rozloženie energie na jednotlivé dipóly  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$  rovnaké, práve tak ako rozloženie kinetickej energie medzi molekuly plynu nie je rovnaké. Dipóly väčšieho obsahu energie proti hustote energie okolia, prechodom do hladiny priemernej energie, môžu vyžiariť i svetlo.

Stupňovaním hustoty energie zväčšujú sa vzdialenosti iónov, takže pri určitej hustote energie prestávajú byť viazané, disociujú podľa rovnice



pričom hustote príslušnej energie zodpovedá teplota bodu topenia mriežky. Keď má grammolekula  $\text{NaCl}$  objem  $v$  a obsahuje  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  molekúl, v kubickej mriežke viazaných  $6N$  väzbami, musí byť hustota energie, zodpovedajúca bodu topenia

$$u = \frac{6N h \nu_d}{v} = \frac{\mathcal{J} \cdot Q_s}{v}, \quad (3)$$

kde  $\mathcal{J} = 4,19 \cdot 10^7$  značí hodnotu mechanického ekvivalentu tepla (prevádzajúceho kalórie na ergy) a  $Q_s = 7,365 \cdot 10^3$  cal/mol. grad je skupenské teplo na mol.

Z (3) vychádza frekvencia väzbového fotónu (pri topení pohlcovanému a pri kryštalizácii uvoľňovanému každou rozviazanou, resp. vytvorenou väzbou)

$$\nu_d = \frac{\mathcal{J} \cdot Q_s}{6N \cdot h} = \frac{4,19 \cdot 10^7 \cdot 7,365 \cdot 10^3}{6 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 6,62 \cdot 10^{-27}} = 1,29 \cdot 10^{14} \quad (4)$$

náležiaco ešte do oboru tepelného (infračerveného) spektra.

Asociácia častíc nekončí u tvorby molekúl, pretože v kryštálovej mriežke pripadá na časticu viac ako jedna väzba (najmänej štyri). Tvorba pevnej mriežky prebieha preto, ako tvorba sústavy nižšej energie samovoľne, za uvoľňovania energie.

Ak mriežka absorbuje jednotlivý fotón väzbovej, alebo i väčšej energie, neuvolňuje sa jednotlivá častica mriežky. Absorbovaná energia sa pevnými väzbami rozloží na celú mriežku. U voľných molekúl je to inak; tu absorpciou fotónu

väzbovej energie, molekula disociuje. Zo zlučovacieho tepla na mol  $Q = 9,833 \cdot 10^4$  pár NaCl, určením energie pripadajúcej na molekulu, vychádza frekvencia disociačného fotónu

$$\nu = \frac{f \cdot Q}{N \cdot h} = 1,03 \cdot 10^{15}, \quad (5)$$

určujúca ho do oboru ultrafialového žiarenia. Pri topení je hustota energie asi 7,9krát menšia ako pri disociácii. Rozloženie energie v tavenine nie je rovnomerné, tavenina NaCl preto obsahuje i disociované molekuly; je elektricky vodivá.

## VII.

Hmotná sústava sa udrží v stave disociovanom na elementárne častice len pri zodpovedajúcej hustote energie v priestore. Keď vyplňa ohraničený priestor a hustota energie poklesne vyžiaréním, vytvárajú sa asociácie elementárnych častíc, zodpovedajúce menším hustotám energie.

Zo vznikajúcich asociácií si bližšie povšimneme dve:

1. Spojenie protónu s elektrónom; 2. a protónu s neutrónom.

Dvojica protón-elektrón sa v danej vzdialenosti  $r$  neudrží, lebo ich potenciálna energia

$$W = - \frac{e_0^2}{r}, \quad (6)$$

klesá so znižujúcou sa vzdialenosťou, je totiž  $W < 0$ . Pádcom elektrónu na protón vzniká napred kinetická energia, ktorá uviaznutím elektrónu v polohe minima energie - akýmsi zabrzdzením elektrónu - odchádza vo forme prechodného elektromagnetického rozruchu. Ak polohe minima energie zodpovedá vzdialenosť  $r_0$ , vytvorenie vodíkového atómu je sprevádzané vyžiaréním fotónu

$$h\nu_0 = e_0^2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right), \quad (7)$$

ktorý pre dostatočne veľké  $r \gg r_0$  určuje väzbovú energiu vodíkového atómu.

Výraz (6) vyplýva z empirického Coulombovho zákona; odtiaľ však nedá sa odôvodniť existencia polohy minima energie. Ani ďalšie možné hladiny energie dvojice protón-elektrón odtiaľ nevyplývajú. Že však existujú, dokazuje skúsenosť, že vodíkový atóm ako žiarič, emituje len niektoré frekvencie, pre ktoré (už r. 1885) Balmer určil empirický zákon

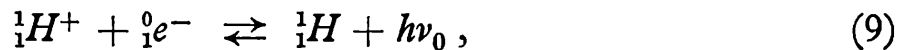
$$\nu = cR \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (8)$$

kde  $R = 109\,737,18$  je Rydbergova konštanta a jednotlivé frekvencie vychádzajú pre  $n = 1, k = 2, 3, \dots$ , alebo  $n = 2, k = 3, 4, \dots$  atď.

Keď je  $r \gg r_0$ , zodpovedá mu veľmi veľké  $k$ , takže  $\frac{1}{r}, \frac{1}{k^2}$  môžeme proti

$\frac{1}{r_0}, \frac{1}{n^2}$  v (7) a (8) zanedbať a porovnaním tak vzniklých výrazov vychádza pre polohu minima energie:  $r_0 = \frac{e_0^2}{hcR} \sim 10^{-8}$  cm.

Vznik najjednoduchšieho atómu vodíka môžeme preto vyjadriť rovnicou



kde  ${}^1_1\text{H}^+$  značí protón,  ${}^0_1\text{e}^-$  elektrón,  ${}^1_1\text{H}$  atóm vodíka<sup>1)</sup>. Pri absorpcii fotónu  $h\nu_0$  vodíkovým atómom, tento sa ionizuje na protón a elektrón; ak sa absorbuje fotón  $h\nu$  ( $\nu < \nu_0$ ) prejde atóm do vzbudeného stavu, kedy má vyšší stav energie.

☛ Poznanie zákonitostí spektier je veľmi dôležité na určovanie energetických hladín atómov. Existencia len určitých energetických hladín v atómoch bola experimentálne potvrdená Franckom a G. Hertzom (1914). Rozdiely hladín energie v elektrónových obaloch sú také, že im zodpovedajú fotóny žiarení: ultrafialového, svetelného a tepelného, Dôkaz, že tie žiarenia pochádzajú z elektrónových obalov možno vidieť vo vplyve elektrického poľa (Starck, 1913) a magnetického poľa (Zeeman, 1896) na emitované frekvencie (resp. spektrá atómov).

Ak sa neutralizuje jadro, obsahujúce  $Z$  protónov, pri väzbe prvého elektrónu vyžiari podľa (8) a vzťahom na (7) fotón

$$\nu_R = cRZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

značne vyššej frekvencie, napr.  $\nu_R = 2,0 \cdot 10^{18} \text{ sec}^{-1}$ , pre  $Z = 30$  a  $n = 1$ ,  $k = 2$ . Pri zaujímaní polôh elektrónmi vo vnútornom elektrónovom obale, emituje sa žiarenie Röntgenovo. Na disociáciu elektrónového obalu musia byť absorbované fotóny röntgenovho žiarenia.

Analogicky môžeme ponímať pomery pri asociácii protónu a neutrónu, v tomto prípade však nemôžeme predpokladať Coulombovské sily. Vzdialenosť viažúcich sa častíc v polohe minima energie je tu značne menšia, rádu  $10^{-13}$  cm, čomu zodpovedá i väčšia uvoľnená väzbová energia.

Vznik *deuterónu*, asociáciou protónu a neutrónu, môžeme - analogicky k (9) - vystihnúť ako exoenergetickú jadrovú reakciu



v tomto prípade môžeme vyžiarenú väzbovú energiu  $h\nu_D$  určiť iným spôsobom. Vzhľadom na možnosť merania hmôt (protónu  $m_H$ , neutrónu  $m_n$  a deuterónu  $m_D$ ) a pretože  $m_H + m_n > m_D$ , zodpovedá energia vyžiareného fotónu  $h\nu_D$ , ekvivalentu úbytku hmoty, podľa relativistickej súvislosti hmoty a energie, teda

$$h\nu_D = [(m_H + m_n) - m_D] c^2.$$

1) Horné indexy sú hmotové, dolné udávajú náboj, kladný (+), záporný (-).

2) Pozri: R o z h l e d y m . - f . č. 4, str. 169.

Tak určená frekvencia väzbového (jadrového) fotónu je  $\nu_D = 5,3 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1}$ , ktorá fotón určuje do oboru  $\gamma$ -žiarenia.

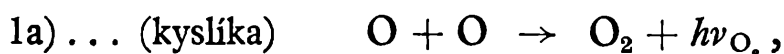
Existencia iných atómových jadier dokazuje, že asociácie protónov a neutrónov môžu pokračovať, pričom sa uvoľňujú  $\gamma$ -kvantá ešte väčšej energie.

Pri vzniku hélia ( ${}^4_2\text{He}$ ), zo dvoch protónov a dvoch neutrónov, pripadá na jednu časticu jadra  $\gamma$ -kvantum frekvencie  $1,74 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ . U prvkov s poriadkovým číslom  $Z = 18 - 50$ , pripadá na jednu časticu jadra (nukleón)  $\gamma$ -kvantum frekvencie až  $2,08 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ .

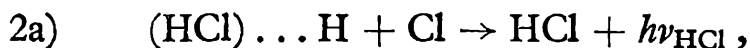
Pri vzniku atómových jadier uvoľňuje sa najväčšia energia; sú preto atómové jadrá najpevnejšie útvary. Na ich zmenu sú potrebné väčšie energie, ako je väzbová energia, pripadajúca na jeden nukleón. Pri tvorbe atómov - neutralizácii jadier elektrónovými obalmi - sú už väzbové energie menšie, sú preto atómy stabilnými útvarmi v podmienkach menšej hustoty energie.

