

Praktická fysika

Adeněk Horák

ZDENĚK HORÁK

PRAKTICKÁ FYSIKA

SNTL

Prof. RNDr Zdeněk Horák

PRAKTICKÁ FYSIKA

PRAHA 1958

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ
TECHNICKÉ LITERATURY

Mé ženě

Kniha pojednává o měřicích přístrojích a metodách fyzikálních měření ve všech oborech fyziky. Zvláštní kapitola je věnována teorii chyb a jejich vyrovnání.

Kniha je určena pracovníkům ve výzkumu a provozních laboratořích. Může také sloužit jako pomůcka posluchačům vysokých škol.

Odborný redaktor Karel Husárek

Redakce theoretické literatury — hlavní redaktor Ing. Vlastimil Čihák

OBSAH

Z Předmluvy k I. vydání	15
Předmluva	17

Část první. Teorie fyzikálních měření

A. Fyzikální jednotky.	21
1. Měření ve fyzice.	21
2. Volba jednotek	22
3. Absolutní soustava měř	25
4. Technická soustava	31
5. Praktické jednotky	33
6. Dnešní stav řešení otázky jednotek	42
6.1. Jednotky mezinárodní	42
6.2. <i>Giorgiova</i> soustava MKSA (r)	43
6.3. Atomové definice základních jednotek	50
B. Teorie chyb.	52
7. Chyby měření.	52
8. Binomický a normální zákon četnosti	54
9. Rozložení chyb při fyzikálních měřeních	62
10. Nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny	67
11. Přesnost aritmetického průměru.	71
12. Číselné stanovení výsledku a jeho pravděpodobné chyby	76
C. Vyrovnání měření	87
13. Základy vyrovnávacího počtu.	87
13.1. Methoda nejmenších čtverců	87
13.2. Vyrovnání zprostředkujících měření.	88
13.3. Vyrovnání závislých měření	92
13.4. Vyrovnání měření různé váhy	95
14. Stanovení konstant methodou nejmenších čtverců a methodou momentovou	99
15. Methoda skupinová	106
15.1. Theoretické a praktické oprávnění skupinové metody	106
15.2. Vyrovnání lineární závislosti a úměrnosti	109
15.3. Vyrovnání mocninovým mnohočlenem.	111
15.4. Skupinové vyrovnání ekvidistantních měření.	114
16. Methody grafické	115
16.1. Grafické vyrovnání úměrnosti a lineární závislosti přímkou	115
16.2. Princip grafického vyrovnání parabolou	116
16.3. Konstrukce paraboly při ekvidistantních měřeních	118
16.4. Grafické vyrovnání parabolou v obecném případě.	122
17. Empirické fyzikální zákony	124
17.1. Methody na určení typu měřené závislosti	124
17.2. Příklady na určení stupně empirické funkce	129
17.3. Příklad na posouzení normálnosti rozložení chyb	132

Část druhá. Základní měření

D. Základní úkony.	137
18. Přehled method.	137

19. Čtení na stupnici	142
20. Optické čtecí přístroje	146
21. Měření času	151
21.1. Kontrola stopek postupnou methodou	153
21.2. Jednoduchá metoda kontroly stopek	154
21.3. Měření krátkých dob balistickým galvanoměrem (<i>Pouillet</i>)	155
21.4. Měření velmi krátkých dob methodou kondensátorovou (<i>Radakovič</i>)	158
22. Tlak a hustota vzduchu	156
22.1. Měření tlakoměrem <i>Gay-Lussacovým</i> [22,I]	160
22.2. Měření tlakoměrem <i>Fortinovým</i> [22,II]	161
22.3. Měření normálním tlakoměrem [22,III]	161
22.4. Měření variačním (staničním) tlakoměrem [22,IV]	161
23. Měření teploty	163
23.1. Kontrola základních bodů teploměru	174
23.2. Graduace rtuťového teploměru	175
23.3. Graduace thermočlánku	176
24. Praktické pokyny pro měření	177
E. Měření hmoty	180
25. Váhy a závaží	180
26. Theorie rovnoramenných vah	188
27. Základy vážení	195
28. Opravy a kontroly	201
28.1. Nerovnoramennost vah	201
28.2. Methoda dvojího vážení (<i>Gauss</i>)	204
28.3. Methody tárovací (<i>Borda, Mendělejev</i>)	204
28.4. Oprava vážení na vztlak (redukce na vakuum)	205
28.5. Kontrola závaží	208
29. Přesnost a citlivost vah	210
29.1. Křivka citlivosti vah	212
30. Postup při vážení	214
30.1. Vážení na praktikantských a lékárnických vahách [25,IV]	214
30.2. Vážení na analytických vahách nebrzděných [25,V]	217
30.3. Vážení na analytických vahách brzděných (aperiodických) [25,VI]	219
F: Měření prostoru	221
31. Délkové rozměry těles	221
31.1. Průměr válečku (drátu)	229
31.2. Tloušťka destičky (hranolu, plechu)	229
31.3. Vnitřní průměr válce — světlost trubice	230
31.4. Poloměr křivosti kulové plochy — měření sférometrem	232
31.5. Poloměr válcové plochy — měření sférometrem	234
31.6. Výstup šroubu — měření zrcátkovou methodou	237
31.7. Tloušťka tenké vrstvy	238
32. Výškový rozdíl (svislá vzdálenost)	238
32.1. Rozdíl výšek — měření kathetometrem	240
32.2. Rozdíl výšek — měření nivelačním strojem	240
32.3. Rozdíl výšek — měření barometrem	240
33. Měření úhlů	240
33.1. Měření malých úhlů zrcátkovou methodou	242
33.2. Měření úhloměrem	243
33.3. Rektifikace a citlivost libely	243
34. Plošný obsah	244
34.1. Výpočet plošného obsahu (methody nepřímé)	248
34.2. Měření planimetrem	249
35. Objem	250
35.1. Přímé methody měření objemu	252
35.2. Zjišťování objemu látky známé hustoty vážením	253
35.3. Hydrostatická methoda	253
35.4. Pyknometrická methoda	254

35.5. Kontrola pipety	255
35.6. Kalibrace byřety	256
G. Měření hustoty — Hutnost a molekulová hmota plynných látek.	257
36. Hustota (měrná hmota)	257
36.1. Přímé metody měření hustoty pevných látek a kapalin	259
36.2. Hustota pevných látek — měření hydrostatickou metodou	260
36.3. Hustota drobných tělísek (prášku) — měření pyknometrem	261
36.4. Hustota kapalin — měření pyknometrem	261
36.5. Hustota kapalin — měření ponorným tělískem	262
36.6. Hustota kapalin — měření Mohrovými vážkami	262
36.7. Kontrola areometrů	263
36.8. Hustota plynů — měření metodou pyknometrickou	263
36.9. Hustota par — měření pyknometrickou metodou (<i>Dumas</i> 1827)	264
37. Hutnost (poměrná hmota) plynů a par	265
37.1. Hutnost plynů a par — určení z hustoty	266
37.2. Hutnost par — určení výtakovou metodou (<i>V. Meyer</i> 1878)	266
37.3. Hutnost plynů — určení z doby výtoku (<i>Bunsen</i> 1857)	267
38. Molekulová hmota plynů a par	269
38.1. Molekulová hmota z měření hutnosti plynů a par	270
Část třetí. Měřicí přístroje a metody	
H. Mechanika	273
39. Doba periodických dějů	273
39.1. Doba kyvu fyzického kyvadla — určení postupnou metodou	273
39.2. Měření periody metodou omezovací	275
40. Moment setrvačnosti	276
40.1. Moment setrvačnosti stejnorodých těles — určení přímou metodou	276
40.2. Moment setrvačnosti — určení z doby kyvu	278
40.3. Moment setrvačnosti — určení z torsních kmitů	279
41. Tíhové zrychlení	280
41.1. Tíhové zrychlení — měření převratným kyvadlem	282
42. Modul pružnosti v tahu a ve smyku	284
42.1. Modul pružnosti z poměrného prodloužení drátu — určení zrcátkovou metodou	286
42.2. Modul pružnosti z průhybu tyče	288
42.3. Modul pružnosti tyče — určení z rychlosti zvuku	290
42.4. Statické měření modulu pružnosti ve smyku	292
42.5. Dynamické měření modulu pružnosti ve smyku	294
43. Koeficient restituice, vzpruživost a dynamická pružnost	295
44. Součinitel smykového tření	299
44.1. Měření kinetického součinitele tření vodorovným tribometrem	300
44.2. Měření kinetického součinitele tření sklonným tribometrem	301
45. Vazkost (viskositá)	301
45.1. Měření <i>Arrheniovým</i> a <i>Ostwaldovým</i> vazkoměrem	311
45.2. Měření dynamické vazkosti viskosimetrem <i>Ubbelohdeovým</i>	312
45.3. Měření vazkoměrem <i>Englerovým</i>	313
45.4. Absolutní měření technickým rotačním vazkoměrem	314
45.5. Měření vazkosti metodou <i>Stokesovou</i>	318
46. Povrchové napětí (kapilární konstanta)	319
46.1. Povrchové napětí — měření přímou metodou (odtrhovací)	320
46.2. Povrchové napětí — měření z kapilárního vzestupu	321
46.3. Srovnávání povrchových napětí kapkovou metodou	324
I. Akustika	325
47. Kmitočet (frekvence)	325
47.1. Kmitočet — měření chronografickou metodou	330
47.2. Rozdíl blízkých kmitočetů — určení z počtu rázů	331
47.3. Poměr kmitočetů — měření strunákem	331
47.4. Kmitočet — určení z délky vlny a rychlosti zvuku	332
48. Délka zvukové vlny	332
48.1. Délka zvukové vlny — měření resonátorem	335

48.2. Délka zvukové vlny v plynech — měření <i>Kundtovou</i> trubicí	335
48.3. Interferenční metoda měření vlnové délky	337
48.4. Délka nadzvukové vlny — měření interferometrem	337
49. Rychlost zvuku	338
49.1. Měření rychlosti zvuku známého kmitočtu v plynech a kapalinách	339
49.2. Rychlost zvuku v plynech a kapalinách měřením vlnové délky a kmitočtu	340
49.3. Rychlost zvuku v tyčích měřením kmitočtu	340
49.4. Poměr zvukových rychlostí — určení srovnáním vlnových délek	340
50. Síla zvuku	341
50.1. Měření síly zvuku <i>Rayleighovou</i> destičkou	345
50.2. Síla zvuku — měření kapacitním mikrofonem	346
51. Hladina intenzity a hlasitost	347
J. Thermika	350
52. Teplotní roztažnost pevných látek	350
52.1. Roztažnost tyčí — měření zrcátkovou metodou	354
52.2. Objemová roztažnost nádoby — měření vážením kapaliny	356
53. Roztažnost kapalin	357
53.1. Roztažnost kapalin — měření pyknometrem	358
53.2. Roztažnost kapalin — měření kapilárním dilatometrem	359
53.3. Skutečná roztažnost kapalin — měření metodou spojených trubic	361
54. Mechanický ekvivalent tepla	361
54.1. Mechanický ekvivalent tepla — měření elektrickým kalorimetrem	367
54.2. Mechanický ekvivalent tepla — měření <i>Searleovým</i> přístrojem	370
55. Specifické (měrné) teplo pevných látek a kapalin	371
55.1. Měření tepelné kapacity kalorimetru	372
55.2. Specifické teplo pevných látek — měření směšovacími kalorimetrem	373
55.3. Specifické teplo kapalin — měření kalorimetrem vodním	375
55.4. Specifické teplo kapalin — měření směšovacími kalorimetrem (thermo- forem)	376
55.5. Specifické teplo kapalin — měření elektrickým kalorimetrem	377
56. Poměr specifických tepel plynů	378
56.1. <i>Clément-Desormesova</i> metoda na měření specifických tepel plynů	379
57. Skupenské teplo	380
57.1. Skupenské teplo tání látek tajících nad teplotou místnosti	381
57.2. Skupenské teplo látek tajících pod teplotou místnosti	382
57.3. Skupenské teplo ledu	382
57.4. Skupenské teplo varu, měřené kondensací v kalorimetru	383
57.5. Skupenské teplo varu vody, měřené elektrickým kalorimetrem	384
58. Tepelná vodivost	385
58.1. Tepelná vodivost pevných izolantů	394
58.2. Tepelná vodivost sypkých látek	395
58.3. Tepelná vodivost kapalin	398
58.4. Srovnávání tepelných vodivostí kovových tyčí	398
58.5. Měření tepelné vodivosti kovů technickým přístrojem	402
59. Bod tání a tuhnutí	407
59.1. Bod tání chemicky čistých látek	408
59.2. Měření bodu tání a tuhnutí z průběhu teploty	408
59.3. Bod tuhnutí — měření po přechlazení	409
59.4. Snížení bodu mrazu roztoků — měření přístrojem <i>Beckmannovým</i>	410
60. Bod varu	411
60.1. Bod varu kapalin	412
60.2. Zvýšení bodu varu roztoků — měření <i>Beckmannovým</i> přístrojem	413
61. Vlhkost vzduchu	414
61.1. Absolutní vlhkost — měření vážením pohlcené vodní páry	417
61.2. Poměrná vlhkost — měření rosným vlhkoměrem	418
K. Elektřina a magnetismus	420
62. Schematické značky a základní vztahy	420
62.1. Schematické značky	420
62.2. Základní vztahy	420
62.3. Místkové zapojení	423
63. Potenciál (elektrostatický)	426

64. Náboj (elektrické množství)	430
64.1. Měření náboje elektrometrem	431
64.2. Měření náboje balistickým galvanoměrem	432
65. Kapacita	432
65.1. Měření kapacity balistickou methodou	434
65.2. Můstková metoda se střídavým proudem	434
65.3. Můstková metoda se stejnosměrným proudem	436
65.4. Můstková metoda s elektrometrem (<i>Lebedév</i> 1891)	437
66. Dielektrická konstanta	438
67. Proud (velikost proudu)	439
67.1. Graduace galvanoměru	450
67.2. Kalibrace ampérmetru normálním ampérmetrem	452
67.3. Kalibrace miliampérmetru normálním milivoltmetrem	453
67.4. Kontrola normálního ampérmetru coulometrem na měď	454
67.5. Kontrola ampérmetru coulometrem na vodík (nebo <i>Hofmannovým</i> přístro- jem)	455
67.6. Převodní činitel tangentové busoly	456
68. Napětí proudu	457
68.1. Měření napětí ampérmetrem (kontrola voltmetru)	461
68.2. Kalibrace voltmetru normálním voltmetrem	462
68.3. Kalibrace normálního voltmetru <i>Westonovým</i> článkem	462
69. Elektromotorická síla a svorkové napětí	463
69.1. Elektromotorická síla článku — měření kompenzační methodou (potencio- metrem)	464
70. Výkon proudu	465
71. Odpor	466
71.1. Přímá metoda	471
71.2. Substituční metoda	472
71.3. Můstková metoda (<i>Wheatstone</i>)	473
71.4. Měření kompenzační methodou (technickým můstkem)	475
71.5. Měření malých odporů dvojitým můstkem <i>Kelvinovým</i>	476
71.6. Odpor galvanoměru — měření <i>Thomsonovou</i> methodou	476
71.7. Vnitřní odpor článku (akumulátoru) — zjišťování z elektromotorické síly a svorkového napětí	477
71.8. Vnitřní odpor článku — měření můstkovou methodou (<i>Mance</i>)	478
72. Měrný odpor pevných vodičů	478
73. Teplotní součinitel odporu	479
73.1. Teplotní součinitel — měření odporu můstkovou methodou	480
74. Charakteristika vodiče	481
75. Měrná vodivost elektrolytu	484
75.1. Můstková metoda se stálou odporovou kapacitou	486
75.2. Kompenzační metoda s proměnnou odporovou kapacitou	487
76. Střední hodnoty veličin u střídavého proudu	488
77. Indukčnost (induktivita)	491
77.1. Určení indukčnosti z ohmického a zdánlivého odporu	492
77.2. Můstkové metody na srovnávání vlastních indukčností	493
78. Vzájemná indukčnost	495
78.1. Absolutní měření vzájemné indukčnosti	495
78.2. Určení vzájemné indukčnosti z vlastní indukčnosti	496
79. Anodová charakteristika diody	496
80. Charakteristiky triody	497
80.1. Určení anodové charakteristiky triody	499
80.2. Určení převodní charakteristiky triody	499
81. Strmost, vnitřní odpor a průnik triody	500
81.1. Grafické určení strmosti, vnitřního odporu a průniku	500
82. Závislost thermionické emise na teplotě	501
82.1. Měření thermionické emise wolframu a thoriovaného wolframu	503
83. Magnetický moment a magnetisace	505
83.1. Magnetický moment magnetu — měření tangentovou busolou (kompen- sační metoda)	509
83.2. Magnetisace — měření <i>Gaussovou</i> methodou	511
84. Horizontální intenzita zemského magnetického pole	513

84.1. Horizontální intenzita zemského magnetického pole — měření tangentovou busolou	513
84.2. Horizontální složka zemského pole — měření <i>Gaussovou</i> methodou	513
L. Optika	515
85. Ohnisková délka čočky	515
85.1. Ohnisková délka tenké spojky — měření z polohy předmětu a obrazu	519
85.2. Ohnisková délka tenké spojky — měření <i>Besselovou</i> methodou	520
85.3. Ohnisková délka tenké spojky — měření ze zvětšení	520
85.4. Ohnisková délka tenké rozptylky — měření zobrazením virtuálního předmětu	521
85.5. Ohnisková délka tenké rozptylky — měření <i>Besselovou</i> methodou	521
85.6. Ohnisková délka tlustých čoček — měření <i>Abbeovou</i> methodou	522
86. Zvětšení lupy (okuláru)	523
86.1. Zvětšení lupy — měření přímou methodou	524
87. Zvětšení drobnohledu	524
87.1. Zvětšení mikroskopu — měření přímou methodou	525
88. Zvětšení dalekohledu	526
88.1. Zvětšení dalekohledu — měření přímou methodou	527
88.2. Zvětšení afokálního dalekohledu — určení z ohniskových dálek	528
88.3. Zvětšení afokálního dalekohledu — určení měřením pupil	528
89. Zorné pole dalekohledu	529
89.1. Methoda krajních poloh	529
89.2. Zorné pole — měření stupnicovým kolimátorem	530
90. Lomný úhel hranolu	531
90.1. Urovnání spektrometru	532
90.2. Lomný úhel hranolu — určení zrcadlením štěrbinou	533
90.3. Lomný úhel hranolu — určení kolným zrcadlením nitkového kříže	534
91. Index lomu	535
91.1. Index lomu hranolu — měření spektrometrem	537
91.2. Index lomu — měření refraktometrem	541
92. Svítivost	541
92.1. Měření svítivosti <i>Lummer-Brodhunovým</i> světloměrem	550
92.2. Svítivost — měření <i>Weberovým</i> fotometrem	551
92.3. Měření fotočlánkem	552
93. Světelný tok	555
94. Měrná spotřeba a světelná účinnost žárovky	556
95. Osvětlení	557
96. Koncentrace barevných roztoků (měření kolorimetrem)	558
97. Dispersní křivka	560
98. Spektrální rozbor	562
99. Vlnová délka světla	563
99.1. Vlnová délka světla — měření ohybovou mřížkou	566
99.2. Vlnová délka světla — měření <i>Michelsonovým</i> interferometrem	567
100. Optická stáčitost	568
100.1. Stáčitost — měření polostínovým polarimetrem	570
101. Koncentrace cukerního roztoku	571

Část čtvrtá. Tabulky

T,I. Oprava vážení na vztlak	577
T,II. Hustota vody při teplotě $0 \div 3$ °C	577
T,III. Hustota suchého vzduchu (a jeho chemické složení)	578
T,IV. Pevod tlaku vzduchu, měřeného rtuťovým tlakoměrem, na 0 °C	579
T,V. Kapilární deprese rtuti v mm	580
T,VI. Hustota rtuti v kgm^{-3}	580
T,VII. Oprava čtení na přímé stupnici při měření zrcátkovou methodou 88.1	581
T,VIII. Redukce doby kyvu na nulový rozkyv	581
T,IX. Kontrolní teploty mezinárodní stupnice	582
T,X. Oprava rtuťového teploměru na normální teplotu	582
T,XI. Napětí nasycené vodní páry a absolutní vlhkost vzduchu nasyceného parami	583

T,XII. Bod varu vody za tlaku $p = 690 \div 789$ torrů	584
T,XIII. Převod absolutní míry kinematické vazkosti na míry technické	584
T,XIV. Konstanty pevných látek	585
T,XV. Konstanty kapalin	587
T,XVI. Konstanty plynů	589
T,XVII. Délky světelných vln v Å	590
T,XVIII. Zeměpisná poloha, nadmořská výška a tíhové zrychlení některých míst v ČSR	594
T,XIX. Různé konstanty	594
T,XX. Mechanické jednotky soustav MKSA, technické a absolutní	595
T,XXI. Tepelné jednotky soustav MKSA a jejich vztah k jednotkám praktickým a absolutním	596
T,XXII. Elektrické a magnetické jednotky v soustavě MKSA(r) v absolutní sou- stavě elektrostatické a elektromagnetické	597
T,XXIII. Goniometrické funkce	598
T,XXIV. Čtyřmístné logaritmy desetinné	599
Literatura	601
Rejstřík	605

Z PŘEDMLUVY K I. VYDÁNÍ

Tato kniha je určena především posluchačům Českého vysokého učení technického, jimž má být theoretickou učebnicí i praktickým návodem k laboratorním cvičením. Současně má širší poslání: být základní příručkou praktické fyziky, kterou dnes naše fyzikální literatura postrádá.

Praktická fyzika je věda o exaktním fyzikálním měření. Měření považujeme jen tehdy za exaktní, je-li provedeno vhodnou methodou na vhodných přístrojích a je-li výsledek správně odvozen z měření a vyjádřen se známou přesností v jednotkách jednoznačně definovaných. Tím je dána osnova knihy, jejíž obsah jsem rozvrhl do čtyř hlavních částí.

Část první (*Theorie fyzikálních měření*) pojednává o fyzikálních jednotkách a jejich soustavách, o měřicích chybách a o vyrovnání měření. Při základních statistických úvahách theorie chyb nespokojil jsem se povrchností, běžnou v učebnicích praktické fyziky; úvahy tyto bývají pro začátečníka nesnadné a jejich znalost je prospěšná v mnohých oborech moderní fyziky. Kromě přesné metody nejmenších čtverců zdůrazňuji též přibližné metody vyrovnávací. Domnívám se totiž, že je lépe užít jednoduché metody méně přesné než prostě neužít pracné metody přesnější, jak se často děje. Proto také uvádím ve stati B zjednodušený numerický výpočet chyb, který jsem založil na průměrné chybě.

Část druhá (*Základní měření*) obsahuje přehled měřicích method a základních měřicích úkonů, jakož i výklad o měření času, teploty, hmoty, prostoru a hustoty. Zvláštní pozornost jsem věnoval methodám přesného vážení, ježto jsem přesvědčen o jejich důležitosti a pedagogické hodnotě. V příslušné stati E podávám elementární teorii vah a podrobný praktický návod k vážení.

Část třetí (*Měřicí přístroje a metody*) je nejobširnější. Je rozdělena na pět statí: Mechaniku, Akustiku, Thermiku, Elektřinu a magnetismus a Optiku, v nichž jsou uvedeny definice a jednotky nejdůležitějších fyzikálních veličin, popsány hlavní přístroje a vyloženy měřicí metody. Základní metody (zvláště ty, které se prakticky provádějí ve fyzikálních cvičeních na Českém vysokém učení technickém) jsou blíže osvětleny souhrnným výčtem měřicích potřeb a jednotlivých úkonů, po př. číselnými příklady měření provedených z valné části posluchači ve cvičné laboratoři Ústavu technické fyziky.

Část čtvrtá (*Tabulky*) obsahuje 21 tabulek různých fyzikálních veličin. Pro úsporu místa uvádím jen tabulky, které se častěji potřebují při základních měřeních. Podrobnější tabulky najde čtenář v kompendiích zmíněných v přehledu spisů na konci knihy.

Při spisování knihy měl jsem na paměti, že má být v první řadě elementární učebnicí a základní praktickou příručkou. Proto jsem věnoval dosti místa podrobnému popisu důležitých přístrojů a zevrubnému výkladu všech základních měřicích method. Tak se stalo, že kniha nabyla většího rozsahu, než jsem očekával. Aby pak rozsah knihy nepřekročil kritickou hodnotu, byl jsem nucen

upustit od zpracování některých speciálních method, zejména z oboru krátkovlnného záření (paprsků X, radioaktivity, kosmického záření), hmotové spektrografie a praktické atomové fyziky. Výklad, který by nebyl jen povrchně informativním, ale prakticky upotřebitelným poučením a návodem k měření veličin, o nichž se v běžných učebnicích mluví jen povšechně, vyžádal by si zajisté více místa než výklad základních method, u nichž jsem se mohl opřít o tak dobrou učebnici, jako je *Nachtikalova* Technická fyzika. To jsem skutečně v mnohých případech učinil a uvedl jsem*) četné základní vztahy bez odvození a bez podrobného výkladu s odvoláním na příslušnou stať *Nachtikalovy* učebnice.

Proto jsem také přejal, téměř beze změn, označení této knihy s jedinou podstatnou výjimkou v označení jednotek: Pro jednotku veličiny A zavedl jsem obecný znak $[A]$, u něhož indexy a , p , t , as , am značí různé soustavy. Tak na př. $[U]_a$ je absolutní jednotka délky, $[P]_p$ je praktická jednotka výkonu, $[m]_t$ je technická jednotka hmoty, $[U]_{as}$ je absolutní elektrostát. jednotka napětí a $[I]_{am}$ abs. elektromagn. jednotka proudu. Také grafické znaky elektrických zařízení se většinou shodují se znaky *Nachtikalovy* knihy a jsou sestaveny v přehledné tabulce na první straně stati K o elektrině a magnetismu.

Pokud jde o matematickou část výkladu, podávám ji tak podrobně, aby ji mohl snadno sledovat průměrně nadaný čtenář.

Má-li být knihy při jejím rozsahu a rozmanitosti užíváno nejen jako učebnice k soustavnému studiu, nýbrž i jako praktické laboratorní příručky k okamžitému poučení, musí připouštět rychlou orientaci. Hleděl jsem toho dosáhnout soustavným uspořádáním látky a důsledným označením.

Literární prameny, které jsem měl po ruce při sepisování knihy, jsou v přehledu spisů na konci knihy. Uvedl jsem výčet české literatury, ač všechna díla vydaná před válkou jsou dnes rozebrána. Týká se to zejména jediné české (knižně vydané) učebnice praktické fyziky *Macků—Novák—Nachtikal: Základy praktické fyziky*, na jejímž 4. vydání jsem spolupracoval a která mi byla mnohdy vodítkem stejně jako různé učebnice cizojazyčné. Ačkoli je hlavním úkolem této knihy podat přehled známých a osvědčených měřicích method, uvádím také některé původní metody početní i měřicí.

Zdeněk Horák

*) V I. a II. vydání této knihy.

PŘEDMLUVA K III. VYDÁNÍ

Ačkoli první vydání z roku 1947 bylo v krátké době rozebráno, došlo k druhému vydání teprve v roce 1954, kdy byla kniha vydána Státním pedagogickým nakladatelstvím v Učebních textech vysokých škol. Tisk byl proveden ofsetem, což připouštělo jen drobné opravy. Přesto jsem již tehdy pokládal za nutné doplnit knihu dodatkem, v němž jsem vyložil základy soustavy jednotek MKSA.

Teprve v tomto třetím vydání, jehož rukopis jsem dokončil v srpnu 1955, bylo možno uskutečnit větší změny v textové, tabulkové i obrazové části knihy.

Především bylo třeba přizpůsobit knihu nové situaci, která se vyvinula od doby prvního vydání postupným pronikáním soustavy MKSA do fyzikální i technické literatury. Vzhledem k tomu, že se u nás očekává uzákonění této soustavy měr, jevílo se vhodným, kromě podrobného výkladu o jejich nejdůležitějších jednotkách, seznámit čtenáře také s praktickým užíváním soustavy MKSA. Proto uvádím jednotky této soustavy ve všech kapitolách na prvním místě — vedle ostatních běžných fyzikálních a technických jednotek. Také výsledky měření byly přepočteny na tuto soustavu s výjimkou oborů, v nichž je soustava MKSA dosud zcela neobvyklá. Tím jsem hleděl usnadnit a urychlit zavedení soustavy MKSA na vysokých školách i ve výzkumných ústavech.

Ve snaze přizpůsobit text i po stránce formální novějším tendencím směřujícím k sjednocení symboliky s mezinárodními normami, změnil jsem značky některých veličin tak, aby byly ve shodě se světovou literaturou. Další formální úpravou, totiž zařazením fotografických snímků (které byly dosud shrnuty v příloze na konci knihy) do příslušných kapitol a zvýšením jejich počtu jsem hleděl přiblížit výklad čtenářům, kteří nemají praktických zkušeností.

Pokud jde o vlastní obsah knihy, byla řada kapitol přepracována, rozšířena a doplněna popisem nových přístrojů a výkladem o nových měřicích metodách. Zejména byla přepracována první část knihy, kde byly — nehledíc k již zmíněnému výkladu o soustavě jednotek MKSA — prohloubeny theoretické základy statistiky chyb a obsírněji se pojednává o aplikacích nejjednodušší vyrovnávací metody skupinové. Další doplňky se týkají nových method měření dynamické pružnosti, vazkosti, tepelné vodivosti, graduaace fotoelektrických článků a j.

Celý text byl podrobně revidován a všechny odkazy z oboru obecné a technické fyziky, které se v původním vydání vztahovaly k *Nachtikalově* Technické fyzice (již po několik let úplně rozebrané), jsou zaměřeny na knihu: *Horák—Krupka—Šindelář: Technická fyzika* (původně *Základy technické fyziky*). Citáty z této knihy jsou označeny zkratkou TF a číslem příslušného článku.

Páteř orientační soustavy tvoří opět jako v dřívějším vydání články označené tučně tištěnými čísly, jež postupují od 1 do 101 třemi hlavními částmi

knihy bez zřetele na jednotlivé stati, které jsou značeny velkými tučnými písmeny A, B, . . . , L a sdružují články příbuzného obsahu. Poslední (čtvrtá) část obsahuje tabulky označené T,I až T,XXI. Měřicí metody jsou seskupeny podle měřených veličin tak, že každé veličině je vyhrazen zvláštní článek, označený tučným číslem a názvem veličiny. Každý z těchto článků obsahuje vždy ve stejném pořadí:

1. Definici měřené veličiny.

2. Jednotky, v nichž se měří.

3. Popis měřicích přístrojů, jejichž názvy jsou tištěny tučně a označeny číslem článku s římským pořadovým číslem na vnějším okraji stránky. Tento marginální znak (tučně tištěný) uvádím pak v lomených závorkách při zmínkách o dotyčném přístroji.

4. Výklad měřicích method, které probírám nejprve přehledně a pak jednotlivě každou z hlavních method. Tím vznikly v rámci článků menší články, označené tučnými desetinnými čísly, a názvy method, kterým jsou věnovány.

Rovnice značím, jak je zvykem, číslicemi v okrouhlé závorce, které začínají v každém článku jedničkou.

Důležitější výsledky — ať jsou vyjádřeny vzorcem (rovnicí), ať větou tištěnou tučně nebo *kursivou* — značím tučně v okrouhlé závorce. Při odkazech uvnitř téhož článku uvádím jen číslo rovnice (v závorce), kdežto při odvolání na rovnici z jiného článku uvádím před závorkou s číslem rovnice také tučně tištěné číslo příslušného článku.

Rýsované obrázky a fotografické snímky, zařazené v textu, jsou označeny tučným číslem příslušné stati a pořadovým číslem 1, 2, . . .

Konečně tabulky v textu jsou označeny tučně číslem článku a římskou číslicí na rozdíl od přehledných tabulek části čtvrté T,I, . . . , T,XX. Abecední rejstřík je na konci knihy.

Při úpravě rukopisu pro třetí vydání, při rýsování obrázků, pořizování nových fotografií a při čtení korektur byli mi nápomocni pracovníci katedry fyziky strojní fakulty, zejména doc. Dr. F. Krupka, odb. asist. J. Preiningerová, aspirant Ing. K. Moltaš, asistenti Ing. J. Marek a I. Pacáková, odbor. instruktor F. Cisarík, sekretářka J. Rouchalová a vědecké pomocné síly V. Kadlecová a E. Ulrych. Všem jmenovaným děkuji za ochotnou spolupráci a své ženě za obětavou pomoc, kterou mi poskytla při přepracování knihy na soustavu MKSA i při celkové revisi rukopisu a čtení korektur.

Rovněž děkuji redaktoru K. Husárkovi za cenné připomínky, kterými přispěl k přesnosti a jazykové správnosti textu a pí Zierisové za svědomité provedení korektur.

Zdeněk Horák

ČÁST PRVNÍ

Theorie fyzikálních měření

A. FYSIKÁLNÍ JEDNOTKY

1. MĚŘENÍ VE FYSICE

Hlavním a jedině směrodatným zdrojem fyzikálního poznání je pozorování a zkušenost. Fyzikální děje, které pozorujeme, mohou být dvojího druhu. Probíhají-li samovolně, bez našeho zásahu, mluvíme o *pozorování* v užším smyslu, jestliže si však pozorované děje sami připravujeme, volíme vhodným způsobem podmínky jejich průběhu podle účelu, který sledujeme, nazýváme pozorování fyzikálním *pokusem*. Pozorování v přírodě i pokusy připravené v laboratoři mohou být opět dvojí. Mohou být jen *kvalitativní* (popisné), je-li jejich účelem jen zjištění existence určitých fyzikálních jevů nebo vznik jistých dějů, anebo *kvantitativní*, mají-li poskytnout vztahy mezi velikostmi příčin a účinků, tedy číselné závislosti mezi hodnotami fyzikálních veličin.

Některé veličiny připouštějí svou povahou rozklad na menší části a můžeme je tedy pokládat za jejich součet. Nazýváme je *množství* (kvantity, veličiny extenzivní) a je jich ve fyzice většina (délka, objem, hmota, tlak, teplo, elektrický náboj a j.). Rozložíme-li množství na vesměs stejné (menší) části, můžeme zjistit, kolik takových stejných částí dané množství obsahuje. V takovém případě nazýváme tuto zvolenou menší část *mírou* nebo *jednotkou* onoho množství, jehož hodnotu můžeme určit počtem v něm obsažených jednotek, který nazýváme *velikostí* množství ve zvolených jednotkách.

U některých fyzikálních veličin však není nasnadě představit si je jako součet menších částí a jejich porovnání s podobnými veličinami stejného druhu dovoluje pouze zjistit, zda dvě veličiny jsou stejné nebo různé, aniž mohou být nalezeny číselné vztahy mezi veličinami, jež nejsou stejné. Abychom i zde získali exaktní vztahy mezi různými veličinami (téže fyzikální povahy), zvolíme pro určitý druh fyzikálních veličin řadu veličin téhož druhu, které sestavíme ve *stupnici* (škálu). Každou další veličinu pak určíme tím, že zjistíme, s kterou veličinou stupnice se shoduje, aniž hledáme číselné vztahy mezi jednotlivými členy (stupni) stupnice. Takové veličiny se nazývají *stavové* (intenzivní nebo krátce *intensity*), při čemž stavem rozumíme určité místo na zvolené stupnici. Můžeme však i stavové veličiny uvést v číselné vztahy, přiřadíme-li každému místu stupnice jistou kvantitu, která je závislá na stavu dotyčné veličiny. Vyjádříme-li takto přiřazenou kvantitu v určitých jednotkách, můžeme její velikostí charakterisovat i příslušnou stavovou veličinu a můžeme jí přisoudit určitou velikost nebo *výši* (*stupeň*), rovnou nebo úměrnou velikosti přiřazené kvantity. Musíme si být ovšem vědomi, že takové přiřazení je do značné míry libovolné a že číselné vztahy mezi hodnotami stupnice jsou závislé na zvolené kvantitě. Jako příklady stavových veličin lze uvést čas, teplotu, potenciál, barvu a j. Můžeme totiž snadno zjistit, že dva okamžité děje se udály současně, ale velikost časové mezery, t. j. dobu mezi dvěma okamžiky, nemůžeme přímo

srovnávat s dobou mezi jinými dvěma okamžiky. Přiřadíme-li však oběma dobám číslo udávající, kolikrát se během doby opakuje nějaký stálý děj, který nazýváme periodickým, můžeme velikost obou časových mezer pokládat za úměrnou počtu opakování děje; je to rovnocenné předpokladu, že opakovaný děj vyžaduje vždy stejné „množství“ času. Tak docházíme k míře času, k časové stupnici; při tom není nijak zaručeno, že nám velikosti obou dob vyjdou ve stejném poměru, měříme-li čas jiným opakovaným dějem, na př. rotací zemskou, pokládajíc ji za rovnoměrnou. Podobně je tomu s měřením teploty, neboť je známo, že objemové změny různých látek nejsou navzájem úměrné, takže nejsou přesně úměrné ani teplotní stupnice různých druhů teploměrů (rtuťových, plynových, kovových).

Přes tyto potíže s měřením stavových veličin možno říci, že každé fyzikální veličině můžeme přisoudit určitou velikost, danou počtem jednotek obsažených v jisté kvantitě, čili jak říkáme, můžeme každou fyzikální veličinu měřit. Měřením fyzikální veličiny rozumíme určení její velikosti v daných jednotkách, t. j. zjištění počtu jednotek v ní obsažených.

Je tedy bezprostředním úkolem fyzikálního měření zjišťovat velikost veličin; tím však není význam měření vyčerpán. Neboť není úlohou fyziky jen shromažďovat poznatky, nýbrž třídit je a uvádět ve vzájemnou souvislost, sledovat příčiny a účinky a dospět tak k organické soustavě představ a skutečností, která teprve tvoří uzavřený obor exaktní přírodní vědy. Víme totiž, že veliká většina fyzikálních veličin souvisí navzájem vztahy vyjadřujícími fyzikální zákony, jejichž objevení a studium je konečným cílem měření.

2. VOLBA JEDNOTEK

Je zřejmo, že fyzikální veličiny je možno zásadně měřit v libovolných jednotkách, ale je rovněž zřejmo, že o jejich účelnosti rozhodují mnohé okolnosti. Nejdůležitější z nich jsou tyto:

Abý vědecké poznatky mohly být náležitě uplatněny v dalším výzkumu i v technické praxi, je nutno vyjádřit je způsobem, který připouští co největší jejich rozšíření mezi odborníky i techniky. Z toho plyne požadavek, aby výsledky měření, získané různými pracovníky v různých místech a v různých dobách, mohly být bezpečně srovnávány a kontrolovány. Proto měříme fyzikální veličiny v jednotkách stanovených přesně a jednoznačně, a to tak, aby jejich neproměnnost byla pokud možno zaručena. Lze toho dosáhnout buď tím, že udáme *experimentální předpis*, který stanoví postup, jakým se jednotka experimentálně realizuje, nebo prostě zvolíme za jednotku veličinu, kterou vykazuje určité jediné těleso a která se nazývá *jednotkou prvotní* nebo *prototypem* zvolené jednotky. Všechna měření dotyčné veličiny se pak srovnávají s pokud možno přesnými kopiemi prvotní jednotky, jejíž neproměnnost musí být zaručena v dostatečné míře. Příklady obou způsobů uvedeme v následujícím článku.

Tím bychom se mohli spokojit, kdybychom nepřihlíželi k fyzikálním zákonům, jimiž jsou navzájem poutány různé veličiny. Tyto zákony vyjadřujeme rovnicemi s dvěma nebo více fyzikálními veličinami. Velikost každé veličiny závisí však na zvolené jednotce, a to tak, že velikost téže veličiny v jednotkách k -krát větších je k -krát menší; naopak při zmenšení jednotky se velikost veličiny v témž poměru zvětší. Závisí tedy číselné hodnoty konstant ve fy-

kálních rovnicích na vzájemném poměru zvolených jednotek, a určitého vyjádření fyzikálních vztahů dosáhneme jen určitou volbou jednotek. Zároveň tu máme možnost vhodnou volbou jednotek dosáhnout co nejjednoduššího vyjádření fyzikálních vztahů. Uvážíme-li konečně, že ve fyzice je více různých druhů veličin než mezi nimi platných vztahů — ježto hodnoty některých veličin můžeme volit podle libosti — pochopíme, že *nejúčelnější postup při výběru fyzikálních jednotek* je tento:

Odečteme od počtu druhů fyzikálních veličin počet mezi nimi platných vztahů, čímž dostaneme počet veličin, které můžeme pokládat za nezávislé, a zvolíme právě tolik fyzikálních veličin navzájem nezávislých, které nazveme *základní*. Při volbě jednotek těchto základních veličin, jejichž výběr lze ovšem provést různým způsobem, jsme vázáni toliko účelností a vhodností. Tak dostaneme *základní jednotky*, z kterých vycházíme při definici všech jednotek dalších, jež nazýváme *jednotkami odvozenými*. Přitom požadujeme, aby fyzikální rovnice, která uvádí odvozenou jednotku ve vztah s jednotkami základními, byla co nejjednoduššího tvaru, t. j. aby všechny číselné faktory byly rovny jedné. Všechny takto definované odvozené jednotky tvoří spolu se základními jednotkami t. zv. soustavu jednotek neboli *soustavu měr*, jejíž jednotky jsou, jak říkáme, *rozměrově koherentní*. Je-li tento princip důsledně dodržen pro všechny odvozené jednotky, nazýváme soustavu *ryzí*, mnohdy však spojujeme v soustavu jednotky dvou různých ryzích soustav, a pak jejich souhrn nazýváme soustavou *smíšenou*.

Je patrné, že základními jednotkami jsou všechny jednotky měrové soustavy jednoznačně určeny, takže přesnost a neproměnnost základních jednotek rozhoduje o týchž vlastnostech všech odvozených jednotek. Proto je volba základních veličin a jednotek velmi důležitá a se stanoviska theoretického bychom měli dát přednost t. zv. *universálním konstantám*, jejichž obecně platné hodnoty můžeme právem pokládat za neproměnné a kdykoliv kontrolovatelné. Pokus o vytvoření takové „*přirozené soustavy měrové*“ učinil *Planck* (1906). Navrhl jako základní jednotky:

účinkové kvantum (*Planckovu* konstantu) $h = 6,63 \cdot 10^{-31} \text{ W s}^2$,
 gravitační konstantu $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ }^\circ\text{kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$,
 plynovou konstantu (*Boltzmannovu*)
 pro 1 molekulu $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ W s} \cdot \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$,
 rychlost světla ve vakuu $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$,
 permitivitu (dielektrickou konstantu) vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Podobnou soustavu navrhli *Lewis* a *Adams* (1914), v níž kromě posledních tří konstant je základní jednotkou také elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$. Není třeba podrobně odůvodňovat, že takové, s hlediska theoretického ideální soustavy jsou pro praktickou potřebu zcela nevhodné.

Jak bylo již řečeno, jsou základními jednotkami určeny i odvozené jednotky soustavy. Ukazuje se, že odvozené jednotky dají se obecně vyjádřit jako součiny mocnin jednotek základních, což vyplývá ze skutečnosti, že odvozené fyzikální veličiny jsou vesměs definovány jako součinitelé ve vztazích vyjadřujících úměrnost. Je tomu podobně jako s jednotkami plošných a prostorových veličin (plochy a objemu), danými druhou a třetí mocninou délky. Pravíme, že plocha má dva, objem tři rozměry a stejného označení užíváme i pro mocnitele, jimiž jsou charakterisovány odvozené veličiny jako funkce jednotek základních. Původní způsob vyjadřování, známý z geometrie, byl však časem po-

změněn, a místo abychom řekli, že na př. zrychlení má vzhledem k délce rozměr 1, vzhledem k času rozměr — 2, říkáme, že rozměr zrychlení je (délka)¹ (čas)⁻². Pouhé číslo, které i při tomto způsobu pokládáme za bezrozměrné, má pak ovšem důsledně rozměr 1 (nikoli 0). Pojem fyzikálního rozměru veličin (nebo jejich jednotek) může být velmi užitečný, ba lze ze vztahů platných pro rozměry veličin někdy i soudit na tvar fyzikálních rovnic, jimiž spolu souvisí. Vědní obor, který se podobnými otázkami obírá, nazývá se *theorie rozměrnosti* (*theorie dimenzí*) a zvláště jeho část zvaná naukou o *fyzikální podobnosti* je nepostradatelným theoretickým podkladem pro pokusy konané na *modelech* v aerodynamických a hydrodynamických laboratořích.

Měrové soustavy, kterých se používá při fyzikálních a technických měřeních, jsou tyto:

Absolutní soustava je založena na základních jednotkách *délky* (centimetr), *hmoty* (gram), *času* (vteřina) a *teploty* (stupeň), z nichž se odvozují jednotky ostatních veličin dříve naznačeným způsobem. Definici elektrických a magnetických jednotek je však možno provést dvojím způsobem: buď se jako další nezávislá jednotka volí *dielektrická konstanta*, která se pro vakuum klade rovna 1 (bez rozměru), nebo se za další nezávislou jednotku bere *magnetická permeabilita*, jež se volí ve vzduchoprázdnu rovna 1 (bez rozměru). V prvním případě se absolutní soustava nazývá elektrostatičká, ve druhém případě elektromagnetická. V obou případech pak můžeme konstantu v *Coulombově* zákonu volit rovnu 1 (soustava „obyčejná,“) nebo $1/4 \pi$ (soustava „racionální“).

Technická soustava vychází ze základních jednotek *délky* (metr), *času* (vteřina) a *síly* (váha 1 kilogramu), takže jednotka hmoty je v této soustavě jednotkou odvozenou.

Praktická soustava MKSA se od absolutní soustavy liší tím, že se volí za jednotku *délky* 1 m, za jednotku *hmoty* 1 kg, za jednotku *času* 1 s, za jednotku *proudu* 1 A a za jednotku *teploty* 1 °K nebo 1 °C. Místo této ryzí soustavy se ve fyzice dosud většinou užívá t. zv. praktických jednotek, které vzniknou z jednotek absolutních násobením jistými součiniteli volenými tak, aby nové jednotky byly vhodnější pro praktickou potřebu. Tyto jednotky tvoří ryzí soustavu jako soustava MKSA, ačkoliv řada jednotek souhlasí: joule, ampér, volt, ohm atd.

V praktické fyzice jsou běžné i jiné smíšené (neryzí) soustavy, na příklad:

Weberova soustava, ve které se všechny veličiny vyjadřují v jednotkách elektromagnetických (obyčejných), jen dielektrická konstanta se měří elektrostatičce.

Gaussova soustava, v níž se všechny elektrické veličiny měří elektrostatičce, všechny magnetické veličiny elektromagneticky, při čemž se v obou případech volí jednotky „obyčejné“.

Lorentzova soustava se od Gaussovy liší jen tím, že všechny jednotky elektrické jsou racionální.

Elektrotechnická soustava, v níž se všechny elektrické veličiny a samoindukčnost vztahují na praktickou soustavu, ostatní magnetické veličiny (vyjma samoindukčnost) na soustavu elektromagnetickou (obyč.) a dielektr. konstanta se měří v soustavě elektrostatičce (obyč.).

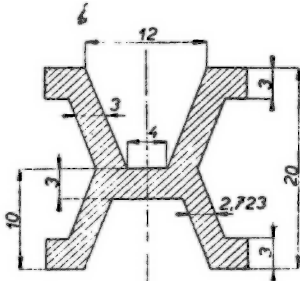
Všechny uvedené smíšené soustavy se vyznačují tím, že ve vztazích obsahujících veličiny měřené v různých ryzích soustavách vznikají číselné faktory („vyrovnávací“).

Z mnohosti různých soustav jednotek lze soudit, že každá z nich má jisté výhody i nevýhody. Absolutní soustava je výhodná pro teorii, kdežto pro praxi je nevhodná. Naproti tomu praktické soustavy byly vytvořeny se zřetel na praktickou potřebu a beze zření na teorii. Proto nelze očekávat, že by se teorie a praxe snadno sjednotily na jediné soustavě měr. Ostatně nejdůležitější požadavek jednotného měření jak v různých zemích, tak i v různých oborech byl již z největší části splněn zavedením jednotek zvaných mezinárodní, které byly definovány dohodou všech technicky vyspělých států tak, aby tuto jednotnost a stálost jednotek co nejvíce zaručovaly.

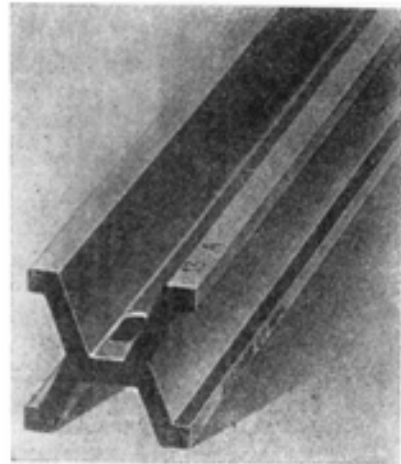
V dalších článcích promluvíme zevrubněji jen o nejdůležitějších měrových soustavách.

3. ABSOLUTNÍ SOUSTAVA MĚR

Absolutní jednotky mechanických veličin se odvozují z jednotek tří základních veličin: *délky, hmoty a času*. Jednotkou délky je centimetr (cm), rovný setině vzdálenosti koncových rysek mezinárodního prototypu metru při teplotě 0 °C, který se chová v Bureau International des Poids et Mesures v Sèvres. Je-li teplota prototypu určena s přesností 0,01 °C, definuje délku metru s přesností



Obr. 3,1. Profil prototypu metru (rozměry v mm podle Pérarda).



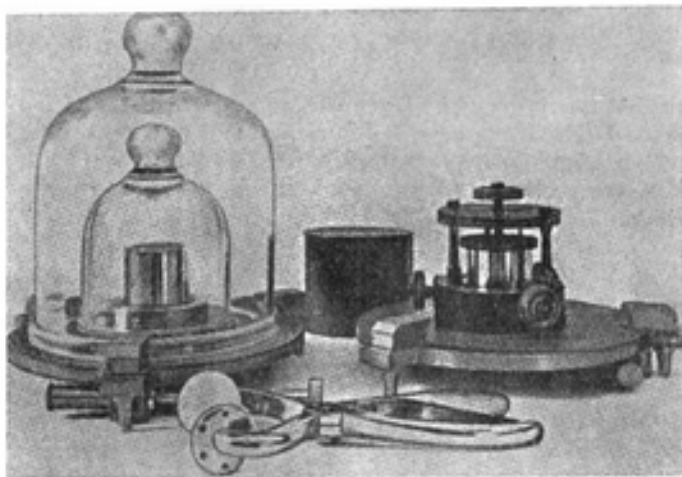
Obr. 3,2. Snímek prototypu metru [54].

jedné až dvou desetitisícin milimetru, což odpovídá relativní přesnosti jedné až dvou stotisícin procenta. Původní definici metru, podle níž je metr roven deseti-miliónté části kvadrantu zemského poledníku, vyhovuje mezinárodní prototyp metru s tisíckrát menší přesností, neboť je o 0,2288 mm kratší než tato délka. Proto se nelze spokojit původní definicí a je nutno ji nahradit definicí méně „absolutní“, ale mnohem přesnější, jak byla uvedena na počátku. Tím se ovšem ztrácí cenná vlastnost základní jednotky délky jako jednotky odvozené z rozměrů Země. Tato vlastnost měla zaručit možnost přezkoušet ji při poškození nebo zničení prototypu. Ačkoliv požadavek neproměnnosti a jednoznačnosti prototypu je do značné míry splněn vhodným tvarem (profil tvaru písmene X nebo H, obr. 3,1 a 3,2) a volbou co nejstálejší látky (slitiny 90% Pt a 10% Ir), bylo přece

nutno délku definovanou prototypem vyjádřit jednotkou skutečně absolutní, za kterou je možno pokládat na př. délku vlny určité spektrální čáry. Proto se usnesla mezinárodní komise pro míry a váhy r. 1927 stanovit metr přímo ve vlnových délkách λ červené čáry kadmiové v suchém vzduchu teploty 15°C za tlaku 760 torů. Přitom byl vzat za základ výsledek měření, jež vykonali *Benoit, Fabry a Perot* (1907):

$$1 \text{ m} = 1\,553\,164,13 \lambda_{\text{červ. č. Cd.}} \quad (1)$$

Platnost tohoto vztahu je zaručena asi se stejnou přesností, s jakou je definován metr mezinárodním prototypem.



Obr. 3,3. Prototyp mezinárodního kilogramu, uložený v Bureau International des Poids et Mesures v Sèvres [50].

Absolutní jednotkou hmoty je gram (g), definovaný jako tisícina hmoty mezinárodního prototypu kilogramu, zvaného krátce mezinárodní (internacionální) kilogram, uloženého v B. I. P. M. v Sèvres (srov. obr. 3,3). Původně měl být gram roven hmotě 1 cm^3 destilované vody za teploty $3,98^\circ$ vodíkové stupnice, kdy má voda největší hustotu, a za normálního tlaku 760 torů. Pro nevyhnutelné chyby při uskutečnění prototypu liší se však hmota mezinárodního kilogramu od hmoty krychlového decimetru vody. Podle pozdější kontroly je *objem mezinárodního kilogramu čisté vody za uvedené teploty a tlaku, který byl definován jako litr,*

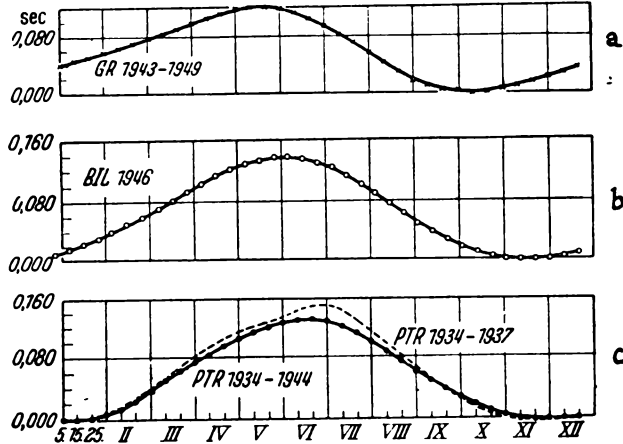
$$1 \text{ litr} = 1,000\,027 \text{ dm}^3. \quad (2)$$

Je tedy hmota mezinárodního kilogramu o celých 27 mg větší než hmota „ideálního“ kilogramu, určeného hmotou 1 dm^3 čtyřstupňové vody. Avšak přesnost, s jakou je stanoven prototyp hmoty, činí asi 0,01 mg, takže nelze jednotku hmoty definovat jako hmotu 1 cm^3 vody a nebylo by tedy možno přezkoušet neproměnnost prototypu hmoty nebo dokonce zhotovit prototyp nový s původním totožný, kdyby tuto možnost neposkytoval hořejší vztah (2). Tímto vztahem je totiž hmota mezinárodního kilogramu vyjádřena hmotou $1 \text{ dm}^3 \text{ H}_2\text{O}$, a tedy jednoznačně stanovena vztahem metru k délce vlny červené čáry kadmiové. Tím je tedy zajištěna i stálost jednotky hmoty.

Jednotkou času je v absolutní soustavě vteřina (sekunda), kterou značíme s nebo sec , definovaná tak, že 24.60.60 vteřin je rovno střednímu slunečnímu dni. Tedy

$$1 s = 1,157\ 407\ 41 \cdot 10^{-5} \text{ stř. slun. dne}, \quad (3)$$

při čemž stř. sluneční den je určen tím, že 365,242 20 těchto dní uplyne mezi dvěma po sobě následujícími jarními rovnodennostmi. Co se týká neproměnnosti takto definované jednotky, nutno přiznat, že doba mezi dvěma následujícími jarními rovnodennostmi, zvaná tropický rok, není přesně vzato stálá a její změny se přenášejí ovšem i na fyzikální jednotku času. Tyto změny jsou



Obr. 3,4. Roční průběh opoždění rotace Země proti křemenným hodinám, měřený v Greenwichi (I), v Paříži (II) a v Berlíně (III).

nesmírně malé; za 1000 let se změnil délka vteřiny asi o $6 \cdot 10^{-10} s$, což je tak malá poměrná změna, že při žádném fyzikálním měření nemá význam.

Jak jsme řekli již v čl. 1, patří čas k veličinám stavovým, a proto je třeba k jeho měření zvolit určitou časovou stupnici, kterou definujeme jako *rovnoměrnou*. S theoretického hlediska by bylo nejsprávnější založit definici takové stupnice na *principu stálé rychlosti světla*.¹⁾ Její praktické užití by však vyžadovalo měřit dobu, za kterou uběhne světlo zvolenou dráhu vyjádřenou v mezinárodních metrech, což dosud nelze uskutečnit s přesností potřebnou při měření času. Proto se při definici časové stupnice vychází z principů klasické mechaniky, podle níž je otáčení tělesa kolem volné osy rovnoměrné, jestliže na těleso nepůsobí vnější síly ani dvojice, jestliže jeho moment setrvačnosti je stálý a nemění-li se pohybová energie v tepelnou. Z toho je zřejmo, že rotace Země kolem vlastní osy může být jen přibližně rovnoměrná jednak proto, že za přílivu a za odlivu ztrácí mechanickou energii třením, jednak proto, že moment setrvačnosti se poněkud mění podle ročních období. Oba tyto vlivy byly skutečně zjištěny pozorováním. Sekulární (pozvolné) zpomalování rotace se podle starých hvězdářských záznamů odhaduje asi na $1,6 \cdot 10^{-3} s$ za 100 let a periodické změny úhlové rychlosti Země byly bezpečně prokázány dlouhodobým srovnáváním zemské rotace s přesnými *křemennými hodinami*. Jsou to v podstatě

3¹⁾ TF 6.1.4, [7] čl. 4.1.

hodiny regulované piezoelektrickými kmity křemenné tyčinky, opatřené elektrodami a zatavené ve vyčerpané skleněné trubici, která se zvláštním thermostatem udržuje na skoro stálé teplotě. Tyčinka udržuje na stálé frekvenci kmity malého oscilátoru, které se zesílí a po vhodném snížení frekvence se jimi pohání synchronní motórek hodin.

V posledních desetiletích byla konána pečlivá měření na větším počtu křemenných hodin v Anglii, ve Francii, v Německu a v Americe. Jak je zřejmo z obr. 3,4, vykazují tři nezávislé řady měření velmi přibližně stejný průběh za rok. To svědčí o tom, že Země se periodicky opožďuje proti křemenným hodinám s maximem na začátku června každého roku.

Ještě větší přesnost než od křemenných hodin lze očekávat od t. zv. *atomových hodin*;³⁾ u nich je stálost kmitů křemenného oscilátoru kontrolována zvláštním zařízením, založeným na absorpci elektrických mikrovln v plynném čpavku NH_3 . Relativní přesnost chodu atomových hodin je 10^{-7} až 10^{-8} .

Vycházejíce z uvedených tří základních jednotek, odvozujeme jednotky všech ostatních mechanických veličin podle obecných zásad vyložených v 2. Tak na př. jednotku *rychlosti v* určíme tak, aby byla rovna rychlosti, při níž se (rovnoměrným pohybem) urazí za 1 s dráha 1 cm, tedy absolutní jednotka rychlosti

$$[v]_a = \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4)$$

Podobně jednotkové *zrychlení a* má rovnoměrně zrychlený pohyb, při němž vzroste rychlost za 1 s o $[v]_a$; tedy jednotka zrychlení

$$[a]_a = \frac{[v]_a}{\text{s}} = \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (5)$$

Známe-li však jednotku zrychlení, můžeme odvodit z *druhého pohybového zákona Newtonova* jednotku síly *F*. Nazýváme ji *dyn* a je to síla, která udělí hmotě 1 g zrychlení rovné $[a]_a$:

$$F = m a, \text{ tedy } 1 \text{ dyn} = \text{g} \cdot [a]_a = \text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (6)$$

Tak postupujeme důsledně u všech odvozených mechanických veličin a dostaneme jejich absolutní jednotky.

Podobně jednotka *práce A* je rovna práci vykonané silou 1 dynu při posunutí o 1 cm ve směru síly, která se nazývá *erg*. Tedy

$$[A]_a = 1 \text{ erg} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (7)$$

Jednotkou energie je množství energie, potřebné na práci 1 ergu, a má týž rozměr i název jako jednotka práce.

V termice připojuje se ke třem základním veličinám mechanickým teplota jako čtvrtá základní veličina. Absolutní jednotkou *teplotního rozdílu* je stupeň (grad), jehož velikost je definována jako setina rozdílu teploty varu a teploty tuhnutí čisté vody za normálního tlaku (760 torů), měřených v t. zv. stupnici termodynamické. Měří-li se takto teplotní rozdíl od absolutního nulového bodu, udává se ve stupních Kelvinových ($^{\circ}\text{K}$), měří-li se od bodu tuhnutí čisté vody za normálního tlaku, udává se ve stupních Celsiových ($^{\circ}\text{C}$). Thermodynamická stupnice je určena na základě účinnosti ideálního *vratného stroje Carno-*

3 ²⁾ Srov. čl. 6.3 a TF 2.0.7, [7] čl. 7.2.

tova. Značí-li T_1 absolutní teplotu ohříváku a T_2 abs. teplotu chladníku, měřeno v termodynamické stupnici od absolutního bodu mrazu ($273,15^\circ\text{K}$ pod bodem tuhnutí vody), je účinnost zmíněného stroje ³⁾

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ čili } \frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta. \quad (8)$$

Tento vztah převádí měření teploty na měření energie a definuje absolutní termodynamickou teplotu, kterou je možno theoreticky charakterisovat také tím, že je *úměrná tlaku ideálního plynu za stálého objemu*. Mimo vzácný plyn helium se nejvíce podobá ideálnímu plynu vodík a teplota měřená rozpínavostí vodíku se vskutku velmi málo liší od termodynamické teploty (srov. obr. 23,1). Avšak vodíkový teploměr není vhodný pro praktická měření, a proto byly přesným měřením stanoveny některé teploty tání a varu vhodných látek ve vodíkové stupnici, jež určují t. zv. *normální teplotní stupnice*, s níž můžeme dosti snadno srovnávat různé teploměry, zvláště rtuťové. Teploměry, u nichž jsou známy odchylky od normální stupnice, nazývají se *normální*. Jsou opatřeny certifikáty, z nichž jsou patrné korekce pro jednotlivé body stupnice označené ve stupních Celsiových ($^\circ\text{C}$), počítaných od bodu tání ledu.

Jednotku teplotního rozdílu značíme $^\circ\text{C}$ nebo $^\circ\text{K}$ a píšeme na př., že jednotka teplotní roztažnosti

$$[\alpha]_a = ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (9)$$

Jednotkovou roztažnost by tedy mělo těleso, jehož délka (jeden rozměr) by se ohřátím o 1°C zvětšila o celou délku při 0°C , tedy na dvojnásobek.

Další novou veličinou nauky o teple je *množství tepla* (tepelná energie) nebo prostě *teplo*. Vzhledem k tomu, že teplo pokládáme za druh energie (je dáno energií posuvného pohybu molekul hmoty), můžeme teplo vyjádřit v jednotkách energie. Tím je dána i *absolutní jednotka tepelného množství*, která je rovna 1 ergu . Jednotky všech ostatních tepelných veličin dají se tedy odvodit ze čtyř základních jednotek: cm, g, s a $^\circ\text{C}$ nebo $^\circ\text{K}$.

Při odvozování absolutních jednotek elektrických a magnetických naskýtá se několik možností. Je zvykem vycházet ze tří základních zákonů:

Coulombův zákon pro bodové elektrické náboje Q_1, Q_2 , vzdálené vzájemně o délku r , praví, že na sebe působí silou

$$F_e = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (10)$$

při čemž ϵ je permitivita neboli dielektrická konstanta prostředí.

Podle Coulombova zákona působí na sebe bodové magnetické póly p_1, p_2 , vzdálené od sebe o r v prostředí permeability μ , silou

$$F_m = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 p_2}{r^2}. \quad (11)$$

Podle zákona *Biot-Savartova* budí proud I délky ds ve vzdálenosti r velké proti délce ds magnetické pole, jehož intenzita má velikost

$$dH = \frac{1}{k_0} \frac{Ids}{r^2} \sin \alpha; \quad (12)$$

³⁾ TF 4.3.3, 4.3.5.

značí-li α úhel sevřený proudovým prvkem ds a směrem průvodiče r . Konstanta k_0 je stálá hodnota, která sice závisí na volbě jednotek, ale je nezávislá na prostředí. Má tedy k_0 ve všech prostředích stejnou hodnotu jako ve vakuu:

Podle *Maxwellovy* theorie šíří se izolátorem o konstantách ε , μ elektromagnetické vlny rychlostí

$$v = \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Platí tedy mezi uvedenými třemi konstantami ve vzduchoprázdnu vztah, který byl potvrzen experimentálně,

$$\frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (13)$$

Můžeme proto kterékoli dvě z hodnot ε_0 , μ_0 , k_0 volit, čímž je třetí hodnota již plně stanovena. Lze tedy při definici elektrických a magnetických jednotek postupovat trojím způsobem, z nichž každý vede k jiné soustavě měr:

Absolutní soustava elektrostatická je vyznačena tím, že volíme dielektrickou konstantu ε_0 ve vakuu a konstantu k_0 rovny jedné a pokládáme je za bezrozměrné. Je tedy permeabilita ve vzduchoprázdnu rovna převrácené hodnotě čtverce rychlosti světla ve vakuu $1/c^2$ a její jednotka elektrostatická

$$[\mu]_{as} = \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^2. \quad (14)$$

Tím už jsou všechny jednotky elektrické i magnetické jednoznačně určeny. Tak na př. jednotka *náboje* Q se definuje jako náboj, který stejně velký náboj vzdálený o 1 cm odpuzuje ve vzduchoprázdnu silou 1 dynu. Z rovnice (10) pro ni vychází vzhledem k (6)

$$[Q]_{as} = \text{cm} \cdot \sqrt{\text{dyn}} = \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (15)$$

Z této jednotky plynou další jednotky elektrické, na př. jednotka proudu:

$$[I]_{as} = [Q]_{as} \cdot \text{s}^{-1} = \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (16)$$

Jednotky magnetických veličin plynou ze zákona (12), klademe-li $k_0 = 1$. Pro *magnetickou sílu* H dostaneme tak jednotku

$$[H]_{as} = 1 \frac{[I]_{as} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2} = \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (17)$$

kteří uijeme k odvození jednotky magnetického pólu ze zákona (11) a ostatních magnetických jednotek.

Absolutní soustava elektromagnetická je založena na druhé možné volbě $\mu_0 = 1$, $k_0 = 1$, při čemž podle (13) $\varepsilon_0 = 1/c^2$ a absolutní jednotka elektromagnetická permitivity

$$[\varepsilon]_{am} = \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^2. \quad (18)$$

Ježto oba Coulombovy zákony (10) a (11) mají stejný tvar a rovnice (13) je vzhledem k ε_0 a μ_0 souměrná, bude mít elektromagnetická jednotka magnetického pólu odvozená z (11) stejný rozměr jako elektrostatická jednotka náboje odvozená z (10), totiž

$$[p]_{am} = \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (19)$$

Síla (intenzita) *magnetického pole* (číselně rovná síle působící na jednotkový pól) je dána vztahem plynoucím z (11) dělením velikostí pólu p_2

$$H = \frac{F_m}{p_2} = \frac{1}{\mu} \frac{p_1}{r^2} \quad (20)$$

a její jednotka

$$[H]_{am} = \frac{[p]_{am}}{1 \cdot \text{cm}^2} = \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (21)$$

Z Biot-Savartova zákona (12) pak dostaneme

$$[I]_{am} = [H]_{am} \cdot \text{cm} = \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \quad (22)$$

a stejným způsobem odvodíme elektromagnetické jednotky ostatních veličin magnetických i elektrických.

Konečně třetí možný případ, vyznačený volbou $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, která vede k hodnotě $k_0 = c$, dává zřejmě pro elektrické veličiny stejné jednotky jako v soustavě elektrostatické a pro magnetické veličiny vede k jednotkám elektromagnetickým. Tato volba jednotek tedy odpovídá **Gaussově soustavě**, uvedené v čl. 2 mezi soustavami smíšenými, kdežto zde se jeví jako soustava ryzí. Rozdíl je ovšem pouze formální a záleží v tom, že od 1 různá hodnota konstanty v Biot-Savartově zákonu plyne v posledním případě jako důsledek vztahu (13), kdežto v prvním případě má povahu „vyrovnávacího“ faktoru vzniklého tím, že v tomto zákonu vystupuje magnetická veličina (magnetická síla) zároveň s elektrickou veličinou (proudem). Není ostatně nesnadno odvodit vztahy mezi jednotkami elektrostatickými a elektromagnetickými těchto veličin, ve kterých se opakují činitelé rovní 1. nebo 2. mocnině rychlosti světla a jejich převrácené hodnoty.

4. TECHNICKÁ SOUSTAVA

Při technických měřeních mechanických veličin není obvyklá absolutní soustava, nýbrž soustava zvaná *technická* (nebo *statická*), v níž jsou základními veličinami *délka, čas a síla*. **Jednotkou délky je internacionální metr**, určený délkou mezinárodního prototypu, jehož délka je přesně definována rovnicí 3 (1). **Jednotka času je stejná jako v soustavě absolutní, totiž vteřina 3 (3)**. **Třetí základní jednotkou (totiž jednotkou síly) je váha mezinárodního kilogramu v místě normálního zrychlení tíhového**. Jako normální tíhové zrychlení se původně definovalo zrychlení zemské tíže na 45° severní šířky při hladině mořské, které má velikost asi 981 cm/s², přesněji

$$\text{normální tíhové zrychlení} = g_n = 980,665 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} = 9,806\ 65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (1)$$

Podle novějších měření se zrychlení na 45. rovnoběžce poněkud liší od hodnoty (1), jak je uvedeno v čl. 41, ale hodnota (1) normálního zrychlení se podržuje beze změny.

Technická jednotka síly, která se značí kg* nebo prostě kg (též „kil“ nebo „kp“, což znamená „kilopond“) souvisí v důsledku 3(6) s absolutní jednotkou síly vztahem

$$\begin{aligned} [F]_t &= 1 \text{ kg}^* = 1000 \cdot 980,665 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = \\ &= 0,980\ 665 \cdot 10^6 \text{ dyn} \end{aligned} \quad (2)$$

čili

$$1 \text{ kg}^* \doteq 0,981 \text{ megadyn}, 1 \text{ dyn} \doteq 1,02 \text{ mg}^* . \quad (3)$$

Tedy 1 *dyn* je asi o 2% větší než váha miligramu při normálním zrychlení. Jednotky všech ostatních mechanických veličin se odvozují z uvedených tří základních jednotek. V technické soustavě je tedy i *jednotka hmoty m* jednotkou odvozenou: je to *hmota, které udílí technická jednotka síly jednotkové zrychlení, tedy hmotu, již udílí 1 kg* zrychlení 1 m.s⁻²* :

$$[m]_t \doteq \frac{1 \text{ kg}^*}{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{9,806 \ 65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1000 \text{ g}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 9,806 \ 65 \text{ kg}, \quad (4)$$

což je hmota jen o 193 g menší než 10 kg. Uvedené vztahy platí zřejmě pro normální zrychlení; měříme-li tedy síly vahou těles, měli bychom přihlížet k tomu, že zrychlení tíže není přesně rovno zrychlení normálnímu. Oprava tím vzniklá nepřesahuje však ve střední Evropě 0,1% měřené hodnoty a není jí vůbec třeba při srovnání hmot vážením, pokud ovšem smíme pokládat tíhové zrychlení v místech obou hmot za stejné (srov. čl. 28).

Technické jednotky *rychlosti v* a *zrychlení a* dostaneme stejným postupem :

$$[v]_t = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad [a]_t = \text{m} \cdot \text{s}^{-2} . \quad (5)$$

Jednotkou *energie* je ovšem energie vynaložená na práci vykonanou vahou kilogramu po dráze 1 metru a nazývá se *kilogramometr* (též kilogrammetr nebo metrkilogram). Je patrně

$$1 \text{ kg}^* \cdot \text{m} = 1000 \text{ g} \cdot 980,665 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 100 \text{ cm} = 9,806 \ 65 \cdot 10^7 \text{ erg}. \quad (6)$$

Jednotkou *výkonu P* (práce vykonané za 1 s) by měl být 1 $\text{kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, ale je zvykem v technické mechanice brát jednotku 75krát větší, zvanou *kůň* (strojní), jež se značí k nebo ks¹)

$$\begin{aligned} 1 \text{ kůň} &= 1 \text{ k} = 1 \text{ ks} = 75 [P]_t = 75 \text{ kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \\ &= 7,354 \ 99 \cdot 10^9 \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} . \end{aligned} \quad (7)$$

Místo *hustoty ρ* (specifické hmoty), jejíž technickou jednotkou je

$$[\rho]_t = [m]_t \cdot \text{m}^{-3} , \quad (8)$$

zavádí se *měrná váha γ*, t. j. váha dělená objemem, pro kterou se užívá kromě správné technické jednotky

$$[\gamma]_t = \text{kg}^* \cdot \text{m}^{-3} \quad (9)$$

také jednotky 1000krát větší $\text{t}^* \cdot \text{m}^{-3}$. Měrná váha vyjádřená v $\text{t}^* \cdot \text{m}^{-3}$ je číselně rovna hustotě v absolutních jednotkách $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, neboť $1 \text{ t}^* = 10^6 \text{ g}^*$ a $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$.

Dlužno poznamenat, že vůbec v technické soustavě se vlastně neuvžívá pro hmotu správné technické jednotky $[m]_t$, dané rovnicí (4); dosazuje se prostě za hmotu váha dělená zrychlením zemské tíže, a tím gravitační zrychlení vstupuje i do vztahů, ve kterých to není fyzikálně odůvodněno. Ve výpočtech

¹ Anglická „koňská síla“, jež se značí HP, je rovna 550 librostopám/s, odkud dosazením za libru a stopu (12 palců) plyne podle (T,XIX)

$$1 \text{ HP} = 76,0399 \text{ kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

se pak vyskytují číselné faktory 1/9,81, které v ryzi soustavě by nemohly vzniknout. V technické praxi užívá se ovšem řady různých jednotek, jako mm, hod, cal, jak to vyžadují okolnosti. Tak na př. *tepelná energie* se nevyjadřuje v $\text{kg} \cdot \text{m}$, nýbrž v *kaloriích* nebo v *kilokaloriích*, *tepelná vodivost* v jednotkách $\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{hod}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ a podobně je tomu s jinými jednotkami. Tyto jednotky vlastně již nepatří do technické soustavy, beztoho zavedené původně jen pro veličiny mechanické, nýbrž mezi jednotky zvané *praktické*, o nichž promluvíme později. Také t. zv. technické jednotky veličin *elektrických* a *magnetických* jsou odvozeny buď z jednotek praktických (nebo internacionálních), nebo absolutních, jak vyložíme v příštím článku.

5. PRAKTICKÉ JEDNOTKY

V theoretických úvahách fyzikálních vyjadřujeme veličiny v absolutní soustavě měr, které v podstatě používáme i při praktických měřeních. Některé absolutní jednotky však nejsou přiměřené velikostem měřených veličin, a proto se nahrazují jistými násobky nebo díly, aby měřené hodnoty vyšly v jednodušších číslech. Tak bychom obdrželi zase ryzi soustavu — bez vyrovnávacích faktorů — kdybychom měnili velikosti jen tolika jednotek, kolik je jich nezávislých. Tato zásada se však ve skutečnosti nedodrzuje a jednotky vzniklé uvedeným postupem, jež se nazývají praktické, netvoří vcelku jednotnou soustavu, nýbrž směs z několika soustav. V praktických jednotkách se fyzikální veličiny skutečně měří, a proto je probereme podrobněji.

(Mechanika)

Praktické jednotky tří základních veličin absolutní soustavy — délky, hmoty a času — shodují se s jednotkami absolutními:

$$[l]_p = 1 \text{ cm}, \quad [m]_p = 1 \text{ g}, \quad [t]_p = 1 \text{ s}, \quad (1)$$

a totéž platí i pro jednotky plochy S , rychlosti v , zrychlení a , hustoty ρ , momentu setrvačnosti J , modulů pružnosti E , G , povrchového napětí σ a kinematické viskosity ν :

$$\begin{aligned} [S]_p &= \text{cm}^2, [v]_p = \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}, [a]_p = \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}, [\rho]_p = \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}, \\ [I]_p &= \text{g} \cdot \text{cm}^2, [E]_p = \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}, [\sigma]_p = \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-1}, \\ [v]_p &= \text{stok} = \text{poise} / [\rho]_p = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Moduly pružnosti se také měří v technických jednotkách

$$[E]_t = \text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} = 0,980\,665 \cdot 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}. \quad (3)$$

Kinematická viskositá se v praxi často měří v t. zv. *Englerových stupních* (viz 45. 3) a viskositá dynamická η v jednotkách

$$\begin{aligned} [\eta]_p &= \text{centipoise} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-2} [\eta]_a = \\ &= 0,01 \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

kde

$$[\eta]_a = \text{poise} = \text{cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

je *absolutní jednotka dynamické vazkosti*.

Naproti tomu se praktické jednotky liší od absolutních u těchto veličin: Úhel α , který se měří v absolutní soustavě v míře obloukové (poměrem příslušného oblouku kružnice k jejímu poloměru), měří se v praxi v míře *stupňové*, při čemž pravý úhel měří 90° , takže

$$[\alpha]_p = 1^\circ = 0,017\ 453\ \text{radiánu}, \quad (6)$$

značí-li *radián* úhel, jemuž přísluší oblouk rovný poloměru:

$$[\alpha]_a = \text{radián} = 57^\circ\ 17'\ 44,8'' = 206\ 264,8'' \quad (7)$$

Objem V , jehož absolutní jednotka je cm^3 , vyjadřuje se při zvláště přesných měřeních v jednotce označené *litr*, jejíž velikost podle 3 (2) se definuje rovnicí

$$[V]_p = \text{litr} = 10^3\ \text{mililitrů} = 1000,027\ \text{cm}^3. \quad (8)$$

Tlak p se měří v jednotkách zvaných *atmosféra* a definovaných jako hydrostatický tlak svislého sloupce rtuťového 760 mm vysokého teploty 0°C při normálním zrychlení zemské tíže ($980,665\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$):

$$\begin{aligned} [p]_p &= 1\ \text{atm} = 760\ \text{tor} = 1,013\ 25\ \text{bar} = 1,013\ 25 \cdot 10^6\ \text{mikrobar} = \\ &= 1,013\ 25\ \text{megabarye} = 1,013\ 25 \cdot 10^6\ \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}, \end{aligned} \quad (9)$$

kde *barye* (*mikrobar* = 10^{-3} milibar) značí absolutní jednotku tlaku $[p]_a = \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$.

Od této jednotky dlužno odlišovat t. zv. *technickou atmosféru*, používanou v soustavě technické a definovanou jako tlak $1\ \text{kg}^*$ na $1\ \text{cm}^2$. Je tedy právě rovna technické jednotce tlaku a značíme ji *at*:

$$[p]_t = 1\ \text{at} = 0,9678\ \text{atm}, \quad 1\ \text{atm} = 1,0332\ \text{at}, \quad (10)$$

jak plyne z (9) a 4 (2).

Síla F vyjadřuje se v jednotkách milionkrát větších než v absolutní soustavě:

$$[F]_p = \text{megadyn} = 10^6\ \text{dyn}, \quad (11)$$

práce A (energie E) však v jednotkách desetmilionkrát větších:

$$\begin{aligned} [A]_p &= [E]_p = 1\ \text{joule} = 1\ \text{J} = 10^7\ \text{erg} = \\ &= 0,101\ 971\ \text{kg}^* \cdot \text{m} = 0,009\ 869\ 0\ \text{litr atm}, \end{aligned} \quad (12)$$

značí-li *litratmosféra* práci vykonanou plynem při zvětšení objemu o 1 liter proti tlaku 1 atm.

Výkon P se měří v jednotkách odvozených z jednotek práce.

Je totiž *praktickou jednotkou výkonu*

$$[P]_p = \text{watt} = 1\ \text{W} = \text{J}\cdot\text{s}^{-1} = 10^7\ \text{erg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,359\ 62 \cdot 10^{-3}\ \text{ks}, \quad (13)$$

jak je vidět z 4 (6) a 4 (7).

(Akustika)

Kmitočet (frekvence) f se vyjadřuje počtem kmitů neboli *cyklů za vteřinu*. Jednotka frekvence je cykl/s a značí se $\text{c}\cdot\text{s}^{-1}$. Častěji se nazývá *hertz* a značí se pak Hz. Její rozměr je s^{-1} .

Síla zvuku (fysikální intenzita zvuku) je určena měrným výkonem zvuku I , t. j. energií, která projde za vteřinu při postupu zvukové vlny plochou 1 cm^2 , kolmou ke směru šíření zvuku. Její praktickou jednotkou je

$$\text{watt} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^7 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Kromě toho se vyjadřuje síla zvuku také ve stupnici logaritmické tak, že se zavádí t. zv. *hladina intenzity zvuku* B , určená rovnicí

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (14)$$

kde \log značí desetinný logaritmus. Hladina intenzity zvuku je tedy rovna nule pro jistý základní měrný výkon I_0 , který byl stanoven hodnotou

$$I_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-9} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (15)$$

Tomuto zvukovému „prahu“ přísluší základní akustický tlak $p_{e0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ dyn} \times \text{cm}^{-2}$. *Jednotkou hladiny intenzity je decibel*, znak dB, jemuž přísluší měrný výkon I_1 , definovaný na základě rovnice (14) vztahem

$$\text{decibel} = 1 \text{ dB} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 1,$$

odkud

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{1/10} = \sqrt[10]{10} I_0 = 1,259 I_0. \quad (16)$$

Počtu n decibelů přísluší pak výkon

$$I_n = 10^{n/10} I_0 = \sqrt[10]{10^n} I_0 = 1,259^n I_0.$$

Zvýšení hladiny intenzity o 1 dB znamená v každém případě zvětšení fyzikální síly zvuku o 25,9% jeho původní síly. Aby tedy hladina intenzity rostla řadou aritmetickou, musí síla zvuku vzrůstat řadou geometrickou. Na př. *při stoupnutí síly zvuku na desateronásobek původní síly vzroste hladina intenzity o 10 dB*, kteréžto zvýšení hladiny intenzity se nazývá také *1 bel*.

Hladina hlasitosti zvuku H (subjektivní síla zvuku, vnímaná sluchem) zjišťuje se srovnáváním s hladinou hlasitosti t. zv. *srovnávacího* (referenčního) *zvuku* (tónu o kmitočtu 1 kHz), jehož hladina hlasitosti se klade rovna hladině intenzity vyjádřené v decibelech. Hladina hlasitosti se měří v jednotkách zvaných *fon* (phon) a značených Ph. Libovolný zvuk má tedy hladinu hlasitosti n fonů, jestliže se uchu jeví se stejnou hladinou hlasitosti jako referenční tón o frekvenci 1 kHz, jehož hladina intenzity je n decibelů.

(Thermika)

Množství tepla Q (tepelnou energii) měříme v kaloriích. Přesněji řečeno praktickou jednotkou tepla je t. zv. *patnáctistupňová kalorie* (Maxwellova), *rovná tepelné energii potřebné k ohřátí 1 g čisté vody ze 14,5 °C na 15,5 °C*, kterou značíme cal. Při technických měřeních užívá se jednotky tisíckrát větší, zvané

kilokalorie (kcal), dříve též *velká kalorie* (Cal).¹⁾ Z četných měření mechanického ekvivalentu tepla vychází, že

$$1 \text{ cal} = 4,1863 \text{ joule}, \quad 1 \text{ kcal} = 426,77 \text{ kg}^* \cdot \text{m} = 0,001 \, 162 \text{ kWh} \quad (17)$$

a obráceně

$$1 \text{ joule} = 0,238 \, 87 \text{ cal}, \quad 1 \text{ kg}^* \cdot \text{m} = 2,343 \text{ cal} = 0,002 \, 343 \text{ kcal}. \quad (18)$$

Specifické teplo c má v praktické soustavě jednotku

$$[c]_p = \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (19)$$

Tepelná vodivost λ se rovněž měří v jednotkách odvozených logicky z předchozích:

$$[\lambda]_p = \text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 360 [\lambda]_t, \quad (20)$$

kde $[\lambda]_t$ značí technickou jednotku tepelné vodivosti:

$$[\lambda]_t = \text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{hod}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 0,002 \, 777 \, 8 [\lambda]_p. \quad (21)$$

Teplota t (teplotní stav, výše teploty) se měří v Celsiových stupních ($^\circ\text{C}$) a teplotní roztažnost α, β v jednotkách absolutních: $^\circ\text{C}^{-1}$.

(Optika)

Pro veličiny optické je základním pojmem svítivost. Její praktickou jednotkou byla do konce r. 1947 *mezinárodní svíčka* SI (viz čl. 6) nebo *svíčka Hefnerova* HK, což je svítivost t. zv. Hefnerovy lampy ve vodorovném směru. Mezi oběma platí vztahy

$$1 \text{ HK} = 0,90 \text{ SI}, \quad 1 \text{ SI} = 1,11 \text{ HK}. \quad (22)$$

Od r. 1948 se užívá *nové svíčky* neboli *kandely*,²⁾ která je o 1,87% menší než SI, takže

$$1 \text{ cd} = \text{kandela} = 0,9813 \text{ SI} = 1,09 \text{ HK}. \quad (22')$$

Světelný tok měříme v jednotkách nazvaných *dekalumen*:

$$\text{dekalumen} = 1 \text{ Dlm} = 10 \text{ lumen} = 10 \text{ lm},$$

při čemž *lumen* je definován tím, že celkový světelný tok bodového zdroje svítivosti 1 cd je roven 4π lm.

Osvětlení se vyjadřuje v jednotkách zvaných *lux*. Značí se lx a je to *stejněměrné osvětlení*, při němž dopadá na plochu 1 m^2 světelný tok 1 lumen:

$$\text{lux} = 1 \text{ lx} = \text{lm} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (23)$$

Jas rovinného zdroje je svítivost plošné jednotky ve směru kolmém k jeho povrchu. Jeho praktickou jednotkou je *stilb*, zn. sb, definovaný jako *jas plochy*, jejíž 1 cm^2 má kolmou svítivost 1 cd, takže

$$\text{stilb} = 1 \text{ sb} = 1 \text{ cd} \cdot \text{cm}^{-2} = \pi \text{ lambertů} = 3,14 \text{ lamb.},$$

¹⁾ Anglická tepelná jednotka BTU („býtjújú“, British Thermal Unit) je teplo potřebné k ohřátí 1 angl. libry čisté vody o $1 \text{ }^\circ\text{F}$ a platí pro ni vztahy (T,XIX)

BTU = 252,0 cal = 0,2520 kcal, kcal = 3,968 BTU.

²⁾ Viz čl. 6.1.

kde americká jednotka jasu *lambert* je určena tím, že 1 cm² svítícího rovinného povrchu zdroje vysílá do celého poloprostoru světelný tok 1 lm.

(Elektřina)

Praktické jednotky elektrických veličin tvoří ryzí soustavu, kterou nej-jednodušeji odvodíme z praktických jednotek práce, t. j. joulu a elektrického proudu, t. j. ampéru definovaného jako desetina absolutní elektromagnetické jednotky proudu:

$$[I]_p = \text{ampér} = 1 \text{ A} = \frac{1}{10} [I]_{am} \doteq 3 \cdot 10^9 [I]_{as}, \quad (24)$$

neboť proud vyjádřený v elektrostatických jednotkách I_{as} má velikost $3 \cdot 10^{10}$ krát větší než týž proud I_{am} , vyjádřený v jednotkách elektromagnetických, a stejný vztah platí ovšem i pro elektrický náboj. Odvodíme jej takto: Dva stejné náboje Q působí na sebe ve vakuu podle Coulombova zákona silou

$$F_e = \frac{Q^2}{\epsilon_0 r^2},$$

pro kterou musí vyjít táž hodnota v dynech, ať vyjádříme Q a ϵ_0 jejich hodnotami Q_{as} , ϵ_{0as} v jednotkách elektrostatických nebo hodnotami Q_{am} , ϵ_{0am} v jednotkách elektromagnetických. Tedy

$$\frac{Q_{as}^2}{\epsilon_{0as} r^2} = \frac{Q_{am}^2}{\epsilon_{0am} r^2}, \quad 3)$$

při čemž $\epsilon_{0as} = 1$, takže podle 3 (13) $\epsilon_{0am} = 1/c^2 \doteq (3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1})^{-2}$. Platí tedy vztahy:

$$Q_{as} = c Q_{am} \doteq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1} Q_{am}, \quad I_{as} = c I_{am} \doteq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} I_{am}. \quad (25)$$

Přesně vzato měli bychom podle 3 (13) brát za c hodnotu asi o $0,70/_{00}$ nižší, ale při definici praktických jednotek se klade z pochopitelných důvodů prostě $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

5 *) Tuto rovnici lze psát přesněji

$$\frac{\{Q\}_{as}^2 [Q]_{as}^2}{\{\epsilon_0\}_{as} [\epsilon]_{as}} \frac{1}{r^2} = \frac{\{Q\}_{am}^2 [Q]_{am}^2}{\{\epsilon_0\}_{am} [\epsilon]_{am}} \frac{1}{r^2}, \quad (a)$$

kde $\{ \}$ značí velikost vyjádřenou bezrozměrným číslem. Dosadíme-li $\{\epsilon_0\}_{as} [\epsilon]_{as} = 1$, $\{\epsilon_0\}_{am} [\epsilon]_{am} = 1/c^2$, $[Q]_{as} = \text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$, $[Q]_{am} = [I]_{am} \text{ s} = \text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2}$, pak $\{Q\}_{as}^2 (\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1})^2 = [Q]_{am}^2 \text{ cm}^2 (\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2})^2$, takže

$$\{Q\}_{as} = \{c\} [Q]_{am}. \quad (b)$$

Dosazením (b) do (a) plyne $[Q]_{as}^2 \{c\}^2 = [Q]_{am}^2 \cdot c^2$, tedy

$[Q]_{as} = \{c\} [Q]_{am} = \text{cm s}^{-1} [Q]_{am}$, jak musí být, a odtud násobením (b) nebo přímo z rovnice (a)

$$\{Q\}_{as} [Q]_{as} = \{c\} \text{ cm s}^{-1} [Q]_{am} [Q]_{am},$$

t. j.

$Q_{as} = c Q_{am}$, značí-li $Q_{as} = \{Q\}_{as} [Q]_{as}$ hodnotu (nikoli jen velikost) náboje v elektrostatických jednotkách. Tím je bezpečně dokázána platnost důležitých vztahů (25) jak co do velikosti, tak co do rozměrů náboje a proudu v obou druzích absolutních jednotek.

Další jednotky odvodíme takto:

Elektrický náboj Q (elektrické množství) rovná se proudu násobenému dobou, a tedy jeho praktická jednotka nazvaná **coulomb je náboj prošlý vodičem při proudu 1 A za vteřinu:**

$$[Q]_p = \text{coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} (= \text{ampérsekunda}). \quad (26)$$

S absolutními jednotkami souvisí týmiž vztahy jako jednotka proudu

$$1 \text{ C} = \frac{1}{10} [Q]_{am} = 3 \cdot 10^9 [Q]_{as}. \quad (27)$$

Napětí U (elektromotorická síla \mathcal{E} , potenciální rozdíl V) mezi dvěma body elektrického pole je definováno jako práce potřebná k přenesení elektrického náboje, dělená velikostí náboje. Tedy k překonání jednotkového napětí potřebuje jednotkový náboj jednotkovou práci. **Praktická jednotka napětí, zvaná volt, je tudíž dána napětím, k jehož překonání potřebuje 1 coulomb práci rovnou 1 joule, t. j. podle (27)**

$$[U]_p = \text{volt} = 1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{3 \cdot 10^9 [Q]_{as}} = \frac{1}{300} \cdot \frac{\text{erg}}{[Q]_{as}} = \frac{1}{300} [U]_{as}. \quad (28)$$

Vztah voltu k absolutním jednotkám elektromagnetickým plyne rovněž z rovnice (27):

$$[U]_p = 1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{10^{-1} [Q]_{am}} = 10^8 \cdot [U]_{am}. \quad (29)$$

Vysoká napětí se vyjadřují také v jednotkách zvaných *kilovolt* $= 10^3 \text{ V}$.

Kapacita C (elektrická) nějakého tělesa (na př. kondensátoru) je dána poměrem náboje k zvýšení potenciálu, způsobenému sdělením onoho náboje tělesu. Její praktická jednotka, zvaná **farad, je kapacita vodiče, který nábojem 1 coulombu získá napětí 1 voltu:**

$$\begin{aligned} \text{farad} = 1 \text{ F} &= \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = \frac{3 \cdot 10^9 [Q]_{as}}{\frac{1}{300} [U]_{as}} = 9 \cdot 10^{11} [C]_{as} = 9 \cdot 10^{11} \frac{[Q]_{as}^2}{\text{erg}} = \\ &= 9 \cdot 10^{11} \frac{\text{cm}^2 \cdot \text{dyn}}{\text{dyn} \cdot \text{cm}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm} = 9 \cdot 10^8 \text{ km}, \end{aligned} \quad (30)$$

kde bylo užito vztahu (27) a 3 (15). V praxi měří se kapacita obvykle v jednotkách milionkrát nebo bilionkrát menších:

$$\text{mikrofarad} = 1 \mu\text{F} = 9 \text{ km}, \quad \text{pikofarad} = 1 \mu\mu\text{F} = 0,9 \text{ cm}. \quad (31)$$

Poslední jednotka je tedy o 10% menší než absolutní jednotka kapacity, rovná 1 cm.

Odpor R (ohmický) vodiče je roven podílu napětí, měřeného rozdílem potenciálů na jeho koncích, a procházejícího proudu. Tento podíl je při stálé teplotě a při ustáleném proudu podle *Ohmova zákona* konstantní. Jednotkový odpor má vodič, kterým při stálém jednotkovém napětí protéká jednotkový

proud. Praktická jednotka, zvaná ohm, je tedy rovna odporu vodiče, jímž při napětí 1 voltu prochází proud 1 ampéru, tedy

$$\text{ohm} = 1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = \frac{1}{300} \frac{[U]_{as}}{3 \cdot 10^9 [I]_{as}} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} [R]_{as} = 10^9 [R]_{am}. \quad (32)$$

Odpor závisí na tvaru vodiče tak, že je úměrný jeho délce a nepřímo jeho průřezu (ploše jeho kolmého řezu). Konstanta úměrnosti ρ nazývá se **měrný odpor**, měříme-li rozměry vodiče v cm. Měrný odpor je číselně roven odporu krychle o hraně 1 cm, jíž prochází proud kolmo k dvěma protilehlým stěnám. Jeho praktická jednotka je určena podmínkou

$$[\rho]_p \frac{\text{jednotková délka}}{\text{jednotkový průřez}} = 1 \Omega, \quad (33)$$

z níž plyne

$$[\rho]_p = \Omega \cdot \text{cm}.$$

Měrná vodivost γ (elektrická) je definována jako převrácená hodnota měrného odporu ρ a její praktická jednotka

$$[\gamma]_p = \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}. \quad (34)$$

V praxi se často užívá měrného odporu ρ' , který je definován podobně jako odpor ρ s tím rozdílem, že délka vodiče se měří v metrech a průřez ve čtverečních milimetrech. Je tedy *měrný odpor roven číselně odporu drátu dlouhého 1 m o průřezu 1 mm²* a pro jeho jednotku vychází z rovnice (33)

$$[\rho']_p = \Omega \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{mm}^2 = 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}, \quad (35)$$

z čehož vyplývá, že *hodnota měrného odporu ρ' je 10 000krát větší než hodnota měrného odporu ρ .*

Práce vykonaná elektrostatickými silami při průchodu elektriny vodičem je podle definice napětí (potenciálu) rovna součinu prošlého náboje a potenciálního rozdílu mezi počáteční a konečnou polohou náboje. Z toho plyne, že

energie proudu, dodaná zdrojem, měří se v jednotkách rovných práci vykonané při průchodu 1 coulombu napětím 1 voltu, pro kterou platí podle (27) a (28)

$$\begin{aligned} [\text{energie}]_p &= 1 \text{ CV} = 3 \cdot 10^9 [Q]_{as} \cdot \frac{1}{300} [U]_{as} = 10^7 \text{ erg} = \\ &= 1 \text{ joule} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}, \end{aligned} \quad (36)$$

neboť součin absolutních jednotek náboje a napětí dává absolutní jednotku práce, t. j. *erg*. Poslední dva výrazy v hořejší rovnici plynou z (12) a (13). Místo této jednotky se však v praxi bere jednotka mnohokrát větší, a to

$$\text{kilowatthodina} = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ joule}.$$

Naproti tomu v atomové fyzice se energie záření, t. j. energie fotonů i jiných elementárních částic, měří v jednotkách rovných energii, jíž nabude elektron při průchodu potenciálním rozdílem 1 voltu. Elektron má záporný náboj veli-

kosti $4,80 \cdot 10^{-10} [Q]_{as} = 1,60 \cdot 10^{-19}$ coulombů, a tedy zmíněná jednotka zvaná *elektronvolt* je podle (36)

$$\text{elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C V} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ erg.} \quad (37)$$

Výkon proudu P je číselně roven energii dodané zdrojem proudu za vteřinu a měří se ovšem ve *wattech*, event. v *kilowattech* nebo ve *voltampérech*. Vzhledem k (36)

$$[P]_p = [\text{energie}]_p \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1 \text{ VA} = 1 \text{ W} = 10^{-3} \text{ kW.} \quad (38)$$

Ježto se energie proudu mění ve vodiči v teplo, vznikne ve vodiči za vteřinu množství tepla, rovné výkonu proudu. Toto *Joulovo teplo* se měří v jednotkách $\text{cal} \cdot \text{s}^{-1}$ nebo $\text{kcal} \cdot \text{s}^{-1}$, jejichž souvislost s uvedenými jednotkami výkonu a energie proudu plyne srovnáním hořejších rovnic se vztahy (17) a (18).