Po vzniku atómov, nie je uzavrená možnosť tvorby ďalších asociácií; zväčšuje sa však počet rôznych možností. Všimnime si ako pozoruhodné asociácie vo dvoch prípadoch: 1. vznik väzieb rovnakých atómov; 2. väzby odlišných atómov. Pritom ešte rozlíšme: a) tvorbu dvojíc atómov, ktoré sú medzistavom na ceste k väčším asociáciám - ako dvojatómové molekuly; b) vytvorenie molekuly nie je medzistavom pri pokračujúcich asociáciách; c) pokračujúce väzby rovnakých molekúl.

Ako chemické väzby označujeme prípady 1a) a 2a), na pr. vznik dvojatómových molekúl



prícom z reakčného tepla pre grammolekulu, prepočítaného na jednu molekulu, vychádza  $\nu_{\text{O}_2} = 6,22 \cdot 10^{14}$  (kmitočet zodpovedá modrej farbe);



prícom analogicky vyjde  $\nu_{\text{HCl}} = 1,08 \cdot 10^{15}$ .

Neoznačujeme ako chemické väzby prípady 1b) a 2c), na pr. pri vzniku kvapalného, resp. pevného kovu sú asociáciami uvoľnené energie označované ako kondenzačné, resp. kryštalizačné skupenské teplá; rovnako po vytvorení dvojatómových - alebo zložitejších - molekúl, sú ďalšie asociácie molekúl označované ako kondenzácie, resp. kryštalizácie. Molekuly vytvárajú mriežky len v takých prípadoch, kedy sú väzbové energie jednotlivých molekúl väčšie, ako väzbové energie medzi molekulami.

Pri väzbách častíc je dôležitá ich voľná energia, t. j. energia, ktorá sa v daných podmienkach môže uvoľniť, resp. zmeniť na inú formu energie. Prítomnosť rozličných častíc a ich asociácií v heterogénnej sústave, pri ich styku môže voľnú energiu pozmeniť, čím sa vytvárajú podmienky alebo ďalšieho ich spájania, alebo rozpájania. Katalytické pôsobenie je vždy tohto druhu. Inokedy zas vzbudenie častíc do stavu väčšej energie je podmienkou vytvárania sa ďalších spojení. Takého druhu sú endotermické deje.

V heterogénnych sústavách sú preto pomery, v súvislosti s vytváraním sa stavu najmenej voľnej energie, ešte komplikovanejšie. Tu vznikajú rozličné stykové

zjavy: povrchové, súvisiace s povrchovou energiou, sídliacou na stykajúcich sa plochách rôznych sústav; prenikové, pri tvorení pravých roztokov, koloidných roztokov, oklúzie plynov v pevných mriežkach, alebo odparovania a sublimácie.

Neprehľadné množstvo väzbových možností končí zložitými organickými asociáciami, makromolekulami a ich tkáňami. Proti asociáciám anorganickým sú tu pomery komplikovanejšie tým, že už v jednotlivých molekulách vystupujú väzby rôznych energií. Také útvary ovšem ku svojej rovnovážnej existencii vyžadujú ustálené energetické pomery, ktoré nepripúšťajú tak veľké výkyvy, ako pevnejšie sústavy anorganické. Každá vytvorená väzba mala v zápätí emisiu fotónu väzbovej energie, naopak, absorpciou energie väzby - podobne ako u molekúl, neviazaných do vyšších asociácií - u väzbove heterogénnych sústav, citlivejšie môže sa dostaviť disociácia, resp. pretrhnutie niektorej väzby. Pritom fotóny väzbových energií môžu vznikáť i z kvánt väčšej energie Comptonovým (1923) rozptylom, pri interakcii žiarení s voľne viazanými elektrónmi tkáni.

V symfónii väzieb, ktorými je tvorená rozmanitosť sveta je súlad, kým nie sú rušené pomery ustálených hustôt energie, prítomnosťou žiarení, ktoré značia nebezpečné projektily energie, schopné lokálnymi absorpciami rušiť väzby a tým i stavbu najrozmanitejších zložitých asociácií. Energia spomenutých projektilov energie len pri vzájomných interakciách s hmotnými prostrediami degraduje a inak sa zachováva i pri celkových priemerne malých hustotách energie v priestore. Tým práve vyniká ich zákerná nebezpečnosť. Projektily energie žiarení tak hmotových ako i vlnových sú veľmi nebezpečné a hlavne sú nebezpečné všetky zdroje žiarení, a na prvom mieste nukleárne explózie.

Ako dochádza k nukleárnym explóziám? Na ceste vytvárania sústav vždy nižšej a nižšej energie, vytvorila sama príroda výnimku u posledných prvkov periodickej sústavy. Jadrá tých prvkov sú preto predotované energiou, a sú charakterizované menšou väzbovou energiou, pripadajúcou na jednu časticu jadra. Ak sa preto také, energiou presýtené jadro rozštepí, vznikajú úlomky, v ktorých sa nukleóny viažu pevnejšie a prebytočná energia sa uvoľňuje. U izotópu uránu hmoty 235 na rozštiepenie jadra stačí energia, ktorá sa uvoľní uviaznutím neutrónu (neveľkej rýchlosti) a tým aktivuje jadro. Pretože pri rozštiepení jadra vznikajú i ďalšie neutróny, v prípade čistého izotópu 235 U, štiepanie lavínovite pokračuje, a uvoľňuje sa obrovská energia. Proces prebieha ako explózia, vytvorená rozpínajúcim sa plynom úlomkov, ďalej radioaktívne sa rozpadajúcich, pričom ich rýchlosť je taká, že svojimi nárazmi spôsobuje tlak niekoľko desiatíc atmosfér a zodpovedá jej teplota niekoľko miliónov stupňov Celsia. V takých podmienkach energie, sú možné ďalšie asociácie, ako napr. asociácie vodíkových jadier na jadrá héliové (vodíková bomba), pri ktorých sa uvoľňujú energie ešte väčšej hustoty a to prevažne vo forme fotónov  $\gamma$ -žiarenia.

Pri nukleárnom výbuchu ide o explozívne uvoľnenie energie vo forme žiarení hmotových i vlnových, ktoré uvádzajú hmotné sústavy vo svojom okolí do stavu značných disociácií, tvorby izotópov, prípadne jadrových zmien. No nie len okolie je tu zasiahnuté, pretože ako sprievodný zjav vznikajú radioizotópy, obzvlášť nebezpečné, ak majú dlhý polčas, aktívna voda a prenikavé  $\gamma$ -kvantá. Zmeny, ktoré vo väzbách zapríčinia pohltené kvantá žiarení, obzvlášť v zložitých asociáciách

organických, prebiehajú nevratne, tým sa účinky i malých dávok žiarení sčítajú a často sa prejavia až po dlhom čase. V tom väzí najväčšia zákernosť dôsledkov nukleárnych explózií. Aktívna voda - absorpciou žiarenia čiastočne disociovaná na atómy a ióny vodíka a kyslíka, ióny hydroxyly, s obsahom peroxydu vodíka - s dažďom padá na zem, zrážajúc ešte i radioaktívny prach, a tým nebezpečie neprirodzeného explozívneho uvoľnenia energie, prenáša do ďalekých končín od nukleárneho výbuchu. Do organizmov dostáva sa aktívna voda i niektoré radioizotópy. Aktívna voda, veľmi ovplyvňuje látkovú výmenu buniek a prítomné žiariče môžu spôsobiť také disociácie, ktoré nakoniec končia v katastrofálnych dôsledkoch: leukémie,<sup>3)</sup> rakoviny, sarkómov,<sup>4)</sup> kostných novotvarov, . . . Preto sa v poslednom čase starostlivo pozoruje zväčšujúci sa obsah radioizotopu  $^{90}_{38}\text{Sr}^*$  v rôznych organizmoch a hlavne v kostiach.

Vo svete bol prirodzený vývoj hmotných sústav so znižujúcim sa obsahom voľnej energie. Každé extrémne narušenie toho vývoja je preto nebezpečné a tým nebezpečnejšie, že rovnováhu narušujú projektily kvánt žiarenia. Hlasy, ktoré volajú po zastavení tých neprirodzených uvoľnení energie, ktorá môže prinášať len deštrukciu, sú si veľmi dobre vedomé všetkých v tomto článku krátko spomenutých možných dôsledkov účinkov žiarenia. Hmota a žiarenie tak úzko spolu súvisia, že ich rovnovážnu spoluexistenciu neslobodno narušovať!

I my voláme s plným vedomím zodpovednosti po zastavení nukleárnych explózií a veríme, že vážne hlasy, stretávajúce sa z celého sveta, nakoniec zvíťazia.



## *Co vidíme na nebi*

Jaroslav Halenka, Praha:

### **První umělá družice Země**

Den 4. října 1957, kdy byla uvedena na svou dráhu první umělá družice Země, vynikající dílo moderní sovětské vědy a techniky, bude navždy zapsán v dějinách světové vědy a celého lidstva jako počátek nové éry výzkumu prostoru. Tímto dnem počíná období přímého poznávání vlastností a dějů v meziplanetárním okolí Země, v oblastech, jejichž vzdálenost se bude stále zvětšovat.

Proč došlo k vypuštění umělé družice, jaký je její význam a jaké výsledky přinese vědě?

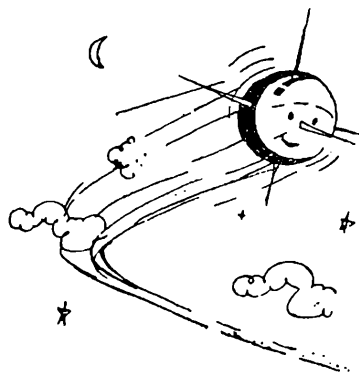
<sup>3)</sup> leukaemie = bělokrevnost, krevní choroba. Red.

<sup>4)</sup> zhoubný nádor. Red.



Umělá družice je zcela zákonitým vývojovým stupněm method vědeckého výzkumu. S její realizací bylo možno započít v době, kdy byla s úspěchem vyřešena převážná část problematiky raketových letů, které předcházely vypuštění umělé družice a jsou jeho nezbytným předpokladem. Vědecké raketové lety slouží jak známo k výzkumu vysoké atmosféry a dějů, které v ní probíhají. Získat přesné poznatky o vysoké atmosféře je jedním ze základních vědeckých úkolů, na jehož řešení se podílí řada vědních oborů, zejména geofyzikálních. Zájem o výzkum vysoké atmosféry se z vědeckých i praktických důvodů stále stupňuje.

Již v minulém století byla vyslovena hypotéza o existenci elektricky vodivé vrstvy ve vysoké atmosféře, kterou bylo možno vysvětlit denní geomagnetickou variaci. Elektricky vodivé vrstvy - ionosféra - byly později skutečně ve vysoké atmosféře objeveny a byl zjištěn i jejich důležitý vliv na šíření radiových vln na velké vzdálenosti. Z anomálního šíření zvuku na velké vzdálenosti při silných explozích byla poznána teplejší vrstva vysoké atmosféry s větším obsahem ozonu, důležitého regulujícího činitele v tepelném režimu Země a zároveň filtru pohlcujícího ultrafialové záření o vlnových délkách kratších než 2 900 Å. Ve vysoké atmosféře začínají zářit meteory, jejichž dráhy podávají informace i o hustotě ovzduší. Pohyb meteorických stop a nočních svítících mraků je důkazem rychlého proudění ve velkých výškách. Vzniká zde světlo noční oblohy, sekundární kosmické záření i systémy elektrických proudů, jejichž důsledkem jsou geomagnetické bouře. Proudění slunečních elektricky nabitých částic vyvolávají při průletu vysokou atmosférou polární záře a konečně i měsíční zatmění podávají informace o vlastnostech vysoké atmosféry.



Souhrn poznatků o vysoké atmosféře byl získán především nepřímými metodami, využitím výše uvedených dějů, na základě pozorování na zemském povrchu, výpočty a zavedením různých více nebo méně pravděpodobných předpokladů a hypotes. Bylo by ovšem velmi žádoucí zkoumat řadu fyzikálních vlastností vysoké atmosféry a dějů, které tam probíhají, pomocí pozorování konaných ve velkých výškách, čímž by byly získány přímé údaje, podobně jako je tomu při laboratorních měřeních. Proto bylo postupně započato s raketovými sondážemi vysoké atmosféry raketami nesoucími měřicí přístroje. V poválečné době bylo dosaženo značných úspěchů, neboť byly s úspěchem vyřešeny technické otázky souvisící s řízením a určováním polohy rakety a radiovým předáváním naměřených výsledků do raketové základny. Zvláště důležité bylo zkonstruovat měřicí přístroje, které by mohly měřit požadované hodnoty ve velmi širokém rozsahu a za velmi rozmanitých fyzikálních podmínek, které při letu rakety nastávají. Je nutno uvážit, že na př. při výstupu i sestupu se hlava rakety, ve které jsou umístěny měřicí přístroje, prudce zahřeje na 200—400 °C, urychlení dosahuje řádově desetinásobku zemské tíže a raketa během letu zpravidla rotuje, po případě se při sestupu i pře-

vrací. Přitom měření musí být prováděno bez znatelného zpoždění, neboť raketa se pohybuje velkou rychlostí kolem 2 km/s a měřená veličina se může měnit velmi rychle ve zcela mimořádném rozsahu. Na př. při měření tlaku vzduchu: z počáteční hodnoty 760 mm Hg na zemském povrchu klesne tlak ve výšce 50 km na 0,7 mm Hg a ve výšce 200 km dosáhne mizivé hodnoty 0,0000003 mm Hg.

Raketové lety nemohou samozřejmě nahradit nepřímé metody výzkumu vysoké atmosféry; pouze je vhodně doplňují. Dosud mohly být raketové sondáže prováděny pro velkou složitost a nákladnost jen ojediněle a na malém počtu míst. Ještě závažnějším nedostatkem je skutečnost, že doba po kterou setrvávají rakety ve velkých výškách, na př. nad 50 km, je velmi krátká a činí nejvýše několik minut, čímž je vyloučena možnost sledování časových variací měřených hodnot. Bylo proto přistoupeno k realizaci myšlenky použít k výzkumům ve vysoké atmosféře umělé družice Země.

Princip umělé družice je velmi jednoduchý; postačí uvést na kruhovou dráhu kolem Země libovolné těleso, které pak bude trvale obíhat ve své dráze, nebude-li odporu prostředí. Praktické uskutečnění je ovšem nepoměrně složitější než dosud prováděné raketové sondáže. Především je nutno tělesu družice udělit oběžnou rychlost příslušnou zvolené kruhové dráze. Při kruhové dráze ve výšce 500 km je nutno, aby družice získala rychlost 7,6 km/s v horizontálním směru, takže oběhne Zemi za 94 minuty. Dále je nutno dosáhnout této rychlosti a směru s velkou přesností, jinak je nebezpečí, že družice vnikne do hustších vrstev atmosféry, kde by byla brzy zničena, nebo se bude příliš vzdalovat od Země, takže vlastně již nebude prostředkem výzkumu vysoké atmosféry, jejíž poslední stopy sahají do výšek kolem 1000 km. Prakticky není možno vypustit družici zcela přesným směrem a rychlostí, proto bude dráha družice mírně eliptická. I přes nepatrnou hustotu vzduchu ve výškách několika set km bude družice neustále přemáhat malý odpor prostředí, jehož brzdící účinek způsobí, že družice bude zvolna vnikat po spirálové dráze do hustších vrstev, kde se postupně rozpadne nebo vypaří.

Pro vynesení i celkem malé a lehké družice je zapotřebí vícestupňové rakety, která startuje svisle vzhůru, aby co nejdříve pronikla hustými přízemními vrstvami atmosféry. Pak se dráha rakety postupně sklání a rychlost zvyšuje. Při dosažení horizontálního směru letu v předepsané výšce se rychlost rakety zvýší na hodnotu nutné kruhové rychlosti a následuje jemné oddělení družice od posledního stupně pohonné rakety. Protože směr dráhy sovětské družice svírá s rovníkem úhel  $65^\circ$  a během její oběžné doby, která je přibližně 96 minut, se Země pootočí téměř o  $25^\circ$ , probíhá družice postupně nad různými místy zemského povrchu v pásu omezeném rovnoběžkami  $65^\circ$  s. š. a  $65^\circ$  j. š. Družice má tvar koule, což je výhodný tvar pro určování hustoty ovzduší a při průměru 58 cm zaručuje i dosti dobrou optickou viditelnost, neboť jasnost družice je kolem šesté hvězdné velikosti. Odpor prostředí nezávisí na orientaci družice v prostoru při její možné rotaci kolem vlastní osy nebo převrácení. Z konstrukčního hlediska je kulový tvar výhodný vzhledem k maximálnímu objemu při minimálním průřezu a povrchu.

Jaké vědecké výsledky můžeme očekávat od výzkumu prováděného ve vysoké atmosféře umělými družicemi?

Především je možné z přesného sledování dráhy družice získat informace

o hustotě ovzduší, ve kterém se družice pohybuje. Při značně přesném určování dráhy lze řešit geodetické problémy, jako je přesnější určení tvaru zemského tělesa a navázání kartografických sítí mezi kontinenty. Ale zejména budou první družicí získány zkušenosti a potřebné údaje pro konstrukci a provoz družic dalších.

V Mezinárodním geofyzikálním roku bude provedeno rozsáhlé systematické a dobře koordinované vypouštění sondážních raket na mnoha místech zemského povrchu i v geofyzikálně důležitých oblastech kolem rovníku a v zonách polárních září. Byla doporučena řada výzkumných úkolů, k jejichž řešení je žádoucí získat přímé údaje raketovými sondážemi, a to: sluneční záření, zejména krátkých vlnových délek a tvrdé sluneční Roentgenovo záření, ionty, atomy a molekuly v atmosféře, atmosférický ozon, atmosférický tlak, teplota a proudění, chemické složení vzduchu, hustota elektrického náboje v ionosféře, světlo noční oblohy, mikrometeorology, kosmické záření, geomagnetické pole, polární záře. Za předpokladu, že se úspěšně podaří vyvinout měřicí přístroje schopné dlouhodobého provozu v umělých družicích, je zřejmé, že bude možno přispět podstatnou měrou k výzkumu vysoké atmosféry, a to téměř v celé šíři výzkumné problematiky navržené pro raketové sondáže v rámci Mezinárodního geofyzikálního roku. Dlouhá, pravděpodobně mnoho týdnů trvající životnost družic ve výškách několika set km umožní sledovat časové variace kosmického záření a slunečního záření v celém jeho rozsahu i jim odpovídající změny ve vysoké atmosféře. Kromě toho, při vhodně zvolené dráze družice a její velké rychlosti bude během dne získána řada spojitých měření, provedených v malém časovém odstupu na mnoha profilech sahajících od severní až k jižní zoně polárních září, jejichž výsledky budou charakterisovat geofyzikální děje v celosvětovém měřítku, v souladu s požadavky Mezinárodního geofyzikálního roku.

Mimo obor geofyzikálních výzkumů je umělá družice i důležitým přípravným krokem pro realizaci větších družic, které budou sloužit jako velké trvalé laboratoře, televizní retranslační stanice a základny meziplanetárních letů.