(Magnetismus)

Praktické jednotky veličin magnetických jsou rovny příslušným absolutním jednotkám elektromagnetickým v těchto případech:

Magnetický pól p (magnetické množství): Jednotkový magnetický pól bodový odpuzuje stejný pól vzdálený 1 cm silou 1 dynu a jeho velikost je podle 3(19)

$$[p]_p = [p]_{am} = \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (39)$$

Magnetický moment m dvojice stejně velkých opačných magnetických pólů bodových se rovná součinu velikosti jednoho z nich a jejich vzdálenosti. Jednotka magnetického momentu je tedy

$$[m]_p = [m]_{am} = [p]_p \cdot \text{cm} = \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (40)$$

Magnetická síla H (intensita magnetického pole) je síla, jíž působí pole na magnetický pól, dělená jeho velikostí, a její praktická jednotka rovná $[H]_{am}$ nazývá se *oersted* a značí se Oe. Podle (39)

$$[H]_p = \text{oersted} = 1 \text{ Oe} = \frac{\text{dyn}}{[p]_{am}} = \frac{\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (41)$$

Magnetická indukce B má v elektromagnetické soustavě též rozměr jako magnetická síla, neboť se rovná součinu magnetické síly H a permeability μ , která je v této soustavě pouhé číslo. Pro její praktickou jednotku se užívá názvu *gauss*, znak G, ač má stejný rozměr jako elektromagnetická jednotka magnetické síly:

$$[B]_p = \text{gauss} = 1 \text{ G} = [H]_p = \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}; \quad (42)$$

jednotky těchto dvou fyzikálně rozdílných veličin mají tak aspoň různé názvy.

Indukční tok magnetický Φ nějakou plochou je dán počtem indukčních trubic prostupujících touto plochou. Jednotkovou plochou prochází při jednotkové indukci jedna indukční trubice. Tedy absolutní elektromagnetickou jednotkou indukčního toku je tok plochou 1 cm^2 v poli, v němž magnetická indukce stojí kolmo k této ploše a má velikost 1 gaussu. Tato jednotka se nazývá *maxwell* a značí se M. Platí pro ni

$$[\Phi]_{am} = \text{maxwell} = 1 \text{ M} = 1 \text{ G} \cdot \text{cm}^2 = \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (43)$$

Indukční tok však můžeme uvést ve vztah s elektrickým napětím. *Indukční zákon Faradayův* totiž praví, že v uzavřeném vodivém okruhu vzniká *elektromotorická síla, úměrná časové změně indukčního toku plochou okruhu za jednotku času*. Vyjádříme-li indukovanou elektromotorickou sílu a indukční tok v elektromagnetických jednotkách, vychází konstanta úměrnosti rovna 1 a Faradayův zákon je dán rovnicí

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (44)$$

Vyjádříme-li ovšem indukovanou elektromotorickou sílu ve voltech a indukční tok v maxwellech, přejde rovnice (44) vzhledem ke vztahu (29) v rovnici

$$\mathcal{E}_{ind} = - 10^{-8} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ volt}. \quad (45)$$

Můžeme však použít právě Faradayova zákona k definici praktické jednotky indukčního magnetického toku, předpokládáme-li, že platí ve tvaru (44), jestliže elektromotorická síla a indukční tok jsou vyjádřeny v praktických jednotkách:

$$[\mathcal{E}]_{am} = [\Phi]_{am} \cdot s^{-1}, \quad [\mathcal{E}]_p = [\Phi]_p \cdot s^{-1}, \quad (46)$$

neboť vzhledem k (44) platí stejný vztah i pro jednotky elektromagnetické. Vzájemným dělením obou rovnic dostaneme

$$[\Phi]_p : [\Phi]_{am} = [\mathcal{E}]_p : [\mathcal{E}]_{am},$$

takže podle (29) a (43)

$$[\Phi]_p = 10^8 [\Phi]_{am} = 10^8 \text{ M} = 10^8 \text{ G} \cdot \text{cm}^2. \quad (47)$$

Tato praktická jednotka indukčního toku nazývá se *weber* a značí se *Wb*.

Vlastní indukčnost (koef. samoindukce, induktivita) a vzájemná indukčnost jsou definovány na základě *Biot-Savartova zákona*. Plyne z něho totiž, že indukční magnetický tok plochou vodiče, vzniklý magnetickým účinkem proudu jím procházejícího, je úměrný intenzitě proudu: $\Phi = LI$. Konstantu L , závislou jen na tvaru vodiče, nazýváme jeho samoindukčností. Jednotkovou samoindukčnost má tedy vodič, který vlastní plochou posílá jednotkový tok, prochází-li jím jednotkový proud. Absolutní elektromagnetickou jednotku samoindukčnosti má tedy vodič, kterým při proudu $[I]_{am}$ prochází tok 1 maxwellu. Podle 3 (22)

$$[L]_{am} = \frac{1 \text{ M}}{[I]_{am}} = \frac{\text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{cm}, \quad (48)$$

kdežto praktická jednotka samoindukčnosti je dána vodičem, který vlastní plochou posílá indukční tok rovný $[\Phi]_p = 10^8$ maxwellů při proudu 1 ampéru. Tato jednotka se jmenuje *henry* a značí se *H*:

$$\text{henry} = 1 \text{ H} = \frac{10^8 \text{ M}}{1 \text{ A}} = \frac{10^8 \text{ M}}{1/10 [I]_{am}} = 10^9 [L]_{am} = 10^9 \text{ cm}. \quad (49)$$

6. DNEŠNÍ STAV ŘEŠENÍ OTÁZKY JEDNOTEK

6.1. Jednotky mezinárodní

Jednoznačnost a neproměnnost fyzikálních jednotek měla být původně zaručena tím, že základní jednotky byly definovány jako „přírodní“ neboli „přirozené“ jednotky, odvozené na př. z rozměrů Země, z gravitační síly nebo z pohybu nebeských těles. Ukázalo se však, že přesnost, s jakou je možno srovnávat skutečné prototypy s podobnými „absolutními“ hodnotami, nevyrovnává se přesnosti mnohých fyzikálních měření laboratorních, dosažitelné zvláště při srovnávání veličin málo odlišných. To vedlo k tomu, že základní fyzikální jednotky, na nichž je vybudována absolutní soustava, byly definovány jistými prototypy, které se v mezích požadované přesnosti neshodují s jednotkami původně zvolenými. V zájmu jednotnosti fyzikálních měr byly těmito prototypy mezinárodní dohodou stanoveny t. zv. *mezinárodní* neboli *internacionální jednotky*, na nichž je vybudována dnešní absolutní soustava měr, jak jsme vyložili v čl. 3. Také při skutečných měřeních používané praktické jednotky byly pak definovány na základě jednotek absolutních. Tím měla být opět zaručena jednoznačnost a neproměnnost praktických jednotek. Tu se však vývoj opakoval: srovnávání v praxi přicházejících veličin s abstraktně definovanými absolutními jednotkami ukázalo se mnohdy obtížným, a tedy málo přesným. Proto byly praktické jednotky stanoveny samostatně, prakticky upotřebitelným způsobem, ovšem tak, aby byly co možná blízké svým hodnotám theoretickým. A takto nově definované praktické jednotky byly pak na mezinárodních zasedáních odborníků přijaty jako *zákonité jednotky*, závazné pro zúčastněné státy. Abychom tyto nové jednotky odlišili od původních praktických jednotek, připojujeme k nim název „mezinárodní“ (internacionální), kdežto původní jednotky, určené jejich vztahem k jednotkám absolutním, nazýváme také — chceme-li to zvláště zdůraznit — „absolutní“ praktické jednotky. Rozlišíme je v dalším výkladu tak, že pro tyto absolutní jednotky ponecháme dřívější označení, ale k znaku jednotky mezinárodní připojíme index *i*.

Pokud jde o veličiny mechanické, t. j. o délku, hmotu a objem, byly vlastně jejich internacionální jednotky vzaty za základ absolutní soustavy; jsou tedy oba druhy jednotek totožné a jejich definice uvedené v 3 nebudeme opakovat. Za to je nutno upozornit, že se mezinárodní watt, určený výkonem elektrického proudu, liší poněkud od wattu absolutního (viz další výklad).

Jisté rozdíly vycházejí však pro veličiny elektrické, jejichž mezinárodní jednotky jsou definovány zcela jiným způsobem než jednotky absolutní. Jsou to mezinárodní jednotky napětí, proudu a odporu, stanovené takto:

Internacionální volt (int. volt = 1 V_i) je definován tím, že elektromotorická síla Westonova kadmiového normálního článku [68,1] při 20 °C je rovna 1,018 30 int. voltu.

Internacionální ampér (int. ampér = A_i) vyloučí z dusičnanu stříbrného 1,118 00 miligramu stříbra za vteřinu.

Internacionální ohm (int. ohm = Ω_i) je odpor, který klade stálému proudu sloupec rtuť 106,300 cm vysoký, hmoty 14,4521 g a všude stejného průřezu, při teplotě 0 °C.

Je pochopitelné, že tyto praktické definice nemohou naprosto přesně sou-

hlasit s definicemi vztaženými k jednotkám absolutním. Velmi přesným měřením bylo zjištěno, že

$$1 V_i = 1,000\ 34 V \qquad 1 V = 0,999\ 66 V_i \qquad (1)$$

$$1 A_i = 0,999\ 85 A \qquad 1 A = 1,000\ 15 A_i \qquad (2)$$

$$1 \Omega_i = 1,000\ 49 \Omega \qquad 1 \Omega = 0,999\ 51 \Omega_i \qquad (3)$$

Snadno se přesvědčíme, že *Ohmův* zákon platí v mezích přesnosti těchto neúplných čísel i pro mezinárodní jednotky. Ale internacionální jednotka výkonu proudu nerovná se přesně jednotce praktické. Nazveme-li ji int. watt, dostaneme z dřívějších rovnic

$$\text{int. watt} = W_i = V_i A_i = 1,0002 \text{ VA} = 1,0002 \text{ W}. \qquad (4)$$

Tedy *internacionální watt* rovný int. voltampéru je o 0,2 *promile* větší než voltampér čili *watt absolutní*. Podobný vztah platí ovšem i pro

$$\text{int. joule} = J_i = W_i \cdot s = 1,0002 \text{ J} = 0,238\ 92 \text{ cal} \qquad (5)$$

a pro

$$\text{int. kWh} = 1,0002 \text{ kWh} = 3,6007 \cdot 10^{13} \text{ erg}. \qquad (6)$$

Také praktická jednotka *tepelné energie* se někdy definuje jakožto *internacionální* jednotka, a to jako množství tepla, potřebné k ohřátí tisíciny int. kilogramu čisté vody ze 14,5 ° na 15,5 °C, a značí se int. cal. Je samozřejmě již podle své definice totožná s „absolutní“ kalorií patnáctistupňovou.

Zbývá ještě promluvit o mezinárodní jednotce základní světloměrné veličiny, totiž *svítivosti*. Jak bylo uvedeno v čl. 5, měří se (směrová) svítivost v **kandelách (nových svíčkách)**. Tato jednotka nahrazuje dřívější mezinárodní svíčku SI, rovnou desetíně vodorovné svítivosti *lampy Harcourtovy*, v níž hoří pentan (C_5H_{12}). Od r. 1948 je určena mezinárodní jednotka svítivosti takto:

Kandela je rovna šedesátině kolmé svítivosti čtverečního centimetru černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny.

Pro skutečná měření v praxi zhotovují se *etalony* neboli *normály* svítivosti, realizované vhodně konstruovanými žárovkami, které mají při předepsaném napětí vodorovnou svítivost daného počtu mezinárodních svíček. Vztah mezinárodní svíčky i kandely k Hefnerově svíčce je dán rovnicemi 5 (22; 22').

Ostatní internacionální jednotky byly již definovány v předešlém článku.

6.2. Giorgiho soustava MKSA (r)

Nejdůležitější z internacionálních jednotek — jednotky elektrické — přestaly vyhovovat praktické potřebě, jakmile pro rostoucí přesnost měření nemohly již být jejich odchylky od absolutních jednotek pokládány za bezvýznamné. Proto byly rozhodnutím Mezinárodní komise pro míry a váhy v říjnu 1946 nahrazeny internacionální jednotky opět jednotkami praktickými, definovanými na základě absolutních jednotek, a to způsobem, kterého užil *Giorgi* ve své soustavě MKS. Soustava MKS byla přijata v elektrotechnice s platností od 1. ledna 1948 a v červnu téhož roku byla doporučena Mezinárodní unií ryzí a užité fyziky jako soustava vhodná pro mezinárodní styky. Dnes je nutno počítat s tím, že se Giorgiho soustava stane sice nejprve jen další měrovou soustavou — užívanou i ve fyzice — ale přesto dříve či později splní svůj ko-

nečný úkol nahradit řadu dnešních soustav jedinou soustavou, která bude přijatelná fysikům i technikům.

Roku 1901 ukázal Giorgi, že je možno vytvořit ryzí soustavu jednotek, která vede k praktickým jednotkám používaným v elektrotechnice, zvolíme-li za základní jednotky délky, hmoty, času a teploty metr, kilogram, vteřinu a stupeň Celsia, k nimž připojíme jako pátou základní jednotku některou z praktických jednotek elektrických nebo magnetických: ohm, ampér, coulomb, volt nebo jistý násobek magnetické permeability vakua. Je zde řada možností, jak volit pátou základní jednotku (event. i čtvrtou), z nichž nejznámější uvádíme v tab. 6,I. Soustava 1 má přednost v experimentálně výhodné definici páté základní jednotky, a proto se budeme v dalším výkladu zabývat výhradně touto soustavou, a to ve tvaru *racionálním*, který lépe vyhovuje modernímu pojetí theorie polí než soustava „iracionální“, založená na klasickém tvaru Coulombových zákonů.

Soustavu 2 doporučoval původně Giorgi, kdežto soustava 3 má tu přednost, že vede k velmi jednoduchým výrazům pro odvozené jednotky. Jednotka hmoty je v ní nahrazena jednotkou elektrického napětí (volt), podobně jako v soustavě 4, kterou navrhl *Kalantarov* (1929), je jednotka hmoty nahrazena jednotkou magnetického indukčního toku (weber). Konečně v soustavě 5 je další jednotkou jednotka magnetické permeability, definovaná jako násobek permeability vakua μ_0 . Přitom je číselný činitel $10^7/4\pi$ volen tak, aby pro ostatní elektrické a magnetické veličiny vyšly praktické jednotky.²⁾

Je nutno zvláště zdůraznit, že ve všech případech, uvedených v tab. 6,I, vycházejí pro stejné veličiny vždy tytéž jednotky. Tyto případy se mezi sebou liší jen tím, že pokládáme jiné jednotky za základní, takže odvozené jednotky jsou vyjádřeny základními jednotkami v různých tvarech.

Tabulka 6,I. Užívané základní jednotky soustavy MKSA

1.	m	kg	s	A (ampér)	°C	} °K
2.	m	kg	s	Ω (ohm)	°C	
3.	m	V (volt)	s	A	°C	
4.	m	Wb (weber)	s	C (coulomb)	°C	
5.	m	kg	s	$10^7/4 \pi \cdot \mu_0$	°C	

Než přistoupíme k podrobnému výkladu o Giorgiho soustavě, vysvětlíme důvody t. zv. *racionalisace*. Gravitační zákon Newtonův, Coulombův zákon elektrostatický a magnetostatický, jakož i zákon Biot-Savartův (Laplaceův) mají tvar zákona „převrácených čtverců“, podle něhož síla v gravitačním, elektrickém i magnetickém poli klesá nepřímou úměrně se čtvercem vzdálenosti. Podle stejného zákona klesá též intenzita světla bodového zdroje, což vysvětlujeme tím, že se světelná energie v každé vzdálenosti r rozloží stejnoměrně po kulové ploše, jejíž povrch má velikost $4\pi r^2$. Moderní fysika, která chápe síly mezi hmotami, náboji a magnety jako působení gravitačního nebo elektromagnetického pole (nikoli jako „působení na dálku“), vysvětluje zákon převrácených čtverců stejnými geometrickými důvody jako u svítícího zdroje, a proto pokládá za správnější vyjádření Coulombových zákonů a zákona Biot-Savartova ve tvaru *racionalisovaném*, stručněji *racionálním*

$$\{F_e = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}, \quad F_m = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 p_2}{4\pi r^2}, \quad dH = \frac{1}{k_0} \frac{Ids}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (7)$$

6²⁾ Tento faktor odpovídá soustavě racionální; neracionální soustavě by odpovídal činitel 10^7 .

který se liší od klasického tvaru 3 (10), 3 (11) a 3 (12) číselným faktorem 4π ve jmenovateli, rovným velikosti *plného prostorového úhlu*, t. j. poměru povrchu koule k čtverci poloměru. Tím, že píšeme tyto zákony v tomto tvaru (7), zavádíme iracionální faktor 4π do rovnic, kde je oprávněn prostorovou symetrií pole kolem bodového náboje nebo kolem magnetického pólu, a vylučujeme jej z rovnic, kde nemá oprávnění. Podobně je tomu s činitelem 2π v rovnicích, v nichž je odůvodněn osovou souměrností. Tak se odstraní neodůvodněná iracionálnost z fyzikálních vztahů, a proto se tento postup, navržený již *Heavisidem* (1822), nazývá racionalisace.

Objasníme to stručně na vzorcích pro kapacitu kondensátorů. Z klasického tvaru Coulombova zákona vychází pro kapacitu rovinného kondensátoru známý vzorec

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \quad (S = \text{plocha desky, } d = \text{vzdálenost desek})$$

a pro kapacitu koule (o poloměru r) $C_2 = \varepsilon r$.

Zavedením činitele 4π do Coulombova zákona zmizí tento činitel v první rovnici, kde není odůvodněn, a objeví se plným právem v rovnici pro kapacitu koule, takže platí „racionalisované“ vzorce:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d}, \quad C_2 = 4\pi \varepsilon r.$$

A nyní se budeme podrobněji zabývat *Giorgiho soustavou racionální se základními jednotkami* m, kg, s, A, °K v 1. řádce tabulky I. Lze ji stručně označit MKSA(r) a její základní jednotky jsou definovány takto:

1. Jednotka délky $[l] = \text{metr} = \text{vzdálenost rysek na mezinárodním prototypu metru při teplotě } 0^\circ\text{C}$ (čl. 3).

2. Jednotka hmoty $[m] = \text{kilogram} = \text{hmota mezinárodního prototypu kilogramu}$ (čl. 3).

3. Jednotka času $[t] = \text{vteřina} = \frac{\text{střední sluneční den}}{24 \times 60 \times 60}$ (čl. 3).

4. Jednotka elektrického proudu $[I]_b = \text{ampér}$ (absolutní) je definována tím, že stálý nekonečně dlouhý přímkový proud jednotkový přitahuje ve vzduchoprázdnu každý délkový metr stejného rovnoběžného proudu ve vzdálenosti 1 metru silou rovnou $2 \cdot 10^{-7}$ newton/metr, kde Giorgiho jednotka síly *newton* = N = kg · m · s⁻² = 10⁵ dynů.

5. Jednotka teploty $[T] = \text{Kelvinův stupeň} = \text{setina rozdílu teplot normálního bodu varu a bodu tuhnutí čisté vody, měřených v thermodynamické teplotní stupnici}$ (čl. 23).

Tyto základní jednotky jsou tedy definovány známým způsobem s výjimkou jednotky proudu, jejíž definice se liší od obvyklé definice absolutního ampéru jako *desetiny absolutní jednotky elektromagnetické*. Uvidíme však ihned, že se obě definice přesně kryjí, a to podle Biot-Savartova zákona.

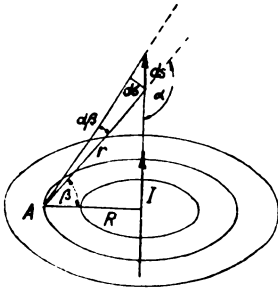
Z rovnice 3 (12) plyne, že magnetický pól p působí podle principu akce a reakce na proudový prvek ds silou, která je v absolutních jednotkách elektromagnetických dána výrazem

$$dF = pdH = \frac{p}{r^2} Ids \cdot \sin \alpha. \quad (8)$$

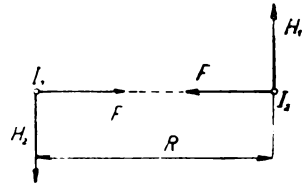
Podle 3 (20) je však zlomek p/r^2 roven μ -násobné intenzitě magnetického pole, vzbuzeného bodovým množstvím p v místě proudového prvku. Z toho soudíme, že libovolné magnetické pole H působí na ds silou (kolmou ke směru proudu i ke směru pole)

$$dF = \mu H I ds \cdot \sin \alpha = BI \sin \alpha ds. \quad (9)$$

Abychom určili sílu působící mezi dvěma rovnoběžnými přímkovými proudy, vypočteme nejprve intenzitu H pole vzbuzeného ve vzdálenosti R od



Obr. 6,1. Magnetické pole nekonečného přímého proudu.



Obr. 6,2. Přitažlivé síly mezi dvěma přímkovými proudy stejného směru.

nekonečného přímkového proudu. Podle 3 (12) a podle obr. 6,1 je intenzita v místě A

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{r^2} \sin \alpha ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{r^2} d\sigma = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{I}{r^2} r d\beta = \frac{I}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{2I}{R}. \quad (10)$$

Podle (8) působí tedy proud I_1 na rovnoběžný přímkový proud I_2 délky ds ve vzdálenosti R silou

$$dF = \mu \frac{2I_1}{R} I_2 ds,$$

úměrnou délce proudu ds , neboť I_1 , I_2 , R jsou podél celého vodiče stálé. Síla působící na délku l je tedy dána vzorcem

$$F_l = \mu \frac{2l}{R} I_1 I_2, \quad (11)$$

platným v absolutních jednotkách elektromagnetických. Sílu, kterou působí ve vakuu přímkový proud 1 A na 1 m stejného proudu rovnoběžného a vzdáleného o 1 m, dostaneme tedy v dynech, dosadíme-li do (11) $\mu = 1$, $l = R = 100$ cm, $I_1 = I_2 = \frac{1}{10} [I]_{am}$. Tak vychází hodnota

$$F_1 = \frac{F_l}{l} = 0,02 \text{ dyn m}^{-1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ g s}^{-2} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-2}. \quad (12)$$

Definice 4 vede tedy k téže jednotce proudu jako obvyklá definice absolutního ampéru. Vzájemné působení dvou rovnoběžných proudů souhlasného směru je znázorněno na obr. 6,2 v kolmém řezu.

Absolutní jednotka proudu se podle definice 4 experimentálně realizuje pomocí přístroje zvaného *proudové váhy*. Váhami modernější konstrukce (*Ayrtonovými*) měří se síla mezi dvěma elektrickými cívkami takto: Pod každým z obou závěsů analytických vah je pevná cívka se svislou osou. Uvnitř každé z nich visí sousední cívka pohyblivá, zavěšená na vahadle. Při průchodu proudu vhodného směru cívkami vznikne otáčivý moment, který se vyrovná zatížením vahadla.

Pětí základními jednotkami lze vyjádřit všechny ostatní jednotky odvozené (způsobem vyloučeným v čl. 2). Probereme je přehledně pro mechaniku, elektřinu a magnetismus; jednotku veličiny X v této soustavě budeme značit prostě $[X]$.

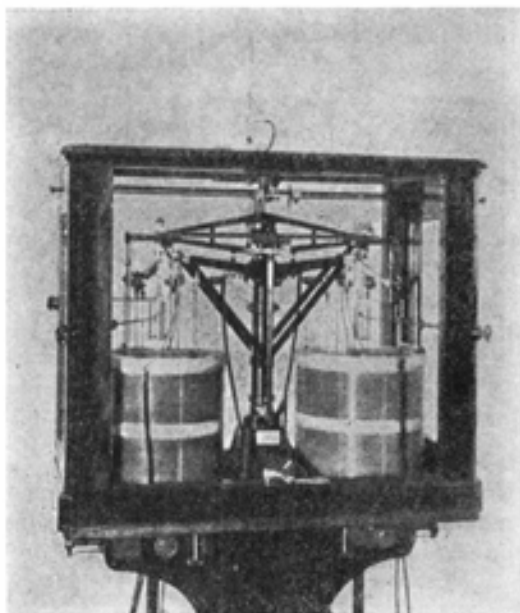
Jednotky *mechanických* veličin obdržíme známým postupem a jsou uvedeny v tab. T, XX. Je z ní zřejmo, že *všechny jednotky veličin kinematických*, které nesouvisí s hmotou nebo silou, *souhlasí s jednotkami technickými*. Naproti tomu *jednotky veličin dynamických jsou téměř desetkrát menší než jednotky technické*, přesněji

$$\frac{[X]}{[X]_t} = \frac{1}{9,806\ 65} =$$

$$\approx 0,101\ 97 \approx 0,1020.$$

t. j.

$$[X] \approx 0,102 [X]_t.$$



Obr. 6.3. Ayrtonovy proudové váhy.

Důvod je ten, že Giorgiho jednotka hmoty je právě v tomto poměru menší než technická jednotka:

$$[m] = \text{kg} = \frac{1}{9,81} [m]_t = 0,102 [m]_t. \quad (13)$$

Pro sílu vychází v soustavě MKSA(r) nová jednotka:

$$[F] = [m] [a] = \text{m kg s}^{-2} = \text{N} = \text{newton (new)} = \frac{\text{kg}^*}{9,806\ 65} \approx 102 \text{ g}^*. \quad (14)$$

Síla má tedy novou jednotku (newton), rovnou přibližně váze 102 gramů. Také pro hybnost a pro tlak vycházejí nové jednotky, někdy zvané „leibniz“ a „giorgi“:

$$[b] = [m] [v] = \text{kg m s}^{-1} = \text{N s (leibniz)} = 0,102 [b]_t. \quad (15)$$

$$[p] = [F] : [l]^2 = \text{N m}^{-2} \text{ (giorgi)} = 10 \text{ barye} \approx 0,102 \text{ kg}^* \text{m}^{-2} =$$

$$= 0,102 \cdot 10^{-4} \text{ at.} = 7,50 \cdot 10^{-3} \text{ tor.} \quad (16)$$

Nejdůležitější je však to, že se některé jednotky Giorgiho — mezi nimi jednotka práce a ovšem i výkonu — přesně kryjí s jednotkami praktickými:

$$[A] = [F] [l] = \text{Nm} = 10^5 \cdot 10^2 \text{ erg} = 10^7 \text{ erg} = \text{joule} = \text{J}, \quad (17)$$

$$[P] = [A] : [t] = \text{joule s}^{-1} = \text{watt} = \text{W}. \quad (18)$$

Tato skutečnost má zásadní význam pro jednotky elektrické, neboť výkon P proudu je dán součinem proudu a napětí: $P = IU$. Tedy mezi jednotkami těchto tří veličin platí ve všech soustavách vztah

$$[U] [I] = [P],$$

kterým je na základě dvou jednotek určena jednoznačně třetí jednotka. Zvolíme-li tedy za dvě z nich jednotky praktické, vyjde nám praktická jednotka i pro třetí veličinu, a v tom je společná výhoda všech soustav v tab. 6, I. V našem případě máme určenu jednotku výkonu (watt) a jednotku proudu (ampér), takže pro jednotku napětí dostaneme zase praktickou jednotku:

$$[U] = \text{W A}^{-1} = \text{V} = \text{volt}. \quad (19)$$

Podobně dostaneme ze známých vztahů

$$\begin{aligned} [R] &= [U] : [I] = \text{V A}^{-1} = \Omega, & [Q] &= [I] [t] = \text{A s} = \text{C}, \\ [C] &= [Q] : [U] = \text{CV}^{-1} = \text{F} = \text{farad}, \end{aligned} \quad (20)$$

takže Giorgiho jednotky proudu, napětí, odporu, náboje a kapacity jsou totožné s jednotkami praktickými. Neplatí to ovšem pro všechny elektrické a magnetické veličiny. Tak na př. pro jednotku permitivity plyne z Coulombova zákona rozměr

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} = \text{A}^2 \text{N}^{-1} \text{s}^2 \text{m}^{-2} = \text{C}^2 \text{J}^{-1} \text{m}^{-1} = \\ &= \text{C V}^{-1} \text{m}^{-1} = \text{F m}^{-1} = \text{farad/metr}. \end{aligned} \quad (21)$$

V těchto jednotkách není ovšem dielektrická konstanta vakua rovna jedné. Vypočteme-li totiž z Coulombova zákona odpudivou sílu mezi dvěma bodovými náboji velikosti jednoho coulombu ve vakuu, musíme dostat stejný výsledek, položíme-li $\varepsilon_r = 1$ v jednotkách elektrostatických a $\varepsilon_r = \varepsilon_0$ v jednotkách MKSA(r). Tedy podle 3 (10)

$$F = \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = \frac{(3 \cdot 10^9 [Q]_{as})^2}{(100 \text{ cm})^2} = 9 \cdot 10^{14} \text{ dyn} = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

a podle (14)

$$F = \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{4\pi \varepsilon_0 \text{m}^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N},$$

odkud plyne vzhledem k (21)

$$\varepsilon_0 = \frac{\text{F m}^{-1}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}.$$

Při tom jsme použili přibližného vzorce 5 (25), který odpovídá zaokrouhlené hodnotě rychlosti světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$. Přesnější hodnota $c = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ vede k výsledku

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ Fm}^{-1} = 8,8543 \cdot 10^{-12} \text{ farad m}^{-1}. \quad (22)$$

Podobně dostaneme permeabilitu vakua μ_0 v jednotkách MKSA (r), položíme-li přitažlivou sílu, kterou nekonečný přímkový proud 1 A přitahuje ve vzduchoprázdnu každý metr stejného rovnoběžného proudu ve vzdálenosti 1 m, vyjádřenou v soustavě MKSA(r), rovnu síle dané hodnotou (12). Při tom vyjdeme z rovnice

$$F_1 = \mu \frac{2l}{4\pi R} I_1 I_2,$$

kteřou dostaneme z (7) stejně jako rovnice (11) z 3 (11) a 3 (12), takže bude:

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\text{A}^2}{\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2} = 1,256\,637 \cdot 10^{-6} [\mu], \quad (23)$$

$$[\mu] = \text{N A}^{-2} = \text{J A}^{-2} \text{ m}^{-1} = \text{H m}^{-1} = \text{henry/metr}; \quad (24)$$

zde jednotka indukčnosti

$$\text{H} = \text{henry} = [L] = \text{JA}^{-2}, \quad (25)$$

neboť z rovnice pro magnetickou energii proudu

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

plyne

$$[W] = [L][I]^2 \text{ čili } \text{J} = [L] \text{ A}^2.$$

V soustavě MKSA(r) nejsou tedy veličiny ε a μ pouhá čísla a mají ve vzduchoprázdnu hodnoty (22) a (23) značně odlišné od jednotky, a to je nesporně velmi nevýhodné. Proto se zavádějí *poměrné* čili *relativní* hodnoty:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Jsou to pouhá čísla, která ve vzduchoprázdnu jsou přesně rovna jedné. Skutečná dielektrická konstanta se vypočte z poměrné dielektrické konstanty ε_r násobením dielektrickou konstantou vakua ε_0 a podobně je tomu s permeabilitou:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_r \mu_0. \quad (26)$$

Praktická výhoda tohoto vyjádření je v tom, že hodnoty ε_r jsou pro všechny látky rovny dielektrickým konstantám měřeným v jednotkách elektrostatických a hodnoty μ_r jsou vesměs rovny permeabilitám měřeným v jednotkách elektromagnetických.

Podobně najdeme jednotky dalších veličin. Tak z Coulombova zákona pro magnetickou sílu dostaneme

$$[F] = \frac{[p]^2}{[\mu][l]^2} \text{ čili } \text{N} = [p]^2 \text{ A}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2},$$

odkud

$$[p] = \text{N m A}^{-1} = \text{J A}^{-1} = \text{V s} = \text{Wb (weber)}. \quad (27)$$

Jednotka *magnetického pólu* je tedy v soustavě MKSA(r) rovna jednotce indukčního toku, jak vidíme z (29). Intenzita magnetického pole je síla připadající na jednotkový pól a její jednotka tedy

$$[H] = \frac{[F]}{[p]} = N A J^{-1} = N A (N m)^{-1} = A m^{-1} = \text{ampér/metr.} \quad (28)$$

Jednotka *indukčního toku*, zvaná weber, má rozměr

$$\begin{aligned} Wb &= [\Phi] = [\text{indukce} \times \text{plocha}] = [\mu] [H] m^2 = \\ &= N A^{-2} \cdot A m^{-1} \cdot m^2 = N m A^{-1} = J A^{-1} = Vs = \text{voltsekunda.} \end{aligned} \quad (29)$$

Tak bychom odvodili i zbývající jednotky elektrické a magnetické a jejich vztahy k jednotkám absolutním. Jsou přehledně sestaveny v tabulce T, XXII.

6.3. Atomové definice základních jednotek

Jak je zřejmé z předešlých článků, vedl vývoj od základních jednotek absolutních nejprve k jednotkám internacionálním, které měly výhodu snadné experimentální realizace. Rostoucí požadavky na přesnost měření a vliv elektrotechniky si však vynutily návrat k praktickým jednotkám, sestaveným v ryzí měrnou soustavu MKSA(r), jejíž definice jsou založeny na základních jednotkách absolutních. Poslední název však neodpovídá skutečnosti u jednotky délky ani u jednotky hmoty a u jednotky času se stává pochybným od té doby, kdy se dosáhlo křemennými hodinami takové přesnosti měření času, že mohla být zjištěna nerovnoměrnost zemské rotace. Tyto okolnosti oživily otázku definice základních jednotek, především pokud jde o jejich jednoznačnost a reprodukovatelnost v mezích daných zvýšenými požadavky přesnosti.

I když nelze dnes pomýšlet na zavedení nových základních jednotek délky a hmoty, jeví se potřeba jejich přesnější a experimentálně výhodnější definice. V tom směru byl učiněn první krok již r. 1927, kdy byl metr vyjádřen jako délka rovná 1 553 164,13 vlnových délek červené čáry kadmiové (srov. 3). Převedením srovnávání délkových měřítek (etalonů) na srovnávání délek světelných vln dosáhlo se snazšího a přesnějšího měření délek. Přesnost je tu omezena jen šířkou užité spektrální čáry, která roste s teplotou zdroje vlivem Doplerova jevu a s počtem isotopů zářícího prvku vzhledem k různosti jejich atomových hmot. Proto se v roce 1948 přešlo od červené čáry žhavého kadmia s osmi isotopy k zelené čáře, kterou vydává výbojka naplněná parami jediného isotopu rtuti Hg 198 a která je mnohem užší, takřka monochromatická spektrální čára. Tento přechod je zásadní povahy v tom smyslu, že se od vlnové délky, ovlivněné statistickými vlivy teploty a nestejně atomové hmoty, přechází k vlnové délce, která je velmi přibližně dána jediné strukturou stejných a poměrně pomalých atomů isotopu Hg 198. Tato snaha založit definici jednotky na atomových vlastnostech nezávislých na statistických vlivech „makrokosmu“ projevila se v poslední době i u dalších jednotek a byl již také navržen systém základních „atomových jednotek“, definovaných výlučně na podkladě atomových vlastností, které podle dnešního stavu fyziky jsou nezávislé na místě i na čase. Jak by bylo možno tyto jednotky definovat, uvádíme podle zmíněného návrhu: [55]

1. Atomový metr: Délka rovná 1 831 249,2 vlnových délek zelené čáry „5460, 7532 Å“ rtuti Hg 198 v standardním vzduchu.

2. Atomová sekunda: Doba 23,8701 · 10⁶ kmitů frekvence 23,870 1 MHz čáry 3,3, vysílané plynným čpavkem NH₃.

3. Atomový ampér: Proud, který budí uvnitř nekonečně dlouhého solenoidu o hustotě 1000 závitů na 1 atomový metr magnetické pole, v němž protony konají precesi s frekvencí 53 505,6 Hz.

4. Atomový newton: 5 · 10⁶ násobek síly, které podléhá 1 atomový metr každého ze dvou nekonečných rovnoběžných proudů 1 atomového ampéru.

5. Atomový coulomb: Náboj přenesený proudem 1 atomového ampéru za 1 atomovou vteřinu.

6. Atomový kilogram: Hmota, které udílí síla 1 atomového newtonu zrychlení 1 atomového metru na čtverec atomové vteřiny.

Definice 1 plyne z přesných měření konaných v posledních letech v Americe, Anglii a ve Francii. Její praktický význam je zřejmý z výkladu o atomových hodinách (čl. 3). Definice 3 je založena na *Larmorově* větě, podle níž je frekvence precesního pohybu částice s daným magnetickým momentem úměrná intenzitě stálého magnetického pole. Lze ji experimentálně zjistit *Rabiovou* methodou radiofrekvenční spektroskopie střídavým polem, které je s precesním pohybem v rezonanci ([7] čl. 16.4). Definice 4 plyne z definice ampéru v soustavě MKSA(r) (čl. 6.2).

7. C H Y B Y M Ě Ř E N Í

Při každém měření — provedeném i nejbystřejším pozorovatelem co nejpřesněji a na nejlepších strojích — dopouštíme se chyb. Jsou nutným následkem nedokonalosti našich smyslů, nepřesnosti měřicích přístrojů a nemožnosti splnit zcela přesně jisté podmínky měření, jako je na př. časová i místní stálost teploty, neproměnnost tlaku vzduchu, event. jeho vlhkosti a pod. Konečně i různé rušivé vlivy vnější, které nelze úplně odstranit (jako otřesy, tepelné záření, vnější magnetické pole atd.), mohou mít vliv na výsledek měření. I když se snažíme všechny nepříznivé okolnosti co nejvíce zmírnit, musíme si být vědomi toho, že měření nejsou a nemohou být dokonale přesná již proto, že *samým měřením do jisté míry měníme měřenou veličinu*, takže přesně vzato naměřená hodnota ani nemůže být naprosto totožná s původní hodnotou veličiny. V kvantové fyzice byl dokonce odvozen vztah mezi nejvyšší možnou přesností dosažitelnou při měření energie a doby nebo polohy a hybnosti hmotné částice (*Heisenbergova* rovnice nepřesnosti), z něhož je patrné, že ani theoreticky nelze měřit polohu a hybnost téže částice s libovolnou přesností, nýbrž že součin nejmenších možných chyb obou veličin je řádově roven *Planckovu* účinkovému kvantu h (srov. 2).

Nejnázorněji se projevuje existence chyb tím, že při opakování téhož měření nedostáváme — až na zcela výjimečné náhodné případy — úplně stejné výsledky. Tuto různost výsledků vysvětlujeme právě růzností chyb, jichž jsme se při měření dopustili; velikosti chyb jsou ovlivněny také okolností, že není možno opakovat žádné měření za naprosto stejných podmínek.

Nevyhnutelný výskyt chyb nesmí být snad důvodem k přehnanému skepticizmu při posuzování významu měření. Jednak se velikost chyb dá ve značné míře omezit vhodným postupem a měřicí methodou, jednak stačí pro praktické účely zkoumat platnost zákonů právě jen s přesností dosažitelnou při měření. Je ovšem třeba vědět, jak přesnost měření posuzovat a jak ji pro určité měření zjistit. Lze očekávat, že přesnost měření souvisí právě s velikostí vzájemných odchylek mezi výsledky opakovaných měření, která přesně vzato si vlastně odporují, takže se klade otázka, lze-li a jak z takových výsledků odvodit správnou hodnotu měřené veličiny. Je nutno předem říci, že správnou hodnotu nemůžeme z měření zatížených chybami nikdy přesně určit. Lze však určit hodnotu „nejsprávnější“, lépe řečeno nejpravděpodobnější, a zároveň odhadnout i její přesnost použitím t. zv. *metody nejmenších čtverců*, a na ní založeného *vyrovnávacího počtu*. Tuto methodu, odvozenou z počtu pravděpodobnosti za jistých jednoduchých předpokladů, vyložíme podrobněji v oddíle C (Vyrovnání měření).

Aby bylo možno zpracovat měřicí chyby počtem pravděpodobnosti, je si

nutno ujasnit jejich příčiny, způsob výskytu a jejich možné druhy. To bude našim nejbližším úkolem.

Při fyzikálních měřeních spolupůsobí velmi rozmanité vlivy, které jsou dvojího druhu. Některé se při daném způsobu měření vyskytují pravidelně a soustavně, jsouce dány povahou metody, vlastnostmi přístrojů a pozorovatele tak, že jejich vliv na výsledek měření má aspoň v jisté míře stálý charakter. Chyby těmito vlivy způsobené nazýváme proto *soustavné* (systematické nebo pravidelné). Vyznačují se tím, že *skreslují výsledek měření určitým pravidelným způsobem*; buď jej za stejných podmínek vždycky zvětšují, nebo vždycky zmenšují, a to při libovolném počtu opakovaných měření. Kromě těchto vlivů pozorujeme vždy působení jistých *nepravidelných* účinků, uplatňujících se nesoustavně, nahodile, které vedou k chybám velmi různým co do velikosti i znaménka. Říkáme jim *náhodné*, nahodilé nebo nepravidelné chyby. Osvětlíme tyto pojmy několika příklady.

Soustavné chyby mohou záležet již v měřicí metodě; tak při měření délky příkládáním přímého měřítka vzniká soustavná chyba tím, že přiložené měřítko není přesně rovnoběžné s měřenou délkou, takže naměříme hodnotu větší. — Při vážení ve vzduchu dostaneme pro vztlak vzduchu menší váhu u látek řídkých než použité závaží, ale větší váhu u látek hustších než závaží. Zde tedy systematická chyba mění znaménko podle podmínek měření, čímž ovšem její pravidelnost není porušena. — Při měření napětí voltmetrem dostáváme hodnoty poněkud menší, ježto odpor voltmetru není nekonečně velký. Podobně při určení gravitačního zrychlení z doby kyvu kyvadla dává známý jednoduchý vzorec pro zrychlení tíže hodnotu vždycky o něco menší, neboť nelze měřit při nulovém rozkyvu, pro nějž jedině vzorec platí přesně. Ve všech podobných případech však známe aspoň znaménko nebo i přibližnou velikost soustavných chyb, ba můžeme zjistit velikost chyby buď výpočtem, nebo vhodným pokusem, anebo můžeme metodu vhodně upravit.

Také v druhém případě, kdy soustavné chyby jsou zaviněny *vlastnostmi přístrojů* a jejich chybami, lze k těmto chybám přihlídnout při hodnocení měření. Je ovšem třeba dotyčné „chyby“ měřicích přístrojů pečlivou kontrolou přesně zjistit. Proto musíme kontrolovat měřítka, závaží, teploměry a všechny k měření užívané „etalony“ nebo „normály“, graduovat anebo kalibrovat měřicí přístroje atd. Již při volbě metody je nutno mít na zřeteli možnost přezkoušet správnost přístrojů (při vážení provádíme na př. kontrolu rovnoramennosti vah dvojím vážením), což se děje nejlépe měřením veličiny známé velikosti.

Konečně i osoba pozorovatele může skreslovat měření určitým pravidelným způsobem a dát tak vznik *soustavným chybám osobním*. Jejich zjištění je ovšem ztíženo jistou nestálostí, jež souvisí na př. s únavou, osvětlením, cvikem a psychotechnickými vlastnostmi pozorovatele. Zvláště se projevují osobní rozdíly při pozorování časových koincencí a při odhadu zlomků nejmenších dílků stupnice; pro takové případy se určují t. zv. „osobní rovnice“ pozorovatelů.

Účelem předcházejících poznámek je ozřejmit povahu soustavných chyb do té míry, aby bylo jasno, že ve všech běžných případech je dovedeme vzít v počet a vyloučit je tak z výsledků měření. Je to ovšem umožněno právě jejich pravidelností, a proto je pochopitelné, že se nemůžeme stejným způsobem vyrovnat s chybami náhodnými, jejichž výskyt je po výtce prost jakékoli soustavnosti. Kdyby tomu tak bylo doslova, nebyl by problém náhodných chyb

ani přibližně řešitelný. Proto předpokládáme při jeho řešení, že náhodné chyby se neřídí ničím jiným než právě náhodou, která počne jevit určité zákonitosti, máme-li na mysli rostoucí počet jednotlivých dějů. *Zákonitostmi platnými mezi velkým počtem jedinců zabývá se statistika, která své matematické základy čerpá z počtu pravděpodobnosti.* V následujícím článku ukážeme, jak počet pravděpodobnosti na podkladě četných pozorování řeší otázku náhodných chyb; při tom si musíme být vědomi toho, že vztahy takto získané neplatí zcela přesně pro každé jednotlivé měření, nýbrž s jistou mírou přibližnosti pro *velký počet měření*, a to tím přesněji, čím více je měření.

Podotýkáme, že theorie chyb není jediným oborem fyziky, v němž se musíme spokojit statistickými zákony místo přísných zákonů individuálních, platných pro jednotlivé děje samostatně; je to vedle klasické kinetické theorie hmoty zvláště moderní kvantová statistika, která s úspěchem řeší mnohé obtížné úkoly nové fyziky.

Dají se tedy řešit oba krajní případy: úplné pravidelnosti a dokonalé neuspořádanosti měřicích chyb, kdežto velmi obtížným zůstává případ, kdy se chyby měření nedají přesně zařadit do těchto dvou kategorií. Pak mluvíme o *anomálním* (abnormálním) rozložení chyb a tu ovšem výsledky odvozené v dalším výkladu platí tím méně, čím více se skutečnost liší od jednoduchých předpokladů, jimiž si řešení úlohy usnadňujeme.

Tato poznámka se týká také t. zv. hrubých chyb a ovšem i možných omylů, kterých se někdy při měření dopouštíme z různých příčin (nepozornost, únava, špatné podmínky pozorovací a pod.) nebo i zdánlivě bezdůvodně. Projeví se právě svou odlišnou povahou (velikostí), která nám umožní zjistit je a vymýtit měření jimi zatížená, jež se nemají nikdy jen opravovat podle ostatních hodnot nebo dokonce podle očekávaného výsledku.

8. BINOMICKÝ A NORMÁLNÍ ZÁKON ČETNOSTI

Ve smyslu předešlých úvah pokládáme za náhodné jen takové chyby, které jsou výsledkem vlivů zcela nepravidelných, jejichž účinky se skládají podle náhodného seskupení; tato představa se někdy nazývá hypotéza elementárních chyb, neboť si můžeme každou náhodnou chybu myslit složenou z většího počtu velmi malých, ojedinele nepozorovatelných elementárních chyb. Aby vznikla pozorovatelná chyba, musí se složit v témž smyslu jistý počet takových elementárních chyb. Předpokládáme, že jejich znaménka i velikosti jsou nepravidelně rozděleny na jednotlivé chyby. Především tedy bude velmi přibližně stejný počet elementárních chyb kladných i záporných a patrně i jejich skládáním vzniknou stejně často chyby kladné jako chyby záporné. Nejčastěji se však sejde aspoň přibližně stejný počet elementárních chyb kladných i záporných, a tím vzniknou velmi malé náhodné chyby. Méně častý bude případ, kdy elementární chyby jednoho znaménka ztatečněji převýší počet elementárních chyb znaménka opačného, a pak vznikne náhodná chyba poněkud větší. Takový případ bude tím vzácnější, čím větší bude příslušná jednostranná převažá; takže počet náhodných chyb bude s velikostí chyb značně klesat.

Z vylíčené představy o vzniku náhodných chyb vyplývají tyto povšechné zákonitosti, potvrzené zkušeností:

Při velkém počtu měření vyskytne se zhruba stejný počet chyb kladných i záporných a malé chyby jsou početnější než chyby větší.

Podrobnější matematickou úvahou lze dojít k dokonalejší formulaci zákona o náhodných chybách, který vyplyne z hypotézy o elementárních chybách. Při jeho odvození se omezíme na nejjednodušší případ, vyznačený těmito předpoklady:

1. Při každém měření působí m náhodných vlivů, které jsou navzájem nezávislé.

2. Každý z těchto vlivů dává vznik elementární chybě velikosti a , a to kladné nebo záporné.

3. Kladné i záporné chyby a jsou stejně časté, t. j. pravděpodobnost elementární chyby $+a$ i $-a$ je rovna $1/2$.

Za těchto předpokladů jsou všechny skutečné chyby celistvými násobky a a leží mezi krajními hodnotami $\pm ma$. Abychom určili pravděpodobnost, s jakou vznikne výsledná chyba určité velikosti, označme případ vzniku kladné elementární chyby znakem a , případ vzniku záporné chyby znakem b . Jeden vliv může vést jen ke dvěma chybám, $+a$ nebo $-a$; druhý vliv může nezávisle na prvním připojit kladnou nebo zápornou chybu k $+a$ i k $-a$. Tedy počet možných případů se připojením každého dalšího vlivu zdvojnásobí, jak vidíme ze schématu v tab. 8.I.

Tabulka 8.I. Schema binomického rozložení

Počet vlivů	Možné případy	Počet možných případů	Různé druhy možných případů
1	a, b	2	a, b
2	aa, ab, ba, bb	$4 = 2^2$	$aa, 2 ab, bb$
3	$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$	$8 = 2^3$	$aaa, 3 aab, 3 abb, bbb$
⋮	⋮	⋮	⋮
m	$a \dots ab \dots$ $\dots bb \dots bb$	2^m	$(a, b)^m$

Obecně vlivech 2^m možných případů (je to počet variací druhé třídy s opakováním z m prvků), z nichž některé ovšem obsahují stejný počet případů a (i b) a vedou ke stejné výsledné chybě. Označíme-li případy, které se liší jen pořadím písmen, jednou skupinou, před níž napíšeme počet případů, dostaneme schéma uvedené v posledním sloupci tab. 8.I. Je tu úplná obdoba s mocninami dvojčlenu, která je předem samozřejmá, takže můžeme psát v případě m vlivů

$$\bullet \binom{m}{0} a^m, \binom{m}{1} a^{m-1} b, \binom{m}{2} a^{m-2} b^2, \dots, \binom{m}{l} a^{m-l} b^l, \dots, \binom{m}{m} b^m;$$

v tabulce je to označeno symbolem $(a, b)^m$. Počet případů, které vzniknou spojením l kladných a $m-l$ záporných elementárních chyb, je tedy dán binomickým koeficientem

$$\binom{m}{l} = \frac{m(m-1)\dots(m-l+2)(m-l+1)}{l!} = \frac{m!}{l(m-l)!} = \binom{m}{m-l}. \quad (1)$$

Všechny tyto případy vedou k téže chybě:

$$\varepsilon_l = [l - (m - l)] a = (2l - m) a;$$

její pravděpodobnost $P(\varepsilon)$, daná počtem příznivých případů, děleným počtem možných případů, je podle předešlého výkladu

$$P(\varepsilon) = \binom{m}{l} : 2^m = \frac{1}{2^m} \binom{m}{l}, \quad \varepsilon_l = (2l - m) a. \quad (2)$$

Tím je dáno t. zv. *binomické rozložení chyb*, které je souměrné vzhledem k nulové chybě, jejíž pravděpodobnost

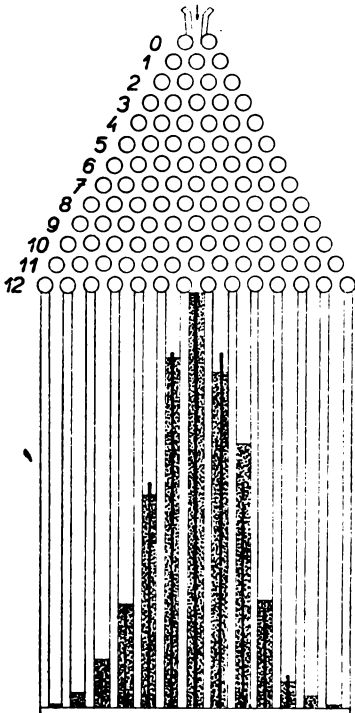
$$P(0) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{m/2}. \quad (3)$$

Podle (2) vznikne totiž chyba $\varepsilon' = -\varepsilon$ pro $l' = m - l$, takže podle (1)

$$P(-\varepsilon) = P(\varepsilon).$$

Je zřejmo, že pro sudé $m = 2k$, kdy všechny chyby jsou sudými násobky a , je největší pravděpodobnost nulové chyby. Pro m liché, kdy vznikají jen liché násobky a , jsou nejpravděpodobnější chyby $+a$ a $-a$. Pravděpodobnost ostatních chyb v obou případech klesá souměrně na obě strany, až pro $\varepsilon =$

$= \pm ma$ je rovna $\frac{1}{2^m}$ a pro všechny chyby větší než ma je přesně nulová.



Význam určení pravděpodobností theoretických (zvaných též *a priori*) je v tom, že souhlasí s pravděpodobnostmi statistickými, což značí, že z velikého počtu N měření bude mít chybu a velmi přibližně $NP(\varepsilon)$ měření. O tom se můžeme přesvědčit *Galtonovým binomickým přístrojem* (obr. 8,1). Sypká hmota (zrnka, broky, kuličky) sype se do přístroje mezi dvěma válečky (kruhovými destičkami) 0, 0 a je postupně rozptylována dalšími válečky 1 až 12 sestavenými v trojúhelníku tak, že každá následující vodorovná řada je posunuta vlevo o délku rovnou poloměru váleček, jehož velikost odpovídá elementární chybě a . Válečky 1, 1, 1 rozdělí zrnka na poloviny, další čtyři válečky 2, 2, 2, 2 na čtvrtiny atd., až nakonec se zrnka shromáždí ve stejně širokých sloupcích do výše úměrné počtu zrněk. V našem případě je $m = 2k = 12$, a proto označíme sloupce od leva čísla $-6, -5, \dots, -1, 0, +1, \dots, +6$. Pak s -tému sloupci přísluší podle (2) chyba

$$\varepsilon = (2l - m) a = 2(l - k) a = 2sa,$$

$$s = l - k$$

Obr. 8,1. Skutečné rozložení broků v Galtonově přístroji ve srovnání s theoretickým tyčkovým diagramem.

a její pravděpodobnost, znázorněná na obr. 8,1 výškou úsečky tyčkového diagramu, je

$$P(\varepsilon) = P(2sa) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k+s} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k-s}, \quad |s| \leq k = 6; \quad (4)$$

Obr. 8,1 ukazuje jedno z pozorovaných rozložení 11 000 broků v Galtonově přístroji.

Polygon má 13 vrcholů o úsečkách $s = 0, \pm 1, \dots, \pm 6$ a o pořadnicích

$$P(0) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6} = \frac{924}{4096} = 0,2256, \quad P(2a) = P(-2a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{5} = 0,1934,$$

$$P(4a) = P(-4a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{4} = 0,1209, \quad P(6a) = P(-6a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{3} = 0,05371,$$

$$P(8a) = P(-8a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{2} = 1,611 \times 10^{-2}, \quad P(10a) = P(-10a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{1} = \\ = 2,929 \times 10^{-3},$$

$$P(12a) = P(-12a) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{0} = 2,441 \times 10^{-4}.$$

Vyšetřeme nyní, jakému rozložení se blíží binomické rozložení chyb, roste-li bez omezení počet elementárních vlivů. Sledujme tuto otázku pro sudé $m = 2k$ a najděme poměr $P(2sa) : P(0)$. Podle (4) bude

$$\frac{P(2sa)}{P(0)} = \frac{\binom{2k}{k+s}}{\binom{2k}{k}} = \frac{2k(2k-1) \dots (2k-k-s+1)}{2k(2k-1) \dots (2k-k+1)} \cdot \frac{k!}{(k+s)!} = \\ = \frac{k(k-1) \dots (k-s+1)}{(k+1)(k+2) \dots (k+s)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{s-1}{k}\right)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{k}\right)}.$$

Tedy

$$\ln \frac{P(2sa)}{P(0)} = \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \ln \left(1 - \frac{2}{k}\right) + \dots + \ln \left(1 - \frac{s-1}{k}\right) - \\ - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{2}{k}\right) - \dots - \ln \left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

Užijeme-li známého rozvoje

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

a omezíme-li se na malé hodnoty s proti k , můžeme s dostatečnou přesností psát $\ln(1+x) = x$, čímž dostaneme

$$\ln \frac{P(2sa)}{P(0)} = -\frac{1}{k} - \frac{2}{k} \dots - \frac{s-1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{2}{k} \dots - \frac{s}{k} = \\ = -\frac{2}{k} (1+2+3+\dots+s-1) - \frac{s}{k} = -\frac{2}{k} \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s}{k} = -\frac{s^2}{k},$$

odkud

$$P(2sa) = P(0) e^{-\frac{s^2}{k}} = P(0) e^{-\frac{4s^2 a^2}{4ka^2}}, = P(0) e^{-\frac{s^2}{ka^2}},$$

$$|s| = 0, 1, 2, \dots \leq k. \quad (5)$$

Tento výsledek platí ovšem jen pro uvedené hodnoty s , kdežto pro chyby, které nejsou sudými násobky a , je pravděpodobnost rovna nule. Chceme-li tedy toto nespojitě rozložení chyb nahradit spojitým rozložením, vypočteme pravděpodobnost, že chyba leží v určitém malém intervalu kolem chyby ε , a dělíme šířkou intervalu. Tak dostaneme průměrnou pravděpodobnost, připadající na jednotkový interval, která přejde v hustotu pravděpodobnosti v místě ε , když oba krajní body intervalu splynou s ε .

Pravděpodobnost, že chyba leží v intervalu $(2sa - a, 2sa + a)$, je $P(2sa)$, a tedy hustota pravděpodobnosti

$$\eta(2sa) = \frac{P(2sa)}{2a}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Přítom mezní hodnota součinu $4ka^2$ musí být konečná a kladná; označíme ji

$$\frac{1}{h^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4ka^2. \quad (6)$$

Tak dostaneme rovnici

$$\eta(\varepsilon) = \eta_0 e^{-h^2 \varepsilon^2}, \quad \eta_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(0)}{2a}, \quad (7)$$

kteřá platí pro libovolné ε a ve které konstanta η_0 je podle (3) a (6) dána mezní hodnotou

$$\eta_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h \sqrt{k}}{2^{2k}} \left(\frac{2k}{k} \right),$$

kteřou najdeme takto: ¹⁾ Součin $\eta(\varepsilon) d\varepsilon$ dává pravděpodobnost, že chyba leží v malém intervalu $\left(\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}, \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2} \right)$, který budeme značit $< \varepsilon \pm \frac{1}{2} d\varepsilon >$.

Sečtením těchto součinů pro všechny možné hodnoty ε , t. j. integrací od $-\infty$ do $+\infty$, dostaneme pravděpodobnost, že chyba leží mezi $-\infty$ a $+\infty$ a rovná se ovšem jedné. Podle (7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\varepsilon) d\varepsilon = \eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1 \quad (8)$$

a substitucí $t = h\varepsilon$ plyne

$$\frac{\eta_0}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1. \quad (8a)$$

^{8 1)} Tuto mezní hodnotu lze určit přímo ze známého vzorce *Stirlingova* pro $\lim_{k \rightarrow \infty} k!$, čímž ovšem dojdeme také k rovn. (10). Viz na př. [70], str. 13.

Ze známé hodnoty *Laplaceova integrálu*²⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad (9)$$

dostaneme z (8a)

$$\eta_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad (10)$$

$$\eta(\varepsilon) = \eta_0 e^{-h^2 \varepsilon^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}. \quad (11)$$

Tato rovnice vyjadřuje *normální zákon chyb*, zvaný též *zákon Laplaceův* nebo *Gaussův*. Určuje hustotu pravděpodobnosti chyb jako spojitou funkci jejich velikosti, ze které můžeme odvodit, jak se mění hustota, s níž jsou chyby rozloženy v řadě velkého počtu n opakovaných měření. Pravděpodobnost, že chyba leží v intervalu $\langle \varepsilon \pm \frac{1}{2} d\varepsilon \rangle$, je podle předešlého výkladu $\eta(\varepsilon) d\varepsilon$, a tedy počet chyb v něm je $dn = n\eta(\varepsilon) d\varepsilon$. Na jednotkový interval v místě ε připadá tedy počet chyb

$$y(\varepsilon) = \frac{dn}{d\varepsilon} = n\eta(\varepsilon). \quad (12)$$

Součin (12) je pak *hustota chyb* velikosti ε neboli *četnost chyby* ε . Z rovnice (12) vidíme, že hustota pravděpodobnosti

$$\eta(\varepsilon) = \frac{y(\varepsilon)}{n},$$

a proto ji nazýváme také *poměrná* (relativní) *četnost chyby* ε . Vzhledem k tomu nazýváme křivku, která znázorňuje rovnici (11) v pravouhlých souřadnicích, *normální křivkou četnosti* nebo častěji *Gaussovou křivkou*. Její tvar závisí na velikosti konstanty h , která se nazývá *míra přesnosti*, neboť s rostoucím h roste četnost nulové chyby a křivka se stává štíhlejší (viz obr. 8,2). Tedy s rostoucím h roste počet správnějších výsledků a ostatní měření se kupí těsněji kolem správné hodnoty, což odpovídá obvyklému pojmu přesnosti měření.

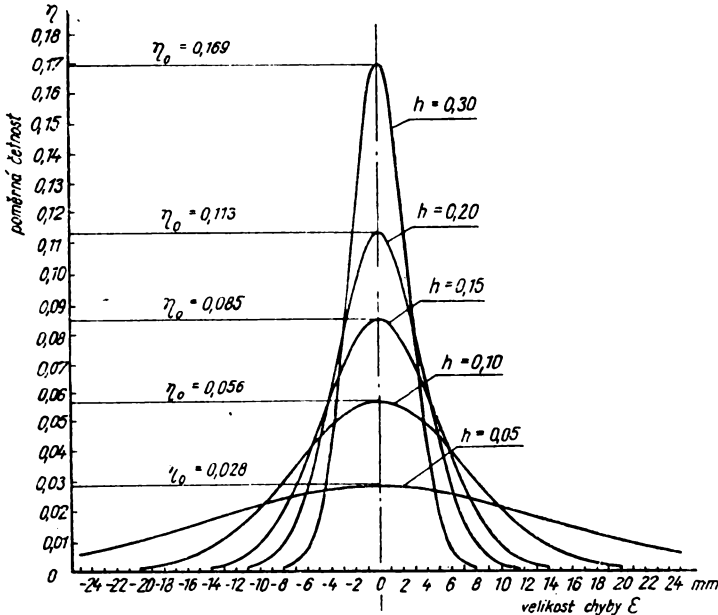
Míru přesnosti lze uvést ve vztah s jinou veličinou, která podává názornější představu o přesnosti pozorování, totiž se *střední chybou* (*kvadratickou*), zvanou též *směrodatná odchylka*. Ježto průměrná hodnota chyby, počítaná ze všech chyb dané řady, je následkem zhruba stejného výskytu kladných i záporných chyb velmi blízká nule, musíme střední hodnotu chyby počítat buď z absolutních hodnot (t. zv. *průměrná chyba*), nebo tak, že vypočteme nejprve průměr čtverců všech chyb a tento průměrný čtverec odmocníme. Tím dostaneme právě zmíněnou střední (*kvadratickou*) chybu, kterou značíme δ . Platí pro ni

$$\delta^2 = \frac{1}{n} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2, \quad (13)$$

8²⁾ Na př. [70], str. 13.

nebo nahradíme-li součet integrálem přes všechny možné velikosti chyby, pak podle (12)

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 dn = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 y(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon = \eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \\ &= \frac{\eta_0}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \end{aligned}$$



Obr. 8.2. Normální křivky četnosti pro různé hodnoty míry přesnosti h .

a vzhledem k (10)

$$\delta^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \cdot 2tdt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}h^2} \int_0^{\infty} t d(e^{-t^2}).$$

Integrací po částech však plyne podle (9)

$$\int_0^{\infty} t d(e^{-t^2}) = [te^{-t^2}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

takže

$$\delta^2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}h^2} \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{1}{2h^2} \quad \text{čili } \delta = \frac{1}{\sqrt{2}h}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}. \quad (14)$$

Střední chyba je tedy nepřímo úměrná míře přesnosti; tím je jen novým způsobem potvrzen význam konstanty h pro posouzení přesnosti měření.

Srovnáním rovnic (10) a (14) dostaneme další názorný vztah

$$\eta_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta} = \frac{1}{2,51 \delta} = \frac{0,399}{\delta} \doteq \frac{0,4}{\delta} \text{ nebo } \delta \doteq \frac{0,4}{\eta_0}. \quad (15)$$

To znamená, že poměrná četnost nulové chyby je nepřímo úměrná střední (kvadratické) chybě. Platnost tohoto vztahu můžeme kontrolovat u skutečných měření (známe-li správnou hodnotu měřené veličiny), vypočteme-li z rovnice (13) střední chybu δ . Než však k tomu přistoupíme, ukážeme, jaký geometrický význam má poslední veličina pro normální křivku četnosti, určenou zákonem (11) v soustavě souřadnic ε , η . Vyšetřme, pro kterou velikost chyby má tato křivka bod obratu. Mění se v něm smysl poloměru křivosti, tedy znaménko druhé derivace funkce $\eta(\varepsilon)$ podle ε , takže tato derivace v něm musí vymizet. Dvojnásobným derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\varepsilon} &= -\eta_0 e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot h^2 2\varepsilon = -2h^2 \eta_0 \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}, \\ \frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2} &= -2h^2\eta_0 (e^{-h^2\varepsilon^2} - \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} \cdot 2h^2\varepsilon) = 2h^2 \eta_0 e^{-h^2\varepsilon^2} (2h^2\varepsilon^2 - 1); \end{aligned}$$

odtud plyne, že křivka má bod obratu pro ε dané podmínkou

$$2 h^2 \varepsilon^2 - 1 = 0,$$

z níž je patrné vzhledem k (14), že bod obratu normální křivky četnosti je vzdálen od její osy souměrnosti právě o délku rovnou střední kvadratické chybě. Nezávisle na přesnosti měření přísluší mu poměrná četnost

$$\eta_\delta = \eta_0 e^{-1} = \frac{\eta_0}{e} = 0,6065 \eta_0. \quad (16)$$

Souvislost míry přesnosti s ostatními dvěma konstantami η_0 a δ , příznačnými pro přesnost měření, ukazuje tab. 8,II, vypočtená ze vztahů (15) a (14) pro pět různých hodnot přesnosti h . Křivky četnosti příslušné těmto hodnotám jsou naryšovány na obr. 8,2, z něhož je také vidět, jak se mění tvar normální křivky četnosti s rostoucí přesností. Vidíme, jak se stoupající přesností měření roste četnost nulové chyby a zmenšuje se střední chyba, daná vzdáleností bodu obratu křivky od její osy souměrnosti, při čemž je splněn i vztah (16).

Tabulka 8,II. Konstanty funkce četnosti pro různě přesná měření

h	0,050	0,100	0,150	0,200	0,300
η_0	0,028	0,056	0,085	0,113	0,169
δ	14,1	7,07	4,72	3,53	2,36

Ukončíme tento článek odvozením vzorce pro průměrnou chybu, která je definována vztahem

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{n}. \quad (17)$$

Odtud

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Sigma |\varepsilon| = \frac{1}{n} \int_{\varepsilon = -\infty}^{+\infty} |\varepsilon| d n = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| y(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \eta(\varepsilon) d\varepsilon$$

a podle (11)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} h} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt,$$

neboť výraz za integračním znaménkem má stejné hodnoty pro záporné i kladné chyby. Poněvadž

$$\int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(e^{-t^2}) = +\frac{1}{2} [e^{-t^2}]_0^{\infty} = \frac{1}{2},$$

pak

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi} h} = \frac{0,564 189 6}{h}. \quad (18)$$

Vzhledem k (14) platí mezi střední a průměrnou chybou vztahy

$$\frac{\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,2533 \doteq \frac{5}{4}, \quad \frac{\delta^2}{\lambda^2} = \frac{\pi}{2} = 1,5708, \quad (19)$$

kterých můžeme stejně jako vztahu (15) použít za kritérium platnosti normálního zákona.

Nahradíme-li v rovnici (11) míru přesnosti h střední chybou δ nebo průměrnou chybou λ , můžeme normální zákon vyjádřit ve tvaru

$$\eta(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta} e^{-\varepsilon^2/2\delta^2} = \frac{1}{\pi\lambda} e^{-\varepsilon^2/\pi\lambda^2}. \quad (20)$$

9. ROZLOŽENÍ CHYB PŘI FYSIKÁLNÍCH MĚŘENÍCH

Pokud jde o otázku rozložení skutečných chyb měření, nelze očekávat, že by vznikaly za tak jednoduchých podmínek, z jakých jsme vyšli v theorii elementárních chyb v předešlém článku.

Především není nutno, aby elementární chyby byly stejně velké pro všechny působící vlivy, a kromě toho není vyloučeno, že některý z vlivů se někdy neuplatní. Konečně je jasno, že počet těchto vlivů je sice velký, ale přece jen konečný. Z toho plyne, že chyby nemohou překročit jistou mez, ať jakkoli zvětšujeme počet měření.

Avšak binomické rozložení se již při několika desítkách vlivů jen málo liší od rozložení normálního, jehož přesnost h je dána rovnicí 8(15), a proto se obvykle předpokládá spojitě rozložení chyb a přijímá se platnost normálního zákona. Při jeho aplikaci musíme si však být vědomi toho, že je to pouze mezní idealisovaný zákon, který může platit jen přibližně, a že kromě toho experi-

mentální zjišťování hěpodobnosti neboli relativní četnosti chyb předpokládá velmi znáření (což se týká i binomického zákona).

Povšechně možndu normálního zákona chyb se skutečností jen jako přibližnou. Sěřené hodnoty se odchyľují v tom smyslu, že pozorované křivky jednak ostřejší, jednak tupější než křivka Gaussova. Matematicky se to projevuje v tom, že poměr δ^2/λ^2 nemá hodnotu dosti blízkou $\pi/2$, jak by mělo být podle 8 (19), při čemž se odchylky nedají vždy vyložit jako odchylky statistické. V prvním případě lze označit rozdělení chyb jako nadnormální (ostré, $\delta^2/\lambda^2 > \pi/2$), ve druhém jako podnormální (tupé, $\delta^2/\lambda^2 < \pi/2$). Zdá se proto, že normální zákon určuje spíše jenom nejpravděpodobnějši rozložení chyb, od něhož se skutečná rozdělení mohou zřetelně lišit. Taková rozložení chyb dají se lépe vystihnout obecnějšim zákonem tvaru

$$\eta(\varepsilon) = \frac{a}{e^{a^2\varepsilon^2} - b}, \quad (1)$$

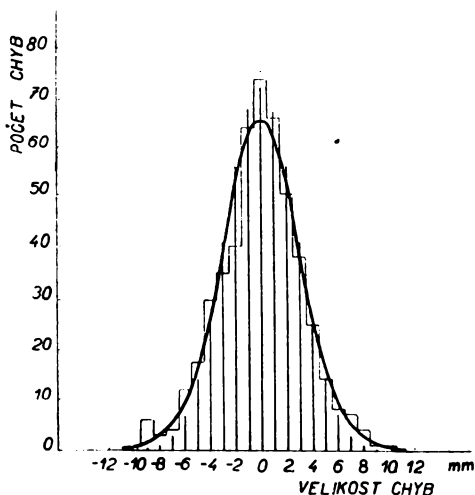
kde a , a^2 jsou kladné konstanty, kdežto b může mít libovolnou zápornou hodnotu nebo kladnou hodnotu menší než 1. Pro záporné b je rozdělení podnormální, pro kladné b nadnormální a pro $b = 0$ je ovšem normální. Theoreticky nebyly tyto skutečnosti dosud objasněny.

Tyto poznatky můžeme dobře ověřit na dvou řadách měření, která byla provedena na katedře fyziky strojní fakulty při srovnávání dvou odporových normálů — velmi přibližně rovných internacionálnímu ohmu — Wheatstonovou můstkovou methodou. Citlivost metody byla volena tak, aby v mezích přesnosti měření bylo možno pokládat oba odpory za přesně stejné. Užitý odporový drát na milimetrovém měřítku byl graduován a malou úpravou bylo dosaženo toho, že nulová poloha kontaktu splývala právě s dílkem 500,0 mm. V této poloze dělí kontakt celkovou délku drátu 1000,0 mm v poměru 1 : 1, což odpovídá správné hodnotě poměru obou odporů; můžeme tedy místo poměru odporů pokládat za měřenou veličinu přímo vzdálenost kontaktu od levého konce drátu a pokládat za její správnou hodnotu délku 500,0 mm. Chyba každého měření bude tedy dána vzdáleností kontaktu od středu drátu, a měříme-li ji na př. v milimetrech, je tím milimetrová chyba zvolena za jednotkovou chybu. Podle své definice je pak průměrná četnost rovna číselně počtu chyb v rozmezí 1 mm a neliší se mnoho od četnosti, která by vyšla pro střed každého rozmezí přechodem k nulovému intervalu. Četnost nulové chyby je tedy přibližně rovna počtu chyb v mezích — 0,5 mm, + 0,5 mm, četnost kladné chyby jednotkové rovna počtu chyb mezi + 0,5 mm a + 1,5, četnost záporné chyby jednotkové rovna počtu chyb v mezích — 0,5 až — 1,5 mm a obecně je četnost chyby rovné n mm dána počtem chyb v mezích $n - 0,5$ mm až $n + 0,5$ mm.¹⁾

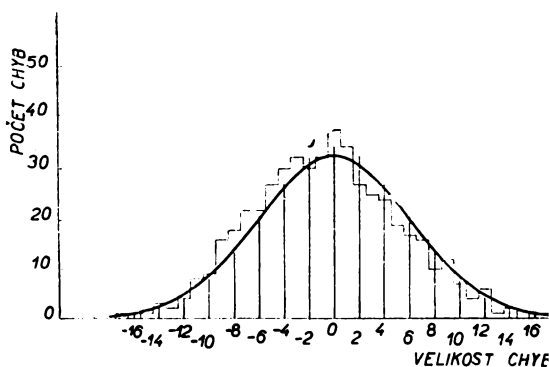
Celkem bylo vykonáno 1000 měření, z nichž 500 bylo provedeno citlivějšim galvanoměrem a 500 méně citlivým. Výsledky zpracování obou řad

9¹⁾ Zvolili jsme za jednotku chyby 1 mm, takže průměrná četnost chyb v každém milimetrovém intervalu je rovna počtu v něm obsažených chyb. K určení četnosti mohli bychom ovšem užít také intervalů jiné šířky, na př. dvojnásobné. Pak bychom při výpočtu četnosti museli dělit počet chyb šířkou intervalu, vyjádřenou ve zvolených jednotkách chyby. Vycházejíce z dvojnásobného intervalu, obdrželi bychom zřejmě pro průměrnou četnost každého z nich hodnotu rovnou průměru četností obou intervalů, z nichž dlíší interval vznikl; rozšířením intervalu se tedy při nezměněné jednotce chyby četnost nezmění. Naproti tomu by zvětšením jednotky chyby vzrostla ve stejném poměru i hodnota četnosti a podobně by se zmenšením jednotky chyby zmenšila touž měrou i četnost chyby.

měření jsou znázorněny na obr. 9,1 a 9,2, kde na vodorovnou osu jsou nanášeny velikosti chyb v mm a na osu svislou počet chyb v jednotlivých milimetrových intervalech velikosti, rovný průměrné četnosti chyb v každém intervalu. Tak dostaneme pro každou řadu stupňovitou křivku, vyjadřující rozložení chyb na různé jednotkové intervaly. Obr. 9,1 vyjadřuje rozložení chyb v I. řadě měření provedených citlivějším galvanometrem, kdežto obraz 9,2 znázorňuje II. řadu s galvanometrem méně citlivým. Obě křivky vyhovují — až na několik menších odchylek — dříve zmíněnému zákonu, podle něhož má být četnost větších chyb menší než četnost chyb menších; pozorujeme vskutku velmi



Obr. 9,1. Rozložení chyb v řadě I můstkových měření s citlivějším galvanometrem.



Obr. 9,2. Rozložení chyb v řadě II můstkových měření s méně citlivým galvanometrem.

zřetelně, že nejčetnější chyby jsou chyby „nulové“ a že všechny ostatní chyby jsou tím vzácnější, čím jsou větší. Kromě toho jsou obě křivky zhruba souměrné k intervalu nulových chyb, což svědčí o tom, že jejich četnost závisí jen na prosté velikosti, nikoli na znamení chyby. Také vidíme, že četnost v obou případech klesá s rostoucí velikostí chyby k nule, ovšem daleko rychleji v první řadě než ve druhé. Naměřené hodnoty jsou nakupeny takřka symetricky kolem správné hodnoty, vyznačené nulovou chybou, ale toto seskupení je mnohem těsnější a dokonalejší v prvním případě než ve druhém. To nás poučuje o významu citlivosti měřicího přístroje pro rozložení chyb. Všechny uvedené vlastnosti odpovídají velmi dobře chybám, které jsme nazvali náhodnými; máme tedy za to, že v našem případě nebylo měření skresleno soustavnými chybami ani hrubšími omyly.

Totéž je patrné z připojené tabulky 9,I, v níž jsou kromě počtu chyb v jednotlivých milimetrových intervalech zapsány také čtverce chyb ϵ a jejich součiny s příslušnými četnostmi. Budou nám užitečné v dalším výkladu.

Jak se rozložení chyb v obou řadách dá vystihnout binomickým a normálním zákonem, je názorně vidět z obr. 9,1 a 9,2, na nichž je binomické rozložení vyznačeno tyčkovým diagramem a Gaussova křivka spojitou čarou.

Tabulka 9, I. Rozložení chyb

ε (mm)	ε^2	I. řada měření			II. řada měření		
		četnost y	$y \cdot \varepsilon$	$y \cdot \varepsilon^2$	četnost y	$y \cdot \varepsilon$	$y \cdot \varepsilon^2$
— 18	324	0	— 0	0	0	— 0	0
17	289	0	0	0	1	17	289
16	256	0	0	0	0	0	0
15	225	0	0	0	1	15	225
14	196	0	0	0	3	42	588
13	169	0	0	0	2	26	338
12	144	0	0	0	4	48	576
11	121	0	0	0	8	88	968
10	100	1	10	100	9	90	900
9	81	6	54	486	16	144	1296
8	64	3	24	192	18	144	1152
7	49	4	28	196	22	154	1078
6	36	12	72	432	22	132	792
5	25	17	85	425	27	135	675
4	16	30	120	480	30	120	480
3	9	35	105	315	32	96	288
2	4	40	80	160	30	60	120
— 1	1	64	— 64	64	32	— 32	32
0	0	74	0	0	37	0	0
+ 1	1	66	+ 66	66	34	+ 34	34
2	4	50	100	200	27	54	108
3	9	38	114	342	25	75	225
4	16	25	100	400	24	96	384
5	25	14	70	350	19	95	475
6	36	8	48	288	17	102	612
7	49	7	49	343	16	112	784
8	64	4	32	256	10	80	640
9	81	1	9	81	12	108	972
10	100	1	10	100	7	70	700
11	121	0	0	0	4	44	484
12	144	0	0	0	6	72	864
13	169	0	0	0	1	13	169
14	196	0	0	0	2	28	392
15	225	0	0	0	0	0	0
16	256	0	0	0	1	16	256
17	289	0	0	0	1	17	289
+ 18	324	0	+ 0	0	0	+ 0	0
Σ		— 212 + 214	— 642 + 598	5276	— 257 + 206	— 1343 + 1016	17185

Pokud jde o zákon binomický, pokusili jsme se aplikovat jej v co nejjednodušším tvaru. Pro první řadu stačilo předpokládat, že náhodné chyby vznikaly současným působením $m = 2k = 30$ vlivů, a každý z nich mohl přivodit kladnou nebo zápornou elementární chybu $a = 0,5$ mm. Na obr. 9, I je toto binomické rozložení znázorněno tyčkovým diagramem, v němž vrcholy svislých úseček, jejichž délky značí četnosti chyb 0 mm ± 1 mm, ..., ± 10 mm, souhlasí zhruba se stupňovou křivkou pozorovaného rozložení chyb. Naproti tomu by k vystižení řady II bylo nutno za předpokladu $a = 0,5$ mm předpokládat více než čtyřnásobný počet elementárních vlivů (asi 130). Vzhledem k tomu, že pro tuto řadu je střední kvadratická chyba přibližně dvojnásobná (a tedy přesnost poloviční) než pro řadu I, volili jsme jednodušší vyjádření, které

předpokládá elementární chyby dvojnásobné ($\alpha = 1$ mm) při málo zvýšeném počtu vlisů ($m = 2k = 34$). Pak ovšem vznikají jen chyby dvakrát větší než pro $\alpha = 0,5$ mm, t. j. rovné sudému počtu milimetrů, a pozorované četnosti musíme proto přepočítat na intervaly šířky 2 mm. Toto roztržení chyb je vyznačeno na obr. 9,2 tyčkovým diagramem, v němž četnosti chyb jsou dány výškou svislých úseček. Tak bylo dosaženo uspokojivého vyjádření chyb v řadě II binomickým rozložením.

Jak dalece splňují obě řady normální zákon, je rovněž zřejmo z obou grafů, v nichž jsou nakresleny spojitě Gaussovy křivky četnosti; pro řadu I je zvoleno $h = 0,232$ mm, pro řadu II $h = 0,114$ mm. Vidíme, že normální zákon nevystihuje rozložení chyb uvedených měření příliš dobře, jak se můžeme přesvědčit přezkoušením platnosti vztahu 8 (15) $\eta_0\delta = 0,4$.

Skutečně plyne z tab. 9,I pro I. řadu ²⁾

$$\eta_0 = \frac{74}{500} = 0,148 \text{ mm}^{-1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{5276}{500}} = 3,25 \text{ mm}, \quad \eta_0\delta = 0,48 \quad (2)$$

a pro II. řadu

$$\eta_0 = \frac{37}{500} = 0,074 \text{ mm}^{-1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{17185}{500}} = 5,9 \text{ mm}, \quad \eta_0\delta = 0,43. \quad (3)$$

Součin $\eta_0\delta$ má tedy pro I. řadu hodnotu o 20% větší a pro II. řadu hodnotu o 7,5% větší než při rozložení normálním; lze z toho usoudit, že vyšetřované řady nejsou přísně normální. Právě použité kritérium počítá s četností nulové chyby η_0 , jejíž hodnota je dosti citlivá na statistické kolísání. S tohoto hlediska je bezpečnější kritérium 8(19). Z tab. 9,I vypočítáme podle 8 (17) pro I. řadu

$$\lambda = 2,48 \text{ mm}, \quad \delta^2/\lambda^2 = 1,72 > \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

a pro II. řadu

$$\lambda = 4,72 \text{ mm}, \quad \delta^2/\lambda^2 = 1,5 < \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Srovnáním těchto hodnot s 8(19) vyplývá, že řada I je zřetelně nadnormální, kdežto řada II je mírně podnormální. V soulase s tím bychom se podrobnějším šetřením přesvědčili, že se řada I dá dobře vystihnout zobecněným zákonem (1), volíme-li

$$a = 0,0441, \quad \alpha = 0,175 \text{ mm}^{-1}, \quad b = +0,696, \quad (6)$$

kdežto řadě přísluší konstanty

$$a = 0,0887, \quad \alpha = 0,127 \text{ mm}^{-1}, \quad b = -0,347. \quad (7)$$

Poměrně malá záporná hodnota konstanty b u řady II nevede k značnějším odchylkám od normálního rozložení, což svědčí o tom, že řada II je jen mírně podnormální.

²⁾ Střední chyba by se měla podle 8 (14) počítat ze součtu čtverců všech 500 chyb; místo toho byl volen postup jednodušší; všechny chyby v téměř milimetrovém intervalu byly nahrazeny jejich průměrnou hodnotou ϵ a součet jejich čtverců součinem ϵ^2 a počtu chyb y . Sečtením těchto součinů uvedených v tab. 9,I pro všechny intervaly obdržíme pak přibližnou hodnotu součtu $\Sigma \epsilon^2$, kterou dosadíme do 8 (14).

10. NEJPRAVDĚPODOBNEJŠÍ HODNOTA MĚŘENÉ VELIČINY

Zákon četnosti chyb, jakožto zákon statistický, může při konečném počtu měření platit jen přibližně, a to i tehdy, když v daném případě vystihuje skutečné rozložení chyb při velmi velikém počtu měření. Kdybychom mohli vykonat „nekonečný“ počet měření, plynulo by z přesné platnosti normálního zákona četnosti, že počet kladných chyb je roven počtu chyb záporných a že *součet všech chyb se rovná nule*. Je-li správná hodnota měřené veličiny x a výsledek i -tého měření x_i , je chyba tohoto měření

$$\varepsilon_i = x - x_i; \quad (1)$$

pak z rovnice

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0, \quad (2)$$

která platí pro velmi velký počet měření N , plyne

$$\sum_{i=1}^N (x - x_i) = N x - \sum_{i=1}^N x_i = 0.$$

Tedy v mezním případě nekonečného počtu měření — za předpokladu platnosti hořejších zákonů — je správná hodnota dána aritmetickým průměrem všech naměřených hodnot:

$$x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (3)$$

Při skutečných měřeních však není počet měření nekonečně velký, ba mnohdy nebývá ani velmi velký, a vzniká otázka, jak najdeme správnou hodnotu. Je pochopitelné, že tato úloha je přesně vzato neřešitelná, ale uvidíme, že se za předpokladu normálního rozložení chyb dá při konečném počtu měření najít nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny.

Nejprve ukážeme, že z četnosti lze odvodit pravděpodobnost, že chyba měření leží v daných mezích. Pravděpodobnost nějakého jevu je dána poměrem počtu případů příznivých k počtu případů možných, a tedy pravděpodobnost

$dP(\varepsilon)$, že chyba leží mezi $\varepsilon - \frac{1}{2} d\varepsilon$ a $\varepsilon + \frac{1}{2} d\varepsilon$, je podle 8 (12)

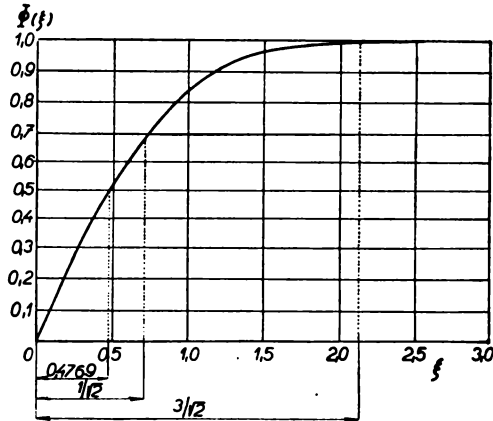
$$dP(\varepsilon) = \frac{dn(\varepsilon)}{n} = \frac{y(\varepsilon)}{n} d\varepsilon = \eta(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (4)$$

Z uvedené definice pravděpodobnosti plyne, že úhrnná pravděpodobnost, s jakou nastane jeden z několika možných jevů, je dána součtem pravděpodobností každého z nich. Tedy pravděpodobnost, že chyba leží kdekoli v uvnitř intervalu, složeného z několika menších intervalů, je rovna součtu pravděpodobností příslušných dílčím intervalům. Proto pravděpodobnost, že velikost chyby je v mezích $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, je určena integrálem, který při normálním rozložení chyb lze upravit takto:

$$P(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dP(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \eta(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon =$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varepsilon} e^{-t^2} dt = \Phi(h\varepsilon) = \Phi(\xi), \quad \xi = h\varepsilon. \quad (5)$$

Funkce $\Phi(\xi)$ daná posledním integrálem, který je funkcí proměnné horní meze ξ , nazývá se „*integrál chyb*“ nebo *funkce chyb* a dá se vyjádřit nekonečnou řadou. Její hodnoty jsou tabulovány ve statistických příručkách a její průběh je



Obr. 10,1. Závislost hodnoty integrálu chyb $\Phi(\xi)$ na velikosti horní meze ξ .

zřejmý z grafického znázornění na obr. 10,1. Pravděpodobnost, že prostá velikost chyby nepřesahuje hodnotu ε , je podle 8 (14)

$$P(\varepsilon) = \Phi(h\varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\delta}\right). \quad (6)$$

Z tabulek a zhruba i z obr. 10,1 plynou tyto hodnoty:

$$P(\delta) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(0,7071) = 0,6827\dots, \quad (7)$$

$$P(\vartheta) = P(0,6745\delta) = \Phi(0,4769) = \frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$P(x) = P(3\delta) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(2,121) = 0,9973, \quad (9)$$

k nimž bychom mohli připojit i samozřejmý výsledek $P(\infty) = 1$, plynoucí z (5) vzhledem k 8 (9). Je tedy pravděpodobnost, že chyba měření náhodně vybraného z řady s danou střední chybou δ má prostou velikost menší než střední chyba, rovná 68%. Chyba velikosti ϑ , definovaná podle (8) tím, že se pravděpodobnost, že nebude při měření překročena, rovná $1/2$, nazývá se *pravděpodobná chyba*.¹⁾ Je přibližně rovna $2/3$ *chyby střední* a její význam je tento:

¹⁾ V počtu pravděpodobnosti označujeme jako pravděpodobné ony případy, jejichž pravděpodobnost je rovna $1/2$.

Je stejně pravděpodobno, že chyba jednoho měření (t. j. kteréhokoli měření vybraného náhodně z vykonaných měření) je menší než ϑ , jako že tato chyba je větší než ϑ . Při velmi velkém počtu měření je tedy přibližně polovina chyb menších a polovina chyb větších než pravděpodobná chyba.

Z rovnice (9) je zřejmo, že chybu velikosti κ , rovnou trojnásobku střední chyby, můžeme vždy pokládat za jakousi „mez“ velikosti chyb, neboť pravděpodobnost, že prostá hodnota chyby je větší než κ , je menší než 3% . I kdybychom vykonali 300 měření, mohli bychom očekávat, že sotva jediná chyba překročí velikost κ , a proto nazýváme tuto hodnotu *krajní chybou*. Z tabulky 9,I vidíme, že obě řady měření v ní uvedené vyhovují tomuto theoretickému závěru. Z 9 (2) plyne pro první řadu

$$\kappa = 3\delta \doteq 9,8 \text{ mm}$$

a z 9 (3) vychází pro druhou řadu

$$\kappa = 3\delta \doteq 17,7 \text{ mm.}$$

V souhlase s tím shledáváme v I. řadě jen dvě chyby velikosti 10 mm a v řadě II také dvě chyby velikosti 17 mm, což jsou největší chyby v každé řadě.

Z tabulky 9,I můžeme také posoudit, jak dalece je splněna základní vlastnost pravděpodobné chyby. Z hodnot 9 (2) a 9 (3) středních chyb dostaneme pro obě řady hodnoty:

$$\text{I. řada } \dots \vartheta = \frac{2}{3} 3,25 \text{ mm} \doteq 2,2 \text{ mm,}$$

$$\text{II. řada } \dots \vartheta = \frac{2}{3} 5,9 \text{ mm} \doteq 3,9 \text{ mm.}$$

Z tab. 9,I pak zjistíme, že mezi 500 chybami I. řady je 294 chyb menších (co do prosté hodnoty) než 2 mm a že ve II. řadě je 271 chyb menších než 4 mm. V obou případech je tedy počet menších chyb než pravděpodobná chyba o něco větší než polovina, jak by mělo být.

Předpokládejme, že provedeme konečný počet n měření veličiny x , která poskytnou hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n , jejichž chyby dané výrazy (1) se řídí normálním zákonem četnosti 8 (11). Položme si nyní otázku, *které rozložení chyb bude nejpravděpodobnější*. Kdyby bylo měření nekonečně mnoho, bylo by rozložení chyb jednoznačně (při dané přesnosti) stanoveno normálním zákonem; při konečném počtu měření však můžeme určit pravděpodobnost různých rozložení, daných velikostmi jednotlivých chyb. Pravděpodobnost, že chyba má jedinou, přesně definovanou velikost, je ovšem rovna nule, a proto musíme vyznačit každé rozložení tím, že jednotlivé chyby leží v jistém malém rozmezí okolo daných hodnot. Hledejme tedy pravděpodobnost, že chyba má velikost v mezích $\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_1}{2}$. Podle (4) a 8 (11) je dána výrazem

$$dP(\varepsilon_1) = \eta(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 = \eta_0 e^{-\lambda^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1. \quad (10)$$

Podobnými výrazy jsou určeny i pravděpodobnosti, že ostatní chyby leží v okolí dalších hodnot $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$. Určité rozložení chyb, vyznačené hodnotami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, má tedy pravděpodobnost rovnou součinu všech těchto pravděpodobností, neboť tu jde o složenou pravděpodobnost, že všechny uve-

dené jevy nastanou současně. Pravděpodobnost daného rozložení chyb je tedy

$$dP(\varepsilon_1) dP(\varepsilon_2) \dots dP(\varepsilon_n) = \eta_0^n e^{-n(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n \quad (11)$$

a závisí jak na velikosti, tak na poloze zvolených intervalů. Při dané velikosti těchto intervalů je však již jen funkcí jejich polohy, t. j. hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Nejpravděpodobnější bude tedy rozložení, pro které má výraz (11) největší možnou hodnotu při dané velikosti intervalů $d\varepsilon_i$. Bude to takové rozložení, při němž má *záporný* mocnitel nejmenší prostou hodnotu. Je tedy nejpravděpodobnější rozložení chyb dáno podmínkou

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \text{minimum}, \quad (12)$$

která dosazením z (1) přejde ve vztah

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 = \text{minimum}. \quad (13)$$

Předpokládáme-li, že v dané řadě měření jsou chyby uspořádány podle tohoto nejpravděpodobnějšího rozložení, můžeme ze vztahu (13) určit hodnotu měřené veličiny. Podle známého pravidla může výraz (13) nabýt extrémní hodnoty jen pro takovou hodnotu X , pro niž je první derivace funkce (13) rovna nule. Tedy nutnou podmínkou minima je

$$2(X - x_1) + 2(X - x_2) + \dots + 2(X - x_n) = 0. \quad (14)$$

Řešením této rovnice dostaneme

$$X = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}. \quad (15)$$

Druhá derivace funkce (13) je pro tuto hodnotu kladná, takže jí odpovídá skutečně *nejmenší hodnota součtu čtverců odchylek* (13). Při nejpravděpodobnějším rozložení chyb je tedy skutečná hodnota měřené veličiny dána aritmetickým středem naměřených hodnot stejně jako při nekonečném počtu měření. Skutečný vztah, který platí mezi správnou hodnotou a hodnotami plynoucími z měření, ovšem neznáme, ale z předešlého výkladu víme, že ze všech vztahů mezi správnou hodnotou a naměřenými hodnotami je nejpravděpodobnější vztah (15) a z toho vyplývá tento důležitý závěr:

Při normálním rozložení chyb je nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny rovna aritmetickému průměru hodnot získaných měřením.²⁾ (16)

Tento výrok ovšem neznamená, že aritmetický střed pozorovaných hodnot je přesně roven správné hodnotě. Jeho smysl je tento: Kdybychom měli veliký počet takových řad o konečném počtu měření, vedl by aritmetický střed častěji k správné hodnotě, než kdybychom hodnotu měřené veličiny počítali kterýmkoli jiným způsobem. Aritmetický střed poskytuje největší naději, že dojdeme ke správné hodnotě. Že aritmetický střed nedává *přesně* správnou hodnotu ani při dosti velkém počtu měření, je zřejmo opět z tab. 9.I. Nejsou v ní sice uvedeny přímo pozorované hodnoty, ale jejich průměr se dá vypočítat ze součtu chyb a ze správné hodnoty x . Podle (1) je totiž

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n x - \sum_{i=1}^n x_i = n x - \sum_{i=1}^n x_i \quad (17)$$

¹⁰⁾ Jak lze dokázat přesným počtem, plyne naopak normální zákon četnosti z předpokladu, že aritmetický střed je nejpravděpodobnější hodnotou měřené veličiny.

a tedy průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (18)$$

Z tabulky můžeme ovšem určit $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ jenom přibližně, ježto neznáme přesné hodnoty všech chyb, ale jen počet chyb v jednotlivých milimetrových intervalech. Avšak pro první řadu

$$\sum_{i=1}^{500} \varepsilon_i \doteq \sum_{s=-10}^{+10} y \cdot \varepsilon = -642 + 598 = -44,$$

a ježto správná hodnota $x = 500,0$ mm (jak bylo vyloženo v čl. 9), pak

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} x_i = x - \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \varepsilon_i \doteq \left(500,0 + \frac{44}{500} \right) \text{ mm} = \\ &= 500,088 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (19)$$

Pro druhou řadu, která je méně přesná, vychází dokonce

$$\sum_{i=1}^{500} \varepsilon_i \doteq \sum_{s=-17}^{+17} y \cdot \varepsilon = -1343 + 1016 = -327,$$

takže

$$\bar{x} = x - \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \varepsilon_i \doteq \left(500 + \frac{327}{500} \right) \text{ mm} = 500,654 \text{ mm}. \quad (20)$$

Odchyvky aritmetických průměrů od správné hodnoty zasahují tedy v obou případech do desetin mm, jež jsou u správné hodnoty ještě zaručeny. Nevíme ovšem, na kolik míst jsou zaručeny hodnoty (19) a (20), které jsou ostatně počítány jen přibližně; byly zatím uvedeny s plným počtem míst, protože otázka přesnosti výsledku bude řešena teprve v příštím článku.

11. PŘESNOST ARITMETICKÉHO PRŮMĚRU

Význam přesnosti měření není třeba blíže odůvodňovat; ale nestačí jen přesně měřit, je nutno také vědět, s jakou přesností bylo měření provedeno. Neboť sebevětší přesnost je bezcenná, nedovedeme-li ji určit nebo aspoň zhruba odhadnout. Přesnost výsledku závisí patrně na přesnosti měření, z nichž byl odvozen. Lze ji charakterisovat kteroukoli z dříve zavedených konstant h , η_0 , δ , ϑ , κ , jež navzájem souvisí známými vztahy, takže lze všechny vypočítat z jedné z nich, na př. ze střední chyby δ , definované rovnicí 8 (13). Její čtverec je roven aritmetickému středu čtverců skutečných chyb, jejichž určení předpokládá znalost správné hodnoty. Tuto správnou hodnotu však zpravidla neznáme (kdybychom ji znali, nemusili bychom měřit), ale dovedeme vždy vypočítat hodnotu nejpravděpodobnější, danou aritmetickým středem všech měření. Tato hodnota se pravděpodobně neliší mnoho od správné hodnoty a lze tedy očekávat, že hodnota střední chyby, počítaná z nejpravděpodobnější hod-

noty, nebude příliš odlišná od střední chyby určené ze správné hodnoty. Můžeme dokonce říci předem, že střední chyba počítaná z aritmetického průměru bude menší než skutečná střední chyba, ježto podle 10 (13) je součet čtverců odchylek nejmenší pro aritmetický průměr, a tedy menší než součet čtverců skutečných chyb. To potvrzuje i vzorec, který nyní odvodíme.

Označíme-li Δ_i odchylku i -tého měření od aritmetického středu \bar{x} , pak podle 10 (14) a 10 (15)

$$\Delta_i = X - x_i = \bar{x} - x_i, \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i = 0 \quad (1)$$

a vzhledem k 10 (1)

$$\Delta_i - \varepsilon_i = \bar{x} - x. \quad (2)$$

Sečtením od 1 do n dostaneme podle (1)

$$-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n\bar{x} - nx = n(\bar{x} - x) \quad (3)$$

a se zřetelem na rovn. (2)

$$\Delta_k = \varepsilon_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (4)$$

Odtud plyne

$$\Delta_k^2 = \varepsilon_k^2 + \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 - \frac{2\varepsilon_k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + n \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2. \quad (5)$$

Avšak

$$\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\varepsilon_i \varepsilon_k)_{k > i}, \quad (6)$$

při čemž v posledním dvojitěm součtu jsou obsaženy všechny součiny $\varepsilon_i \varepsilon_k$ s různými indexy, neboť stejné indexy vedou ke čtvercům ε_k^2 , které jsme už shrnuli do prvního členu výrazu (6). Píšeme-li tedy

$$\sigma = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\varepsilon_i \varepsilon_k)_{k > i}, \quad (7)$$

pak podle (5) a (6)

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \sigma. \quad (8)$$

Není-li počet měření příliš malý, je při normálním rozložení chyb součet $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ blízký nule. Nemůžeme jej však vzhledem k (3) položit rovným nule, při-

pouštíme-li, že se aritmetický průměr \bar{x} liší od správné hodnoty x . Jinak je tomu s dvojitým součtem σ , který obsahuje $\binom{n}{2}$ členů, tedy $\frac{n-1}{2}$ -krát více než jednoduchý součet $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Při tak velkém počtu sčítanců lze očekávat relativně dokonalejší zrušení kladných a záporných členů, jejichž počet je přibližně stejný, a proto budeme předpokládat, že hodnotu σ můžeme s nevelkou chybou pomíjet.

Pro oprávněnost tohoto předpokladu svědčí, že počet kladných a záporných sčítanců v σ může být stejný, i když se počet n' kladných chyb poněkud liší od počtu n'' chyb záporných. Položíme-li

$$n' = m + \nu, \quad n'' = m - \nu,$$

takže

$$n' + n'' = 2m = n,$$

bude počet záporných součinů (jež vznikají spojením kladné chyby se zápornou) roven $n'n''$ a počet kladných členů (vzniklých násobením buď dvou kladných, nebo dvou záporných chyb) bude $\binom{n'}{2} + \binom{n''}{2}$. Tedy přebytek záporných sčítanců

$$k = n'n'' - \left[\binom{n'}{2} + \binom{n''}{2} \right] = m^2 - \nu^2 - \\ - \frac{1}{2} [(m + \nu)(m + \nu - 1) + (m - \nu)(m - \nu - 1)] = m - 2\nu^2 = \frac{n}{2} - 2\nu^2.$$

Je zřejmo, že záleží jen na velikosti ν a ne na znaménku, a dále že pro malé hodnoty ν bude více součinů záporných bez zřetele na to, je-li více chyb kladných či záporných. Pro $\nu = 0$ je záporných členů o $\frac{n}{2}$ více, což je největší možná převaha záporných členů, neboť s rostoucím ν se k zmenšuje, až se pro hodnotu

$$\nu_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{n}$$

počet kladných a záporných členů vyrovná. Tedy pro $\nu < \nu_0$ je více členů záporných, kdežto pro $\nu > \nu_0$ mají převahu členy kladné nad zápornými, což znamená, že v okolí hodnoty ν_0 je σ velmi blízké nule.

Pro $n = 10, 20, 50, 100$ vychází přibližně $\nu_0 = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 5$. Tedy při obvyklém počtu a při dosti malých chybách měření je patrně součet σ velmi blízký nule, liší-li se počet kladných chyb od počtu chyb záporných o několik málo jednotek. Tak tomu při praktických měřeních skutečně bývá a náš předpoklad je tedy plně oprávněn.

Položíme-li v rovn. (8) $\sigma = 0$, obdržíme vztah

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2; \quad (9)$$

vidíme, že součet čtverců odchylek Δ_k je v poměru $(n-1) : n$ menší než součet čtverců skutečných chyb. Dosazením do 8 (13) docházíme konečně ke vzorci

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-1}}, \quad (10)$$

který umožňuje výpočet střední chyby (jednoho měření) z odchylek Δ od aritmetického průměru. Z tohoto vzorce můžeme podle vztahů odvozených v čl. 10 určit i ostatní konstanty přesnosti, na př. pravděpodobnou nebo krajní chybu.

Obrátíme se nyní k další důležité úloze, totiž k určení přesnosti výsledku.

Přistoupíme ihned k řešení nejobecnějšího problému, určit přesnost veličiny závislé na několika měřených veličinách, jejichž střední chyby jsou známy. Nechť je tato veličina dána jako funkce $f(x, y, z, \dots)$ veličin x, y, z, \dots , určených měření se středními chybami $\delta(x), \delta(y), \delta(z), \dots$. Tato funkce budiž spojitá a rozvinutelná v řadu, takže její přírůstek při malých změnách nezávislých veličin dx, dy, dz, \dots lze vyjádřit jejím diferenciálem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

Jsou-li chyby $\varepsilon_i, \varepsilon'_i, \varepsilon''_i, \dots$, jichž jsme se dopustili při n -krát opakovaném měření nezávislých veličin x, y, z, \dots , dostatečně malé, platí pro příslušné chyby φ_i funkce f stejné vztahy jako pro přírůstek funkce:

$$\varphi_i = \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon_i + \frac{\partial f}{\partial y} \varepsilon'_i + \frac{\partial f}{\partial z} \varepsilon''_i + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Umocněním dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_i^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_i'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_i''^2 + \dots + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \varepsilon_i \varepsilon'_i + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \varepsilon_i \varepsilon''_i + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Abychom našli vztah mezi středními chybami $\delta(x), \delta(y), \dots$ a střední chybou $\delta(f)$ funkce f , učiníme předpoklad, že tyto střední chyby byly určeny ze vzorce 8 (13) na základě velkého počtu N měření, a sečteme rovnice, které plynou z (12), klademe-li po řadě $i = 1, 2, \dots, N$. Dostaneme tak vztah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i'^2 + \dots + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \varepsilon'_i + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \varepsilon''_i + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

v němž součty $\sum \varepsilon_i \varepsilon'_i, \sum \varepsilon_i \varepsilon''_i, \dots$ obsahují veliký počet součinů chyb, které jsou stejně často kladné jako záporné, kdežto součty čtverců $\sum \varepsilon_i^2, \sum \varepsilon_i'^2, \dots$ obsahují samé kladné sčítance. Proto můžeme součty součinů, v nichž se kladné členy přibližně ruší s členy zápornými, pominout proti hodnotám součtů čtverců podobně, jako jsme pominuli výraz σ , daný součtem součinů (7). Dojdeme tak k rovnici

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sum_{i=1}^N \varepsilon_i''^2 + \dots,$$

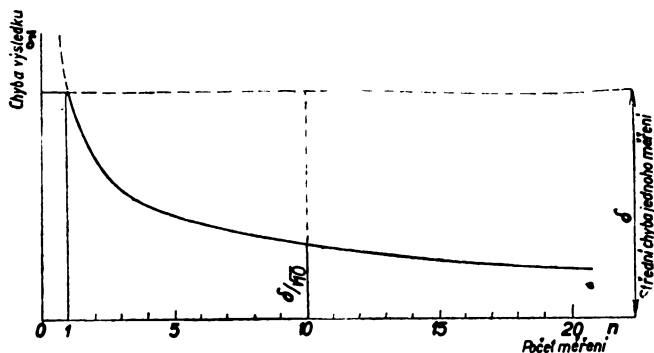
do níž podle 8 (13) dosadíme

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i^2 = N\delta^2(f), \quad \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = N\delta^2(x), \quad \sum_{i=1}^N \varepsilon_i'^2 = N\delta^2(y), \quad \dots,$$

takže po zkrácení N a po odmocnění

$$\delta(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \delta^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \delta^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \delta^2(z) + \dots} \quad (14)$$

Tento obecný vzorec určuje střední chybu $\delta(f)$ funkce libovolného počtu měřených veličin x, y, z, \dots , jejichž střední chyby jsou $\delta(x), \delta(y), \delta(z), \dots$, a můžeme z něho určit střední chybu výsledku ve všech případech, které se vyskytují při praktických měřeních.



Obr. 11,1. Zmenšování chyby aritmetického průměru s rostoucím počtem měření.

Probereme nejdůležitější z nich v příštím článku, v závěru tohoto článku však určíme střední chybu aritmetického průměru. Veličina x byla změřena n -krát, čímž bylo získáno n hodnot x_i . Za výsledek měření byl vzat aritmetický průměr \bar{x} hodnot x_i , které pokládáme za stejně přesné, přisuzující všem stejnou střední chybu δ , vypočtenou z odchylek Δ_i hodnot x_i od průměru podle vzorce (10). Jde tedy o určení střední chyby δ průměru, který můžeme pokládat za funkci n veličin x_i , měřených s touž střední chybou δ . V tomto případě

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$$

a podle vzorce (14)

$$\bar{\delta} = \delta(f) = \sqrt{\frac{1}{n^2} \delta^2 + \frac{1}{n^2} \delta^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \delta^2}.$$

Po úpravě a dosazení z (10) docházíme ke vzorci Besselovu

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n(n-1)}}, \quad (15)$$

kteřý stanoví střední chybu $\bar{\delta}$ aritmetického průměru n stejně přesných měření ze střední chyby jednoho měření δ nebo z odchylek Δ naměřených hodnot od průměru. Plyne z něho důležitý závěr:

Střední chyba aritmetického středu n stejně přesných měření je \sqrt{n} -krát menší než střední chyba jednoho měření, tedy jeho přesnost je \sqrt{n} -krát větší. (16)

Totéž platí ovšem i pro chybu pravděpodobnou a krajní, které jsou podle 10 (8) a 10 (9) úměrné chybě střední.

Z předešlé věty plyne, že theoreticky je možno zvyšováním počtu měření dosáhnout libovolně přesného výsledku. Narýsujeme-li však křivku znázorňující závislost δ na n (obr. 11,1), vidíme, že zprvu klesá δ s rostoucím n velmi rychle, kdežto při větším počtu měření se mění již jen pomalu, blíží se asymptoticky nule. Proto při větším počtu měření další jeho zvyšování již nepřináší podstatné zlepšení výsledku, nemluvíc o tom, že stálost některých veličin nelze zaručit s náležitou přesností po delší dobu.

Závislost přesnosti aritmetického středu na počtu měření bude ještě objasněna skutečným měřením, popsáním na konci příštího článku.

12. ČÍSELNÉ STANOVENÍ VÝSLEDKU A JEHO PRAVDĚPODOBNÉ CHYBY

Aby bylo zřejmo, s jakou přesností je výsledek určen, připojuje se k hodnotě odvozené z měření hodnota (obvykle s oběma znaménky) střední chyby nebo častěji pravděpodobné chyby, definované rovnicí 10 (8):

$$\vartheta = 0,6745 \delta \doteq \frac{2}{3} \delta, \quad \delta = 1,4826 \vartheta \doteq \frac{3}{2} \vartheta. \quad (1)$$

Tento vztah platí jak pro chybu jednoho měření, tak i pro chybu výsledku; dosadíme-li tedy do vzorce 11 (14)

$$\delta(f) = \frac{3}{2} \vartheta(f), \quad \delta(x) = \frac{3}{2} \vartheta(x), \quad \delta(y) = \frac{3}{2} \vartheta(y), \dots,$$

dostaneme pro pravděpodobnou chybu výsledku stejné vyjádření pravděpodobnými chybami měřených veličin:

$$\vartheta(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \vartheta^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \vartheta^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \vartheta^2(z) + \dots} \quad (2)$$

Všechny výsledky, které z tohoto obecného vzorce odvodíme, platí tedy zároveň pro chyby pravděpodobné, střední a ovšem i pro chyby krajní $x = 3\delta$, definované vztahem 10 (9). Je to stejně jako 11 (14) vzorec přibližný, platící tím přesněji, čím menší jsou chyby.

Začneme nejjednodušším případem: určíme chybu *funkce jediné měřené veličiny*:

$$f = f(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = \dots = 0,$$

takže vzorec (2) dává samozřejmý vztah

$$\vartheta[f(x)] = \left| \frac{df}{dx} \right| \vartheta(x). \quad (3)$$

Jde-li na př. o součin konstanty a (nebo jiné přesně určené veličiny) s měřenou veličinou x , plyne odtud závěr, že násobením konstantou vzroste chyba měřené veličiny v témž poměru: $\vartheta(ax) = a\vartheta(x)$.

Důležitý je případ *mocniny* měřené veličiny:

$$f(x) = x^k, \quad \frac{df}{dx} = kx^{k-1}, \quad \vartheta(x^k) = kx^{k-1} \vartheta(x),$$

což lze psát také ve tvaru

$$\frac{\vartheta(x^k)}{x^k} = k \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Poměr chyby k měřené veličině určuje, kolikátou částí celé hodnoty je vzniklá chyba, a nazývá se *poměrná* neboli *relativní chyba*, jež se často vyjadřuje v procentech. Označíme ji indexem r , takže

$$\vartheta_r(x) = \frac{\vartheta(x)}{x}, \quad \delta_r(x) = \frac{\delta(x)}{x}. \quad (4)$$

Vzorec pro chybu k -té mocniny přejde v jednoduchý vztah

$$\vartheta_r(x^k) = k\vartheta_r(x), \quad (5)$$

který praví: *Poměrná chyba k -té mocniny měřené veličiny je k -násobkem její poměrné chyby.* (6)

Je-li $f = \ln x$ (přirozený logaritmus), pak

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \vartheta(\ln x) = \frac{\vartheta(x)}{x} = \vartheta_r(x), \quad (7)$$

a tedy *chyba přirozeného logaritmu měřené veličiny je rovna její poměrné chybě*. Proto se poměrná chyba nazývá někdy *chybou logaritmickou*.

Tato skutečnost má praktický důsledek: Při čtení na logaritmickém pravítku je čtení hodnot logaritmů stejně přesné na všech místech stupnice. To znamená, že relativní chyba výsledků, získaných na logaritmickém pravítku, je stejná bez zřetele na jejich číselnou velikost.

Z funkcí dvou proměnných probereme nejprve *součet* a *rozdíl*:

$$f(x, y) = x \pm y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \pm 1,$$

takže podle (2)

$$\vartheta(x \pm y) = \sqrt{\vartheta^2(x) + \vartheta^2(y)}. \quad (8)$$

Pro *součin* a *podíl* platí též vztah, ale mezi chybami relativními. Je zajímavé, že můžeme oba případy převést na předešlou funkci, píšeme-li

$$xy = xy^{+1}, \quad \frac{x}{y} = xy^{-1}$$

a počítáme-li chybu přirozeného logaritmu

$$\ln(xy^{\pm 1}) = \ln x \pm \ln y.$$

Podle (8)

$$\vartheta [\ln (xy^{\pm 1})] = \sqrt{\vartheta^2 (\ln x) + \vartheta^2 (\ln y)},$$

a nahradíme-li podle (7) chyby logaritmů relativními chybami, máme vzorec

$$\vartheta_r(xy) = \vartheta_r\left(\frac{x}{y}\right) = \sqrt{\vartheta_r^2(x) + \vartheta_r^2(y)}. \quad (9)$$

Rovnice (8) a (9) vyjádříme větou:

Chyba součtu a rozdílu dvou veličin je rovna odmocnině ze součtu čtverců chyb obou veličin a totéž platí pro poměrné chyby součinu a podílu. (10)

Z rovn. (9) plyne v důsledku věty (6) další důležitý vzorec

$$\sqrt{\vartheta_r(x^ky^l)} = \sqrt{k^2\vartheta_r^2(x) + l^2\vartheta_r^2(y)}, \quad (11)$$

který lze odvodit přímo logaritmováním a na nějž navážeme tuto poznámku:

Píšeme-li vzorec (8) ve tvaru

$$\vartheta(x \pm y) = \vartheta(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\vartheta(y)}{\vartheta(x)}\right)^2} = \vartheta(x) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta(y)}{\vartheta(x)}\right)^2\right], \quad (12)$$

vidíme, že chyba součtu (rozdílu) je přibližně rovna $\vartheta(x)$, je-li tato chyba několikrát větší než $\vartheta(y)$. Tedy *větší chyba rozhoduje prakticky o velikosti výsledné chyby*, kdežto malá chyba má vliv jen korekční. Proto je přesnost jedné veličiny bezcenná, je-li druhá veličina málo přesná, a je ekonomické měřit obě veličiny s přibližně stejnou chybou. Z téhož důvodu snažíme se vzhledem k (9), aby se poměrné chyby veličin, jejichž součin nebo podíl chceme zjistit, příliš nelišily. Konečně ze vzorce (11) soudíme, že není vhodné měřit veličiny se stejnou relativní chybou, jde-li o určení obecnějšího součinu mocnin o různých exponentech. Naopak hledíme, aby relativní chyby byly přibližně v obráceném poměru mocnitelů tak, aby oba členy pod odmocninou byly zhruba stejné. Určujeme-li na př. objem drátu průměru 1 mm a délky 10 cm, má být poměrná chyba průměru poloviční než poměrná chyba délky. Měříme-li tedy průměr na př. s chybou 0,01 mm, stačilo by měřit délku s chybou 2 mm a nemá smyslu určovat ji přesněji než asi na 0,5 mm. Měřit délku s přesností 0,1 mm mělo by význam jen tehdy, kdybychom mohli určit průměr s chybou menší než 0,001 mm.

Tím jsme probrali nejdůležitější případy obecného vzorce (2), který dává chybu funkce měřených veličin. Hodnoty těchto veličin jsou obvykle dány aritmetickými průměry měření a jejich střední nebo pravděpodobné chyby jsou tedy určeny vzorcem 11 (15). Výpočet podle tohoto vzorce je při větším počtu měření dosti zdoluhavý, neboť je nutno kromě aritmetického středu určit zdánlivé chyby Δ , vypočítat jejich čtverce, sečíst je, dělit součinem $n(n-1)$ a odmocnit. Jednodušší je výpočet založený na *průměrné chybě*, definované rovnicí 8 (17).

Vzhledem k 8 (19) platí mezi střední a průměrnou chybou vztahy

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta = 0,7979 \delta \doteq 0,8 \delta; \quad \delta = 1,2533 \lambda \doteq \frac{5}{4} \lambda; \quad (13)$$

pro pravděpodobnou chybu dostaneme z (1)

$$\vartheta = 0,8453 \lambda \doteq \frac{5}{6} \lambda; \quad \lambda = 1,1830 \vartheta \doteq \frac{6}{5} \vartheta = 1,2\vartheta. \quad (14)$$

pro krajní chybu určenou rovnicí 10 (9) vychází

$$\kappa = 3\delta = 3,760 \lambda \doteq \frac{15}{4} \lambda. \quad (15)$$

Můžeme však stejně dobře vzít za krajní chybu hodnotu

$$\kappa' = 4 \lambda = 1,061 \kappa, \quad (16)$$

která se liší od κ jen o 6%, neboť pravděpodobnost, že při jednom měření velikost chyby překročí κ' , je $1,4^{0/00}$, tedy téhož řádu jako pravděpodobnost $2,7^{0/00}$ příslušná krajní chybě κ , definované rovnicí 10 (9).

Pozorujeme, že všechny známé chyby se dají snadno vypočítat z chyby průměrné, jejíž číselné určení je zřejmě jednodušší než výpočet střední chyby z 8 (13). Ježto však skutečné chyby neznáme, musíme napřed řešit otázku, jak vyjádříme průměrnou chybu chybami zdánlivými. Podle 11 (4) jsou Δ lineární homogenní funkce chyb ε , a proto, jak se dá dokázat, platí pro ně rovněž normální zákon četnosti. Tedy vztah

$$\frac{\sum |\varepsilon|}{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}}, \quad (17)$$

plynoucím dosazením z 8 (17) a 8 (13) do rovnice (13), odvozené z Gaussova zákona, musí platit beze změny i pro zdánlivé chyby:

$$\frac{\sum |\Delta|}{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n}}. \quad (18)$$

Vzájemným dělením obou rovnic dostaneme vzhledem k 11 (9)

$$\frac{\sum |\varepsilon|}{\sum |\Delta|} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{\sum \Delta^2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \quad (19)$$

Můžeme proto počítat průměrnou chybu 8 (17) také z odchylek Δ podle vzorce

$$\lambda = \frac{\sum |\varepsilon|}{n} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{\sum |\Delta|}{n} = \frac{\sum |\Delta|}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad (20)$$

nebo, nahradíme-li geometrický průměr aritmetickým¹⁾, z rovnice

$$\lambda = \frac{\sum |\Delta|}{n - \frac{1}{2}} = \frac{2 \sum \Delta_+}{n - \frac{1}{2}}; \quad (21)$$

zde $\sum \Delta_+$ značí součet *kladných* odchylek, který vzhledem k 11 (1) je rovný polovičnímu součtu prostých hodnot *všech* odchylek. Dosazením do (13) dostaneme pro *střední a pro pravděpodobnou chybu jednoho měření* dostatečně přesné vzorce, velmi vhodné pro číselný výpočet:

$$\delta = \frac{5}{2} \frac{\sum |\Delta|}{2n-1} = 5 \frac{\sum \Delta_+}{2n-1},$$

12 ¹⁾ Geometrický průměr čísel n a $n-1$ se málo liší od aritmetického průměru. Již pro $n=5$ se oba průměry liší jen asi o 0,6% a pro větší n jsou prakticky stejné.

$$\vartheta = \frac{2}{3} \delta = \frac{5}{3} \frac{\Sigma |\Delta|}{2n-1} = \frac{10}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{2n-1}. \quad (22)$$

Nás však zajímá chyba výsledku, a tu dostaneme podle 11 (16) z chyby jednoho měření dělením odmocninou z počtu měření. Tak dostaneme z (20) průměrnou chybu aritmetického středu n měření

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{\Sigma |\Delta|}{n} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{\Sigma \Delta_+}{n/2}. \quad (23)$$

Dosadíme-li konečně tuto hodnotu do rovnice (13), dojdeme ke vzorci

$$\bar{\delta} \doteq \frac{5}{4} \bar{\lambda} = \frac{5}{2\sqrt{n-1}} \frac{\Sigma \Delta_+}{n} = \frac{5}{2n\sqrt{n-1}} \Sigma \Delta_+ \quad (24)$$

a dosazením do (14)

$$\bar{\vartheta} = 0,8453 \bar{\lambda} = 1,6906 \frac{\Sigma \Delta_+}{n\sqrt{n-1}} \quad (25)$$

nebo jednodušeji

$$\bar{\vartheta} \doteq 1,7 \frac{\Sigma \Delta_+}{n\sqrt{n-1}} \doteq \frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{n\sqrt{n-1}}. \quad (26)$$

První přibližný výraz je asi o 0,5% větší, druhý však o 1,4% menší než přesná hodnota (25).

Podobně dostaneme z (16)

$$\bar{\kappa}' = 4 \bar{\lambda} = \frac{8}{n\sqrt{n-1}} \Sigma \Delta_+. \quad (27)$$

Tyto vzorce, které jsou velmi vhodné pro praktický výpočet chyb výsledku, odvodili jsme za předpokladu, že jde o veliký počet měření. Platí tedy pro menší počet měření jen *přibližně*. Přitom nesmíme však zapomínat, že ani vzorec 11 (15) nelze pokládat za dokonale přesný, ježto všechny vztahy odvozené z počtu pravděpodobnosti jsou jen přibližné a jejich platnost je tím méně zaručena, čím menší je počet měření. Proto také počítáme chyby výsledku nejvýše na dvě místa a musíme si být vědomi, že v teorii chyb užívané statistické veličiny splňují theoretické vztahy, zvláště při menším počtu měření, jen s větším nebo menším přiblížením. Proto můžeme i poslední vzorce aplikovat na skutečná měření se stejným oprávněním jako jiné vzorce teorie chyb. Jsou velmi jednoduché pro tři zvláštní případy $n = 5, 10$ a 50 , pro něž po snadné úpravě dostaneme z (24), (26) a (27)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(pět měření)} \quad \bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{4}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{6}, \quad \bar{\kappa}' = \frac{4 \Sigma \Delta_+}{5}, \\ \text{(deset měření)} \quad \bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{12}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{18}, \quad \bar{\kappa}' = \frac{4 \Sigma \Delta_+}{15}, \\ \text{(padesát měření)} \quad \bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{140}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{210}, \quad \bar{\kappa}' = \frac{4 \Sigma \Delta_+}{175}. \end{array} \right\} \quad (28)$$

Pro výpočet pravděpodobné chyby odvodil Peters²⁾ přibližný vzorec

$$\bar{\vartheta} = \frac{11}{13} \frac{\Sigma |\Delta|}{n \sqrt{n-1}},$$

který se mnoho neliší od našeho vzorce (26). Je sice o něco přesnější, neboť číselný koeficient $11/13 = 0,8462$ je větší než jeho správná hodnota jen asi o 1 promile, kdežto koeficient 1,7 v našem vzorci je větší o 4 promile správné hodnoty. Avšak z theorie plyne pro střední relativní odchylku chyby počítané z Besselova vzorce 11 (15) hodnota

$$\frac{0,707}{\sqrt{n}},$$

je-li n počet měření. Střední relativní odchylka chyby počítané z Petersova nebo z našeho vzorce (26) je ještě o něco větší:

$$\frac{0,755}{\sqrt{n}}$$

a činí přibližně pro 10 měření 25 %, pro 100 měření 8 % a teprve pro 1000 měření klesne na 2,5 %. Proto nevyváží větší přesnost Petersova vzorce jeho menší praktickou výhodnost ve srovnání s naším vzorcem, který vyžaduje jen výpočet poloviny odchylek od průměru. Tak na př. pro 10 měření je vyčíslení Petersova vzorce

$$\bar{\vartheta} = \frac{11}{390} \Sigma |\Delta|$$

zřejmě pracnější než vyčíslení výrazu

$$\frac{\Sigma \Delta_+}{18}$$

v (28) i než přesnějšího vzorce

$$\bar{\vartheta} = 1,7 \frac{\Sigma \Delta_+}{10 \sqrt{9}} = \frac{1,7}{30} \Sigma \Delta_+ = 0,056 \Sigma \Delta_+$$

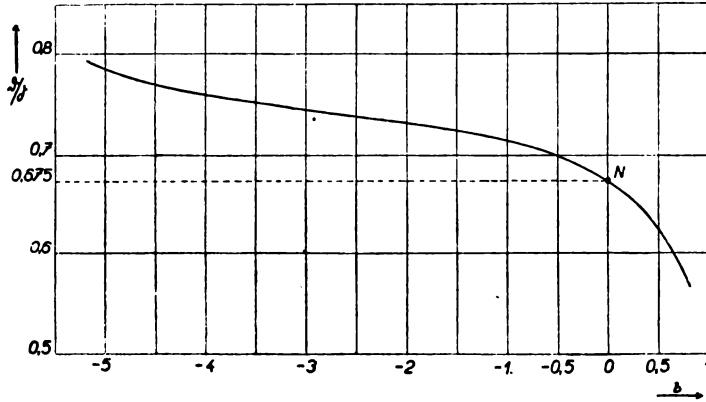
s odchylkou 6 promile. Výpočet chyby z Besselova vzorce 11 (15) je ovšem ještě pracnější a jeho užití nelze zdůvodnit tak malou výhodou, jako je nepatrné zmenšení střední odchylky v poměru

$$707 : 755 = 0,936 : 1.$$

Někdy se ovšem stává, že rozdíl mezi hodnotami pravděpodobné chyby vypočtené ze vzorců 11 (15) a 12 (26) je tak velký, že se nedá vyložit statistickými odchylkami. Tu se klade otázka, který z obou výsledků je správnější. K tomu je třeba říci, že nepřiměřeně velký rozdíl obou hodnot svědčí o tom, že rozložení chyb v dané řadě měření není dosti blízké normálnímu, a pak ovšem neplatí dosti přesně žádný z uvedených vzorců pro pravděpodobnou chybu. V takovém případě je nutno počítat tuto chybu jiným způsobem, který ovšem

12 ²⁾ Viz na př. [15], str. 137.

závisí na skutečném rozložení chyb v dané řadě.^{*)} Bez jeho bližšího vyšetření nelze stanovit přesnou hodnotu pravděpodobné chyby a je nutno spokojit se hodnotou přibližnou, za kterou možno pokládat průměr pravděpodobných chyb počítaných ze vzorců (1) a (14), nebo jde-li o pravděpodobnou chybu výsledku, použít vzorců 11 (15) a 12 (26).



Obr. 12.1. Závislost poměru pravděpodobné a střední chyby na konstantě δ .

Správnost výše odvozených výsledků a zároveň i platnost věty 11 (16), odvozené v předešlém článku, přezkoušíme nyní na měření odporu můstkovou metodou, popsaném v čl. 9.

Především použijeme tab. 9, I, abychom se přesvědčili, s jakou přesností je splněn theoretický vztah (13) pro λ a δ , počítané ze skutečných chyb podle vzorců 8 (17) a 8 (13). Při výpočtu součtu 8 (17) postupujeme podobně jako při výpočtu střední chyby (viz pozn. 9²⁾) a dostaneme tak podle tab. 9, I pro I. řadu měření

$$\lambda = \frac{\sum |\varepsilon|}{n} \doteq \frac{1}{500} \sum_{\varepsilon=-10}^{+10} y \cdot |\varepsilon| = \frac{1}{500} (598 + 642) \text{ mm} = 2,5 \text{ mm}$$

a pro II. řadu

$$\lambda \doteq \frac{1}{500} \sum_{\varepsilon=-17}^{+17} y \cdot |\varepsilon| = \frac{1}{500} (1016 + 1343) \text{ mm} = 4,7 \text{ mm.}$$

Srovnáním s dříve určenými hodnotami středních chyb vychází podle 9 (2) pro I. řadu

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{2,5}{3,3} = 0,76, \quad \frac{\delta}{\lambda} = 1,32,$$

12^{*)} Předpokládáme-li, že rozložení chyb lze aspoň přibližně vystihnout vzorcem 9 (1), můžeme dojít k přesnější hodnotě pravděpodobné chyby grafickou interpolací z křivky naryšované na obr. 12.1. Tato křivka vyjadřuje poměr pravděpodobné chyby ke střední chybě jako funkci konstanty δ v 9 (1), která charakterizuje nenormálnost daného rozložení chyb. Bod N přísluší normálnímu rozložení chyb. Bližší viz [58].

a podle 9 (3) pro II. řadu

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{4,7}{5,9} = 0,80, \quad \frac{\delta}{\lambda} = 1,25,$$

což je v přibližném souhlase s (13).

Abychom mohli přezkoušet platnost věty 11 (16), rozdělíme všech 500 měření I. řady na 50 skupin po 10 měřeních a pro každou skupinu vypočteme aritmetický střed naměřených hodnot. Tak dostaneme 50 nových hodnot x_i , které zpracujeme jako hodnoty přímo měřené. Část těchto hodnot je uvedena v tab. 12,I, která obsahuje prvních 10 hodnot a poslední (padesátou) hodnotu x_i . Průměr všech padesáti hodnot $x = 500,070$ mm, jak je uvedeno v tabulce. V druhém sloupci jsou zdánlivé chyby Δ a v poslední řádce součet všech kladných Δ_+ , jichž bylo 26; v dalším sloupci jsou čtverce Δ^2 a jejich součet.

Tabulka 12,I. Schema výpočtu chyby podle vzorce 11 (15)

i	x_i	Δ_i	Δ_i^2
1	499,70 mm	0,37 mm	0,137 mm ²
2	501,14 mm	-1,07 mm	1,145 mm ²
3	501,80 mm	-1,73 mm	2,993 mm ²
4	499,57 mm	0,50 mm	0,250 mm ²
5	497,88 mm	2,19 mm	4,796 mm ²
6	501,20 mm	-1,13 mm	1,277 mm ²
7	500,41 mm	-0,34 mm	0,116 mm ²
8	499,68 mm	0,39 mm	0,152 mm ²
9	498,97 mm	1,10 mm	0,121 mm ²
10	501,70 mm	-1,63 mm	2,657 mm ²
50	497,61 mm	2,46 mm	6,052 mm ²
	$\bar{x} = 500,070$ mm	$\Sigma \Delta_+ = 20,59$ mm	$\Sigma \Delta^2 = 53,667$ mm

Podle vzorce 11 (10) je střední chyba jednoho měření

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{53,667}{49}} = 1,05 \text{ mm} \quad (29)$$

a pravděpodobná chyba

$$\vartheta \doteq \frac{2}{3} \delta = 0,70 \text{ mm}.$$

Průměrná chyba, počítaná z (21),

$$\lambda = 2 \frac{\Sigma \Delta_+}{n - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{20,59}{49,5} = 0,83 \text{ mm}$$

a z ní odvozená střední a pravděpodobná chyba podle (13) a (14)

$$\delta \doteq \frac{5}{4} \lambda = 1,04 \text{ mm}, \quad \vartheta \doteq \frac{5}{6} \lambda = 0,69 \text{ mm}.$$

Podobně pro chyby aritmetického průměru vychází ze vzorce 11 (15)

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{50}} = 0,148 \text{ mm}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{2}{3} \bar{\delta} = 0,099 \text{ mm}, \quad \bar{\varkappa} = 3\bar{\delta} = 0,45 \text{ mm}.$$

Dosadíme-li do jednoduchých vzorců (28) podle tab. 12, I

$$\Sigma\Delta_+ = 20,59 \text{ mm},$$

dostaneme

$$\bar{\delta} = 0,147 \text{ mm}, \quad \bar{\vartheta} = 0,098 \text{ mm}, \quad \bar{\varkappa}' = 4\bar{\lambda} = 4 \frac{\lambda}{\sqrt{50}} = 0,48 \text{ mm}.$$

Souhlas přesnosti výsledku, vypočítané oběma způsoby, je tedy úplný, při čemž je výpočet ze vzorců (28) mnohem snazší. Podle předešlého výkladu vyjádříme výsledek měření I. řady takto:

$$X = 500,07 \text{ mm} \pm 0,10 \text{ mm}; \quad (30)$$

to znamená, že je stejně pravděpodobno, že X leží v mezích 499,97 mm ÷ ÷ 500,17 mm, jako že leží mimo. Z toho ovšem neplyne, že by snad byla stejně pravděpodobná libovolná hodnota výsledku. Znamená to naopak, že sice theoreticky musíme připustit libovolnou hodnotu výsledku jako možnou, při tom však úhrnná pravděpodobnost hodnot, ležících v malém intervalu šířky $2\bar{\vartheta} = 0,2$ mm, je stejná jako úhrnná pravděpodobnost všech ostatních hodnot od $-\infty$ do $+\infty$. Výsledky, které bychom dostali, kdybychom opakovali všech 500 měření velmi mnohokrát, byly by tedy hustě nakupeny kolem hodnoty (30) tak, že by polovina všech výsledků ležela v uvedených mezích a ostatní hodnoty by se vyskytovaly tím vzácněji, čím více by se lišily od nejpravděpodobnější hodnoty $X = 500,07$ mm. Právě vyloženým postupem plyne z II. řady měření hodnota

$$X = 500,61 \text{ mm} \pm 0,23 \text{ mm}. \quad (31)$$

Z velikosti pravděpodobné chyby je opět zřejmo, že II. řada je méně přesná; tato hodnota plyne ze vzorce (28):

$$\bar{\vartheta} = \frac{\Sigma\Delta_+}{210} = \frac{47,5}{210} \text{ mm} = 0,226 \text{ mm},$$

kdežto složitější vzorec 11 (15) dává poněkud nižší hodnotu $\bar{\vartheta} = 0,22$ mm, neboť $\bar{\delta} = 0,33$ mm. Obě řady měření dávají hodnotu X větší, než je správná, při čemž pro I. řadu je rozdíl menší než pravděpodobná chyba a je v mezích přesnosti, s jakou je známa správná hodnota. Naproti tomu měření II. řady vybočuje z obou mezí a odchylka činí 61% krajní chyby $\varkappa = 3\bar{\delta} = 1$ mm. Jak vidno, výsledky (30) a (31) se téměř kryjí s dřívějšími přibližnými hodnotami 10 (19) a 10 (20).

Zbývá ještě srovnat zjištěné chyby obou řad po padesáti měřeních s chybami původních řad 500 měření. S tohoto hlediska je chyba jednoho měření řady o padesáti členech zároveň chybou aritmetického průměru deseti původních měření. Podle věty 11 (16) je chyba δ_0 jednoho původního měření $\sqrt{10}$ -krát větší než chyba průměru deseti měření:

$$\delta_0 = \sqrt{10} \delta = 3,163 \delta.$$

Tak vychází dosazením z (29) pro chybu jednoho měření I. řady původních měření $\delta_0 = 3,3$ mm, což dobře souhlasí s dříve určenou hodnotou 9 (2) střední chyby 3,25 mm. Z uvedené hodnoty 0,33 mm střední chyby výsledku II. řady musíme nejprve odvodit střední chybu δ jednoho měření

$$\delta = \sqrt{50} \cdot 0,33 \text{ mm} = 2,3 \text{ mm},$$

kteřá je rovna střední chybě aritmetického středu deseti původních měření, takže

$$\delta_0 = \sqrt{10} \delta = 7,3 \text{ mm}.$$

Zde již souhlas s přibližnou hodnotou $\delta_0 = 5,9$ mm, určenou přímo z původních měření 9 (3), není tak dobrý, patrně vinou malé přesnosti měření.

Tabulka 12,II. Schema výpočtu pravděpodobné chyby z kladných odchylek

i	x_i	Δ_+	Pravděpodobná chyba a výsledek
1	499,70 mm	0,505 mm	$\bar{\vartheta} = \frac{5}{3n\sqrt{n-1}} \Sigma \Delta_+ = \frac{\Sigma \Delta_+}{18} =$ $= \frac{5,225 \text{ mm}}{18} = 0,29 \text{ mm}$ $X = (500,20 \pm 0,29) \text{ mm}$
2	501,14 mm		
3	501,80 mm		
4	499,57 mm	0,635 mm	
5	497,88 mm	2,325 mm	
6	501,20 mm	0,525 mm	
7	500,41 mm		
8	499,68 mm	1,235 mm	
9	498,97 mm	1,235 mm	
10	501,70 mm		
$\bar{x} = 500,205 \text{ mm}$		$\Sigma \Delta_+ = 5,225 \text{ mm}$	

Při praktických měřeních určíme nejpravděpodobnější hodnotu podle věty 10 (16) a její přesnost podle vzorce (26) tímto postupem:

1. Vypočteme aritmetický průměr \bar{x} všech měřených hodnot.
2. Určíme všechny kladné odchylky (zdánlivé chyby) tak, že odečteme od průměru všechny hodnoty menší než průměr.
3. Utvoříme součet $\Sigma \Delta_+$ těchto kladných odchylek.⁴⁾
4. Vypočteme pravděpodobnou chybu průměru $\bar{\vartheta}$, násobíce předešlý součet číslem $\frac{1,7}{n\sqrt{n-1}} \div \frac{5/3}{n\sqrt{n-1}}$, kde n je počet všech měření.
5. Výsledek měření píšeme ve tvaru

$$X = \bar{x} \pm \bar{\vartheta}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{1,7 \Sigma \Delta_+}{n\sqrt{n-1}} \div \frac{5 \Sigma \Delta_+}{3n\sqrt{n-1}}.$$

Při tom uvádíme chybu nejvýše na dvě (platná) místa a počet číslic ve výsledku omezíme tak, aby chyba zasahovala jen do posledního nebo předposledního místa.

12 ⁴⁾ Někdy se používá ke kontrole výpočtů vztahu 11 (1) $\Sigma \Delta = 0$. Chceme-li kontrolu provést, musíme ovšem vypočítat také záporné odchylky Δ_- , ale sečteme zvlášť kladné odchylky Δ_+ a zvlášť záporné, a pak kontrolujeme platnost rovnice $\Sigma \Delta_+ = |\Sigma \Delta_-|$.

Pro $n = 10$ má číselný činitel v (32) 4 hodnotu

$$\frac{5/3}{n \sqrt{n-1}} = \frac{1}{18} \text{ nebo přesněji } \frac{1,7}{n \sqrt{n-1}} = \frac{1,7}{30} = 0,056,$$

a tedy

pravděpodobná chyba průměru deseti měření je rovna osmnáctině součtu kladných odchylek:

$$\bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{18}. \quad (33)$$

Výsledek vyjádříme rovnicí

$$X = \bar{x} \pm 0,056 \Sigma \Delta_+ .$$

Postup výpočtu pro deset měření ukazuje schema 12,II, v němž je způsobem popsaným v (32) a (33) zpracováno prvních deset měření tab. 12,I. Srovnáním obou schemat vyplývá, že výpočet z kladných odchylek je i při poměrně malém počtu deseti měření mnohem výhodnější než výpočet ze čtverců všech zdánlivých chyb.

C. VYROVNÁNÍ MĚŘENÍ

13. ZÁKLADY VYROVNÁVACÍHO POČTU

13.1. Methoda nejmenších čtverců

V posledních třech článcích 10, 11, 12 byla řešena otázka, jak z řady nepřesných hodnot získaných měření hledané veličiny odvodit její nejpravděpodobnější hodnotu a jak zjistit její střední nebo pravděpodobnou chybu. Tato otázka byla v těchto článcích úplně řešena jen v nejjednodušším a zároveň nejčastějším případě, kdy hledaná veličina byla buď přímo měřena, nebo byla dána známou funkcí jedné nebo několika nezávislých veličin přímo měřených. Při fyzikálních měřeních se totiž setkáváme s velmi rozmanitými úlohami, kterým je společné, že jde o zjištění nejpravděpodobnějších hodnot několika fyzikálních veličin, jejichž souvislost s měřenými veličinami může být dána rozličným způsobem, a které vedle toho mají někdy splňovat jisté podmínky. Řešení podobných úloh se nazývá vyrovnávání měření a zabývá se jimi soustavně obor matematiky, zvaný *vyrovnávací počet*. Úlohy vyrovnávacího počtu při praktických měřeních dají se zhruba roztrždit takto:

1. Vyrovnávání přímých měření stejně přesných. Daná veličina se měří několikrát, někdy mnohokrát, a hledáme její nejpravděpodobnější hodnotu a přesnost, s níž je tato hodnota zjištěna.

2. Vyrovnání přímých měření nestejně přesných. Tento případ se liší od předešlého jen tím, že hodnoty, které máme vyrovnat, nebyly získány stejně přesným měřením.

3. Vyrovnání nepřímých měření stejně nebo nestejně přesných. Jde o určení nejpravděpodobnější hodnoty veličiny, dané jako funkce jedné nebo několika veličin přímo měřených, a její přesnosti. Veličiny přímo měřené mohou být dány buď se stejnou, nebo s různou přesností.

4. Vyrovnání zprostředkujících měření. Měří se několikrát jedna nebo několik veličin, které jsou dány jako funkce několika neznámých veličin. Hledají se takové jejich hodnoty, které, dosazeny do oněch funkcí, dávají výsledky co nejvíce vyhovující všem měřením; počet měření bývá ovšem větší než počet neznámých, které proto nelze prostě vypočítat tak, aby přesně splňovaly všechny rovnice.

5. Vyrovnání závislých měření. Měříme přímo několik veličin, o nichž víme, že nejsou nezávislé, že mají splňovat jisté podmínky. Určíme-li opakovaným měřením nejpravděpodobnější hodnoty všech hledaných veličin, nebudou obecně předepsané podmínky přesně splněny a úloha zní, jak tyto hodnoty vyrovnat, t. j. opravit, aby vyrovnané neboli opravené hodnoty přesně vyhovovaly daným podmínkám. Hledané závislé veličiny mohou při tom být

měřeny buď se stejnou přesností, nebo různě přesně, a jejich hodnoty mohou být určeny přímým nebo i zprostředkujícím měřením.

6. Určení konstant a empirických vzorců. Velmi častá je úloha určit experimentálně hodnotu jedné nebo více konstant, obsažených ve fyzikálních zákonech, nebo zjistit pokusně vzájemnou závislost dvou nebo více veličin. První úloha je zvláštním případem vyrovnání zprostředkujících měření (viz bod 4) a druhá se převádí na týž problém tím, že se v daném případě předpokládá tvar hledané závislosti s jistým počtem konstant, jejichž nejvhodnější velikost se určí vyrovnávacím počtem.

K tomuto výčtu problémů podotýkáme, že případ 1 byl již řešen v čl. 10 a 11, kdežto případ 3 lze zcela obecně rozřešit na základě vzorců v čl. 12. O zbývajících problémech, pokud mají bližší vztah k fyzikálním měřením, promluvíme později; v tomto článku podáme výklad o t. zv. metodě nejmenších čtverců, jež je základem vyrovnávacího počtu. Objasníme její princip nejprve na případě 1 přímých a stejně přesných měření a nato jí použijeme k vyrovnání zprostředkujících měření; na tu úlohu se dají v podstatě převést všechny ostatní problémy vyrovnávacího počtu.

Metoda nejmenších čtverců je založena na předpokladu normálního rozložení náhodných chyb a používal jí první patrně *Gauss*, ač po prvé o ní psal r. 1806 *Legendre*, který jí dal také jméno. V čl. 10 jsme ukázali, že nejpravděpodobnější hodnota veličiny určené opakovanými stejně přesnými měřeními je (při normálním rozložení chyb) dána podmínkou 10 (12), že součet čtverců jejich odchylek od měřených hodnot je minimální; jinak řečeno tento součet je pro nejpravděpodobnější hodnotu menší než pro kteroukoli jinou hodnotu.

13.2. Vyrovnání zprostředkujících měření

Přejdeme nyní k případu zprostředkujících měření, kdy se z většího počtu n (> 3) měření jediné veličiny x má určit několik neznámých veličin, na př. tři veličiny u , v , w . Omezíme se z počátku na tento jednoduchý případ jedné měřené veličiny a mimo to budeme předpokládat, že měřená veličina je lineární homogenní funkcí neznámých veličin:

$$x = ku + lv + mw, \quad (1)$$

kde hodnoty k , l , m závisí na měřené veličině x . Jsou-li naměřené hodnoty x_i veličiny x zatíženy chybami ε_i , budou pro ně platit rovnice

$$x_i + \varepsilon_i = k_i u + l_i v + m_i w, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

v nichž k_i , l_i , m_i značí hodnoty součinitelů k , l , m , příslušející i -tému měření. Tyto hodnoty jsou buď předem známy pro všechny hodnoty x_i měřené veličiny, nebo se určí rovněž měřením. Předpokládáme o nich, že jsou v každém případě dány s chybami malými proti chybám měřené veličiny. Pak můžeme tyto chyby pomíjet a pokládat hodnoty k_i , l_i , m_i za přesné, takže hodnoty ε_i jsou právě rovny skutečným chybám hodnot x_i . Především je vidět, že stejně přesná přímá měření jsou zvláštním případem zprostředkujících měření. Dojdeme k němu, klademe-li v rovn. (1)

$$k = 1, \quad l = 0, \quad m = 0, \dots, \text{ takže } x = u.$$

Pak skutečně hledaná veličina je jedna a je totožná s měřenou veličinou. Nejpravděpodobnější hodnota X je tedy dána podmínkou $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min$, která vede

k aritmetickému průměru. Pro řešení obecného případu si musíme uvědomit, že nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny je v každém případě vyznačena maximální pravděpodobností, t. j. podle 10 (13) a 10 (12) minimálním součtem čtverců zdánlivých chyb čili odchylek naměřených hodnot od nejpravděpodobnější hodnoty \bar{X} . Rozdíl je však v tom, že při zprostředkujících měřeních není tento součet čtverců odchylek funkcí jedné proměnné veličiny x , nýbrž několika, v našem případě tří neznámých u, v, w , které z této podmínky vypočítáme. Napřed ovšem musíme vyjádřit tyto odchylky jako funkce oněch neznámých. Použijeme k tomu rovnic

$$X = x_i + \Delta_i = k_i U + l_i V + m_i W, \quad (3)$$

v nichž značí X nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny, Δ_i odchylky naměřených hodnot x_i od \bar{X} a U, V, W jsou nejpravděpodobnější hodnoty neznámých veličin u, v, w ; předpokládali jsme totiž, že koeficienty k_i, l_i, m_i jsou přesné a že tedy hodnoty neznámých, vypočtené z rovnice (3) pro kterékoli i , odpovídají nejpravděpodobnější hodnotě \bar{X} . Jsou tedy dány podmínkou plynoucí ze vztahu

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \text{minimum}, \quad (4)$$

dosadíme-li do něho podle (3)

$$\Delta_i = k_i U + l_i V + m_i W - x_i. \quad (5)$$

Z nauky o extrémních hodnotách funkcí několika proměnných je známo, že funkce může mít extrémní hodnotu jen pro ty hodnoty nezávisle proměnných, pro něž jsou její parciální derivace podle všech těchto proměnných rovný nule. Dostaneme tak právě potřebný počet lineárních rovnic:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} (\Sigma \Delta_i^2) &= 2 \Sigma k_i (k_i U + l_i V + m_i W - x_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial V} (\Sigma \Delta_i^2) &= 2 \Sigma l_i (k_i U + l_i V + m_i W - x_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial W} (\Sigma \Delta_i^2) &= 2 \Sigma m_i (k_i U + l_i V + m_i W - x_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Odtud vypočteme nejpravděpodobnější hodnoty všech tří neznámých. Píší se obvykle ve tvaru normálních rovnic:

$$\left. \begin{aligned} [kk] U + [kl] V + [km] W &= [kx], \\ [lk] U + [ll] V + [lm] W &= [lx], \\ [mk] U + [ml] V + [mm] W &= [mx], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

kde značí

$$\begin{aligned} [kk] &= \Sigma k_i^2, & [kl] &= [lk] = \Sigma k_i l_i, & [km] &= [mk] = \\ &= \Sigma k_i m_i, \dots, & [mx] &= \Sigma m_i x_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Jejich zobecnění pro libovolný počet neznámých je nasadě; řeší se nejčastěji postupem *Gaussovým*, který je vlastně do podrobností vypracovaná metoda

postupné eliminace neznámých. Zevrubný výklad o tom, jakož i o chybach neznámých, přesahoval by rámec této knihy; odkazujeme v tom směru na učebnice vyrovnávacího počtu, uvedené v literatuře. Zde se omezíme na poznámku, že metodu je možno zobecnit i na případy, kdy měřená veličina je nelineární funkcí neznámých veličin. Lze je totiž převést na řešený případ, určíme-li nejprve přibližné hodnoty u_0, v_0, w_0 všech tří neznámých (na př. ze tří měření veličiny x), z nichž dostaneme nejpravděpodobnější hodnoty připojením jistých korekcí. Podaří-li se nám najít dosti přesné u_0, v_0, w_0 , takže druhé a vyšší mocniny korekcí lze pomíjet, můžeme přírůstky funkcí $x_i(u, v, w)$ nahradit jejich diferenciály:

$$\begin{aligned} x_i(U, V, W) - x_i(u_0, v_0, w_0) &\doteq dx_i = \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)_0 du + \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)_0 dv + \left(\frac{\partial x_i}{\partial w} \right)_0 dw. \end{aligned} \quad (9)$$

Tedy pro malé korekce du, dv, dw platí zase vztah lineární, a můžeme je určit způsobem odvozeným pro lineární vztahy.

Předpokládali jsme, že x_i jsou měřením získané hodnoty téže veličiny x . Snadno seznáme, že odvozené výsledky platí i tehdy, kdy se *skutečné* velikosti měřených hodnot x_i navzájem *liší*. Tak je tomu na př., měříme-li *různé veličiny* nebo různé hodnoty, kterých nabývá táž veličina za různých podmínek (na př. pro různé teploty, tlaky a pod.). Pak ovšem v rovnicích (3) na místo jediné hodnoty X nastoupí obecně různé nejpravděpodobnější hodnoty X_i měřených veličin, z nichž některé mohou být nicméně stejné. Označíme-li však tentokrát znaky Δ_i rozdíly $X_i - x_i$, budou další úvahy platit beze změny pro takto definované odchylky Δ_i a postup vyrovnání, odvozený pro jednu měřenou veličinu, zůstává proto v platnosti i pro měření několika různých veličin.

Objasníme to na jednoduchém příkladu. K určení dvou elektrických odporů byla provedena čtyři měření: nejprve byl každý odpor měřen zvlášť, potom byly měřeny odpory ve spojení za sebou a vedle sebe.

Měření poskytlo tyto hodnoty:¹⁾

$$\begin{aligned} x_1 &= 3,47 \Omega = u, \\ x_2 &= 4,52 \Omega = v, \\ x_3 &= 8,02 \Omega = u + v, \\ x_4 &= 1,92 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}} = \frac{uv}{u + v}; \end{aligned} \quad (10)$$

úloha zní, odvodit ze všech měření nejpravděpodobnější velikosti U, V obou odporů. Zde tedy nejde o opakovaná měření *téže* veličiny x , ale o výše zmíněný případ několika různých měřených veličin. První dvě měření jsou přímá, třetí dává lineární funkci (součet) hledaných odporů a čtvrté funkci nelineární. Poslední funkci musíme tedy nejprve nahradit její hodnotou pro jisté přibližné hodnoty u_0, v_0 , zvětšenou o přírůstek vyjádřený ve tvaru (9):

$$x_4(U, V) = x_4(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial x_4}{\partial u} \right)_0 du + \left(\frac{\partial x_4}{\partial v} \right)_0 dv. \quad (11)$$

¹³ ¹⁾ Vpravo uvedené funkce plynou ze známé věty, že při spojení za sebou se sčítají odpory, kdežto při spojení vedle sebe jejich převrácené hodnoty (vodivosti).

Podle (10) je patrně

$$\begin{aligned} x_4(u_0, v_0) &= \frac{u_0 v_0}{u_0 + v_0}, \quad \left(\frac{\partial x_4}{\partial u} \right)_0 = \frac{v_0 (u_0 + v_0) - u_0 v_0}{(u_0 + v_0)^2} = \\ &= \frac{v_0^2}{(u_0 + v_0)^2}, \quad \left(\frac{\partial x_4}{\partial v} \right)_0 = \frac{u_0^2}{(u_0 + v_0)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

což dává

$$x_4(U, V) = \frac{u_0 v_0}{u_0 + v_0} + \frac{v_0^2}{(u_0 + v_0)^2} du + \frac{u_0^2}{(u_0 + v_0)^2} dv;$$

odchylkové rovnice (5) mají tedy tvar

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_0 + du - x_1, \\ \Delta_2 &= v_0 + dv - x_2, \\ \Delta_3 &= u_0 + du + v_0 + dv - x_3, \\ \Delta_4 &= \frac{u_0 v_0}{u_0 + v_0} + \frac{v_0^2}{(u_0 + v_0)^2} du + \frac{u_0^2}{(u_0 + v_0)^2} dv - x_4. \end{aligned} \quad (13)$$

Volíme-li za u_0, v_0 přibližné hodnoty $u_0 = 3,5 \Omega, v_0 = 4,5 \Omega$, vzniklé zaokrouhlením z prvních dvou měření, dostaneme

$$\frac{u_0 v_0}{u_0 + v_0} = 1,97 \Omega, \quad \frac{v_0^2}{(u_0 + v_0)^2} = 0,316 \Omega, \quad \frac{u_0^2}{(u_0 + v_0)^2} = 0,191 \Omega$$

a dosazením do (13) vzhledem k (10)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= du && + 0,03 \Omega, \\ \Delta_2 &= && + dv && - 0,02 \Omega, \\ \Delta_3 &= du && + dv && - 0,02 \Omega, \\ \Delta_4 &= 0,316 du + 0,191 dv + 0,05 \Omega. \end{aligned}$$

Srovnáním těchto rovnic s obecným tvarem odchylkových rovnic (5) poznáváme, že součinitelé k_i, l_i, m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mají hodnoty

$$k_1 = 1, \quad l_1 = 0, \quad x_1 = -0,03 \Omega \text{ atd.},$$

z nichž utvoříme koeficienty normálních rovnic (7). Snadným počtem dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2,10 du + 1,06 dv &= -0,0258 \Omega, \\ 1,06 du + 2,04 dv &= 0,0305 \Omega, \end{aligned}$$

jejichž řešením vychází

$$du = -0,0269 \Omega, \quad dv = 0,0289 \Omega.$$

Přičtením těchto korekcí k přibližným hodnotám u_0, v_0 obdržíme konečně nejpravděpodobnější hodnoty obou odporů:

$$\begin{aligned} U &= u_0 + du = (3,5 - 0,027) \Omega = 3,473 \Omega, \\ V &= v_0 + dv = (4,5 + 0,029) \Omega = 4,529 \Omega. \end{aligned}$$

Tím je způsob užití metody nejmenších čtverců dostatečně osvětlen, a proto doplníme tento článek ještě jednou charakteristikou výsledků, jež poskytuje. Dokázali jsme, že metoda nejmenších čtverců vede k nejpravděpodobnějším hodnotám neznámých veličin, jež jsou dány podmínkou (4). To znamená podle 11(10), že střední a ovšem také pravděpodobná chyba měřené veličiny je nejmenší pro hodnoty neznámých, vypočtené metodou nejmenších čtverců. Vzhledem k přesné platnosti rovnic (3) platí totéž o hodnotách U , V , W neznámých veličin. Ukázali jsme již, že tyto hodnoty jsou nejpravděpodobnější, že jim totiž přísluší maximální pravděpodobnost, a nyní vidíme, že mají zároveň i minimální chyby. Proto je můžeme pokládat za nejpřesnější nebo nejsprávnější hodnoty neznámých. Bylo již řečeno, a znovu to prokážeme v příštím článku, že nejen přímá, nýbrž i závislá měření dají se převést na měření zprostředkující, ale dosud jsme neuvažovali o nestejně přesných měřeních; můžeme tedy vyslovit tento obecně platný výsledek:

Metoda nejmenších čtverců, založená na požadavku, aby součet čtverců odchylek byl nejmenší, určuje při stejně přesných měřeních jednoznačně nejpravděpodobnější a zároveň nejsprávnější hodnoty hledaných veličin. (14)

13.3. Vyrovnaní závislých měření

Úlohu vyrovnaní závislých měření možno řešit dvojím způsobem: 1. převedením na vyrovnaní zprostředkujících měření a 2. přímou metodou, zavedením t. zv. korelát. Uvedeme oba způsoby za předpokladu, že měření jsou stejně přesná.

1. **Metoda zprostředkujících měření.** Měří se n veličin, o nichž víme, že jsou vázány r ($r < n$) vztahy:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \end{aligned} \tag{15}$$

hledáme takové nejpravděpodobnější hodnoty X_1, X_2, \dots, X_n veličin x_k , které splňují přesně všechny „rovnice závislosti“ (15). Předpokládáme, že měření byla získána pro každou veličinu x jedna hodnota \bar{x}_k — na př. jako aritmetický střed provedených měření — při čemž všechny tyto hodnoty mají stejnou střední chybu. Jejich odchylky od hodnot X_k , které dostaneme vyrovnaním těchto závislých měření, označíme A_k . Pak musí rovnice závislosti (15) platit pro výrazy

$$X_k = \bar{x}_k + A_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{16}$$

což vede k podmínkám

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1 + A_1, \dots, \bar{x}_n + A_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_r(\bar{x}_1 + A_1, \dots, \bar{x}_n + A_n) &= 0. \end{aligned}$$

Jsou-li odchylky dosti malé, aby bylo možno pomíjet jejich čtverce a součiny, můžeme podobně jako v predešlém článku (rozvinutím funkcí v Taylorovu řadu

se v tomto případě nazývají *koreláty*. Úlohu můžeme však řešit i bez zavádění nových pojmů, uvážíme-li, že z rovnic (17) lze vyjádřit r odchylek jako lineární funkce zbývajících $n - r$ odchylek, jak jsme ostatně již učinili při odvozování rovnic (18). Tím převedeme rovnici (20) na podmínku

$$Q(\Delta_{r+1}, \Delta_{r+2}, \dots, \Delta_n) = \text{minimum}, \quad (21)$$

kde Q značí kvadratickou funkci odchylek $\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$. Tyto odchylky jsou již nezávislé, takže minimum vyžaduje, aby parciální derivace podle všech $n - r$ odchylek byly rovny nule:

$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta_{r+1}} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \Delta_{r+2}} = 0, \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial \Delta_n} = 0. \quad (22)$$

Tím jsou určeny odchylky $\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$ a zbývající se z nich vypočtou použitím lineárních vztahů, jimiž jsme je vyjádřili z rovnic (17).

Jako příklad tohoto postupu provedeme vyrovnání úhlů v trojúhelníku. Součet vnitřních úhlů *rovinného* trojúhelníka je roven dvěma pravým úhlům; ve *sférickém* trojúhelníku, tvořeném třemi hlavními kružnicemi na kulové ploše, je součet úhlů větší o t. zv. *sférický exces*, který lze pro každý trojúhelník vypočítat. V obou případech má tedy součet všech tří úhlů určitou hodnotu. Změříme-li však všechny úhly v narýsovaném trojúhelníku (na př. úhломěrem) nebo úhly trojbokého skleněného hranolu (opticky) anebo úhly ve sférickém trojúhelníku na povrchu Země (geodeticky), nebude mít součet naměřených výsledků přesně theoretickou hodnotu a je tedy třeba naměřené hodnoty vyrovnat. Tři měřené úhly x_1, x_2, x_3 jsou vázány jedinou rovnicí závislosti, jejíž přesnou platnost předpokládáme pro vyrovnané hodnoty:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 180^\circ + e = s,$$

kde e je sférický exces daného trojúhelníka, a proto s je známá hodnota. Jsou-li $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ velikosti úhlů, plynoucí z měření, o nichž předpokládáme, že jsou stejně přesně určeny, a má-li jejich součet hodnotu

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \bar{s}, \quad (23)$$

pak odečtením této rovnice od předposlední dostaneme pro odchylky $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ lineární vztah

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 180^\circ + e - \bar{s} = s - \bar{s}, \quad (24)$$

který musí být splněn zároveň s podmínkou metody nejmenších čtverců (20)

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \text{minimum}. \quad (25)$$

Podle předešlého bychom tedy vyjádřili na př. Δ_1 z rovnice (24)

$$\Delta_1 = s - \bar{s} - \Delta_2 - \Delta_3, \quad (26)$$

dosadili bychom do (25), a tak vzniklou kvadratickou funkci $Q(\Delta_2, \Delta_3)$ bychom derivovali parciálně podle Δ_2 a podle Δ_3 . Pak bychom tyto derivace položili rovny nule, čímž bychom získali dvě lineární rovnice pro Δ_2 a Δ_3 . Jejich řešením bychom dostali Δ_2, Δ_3 a dosazením do (26) také Δ_1 . Můžeme si však tento výpočet ušetřit, neboť obě rovnice (24) i (25) jsou vzhledem ke všem třem odchylkám souměrné, takže řešení odvozené pro jednu z nich lze stejným po-

stupem odvodit i pro druhou a třetí odchylku. Je tedy jediné možné řešení dáno hodnotami:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{s - \bar{s}}{3} = \frac{1}{3} (180^\circ + e - \bar{s}), \quad (27)$$

kde \bar{s} je podle (23) součet naměřených hodnot úhlů. Tedy úhly měřené se stejnou přesností vyrovnáme tak, že (bez zřetele na velikost jednotlivých úhlů) opravíme všechny úhly o stejnou hodnotu, rovnou třetině odchylky součtu úhlů od jeho správné hodnoty.

13.4. Vyrovnání měření různé váhy

Dosud jsme probírali — i když to nebylo vždy výslovně podotknuto — výhradně případy, kdy přesnost všech měření byla stejná. Proto platí odvozené výsledky jen pro tento zvláštní, byť velmi častý případ. Rozšíření probraných method na nestejně přesná měření nečiní však obtíže a snadno zobecníme postup, jímž jsme v druhé polovině čl. 10 ukázali, vycházejíce z normálního zákona četnosti, že nejpravděpodobnější hodnota stejně přesných přímých měření je dána aritmetickým průměrem.

Mějme řadu n přímých (a nezávislých) měření x_i téže veličiny x , která jsou zjištěna s různou přesností. Jestliže pro chyby těchto měření platí normální zákon četnosti 8(11), pak pravděpodobnost, že chyba hodnoty x_i je v mezích $\varepsilon_i \pm \frac{1}{2} d\varepsilon_i$, je podle 10 (10) dána výrazem

$$dP(\varepsilon_i) = \eta_0 e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$$

(kde h_i značí míru přesnosti hodnoty x_i) nebo podle 8(15)

$$dP(\varepsilon_i) = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Pravděpodobnost, že chyby hodnot x_1, \dots, x_n mají po řadě velikosti $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, je tedy (ze stejných důvodů jako při stejné přesných měřeních) rovna součinu pravděpodobností (28)

$$dP(\varepsilon_1) dP(\varepsilon_2) \dots dP(\varepsilon_n) = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n, \quad (29)$$

který přejde ve výraz 10 (11), mají-li všechna měření stejnou přesnost h . Zcela stejnou úvahou, jaká vedla v tomto případě k podmínce 10 (12), dojdeme k výsledku, že pro nejpravděpodobnější hodnotu X musí být prostá hodnota exponentu ve výrazu (29) nejmenší, t. j.

$$h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2 = \text{minimum}. \quad (30)$$

Také zde budeme požadovat, aby tato podmínka byla splněna pro nejpravděpodobnější hodnotu X , a píšeme-li opět

$$A_i = X - x_i,$$

budeme mít

$$h_1^2 A_1^2 + h_2^2 A_2^2 + \dots + h_n^2 A_n^2 = \text{minimum} \quad (31)$$

neboli

$$S(X) = h_1^2 (X - x_1)^2 + h_2^2 (X - x_2)^2 + \dots + h_n^2 (X - x_n)^2 = \text{minimum}.$$

Podmínka minima tedy zní:

$$\frac{\partial S}{\partial X} = 2 [h_1^2 (X - x_1) + \dots + h_n^2 (X - x_n)] = 0,$$

odkud plyne pro nejpravděpodobnější hodnotu výraz

$$X = \frac{h_1^2 x_1 + h_2^2 x_2 + \dots + h_n^2 x_n}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}. \quad (32)$$

Píše se častěji ve tvaru

$$X = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = \frac{[px]}{[p]}, \quad (33)$$

který dostaneme z (32), položíme-li

$$h_i^2 = p_i h^2, \quad p_i = \frac{h_i^2}{h^2}, \quad (34)$$

kde h je libovolná od nuly různá hodnota; p_i nazývá se *váha* i -tého měření. Je *úměrná čtverci přesnosti* nebo podle 8(14) *převrácené hodnotě čtverce střední chyby* téhož měření. Hodnota h je libovolná, a je to *přesnost měření jednotkové váhy* ($p = 1$). Z věty 11 (16), podle níž je přesnost aritmetického průměru úměrná odmocnině z počtu měření, plyne, že *váha aritmetického průměru n stejně přesných měření je n -krát větší než váha jednoho měření*. Tato váha se obvykle volí rovna jedné, a pak je *váha průměru rovna počtu měření*, z nichž byl průměr určen.

Obecný aritmetický průměr (33) měřených hodnot je shodný s výrazem pro souřadnici těžiště hmotných bodů o vahách p_i , ležících na přímce ve vzdálenostech x_i od počátku souřadnic. Proto se někdy označuje jako *váhový průměr*. Abychom určili střední chybu nejpravděpodobnější hodnoty X , píšme

$$X = \frac{p_1}{[p]} x_1 + \frac{p_2}{[p]} x_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]} x_n \quad (35)$$

a označme δ_i střední chyby jednotlivých měření a δ chybu měření jednotkové váhy. Podle 8 (14)

$$\delta_i^2 = \frac{1}{2h_i^2}, \quad \delta^2 = \frac{1}{2h^2} \quad (36)$$

a střední chybu δ vyrovnané hodnoty dostaneme podle vzorce 11 (14), dosadíme-li tam vzhledem k (35)

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{p_i}{[p]}.$$

Tak dostaneme nejprve

$$\bar{\delta}^2 = \frac{p_1^2}{[p]^2} \delta_1^2 + \frac{p_2^2}{[p]^2} \delta_2^2 + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \delta_n^2$$

a z (34) a (36) odvodíme

$$p_i \delta_i^2 = \frac{1}{2h^2} = \delta^2, \quad (37)$$

takže

$$\bar{\delta}^2 = \frac{p_1}{[p]^2} \delta^2 + \dots + \frac{p_n}{[p]^2} \delta^2 = \frac{[p] \delta^2}{[p]^2} = \frac{\delta^2}{[p]}$$

a

$$\delta = \frac{\delta}{\sqrt{[p]}}, \quad (38)$$

kde δ značí střední chybu měření jednotkové váhy. Abychom tuto chybu určili, uvažme, že je dána vzorcem 8(13), který pišme ve tvaru

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i'^2}{n}},$$

abychom vyznačili, že platí pro chyby ε_i *jednotkové váhy*. Dále je z rovn. (28) zřejmo, že chyba ε_1 s mírou přesnosti h_1 má touž pravděpodobnost jako chyba ε_2 s přesností h_2 , platí-li

$$\varepsilon_1 h_1 = \varepsilon_2 h_2.$$

Tedy stejně často jako se při měřeních jednotkové váhy s mírou přesnosti h vyskytuje chyba ε_k , vzniká u měření s mírou přesnosti h_k chyba

$$\varepsilon_k = \frac{h}{h_k} \varepsilon_k^{\bar{m}} = \frac{\varepsilon_k'}{\sqrt{p_k}}, \quad (39)$$

kde bylo použito vztahu (34). Můžeme tedy za střední hodnotu součtu $\sum \varepsilon_i'^2$ vzít také střední hodnotu součtu $\sum (\sqrt{p_i} \varepsilon_i)^2 = \sum p_i \varepsilon_i^2$, takže

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum p_i \varepsilon_i^2}{n}}. \quad (40)$$

Tím je střední chyba jednotkové váhy vyjádřena neznámými skutečnými zhybami, které musíme nahradit známými chybami zdánlivými. Ukazuje se, ce pro nestejně přesná měření platí místo 11 (9) vztah

$$\sum_{k=1}^n p_k \Delta_k^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \varepsilon_k^2, \quad (41)$$

ktejý lze odvodit³⁾ v podstatě stejným způsobem jako 11 (9) s tím rozdílem, že místo vztahu 11 (1) $\sum \Delta_i = 0$ platí podle (33) rovnice

$$\sum p_i \Delta_i = \sum p_i (X - x_i) = X \sum p_i - \sum p_i x_i = 0. \quad (42)$$

Užívá se jí obvykle ke kontrole správnosti výpočtu. Spojením vztahů (40) a (41) dostaneme pro střední chybu jednotkové váhy

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum p_i \Delta_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{[p \Delta \Delta]}{n-1}} \quad (43)$$

a pro střední chybu vyrovnané hodnoty (33) n nestejně přesných měření vzhledem k (38)

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{\sum p_i \Delta_i^2}{(n-1) \sum p_i}} = \sqrt{\frac{[p \Delta \Delta]}{(n-1) [p]}}. \quad (44)$$

³⁾ Viz na př. [59].

Tím je úplně rozřešen problém vyrovnání přímých měření nestejně přesných, což na podkladě výsledků článku 12 vede i k řešení nezávislých nepřímých měření různých vah. Řešení vyplynulo z podmínky (31), která zavedením vah p_i podle (34) přejde v podmínku

$$p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + \dots + p_n A_n^2 = [p A A] = \text{minimum.} \quad (45)$$

Podobně přejde původní podmínka (30) v rovnici

$$p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \dots + p_n \varepsilon_n^2 = \text{minimum.} \quad (46)$$

Nahradíme-li zde chyby ε_k nestejně přesných měření podle (39) chybami $\varepsilon'_k = \sqrt{p_k} \varepsilon_k$ měření jednotkové váhy, dostaneme podmínku

$$\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \dots + \varepsilon_n'^2 = \text{minimum.} \quad (47)$$

Stejně můžeme upravit podmínku (45) na tvar *shodný s podmínkou 13 (4) pro stejné přesná měření*:

$$\Sigma A_k'^2 = \text{minimum, kde } A_k' = \sqrt{p_k} A_k. \quad (48)$$

Tento postup se nazývá *převod (redukce) na stejnou váhu* a lze ho stejně užít i k převedení všech dalších obecnějších úloh na základní případ stejné přesných měření.

Jde-li o zprostředkující měření, stačí násobit odchylkové rovnice (5) odmocninami z vah příslušných měření, čímž činitelé k_i , l_i , m_i a x_i přejdou v hodnoty $\sqrt{p_i} k_i$, $\sqrt{p_i} l_i$, $\sqrt{p_i} m_i$ a $\sqrt{p_i} x_i$. Tím dostaneme pro vyrovnání zprostředkujících měření x_i o vahách p_i z rovnic 13 (7) normální rovnice

$$\left. \begin{aligned} [pkk] U + [pkl] V + [pkm] W &= [pkx], \\ [plk] U + [pll] V + [plm] W &= [plx], \\ [pmk] U + [pml] V + [pmm] W &= [pmx]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Podobně postupujeme při vyrovnání závislých měření o různých vahách. Původní podmínka (20) pro stejné přesná měření platí pak pro čtverce násobené vahami a přejde tedy v rovnici (45); vedlejší podmínky vyjádřené lineárními vztahy (17) mezi odchylkami se nemění. Tak na př. pro vyrovnání úhlů v trojúhelníku dostaneme z (25) základní podmínku metody nejmenších čtverců ve tvaru

$$p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + p_3 A_3^2 = \text{minimum,} \quad (50)$$

avšak rovnice závislosti (24) zůstává beze změny. Snadným výpočtem, popsaným v (3), došli bychom k výsledku:

Úhly v trojúhelníku, měřené s různou přesností, vyrovnáme, upravíme-li jejich součet na správnou hodnotu korekcemi, jež jsou v poměru převrácených hodnot vah jednotlivých úhlů. Tedy (v souhlase s výsledkem uvedeným na konci čl. 13,3):

Úhly v rovinném trojúhelníku, měřené se stejnou přesností, vyrovnáme tak, že všechny tři úhly opravíme o stejnou hodnotu, rovnou třetině odchylky měřením získaného součtu úhlů od 180°. (51)

Výsledky získané v tomto článku můžeme shrnout touto větou:

Methodou nejmenších čtverců stanovené nejpravděpodobnější hodnoty veličin různé váhy jsou dány obecně podmínkou, že součet vahami násobených čtverců odchylek je nejmenší. (52)

Příklad. V článku 12 jsme uvedli výsledky dvou řad můstkových měření. První řada vedla k hodnotě 12 (30)

$$X_I = 500,07 \text{ mm} \pm 0,10 \text{ mm},$$

druhá k hodnotě 12 (31)

$$X_{II} = 500,61 \text{ mm} \pm 0,23 \text{ mm}.$$

Z připojených pravděpodobných chyb vidíme, že výsledky mají různou přesnost, a proto by nebylo správné vzít jako nejsprávnější výsledek aritmetický průměr 500,34 mm. Je třeba přihlížet k různým vahám obou výsledků. Jsou nepřímou úměrné čtvercům pravděpodobných chyb:

$$\frac{p_I}{p_{II}} = \frac{\vartheta_{II}^2}{\vartheta_I^2} = \frac{0,23^2}{0,1^2} = 5,29.$$

Zvolíme-li tedy na př. $p_{II} = 1$, bude $p_I = 5,29$ a váhový průměr obou výsledků

$$X = \frac{p_I X_I + p_{II} X_{II}}{p_I + p_{II}} = \frac{5,29 \cdot 500,07 + 500,61}{5,29 + 1} \text{ mm} = 500,156 \text{ mm}.$$

Jeho pravděpodobná chyba podle (38)

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\sqrt{[p]}} = \frac{\vartheta_{II}}{\sqrt{p_I + p_{II}}} = \frac{0,23 \text{ mm}}{6,29} = 0,092 \text{ mm},$$

neboť podle učiněné volby je pravděpodobná chyba měření jednotkové váhy ϑ rovna chybě ϑ_{II} . Celkem tedy

$$X = (500,16 \pm 0,09) \text{ mm}.$$

14. STANOVENÍ KONSTANT METHODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ A METHODOU MOMENTOVOU

Z nejdůležitějších a nejčastějších úloh praktické fyziky je experimentální určení konstant. Ve většině případů poskytuje nejpravděpodobnější hodnoty hledaných konstant metoda nejmenších čtverců, neboť se ukazuje, že se jejich určení dá převést na vyrovnání zprostředkujících měření.

1. V nejjednodušším případě jde o určení jedné nebo několika konstant přímým měřením. Tento případ je dosti vzácný, neboť většinou musíme hledanou stálou veličinu teprve vypočítat z jedné nebo z několika přímo měřených veličin. Nejčastěji jde tedy o nepřímá měření, jejichž vyrovnání dovedeme podle čl. 12 a 13 úplně řešit i v nejobecnějším případě nestejně přesných měření. Sem spadá na př. měření délky tyče nebo tloušťky desky při stálé teplotě,¹⁾ nebo zjištění zrychlení zemské tíže anebo momentu setrvačnosti z měření doby kyvu a pod.

14 ¹⁾ Při měření mikrometrem je tloušťka destičky rovna rozdlu čtení na mikrometru při jejím vložení a t. zv. nulové polohy, tedy je to funkce dvou přímo měřených veličin, a její chybu určíme podle věty 12 (10).

2. Další důležitá úloha je určit konstantu úměrnosti mezi dvěma veličinami, které přímo (nebo nepřímo) měříme, a které mají být podle theoretických nebo experimentálních zákonů navzájem úměrné. Postupujeme tak, že měříme obě veličiny, měníce jejich hodnoty a při tom předpokládáme přesnou platnost zákona o jejich úměrnosti. Tak se měří na př. modul pružnosti v tahu (měníme napětí drátu změnou zatížení a měříme příslušné prodloužení) nebo odpor elektrického vodiče (jako konstanta úměrnosti mezi elektrickým napětím a proudem). Výsledkem měření je jistý počet dvojic sobě příslušných hodnot obou veličin a jde o to, ze všech těchto hodnot, zatížených náhodnými chybami měření, odvodit nejpravděpodobnější hodnotu konstanty úměrnosti. Tato úloha je však zvláštní případ vyrovnání řady zprostředkujících měření, kdy počet neznámých je roven jedné. Platí-li totiž mezi veličinami x a t zákon úměrnosti

$$x = at, \quad (1)$$

hledáme nejpravděpodobnější hodnotu A konstanty a z dvojic sobě příslušných hodnot t_i, x_i , získaných měření. Máme tedy rovnici tvaru 13 (3), kde jediná neznámá $U = A$ a hodnoty $k_i = t_i$. Vyrovnání bylo v čl. 13 odvozeno za předpokladu, že hodnoty k_i jsou zjištěny bez chyby a lze je tedy aplikovat na náš případ jen s takovou přesností, s jakou jsou chyby hodnot nezávisle proměnné t zanedbatelné proti chybám hodnot závisle proměnné x . V posledním příkladě měření modulu pružnosti by tedy mělo být poměrné prodloužení drátu určeno mnohem přesněji než napětí; při použití přesných závaží dá se však naopak napětí změřit mnohem přesněji než prodloužení, a proto bychom raději vyrovnávali obrácenou závislost prodloužení na napětí.

Za tohoto předpokladu je tedy řešení podle 13 (7) dáno jedinou *normální rovnicí*

$$[kk] U = [kx], \quad (2)$$

k níž připojíme v tomto jednoduchém případě také vzorec pro *střední chybu nejspřávnější hodnoty*

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{p_u}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-1}}, \quad p_u = [kk]; \quad (3)$$

zde značí δ chybu jednotkové váhy a p_u váhu hodnoty U .²⁾ V označení tohoto článku bude tedy

$$p_A = [tt], \quad \delta_A = \frac{\delta}{\sqrt{[tt]}} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{(n-1)[tt]}}; \quad (4)$$

nejpravděpodobnější hodnota konstanty úměrnosti bude pak dána vztahem

$$[tt] A = [tx], \quad (5)$$

který vede k výsledku

$$A = \frac{[tx]}{[tt]} = \frac{\sum t_i x_i}{\sum t_i^2}, \quad \delta_A' = \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{(n-1) \sum t_i^2}} = \frac{5 \sum \Delta_i}{(2n-1) \sqrt{\sum t_i^2}}, \quad (6)$$

14²⁾ Rovnice (3) obdržíme z obecných vzorců vyrovnávacího počtu (na př. [59]), které budou v tomto článku uvedeny také pro případ dvou neznámých [viz rovn. (14)].

při čemž druhý výraz pro δ_A plyne z (4) dosazením za δ podle vzorce 12 (22). Odchytky potřebné k určení chyby δ_A dostaneme z odchytkových rovnic 13 (5)

$$A_i = X - x_i = A t_i - x_i, \quad (7)$$

do nichž dosadíme z (6) vypočtenou konstantu A .

Tím je úloha úplně řešena. Jako příklad probereme *určení táry mikroskopu u komparátoru*. Tára mikroskopu rovná se délce (vyjádřené v $\mu = 10^{-3}$ mm) intervalu, který v zaostřovací rovině mikroskopu vyhovuje posunutí vlákna okulárového mikrometru při otočení šroubu o plný úhel. Určuje se proměřením centimetrového intervalu pravítka (umístěného v zaostřovací rovině), rozděleného na milimetry; korekce všech dílků jsou známy. Výška závitů šroubu je volena tak, že jedné otáčce šroubu odpovídá velmi přibližně 0,1 mm a na dělené hlavici šroubu čtou se desetiny μ . Tára je tedy přibližně rovna 100 μ . Označíme-li n_k ($\doteq 10$) počet otáček šroubu mikrometru, který připadá na k -tý interval šířky d_k ($\doteq 10$) desetin milimetru, je tára v desetinách mm rovna

$$\lambda = \frac{d_k}{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, 10.$$

Tyto rovnice jsou přesně splněny pro správné hodnoty n_k , d_k všech milimetrových intervalů. Správné hodnoty však neznáme, ježto měřením získaná čísla jsou zatížena měřicími chybami. Je však pochopitelné, že šířky intervalů (opravené o známé korekce, zjištěné velmi přesným měřením) jsou určeny mnohem přesněji než hodnoty čtené na okulárovém mikrometru. Vezmeme-li tedy velikost d intervalu korigovaného měřítka za nezávisle proměnnou t a počet otáček mikrometru n za závisle proměnnou x , bude vztah mezi nimi vyjádřen rovnicí shodnou s (1):

$$x = at, \quad \text{kde } a = \frac{1}{\lambda}.$$

Pak je také splněn základní předpoklad popsané metody, že chyby naměřených hodnot t_i nezávisle proměnné veličiny jsou zanedbatelné proti chybám měřených hodnot x_i závisle proměnné. Je tedy podle (6) nejpravděpodobnější hodnota A táry mikroskopu rovna

$$A = \frac{1}{A} = \frac{\sum t_i^2}{\sum t_i x_i} \quad (8)$$

a její střední chyba podle 12 (3)

$$\delta_A = \left| \frac{\partial A}{\partial A} \right| \delta_A = \frac{1}{A^2} \delta_A.$$

Avšak $A \doteq 1$ (počítáme-li v desetinách milimetru), a tedy též $A \doteq 1$, takže můžeme položit

$$\delta_A \doteq \delta_A \doteq \frac{5 \sum A_i}{(2n - 1) \sqrt{\sum t_i^2}}. \quad (9)$$

Provedeme výpočet táry mikroskopu u velkého transversálního komparátoru na základě měření vykonaných v Bureau Int. des Poids et Mesures.³⁾

14³⁾ Bližší o měřicí metodě viz [60].

Výsledky měření jsou shrnuty v tab. 14.I. Jsou v ní kromě přímo zjištěných hodnot t_i a x_i (vyjádřených v desetinách mm) uvedeny čtverce t_i^2 a součiny $t_i x_i$. Dosazením součtů těchto výrazů, vyznačených v poslední řádce tabulky, do vzorce (6), obdržíme hodnotu

$$A = \frac{999,538}{1000,696} = 0,998\ 843, \quad (10)$$

kteří použijeme k výpočtu zdánlivých chyb Δ_i z odchylkových rovnic (7). Jejich hodnoty jsou rovněž uvedeny v tab. 14.I. Ze součtu hodnot posledního sloupce vychází pro střední chybu v desetinách mm podle (9)

$$\delta_A \doteq \frac{5 \cdot 94}{19 \sqrt{1000,7}} \cdot 10^{-4} = 7,8 \cdot 10^{-5};$$

dosazením z (10) do (8) pro nejpravděpodobnější hodnotu táry v mikronech dostaneme

$$A = \frac{100}{0,998\ 843} = (100,116 \pm 0,005) \mu, \quad (11)$$

kde je připojena s oběma znaménky hodnota pravděpodobné chyby $2/3 \delta_A$.

Tabulka 14.I. Měření táry mikroskopu u komparátoru

i	t_i	x_i	t_i^2	$t_i x_i$	Δ_i
1	10,0023	9,987	100,046	99,893	+ 0,0037
2	10,0081	9,997	100,162	100,051	— 05
3	10,0048	9,994	100,096	99,988	— 08
4	10,0062	9,995	100,124	100,012	— 04
5	10,0038	9,987	100,076	99,908	+ 52
6	10,0019	9,993	100,038	99,949	— 27
7	10,0021	9,990	100,042	99,921	+ 05
8	10,0006	9,991	100,012	99,916	— 20
9	10,0035	9,992	100,070	99,955	— 01
10	10,0015	9,993	100,030	99,945	— 31
Σ	100,0348	99,919	1000,696	999,538	$\Sigma \Delta_+ = 0,0094$

3. Dosud jsme měli co činit s nejjednodušším případem jediné konstanty. Stejně důležitý a častý je případ, kdy z řady měřených hodnot je třeba určit dvě konstanty. Nejprve přepíšeme normální rovnice 13(7) pro zvláštní případ dvou neznámých:

$$[kk] U + [kl] V = [kx], \quad (12)$$

$$[lk] U + [ll] V = [lx].$$

Kromě toho sestavíme vzorce pro střední chyby nejsprávnějších hodnot neznámých, jak jsme již předeslali v pozn. 14²⁾:

$$\delta_U = \frac{\delta}{\sqrt{p_U}}, \quad \delta_V = \frac{\delta}{\sqrt{p_V}}, \quad (13)$$

kde střední chyby jednotkové váhy δ a váhy p_U, p_V hodnot U, V jsou dány výrazy:⁴⁾

$$\delta = \sqrt{\frac{[DD]}{n-2}} \doteq \frac{5}{2} \frac{[D_+]}{n-1}, \quad p_U = [kk] - \frac{[kl]^2}{[ll]}, \quad p_V = [ll] - \frac{[kl]^2}{[kk]}. \quad (14)$$

Mohou se vyskytovat různé případy se dvěma konstantami, ale nejčastější je úloha určit konstanty lineárního vztahu

$$x = a + bt. \quad (15)$$

Aby byl splněn aspoň do jisté míry základní předpoklad vyrovnání zprostředkujících měření, musí i v tomto případě chyby hodnot t_i nezávisle proměnné být malé proti chybám hodnot x_i závisle proměnné. Většinou je tomu skutečně tak, protože hodnoty nezávisle proměnné, kterou bývá často teplota, volíme a jim příslušné hodnoty x_i určujeme měřením více méně přesným. Pak můžeme položit $k_i = 1, l_i = t_i$, takže normální rovnice (12) pro nejpravděpodobnější hodnoty A, B konstant a, b nabývají tvaru

$$\begin{aligned} nA + [t]B &= [x] \\ [t]A + [tt]B &= [tx]. \end{aligned} \quad (16)$$

Řešíme je tak, že první rovnici násobíme $[t]$ a od ní odečteme druhou rovnici násobenou n . Tím dostaneme rovnici, která již neobsahuje A , a jejím řešením

$$B = \frac{[x][t] - n[tx]}{[t]^2 - n[tt]}. \quad (17)$$

Dosazením této hodnoty do první rovnice (16) obdržíme pak

$$A = \frac{[t][tx] - [x][tt]}{[t]^2 - n[tt]}. \quad (18)$$

Vypočteme-li odtud hodnoty A a B , určíme z odchylkových rovnic

$$\Delta_i = A + Bt_i - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

zdánlivé chyby Δ_i a podle první rovnice (14) střední chybu jednotkové váhy δ . Zbývající dvě rovnice mají zde tvar

$$p_A = n - \frac{[t]^2}{[tt]}, \quad p_B = [tt] - \frac{[t]^2}{n}. \quad (20)$$

Vypočteme z nich váhy obou konstant A, B , a tím podle (13) dostaneme jejich střední chyby:

$$\delta_A = \frac{\delta}{\sqrt{p_A}}, \quad \delta_B = \frac{\delta}{\sqrt{p_B}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{[DD]}{n-2}} \doteq \frac{5}{2} \frac{[D_+]}{n-1}. \quad (21)$$

Z těchto vzorců je vidět, že — zvláště při početnějších řadách měření — je výpočet dosti pracný. Lze jej zjednodušit, určíme-li jakýmkoli způsobem při-

14⁴⁾ Vzorec pro δ plyne z 12 (19), píšeme-li $n-2$ místo $n-1$, takže v 12 (20) lze pak položit $\sqrt{n(n-2)} \doteq n-1$. Pak místo 12 (22) vyjde $\delta = 5 \frac{\Sigma \Delta_+}{2n-2}$.

blížené hodnoty konstant a , b a počítáme z rovnic (17) a (18) nebo přímo z rovnic normálních (16) jen opravy, které je nutno přičíst k přibližným hodnotám, abychom z nich dostali nejsprávnější hodnoty A , B . Tyto opravy počítáme jen na několik málo míst, podle jejich velikosti. Čím správnější jsou přibližné hodnoty, od nichž vycházíme, tím snadnější je výpočet.

Označme a_0 , b_0 přibližné hodnoty konstant, které lze vypočítat na př. z kterýchkoli dvou měření, a položíme

$$A = a_0 + a, \quad B = b_0 + \beta, \quad (22)$$

kde a , β jsou opravy (korekce), které nutno přičíst k přibližným hodnotám, abychom dostali nejsprávnější hodnoty. Nahradíme-li v odchylkových rovnicích (19) A a B výrazy (22), bude

$$|A_i = a_0 + b_0 t_i + a + \beta t_i - x_i ;$$

klademe-li

$$\xi_i = x_i - (a_0 + b_0 t_i), \quad (23)$$

dostaneme rovnice

$$A_i = a + \beta t_i - \xi_i, \quad (24)$$

které se liší od původních odchylkových rovnic (19) jen tím, že konstanty A , B jsou nahrazeny opravami a , β a měřené hodnoty x_i rozdíly ξ_i . Platí tedy pro opravy normální rovnice

$$na + [t] \beta = [\xi]$$

$$[t]a + [tt] \beta = [t\xi], \quad (25)$$

které dostaneme z (16), dosadíme-li tam ξ za x . Jsou-li však a_0 , b_0 dostatečně blízké skutečným hodnotám a , b , jsou vzhledem k (15) rozdíly ξ malé a číselný výpočet oprav je proto snazší. Zjednodušení výpočtu je tím větší, čím více se blíží hodnoty a_0 , b_0 nejsprávnějším hodnotám. Tento postup se doporučuje zvláště při větším počtu hledaných konstant.

Vedle metody nejmenších čtverců, která je po stránce theoretické i praktické nejpropracovanější vyrovnávací methodou, užívá se hojně jiné metody, známé pod názvem *metoda momentová*.

Tato metoda (v nejjednodušším tvaru) je založena na požadavku, aby momenty empirické křivky byly rovny momentům matematické křivky, a tato podmínka má být u křivek s ν parametry splněna pro nultý, první až $(\nu - 1)$ moment. Přitom k -tý moment křivky dostaneme, sečteme-li pro všechny body získané měřením součiny pořadnice bodu a k -té mocniny jeho vzdálenosti od osy pořadnic:

$$M_k = \sum_{i=1}^n (t_i)^k x_i. \quad (26)$$

Tak na př. pro obecnou křivku o 3 parametrech

$$x = f(t, a, b, c)$$

dostaneme podmínky

$$\sum f(t_i, a_0, b_0, c_0) = \sum x_i, \quad (27)$$

$$\sum t_i f(t_i, a_0, b_0, c_0) = \sum t_i x_i, \quad (28)$$

$$\sum t_i^2 f(t_i, a_0, b_0, c_0) = \sum t_i^2 x_i, \quad (29)$$

z nichž vypočteme přibližné hodnoty konstant a_0 , b_0 , c_0 . Užijeme-li tohoto postupu v případě prosté úměrnosti (1), dostaneme jedinou podmínku

$$\Sigma a_0 t_i = \Sigma x_i,$$

z níž plyne přibližná hodnota

$$a_0 = \frac{\Sigma x_i}{\Sigma t_i}. \quad (30)$$

Kdybychom místo rovnosti nulových momentů požadovali rovnost prvních momentů, došli bychom podle (30) k rovnici

$$\Sigma a_0 t_i^2 = \Sigma t_i x_i,$$

shodné s (5). Přibližná hodnota a_0 by se pak rovnala nejpravděpodobnější hodnotě (6) plynoucí z metody nejmenších čtverců.

Pro lineární funkci (15) mají rovnice (27) a (28) tvar

$$\begin{aligned} \Sigma (a_0 + b_0 t_i) &= n a_0 + b_0 \Sigma t_i = \Sigma x_i, \\ \Sigma t_i (a_0 + b_0 t_i) &= a_0 \Sigma t_i + b_0 \Sigma t_i^2 = \Sigma t_i x_i, \end{aligned}$$

totožný s tvarem normálních rovnic (16). Snadno se přesvědčíme, že momentová metoda vede vůbec pro celistvé funkce algebraické k stejným výsledkům jako metoda nejmenších čtverců. Skutečně rovnice, které plynou z rovnosti nulových, prvních, druhých až m -tých momentů pro konstanty funkce m -tého stupně,

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m, \quad (31)$$

jsou totožné s rovnicemi

$$\begin{aligned} m A_0 + [t] A_1 + [t^2] A_2 + \dots + [t^m] A_m &= [x], \\ [t] A_0 + [t^2] A_1 + [t^3] A_2 + \dots + [t^{m+1}] A_m &= [tx], \\ \vdots & \\ [t^m] A_0 + [t^{m+1}] A_1 + [t^{m+2}] A_2 + \dots + [t^{2m}] A_m &= [t^m x], \end{aligned} \quad (32)$$

v něž přejdou rovnice, které pro výpočet nejpravděpodobnějších hodnot A_0 , A_1 , ..., A_m koeficientů funkce (31) poskytuje metoda nejmenších čtverců.

Obecně dává ovšem momentová metoda výsledky odlišné od nejpravděpodobnějších hodnot parametrů a v některých případech je výpočet momentovou metodou jednodušší než metodou nejmenších čtverců.

Pro přesnější vyrovnání se formuluje momentová metoda tak, že se momenty pořadnic nahrazují momenty úzkých plošných elementů $x \Delta t$. Jsou-li měření dosti přesná, dává momentová metoda i v uvedeném jednoduchém tvaru plně vyhovující výsledky, jak ukážeme na případu určení tóry mikroskopu, řešené metodou nejmenších čtverců v tomto článku. Dosadíme-li do vzorce (30) hodnoty součtů z posledního řádku tab. 14, I, dostaneme pro přibližnou hodnotu tóry (v mikronech)

$$\lambda_0 = \frac{100}{a_0} = 100 \frac{\Sigma t_i}{\Sigma x_i} = 100 \frac{100,0348}{99,919} \mu = 100,116 \mu, \quad (33)$$

tedy výsledek v mezích přesnosti naprosto shodný s nejpravděpodobnější hodnotou (11).

15. METHODA SKUPINOVÁ

15.1. Theoretické a praktické oprávnění skupinové metody

Tato metoda u nás ještě nezdomácněla, ačkoli poskytuje velmi pěkné výsledky a její princip je zcela jednoduchý. Obvykle se v literatuře uvádí tento předpis pro určení neznámých parametrů, obsažených ve funkci vyjadřující závislost dvou měřených veličin:

Dosadíme naměřené hodnoty obou veličin do předpokládaného vztahu; tak vzniklé rovnice rozdělíme do tolika stejně početných skupin, kolik je neznámých parametrů, sečteme rovnice v každé skupině a dělíme jejich počtem. Řešením výsledných rovnic dostaneme přibližné hodnoty hledaných parametrů.