## Meteorické roje v letošním roce

Pro astronoma, zabývajícího se meteorickou astronomií, jsou dny, v nichž je očekávána činnost meteorických rojů, dobou zvýšeného pozorování. I při sledování meteorů pouhým okem můžeme systematickým pozorováním dosáhnout výsledků, které mají jistou vědeckou cenu. Právě to, že zde není zapotřebí nákladných a složitých přístrojů, činí z meteorické astronomie obor, který je značně oblíben u astronomů-amatérů. Poněvadž víme, že i mezi naší mládeží je dosti zájemců o pozorování meteorů, budeme v naší rubrice pravidelně upozorňovat na předpokládanou činnost meteorických rojů a budeme přinášet i nové poznatky a zajímavosti z oboru meteorické astronomie. Pro omezený rozsah naší rubriky nemůžeme podávat podrobné návody k pozorování. Ty nalezne vážnější zájemce zcela podrobně na př. v knize Dr M. Plavce „M e t e o r i c k é r o j e“. Naším cílem bude krátce upozornit na zjevy, které mohou i naši mladí čtenáři s úspěchem pozorovat a uvítáme i jejich další podněty a návrhy.

Začínáme rojem, který se objevuje každoročně počátkem roku v době od 2. do 4. ledna. Země v této době prochází meteorickým rojem Q u a d-

rantid, což se projevuje nápadným zvětšením počtu „padajících hvězd“. Zatím co ve dnech, kdy není v činnosti žádný meteorický roj, spatří jeden pozorovatel 5 až 7 meteorů za hodinu, stoupne jejich počet v době maxima Quadrantid na 30 až 40 za hod.

Každý meteorický roj odvozuje své jméno od souhvězdí, z něhož zdánlivě jeho meteory vyletují. Dráhy meteorů, které jsou v prostoru rovnoběžné, se totiž vlivem perspektivy pozemskému pozorovateli protínají v bodě, který se nazývá radiant. Náš roj má jméno podle souhvězdí Quadrans muralis (zadní kvadrant) - toto souhvězdí se již v nových atlasech hvězdného nebe neuvádí; pouze starší mapy mají je zakresleno na rozhraní souhvězdí Boota a Draka.

Meteorický roj Quadrantid má velmi výrazné ostré maximum. Nastává ve dnech kolem 3. ledna a často i během jediné noci lze pozorovat zvýšení činnosti roje na maximum a opětný pokles. To ukazuje na poměrně úzký pás meteorů, kterým Země projde za několik hodin. Zajímavé je zjištění japonských astronomů Hirose a Tomity, kteří z přesných fotografických záznamů drah Quadrantid vypočetli, že meteory roje jsou v perihelu nakupeny blízko sebe, ale v afelu se jejich dráhy značně rozcházejí a roj tím tvoří jakýsi vějíř. Země prochází rojem v blízkosti jeho perihelu a protíná úzký svazek drah.

V afelu, kde jsou dráhy meteorů značně rozptýleny, prochází rojem dráha Jupitera, největší planety sluneční soustavy. Jupiter svou velkou hmotou působí poruchy v oběhu těles ve sluneční soustavě (na př. komet, planetek, meteorů) i při pouhém přiblížení se k těmto tělesům. Tyto poruchy se u meteorických rojů často projevují změnou doby činnosti, neboť Jupiter může měnit jejich dráhy tak, že data průchodů Země rojem se postupně posunují. Avšak u Quadrantid, ačkoliv Jupiter rojem přímo prochází, žádná změna pozorována nebyla. Autor tohoto článku pak vypočetl, že i to je v souladu s teorií. V tomto případě je stálost doby maxima způsobena především velkým sklonem (kol  $70^\circ$ ) dráhy roje k dráze Jupitera.

Naše vědomosti o Quadrantidách jsou v poměru k znalostem jiných rojů dosti kusé. Je to jistě způsobeno jednak krátkou dobou činnosti roje, v níž nemusí být právě příhodné povětrnostní podmínky k pozorování a také datem činnosti, které spadá do doby, kdy je noční pozorování obtížné a nepohodlné. Právě proto je zde možnost zajímavého pozorování i pro amatéry, neboť jak zvýšená činnost, tak i případný pokles činnosti má pro poznání roje velký význam. L. S.



## *Různé - recenze*

### **K šedesátým narozeninám akademika V. Jarníka**

Dne 22. prosince 1957 dovrší akademik Vojtěch Jarník, profesor matematiky na Karlově univerzitě, 60 let svého života. Tato událost rozčeří hladinu života na fakultě matematicko-fyzikální i na univerzitě a bude mít ohlas i v širší obci mate-

matické. Bude signálem k tomu, abychom se pozastavili ve shonu všedního života a zamysleli se trochu nad životem a prací našeho jubilanta.

Poznal jsem akademika V. Jarníka v roce 1949, kdy jsem vstoupil jako student na přírodovědeckou fakultu Karlovy university, abych studoval matematiku a fyziku. Od té doby jsem se s ním stýkal téměř denně. Měl jsem mnoho příležitostí, abych poznal našeho profesora jako vzácného pedagoga a vychovatele nové matematické generace.

Jarníkovo nadání se projevilo již za jeho studií na Karlově universitě, kde byl v letech 1915 až 1919 posluchačem matematiky a fyziky. V prosinci roku 1919 vykonal státní zkoušku z fyziky a v květnu následujícího roku z matematiky, obě zkoušky s výborným prospěchem. Dne 1. března 1921 dosáhl doktorátu přírodních věd, složiv všechny přísné zkoušky s vyznamenáním.

Učitelskou činnost zahájil akademik Jarník vlastně již 1. října 1919, tehdy jako asistent matematiky na Vysoké škole technické v Brně, kde působil do září 1921. Od 1. října 1921 byl asistentem matematického semináře university Karlovy. Zde se habilitoval dne 19. prosince 1925 pro matematiku. Dne 14. března 1929 byl jmenován mimořádným profesorem a s účinností od 1. července 1935 byl jmenován řádným profesorem matematiky na Karlově universitě. Tato dlouhá řada let učitelské činnosti profesora Jarníka se projevuje jak ve vybroušenosti jeho přednášek, tak i ve výsledcích jeho pedagogické činnosti.

Profesor Jarník je vědec světového jména. Je členem několika zahraničních vědeckých společností a řada matematiků polských, sovětských, anglických a jiných navazuje na jeho vědecké práce. Za řešení obtížných problémů z teorie čísel mu byla roku 1952 udělena státní cena a v listopadu téhož roku byl jmenován akademikem v tehdy právě založené Československé akademii věd.

Těžištěm pedagogické práce universitního profesora jsou především jeho přednášky. Prof. Jarník patří mezi ty profesory, kteří sami pro svůj obor zapálení, ovlivňují i své posluchače a získávají je pro hlubší studium svého oboru. Jeho přednášky vynikají dokonalou přípravou, logickou skloubeností a jasným přednesem. Látka je vždy zpracována tak, aby byla srozumitelná posluchačům, pro které je určena. Profesor Jarník svými přednáškami dovede posluchače upoutat, takže si nemůže stěžovat ani na nedostatek zájmu o své přednášky, ani na nepozornost posluchačů.

Akademik Jarník byl si vždy vědom toho, že studenti musí dostávat do rukou studijní pomůcky, které by jim pomohly při studiu. Tomuto účelu sloužila skripta přednášek, v nichž si studenti mohli slyšené slovo znovu a znovu připomínat. Nezůstalo však jen při skriptech přednášek. Profesor Jarník napsal řadu výborných vysokoškolských učebnic. Zmíním se o nejdůležitějších z nich.

V několika vydáních vyšly knihy: „Úvod do počtu diferenciálního“ a „Úvod do počtu integrálního“. Pokračováním těchto dvou učebnic jsou další dvě knihy: „Diferenciální počet“ a „Integrální počet“. Nezmiňuji se o ostatních jubilantových vědeckých pracích, jejichž počet překročil stovku; to by přesahovalo rámec této vzpomínky na akademika Jarníka jako pedagoga.

Profesor Jarník je zkušeným vychovatelem mladé matematické generace. Přejeme si všichni, aby ještě dlouhá léta mohl pokračovati ve své úspěšné činnosti

pedagogické i vědecké. Proto jménem celé mladé generace matematické mu přeji, aby svou další dlouholetou činností vychoval našemu státu ještě více matematiků, kteří by šli úspěšně v jeho šlépějích.

Vladimír Petrův

## K 125. výročí narozenin Williama Crookse

Když v roce 1895 Röntgen objevil paprsky, po něm nazvané Röntgenovy, byl mu tento objev vlastně umožněn výsledky dřívějších prací badatelů. Již delší dobu před Röntgenovým objevem bylo známo, že výboj elektrického proudu o vysokém napětí ve zředěných plynech je provázen zajímavými zjevy, avšak teprve Hittorf a Crookes se zasloužili o jejich vysvětlení.

William Crookes<sup>1)</sup> se narodil 17. července 1832 v Londýně. Vystudoval chemii a vyučoval v koleji v Chesteru<sup>2)</sup>. V roce 1861 objevil spektrální analysou v kalu olověných komor prvek thalium. Povzbuzen poznatky Hittorfa o elektrických výbojích ve zředěných plynech, dokázal Crookes v trubici s přívody kladného proudu k anodě a záporného ke katodě, vyčerpané na 0,01 atmosféry, lineární šíření katodových paprsků tím, že je zastínil hliníkovým křížem. Sklo *C r o o k e s o v y t r u b i c e*, zastíněné křížem, nefluoreskovalo světlem zeleně jako sklo přímo ozářené katodovými paprsky. Ohybem katodových paprsků v magnetickém poli dokázal jejich hmotnou podstatu, že jsou to elektricky nabitě hmotné částice. Maxwellem předvídaný tlak světla dokázal v r. 1874 *r a d i o m e t r e m*, t. j. lehkým větrníčkem se slídovými lopatkami, po jedné straně černými, který se tlakem světla otáčel.