Tento postup se podstatně liší od početního postupu metody nejmenších čtverců i momentové metody v tom, že u obou method se tvoří rovnice ze součtů přes všechny měřené hodnoty, kdežto zde sčítáme pro každou dílčí skupinu zvlášť. Přitom jsou tyto poslední rovnice všechny stejně jednoduché, kdežto u předešlých method stoupá s rostoucím počtem neznámých konstant nejen počet, ale i složitost (stupeň) rovnic. Přes tyto rozdíly dá se najít jistá theoretická souvislost skupinové metody s methodou nejmenších čtverců.

Abychom to ukázali, předpokládejme, že vztah mezi oběma měřenými veličinami je vyjádřen rovnicí

$$x = f(t, c_1, c_2, \dots, c_r), \quad (1)$$

takže odchylkové rovnice zní

$$\Delta_i = f(t_i, c_1, c_2, \dots, c_r) - x_i. \quad (2)$$

Počítáme-li tedy konstanty c_1, c_2, \dots, c_r podle předpisu skupinové metody, znamená to, že odchylky Δ_i splňují pro všech r dílčích skupin měření podmínky

$$\sum_{(1)} \Delta_i = 0, \quad \sum_{(2)} \Delta_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{(r)} \Delta_i = 0. \quad (3)$$

Nuže tyto podmínky mají stejný tvar jako rovnice 11 (1), která platí pro aritmetický průměr přímých měření, a právě na této vlastnosti je založena metoda nejmenších čtverců.

Podobně je tomu i při vyrovnávání závislosti (1), obsahuje-li funkce aditivní konstantu, na př. c_1 . Pak jedna podmínka minima zní

$$\frac{\partial \sum \Delta_i^2}{\partial c_1} = 2 \sum \Delta_i = 0, \quad (4)$$

o čemž se můžeme přesvědčit přímo v případě celistvé funkce algebraické. Opravdu první z normálních rovnic 14 (32) je podle 14 (31) a (2) totožná s podmínkou

$$\sum \Delta_i = 0. \quad (5)$$

Tedy v případě celistvé funkce s aditivní konstantou $c_1 = a_0$ užívá metoda nejmenších čtverců, a podle předešlého výkladu i metoda momentová, podmínky (5), která vyjadřuje, že součet odchylek všech měření je roven nule.

Skupinová metoda používá téže podmínky, avšak s tím podstatným rozdílem, že odchylky se ruší nejen pro všechna měření dohromady, ale i pro každou dílčí skupinu měření zvlášť. Proto také je název skupi-

nová metoda podle našeho soudu vhodnější než název průměrová metoda, pod kterým je známá v cizině.

Z těchto úvah je dobře zřejmo, že skupinová metoda je nutně jednodušší než obě starší metody. Především je rovnice (5) jednodušší než všechny ostatní rovnice soustavy 14 (32) a za druhé se součty vztahují jen na jednotlivé skupiny, a obsahují tedy tolikrát méně členů než úplné součty v 14 (32), kolik je neznámých konstant.

Ačkoli skupinová metoda je stejně obecnou vyrovnávací metodou jako obě starší metody, omezíme se v dalším výkladu na vyrovnání empirické závislosti mnohočlenem stupně m , který je lineárním výrazem $m + 1$ konstant (parametrů). Metoda nejmenších čtverců vychází z postulátu

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \text{minimum}, \quad (6)$$

který platí pro součet čtverců odchylek Δ_i všech n vyrovnávaných měření. Jsou-li parametry a_λ nezávislé, vyžaduje podmínka (6), aby

$$\frac{\delta}{\delta a_\lambda} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots, m. \quad (7)$$

Píšeme-li

$$\Delta_i = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_m t_i^m - x_i, \quad (8)$$

vyjde pro $\lambda = 0$ rovnice

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta a_0} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i = 0, \quad (9)$$

k níž se pojí další rovnice

$$\sum_{i=1}^n t_i \Delta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n t_i^2 \Delta_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n t_i^m \Delta_i = 0. \quad (10)$$

Je však známo, že postulát (6) z normálního zákona chyb je jen pro aritmetický průměr stejně přesných měření, pro který platí také rovnice (9). Můžeme tedy stejným právem založit vyrovnávací počet na vztahu (9) jako na vztahu (6). Důvod, proč byla dána přednost vztahu (6) před (9), je v tom, že (6) dává vždy právě potřebný počet rovnic (rovný počet hledaných parametrů), kdežto podmínka (9) poskytuje jedinou rovnici (9), v níž se sčítají odchylky všech měření. Tu je nasnadě myšlenka získat potřebný počet rovnic tím, že provedeme tolik řad měření, kolik parametrů hledáme, a pro každou řadu vyžadujeme platnost podmínky (9). S hlediska statistického je však výhodné volit tolikrát větší celkový počet měření, kolikrát více je neznámých. Chápeme-li tedy všechny zmíněné řady měření jako jedinou měřicí operaci o n členech, rozdělíme všechna měření na $m + 1$ skupinu a pro každou skupinu položíme součet odchylek na roveň nule. Tak dojdeme skutečně k známému předpisu skupinové metody.

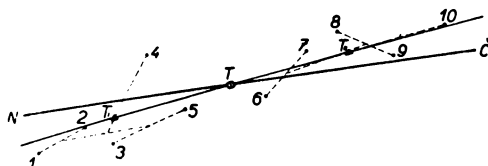
Rozdělíme měření seřazená podle rostoucích hodnot t po řadě do tolika skupin, kolik parametrů chceme určit, a položíme součet odchylek (8) v každé skupině rovný nule. Počty měření v jednotlivých skupinách volíme v poměru středních chyb příslušných skupin. (Srov. čl. 15,2).

S hlediska ryze formálního jsou rovnice (9) a (10) metody nejmenších čtverců lineární kombinace n rovnic

$$\Delta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

stejně jako rovnice metody skupinové

$$\sum_0 \Delta_i = 0, \quad \sum_{(1)} \Delta_i = 0, \dots, \quad \sum_{(m)} \Delta_i = 0, \quad (12)$$



Obr. 15.1. Vliv nepřesného měření 4 na polohu přímky vyrovnané metodou nejmenších čtverců a metodou skupinovou.

kde čísla v závorkách značí skupinu, na kterou se sčítání vztahuje. Ačkoli tedy nejsou rovnice (11) splněny, jak by tomu bylo při zcela přesném měření, záleží vyrovnávání u obou metod v nahrazení rovnic (11) tolika jejich nezávislými kombinacemi, kolik je nezávislých parametrů. Koeficienty, kterými jsou v těchto kombinacích odchylky Δ_i násobeny, mají však význam vah, které přisuzujeme jednotlivým měřením x_i . Při stejně přesných měřeních mají tedy x_i stejné váhy jen v rovnicích (12) a (9), kdežto v rovnicích (10) se uplatňují více hodnoty x_i , příslušné větším hodnotám t_i . Při skupinovém vyrovnání uplatňují se tedy všechna (stejně přesná) měření se stejnou vahou, kdežto metoda nejmenších čtverců přeceňuje systematicky měření příslušná větším hodnotám nezávisle proměnné bez zřetele na fyzikální podmínky měření. Tak při měření doby kyvu, plochy (planimetrem) a vůbec při všech postupných měřeních přisuzuje metoda nejmenších čtverců bezdůvodně větší váhu krajním měřením proti měřením středním (viz [19]), a proto se raději užívá t. zv. *postupné metody* (čl. 18), která plyne právě skupinovým vyrovnáním lineární závislosti při ekvidistantních měřeních, jak uvidíme v čl. 15.4.

Další nevýhodou je kvadratická povaha podmínky (6), užijeme-li metody nejmenších čtverců k vyrovnání měření, v nichž se vyskytují jednotlivé značnější odchylky. Vybočuje-li na př. čtvrtý z deseti bodů, znázorňujících měření lineární závislosti, značněji z řady ostatních bodů (obr. 15.1), dostaneme skupinovým vyrovnáním podle čl. 16.1 přímku $T_I T_{II}$, kde T_I je těžiště bodů 1 až 5, a T_{II} těžiště bodů 6 až 10. Tato přímka vybočuje jen v levé části z řady bodů, ale mnohem méně než přímka $N\check{C}$, získaná metodou nejmenších čtverců. Obě přímky totiž procházejí společným těžištěm T všech deseti bodů, ale $N\check{C}$ se odchyluje značněji od směru řady, ježto podmínka (6) nepřipouští tak velkou hodnotu Δ_4 jako podmínky (12); její čtverec by příliš zvětšil součet (1). Vliv 4. měření by ještě méně porušil průběh přímky $T_I T_{II}$, kdybychom podle dřívějšího výkladu vzali do 1. skupiny více bodů (na př. 6) než do 2. skupiny. U metody nejmenších čtverců bychom toho také dosáhli snížením váhy bodu 4, ale pro kvantitativní odhad tohoto snížení nemáme podklady.

Z předešlé úvahy vidíme, že skupinová metoda je theoreticky stejně oprávněna jako metoda nejmenších čtverců a že je prakticky výhodnější.

15.2. Vyrovnání lineární závislosti a úměrnosti

Je zřejmo, že předpisem skupinové metody (str. 106) nejsou výsledné rovnice stanoveny jednoznačně; totéž platí pro přibližné hodnoty parametrů, jež závisí na volbě skupin. Kromě toho není blíže odůvodněn požadavek, aby skupiny byly stejně početné. Klade se tedy otázka, je-li možno najít předpis, který by jednoznačněji určil volbu skupin a zároveň ze všech možných skupin vybral takové, které vedou k nejlepšímu přiblížení.

Ukážeme, jak k takovému předpisu dojdeme u lineární funkce. Máme-li celkem n dvojic hodnot, víme, že nebude obecně platit současně všech n rovnic:

$$x_i = a + bt_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Rozdělíme-li však všechna měření na dvě skupiny I a II , obsahující n_I a n_{II} měření, a sečteme-li rovnice odpovídající skupině I a skupině II , dojdeme ke dvěma rovnicím, jimiž můžeme definovat přibližné hodnoty parametrů:

$$\begin{aligned} n_I a_0 + b_0 [t]_I &= [x]_I, \\ n_{II} a_0 + b_0 [t]_{II} &= [x]_{II}. \end{aligned} \quad (14)$$

Pro výpočet je zbytečné tyto rovnice čímkoli dělit, ale pro další úvahy bude výhodné dělit první z nich číslem n_I a druhou číslem n_{II} , takže bude

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \bar{t}_I &= \bar{x}_I, \\ a_0 + b_0 \bar{t}_{II} &= \bar{x}_{II}; \end{aligned} \quad (15)$$

znaky s příčkou a s indexy I a II značí průměry tvořené pro skupinu I a II . Řešením (15) dostaneme

$$b_0 = \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I}. \quad (16)$$

Jsou-li chyby nezávisle proměnné zanedbatelné proti chybám hodnot x_i , je střední chyba parametru b_0 vzhledem k 12 (8)

$$\delta(b_0) = \frac{1}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \delta(\bar{x}_{II} - \bar{x}_I) = \frac{1}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \sqrt{\delta^2(\bar{x}_I) + \delta^2(\bar{x}_{II})}.$$

Protože podle 11 (15), 11 (10) a 12 (22)

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}_I) &= \frac{\delta_I}{\sqrt{n_I}}, \quad \delta_I = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n_I - 1}} \doteq \frac{5 [\Delta_+]_I}{2n_I - 1}; \\ \delta(\bar{x}_{II}) &= \frac{\delta_{II}}{\sqrt{n_{II}}}, \quad \delta_{II} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]_{II}}{n_{II} - 1}} \doteq \frac{5 [\Delta_+]_{II}}{2n_{II} - 1}, \end{aligned} \quad (17)$$

kde δ_I a δ_{II} jsou střední chyby měření v skupině I a II , dostaneme

$$\delta(b_0) = \frac{1}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \sqrt{\frac{\delta_I^2}{n_I} + \frac{\delta_{II}^2}{n_{II}}}. \quad (18)$$

Jak je třeba volit skupiny I a II , aby tato chyba byla nejmenší, aby tedy parametr b_0 byl určen co nejpřesněji? Při řešení této otázky musíme si uvědomit, že

záleží jednak na tom, kolik členů obsahuje každá skupina, jednak na tom, které z měřených hodnot zařadíme do každé z nich. Podrobnější úvahou¹⁾ seznáme, že velikost rozdílu $t_{II} - t_I$ je zhruba určena *kvalitativním* rozdělením měření do obou skupin, ale nezávisí takřka na číslech n_I , n_{II} ; stejně můžeme pokládat i střední chyby δ_I , δ_{II} za nezávislé na těchto číslech a rovněž na individuálním výběru jednotlivých měření, tvořících obě skupiny. Výraz (18) bude tedy minimální, volíme-li kvalitativní rozdělení měření tak, aby bylo

$$\bar{t}_{II} - \bar{t}_I = \text{maximum} \quad (19)$$

a zároveň čísla n_I , n_{II} tak, aby bylo

$$\frac{\delta_I^2}{n_I} + \frac{\delta_{II}^2}{n_{II}} = \text{minimum}; \quad (20)$$

přítom musí být splněna samozřejmá vedlejší podmínka

$$n_I + n_{II} = n.$$

Dosadíme-li odtud do výrazu (20), máme novou podmínku

$$F = \frac{\delta_I^2}{n_I} + \frac{\delta_{II}^2}{n - n_I} = \text{minimum},$$

v níž F je funkce jediné nezávisle proměnné n_I . Musí tedy

$$\frac{dF}{dn_I} = -\frac{\delta_I^2}{n_I^2} + \frac{\delta_{II}^2}{(n - n_I)^2} = 0,$$

což dává výsledek

$$n_I : n_{II} = \delta_I : \delta_{II}. \quad (21)$$

K řešení podmínky (19) stačí uvážit, že výraz (19) se *zvětší*, přesuneme-li nějakou hodnotu t_i ze skupiny I do skupiny II a nahradíme-li ji hodnotou *menší*. Tedy rozdíl (19) bude největší tehdy, když nebude možno takový přesun provést, t. j. když všechny hodnoty t_i zařazené do skupiny I budou menší než kterákoli hodnota skupiny II (nebo nejvýš rovny). Tím je úloha řešena, co se týká parametru b_0 . Konstantu a_0 můžeme však počítat z rovnice

$$a_0 + b_0 \bar{t} = \bar{x}, \quad (22)$$

v níž příčkou značíme průměr *všech* n měřených hodnot a která plyne sečtením rovnic (14) a dělením n . Je z ní zřejmo, že při daném b_0 nezávisí hodnota a_0 na volbě skupin a že její přesnost je tedy největší, platí-li to o b_0 . Oba parametry budou tedy nejpřesněji určeny, postupujeme-li podle tohoto předpisu pro

skupinové vyrovnání přímkové závislosti $x = a + bt$: Seřadíme hodnoty t_i , x_i , získané měřením, podle velikosti a vypočteme průměry \bar{t}_I , \bar{x}_I těchto hodnot pro první polovinu měření. Totéž učiníme i pro druhou polovinu měření, čímž dostaneme průměry \bar{t}_{II} , \bar{x}_{II} , a přibližné hodnoty parametrů a_0 , b_0 vypočteme z rovnice

$$a_0 + b_0 \bar{t}_I = \bar{x}_I, \quad a_0 + b_0 \bar{t}_{II} = \bar{x}_{II}. \quad (23)$$

15¹⁾ Bližší viz [61], [80].

Dokonalejšího sblížení dosáhneme takto: Stanovené hodnoty a_0 , b_0 dosadíme do odchylkových rovnic:

$$\Delta_i = a_0 + b_0 t_i - x_i$$

a určíme střední chyby v obou skupinách:

$$\delta_I = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]_I}{n_I - 1}} \doteq \frac{5[\Delta+]_I}{2n_I - 1}; \quad \delta_{II} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]_{II}}{n_{II} - 1}} \doteq \frac{5[\Delta+]_{II}}{2n_{II} - 1}.$$

Nejsou-li tyto hodnoty aspoň přibližně stejné, posuneme rozhraní obou skupin tak, aby pokud možno počet měření v I . skupině a počet měření v II . skupině byly v poměru příslušných středních chyb.

Není-li počet měření sudý, můžeme měření ležící na rozhraní skupin pojmut do obou skupin s váhou rovnou $1/2$. Je ostatně možno již podle rozptylu měřených hodnot odhadnout, která skupina je méně přesná, a připojit k ní liché střední měření.

Zajímavé je přejít od skupinového vyrovnání obecné lineární funkce na dva triviální případy.

1. Je-li funkce stupně nultého, tvoří všechna měření jedinou skupinu a přibližná hodnota měřené konstanty

$$a_0 = \bar{x}.$$

Tedy v případě *přímých měření* dává skupinová metoda aritmetický střed, t. j. *nejpravděpodobnější hodnotu*. Je to jediný případ, kdy skupinová metoda *musí* vést k témuž výsledku jako metoda nejmenších čtverců.

2. Je-li funkce stupně prvního, ale aditivní konstanta je přesně rovna nule, dostaneme specialisací tohoto postupu dvě rovnice pro jednu neznámou a_1 . Ve smyslu obecné zásady skupinového vyrovnání musí tedy i při úměrnosti všechna měření tvořit jedinou skupinu, a proto je konstanta úměrnosti dána rovnicí

$$\bar{x} = a_{10} \bar{t} \text{ čili } a_{10} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{\sum x_i}{\sum t_i}, \quad (24)$$

což je shodné s rovnicí 14 (30). Tedy při určení konstanty úměrnosti vede skupinová metoda k stejnému výsledku jako metoda momentová.

15.3. Vyrovnání mocninovým mnohočlenem

Popsaný předpis skupinového vyrovnání určuje nejvýhodnější volbu skupin i pro obecnější závislosti. Zvláště to platí pro celistvé algebraické funkce, tedy pro vyjádřování empirických vzorců mocninovou řadou:

Skupinové vyrovnání mocninovým mnohočlenem m -tého stupně

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m \quad (25)$$

provádíme takto: *Uspořádáme dvojice hodnot t_i , x_i podle rostoucích hodnot nezávisle proměnné t , rozdělíme je do $m + 1$ skupin pokud možno stejně početných a přibližné hodnoty parametrů najdeme z rovnic*

$$\bar{x}_{(k)} = a_{00} + a_{10} \bar{t}_{(k)} + a_{20} \bar{t}_{(k)}^2 + \dots + a_{m0} \bar{t}_{(k)}^m, \quad (26)$$

kde příčkou a indexem k v závorce značíme průměr tvořený pro k -tou skupinu. Nejsou-li všechna měření ani přibližně stejně přesná, volíme početnější ony skupiny, které obsahují méně přesná měření, a to tak, aby byly co nejlépe splněny vztahy

$$n_{(1)} : n_{(2)} : \dots : n_{(m+1)} = \delta_{(1)} : \delta_{(2)} : \dots : \delta_{(m+1)}. \quad (27)$$

Vyrovnání mnohočleny 3. stupně a vyšších stupňů metodou nejmenších čtverců je značně zdouhavé, a proto se doporučuje dát přednost některé přibližné metodě nebo aspoň užít přibližné metody odvozených hodnot parametrů jako východiska pro zjednodušený výpočet korekcí metodou nejmenších čtverců. Ale ve většině případů dávají správně aplikované přibližné metody samy o sobě přijatelné výsledky. Přitom se nesmí zapomínat, že ani metoda nejmenších čtverců nevede vždycky — z důvodů vyložených na počátku tohoto článku — k nejsprávnějším hodnotám.

Příklad. Máme vyrovnat závislost tepelné vodivosti práškového cementu na teplotě. Metodou 58.2 byla změřena tepelná vodivost při 12 různých teplotách mezi 0 °C a 60 °C. V tabulce 15.I jsou teploty t_i a příslušné hodnoty x_i tepelné vodivosti v technických jednotkách $[\lambda]_t = \text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{hod}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ [srov. 5 (21)]. Z grafického znázornění závislosti (obr. 15,1) lze soudit, že je velmi přibližně přímková.

Provedeme tedy vyrovnání lineární funkcí:

$$x = a + bt. \quad (28)$$

Přitom určíme výchozí přibližné hodnoty skupinovou metodou takto: Vypočteme průměr z prvních 6 teplot a z příslušných vodivostí a totéž učiníme pro zbývajících 6 měření. Dostaneme tak hodnoty

$$\begin{aligned} \bar{t}_I &= 20,4, & \bar{x}_I &= 0,1187, \\ \bar{t}_{II} &= 46,8, & \bar{x}_{II} &= 0,1310, \end{aligned} \quad (29)$$

jež dosazeny do (28) dávají přibližné hodnoty parametrů

$$a_0 = 0,1092, \quad b_0 = 0,000\ 466. \quad (30)$$

Postupem podrobně vyloženým v čl. 14 dostaneme z normálních rovnic příslušné opravy

$$a = -5,25 \cdot 10^{-4}, \quad \beta = 1,57 \cdot 10^{-5} \quad (31)$$

s pravděpodobnými chybami

$$\vartheta_a = 4,2 \cdot 10^{-4}, \quad \vartheta_\beta = 1,1 \cdot 10^{-5};$$

máme tedy výsledek

$$A = 0,1087 \pm 0,0004, \quad B = 0,000\ 482 \pm 0,000\ 011, \quad (32)$$

který je určen s dostatečnou přesností. Vidíme, že rozdíly těchto nejpravděpodobnějších hodnot a přibližných hodnot (30) získaných skupinovou metodou jsou o málo větší než pravděpodobné chyby parametrů, a tedy by mohly být vzaty a_0 , b_0 samy za dosti přesné vyrovnané hodnoty parametrů. Dosud jsme se však nepřesvědčili, je-li skupinové vyrovnání zcela správné, neboť ve smyslu druhé části předpisu (23) má být při přesném vyrovnání vyhověno pod-

mínce (21). Vypočteme proto střední chyby δ_I a δ_{II} v obou skupinách podle vzorců (17). Snadným počtem plyne z hodnot $\Delta_i = x_{0i} - x_i$, v tab. (15,I)

$$\delta_I = 5,9 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{II} = 12 \cdot 10^{-4}; \quad \delta_I : \delta_{II} = 1 : 2,0.$$

Tabulka 15,I. Skupinové vyrovnání závislosti tepelné vodivosti na teplotě

i	t_i	x_i	x_{0i}	$\Delta_i = x_{0i} - x_i$	Průměry
1	4,5 °C	0,1112 [λ_t]	0,1113 [λ_t]	+ 0,0001 [λ_t]	$\bar{t}_I = 20,4$ °C $\bar{x}_I = 0,1187$ [λ_t]
2	12,1	0,1138	0,1148	+ 10	
3	16,4	0,1170	0,1168	— 2	
4	25,8	0,1212	0,1212	0	
5	29,9	0,1239	0,1231	— 8	
6	33,4	0,1250	0,1248	— 2	
7	38,3	0,1269	0,1270	+ 1	$\bar{t}_{II} = 46,8$ °C $\bar{x}_{II} = 0,1310$ [λ_t]
8	40,4	0,1269	0,1279	+ 10	
9	42,6	0,1279	0,1290	+ 11	
10	50,1	0,1319	0,1325	+ 6	
11	52,9	0,1354	0,1339	— 15	
12	56,7	0,1372	0,1354	— 18	

Poměr chyb je tedy poloviční než poměr počtů měření v obou skupinách, který je roven 1. Proto přesuneme 6. měření do skupiny II a vyrovnáme znovu při takto změněných skupinách. Výsledek výpočtu je

$$a'_0 = 0,1091, \quad b'_0 = 0,000471,$$

$$\delta'_I = 6,6 \cdot 10^{-4}, \quad \delta'_{II} = 11 \cdot 10^{-4},$$

což dává

$$\frac{n'_I}{n'_{II}} : \frac{\delta'_I}{\delta'_{II}} = \frac{5}{7} : \frac{6,6}{11} \doteq 1,2.$$

Pozorujeme, že zároveň s dokonalejším vyhověním podmínce (21) se také výsledné hodnoty parametrů přiblížily svým nejpravděpodobnějším hodnotám. Kdybychom se pokusili ještě dokonaleji splnit tuto podmínku přesunutím dalšího (pátého) měření do skupiny II, dostali bychom dokonce pro parametry hodnoty, které jsou v mezích uvedených míst přesně rovny nejpravděpodobnějším hodnotám (33), při čemž

$$\delta''_I = 5,0 \cdot 10^{-4}, \quad \delta''_{II} = 10 \cdot 10^{-4},$$

a tedy

$$\frac{n''_I}{n''_{II}} : \frac{\delta''_I}{\delta''_{II}} = \frac{4}{8} : \frac{5,0}{10} = 1,0.$$

Je samozřejmě věcí náhody, že při „dokonalém“ splnění předepsané podmínky vyšly pro parametry „nejméně správnější“ hodnoty; nicméně podrobné vyšetření, které je obvykle nadbytečné, ukazuje, že závislost správnosti získaných výsledků na volbě skupin je opravdu toho druhu, jak bylo theoreticky předvídáno. Je to také vidět z obr. 16,1, který znázorňuje grafické vyrovnání této závislosti.

15.4. Skupinové vyrovnání ekvidistantních měření

Nejjednodušším a velmi častým příkladem *ekvidistantních* měření, t. j. měření, při nichž hodnoty nezávisle proměnné tvoří aritmetickou řadu, jsou t. zv. *postupná měření*.²⁾ S tímto druhem měření se setkáváme, když opakujeme řadu úkonů, s jejichž počtem theoreticky roste lineárně nějaká veličina, kterou měříme. Při zjišťování doby kyvu je to čas, při měření plochy je to čtení na planimetru, při kontrole pipety celková váha náplní pipety a pod. Vyrovnáme-li tato měření jako lineární závislost metodou nejmenších čtverců, dostaneme ze známých normálních rovnic dosti složitý vzorec ([2] str. 20), ve kterém — jak bylo řečeno — mají krajní měření větší váhu, kdežto střední měření mají jen malý vliv na výsledek. Při skupinovém vyrovnání závislosti

$$x = x_0 + \kappa t \quad (33)$$

vycházíme z rovnic

$$\begin{aligned} n_I x_0 + \kappa \sum_I t_i &= \sum_I x_i, \\ n_{II} x_0 + \kappa \sum_{II} t_i &= \sum_{II} x_i \end{aligned} \quad (34)$$

čili

$$\begin{aligned} x_0 + \bar{t}_I \kappa &= \bar{x}_I, \\ x_0 + \bar{t}_{II} \kappa &= \bar{x}_{II}, \end{aligned} \quad (35)$$

kde indexy I a II značí střední hodnoty pro první a druhou skupinu o n_I a n_{II} členech. Konstanta κ , jež značí hodnotu x připadající na jeden úkon (dobu kyvu atd.), je tedy

$$\kappa = \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} = \frac{2}{n} (\bar{x}_{II} - \bar{x}_I), \quad (36)$$

neboť $t_i = i$. Je-li $n = 2k$ sudé číslo a volíme-li $n_I = n_{II} = k$, lze psát také

$$\kappa = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_{k+j} - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_j \right) = \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} (x_{k+j} - x_j). \quad (37)$$

Tento vzorec je totožný se vzorcem známé postupné metody, která je takto theoreticky zdůvodněna jako postup daný skupinovým vyrovnáním.

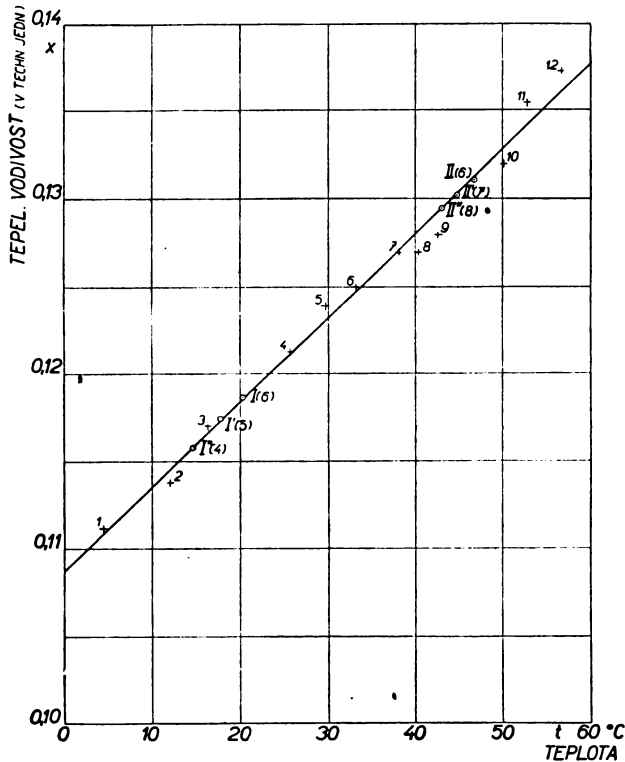
Skupinová metoda je zvláště výhodná při ekvidistantních měřeních i pro vyrovnání mnohočlenem vyššího stupně. Nejen sestavování rovnic, ale i jejich řešení je snadné a rychlé, neboť koeficienty a_i mnohočlenu v (8) lze postupně vylučovat pouhým odčítáním rovnic (aniž je třeba čímkoli je násobit) a tak se určí po řadě a_m, a_{m-1} až a_0 .

Číselný příklad skupinového vyrovnání ekvidistantních měření je uveden v čl. 17.2.

16. METODY GRAFICKÉ

16.1. Grafické vyrovnání úměrnosti a lineární závislosti přímkou

V čl. 15.2 jsme ukázali, že skupinové vyrovnání úměrnosti i obecné lineární závislosti vede k rovn. 15 (23) a 15 (24), které obsahují aritmetické průměry měřených hodnot. Přiřadíme-li každé dvojici měřených hodnot t_i, x_i bod o pravouhlých souřadnicích (t_i, x_i) v rovině, má těžiště (hmotný střed) T všech těchto bodů v téže souřadnicové soustavě souřadnice (\bar{t}, \bar{x}) rovny aritme-



Obr. 16.1. Grafické vyrovnání závislosti tepelné vodivosti cementu na teplotě.

tickým průměrům měřených hodnot.¹⁾ Z rovn. 15 (24) však vidíme, že tento bod leží na přímce jdoucí počátkem, jejíž směrnice je právě rovna vyrovnávané hodnotě a_{10} konstanty úměrnosti. Odtud plyne tato grafická metoda na vyrovnání úměrnosti.

Dvojice hodnot, plynoucí z měření dvou navzájem úměrných veličin, znázorníme body v pravouhlé soustavě a sestrojíme jejich těžiště. Spojnice jeho s počátkem souřadnicové soustavy určuje hledanou úměrnost a směrnice této přímky dává vyrovnanou hodnotu konstanty úměrnosti. (1)

16 ¹⁾ TF 2.4.1.

Podobně dojdeme ke grafickému vyrovnání obecné lineární závislosti, uvážíme-li, že rovnice 15 (23) obsahují aritmetické průměry \bar{t}_I , \bar{x}_I měřených hodnot, počítané pro skupinu I , a průměry \bar{t}_{II} , \bar{x}_{II} , počítané pro skupinu II . Z rovnic 15 (23) pak vidíme, že vyrovnaná přímka prochází body $T_I(\bar{t}_I, \bar{x}_I)$, $T_{II}(\bar{t}_{II}, \bar{x}_{II})$, t. j. těžištěm první i těžištěm druhé skupiny bodů. Odtud plyne *grafická metoda na vyrovnání lineární závislosti*.

Každou dvojici měření získaných hodnot znázorníme bodem o souřadnicích (pravoúhlých) rovných těmto hodnotám, odpočítáme od jednoho z krajních bodů polovinu bodů a sestrojíme jejich těžiště. Učiníme-li totéž i pro zbývající polovinu bodů, určuje spojnice obou těžišť hledanou přímkovou závislost. (2)

Zbývá dodat, že konstrukci těžišť u obou method provádíme nejsnáze takto: nejprve sestrojíme hmotné středy vhodně vybraných dvojic bodů (na př. sousedních) jakožto středy jejich spojnic. Pak půlíme vzdálenosti těchto středů atd. Při další konstrukci máme na paměti, že těžiště k bodů má váhu k -násobnou a že hmotný střed dvou bodů různé váhy dělí jejich vzdálenost v obráceném poměru hmot.

Popsaný postup předpokládá, že všechna měření jsou *stejně přesná*, že tedy všechny body mají stejnou váhu. Tuto konstrukci lze snadno zobecnit na případ měření různé váhy.

Na obr. 16,1 je graficky vyrovnána lineární závislost tepelné vodivosti práškového cementu, vyrovnaná početně v čl. 15.3. Početními výsledky se potvrzuje grafické vyrovnání. Bylo provedeno pro tři různé způsoby dělení do skupin, jejichž těžiště jsou zobrazena body označenými I (6), I' (5), I'' (4) a II (6), II' (7), II'' (8); čísla v závorkách udávají, z kolika bodů byla těžiště sestrojena. Z obrazce také vidíme, že vzdálenost sobě příslušných bodů I a II přemístěním středního měření ze skupiny do skupiny se mění jen málo a rozdíl $\bar{t}_{II} - \bar{t}_I$ má tedy přibližně stále stejnou maximální hodnotu, jak bylo tvrzeno v 15.3. Proto také směrnice vyrovnané přímky je stanovena nejpřesněji, je-li vyhověno po stránce kvalitativní předpisu 15 (23) nebo (2).

16.2. Princip grafického vyrovnání parabolou

Podle zásad skupinové metody najdeme konstanty a , b , c ve vztahu

$$x = a + bt + ct^2 \quad (3)$$

tak, že rozdělíme všechna měření seřazená podle rostoucí velikosti t na tři skupiny o k_I , k_{II} , k_{III} měřeních a předpokládáme platnost tří rovnic:

$$\begin{aligned} \bar{x}_I &= a + b\bar{t}_I + c\bar{t}_I^2, \\ \bar{x}_{II} &= a + b\bar{t}_{II} + c\bar{t}_{II}^2, \\ \bar{x}_{III} &= a + b\bar{t}_{III} + c\bar{t}_{III}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

kde indexy I , II , III označují střední hodnoty (aritmetické průměry) proměnných veličin, počítané pro první, druhou a třetí skupinu.

Grafické vyrovnání provedeme tak, že určíme tři body, které leží na vyrovnané parabole. Podle analogie s grafickým vyrovnáním přímkové závislosti

vyjdeme od těžišť jednotlivých skupin o souřadnicích $T_I(\bar{t}_I, \bar{x}_I)$, $T_{II}(\bar{t}_{II}, \bar{x}_{II})$, $T_{III}(\bar{t}_{III}, \bar{x}_{III})$.

Pišme nejprve:

$$t_i = \bar{t}_I + \delta_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k_I,$$

$$t_j = \bar{t}_{II} + \delta_j \quad \text{pro } j = k_I + 1, k_{II} + 2, \dots, k_I + k_{II}, \quad (5)$$

$$t_l = \bar{t}_{III} + \delta_l \quad \text{pro } l = k_I + k_{II} + 1, k_I + k_{II} + 2, \dots, k_I + k_{II} + k_{III}.$$

$$\text{Pak platí } \sum_I t_i^2 = \sum_I (\bar{t}_I + \delta_i)^2 = \sum_I (\bar{t}_I)^2 + 2\bar{t}_I \sum_I \delta_i + \sum_I \delta_i^2 = k_I (\bar{t}_I)^2 + \sum_I \delta_i^2,$$

a tedy

$$\bar{t}_I^2 = (\bar{t}_I)^2 + \bar{\delta}_I^2, \quad \bar{t}_{II}^2 = (\bar{t}_{II})^2 + \bar{\delta}_{II}^2, \quad \bar{t}_{III}^2 = (\bar{t}_{III})^2 + \bar{\delta}_{III}^2, \quad (6)$$

neboť součet vodorovných průmětů vzdáleností bodů od jejich těžišť se rovná nule.

Z první rovnice (4) dostaneme podle (6)

$$\bar{x}_I = a + b\bar{t}_I + c(\bar{t}_I)^2 + c\bar{\delta}_I^2 \quad (7)$$

a z dalších dvou rovnic pro další dvě skupiny

$$\bar{x}_{II} = a + b\bar{t}_{II} + c(\bar{t}_{II})^2 + c\bar{\delta}_{II}^2, \quad (8)$$

$$\bar{x}_{III} = a + b\bar{t}_{III} + c(\bar{t}_{III})^2 + c\bar{\delta}_{III}^2. \quad (9)$$

Z toho vidíme, že bod o souřadnicích $P_I(\bar{t}_I, X_I)$ leží na vyrovnané parabole, značí-li

$$X_I = \bar{x}_I - c\bar{\delta}_I^2. \quad (10)$$

Je zřejmo, že na téže parabole leží i další dva body $P_{II}(\bar{t}_{II}, X_{II})$, $P_{III}(\bar{t}_{III}, X_{III})$, kde

$$X_{II} = \bar{x}_{II} - c\bar{\delta}_{II}^2, \quad (11)$$

$$X_{III} = \bar{x}_{III} - c\bar{\delta}_{III}^2. \quad (12)$$

Tyto body dostaneme, *snížíme-li* (při kladném c) pořadnice těžišť T_I , T_{II} , T_{III} o délky

$$\bar{x}_I - X_I = c\bar{\delta}_I^2, \quad \bar{x}_{II} - X_{II} = c\bar{\delta}_{II}^2, \quad \bar{x}_{III} - X_{III} = c\bar{\delta}_{III}^2. \quad (13)$$

Abychom mohli příslušné body skutečně sestrojít, musíme ovšem znát hodnotu konstanty c a střední hodnoty čtverců vzdáleností δ bodů od těžišť v jednotlivých skupinách.

Úlohu lze řešit graficky i v obecném případě, jak ukážeme později. Bude však vhodné řešit nejprve úlohu jednodušší, která se ostatně vyskytuje při dosti častém případě měření rozdělených rovnoměrně v oboru hodnot nezávisle proměnné, tedy při t. zv. ekvidistantních měřeních.

16.3. Konstrukce paraboly při ekvidistantních měřeních

Předpokládejme, že měření jsou aspoň uvnitř každé ze tří skupin ekvidistantní. Pak hodnoty t_i tvoří aritmetickou řadu s diferencí τ_I v první skupině:

$$t_i = t_1 + (i - 1) \tau_I, \quad i = 1, 2, \dots, k_I \quad (14)$$

a

$$\bar{t}_I = \frac{1}{k_I} \sum_{i=1}^{k_I} [t_1 + (i - 1) \tau_I] = t_1 + \frac{\tau_I}{2} (k_I - 1). \quad (15)$$

Je-li τ' mezera mezi posledním bodem první skupiny a prvním bodem druhé skupiny s diferencí τ_{II} , platí pro všechny body této skupiny

$$t_j = t_1 + (k_I - 1) \tau_I + \tau' + (j - 1) \tau_{II}, \quad j = 1, 2, \dots, k_{II}. \quad (16)$$

Je-li τ'' mezera mezi druhou a třetí skupinou, bude v této skupině (s diferencí τ_{III})

$$t_l = t_1 + (k_I - 1) \tau_I + \tau' + (k_{II} - 1) \tau_{II} + \tau'' + (l - 1) \tau_{III}, \\ l = 1, 2, \dots, k_{III}. \quad (17)$$

Odtud dostaneme souřadnice těžišť:

$$\bar{t}_{II} = t_1 + (k_I - 1) \tau_I + \tau' + \frac{1}{k_{II}} \sum_{j=1}^{k_{II}} (j - 1) \tau_{II} = \\ = t_1 + \tau' + (k_I - 1) \tau_I + \frac{1}{2} (k_{II} - 1) \tau_{II}, \quad (18)$$

$$\bar{t}_{III} = t_1 + \tau' + \tau'' + (k_I - 1) \tau_I + (k_{II} - 1) \tau_{II} + \frac{1}{2} (k_{III} - 1) \tau_{III}; \quad (19)$$

jejich rozdíly jsou

$$\bar{t}_{II} - \bar{t}_I = \tau' - \frac{1}{2} (\tau_I + \tau_{II}) + \frac{1}{2} (k_I \tau_I + k_{II} \tau_{II}), \quad (20)$$

$$\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II} = \tau'' - \frac{1}{2} (\tau_{II} + \tau_{III}) + \frac{1}{2} (k_{II} \tau_{II} + k_{III} \tau_{III}), \quad (21)$$

$$\bar{t}_{III} - \bar{t}_I = \tau' + \tau'' - \tau_{II} - \frac{1}{2} (\tau_I + \tau_{III}) + k_{II} \tau_{II} + \frac{1}{2} (k_I \tau_I + k_{III} \tau_{III}). \quad (22)$$

Součiny

$$s_I = k_I \tau_I, \quad s_{II} = k_{II} \tau_{II}, \quad s_{III} = k_{III} \tau_{III} \quad (23)$$

jsou šířky skupin ve vodorovném směru (měřené na ose t).

Jestliže

$$\tau' = \frac{1}{2} (\tau_I + \tau_{II}), \quad \tau'' = \frac{1}{2} (\tau_{II} + \tau_{III}), \quad (24)$$

pak

$$\begin{aligned}\bar{t}_{II} - \bar{t}_I &= \frac{1}{2} (s_I + s_{II}), & \bar{t}_{III} - \bar{t}_{II} &= \frac{1}{2} (s_{II} + s_{III}), \\ \bar{t}_{III} - \bar{t}_I &= \frac{1}{2} (s_I + 2s_{II} + s_{III}).\end{aligned}\quad (25)$$

Jsou-li konečně šířky všech skupin stejné, pak

$$s_I = s_{II} = s_{III} = s, \quad (26)$$

$$\bar{t}_{II} - \bar{t}_I = \bar{t}_{III} - \bar{t}_{II} = s, \quad \bar{t}_{III} - \bar{t}_I = 2s. \quad (27)$$

Těžiště druhé skupiny pólí tedy při stejně širokých skupinách vodorovnou vzdálenost obou krajních těžišť bez zřetele na hustotu a počet měření v každé skupině.

Abychom vypočetli střední hodnoty čtverců odchylek od těžišť jednotlivých skupin, užijeme známého vzorce pro součet čtverců přirozených čísel (viz na př. [19], I. díl, str. 20).

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1). \quad (28)$$

Podle (5), (14), (15) můžeme psát

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k_I} \delta_i^2 &= \sum_{i=1}^{k_I} [t_i - \bar{t}_I]^2 = \sum_{i=1}^{k_I} [(i-1)\tau_I - \frac{1}{2}(k_I-1)\tau_I]^2 = \\ &= \tau_I^2 \left[\sum_{i=1}^{k_I} (i-1)^2 - (k_I-1) \sum_{i=1}^{k_I} (i-1) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k_I} (k_I-1)^2 \right] = \\ &= \tau_I^2 \left[1^2 + 2^2 + \dots + (k_I-1)^2 - (k_I-1)(1+2+\dots+k_I-1) + \frac{k_I}{4}(k_I-1)^2 \right] \\ \bar{\delta}_I^2 &= \frac{1}{k_I} \sum_{i=1}^{k_I} \delta_i^2 = \frac{\tau_I^2}{k_I} \left[\frac{1}{6}(k_I-1)k_I(2k_I-1) - (k_I-1)\frac{k_I}{2}(k_I-1) + \right. \\ &+ \left. \frac{k_I}{4}(k_I-1)^2 \right] = \frac{1}{12} \tau_I (k_I-1) [2(2k_I-1) - 6(k_I-1) + 3(k_I-1)] = \\ &= \frac{1}{12} \tau_I^2 (k_I^2 - 1).\end{aligned}$$

Totéž plyne i pro zbývající skupiny, takže střední hodnoty čtverců ve skupinách jsou

$$\bar{\delta}_I^2 = \frac{1}{12} (k_I^2 - 1)\tau_I^2, \quad \bar{\delta}_{II}^2 = \frac{1}{12} (k_{II}^2 - 1)\tau_{II}^2, \quad \bar{\delta}_{III}^2 = \frac{1}{12} (k_{III}^2 - 1)\tau_{III}^2. \quad (29)$$

Dosud jsme nekladli žádné podmínky ani o počtu ani o hustotě měření v jednotlivých skupinách, abychom došli k výsledkům pokud možno obecným, kterých užijeme později.

Grafické vyrovnání bude jednoduché, jsou-li šířky první a třetí skupiny stejné: $s_I = s_{III}$.

Je-li tomu tak a jsou-li splněny podmínky (24), půli těžiště vodorovnou vzdálenost obou krajních těžišť, neboť z (25) dostaneme

$$\bar{t}_{II} - \bar{t}_I = \bar{t}_{III} - \bar{t}_{II} = \frac{1}{2} (s_I + s_{II}) = \frac{1}{2} (s_{II} + s_{III}) \quad (30)$$

$$a \quad \bar{t}_{III} - \bar{t}_I = 2 (\bar{t}_{II} - \bar{t}_I) = s_I + s_{II} = s_{II} + s_{III} \quad (31)$$

Jestliže *interval mezi sousedními měřeními je všude stejný*, t. j. $\tau_I = \tau_{II} = \tau_{III} = \tau$, pak rovnost šířek znamená rovnost počtu měření v první a třetí skupině. Je tedy

$$k_I = k_{III}, \quad \bar{t}_{II} - \bar{t}_I = \bar{t}_{III} - \bar{t}_{II} = \frac{1}{2} \tau (k_I + k_{II}) = \frac{1}{2} \tau (k_{II} + k_{III}), \quad (32)$$

$$\bar{t}_{III} - \bar{t}_I = 2 (\bar{t}_{II} - \bar{t}_I) = \tau (k_I + k_{II}). \quad (33)$$

Volíme-li totiž $k_I = k_{III}$, t. j. *obě krajní skupiny stejně početné*, půli prostřední těžiště vodorovnou vzdálenost krajních těžišť. Je-li celkový počet měření dělitelný třemi, tedy $n = 3k$, volíme ovšem všechna čísla rovna k . Je-li však $n = 3k + 1$, volíme $k_I = k_{III} = k$ a $k_{II} = k + 1$, a je-li $n = 3k + 2$, vezmeme $k_I = k_{III} = k + 1$, $k_{II} = k$. Jsou-li splněny vztahy (33), vypočteme velmi snadno konstantu c tímto postupem:

Postupným odčítáním rovnic (4) odvodíme vzhledem k (33) a (6)

$$\begin{aligned} \bar{x}_{III} - 2\bar{x}_{II} + \bar{x}_I &= c (\bar{t}_{III}^2 - 2\bar{t}_{II}^2 + \bar{t}_I^2) = \\ &= c \{ (\bar{t}_{III})^2 - (\bar{t}_{II})^2 - [(\bar{t}_{II})^2 - (\bar{t}_I)^2] + \bar{\delta}_{III}^2 - 2\bar{\delta}_{II}^2 + \bar{\delta}_I^2 \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Podle (32), (33) a (29) však

$$(\bar{t}_{III})^2 - (\bar{t}_{II})^2 - [(\bar{t}_{II})^2 - (\bar{t}_I)^2] = \frac{1}{2} (k_I + k_{II})^2 \tau^2,$$

$$\bar{\delta}_{III}^2 - \bar{\delta}_{II}^2 + \bar{\delta}_I^2 = \frac{1}{6} (k_I^2 - k_{II}^2) \tau^2,$$

takže

$$c = \frac{3}{\tau^2} \frac{\bar{x}_I - 2\bar{x}_{II} + \bar{x}_{III}}{(k_I + k_{II})(2k_I + k_{II})}. \quad (35)$$

Dosazením do (13) dostaneme

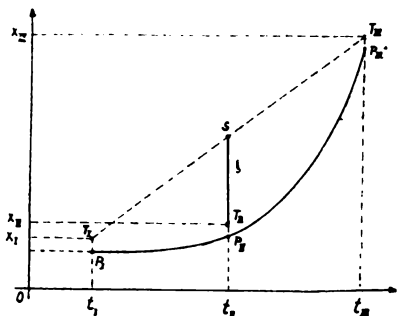
$$\bar{x}_I - X_I = \frac{k_I^2 - 1}{K} \xi, \quad \bar{x}_{II} - X_{II} = \frac{k_{II}^2 - 1}{K} \xi, \quad \bar{x}_{III} - X_{III} = \frac{k_{III}^2 - 1}{K} \xi. \quad (36)$$

Snadno vypočteme číslo K a podle obr. 16,2 sestrojíme délku ξ :

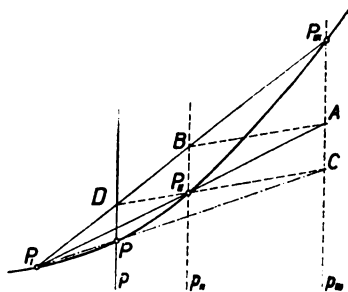
$$K = 2(k_I + k_{II})(2k_I + k_{II}) = 2n(k_I + k_{II}) = 2n(n - k_I), \quad (37)$$

$$\xi = \frac{1}{2} (\bar{x}_I + \bar{x}_{III}) - \bar{x}_{II}. \quad (38)$$

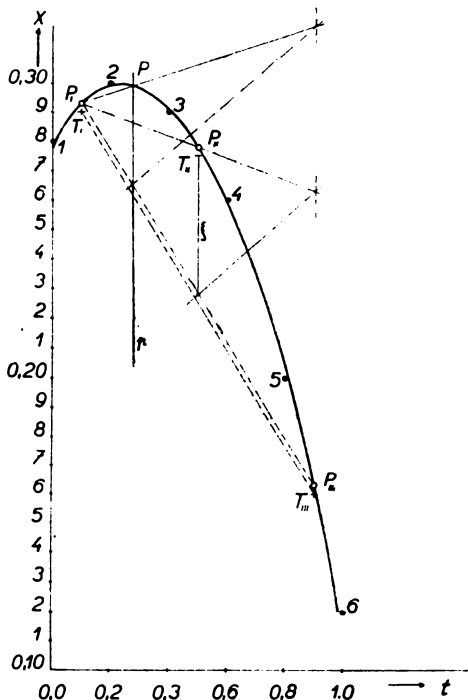
Tak dostaneme délky (36), o které musíme snížit těžiště T_I, T_{II}, T_{III} , abychom z nich dostali body paraboly. Jejich konstrukce je při $n = 3k$ stejně přesných měření dána tímto předpisem (obr. 16,2): Rozdělíme měření srovnaná podle rostoucího t do tří skupin po k členech, sestrojíme těžiště T_I, T_{II}, T_{III} , bodů



Obr. 16,2. Konstrukce tří bodů P_I, P_{II}, P_{III} vyrovnané paraboly při stejně přesných ekvidistantních měřeních.



Obr. 16,3. Konstrukce průsečků P vyrovnané paraboly se zvolenou pořadnicí p .



Obr. 16,4. Grafické vyrovnání paraboly ekvidistantních stejně přesných měření, daných body 1 až 6.

každé skupiny a spojíme obě krajní těžiště T_I, T_{III} úsečkou, jejíž půlicí bod S leží ve vzdálenosti ξ nad prostředním těžištěm T_{II} . Snížíme-li všechna těžiště o délku rovnou

$$\frac{1}{12} (1 - 1/k^2) \xi, \quad (39)$$

dostaneme tři body vyrovnané paraboly, z nichž známým způsobem (na př. [66] str. 296) sestrojíme další body paraboly (průsečky s libovolnými pořadnicemi).

Postup je zřejmý z obr. 16,3. Spojnice $P_I P_{II}$ protne pořadnici p_{III} v bodě A a spojnice $P_I P_{III}$ protne pořadnici p_{II} v bodě B a pořadnici p v bodě D . Sestrojíme-li $DC \parallel BA$, protne spojnice $P_I C$ pořadnici p v hledaném bodě P .

Z grafického vyrovnání plynou ovšem také hodnoty pro konstanty a, b, c . Tak z (35), (37) a (38) dostaneme nejprve

$$c = \frac{12}{\tau^3} \frac{\xi}{K}, \quad (40)$$

a použijeme-li derivované rovnice (1) pro bod P_{II} , v němž má parabola tečnu rovnoběžnou s tětivou $P_I P_{III}$, dostaneme vzorec

$$b = \frac{\bar{x}_{III} - \bar{x}_I}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_I} + 2c \bar{t}_{II}. \quad (41)$$

Konečně a je dáno pořadnicí x_0 průsečíku paraboly s osou $t = 0$ nebo prostě rovnicí plynoucí ze (7) a (10):

$$a = X_I - b\bar{t}_I - c(\bar{t}_I)^2. \quad (42)$$

Jsou-li měření dosti početná a aspoň zhruba ekvidistantní, pak při stejně početných krajních skupinách půlí prostřední těžiště velmi přibližně vodorovnou vzdálenost obou krajních těžišť a můžeme podle (36) užít nejjednoduššího předpisu: *snížíme všechna těžiště o $\frac{1}{12} \xi$.*

Na příklad při $n = 28$, $k_I = k_{III} = 9$, $k_{II} = 10$ dostaneme $K = 1064$ a snížení obou krajních těžišť je asi $\frac{1}{13} \xi$, snížení prostředního asi $\frac{1}{11} \xi$. U nepřilíh zakřivené paraboly můžeme proto bez velké chyby snížit všechna těžiště o $\frac{1}{12} \xi$.

16.4. Grafické vyrovnání parabolou v obecném případě

Jsou-li měření rozložena ve směru osy t zcela nepravidelně, neplatí obecně rovnice (30). Proto postupujeme takto: Utvoříme rozdíly rovnic (4):

$$\begin{aligned} \bar{x}_{II} - \bar{x}_I &= b(\bar{t}_{II} - \bar{t}_I) + c(\bar{t}_{II}^2 - \bar{t}_I^2), \\ \bar{x}_{III} - \bar{x}_{II} &= b(\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}) + c(\bar{t}_{III}^2 - \bar{t}_{II}^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Z těchto rozdílových rovnic vyloučíme konstantu b (dělíme první z nich činitelem $\bar{t}_{II} - \bar{t}_I$ a druhou činitelem $\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}$ a potom odečteme první od druhé).

Dostaneme tak

$$\frac{\bar{x}_{III} - \bar{x}_{II}}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} - \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} = c \left(\frac{\bar{t}_{III}^2 - \bar{t}_{II}^2}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} - \frac{\bar{t}_{II}^2 - \bar{t}_I^2}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \right). \quad (44)$$

Levou stranu (44) lze psát podle obr. 16,5 ve tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \left[\frac{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} (\bar{x}_{III} - \bar{x}_{II}) - (\bar{x}_{II} - \bar{x}_I) \right] = \\ &= \frac{1}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I} \left(\frac{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} D_{III} - D_{II} \right) = \frac{h}{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I}, \end{aligned} \quad (45)$$

kde D_{III} značí délku spojnice bodů III a T_{III} , D_{II} délku spojnice bodů II a T_{II} a h délku spojnice T_{II} a H . Výraz v okrouhlé závorce v (44) je však podle (6) roven $(\bar{t}_{III} - \bar{t}_I)(1 + \sigma)$, kde

$$\sigma = \frac{\bar{\delta}_{III}^2 - \bar{\delta}_{II}^2}{(\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II})(\bar{t}_{III} - \bar{t}_I)} - \frac{\bar{\delta}_{II}^2 - \bar{\delta}_I^2}{(\bar{t}_{II} - \bar{t}_I)(\bar{t}_{III} - \bar{t}_I)}. \quad (46)$$

Sestrojíme-li tedy podle obr. 16,5 úsečku

$$L = \sqrt{(\bar{t}_{II} - \bar{t}_I)(\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II})}, \quad (47)$$

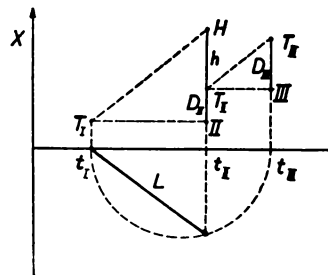
dostaneme z (44)

$$c = \frac{h}{L^2(1 + \sigma)}; \quad (48)$$

pro svislou vzdálenost bodu P_I vyrovnané paraboly od těžiště T_I podle (13) bude

$$\bar{x}_I - X_I = \frac{h}{1 + \sigma} \frac{\bar{\delta}_I^2}{L^2} = \frac{1}{k_I} \left(\frac{l_I}{L} \right)^2, \quad (49)$$

$$l = \sqrt{\sum_{i=1}^{k_I} \delta_i^2}.$$



Obr. 16,5. Konstrukce délek h a L při grafickém vyrovnání nerovnoměrně rozložených měření.

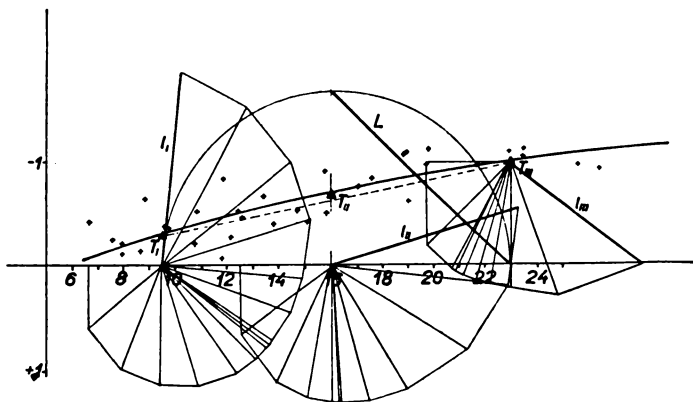
Odtud plyne tento vyrovnávací postup:

Sestrojíme těžiště všech tří skupin a vedeme úsečku $\overline{T_I H} \parallel \overline{T_{II} T_{III}}$, čímž sestrojíme délku h a střední geometrickou úměrnou L , danou rovnicí (47). Pak sestrojíme podle *Pythagorovy* věty v každé skupině úsečky

$$l_I = \sqrt{\sum_I (t_i - \bar{t}_I)^2}, \quad l_{II} = \sqrt{\sum_{II} (t_j - \bar{t}_{II})^2}, \quad l_{III} = \sqrt{\sum_{III} (t_k - \bar{t}_{III})^2} \quad (50)$$

a vypočteme

$$\lambda_I = \frac{1}{k_I} \left(\frac{l_I}{L} \right)^2, \quad \lambda_{II} = \frac{1}{k_{II}} \left(\frac{l_{II}}{L} \right)^2, \quad \lambda_{III} = \frac{1}{k_{III}} \left(\frac{l_{III}}{L} \right)^2. \quad (51)$$



Obr. 16,6. Grafické vyrovnání parabolou 38 nerovnoměrně rozložených, stejně přesných měření.

Tři body vyrovnané paraboly dostaneme, snížíme-li (při kladném h) těžiště jednotlivých skupin o délky

$$\frac{h}{1 + \sigma} \lambda_I, \quad \frac{h}{1 + \sigma} \lambda_{II}, \quad \frac{h}{1 + \sigma} \lambda_{III}, \quad (52)$$

kde pro korekční člen σ , který bývá malý proti jedné, lze podle (46) po úpravě psát

$$\sigma = \lambda_I + \frac{\bar{t}_{II} - \bar{t}_I}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} \lambda_{III} - \frac{\bar{t}_{III} - \bar{t}_I}{\bar{t}_{III} - \bar{t}_{II}} \lambda_{II}. \quad (53)$$

Příklad grafického vyrovnání obecně rozložených 38 měření je vyznačen na obr. 16,6.

17. EMPIRICKÉ FYSIKÁLNÍ ZÁKONY

17.1. Methody na určení typu měřené závislosti

V předešlém článku jsme řešili úlohu určit konstanty ve známé závislosti dvou fyzikálních veličin, jejíž tvar byl předem dán. Často jsme však postaveni před obtížnější problém, nalézt experimentálně závislost, jejíž tvar předem neznáme. Jsou známy jen výsledky měření, které dávají řadu dvojic sobě příslušných hodnot obou veličin, a jde o to, výstižně vyjádřit matematicky tuto závislost na základě naměřených hodnot. Nejrychlejší orientaci a povšechný názor na povahu hledané závislosti podává její grafické vyjádření, které získáme, nanášíme-li k sobě patřící hodnoty (nebo jejich logaritmy) jako souřadnice bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic. Dostaneme tak empirickou křivku a naší úlohou je nahradit ji analyticky definovanou matematickou křivkou, která by vyjadřovala z měření odvozený empirický zákon. Někdy není nesnadno najít funkci, která dosti dobře vystihuje zjištěnou závislost. Někdy však je nutno hledat nejprve tvar nebo druh příslušné křivky. Postupujeme tak, že zvolíme určitý typ křivek nebo funkcí s jistým počtem konstant a hledáme hodnoty konstant, jež se obvykle nazývají parametry, aby se zvolená křivka co nejvíce přimykala ke křivce dané empiricky. Uživeme-li k tomu metody nejmenších čtverců, můžeme také rozhodnout, která ze zvolených funkcí vystihuje dokonaleji experimentálně zjištěnou závislost podle přesnosti, s jakou jsou určeny parametry v různých funkcích. Nejsnáze posoudíme „správnost“ různých předpokládaných vzorců podle odchylek měřených hodnot od hodnot plynoucích z jednotlivých vzorců. Za „nejméně správnější“ pak prohlásíme ten z vyšetřovaných vzorců, pro něž je součet čtverců odchylek nejmenší.

K tomu nutno připomenout, co jsme řekli již na počátku čl. 11, kde byly vysloveny jisté pochybnosti o plné theoretické oprávněnosti takového postupu. Jsou-li tedy výhodné přibližné metody při určování konstant předem známých závislostí, je jasné, že tím spíše se jednodušší metody doporučují při určování empirických zákonů, kdy teprve hledáme matematickou formu, vhodnou pro pozorovanou fyzikální závislost. Novým problémem je tu právě určení tvaru nebo druhu hledané závislosti; při tom je zajisté bezpečnou oporou a důležitým vodítkem geometrické znázornění hodnot získaných měření. Je jasné, že lze použít grafické metody také k určení číselných hodnot neznámých parametrů, zejména u závislostí, které se nám podaří vhodnou transformací převést na přímkové.

Probereme nejprve několik nejdůležitějších případů, v nichž se osvědčuje grafická metoda. Jsou to především triviální případy úměrnosti a lineární závislosti, jejichž vhodnost pro danou řadu měření posoudíme často přímým názorem, zvláště sestrojíme-li vyrovnanou přímku, na př. grafickou

metodou nebo 16(1). Snadno pak rozeznáme nepravidelné odchylky statistické od systematických odchylek, které svědčí o tom, že se měřená závislost nedá vystihnout lineárním vztahem.

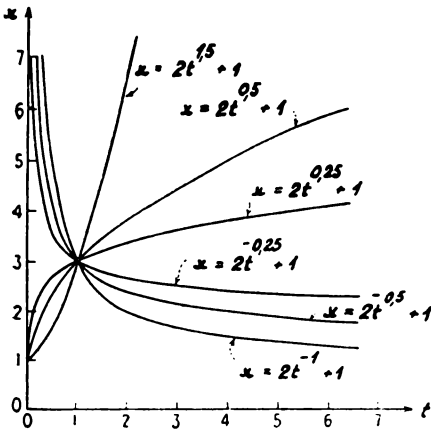
Na lineární závislost lze převést především funkci

$$x = a + bt^m, \quad (1)$$

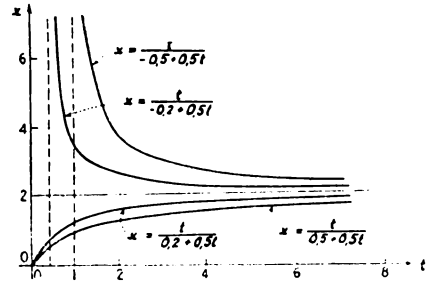
nanášíme-li na vodorovnou osu místo t proměnnou

$$u = t^m, \quad (2)$$

při čemž je nutno předem odhadnout znaménko a velikost exponentu m , který ovšem nemusí být celým číslem. To provedeme na základě známého průběhu funkce (1), který podstatně závisí na velikosti i na znaménku m , jak je zřejmo z obr. 17,1, na němž vidíme několik typických průběhů funkce (1).



Obr. 17,1. Průběh funkcí typu $x = 1 + 2t^m$ pro různé hodnoty exponentu m .



Obr. 17,2. Hyperboly typu $x = \frac{t}{p + qt}$.

Jestliže konstanta $a = 0$, přejde rovnice (1) transformací (2) v úměrnost. Závislost (1) se pak redukuje na vztah

$$x = bt^m,$$

ktej je geometricky znázorněn t. zv. vyšší parabolou stupně m , je-li exponent kladný. Je-li záporný, nazýváme křivku (3) vyšší hyperbolou. Pro $m = 1$ vyjadřuje rovnice (3) nepřímou úměrnost, kterou zobrazuje rovnosáň hyperboly s osami souřadnic jako asymptotami. Obecnější hyperbolická závislost je vyjádřena lineární lomnou funkcí

$$x = \frac{a + bt}{p + qt}. \quad (4)$$

Jestliže $a = 0$, lze tuto rovnici psát ve tvaru

$$\frac{1}{x} = k + \frac{l}{t} \quad \left(k = \frac{q}{b}, \quad l = \frac{p}{b} \right) \quad (5)$$

a můžeme ji znázornit přímkou, nanášíme-li na pravouhlé osy převrácené hodnoty veličin t a x . Několik takových hyperbol je naryšováno na obr. 17,2.

Vraťme se nyní k závislosti typu (3), abychom ukázali, že výhodnější než transformace (2), která předpokládá znalost exponentu m , je v tomto případě použití *dvojitého logaritmického papíru*. Z rovnice (3) najdeme totiž lineární vztah mezi logaritmy obou veličin

$$\log x = \log b + m \log t,$$

takže vnesením měřených hodnot t_i a x_i na dvojitém logaritmickém papíře můžeme jednak posoudit, do jaké míry vystihuje rovnice (3) experimentální hodnoty, jednak můžeme graficky určit také oba parametry b a m .

Podobně můžeme postupovat při zkoumání platnosti exponenciální závislosti tvaru

$$x = bc^{at}, \quad (6)$$

kde konstanta c se předem volí (nejčastěji 10 nebo e). Logaritmováním této rovnice plyne vztah

$$\log x = \log b + (a \log c)t,$$

který je lineární v t a $\log x$, takže exponenciální funkci odpovídá přímka, kterou dostaneme vyznačením měřených hodnot na *jednoduchém logaritmickém papíře*, při čemž ovšem užijeme pro t rovnoměrné stupnice, pro veličinu x stupnice logaritmické.

Vhodnou volbou proměnných můžeme dosáhnout přímkového průběhu i u složitějších závislostí, jakou je na př. funkce 8(11), vyjadřující normální rozložení chyb:

$$x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}. \quad (7)$$

Ježto

$$\ln x = \ln \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right) - h^2 t^2, \quad (8)$$

stačí volit proměnné

$$T = t^2, \quad X = \ln x, \quad (9)$$

abychom dostali lineární závislost

$$X = \ln \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right) - h^2 T, \quad (10)$$

která ovšem obsahuje jen jediný neznámý parametr h . Zde používáme *logaritmickokvadratického* znázornění závislosti (7), k němuž docházíme spojením transformací zavedených pro funkci (1) a funkci (6). Je to jeden ze způsobů, kterým se lze názorně přesvědčit o platnosti normálního zákona pro daný statistický soubor nebo o jeho abnormálnosti.

Tím jsme probrali několik důležitějších funkcí, které se dají zkoumat grafickou methodou. Jsou to zároveň nejjednodušší funkce, kterými se často podaří aspoň přibližně vyjádřit experimentálně zjištěné závislosti. V některých případech se volí jiné funkce více nebo méně složité, avšak obecná metoda vyjadřování empirických zákonů záleží v tom, že se hledíme přiblížit dané závislosti řadou, která může být vytvořena různým způsobem. Mnohdy (zvláště u závislostí periodických) jeví se výhodným vyjádřit vztah mezi veličinami *trigonometrickými řadami*, z nichž je nejznámější *Fourierova řada*, jíž se používá při

t. zv. *harmonické analyse*, t. j. při rozkládání periodických dějů na jednoduché harmonické (sinové a kosinové) kmity. Nejjednodušší a nejobvyklejší je však vyjádření závislosti mocninovou řadou, z níž ovšem bereme jen konečný počet členů. Jak vyplývá ze základních vět theorie funkcí, můžeme právem očekávat, že každou fyzikální závislost nebo fyzikální zákon můžeme reprodukovat s dostatečnou přesností celistvou algebraickou funkcí, určíme-li správně hodnoty jistého konečného počtu jejích koeficientů. Jinak řečeno, můžeme vystihnout dosti věrně každý fyzikální vztah mezi dvěma proměnnými veličinami, vyjádříme-li jednu z nich jako potenční mnohočlen druhé proměnné dosti vysokého stupně. Je ovšem jasno, že stupeň mnohočlenu nesmíme nevhodným způsobem zvyšovat; kdyby se totiž počet volitelných parametrů (koeficientů u různých mocnin nezávislé veličiny) přiblížil počtu měření, dosáhli bychom tak podrobného vyjádření konkrétní pozorované závislosti, že by takto určená funkce vystihovala a zobrazovala aspoň část statistických odchylek způsobených náhodnými chybami, a tak by skreslovala nepřipustným způsobem pravý fyzikální vztah obou veličin. Naopak příliš nízký stupeň mnohočlenu a s ním spojený malý počet parametrů by nutně vedl k nemožnosti vystihnout dosti dobře skutečnou závislost. Z toho je zřejmo, jak důležité je určení stupně celistvé funkce, který je nevhodnější pro hledaný empirický zákon. Tato úloha se dá poměrně snadno řešit metodou založenou na t. zv. diferencích, kterou stručně probereme.

Mějme řadu n dvojic sobě příslušných hodnot (t_i, x_i) , získaných měřeními veličin t a x .

Tabulka 17,I. Schema tvoření diferencí

x_1	Δx_1						
x_2	Δx_2	$\Delta^2 x_1$					
x_3	Δx_3	$\Delta^2 x_2$	$\Delta^3 x_1$	$\Delta^4 x_1$			
x_4	Δx_4	$\Delta^2 x_3$	$\Delta^3 x_2$	$\Delta^4 x_2$	$\Delta^5 x_1$		
x_5	Δx_5	$\Delta^2 x_4$	$\Delta^3 x_3$	$\Delta^4 x_3$	$\Delta^5 x_2$	$\Delta^6 x_1$	
x_6	Δx_6	$\Delta^2 x_5$	$\Delta^3 x_4$	$\Delta^4 x_4$	$\Delta^5 x_3$	$\Delta^6 x_2$	$\Delta^7 x_1$
x_7	Δx_7	$\Delta^2 x_6$	$\Delta^3 x_5$				
x_8							

Jako *první difference* definujeme rozdíly

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (11)$$

pro libovolné $i < n$, jako *druhé difference* rozdíly prvních diferencí

$$\Delta^2 x_i = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i \quad (12)$$

a obecně k -té *diference* jsou dány vztahy

$$\Delta^k x_i = \Delta^{k-1} x_{i+1} - \Delta^{k-1} x_i. \quad (13)$$

Je zřejmé, že na základě těchto rovnic můžeme vytvořit z n dvojic $n - 1$ prvních diferencí, $n - 2$ druhých diferencí, $n - 3$ třetích atd. až pro jedinou diferencí řádu $n - 1$, jak je naznačeno v tab. 17,I. Obráceně je možno známými

diferencemi vyjádřit libovolný člen řady měření. Podle rovnic (11) až (13) dostaneme postupně

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1, \\x_2 &= x_1 + \Delta x_1, \\x_3 &= x_2 + \Delta x_2 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta(x_1 + \Delta x_1) = x_1 + 2\Delta x_1 + \Delta^2 x_1, \\x_4 &= x_3 + \Delta x_3 = x_1 + 2\Delta x_1 + \Delta^2 x_1 + \Delta(x_1 + 2\Delta x_1 + \Delta^2 x_1) = \\&= x_1 + 3\Delta x_1 + 3\Delta^2 x_1 + \Delta^3 x_1, \\x_5 &= x_1 + 4\Delta x_1 + 6\Delta^2 x_1 + 4\Delta^3 x_1 + \Delta^4 x_1; \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

je jasné, že pro $(k + 1)$ člen můžeme psát symbolicky

$$x_{k+1} = (1 + \Delta)^k x_1, \quad (14)$$

kde operátor Δ , aplikovaný p -krát na x_1 , dává p -tou diferencí $\Delta^p x_1$.

Užijme nyní rovnice (14) na řadu členů x_i , které jsou dány přesně platnou rovnicí stupně m :

$$x_i = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_m t_i^m.$$

Předpokládáme-li, že hodnoty t_i nezávisle proměnné tvoří aritmetickou řadu se stálou diferencí

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \delta,$$

pak

$$t_{k+1} - t_i = k\delta \quad (15)$$

a podle (14)

$$x_{k+1} = x_1 + \binom{k}{1} \Delta x_1 + \binom{k}{2} \Delta^2 x_1 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k x_1. \quad (16)$$

Avšak binomický koeficient

$$\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-s+1)}{s!}$$

je stupně s -tého v k a z (15) plyne

$$k = \frac{t_{k+1} - t_1}{\delta}.$$

Dosadíme-li tedy tuto hodnotu za k do (16), dostaneme

$$x_{k+1} = x_1 + c_1 (t_{k+1} - t_1) + c_2 (t_{k+1} - t_1)^2 + \dots + c_k (t_{k+1} - t_1)^k,$$

kde konstanty c_1 až c_k jsou určeny diferencemi δ a $\Delta x_1, \Delta^2 x_1, \dots, \Delta^k x_1$. Poněvadž hodnota t_1 je stejná pro všechna k , můžeme poslední rovnici dát tvar

$$x_{k+1} = a_0 + a_1 t_{k+1} + a_2 t_{k+1}^2 + \dots + a_k t_{k+1}^k. \quad (17)$$

Předpokládejme nyní, že všechny m -té diference mají stejnou hodnotu $\Delta^m x_i = \Delta$. Pak jsou všechny další diference rovny nule a mocninová funkce končí m -tou mocninou:

$$x_{k+1} = a_0 + a_1 t_{k+1} + a_2 t_{k+1}^2 + \dots + a_m t_{k+1}^m.$$

Odtud plyne důležitá věta:

Jsou-li stálé první diference nezávisle proměnné, jsou stálé m -té diference celistvé funkce stupně m . (18)

Máme-li tedy změřeny hodnoty x_i veličiny x pro ekvidistantní argumenty t_i veličiny t , můžeme vytvořením vyšších diferencí hodnot x_i zjistit, lze-li empirickou závislost x na t vyjádřit mocninovou funkcí, a určit zároveň její stupeň, který je roven řádu nejvyšších nenulových diferencí, které poznáme podle toho, že mají velmi přibližně stejné hodnoty.

Tohoto velmi důležitého kriteriia se dá ovšem použít jen pro ekvidistantní argumenty t_i . Kdyby první diference nebyly stálé, musili bychom diference Δx_i až $\Delta^m x_i$ nahradit *diferenčními kvocienty*

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}, \frac{\Delta^2 x_i}{(\Delta t_i)^2}, \dots, \frac{\Delta^m x_i}{(\Delta t_i)^m}.$$

Místo toho je možno také neekvidistantní argumenty nahradit ekvidistantními, což provedeme tak, že interpolací určíme hodnoty \bar{x}_i pro ekvidistantní hodnoty \bar{t}_i , které tvoří aritmetickou řadu, jejíž stálá diference δ je rovna průměrné hodnotě diferencí Δt_i . Někdy můžeme dodatečně posoudit oprávněnost volby m podle toho, s jakou přesností jsou určeny koeficienty u nejvyšších mocnin. Je-li na př. střední chyba koeficientu a_m stejného řádu jako jeho velikost, je zřejmo, že měření neposkytuje bezpečné podklady pro určení tohoto koeficientu, a že přesnost měření nepostačí k určení tak přesné zákonitosti.

Následující příklady osvětlí předešlý theoretický výklad.

17.2. Příklady na určení stupně empirické funkce

Příklad 1. Jako první příklad se pokusíme ověřit u práškového cementu lineárnost závislosti jeho tepelné vodivosti na teplotě na základě výsledků měření, sestavených v tab. 15, I a znázorněných graficky na obr. 16, 1. Abychom se přesvědčili, můžeme-li tuto závislost skutečně pokládat za lineární a nejeví-li sklon k závislosti kvadratické, budeme předpokládat, že je parabolická a vyjádříme ji methodou nejmenších čtverců funkcí 2. stupně:

$$x = a + bt + ct^2. \quad (19)$$

Za přibližné hodnoty a_0 , b_0 , c_0 parametrů vezměme hodnoty plynoucí z 1., 7. a 12. měření a dosadíme do (19) příslušné hodnoty t_i a x_i . Řešení tak vzniklých tří lineárních rovnic vede k výsledku

$$a_0 = 0,109\ 41, \quad b_0 = 0,000\ 389, \quad c_0 = 0,000\ 001\ 77; \quad (20)$$

příslušné jednotky výsledků určíme snadno. Dosazením těchto hodnot do (19) dostaneme sblížené hodnoty vodivosti x_{0i} ; z nich vypočteme $\xi_i = x_i - x_{0i}$, která vložíme do odchylkových rovnic, tvořených obdobně rovnicím 14 (24):

$$\Delta_i = a + \beta t_i + \gamma t_i^2 - \xi_i. \quad (21)$$

Z koeficientů těchto rovnic sestavíme pak normální rovnice 13(7), z nichž vychází pro opravy přibližných hodnot:

$$a = -4,5 \cdot 10^{-5}, \quad \beta = 2,46 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma = -6,2 \cdot 10^{-7}. \quad (22)$$

K posouzení vhodnosti předpokládaného tvaru funkce byly podle známých metod určeny střední chyby těchto oprav. Jsou to zároveň chyby nejpravděpodobnějších hodnot A , B , C , jež dostaneme sečtením (20) a (22). Konečný výsledek:

$$A = 0,109\ 37 \pm 0,000\ 62, \quad B = 0,000\ 414 \pm 0,000\ 021, \\ C = (1,2 \pm 7) \cdot 10^{-7}; \quad (23)$$

připojená čísla s oběma znaménky jsou pravděpodobné chyby parametrů. Z jejich velikostí je zřejmo, že parametr není určen ani přibližně, neboť je stejně pravděpodobno, že leží v mezích $5 \cdot 10^{-7}$ až $19 \cdot 10^{-7}$, jako že leží vně těchto hodnot, jež se od sebe liší téměř o 300 % menší hodnoty. Z toho soudíme, že předpoklad kvadratické závislosti není opodstatněn.

Kdybychom se pokusili ověřit si tento výsledek na základě věty (18) o diferencích, musili bychom buď přepočítat měřené hodnoty na ekvidistantní argumenty, nebo vypočítat první diferencní kvocienty. Volíme-li druhý postup, dostaneme hodnoty značně kolísající, které sice nemůžeme prohlásit za stálé, které však nejeví žádný zákonitý průběh. To tedy aspoň neodporuje lineárnosti zkoumané závislosti.

Tabulka 17,II. Schema měřených hodnot a jejich diferencí pro ekvidistantní argumenty

t_i	x_i	Δx_i	$\Delta^2 x_i$	$\Delta^3 x_i$	$\Delta^4 x_i$
1	2,105				
2	2,808	0,703			
3	3,614	0,806	0,103		
4	4,604	0,990	0,184	0,081	—0,002
5	5,857	1,253	0,263	0,079	—0,001
6	7,451	1,594	0,341	0,078	+0,003
7	9,467	2,016	0,422	0,081	—0,001
8	11,985	2,518	0,502	0,080	

Příklad 2. Jako druhý příklad použití věty (18) o diferencích určíme stupeň celistvé algebraické funkce, která vyjadřuje empirický zákon, určený osmi dvojicemi hodnot (t_1, x_1) až (t_8, x_8) , v prvních dvou sloupcích tab. 17,II; v dalších sloupcích jsou difference Δx_i , $\Delta^2 x_i$, $\Delta^3 x_i$, $\Delta^4 x_i$ hodnot x_i . Třetí difference jsou velmi málo proměnné a kolísají kolem průměrné hodnoty 0,0798, což je patrné také z velmi malých hodnot čtvrtých diferencí řádu 10^{-3} . Proto očekáváme, že měřená závislost se dá s dostatečnou přesností vyjádřit funkcí 3. stupně

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (24)$$

K určení nejpravděpodobnějších hodnot A_0, A_1, A_2, A_3 parametrů a_0, a_1, a_2, a_3 je třeba sestavit normální rovnice, které plynou z 14(32), klademe-li $m = 3$.

Tak dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
 3A_0 + [t]A_1 + [t^2]A_2 + [t^3]A_3 &= [x], \\
 [t]A_0 + [t^2]A_1 + [t^3]A_2 + [t^4]A_3 &= [tx], \\
 [t^2]A_0 + [t^3]A_1 + [t^4]A_2 + [t^5]A_3 &= [t^2x], \\
 [t^3]A_0 + [t^4]A_1 + [t^5]A_2 + [t^6]A_3 &= [t^3x];
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

číselné koeficienty vypočteme podle schematu v tab. 17,III.

Tabulka 17,III. Schema výpočtu koeficientů normálních rovnic

t_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	t_i^5	t_i^6	x_i	$t_i x_i$	$t_i^2 x_i$	$t_i^3 x_i$
1	1	1	1	1	1	2,105	2,105	2,105	2,105
2	4	8	16	32	64	2,808	5,616	11,232	22,464
3	3	27	81	243	729	3,614	10,842	32,526	97,578
4	16	64	256	1 024	4 096	4,604	18,416	73,664	294,656
5	25	125	625	3 125	15 625	5,857	29,285	146,425	732,125
6	36	216	1296	7 776	46 656	7,451	44,706	268,236	1 609,416
7	49	343	2401	16 807	117 649	9,467	66,269	463,883	3 247,181
8	64	512	4096	32 768	262 144	11,985	95,880	767,040	6 136,320
36	204	1296	8772	61 776	446 964	47,891	273,119	1 765,111	12 141,845

Dosazením do (25) dojdeme ke čtyřem lineárním rovnicím:

$$\begin{aligned}
 3A_0 + 36A_1 + 204A_2 + 1\,296A_3 &= 47,891, \\
 36A_0 + 204A_1 + 1\,296A_2 + 8\,772A_3 &= 273,119, \\
 204A_0 + 1\,296A_1 + 8\,772A_2 + 61\,776A_3 &= 1\,765,111, \\
 1\,296A_0 + 8\,772A_1 + 61\,776A_2 + 446\,964A_3 &= 12\,141,845;
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

z těchto rovnic vypočteme nejpravděpodobnější hodnoty

$$A_0 = 1,426, A_1 = 0,693, A_2 = -0,028, A_3 = 0,013.
 \tag{27}$$

Dosazením do (24) obdržíme

$$x = 1,426 + 0,693t - 0,028t^2 + 0,013t^3.$$

Tato rovnice vyjadřuje matematicky empirickou závislost, odvozenou podle metody nejmenších čtverců z experimentálních údajů, které jsou v prvních dvou sloupcích tab. 17,II.

Ukážeme nyní, jak lze určit koeficienty závislosti (24) skupinovou methodou. Podle předpisu 15 (26) je třeba rozdělit všech 8 měření na 4 skupiny, takže patrně vytvoříme skupiny vždy ze dvou měření (1 a 2, 3 a 4, 5 a 6, 7 a 8). Sečteme vždy dvě po sobě následující rovnice, jež vyplynou dosazením hodnot t_i a x_i do předpokládaného vztahu (24), a dostaneme:

$$\begin{aligned}
 2a_0 + 3a_1 + 5a_2 + 9a_3 &= 4,913, \\
 2a_0 + 7a_1 + 25a_2 + 91a_3 &= 8,218, \\
 2a_0 + 11a_1 + 61a_2 + 341a_3 &= 13,308, \\
 2a_0 + 15a_1 + 113a_2 + 855a_3 &= 21,452.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme přibližné hodnoty parametrů.

Jak je zřejmo z tab. 17,II, tvoří hodnoty t_i aritmetickou řadu a jde tedy o měření *ekvidistantní*. Již v 15.4 jsme řekli, že se rovnice skupinové metody pro ekvidistantní měření řeší velmi snadno postupným odčítáním. Skutečně odečtením první rovnice (28) od druhé, druhé od třetí a třetí od čtvrté dostaneme

$$4a_1 + 20a_2 + 82a_3 = 3,305,$$

$$4a_1 + 36a_2 + 250a_3 = 5,090,$$

$$4a_1 + 52a_2 + 514a_3 = 8,144.$$

Tyto rovnice neobsahují už koeficient a_0 . Opětovným odečtením první rovnice od druhé a druhé od třetí získáme dvě rovnice

$$16a_2 + 168a_3 = 1,785,$$

$$16a_2 + 264a_3 = 3,054.$$

Odečtením vyloučíme i a_2 . Tak dostaneme pro a_3 rovnici

$$96a_3 = 1,269, \text{ odkud } a_3 = 0,013\ 219.$$

Zpětným dosazováním najdeme pak postupně hodnoty všech koeficientů, takže

$$a_3 = 0,013\ 219, \quad a_2 = -0,0272, \quad a_1 = 0,6913, \quad a_0 = 1,428.$$

Vidíme, že se koeficienty jen málo liší od nejpravděpodobnějších hodnot (27), vypočtených pracnou methodou nejmenších čtverců.

17.3. Příklad na posouzení normálnosti rozložení chyb

V čl. 3 jsme studovali dvě řady můstkových měření a zjistili jsme, že rozložení chyb v I. řadě nesplňuje dosti přesně normální zákon a je nadnormální, jak je do jisté míry patrné již z obr. 9,1. Bezpečněji se o tom můžeme přesvědčit užitím logaritmickokvadratického grafu, v němž je závislost 12 (7) zobrazena přímkou 12 (10).

Abychom mohli lépe srovnat průběh této přímky s pozorovanými četnostmi, nahradíme relativní četnosti η četnostmi absolutními y , které z nich dostaneme násobením počtem měření $n = 500$. Tak přejde rovnice (10) v rovnici přímky

$$Y = \ln \left(\frac{500h}{\sqrt{\pi}} \right) - h^2 T,$$

kteřou snadno sestrojíme ze dvou bodů, na př. z bodů

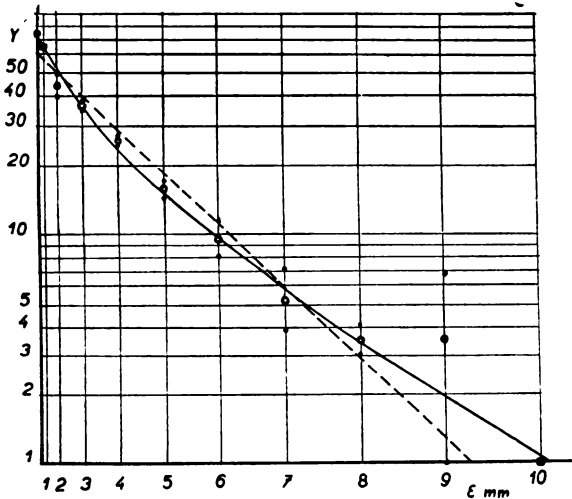
$$T_1 = 0, \quad Y_1 = \ln \left(\frac{500h}{\sqrt{\pi}} \right); \quad T_2 = 80, \quad Y_2 = Y_1 - 80h^2.$$

Podle 9 (22) a 8 (14) dostaneme

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} \times 3,25 \text{ mm}} = 0,218 \text{ mm}^{-1}, \quad h^2 = 0,0475 \text{ mm}^{-2},$$

$$T_1 = 0, \quad Y_1 = 4,119; \quad T_2 = 80, \quad Y_2 = 0,319.$$

Tak byla sestrojena přímka narýsovaná čárkovaně na obr. 17,3, která zobrazuje normální zákon. Naproti tomu experimentálně zjištěné četnosti, které jsou pro kladné a záporné chyby označeny kroužky se znaménkem + nebo —, mají odchýlný průběh, který se nejlépe projevuje na rozložení bodů označených prázdnými kroužky, které odpovídají průměrným četnostem chyb obou znamének. To souhlasí s tím, že se rozložení chyb v řadě I dá vystihnout vzorcem



Obr. 17,3. Logaritmiccko-kvadratický graf četností řady I.

9 (21), jehož konstanty a , α , b lze určit nejlépe momentovou methodou, která k určení tří konstant poskytuje tři podmínky, a to 14 (27), 14 (28), 14 (29). Položíme-li tedy

$$x = \eta(t) = f(t) = \frac{a}{e^{\alpha^2 t^2} - b} \quad (29)$$

a nahradíme-li součty pro spojitou křivku integrály, dostaneme pro výpočet konstant tyto tři rovnice:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x dt &= \Sigma x_i = 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |t| x dt &= \Sigma |t_i| x_i = \lambda, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x dt &= \Sigma t_i^2 x_i = \delta^2, \end{aligned}$$

kde bylo použito známých vztahů 8 (8), 8 (17) a 8 (13). Dosadíme-li sem za x funkci 12(29), dostaneme nakonec vztahy

$$\frac{2a}{a} \cdot U(b) = 1,$$

$$\frac{a}{a^2 b} \ln \frac{1}{1-b} = \lambda,$$

$$\frac{2a}{a^3} \cdot V(b) = \delta^2,$$

kde

$$U(b) = \int_0^{\infty} \frac{du}{e^{u^2} - b}, \quad V(b) = \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{e^{u^2} - b}.$$

Odtud skutečně plynou na základě známých hodnot 9 (2) a 9 (4) dosti složitým výpočtem,¹⁾ který neuvádíme, pro neznámé konstanty a , α , b hodnoty v 9 (6). Tak dostáváme podle 9 (1) empirický zákon chyb

$$\eta = \frac{0,0441 \text{ mm}^{-1}}{e^{0,0307 \cdot a^2} - 0,696},$$

ježž v logaritmicokvadratickém znázornění na obr. 17,3 zobrazuje plně vytažená křivka. Je zřejmo, že tato křivka sleduje zhruba průběh prázdných kroužků a vystihuje uspokojivě empirické rozložení chyb v řadě I.

Z grafu na obr. 12,1 vychází pro poměr pravděpodobné chyby ϑ k střední chybě δ hodnota 0,59 (místo 0,67), takže podle článku 9 (2)

$$\vartheta = 0,59 \delta = 0,59 \cdot 3,25 \text{ mm} = 1,8 \text{ mm},$$

a nikoliv $\vartheta = 2,2 \text{ mm}$, jak by mělo být podle normálního zákona.

17¹⁾ Viz [58].

ČÁST DRUHÁ

Základní měření

D. ZÁKLADNÍ ÚKONY

18. PŘEHLED METHOD

Způsob, jímž se provádí fyzikální měření, závisí jednak na povaze hledané veličiny, jednak na tom, z kterých vztahů pro měřenou veličinu vyjdeme a jakých přístrojů použijeme. Možné způsoby měření se nazývají metody měření nebo měřicí metody. Vcelku lze je roztrždit do několika skupin, a to podle různých hledisek. Je zvykem dělit měřicí metody na dvě kategorie, totiž na **metody přímé** a **metody nepřímé**. *Přímou nazýváme metodu založenou na definici měřené veličiny*. Na př. rychlost rovnoměrného pohybu tělesa, světla, zvuku atd., jakožto podíl dráhy a času, zjistíme z doby potřebné k proběhnutí známé dráhy. Odpor elektrického vodiče určíme podle Ohmova zákona tak, že změříme napětí a proud a první veličinu dělíme druhou atd. *Metody nepřímé vycházejí naproti tomu ze vztahů měřené veličiny k různým jiným veličinám, s nimiž přímo nesouvisí podle své definice*. Tak na př. rychlost, s jakou odskočí koule dopadnuvší svisle na vodorovnou desku, můžeme vypočítat z výšky odskoku; rychlost střely můžeme vypočítat z výkyvu zavěšeného tělesa, t. zv. balistického kyvadla, zachytivšího střelu. Rychlost zvuku můžeme nalézt také jako součin kmitočtu a délky vlny daného tónu. Podobně bychom mohli elektrický odpor vypočítat ze změřeného proudu a množství vyvinutého Joulova tepla atd.

Další dvě kategorie měřících metod tvoří **metody nezávislé** (absolutní) a **metody srovnávací** (relativní).

Prvním názvem označujeme metody, které dávají *absolutní (prostou) hodnotu* měřené veličiny ve zvolených jednotkách, aniž potřebujeme znát její hodnotu v některém zvláštním případě (na př. pro určitou látku nebo těleso), kdežto metody druhé kategorie dávají jen *hodnotu poměrnou (relativní)*, jsouce tak upraveny, abychom jimi získali poměr měřené veličiny k jiné veličině stejného druhu. Je zřejmo, že nezávislé metody jsou cennější, ale zato obtížnější, kdežto metody srovnávací, při nichž pouze srovnáváme dvě veličiny navzájem, jsou pochopitelně jednodušší, a tedy rychlejší a méně nákladné.

Uvážíme-li ovšem, že prostá hodnota veličiny je vlastně její poměr k veličině jednotkové, vidíme, že srovnávací metody mohou vést k absolutním hodnotám, máme-li k použití jednotkovou veličinu nebo aspoň veličinu, jejíž velikost dovedeme vyjádřit v nějakých jednotkách. Proto se zhotovují pro důležitě fyzikální veličiny přesné vzory nebo *míry*, zvané *etalony*, *standards* neboli *normály*, které vykazují dotyčnou veličinu v jistém známém počtu daných jednotek. Nejznámější etalony jsou: přesná závaží, normály elektrického odporu, kapacity, svítivosti atd. Tak můžeme k zjištění elektrického odporu použít buď metody přímé, která je absolutní, neboť ze změřeného proudu (v ampérech) a napětí (ve voltech) vypočteme hodnotu odporu (v ohmech),

nebo metody můstkové, která dává jen poměr velikostí dvou odporů. Hodnotu neznámého odporu můžeme však nalézt srovnáním se známým odporem, na př. s přesným odporovým normálem (1 Ω , 1000 Ω a pod.).

Podobně zjišťujeme relativní hustotu látek (na př. poměr k hustotě vody nebo vzduchu), relativní (zdánlivou) teplotní roztažnost a tepelnou vodivost, viskozitu atd.

Kromě těchto čtyř obecných kategorií měřicích method rozeznáváme některé zvláštní metody, kterých se velmi často používá.

Metoda substituční (nahrazovací) záleží v tom, že se měřená veličina srovnává s řadou různých veličin známé velikosti, mezi nimiž se hledá veličina, která svou velikostí je nejlépe veličině měřené. Měření se provádí tak, že se tato veličina nahrazuje postupně různými veličinami řady, z níž vybereme takovou, že se stav měřicích přístrojů co nejméně liší od stavu zjištěného pro měřenou veličinu. Je zřejmo, že substituční metoda může poskytnout jen tehdy dosti přesný výsledek, když řada známých veličin je dosti „hustá“, když obsahuje dostatečný počet veličin různých velikostí. K tomu účelu zhotovují se sady vhodně vybraných vzorů (etalonů), jimž přísluší dosti přesně známé hodnoty určitých veličin. Běžné jsou sady závaží, koncových měřítek, ladiček, el. odporů, kapacit a pod. Členy sady volíme tak, aby bylo možno sestavit všechny celistvé násobky těže základní hodnoty (jednotky), a to z co nejmenšího počtu členů. Nejobvyklejší je desetinná soustava a hodnoty se v každé desítké (dekádě) opakují podle určitého pravidla, na př.

1; 1, 1, 2, 5; 10, 10, 20, 50; 100, . . .

nebo

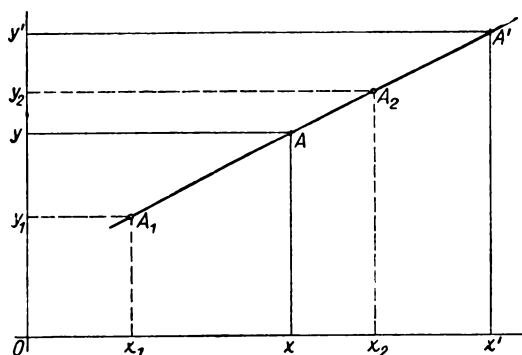
1, 2, 2, 5; 10, 20, 20, 50; . . . ,

1, 2, 3, 4, 5; 10; atd.

Metoda kompenzační (vyrovnávací) podobá se v jistém směru předešlé metodě substituční a lze jí použít jen pro veličiny, jež se mohou vyskytovat s oběma znaménky; veličiny tedy mohou nabývat kladných i záporných hodnot, jak je tomu u síly nebo u momentu síly (dvojice sil), u elektrického napětí a vůbec u všech veličin vektorových. Metoda záleží v tom, že měřenou veličinu vyrovnáme (kompensujeme) stejně velkou veličinou opačného znaménka, jejíž velikost buď přímo známe, nebo můžeme určit jednoduchým způsobem. Tak na př. při vážení na pérové váze kompensujeme váhu tělesa silou deformovaného pera, při vážení na váze pákové vyrovnáváme moment jeho váhy opačným momentem váhy závaží nebo při měření hustoty na základě Archimédova zákona vyrovnáváme vztlak kapaliny vahou závaží. Elektromotorickou sílu článků měříme tak, že známou část této síly kompensujeme opačně zapjatým normálním článkem atd.

Některé z těchto method mohou mít společnou vlastnost, a to že při měření neurčujeme hodnotu veličiny z velikosti výchylky měřicího přístroje, ale měníme určitou veličinu tak, aby se měřicí přístroj nevychýlil z nulové polohy. Taková metoda se nazývá **metoda nulová**. Má tu výhodu, že nemusíme znát příslušné hodnoty na stupnici přístroje a že nezáleží na přesnosti stupnice; stačí, když přístroj ukazuje dosti přesně nulovou polohu. Takovou methodou je vlastně vážení, při němž užíváme sady závaží (na př. na analytických vahách), nebo měření odporu Wheatstonovým můstkem, kompenzační metoda měření elektromotorické síly a mnohé jiné.

Prve uvedených method substituční a nulové se nejčastěji používá jako **method interpolačních**. Důvod je v tom, že při skutečném měření bývá ne-
snadným úkolem dosáhnout pro některou ze známých veličin přesně stejné vý-
chyvky měřicího přístroje jako pro veličiny měřené (po př. výchyvky přesně
nulové). Proto volíme raději dvě veličiny, jimž přísluší dvě výchyvky po
různých stranách výchyvky zjištěné pro měřenou veličinu (nebo dvě výchyvky
opačného znaménka při methodě nulové), a hodnotu veličiny, které by odpoví-
dala žádaná výchyvka (u nulové methody nulová), najdeme početním po-



Obr. 18,1. Přímková (lineární) interpolace.

stupem, zvaným *interpolace*. Tento postup vede k přesnějšimu výsledku a je
i rychlejší než hledání jediné zcela určité výchyvky, ovšem za předpokladu, že
obě výchyvky jsou dosti blízké této výchyvce. Je-li tomu tak, můžeme po-
užít nejjednodušší **interpolace přímkové (lineární)**. V malém rozmezí těchto
výchyvek je totiž závislost výchyvky y na měřené veličině x velmi přibližně
přímková. Platí tedy pro obě výchyvky y_1, y_2 a jim příslušné veličiny x_1, x_2 ,
jakož i pro výchyvku y příslušející měřené veličině x lineární vztahy:

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \quad y = ax + b;$$

z toho dostaneme

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

nebo

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} (x_2 - x_1). \quad (1)$$

To je hledaný *interpolační vzorec*, z něhož plyne postup, který právě nazýváme
lineární interpolací:

Hodnotu měřené veličiny dostaneme, když k menší z obou přibližných
hodnot přičteme poměrnou část jejich rozdílu, t. j. rozdíl zmenšený v poměru,
v němž výchyvka příslušná měřené veličině dělí obě přibližné výchyvky. (2)

Geometricky znamená vztah (1), že bod A o souřadnicích (x, y) leží na přímce
jdoucí body $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$; toho lze použít ke grafické interpolaci,
při níž je hledané x dáno úsečkou bodu A o souřadnici y na přímce $A_1 A_2$ (viz
obr. 18,1).

Jak je z vyloženého postupu i z jeho pojmenování vidět, volíme přibližné výchylky po různých stranách dané výchylky y , aby hledaná veličina ležela mezi oběma použitými hodnotami.

Leží-li však obě přibližné výchylky na téže straně dané výchylky y' , je-li tedy hledaná veličina x' vně intervalu x_1, x_2 , nazývá se postup *extrapolace* (obr. 18,1). Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě úsečka x' bodu A' je určena obecně s menší přesností než při interpolaci (zvláště když chyby obou výchylek jsou opačného znaménka). *Vždycky dáváme přednost interpolaci před extrapolací* také proto, že přímková závislost výchylky na měřené veličině bývá většinou jen přibližná a je ve skutečnosti dána jistou křivkou, jejíž přesný průběh neznáme. Proto je interpolace vždy bezpečnější než extrapolace, které se musíme pokud možno vystríhat.

Liší-li se průběh křivky od přímky i v rozmezí obou výchylek značněji, je nutno použít obecnější *nelineární interpolace*. Pak musíme zjistit tři nebo více výchylek pro hodnoty, ležící v okolí hledané hodnoty, a provést *interpolaci kvadratickou* nebo i vyššího stupně. Geometricky to znamená, že obecnou křivku nahradíme parabolou, proloženou třemi body, nebo křivkou vyššího stupně, proloženou více body. Často vystačíme s *interpolací grafickou*, jak uvidíme při určování zrychlení zemské tíže methodou reversního kyvadla (obr. 41,1).

Přehled měřicích method ukončíme popisem speciální metody, jejíž podstata tkví spíše v početním zpracování měření. Nazývá se *metoda postupná* a je vhodná pro t. zv. *postupná měření*, která se vícekrát opakují, a to tak, že čtení na stupnici při následujícím měření začíná právě v místě, v němž končí měření předcházející. Tak je tomu na př. při opakovaném měření trvání periodických dějů (doby kyvu, doby kmitu a pod.), při měření plochy planimetrem a při kontrole pipety. Nejjednodušší postup by byl změřit prostě na př. dobu většího počtu opakovaných dějů a výsledek dělit jejich počtem. K dosažení značnější přesnosti bylo by však třeba velkého počtu opakování a při jejich počítání by mohlo dojít k omylu. Proto se užívá buď *methody postupné s menším počtem* opakování, nebo *methody omezovací*, vyžadující větší počet opakování, který se však určí zvláštním obratem.

Vyložíme způsob měření postupnou methodou při kontrole pipety: Zvážíme prázdnou kádinku, pak do ní vyprázdníme pipetu a znovu zvážíme. Rozdíl obou vah je roven váze vody obsažené v pipetě. Pro větší přesnost opakujeme kontrolu několikrát; při tom nevyprázdňujeme kádinku, protože bychom ji museli po každé vysušit, nýbrž přidáváme vždy další obsah pipety k předcházejícímu. Vážíme tedy postupně: kádinku prázdnou o hmotě m_0 , kádinku s jedním obsahem pipety o celkové hmotě m_1 , se dvěma obsahy (m_2) atd. Vyprázdníme-li pipetu do kádinky celkem p -krát, dávají rozdíly mezi dvěma po sobě jdoucími hodnotami

$$m_1 - m_0, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \dots, m_p - m_{p-1}$$

celkem p hodnot pro hmotu vody obsažené v pipetě, které se vinou měřicích chyb poněkud liší. Kdybychom však za nejsprávnější hodnotu této hmoty vzali průměr uvedených p rozdílů, dostali bychom hodnotu

$$\bar{m} = \frac{1}{p} [(m_1 - m_0) + (m_2 - m_1) + \dots + (m_p - m_{p-1})] = \frac{m_n - m_0}{p},$$

kteřá jak patrnó je rovna n -tině rozdílu posledního a prvního vážení, a tedy zcela nezávislá na všech ostatních váženích. K dosažení téhož výsledku by tedy

postačilo zvážit prázdnou kádinku a kádinku s p -násobným obsahem pipety. Přesnější výsledek s poměrně malou námahou však získáme, provedeme-li všechna popsaná vážení, při čemž skončíme vážením kádinky s lichým počtem obsahů pipety, takže máme celkem sudý počet údajů. Tato měření rozdělíme na dvě (stejně početné) poloviny a utvoříme rozdíl prvních měření obou polovin, rozdíl druhých měření atd. a konečně rozdíl posledních měření v obou polovinách. Obsahuje-li každá skupina $k = \frac{p+1}{2}$ hodnot, dává nám každý z těchto rozdílů

$$m_k - m_0, m_{k+1} - m_1, \dots, m_p - m_{k-1} \quad (3)$$

k -násobnou hodnotu hmoty vody obsažené v pipetě. V průměru takto vypočtených rozdílů (v počtu k) je stejnoměrně využito všech vážení, ale žádné z nich se neopakuje.¹⁾ Proto dělením průměru rozdílů (3) číslem k (t. j. polovičním počtem všech zaznamenaných hodnot) dostaneme hledanou střední hodnotu hmoty obsažené v pipetě, která je odvozena ze všech $n = p + 1 = 2k$ naměřených hodnot. Její střední chyba se tedy vypočte ze střední chyby průměru dělením číslem k . Příklady měření postupnou methodou, jejíž theorie byla podána v 15.4, najdeme v dalších článcích (viz na př. 21.1).

Postupnou methodou dostaneme výsledek s poměrnou přesností dosti značnou, ale při větším počtu opakovaných měření může být tato metoda namáhavá. Kromě toho u většiny časových měření je třeba dvou pozorovatelů. Někdy může být výhodnější **metoda omezovací**, kterou lze dosíci výsledků s libovolnou poměrnou přesností, pokud lze ovšem předpokládat, že měřený děj lze v dostatečném počtu opakovat. Je-li tomu tak, stačí znát hodnotu krajní chyby, které se můžeme při jednom měření dopustit, nebo aspoň její bezpečnou horní mez. Postup vyložíme na příkladu měření doby kyvu deklinační magnetky v zemském magnetickém poli.

Změříme stopkami na př. desetinásobnou dobu kyvu τ :

$$10\tau = 68,8 \text{ s.}$$

Víme-li nyní, že tato doba je zaručena uvnitř mezi $\pm 0,3$ s (což je přesnost jednoho měření stopkami), můžeme říci, že

$$68,5 \text{ s} < 10\tau < 69,1 \text{ s,}$$

a tedy

$$137,0 \text{ s} < 20\tau < 138,2 \text{ s.}$$

Tyto meze jsou užší než 1τ . Stačí tedy spustit stopky na počátku libovolného kyvu a bez počítání kyvů zastavit je při prvním průchodu magnetky rovnovážnou polohou (magnetickým poledníkem) po 137. vteřině. Je-li čtení na stopkách na př. 137,7 s, víme, že

$$137,4 \text{ s} < 20\tau < 138,0 \text{ s,}$$

tedy

$$687,0 \text{ s} < 100\tau < 690,0 \text{ s.}$$

18¹⁾ Kdybychom podobný postup volili pro p sudé, měli bychom celkem lichý počet údajů; při tom by se však prostřední hodnota v průměru (3) zrušila a prostřední vážení by tedy bylo zbytečné.

Opět je rozdíl obou mezi menší než doba kyvu, takže stisknutím stopek při prvním průchodu po 687. vteřině dostaneme zase přesnější určení doby 100τ . Je-li na př.

$$100\tau = 687,6 \text{ s,}$$

víme, že

$$687,3 \text{ s} < 100\tau < 687,9 \text{ s,}$$

a tedy

$$6,873 \text{ s} < \tau < 6,879 \text{ s.}$$

Krajní chyba určení τ je tedy 0,003 s a můžeme z ní určit horní mez pravděpodobné chyby. Z výsledků článku 10 [na př. z rov. (8, 9)] plyne, že pravděpodobná chyba

$$\vartheta \doteq \frac{2}{3} \delta, \quad \kappa = 3 \delta,$$

kde κ značí t. zv. krajní chybu, která se překročí s pravděpodobností 2,7⁰/₁₀₀, tedy

$$\vartheta \doteq \frac{2}{9} \kappa. \quad (4)$$

Z rovnic 12 (14) a 12 (16) pak vychází

$$\vartheta \doteq \frac{5}{24} \kappa', \quad (5)$$

kde κ' je krajní chyba, jež se překročí s pravděpodobností 1,4⁰/₁₀₀. Obě tyto krajní chyby mohou být pokládány za „největší možnou chybu“ a pravděpodobná chyba je přibližně rovna pětině „největší možné chyby“, kterou lze odhadnout pro dané měření.

V našem případě tedy můžeme psát $\vartheta \doteq 0,0006 \text{ s}$,

takže

$$\tau = (6,876 \pm 0,001) \text{ s.} \quad (6)$$

Aniž bylo třeba počítat 20 nebo 100 kyvů, dostali jsme výsledek poměrně dosti přesný.

Tato metoda omezovací má značnou přednost, že můžeme zjistit dobu i velmi velkého počtu opakovaných dějů bez jejich přesného spočítání. Stačí, když nezapomeneme na př. po několika stech nebo tisících vteřin odečíst okamžik počátku prvního nejbližší následujícího děje. *Podstatnou podmínkou je ovšem, abychom volili vždy jen takový násobek, aby meze násobků byly menší než velikost měřeného intervalu.* Čím užší jsou tyto meze v poměru k velikosti tohoto intervalu, tím větších násobků lze použít a tím rychleji dojdeme k dostatečně přesnému výsledku.

19. ČTENÍ NA STUPNICI

Všechna fyzikální měření v podstatě záleží na zjištění *polohy ukazatele na stupnici v daném okamžiku*, čili jak pravíme, na *čtení na stupnici*. Snadno nahlédneme, že tomu tak je, rozumíme-li ukazatelem buď skutečný mechanický

ukazatel (ručku, ručičku, jehlu), nebo jistý (na př. nulový) dílec pomocné stupnice, nebo také ukazatel světelný anebo jinak opticky vytvořený. Zjištění polohy ukazatele na stupnici však můžeme převést na ještě jednodušší úkon, totiž na zjišťování *krytí dvou značek* čili *koincidence (splynutí) dvou indexů*, které mohou být buď dílce (dělicí čárky nebo rysky) na stupnicích, různé druhy ukazatelů, nebo konečně optické obrazy mechanických útvarů. Tak je tomu především u nulových method nebo při měření úhlů sekstantem, když nařizujeme přístroj na krytí nebo splynutí dvou obrazů téhož předmětu. Také mechanické měření rozměrů těles je založeno na uskutečnění splynutí (dotyku) dvou mechanických ploch, totiž jistých částí povrchu měřeného tělesa a jistých součástí měřicího zařízení (posuvného měřítka, mikrometru atd.). Určení polohy ukazatele na stupnici lze pokládat za zjišťování koincidence, i když se ukazatel nekryje se žádným skutečným dílcem stupnice. Pak se buď spokojíme zjištěním, mezi kterými dvěma dílci ukazatel leží, nebo odhadujeme, s kterým dílcem myšleného jemnějšího dělení ukazatel splývá.

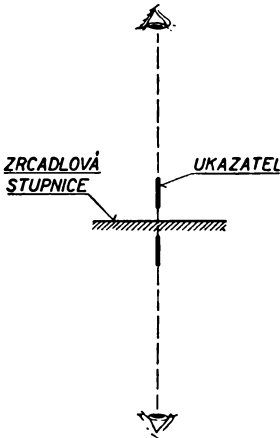
Je tedy zjišťování *krytí (koincidence) dvou značek prvotní měřicí úkon* neboli *elementární měřicí operace*, a proto je záhodno si uvědomit základní požadavky, které musí splňovat.

Především může jít buď o *skutečné splynutí* dvou značek, jestliže lze obě značky přivést do téhož místa prostoru, nebo jen o *krytí obou značek v určitém směru*. První způsob je možno uskutečnit jen pro světelný (stínový) ukazatel, kdežto při ukazatelích mechanických nastává vždy jen krytí, které vzniká při pozorování v určitém směru. Tak na př. dvě rovnoběžná vlákna mohou se kryt v libovolné poloze, hledíme-li na ně v jejich společné rovině, naproti tomu v daném směru (rovině) se kryjí jen při jediné poloze. Tak vzniká *chyba úkosu (paralakční)*, která je tím větší, čím více se směr pozorování koincidence odchyluje od předepsaného směru. Je ovšem tím menší, čím blíže sobě jsou obě vlákna. Může mít opět značný vliv na přesnost zjištění polohy ukazatele při čtení na stupnici, a proto ji hledíme různými způsoby co nejvíce zmenšit. Především je vidět, že se chyba úkosu prakticky vylučuje, pohybuje-li se ukazatel buď přímo v rovině stupnice, nebo v těsné její blízkosti. Tuto přednost má v nejdokonalejší míře světelný ukazatel, který je dán světelnou značkou promítnutou přímo na stupnici. Dosti dobře vyhovuje i ukazatel vyznačený na spodní ploše skleněné destičky, umístěné těsně nad stupnicí, nebo ukazatel (event. krátká stupnice), pohybující se v rovině stupnice těsně podél (vedle) stupnice. Jinak je nutno promítat vždycky *kolmo ke stupnici*, a to může být zajištěno rozmanitým způsobem. Tak bývají stupnice vyznačeny na *zrcadlicí ploše* a ukazatel má tvar tenkého pásku kolmého k rovině stupnice. Při čtení na stupnici hledíme pak takovým směrem, aby zrcadlový obraz oční pupily splýval s obrazem ukazatele, jak je zřejmo z obrazu (19,1). Také je výhodný ukazatel složený ze dvou tenkých rovnoběžných drátků, napjatých nad sebou tak, aby se kryly při kolmém pohledu na stupnici. Další způsoby odstranění úkosu jsou popsány v následujícím článku.

Za předpokladu, že některým z těchto způsobů je chyba úkosu prakticky odstraněna, provádíme čtení na stupnici tak, abychom získali co nejpřesnější výsledek. Nejčastěji se ukazatel nekryje přímo se žádným dílcem stupnice, nýbrž leží na př. mezi k -tou a $(k + 1)$ -ou dělicí čárkou. Čtená hodnota tedy je větší než k a menší než $k + 1$. Přesnější výsledek dostaneme, zjistíme-li nějakým způsobem, v jakém poměru dělí ukazatel vzdálenost sousedních dílců, a z toho pak při rovnoměrně dělené stupnici plyne přesnější hodnota měření

veličiny. Při rovnoměrné stupnici s dělicími čárkami vesměs stejně vzdálenými můžeme totiž užít přímkové interpolace 18(2). Na nerovnoměrných stupnicích, jako jsou na př. stupnice zkusmo vyznačené na některých technických měřicích přístrojích, je tento postup nespolehlivý a málo přesný; proto budeme v dalším výkladu přihlížet jen ke stupnicím rovnoměrným.

Je-li dělení stupnice velmi husté a má-li dělicí čárky (rysky) poměrně tlusté (široké), odhadujeme aspoň polovinu dílků. Jsou-li však dělicí čárky dosti tenké proti jejich vzdálenostem, je pravidlem čísti desetiny nejmenších dílků stupnice (nebo i menší zlomky). Děje se to buď odhadem, nebo pomocnou stupnicí (vernierem či noniem). Při odhadování desetin představujeme si v duchu dílek rozdělený na desetiny a snažíme se postihnout, s kolikátou desetinou se ukazatel asi kryje. Bezpečného odhadování dosáhneme snadno cvičením, které provádíme tak, že odhadujeme polohu ukazatele a současně jiným způsobem (vernierem nebo jemnějším měřítkem) přímo zjišťujeme počet desetin. Přesnost v odhadování desetin závisí na dovednosti a cviku pozorovatele, na dokonalosti stupnice a konečně i na způsobu dělení, hlavně na tloušťce dělicích čárek. Čím tenčí jsou čárky, tím přesněji lze odhad provést. Proto by bylo vhodnější provést dělení stupnice nikoli čárkami, ale střídavou úpravou povrchu měřítka tak, aby sousední plochy mezi dvěma dílci se navzájem lišily. Tohoto způsobu se užívá v zeměměřičtví tak, že se na stupnici střídají černé (nebo červené) plochy s bílými.



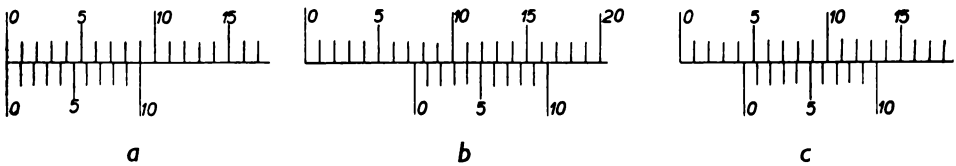
Obr. 19,1. Čtení na zrcadlové stupnici.

Ukazuje se, že vlivem konečné tloušťky dělicích čárek podceňuje většina pozorovatelů vzdálenost ukazatele od bližší dělicí čárky. Nejpresněji lze proto odhadnout střední (4, 5, 6) desetiny, méně přesně desetiny krajní. Zvláště přesně lze odhadnout polovinu dílků. Zkušenější pozorovatel dovede odhadovat dosti bezpečně dvacetiny. Pokusy provedené v Bureau International des Poids et Mesures v Sèvres ukázaly, že (při dosti širokých dílcích) je výhodné odhadovat setiny. Při jistém cviku dosáhne se tak přesnějších výsledků než při čtení desetin, ačkoliv ovšem již v setinách bývají odchylky.

Pro přesnější čtení desetin a menších zlomků nejmenších dílků používá se často zvláštní pomocné stupnice, která obsahuje jistý počet n dílků; každý z nich je kratší než nejmenší dílek na hlavní stupnici, a to o $1/n$ tohoto dílku. Tato pomocná stupnice je posuvná podél hlavního dělení a její nulou rysku zastupuje ukazatel. Nazývá se vernier nebo nonius. Nejčastěji bývá $n = 10$ a každý dílek vernieru měří tedy $0,9$ dílku hlavní stupnice.¹⁾ Postup při měření vernierem je takový: Nejprve nastavíme počátek (nulovou rysku) vernieru přesně proti některé rysece hlavní a zjistíme, kolikátá ryska hlavní stupnice se shoduje s poslední ryskou vernieru. Nejčastěji nastává splnutí $(n - 1)$ rysky s n -tou ryskou vernieru. Padne-li pak při měření počátek vernieru mezi dvě

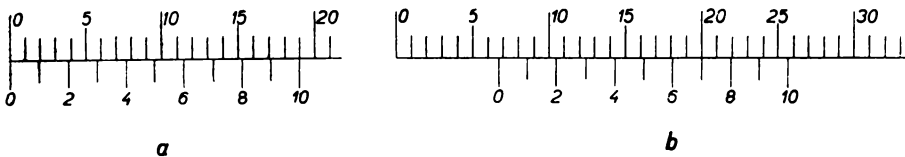
1) Někdy bývají délky na vernieru o $1/n$ delší než na hlavní stupnici. Pak se vernier nazývá *předbřavý* nebo *protisměrný*, kdežto dříve popsany vernier s menšími dílky se jmenuje *dobřavý* (*stejnoseměrný*). Obecně je tedy dílek vernieru roven $\frac{n \pm 1}{n}$ dílku hlavní stupnice.

hlavní rysky, zjistíme, kolikátá ryska vernieru se shoduje s některou hlavní ryskou. Každý dílek vernieru je o $1/n$ kratší než jeden hlavní dílek, a tedy zřejmě počátek vernieru je posunut o tolik n -tin za nejbližší nižší rysku, kolikátá ryska vernieru se shoduje s hlavním dělením, při čemž nezáleží na tom, pro kterou hlavní rysku tato koincidence nastává. Nejlépe je to vidět z obr. 19,2, který znázorňuje desetinný vernier ($n = 10$); jeden jeho dílek je o $1/10$ kratší než jeden hlavní dílek, neboť 10 jeho dílků se rovná 9 hlavním dílkům (obr. 19,2a).



Obr. 19,2. Desetinný vernier:

a - v základní poloze; b - čtení 7,4; c - čtení 4,35.



Obr. 19,3. Desetinný vernier s dvojnásobnými dílky:

a - v základní poloze; b - čtení 6,7.

Druhá část (obr. 19,2b) ukazuje příklad čtení, při němž se shoduje 4. ryska vernieru s hlavním dělením. Počátku vernieru tedy odpovídá na hlavní stupnici místo: 7,4. Konečně 3. část 19,2c ukazuje případ, kdy žádná ryska vernieru se neshoduje s hlavním dělením, zato však 3. a 4. ryska leží uvnitř téhož hlavního dílku, a to přibližně souměrně. Lze tedy očekávat, že při polovičním dělení hlavním i vernierovým by se shodovala jeho 7. ryska a že tedy počátek je posunut o $7/20 = 0,35$ hlavního dílku.

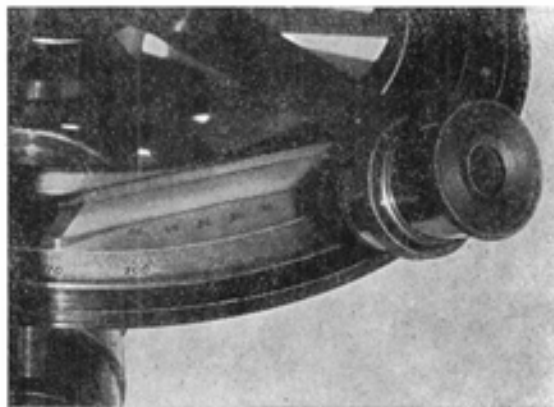
Vedle desetinného vernieru se užívá *dvacetinného* ($n = 20$), někdy se volí $n = 40$ nebo 50. Další zvyšování n se nedoporučuje, protože při malém rozdílu mezi dílky obou stupnic není snadno odhadnout, která ryska se přesně shoduje. Již při dvacetinném vernieru vyžaduje nalezení koincidujícího dílce jisté doby, a proto se doporučuje napřed odhadnout, o kolik desetiny (nebo dvacetiny) je počátek posunut, a hledat koincidence v okolí příslušné rysky. Někdy se konstruují vernieru, jejichž dílky jsou pro snazší čtení dvojnásobné, takže se pak rysky mohou shodovat jen se sudými hlavními ryskami. Příklad takového vernieru znázorňuje obr. 19,3. Jak vidíme z jeho levé části, rovná se 10 (dvojnásobných) dílků tohoto vernieru 19 (jednoduchým) dílkům hlavní stupnice. Každý jeho dílek je tedy o jednu desetinu dílku hlavní stupnice kratší než dva hlavní dílky, a proto se s ním pracuje jako s každým desetinným vernierem, jak je zřejmo z pravé části obrázku, která dává čtení 6,7.

Při měření úhlů bývá hlavní kruh dělen na třetiny stupně, a tu je výhodný dvacetinný vernier, jímž se určí dvacetiny z třetiny stupně, takže lze úhly měřit na 1 úhlovou minutu.

20. OPTICKÉ ČTECÍ PŘÍSTROJE

Přesného čtení na stupnici lze dosáhnout vhodným optickým zařízením, kterým je buď pouhá lupa, nebo drobnohled, nebo i dalekohled.

20,I Lupa je velmi vhodná pro čtení na jemně dělených stupnicích, zvláště na dělených kruzích přístrojů určených k přesnému měření úhlů. Na těchto přístrojích bývá u každého vernieru připevněna drobná lupa, kterou se dají přesně zjistit koincidence. Toto zařízení vidíme ze snímku na obr. 20,1. Účelem lupy je pouze zvýšit rozlišovací schopnost prostého oka; lupa tedy není vlastně



Obr. 20,1. Dělený kruh s vernierem a lupou.

čtecím přístrojem, který je zároveň i ukazatelem, jak je tomu u čtecího mikroskopu a dalekohledu. U těchto přístrojů je značka, která se při pozorování kryje s určitým místem stupnice, a tak vytváří *optického ukazatele*. Pro přesné čtení na velmi jemných stupnicích se používá *čtecího drobnohledu*, který je v podstatě obyčejný drobnohled [87,I] s mírným zvětšením, jehož optická osa přesně kolmá k rovině stupnice je buď pevná, nebo posouvateľná podél stupnice. Podstatnou částí čtecího drobnohledu je *čtecí značka*, kterou spatřujeme ve středu zorného pole a které užíváme při čtení na stupnici jako ukazatele. Různé druhy značek vidíme na obrázku 20,2, z nichž Z_1 představuje značku čárkovou, tvořenou buď tenkým napjatým vláknem (kovovým, pavučinovým nebo z taveného křemene), nebo jemnou rýskou rytou na skle. Pro fyzikální měření je nejobvyklejší tvar Z_3 , totiž *nitkový kříž*, buď sestavený z vláken, nebo rytý na skle. Ke zvláštním účelům užívá se jako značky buď nonia, nebo krátké stupnice Z_5 , která dělí nejmenší dílek pozorované stupnice na desetiny; nonius nebo stupnice jsou vyryty na skle. Při čtení na stupnici musí její obraz vytvořený objektivem mikroskopu padnout přesně do roviny čtecí značky, aby se vyloučila chyba úkosu. Tento požadavek je splněn, jestliže se při posunutí oka se strany na stranu nemění poloha značky na stupnici. Není-li tomu tak, posuneme nejprve okulár trubici *T. Ok.*, až Z přesně zaostříme, a potom pečlivě zaostříme drobnohled na stupnici, posouvající pastorkem *P* celý tubus *T* (s objektivem *Ob*, se značkou i okulárem), až značku i stupnici vidíme současně co nejostřeji.

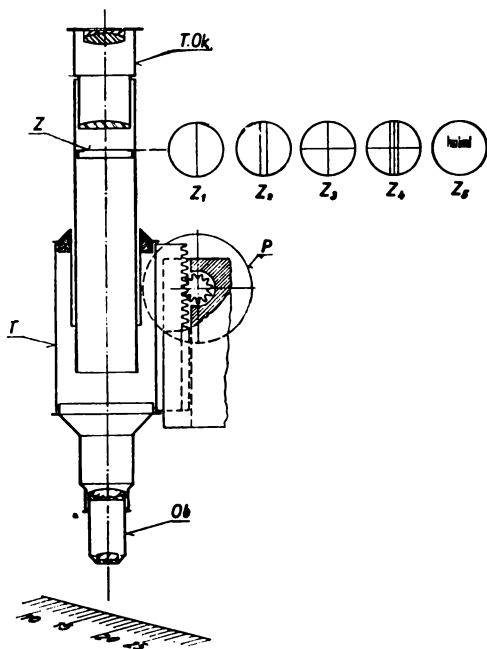
Měřicí mikroskopy pro čtení na vodorovné stupnici bývají pro pohodlnější pozorování často konstruovány s lomenou osou. Podobně jako [20,I] je se-

strojen čtecí dalekohled, který vidíme na snímku 20,3. Postup při zaměřování 20,II je obdobný jako u čtecího drobnohledu: Nejprve namíříme dalekohled proti světlé ploše (zdi, obloze a pod.), zaostříme nitkový kříž posunutím okuláru Ok v malé trubici, a potom teprve pastorkem P zaostříme dalekohled na stupnici.

Zaměřování provádíme tak, že se napřed díváme podél tuby, abychom dalekohled nařídili přibližně do správné polohy pomocí šroubů \check{S}_1, \check{S}_2 . Potom teprve namíříme osu dalekohledu tak, aby stupnice procházela středem kříže, jehož jedno rameno má být rovnoběžné se stupnicí, druhé s dělicími čárkami. O vyloučení úkosu se přesvědčíme, stejně jako u mikroskopu, malým pohybem oka stranou. Doporučuje se zaostřit okulár tak, abychom mohli měřit *neakomodovaným* okem (zařízeným na nekonečno). Jinak se oko zvláště při delším měření zbytečně unavuje, což zhoršuje přesnost čtení. Měřicí dalekohled je dalekohled hvězdářský [88, I] s Ramsdenovým okulárem¹⁾, a proto je obraz převrácený.

Při pozorování, kdy není osvětleno celé zorné pole (na př. při spektroskopii), je nutno vláknovou značku (kříž) zviditelnit. Proto se denní světlo nebo světlo z pomocného zdroje S vrhne postranním otvorem v okulárové trubici na skleněnou destičku D , umístěnou mezi přední čočkou okuláru (kolektivem) a značkou Z . Tato destička, která je skloněna k ose o 45° , odráží světlo, osvětluje značku, ale zároveň propouští paprsky přicházející od objektivu, aniž mění jejich směr.²⁾ Takto upravený Ramsdenův okulár se nazývá okulár Gaussův (obr. 20,4).

Mechanicky vytvořené čtecí značky mají některé nevýhody (neprůhlednost vláken a rysek, obtíže s umístěním mezi obě čočky Huygensova okuláru¹⁾ a pod.). Lze je nahradit také optickými (světelnými) značkami, na př. obrazem světelné značky Z (štěrbiny nebo kříže), vytvořeným v ohniskové rovině okuláru postranní čočkou \check{C} po odrazu na planparalelní skleněné destičce D (obr. 20,5). Pak je možno zaostřovat značku i při Huygensově okuláru, uvnitř něhož leží její virtuální obraz. Okulár se světelnou značkou se dá upravit též pro auto-kolimační metody. Obrátíme-li destičku D do polohy D' a vložíme-li ji mezi



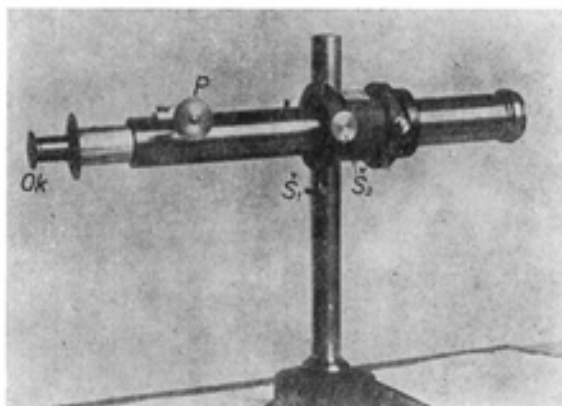
Obr. 20,2. Čtecí drobnohled.

20,III

20¹⁾ TF 6.2.18.

20²⁾ Při dopadu na přesně planparalelní destičku (omezenou přesně rovnoběžnými rovinami) světelný paprsek se jednak odráží, jednak destičkou prostupuje a po dvojném lomu vychází (je-li prostředí s obou stran stejné) jen rovnoběžně posunut. Toto posunutí je u tenké destičky nepatrné a je pro všechny paprsky téhož rovnoběžného svazku stejné, takže nemění vzájemnou polohu stupnice ani čtecí značky (viz TF 6.2.3).

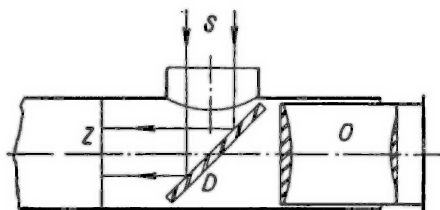
obě čočky okuláru, odráží se část paprsků na zadní ploše kolektivu K okuláru a vstupuje do oka, kterým značku pozorujeme (obr. 20,6). Zbývající paprsky prostupují však čočkou K i objektivem dalekohledu a mohou se pak také odrazit od zrcátka nebo od stěny hranolu (na př. spektrometru, čl. 90,3) a vrátit se zpět. Pak vidíme v zorném poli kromě značky (kříže) také její obraz v zrcátku (ve stěně hranolu). Je-li osa dalekohledu kolmá na zrcátko, kryje se obraz se značkou.



Obr. 20,3. Čtecí dalekohled.

Podobné úpravy lze použít i pro okulár *Ramsdenův*.

20,IV K zvláště přesnému čtení stupnic drobnohledem nebo dalekohledem užívá se místo pevné čtecí značky t. zv. **okulárního (vláknového) mikrometru**. Je to značka složená nejčastěji ze dvou velmi blízkých vláken (viz Z_2 na obr. 20,2), jež se posouvají kolmo k svému přesným šroubem, zvaným mikrometrický, jehož všechny závity mají pokud možno přesně stejnou výšku. Na hlavici (bubínku) šroubu, dělené na 100 dílů, odhadují se tisíciný jedné otáčky,



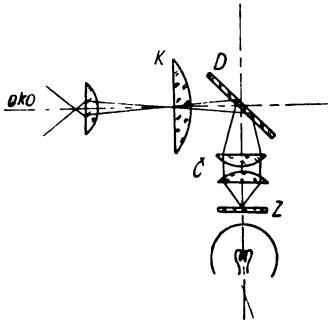
Obr. 20,4. *Gaussův* okulár s osvětlenou značkou.

takže lze polohu značky určit na tisícinu výšky závitu, která bývá rovna na př. 1 mm nebo je tak volena, aby při daném zvětšení mikroskopu nebo dalekohledu byla v určitém vztahu k dílkům pozorované stupnice. U mikroskopu nazývá se délka, jež odpovídá v zaostřovací rovině mikroskopu posunutí dvojitá vláknové značky o výšku závitu, *tárou mikroskopu*. Určí se proměřením známé stupnice, jak popsáno v příkladu v čl. 14. Známe-li výšku závitu, postupujeme

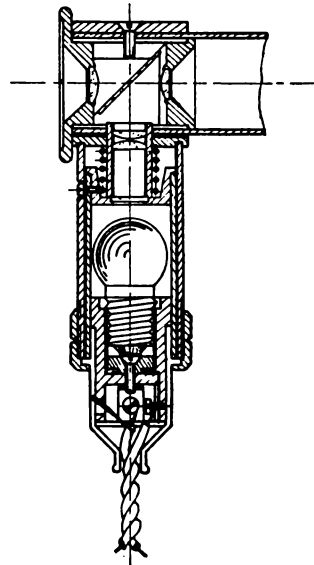
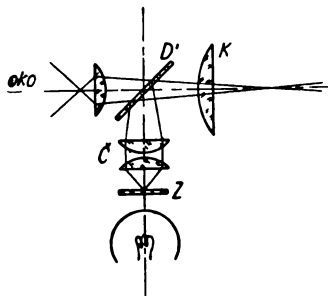
při čtení na stupnici takto: Nařídíme mikroskop (dalekohled) nejprve na ukazatele (tak, aby ležel přesně uprostřed mezi oběma vlákny značky) a čteme údaj na hlavici šroubu. Nato posuneme šroubem značku na nejbližší nižší dílec stupnice a čteme znovu. Rozdíl obou čtení, násobený tárou, dává hledaný zlomek dílku stupnice, který určuje polohu ukazatele. Na obrázku 20,7 vidíme *Zeissův* okulárový mikrometr s orthoskopickým okulárem.

Čtecím dalekohledem lze také měřit malé změny délky nebo úhlu, použijeme-li zrcátkové metody. Její princip je patrný z obr. 20,8, kde je naznačen odraz paprsku dopadajícího ze zdroje S na zrcátko Z tak, aby se odrazil na stupnici n_0 n . Odrazí-li se paprsek od zrcátka při kolmém dopadu do místa n_0 na stupnici, odrazí se od zrcátka uchýleného o úhel φ do bodu n vzdáleného od n_0 o $n - n_0$ dílků a podle zákona odrazu svírá s původním směrem úhel 2φ . Platí tedy vztah

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n - n_0}{R}, \quad (1)$$



Obr. 20,5. Huygensův okulár s virtuální optickou značkou.



Obr. 20,6. Ramsdenův okulár s optickou značkou upravený pro spektrometr:
a — schema; b — skutečné provedení.

značí-li R kolmou vzdálenost zrcátka od stupnice, vyjádřenou v dílcích stupnice (na př. v mm).

Pro malé odchylky φ (do několika stupňů) můžeme psát s dostatečnou přesností $\operatorname{tg} 2\varphi \doteq 2\varphi$, a tedy

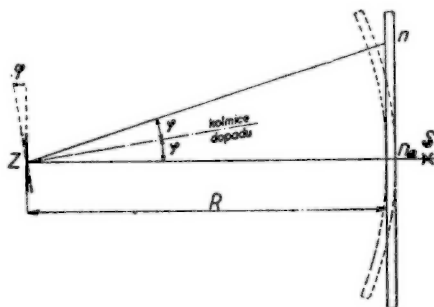
$$\varphi \doteq \frac{n - n_0}{2R}. \quad (2)$$

Je tudíž malé otočení přibližně úměrně odchylce $n - n_0$, kterou můžeme s výhodou měřit čtecím dalekohledem umístěným těsně pod dílkem n_0 stupnice tak, aby jeho optická osa ležela v rovině kolmé k stupnici. Pro laboratorní účely zhotovují se účelně montované dalekohledy se stupnicí (snímek 20,9). Čtecí dalekohled se stupnicí je upevněn na stojánku se třemi stavěcími šrouby; lze jej i se stupnicí posouvat nahoru a dolů pastorkem P a otáčet kolem svislé osy buď volně (hrubý pohyb), nebo po zajištění svěrným šroubem hlavici ustanovky U (jemný pohyb). Dalekohled lze v menších mezích otáčet hlavici H kolem vodorovné osy, která je pevně spojena se stupnicí tak, aby se osa daleko-

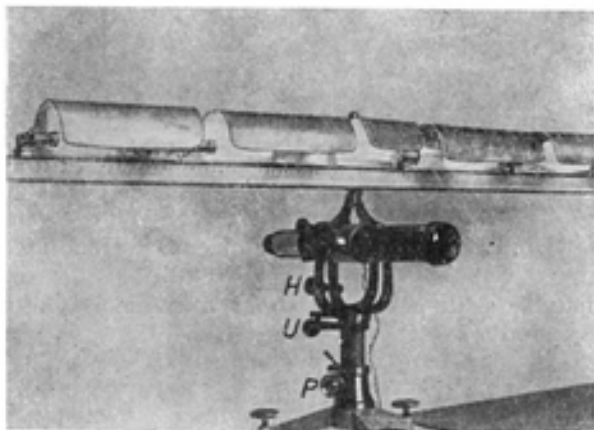
hledu otáčela y rovině kolmé k ose stupnice. Dalekohled nejprve zaostříme přibližně na vzdálenost zrcátka (otáčivého kolem svislé osy), umístěného poněkud nad vodorovnou osou dalekohledu, a pak dalekohled namíříme na zrcátko. Potom zasouváme tubus dalekohledu tak dlouho, až vidíme ostře část stupnice (nebo jiný předmět, na př. ruku, kterou pohybujeme kolem středu stupnice). Potom uvedeme jemným pohybem osu dalekohledu do takové polohy, aby střed



Obr. 20,7. Zeissův okulární mikrometr.



Obr. 20,8. Zrcátková metoda.



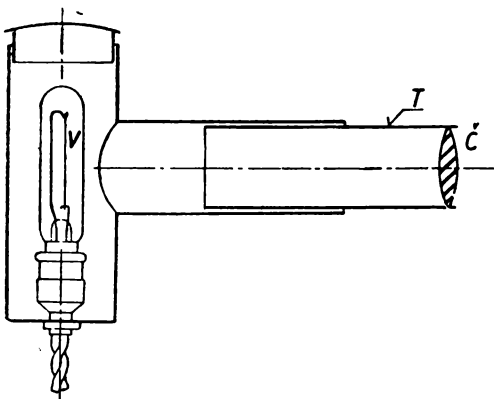
Obr. 20,9. Dalekohled se stupnicí.

kříže ležel na dělení stupnice, a zaznamenáme rysku n_0 . Abychom mohli číst údaje, musí být číslice stupnice jednak převrácené (dalekohled převrací obraz), jednak zrcadlové (odraz zrcátka). Stupnice bývá vhodným způsobem osvětlena, aby osvětlovací žárovky neoslňovaly pozorovatele.

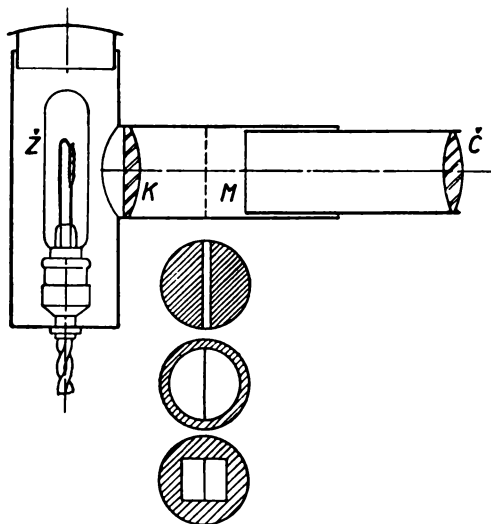
Při delším měření (i když pozorujeme neakomodovaným okem) je pohodlnější pozorovat pouhým okem, a proto se v novější době vždy více používá

místo dalekohledu **značkové lampy**, jejíž nejjednodušší provedení znázorňuje **20,VI** obr. 20,10.

Svítící přímé (svislé) vlákno V žárovky se promítá spojnou čočkou \check{C} , při čemž se jeho obraz zaostří posuvnou trubicí T . Schema jiné úpravy podává obr. 20,11. Zde se projekce žárovkou \check{Z} osvětluje svislá štěrbinová nebo jiná světelná maska M , na př. kruhový otvor přetátý svislým drátem; je výhodné při tom použít kondensoru K pro zvýšení osvětlení. Takovou nebo podobnou



Obr. 20,10. Značková lampa s přímým svítícím vláknem.



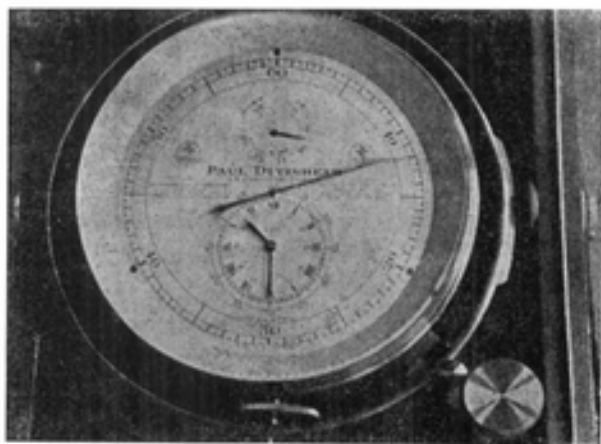
Obr. 20,11. Značková lampa s maskou. Různé typy masek.

lampou vytvořený svazek paprsků vrhne na zrcátko připevněné na pohyblivé ústrojí měřicího přístroje, a to tak, aby se od něho paprsky odrazily na stupnici a na ní vytvořily ostrý obraz značky. Osa stupnice bývá přímá nebo zakřivená do kružnice poloměru R , aby obraz značky zůstal ostrý i při větších výchylkách. Pak platí rovnice 20 (2) přesně pro všechny výchylky. Při tomto zařízení jednak je bezpečně odstraněna chyba úkosu, jednak i malé pohyby se dají převést na značné změny polohy značky na stupnici. Také malé přímočaré posuvy dají se měřit vyloženou methodou, převedeme-li posuv krátkou páčkou na otáčivý pohyb zrcátka.

21. MĚŘENÍ ČASU

Čas měříme ve fyzice v absolutních jednotkách, t. j. ve středních slunečních *vteřinách* (sekundách), které značíme s . Vteřina je dána svým vztahem 3 (3) k střednímu slunečnímu dni a je prakticky určena přesnými kyvadlovými hodinami. Kontrolují se buď přímým astronomickým pozorováním průchodu hvězd poledníkem, nebo podle *vědeckých časových signálů*, pravidelně vysílaných některými vysílacími stanicemi. Je to řada velmi krátkých tónů následujících po sobě v přesně stejných intervalech o málo kratších než doba mezi dvěma tiky

hodin. Takový signál je časová obdoba délkového nonia a lze jím zjistit *stav* hodin, t. j. jejich opoždění proti správnému času s přesností 0,01 s. Z pravidelného srovnávání stavu hodin vypočte se jejich *chod*, který je dán změnou stavu hodin za určitou dobu (na př. za den) a který určuje, jak se liší vteřina hodin od vteřiny správné. Pokud měříme jen rozdíly časových údajů, stačí znát *chod* hodin (nikoliv *stav*). Přesnost hodin nezávisí na velikosti chodu hodin (v jistých mezích), ale na jeho stálosti, kterou posuzujeme podle *kolísání* neboli *variací* chodu. Pro fyzikální měření času používá se různých způsobů



Obr. 21,1. Chronometr fy Ditisheim v Cardanově závěsu.

21,I podle toho, jak dlouhé doby chceme měřit. Pro delší časové intervaly několika hodin nebo většího počtu minut užívá se přesných **chronometrů**, poháněných perem a regulovaných kompenzovaným nepokojem, které mívají za příznivých podmínek denní chod kolem 1 s a denní variaci chodu $0,1 \div 0,3$ s. Na obr. 21,1 vidíme chronometr astronomického ústavu Českého vysokého učení technického v Cardanově závěsu.

21,II Pro kratší doby (asi do 30 min) jsou vhodné rychle jdoucí hodiny, zvané původně *terciové hodiny*,¹⁾ které mají nejčastěji tři číselníky a mohou měřit čas na 0,01 vteřiny. Dnes v laboratořích i v denním životě používané **stopky** jsou vlastně kapesním tvarem terciových hodin. Nejobvyklejší druh mívá dva ciferníky: velký ciferník, dělený na pětiny vteřiny, který proběhne ukazatel za 60 nebo za 30 vteřin, a malý ciferník do 30 minut, dělený po minutách. Prvním stiskem natahovací hlavice stopek uvedou se obě ručičky v chod, druhým stiskem se zastaví a třetím se navrátí do nulové polohy. Kromě stopek rychlejších, na př. s oběhem za 10 s a se stupnicí dělenou na desetiny vteřiny, konstruuji se různé jiné typy s dvojitým ukazatelem, z nichž jednoho lze zastavit, kdežto druhý pokračuje ve svém pohybu. Velmi účelné jsou *registrační stopky* sestavené tak, že velká ručička má na konci jemný otvor, do něhož zasahuje hrot, který při stisknutí zvláštního knoflíku vykoná krátký trhavý pohyb, aniž ručička sama změní svůj běh. Naneseme-li na otvor stopu červeného inkoustu, uvolní se

¹⁾ Toto pojmenování souvisí s tím, že až do doby *Keplerovy* nazývala se 1/60 hodiny „minuta prima“, její 1/60 „minuta secunda“ a její 1/60 „minuta tertia“.

rychlým pohybem hrotu drobná kapička inkoustu a označí na číselníku okamžitou polohu ručičky, což můžeme opakovat znovu a znovu. Tak dostaneme řadu záznamů, které možno pohodlně a přesně číst po skončení měření. Jsou zvláště vhodné pro postupná měření opakovaných dějů.

Při měření stopkami vznikají chyby dvojího druhu: a) *chyby přístroje*, způsobené jeho nedokonalostí, které mohou u obvyklého typu stopek dosáhnout asi $1/5$ s (t. j. doby jednoho tiků); b) *chyby pozorovatele*, který stiskem ovládá ručičky stopek vždy s jistým zpožděním, jež je různé pro různé osoby, závisí též na podmínkách měření a nabývá hodnot 0,08 s až 0,15 s. Celkovou chybu měření doby obyčejnými stopkami můžeme tedy odhadnout asi na 0,3 s. Doporučuje se pracovat stále při dotaženém peru stopek. Kontrolu stopek provádíme obvykle dále popsanými způsoby.

21.1. Kontrola stopek postupnou methodou

Srovnáváme stopky s přesným chronometrem [21,I] nebo kyvadlovými hodinami, měřice trvání několika desítek vteřin chronometru dobou čtenou na stopkách. K tomu je zpravidla zapotřebí dvou pozorovatelů. Jeden dává ostrým poklepem znamení po uběhnutí vždy na př. 30 vteřin chronometru a druhý v okamžiku poklepu čte údaj stopek, aniž jejich chod přeruší. Pro kontrolu registračních stopek stačí jediný pozorovatel. To se opakuje vícekrát, ale tak, abychom měli *celkem sudý počet čtení* na stopkách. Získané hodnoty zpracujeme *methodou postupnou* (konec čl. 18).

Přístroje: Stopky [21,II], chronometr [21,I].

1. Změříme na kontrolovaných stopkách několikrát po sobě vždy týž počet vteřin chronometru tak, abychom měli s jeho počátečním údajem ($t = 0$ na stopkách) sudý počet čtení.

2. Všechna čtení rozdělíme na dvě poloviny a odčítáme postupně jednotlivé údaje stopek první poloviny od údajů druhé poloviny.

3. Z rozdílů takto vzniklých vypočteme průměr a pravděpodobnou chybu postupem 12 (32); tím dostaneme nejpravděpodobnější hodnotu známého počtu vteřin chronometru, vyjádřenou ve vteřinách stopek, a její chybu.

4. Obvykle je chod chronometru zanedbatelný proti chodu stopek, takže výsledek 3 dává poměr vteřiny stopek ke správné vteřině, kterým je určen chod kontrolovaných stopek.

Příklad. Stopky značky Doxa byly srovnávány s chronometrem fy Paul Ditisheim, který měl denní chod + 1,80 s. Stopky byly spuštěny v okamžiku, kdy chronometr ukazoval 10 h 25 min 0 s, a čas byl zapisován vždy po uplynutí 30 vteřin na chronometru, aniž byly stopky zastaveny. Měření skončené v 10 h 34 min 30 s poskytlo tyto hodnoty:

Jedné vteřině chronometru odpovídá $\frac{299,51}{300} = 0,998\ 39$ vteřinového

dílku stopek, tedy vteřinový dílek stopek je roven 1,001 61 s chronometru. Přitom plyne z hořejších hodnot podle 12 (33) pro pravděpodobnou chybu průměru 300 vteřin

$$\bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{18} = \frac{0,37}{18} \text{ s} = 0,021 \text{ s,}$$

takže jedna vteřina stopek je určena s pravděpodobnou chybou $\vartheta_1 = 7 \cdot 10^{-5}$ s. Z denního chodu chronometru je vidět, že vteřina chronometru je delší o

$\frac{1,80}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ s = $2 \cdot 10^{-5}$ s než správná vteřina, a tedy správná hodnota vteřiny stopek je

$$(1,001\ 63 \pm 0,000\ 07) \text{ s.}$$

Čtení		Rozdíly	Δ
0,0	299,4	299,4	+ 0,11
30,0	329,6	299,6	— 0,09
59,8	359,3	299,5	+ 0,01
89,9	389,6	299,7	— 0,19
119,8	419,2	299,4	+ 0,11
149,8	449,3	299,5	+ 0,01
179,6	479,1	299,5	+ 0,01
209,6	509,2	299,6	— 0,09
239,6	539,0	299,4	+ 0,11
269,6	569,1	299,5	+ 0,01
Průměr 299,51 s			$\Sigma \Delta_+ = \Sigma \Delta_- = 0,37 \text{ s}$

Chod chronometru má tedy vliv jen na poslední místo výsledku, při čemž pravděpodobná chyba má hodnotu třikrát větší než jeho chod. Nemuseli jsme tedy k chodu chronometru ani přihlížet a mohli jsme vzít přibližnou hodnotu $(1,0016 \pm 0,0001)$ s.

21.2. Jednoduchá metoda kontroly stopek

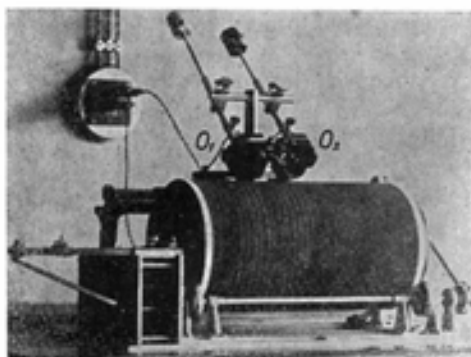
Pro kontrolu stopek se dá použít omezovací metody ve zvláště jednoduchém tvaru, protože chronometr sám počítá své vteřiny. Proto nemusíme postupně zužovat meze přesnosti, nýbrž můžeme prostě změřit na stopkách určitý počet (asi 30) celých minut. K dosažení stejné přesnosti jako metodou 21.1 je třeba delší doby, ale zato stačí počáteční a koncový stisk hlavice stopek. Také je třeba uvážit, že přesnost určení doby stisknutím hlavice je značně větší než přesnost čtení při pohybu ručičky. Tedy při měření 30 minut a při krajní chybě 0,3 s je pravděpodobná chyba $\frac{1}{5} \cdot 0,3 \text{ s} = 0,06 \text{ s}$, a tedy pravděpodobná

chyba jedné vteřiny $\frac{0,06}{1800} \text{ s} = 0,000\ 03 \text{ s}$.

21,III Kromě hodin, které udávají čas okamžitou polohou ukazatele, užívá se ve fyzice *zapisovacích měřičů času*, t. j. *chronografů*. Z velkého počtu různých druhů uvedeme jen hlavní. **Chronograf páskový** zapisuje počátek a konec měřené doby elektromagnetickými nárazy na papírový pásek (podobný telegrafnímu), který se rovnoměrně odvíjí. Pro přesnější měření času a kontrolu rovnoměrného chodu stroje mívá tři zapisující pera; jedno z krajních per vyznačuje výchylkou počátek, druhé konec měřené doby a střední pero je vychylováno elektromagneticky začátkem každé vteřiny kontakty přesných hodin, čímž se zaručuje přesné měření času a kontroluje rovnoměrný běh pásku.

Podobně je zařízen chronograf válcový, u něhož je pásek nahrazen rovnoměrně rotujícím válcem. Záznamy se konají nejčastěji buď hroty na lesklém začazeném papíře, nebo perem a inkoustem, nebo opticky na fotografický papír. 21,IV

V různých případech se regulace hodinového pohonného stroje provádí různými způsoby, ale vždy je třeba rovnoměrný běh kontrolovat současně zapisovanou časovou stupnicí. Pro kratší doby se místo vteřinových impulsů volí elektromagneticky rozkmitaná ladička, která zapisuje sinusoidu svých kmitů



Obr. 21,2. Nušl-Fričov válcový chronograf se dvěma oscilografy O_1, O_2 . Astronomický ústav Českého vysokého učení technického.

na válci nebo na pásku. Na obr. 21,2 je snímek Nušl—Fričova válcového chronografu, jehož chod je regulován kmitající strunou.

Pro měření krátkých a velmi krátkých dob byly sestrojeny různé speciální přístroje. Užívá se přitom na př. volného pádu tyčinky uvolněné elektromagnetem nebo pádu fotografické desky, na kterou se pro přesnější měření zapisují kmity ladičky; podmínkou jsou malé rozměry elektromagnetů, aby zápis nebyl příliš zpožděn. Také se používá rychle rotujícího očázeného válce, na němž se vyznačí počátek a konec děje elektrickou jiskrou, která přeskočí mezi válcem a ostrou jehlou. Stopa jiskry se proměří mikroskopem (*chronografy jiskrové*). Přesnost určení doby je asi 10^{-5} s, jestliže doba měřená je řádu asi 10^{-2} až 10^{-3} s. Pro měření krátkých dob se užívá ve fyzice častěji method čistě elektrických, z nichž uvedeme dvě.

21.3. Měření krátkých dob balistickým galvanoměrem (Pouillet)

Z baterie B (obr. 21,3) se vede proud přes dva vypínače I, II a odpor R do balistického galvanoměru G [67,III], který má značnou setrvačnost a jehož první výchylka při velmi krátkém zapojení proudu (t. zv. balistická výchylka) je úměrná množství prošlého elektrického náboje. Při známé elektromotorické síle baterie a známém odporu R je množství prošlého náboje jistou funkcí času, po který byl proud spojen. Proto i balistická výchylka závisí na době průchodu proudu a z její velikosti je možno tuto dobu zjistit. Theorie vede k dosti složité transcendentní rovnici, a proto je nejbezpečnější hotové zařízení empiricky kalibrovat. Methoda je vhodná k měření dob řádu 10^{-1} s až 10^{-3} s, jako je na př. doba trvání rázu pružných koulí nebo válců.

Přístroje: Balistický galvanoměr [67,III], zdroj stejnosměrného proudu, stálé elektromotorické síly, dva elektrické kontakty, ovládané měřeným dějem.

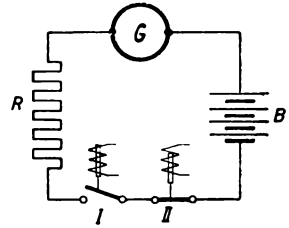
Postup

1. Kontakt *I* buď zařízen tak, aby se spojil při začátku děje, a kontakt *II* nechť je ovládan tak, aby se při skončení děje přerušil.

2. Na počátku budiž kontakt *II* spojen a kontakt *I* přerušen.

3. Při proběhnutí děje čteme balistickou výchylku galvanoměru.

4. Z balistické výchylky vypočteme na základě její závislosti na době průchodu proudu (určené empiricky) dobu trvání děje.



Obr. 21,3. Měření krátkých dob balistickým galvanoměrem.

21.4. Měření velmi krátkých dob methodou kondensátorovou (Radakovič)

Pro měření velmi krátkých dob řádů 10^{-1} s až 10^{-6} s je vhodná metoda, která používá balistického galvanoměru jen nepřímo. Při ději samém vybíjí se kondensátor přes známý odpor a zbytek jeho náboje se určí vybitím přes balistický galvanoměr.

Přístroje: Kondensátor [65,III], balistický galvanoměr [67,III], odpor.

Postup

1. Kondensátor se nabije známým nábojem.

2. Kontakty *I* a *II*, ovládané stejně jako v 21.3 měřeným dějem, obstarají jeho částečné vybití přes známý odpor.

3. Zbylý náboj kondensátoru vybijeme přes balistický galvanoměr.

4. Z jeho výchylky určíme zbytek náboje a ze známého původního náboje náboj vybitý během měřeného děje.

5. Z posledního výsledku určíme podle empirického vztahu dobu trvání děje.

22. TLAK A HUSTOTA VZDUCHU

Tlak ovzduší měříme v jednotkách zvaných *tor* (*Torricelli*). Je to hydrostatický tlak 1 mm vysokého svislého sloupce čisté rtuti při teplotě tuhnutí vody (0°C) a při normálním tíhovém zrychlení ($9,806\ 65\ \text{m s}^{-2}$).¹⁾ Pravíme-li, že měříme tlak v milimetrech rtuti, musíme si být vědomi, že při přesných fyzikálních měřeních atmosférického tlaku je třeba splnit pokud možno všechny podmínky nebo výsledek na ony podmínky přepočítat, což nazýváme *redukcí* neboli *opravou barometrického tlaku* na předepsané poměry. K přesnému fyzikálnímu měření používáme jedině *rtuťových tlakoměrů* (*barometrů*). Jen pro měření přibližná postačí údaje *kovových tlakoměrů*, t. zv. *aneroidů*.

Rtuťové tlakoměry dělíme na čtyři typy:

22,1 Dvouramenný tlakoměr Gay-Lussacův (obr. 22,1) má tu přednost, že obě hladiny mají stejný průměr, a proto by byly v obou ramenech stejné kapilární

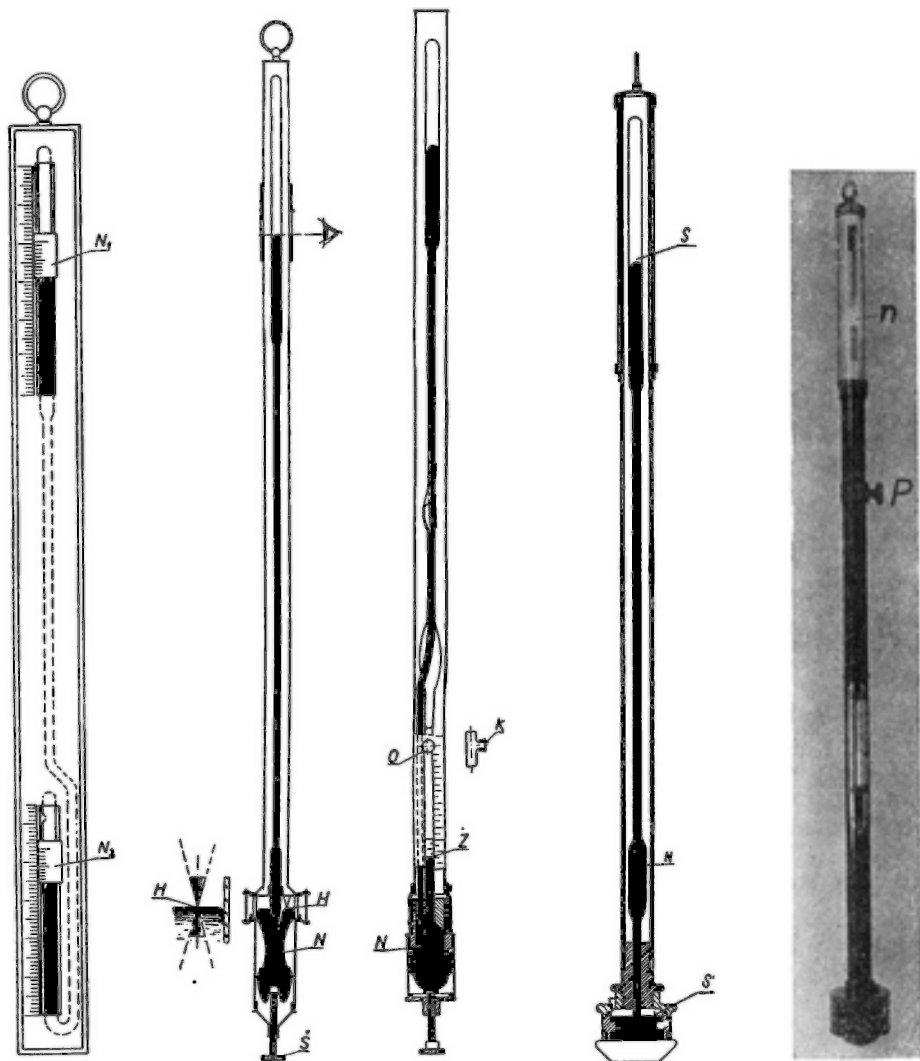
21 ¹⁾ Pro měření atmosférického tlaku se dosud neuzívá jednotky soustavy MKSA, pro kterou platí podle 6 (8') vztah

$$1\ \text{giorgi} = \text{Nm}^{-2} = \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-2} = 76\ \text{tor}.$$

deprese při stejném tvaru menisků. Při změně tlaku se však hladiny v obou ramenech pohybují opačným směrem, takže menisky nejsou stejně vypuklé. Tlak je dán rozdílem výšek obou hladin, měřených nonii N_1 , N_2 .

Nádobkový tlakoměr Fortinův (obr. 22,2) má poslední nevýhodu odstraněnu 22,II tím, že spodní hladinu lze šroubem S zvedajícím kožené dno železné nádoby tak posunout, až se právě dotkne hrotu H , upevněného ve výši počátku stupnice, na níž měříme výšku hořejší hladiny. Nevýhodou je nutnost přihlížet k různé kapilární depresi, která je u širší nádoby menší než u užší trubice.

Normální tlakoměr (obr. 22,3) spojuje přednosti obou předešlých. Jeho 22,III



Obr. 22,1. Dvouramenový tlakoměr.

Obr. 22,2. Nádobkový tlakoměr.

Obr. 22,3. Normální tlakoměr.

Obr. 22,4. Variaceční (staniční) tlakoměr.

Obr. 22,5. Variaceční (staniční) tlakoměr.

nádobka vybíhá totiž nahoře v krátkou trubici, podobnou kratší trubici tlakoměru [22,1], a malý otvor O , jímž souvisí s vnějším vzduchem, lze po měření uzavřít šroubovým kloboučkem K . Kromě toho se po měření popustí dno nádobky, aby hladiny v obou ramenech klesly. Teprve před měřením se zvedne dno tak, aby hladina v kratší trubici vystoupila na nulu stupnice, jejíž poloha je určena pevnou značkou Z . Opravy na kapilární depresi tu není třeba.

22,IV

Variační (staniční) tlakoměr je sestaven na jiném principu než předešlé. Schematicky je znázorněn na obr. 22,4 a jeho vnější úprava je patrna z obr. 22,5. Kdyby na hladinu rtuti v nádobce nepůsobil tlak ovzduší (a kdyby nebylo kapilární deprese), byly by hladiny v trubici i v nádobce ve stejné výši. Působí-li však na rtuť v nádobce atmosférický tlak b mm, stoupne hladina v tlakoměrné trubici o h mm a klesne v nádobce o h' mm, takže

$$b = h + h'$$

a

$$Sh = S'h',$$

značí-li S průřez trubice a S' plochu povrchu rtuti v nádobce (kolem trubice), neboť objem rtuti se při tom nezmění. Měříme-li tedy výšku h sloupce v tlakoměrné trubici od původní společné hladiny ($b = 0$), platí vztah

$$b = h \left(1 + \frac{h'}{h} \right) = h \left(1 + \frac{S}{S'} \right),$$

kde výraz v závorce je konstanta, zvaná *redukční faktor* staničního tlakoměru.

Zkrátíme-li tedy jednotku měřítka stupnice v poměru $1 : \left(1 + \frac{S}{S'} \right)$, bude údaj čtení na stupnici v témže poměru větší, t. zn. bude roven skutečnému rozdílu obou hladin v milimetrech. Stačí tedy k určení tlaku jediné čtení na redukované stupnici. Redukční faktor liší se od 1 obvykle o několik procent.

Dosud jsme mlčky předpokládali, že podmínky plynoucí z definice toru jsou splněny aspoň s přesností, s níž tlak měříme. Obvykle jsou tlakoměry opatřeny vhodným zařízením pro čtení tlaku na 0,1 mm. Takové zařízení vidíme na obr. 22,5. Na horní část tlakoměrné trubice je nasunut mosazný prstenec nesoucí nonius n , jehož počátek (0-tá čárka) leží v rovině spodního okraje prstence. Při měření hledíme vodorovným směrem, takže okraj se nám jeví jako vodorovná úsečka. Hlavicí pastorku P nastavíme prstenec tak, aby se tato úsečka dotýkala vrcholu menisku, a noniem určíme jeho polohu na hlavním milimetrovém měřítku na 0,1 mm. Vhodným postupem při plnění tlakoměru dá se dosáhnout jak náležitě čistoty rtuti, tak dosti dobrého „vakua“, takže nad hořejším meniskem jsou prakticky jen nasycené páry rtuti (nebo stopa vodních par), jejichž tlak za obvyklých teplot lze pomíjet. Poznáme to podle jasného kovového zvuku, který vydává rtuť narážející na zatavený konec trubice při pomalém nachýlení barometru. Vzduchový polštář prozradí se tlumeným zvukem při nárazu. Aby do vakua v trubici nad rtuť nevnikaly ani drobné vzduchové bublinky, bývá ústí trubice v nádobce zúženo v tenkou násosku (N na obr. 22,2,3) nebo je podobné opatření provedeno v trubici nad nádobkou (obr. 22,4). Další podmínka, aby sloupec rtuti byl přesně svislý, musí být splněna s přesností poměrně značnou, i když chceme určit tlak jen s přesností 0,1 mm Hg. Pak totiž nesmí chyba způsobená šikmou polohou měřítka dosahovat 0,05 mm a tedy, jak plyne výpočtem, smí se osa měřítka odchylovat od svislice nejvýše o úhel půl stupně. Je-li tlakoměr zhotoven tak přesně, že

směr osy měřítka je odchýlen od spojnice závěsu s těžištěm barometru o úhel menší než $0,5^\circ$, bude podmínka splněna, dáme-li tlakoměru při zavěšení možnost zaujmout volně svislou polohu.

I když správně určíme výšku rtuťového sloupce v milimetrech, nemáme ještě tlak vzduchu vyjádřen v žádaných jednotkách (tor), které jsou definovány hydrostatickým tlakem milimetrového sloupce čisté rtuti při teplotě 0°C a při normálním zrychlení. Kromě toho uplatňuje se tu ještě vliv *kapilárního tlaku* rtuti. Vliv kapilarity lze zcela pomíjet jen u normálního tlakoměru; u tlakoměru Fortinova a staničního stačí přihlížet ke kapilární depresi hořejšího menisku, protože v širší nádobce je zanedbatelná. Při měření tlaku s přesností 0,1 toru není třeba dbát kapilarity při vnitřním průměru trubice větším než asi 2,5 cm, jinak se určí oprava na kapilaritu rtuti podle tabulky T,V takto:

Zjistíme světlost trubice v místě menisku a odhadneme podle měřítka jeho výšku. Hodnotu uvedenou v tabulce T,V v milimetrech pak přičteme k délce sloupce rtuti. (Oprava činí několik setin až desetin milimetru.) (1)

Za daného tlaku vzduchu je při teplotě $t^\circ\text{C}$ sloupec h rtuti tolikrát vyšší než sloupec h_0 za teploty 0°C , kolikrát je hustota rtuti ρ menší než její hustota ρ_0 při 0°C . Neboť v obou případech musí být hydrostatický tlak rovný atmosférickému, a tedy

$$h\rho g = h_0\rho_0 g. \quad (2)$$

Je-li $\beta = 0,000\ 182^\circ\text{C}^{-1}$ objemová roztažnost rtuti, platí vztah

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \quad (3)$$

neboť hustota je nepřímo úměrná objemu. Měříme-li h v milimetrech, naměříme na měřítku o délkové roztažnosti a tlak b rovný hodnotě

$$b = \frac{h}{1 + at} \text{ [mm]}, \quad (4)$$

nezávislé na roztažnosti trubice, neboť hydrostatický tlak závisí na výšce sloupce, nikoli na objemu rtuti. Předpokládáme ovšem, že stupnice je správná při 0°C , takže $h_0 = b_0$ dává správný tlak v totech. Spojením vztahů (2), (3), (4) plyne²⁾

$$b_0 = b \frac{1 + at}{1 + \beta t} = b [1 - (\beta - a) t]. \quad (5)$$

Měřítka bývá nejčastěji mosazné ($\alpha = 0,000\ 019^\circ\text{C}^{-1}$), takže $(\beta - a) t = -0,000\ 163 t$. Tlak čtený na barometru s mosazným měřítkem za teploty $t^\circ\text{C}$ redukuje se na 0°C , opravíme-li jej o hodnotu

$$\Delta b = -0,000\ 163 bt. \quad (6)$$

Oprava je (pokud měříme nad bodem mrazu) vždy záporná a lze ji pro různé tlaky a teploty dostat trojí interpolací z tabulky T,IV. Měříme-li tlak s přesností 0,1 toru, stačí zaokrouhlit jej na celé milimetry a použít jednoduššího postupu, který vysvětlíme na případu, kdy byl naměřen tlak $b = 744,3$ mm

22²⁾ Druhý tvar dostaneme, násobíme-li čitatele i jmenovatele rozdílem $1 - \beta t$ a zanedbáme-li kvadratické členy $\beta^2 t^2$ a $\alpha\beta^2 t^2$.

při teplotě $t = 18,8$ °C. Interpolujeme v tabulce mezi hodnotami bližšího sloupce, tedy pro $b = 740$ mm,

$$t_1 = 18,0 \text{ °C} \dots \Delta_1 b = -2,17 \text{ mm},$$

$$t_2 = 19,0 \text{ °C} \dots \Delta_2 b = -2,29 \text{ mm},$$

dostaneme podle vzorce 18 (1) nejprve

$$-\Delta b' = 2,17 + \frac{0,8}{1,0} 0,12 = 2,27 \text{ mm}.$$

Hodnoty sloupce $b = 750$ mm liší se od hodnot sloupce $b = 740$ mm v obou řádcích ($t = 18$ °C a $t = 19$ °C) o 0,03 mm, stačí tedy změnit vypočtenou korekci o $\frac{4,3}{10} = 0,43$ tohoto rozdílu, t. j. o 0,013 mm, čímž dostaneme konečnou opravu:

$$\Delta b = -2,28 \text{ mm} \doteq -2,3 \text{ mm}.$$

Vidíme, že záporná oprava činí v našem případě více než 2 mm a ze vzorce (6) plyne, že při průměrném tlaku připadá na 1 °C oprava asi $\frac{1}{3}$ mm. Tohoto redukčního vztahu lze použít při hrubším měření tlaku (na celé milimetry), neboť vzhledem k její velikosti není dovoleno opravu na teplotu pominout ani při menší přesnosti.

Abychom konečně přepočítali výšku b_0 rtuťového sloupce na výšku b_{0n} , která by měla stejný hydrostatický tlak při normálním zrychlení $g_n = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$, uvažme, že

$$b_{0n} \rho_0 g_n = b_0 \rho_0 g,$$

tedy

$$b_{0n} = \frac{g}{g_n} b_0 = \frac{g}{9,80665} b_0 = b_0 - \lambda b_0; \quad (7)$$

zrychlení v daném místě buď přibližně změříme (na př. kyvadlem), nebo najdeme v tabulkách, nebo vypočteme λ podle vzorce 41 (2):

$$\lambda \doteq 2,6 \cdot 10^{-3} (\cos 2\varphi - 1) + 2 \cdot 10^{-7} H, \quad (8)$$

kde φ značí zeměpisnou šířku a H nadmořskou výšku místa v metrech.

V Praze při tlaku 760 mm dává redukce na normální zrychlení hodnotu $b_{0n} = 760,31$ mm, oprava je tedy kladná a má hodnotu 0,3 mm. Proto ji nelze při přesném měření pomíjet.

Způsob měření atmosférického tlaku je tedy se všemi opravami dán těmito předpisy:

22.1. Měření tlakoměrem Gay-Lussacovým [22,I]

1. Na tlakoměr svisle zavěšený mírně poklepeme a čteme na stupnici polohu obou menisků a teplotu rtuť.

2. Odhadneme výšku menisků a světlost trubic a přičteme k oběma předešlým čtením opravu podle tabulky T,V.

3. Rozdíl opravených čtení redukuje dále na 0 °C buď podle (6), nebo interpolací v tabulce T,IV.

4. Výsledek převedeme ještě na normální zrychlení podle (7, 8) (v Praze přičteme 0,3 mm), čímž máme tlak vyjádřen v torech (v mm Hg při 0 °C a při normálním zrychlení).

22.2. Měření tlakoměrem Fortinovým [22,II]

1. Spodním šroubem zdvihneme dno nádoby, aby se vytvořil nový povrch, sahající přesně po hrot ukazatele.
2. Pastorkem posuneme trubici s noniem tak, aby se rovina jejího spodního okraje dotýkala vrcholu menisku. Čteme výšku sloupce b na $1/10$ mm.
3. Z tabulky T,V určíme opravu na kapilární depresi rtuti, kterou přičteme k b .
4. Redukujeme údaj na 0 °C podle (6) nebo podle T,IV.
5. Opravíme na normální zrychlení jako v 22.1, 4.

22.3. Měření normálním tlakoměrem [22,III]

1. Otevřeme otvor dolního ramena.
2. Spodním šroubem zvedneme dolní meniskus přesně ke značce.
3. Čteme výšku sloupce jako v 22.2, 2.
- 4., 5. Redukce na 0 °C a na normální zrychlení jako v 22.2, 4 a 22.1, 4.

22.4. Měření variačním (staničním) tlakoměrem [22,IV]

1. Čteme výšku sloupce jako v 22.2, 2.
2. Opravíme na kapilaritu jako v 22.2, 3.
- 4., 5. Jako v 22.2, 4 a 22.1, 4.

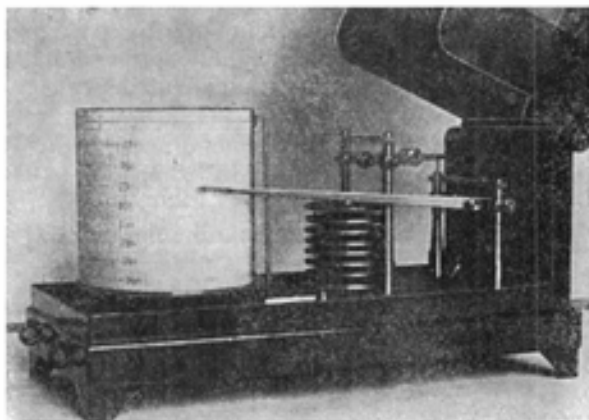
Při fyzikálním měření tlaku vzduchu neprovádíme redukci na hladinu mořskou, neboť potřebujeme znát tlak v místě, kde pokus konáme, ať je v jakékoli nadmořské výšce. Tato korekce činí v našich krajích několik desítek milimetrů, a proto je třeba mít ji v patrnosti i při méně přesném určování tlaku, které při některých měřeních provádíme na t. zv. **aneroidech** (suchých tlakoměrech). Tyto přístroje, ať už *krabicové* (Vidi) nebo *trubkové* (Bourdon), bývají výrobcem upraveny pro účely meteorologické tak, aby ukazovaly tlak převedený na hladinu mořskou. Proto (a také vzhledem k jejich malé přesnosti) je nutno pro fyzikální měření srovnat jejich údaje s údaji přesného barometru rtuťového (opravenými, jak jsme již řekli) a korekčním šroubem (umístěným na zadní stěně) justovat je tak, aby udávaly skutečný tlak. Jejich přesnost bývá asi 0,5 mm Hg. Podobně je tomu i u přístrojů zapisujících tlak, t. j. u **barografů**, nejsou-li to registrační přístroje rtuťové. Nejběžnější je typ vyráběný pařížskou firmou J. Richard, jehož snímek podává obr. 22,6. Je to v podstatě krabicový aneroid, jehož citlivost je zvýšena tím, že několik (na př. 8) značně vyčerpaných krabic s vlnitými stěnami je postaveno nad sebou. Jejich proměnné deformace se tak sčítají a pákovým zařízením ve zvětšeném měřítku přenášejí na pero, které zapisuje průběh tlaku na válec otáčivý kolem svislé osy. Válec je potažen papírem se sítí časových a tlakových souřadnic a po týdnu se vymění.

22,V

22,VI

U tohoto přístroje provádí se justace šroubem umístěným pod základní deskou přístroje v ose tlakoměrných krabic. Pro přesnou registraci tlaku barografem se doporučuje sestavit korekční tabulku.

§ Při mnohých měřeních potřebujeme znát hustotu vzduchu. Lze ji ovšem určit přímým měřením (srov. 36.8) jako hustotu jiných plynů, ale dá se rychleji a pohodlněji zjistit z tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu. K určení hustoty suchého vzduchu lze použít tabulky T, III, ale vzduch v přírodě i v laboratoři obsahuje vždy jisté množství vodních par, kterým je určena jeho vlhkost (viz čl. 61). Tlak vlhkého vzduchu je podle *Daltonova* zákona dán součtem tlaku



Obr. 22,6. Barograf fy Richard.

suchého vzduchu a tlaku v něm obsažené vodní páry. Tlak neboli napětí e vodní páry je pak úměrně jejímu množství obsaženému v daném objemu a na základě této úměrnosti je můžeme vypočítat z poměrné (relativní) vlhkosti φ_{rel} vzduchu podle vztahu

$$\frac{e}{E} = \varphi_{\text{rel}} \quad \text{nebo} \quad e = \frac{\varphi_{\text{rel}}}{100} E.$$

Stačí tedy změřit relativní vlhkost vzduchu φ_{rel} , najít v tabulce T, XI napětí E nasycených par pro danou teplotu a dosadit do předešlé rovnice. Abychom určili hustotu vlhkého vzduchu δ , musíme k hustotě vzduchu suchého δ^* přičíst hustotu vodní páry. Vypočteme ji nejprve pro normální stav (0°C , tlak 760 torů) z *Avogadrova* zákona, který praví, že kilogrammolekula každého plynu má v normálním stavu objem $22\,421\text{ l} = 22,421\text{ m}^3$. Molekulární hmota vodní páry je $2 \times 1 + 16 = 18$ a její kilogrammolekula (1 kmol) má tedy 18 kg. Pak hustota vodní páry při 0°C a za tlaku p' torů

$$e = \frac{18\text{ kg}}{22,421\text{ m}^3} \cdot \frac{p'}{760} = e_0 \frac{p'}{760}, \quad e_0 = 0,803\text{ kg/m}^3,$$

kdežto pro hustotu suchého vzduchu za normálních podmínek naměříme

$$\delta_0^* = 1,293\text{ kg/m}^3, \quad \text{takže} \quad e_0 = 0,62 \delta_0^*. \quad (9)$$

Hustotu obou plynů za jiných podmínek vypočteme ze stavové rovnice (*Boyle—Gay-Lussacův* zákon)

$$pV = RT. \quad (10)$$

Položíme-li sem $p = p_0 = 760$ torů, $T = T_0 = 273,15$ °K, dostaneme dělením

$$\frac{p}{p_0} \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

a zavedeme-li hustotu podle vztahu

$$\delta^* : \delta_0^* = \frac{1}{V} : \frac{1}{V_0},$$

bude

$$\delta^* = \delta_0^* \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} = \delta_0^* \frac{p}{760} \frac{273,15}{273,15 + t}. \quad (11)$$

Pro suchý vzduch máme $p = b - e$ a pro vodní páru $p' = e$, takže platí vztahy

$$\delta^* = \delta_0^* \frac{b - e}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0,003\ 66t},$$

$$e = e_0 \frac{e}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0,003\ 66t}.$$

Hustota vlhkého vzduchu δ je konečně rovna součtu hustot obou plynů, což dává vzhledem k (9)

$$\delta = \delta_0^* \frac{b - e + 0,62e}{760 + 2,78t} = 1,293 \frac{b - 0,38e}{760 + 2,78t} \text{ kg/m}^3. \quad (12)$$

Tento vzorec ukazuje, že můžeme počítat hustotu vlhkého vzduchu jako hustotu suchého vzduchu z Boyle—Gay-Lussacova zákona (10) s podmínkou, že vzhledem k menší hustotě vodní páry zmenšíme jeho tlak o 38% napětí vodní páry v něm obsažené. Vzhledem k tomu, že e bývá malé proti b , můžeme činitele 0,38 nahradit zlomkem $3/8$ ($= 0,375$). Rychleji než z (12) plyne δ z tabulky T, III pro tlak $p = b - \frac{3}{8}e$.

23. MĚŘENÍ TEPLoty

Definice. 1. Dvě části hmoty mají stejnou teplotu, nedochází-li k výměně tepelné energie jejich společným rozhraním. 2. Absolutní teplota dokonalého plynu je úměrná jeho vnitřní energii (úhrnné pohybové energii jeho molekul). Definicemi 1. a 2. je stanovena t. zv. *thermodynamická teplotní stupnice pro libovolnou látku*.¹⁾

Jednotky. Absolutní jednotkou je *stupeň Kelvinův* (°K), t. j. setina rozdílu teploty varu a teploty tuhnutí čisté H₂O (za normálního tlaku), měřeného v thermodynamické stupnici. Přesná měření vedla k výsledku, že normálnímu bodu tání ledu přísluší v thermodynamické stupnici teplota 273,16 °K, určená s přesností asi $\pm 0,02$ °K.

Praktickou i mezinárodní jednotkou teploty je *stupeň Celsiův* (°C), definovaný jako setina rozdílu teplot normálního bodu varu a bodu tuhnutí čisté vody, měřeného v mezinárodní teplotní stupnici.

23 ¹⁾ Srov. čl. 3.

Mezinárodní stupnice je založena na 7 základních bodech určených teplotami tání nebo varu některých prvků tak, že těmto teplotám jsou přisouzeny dané body stupnice vyjádřené ve stupních Celsiových. Teplota mimo tyto body se měří v určitém rozmezí jednoznačně předepsaným způsobem odporovým teploměrem [23, VII] nebo thermočlánekem, nebo se počítá z monochromatické zářivosti dokonale černého tělesa podle *Planckova* vyzařovacího zákona, jak je podrobněji vyznačeno v přehledné tabulce I. Při tom je závislost odporu platinového teploměru na teplotě vyjádřena mnohočlenem 2. nebo 3. stupně s konstantami, které se určí měřením odporu při teplotách daných základních bodů (které jsou v tabulce označeny šipkami). Tak na př. teploty mezi bodem tání ledu, jemuž je definicí přiřazena teplota $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, a mezi bodem tání antimonu se měří platinovým teploměrem, jehož odpor se vyjádří jako kvadratická funkce teplot (geometricky daná částí paraboly) ve stupních Celsiových a tři konstanty této funkce (R_0 , A , B) se vypočtou měřením odporu platinové cívky teploměru při teplotě tajícího ledu t_0 , při normálním bodu varu vody t , a při normálním bodu varu síry t_2 , kterým předem přiřadíme teploty $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $444,60\text{ }^{\circ}\text{C}$. Takto cejchovaným teploměrem změříme pak teplotu tání antimonu (která nesmí být nižší než $630,3\text{ }^{\circ}\text{C}$). Tím dostaneme další základní bod t_3 , od něhož počínaje až do bodu tání zlata měříme teplotu thermočlánekem spojeným z platiny a platino-rhodia [23, XI]. Konstanty a , b , c závislosti thermoelektrické síly na teplotě se určí rovněž ze tří známých teplot t_3 , t_4 , t_5 . Od teploty $1063,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ výše se počítá teplota z poměru monochromatické zářivosti (E_λ) _{t} černého tělesa, změřené při zmíněné teplotě t , a ze zářivosti (E_λ) _{t_3} téhož tělesa při teplotě tání zlata, a to podle vzorce uvedeného v tabulce I. Teploty mezi $-190\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ se měří rovněž odporovým platinovým teploměrem, ale za předpokladu závislosti třetího stupně, jejíž další konstanta C se určí měřením odporu při teplotě varu kyslíku.

Teploty tání při obvyklých malých změnách atmosférického tlaku jsou prakticky stálé, avšak body varu závisí na tlaku, a to různým způsobem pro různé látky. K tomu je třeba mít zřetel při kontrole teploměru, a proto jsou tyto vztahy ve zvláštní tabulce T, IX spolu s jinými t. zv. sekundárními základními body, jichž se používá při měření odporovými a thermoelektrickými teploměry.

Jak se od této internacionální stupnice odchyluje absolutní stupnice thermodynamická a normální stupnice vodíková, je zřejmo z grafu 23, 1, kde plná čára dává odchylky absolutní stupnice a čárkovaná křivka odchylky normální stupnice od stupnice platinového teploměru v rozsahu od $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vidíme, že se vodíková stupnice lépe přimyká theoretické absolutní stupnici (odchylky nepřesahují $0,003\text{ }^{\circ}\text{C}$), avšak měření vodíkovým teploměrem [23, I] není přijatelné pro praxi. Největší odchylka mezinárodní stupnice od thermodynamické činí $0,007\text{ }^{\circ}\text{C}$ (při $70\text{ }^{\circ}\text{C}$), kdežto mezi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ odchylky nedosahují dvou tisícín stupně. $\frac{7}{8}$

Přístroje

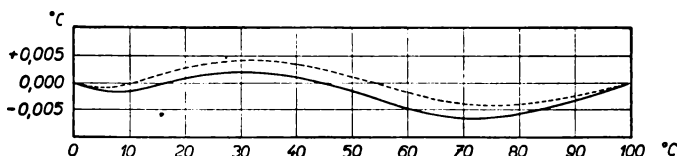
Přístroje, jimiž měříme teplotu — *teploměry* (správně „teplotoměry“), *thermometry*, pro vyšší teploty *žároměry* neboli *pyrometry* — měří různé veličiny závislé na teplotě. Nejrozšířenější jsou hlavně tyto druhy teploměru: Dilatační teploměry jsou založeny na změně délky nebo objemu pevných látek, kapalin, plynů (u plynů se dává přednost měření změny tlaku při stálém objemu). Odporové teploměry měří změny teploty změnami elektrického od-

Tabulka 23, I. Základní body mezinárodní teplotní stupnice při normálním tlaku (Péard 1949)

<p>Bod varu kyslíku $t_{-1} = -182,97$</p>	<p>Bod tání ledu $t_0 = 0$</p>	<p>Bod varu vody $t_1 = 100$</p> <p>Bod varu síry $t_2 = 444,60$</p>	<p>Bod tání antimonu $t_3 > 630,5$</p>	<p>Bod tání stříbra $t_4 = 960,8$</p>	<p>Bod tání zlata $t_5 = 1063,0$</p>		
<p>↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑</p>							
<p>↑ ↓</p> <p>Odporový teploměr platinový</p> <p>$R = R_0 [1 + At + Bt^2 + Ct^3 (t - 100)]$</p> <p>$R_0, A, B$ jako mezi t_0 a $t_5 C$ je dáno měřením R při t_{-1}</p>		<p>↑ ↓</p> <p>Odporový teploměr platinový</p> <p>$R = R_0(1 + At + Bt^2)$</p> <p>R_0, A, B jsou dány měřením R při t_0, t_1, t_2 a hodnota t_3 se určí na tomto teplotním měřu</p>		<p>↑ ↓</p> <p>Thermočlánek $Pt \leftarrow (90\% Pt + 10\% Rh)$</p> <p>$E = a + bt + ct^2$</p> <p>$a, b, c$ jsou dány měřením termoelektr. síly při t_3, t_4, t_5</p>		<p>↑ ↓</p> <p>Planckův zákon vyzářovací</p> <p>$\frac{(E\lambda)_t}{(E\lambda)_{t_5}} = \frac{\frac{c_1}{e^{1336,15^\circ \lambda}} - 1}{\frac{c_2}{e^{(t+273,15^\circ)\lambda}} - 1}$</p> <p>$c_2 = 1,438 \text{ cm } ^\circ C$</p> <p>$\lambda = \text{délka vlny v } \text{Å}$</p>	

poru kovů (hlavně platiny). Thermoelektrické teploměry jsou založeny na thermoelektrickém napětí, které vzniká rozdílem teplot spájených spojů dvou různých kovů. Optické žároměry srovnávají teploty (asi od 600 °C) podle viditelného záření vysílaného žhavými látkami. Konečně lze využít vlastnosti některých látek, měnit barvu s teplotou. Na této vlastnosti a na jiných jsou založeny t. zv. thermoskopy, které informují o dosažení jistých teplot.

23,1 V dalším výkladu podáme popis hlavních druhů teploměrů. Z *plynových* teploměrů je nejdůležitější **vodíkový teploměr**, který měří teplotu přímo



Obr. 23,1. Průběh odchylek thermodynamické stupnice (—) a vodíkové stupnice od mezinárodní teplotní stupnice mezi 0 °C a 100 °C.

v normální vodíkové stupnici na základě změn tlaku při stálém objemu. Podle zákona o rozpínavosti plynů roste tlak plynů při stálém objemu skoro přesně lineárně s teplotou (je úměrný absolutní teplotě měřené od $-273,16$ °C). Vodík splňuje tento zákon ze všech plynů kromě helia²⁾ nejpřesněji. Na obr. 23,2 je náčrt přesného vodíkového teploměru (*Chappuis*). Platinoiridiový válec *G* je spojen velmi tenkou platinovou trubičkou *cd* s trubicí *m'*, ústící přepážkou *P* do trubice *n*, jež souvisí kohoutem *o* s trubicí *m*. Tato trubice (otevřená) je naplněna rtutí, do níž zasahuje barometrická trubice *B* s Torricelliho vakuem. Při změně teploty vodíku v *G* se reservoar *R* se rtutí, spojený ohebnou ocelovou trubičkou s *m*, posune tak, aby hladina rtuti v *n* byla přesně v původní poloze (stálý objem!), a pak se kathetometrem [32,1] změří výškový rozdíl menisku v *B* a *s*, který udává tlak plynu. Otevřená trubice *m'* se rtutí, nasazená na *P*, je spojena s *m* a umožňuje měřit zároveň barometrický tlak. Teplota *t* °C se počítá z tlaku *p* plynu podle vztahu

$$p = p_0 (1 + \gamma t), \quad (1)$$

kde

$$\gamma = \frac{p_{100} - p_0}{100p_0}$$

je rozpínavost vodíku, určená tlakem p_0 při teplotě tání ledu a tlakem p_{100} při normální teplotě varu vody.

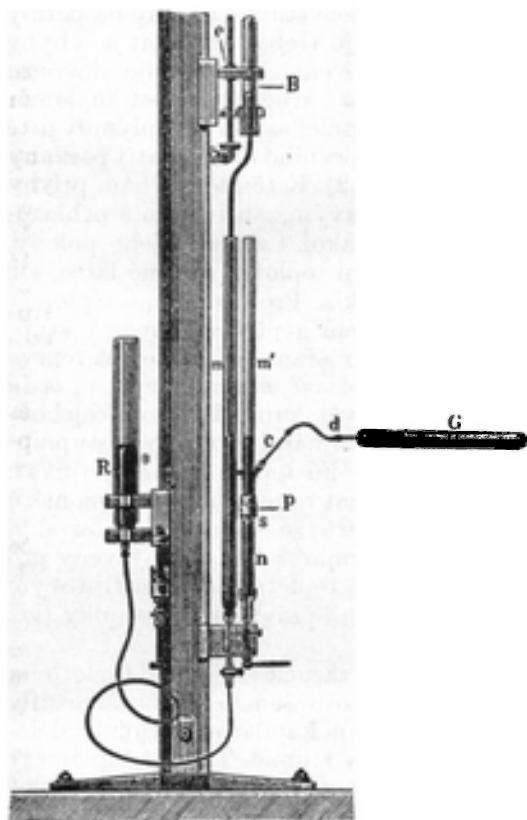
Z dilatačních teploměrů kapalinových se používá pro nízké teploty (pod -39 °C) teploměrů plněných ethylalkoholem, toluenem, pentanem a j., pro teploty od -39 °C do 250 °C teploměrů rtuťových s vakuem a pro vyšší teploty (asi do 550 °C) rtuťových teploměrů se stlačeným dusíkem, aby se zabránilo destilaci nebo dokonce varu rtuti (bod varu Hg 356,9 °C). Jejich kapiláry musí být z borokřemičitého skla (těžko tavitelného) nebo z taveného křemene, který dovoluje zvýšit tlak na 60 atm a rozšířit rozsah rtuťového teplo-

²⁾ Ažkoliv je vodík nejlehčí plyn, je helium „dokonalejší“ plyn, ježto jeho molekuly jsou jednoatomové, molekuly vodíku však dvouatomové. Vodík byl zvolen za základ normální stupnice v době, kdy helium ještě nebylo známo.

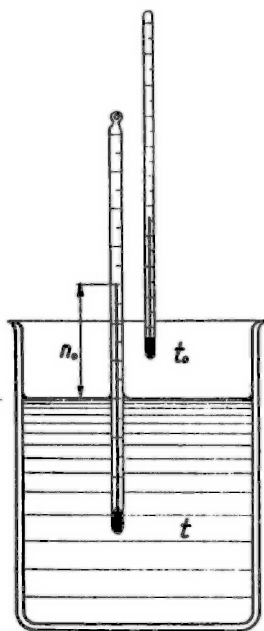
měru asi do 750 °C. Podle novějších pokusů zvyšuje křemenná kapilára přesnost rtuťových teploměrů, hlavně neproměnnost nulového bodu. Za nejvýhodnějších okolností lze dosáhnout teploměrem se skleněnou kapilárou přesnosti asi 0,003 °C, s kapilárou křemennou 0,001 °C až 0,002 °C.

Rtuťové teploměry se vyrábějí v dvojí úpravě. Přesnější jsou teploměry s tlustostěnnou kapilárou, na níž je přímo vyryta stupnice. Lépe se čte na teploměrech s tenkostěnnou kapilárou, připevněnou na stupnici z mléčného skla a uloženou v ochranné trubici; jsou však méně přesné. Teploměry jsou cejchovány tak, aby udávaly správnou teplotu ve svislé poloze, jsou-li zcela obklo-

23,II



Obr. 23,2. Vodíkový teploměr Mezinárodního ústavu měr a vah v Sèvres z r. 1888 (podle Strouhalovy Thermiky).