Roku 1900 isoloval Crookes z přírodního uranu tak zv. *u r a n X* o zvýšené zářivosti a vynalezl *s p i n t h a r i s k o p* k počítání alfa částic vymrštěvaných z uranu. Crookes vysvětlil zjev „*z á ř i v ý c h h m o t*“, jenž přičítal tak zv. „čtvrtému agregátu hmoty“. V tomto směru nemělo však jeho bádání úspěch, právě tak jako ve spiritismu, jemuž se věnoval na konci svého jinak úspěšného života. Crookes byl vynikajícím chemikem i fysikem, jedním z těch průkopníků fyzikální chemie, jež později „zářivé hmoty“ vysvětlila radioaktivitou a atomovou teorií. (URANIA 6-1957.)

*Komurka*

## Deset let od smrti Max Plancka

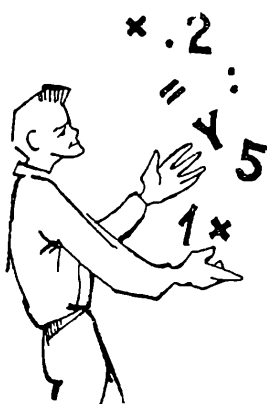
Max Planck se narodil 23. dubna 1858 v Kielu. Vystudoval v Mnichově a v Berlíně, kde v 21 letech dosáhl hodnosti doktora filosofie. Stal se pak docentem na universitě v Mnichově, později působil jako profesor fyziky v Kielu a v Berlíně. Tam také při studiu černého záření vyslovil domněnku, že záření neprobíhá kontinuálně, nýbrž diskontinuálně, ale v tak velkém počtu nepatrných kvan-

<sup>1)</sup> Čti: Viljem Kruks.

<sup>2)</sup> Čti: Čestru.

světelných, že budí dojem spojitosti. Touto kvantovou teorií způsobil Max Planck na začátku tohoto století převrat v dosavadním nazírání na podstatu světla a byl za to poctěn Nobelovou cenou za fyziku. Planck má především zásluhu o to, že kvantovou teorií překlenul rozpory mezi dosavadními názory o vlnění, jakožto podstatě světla a atomistikou, takže je právem považována za jeden z pilířů moderní fyziky. Planck shodně s Einsteinem uznal rychlost světla za absolutní veličinu a stanovil z černého záření hodnotu elementárního kvanta na  $6,62 \cdot 10^{-27}$  ergsek a rozdíly v energii vysvětlil absorbováním nebo vysíláním kvant, fotonů, které lze považovat za zhuštění energie korpuskulární povahy.

Max Planck zemřel 4. října 1947 ve věku téměř 90 roků. Dožil se v posledních letech svého života neobyčejného rozvoje fyziky, k němuž sám tak vydatně přispěl. (Podle Wissenschaft 9/1957.) *Ko. m. r. k. a*



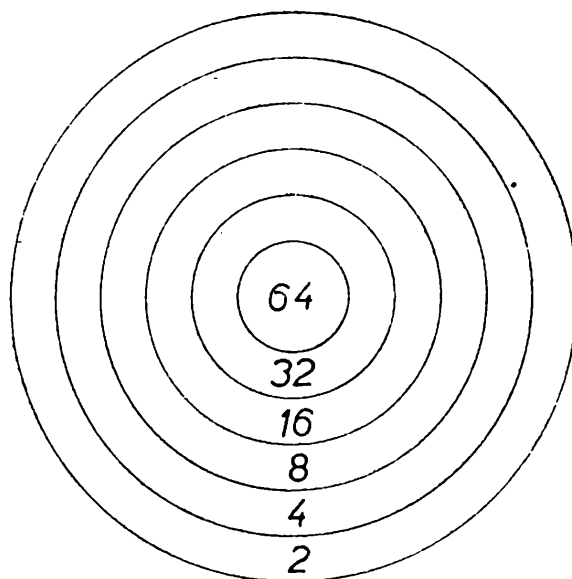
## *Matematické zábavy*

Ve škole sřířeli ze vzduchovky do terče, který měl jednotlivá mezikruží obodovaná tak, jak ukazuje obrázek. Jeden žák - řekněme, že se jmenoval Trefný - získal 100 bodů při pěti zásahích. Za nějaký čas však získal 100 bodů již jen při čtyřech zásahích a sliboval, že jistě docílí 100 bodů na pouhé tři zásahy. Mohli byste říci, jaké byly zásahy v jednotlivých případech?

S. H.

*Řešení:*

- a)  $1.64 + 2.16 + 2.2;$   
 $1.64 + 1.16 + 2.8 + 1.4;$   
 $2.32 + 2.16 + 1.4;$   
 $3.32 + 2.2.$
- b)  $3.32 + 1.4;$   
 $1.64 + 1.32 + 2.2.$
- c)  $1.64 + 1.32 + 1.4.$





## Řešení úloh

18. Do daného čtverce  $ABCD$  vepište rovnostranný trojúhelník  $AXY$  (vrchol  $X$  nechť leží uvnitř strany  $BC$  a vrchol  $Y$  uvnitř strany  $CD$ ). Úlohu řešte početně i graficky. J. Sedláček

Řešil Jan Zitko, XIB, JSS v Chrudimi:

Z textu úlohy vyplývá:  $AX = AY = XY$ . Stranu čtverce označme  $a$ . Platí  $\triangle ABX \cong \triangle ADY$  (Ssu), tedy  $BX = DY$ ,  $CX = CY$ ; označme dále  $BX = DY = x$ , potom  $CX = CY = a - x$ ,

$$\text{přítom } x > 0, a - x > 0 \text{ neboli } x < a. \quad (1)$$

Nebude-li číslo  $x$  splňovat vztahy (1), nebude to řešení úlohy. Označíme-li ještě stranu  $AX = s$ , potom platí tyto vztahy:

$$s^2 = a^2 + x^2$$

$$s^2 = 2(a - x)^2.$$

Úpravou dostáváme rovnici  $x^2 - 4ax + a^2 = 0$  s diskriminantem  $D = 12a^2 > 0$ . Její kořeny jsou  $x_1 = 2a + a\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 2a - a\sqrt{3}$ . Kořen  $x_1$  nevyhovuje naší úloze, protože  $a - x_1 < 0$ .

Závěr:  $BX = DY = 2a - a\sqrt{3}$ ,  $CX = CY = a\sqrt{3} - a$ .

Grafické řešení plyne ze souměrnosti čtverce i rovnostranného trojúhelníka podle úhlopříčky  $AC$ . Úhel  $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = 30^\circ$ .

19. Zboží bylo baleno do papírových krabic, které měly tvar kvádrů s určitými rozměry. Později se začalo užívat jiného typu krabic, jejichž jeden rozměr byl o  $p$  % větší než původně, kdežto každý ze zbývajících rozměrů byl o  $p$  % menší než příslušný rozměr původní krabice. Rozhodněte, zda se objem krabice zvětšil nebo zmenšil. Jaká byla spotřeba papíru na jednu krabici ve srovnání s původním stavem? J. Sedláček

Řešil Jan Kořenovský, Nový Jičín:

Rozměry původního kvádrů označme  $a, b, c$ . Rozměry nového kvádrů jsou pak  $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ,  $b \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ ,  $c \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ . Objem  $V$  původní krabice tedy byl  $V = abc$ . Pro jednoduchost označíme výraz  $\frac{p}{100} = x$ , kde  $0 < x < 1$ . Objem



nové krabice pak byl  $V_1 = abc(1+x) \cdot (1-x) \cdot (1-x) = abc \cdot (1-x^2) \cdot (1-x) = abc \cdot (x^3 - x^2 - x + 1)$ . Výraz  $x^3 - x^2 - x$  je záporný, neboť pro  $x < 1$  je  $x^3 < x^2 < x$  a tedy  $x^3 - x^2 - x < 0$ , čili výraz  $(x^3 - x^2 - x + 1)$  je menší než 1. Objem bedny se proto zmenšil.

Povrch původní bedny je  $P = 2(ab + ac + bc)$ , povrch nové bedny je  $P_1 = 2[ab(1-x^2) + ac(1-x^2) + bc(1-x)^2]$ . Je zřejmé, že rozměr každé stěny se zmenšil, neboť čísla  $(1-x)^2$ ,  $(1-x^2)$  jsou vesměs menší než 1. Spotřeba papíru na jednu krabici byla tedy menší.

20. Z definice středové kuželosečky (elipsy nebo hyperboly) odvoďte nejprve větu: „Kružnice, jejichž průměrem jsou ohniskové průvodiče bodů středové kuželosečky, dotýkají se vrcholové kružnice, t. j. kružnice opsané kolem středu kuželosečky poloměrem hlavní poloosy“. Na základě odvozené věty řešte bez užití kolineace úlohu: Sestrojte kuželosečku, která jde bodem  $M$ , dotýká se přímek  $p$ ,  $q$  a má ohnisko  $F$ . (Při řešení použijte výsledků z článků S. Horáka z 1. a 2. čísla.)

O. Setzer

Řešil Bohdan Zelinka, XIB, 1. JŠŠ v Liberci:

a) D ů k a z v ě t y. Zavedeme obvyklé označení: střed kuželosečky  $S$ , ohniska  $F_1, F_2$ , délka hlavní poloosy  $a$ . Na kuželosečce zvolíme libovolný bod  $M$ . Střed průvodiče  $F_1M$  označíme  $O$ .

Je zřejmé, že obrazy bodů  $M, F_2$  ve stejnolehlosti  $\left(F_1; \frac{1}{2}\right)$  jsou body  $O, S$ , obrazem průvodiče  $F_2M$  úsečka  $SO$ . Poněvadž  $|F_1M \pm F_2M| = 2a$  (+ u elipsy, – u hyperboly), platí  $|F_1O \pm SO| = a$  a tedy  $SO = |a \mp F_1O|$ . Podle textu úlohy je  $F_1O$  poloměr kružnice  $k_1$  opsané nad průměrem  $F_1M$ ,  $a$  je poloměr vrcholové kružnice  $k$ ,  $SO$  středná obou těchto kružnic. Ze známých podmínek o vnitřním (vnějším) dotyku kružnic  $k_1, k$  vyplývá již důkaz dané věty.

b) K o n s t r u k c e. Vrcholová kružnice  $k$  středové kuželosečky je množinou pat kolmic vedených ohniskem ke všem tečnám této kuželosečky. Paty kolmic vedených bodem  $F$  na přímky  $p, q$  jsou postupně  $P, Q$ . Nad průměrem  $FM$  sestrojíme kružnici  $k_1$ . Pak kružnice procházející body  $P, Q$  a dotýkající se kružnice  $k_1$  je vrcholovou kružnicí hledané kuželosečky. Sestrojíme ji podle řešení příkladu 2 v článku St. Horáka (str. 62 a 63).