Obr. 23,3. Oprava na vyčnívající sloupec.

peny měřenou lázní. Není-li tomu tak, je nutno opravit čtení teploměru o hodnotu, o kterou se změní délka sloupce, když jeho část odpovídající n stupňům má jinou teplotu než ostatní rtuť ponořená do lázně. Je-li β_1 objemová roztažnost rtuti a β_2 objemová roztažnost skla, tedy relativní (zdánlivá) roztažnost rtuti proti sklu $\beta = \beta_1 - \beta_2$, zkrátí se ochlazením o τ stupňů sloupec délky l cm o délku $l\beta\tau$. Pripadá-li na délkový cm trubice n_1 stupňů, je délka sloupce ve stupních $n = ln_1$ a zkrácení sloupce odpovídá zmenšení čtení o $n_1 l\beta\tau = n\beta\tau$. Je-li tedy t_0 okolní teplota, kterou měříme pomocným teploměrem uprostřed vyčnívajícího sloupce (obr. 23,3) pak

oprava rtuťového teploměru na sloupec, vyčnívající z lázně teploty t o délku n stupňů do prostředí teploty t_0 , je ve stupních (2)

$$\Delta t = 0,000\ 16n (t - t_0),$$

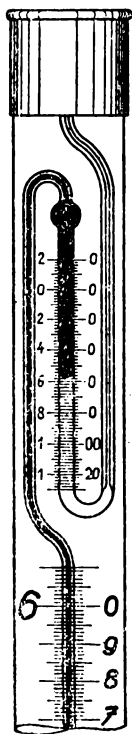
neboť $\beta_1 = 0,000\ 182\ ^\circ\text{C}^{-1}$, $\beta_2 = 0,000\ 025\ ^\circ\text{C}^{-1}$ (pro jenské sklo), takže $\beta = 0,000\ 157\ ^\circ\text{C}^{-1} = 0,000\ 16\ ^\circ\text{C}^{-1}$. Oprava je kladná, měříme-li teplotu vyšší, než je teplota okolí; v opačném případě je záporná.

Nejčastěji jsou rtuťové teploměry děleny na celé stupně (někdy na pětiny nebo i desetiny) a *odhadujeme desetiny*. Při tom je třeba vystříhat se chyby úkosu: pozorujeme raději z větší vzdálenosti, event. lupou nebo dokonce dalekohledem. Tím ovšem nejsou desetiny stupně zaručeny, neboť teploměr má svoje vlastní chyby. Tyto chyby jsou jednak stálé, aspoň po uplynutí jisté doby od zhotovení, jednak proměnné. Mezi chyby prvního druhu patří *posunutí základních bodů a nestejnoměrnost kapiláry* (viz 23.2). K těmto chybám přistupují ještě dočasné změny, způsobené hlavně střídavým zahříváním a ochlazováním teploměru, zvláště při větších rozdílech, jakož i změnou jeho polohy. Proto je nutno při měření nejen vyčkat vyrovnání teplot v měřené látce, ale také v teploměru vzhledem ke značné hysterese skla. Proto se nemá teploměr zbytečně vyhřívat na vyšší teplotu (zásadně ovšem nepřekročit rozsah stupnice teploměru), a stane-li se tak, lze ho použít k měření nižších teplot teprve po uplynutí asi jednoho dne, až pomine t. zv. *dočasné snížení* (deprese) *bodů mrazu*. Proto je nutno rtuťové teploměry kontrolovat; provádí se to v cejchovních ústavech. Teploměry, jejichž odchylky od normální (vodíkové) stupnice jsou zjištěny, nazývají se *normální*. Každý normální teploměr má certifikát, v němž jsou tyto odchylky, takže je možno určovat opravy jiných teploměrů srovnáním s teploměrem normálním. U teploměrů ze stejného druhu skla bývají odchylky od normální stupnice přibližně stejné a bývají sestaveny pro některá skla v tabulku; podle ní je možno každou teplotu měřenou rtuťovým teploměrem opravit na teplotu normální přičtením opravy podle tabulky (viz tabulka T,X).

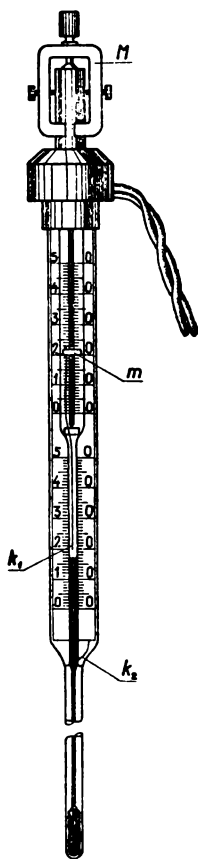
23,III Ani při pečlivém měření není snadno opravdu zaručit změřenou teplotu na $0,1\ ^\circ\text{C}$ nebo dokonce na $0,01\ ^\circ\text{C}$. S větší bezpečností lze ovšem měřit menší rozdíly teplot; k tomu používáme teploměrů s velmi tenkou kapilárou a stupnicí dělenou po $0,01\ ^\circ\text{C}$, takže je možno odhadovat tisícinu stupně. Takové teploměry však nemohou mít velký rozsah, a proto je nutno použít pro každý obor teplot jiného teploměru nebo teploměru s volitelným rozsahem, který se nazývá *přestavný (metastatický) teploměr (Beckmann)*. Je to citlivý teploměr s malým rozsahem několika (šesti) stupňů, který je však možno *přestavit* pro obor teplot, který právě potřebujeme. Jeho velmi úzká kapilára vyběhá nahoře v širší trubičku zahnutou svisle dolů, načež pokračuje původním směrem vzhůru (obr. 23,4). Zahřejeme-li teploměr na teplotu asi o $7\ ^\circ\text{C}$ vyšší, než je střed oboru, který chceme měřit, přejde část rtuti do širší zpětné trubičky, odtrhne se však od vlákna v kapiláře teprve otřesem, který způsobíme na př. úderem do zápěstí ruky, v níž držíme svisle teploměr; tím je rozsah teploměru nastaven na žádaný obor teploty. Překlopením teploměru (podle potřeby s otřesem) spojí se odtržená rtuť opět se zbývajícíím vláknem, je-li ovšem teploměr zahřát tak, aby vlákno sahalo až na kraj zpětné trubičky. Pro snazší nastavení rozsahu je na této trubičce jemná stupnice, na které nám spodní okraj rtuti připravené k odtržení ukazuje teplotu, jež bude odpovídat nule teploměru po přerušení vlákna odpadnutím rtuti v trubičce. Na obr. 23,4 je stupnice dělena po 2 stup-

ních od $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $130\text{ }^{\circ}\text{C}$. Nedoporučuje se tyto meze podstatně překračovat.

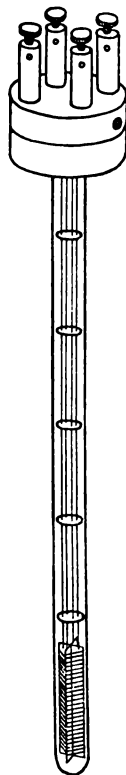
K tomu je třeba poznamenat, že při nastavení rozsahu na vyšší teploty měříme změnu objemu menšího množství rtuti. Přestavný teploměr je správný, když jeho nulový bod odpovídá $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Má-li nulový bod odpovídat teplotě $\tau\text{ }^{\circ}\text{C}$, musíme vlákno zkrátit o sloupec obsažený mezi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $\tau\text{ }^{\circ}\text{C}$, takže teploměr ukazuje místo správné teploty t teplotu nižší o $\beta\tau$ stupňů, kde β je relativní roztažnost



Obr. 23,4. Přestavný teploměr.



Obr. 23,5. Spínací teploměr rtuťový.



Obr. 23,6. Platinový odporový teploměr.

rtuti proti sklu, jak plyne z úvahy při odvozování věty (2). Naměřený rozdíl $t - t_0$ je tedy nutno zvětšit o opravu

$$\Delta(t - t_0) = 0,000\ 16\tau(t - t_0), \quad (3)$$

vyjádřenou stejným výrazem jako oprava na vyčnívající sloupec ve větě (2).

Z pevných látek užívá se k měření teploty především kovů, nejčastěji tak, že se svaří po délce proužky dvou kovů různé roztažnosti v jediný útvar (bi-metal, dvoukovový pásek, dvoukov), který se při změně teploty zakříví. Na tom je založen

dvoukovový (bimetalický) teploměr, u něhož se změna tvaru dvoukovu přenáší na ukazatele udávajícího teplotu na kruhové stupnici. Pro fyzikální měření jsou dvoukovové teploměry většinou málo přesné.

23,IV Spínací (kontaktní) teploměr. Často jsme postaveni před úkol udržovat v nějakém prostoru předepsanou stálou teplotu nebo aspoň chceme být upozorněni, jakmile teplota dosáhne (shora nebo zdola) předepsané meze. K tomu se zhotovují spínací teploměry rtuťové nebo kovové. Pro přesnější ovládání (regulování) teploty je vhodnější první druh. Má mezi nádobkou a stupnicí jeden zatavený platinový drátek, druhý platinový nebo wolframový drátek se posouvá v kapiláře, a přitom je ve stálém vodivém spojení s druhým elektrickým kontaktem, zataveným nad stupnicí. Vystoupí-li rtuť na stupnici tak vysoko, že se dotkne posuvného drátku, spojí vodivě oba kontakty a zapojené relé obstará žádaný úkon. Nastavení posuvného dotyku se děje magnetem, a proto je u teploměru druhá škála, umístěná nad vlastní teploměrnou stupnicí a s ní shodná. Užívá se dvojího způsobu. Při prvním je drátek na horním konci připevněn k železné tyčince (někdy obalené sklem, jako u známých maximum-minimálních teploměrů), která se posouvá podkovovým magnetem přiloženým k trubici; při tom horní konec tyčinky — podle něhož se kontakt nařizuje — má od dolejšího konce drátku vzdálenost právě rovnou vzdálenosti obou stupnic. Přesnější nastavení dotykového drátku umožňuje druhý způsob (obr. 23,5) tím, že horní konec drátku je připevněn k matičce m nasazené na vřeteně šroubu, který je veden podél celé hořejší stupnice. Šroub se ovládá podkovovým magnetem M , který se nasadí na hlavici teploměru, již jsou také vyvedeny izolované přívody dotyků k_1 a k_2 . Otáčením se posouvá matička m , která je v trubici tak uložena, aby se neotáčela se šroubem.

23,V Rtuťových spínacích teploměrů používá se v laboratorických hlavně u elektricky vytápěných thermostatů k samočinnému udržování předepsané teploty, kdežto spínacích teploměrů kovových na principu buď dilatačním, nebo dvoukovových pásků (bimetalů) spíše pro lázně mající udržovat stálou teplotu.

23,VI Thermografy (samopisné neboli registrační teploměry) sestavují se v podobné úpravě jako samopisné tlakoměry [22,VI]. Užívá se buď *Bourdonovy* trubice eliptického průřezu (jako u manometrů), naplněné kapalinou, která při změně teploty mění objem a tím i tvar trubice, nebo dvoukovového pásku, svařeného ze dvou kovů různé teplotní roztažnosti jako u dvoukovového teploměru.

Pohyb konce trubice nebo dvoukovového pásku se mechanicky zvětšuje a přenáší na dlouhého ukazatele, písčícího na válci poháněném perem. (Srovn. snímek barografu 22,6).

23,VII Odporový teploměr je založen na změně elektrického odporu kovů s teplotou. Odpor ryzích kovů roste s teplotou přibližně lineárně podle vztahu

$$R = R_0 (1 + at), \quad (4)$$

kde teplotní koeficient a se neliší mnoho od hodnoty $0,004 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (o málo větší než koeficient roztažnosti plynů $\gamma = 0,0037 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). Při přesnějším měření a pro větší obor teploty je nutno předpokládat závislost vyššího stupně, nejčastěji kvadratickou:

$$R = R_0 (1 + At + Bt^2). \quad (4')$$

Konstanty R_0 , A , B se určí tak, že se změří odpor při třech teplotách (definovaných body tání nebo varu, tabulka T, IX, nebo zjištěných na př. normálním

teploměrem) a teplota t se pak vypočte ze změřeného odporu řešením rovnice (4) nebo (4'). Také ji lze najít graficky z narýsované paraboly (4') jako úsečku t bodu o pořadnici R .

Pro měření se používá nejčastěji *platinového* teploměru, naznačeného na obr. 23,6. Velmi tenký drát z ryzí platiny je bifilárně navinut na isolační hmotě (slídě, porcelánu) a od jeho konců jsou vyvedeny 4 tlustší stříbrné nebo měděné dráty. Dvěma z nich se přivádí slabý proud a dvěma je připojeno zařízení k měření napětí. Podle Ohmova zákona se vypočte odpor platinového drátu při měřené teplotě, z něhož se pak určí teplota ve stupních. Pro praxi se sestavují odporové teploměry; na jejich stupnici lze přímo číst teplotu ve stupních Celsia.



Obr. 23,7. Thermočlánek.

Odporový teploměr se hodí stejně pro měření velmi nízkých i vysokých teplot a jeho přesnost je ve značné míře závislá na způsobu, jakým měříme jeho odpor. Ve vhodné úpravě lze jím měřit teplotu mezi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ s nejvyšší přesností $0,01\text{ }^{\circ}$, teplotu do $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ nejvýše na $0,1\text{ }^{\circ}$.

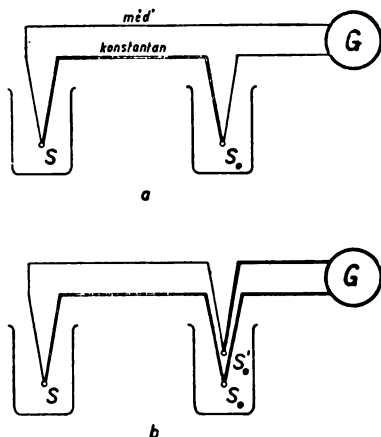
Thermoelektrické teploměry (thermočláanky, tepelné články) měří teplotu na základě thermoelektrického jevu: Ve vodivém okruhu tvořeném dvěma spájenými dráty z různých kovů vznikne elektrické napětí, jakmile teplota t jednoho ze spájených míst se liší od teploty t_0 druhého spájeného místa. Lze to vysvětlit představou, že v místě styku má jeden kov proti druhému jistý potenciální rozdíl, který závisí na teplotě styčného místa. Mají-li tedy oba spoje stejnou teplotu, ruší se oba potenciální rozdíly, neboť pořadí kovů ve druhém spoji je obráceno, a pak mají potenciální rozdíly v obou spojích opačná znaménka. Jsou-li však teploty t_0 , t obou spojů S_0 , S různé, jsou různá i napětí a v okruhu zbývá napětí rovné rozdílu obou stykových napětí (obr. 23,7). Toto *thermoelektrické napětí* ε („síla“) závisí na teplotním rozdílu $t - t_0$ obou spájených míst tak, že *pro danou dvojici kovů je přibližně úměrno rozdílu teplot, pokud je dosti malý*; při větších rozdílech se však ukazuje, že závislost je druhého (nebo i vyššího) stupně,

$$\varepsilon = a(t - t_0) + b(t - t_0)^2,$$

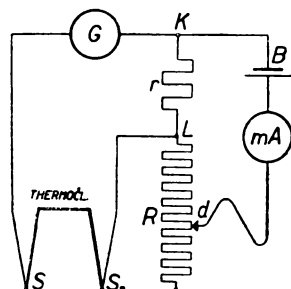
a je geometricky dána parabolou procházející počátkem. Thermoelektrické napětí dosahuje tedy při jistém teplotním rozdílu nejvyšší hodnoty (t. zv. neutrální bod) a při dvojnásobném rozdílu vymizí, načež změní znaménko (inversní bod). Na tuto okolnost je třeba mít zřetel při měření větších teplotních rozdílů.

Thermočlánek upravujeme k měření vysokých nebo velmi nízkých teplot tak, že jeden spoj (spájené místo) S vložíme do měřeného prostoru a druhý spoj S_0 umístíme tak, aby měl teplotu okolí (dále od S). Při měření menších rozdílů a při přesných měřeních vůbec vkládáme i druhý spoj S_0 do lázně (nebo do thermostatů), jejíž teplotu můžeme přesně změřit, nebo do prostředí stálé teploty, zejména do nějaké tající látky (nejčastěji do směsi tajícího ledu s vodou), jak je znázorněno na obr. 23,8a, kde jednoduchá čára značí jeden

kov (na př. měď) a dvojitá čára druhý kov (na př. konstantan). Thermoelektrické napětí budí v thermočláncu slabý proud, který je úměrný tomuto napětí, lze-li pomíjet změnu odporu thermočláncu s teplotou, a proto můžeme místo napětí měřit proud citlivým galvanoměrem G , uzavírajícím okruh thermočláncu. Toto zapojení ovšem předpokládá, že v okruhu nemohou vzniknout podružná thermonapětí buď proto, že celý okruh — včetně galvanoměru — je uzavřen vedením z téhož kovu (na př. z mědi)³⁾, nebo proto, že obě místa, v nichž se další vodič (nejčastěji měděný) napojuje na vlastní thermočlánek, mají velmi přibližně stejnou teplotu. Přesně to zaručíme úpravou naznačenou na



Obr. 23,8. Měření teploty thermočláncem:
 a — se dvěma spoji (pro článek Fe → Cu, Cu → konstantan;
 b — se třemi spoji (pro libovolnou dvojitá kovů).



Obr. 23,9. Lindeckovo kompenzační zapojení thermočláncu.

obr. 23,8b, kde obě tato místa S_0 a S_0' jsou v téže lázni, a další vedení ke galvanoměru je z téhož kovu (tlustá čára). Při přesném zjišťování teploty dává se přednost měření thermonapětí některou kompenzační metodou a z tohoto napětí se vypočte rozdíl měřené teploty t a stálé teploty t_0 . K tomu ovšem je nutno napřed thermočlánek cejchovat, podobně jako u odporového teploměru [23,VII].

23,VIII

Velmi vhodné je kompenzační zapojení Lindeckovo (obr. 23,9): konce K , L thermočláncu připojíme přes citlivý galvanoměr G ke koncům menšího stálého odporu r a k nim souběžně (paralelně) zapneme okruh baterie B (akumulátoru) se značným měnlivým odporem R a miliampermetrem mA . Upravíme-li posuvným dotykem d odpor R tak, aby galvanometrem neprocházel proud, jde veškerý proud I z baterie, měřený miliampermetrem, odporem r , takže mezi body K a L je napětí rI , které se kompenzuje napětím thermočláncu. Měřené thermonapětí je tedy úměrně proudu a k jeho určení nemusíme znát ani napětí baterie, ani odpor R . Proto lze při daném odporu r přímo vyjádřit, jaké napětí odpovídá na př. proudu 1 mA, nebo je možno pro zvolený menší rozsah měřených teplot a pro určitý thermočlánek stupnici miliampermetru graduovat ve stupních Celsia. Je-li na př. $r = 0,01 \Omega$, odpovídá 1 mA thermonapětí 10 mikrovoltů.

23 ³⁾ Přitom mohou být na př. svorky nebo klíče z jiného kovu (mosazné), pokud lze předpokládat, že místa vstupu i výstupu proudu na téže svorce mají stejnou teplotu.

Thermočlánky mají velkou přednost, že jejich měřicímu orgánu lze dát velmi malé rozměry a že je možno měřit na dálku teplotu i v prostorech těžko přístupných nebo vzduchotěsně uzavřených, a to přesně v potřebném místě. Měří se jimi ovšem v podstatě *rozdíly* teplot, což může mít pro některé úkoly značnou výhodu. Podmínkou přesnosti a spolehlivosti jsou ovšem přesné měřicí přístroje a především stejnorodost užitých kovů (drátů). Jsou-li totiž kovy nehomogenní, vznikají při nestejné teplotě drátů neznámá podružná thermonapětí, skreslující výsledek měření. Proto se pro přesná základní měření používá takových kovů, které lze vyrobit velmi čisté (ryzí). Při větší přesnosti je mimo to nutno upravit thermočlánek tak, aby neměnil teplotu měřeného místa vedením tepla. Proto se volí dráty thermočlánek tenké a mají se odvádět kolmo ke směru teplotního spádu ve spirále nebo šroubovici.

Z velikého počtu možných dvojic uvedeme jen nejužívanější a šipkou mezi jmény kovů označíme směr proudu na teplejším spoji.

Thermočlánek **měď** → **konstantan** je velmi vhodný pro měření nízkých a středních teplot (od $-250\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $400\text{ }^{\circ}\text{C}$). Rozdílu teplot $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ přísluší thermonapětí $4,1\text{ mV}$. Vzhledem k tomu, že se používá měděných přívodních drátů, lze článek zapojit jednoduchým způsobem **23,8a** bez třetího spájeného místa. Lze jím měřit rozdíly teplot s přesností asi $0,5\text{--}1\%$; pro rozdíly několika stupňů je možno předpokládat přímkovou závislost, při větších rozdílech kvadratickou a při nejpresnějším měření kubickou závislost s třemi konstantami. Průběh thermonapětí vznikajícího v tomto thermočlátku při různých teplotách jednoho spoje, když druhý spoj má stálou teplotu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, je dán těmito hodnotami v milivoltech:

23,IX

—185°	—80°	0°	100°	200°	300°	400°	500 °C
— 5,0	— 2,7	0°	4,1	8,0	14,1	19,9	26,3 mV

Při teplotách nad $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ měď oxyduje, a proto se nahrazuje niklchromem. Je-li tak vzniklý thermočlánek **niklchrom** → **konstantan** spájen ryzím zlatem, lze ho použít až do teploty $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ a dává thermonapětí asi o 50% větší než předešlý článek s mědí.

23,X

Pro ještě vyšší teploty ($300\text{--}1700\text{ }^{\circ}\text{C}$) se velmi osvědčil thermočlánek **Le Chatelierův**: **platinorhodium** → **platina**. První z kovů je slitina 90% Pt s 10% Rh (podle váhy), kterou lze stejně jako ryzí platinu vyrobit ve velmi dokonalém stavu. Výsledky tímto thermočlánkem získané jsou zaručeny se značnou přesností, a proto byl thermočlánek Pt-Rh → Pt zvolen jako normální thermočlánek k měření vyšších teplot (viz tab. I). Jeho thermonapětí mezi $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $1500\text{ }^{\circ}\text{C}$ je asi $0,6$ milivolt na rozdíl $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. K měření malých teplotních rozdílů je vhodný seriový thermočlánek, který sestojíme řadovým spojením několika thermočláneků, jejichž spájená místa vložíme do týchž dvou lázní. Výsledné thermonapětí se tím znásobí počtem článků.

23,XI

Optický žároměr (pyrometr) je přístroj, kterým se srovnává záření (*jas*) rozžhavené dutiny (na př. pece) se zářením svítícího vlákna žárovky. Dutina se pozoruje dalekohledem zároveň s vláknem malé žárovky, umístěným v ohniskové rovině okuláru. Do $800\text{ }^{\circ}\text{C}$ pozoruje se bez filtru, při teplotách vyšších s červeným skleněným filtrem. Vlákno se žhaví napětím $4\text{--}6\text{ V}$ a předřazeným odporem se upraví proud procházející vláknem tak, aby vlákno mělo stejný jas jako pozorovaná dutina. V tomto případě obraz vlákna splyne s pozadím a čte se intenzita proudu na ampérmetru. Žárovka se cejchuje tak, že se pozoruje platinový drátek žhavený proudem, který se zesiluje, až se drátek roztaví. Tím

23,XII

je stanoven údaj ampérmetru, který odpovídá teplotě tání platiny (1769 °C). Poměr zářivosti vlákna pro různé hodnoty proudu se zjistí tak, že se pyrometrem pozoruje rozžhavený wolframový pásek, jehož jas se zmenšuje ve známém poměru proměnným otáčivým sektorem nebo absorpčním klínem. Jaké teploty odpovídají zjištěným poměrným zářivostem, plyne pak z *Planckova zákona* (srov. tab. I):

$$\frac{(E\lambda)_t}{(E\lambda)_{1769^\circ}} = \frac{e^{\frac{1,439}{2042,15^\circ \lambda}} - 1}{e^{\frac{1,439}{(t + 273,15^\circ) \lambda}} - 1}, \quad (5)$$

kde λ značí v cm délku vlny spektrální čáry, kterou si zvolíme k porovnání zářivosti.

MĚŘICÍ METODY

23.1. Kontrola základních bodů teploměru

Nejprve kontrolujeme nulový bod⁴⁾ tak, že teploměr ponoříme do směsi roztlučeného ledu nebo sněhu a malého množství destilované vody. Dáme přednost přirozenému ledu, neboť led umělý může obsahovat některé soli, jejichž přítomnost snižuje bod tání. Nejlépe je použít nálevky v železném kruhu na

stativu, aby okolním vzduchem ohřátá voda (těžší než nulstupňová) odkapávala otvorem nálevky do postavené kádinky. Teploměr ponecháme v lázni nejméně půl hodiny tak hluboko, aby byl celý sloupec rtuti ponořen. Nato jej povytáhneme, poklepáme mírně na teploměr a ihned čteme teplotu. Čtení několikrát opakujeme a vypočteme střední hodnotu t_0' , jež vzata s opačným znaménkem dává opravu bodu mrazu:

$$\Delta_0 = -t_0'.$$

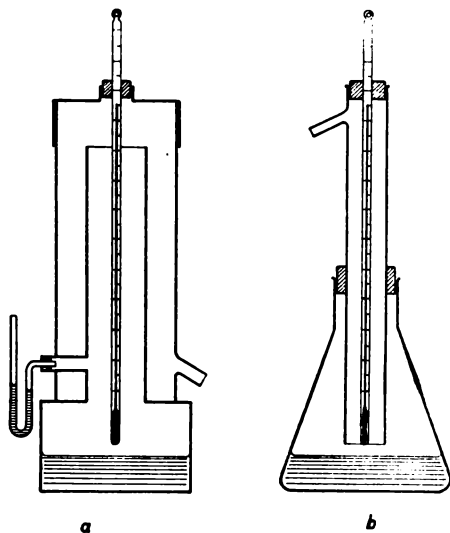
Ke kontrole bodu varu použijeme válcové nádoby s dvojitými stěnami (obr. 23,10a), v níž vaříme destilovanou vodu; teploměr je při tom vsunut do otvoru zátky tak, aby bod 100°C byl uvnitř nádoby. Od počátku varu vody necháme teploměr v lázni několik minut, aby nabyl stejnoměrné teploty.

Zatím určíme barometrický tlak b některou z metod 22.1 až 4 — neopomíjíme opravu na 0 °C — a zaznamenáme jej. Teploměr povytáhneme z nádoby a čteme teplotu, což opakujeme několikrát. Nato vypočteme skutečnou teplotu varu při tlaku $b' = b + p$, kde p je přetlak páry, zjištěný na malém vodním manometru m ⁵⁾, ze vztahu

$$t_{bp} = 100,0 + 0,037 (b' - 760), \quad (6)$$

23⁴⁾ Kdybychom napřed kontrolovali bod varu, nastala by pro hysteresi skla dočasná deprese nulového bodu.

23⁵⁾ Rozdíl výšek vodních sloupců přepočteme na tory dělením číslem 13,6.



Obr. 23,10. Kontrola bodu varu.

který obdržíme zkrácením vzorce pro teplotu varu vody v tabulce T, IX. Průměr čtení na teploměru t'_{100} dává pak opravu bodu varu:

$$\Delta_{100} = t_v - t'_{100}.$$

Má-li trubice po celé délce stejnou světlost a je-li stupnice sama rovnoměrná, můžeme mít za to, že oprava Δ_0 přechází s rostoucí teplotou rovnoměrně v opravu Δ_{100} , že tedy pro každou jinou teplotu t mezi 0°C a 100°C je oprava Δ_t dána interpolačním vzorcem 18 (1)

$$\Delta_t = \Delta_0 + \frac{\Delta_{100} - \Delta_0}{100 - 0} (t - 0); \quad (7)$$

správná hodnota t plyne z teploty t' , čtené na teploměru, podle (7), klademe-li tam t' za t , z rovnice

$$t = t' + \Delta_t = t' + \Delta_0 + \frac{\Delta_{100} - \Delta_0}{100} t'. \quad (8)$$

U teploměrů dělených na celé stupně počítáme korekce na $0,1^\circ$, ale hodnotu zlomku u t' na $0,001^\circ$.

23.2. Graduace rtuťového teploměru

V předešlém článku jsme odvodili opravy Δ_t pro každou dělicí rysku teploměru za předpokladu rovnoměrné závislosti opravy na vzdálenosti rysky od nuly teploměru. Nebývá to přesně splněno. Pro přesnější měření chceme znát skutečné korekce pro každou rysku. Zjistíme je t. zv. *graduací* teploměru. Lze ji provést kalibrací teploměrné trubice nebo srovnáním s normálním teploměrem.

a) **Kalibrace teploměrné trubice.** Oddělíme část rtuťového sloupce^{a)} a poklepáváme prstem na teploměr, posouváme tuto část postupně na různá místa trubice. Přitom zjišťujeme její délku v dílcích stupnice, a to v polohách, které spolu souvisí tak, že začátek následující polohy splývá (přibližně) s koncem předcházející. Ze všech naměřených délek l_i sloupečku vezmeme průměr l a vypočítáme odchylky od průměru pro půlící rysku t každé polohy. Tyto odchylky $\delta_i = l - l_i$ nás informují, jak se vlivem nestejnosti průřezu trubice liší oprava čtení teploměru pro každou rysku od průměrné hodnoty (7), vypočtené přímkovou interpolací. Bude tedy skutečná oprava dána součtem $\Delta_t + l - l_i$, kterou musíme dosadit za Δ_t do (8), abychom dostali správnou teplotu.

b) **Srovnání s normálním teploměrem.** Oba srovnávané teploměry vložíme (ve svislé poloze zároveň s míchačkou) do lázně tak, aby byly celé ponořeny. Obě teploměrné nádoby musí být co nejlíže a lázeň za stálého míchání velmi zvolna ohříváme, nejlépe prostřednictvím druhé vnější lázně, obklopující vlastní srovnávací lázeň vnitřní. Pro obě nebo alespoň pro vnitřní lázeň je nutno použít skleněné nádoby (nejlépe s rovinnými nebo válcovými stěnami), abychom mohli číst oba teploměry přímo v lázni. Doporučuje se provádět čtení střídavě na obou teploměrech v pravidelných intervalech a srovnávat každé čtení jed-

^{23 a)} Oddělení sloupečku rtuti (zvláště v předepsané délce) vyžaduje určité zručnosti. Nejprve poklepem, mávnutím teploměrem nebo otřesením, způsobeným úderem do zápěstí ruky držící teploměr, oddělíme libovolnou část sloupce. Na místě, kde se tato oddělená část zase spojí s ostatní rtutí, můžeme očekávat příští odtržení sloupečku. Potom dáme teploměru takovou teplotu, aby sloupec přesahoval ono místo o délku, kterou chceme oddělit, což provedeme jako prve.

noho teploměru s průměrem předcházejícího a následujícího čtení druhého teploměru. Z rozdílu obou čtení sestavíme pak *tabulku oprav* pro řadu teplot (co možná stejně od sebe vzdálených) nebo sestrojíme *opravnou křivku*, z níž získáme opravu pro libovolnou teplotu kontrolovaného teploměru grafickou interpolací.

23.3. Graduace thermočládku ¶

Z předešlých výkladů o thermočláncích vyplývá tento postup pro jejich graduaci, který uvedeme podrobněji pro graduaci thermočládku Cu → konstantan [23,IX]. V tomto případě stačí dvě lázně, jsou-li v nich umístěna spájená místa S_0 , S , přímo spojená konstantanovým drátem, jak naznačeno v obr. 23,8 a. Všechny přírody k thermočládku jsou měděné.

Potřeby: Citlivý galvanoměr, event. *Lindeckovo* kompenzační zapojení [23,VIII], lázeň s tajícím ledem, nádoba na kontrolu bodu varu obr. 23,10a nebo 23,10b.

Postup

1. Jeden spoj S_0 vnoříme do nálevky se směsí rozdrčeného ledu a destilované vody.

2. Druhý spoj vložíme do nádoby pro určování bodu varu, v níž vaříme destilovanou vodu, a čteme údaj i_1 galvanoměru nebo miliampérmetru při zapojení [23,VIII]. Změříme tlak vzduchu jednou z metod 22.1 až 4 a dosazením jeho redukované (a o přetlak páry p zvětšené) hodnoty b' do (6) vypočteme teplotu varu t_1 .

3a) Při graduaci mezi 0 a 100 °C užijeme jako druhého bodu t_2 , bodu tání $\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{H}_2\text{O}$, který je podle tabulky T,IX dán teplotou

$$t_2 = 32,38 \text{ °C.}$$

3b) Při graduaci v rozsahu do 300 °C volíme za teplotu t_2 bod varu naftalenu, tedy podle tabulky T,IX

$$t_2 = 218,0 + 0,058 (b - 760),$$

nebo benzofenonu

$$t_2 = 305,9 + 0,064 (b - 760).$$

Proto vaříme tyto látky ve skleněné nádobě 23,10b, do jejíž trubice zavedeme spoj S thermočládku, a čteme výchylku i_2 měřicího přístroje (jako v 2).

4. Z kvadratických vztahů

$$2\alpha t_1 + \beta t_1^2 = i_1, \quad 2\alpha t_2 + \beta t_2^2 = i_2$$

vypočteme konstanty α , β .

5. Teplota t ve stupních Celsiových, při níž má měřicí přístroj výchylku i , je pak dána vzorcem

$$t = \frac{1}{\beta} (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta i}),$$

při čemž snadno rozhodneme, které znaménko odmocniny je správné. Při větším počtu měření je výhodné narýsovat křivku závislosti (část paraboly) a určovat teplotu graficky.

24. PRAKTICKÉ POKYNY PRO MĚŘENÍ

Fyzikální měření poskytuje výsledky, které jsou závislé na podmínkách, za nichž se měření konalo. Některé zákonitosti a jisté konstanty jsou ve značné míře na těchto podmínkách nezávislé a představují tak obecné výsledky, které jsou zvláště cenné. Ale i výsledky platné jen pro určité případy mohou mít důležitost, jsou-li přesně známy podmínky jejich platnosti. Znalost podmínek různých pokusů je také nutná pro zjištění oněch obecných vlastností, které na nich nezávisí. O měření předpokládáme, že je „správné“, t. j. že chyby, kterých se dopouštíme, jsou v určitých mezích, že jsou vyloučeny hrubší omyly a že výsledky nejsou skreslovány chybami soustavnými. Proto je nutno před každým měřením se ujistit, že použité přístroje jsou v pořádku, nebo jejich funkci přezkoušet zvláštním měřením. Přístroje nutno občas podrobit kontrole, ověřit správnost jejich stupnice, t. j. provést jejich *kalibraci* čili *graduaci*. Doporučuje se každou metodu, zvláště je-li metodou absolutní, vyzkoušet jejím užitím pro předem známé veličiny, zejména proměřením přesných *vzorů (etalonů, standardů, normálů)*.

Přístroje udržujeme v čistotě a zacházíme s nimi opatrně. Dbáme nejen o to, abychom je snad nepoškodili, nýbrž vyvarujeme se všech vlivů, které by mohly změnit jejich konstanty (otřesy, neopatrné zacházení, nesprávná poloha, vysoká nebo nízká teplota, vlhkost, přímé sluneční světlo), nedotýkáme se zbytečně přístrojů, zejména stupnic (rytých často na stříbrném pásku), optických součástí (čoček, zrcátek a pod.). Máme-li v postačující míře zaručenu správnost přístrojů i metody, hledíme při měření dosáhnout *nejvyšší možné přesnosti*.

Přípravu měření provádíme s největší péčí a měření samo svědomitě, opatrně, trpělivě a v co nejlepších pracovních podmínkách (osvětlení a pod.). Čteme pokud možno desetiny nejmenších dílků stupnice. Pozorujeme-li únavu, přerušíme měření. Hledíme zeslabit všechny nepříznivé vlivy.

Protože přesnost měření závisí též na únavě, musíme mít také na zřeteli *pracovní ekonomii* a měřit všechny veličiny jen s takovou přesností, jaká je za daných podmínek účelná. Proto *měříme* ve smyslu věty 12 (10) *veličiny, které vystupují ve výsledku v součtu (nebo rozdílu) s přibližně stejnou absolutní přesností, kdežto veličiny tvořící součin (nebo podíl) s přibližně stejnou chybou poměrnou (procentovou)*.

Přesnost výsledku určujeme buď metodami vyloženými v teorii chyb a ve vyrovnávacím počtu, nebo aspoň z podmínek měření odhadneme anebo zkusmo zjistíme přesnost. Podle zjištěné přesnosti upravíme i číselný výsledek. Připojíme k němu pokud možno pravděpodobnou (někdy střední nebo krajní) chybu a ukončíme výsledek číslicí téhož řádu, kterou končí *nejvýše dvojmístná* hodnota pravděpodobné chyby. Při odhadu přesnosti výsledku uvádíme jen místa „zaručená“; přitom pokládáme číslicí za zaručenou, dosahuje-li krajní chyba nejvýše pěti jednotek následujícího místa. Někdy se uvádí i toto další místo, ale vyznačuje se zmenšenou číslicí. Měřením získaný výsledek je nutno opravit vzhledem k různým vlivům, které jej skreslují a které nebylo možno zcela vyloučit. Příslušné korekce určíme buď výpočtem, nebo zvláštním měřením, nebo hledíme jejich velikost aspoň odhadnout.

Konečně se doporučuje výsledky měření pokud možno ověřit srovnáním se známými výsledky jiných měření (na př. podle tabulek) nebo s hodnotami plynoucími z teorie. Nemáme-li po ruce takových hodnot, je dobře měření

opakovat buď stejnou, nebo raději jinou metodou. Zjistíme-li nesouhlas, je nutno hledat příčinu především v *početní chybě* při odvození výsledku nebo v *omylu* při čtení některé hodnoty. Také lze mnohý rozpor vysvětlit *růzností podmínek měření*, kterou někdy není možno pro neúplné údaje bezpečně zjistit. *Naprosto však není dovoleno měřením získané hodnoty jakkoli upravovat* nebo přizpůsobovat tak, aby se dospělo k očekávanému výsledku. Vždyť mnohé experimentálně zjištěné neshody vedly k zdokonalení dřívějších názorů nebo i k novým názorům a teoriím. Výjimku lze připustit jen u hodnot, které se dají vyložit *jedině zřejmým omylem*. Takové hodnoty však nikdy neupravujeme, ale prostě z měření *vyloučíme*, i kdyby se proto musilo celé měření opakovat. K novému měření musíme přistoupit i tehdy, když se nám nepodaří vysvětlit rozpor, který značně přesahuje předpokládanou chybu měření. Pak je bezpodmínečně nutné celé měření provést znovu, a to tak, že nepoužijeme žádné hodnoty odvozené z prvního měření.

O každém měření vedeme podrobný a přehledný *zápis (protokol)*, jenž má obsahovat všechny údaje, které mohou mít vliv na výsledek měření. Především však musí obsahovat všechny hodnoty přímo čtené na měřicích přístrojích a zapsané tak, jak byly skutečně zjištěny. Připojujeme k nim jen stručné výpočty, kterých nezbytně potřebujeme pro další pokračování v měření. Jinak výpočet provádíme až po úplném skončení měření. Vždy musí být jasné, které z hodnot byly přímo čteny, a u hodnot počítaných musí být zřejmo, z kterých měřených hodnot byly odvozeny. Zápis je nutno psát pokud možno současně s prováděným měřením nebo ihned po skončení každého jednotlivého úkonu. Na paměť nelze spoléhat.

Ze všeho, co jsme řekli, vidíme, že při fyzikálních měřeních je třeba postupovat podle těchto **základních pravidel**:

Příprava měření

1. *Před měřením se přesvědčíme, máme-li po ruce všechny potřebné přístroje a pomůcky pro zvolenou měřicí metodu a zda správně fungují.*
2. *Do zápisu poznamenejeme, jakých přístrojů jsme použili, podrobně popíšeme uspořádání měření a podle potřeby zakreslíme i schema použitého uspořádání.*
3. *Zjistíme a zapíšeme všechny podmínky měření a okolnosti, které by mohly mít vliv na výsledek. Zejména se doporučuje poznamenat datum a hodinu, teplotu a tlak, nebo i vlhkost vzduchu.*
4. *Pokusíme se co nejvíce omezit nepříznivé okolnosti a zjistíme, které vlivy vyžadují opravu výsledků.*
5. *Popíšeme podrobně měřené těleso nebo zkoušenou látku a vyznačíme si postup celého měření.*
6. *Podle možnosti přezkoušíme měřením (aspoň orientačním) některé známé hodnoty, dává-li použité zařízení zásadně správné výsledky.*

Vlastní měření

7. *Měření provádíme svědomitě a pečlivě tak, abychom dosáhli co největší jistoty a přesnosti měření. Čteme s rozvahou a odhadujeme vždy desetiny nejmenších dílků stupnice, vyznačujeme u každé hodnoty vždy jednotky, v nichž měříme. Při nulových metodách kontrolujeme opětovně nulovou polohu přístroje. Měření vždy opakujeme několikrát (nejméně pětkrát, obvykle desetkrát, a liší-li se měřené hodnoty značněji, i vícekrát).*
8. *Závisí-li hledaná veličina na několika měřených hodnotách, hledáme je určit*

s rovnocennou přesností, měříce každou hodnotu s přesností přiměřenou jejímu vlivu na hodnotu výsledku.

9. Při měření provádíme jen výpočty nutné pro pokračování v měření, rozlišující hodnoty přímo pozorované a počtem odvozené.

10. Po skončení měření kontrolujeme znovu správnou funkci přístrojů a zaznamenáme konečné podmínky uvedené pod 3.

Odvození výsledku

11. Výpočty provádíme jen na tolik míst, kolik odpovídá přesnosti měření, nebo o jedno místo více (zvláště se to týká násobení a dělení). Logaritmického pravítka použijeme jen tehdy, postačí-li jim dosažitelná přesnost [u normálního pravítka (25 cm) několik procent, u velkého (50 cm) asi 1%].

12. Určíme nejpravděpodobnější hodnotu výsledku podle čl. 12 nebo vyrovnáme měření podle čl. 13. 3—17. Vždy však aspoň odhadneme přesnost výsledku.

13. Výsledek vyjádříme v příslušných jednotkách a připojíme jeho pravděpodobnou chybu, vypočtenou na jedno nejvýše dvě platná místa, a výsledek ukončíme číslicí téhož řádu, kterým končí k němu připojená chyba. Při pouhém odhadu přesnosti uvádíme jako poslední místo výsledku číslicí, do které již předpokládaná chyba nezasahuje (nebo o jedno místo více).

14. Provedeme podle potřeby opravy výsledků na vedlejší vlivy poznamenané pod 4.

Ověření výsledku

15. Získaný výsledek srovnáme se známými hodnotami experimentálními i theoretickými (na př. z tabulek).

16. Při zřejmém nesouhlase (kdy rozdíl převyšuje krajní chybu, t. j. asi pětinásobnou pravděpodobnou chybu) hledáme nejprve chybu ve výpočtu nebo v omylu při zápisu, pak v nestejných podmínkách měření (nebo v různosti měřených látek).

17. Neobjeví-li se chyba, opakujeme celé měření nezávisle na předešlém. Teprve při opakovaném nesouhlase hledáme příčinu v metodě a pod. Nikdy nepřizpůsobujeme měřené hodnoty podle domněle správných výsledků.

E. MĚŘENÍ HMOTY

25. VÁHY A ZÁVAŽÍ

Hmotu měříme ve fyzice v jednotkách definovaných prakticky mezinárodním prototypem, jak jsme vyložili v čl. 3. Jednotkou hmoty v soustavě MKSA je kilogram (kg), který se rovná hmotě mezinárodního kilogramu a je podle 3 (2) o 27 miliontin větší než hmota 1 dm³ destilované vody při teplotě 3,98 °C a za normálního tlaku 760 torů. V soustavě absolutní je ovšem jednotkou gram, rovný tisícině této hmoty.

Velikost hmoty¹⁾ je definována jako součinitel úměrnosti m mezi velikostí síly F a zrychlením a , které síla hmotě udělí, neboť podle II. pohybového zákona *Newtonova*

$$F = m \cdot a. \quad (1)$$

Dále víme, že každé dvě hmoty m a M se přitahují silou, která pro stejnorodé koule nebo pro tělesa, jejichž rozměry jsou malé proti vzdálenosti r jejich hmotných středů, je dána *gravitačním zákonem Newtonovým*:

$$F = \kappa \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad (2)$$

kde *gravitační konstanta* $\kappa = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Tedy síla, kterou Země přitahuje různá tělesa v témž místě svého povrchu, je úměrná hmotě, t. j.

$$\text{váha tělesa je úměrná jeho hmotě,} \quad (3)$$

neboť spojením rovnic (1) a (2) dostaneme pro váhu G

$$F = G = mg, \text{ kde } g = \kappa \frac{M}{r^2} = \text{tíhové zrychlení,} \quad (4)$$

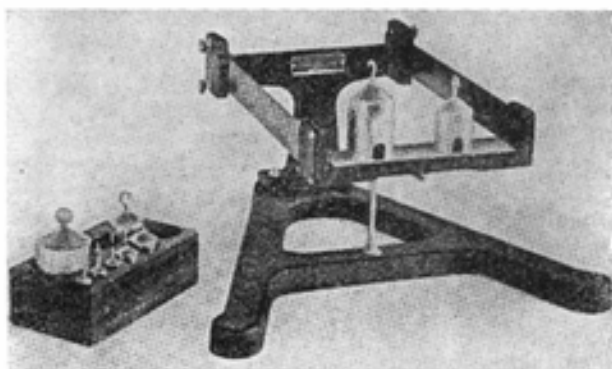
značí-li M hmotu Země a r vzdálenost od jejího hmotného středu.²⁾ Věta (3) a rovnice (4) vyjadřují skutečnost známou od doby *Galileiho*, že všechna tělesa padají (v témže místě na Zemi a ve vzduchoprázdnu) se stejným zrychlením g .

Při měření hmoty je tedy možno vyjít buď z definiční rovnice (1), nebo z věty (3). V prvním případě jde o *přímou* metodu (čl. 18), při níž se měří zrychlení, které uděluje měřené hmotě známá síla. Výhodno je zjistit poměr zrychlení z poměru dob pružných kmitů. K tomu lze použít na př. torsních

25 ¹⁾ Rozlišování hmoty *setrvačné* a *těžké* (tíhové) je v praktické fyzice bezúčelné.

25 ²⁾ V souřadnicové soustavě rotující se Zemí působí na každé těleso *odstředivá síla*, která je jednak malá proti G , jednak je také *úměrná jeho hmotě*, takže i výsledná (zdánlivá) váha je rovněž úměrná hmotě tělesa. (TF 2.2.9).

kmitů (srov. čl. 42), při čemž je třeba vždy dvou stejných těles.³⁾ Proto je lépe srovnávat hmoty podle dob kmitů, které jim udělí pružné pero. Praktické provedení takových *setrvačných vah* (Schriever, USA, 1937) ukazuje snímek 25,1. Měřená hmota M se položí na můstek upevněný na dvou pásových ocelových perech, můstek se vychýlí na stranu a změří se doba kmitu (nebo doba kyvu) T .



Obr. 25,1. Setrvačné váhy Schrieverovy.

Je-li $[T]$ doba kmitů konaných jednotkou hmoty $[M]$ (etalonem), pak hmota měřená v těchto jednotkách

$$M = \frac{T^2 - T_0^2}{[T]^2 - T_0^2} [M];$$

T_0 je doba kmitu nulové hmoty, kterou zjistíme, necháme-li kmitat prázdné váhy.

K praktickému měření hmoty používá se úměrnosti mezi hmotou a vahou těles, vyjádřené větou (3). Měřicí metody na tom založené nazýváme *vážením* a příslušné přístroje se jmenují *váhy*. Vážení je v podstatě *srovnávací metoda* (čl. 18), a proto přesných výsledků dosáhneme jen užitím přesných závaží. Některými druhy vah udávané absolutní hodnoty jsou vždy nepřesné už proto, že jsou závislé na podmínkách vážení (na místě, teplotě, tlaku vzduchu).

Váhy měřených hmot se srovnávají v podstatě dvěma způsoby; používá se k tomu vah dvou obecných typů, pružných nebo pákových.

1. Pružné váhy jsou založeny na skutečnosti, že přetvoření (deformace) pružného tělesa je přibližně úměrné přetvořující (deformační) síle. Z velikosti přetvoření, způsobeného vahou měřené hmoty, můžeme tedy soudit na její velikost. Užívá se dvou druhů pružných vah, buď pérových nebo torsních.

Pérové váhy, u nichž se hmota měří protažením šroubového pera, hodí se jen pro hrubší vážení (srov. v praxi běžné váhy, zv. *mincíř*) již proto, že protažení pera danou hmotou se mění jednak s teplotou pera, jednak s místem, v němž vážení konáme (zrychlení zemské tíže závisí na zeměpisných souřadnicích a na nadmořské výšce). Pro vážení malých hmot lze použít i torsní deformace tenkého vlákna (křemenného), jak učinil *Nernst* při konstrukci svých mikrovah. Na tomto principu torsních vah měřil již *Coulomb* velmi malé dvojice sil.

25,I

25,II

25³⁾ Viz [55].

Přesnější výsledky lze získat pružnými vahami, použijeme-li metody substituční (spojené event. s interpolací, viz čl. 18), srovnávajíc měřenou hmotu s vhodným závažím.

2. Pákové váhy jsou přístroje, jimiž měříme moment váhy dané hmoty metodou kompenzační (čl. 18), vyrovnávajíc jej výsledným momentem váhy jiných hmot, a to buď stálých, nebo pro daný případ vhodně vybraných ze sady závaží. Kompensace se provádí buď rovnoramennou, nebo nerovnoramennou pákou, nebo složitějším pákovým zařízením.

25,III

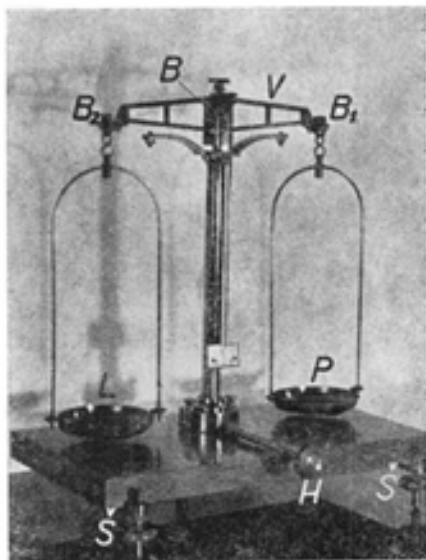
Listovní váhy jsou i ve fyzikální laboratoři užívaným typem pákových vah. Stálá hmota se při vložení měřené hmoty na misku vychyluje z původní (nejnižší) polohy, až moment její váhy vyrovná moment váhy měřené hmoty. S pohyblivým ústrojím spojený ukazatel udává na kruhové stupnici velikost měřené hmoty v gramech. V podstatě stejně jsou konstruovány moderní sklonné váhy.

Váhy nerovnoramenné jsou dvojitě vratná páka, jejíž jedno rameno zatížené váženou hmotou má stálou délku, kdežto vyrovnávací hmota (většinou stálé velikosti) může působit v různých vzdálenostech od osy páky. Tato vzdálenost se volí tak, aby páka zaujala původní (nulovou) polohu jako při nezatížených vahách, a z její velikosti se určí velikost dané hmoty. Tohoto způsobu se používá u vah zvaných přezmen a u novějších kuchyňských vah.

Jiný způsob vážení dostaneme, když při stálém poměru ramen páky použijeme k vyrovnání váhy daného tělesa různých závaží. Nejčastěji se volí rameno pro závaží desetkrát nebo stokrát větší než pro váženou hmotu; jsou to pak *váhy decimální* a *centesimální*.

Poslední dva druhy vah spadají již do kategorie vah na závaží, které při vhodné konstrukci a přesných závažích dosahují nejvyšší přesnosti vůbec. Ramena páky bývají nejčastěji stejná: Jsou to váhy rovnoramenné, které se pro fyzikální a chemická vážení vyrábějí v podstatě ve dvou typech; méně citlivé (a také méně přesné) jsou *váhy praktikantské* (jejichž jemnější druh má název *váhy lékárnické*) pro vážení hmot do 300—500 gramů. Jejich běžný tvar je zřejmý z obr. 25,2. Vahadlo V je kovová rovnoramenná páka, sestavená tak, aby byla pokud možno lehká a pevná na ohyb kolem své osy určené ostrým ocelovým břitem B , spočívajícím na ocelovém (nebo achátovém) lůžku, neseném svislým stojánkem na dřevěné desce, opatřené stavěcími šrouby \mathcal{S} . S vahadlem je pevně spojen lehký ukazatel (jazýček), který udává výchylku vahadla z vodorovné polohy na krátké stupnici, připevněné u paty stojánku. Kromě toho nese dva břity B_1, B_2 (obrácené ostrím vzhůru), rovnoběžné s B a k němu souměrné; na nich spočívají lůžka nesoucí závěsy misek (levá miska L je určena pro váženou hmotu, pravá P pro závaží). Váhy mívají zařízení, které

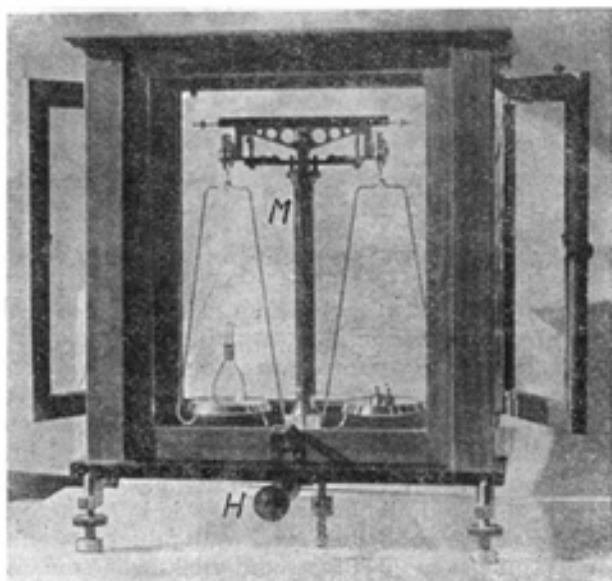
25,IV



Obr. 25,2. Praktikantské váhy.

umožňuje zajištění (aretaci) vahadla. Otočením hlavice *H* (obvykle doprava) sníží se lůžko tak, že ostří břitu *B* se oddálí od lůžka a obráceným pohybem se zase lůžko zdvihne. Váhy se zajišťují a odjišťují (uvolňují) těsně před každým vážením a po něm.

U jemnějších druhů těchto vah bývají na koncích vahadla vodorovné šroubky s drobnými matičkami, jimiž můžeme upravit nulovou polohu vah, a další matičkou, nasazenou na jazýčku vah, lze měnit jejich citlivost; mívají také olovničku zavěšenou na stojánku k usnadnění správného postavení.



Obr. 25,3. Analytické váhy nebrzděné.

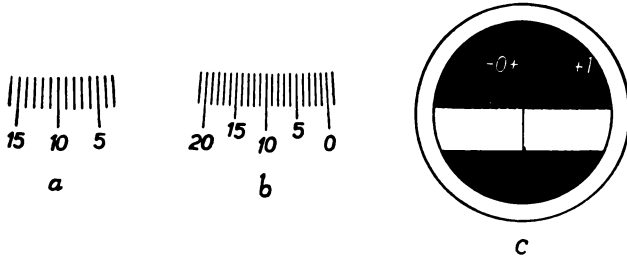
Praktikantskými vahami zjišťuje se hmota s chybou 1 cg až 1 mg (podle jejich citlivosti).

Pro nejpresnější fyzikální vážení a pro kvantitativní chemické rozbory používá se vah analytických, jimiž se hmoty o přípustné váze 100—200 gramů měří s přesností asi 0,1 mg. Zhotovují se ve dvou typech.

Analytické váhy nebrzděné liší se od praktikantských [25,IV] v podstatě jen tím, že jsou citlivější a přesnější. Větší citlivosti se dosahuje jemnější konstrukcí. Vahadlo z lehké slitiny⁴⁾ má tvar vylučující ztelný ohyb (obr. 25,3), břity a rovinná lůžka jsou achátová. Jemná ostří břitů jsou chráněna dvojitým zajištěním. Při otočení hlavice *H* se nejprve nadlehčí misky a pak teprve se zdvihne vahadlo nebo se oddálí i plošky závěsů misek od obou krajních břitů. Citlivost se reguluje nejčastěji malou matičkou *M* na jazýčku vah nebo nad středním břitem. Nulová poloha se mění buď matičkami na obou ramenech vahadla (jako u vah praktikantských), nebo matičkou na krátkém vodorovném šroubku, připevněném nad osou vahadla. Malým pootočením této matičky lze dosáhnout velmi nepatrné změny nulové polohy.

⁴⁾ Volí se buď slitina hliníku a magnesia v poměru 7 : 1 (*magnalium*), nebo slitina magnesia s 3 ÷ 10 % Al, 1 ÷ 3 % Zn a 0,2 ÷ 0,5 % Mn, zv. *elektron*.

Větší přesnost, přiměřená zvýšené citlivosti, musí být ovšem zaručena nekolikerym opatřením. Především jsou váhy chráněny skleněnou *skřínkou*, jejíž přední stěna se vysouvá, jen když je to naprosto nutno (při vkládání váženého předmětu a závaží na misky), a to při zajištěných (aretovaných) vahách. *Váhy se odjišťují jen při uzavřené skřínce*, která chrání váhy (hlavně břity a lůžka) nejen před prachem a vlhkostí²⁵⁾ nebo výpary, ale také před vzdušnými proudy,



Obr. 25,4. Stupnice vah:

a – praktikantských; b – analytických nebrzděných; c – analytických brzděných.

nestejnou teplotou nebo poškozením. Skřínka vah bývá i vzduchotěsná, takže je možno vážit ve zředěném vzduchu a není třeba redukcce na vakuum 28.4. Aby byly břity chráněny i proti otřesům, jsou váhy umístěny na konsole upevněné na hlavní zdi tak, aby na ně nedopadalo přímé sluneční světlo, v náležité vzdálenosti od oken, dveří a topných těles i silnějších světelných zdrojů.

Výchylky vahadla z vodorovné polohy ukazuje jemný hrot jazýčku na přesné stupnici *S*, obsahující obvykle 20 dílků; jejich dělicí čárky se v prodloužení sbíhají na hraně středního břitu. Při tom je výhodno (viz obr. 25,4) *pokládat pravou krajní rysku za počátek stupnice* (nultý dílek), střední *rysku* označit číslem 10 a levou krajní číslem 20. Prostřední dílek označíme číslem 10, i když má stupnice menší počet dílků. Hrot ukazatele je co nejbliže stupnici a promítáme jej kolmo k její rovině, abychom odstranili chyby úkosu (19). Mnohdy pozorujeme lupou, abychom bezpečně odhadli desetiny dílků.

K přesnému vyvážení měřené hmoty se užívá *jezdců*, které vkládáme na přímou vodorovnou hranu (pravítko) vahadla do různé vzdálenosti od středního břitu. Vzdálenost krajních břitů od středního je rozdělena na setiny a každý desátý dílek je číslován od 0 (uprostřed) do 10 (u krajních břitů). Toto číslo značí, kolika miligramům vloženým na misku vah odpovídá moment *jezdce hmoty* 1 cg, vloženého na číslem označený dílek. Nečíslované drobné dílky udávají tedy desetiny miligramu. Jezdec na pravítko vahadla se vkládá zvenčí při zavřené skřínce jednoduchým mechanickým zařízením — ovšem při zajištěných vahách. U některých analytických vah je možno i zvětšování závaží o libovolné zlomky gramu provádět samočinně složitějším zařízením (jako je tomu na př. u vah [25,VI]), které u speciálních vrcholně přesných vah lze ovládat ze vzdálenosti několika metrů.²⁶⁾ Postup při vážení na vahách

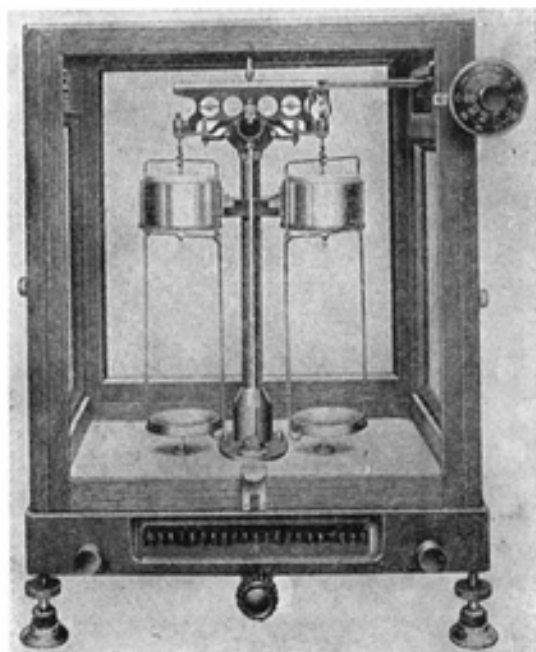
25 ⁵⁾ Před vlhkostí chráníme váhy také tím, že vložíme do skřínky vysoušecí látku (na př. chlorid vápenatý), která pohlcuje vodní páry.

26 ⁶⁾ Teplu vyzařované pozorovatelem porušuje rovnoměrnost teploty vah, proto se při kontrole prototypů po vložení srovnávaných hmot vyčká několik hodin, až se teplota vyrovná a při vlastním vážení se váhy obsluhují mechanicky na dálku, výchylky se pozorují methodou zrcátkovou (čl. 20). U zvláště přesných vah je možno i obě srovnávané hmoty zaměnit zvláštním samočinným mechanismem.

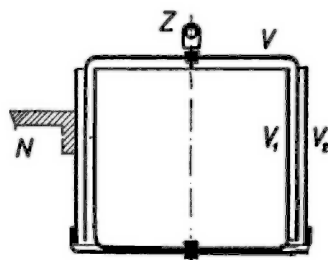
[25,V] je podrobně popsán v čl. 30.2. Zde promluvíme nejprve o druhém, novějším typu analytických vah se zvláštním tlumicím zařízením.

Analytické váhy brzděné (aperiodické) jsou váhy předešlého typu [25,V] 25,VI opatřené zařízením, kterým se kyvy odjištěných vah tak značně ztlumí, že váhy zaujmou po prvním výkyvu během několika vteřin nulovou (nebo rovnovážnou) polohu, kdežto nebrzděné váhy kývají s nepatrným tlumením velmi dlouho, a proto je nutno použít zvláštního postupu k zjištění nulové polohy,

jak popíšeme v čl. 26. U některých vah tohoto druhu (obr. 25,5) se dokonaleho aperiodického tlumení kyvů dosahuje tím, že pod břitem každé misky je zavěšen hliníkový válec V (shora krytý); jeho plášť zasahuje mezi pláště dvou sousedních válců V_1, V_2 se společnou základnou, jež jsou upevněny na stojánku vah nosníkem N (obr. 25,6). Při malém vychýlení vahadla, na př. při sníže-



Obr. 25,5. Analytické brzděné váhy.



Obr. 25,6. Tlumicí válec brzděných vah.

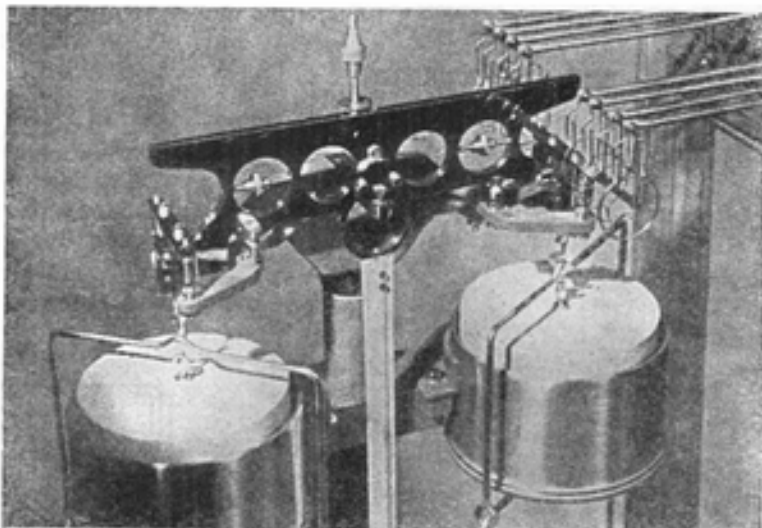
ní závěsu Z , zmenší se objem uvnitř válců a část vzduchu tam uzavřeného unikne úzkými mezerami mezi pláštěmi válců; naopak při zdvižení válce V nassává se vzduch zvenčí. V obou případech klade vnitřní tření vzduchu odpor, a ten během jednoho kyvu zcela utlumí pohyb vahadla.

Váhy nemají na vahadle obvyklé dělené pravitko k nasazování centigramového jezdce. Místo něho má vahadlo nad závěsem pravé misky lehké příčné pravitko, na které se zvláštním mechanismem nasazují kruhové drátěné přivažky, jimiž můžeme zvýšit zatížení pravé misky o libovolný násobek deseti miligramů, t. j. od 10 mg do 990 mg (viz snímek 25,7). Hodnotu přivažku čteme na dělené hlavici (obr. 25,5) hřídele, ovládacího mechanismus. V základní desce vah je umístěna průsvitná stupnice, která se samočinně ozáří při odjištění vah. Stupnice má 0 uprostřed a po obou stranách 10 číslovaných dílků, značících miligramy a dělených na desetiny. Lze tedy noniem číst setiny miligramu přímo na stupnici.

Tyto váhy se zhotovují v několika druzích (viz na př. obr. 25,8) s různou citlivostí a pro různá zatížení. Zvláště citlivý druh má projekční stupnici dělenou

na 0,01 mg, takže lze odhadovat tisíce miligramu. Tato citlivost již hraničí s citivostí nejjemnějších vah vůbec: jsou to *mikrováhy* [25, VII].

V poslední době byl sestrojen nový typ brzděných analytických vah zn. ESCO. Aperiodického tlumení je u nich dosaženo vzdušnou brzdou, umístěnou v nosném sloupku vah, a samočinné vkládání zlomkových závaží od 10 mg do 1000 mg se ovládá dvěma kotouči, umístěnými na společné ose se zajišťovací hlavici vah *H* na předním okraji duralové základní desky (obr. 25,8). Odchylku vážené hmoty od celkové hmoty závaží a přívažků čteme na světelné stupnici rozsahu ± 10 mg, dělené na desetiny miligramu.



Obr. 25,7. Vahadlo analytických vah se samočinným navažováním zlomků.

Výhoda tlumených vah je v tom, že nemusíme používat zlomkových závaží (menších 1 gramu) ani jezdcu a že vážení je mnohem pohodlnější a rychlejší než na vahách netlumených. Pro bezpečné zaručení krajní přesnosti je ovšem třeba tyto váhy občas překontrolovat.

25, VII

Mikrováhy jsou určeny k velmi přesnému vážení malých hmot, zpravidla menších než 1 g. Užívá se jich stále častěji k účelům vědeckým i technickým, zvláště v chemických laboratořích. Sestrojují se na různých principech (25, II, *Nernstovy* torzní mikrováhy), ale většinou jsou to velmi jemné rovnoramenné váhy, zařízení pro vážení ve značně zředěném vzduchu. Vzhledem k nepatrné teplotní roztažnosti křemene volí se často vahadlo i břity křemenné. Tak se dosáhne přesnosti asi 10^{-3} mg (*Steele-Grant* 1909), kterou lze za jistých podmínek vystupňovat až na 10^{-6} mg (*Strömberg* 1916).

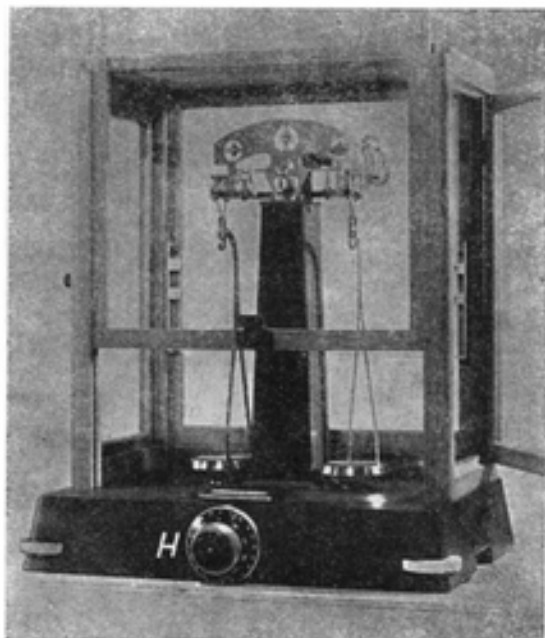
25, VIII

Hydrostatické váhy jsou váhy upravené pro *hydrostatické vážení*, t. j. pro vážení pevných látek v kapalinách. Jsou to nejčastěji váhy typu [25, IV]; od nich se liší jen tím, že jedna miska (nebo i obě) je kratší a je opatřena zespoda háčkem, na nějž se zavěsí hmota při vážení v kapalině, která je v nádobě stojící pod miskou (25, 9).

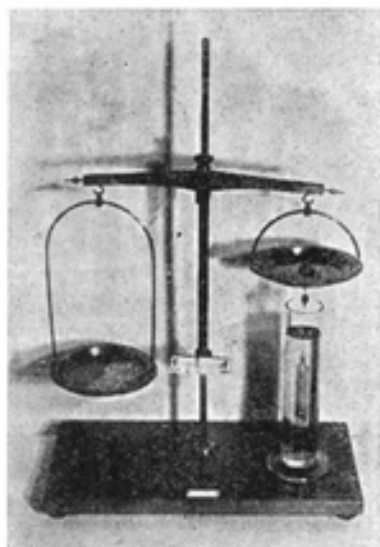
Závaží, kterých používáme při vážení na rovnoramenných vahách, sestávají se v *sady (sádky)*, a to nejčastěji tak, že každá desítka obsahuje závaží

po 1, 2, 2, 5 jednotkách. Tak na př. sada závaží pro váhy *praktikantské* je složena takto:

50 g	20 g	200 g	100 g
5 g	2 g	20 g	10 g
500 mg	200 mg	2 g	1 g
		200 mg	100 mg



Obr. 25,8. Analytické váhy brzděné zn. ESCO.



Obr. 25,9. Hydrostatické váhy.

Z centigramových závaží se nejčastěji užívá jen 5 cg; drobnější závaží nejsou při obvyklé citlivosti těchto vah nutná. Podobně sádka *analytických závaží* do 50 g obsahuje tato závaží:

50 g	20 g	20 g	10 g
5 g	2 g	2 g	1 g
500 mg	200 mg	200 mg	100 mg
50 mg	20 mg	20 mg	10 mg

Menších závaží (miligramových) není třeba, jsou-li váhy opatřeny pravítkem k nasazení jezdce hmoty 1 cg, který zaručuje hmotu přivažku s větší přesností. Mnohdy bývají sady závaží sestaveny podle vzoru (srov. 18)

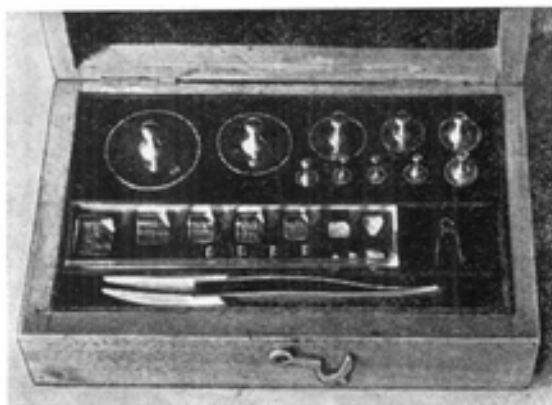
1; 1, 1, 2, 5; 10, 10, 20, 50;...

Závaží *celogramová*, t. j. od 1 g výše, zhotovují se z mosazi a bývají poniklovaná nebo zlacená. Vyskytují-li se v sadě dvě (tři) závaží stejné hodnoty, mají být rozlišena tím, že aspoň jedno (dvě) má značku. Závaží *zlomková* (menší než 1 g) jsou platinové nebo hliníkové plíšky různých tvarů zřejmých ze snímku

25,10, na němž vidíme také nejobvyklejší tvar drátěného jezdece hmoty 1 cg, který se klade mechanicky na dělené pravítko vahadla.

Správnost závaží je podmínkou správného vážení. Nesprávná závaží jsou příčinou soustavných chyb ve výsledcích. Proto je třeba závaží občas pečlivě přezkoušet a výsledky kontroly uplatnit při vážení, nejsou-li odchylky bezvýznamné. *Se závažími je nutno zacházet co nejšetrněji;* zvláště je třeba dbát těchto pokynů:

Závaží celogramových ani zlomkových nesmíme se dotýkat prsty; závaží vyjmeme pinsetou ze sádky a položíme přímo na misku vah; závaží sejmuté s misky vložíme do sádky přímo na příslušné místo. (5)



Obr. 25,10. Sádkka analytických závaží.

26. THEORIE ROVNORAMENNÝCH VAH

V tomto článku podáme stručnou theorii rovnoramenných vah za nejjednodušších předpokladů.

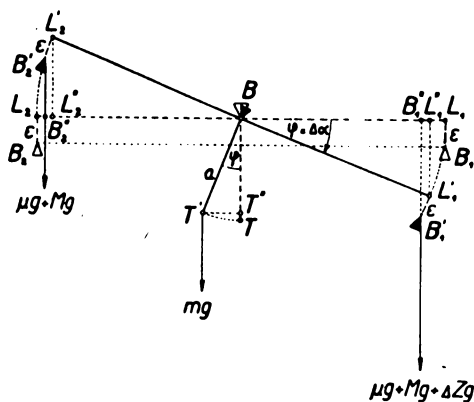
Nejprve si položíme otázku, jakou vzájemnou polohu musí mít břity, aby váhy zůstávaly skutečně *rovnoramenné* při libovolném sklonu vahadla, t. j. aby ramena sil, jimiž tíže působí na hmoty ležící na obou miskách, byla stejná, i když je vahadlo odchýleno od rovnovážné polohy nezatížených vah. Jedině pak se výchylka vah nezmění, když zvětšíme zatížení obou misek o touž hmotu. To znamená, že připojením dvou stejně velkých gravitačních sil, působících na vahadlo v obou krajních břitech, nesmí se porušit rovnováha vah, a tedy výslednice obou sil musí procházet středním břitem. Tato svislá výslednice dvou stejně velkých sil však prochází středem spojujice obou působišť, t. j. středem úsečky spojující oba krajní břity. Kdyby tento střed ležel mimo ostří středního břitu, opisoval by při sklánění vahadla kružnici kolem břitu a zároveň by musel ležet na svislé přímce jdoucí ostřím břitu. To je možno jen tehdy, když střed úsečky spojující oba krajní břity leží v ostří středního břitu. Tedy

váhy jsou jen tehdy rovnoramenné při každém sklonu vahadla, leží-li břity závěsů misek souměrně k střednímu břitu vahadla. (1)

Nyní vyšetříme podmínky rovnováhy na vahách, které odvodíme z podmínky rovnováhy na páce:

Momenty všech sil vzhledem k ose páky musí být v rovnováze (musí se vzájemně rušit). (2)

Jsou-li váhy přesně rovnoramenné, splňují-li tedy podmínku (1), a jsou-li misky přesně stejně těžké, je *rovnovážná poloha nezatížených vah*, kterou krátce nazýváme *nulová poloha*, vyznačena tím bodem na stupnici, na který ukazuje



Obr. 26,1. Rovnovážná poloha zatížených vah.

jazyček, když těžiště T vahadla leží svisle pod středním břitem B . Neboť momenty vah obou misek kolem B se ruší a vahadlo se ustálí v poloze, v níž vymizí moment váhy vahadla, která působí v jeho těžišti (obr: 26,1). Liší-li se poněkud váhy obou misek, vychýlí se vahadlo o malý úhel tak, že převažující moment se ruší momentem váhy vahadla, působící v jeho vychýleném těžišti. Nestejně těžké misky nezavíňují tedy nesprávné vážení, mají jen vliv na nulovou polohu vah. Nulová poloha má být poblíž střední (desáté) čárky stupnice. Není-li tomu tak, upravíme ji matičkami popsanými v čl. 25 tak, aby ležela mezi devátou a jedenáctou čárkou stupnice.

Při stanovení podmínky rovnováhy na zatížených vahách musíme si uvědomit, že se vložením vážené hmoty a závaží na misky vahadlo poněkud ohne a oba závěsné břity se nepatrně sníží. Byla-li tedy podmínka (1) splněna u nezatížených vah, nebude tomu tak u vah zatížených. Váhy tedy přestanou být přesně rovnoramenné, ač ovšem odchylka je u správně konstruovaného vahadla při dovoleném zatížení velmi nepatrná.

Předpokládejme pro jednoduchost, že při nulové poloze vah jsou všechny tři břity na téže vodorovné přímce a že obě ramena vahadla mají stejnou délku l a obě misky stejnou hmotu μ . Pak svislá rovina vedená těžištěm T vahadla o hmotě m protne ostří krajních břitů v bodech L_1, L_2 , vzdálených o l od středního břitu B , jak je naznačeno na obr. 26,1. Zatížíme-li levou misku hmotou M , kterou vyvážíme závažím, jež se liší od hmoty M o malou hodnotu ΔZ , posune se ohnutím vahadla spojnice krajních břitů pod střední břit o malou délku ϵ , kolmou k $\overline{L_1L_2}$. Leží-li těžiště T vahadla ve vzdálenosti δ pod B , ustálí se vahadlo v poloze skloněné proti původní poloze (nulové) o malý úhel $\Delta\alpha$. Tento odklon je podle (2) dán podmínkou, že momenty všech tří

gravitačních sil působících v bodech B'_1 , B'_2 a T' musí být v rovnováze. Podle obr. 26,1 výsledný moment točící v kladném směru (proti ručičkám hodinovým)

$$D = (M + \mu) g (\overline{BL''_2} + \overline{L''_2 B_2}) + mg \overline{T''T'} - \\ - (M + \mu + \Delta Z) g (\overline{BL''_1} - \overline{B''_1 L''_1}).$$

Avšak $BL'_1 = BL'_2 = l$, takže

$$\frac{D}{g} = (M + \mu) (l \cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi) + m\delta \sin \varphi - \\ - (M + \mu + \Delta Z) (l \cos \varphi - \varepsilon \sin \varphi).$$

Je-li ΔZ malá hodnota, můžeme se omezit na malé výchylky a pomíjet čtverce a součiny ΔZ a φ . Píšeme-li tedy

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = 1, \quad \Delta Z \cdot \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

dostaneme

$$\frac{D}{g} = [2(M + \mu)\varepsilon + m\delta] \varphi - l \cdot \Delta Z. \quad (3')$$

Vahadlo se ustálí ve sklonu $\varphi = \Delta\alpha$, daném podmínkou $D = 0$, takže

$$\Delta\alpha = \frac{l}{ma + R\varepsilon} \Delta Z, \quad (4)$$

kde R značí úhrnné zatížení obou závěsů. Odehylka rovnovážné polohy od nulové polohy je tedy při stejném zatížení úměrná rozdílu ΔZ hmot na obou miskách, který jmenujeme *přívazek*:

$$\Delta\alpha = c \cdot \Delta Z, \quad c = \frac{l}{ma + R\varepsilon}, \quad (5)$$

kde konstanta úměrnosti c se nazývá *citlivost vah* a má rozměr úhlu děleného hmotou. Obvykle se však $\Delta\alpha$ vyjadřuje v dílcích stupnice vah a ΔZ v miligramech pro váhy analytické (v cg pro váhy praktikantské), takže jednotka citlivosti je pak dílek/mg (d/mg nebo d/cg).

Při odvozování rovnice (5) jsme vyšli od nulové polohy vah, ale výsledek platí pro malé změny rovnovážné polohy vůbec. Můžeme tedy říci:

Citlivost vah je změna rovnovážné polohy (v dílcích stupnice), dělená přívazkem (v mg), který ji způsobil; (6)

je tedy číselně rovna počtu dílků, o který se posune rovnovážná poloha jednotkovým přívazkem (rovným u analytických vah 1 mg, u praktikantských 1 cg).

Z rovn. (5) vidíme, že citlivost závisí jednak na rozměrech a hmotě vahadla, jednak na zatížení. Změníme-li tedy zatížení obou misek přesně o stejnou hmotu, změní se rovnovážná poloha, ač přívazek ΔZ zůstává beze změny. To není v rozporu s větou (1), ježto prohnutím vahadla klesne spojnice závažných břítů pod ostří středního břítu, a všechny tři břity neleží pak na přímce. K této věci se ještě vrátíme při studiu citlivosti vah, nyní přejdeme k jiné důležité otázce.

Při odjišťování vah (ať zatížených nebo nezatížených) neuvolní se vahadlo přesně v rovnovážné poloze, takže momenty na ně působící se zcela neruší. Proto se vahadlo dostane do této polohy s jistou rychlostí a setrvačností se vychýlí na opačnou stranu rovnovážné polohy. To by se opakovalo bez ustání, kdyby pohyb vahadla nebyl tlumen třením břitů (jde přibližně o valivé tření válce s velmi malým poloměrem na rovinné ploše) a hlavně odporem vzduchu. Tak nastává tlumené kývání, jehož theorii stručně vyložíme.

Z mechaniky tuhých těles je známo, že pro tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy platí *pohybový zákon*¹⁾

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = D_0, \quad (7)$$

kteřý se liší od pohybového zákona (1) pro pohyb posuvný jen tím, že hmotu m tělesa nahrazuje jeho moment setrvačnosti J (viz čl. 40) vzhledem k ose otáčení, místo zrychlení posuvného pohybu a je tu zrychlení úhlové $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a místo síly F výsledný moment sil D_0 vzhledem k ose. Při tom φ značí úhel sevřený rovinou proloženou osou a těžištěm tělesa s libovolnou pevnou rovinou jdoucí osou.

Předpokládejme nyní, že váhy byly zatíženy, jak naznačeno v obr. 26,1, a zvolna odjištěny, takže se vychýlí jen nepatrně. Při velmi malých výchylkách můžeme použít přibližných vztahů (3) a kromě toho můžeme předpokládat, že valivé tření břitů je zanedbatelně malé. Také pohyb vah bude velmi pomalý, takže odpor vzduchu, a tedy i jeho moment D' vzhledem k hraně břitu B bude úměrný první mocnině úhlové rychlosti. Položíme-li tedy

$$D' = -k \frac{d\varphi}{dt},$$

kde k je stálá kladná hodnota (tření působí proti pohybu), budeme mít v rovn. (7)

$$D_0 = -D + D',$$

neboť moment D , který vrací vychýlené vahadlo do rovnovážné polohy a je daný rovnicí (3'), působí v každém okamžiku na opačnou stranu, než na kterou je právě vahadlo vychýleno. Pohyb vahadla je tedy dán vztahem

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = gl\Delta Z - g[R\varepsilon + ma]\varphi - k \frac{d\varphi}{dt},$$

kde J je moment setrvačnosti vahadla i zatížených misek vzhledem k hraně břitu B . Dosazením z (5) a zavedením nových konstant

$$\frac{k}{J} = 2b, \quad \frac{gl}{Jc} = \omega^2 \quad (8)$$

dostaneme rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2b \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 (\varphi - \Delta\alpha) = 0.$$

¹⁾ TF 2.5.13.

Zavedeme místo φ výchylku ψ z rovnovážné polohy $\Delta\alpha$ vztahem

$$\psi = \varphi - \Delta\alpha. \quad (9)$$

Tak dostaneme konečně diferenciální rovnici 2. řádu se stálými činiteli:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2b \frac{d\psi}{dt} + \omega^2\psi = 0, \quad (10)$$

jejíž obecný integrál má tvar

$$\psi = C_1 e^{\beta_1 t} + C_2 e^{\beta_2 t}; \quad (11)$$

C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, β_1 , β_2 jsou kořeny kvadratické rovnice (charakteristické) a jsou dány vztahem

$$\beta_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}, \quad (12)$$

jak obdržíme dosazením (11) do (10).²⁾

Pohyb vah závisí tedy podstatně na vzájemné velikosti konstant ω a b .

Je-li totiž

1. $\omega \leq b$, jsou oba kořeny (12) reálné [nebo stejné pro $\omega = b$], a řešení diferenciální rovnice (10) je dáno *neperiodickou* funkcí s *reálnými* exponenty:²⁾

$$\psi = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t} \quad (\omega < b)$$

nebo

$$\psi = (A + Bt) e^{-\omega t} \quad (\omega = b).$$

Integrační konstanty se určí z t. zv. počátečních podmínek, t. j. z výchylky a úhlové rychlosti v okamžiku, kdy skončilo odjišťování a váhy byly přenechány jen působení tíže. Po každé však po uplynutí jisté doby počne výchylka trvale klesat a ψ se asymptoticky blíží nule. To znamená podle (9), že jazýček se blíží rovnovážné poloze vah $\Delta\alpha$.

To je případ brzděných vah [25, VI], u nichž je umělé tlumení tak voleno, aby bylo b o málo větší než ω . Tak se vychýlené váhy vrátí do rovnovážné polohy „aperiodicky“ (aniž jazýček přejde přes rovnovážnou polohu), a to prakticky dosti rychle (během několika vteřin, ač theoreticky dosáhnou přesné rovnovážné polohy až po nekonečně dlouhé době); tedy u brzděných vah je určení rovnovážné (a ovšem i nulové) polohy velmi jednoduše vyřešeno: vyčkáme prostě, až se váhy po uvolnění ustálí, a zjistíme polohu ukazatele na stupnici.

Jinak je tomu u vah nebrzděných [25, V], u nichž obvykle konstanta útlumu má dosti malou hodnotu, takže

2. $b < \omega$; proto položíme

$$\sqrt{\omega^2 - b^2} = \bar{\omega} \quad (13)$$

a kořeny (12), které tu jsou soujenně sdružené, píšeme ve tvaru

$$\beta_{1,2} = -b \pm i\bar{\omega} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (14)$$

26 ²⁾ Srov. na př. J. Vojtěch: Základy matematiky II, 1946, čl. 231.

Po dosažení do (11) můžeme tedy odstranit imaginární exponenty použitím *Moirvoy* poučky, a dostaneme

$$\psi = C e^{-bt} \cdot \sin(\bar{\omega}t + \gamma), \quad (15)$$

kde C a γ jsou libovolné konstanty. Pišeme-li pak

$$A = C e^{-bt}, \quad (16)$$

vidíme, že jazýček vah koná *tlumený pohyb harmonický*:

$$\psi = A \sin(\bar{\omega}t + \gamma); \quad (17)$$

rozkyv A se tu zmenšuje s časem podle exponenciální funkce a kruhová frekvence $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$ je dána rovnicí (13). Tedy doba kyvu (t. j. poloviční doba kmitová)

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{T}}{2} = \frac{1}{2\bar{f}} = \frac{\pi}{\bar{\omega}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \quad (18)$$

je větší, než by byla při zcela netlumených kyvech. Poměr prostých velikostí dvou rozkyvů (na opačné strany), které po sobě následují po době jednoho kyvu $\bar{\tau}$, je podle (16) roven stálé hodnotě

$$\xi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{e^{-bt}}{e^{-b(t+\bar{\tau})}} = e^{b\bar{\tau}} = e^{b\frac{\bar{T}}{2}} = \sqrt{\lambda}; \quad (19)$$

zde λ značí *útlum*, definovaný jako poměr dvou po sobě jdoucích rozkyvů na to už stranu (dvou lichých nebo dvou sudých). Z rovn. (19) plyne totiž

$$\lambda = \frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+2}} = e^{b \cdot 2\bar{\tau}} = e^{b\bar{T}}, \quad (20)$$

a tedy přirozený logaritmus útlumu, zvaný *logaritmický dekrement*,

$$\Lambda = \ln \lambda = b\bar{T}. \quad (20')$$

Je-li útlum blízký jedné, je Λ blízké nule a podle (20) a (19) můžeme psát přibližně

$$\lambda \doteq 1 + b\bar{T} = 1 + \Lambda, \quad \Lambda \doteq \lambda - 1, \quad (21)$$

$$\xi \doteq 1 + b\bar{\tau} = 1 + \frac{\Lambda}{2}, \quad \Lambda \doteq 2(\xi - 1). \quad (22)$$

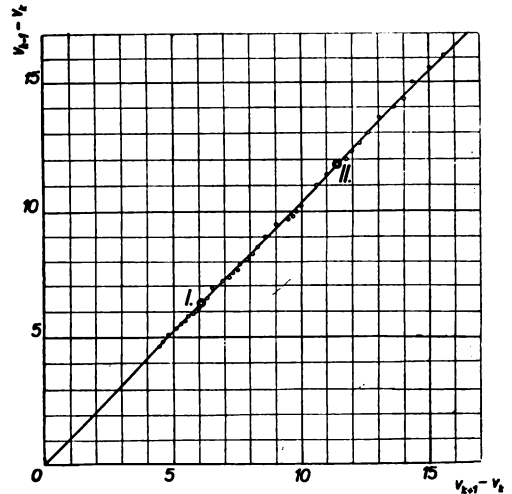
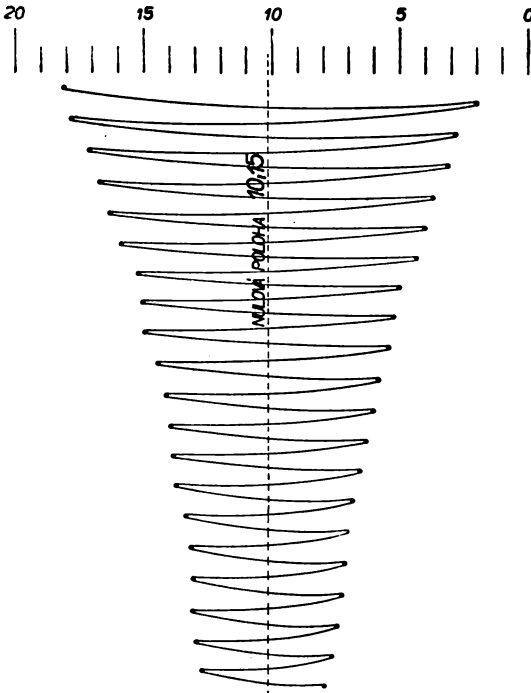
Tak tomu je právě u vah [25, V], které jsme nazvali nebrzděné, abychom je rozlišili od vah aperiodicky tlumených (brzděných). Doba kyvu bývá asi 10 vteřin (i více) a logaritmický dekrement několik setin; proto není možno čekat, až se váhy ustálí v rovnovážné poloze. Tak vzniká důležitá otázka, jak určit *nulové a rovnovážné polohy nebrzděných vah*, kterou budeme řešit v čl. 27. Zde jen ukážeme, jak vyložená teorie souhlasí se skutečností. Výsledek pozorování 42 kyvů nebrzděných analytických vah (nezatížených) je znázorněn na obr. 26, 2. Pod stupnici vah ve zvětšeném měřítku jsou vyznačeny kyvy jazýčku kruhovými oblouky spojujícími „body obratu“, v nichž se jazýček při každém kyvu zastavil a změnil směr pohybu. Čtení na stupnici, příslušné každému z těchto bodů, nazveme stručně *výkyv* (jazýčku, vah) a označíme v_k , kde k je pořadové

číslo výkyvu bez zřetele na směr kyvu. Tak první výkyv (vlevo) je $v_1 = 18,1$, druhý výkyv (vpravo) $v_2 = 2,0$, třetí (vlevo) $v_3 = 17,8$ atd., vesměs v dílcích stupnice. Značí-li r rovnovážnou polohu jazýčku (v našem případě nezatižených vah jde o nulovou polohu) a je-li $v_k > r$, je prostá velikost k -tého rozkyvu A_k v týchž dílcích dána rozdílem

$$A_k = v_k - r; \quad (23)$$

pak ovšem

$$v_{k-1} < r, \quad v_{k+1} < r,$$



Obr. 26,2. Mírně tlumené kyvy nebrzděných analytických vah.

Obr. 26,3. Grafické určení útlumu vah.

a tedy

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= r - v_{k-1}, \\ A_{k+1} &= r - v_{k+1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Proto podle (19), (23) a (24)

$$\xi = \frac{v_k - r}{r - v_{k+1}} = \frac{r - v_{k-1}}{v_k - r} \quad (25)$$

čili

$$\begin{aligned} v_k - r &= (r - v_{k+1}) \cdot \xi, \\ v_{k-1} - r &= (r - v_k) \cdot \xi; \end{aligned}$$

odečtením první rovnice od druhé a dělením $v_{k+1} - v_k$ dostaneme

$$\frac{v_{k-1} - v_k}{v_{k+1} - v_k} = \xi. \quad (26)$$

Přiradíme-li tedy každému výkyvu kromě prvního a posledního bod, který pro k -tý výkyv má pravoúhlé souřadnice

$$t_k = |v_{k+1} - v_k|, \quad x_k = |v_{k-1} - v_k|,$$

mají tyto body podle naší theorie ležet na přímce jdoucí počátkem soustavy. Směrnice této přímky je rovna ξ a podle (19) dostaneme umocněním útlum

$$\lambda = \xi^2; \quad (27)$$

to bylo provedeno na obr. 26,3, z něhož je zřejmo, že se theorie v tomto případě velmi dobře potvrzuje. Body leží velmi přibližně na přímce určené grafickou vyrovnávací methodou 16 (2) jako spojnice těžiště I levé poloviny bodů s těžištěm II pravé poloviny bodů.

Tato přímka prochází skutečně v mezích přesnosti konstrukce počátkem souřadnicové soustavy a její směrnice $\xi = 1,036$. Vztah (27) dává tedy pro útlum hodnotu $\lambda = 1,073$. Logaritmický dekrement kyvů je podle (21) nebo (22)

$$\Lambda = 0,073.$$

Pozorování kyvů několika jiných analytických vah vedlo k hodnotám

$$\Lambda = 0,02 \quad \text{až} \quad \Lambda = 0,10.$$

Poznámka. V predešlé theorii jsme mlčky předpokládali, že obě misky visí stále svisle na závěsech a z této polohy se nevychylují. Ve skutečnosti to tak vždy nebývá, zvláště při zatížených vahách. Kývání misek na závěsech může vzniknout neopatrným odjišťováním vah, ale nejčastěji je zaviněno výstředním umístěním vážené hmoty nebo závaží na miskách. Kývající misky působí v závěsech periodicky proměnnými silami a ruší tak kyvy vahadla. Obě misky tvoří totiž s vahadlem vázaná (sprážená) kyvadla a je známo, že taková kyvadla působí vzájemně na své pohyby. Pak ovšem se rozkyvy vahadla netlumí popsáním způsobem — mohou se dokonce i zvětšovat — a naše theorie, na níž je založen přesný způsob určení rovnovážné polohy 27 (13), pozbývá platnosti. Proto *nesmíme připustit znatelné kývání misek kolem závěsných břitů*, a nastane-li, musíme kývání utlumit. Především je nutno klást předmět i závaží na misky tak, aby těžiště bylo pokud možno uprostřed misky. Váhy odjišťujeme co nejpomaleji nebo je uvolníme jen zpola, aby misky mohly zaujmout svislou polohu, a podchytíme je zajištěním v okamžiku, kdy jsou v této poloze. U praktikantských vah (bez skřínky) je možno utlumit kyv misek kouskem papíru, přidržným u okraje misky, nebo tím, že tužku opřenou tupým koncem o základní desku vah přikládáme k okraji rozkývané misky tak, aby se její kyvy slabými nárazy postupně utlumily.

27. ZÁKLADY VÁŽENÍ

Na rovnoramenných vahách vážíme methodou nulovou, při níž hledíme závažími ze sádky vyvážit měřenou hmotu tak, aby rovnovážná poloha zatížených vah byla pokud možno táž jako rovnovážná poloha vah nezatížených, zvaná nulová. Kdybychom chtěli skutečně vyvážit hmotu, ať již drobnými závažími nebo jezdcem, tak dokonale, aby rovnovážná poloha splývala s nulovou až na desetiny dílků stupnice, bylo by vážení velmi zdouhavé; proto používáme

raději metody interpolační (čl. 18): spokojíme se tím, že vyvážíme danou hmotu jen přibližně tak, aby rovnovážná poloha byla poblíž nulové polohy. Klademe-li závaží na pravou misku a čteme-li dílky na stupnici od pravé ruky k levé, stoupá rovnovážná poloha při zvětšování závaží (posouvá se vlevo) a klesá při jeho zmenšování (posouvá se vpravo). Je-li tedy rovnovážná poloha *menší* než nulová, *přidáme* závaží (nebo posuneme jezdec na pravém rameně vahadla *vpravo*), je-li však rovnovážná poloha *větší*, *ubereme* závaží (posuneme jezdec *vlevo*) tak, abychom vždy dostali *dvě rovnovážné polohy po různých stranách nulové polohy*. Velikost závaží, které by přivedlo vahadlo do rovnovážné polohy shodné s nulovou polohou, určíme pak *přímkovou interpolací* postupem 18 (2) nebo přímo interpolačním vzorcem 18 (1).

Je-li n nulová poloha vah, r_1 rovnovážná poloha při zatížení levé misky hmotou M a pravé misky závažím Z_1 a je-li r_2 rovnovážná poloha vah při vyvážení téže hmoty závažím Z_2 , pak závaží Z , kterým by se dosáhlo nulové polohy, je dáno výrazem

$$Z = Z_1 + \frac{n - r_1}{r_2 - r_1} (Z_2 - Z_1). \quad (1)$$

Rozdíl závaží

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1, \quad (2)$$

který mívá u analytických vah velikost 1—3 mg, u praktikantských několik centigramů, nazýváme *přivažek* a vyjadřujeme v prvním případě v mg, v druhém v cg. Podle věty 26(6) je však

$$r_2 - r_1 = c (Z_2 - Z_1) = c \Delta Z, \quad (3)$$

kde c je citlivost vah při daném zatížení. Můžeme tedy vztah (1) psát ve tvaru

$$Z = Z_1 + \frac{n - r_1}{c} \text{ nebo } Z = Z_2 + \frac{n - r_2}{c}; \quad (4)$$

citlivost tu bereme vždy kladně, ale odchylku rovnovážné polohy r_1 nebo r_2 od nulové polohy n vždy s příslušným znaménkem.

Z předešlého výkladu plyne tato interpolační metoda vážení: }

Určíme nulovou polohu vah; měřenou hmotu vyvážíme tak, aby rovnovážná poloha byla poblíž nulové polohy; zvětšíme nebo zmenšíme závaží o malý přivažek tak, aby druhá rovnovážná poloha padla na opačnou stranu nulové polohy než první; správné závaží dostaneme, přičteme-li k prvnímu závaží rozdíl nulové a první rovnovážné polohy, dělený citlivostí vah (která je rovna rozdílu obou rovnovážných poloh, dělenému přivažkem). (5)

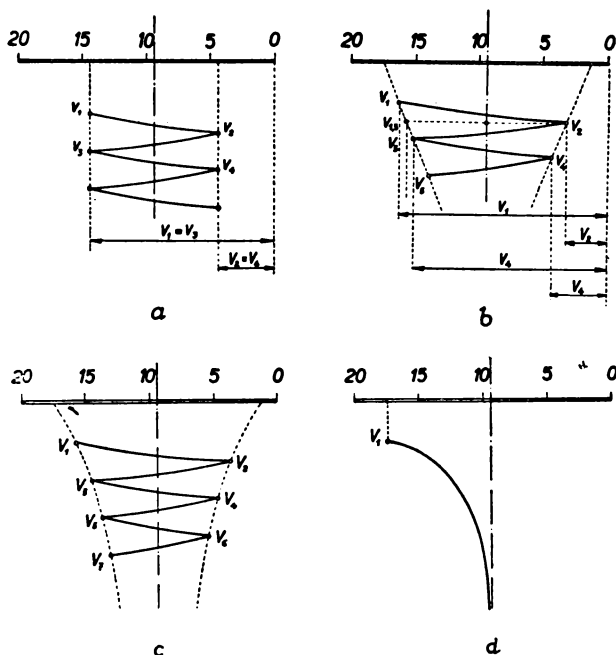
Tím je dán princip metody, k jejímuž praktickému použití je třeba najít vhodný způsob k určení nulové a rovnovážné polohy, a to bude našim nejbližším úkolem.

Jak už jsme řekli v předešlém článku, je vhodné vyčkat ustálení vah v nulové nebo rovnovážné poloze jen u vah brzděných, přesněji řečeno aperiodicky tlumených [25, VI]. U vah nebrzděných (velmi málo tlumených) musíme odvodit nulovou i rovnovážnou polohu z pozorovaných výkyvů jazýčku. V různých příručkách se doporučují různé způsoby výpočtu rovnovážné polohy z výkyvů, a proto odvodíme obecný vzorec, a z něho bude možno posoudit přesnost vzorců užívaných v praxi. Začneme zvláštními případy, znázorněnými na obr. 27, 1a—d.

1. Kdyby byly váhy naprosto netlumené, kdyby tedy velikost rozkyvů byla stálá, ležela by rovnovážná (nulová) poloha *uprostřed mezi dvěma po sobě jdoucími výkyvy*, a mohli bychom ji tedy určit podle vzorce

$$r = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (6)$$

nebo přesněji (vzhledem k pozorovacím chybám) jako průměr *sudého* počtu výkyvů.



Obr. 27,1: Různé případy útlumu vah:

a – velikosti rozkyvů neubývá; b – rozkyvy se zmenšují řadou aritmetickou (lineárně); c – rozkyvy se zmenšují řadou geometrickou (exponenciálně); d – aperiodické tlumení.

2. Kdyby rozkyvy tvořily řadu aritmetickou a kdyby jejich velikost od rozkyvu k rozkyvu klesala vždy o touž hodnotu, ležela by rovnovážná poloha uprostřed mezi bodem obratu v_2 a půlicím bodem $v_{1,3}$ úsečky $\overline{v_1 v_3}$, takže bychom tu mohli počítat rovnovážnou polohu ze tří výkyvů podle vzorce

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 + v_3}{2} + v_2 \right). \quad (7)$$

Přesnější vzorec bychom dostali, kdybychom se zřetelem k náhodným chybám počítali rovnovážnou polohu obecně z lichého počtu výkyvů jako průměr aritmetického středu lichých výkyvů a aritmetického středu sudých výkyvů, t. j. jako průměr středních hodnot levých a pravých výkyvů. Tak bychom dostali na př. pro pět výkyvů

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 + v_3 + v_5}{3} + \frac{v_2 + v_4}{2} \right). \quad (8)$$

3. Ve skutečnosti, jak jsme viděli v čl. 26, ubývá rozkyvů řadou geometrickou, neboť podle 26 (19) je poměr dvou následujících rozkyvů stálý. Body obratu neleží na přímkách, nýbrž na dvou exponenciálních křivkách. Pro rovnovážnou polohu vah neplatí tedy přesně vzorec (7) a tím méně (6). Tento případ budeme řešit podrobněji.

4. Při velmi značném útlumu, kdy již váhy nekyvají, ale vracejí se po jisté době prakticky do rovnovážné polohy, je tato poloha určena ustálenou polohou jazýčku, jak bylo již řečeno v čl. 26.

Vraťme se k případu 3, probranému podrobně v předešlém článku. Z rovnic 26 (23) až 26 (25) plynou pro $k = 1, 2, \dots$ vztahy

$$\begin{aligned} v_1 - r &= A_1, \\ r - v_2 &= \frac{1}{\xi} (v_1 - r) = \frac{A_1}{\xi}, \\ v_3 - r &= -\frac{1}{\xi} (v_2 - r) = \frac{A_1}{\xi^2}, \\ r - v_4 &= \frac{A_1}{\xi^3}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pro n po sobě jdoucích výkyvů platí tedy rovnice:

$$\begin{aligned} v_1 &= r + A_1, \\ v_2 &= r - \frac{A_1}{\xi}, \\ v_3 &= r + \frac{A_1}{\xi^2}, \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= r + (-1)^{n-1} \frac{A_1}{\xi^{n-1}}. \end{aligned}$$

Násobme je po řadě binomickými součiniteli

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{0} &= 1, \quad \binom{n-1}{1} = n-1, \\ \binom{n-1}{2} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \dots, \quad \binom{n-1}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

a sečtěme. Podle binomické věty dostaneme

$$v_1 + (n-1)v_2 + \binom{n-1}{2}v_3 + \dots + v_n = r(1+1)^{n-1} + A_1\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{n-1},$$

odkud

$$r = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ v_1 + (n-1)v_2 + \binom{n-1}{2}v_3 + \dots + v_n \right\} - \varrho, \quad (9)$$

kde vzhledem k 26 (22)

$$\varrho = \frac{A_1}{2^{n-1}} \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^{n-1} = \left(\frac{A}{4\xi} \right)^{n-1} A_1. \quad (10)$$

Rovnice (9) není vhodná pro praktický výpočet rovnovážné (nulové) polohy, ježto bychom museli znát útlum vah a velikost prvního rozkyvu. Velikost ϱ pro různá n však snadno odhadneme. Vyjádříme-li r , ϱ , A_1 v dílcích stupnice, bude $A_1 \leq 10$, takže

$$\varrho \leq 10 \left(\frac{A}{4\xi} \right)^{n-1} = \varrho'. \quad (11)$$

U jemných analytických vah bývá $\xi \doteq 1,01 \div 1,05$, tedy $A = 0,02 \div 0,10$, u hrubších vah však dosahuje ξ hodnot $1,1 \div 1,2$ i větších, tedy $A = 0,2 \div 0,4$ ¹⁾. Dosazením do (11) dostáváme tabulku přibližných hodnot ϱ' :

n	A	0,1	0,2	0,3	0,4
2		0,24	0,46	0,65	0,83
3		0,0062	0,021	0,043	0,069
4		0,0002	0,001	0,003	0,006

Protože nulové a rovnovážné polohy určujeme na 0,1 dílku, můžeme ϱ pomíjet, pokud je menší než 0,05 dílku. To nelze učinit pro $n = 2$ v žádném z hořejších případů, a proto nelze použít vzorce, který plyne z (9) pro $n = 2$ a který je totožný s (6). Klademe-li naproti tomu $n = 4$ a $\varrho = 0$, dostáváme z (9) vzorec

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{8} (v_1 + 3v_2 + 3v_3 + v_4) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 + v_3}{2} + v_2 + \frac{v_2 + v_4}{2} + v_3 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

kteřý je dostatečně přesný ve všech prakticky možných případech. Konečně pro $n = 3$ dostaneme vzorec

$$r = \frac{1}{4} (v_1 + 2v_2 + v_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 + v_3}{2} + v_2 \right)$$

shodný s (7), který je správný v případě, kdy tlumení kyvů je tak malé, že můžeme předpokládat lineární klesání rozkyvu. Vyhovuje s dostatečnou přesností, pokud $\delta < 0,3$ čili pro $\xi < 1,14$, a lze ho theoreticky použít pro analytické váhy s obvyklým tlumením za předpokladu, že hodnoty výkyvů, čtené na desetiny dílku, jsou přesné. Tento předpoklad není ovšem splněn, ježto zjišťujeme jediný sudý výkyv a nemáme tedy kontrolu správnosti čtení, nehledě ani k tomu, že není vyloučen omyl při čtení výkyvu v_2 . K bezpečnému určení rovnovážné polohy nestačí tedy vlastně pozorování tří výkyvů, a proto

¹⁾ Při hydrostatickém vážení se ovšem útlum zvýší třením v kapalině, které je úměrné rychlosti (jak jsme předpokládali).

se postup buď opakuje, nebo se používá výpočtu z pěti výkyvů podle vzorce (8), který je s hlediska teorie chyb správnější než (7), ale nesouhlasí se vzorcem (9) pro $n = 5$.²⁾ Ostatně vzorec (8) nemá jednoduchost vzorce (7) a opakované určení rovnovážné polohy ze tří výkyvů vyžaduje dvojnásobnou dobu. Proto doporučuje *Thiesen* výpočet ze 4 výkyvů podle vzorce (12), který ve všech případech vyhovuje teorii vah a ve kterém liché i sudé výkyvy jsou zastoupeny dvěma hodnotami. Výraz (12) je roven průměru rovnovážných poloh r' a r'' , počítaných podle (7) z 1., 2., 3. a z 2., 3., 4. výkyvu. Výpočet je tedy úplně stejný jako při opakovaném užití vzorce (7), ale pozorujeme jen 4 výkyvy místo 6.

I když pozorujeme čtyři kyvy, můžeme se často omezit na výpočet ze tří výkyvů. Stává se totiž (zvláště při malém tlumení), že vyjde úbytek lichých výkyvů stejný jako přírůstek sudých.³⁾ Pak

$$v_1 - v_3 = v_4 - v_2,$$

a tedy

$$\begin{aligned} 4r' &= v_1 + v_3 + 2v_2 = v_4 - v_2 + v_3 + v_3 + 2v_2 = \\ &= v_2 + v_4 + 2v_3 = 4r''. \end{aligned}$$

Vidíme, že vzorec (12) dává touž rovnovážnou polohu jako (7) a je tedy zbytečné počítat r'' .

Postup výpočtu ze čtyř výkyvů si snadno zapamatujeme:

Pozorujeme 4 po sobě jdoucí výkyvy a určíme rovnovážnou polohu podle vzorce (7) nejprve z 1., 2. a 3., potom z 2., 3. a 4. výkyvu a vezmeme z obou výsledků průměr. Druhý výpočet je zbytečný, je-li rozdíl výkyvů vlevo i vpravo stejný. (13)

Záznam pozorovaných výkyvů a výpočet provádíme podle schematu

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline & v_{1,3} & v_{2,4} & \\ & 2r' & 2r'' & \end{array} \quad r = \frac{2r' + 2r''}{2} : 2. \quad (14)$$

Napišeme 4 výkyvy do téže řádky v pořadí, jak byly pozorovány. Pod v_2 napíšeme průměr $v_{1,3}$ lichých výkyvů, pod v_3 průměr $v_{2,4}$ sudých výkyvů a čísla stojící pod sebou sečteme. Tak dostaneme dvojnásobky hodnot r' a r'' , které plynou pro rovnovážnou polohu z 1., 2., 3. a z 2., 3., 4. výkyvu. Jejich průměr dává r . Přitom průměr $v_{1,3}$ počítáme zpaměti tak, že k menšímu z obou výkyvů přičteme jejich poloviční rozdíl. Stejně počítáme $v_{2,4}$ a průměr hodnot $2r'$ a $2r''$, který teprve pak dělíme dvěma; dostaneme tak hledanou rovnovážnou polohu. Na př.

$$\begin{array}{cccc} 6,2 & 15,2 & 6,7 & 14,9 \\ & 6,45 & 15,05 & \\ \hline & 21,65 & 21,75 & r = 21,70 : 2 = 10,85 \end{array}$$

²⁾ Lze ukázat, že při správných hodnotách v_1, \dots, v_5 je odchylka hodnoty (8) od skutečné rovnovážné polohy větší než hodnoty (7), počítané ze tří správných výkyvů.

³⁾ Znamená to, že v mezích přesnosti pozorování ubývá rozkyvů (zaokrouhlených hodnot) aritmetickou řadou, kdežto podle theoretického vztahu 26 (20) má být poměrný úbytek sudých rozkyvů stejný jako lichých, tedy vzhledem k jejich menší velikosti má být prostý úbytek menší.

nebo

$$\begin{array}{cccc} 12,7 & 6,8 & 12,5 & 7,0 \\ & 12,6 & & \\ \hline & 19,4 & r = 9,7. & \end{array}$$

V prvním případě se liší r' a r'' o celou desetinu dílku, ačkoliv A je tu přibližně rovno 0,08, takže při správném čtení by měly být obě hodnoty rovny skutečné rovnovážné poloze. V druhém případě pak $v_1 - v_3 = v_4 - v_2 = 0,2$, a proto byl výpočet podle (13) proveden jen ze 3 výkyvů.

Jak již bylo řečeno, odhadujeme při čtení výkyvů desetiny dílku, výpočet je však vhodné provést buď na setiny dílků, nebo aspoň poloviny desetin nezaokrouhlovat, aby se výsledky neskreslovaly.

28. OPRAVY A KONTROLY

V předešlém článku jsme popsali interpolační metodu vážení 27 (5), kterou zjistíme správné závaží, přesně vyvažující na daných vahách měřenou hmotu. Při tom nebylo řečeno, že hmota tohoto závaží Z , určeného vzorcem 27 (1) nebo 27 (4), je přesně rovna měřené hmotě. K tomu by bylo třeba splnit tyto podmínky:

1. *Tíhové zrychlení působící na hmotu i závaží musí být stejné.*
2. *Váhy musí být přesně rovnoramenné.*
3. *Vztlak vzduchu, nadlehčující měřenou hmotu i závaží, musí být stejný.*
4. *Závaží musí být správná.*

Podmínka 1 je splněna s dostatečnou přesností při všech obvyklých váženích. Jen při výjimečně přesném vážení základního významu je nutno brát opravu na výškový rozdíl (na nestejnorodost gravitačního pole). Snadným výpočtem plyne totiž z gravitačního zákona 25 (2) nebo z 25 (4), že v místě o 1 m níže položeném je váha každé hmoty větší v poměru

$$1 + \frac{2}{6,4 \cdot 10^6} = 1,000\ 000\ 3 = 1 + 3 \cdot 10^{-7}.$$

Tedy i při nejpřesnějším vážení je tato oprava nutná teprve tehdy, je-li rozdíl výšek aspoň 20 cm. To se může stát ovšem jen při vážení na hydrostatických vahách, kde hmota ponořená do kapaliny visí pod závažím položeným na misce. Naproti tomu se rovnoramennosti vah zpravidla nedosahuje s přesností rovnou relativní přesnosti vážení a též rozdíl vztlaku — až na výjimečné případy — převyšuje značně chybu přípustnou při vážení. Pokud jde o závaží, lze předpokládat, že jsou správná, jsou-li nová (analytická) závaží. Opotřebovaná závaží však je radno přezkoušet. O příslušných korekcích, napravujících odchylky od podmínek 2, 3, 4, promluvíme nyní podrobněji.

28.1. Nerovnoramennost vah

Dosud jsme předpokládali, že obě ramena jsou přesně stejná a jejich společnou délku jsme označili l . Kdyby byl i vztlak vzduchu na obou stranách stejný, bylo by $M = Z$, vážená hmota by byla přesně rovna hmotě závaží.

Je-li však délka l' levého ramena jiná než délka l pravého ramena, plyne z podmínky rovnováhy 26 (2) vztah

$$Ml' = Zl, \quad (1)$$

takže

$$M = \frac{l}{l'} Z = Z + \left(\frac{l}{l'} - 1 \right) Z. \quad (2)$$

Hmota vážená na levé misce rovná se tedy hmotě závaží na pravé misce, násobené poměrem délky pravého ramena k délce levého ramena.

Při obvyklém způsobu vážení je tedy nutno znát poměr délky ramen k změření přesné velikosti hmoty. Tento poměr však nebývá předem znám a kromě toho není zcela stálý. Proto se vážení opakuje s měřenou hmotou na pravé a se závažím na levé misce. Pak interpolační metoda poskytne pro správné závaží hodnotu Z' , pro niž patrně platí

$$Z'l' = Ml. \quad (1')$$

Vzájemným násobením (1) a (1') dostaneme

$$MZ'l'^2 = MZl^2, \quad (3)$$

odkud můžeme vypočítat poměr ramen:

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{Z'}{Z}}.$$

Vzhledem k tomu, že poměr ramen je velmi blízký jedné, jsou také obě závaží téměř stejná a můžeme tedy jejich geometrický průměr nahradit aritmetickým, čímž dostaneme pro poměr pravého ramena k levému:

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{Z'Z}{Z^2}} \doteq \frac{1}{2} \frac{Z + Z'}{Z} = 1 + \frac{1}{2} \frac{Z' - Z}{Z}. \quad (4)$$

Příklad. K zjištění poměru ramen analytických vah bylo provedeno dvojnásobné vážení 50gramového závaží podle 27 (5).

I. Při prvním vážení bylo toto závaží na levé misce vyváženo zbývajícími závažími na pravé misce:

Nulová poloha před vážením $n_1 = 10,05$.

Rovnovážná poloha $r_1 = 9,65$ při zatížení $Z_1 = 49,9980$ g.

Rovnovážná poloha $r_2 = 11,5$ při zatížení $Z_2 = 49,9990$ g.

Nulová poloha po vážení $n_2 = 10,0$.

Střední hodnota nulové polohy $n = \frac{n_1 + n_2}{2} = 10,03$.

Citlivost vah podle 26 (6) $c = \frac{11,5 - 9,65}{1 \text{ mg}} \text{ d} = 1,85 \text{ d/mg}$.

Závaží Z_1 nutno tedy opravit podle 27 (4) o hodnotu

$$\Delta Z_1 = \frac{10,03 - 9,65}{1,85} \text{ mg} = 0,21 \text{ mg} \doteq 0,2 \text{ mg}.$$

Správné závaží $Z = 49,9982$ g.

II. Při druhém vážení bylo závaží 50 g na pravé misce vyváženo závažím Z' na levé misce, které jsme určili takto¹⁾:

$$n'_1 = 10,0,$$

$$r'_1 = 10,65 \text{ při zatížení } Z'_1 = 49,9980 \text{ g,}$$

$$r'_2 = 8,85 \text{ při zatížení } Z'_2 = 49,9990 \text{ g,}$$

$$n'_2 = 9,95, \quad n' = 9,98,$$

$$c' = \frac{10,65 - 8,85}{1 \text{ mg}} d = 1,80 \text{ d/mg,}$$

$$\Delta Z'_1 = \frac{10,65 - 9,98}{1,8} \text{ mg} = \frac{0,67}{1,8} \text{ mg} = 0,37 \text{ mg} \doteq 0,4 \text{ mg.}$$

Poměr ramen (4) je tedy s dostačující přesností určen hodnotou

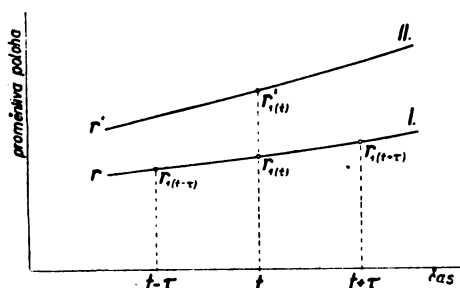
$$\frac{l}{l'} = 1 + \frac{1}{2} \frac{0,0002}{49,9982} = 1,000 \ 002.$$

Oprava na nerovnoramennost vah činí tedy podle (2)

$$+ 0,000 \ 002 Z = 2 \cdot 10^{-6} Z,$$

a správnou hmotu dostaneme, zvětšíme-li závaží na pravé misce o dvě miliontiny jeho hmoty.

K nerovnoramennosti vah není třeba přihlížet, má-li se zjistit jen *poměr* dvou hmot, t. j. při *vážení relativním* (poměrném), vážíme-li ovšem obě hmoty na týchž vahách a smíme-li předpokládat, že poměr ramen je pro obě vážení



Obr. 28, 1. Vyloučení časových změn konstant vah.

stejný. Tak je tomu na př. při zjišťování hutnosti plynů, při kvantitativním chemickém rozboru (určování poměrného množství látek), při měření hustoty hydrostatickým vážením a pod. K nerovnoramennosti vah se však musí přihlížet při zjišťování absolutní velikosti hmot, tedy při *vážení absolutním*. Tak je tomu při měření objemu hydrostatickou methodou, při určování hustoty jako poměru hmoty a objemu, určeného z rozměrů těles, při měření proudu voltametrem a pod.

Pro absolutní vážení používáme v podstatě dvou method, které dávají absolutní velikost hmoty, aniž je třeba určovat poměr ramen. Tyto absolutní methody vážení vyložíme v následujících člancích.

¹⁾ Ježto závaží a vážená hmoty jsou zaměněny, klesá rovnovážná poloha s rostoucím závažím a ve vzorcích pro c a ΔZ se změni znaménko.

28.2. Methoda dvojitého vážení (*Gauss*)

Z rovnic (1) a (1') můžeme kromě poměru ramen odvodit také správnou hmotu váženého tělesa. Dělíme-li vzájemně obě rovnice, obdržíme

$$\frac{M}{Z'} = \frac{Z}{M},$$

odkud

$$M = \sqrt{Z Z'} = \frac{Z + Z'}{2}. \quad (5)$$

Na tom je založena *Gaussova* metoda dvojitého vážení, kterou můžeme ještě zjednodušit, známe-li citlivost vah.²⁾ Pak není třeba znát nulovou polohu a stačí určit při každém vážení jednu rovnovážnou polohu r_1 a r'_1 pro jedno zatížení Z_1 a Z'_1 ; podle 27 (4) je totiž vzhledem k poznámce 28¹⁾

$$Z = Z_1 + \frac{n - r_1}{c}, \quad Z' = Z'_1 + \frac{r'_1 - n}{c}$$

a podle (5)

$$M = \frac{Z_1 + Z'_1}{2} + \frac{r'_1 - r_1}{2c}.$$

Předpokládá to ovšem, že ani nulová poloha, ani citlivost se mezi oběma váženími znatelně nezměnily. I když to není dosti přesně splněno, lze přece mít za to, že obě hodnoty (a poměr ramen) se mění rovnoměrně (lineárně) s časem. Proto se vliv nepatrných změn dá vyloučit tak, že obě vážení provedeme znovu v opačném pořadí a se stejným časovým rozdílem jako původně nebo jednodušeji: opakujeme vážení I za dobu τ po vážení II tak, aby okamžik t vážení II ležel uprostřed mezi okamžiky $t - \tau$, $t + \tau$ obou vážení I. Z málo odlišných hodnot Z_1 a r_1 , které dostaneme při obou váženích I, vezmeme pak střed. Oprávněnost tohoto postupu vysvětluje obr. 28,1, v němž čáry I a II značí přibližně přímkový časový průběh jmenovaných „konstant“. Průměr hodnot $r_1(t - \tau)$ a $r_1(t + \tau)$ je patrně roven $r_1(t)$, a tedy výsledek je týž, jako kdybychom obě vážení provedli v téměř okamžiku t .

V příkladu v čl. 28.1 vyšlo by z rovnice (5)

$$M = 49,9983 \text{ g.}$$

28.3. Methody tárovačí (*Borda, Menděljev*)

Nerovnoramennost vah možno vyloučit také jiným způsobem, založeným na principu substitučním:

Váženou hmotu M položenou na pravé misce vah vyvážíme *tárou*, t. j. drobnými tělísky (granátky, skleněnými perličkami, broky a pod.) a určíme rovnovážnou polohu r_0 . Pak hmotu sejmeme a nahradíme závažím Z_1 . Je-li rovnovážná poloha v tomto případě r_1 , platí podle (2) a 27(4) pro táru T a pro správné závaží Z , nahrazující měřenou hmotu M , vztahy

$$T = \frac{l}{l'} \left(Z + \frac{n - r_0}{c} \right), \quad T = \frac{l}{l'} \left(Z_1 + \frac{n - r_1}{c} \right),$$

²⁸⁾ Neznáme-li ji, zjistíme při jednom vážení dvě rovnovážné polohy a určíme citlivost známým způsobem.

a tedy správné závaží

$$Z = Z_1 + \frac{r_0 - r_1}{c}. \quad (5')$$

Tuto *Bordovu* metodu upravil *Mendělejev* tak, aby se vážilo vždy při témž zatížení, což má tu výhodu, že citlivost je (přibližně) vždy táž. Obvykle se stálého zatížení dosáhne tím, že se na levou misku položí nejtěžší dovolené závaží, na pravou misku pak vážená hmota, k níž se přidá tolik táry, aby rovnovážná poloha r_0 vah ležela poblíž středu stupnice. Nato se hmota sejme a nahradí závažím Z_1 tak, aby váhy kývaly kolem málo změněné rovnovážné polohy r_1 . Je zřejmo, že pro tuto **metodu stálého zatížení**, jak se někdy nazývá, platí zase rovnice (5'). Sestrojují se pro ni zvláštní váhy, jejichž levá miska bývá nahrazena stálým protizávažím.

Podmínkou správného výsledku je u tárovačích method stálost konstant vah při obou váženích a při přesném vážení je radno opakovat I. vážení, jak uvedeno v obr. 28.2.

28.4. Oprava vážení na vztlak (redukce na vakuum)

Podmínka 3, vyžadující stejnost vztlaků, není obecně splněna, neboť podle Archimedova zákona je *vztlak roven váze tělesem vytlačeného vzduchu* a tato váha je rovna *součinu hustoty vzduchu δ a objemu tělesa*. Hmota a závaží, které ji vyvažuje, mají však takřka stejnou hmotu, takže stejný objem mají jen tehdy, když mají stejnou hustotu.

Při vážení ve vzduchu není tedy třeba opravy na vztlak, má-li vážená hmota *stejnou hustotu jako závaží*. Má-li jinou hustotu, dává správnou hmotu jen *vážení ve vzduchoprázdnu* nebo v tak zředěném vzduchu, že rozdíl vztlaků lze pominout.

Je-li V_M objem vážené hmoty a V_Z objem závaží, zní pak podmínka rovnováhy na přesně rovnoramenných vahách takto:

$$M - V_M \delta = Z - V_Z \delta.$$

Neznámé objemy vyjádříme hustotami ρ_M , ρ_Z podle vztahů

$$V_M \rho_M = M, \quad V_Z \rho_Z = Z,$$

takže

$$M \left(1 - \frac{\delta}{\rho_M} \right) = Z \left(1 - \frac{\delta}{\rho_Z} \right),$$

odkud

$$M = \frac{1 - \frac{\delta}{\rho_Z}}{1 - \frac{\delta}{\rho_M}} Z \quad (6)$$

nebo též

$$M = Z + \left(\frac{M}{\rho_M} - \frac{Z}{\rho_Z} \right) \delta.$$

Závaží hustoty ρ_Z , které vyvažuje měřenou látku hustoty ρ_M ve vzduchu hustoty δ , je tedy nutno zvětšit o opravu na vztlak, jejíž velikost

$$\zeta = \left(\frac{M}{\rho_M} - \frac{Z}{\rho_Z} \right) \delta.$$

Tento výraz obsahuje neznámou hodnotu M , za kterou ovšem můžeme položit $Z + \zeta$; dostaneme

$$\zeta = Z\delta \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_Z} \right) + \zeta \frac{\delta}{\rho_M} \quad (7)$$

Avšak hustota vzduchu má podle vzorce 22(12) průměrnou hodnotu

$$\bar{\delta} \doteq 1,2 \text{ kg m}^{-3}, \quad (8)$$

takže její poměr k hustotě látek tuhých a kapalných je řádu 10^{-3} a oprava na vztlak činí tedy nejvýše asi $10/100$ měřené hmoty. Spokojíme-li se tedy relativní přesností opravy na několik promile, můžeme druhý člen v rovnici (7) vynechat a vzít přibližnou opravu

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{\rho_Z} \right) \delta. \quad (9)$$

Žádáme-li větší přesnost opravy, musíme buď počítat opravenou hodnotu M přímo z rovnice (6), nebo do pravé strany rovnice (7) dosadit za ζ přibližnou hodnotu z (9). Tak dostaneme přesnější hodnotu korekce

$$\zeta^* = \zeta \left(1 + \frac{\delta}{\rho_M} \right), \quad (9^*)$$

se kterou již vystačíme ve všech případech. Liší se od méně přesné hodnoty (9) jen o $0,1\%$, a proto můžeme posoudit velikost korekce na vztlak podle jednoduššího vzorce (9).

Především je vidět, že

$$\zeta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \text{ jestliže } \rho_M \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \rho_Z.$$

Oprava je tedy kladná, je-li hustota vážené hmoty menší než hustota závaží, záporná, jestliže její hustota je větší než hustota závaží, a vymizí při stejných hustotách. Jsou-li závaží mosazná [$\rho_Z = 8400 \text{ kg m}^{-3}$], je tedy pro všechny *nekovy* (a lehké kovy) korekce *kladná*, pro kovy je záporná a většinou velmi malá.

Příklady [hodnota v mg plyne dosazením hodnoty (8) za δ a $Z = 100 \text{ g}$]

Sklo: $\rho_M = 2500 \text{ kg m}^{-3}$,

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{2500} - \frac{1}{8400} \right) \delta = 0,281 \cdot 10^{-3} Z\delta \doteq 33,7 \text{ mg} = 0,0337\%. \quad (10)$$

Voda: $\rho_M = 1000 \text{ kg m}^{-3}$,

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{8400} \right) \delta = 0,881 \cdot 10^{-3} Z\delta \doteq 105,7 \text{ mg} = 0,1057\%. \quad (11)$$

Rtuť: $\rho_M = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$,

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{13\,600} - \frac{1}{8400} \right) \delta = -0,045 \cdot 10^{-3} Z\delta \doteq -5,3 \text{ mg} = -0,0053\%. \quad (11')$$

Platina: $\rho_M = 21\,450 \text{ kg m}^{-3}$,

$$\zeta = -0,072 \cdot 10^{-3} Z\delta \doteq -8,6 \text{ mg} = -0,0086\%.$$

Oprava na vztlak je tedy poměrně značná a při přesném vážení lze ji po-
minout prakticky jen při vážení mosazných předmětů. Podle (9) a (8) je průměrná korekce při mosazných závažích dána výrazem

$$\zeta = \frac{k}{1000} Z, \quad k = 1200 \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{8400} \right). \quad (12)$$

Hodnoty k , vypočtené pro různé hustoty ρ_M , jsou v tabulce **T, I**. Dosadí-
me-li do první rovnice (12) za Z závaží vyjádřené v gramech, vyjde ζ rovněž
v gramech; také lze psát (pro Z v gramech)

$$\zeta = Zk \text{ miligramů.} \quad (13)$$

Tabulky **T, I** lze vždy použít při vážení na praktikantských vahách. Při
vážení na analytických vahách na 0,1 mg vystačíme s tabulkou **T, I** jen pro
látky, jejichž hustota leží asi mezi 7000—10 000 kg m^{-3} (při množství látky
menším než 50 g). Při vážení látek lehčích nebo těžších je třeba přihlížet k zá-
vislosti hustoty vzduchu na teplotě, tlaku a vlhkosti. Tu je nutno změřit (aspoň
přibližně) teplotu t , tlak b a poměrnou vlhkost φ vzduchu, najít v **T, XI** napětí E
nasyčené vodní páry pro teplotu t , vypočítat skutečné napětí par

$$e = \frac{\varphi\%}{100} E$$

a dosadit do vzorce 22 (12). Tak dostaneme hustotu vlhkého vzduchu δ , kterou
počítáme na 3—4 platná místa (podle velikosti opravy): Rychleji dostaneme
hustotu vlhkého vzduchu z tabulky **T, III** jako hustotu suchého vzduchu pro
tlak snížený o 38% napětí vodních par e při dané teplotě. Chceme-li zvážit na
př. 100 g vody s přesností na 0,1 mg, musíme určit korekci na čtyři místa,
jak je zřejmo z výsledku (11). Zde by bylo ovšem na místě použít pro opravu
přesnějšího vzorce (9*), který by (za normální teploty a tlaku) dal výsledek

$$\zeta^* = 105,7 (1 + 0,0012) = 105,8 \text{ mg,}$$

tedy výsledek větší o 0,1 mg.

Poznámka. Často vážíme malé množství látky v nádobce (na př. ssedlinu
nebo kapku rtuti na hodinovém sklíčku). Tu nebereme zpravidla opravu na
vztlak působící na nádobku [ačkoliv na př. u 10gramové skleněné nádobky činí
podle (10) 3,4 mg], ježto vážená hmota je dána rozdílem, v němž se váha
nádobky ruší. Změní-li se však mezi oběma váženími vlivem změny tlaku,
teploty a vlhkosti hustota vzduchu na př. o 3%, změní se vztlak na 10gra-
movou nádobku o 0,1 mg a tento rozdíl se objeví ve výsledku vážení. Proto je
v podobných případech (na př. při vážení ssedliny, která se tvoří delší dobu)
výhodné vyvážit nádobku stejně velkou nádobkou (nebo skleněnou nádobku
vytárovat skleněnými perličkami) a jen malý rozdíl jejich hmot vyrovnat zá-
važím. Je-li vážená hmota velmi malá, nemusíme pak ani počítat přesnou
hustotu vzduchu a můžeme vyčíst korekci z tabulky **T, I**.

28.5. Kontrola závaží

Správnost celogramových závaží přezkoušíme tak, že všechna závaží sádky srovnáme postupně se zvoleným závažím základním, nejčastěji s jedním závažím gramovým, jehož skutečnou hmotu označíme x . Při tom ovšem musíme rozeznávat různá závaží stejné jmenovité hodnoty. Nejsou-li rozlišena přímo výrobcem vhodnými značkami, musíme najít nějaký třeba nepatrný rozdíl mezi nimi nebo je rozeznávat podle místa uložení v sádce. V zápise označujeme závaží jmenovitými hodnotami s jednou nebo dvěma čárkami nebo též s hvězdičkou:

$$1', 2', 2'', 5'; 10', 20', 20'', 50'; 100'; \dots \quad (\text{a})$$

nebo

$$1^*, 1', 1'', 2', 5'; 10', 10'', 20', 50'; 100'; \dots \quad (\text{b})$$

Jde-li o druhou sestavu (b), postupujeme takto: Určíme nulovou polohu n_1 , na pravou misku položíme závaží 1^* (o hmotě x), na levou závaží $1'$ a určíme rovnovážnou polohu r_1 , pak druhou rovnovážnou polohu r_2 pro $1^* \pm 1$ mg (tak, aby ležely na různých stranách n_1) a znovu nulovou polohu n_2 . Z průměru obou $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$ vypočteme pak interpolační methodou 27 (5) rozdíl $\Delta(1')$ v miligramech, takže máme výsledek

$$1' = 1^* + \Delta(1') = x + \Delta(1') \text{ mg.} \quad (14)$$

Stejně dostaneme

$$1'' = 1^* + \Delta(1'') = x + \Delta(1'') \text{ mg,} \quad (15)$$

při čemž užijeme n_2 z prvního vážení jako n_1 pro druhé vážení. Potom položíme na levou misku $2'$ a na pravou misku $1^* + 1'$, čímž dostaneme

$$2' = 1^* + 1' + \bar{\Delta}(2') = 1^* + 1^* + \Delta(1') + \bar{\Delta}(2'),$$

a položíme-li $\Delta(1') + \bar{\Delta}(2') = \Delta(2')$, bude

$$2' = 2x + \Delta(2'). \quad (16)$$

Dále srovnáme $5'$ na levé misce se součtem $1^* + 1' + 1'' + 2'$ na pravé misce, což dá výsledek

$$5' = 1^* + 1' + 1'' + 2' + \bar{\Delta}(5').$$

Píšeme-li zase $\Delta(5') = \Delta(1') + \Delta(1'') + \Delta(2') + \bar{\Delta}(5')$, získáme rovnici

$$5' = 5x + \Delta(5'). \quad (17)$$

Stejně dostaneme další rovnice pro zbývající závaží, až skončíme největším, na př.

$$100' = 100x + \Delta(100'). \quad (18)$$

Máme tedy celkem 9 rovnic pro neznámou hmotu x základního závaží a dalších 9 závaží $1' - 100'$. Potřebujeme tedy další vztah, který dostaneme, srovnáme-li kterékoli závaží sádky s normálním závažím, o němž máme právo předpokládat, že je správné v mezích přesnosti našeho vážení, nebo jehož korekce je známa. Tím získáme další potřebnou rovnici pro výpočet x , jehož hodnotu dostaneme tím přesněji, čím většího normálního závaží použijeme. Zjistíme-li

tedy srovnáním závaží 100' s normálním (zlaceným) závažím hmoty rovné přesně 100 g, že

$$100' = 100 \text{ g} + \Delta_a(100'),$$

dává rovnice (18) vztah

$$100 \text{ g} + \Delta_a(100') = 100 x + \Delta(100'),$$

z něhož plyne

$$1^* = x = 1 \text{ g} + \frac{\Delta_a(100') - \Delta(100')}{100}.$$

Dosazením za x do rovnic (14) až (17) a do dalších 4 rovnic dostaneme konečně *absolutní opravy* všech závaží $\Delta_a(1^*)$, $\Delta_a(1')$, ..., $\Delta_a(100')$, takže

$$\begin{aligned} 1^* &= 1 \text{ g} + \Delta_a(1^*) \\ 1' &= 1 \text{ g} + \Delta_a(1') \\ &\dots\dots\dots \\ 50' &= 50 \text{ g} + \Delta_a(50') \\ 100' &= 100 \text{ g} + \Delta_a(100'). \end{aligned} \tag{19}$$

Opravy Δ_a nazýváme *absolutní*, protože jsou to skutečné odchylky hmot závaží od jejich jmenovitých hodnot; vyjadřujeme je obvykle v miligramech. Ukazuje se, že většinou je součet těchto oprav pro všechna závaží sádky přibližně roven nule; odchylky jednotlivých závaží jsou totiž výsledkem náhodných vlivů a vyskytují se s touž pravděpodobností odchylky obou znamének. Toho lze použít k přibližnému určení oprav, není-li po ruce normální nebo jiné dosti přesné závaží. Postupujeme pak takto:

Sečteme všechny rovnice (14) až (18) a položíme součet rovný 200 g:

$$200x + \Delta(1') + \Delta(1'') + \dots + \Delta(50') + \Delta(100') = 200 \text{ g};$$

z tohoto vztahu vypočteme x a dosazením do (14) až (18) dostaneme t. zv. *relativní opravy*, které odvodíme z rovnice stejného tvaru jako (19).

Jde-li o sádku (a), která obsahuje jen jediné gramové závaží, přibereme ke kontrolovaným závažím ještě jedno gramové závaží z jiné sádky, které zvolíme za základní a označíme 1^* . Pak postupujeme obdobně jak v případě právě probraném.

Příklad. Popsaným způsobem (b) byly získány tyto výsledky:

		absolutní	relativní
$1^* =$	x	+ 0,09 mg	+ 0,09 mg
$1' =$	$x + 0,07 \text{ mg}$	+ 0,16	+ 0,16
$1'' =$	$x - 0,08$	+ 0,01	+ 0,01
$2' =$	$2x - 0,16$	+ 0,03	+ 0,03
$5' =$	$5x - 0,11$	+ 0,36	+ 0,36
$10' =$	$10x - 1,01$	- 0,07	- 0,06
$10'' =$	$10x - 1,12$	- 0,18	- 0,17
$20' =$	$20x - 1,74$	+ 0,15	+ 0,16
$50' =$	$50x - 4,93$	- 0,22	- 0,19
$100' =$	$100x - 9,88$	- 0,45	- 0,40

V prvním sloupci jsou vyjádřena závaží sádky jednogramovým závažím 1*. Ve druhém sloupci jsou absolutní opravy, které plynou srovnáním závaží 100' s normálním 100gramovým závažím. Vážením bylo nejprve zjištěno, že

$$100' = 100x - 9,88 \text{ mg} = 100 \text{ g} - 0,45 \text{ mg},$$

odkud

$$x = 1 \text{ g} + 0,0943 \text{ mg}.$$

Dosazením za x do rovnic prvního sloupce byly vypočteny absolutní opravy, z nichž 6 kladných dává součet + 0,80 mg a 4 záporné součet - 0,70 mg. Předpokládáme-li však, že tyto dva součty jsou si rovny a vypočteme-li x z rovnice

$$200x + 18,96 \text{ mg} = 200 \text{ g},$$

máme

$$x = 1 \text{ g} + 0,0948 \text{ mg};$$

dosazením do prvního sloupce získáme relativní opravy, jejichž součet

$$+ 0,81 \text{ mg} - 0,82 \text{ mg} = - 0,01 \text{ mg}$$

není tedy přesně roven nule pro zaokrouhlování posledních číslic.

29. PŘESNOST A CITLIVOST VAH

V tomto článku budeme řešit důležitou otázku, s jakou přesností lze vážit na daných vahách. Jinak řečeno, budeme se ptát, jaký nejmenší rozdíl hmoty můžeme bezpečně zjistit vážením na vahách dané citlivosti. Podle první rovnice 26 (5) je citlivost vah c dána poměrem výchylky jazýčku vah Δa k přívazku ΔZ , který tuto výchylku způsobí. Měříme-li výchylku počtem Δn dílků na stupnici vah, pak

$$\Delta Z = \frac{\Delta n}{c}.$$

Značí-li tedy $\kappa(n)$ krajní chybu rovnou podle 10 (9) trojnásobku střední chyby nebo podle 12 (16) přibližně čtyřnásobku chyby průměrné v určení polohy jazýčku, je krajní chyba v určení hmoty

$$\kappa(Z) = \frac{\kappa(n)}{c}. \quad (1)$$

K tomu je třeba poznamenat, že tento vztah vlastně určuje krajní chybu, s jakou při vážení určíme závaží, které odpovídá v mezích měřicích chyb vážené hmotě, jen tehdy, provedeme-li všechny nutné opravy, popsané v předešlém článku. Tím, že opravíme vážení na nerovnoramennost vah a na vztlak vzduchu a že nahradíme jmenovité hodnoty závaží jejich skutečnými hmotami, vyloučíme jen soustavné chyby použitých vah, metody a závaží, nevyloučíme však chyby náhodné, které vznikají ze dvou příčin.

Především jsou to chyby pozorovací, jichž se dopouštíme při odhadu desetin dílků stupnice a které nepřesahují 0,1 dílku. Vedle těchto chyb uplatňují se však také náhodné chyby způsobené nestálostí nulové polohy vah a proměnností výkyvů (bodů obratu). Mají rovněž povahu náhodných chyb, neboť

vznikají nestejným zahříváním obou ramen vahadla při otvírání skřínky,¹⁾ nedokonalostí břitů a jejich znečištěním a též nepatrnými kyvy misek. Proto nemůžeme vzít za κ (n) prostě chybu čtení polohy jazýčku, nýbrž musíme přihlížet k nestálosti polohy jazýčku na stupnici, která činí u analytických vah asi 0,1 až 0,2 dílku, u vah hrubších obvykle více. Z rovnice (1) také seznáváme, proč nelze libovolně zvýšit přesnost vážení zvětšováním citlivosti vah. Při zvětšení citlivosti vzroste totiž i nestálost nulové polohy, a tím také κ (n). Proto se obvykle neužívá u analytických vah citlivosti vyšší než asi dvou dílků na miligram. Podle hořejšího výkladu je tedy přesnost analytických vah dána krajní chybou

$$\kappa (Z) \doteq \frac{0,2}{2} \text{ mg} = 0,1 \text{ mg}.$$

Podobně přesnost vážení na praktikantských vahách je vyjádřena chybou asi 2 mg. Přesnost vážení zjistíme nejbezpečněji tak, že opakujeme vážení téhož předmětu několikrát (na př. desetkrát) a vypočteme krajní chybu výsledku. Známe-li citlivost vah, stačí opakovat určení nulové polohy a vypočítat chybu κ (n).

Vážení interpolační methodou 27 (5) vyžaduje určení dvou rovnovážných poloh; kdybychom však znali předem citlivost při daném zatížení, stačilo by určit jedinou rovnovážnou polohu a vypočítat správné závaží z jednoho ze vztahů 27 (4). Tohoto postupu se užívá, vážíme-li častěji na týchž vahách; obvykle se sestrojí *křivka citlivosti*, z níž se graficky najde citlivost pro dané zatížení.

Podle vzorce 26 (5) je citlivost vah přímo úměrna délce ramena l , kdežto na ostatních čtyřech veličinách m , δ , R , ε závisí nepřímo. Kromě l také hmotah vahadla m je dána konstrukcí vah a celkové zatížení R a prohnutí vahadla ε je rovněž určité pro každé vážení. Zbývá tedy vzdálenost těžiště vahadla od středního břitu, kterou měníme šroubovým pohybem k tomu určené maticky (čl. 25). Není však vhodné příliš zvyšovat citlivost, protože přílišným přiblížením těžiště vahadla k ose otáčení pozbývá vahadlo nutné stability a rovnovážná poloha není dosti stálá. Vedle toho s rostoucí citlivostí roste také doba kyvu vah. Je to zřejmo ze vztahu

$$\bar{\tau} \doteq \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{Jc}{gl}},$$

který plyne z 26 (18) a 26 (8), pomineme-li při malém útlumu konstantu b^2 proti ω^2 . Prodloužení ramena vah nezmenšuje dobu kyvu, neboť při prodloužení vahadla musíme zvětšit i jeho hmotu, takže celkový moment J kývajících hmot vzroste rychleji než l a doba kyvu se naopak prodlouží. Proto se také používá spíše „krátkoramenných“ analytických vah, neboť dlouhá doba kyvu je nevhodná.

Pokud jde o závislost citlivosti na velikosti vážené hmoty, která je částí celkového zatížení R , vidíme ze vzorce 26 (5), že je nepřímá, pokud ε je kladné. Toto snížení závěsných břitů a ovšem i a mění se také se zatížením vah, při čemž a je vždy kladné (těžiště je pod břitem) a se zatížením roste, kdežto ε

²⁹ ¹⁾ Liší-li se teploty obou ramen magnaliového vahadla (roztlačnost = $2,4 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹) na př. o 0,05°, vznikne u hmoty 100 g chyba 0,12 mg, při čemž ani nehledíme k tomu, že vzroste i moment váhy misky a posune se těžiště vahadla.

(které počítáme kladně, když krajní břity jsou níže než střední, viz čl. 26) s rostoucím zatížením algebraicky stoupá. Mohou tedy nastat dva případy:

1. $\varepsilon = 0$ při nezatížených vahách. Pak při každém vážení je $\varepsilon > 0$ a vzrůstá se zatížením stejně jako a .

Tedy: *citlivost nezatížených vah je největší a klesá s rostoucím zatížením.*

2. $\varepsilon < 0$ při nezatížených vahách. Zvyšujeme-li zatížení vah, blíží se ε nejprve nule a pak pomalu vzrůstá. Při správném tvaru vahadla mění se však ε velmi málo v záporných i kladných hodnotách kolem nuly, kdežto R roste rychle s přibývajícím velikostí vážené hmoty. Poněvadž také a se mění jen velmi nepatrně se zatížením, rozhoduje o průběhu citlivosti při daném znaménku ε veličina R . Proto až do jistého zatížení

$$c = \frac{l}{p - qR}$$

a teprve při překročení tohoto zatížení

$$c = \frac{l}{p + qR},$$

kde p a q jsou přibližně stálé, kladné. Při malém zatížení nejprve tedy citlivost roste, dosáhne maxima a potom již trvale klesá. Tak tomu bývá u novějších vah; při tom se hledí k tomu, aby citlivost měla maximální hodnotu při nejčastějším zatížení. To má také tu přednost, že při tomto zatížení jsou váhy velmi blíže rovnoramenné.

Citlivost pro různá zatížení se obvykle vyznačuje křivkou, a o jejím určení teď promluvíme.

29.1. Křivka citlivosti vah

Obvyklý postup při zjišťování křivky citlivosti analytických vah je tento:

1. Centigramový jezdec nasadíme na druhou desetinu pravítka na pravém rameni vahadla.

2. Odjistíme váhy a čteme 4 výkyvy.

3., 4. Opakujeme 1 a 2 na levém rameni vahadla.

5. Zatížíme obě misky stejně těžkým závažím a opakujeme 1—4.

6. Úkon 5 provedeme pro rostoucí zatížení, na př. pro 10 g, 20 g, 30 g až do nejvyššího přípustného zatížení.

7. Totéž provedeme při klesajícím zatížení, na př. pro 100 g, 90 g, ..., 10 g, 0 g.

8. Z výkyvů pozorovaných v 2 a 4 vypočteme podle 27 (14) rovnovážné polohy, jejich rozdíl dělíme 4 mg a dostaneme citlivost pro každé použité zatížení.

9. Z citlivosti vypočtené podle 8 pro rostoucí a klesající zatížení vezmeme průměr a tyto průměry nakreslíme jako pořadnice bodů o úsečkách rovných zatížení.

10. Kdyby (při méně přesných závažích) padl některý výkyv mimo stupnici, vyrovnáme nestejnost obou závaží jezdcem (nebo zlomkovým závažím) a z této polohy jej pak posuneme o dva dílky vpravo a vlevo.

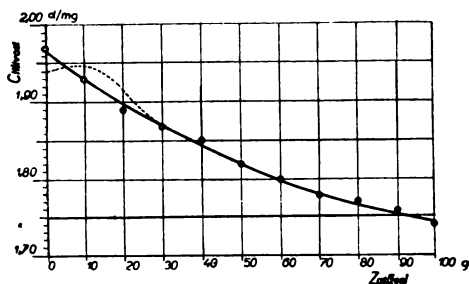
Jinak lze zjistit citlivost pro libovolné zatížení takto:

1. Na obě misky zajištěných vah položíme stejně velká závaží.

2. Uvolníme váhy a zjistíme rovnovážnou polohu.

3. Na jednu (na př. pravou) misku spustíme při *odjištěných* (výjimečně!) vahách opatrně malé závažíčko známé hmoty (přivažek) (u analytických vah 1—2 mg, u hrubších vah 2—5 cg) a zjistíme znovu (aniž přerušíme kývání vah) rovnovážnou polohu.

4. Rozdíl obou rovnovážných poloh, dělený velikostí přivažku, dává citlivost.



Obr. 29,1. Křivka citlivosti analytických vah (plně vytažená čára je křivka citlivosti, proložená body sestrojenými z hodnot uvedeného příkladu; čárkovaná křivka naznačuje průběh citlivosti s maximem pro zatížení 10 g).

Tento jednoduchý postup je v podstatě přesnější než prve popsany, ale předpokládá jisté zkušenosti. Lze ho s výhodou použít pro praktikantské a lékárnické váhy.

Příklad. Křivka citlivosti analytických vah byla určena první methodou. Zápis byl veden takto:

Zatížení v gramech	Přivažek vpravo v mg	Výkyvy				Rovno- vážná poloha	Rozdíl	Citlivost d/mg
0	+ 2	8,8	19,5	9,2	19,1	14,25	7,85	1,96
	— 2	11,2	1,8	10,8	2,1	6,4		
10	+ 2	9,4	17,8	9,6	17,6	13,65	7,7	1,93
	— 2	1,8	9,9	2,2	9,5	5,95		
—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	+ 2	8,2	13,5	8,6	13,0	11,0	6,95	1,74
	— 2	0,9	9,0	1,3	8,6	4,05		
90	+ 2	10,4	8,5	10,2	8,7	9,40	7,0	1,75
	— 2	0,2	4,4	0,6	4,0	2,40		
—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	+ 2	8,0	19,2	8,4	18,9	13,7	7,9	1,98
	— 2	2,4	9,0	2,8	8,7	5,8		

Z průměrných hodnot posledního sloupce sestavená křivka citlivosti (obr. 29,1) ukazuje, že vyšetřované váhy jsou nejcitlivější při nulovém zatížení.

30. POSTUP PŘI VÁŽENÍ

Při každém fyzikálním měření volíme takový postup, abychom plně využili přesnosti přístroje. Váhy patří k nejpřesnějším fyzikálním přístrojům, ale vážení samo vede jen tehdy k výsledkům vskutku přesným a správným, přihlížíme-li ke skutečným zjištěným v předchozích článcích.

Především musejí být váhy i závaží udržovány v dobrém stavu a v naprosté čistotě a musíme s nimi zacházet podle pokynů uvedených v 25 (5). Správný postup vážení plyne z výsledků čl. 27, hledíme-li zároveň k opravám vyloženým v čl. 28 i k vlivům snižování přesnosti vážení, o nichž byla řeč v čl. 29.

Uvedeme nyní — již bez podrobnějšího odůvodnění — přehledně nejvhodnější postup vážení na vahách praktikantských i analytických. Přitom popisujeme jen vážení relativní (viz 28.1), při němž není třeba přihlížet k možné nerovnoramennosti vah. Postup při absolutním vážení dostaneme z postupu při relativním vážení prostě tím, že místo jednoduchého vážení (s váženou hmotou na levé a se závažím na pravé misce) uijeme metody *dvojího vážení* 28.2 nebo metody *tárovací* 28.3. Při všech dalších měřeních, která jsou založena na absolutním vážení, bude tato okolnost výslovně uvedena.

30.1. Vážení na praktikantských a lékárnických vahách [25, IV]

1. Nulová poloha před vážením

Odjistíme zvolna váhy tak, aby se misky nerozkývaly, čteme 4 po sobě jdoucí výkyvy v_1, v_2, v_3, v_4 , odhadujeme desetiny dílků, a zapisujeme je podle pořadí do protokolu. Nato váhy opět zajistíme, a to v okamžiku, kdy jazýček prochází střední ryskou. Postupem 27 (13) zjistíme podle schématu 27 (14) nulovou polohu vah před vážením n_1 . Při tom počítáme dělicí čárky stupnice od pravé strany k levé a *střední čárku označujeme jako 10*, ať už celá stupnice má méně nebo více než 20 dílků. Neleží-li poloha n_1 mezi 9. a 11. čárkou, upravíme ji mírným pootočením matičky na pravém nebo levém rameně vahadla. Kdyby snad ležel výkyv v_3 dále od středu stupnice než v_1 nebo výkyv v_4 dále než v_2 , opakujeme určení n_1 znovu.

2. První přibližné závaží Z_1

Měřenou hmotu položíme na levou misku (při zajištěných vahách) a na pravou misku klademe pinsetou postupně závaží (ze sádky přímo na misku a s misky sejmutá závaží vracíme opět přímo na místo do sádky). Počneme nejmenším závažím, o němž jsme jisti, že je těžší než měřená hmota. Přesvědčíme se o tom, uvolňujeme-li zvolna váhy (aniž je odjistíme úplně) a pozorujeme, zda se jazýček počíná nachylovat vlevo. Je-li tomu tak, zajistíme váhy, vrátíme závaží do sádky a nahradíme je nejbliže nižším závažím; tak sestupujeme až k závaží, pro něž se jazýček vychyluje vpravo. Toto závaží již ponecháme na misce a přidáváme k němu postupně dosud nepoužitá závaží sádky, nahrazujeme je stále menšími, až se jazýček počne uchýlovat vpravo. Postup opakujeme s 3, 4 atd. závažími na misce tak dlouho, až se po úplném uvolnění vahadla

kyvy jazýčku na obě strany dějí uvnitř stupnice. U praktikantských a lékárnických vah obvyklé citlivosti vystačíme se závažími centigramovými (nebo s dalším závažím 0,5 cg). Součet všech závaží na misce zapíšeme do protokolu; udává *první přibližnou hodnotu* Z_1 .

Vyvažování hmoty urychlíme, zjistíme-li předem její přibližnou váhu (na gramy) na pérových nebo listovních vahách [25, I; III].

3. První rovnovážná poloha r_1

Kývá-li jazýček uvnitř stupnice, zaznamenanáme do zápisu čtyři po sobě jdoucí výkyvy a váhy zajistíme. Nato podle schematu 27 (14) najdeme první rovnovážnou polohu r_1 , příslušnou závaží.

4. Druhá rovnovážná poloha pro druhé přibližné závaží $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$

Je-li rovnovážná poloha r_1 menší než nulová poloha n_1 , přidáme k závaží Z_1 malý přivažek ΔZ (1 až 5 cg podle citlivosti vah a velikosti rozdílu poloh r_1 a n_1); je-li však rovnovážná poloha r_1 větší než n_1 , uберeme¹⁾ vhodný přivažek ($\Delta Z < 0$) tak, aby výkyvy po opatrném uvolnění vahadla ležely na stupnici (nebo byly co nejdříve ztlumeny). Potom čteme a zapíšeme 4 výkyvy a váhy zajistíme, načež z nich určíme podle 27 (14) druhou rovnovážnou polohu r_2 , příslušnou závaží $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$, jehož velikost ovšem poznamenanáme v zápise. Přitom žádáme podle zásad interpolační metody 27 (5), aby tato nová rovnovážná poloha ležela vždy na opačné straně nulové polohy, aby tedy ležela *nulová poloha mezi oběma rovnovážnými polohami*.

5. Nulová poloha po vážení n_2

Nato sejmeme (při zajištěných vahách) pinsetou všechna závaží, a ukládající je na místo do sádky, přezkoušíme správnost zápisu. Pak odstraníme s levé misky měřenou hmotu a znovu čteme 4 výkyvy nezatižených vah. Z nich vypočteme známým způsobem nulovou polohu po vážení n_2 .

6. Výsledná nulová poloha n

je dána průměrem nulových poloh před vážením a po vážení:

$$n = \frac{1}{2} (n_1 + n_2).$$

7. Citlivost vah c

při daném zatížení vypočteme podle věty 26 (6), dělíme-li rozdíl obou rovnovážných poloh velikostí přivažku:

$$c = \frac{r_2 - r_1}{\Delta Z} \text{ d/cg};$$

r_1 a r_2 vyjádříme v dílcích stupnice vah a přivažek ΔZ v centigramech. (Citlivost je rovna počtu dílků, o který se změni rovnovážná poloha přivažkem 1 cg.) Obvykle bývá $c \doteq 1$ d/cg.

30 ¹⁾ Ubrání přivažku, t. j. zmenšení závaží Z_1 , lze často pohodlněji provést přidáním přivažku ΔZ na levou misku. To se však nedoporučuje, ježto snadno se může toto zlomkové závaží poškodit, zvláště je-li levá miska znečištěna kapalinou nebo práškovou hmotou.

8. Správné závaží Z ,

kterým bychom dosáhli rovnovážné polohy shodné s výslednou nulovou polohou n , je dáno interpolačním vzorcem 27 (1) nebo jedním ze vzorců 27 (4):

$$Z = Z_1 + \frac{n - r_1}{c}, \quad \text{nebo} \quad Z = Z_2 + \frac{n - r_2}{c},$$

kde dosadíme za n a c hodnoty vypočtené v 3, 4 a 6. Oběma vzorci dostaneme touž hodnotu Z , která leží mezi oběma přibližnými hodnotami Z_1 a Z_2 , pokud ovšem leží n mezi oběma rovnovážnými polohami r_1 a r_2 .²⁾ Správné závaží tedy dostaneme, přičteme-li k jednomu z přibližných závaží odchylku jemu příslušné rovnovážné polohy od výsledné nulové polohy, dělenou citlivostí, hledíce ke znaménku rozdílu. Hodnotu Z počítáme na miligramy.

9. Správná velikost měřené hmoty M

není obecně přesně rovna správnému závaží Z , i když závaží jsou v mezích přesnosti vážení správná nebo nahradíme-li jejich jmenovité hodnoty správnými hodnotami, zjištěnými kontrolou podle 28,5. Podle čl. 28 je totiž nutno provést opravu na vztlak vzduchu, t. j. redukovat vážení na vzduchoprázdno. Příslušná oprava v miligramech je při vážení mosaznými závažími dána vztahem 28 (13):

$$\zeta = Z k \text{ miligramů,}$$

kde Z je správné závaží v gramech; hodnota k se buď vypočte ze známé hustoty ρ_M vážené hmoty podle vztahu

$$k = 1200 \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{8400} \right),$$

nebo se najde v tabulce T, I. Tedy měřená hmota

$$M = Z + Zk \text{ mg.}$$

Od této opravy můžeme upustit jen při vážení mosazných předmětů; pro látky menší hustoty je kladná, pro látky větší hustoty je záporná.

Po provedení opravy na vztlak je výsledek zaručen s přesností (krajní chybou) několika miligramů. Při tom nepřihlížíme k nerovnoramennosti vah (viz 28.1), která má význam jen při vážení absolutním, jak jsme podotkli již na počátku.

Příklad. Zápis o vážení skleněné destičky hustoty $\rho_M = 2500 \text{ kg m}^{-3}$.

Nul. poloha před vážením:	13,7	6,8	13,3	7,1	
		13,5	6,95		
		20,3	20,25		$n_1 = 20,28 : 2 = 10,14;$
$Z_1 = 23,38 \text{ g}$	3,2	12,7	3,6	12,5	
		3,4	12,6		
		16,1	16,2		$r_1 = 16,15 : 2 = 8,08;$

²⁾ Leží-li n_1 sice mezi rovnovážnými polohami, ale těsně u jedné z nich, může se stát, že druhá nulová poloha n_2 anebo i výsledná nulová poloha n padne vně hodnot r_1 , r_2 . Pak ovšem přejde interpolace v extrapolaci (viz 18), a Z neleží mezi Z_1 a Z_2 .

$$Z_2 = 23,42 \text{ g} \quad 10,1 \quad \begin{array}{r} 14,1 \\ 10,25 \\ \hline 24,35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10,4 \\ 5,1 \\ \hline 15,5 \end{array} \quad 13,8$$

$$r_2 = 24,35 : 2 = 12,18.$$

$$\text{Nul. poloha po vážení:} \quad 15,0 \quad \begin{array}{r} 5,0 \\ 14,8 \\ \hline 19,8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14,6 \\ 5,1 \\ \hline 19,7 \end{array} \quad 5,2$$

$$n_2 = 19,75 : 2 = 9,88,$$

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2} = 10,01, \quad c = \frac{r_2 - r_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{4,10 \text{ d}}{4,0 \text{ cg}} = 1,0 \text{ d/cg}.$$

Oprava na vztlak výpočtem nebo podle tab. T, I

$$\zeta = Zk \text{ mg} = 23,4 \cdot 1200 \left(\frac{1}{2500} - \frac{1}{8400} \right) \text{ mg} = 7,9 \text{ mg}$$

a správná hmota (za předpokladu, že váhy jsou rovnoramenné, s přesností aspoň 0,04 %/00)

$$M = 23,407 \text{ g}.$$

30.2. Vážení na analytických vahách nebrzděných [25, V]

1. Nulová poloha před vážením

je jako v 30.1, 1. Jen je třeba podotknout, že pozorování kyvů se provádí při zavřené skřínce a váhy se uvolňují velmi zvolna a opatrně, aby misky nekývaly a jejich závěsy se snad nevyšinuly ze správné polohy na bříttech. Také zajišťování se má dít opatrně a je zvláště důležité, aby první podchycení vahadla bylo provedeno v okamžiku průchodu jazýčku střední dělicí čárkou.

2. První přibližné závaží Z_1

Postup je stejný jako v 30.1, 2 s tím rozdílem, že obvykle nevystačíme s centigramovými závažími a přesnější vyvážení provádíme jezdcem o váze 1 cg (viz popis [25, V]), který nasazujeme jen na číslované dělicí čárky pravítka vahadla (značící desetiny ramena), nikoli na drobnější čárky setinové, a to buď na pravé, nebo na levé rameno. Tím dosáhneme vyvážení až na 1 mg. Přemístování jezce se děje rovněž při zajištěných vahách a při zavřené skřínce (mechanicky). Váhy úplně odjišťujeme jen při uzavřené skřínce. S přesnými analytickými závažími musíme zacházet zvláště šetrně.

3. První rovnovážná poloha r_1

Jako v 30.1, 3.

4. Druhá rovnovážná poloha r_2 pro druhé přibližné závaží $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$

Jako v 30.1, 4. Jen velikost přívažku volíme přiměřeně menší, a to $1 \div 2$ mg. Toto zvětšení nebo zmenšení závaží Z_1 o hodnotu ΔZ ($1 \div 2$ mg) dostaneme posunutím jezce vpravo nebo vlevo o $1 \div 2$ číslované dílky, které provádíme zase při uzavřené skřínce.

5. Nulová poloha při vážení n_2

Jako v 30.1, 5, při čemž nesmíme zapomenout sejmut jezdec s pravítka.

$$6. \text{ Výsledná nulová poloha } n = \frac{1}{2} (n_1 + n_2).$$

7. Citlivost vah c

Jako v 30.1, 7 s tím rozdílem, že přivažek počítáme v miligramech (určených vzdáleností jezdece od středního břitu v číslovaných dílcích), takže citlivost se vyjadřuje v dílcích na miligram (d/mg). Nejčastěji bývá při nulovém zatížení $c \doteq 2$ d/mg, pro větší zatížení bývá citlivost obvykle menší (srov. 29).

8. Správné závaží Z

se vypočte jako v 30.1, 8 z rozdílu nulové a rovnovážné polohy, děleného citlivostí, vyjádřenou však v d/mg; hodnota Z se u analytických vah počítá na desetiny miligramu.

9. Kontrola výsledku

provede se tak, že umístíme jezdec mezi obě polohy, které měl při prvním a při druhém vyvážení, na onu setinovou čárku na pravítku, která přísluší správnému závaží Z , vypočtenému v 8 na desetiny miligramu. Při této poloze jezdece nemá se rovnovážná poloha lišit od výsledné nulové polohy více než o 0,1 dílku.

10. Správná velikost měřené hmoty

se dostane týmž postupem jako v 30.1, 9 (na př. užitím tabulky T, I), pokud je hustota vážené hmoty v mezích $7 \div 10$ g/cm³ (viz 28.4). Chceme-li mít výsledek zaručen na 0,1 mg při vážení látek menší hustoty než asi 7000 kg m⁻³ nebo větší než 10 000 kg m⁻³, musíme opravu na vztlak počítat podle vzorce 28 (9) nebo dokonce podle 28 (9*); při tom se nelze spokojit průměrnou hodnotou 1,2 kg m⁻³ pro hustotu vzduchu, kterou nutno určit dosazením tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu do 22 (12) nebo odvodit z tabulky T, III. Vždy musíme určit hustotu vzduchu δ s takovou přesností, aby chyba v opravě ζ nebyla větší než 0,05 mg, známe-li ovšem s dostatečnou přesností hustotu vážené látky. Proto je nutno určit při přesném vážení také teplotu, tlak a vlhkost vzduchu (ovšem jen s potřebnou přesností). Neurčíme-li dosti přesně opravu na vztlak, musíme omezit počet míst výsledku, na př. zaokrouhlením na celé miligramy.

Příklad. Zápis o vážení platinového kelímku $\rho_M = 21450$ kg m⁻³ na analytických vahách nebrzděných.

Tepl. $t = 22,5$ °C, tlak $b = 738,2$ tor, rel. vlhkost $\varphi = 55\%$.

Nul. pol. před váž.	14,7	4,6 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 14,4	14,1 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 4,75	4,9	
		19,0	18,85		$n_1 = 18,92 : 2 = 9,46;$
$Z_1 = 52,831$ g	6,2	15,2 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 6,45	6,7 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 15,05	14,9	
		21,65	21,75		$r_1 = 21,70 : 2 = 10,85;$
$Z_2 = 52,830$ g	3,8	14,5 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 3,95	4,1 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 14,4	14,3	
		18,45	18,5		$r_2 = 18,48 : 2 = 9,24.$
Nul. pol. po váž.	15,9	3,4 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 15,75	15,6	3,7	
		10,15			$n_2 = 9,57;$

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2} = 9,52, \quad c = \frac{10,85 - 9,24}{1 \text{ mg}} \quad d = 1,61 \text{ d/mg.}$$

$$Z = Z_1 + \frac{n - r_1}{c} = 52,831 \text{ g} + \frac{9,52 - 10,85}{1,6} \text{ mg} = 52,8302 \text{ g}$$

$$(\text{nebo } Z = Z_2 + \frac{n - r_2}{c} = 52,830 \text{ g} + \frac{9,52 - 9,24}{1,6} \text{ mg} = 52,8302 \text{ g}).$$

Oprava na vztlak: napětí nasyc. vodní páry při 22,5 °C podle **T, XI** $E = 20,4$ toru, tedy napětí skutečné při relativní vlhkosti 55 %

$$e = 0,55 \cdot 20,4 = 11,2 \text{ tor}.$$

Hustotu δ vlhkého vzduchu dostaneme z tabulky **T, III** pro $t = 22,5$ °C a pro $p = b - 0,38 e = 738 - 4$ tory = 734 tory Interpolací plyne $\delta = 1,153 \text{ kgm}^{-3}$. Tedy podle **28** (9)

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{\rho_M} - \frac{1}{8,4} \right) \delta = 52,8 \left(\frac{1}{21450} - \frac{1}{8400} \right) 1,153 \text{ kg} = -4,4 \text{ mg}^3).$$

Správná hmotu kelímku

$$M = Z + \zeta = 52,8258 \text{ g}.$$

30.3. Vážení na analytických vahách brzděných (aperiodických) [25, VI]

1. Nulová poloha před vážením n_1

Odjistíme pozvolna nezatížené váhy a vyčkáme několik vteřin, až se světelný ukazatel úplně ustálí, a čteme jeho polohu, odhadující desetiny nejmenších dílků se zřetelem na znaménko vyznačené u číslovaných čárek. Nulová poloha má ležet poblíž nulté dělicí čárky. Není-li tomu tak, opravíme nulovou polohu hlavicí šroubu posouvajícího v jistých mezích stupnici.

2. Význam dílků stupnice

Obvykle udávají číslované čárky miligramy. Neznáme-li význam dílků, určíme jej tak, že přidáme (při zajištěných vahách a při zavřené skřínce) mechanickým zařízením známý přívazek (na př. 1 mg), znovu odjistíme váhy a čteme polohu ukazatele na stupnici. Algebraický rozdíl této polohy a polohy nulové udává (velmi přibližně celistvý) počet dílků, odpovídající 1 mg. Tím je význam dílků stanoven. Nejmenší dílek znamená většinou 0,1 mg, takže lze odhadovat i 0,01 mg — ovšem s jistou chybou. Výsledek vážení je pak zaručen na 0,1 mg.

3. Vyvážené měření hmoty závažím Z_1

Vyvažujeme hmotu podobným postupem jako v **30.1**, 2 nebo v **30.2**, 2, kladouce na pravou misku závaží celogramová (od největšího až po 1 g). Menší přívazky (obvykle rovné celistvým násobkům jednostranného rozsahu stupnice) umístíme při zavřené skřínce samočinným zařízením na příčném pravítku, zvyšující je tak dlouho, až po uvolnění vah zaujme ukazatel polohu uvnitř stupnice.

4. Rovnovážná poloha r

Zapišeme závaží na misce, úhrnnou hodnotu přívazku na pravítku a polohu ukazatele na stupnici po odjštění vah. Váhy opět ihned zajistíme.

5. Nulová poloha po vážení n_2

Sejmeme váženou hmotu s levé misky, všechny přívazky s pravítkem a všechna závaží s pravé misky uložíme pinsetou do sádky. Nato opatrně uvolníme váhy (při zavřené skřínce) a čteme znovu nulovou polohu.

⁸⁰) Podle méně přesné tabulky **T, I** by vyšla oprava — 4,6 mg, tedy správná hmotu kelímku by byla o 0,2 mg menší.

6. *Správné závaží Z*

Liší-li se obě nulové polohy (obvykle velmi málo), počítáme dále jejich aritmetický průměr $n = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$; správné závaží dostaneme, přičteme-li k závaží Z_1 rozdíl rovnovážné polohy a průměrné nulové polohy se zřetelem na znaménko:

$$Z = Z_1 + r - n.$$

Při tom uvádíme jako poslední (někdy menší číslicí) místo, které odpovídá desetinnám nejmenších dílků.

7. *Správná velikost měřené hmoty M*

se dostane ze správného závaží Z přičtením opravy ζ na vztlak vzduchu, kterou najdeme postupem popsáním v 30.2, 10. Při absolutním vážení můžeme pokládat takto stanovenou hmotu M za správnou, jen jsou-li váhy v mezích požadované přesnosti rovnoramenné. Kontrolu rovnoramennosti provádíme podle způsobu v 28.1 nebo použijeme tárovací metody 28.2 nebo 28.3. Při vážení hmoty na pravé misce musíme ovšem přivažek i rovnovážnou polohu brát s opačným znaménkem.

F. MĚŘENÍ PROSTORU

31. DÉLKOVÉ ROZMĚRY TĚLES

Definice. Délkový rozměr tělesa v daném směru je dán vzdáleností dvou rovin tečných k povrchu tělesa a kolmých k danému směru.

Jednotky. V soustavě MKSA a v technické je jednotkou délky $[l] = [l]_t = \text{m}$, v absolutní a v praktické jednotka $[l]_a = [l]_p = \text{cm}$. V technické praxi se rozměry strojů, vzorků a pod. nejčastěji vyjadřují v milimetrech.

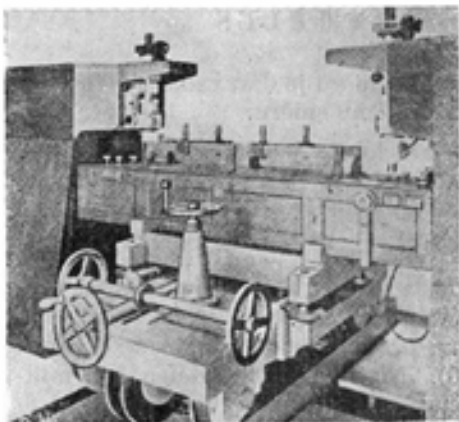
Přístroje

K měření několikametrových vzdáleností v laboratoři jsou vhodná měřítka pásová dělená na milimetry, stočená v kruhovém pouzdře, nebo ocelová měřítka pásová (do 2 m), jichž lze použít na př. k měření vzdálenosti zrcátka od stupnice při zrcátkové metodě (čl. 20). **Tyčová měřítka**, dělená na milimetry (výjimečně na půlmilimetry), zhotovují se ze dřeva a pro délky do 1 m také z mosazi, oceli nebo ze skla. Přesná měřítka (normální) bývají mosazná, ale dělení samo je vyryto na stříbrném pásku (na němž lze rýt jemněji), vsazeném do mosazi. Podobně do ocelových měřitek se vkládá proužek platinový nebo z niklové oceli. Je ovšem nutno, aby oba použité kovy měly velmi blízkou teplotní roztažnost, aby se měřítka nebortila. Pásová i tyčová měřítka mají společnou vlastnost, že délka je určena vzdáleností dvou čárek; jsou to **měřítka čárková**. Čárková měřítka mívají dvojitý druh odchylek. Jednak se jejich celková délka liší od správné „jmenovité“ hodnoty, jednak dělení nebývá přesně rovnoměrné, všechny dílky nemají přesně stejnou délku. Podrobné přezkoušení těchto odchylek provádí se srovnáním měřítka s měřítkem normálním, jehož odchylky jsou velmi malé. Ústavy, v nichž se takové kontroly provádějí, jsou vybaveny zvláštními stroji, zvanými **komparátory**. Nazýváme tak obecně přístroje, určené k srovnávání měřitek (nebo vůbec k přesnému měření délek). Pro kontrolu normálních měřitek čárkových užívá se nejčastěji **příčného (transversálního) komparátoru**, který má dva svislé čtecí mikroskopy [20,I] s vláknovými mikrometry [20,IV], pevně montovanými ve vzdálenosti rovné délce srovnávaných měřitek, která lze zaměnit posunutím stolku ve směru příčném k rovině os obou mikroskopů. Na obr. 31,1 je komparátor Mezinár. ústavu měř a vah v Sèvres s dvěma pevnými drobnohledy (vzdálenými 1 m) a zařízením k příčnému přesunu etalonů ve vodním termostatu pro stálou teplotu. K přesnému srovnávání koncových měřitek [31,II] užívá se interferenčního komparátoru [31,III]; také přesné šroubové přístroje k měření větších délek se často nazývají komparátory. (Srov. šroubový komparátor [31,VII]). Ve fyzikálních laboratořích lze snadno přezkoušet měřítka (tyčová) na správnost *celkové délky*, srovnáme-li je s měřítkem přesnějším, na př. s *normálním*. Měřítka položíme těsně vedle sebe, změříme pokud možno velkou část zkoušeného

měřítka normálním měřítkem, což opakujeme několikrát; z výsledků vezmeme střed a určíme pravděpodobnou chybu měření. Přitom ovšem musíme přepočítat délku normálního měřítka na teplotu t , při níž kontrolu provádíme, podle vztahu

$$l_t = l_0 [1 + \alpha (t - t_0)],$$

kde t_0 značí teplotu, při které má normální měřítko správnou délku, a α je délková teplotní roztažnost látky, z níž je vyrobeno. Normální měřítka pro vědecké účely se zhotovují obvykle tak, aby měla správnou délku při teplotě 0°C , která se dá velmi přesně zaručit (směsí tajícího ledu a vody), ale pro technické účely jsou výhodnější měřítka správná za teploty 20° nebo 18°C . Jsou-li obě srovnávaná měřítka z téže hmoty, nemusíme k roztažnosti přihlížet; výsledek kontroly je pak ovšem platný pro teplotu t_0 . Proto se v technické praxi dává přednost ocelovým měřítkům, která mají přibližně stejnou roztažnost jako většina měřených hmot. Velmi malou teplotní roztažností vynikají měřítka z *invaru* (niklová ocel s 36% Ni) nebo z *taveného křemene*. Tato látka však není dosti stálá; v tom směru je vhodnější *krystalovaný křemen*. Má ovšem větší roztažnost, která však ve směru skloněném o 45° k hlavní krystalografické ose je rovna roztažnosti oceli.



Obr. 31,1. Transversální komparátor Mezinárodního ústavu měr a vah v Šèvres.

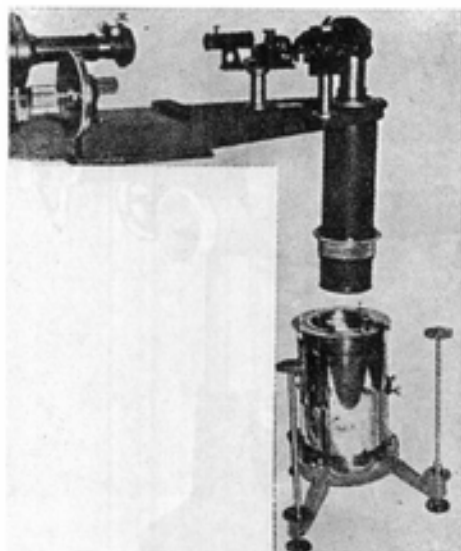
Měřítka vyřiznutá v tomto směru z krystalu křemene jsou proto zvláště vhodná k měření ocelových součástí a mimo to jsou velmi stálá.

- 31,II** Druhým základním typem měřítek jsou **koncová měřítka**, u nichž je délka určena vzdáleností dvou rovnoběžných rovinných stěn. V posledních desetiletích byla velmi zdokonalena jejich výroba zvláště zásluhou Švéda *Johanssona*. Zhotovují se sady *destičkových měrek*, z nichž lze sestavit řady délek stoupajících po $5\ \mu$ až $10\ \mu$ nebo i po $1\ \mu$. Jsou buď ze speciální oceli, nebo ze *stelliteu* (slitiny Co, Cr, W) a jejich koncové plošky (které definují danou délku) jsou tak dokonale rovinné a hladké, že stačí přitlačit dvě měrky k sobě, aby přilnuly a vytvořily tak jedinou měrku délky rovné přesně jejich součtu. Koncové měrky určují délku s chybou několika desetin mikronu a užívá se jich i v technické praxi, hlavně při kontrole měřidel. Ačkoli jsou již při výrobě podrobeny umělému stárnutí, mění se přece během let poněkud jejich velikost, a proto se musí občas přezkoušet. Vzhledem k „opticky dokonalým“ koncovým plochám lze k tomu použít interferenční metody obdobné metodě, která umožnila vyjádřit internacionální metr délkou vlny červené čáry kadmiové. K srovnávání měrek *stejně jmenovité délky* byl sestaven zvláštní **interferenční komparátor** (*Kösters* 1922). Srovnávané měrky postaví se těsně vedle sebe vertikálně na křemennou destičku přesně rovinnou (obr. 31,5a). Na jejich hořejší koncové plošky dopadá svislý svazek rovnoběžných paprsků, vytvořený kolimátorem *K* a dvojitým hranolem *H*. Spodní stěna tohoto hranolu (slabě postříbřená) je mírně skloněna k oběma horním ploškám měrek. Tak se vytvoří mírné klínové
- 31,III**

vrstvy vzduchu mezi svrchními čelními stěnami obou měrek a spodní stěnou hranolu. Na těchto vrstvách vznikají interferenční proužky, které pozorujeme dalekohledem D . Ve složeném světle mají proužky různá zbarvení podle toho, kolik vlnových délek světlo před interferencí urazí mezi oběma plochami, omezujícími vrstvou, nebo jak říkáme, podle řádu proužku. Kdyby byly obě měrky přesně stejně vysoké, pokračovaly by tyto proužky bez přerušení nad oběma ploškami. Je-li však mezi oběma nepatrný výškový rozdíl (rovný nejvýše několikanásobku průměrné vlnové délky dopadajícího světla), jsou proužky nad ploškami navzájem posunuty. Užívá se obvykle světla z heliové



Obr. 31,2. Interferenční proužky vzniklé přiložením skleněné destičky ke koncové měrce.



Obr. 31,3. Péarduv interferometr.

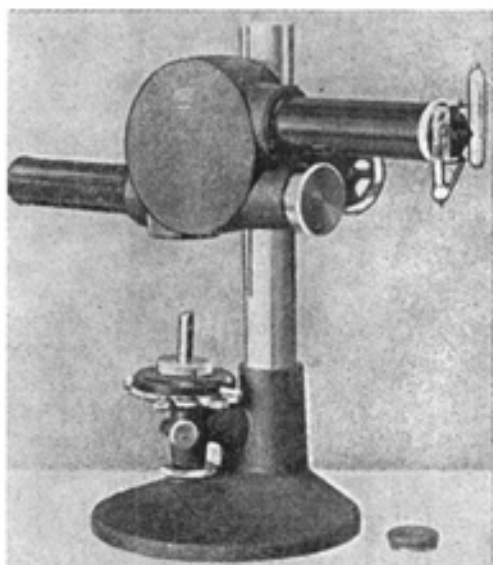
výbojky, které se vhodným způsobem filtruje, aby se snadno zjistily proužky téhož řádu nad oběma měrkami. Vzdálenost dvou sobě příslušných proužků se změří tak, že se na ně nastaví vlákna dvouvláknového okulárového mikrometru [20,IV], který je na pozorovacím dalekohledu D . Nato se odfiltrují všechny barvy až na jedinou čáru (na př. zelenou), jejíž délka vlny je přesně známa. Tak dostaneme stejně vzdálené, ostré, tmavé proužky ve světlém poli, které odpovídají výškovým rozdílům rovným poloviční délce vlny (paprsek prochází dolů a nahoru, takže jeho dráha se zvětší o celou délku vlny). Spočítáme-li, kolik tmavých proužků leží mezi oběma vlákny (odhadujeme desetiny jejich stálé vzdálenosti), máme rozdíl obou měrek vyjádřen v délkách vlny použitého jednobarevného světla. Znaménko rozdílu určíme, snížíme-li mírným tlakem posuvnou objímku hranolu H . Tím zmenšujeme jeho vzdálenost od obou plošek a proužky se v zorném poli posunují patrně ve směru, v němž je trvale posunut proužek delší měrky proti kratší měrce. Tedy proužky vzniklé u delší měrky postupují před proužky stejného řádu měrky kratší. Tímto způsobem zjistíme jejich odchylku s přesností asi $0,03 \mu$. Zároveň také zjistíme podle zakřivení proužků, jak dalece jsou plošky měrek vskutku rovinné, upravíme-li

polohu stolku tak, aby při správné rovinné plošce byly proužky kolmé k rozhraní obou plošek. Na obr. 31,5b je levá ploška správná, pravá však je trochu skloněna a zakřivena. (Srov. též snímek 31,2.)

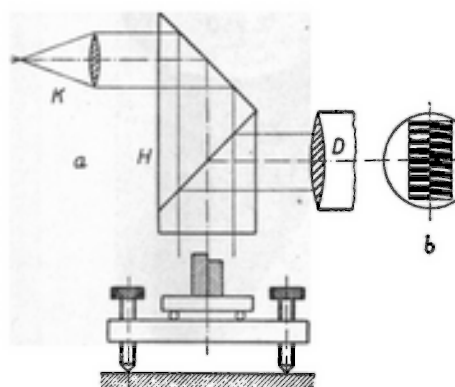
31,IV

K absolutnímu měření koncových měrek v průmyslových laboratořích je určen Péardův interferometr (obr. 31,3) založený rovněž na pozorování interferenčních proužků vzniklých odrazem na čelní plošce měrky. Měření se provádí *Michelsonovou* metodou koincidenční tak, že se stanoví vzdálenosti pevné značky od interferenčních proužků, vytvořených několika různými barvami, a z nich se počítá řád proužků a vzdálenost horní plošky měrky od základní desky v délkách vlny použitých spektrálních čar. Délka měrky v mm plyne pak ze známého vztahu 3 (1), jímž zjistíme, že délka vlny červené čáry kadmiové

$$\lambda_{\text{Cd}} = 0,643\ 846\ 96\ \mu.$$



Obr. 31,4. Köstersův interferenční komparátor k absolutnímu měření.



Obr. 31,5. Srovnávání koncových měrek interferenčním komparátorem:
a - schema uspořádání; b - pozorovaný interferenční jev.

Také komparátor [31,III] se vyrábí v úpravě vhodné pro absolutní měření měrek v podstatě právě popsanou metodou (obr. 31,4).

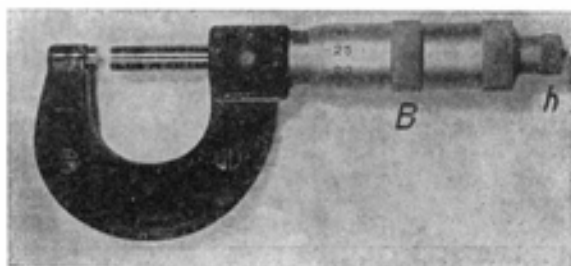
31,V

Posuvné měřítko, stručněji posuvka, je jednoduchý přístroj patrný z obr. 31,5. Měřený předmět se vkládá mezi dvě ramena kolmá k stupnici dělené na milimetry, z nichž je jedno pevné a druhé lze snadno posouvat, uvolníme-li ovšem pojistku *P*, která bývá nahrazena zajišťovacím šroubkem *Š*. S posuvným ramenem je spojen nonius *N*, nejčastěji desetinný, takže bezpečně čteme desetiny milimetru. Obě ramena jsou buď na konci zúžena v pravoúhlé výběžky *V* široké přesně 5 nebo 10 mm, nebo vybíhají na opačnou stranu v hroty *H*, jimiž lze měřit vnitřní rozměry dutých těles, na př. světlost trubic. Postup měření posuvkou viz 31.1. Tyčkou *T*, která se vysouvá zároveň s posuvným ramenem, se měří hloubka dutin.

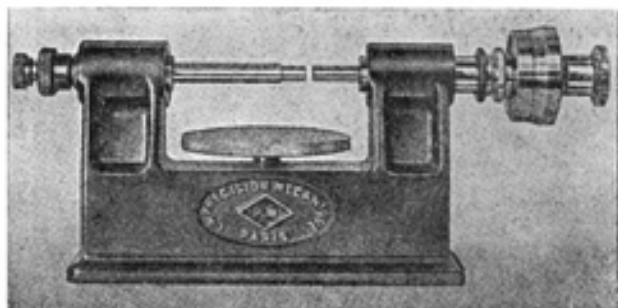
31,VI

Mikrometr (obr. 31,6) liší se od posuvného měřítka tím, že s pevným ramenem je spojena čelist, kterou prochází přesný, t. zv. *mikrometrický šroub*, jehož všechny závity mají co možná stejnou výšku závitu (obvykle 1 mm).

U šroubu je bubínek *B* dělený na 100 dílů, takže lze přímo číst setiny a odhadovat tisícinny milimetru. Při měření je nutno vyloučit t. zv. *prázdný (mrtvý) chod šroubu*, který vzniká tím, že šroub musí mít v závitech čelisti jistou vůli a při změně směru otáčení přitiskne se k protilehlým ploškám závitů. Proto musíme při určování nulové polohy i při vlastním měření skončit vždy otáčením hlavice *h* šroubu v témž směru (vpravo). Tato hlavice bývá upravena jako klouzavá spojka, která vyvine jen jistý tlak a při dolehnutí čela šroubu na



Obr. 31,6. Mikrometr.



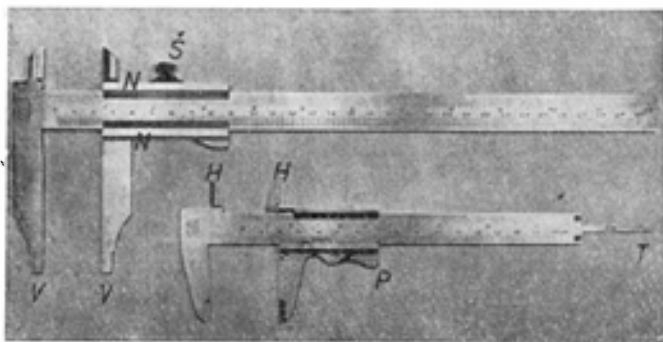
Obr. 31,7. Šroubový komparátor fy La Précision Mécanique.

pevnou čelist nebo na měřený předmět dále šroubem neotáčí (srov. 31,6). Mikrometry se konstruují pro několik rozsahů, na př. 0 ÷ 25 mm, 25 ÷ 50 mm a pod. Neobsahuje-li rozsah nulu, přikládá se k mikrometru koncová měrka (kalibr), kterým se kontroluje základní poloha.

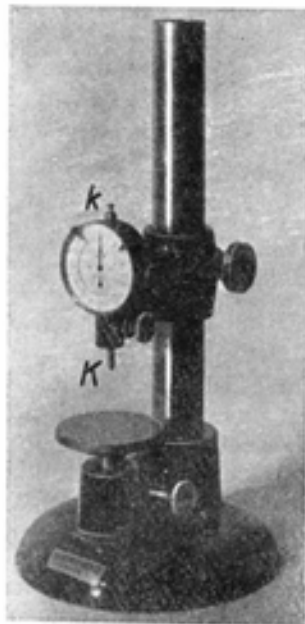
Šroubový komparátor je v podstatě přesný mikrometr s velkým rozsahem, montovaný na stojanu, jak je zřejmo z obr. 31,7; představuje šroubový komparátor firmy La Précision Mécanique v Paříži. 31, VII

Sférometr, znázorněný na obr. 31,9, je jako předešlé dva přístroje šroubové měřítko; jeho pevné rameno je nahrazeno rovinou rovnostranného trojúhelníka tvořeného třemi hroty, jimiž se postaví na desku (skleněnou) přesně rovinnou, zvanou *planum*. Výška závitů bývá 0,5 mm a posun šroubu (končícího rovněž hrotem) se měří na svislém postranním měřítku děleném na $\frac{1}{2}$ mm. Ukazatelem je ostrá hrana kruhového kotouče, pevně spojeného se šroubem; je dělen na 100 dílů, které jsou dosti velké, aby bylo možno bezpečně odhadovat jejich desetiny. Měříme tedy na tisícinny výšky závitů, rovné 0,0005 mm, které jsou ovšem zaručeny jen tehdy, jestliže použité *planum* je opravdu v těchto mezích rovinné, což můžeme přezkoušet interferenční methodou, při- 31, VIII

ložíme-li k planu přesnou planparalelní destičku a pozorujeme-li proti světlu interferenční jev vzniklý v mezeře. Z tvaru a hustoty proužků můžeme posoudit rovinnost plana způsobem, o němž byla řeč u interferenčního komparátoru [31,III]. Sférometr je vhodný k měření tloušťky destiček nebo k určení poloměru málo zakřivených kulových (viz 31.4) nebo i válcových ploch (31.5).



Obr. 31,8. Posuvná měřítka.

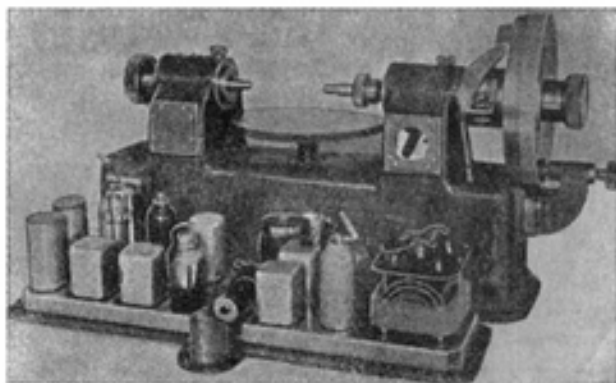


Obr. 31,9. Sférometr na kulové ploše čočky. Obr. 31,10. Indikátor na měřicím stojánku.

Hlavním zdrojem chyb měření sférometrem je malá přesnost nesnadného zjišťování dotyku středního hrotu s měřenou plochou. Proto hlavice středního šroubu má klouzavou spojku, u níž ovšem musí nastat smyk již při velmi jemném dotyku hrotu. Také se sestavují sférometry s citlivým mechanickým (pákovým) nebo i optickým (interferenčním) zařízením, kterým se mnohem

přesněji zjistí správná poloha dotyku. Není-li takové zařízení, pozorujeme zrcadlový obraz hrotu na měřené ploše a zastavíme otáčení šroubu, jakmile se obraz hrotu setká s hrotem samým. Dotyk se dosti bezpečně projeví také tím, že se při (opatrném!) otáčení hlavicí šroubu sférometr snadno poněkud stočí kolem středního hrotu, jakmile se hrot dotkne měřené plochy.

Ručičkový ukazatel neboli indikátor, běžný v technické praxi, je vhodný 31,IX
i pro některá měření ve fyzikální laboratoři, na př. pro měření tloušťky destiček a plechů nebo malých deformací namáhaných těles. Je sestrojen ve tvaru a



Obr. 31,11. Ultramikrometrický komparátor s vyňatým elektrickým zařízením. Elektrostatický kontakt vlevo, mikrometrický šroub s dělenou hlavicí vpravo.

velikosti hodinek (obr. 31,10) tak, že se pohyb dotykového kolíčku *K* přenáší na ručičku otáčivou na kruhovém číselníku, děleném na 100 dílů. Při zatlačení kolíčku o 1 mm oběhne ručička celý kruh. Čteme tedy přímo setiny a odhadujeme tisíce milimetru, které ovšem již nejsou zaručeny. Celé milimetry se čtou na malém číselníku s rozsahem do 10 mm.

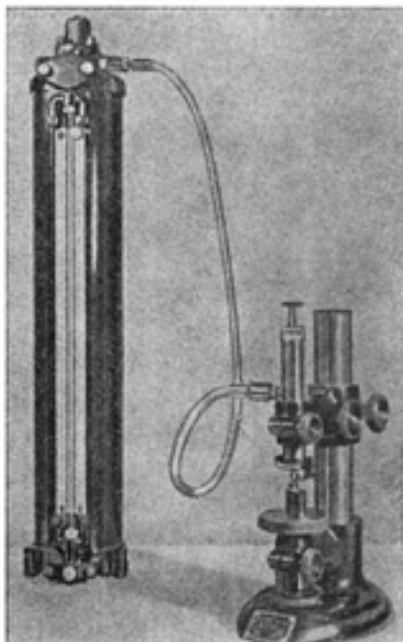
Správnost indikátoru lze přezkoušet na př. užitím několika koncových měrek [31,II] a sestavit, je-li třeba, korekční tabulku. Zvláště se musíme přesvědčit, vrátí-li se ukazatel při úplném uvolnění dotykového kolíčku do původní nulové polohy. Na obr. 31,10 vidíme indikátor ve stojánku s rovinným stolkem zařízeným na jemný svislý posuv. Při vkládání měřené destičky zdvihneme kolíček povytažením knoflíku *k* na hořejším konci kolíčku.

Téměř všechny tyto přístroje měří vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin, dotýkajících se povrchu tělesa. V poslední době byl sestrojen ve Francii **uni-**
versální komparátor, jehož dotykové plochy jsou upraveny tak, že mohou měřit i vzdálenost dvou zvolených míst na plochách, které nejsou rovnoběžné. Toho bylo dosaženo výkyvnými dotykovými ploškami; každá je dána osovým řezem válečku otáčivého ve válcovém žlábků, takže spolu rovnoběžné osy obou válečků mají při každém natočení plošek touž vzdálenost, jako když jsou plošky rovnoběžné. Při měření navzájem skloněných ploch (na př. pláště kužele) stočí se plošky podle polohy měřených ploch a komparátor udává vzdálenost jejich os. Změříme-li na př. průměr dvou řezů rotačního kužele, můžeme určit jeho vrcholový úhel.