V případě, že střed kružnice  $k_1$  leží na ose souměrnosti úsečky  $PQ$ , sestrojí se vrcholová kružnice  $k$  jednodušeji jako kružnice opsaná trojúhelníku  $PQR$ , kde  $R$  je dotkový bod tečny kružnice  $k_1$  rovnoběžné se spojnicí  $PQ$ .

22. Hrubý odlitek hmoty  $m$ , tvaru krychle o délce hrany  $a$ , máme přemístit do vzdálenosti  $l$  po vodorovné podlaze dílny. Přemístění můžeme provést buď smykáním po podlaze, nebo převrácením přes hranu. Materiál krychle je sice dosti pružný, zato podlaha je nepružná, takže při každém dopadu krychle přes hranu se energie spotřebuje v teplo a na každé z dalších převrácení musíme vynaložit stejnou energii jako na převrácení první. Určete, jak veliký musí být součinitel smykového tření (za pohybu), aby tažení odlitku po podlaze bylo energeticky výhodnější než jeho převrácení.

V. Šindelář

Řešila *Ľarmila Hábová, XIC, ťSS ť Strážnici:*

Převrácením přes hranu vykonáme práci, která se rovná zvednutí tělesa z původní polohy těžiště do výšky, ve které je těžiště, stojí-li krychle na hraně:

$$m \cdot g \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot a (\sqrt{2} - 1).$$

Přitom se těleso přemístí o délku  $a$ . Po dráze  $l$  tuto práci vykonáme  $\frac{l}{a}$  krát.

Celková spotřebovaná práce bude

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot a \cdot (\sqrt{2} - 1) \frac{l}{a}$$

Tření při smýkání po podlaze jest  $T = f \cdot N = f \cdot G = f \cdot mg$ . Při tažení po dráze  $l$  se vykoná práce  $f \cdot m \cdot g \cdot l$ . Tato práce musí být menší než práce spotřebovaná při převrácení:

$$f \cdot m \cdot g \cdot l < \frac{1}{2} m \cdot g \cdot l (\sqrt{2} - 1)$$

$$f < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

$$f < \frac{0,414}{2}$$

$$f < 0,207$$

Koeficient smykového tření musí být menší než 0,207, aby tažení odlitku po podlaze bylo energeticky výhodnější než jeho převrácení.

23. Budtež dány tři kvadratické rovnice

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0,$$

$$x^2 + p_3x + q_3 = 0,$$

které mají po řadě kořeny  $\alpha, \beta; \beta, \gamma; \gamma, \alpha$ . Ukažte, že platí

a)  $4q_1q_3 = q_2(p_1 - p_2 + p_3)^2$  ;

b)  $4(q_1 + q_2 + q_3) = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ . *St. Horák*

Řešila *Růžena Rachačová, ťSS, Plzeň, ul. Pionýrů.*

a) Víme, že pro kořeny normovaného tvaru kvadratických rovnic platí:

$$\alpha + \beta = -p_1 \quad (1) \qquad \alpha\beta = q_1 \quad (1')$$

$$\beta + \gamma = -p_2 \quad (2) \qquad \beta\gamma = q_2 \quad (2')$$

$$\gamma + \alpha = -p_3 \quad (3) \qquad \alpha\gamma = q_3 \quad (3')$$

$$\text{Tedy } 4q_1q_3 = 4x^2\beta\gamma = 4q_2 \cdot \alpha^2. \quad (4)$$

Odečtením vyplývá z rovnic (1), (2) :  $\alpha - \gamma = -p_1 + p_2$

k tomu (3)  $\alpha + \gamma = -p_3$ ,

po sečtení a dělení dvěma: 
$$\alpha = \frac{-p_1 + p_2 - p_3}{2}$$

Dosadíme-li za  $\alpha$  do rovnice (4), dostaneme:

$$4q_1q_3 = 4q_2 \left( \frac{-p_1 + p_2 - p_3}{2} \right)^2 = q_2 \cdot (p_1 - p_2 + p_3)^2.$$

b) Určíme dále  $\beta$  a  $\gamma$

$$(1) - (3): \beta - \gamma = -p_1 + p_3$$

$$(2): \beta + \gamma = -p_2,$$

odtud sečtením a odečtením dostaneme:

$$\beta = \frac{-p_1 + p_3 - p_2}{2}; \quad \gamma = \frac{-p_2 + p_1 - p_3}{2}$$

Po dosazení za  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  můžeme psát

$$\begin{aligned} 4(q_1 + q_2 + q_3) &= 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = (-p_1 + p_2 - p_3) \cdot (-p_1 + p_3 - p_2) + \\ &+ (-p_1 + p_3 - p_2) \cdot (-p_2 + p_1 - p_3) + (-p_1 + p_2 - p_3) \cdot (-p_2 + p_1 - p_3) = \\ &= (-p_1 + p_3 - p_2) \cdot (-p_1 + p_2 - p_3 - p_2 + p_1 - p_3) - (p_1 - p_2 + p_3) \cdot \\ &(p_1 - p_2 - p_3) = -2p_3(-p_1 + p_3 - p_2) - [(p_1 - p_2) + p_3] \cdot [(p_1 - p_2) - p_3] = \\ &= 2p_1p_3 + 2p_2p_3 - 2p_3^2 - p_1^2 + 2p_1p_2 - p_2^2 + p_3^2 = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2p_1p_2 + \\ &+ 2p_1p_3 + 2p_2p_3 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \end{aligned}$$

24. Dokážte, že pre ľubovoľný bod  $P$  v rovnobežníku  $ABCD$  má výraz  $k = \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 - \overline{PD}^2$  konštantnú hodnotu nezávislú na polohe bodu  $P$ .  
Poznámka: Označenie zvolte tak, aby bolo  $AC \geq BD$ .

Ing. Dr. J. Langr

Riešil Štefan Bračok, OSS, Liptovská Lúžna:

Bodom  $P$  vedieme kolmicu  $k$  na priamku  $AB$ . Pretože  $AB \parallel DC$  je  $k \perp DC$ .  
Priamky  $AB$  a  $DC$  nech kolmica  $k$  pretne v bodoch  $X$  a  $Y$ .

Nech:  $\sphericalangle BAD = \alpha$ , potom  $XY = AD \cdot \sin \alpha$ .

Potom:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{XP}^2, \quad \overline{PC}^2 = (AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 + (AB - DY)^2,$$

$$\overline{PD}^2 = (AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 + \overline{DY}^2, \quad \overline{PB}^2 = \overline{XP}^2 + (AB - AX)^2$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{XP}^2 + (AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 + (AB - DY)^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - [(AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 + \overline{DY}^2 + \overline{XP}^2 + (AB - AX)^2] = \overline{AX}^2 + \overline{XP}^2 + \\
& + (AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 + (AB - DY)^2 - (AD \cdot \sin \alpha - XP)^2 - \overline{DY}^2 - \overline{XP}^2 - \\
& - (AB - AX)^2 = \overline{AX}^2 + (AB - DY)^2 - \overline{DY}^2 - (AB - AX)^2 = \\
& = 2AB \cdot (AX - DY).
\end{aligned}$$

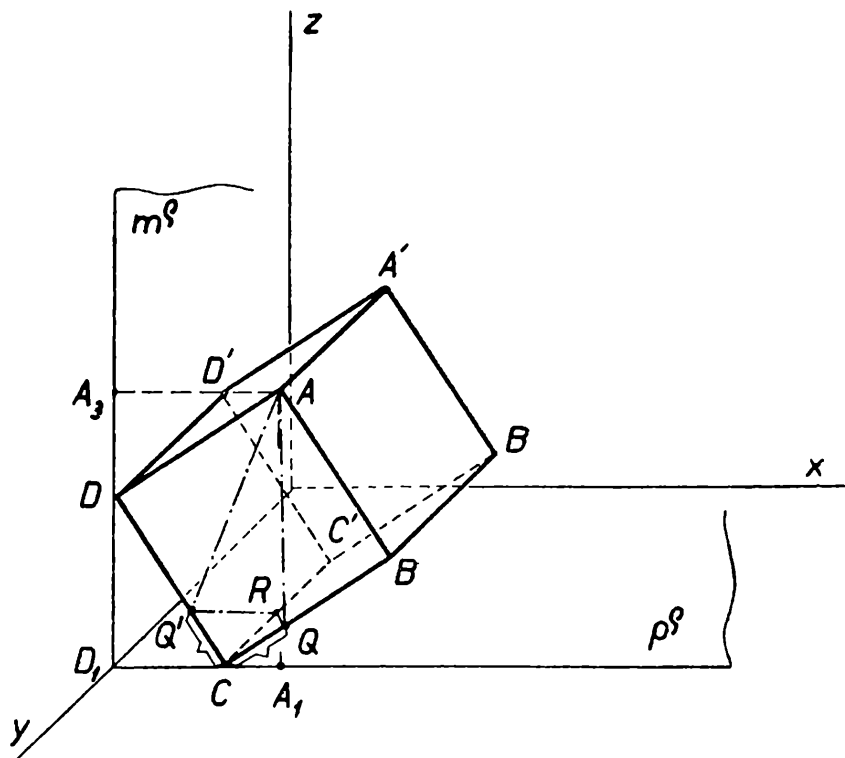
Ale:  $AX - DY = AD \cdot \cos \alpha$ , preto:  $\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 - \overline{PB}^2 =$   
 $= 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha$  je konštanta nezávislá na polohe bodu  $P$ .

Poznámka: Podľa zadania úlohy bod  $Y$  môže padnúť aj pred bod  $D$ . Potom  $DY$  berieme so záporným znamienkom.

25. Krychle  $ABCD A' B' C' D'$ , jejž stěna  $ABCD$  je rovnoběžná s nárysnou, opírá se o půdorysnu hranou  $CC'$  a o bokorysnu hranou  $DD'$ . Je dán vrchol  $A$  (3; 6; 5). Na povrchu krychle zobrazte nejkratší lomenou čáru, která spojuje bod  $A$  se středem  $R$  hrany  $CC'$ . O. Setzer

Řešila Růžena Rachačová, fSŠ, Plzeň, ul. Pionýrů:

Úlohu provedeme v kosoúhlém promítání ( $\omega = 135^\circ$ ,  $q = \frac{3}{4}$ ) a rozdělíme ji na dvě části: a) zobrazení krychle, b) sestavení nejkratší lomené čáry.



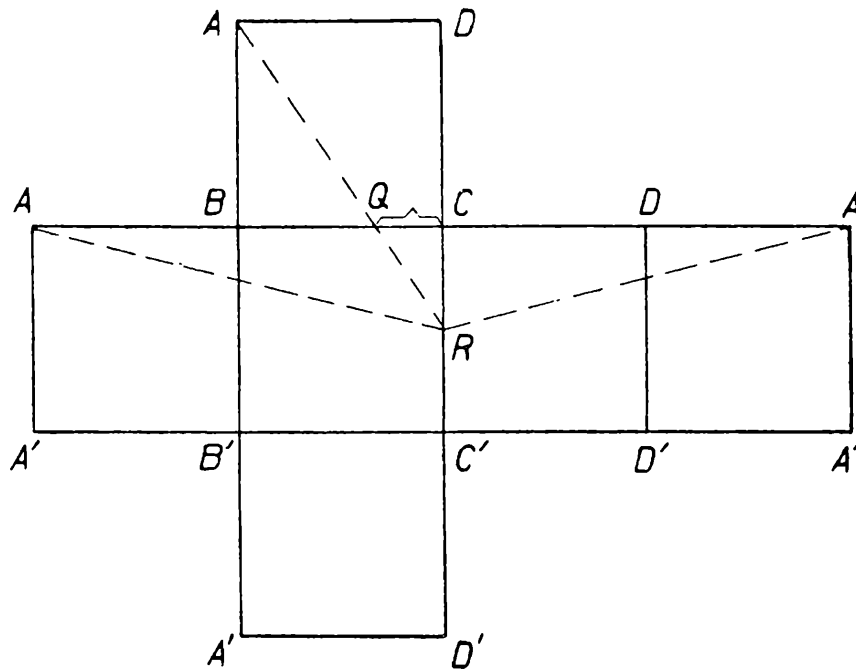
Obr. 1

a) Ze znění úlohy plyne, že vrchol  $C$  čtverce  $ABCD$  leží na první stopě  $p^0$  roviny  $\rho = (ABCD)$  a vrchol  $D$  na její třetí stopě  $m^0$ . Vyřešíme proto nejprve planimetrickou úlohu: Sestrojit čtverec, jehož vrchol je v daném bodě  $A$ , k němu

sousední vrchol  $D$  a protější vrchol  $C$  leží na dvou k sobě kolmých přímkách  $m^e$ ,  $p^e$  (obr. 1).

Protože  $AD = DC$  (strany čtverce) a úhel  $A_3AD$  se rovná úhlu  $D_1DC$  (ostré úhly s rameny navzájem kolnými), jsou pravoúhlé trojúhelníky  $DCD_1$ ,  $ADA_3$  shodné. Proto též platí  $AA_3 = D_1D$  a  $A_3D = D_1C$ . Tím je dána konstrukce vrcholů  $D$  a  $C$ . Hrany  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  krychle jsou kolmé k rovině  $\rho$  a tudíž rovnoběžné s osou souřadnic  $y$ . Snadno je ve zkrácení narýsujeme ( $CC' = \frac{3}{4}CB$ ).

b) Lomená čára spojuje vrchol  $A$  se středem  $R$  hrany  $CC'$ . Má-li být nejkratší, musí v rozvinutí přejít v úsečku.



Obr. 2

Rozvineme plášť krychle (obr. 2) a na něm zobrazíme úsečku  $AR$ . Ze tří možných spojnic je zřejmě nejkratší spojnice jdoucí bodem  $Q$  na straně  $BC$ . Z vět o úměrnosti úseček plyne:  $RC : RD = QC : AD$ , neboli

$$\frac{a}{2} : \frac{3a}{2} = QC : a. \text{ Odtud } QC = \frac{a}{3}$$

Bod  $Q$  leží tedy v jedné třetině hrany  $BC$  (blíže bodu  $C$ ).

Ze souměrnosti plyne, že lomenou čáru lze vésti i bodem  $Q'$ , kde  $CQ' = \frac{1}{3}CD$ .

26. Určete přetlak vzniklý tahem  $y$  komíně  $h = 18$  m vysokém, o průřezu  $S = 0,1$  m<sup>2</sup>, jímž při vnějším barometrickém tlaku  $p = 750$  tor a vnější teplotě  $t_1 = 27$  °C odchází plyny hořením vzniklé o teplotě  $t_2 = 97$  °C. Dáno: Hmota jedné kilogrammolekuly vzduchu  $\mu_1 = 29,0$  kg; hmota jedné kilogrammolekuly spalných plynů  $\mu_2 = 28,7$  kg; plynová konstanta pro 1 kilomol jest  $R = 8,313$

J grad<sup>-1</sup>. Pro přepočtení tlaku do soustavy MKS užíjte převodního vztahu  $1 \text{ tor} \doteq \frac{400}{3} \text{ N m}^{-2}$ . Návod: Pro řešení užíje se t. zv. stavové rovnice ideálního plynu, vyjadřující, že součin objemu  $V$  a tlaku  $p$  plynu jest úměrný absolutní teplotě  $T$  plynu; matematicky  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , kde  $m$  = hmota uvažovaného plynu,  $\mu$  = hmota jedné kilogrammolekuly téhož plynu a  $R$  = t. zv. plynová konstanta výše uvedená. Pomocí této rovnice určete hmotu  $m_1$  vzduchu, který by se nacházel v komíně (při teplotě  $t_1$  a barom. tlaku  $p = 750 \text{ tor}$ ) a dále hmotu  $m_2$  spalných plynů v komíně (při teplotě  $t_2$  a tlaku  $p$ ), načež užitím Archimedova zákona vypočtete nadlehčující sílu  $F$ . Podíl nadlehčující síly a průřezu komínu jest hledaný přetlak. E. Říman

*Řešení autorovo:* Tlak barometrický převedme do soustavy MKS (uvedeným převodním vztahem)  $p = 750 \text{ tor} = 750 \cdot \frac{400}{3} \text{ N m}^{-2} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$ .

Dané teploty, převedené na absolutní dávají  $T_1 = 273 + t_1 = 300 \text{ grad K}$ ,  $T_2 = 273 + t_2 = 370 \text{ grad K}$ .

Stavová rovnice pro  $m$  kilogramů plynu, jehož 1 kilogrammolekula má hmotu  $\mu$  kilogramů, má tvar

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

kde  $p$  = tlak,  $V$  = objem,  $T$  = absol. teplota plynu,  $R$  = plynová konstanta. Ze vztahu (1) určíme a) hmotu  $m_1$  vzduchu, který by se nacházel v komíně při teplotě  $t_1$  a barometrickém tlaku  $p = 750 \text{ tor}$ , t. j.

$$m_1 = \frac{\mu_1 pV}{RT_1} = \frac{29,0 \text{ kg} \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 1,8 \text{ m}^3}{8,313 \cdot 10^3 \cdot 300 \text{ grad K}} = \frac{18,4 \text{ kg N m}}{8,313 \text{ J}} \doteq 2,22 \text{ kg};$$

b) hmotu spalných plynů v komíně při teplotě  $t_2$  a tlaku  $p = 750 \text{ tor}$ , t. j.

$$m_2 = \frac{\mu_2 pV}{RT_2} = \frac{28,7 \text{ kg} \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 1,8 \text{ m}^3}{8,313 \cdot 10^3 \text{ J grad K}^{-1} \cdot 370 \text{ grad K}} = \frac{51,66 \text{ kg}}{30,758} \doteq 1,68 \text{ kg}.$$

*Archimedův zákon:* Spalné plyny v komíně jsou nadlehčovány silou  $F$ , která se rovná ( $G = mg$ ) váze dislokovaného vzduchu, t. j. (jelikož  $1 \text{ newton} = \text{N} = \text{kg m s}^{-2}$ )  $F = m_1 g - m_2 g = (m_1 - m_2) g = 0,54 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 5,297 \text{ N}$ .

Tlak měrný jest podle definice poměr síly a plošného obsahu, tedy  $p = \frac{F}{S}$ ,

$$\text{takže přetlak} = \frac{\text{nadlehčující síla}}{\text{průřez komínu}} = \frac{5,297 \text{ N}}{0,1 \text{ m}^2} = 52,97 \text{ N m}^{-2} = 0,397 \text{ tor, při}$$

čemž bylo použito převodního vztahu  $1 \text{ tor} = \frac{400}{3} \text{ N m}^{-2}$ , z něhož plyne

$$1 \text{ N m}^{-2} = \frac{3}{400} \text{ tor}.$$

Malé přetlaky se v praxi určují sloupcem vodním. Přepočtíme proto 1 mm vodního sloupce do soustavy MKS, což nejsnadněji provedeme užitím známého vztahu pro hydrostatický tlak kapaliny  $p = h s g$ , kde  $h$  = výška sloupce kapaliny,  $s$  = hustota kapaliny,  $g$  = gravitační zrychlení. Bude tedy, užijeme-li hodnot  $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $s = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , přetlak 1 mm vodního sloupce roven

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} = 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 9,81 \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m}^2} = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \doteq \\ \doteq 10 \text{ N m}^{-2}.$$

Proto vypočtený přetlak v komíně jest  $p = 52,97 \text{ N m}^{-2} = 5,3 \text{ mm}$  vodního sloupce.

## Seznam řešitelů úloh

(V závorce za jmény jsou čísla příkladů řešených dobře nebo jen s menší chybou. Chybně provedené příklady nejsou uvedeny.)

*Pavel Aksamit*, X. B JSS, Pardubice (1, 4, 7 až 9, 11, 13, 23). *Zbyněk Berka*, XI. JSS, Jihlava (18 až 20). *P. Štefan Bračok*, OSŠ, Liptovská Lužná, okr. Ružomberok (6, 7, 11, 15, 24). *Václav Činka*, XI. C JSS, Mladá Boleslav (1, 16, 17). *Jarmila Dostálová*, XI. A JSS, Strážnice na Moravě (11). *Jiří Dula*, XI. C JSS, Uherské Hradiště (14, 16, 17). *Jarmila Hábová*, XI. C JSS, Strážnice na Moravě (1, 3 až 7, 9 až 11, 13 až 25). *P. Jiří Hejna*, vojín, Dobruška (18). *Jan Hlavoň*, XI. JSS, Hustopeče u Brna (1 až 3, 9). *Zdeněk Hurych*, X. A JSS, Jihlava (7 až 9, 18, 20, 22). *Jarmila Javůrková*, XI. B JSS, Ústí n. L. (5). *Miloš Karhan*, X. A JSS, Rychnov n. Kněžnou (6, 7, 9). *P. Josef Kleiner*, Dobroměřice, p. Louny (11, 23). *Jan Kořenovský*, XI. JSS, Nový Jičín (18, 19). *Elka Lemingerová*, XI. A JSS, Ústí n. L.-Střekov (7). *P. Vítězslav Littmann*, Beroun III (6, 7). *Hynek Matýsek*, XI. JSS, Nový Jičín (18). *Marie Melicharová*, IX. D JSS, Hradec Králové I (1, 2, 5 až 7, 10, 11, 15, 18, 19, 23). *Jan Migl*, XI. JSS, Ústí n. L.-Střekov (5, 7 až 9). *Jaroslav Morávek*, XI. JSS, Chrudim III (14 až 19, 21 až 25). *Zdeněk Motyčka*, XI. D JSS, Gottwaldov, Zlín (3, 5, 7). *Stanislav Musil*, leš. techn. škola, Hranice (10, 13, 14, 16, 23). *Zbyněk Pacl*, XI. JSS, Ústí n. L.-Střekov (7). *Jiří Pochobradský*, XI. B JSS, Pardubice (2, 4, 14 až 17). *Jana Přistoupilová*, XI. A JSS, Roudnice n. L. (14, 18). *Růžena Rachačová*, XI. JSS, Plzeň (23, 25). *František Smékal*, XI. B JSS, Olomouc (2 až 5, 7 až 26). *Oldřich Sýkora*, X. A JSS, Rychnov n. Kněžnou (4, 7). *Ivan Škorpil*, XI. B JSS, Chrudim I (11). *Bohdan Zelinka*, XI. B JSS, Liberec (2 až 9, 11, 13, 14, 16 až 21, 23 až 26). *Jan Zitko*, XI. B JSS, Chrudim (14 až 19, 21 až 25). *P. Igor Zuzčák*, Živany, okr. Zlaté Moravce (23, 24). *Jiří Žofka*, XI. B JSS, Ústí n. L.-Střekov (5).

### Udělení cen

Redakce spolu s autory úloh přihlížela při oceňování k počtu i k jakosti správně řešených příkladů a třídě, v níž řešitel studuje. Bylo rozhodnuto odměnit knižními cenami tyto řešitele:

- A) z XI. třídy: *Jarmilu Hábovou*, Veselí na Moravě-Břestek 891,  
*Františka Smékala*, Štěpánov u Olomouce 252,  
*Bohdana Zelinku*, Liberec, Ign. Hermanna 2;  
 B) z X. třídy: *Pavla Aksamita*, Pardubice, Sladkovského 8;  
 C) z IX. třídy: *Marii Melicharovou*, Hradec Králové I, Klumparova 608;  
 D) z odb. škol: *Stanislava Musila*, Hranice, Jurikova 1062.

Dva řešitelé *Jan Zitko*, Slatiňany, okr. Chrudim čp. 211 a *Jaroslav Morávek*, Chrudim III, Čs. armády 585 se zúčastnili naší soutěže až od úlohy č. 14, a to s pěkným úspěchem, takže i oni byli odměněni.

Redakce děkuje všem z řad studentů i ostatních čtenářů, kteří zaslali řešení a doufá, že příštím rokem bude alespoň jeden řešitel také z Prahy a více ze Slovenska. Těšíme se také na účast řešitelů z odborných škol.

Ministerstvu školství a kultury i Jednotě československých matematiků a fyziků děkujeme za věnování hodnotných knih pro naše řešitele.



## *Redakce hovoří se čtenáři*

Končíme 35. ročník *Rozhledů* matematicko-fyzikálních, které jsme znovu po roční přestávce začali vydávat. S vypětím sil se nám podařilo překonat počáteční nesnáze i když jsme těžce získávali autory. Již v červnu se však zvýšil počet předplatitelů na více než pět tisíc proti 826 v lednu. Redakce i redakční rada se snaží, pokud je v jejich silách, aby zlepšovala obsah.

Znovu upozorňujeme čtenáře, aby se neobraceli na redakci s žádostmi o zaslání chybějících čísel, neboť nemáme k dispozici žádná čísla *Rozhledů* a celou distribuci provádí pouze a výhradně Poštovní nov. nová služba. Rádi konstatujeme, že se její činnost zlepšuje a žádáme, abyste nám případné nedostatky písemně hlásili. Stížnosti postupujeme příslušnému oddělení ministerstva spojů, které sjednalo již v mnoha případech nápravu. Poštovní novinová služba má ještě na skladě některá starší čísla a několik set posledních čísel. Místní pobočka Poštovní novinové služby musí Vám ovšem provést objednávku. Pražští čtenáři dostanou zbylá čísla v reprezentační prodejně Poštovní novinové služby v Praze II, Příkopy 22 (proti kinu Sevastopol).



## Matematická olympiada

Třetí trojice úloh I. kola VII. ročníku MO pro kategorie A až C. (Řešitelé MO odevzdají řešení těchto tří úloh referentu MO do konce února 1958.)

### Kategorie A.

7. V posloupnosti  $\{a_n\}$ , kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n},$$

existuje největší člen. Určete jej.

8. Buďte dány dvě k sobě kolmé roviny  $pA$ ,  $pB$ , kde  $p$  je jejich průsečnice; dále buď dáno kladné číslo  $d$ . Uvažujme úsečku  $XY = 2d$ , při čemž je  $X$  bodem poloroviny  $pA$  a  $Y$  bodem poloroviny  $pB$ .

Vyšetřte množinu středů všech úseček  $XY$ , které splňují výše uvedené požadavky.

9. V rovině je daná kružnice  $k \equiv (S, r)$  a na nej dva různé body  $A, B$ . Uvažujme o trojúhelníku  $ABC$ , kde  $C$  je bod kružnice  $k$ ; označme  $X$  průsečík výšek tohto trojúhelníka.

Co vyplní všechny body  $X$ , keď bod  $C$  prebieha všetky body kružnice  $k$  (s výnimkou bodov  $A, B$ )?

### Kategorie B.

7. Riešte sústavu rovníc

$$\frac{x + p}{y + p} = a, \quad \frac{x - p}{y - p} = b,$$

kde  $x, y$  sú neznáme a  $p$  je dané reálne číslo.

8. V rovině buďte dány dvě shodné kružnice  $k_1 \equiv (S_1, r)$ ,  $k_2 \equiv (S_2, r)$ , které se navzájem dotýkají; označme  $t$  jednu ze společných vnějších tečen těchto kružnic.

V polorovině  $tS_1$  sestrojte kružnici  $k$  tak, aby se dotýkala obou daných kružnic  $k_1, k_2$  a přímky  $t$ .

Řešení proveďte dvěma odlišnými způsoby.

9. Je dána kruhová výseč o obsahu  $P$ , kde  $P$  je dané kladné číslo. Označme  $x$  poloměr této výseče a  $\varphi$  velikost (v obloukové míře) jejího středového úhlu.

Určete čísla  $x, \varphi$  tak, aby obvod výseče byl co nejmenší. Proveďte zkoušku svého výpočtu.

*Kategorie C.*

7. Řešte rovnici

$$\frac{1}{x-p-2} - \frac{1}{x-p-3} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$$

kde  $x$  je neznámá a  $p$  je dané reálné číslo.

Proveďte zkoušku dosazením do dané rovnice a na základě toho určete všechna čísla  $p$ , pro něž daná rovnice nemá řešení.

8. V rovině buďte dány dvě soustředné kružnice  $k_1 \equiv (S, r_1)$ ,  $k_2 \equiv (S, r_2)$ , kde  $r_2 > r_1$ ; uvnitř mezikruží těmito kružnicemi určeného buď dán bod  $M$ . Dále buď dáno kladné číslo  $d$ .

Sestrojte na kružnici  $k_1$  bod  $X$  a na kružnici  $k_2$  bod  $Y$  tak, aby úsečka  $XY$  měla délku  $d$  a aby bod  $M$  ležel na této úsečce. (Při řešení lze užít otáčení.)

9. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{cases} py - 3p = 1, \\ y = \frac{5-px}{2} \end{cases}$$

kde  $x, y$  sú neznáme a  $p$  je dané reálne číslo.