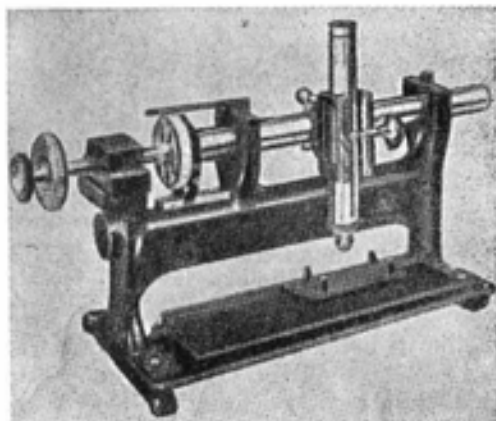
Přesnost šroubového komparátoru [31, VII] lze zvýšit t. zv. **elektrostatickým kontaktem**, který zaručuje s přesností asi $0,3 \mu$, že jeden dotykový orgán kom-

parátoru je vždy v téže poloze, zatím co poloha druhého se měří přesným mikrometrickým šroubem na $0,1 \mu$. Elektrostatický kontakt je zařízen tak, že pérovany dotykový kuliček má vzaadu destičku, jež tvoří jednu desku kondensátoru. Změnou vzdálenosti kuličku se mění kapacita kondensátoru, a tím i frekvence elektrických kmitů oscilačního okruhu, který se rozladí proti druhému okruhu stálé frekvence. Tlak se reguluje tak, aby tím vzniklé zázněje (rázy) ustaly; kontroluje se to elektronkou zv. magické oko, jejíž kříž prozradí rázy rozkmitáním. Na snímku 31,11 je takový „ultramikrometrický“ komparátor s vynatým elektrickým zařízením, vyrobený v Laboratoire Central des Industries Mécaniques.¹⁾

31,X



Obr. 31,12. Pneumatický měřicí přístroj Solex s měřicím stolcem.



Obr. 31,13. Měřicí mikroskop Cambridgeský.

31,XI Také se zavádějí jak v laboratořích, tak i v průmyslovém provozu **pneumatické měřicí přístroje**, které jsou založeny na tomto principu: Proudí-li vzduch pod stálým tlakem do komůrky malým otvorem a vytéká-li druhým malým otvorem, je tlak v komůrce funkcí poměru velikostí obou otvorů. Je-li vstupní otvor stálý a přiblížíme-li k výstupnímu otvoru nějakou překážku, zmenší se účinný otvor a tlak v komůrce stoupne tím více, čím blíže je překážka. Tento výstupní otvor můžeme také umístit na konec ohebné trubice, nasazené na původní výstupní otvor komůrky, a této koncové trysky použít jako *měřicí trysky*. Její vzdálenost od měřené plochy můžeme totiž zjistit, změříme-li tlak v komůrce na př. vodním sloupcem, a tak určíme velmi přesně rozměr tělesa. Také se měření upravuje tak, že kontakt s měřeným tělesem je realizován obvyklým dotykovým kuličkem, který ovládá záklopku měnící velikost měřicího otvoru. Na snímku 31,12 je zařízení *Solex*, vyrobené společností La Précision Mécanique. Lze ho použít také ke zkoumání dokonalosti povrchu, neboť při přiblížení trysky k nerovnému povrchu stoupne tlak méně než u po-

31 ¹⁾ Viz [48].

vrchu dokonale rovného. Pneumaticky lze též proměřovat dutiny. Tak americká Sheffield Corporation vyrábí pneumatický přístroj na měření a kontrolu vnitřních rozměrů trubic, což se provádí zasunutím válečku s dvěma otvory v plášti, kterými uniká vzduch rychleji nebo pomaleji podle šířky mezery.

Měřicí mikroskop je přístroj, kterým lze s přesností asi 1μ měřit vzdálenosti dvou značek (do 10 až 20 cm). Je to v podstatě čtecí mikroskop [20,I], který lze posouvat mikrometrickým šroubem a zároveň měřit velikost posunutí na dělené hlavici. Je nepostradatelný na př. při proměřování snímků spekter a může být zdokonalen užitím okulárového mikrometru [20,IV]. Jeho konstrukce je zřejmá ze snímku 31,13.

31,XII

M Ě Ř I C Í M E T H O D Y

31.1. Průměr válečku (drátu)

Měříme jej buď posuvným měřítkem [31,V] nebo přesněji mikrometrem [31,VI]. V obou případech postupujeme takto:

1. Určíme několikrát (5—10krát) nulovou polohu přístroje, vypočteme průměr naměřených hodnot a pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}_0$ průměrné nulové polohy x_0 [podle 12 (32)]. U mikrometru, jehož rozsah nezačíná od nuly, určíme základní polohu, danou polohou šroubu při vložení základního kalibru. Jsou-li čtené hodnoty v mezích přesnosti pozorování stejné, položíme $\bar{\vartheta}_0 = 0$.

2. Čteme několikrát (nejméně 10krát) polohu po vložení válečku a počet měření volíme tak, aby chyba $\bar{\vartheta}_1$ průměru x_1 naměřených hodnot nebyla příliš velká proti chybě průměrné nulové polohy.

3. Přezkoušíme nulovou polohu (kdyby se změnila, opakujeme ad 1 a počítáme dále se střední hodnotou obou poloh). Při všech měřeních musíme skončit otáčením šroubu *vpravo*, abychom vyloučili chybu vzniklou prázdným chodem.

4. Průměr válečku

$$x = x_1 - x_0 \pm \sqrt{\bar{\vartheta}_1^2 + \bar{\vartheta}_0^2}, \quad (1)$$

kde odmocnina udává podle 12 (8) pravděpodobnou chybu průměru válečku.

31.2. Tloušťka destičky (hranolu, plechu)

Měření se provádí posuvným měřítkem nebo mikrometrem methodou 31.1 anebo *přesněji* sférometrem [31,VIII].

Postup:

1. Sférometr postavíme hroty na planum, určíme nulovou polohu x_0 jako střed deseti měření a vypočteme postupem 12 (33) její pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}_0$. Při čtení na děleném kruhu odhadujeme desetiny dílků a průměr počítáme na setiny.

2. Mezi planum a hrot vsuneme měřenou destičku a provedeme 10 měření; vypočteme průměr x_1 a jeho pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}_1$.

3. Tloušťka je dána výrazem (1). Při všech měřeních musíme skončit otáčením hlavice *vpravo*, abychom vyloučili prázdný chod šroubu. Počet plných otáček, z nichž každá posunuje šroub o $\frac{1}{2}$ mm, čteme (v milimetrech) na svislém postranním měřítku a jejich části vyjádříme v dílech kruhu. Teprve po dosazení do (1) přepočteme délky na milimetry podle vztahu $1 d = 0,005$ mm.

Příklad. Měříme tloušťku skleněné destičky.

Nulová poloha	Δ_+	Poloha na destičce		Δ_+
12,0 d		3,5 mm	51,8 d	
11,5	0,29		50,8	0,28
12,4			51,0	0,08
12,6			51,2	
12,1			50,5	0,58
11,2	0,59		51,6	
12,2			51,4	
11,8			50,3	0,78
11,2	0,59		51,9	
10,9	0,89		50,3	0,78
Průměr 11,79	$\Sigma \Delta_+ = 2,36$	Průměr 51,08	$\Sigma \Delta_+ = 2,50$	

$$\bar{\vartheta}_0 = \frac{2,36}{18} d = 0,13 d,$$

$$\bar{\vartheta}_1 = \frac{2,50}{18} d = 0,14 d.$$

Pravděpodobná chyba výsledku podle 12 (8)

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{0,13^2 + 0,14^2} d = 0,19 d.$$

Tloušťka destičky

$$x = 3,5 \text{ mm} + (51,08 - 11,79) d \pm 0,19 d = (3,696 \pm 0,001) \text{ mm}.$$

31.3. Vnitřní průměr válce — světlost trubice

Vnitřní průměr válce a vůbec vnitřní rozměry jiných dutých těles lze nejpohodlněji měřit posuvným měřítkem [31,V], jehož ramena jsou k tomu účelu opatřena buď hroty s vnějšími hranami kolnými k ose měřítka, které v nulové poloze splynou, nebo pravouhlými výstupky známé šířky, kterou je pak nutno k čtení hodnotě průměru přičíst. Postup je jinak stejný jako v 31.1.

Světlost úzkých tubic (zvláště kapilárních) — vlastně její střední hodnota v jisté délce trubice — měří se dosti přesně zjištěním objemu u sloupce kapaliny obsažené v dutině trubice této délky. Objem se nejpřesněji určí z hmoty kapaliny zjištěné vážením, známe-li (nebo změříme-li) hustotu použité kapaliny při teplotě měření. Nejčastěji se užívá rtuti, jejíž hustotu ρ při teplotě t vypočteme z hustoty $\rho_0 = 13\,596 \text{ kg m}^{-3}$ při 0°C a z teplotní roztažnosti $\beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$ podle vzorce²⁾

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} \doteq \rho_0 (1 - \beta t) = (13\,596 - 2,47 t) \text{ kg m}^{-3}. \quad (2)$$

Pro hustotu rtuti při 20°C $\rho \doteq 13\,550 \text{ kg m}^{-3}$. Do měřené kapiláry vpravíme sloupeček rtuti buď tak, že ji ponoříme v ploché misce do rtuti a prstem zapceme, nebo tak, že nassajeme rtuť do kapiláry, kterou jedním koncem ponoříme do rtuti (v poloze skoro vodorovné). Ústý nassávat rtuť přímo do kapiláry je vzhledem k její jedovatosti nebezpečné, a proto nassáváme raději delší hadičkou, kterou po nassátí stiskneme prsty. Lépe je hadičku uzavřít vsunutou skleněnou tyčinkou nebo tlačkou a nassát rtuť stisknutím a uvolněním hadičky. Nejpohodlněji to provedeme hadičkou s malým pryžovým balónkem nebo injekční stříkačkou. Je-li kapilára na jednom konci uzavřená, nasadíme na volný konec hadičku s nálevkou a prostrčíme jí tenký platinový nebo železný

²⁾ Roztažnost rtuti poněkud roste s teplotou podle vztahu 52 (13), ale k tomu při obvyklých teplotách není třeba přihlížet.

drátek, abychom usnadnili unikání vzduchu. Trubičku položíme na vodorovné zrcadlové měřítko a čteme polohu obou konců, odhadující desetiny milimetru. Měření opakujeme několikrát (podle rozptylu hodnot a požadované přesnosti) a vypočteme rozdíl průměrných hodnot, který dává délku l sloupce. Jeho objem V souvisí se středním poloměrem trubice r a s hmotou m rtuti vztahem

$$V = \pi r^2 l = \frac{m}{s},$$

takže

$$r = \sqrt{\frac{m}{\pi l s}}. \quad (3)$$

Tímto způsobem lze také provádět kalibraci trubice, t. j. zjistit, jak se mění její průměr od místa k místu. Krátký sloupeček rtuti posouváme nakloněným trubice, poklepem nebo pneumaticky (zmiňnou hadičkou) s místa na místo a měříme jeho délku v každé poloze. Mění-li se průměr velmi málo, můžeme v malém rozmezí předpokládat přímkovou závislost poloměru na vzdálenosti. Pak se průměrná hodnota r (pro dosti malé l) velmi přibližně shoduje se skutečnou hodnotou poloměru uprostřed délky l . Tak lze tedy měřit i poloměr trubice v určitém místě, aniž je třeba trubici porušit a použít mikroskopu s mikrometrickou stupnicí. Z toho plyne tato metoda na stanovení středního poloměru kapiláry vážením rtuti.

Potřeby: Hadička, nízká nádobka, zrcadlové měřítko, analytické váhy [25, V] nebo [VI], hodinové sklíčko, rtuť, ether, alkohol.

Postup (vážení provádíme podle návodu 30.2 nebo 30.3)

1. Zvážíme čisté hodinové sklíčko (bez opravy na vztlak) na 0,1 mg a zjistíme teplotu místnosti t .
2. Pročistíme kapiláru etherem a alkoholem a řádně ji vysušíme, odsávající z ní vzduch (vodní vývěvou).
3. Nasažeme do kapiláry sloupeček rtuti (co možná dlouhý).
4. Přidržíme kapiláru na zrcadlovém měřítku a změříme délku l sloupečku (10krát).
5. Vypustíme rtuť na hodinové sklíčko a zvážíme.
6. Odečteme váhu prázdného sklíčka, čímž dostaneme m .³⁾
7. Vypočteme hustotu s rtuti pro teplotu t podle vzorce (2).
8. Střední poloměr kapiláry je dán vzorcem (3).

Dostí přesná⁴⁾ je také metoda určení středního (vnitřního) poloměru trubice vážením trubice a měřením vnějšího poloměru. Je-li M hmota trubice délky l , vnitřního poloměru r a vnějšího průměru $2R$, platí vztah

$$(\pi R^2 l - \pi r^2 l) \rho = M,$$

kde ρ je hustota trubice při teplotě místnosti, takže

$$r^2 = R^2 - \frac{M}{\pi l \rho}. \quad (4)$$

Potřeby: Mikrometr [31, VI], zrcadlové měřítko nebo měřítko posuvné [31, V], analytické váhy [25, V] nebo [VI].

31 ³⁾ Oprava váhy rtuti na vztlak ani na nerovnoramennost vah podle 28 nebývá při obvyklé přesnosti měření nutná.

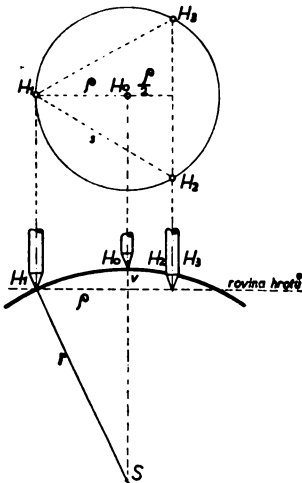
31 ⁴⁾ Zvláště jde-li o trubici tenkostěnnou z přesně známého materiálu.

Postup

1. Změříme několikrát délku l trubice zrcadlovým (nebo posuvným) měřítkem.
2. Změříme vnější průměr kapiláry mikrometrem na několika místech trubice a vypočteme střed, čímž dostaneme $2R$.
3. Zvážíme trubici na analytických vahách na 0,1 mg, a to absolutně (podle 28.2; 3 a 30.2; 8), a opravíme výsledek na vztlak (viz 28.4), což dá M .
4. Najdeme v tabulkách hustotu ρ materiálu trubice (pro obyčejné sklo je $\rho \doteq 2500 \text{ kgm}^{-3}$) nebo ji změříme podle 36.
5. Střední hodnota vnitřního poloměru r je dána vztahem (4).

31.4. Poloměr křivosti kulové plochy — měření sférometrem

Poloměr křivosti kulových ploch, jejichž průměr je větší než vzdálenost nožek sférometru [31, VIII], najdeme tak, že sférometrem změříme výšku v vrchlíku určeného na ploše rovinou 3 hrotů sférometru postaveného na plochu.



Obr. 31,14. Sférometr na kulové ploše.

Potřebné vztahy plynou z obr. 31,14, který je kreslen pro případ plochy vypuklé, ale odvozené vztahy platí i pro kulovou plochu dutou. Hroty H_1, H_2, H_3 tvoří rovnostranný trojúhelník o straně s a poloměru opsané kružnice ρ , pro nějž platí, je-li r poloměr křivosti plochy,

$$(r - v)^2 + \rho^2 = r^2$$

čili

$$v(2r - v) = \rho^2. \quad (5)$$

Avšak podle obr. 31,14

$$\left(\rho + \frac{\rho}{2}\right)^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

takže

$$\rho^2 = \frac{s^2}{3},$$

a dosazením do (5) dostaneme výsledný vzorec:

$$r = \frac{s^2}{6v} + \frac{v}{2}, \quad (6)$$

z něhož poloměr r vypočteme, změříme-li výšku v vrchlíku methodou 31.2, užitou při měření tloušťky destičky. Zbývá ještě najít postup pro určení vzdálenosti hrotů, který by ji poskytl s přesností přiměřenou přesnosti, s jakou je zjištěna výška vrchlíku.

Nejprve vyjádříme pravděpodobnou chybu $\vartheta(r)$ poloměru r chybami $\vartheta(s)$ a $\vartheta(v)$ obou přímo měřených veličin s a v . Podle obecného vzorce 12 (2) je pravděpodobná chyba poloměru

$$\vartheta(r) = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 \vartheta^2(s) + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 \vartheta^2(v)}; \quad (7)$$

derivaci (6) dostaneme

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{s}{3v}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{s^2}{6v^2} + \frac{1}{2},$$

takže

$$\vartheta(r) = \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{s}{v}\right)^2 \vartheta^2(s) + \left[\frac{1}{6} \left(\frac{s}{v}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]^2 \vartheta^2(v)}. \quad (8)$$

Abychom plně využili přesnosti přístroje bez zbytečné námahy, hledíme, aby oba členy pod odmocninou byly pokud možno stejně velké (nebo alespoň téhož řádu), což vyjádříme znakem \approx . Pracovní ekonomie vede tedy k požadavku

$$\frac{\vartheta(s)}{\vartheta(v)} \approx \frac{\frac{\partial r}{\partial v}}{\frac{\partial r}{\partial s}} \approx \frac{\frac{s^2}{6v^2} - \frac{1}{2}}{\frac{s}{3v}}. \quad (9)$$

V praxi bývá $s \doteq 5$ cm a $v = 0,5 \div 1$ cm; jak jsme viděli v příkladu úlohy 31.2, je $\vartheta(v) \approx 0,001$ mm. V obou krajních případech má tedy být pro

$$\frac{s}{v} = 10, \quad \frac{\vartheta(s)}{\vartheta(v)} \approx \frac{97}{20} \doteq 5$$

pro

$$\frac{s}{v} = 5, \quad \frac{\vartheta(s)}{\vartheta(v)} \approx \frac{22}{10} \doteq 2. \quad (10)$$

To znamená, že bychom měli určit s s chybou $2 \div 5$ tisícin milimetru, k čemuž by bylo třeba zvláštního zařízení, na př. *měřicího mikroskopu* [31, XII]. Nemáme-li podobného zařízení a není-li s dáno předem, hledíme měření zařídit tak, aby byla pravděpodobná chyba $\vartheta(s) < 0,01$ mm. Máme-li po ruce přesné měřítko dělené na 0,5 mm (nebo aspoň na mm), otiskneme hroty na papír a změříme každou stranu trojúhelníku dvacetkrát, odhadujíc lupou dvacetiny (desetiny) mm, a z výsledku vezmeme střed. Lépe je měřit vzdálenosti hrotů posuvným měřítkem se zahrocenými rameny. Je-li vernier desetinný, měříme každou stranu nejméně desetkrát, je-li vernier padesátinný, stačí asi polovina měření. Při počítání chyby výsledku podle vzorce (8) máme ostatně příležitost se přesvědčit, v jakém poměru jsou oba členy pod odmocninou. Čím menší je křivost plochy, tím přesněji je nutno měřit vzdálenosti s .

Potřeby: Sférometr [31, VIII], planum, přesné měřítko tyčové nebo posuvné [31, V].

Postup [podrobný popis jednotlivých úkonů je uveden v úloze 31.2 a v návodu 12(32)].

1. Sférometr postavíme na planum a určíme nulovou polohu x_0 v dílcích děleného kruhu a její pravděpodobnou chybu ϑ_0 .

2. Sférometr postavíme na měřenou kulovou plochu (na př. čočku) a určíme polohu x_1 středního hrotu na ploše a její pravděpodobnou chybu ϑ_1 .

3. Výška v vrchlíku je dána vztahem (1)

$$v = x_1 - x_0 \pm \vartheta(v),$$

kde pravděpodobná chyba $\vartheta(v) = \sqrt{\vartheta_0^2 + \vartheta_1^2}$.

4. Změříme několikrát všechny vzájemné vzdálenosti tří pevných hrotů (měřítkem tyčovým každou dvacetkrát, měřítkem posuvným s desetinným vernierem každou desetkrát, s vernierem pádesátinným nejméně pětkrát), vezmeme střed s a vypočteme pravděpodobnou chybu ϑ (s).

5. Dosazením do (6) vypočítáme poloměr křivosti r a jeho pravděpodobnou chybu ϑ (r) najdeme dosazením poměru $\frac{s}{v}$ do vzorce (8).

6. Výsledek píšeme ve tvaru

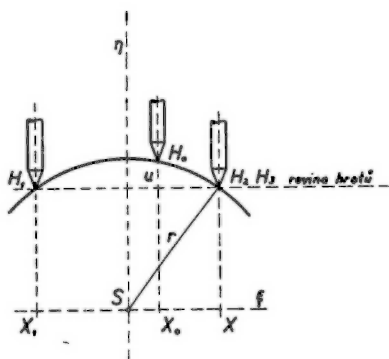
$$r \pm \vartheta(r);$$

ϑ (r) uvádíme na jedno, nejvýše na dvě místa a r ukončíme číslicí téhož řádu.

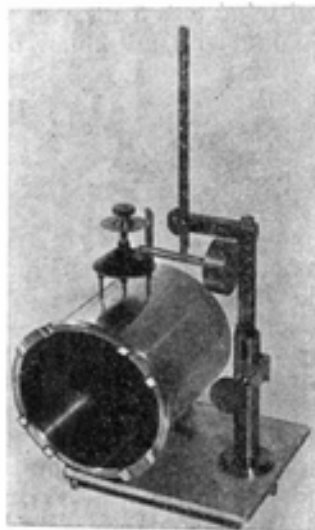
31.5. Poloměr válcové plochy - měření sférometrem

Sférometrem lze měřit také poloměr křivosti rotační plochy válcové, nasadíme-li sférometr na plochu tak, aby dva ze tří pevných hrotů ležely na téže povrchce (aby jejich spojnice byla rovnoběžná s osou válce). Snímek 31,16 ukazuje jednoduchou konstrukci stojanu pro měření válců sférometrem, který zaručuje tuto polohu sférometru. Měřený válec položíme na dvě rovnoběžné hrany tak, že osa válce je s nimi rovnoběžná. Sférometr upevníme na sklopné rameno, otáčivé kolem osy rovnoběžné s oběma hranami; při tom je konstrukcí zaručeno, že spojnice dvou jeho hrotů zůstává při sklápění rovnoběžná s osou

31,XIII



Obr. 31,15. Sférometr na válcové ploše.



Obr. 31,16. Stojan pro měření válců sférometrem.

válce. Výšku osy upravíme tak, aby sférometr při sklápění ramena dosedl na válec přibližně ve svislé poloze. Sklopné rameno je možno nahradit také pravítkem s ostrou hranou, rovnoběžnou s osou válce. Stojan upravíme tak, aby pravítko těsně přilehlo k povrchu válce, a k jeho hraně přistavíme dva hroty sférometru, které pak leží na téže povrchce. Tento druhý způsob má tu přednost, že není závislý na typu sférometru. Kromě toho je možno přistavit k pravítku postupně všechny tři strany trojúhelníku tvořeného hroty sférometru; tím se vyloučí chyby vzniklé tím, že vzdálenosti všech tří hrotů nejsou přesně stejné.

Sférometrem můžeme měřit také zakřivené části válcové plochy (na př. válcové čočky) nebo plochy jen zčásti přístupné — vypuklé i duté — s poměrnou přesností asi $0,1 \div 0,2\%$.

Poloměr válce r určíme snadno na základě obr. 31,15 znázorňujícího řez kolmý k ose válce, jejíž stopou S vedeme souřadnicové osy ξ , η . Pak je zřejmě vzdálenost X_1X rovna výšce v rovnostranném trojúhelníku tvořeném hroty sférometru H_1, H_2, H_3 , a tedy $\overline{SX} = \xi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} s$. Hrot H_0 středního šroubu dotýká se válcové plochy v bodě, jehož souřadnice $\xi_0 = \overline{SX}_0 = \frac{\xi}{3} = \frac{s}{4\sqrt{3}}$.

Pro souřadnice obou bodů platí tedy rovnice

$$\eta^2 + \xi^2 = r^2, \quad \eta_0^2 + \xi_0^2 = r^2, \quad (11)$$

$$\eta_0 - \eta = u, \quad (12)$$

značí-li u výšku středního hrotu H_0 nad rovinou trojúhelníku H_1, H_2, H_3 . Odečtením rovnic (11) dostaneme

$$\eta_0^2 - \eta^2 = \xi^2 - \xi_0^2 = (9 - 1) \xi_0^2 = \frac{s^2}{6}$$

a dělením poslední rovnice rovnicí (12)

$$\eta_0 + \eta = \frac{s^2}{6u};$$

užitím (11) a (12) plyne odtud

$$r^2 = \frac{3}{16} s^2 + \left(\frac{s^2}{12u} - \frac{u}{2} \right)^2 \quad (13)$$

čili

$$r = \frac{u}{12} \sqrt{27 \left(\frac{s}{u} \right)^2 + \left[\left(\frac{s}{u} \right)^2 - 6 \right]^2}. \quad (14)$$

Tím je určen poloměr křivosti válce; jeho pravděpodobnou chybu určíme podle vzorce (7), kladouce $v = u$. Derivací rovnice (13) plyne

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{s}{144r} \left[15 + 2 \left(\frac{s}{u} \right)^2 \right], \quad \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{u}{144r} \left[36 - \left(\frac{s}{u} \right)^4 \right],$$

takže

$$\vartheta(r) = \frac{u}{72r} \sqrt{\left[\left(\frac{s}{u} \right)^2 + 7,5 \right]^2 \left(\frac{s}{u} \right)^2 \vartheta^2(s) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{s}{u} \right)^4 - 18 \right]^2 \vartheta^2(u)}. \quad (15)$$

Pokud jde o pravděpodobné chyby délek u a s , budeme jako při měření křivosti kulové plochy žádat, aby oba členy pod odmocninou byly stejného řádu. Vztah obdobný podmínce (9)

$$\frac{\vartheta(s)}{\varkappa(u)} \approx \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{s}{u} \right)^4 - 18}{\left(\frac{s}{u} \right)^2 + 7,5} \cdot \frac{1}{\frac{s}{u}}$$

$$\begin{aligned} \text{dává pro } \frac{s}{u} = 5: & \quad \frac{\vartheta(s)}{\vartheta(u)} \approx 2; \\ \text{pro } \frac{s}{u} = 10: & \quad \frac{\vartheta(s)}{\vartheta(u)} \approx 5; \\ \text{a pro } \frac{s}{u} = 20: & \quad \frac{\vartheta(s)}{\vartheta(u)} \approx 10. \end{aligned}$$

Platí tedy o měření s vcelku totéž, co bylo řečeno v 31.4. Na př. pro válece o průměru kolem 10 cm je $\frac{s}{u} \approx 10$, a měříme-li u s chybou $\vartheta(u) \approx 0,001$ mm a s s chybou $\vartheta(s) \approx 0,01$ mm, vyjde podle (15) $\vartheta(r) \approx 0,01$ mm.

Potřeby: Sférometr [31,VIII], planum, přesné měřítko tyčové nebo posuvné, měřicí stojan [31,XIII].

Postup (srov. 31.2 a 31.4)

1. Sférometr postavíme na planum, určíme nulovou polohu x_0 a její pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}_0$.

2. Na měřenou plochu připevníme přímou hranu (pravítko s ostrou hranou) tak, aby splývala s některou povrchkou, nebo použijeme stojánku [31,XIII], jímž je zaručena správná poloha hrotů na válci.

3. Změříme polohu x_1 hrotu na válci (desetkrát) a určíme pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}_1$ výsledku.

4. Výška u středního hrotu nad rovinou ostatních tří hrotů a její pravděpodobná chyba $\vartheta(u)$ je dána vzorcem

$$u = \bar{x}_1 - \bar{x}_0, \quad \vartheta(u) = \sqrt{\bar{\vartheta}_0^2 + \bar{\vartheta}_1^2}. \quad (16)$$

5. Změříme každou stranu trojúhelníka hrotů, a to buď dvacetkrát tyčovým měřítkem, nebo desetkrát posuvným měřítkem s desetinným noniem (nebo pětkrát, je-li nonius padesátinný) a vypočteme průměrnou hodnotu s a její pravděpodobnou chybu $\vartheta(s)$.

6. Dosazením do vzorců (14) a (15) dostaneme poloměr r a jeho pravděpodobnou chybu $\vartheta(r)$.

Příklad. K měření poloměru kovové válcové plochy použilo se stojanu [31,XIII]. Nulová poloha sférometru byla zjištěna na planu z deseti měření (jako v 31.2); výsledek byl $(0,4988 \pm 0,0003)$ mm. Poloha středního hrotu na válci byla $(2,908 \pm 0,001)$ mm. Tedy výška středního hrotu nad rovinou ostatních tří hrotů a její pravděpodobná chyba podle (16)

$$u = 2,409 \text{ mm}, \quad \vartheta(u) = \sqrt{1 + 0,3^2} \cdot 10^{-3} \text{ mm} \doteq 0,001 \text{ mm}.$$

Střední vzdálenost nožek sférometru (z 3×5 měření posuvným měřítkem)

$$s = 46,69 \text{ mm}, \quad \vartheta(s) = 0,01 \text{ mm},$$

tedy

$$\frac{s}{u} = 19,38, \quad \left(\frac{s}{u}\right)^2 = 375,6.$$

Dosazením do (14) plyne pro měřený poloměr válce hodnota

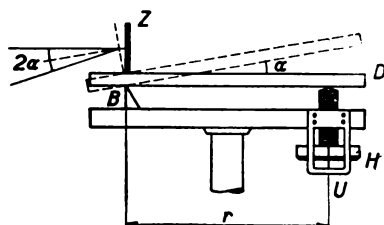
$$r = (76,90 \pm 0,05) \text{ mm}$$

a k ní byla připojena pravděpodobná chyba, jejíž přibližná hodnota byla vypočtena podle (15) takto:

$$\vartheta(r) = \frac{1}{72} \cdot \frac{2,4}{77} \sqrt{20^6 \cdot 10^{-4} + [2^3 \cdot 10^4]^2 \cdot 10^{-6}} = \frac{2^3 \cdot 10}{2310} \sqrt{1 + 1} \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}.$$

31.6. Výstup šroubu-měření zrcátkovou methodou

Malou vzdálenost lze také měřit zrcátkovou methodou vyloženou v 20, převedeme-li úlohu na měření malého úhlu. Tento postup je velmi vhodný pro měření výšky výstupu šroubu, který prochází pevnou maticí a svým hrotem vychyluje krátkou destičku nesoucí zrcátko, které pozorujeme dalekohledem se stupnicí [20,V] nebo osvětíme značkovou lampou [20,VI] (viz obr. 20, 6; 8). Uspořádání měření vidíme z obr. 31,17. Šroub, opatřený hlavici H s jemnou



Obr. 31,17. Měření výstupu šroubu zrcátkovou methodou.

ryskou, je zespoda zašroubován do pevného stolku tak, že jeho svislá osa je vzdálena o délku r od vodorovného břitu B . Ke stolku je se strany připevněn ukazatel (rámeček s dvojicí svislých drátků v rovině jdoucí osou šroubu) pro přesné počítání otáček. Na břit a hrot šroubu položíme destičku se svislým zrcátkem Z , v němž pozorujeme dalekohledem svislou stupnici vzdálenou od zrcátka o délku R . Otočením šroubu o k celých otáček změní se sklon zrcátka o úhel α , daný vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kz}{r},$$

značí-li z výšku závitů (výstup šroubu); při tom se změní čtení na stupnici z původní hodnoty n_0 na hodnotu n .

Podle vzorce 20 (1) je

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{n - n_0}{R}.$$

Protože platí, jak snadno odvodíme, vztah

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

máme pro z rovnici

$$z = \frac{r}{k} \frac{n - n_0}{R + \sqrt{R^2 + (n - n_0)^2}}, \quad (17)$$

jež pro malé úhly přejde ve vztah plynoucí přímo z 20 (2):

$$z \doteq \frac{1}{k} \frac{r}{R} \cdot \frac{n - n_0}{2}. \quad (18)$$

Tento vzorec platí přesně pro hodnoty n opravené podle T,VII (srov. 33.1).

Tímto postupem dostáváme vlastně průměrnou výšku závitů, a mohli bychom také měřit *methodou postupnou* (čl. 18), kdybychom věděli, že závity jsou velmi přibližně stejné. Zda je tomu opravdu tak, můžeme se přesvědčit *kalibrační*, při níž změříme každý závit zvlášť a zjišťujeme odchylky od průměrné hodnoty.

Potřeby: Zařízení vyznačené na obr. 31,17 s dalekohledem [20,V] nebo lampou [20,VI] s tyčovým měřítkem 1–2 m, mikrometrem [31,VI] a posuvným měřítkem [31,V].

Postup

1. Změříme posuvným měřítkem několikrát vzdálenost svislé roviny břitu B od vnějšího okraje šroubu a mikrometrem průměr závitů. Pak r je rovno první hodnotě, zmenšené o polovinu druhé.

2. Sestavíme zařízení podle schematu 31,17 a změříme několikrát (co nejpřesněji) tyčovým měřítkem kolmou vzdálenost R zrcátka od stupnice, umístěné nejméně 1 m od zrcátka.

3. Otočíme hlavici H tak, aby se ryska přesně kryla s ukazatelem U , a zaznamenáme počáteční čtení n_0 v dalekohledu.

4. Otočíme hlavici šroubu jednou nebo několikrát dokola tak, aby se ryska zase přesně kryla s drátky, a čteme polohu n na stupnici, odhadující desetiny milimetru.

5. Výšku závitů z vypočteme podle vzorce (17) nebo (18).

Jednoduše lze také měřit výšku závitu šroubu indikátorem [31,IX], užijeme-li stolečku z obr. 31,17 a proti šroubu umístíme stojánek s indikátorem tak, aby se buď přímo dotýkal oblého konce šroubu, nebo destičky D přesně nad osou šroubu. Zařízení 31,17 je možno také použít pro kontrolu indikátoru, je-li vzdálenost R dosti velká.

31.7. Tloušťka tenké vrstvy

Velmi malé rozměry lze někdy měřit nepřímými methodami. Tak na př. průměrnou tloušťku velmi tenké vrstvy kapaliny nebo pevné látky (ztuhlé kapaliny, filmu) můžeme vypočítat ze známé plochy S a objemu V , který zjistíme některou z method popsanych v čl. 35, na př. ze hmoty a z hustoty látky.

Také průměrnou tloušťku tenkého kovového listu (folie) můžeme zjistit tak, že vystříháme z folie část, jejíž plochu buď vypočteme, nebo změříme (na př. planimetrem [34,I; II]), a potom změříme hustotu (neznáme-li ji předem) na př. methodou pyknometrickou (list rozstříháme nebo sbalíme, aby prošel hrdlem pyknometru, a postupujeme jako při měření hustoty drobných tělísek).

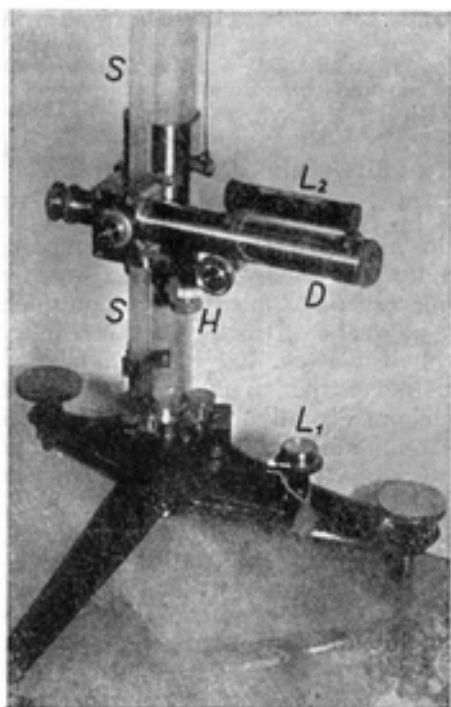
32. VÝŠKOVÝ ROZDÍL (SVISLÁ VZDÁLENOST)

Při některých měřeních je nutno zjistit rozdíl výšek dvou značek, které leží buď na téže svislici (nad sebou), nebo na dvou různých svislicích (jejich spojnice je šikmá). V prvním případě je možno určit jejich výškový rozdíl vertikálním měřítkem, můžeme-li je umístit těsně vedle měřených značek (jako je to na př. u barometru). Ve druhém případě je měření obtížnější, a proto byl sestrojen přístroj, zvaný *kathetometr* (*Dulong* a *Petit* 1816). Je to vertikální sloup, stojící na třínožce se stavěcími šrouby, na němž je upevněno svislé měřítko dělené na milimetry a posuvný dalekohled s vodorovnou optickou osou (obr. 32,1). Aby bylo měření správné, musí být měřítko co možná přesně svislé

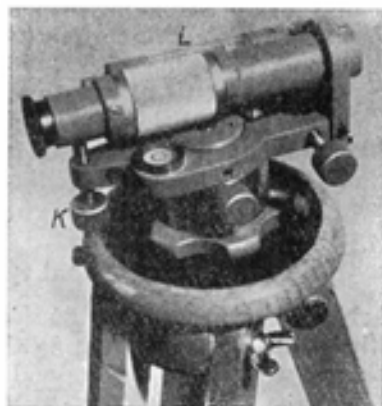
a osa dalekohledu k němu kolmá, t. j. vodorovná. Dosáhne se toho justací kathetometru, kterou provádíme takto: Nejprve postavíme sloup přibližně svisle, otáčejíce hlavicemi stavěcích šroubů, až bublina kulové libely L_1 na dolejší části stojanu je přesně uprostřed. Nato upravíme hlavicí H šroubu polohu dalekohledu D tak, aby bublina citlivé libely L_2 byla ve středu stupnice. Potom otáčíme sloupem (s měřítkem i dalekohledem) kolem svislé osy; nemění-li se při tom čtení na libele L_2 , je kathetometr správně postaven; mění-li

se poloha bubliny, poopravíme postavení stavěcích šroubů a znovu pozorujeme libelu L_2 při otáčení kolem svislé osy. To opakujeme tak dlouho, až čtení na libele L_2 zůstává stále stejné.

V ohniskové rovině okuláru dalekohledu bývá nitkový kříž, který se posunutím objímky nesoucí dalekohled (vyvážený přes kladku závažím



Obr. 32,1. Kathetometr se skleněnou stupnicí S .



Obr. 32,2. Malý nivelační stroj.

visícím buď vedle, nebo uvnitř dutého sloupu) přivede ke krytí s pozorovanou značkou (na př. s vrchlíkem kapaliny v trubici); přesná poloha dalekohledu se určí noniem. U některých kathetometrů (jako na našem obrázku) je stupnice z matného skla tak umístěna, že ji vidíme ostře v levé polovině zorného pole okuláru, kdežto v pravé polovině současně vidíme ostře ryté měřítko na skle, jehož dílky značí desetiny milimetru. Srov. značku Z_6 na obr. 20,2 a čtecí přístroje [20, I], [20, II]. Při justaci kathetometru musíme také dbát toho, aby byl okulár správně zaostřen na měřítko, aby nevznikla chyba úkosu.

Na měření výškových rozdílů stačí někdy i nivelační stroj (obr. 32,2). Je to v podstatě malý čtecí dalekohled [20, II], jehož osu lze podle citlivé libely L nastavit korekčním šroubem K do vodorovné polohy. Dalekohled i s libelou je otáčivý kolem svislé osy s ustanovkou (fixačním šroubem).

32.1. Rozdíl výšek — měření kathetometrem

Z predešlého popisu kathetometru [32,1] plyne tento postup měření:

1. Postavíme správně kathetometr, aby jeho osa otáčení a měřítko byly svislé a dalekohled vodorovný (libela!).
2. Zaostríme správně čtecí značku (nitkový kříž Z_1 nebo měřítko Z_2 na obr. 20,3).
3. Zamíříme a zaostríme dalekohled otáčením kolem svislé osy a posouváním podél sloupu na pozorovanou značku a čteme jeho výšku x_0 na 0,1 mm.
4. Otočíme dalekohled kolem svislé osy, posuneme jej do výše druhé značky a zaostríme na značku. Pak čteme výšku x_1 dalekohledu na 0,1 mm.
5. Tento postup opakujeme několikrát, stále kontrolujeme libelu L_2 a odchylky ihned vyrovnáme.
6. Výškový rozdíl značek je dán rozdílem středních hodnot x_1 , x_0 čtení pro obě značky a jeho pravděpodobná chyba se vypočte jako odmocnina ze součtu čtverců pravděpodobných chyb obou výšek [podle vzorce 31 (1)].

32.2. Rozdíl výšek — měření nivelačním strojem

Svislou vzdálenost dvou značek (na př. hladin dvou kapalin) lze měřit nivelačním strojem [32,II] tak, že k jedné nebo k oběma značkám umístíme svislá měřítká, která zasahují do téže vodorovné roviny. Nejprve postavíme osu nivelačního stroje svisle, pak nařídíme osu dalekohledu do vodorovného směru a čteme na jednom měřítku a pak na druhém. Rozdíl obou čtení dává výškový rozdíl stejně číslovaných dílců obou měřítek. Lze jej ze vzdálenosti asi 2 m změřit na desetiny milimetru. Pak stačí číst již jen polohu každé značky na příslušném měřítku (na 0,1 mm), abychom dostali jejich výškový rozdíl. Na konci měření opakujeme měření nivelačním strojem. Metoda je velmi pohodlná při větším počtu měření různých výškových rozdílů, nedosahuje ovšem přesnosti metody 32.1.

32.3. Rozdíl výšek — měření barometrem

Na měření větších rozdílů výškových a k zjištění nadmořské výšky hodí se metoda založená na jevu, že tlaku vzduchu ubývá s nadmořskou výškou. Omezíme se tu na známý jednoduchý vzorec

$$H_2 - H_1 = 18\,400 (1 + 0,0037t) (\log b_1 - \log b_2); \quad (1)$$

je to rozdíl výšek H_1 , H_2 dvou míst v metrech jako funkce barometrických tlaků b_1 , b_2 v totech a střední teploty t obou míst. Tlak měříme tlakoměry [22,I ÷ IV].

33. MĚŘENÍ ÚHLŮ

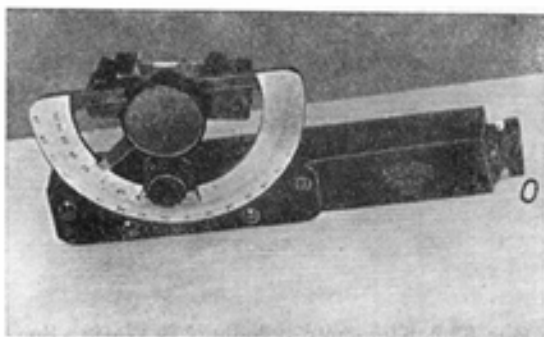
Definice. Úhel dvou různoběžných přímek je dán poměrem oblouku vymezeného přímkami na kružnici opsané kolem jejich průsečíku k poloměru kružnice. Úhel dvou rovin je roven úhlu přímek k nim kolmých. Ve fyzice měříme buď úhel dvou směrů daných světelným paprskem, nebo úhel dvou rovinných povrchů (rozhraní), nebo konečně úhly narysovaných přímek.

Jednotky. Absolutní jednotka je rovna jednotce úhlu v míře obloukové: $[\alpha]_a = 1$. Tato jednotka definuje úhel zvaný radián, jemuž přísluší na kružnici délka oblouku, rovná poloměru. Praktická jednotka je jednotka úhlu v míře stupňové: $[\alpha]_p = 1^\circ$, pravý úhel měří 90° a stupeň se dělí na $60'$ a $3600''$. Také

se zavádí dělení setinné, při němž se pravý úhel rovná 100° (stupňů setinných, centesimalních). 1° má pak $100'$ (minut setinných) a $10\,000''$ (setinných vteřin). Srov. 5 (6; 7). V soustavě MKSA můžeme užít kterékoli z těchto jednotek podle potřeby.

Přístroje

Úhly měříme nejčastěji děleným kruhem, kolem jehož osy se otáčí rameno nesoucí ukazatele, který bývá nahrazen úhlovým noniem. Aby se vyloučil vliv výstřednosti ramena (zvaného někdy *alhidáda*), mívá dva nonie, umístěné diametrálně (na koncích téhož průměru), a ze čtení na obou noních bere se (po odečtení 180° od většího) průměr. Tím se zároveň odstraní i chyba vzniklá



Obr. 33,1. Sklonoměr libelový.

„ohnutím“ ramena, které se projevuje tím, že se obě čtení neliší přesně o 180° . Přesné dělené kruhy (na př. u spektrometrů) jsou zpravidla děleny na třetiny stupně a nonius má dvacet dílků rovných 19 dílkům kruhu, takže nonius udává minuty. Přesnost čtení se zvýší lupou (viz obr. 20,1).

Pro měření úhlů narýsovaných příemek užívá se úhloměřů s rozsahem do 180° nebo do 360° . Celuloidové úhloměry (průhledné) mají dělení na spodní ploše, aby nevznikla chyba úkosu. Nejpresnější jsou kovové úhloměry s otáčivým ramenem opatřeným noniem. Bývají děleny na půlstupně, takže desetinný nonius dává čtení na $3'$. Pro kontrolu pravého (nebo jiného) úhlu a zjištění odchylek ($\pm 5^{\circ}$) byl sestrojen v Laboratoire Central des Industries Mécaniques úhloměr, u něhož užitím indikátoru [31, IX] bylo dosaženo přesnosti $0,1' \div 0,5'$.

Pro měření malých odchylek od vodorovného směru sestavují se přesné libely (vodováhy). Jsou v podstatě dvojího druhu:

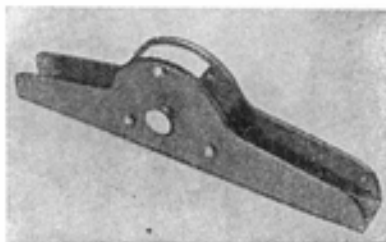
Libela trubková je skleněná trubice upevněná na rovinné destičce (jejíž polohu vzhledem k nádobce je možno v jistých mezích měnit korekčním šroubem *K*, obr. 33,3. Osa trubice je zahnutá do kružnice malé křivosti. Trubice je naplněna kapalinou (alkoholem, etherem) tak, že zůstává malá bublina vzduchová podlouhlého tvaru. Na svrchní ploše je vyryto dělení, na kterém určujeme polohu bubliny tak, že čteme na desetiny dílků polohy obou jejích okrajů.¹⁾

¹⁾ Při změnách teploty mění se objem bubliny, a tím i její délka, takže se při všech teplotách nemůže bublina přesně dotýkat oběma konci obou středních čárek. Proto se zhotovují t. zv. *sklípkové* neboli *komůrkové* libely, u nichž lze nakloněním libely část kapaliny převést do malé komůrky, nebo naopak tak, aby bublina měla při všech teplotách stejnou délku.

Libelu je třeba rektifikovat a pro měření úhlů také změřit její citlivost (viz 33.3).

33,IV Libela kulová je okrouhlá skleněná nádobka, jejíž svrchní plochu tvoří vrchlík koule. Bublina je tedy kruhová a její středová poloha (kterou zjistíme podle jednoho nebo dvou soustředných kruhů, vyrytých na nádobce) ukazuje, že spodní ploška (kovová) libely je vodorovná. Kulové libely jsou většinou málo přesné a užívá se jich jen na přibližné určení horizontální roviny.

33,V K měření (ne příliš přesnému) větších odchylek od vodorovné roviny lze použít i sklonoměrů (klinometrů). Na obr. 33,1 vidíme sklonoměr libelový, jehož rovinná základna se přiloží k měřené rovině a ukazatel na děleném půlkruhu se nastaví tak, aby libela byla vodorovná. Sklon čteme buď ukazatelem,



Obr. 33,2. Klinometr kyvadlový fy Watts a Son.

nebo noniem na 10'. Přístroj má také průzor zařízený tak, že při pozorování otvorem O vidíme vodorovný drátek na druhé straně přístroje zároveň s bublinou libely (odrazem v hranolku), kterou při zaměřování stavíme do vodorovného směru.

33,VI Klinometr kyvadlový (obr. 33,2). *Wattsův* kyvadlový klinometr má libelu nahrazenou kyvadélkem, s nímž je spojena otáčivá válcová stupnice.

Sklonoměrů lze použít k měření úhlů sevřených rovinnými stěnami těles, přiložíme-li jednu z nich k pevné vodorovné desce.

MĚŘICÍ METODY

33.1. Měření malých úhlů zrcátkovou methodou

Na měření malých úhlů je vhodná *metoda zrcátková* (obr. 20,5), při níž se používá dalekohledu [20, V] nebo značkové lampy [20, VI] se stupnicí. Úhel je dán přesným vzorcem 20(1) nebo pro úhly do několika stupňů přibližným vzorcem 20(2), který platí v míře obloukové; úhel v míře stupňové je tedy

$$\varphi^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \frac{n - n_0}{2R} = 28,65^{\circ} \frac{n - n_0}{R}. \quad (1)$$

Aby nebylo třeba ani pro větší výchylky počítat φ z 20 (1), jsou v T, VII uvedeny opravy, které nutno odečíst od čtení n na stupnici pro různé výchylky $n - n_0$ a různé vzdálenosti R (v dílcích stupnice).

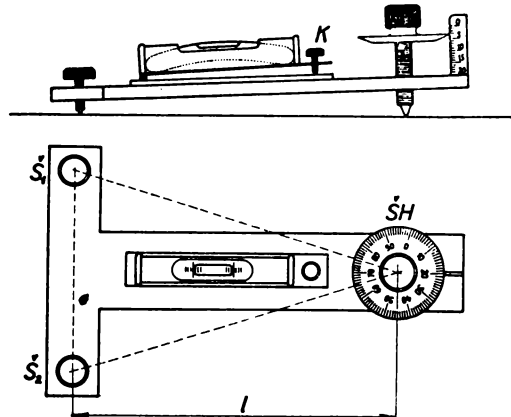
33.2. Měření úhloměrem

Úhloměrem [33,II] s rozsahem do 180° měříme úhel sevřený dvěma narýsovanými úsečkami tak, že střed úhloměru položíme co možno přesně do průsečíku úseček, aby nula dělení ležela na jedné z nich, a otáčivé rameno ztotožníme s druhou úsečkou. Měření opakujeme několikrát. Nato položíme úhloměr tak, aby druhá úsečka procházela dílcem 180° , a opakujeme nyní měření zase několikrát. Tím vyloučíme možnou excentricitu osy ramena ve směru spojnice dílků 0 a 180° . Abychom vyloučili i chybu výstřednosti osy ve směru kolmém k této spojnici, opakujeme měření tak, že položíme dělicí čárku 90° na jednu a pak na druhou úsečku, měříce úhel jednou vlevo, po druhé vpravo od 90° . Ze všech hodnot bereme pak průměr.

Při měření úhlů v trojúhelníku opakujeme tento postup pro všechny tři úhly (vnitřní), jejichž součet má dávat 180° . Vinou pozorovacích chyb dostaneme ovšem pro součet hodnotu poněkud odlišnou, a proto je třeba měřené úhly vyrovnat, což podle věty 15 (51) učiníme tak, že odchylku součtu od 180° dělíme třemi a tuto třetinu přičteme (algebraicky) ke každému z měřených úhlů, jejichž součet pak musí dávat přesně 180° .

33.3. Rektifikace a citlivost libely

Nejprve je třeba libelu rektifikovat, t. j. upravit polohu nádoby k základní destičce libely tak, aby se bublina přesně dotýkala svými konci obou středních čárek, když základní destička je vodorovná. K tomu použijeme stolku (obr. 33,3) se dvěma stavěcími šrouby \dot{S}_1 , \dot{S}_2 , jehož sklon lze měnit třetím šroubem opatřeným hlavicí H , dělenou na 100 dílů. Nejprve položíme libelu L napříč stolku a šrouby \dot{S}_1 a \dot{S}_2 uvedeme jejich spojnicí do vodorovného směru.



Obr. 33,3. Měření citlivosti libely.

Potom položíme libelu na stolek podélně tak, aby osa libely ležela ve směru největšího spádu, procházejíc osou šroubu \dot{S} (obr. 33,3). Tímto šroubem upravíme polohu stolku, aby bublina stála uprostřed dělení (t. j. aby byla ve správné poloze). Nato otočíme libelu o 180° a znovu čteme polohu bubliny. Nezmění-li se její poloha, je libela správná. Není-li tomu tak, je patrně nádobka skloněna k destičce v jistém malém úhlu α . Je-li stolek zároveň skloněn o úhel β k vodo-

rovné rovině, byla v první poloze nádobka nakloněna v úhlu $\alpha + \beta$, v druhé pak v úhlu $-\alpha + \beta$. Přetočením libely o 180° nastala tedy změna sklonu o úhel 2α , kterému odpovídá zjištěná změna čtení na libele. Rektifikaci provedeme tedy tak, že korekčním šroubkem vyrovnáme *polovinu* rozdílu a správnost překontrolujeme opětným přetočením libely do původní polohy; při něm již musí bublina přejít do polohy souměrné vzhledem k libele. Jestliže také vyrovnáme druhou polovinu rozdílu hlavicí H , bude i stolec vodorovný a bublina se v obou polohách bude dotýkat obou středních čárek.²⁾

Citlivost libely je dána poměrem změny polohy bubliny ke změně sklonu, která změnu polohy způsobí. Častěji se však uvádí *prevrácená* hodnota citlivosti, rovná číselně *úhlu* ε (ve vteřinách), *který způsobí posunutí bubliny o jeden dílek*. Je-li z výstup šroubu s hlavicí H a je-li jeho osa vzdálena od spojnice šroubů \check{S}_1, \check{S}_2 o délku l , je nutno hlavicí otočit k -krát, aby se čtení na libele změnilo o 1 dílek, při čemž

$$\operatorname{tge} = \frac{kz}{l}.$$

Tangentu malého úhlu ε můžeme však nahradit jeho arkusem a podle 5 (7) psát

$$\varepsilon'' = 206.265 \frac{kz}{l}. \quad (2)$$

Provedeme-li určení úhlu ε'' několikrát pro řadu sousedních dílků a zpracujeme-li měření *postupnou methodou* (čl. 18), dojdeme k této *methodě* měření:

1. Otočíme hlavicí do takové polohy, aby se bublina dotýkala levým okrajem krajní levé dělicí čárky. Abychom zabránili prázdnému chodu šroubu, necháme bublinu přejít přes čárku a pak teprve (otáčením hlavice vpravo) ji na čárku vrátíme.

2. Zachovávajíc stáله týž smysl otáčení (vpravo), posuneme bublinu postupně na všechny dělicí čárky (na levé straně, při čemž druhý konec bubliny projde všemi čárkami pravé strany), je-li jich sudý počet. Při lichém počtu čárek poslední vynecháme.

3. Přesuneme okraj bubliny přes poslední čárku a pak projdeme, otáčejíc hlavicí stáله v též smyslu (vlevo), opět všechny dělicí čárky na levé straně (event. kromě posledních).

4. Tak dostaneme pro každý směr sudý počet čtení, která zpracujeme *postupnou methodou*.

5. Úkony 1 až 4 opakujeme pro dělení na pravé straně a vypočteme číslo k jako průměr hodnot plynoucích ze všech 4 řad měření.

6. Otiskneme hroty stolků na papír, narýsujeme spojnicí \check{S}_1, \check{S}_2 , na ni spustíme kolmicí od stopy třetího šroubu a její délku l změříme přesným měřítkem (několikrát). Také je možno změřit strany rovnoramenného trojúhelníka $\check{S}_1, \check{S}_2, H$ a vypočítat jeho výšku l .

7. Není-li známa výška závitu z , určíme ji *methodou 31.6*, při čemž uijeme přímo měřicího stolků jako zařízení 31.4. Postavíme (nebo připevníme) na stolec zrcátko a na ně zaměříme dalekohled nebo značkovou lampu. Pak je ovšem výhodnější měřit úhly přímo zrcátkovou *methodou* a není třeba čist otáčky hlavice H . Také lze použít indikátoru se stojánkem, který umístíme nad některý bod výšky trojúhelníka $\check{S}_1, \check{S}_2, H$ (na př. půlící bod), a změříme jeho zvýšení pro známý počet otáček hlavice H .

8. Význam délky libely ve vteřinách ε'' dostaneme pak dosazením do vzorce (2).

34. PLOŠNÝ OBSAH

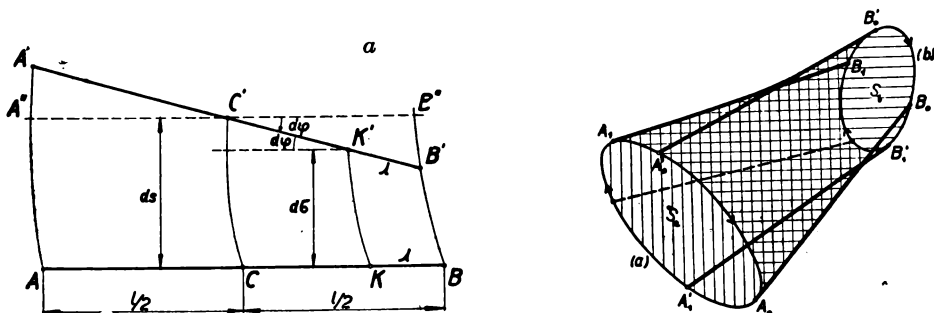
Definice. Fysikálně je plocha realizována spojitým rozhraním dvou prostředí, nejčastěji částí povrchu tělesa, omezenou uzavřenou křivkou.

³³⁾ Ježto jsme volili původní polohu nádobky libely vodorovnou, byl stolec skloněn o stejný úhel jako destička, ale na opačnou stranu, takže $\alpha + \beta = 0$.

Jednotky. Plochy měříme buď ve čtverečních metrech (m^2), centimetrech, (cm^2), nebo ve čtverečních milimetrech (mm^2).

Přístroje

Velikost povrchů zakřivených se určuje nejčastěji výpočtem z jejich rozměrů. Na měření povrchu některých zvláštních ploch (na př. koule), ale především na měření rovinných ploch (částí rovinných povrchů), užívá se zvláštních přístrojů, zvaných *planimetry*. Jejich konstrukce pro rovinné povrchy vyplývá z této kinematické úvahy:



Obr. 34,1. Plocha opsaná úsečkou:

a — při malé změně polohy; b — při uzavřeném běhu.

Dejme tomu, že úsečka délky l přejde z polohy AB do blízké polohy $A'B'$ tak, že její střed C přejde do bodu C' , vzdáleného od původní polohy úsečky o malou délku ds , kolmou k AB , a že její směr se změní o malý úhel $d\varphi$. Z obr. 34,1a vidíme, že plocha $ABB'A'A$, opsaná úsečkou, je až na veličiny vyššího řádu než ds a $d\varphi$ rovna

$$dS = l ds. \quad (1)$$

Plochu opsanou úsečkou při konečné změně její polohy dostaneme součtem (integrací), při čemž ds má pro pohyb opačného směru opačné znaménko. To znamená, že se části roviny, proběhnuté úsečkou dvakrát v opačných směrech, v součtu zruší a integrál výrazu (1) dává tedy velikost jen té části roviny, kterou úsečka projde pouze jednou.

Vykoná-li úsečka uzavřený pohyb, opíše oba její konce uzavřené křivky (a) a (b). Z obr. 34,1b vidíme, že při pohybu koncových bodů A a B ve smyslu šipek zasáhne úsečka plochu S_a křivky (a) — svisle čárkovanou — jen při pohybu vzhůru (mezi polohami A_0B_0 a A_1B_1) a plochu S_b křivky (b) — vodorovně čárkovanou — jen při pohybu dolů (mezi polohami $A'_0B'_0$ a $A'_1B'_1$), kdežto plochu mezi oběma křivkami — čárkovanou svisle i vodorovně — projde oběma směry. Počítáme-li tedy kladně plochu zasaženou při pohybu vzhůru a záporně při pohybu dolů, je algebraický součet S zasažených ploch roven rozdílu prostých velikostí ploch S_a a S_b .¹⁾ Je-li tedy na př. plocha S_b známa, stačí k určení velikosti plochy S_a změřit celkovou plochu S , zasaženou úsečkou, a dosadit do vztahu

$$S_a = S + S_b. \quad (2)$$

¹⁾ Tento výsledek platí při libovolné vzájemné poloze křivek (a) a (b), jak lze matematicky dokázat.

Na této myšlence jsou založeny planimetry. Jsou tak zařízeny, že konec B *pojízdné tyče* délky l má mechanické vedení po dané křivce b , zvané *vodící křivka*, kdežto druhý konec A , opatřený hrotem, objede při měření jednou dokola uzavřenou čáru,²⁾ omezující měřenou plochu. Integrace součinu (1) provádí se rovněž mechanicky tím, že se k tyči \overline{AB} připevní malé kolečko K (zv. *měřicí* či *integrující*), jehož osa je *rovnoběžná s tyčí* (a ovšem i s rovinou měřené plochy). Je-li hrana kolečka, která se valí po rovině, vzdálena od konce B o délku λ , pak podle obr. 34,1a při přechodu tyče z AB do $A'B'$ dráha ujetá kolečkem kolmo k jeho ose je

$$d\sigma = ds - \left(\frac{l}{2} - \lambda \right) d\varphi,$$

takže podle (1)

$$dS = l ds + l \left(\frac{l}{2} - \lambda \right) d\varphi.$$

Celková plocha, opaná tyčí při přechodu z počáteční polohy A_0B_0 , kterou označíme (0) , do polohy A_1B_1 , kterou označíme (1) , je tedy

$$S = l \int_{(0)}^{(1)} ds = l \int_{(0)}^{(1)} d\sigma + l \left(\frac{l}{2} - \lambda \right) \int_{(0)}^{(1)} d\varphi. \quad (3)$$

První integrál dává algebraický součet všech elementárních obloučků, odvalených měřicím kolečkem mezi počáteční a konečnou polohou tyče. Určíme jej mechanicky tak, že ke kolečku připevníme malý bubínek dělený na 100 dílů. Je-li poloměr kolečka r , pak

$$d\sigma = \frac{2\pi r}{100} dn,$$

kde dn značí úhel otočení kolečka v dílcích měřených noniem (připevněným ke kolečku) na desetiny dílků. Je tedy

$$\int_{(0)}^{(1)} d\sigma = \frac{2\pi r}{100} (n_1 - n_0),$$

značí-li n_0 a n_1 čtení na kolečku na počátku a na konci měření (celé otáčky udává malý dělený kruh, připojený k měřicímu kolečku).

Druhý integrál v (3) dává algebraický součet všech elementárních změn směru tyče, a je tedy roven rozdílů úhlů, které tyč svírá na konci (φ_1) a na začátku (φ_0) s nějakým pevným směrem. Celkem tedy plyne z (3) pro plochu opanou tyčí

$$S = \frac{2\pi r}{100} l (n_1 - n_0) + l \left(\frac{l}{2} - \lambda \right) (\varphi_1 - \varphi_0). \quad (4)$$

Druhý člen může být různý pro různé planimetry, jež se liší vodící křivkou. Uvedeme dva nejdůležitější typy:

34,1 Přímkový planimetr (lineární, vozíkový) (obr. 34,2 a). Vodící čarou (b) je tu přímka, kterou dostaneme tak, že konec B pojíždí ve žlábků kovového

34²⁾ Spojitou a bez dvojných bodů.

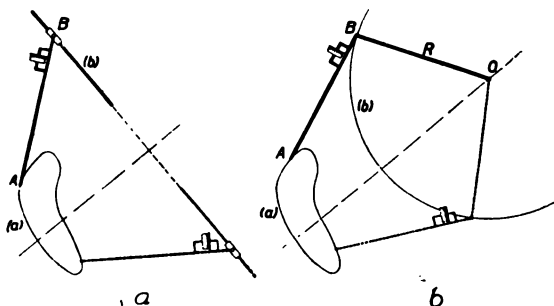
pravítka. Obíhá-li hrot A po dané uzavřené čáře (a), posouvá se B po pravítku sem tam a při dokončení oběhu se vrátí do výchozí polohy. Zde je zřejmě $S_b = 0$ a kromě toho $\varphi_1 = \varphi_0$, tedy měřená plocha je podle (2) a (4) dána vzorcem

$$S_a = S = \frac{2\pi r}{100} l (n_1 - n_0) = k (n_1 - n_0), \quad (5)$$

kde

$$k = \frac{2\pi r l}{100} \quad (6)$$

značí *převodní číslo* planimetru.



Obr. 34,2. Planimetry:
a - přímkový; b - pólový.

Pólový (polární) planimetr (obr. 34,2b). Pólový planimetr má za vodící **34,II** křivku kružnici poloměru R . Konstrukce je provedena tak, že konec B tyče \overline{AB} má buď kloub, nebo kulový čep, jímž souvisí s ramenem délky R , zatíženým na druhém konci kovovým válečkem, který se hrotem zabodne do podložky v bodě O . Tím je kloub B vázán na kružnici opsanou kolem pólu O . Měřicí kolečko bývá poblíž kloubu B , a to buď na straně k A ($\lambda > 0$), nebo na opačné straně prodloužené tyče ($\lambda < 0$). Jsou možný dva případy:

1. *Pól leží mimo měřenou plochu.* V tomto případě je pohyb tyče zcela podobný jejímu pohybu u přímkového planimetru. Kloub B opíše jen část vodící kružnice, a to v obou smyslech. I zde je $S_b = 0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, takže pro velikost měřené plochy platí stejný vzorec (5) jako pro planimetr přímkový a nezáleží na vzdálenosti kolečka od čepu B . Je to pochopitelné, neboť přímkový planimetr je vlastně mezní případ pólového planimetru s pólem v nekonečnu.

2. *Pól leží uvnitř měřené plochy.* Aby bod A proběhl celý obrys (a), musí jeho spojnice s pólem O opsat plný úhel 2π tak jako druhý konec B pojízdné tyče, který se také musí vrátit do původní polohy. Bod B proběhne tedy celý obvod vodící kružnice a uzavře tak plochu $S_b = \pi R^2$. Kromě toho je nyní $\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi$, takže dosazením do (2) a (4) dostaneme

$$S_a = S + \pi R^2 = \frac{2\pi r l}{100} (n_1 - n_0) + \pi l (l - 2\lambda) + \pi R^2$$

čili

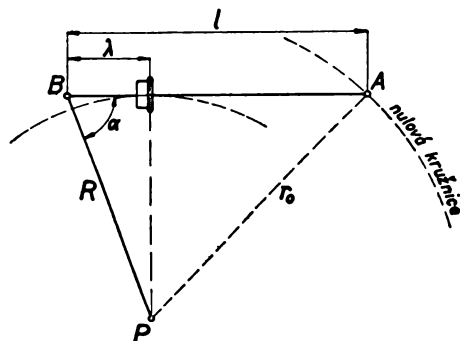
$$S_a = k (n_1 - n_0) + C, \quad C = \pi (R^2 + l^2 - 2\lambda l); \quad (7)$$

k je dáno rovnicí (6) a C je konstanta, která je buď u planimetru udána, nebo ji vypočteme podle (7), pokládajíce λ za kladné, když kolečko je mezi A a B .

Také ji lze zjistit měřením známé plochy. Velmi prostý výkres na obr. 34,3 nás přesvědčí, že C je rovno ploše uzavřené kružnicí, při jejímž objždění se měřicí kolečko neotáčí (jen klouže ve směru své osy). Obě ramena planimetru musí patrně svírat takový úhel α , aby rovina hrany kolečka procházela pólem planimetru. To je možné jen tehdy, když bod A obíhá po kružnici, pro jejíž poloměr dostaneme z kosinové věty

$$r_0^2 = R^2 + l^2 - 2 Rl \cos \alpha = R^2 + l^2 - 2\lambda l.$$

Pro tuto kružnici se první člen vzorce (7) rovná nule; nazývá se proto *nulová kružnice*.



Obr. 34,3. Nulová kružnice pólového planimetru.

Konstrukcí nelze zaručit s dostatečnou přesností rovnoběžnost osy měřicího kolečka s pojízdnou tyčí. Chyby vzniklé malou odchylkou prakticky odstraníme, opakujeme-li měření tímž planimetrem v poloze souměrné vzhledem k spojnici pólu (který se nesmí změnit) s těžištěm měřené plochy. Dá se to snadno provést u t. zv. *kompensačního* planimetru pólového tak, že pojízdnou tyč oddělíme od pólového ramena, které přetočíme do souměrné polohy, aniž jeho pevným koncem pohneme. K tomu je u tohoto planimetru pojízdná tyč spojena s pólovým ramenem kulovým čepem, jehož vyjmutím obě části oddělíme. Podobně měříme ve dvou polohách i planimetrem přímkovým, jak je vyznačeno v obr. 34,3 tečkovaně.

MĚŘICÍ METODY

34.1. Výpočet plošného obsahu (metody nepřímé)

Rovinné plochy omezené pravidelnými křivkami nebo mnohoúhelníky určují se výpočtem z jejich délkových rozměrů, jež zjistíme měřením metodami uvedenými v čl. 31 nebo 32. Podobně postupujeme při určování povrchu pravidelných těles rovinných i zakřivených. Chybu výsledku určíme podle vzorce 12 (2) nebo 12 (11). *Měříme-li všechny délky se stejnou poměrnou chybou (což většinou je v soulase s požadavky hospodárnosti), je poměrná chyba vypočtené plochy dvojnásobná.*

Velikost některých ploch můžeme také vypočítat ze známého objemu a jednoho délkového rozměru. Délkový rozměr změříme podle 31 (32) a objem některou nepřímou metodou 35.2 až 35.4. Tak na př. plochu (nepravi-

delnou) tenké stejnorodé vrstvy (plechu, skleněné desky a pod.) můžeme vypočítat ze hmoty a ze známé hustoty (srov. 31.7), plochu průřezu stejno-
měrné trubice zvážením sloupce rtuti známé délky (srov. 31.3). Určení povrchu
některých ploch rozvinutelných dá se také převést na zjištění rovinných
ploch tak, že pokryjeme příslušnou část povrchu nějakou látkou (práškem,
barvou), valením plochy po rovinné desce rozvineme plochu do roviny a pak
změříme některou z uvedených method nebo planimetrem (34.2).

34.2. Měření planimetrem

Postup měření je v podstatě stejný u planimetru přímkového [34,I] i pólového [31,II]. Jen leží-li pól v měřené ploše, je nutno kromě převodního čísla nalézt i konstantu C , není-li předem známa. Na určení převodního čísla k daného výrazem (6) je připojeno k planimetru kovové pravítko s bodcem u jednoho a s jamkou u druhého konce. Do jamky nasadíme hrot planimetru a otočíme jím o plný úhel kolem bodce (v bodnutého do podložky); tím obje-
deme plochu kruhu o poloměru rovném vzdálenosti jamky od bodce. Nejčastěji se volí tato vzdálenost co možná blízká délce (asi 5,642 cm) poloměru kruhu o ploše 100,00 cm² a tato délka nebo skutečná plocha S_k příslušného kruhu se vyznačí na pravítku. Převodní číslo bývá blízké jedné, takže jedním otočením pravítka se změni čtení na planimetru zhruba o 100 dílků; převodní číslo k dostaneme, jestliže skutečnou plochu S_k dělíme změnou čtení při jednom objetí. Pak teprve přikročíme k vlastnímu měření. Plochu S_k i měřenou plochu ob-
jíždíme několikrát, a to vždy v lichém počtu, abychom měli v obou případech celkem sudý počet čtení, která zpracujeme *postupnou methodou* (čl. 18) a vypočteme také pravděpodobnou chybu obou výsledků. Ježto lze mechanicky vést pravítko přesněji než sledovat narýsovanou čáru hrotem planimetru, mohli bychom počet měření v prvním případě snížit; je však lépe měřit i převodní číslo stejným počtem oběhů (na př. 9), čímž jeho poměrná chyba klesne na zlomek poměrné chyby plochy měřené v dílcích planimetru. Chyba velikosti plochy v cm², dané součinem (5), je pak rovna chybě plochy v dílcích, ježto ve vzorci pro poměrnou chybu součinu 12 (9) můžeme poměrnou chybu převodního čísla pominout.

Postup

1. Přitiskneme pravítko bodcem na (rovinnou!) tuhou podložku (rýsovací prkno) s připevněným hladkým (kladivkovým) papírem, polohu rysky na druhém konci pravítka vyznačíme tužkou na podložce a zapíšeme údaj měřicího kolečka, nasadíme hrot po-
jížděný tyče do jamky pravítka; uchopíme držátko u hrotu a pomalu otočíme o plný úhel ve smyslu pohybu hodinových ručiček tak, aby ryska přišla přesně do původní polohy, a znovu čteme údaj kolečka.

2. Nato znovu opišeme kružnici a zapíšeme údaj kolečka a opakujeme to několikrát, abychom měli celkem sudý počet čtení (na př. 10). U kompenzačních planimetrů konáme měření v obou možných polohách naznačených na obr. 34,2 tak, abychom měli na př. 6 čtení v každé z nich, a z obou výsledků vezmeme průměr.

3. Získaná čtení zpracujeme postupnou methodou (18), vypočteme průměrný počet dílků p pro jeden oběh a dělíme jím danou nebo z poloměru vypočtenou plochu kruhu S_k , čímž dostaneme převodní číslo k v cm². Chybu k není třeba počítat.

4. Stejným způsobem (postupnou methodou) změříme v dílcích planimetru danou plochu, čímž dostaneme výslednou střední hodnotu pro změnu čtení při jednom oběhu n . Kromě toho vypočteme také pravděpodobnou chybu této hodnoty podle 12 (32) nebo 11 (15).

5. Při měření přímkovým planimetrem je plocha v cm² dána vzorcem (5), který platí i pro planimetr pólový, leží-li pól mimo měřenou plochu. Leží-li pól v ploše, přičteme

podle vzorce (7) k této hodnotě konstantu C , kterou můžeme buď vypočítat z rozměrů planimetru, nebo určit měřením známé plochy.

6. Pravděpodobná chyba výsledku zjištěného podle (5) je rovna pravděpodobné chybě průměrné hodnoty rozdílu n . Chyba hodnoty (7) se ovšem vypočte podle věty 12 (10).

Příklad. Měření plochy kompenzačním pólovým planimetrem.

Nejprve bylo zjištěno převodní číslo podle 84.2 (úkon 1—3) tak, že byla devětkrát objeta plocha opsaná hrotem planimetru, zasazeným v důlku pravítka, vzdáleném od bodce o 6,00 cm. ($S_k = 36 \pi \text{ cm}^2 = 113,097 \text{ cm}^2$).

Měření dalo tyto hodnoty:

Čtení na kolečku		Rozdíl	Δ_+	Pravděpodobná chyba středu podle 12 (26) $\bar{\delta} \ 5p = \frac{\Sigma \Delta_+}{6} = 0,046$
232,1	817,3	585,2		
349,0	934,1	585,1		
465,9	50,7	584,8	0,24	
582,5	167,5	585,0	0,04	
699,6	284,7	585,1		

Průměr rozdílů $5p = 585,04$, $\Sigma \Delta_+ = 0,28$, $p = 117,008 \pm 0,009$. Při druhém měření v souměrné poloze vyšla hodnota o 0,003 menší, proto byl k výpočtu k vzat průměr $\bar{p} = 117,006$. Tedy převodní číslo

$$k = \frac{S_k}{p} = (0,966 \ 58 \pm 0,000 \ 09) \text{ cm}^2.$$

Stejným postupem byl získán pro měřenou plochu výsledek $n = 71,51 \pm 0,02$ (průměr měření v obou polohách) a násobením k vyšla plocha

$$S = (69,12 \pm 0,02) \text{ cm}^2,$$

při čemž chyba součinu kn , jak se přesvědčíme dosazením poměrných chyb do 12 (9), rovná se prakticky chybě n .

35. OBJEM

Definice. Ve fyzice je objem dán částí prostoru, vyplněnou určitým prostředím, čili částí prostoru, omezenou uzavřeným rozhraním různých prostředí.

Jednotky. MKSA: $[V] = \text{m}^3 = \text{krychlový (kubický) metr}$. Absolutní jednotka: $[V]_c = \text{cm}^3 (= \text{cm}) = \text{krychlový (kubický) centimetr}$.

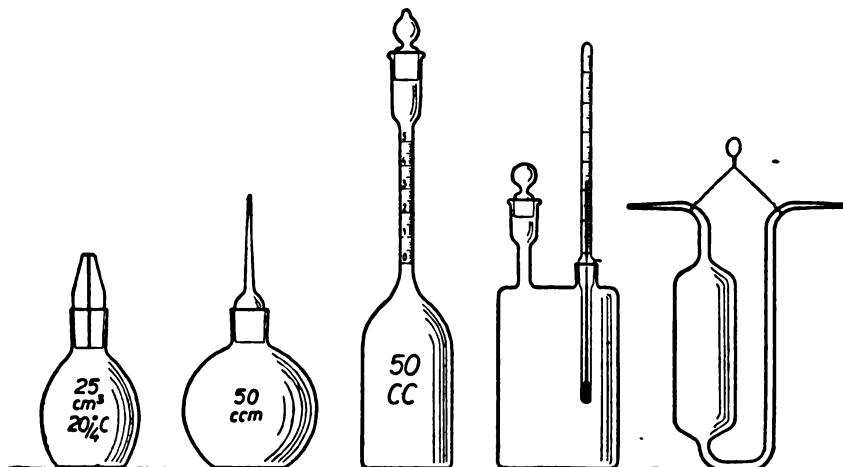
Praktická jednotka: $[V]_p = 1 = \text{litr} = 0,001 \ 000 \ 027 \ \text{m}^3 = 1000,027 \ \text{cm}^3$. Kromě toho se používá desetinných zlomků i násobků uvedených jednotek.

Přístroje

Měrné nádoby. Jsou určeny k měření neznámého objemu látky, zejména 35,I kapalin a plynů. Jsou to měrné vá ce nebo kalibrované nádoby (mensury) jiného tvaru, na nichž jsou vyryty stupnice postupující obvykle po 1 cm^3 (ml). Lze jimi také oddělit z nějakého množství předepsaný objem tekutiny. Výhradně se k tomu vyrábějí odměrné nádoby pro jediný předem daný objem. Jsou trojího druhu:

¶ **Odměrná baňka** je skleněná nádoba (obvykle uzavřená), na níž je ryskou vyznačena výška hladiny tekutiny určitého objemu, který je na baňce poznamenán zároveň s teplotou, při které je objem správný. 35,II

Pyknometr, přesnější druh odměrné baňky (obvykle s menším obsahem $25 \div 100 \text{ cm}^3$), je tak zařízen, aby obsahoval při stejné teplotě vždy též objem kapaliny, jehož velikost je pro předepsanou teplotu vyznačena na nádobce. Nejčastěji má tvar lahvičky se zabroušenou zátkou a kapilárním otvorem, jímž při 35,III



Obr. 35,1. Různé druhy pyknometrů (poslední je pyknometr *Sprengelův*).

uzavření přebytečná kapalina unikne. Některé pyknometry mají i drobný teploměr, jiné (na př. *Sprengelův*) mají takový tvar, že se velkým povrchem proti objemu rychle a dokonale vyrovnává teplota kapaliny s teplotou okolí. Jeho správné naplnění (bez vzduchových bublinek) děje se nassáváním a skláněním nádoby a vyžaduje určitou zručnost. Různé tvary pyknometrů vidíme na obr. 35,1. Při správném postupu odměřují pyknometry velmi přesně definovaný objem kapaliny a užívá se jich hlavně na měření hustoty kapalin a drobných tělísek; hodí se i na měření teplotní roztažnosti kapalin. Pyknometr čistíme tak, že jej vypláchneme destilovanou vodou a vyprázdníme. Pak do něho nalijeme trochu alkoholu, protřepeme, aby všude smyl zbylou vodu, a necháme chvíli odkapat. Nato jej zahřejeme nad kahanem (nesmí se přiblížit k plameni) za stálého pohybu a vysušení dokončíme tak, že vsuneme dovnitř (až ke dnu) trubičku spojenou s vodní vývěvou.

Pipeta je skleněná trubice několik decimetrů dlouhá, s vnitřním průměrem několika milimetrů, uprostřed rozšířená v baňku. Objem pipety při určité teplotě je vyznačen na baňce (5, 10, 25, 50 cm^3 , ccm, ml). Plní se tak, že se kapalina nassaje až po rysku na horní části trubice a pak se její hořejší konec ucpe (prstem). Při vyprazdňování je nutno přiložit dolejší (zúžený) otvor pipety ke stěně nádoby, aby vytekla prakticky všechna kapalina. Některé pipety mají rysku také nad spodním otvorem a správný objem je obsažen mezi oběma ryskami (pipeta se dvěma ryskami se tedy nevyprazdňuje úplně). Správnost pipety lze přezkoušet vážením vody nebo rtuti (35.5). 35,IV

Byreta je svislá skleněná trubice všude stejné světlosti asi 1 cm^2 , rozdělená (shora dolů) po 0,1 cm^3 a uzavřená dole buď zabroušeným kohoutem, nebo 35,V

hadicí s tlačkou. Upne se do stojanu tak, aby pod ni bylo možno postavit kádinku a vypustit z ní žádaný objem kapaliny. K zvýšení přesnosti čtení bývá na její zadní stěně bílý emailový polev s úzkým modrým (svislým) proužkem. Při čtení výšky sloupce průhledné kapaliny, která smáčí stěny byrety (voda), jeví se tento proužek v nejnižším místě menisku ztenčen; polohu místa největšího zúžení čteme na stupnici. U kapalin neprůhledných čteme ovšem polohu okraje. U kapalin, jež nelnou ke sklu (rtuť), čteme polohu vrcholu menisku, při čemž je třeba vystříhat se chyby úkosu (promítat vrchol na stupnici vodorovně). Kontrolu byrety provádíme vážením vody nebo rtuti (35.6).

35,VI

Volumenometr (obr. 35,2) je baňka, do jejíhož zabroušeného hrdla je nasazena svislá skleněná trubice, v podstatě shodná s hořejší částí byrety [35,V]. Je vhodný k rychlému měření objemu drobných tělísek (látek zrnitých a práškových). Nedosahuje přesnosti method pyknometrických.

V technické praxi byly zavedeny různé typy „objemoměru“, které vyhovují rozmanitým zvláštním požadavkům.

35,VII

Eudiometr (měrná trubice) je rovněž svislá kalibrovaná trubice, nahoře uzavřená a ponořená spodním otevřeným koncem do vody (rtuti). Měří se jím objem plynu, který se jímá do trubice (původně zcela naplněné kapalinou). Tlak plynu je při tom roven vnějšímu tlaku, zmenšenému o hydrostatický tlak sloupce kapaliny, stojícího nad okolní hladinou, a o napětí nasycených par užitě kapaliny.

Všechny uvedené přístroje dávají pro měřený objem hodnotu V_0 více nebo méně přesnou jen při jisté teplotě t_0 (18°, 20 °C), která má být na nich uvedena. Užijeme-li jich při jiné teplotě t , je jejich objem

$$V = V_0 [1 + \beta (t - t_0)], \quad (1)$$

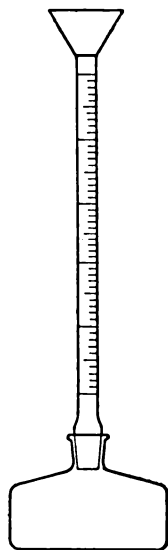
kde β je objemová teplotní roztažnost skla, z něhož je přístroj zhotoven. S dostatečnou přesností můžeme položit $\beta = 0,000\ 025\ ^\circ\text{C}^{-1}$, takže skutečný objem je větší o teplotní korekci

$$\Delta V = \frac{t - t_0}{40\ 000} \cdot V_0, \quad (2)$$

kteřá je při vyšší teplotě kladná, při nižší ovšem záporná.

MĚŘICÍ METODY**35.1. Přímé metody měření objemu**

Objem pravidelných pevných těles vypočítáme z délkových nebo i z plošných rozměrů, jež určíme některou z method uvedených v 31 nebo 34. Měření délek i ploch hledíme ovšem provést s takovou přesností, aby jejich chyby měly přibližně stejný podíl na výsledné chybě objemu [viz vzorec 12 (2)]. Objem kapalin se nejrychleji určí měrnou (kalibrovanou) nádobou, na př. měrným válcem [35, I] nebo volumenometrem [35, VI], jichž lze užít i na měření objemu pevných látek, naplníme-li je zčásti kapalinou (kteřá na látku nepů-



Obr. 35.2.
Volumenometr.

sobí), a zjistíme-li jednak objem kapaliny samé, jednak společný objem kapaliny a měřené látky do ní vnořené. Při tom je třeba mít zřetel na teplotní roztažnosti podle vztahu (1) nebo (2).

35.2. Zjišťování objemu látky známé hustoty vážením

Objem lze určit také nepřímo z hmoty a hustoty látky. Je-li známa hustota ρ (při dané teplotě), stačí zjistit hmotu dané látky vážením a vypočítat objem V ze vztahu

$$V = \frac{M}{\rho}. \quad (3)$$

Při tom musí být hmota M měřena absolutně, tedy k jejímu vážení se musí použít některé z absolutních method: 28.2, 28.3 a výsledek vážení je nutno opravit na vztlak vzduchu. Protože však hustota (s výjimkou některých kapalin jako voda, rtuť a j.) nebývá známa s velikou relativní přesností, stačí vzít hodnotu opravy z tabulky T, I. Ačkoliv objem závisí na teplotě, není třeba ji při vážení měřit, neboť hmota na teplotě nezávisí a z (3) vypočteme objem pro každou teplotu, dosadíme-li tam za ρ hustotu příslušnou této teplotě.

35.3. Hydrostatická metoda

Tato nepřímá metoda je založena na *Archimedově zákonu*, podle něhož se váha tělesa ponořeného do kapaliny zmenší o váhu vytlačené kapaliny. Máme-li tedy po ruce kapalinu známé hustoty (nejčastěji to bývá chemicky čistá destilovaná voda), do níž můžeme látku bez poškození ponořit, určíme objem postupem (zvaným též *metoda dvojího vážení*), který je vhodný pro pevná tělesa, drobná tělíska i nerozpustné práškové hmoty. Zvážíme některou *absolutní* metodou, na př. tárovací (28.3), látku na vzduchu a ve vodě známé teploty (a hustoty s). Rozdíl vah dává vztlak v kapalině, ale skutečnou hmotu vytlačené vody m dostaneme z hmoty z závaží vyrovnávajícího vztlak teprve redukcí na vakuum podle 28 (9):

$$m = z + \zeta = z \left[1 + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\rho_s} \right) \delta \right].$$

Při obvyklé přesnosti, kdy objem určujeme s poměrnou chybou asi 10^{-4} , můžeme v korekci ζ počítat se střední hustotou vzduchu ($\delta = 1,2 \text{ kgm}^{-3}$), takže dostaneme podle vzorce 28 (11) přibližný vztah

$$m = 1,00106 z.$$

Skutečný objem V vody je dán vztahem (3), který lze psát ve tvaru

$$V = \frac{m}{s} = \frac{m}{1 - (1 - s)} = m [1 + (1 - s)],$$

neboť při obvyklých teplotách je rozdíl $1 - s$ velmi malý. Další úpravou plyne

$$V \doteq z (1 + 0,0011) [1 + (1 - s)],$$

takže skutečný objem je dán dostatečně přesným vzorcem

$$V \doteq z [1,0011 + (1 - s)] = z + z [0,0011 + (1 - s)], \quad (4)$$

kam za s dosadíme hustotu vody z tabulky T, II a v druhém (korekčním) členu zaokrouhlíme z na dvě místa.

Potřeby: Hydrostatické váhy [25, VIII], zařízení k zavěšení měřené hmoty (nejčastěji stříbrný nebo platinový drátek), kapalina známé hustoty (destilovaná voda).

Postup (srov. 28.3, 30.1 a snímek 25,9)

1. Změříme teplotu vody t_1 .
2. Na kratší miskou zajištěných hydrostatických vah položíme měřenou látku a na její spodní závěs upevníme závěsné zařízení (drátek, háček, malou miskou) tak, aby bylo ponořeno do vody v kádince postavené pod miskou.
3. Na druhou miskou položíme tolik táry, aby uvolněné váhy kývaly ve stupnici, a určíme rovnovážnou polohu r_0 .
4. Na kratší miskou přidáme přívazek Δz ($2 \div 5$ cg) a určíme rovnovážnou polohu r .
5. Sejmeme měřenou látku s misky a zavěsíme pod miskou tak, aby byla celá ponořena a závěsné zařízení bylo stejně hluboko potopeno jako při 2 a 3.
6. Na uprázdňenou (kratší) miskou klademe závaží, až vyrovnáme vztlak vody na látku (závažím z_1) a zjistíme rovnovážnou polohu r_1 (ne příliš vzdálenou od r_0 a r).
7. Závaží z_1 zapíšeme, sejmeme (opakujeme určení rovnovážné polohy r_0 nebo i r) a znovu změříme teplotu vody t_2 .
8. Vypočteme z r_0 , r a Δz citlivost vah c podle věty 26 (6) a správné závaží podle 28 (5'):

$$z = z_1 + \frac{r_0 - r_1}{c},$$

je-li nula stupnice na straně kratší misky (v opačném případě $z = z_1 - \frac{r_0 - r_1}{c}$).

9. Najdeme v T, II hustotu s vody při teplotě $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.
10. Dosazením do vzorce (4) vypočteme objem V látky.

35.4. Pyknetrická metoda

Vsypeme-li do pyknetru naplněného kapalinou známé hustoty drobná tělíska nebo práškovou hmotu (hustší než kapalina!) a uzavřeme-li jej, unikne z něho část kapaliny, jejíž objem je právě roven objemu tělísek. Z toho plyne tato metoda:

Potřeby: Pyknetr se zátkou [35, III], váhy, destilovaná voda (nebo jiná kapalina známé hustoty), tára.

Postup (srov. 28.3 a 30.1)

1. Změříme teplotu místnosti t_1 a teplotu vody; liší-li se více než asi o 3° , vyčkáme, až se rozdíl zmenší nebo nalijeme vodu do pyknetru, aby se teploty vyrovnaly.
2. Pyknetr zcela naplníme vodou, uzavřeme zátkou, filtračním papírem odsajeme meniskus vody na kapiláře zátky a osušíme celý pyknetr.
3. Postavíme pyknetr na pravou miskou zároveň s měřenou hmotou¹⁾ a po vytárování vypočteme ze 4 výkyvů rovnovážnou polohu r_0 .
4. Přívazkem Δz na pravé misce změníme rovnovážnou polohu o několik dílků na r a vypočteme citlivost vah $c = \frac{r - r_0}{\Delta z}$.
5. Pyknetr sejmeme, otevřeme, vsypeme měřenou látku, uzavřeme a osušíme.
6. Takto upravený pyknetr znovu postavíme na pravou miskou a vyvážíme závažím z_1 , kladeným vedle pyknetru na pravou miskou tak, aby rovnovážná poloha r_1 ležela poblíž r_0 a r .
7. Změříme znovu teplotu t_2 místnosti.
8. Podle vzorce 28 (5') $z = z_1 + \frac{r_0 - r_1}{c}$ vypočteme správné závaží z , vyvažující vodu vytlačenou měřenými tělisky.
9. Správný objem látky při průměrné teplotě $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ je dán vzorcem (4), kde s je hustota vody při téže teplotě.

¹⁾ Hmoty práškové klademe na hodinové sklíčko nebo do nádobky, kterou ovšem necháme na misce i při vážení 6.

35.5. Kontrola pipety

Skutečný objem pipety [35, IV] za určité teploty měříme tak, že zjistíme objem kapaliny v ní obsažené methodou 35.2, což pro zvýšení přesnosti a spolehlivosti kontroly několikrát opakujeme. Při tom aplikujeme postupnou metodu způsobem podrobně popsaným v čl. 18 při výkladu této metody. Ježto jde o absolutní velikost hmoty, je ovšem tento postup vhodný jen tehdy, jsou-li váhy v mezích požadované přesnosti rovnoramenné. Jinak je nutno použít na př. tárování, a to metody *stálého zatížení*, která je tu zvláště vhodná. Jako měřicí kapaliny se užívá destilované vody (nebo rtuti), jejíž teplota má být blízká teplotě místnosti; totéž předpokládáme o teplotě pipety.

Potřeby: Praktikantské váhy [25, IV], baňka se zabroušenou zátkou (nejméně o šestinásobném objemu pipety), teploměr.

Postup (srov. 28.3 a 30.1)

1. Změříme teplotu t_1 vody (rtuti) a místnosti.

2. Postavíme prázdnou baňku na pravou miskou vah a přidáme k ní nejméně tolik gramů závaží Z_0 , kolik kubických centimetrů vody do ní hodláme z pipety celkem vypustit. Nato vytárujeme (nejlépe stejným závažím a granátky) na levé misce a určíme rovnovážnou polohu r_0 .

3. Přidáme na pravou miskou přívazek ΔZ_0 , určíme novou rovnovážnou polohu r'_0 a vypočteme citlivost vah $c_0 = \frac{r'_0 - r_0}{\Delta Z_0}$.

4. Sejmeme baňku, vyprázdníme do ní pipetu, postavíme zpět na miskou a zmenšíme závaží na takovou hodnotu Z'_1 , aby rovnovážná poloha r_1 byla blízká r_0 .

5. Sejmeme baňku, přidáme do ní znovu obsah pipety, vyvážíme závažím Z'_2 a určíme rovnovážnou polohu r_2 .

6. Tak postupujeme, až baňku naplníme zvoleným *lichým* počtem n obsahů pipety (na př. 5) a určíme opět závaží Z'_n a r_n .

7. Při tomto posledním vážení n znovu vyzkoušíme citlivost přidáním přívazku ΔZ_n , kterým změním rovnovážnou polohu na r'_n .

8. Vypočteme citlivost $c_n = \frac{r'_n - r_n}{\Delta Z_n}$ a průměr $c = \frac{1}{2} (c_0 + c_n)$.

9. K závažím Z'_1, \dots, Z'_n přičteme korekce $\Delta Z'_1 = \frac{r_0 - r_1}{c}, \dots, \Delta Z'_n = \frac{r_0 - r_n}{c}, \dots$ a tak dostaneme správné hodnoty závaží

$$Z_i = Z'_i + \Delta Z'_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

10. Celkem máme sudý počet $2k \equiv n + 1$ hodnot Z_0, \dots, Z_n , z nichž utvoříme rozdíly $Z_0 - Z_k, Z_1 - Z_{k+1}, Z_{k-1} - Z_n$, které se liší jen měřicími chybami od k -násobku závaží vyvažujícího jeden obsah pipety. Vypočteme tedy jejich průměr z a jeho pravděpodobnou chybu ϑ_z .

11. Tuto průměrnou hodnotu dosadíme do vzorce (4) pro objem V pipety, jehož pravděpodobná chyba v cm^3 se prakticky rovná chybě ϑ_m v gramech, a za s dosadíme hustotu vody z T, II.

Způsob výpočtu je patrný z následujícího příkladu.

Příklad. Kontrolujeme pipetu na 5 cm^3 vážením na praktikantských vahách při 23 °C.

Tabulka 85, I. Výpočet opravy pipety

Z_i v g		Rozdíly	Δ	Pravděpodobná chyba
$i = 0, 1, 2$	$i = 3, 4, 5$			
30,000	15,031	14,969	+ 0,022	$\frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta}{n \sqrt{n-1}} = 0,027 \text{ g}$
25,018	10,073	14,945	+ 0,046	
20,029	4,971	15,058	- 0,067	

Průměr 14,991, $\Sigma \Delta_+ = 0,068$;

$$3z = 14,991 \text{ g}, \quad z = (4,997 \pm 0,009) \text{ g}, \quad s = 0,9975 \text{ gcm}^{-3}.$$

Podle (4)

$$V = (4,997 \pm 0,009) \text{ cm}^3 + 5,0 (0,0011 + 0,0025) \text{ cm}^3.$$

Správný objem pipety při 23 °C je tedy

$$V = (5,015 \pm 0,009) \text{ cm}^3.$$

35.6. Kalibrace byrety

Kalibraci byrety [35, V] provádíme vážením vody nebo přesněji vážením rtuti takto: Naplníme byretu téměř až k nule (nahore) a čteme polohu menisku, pak vypustíme několik cm^3 kapaliny do připravené suché baňky, kterou uzavřeme zátkou. Váhu baňky pak zjistíme methodou stálého zatížení, jak bylo vyloženo při kontrole pipety 35.5. Potom do téže baňky přidáváme další části obsahu byrety, čtouce po každé poloze menisku tak, abychom dostali přibližně aritmetickou řadu objemů. To se nám ovšem nepodaří přesně, takže naměříme řadu stejných objemů. Nelze je tedy zpracovat postupnou methodou jako při kontrole pipetou.

Potřeby: Lókárnické váhy [25,IV], baňka se zátkou, teploměr, tára.

Postup

1÷9 jako v 35.5.

10. Správné hodnoty Z_i dosadíme postupně do vzorce (4) za z a dostaneme celkové objemy V_i^* ($i = 1, 2, \dots$), vypuštěné postupně z byrety.

Příklad. Kalibrace byrety do 50 cm^3 při 19 °C. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 35,II.

Tabulka 35,II. Kalibrace byrety

Čtení na byretě		Z_i v g	V^*	Oprava $V^* - V$
výška menisku v dílkách	objem (rozdíl) V cm^3			
0,02	0	60,000	0	
4,95	4,93	55,004	5,009	+ 0,08
9,98	9,96	50,046	9,980	+ 0,02
14,98	14,96	45,114	14,925	- 0,035
19,98				
45,06	45,04	15,082	45,035	- 0,005
49,98	49,96	10,162	49,968	+ 0,01

G. MĚŘENÍ HUSTOTY — HUTNOST A MOLEKULOVÁ HMOTA PLYNNÝCH LÁTEK

36. HUSTOTA (MĚRNÁ HMOTA)

Definice. Hustota ρ je poměr hmoty M k objemu V , jež hmota zaujímá:

$$\rho = \frac{M}{V}. \quad (1)$$

To je ovšem hustota průměrná; není-li hmota rozložena v celém zaujatém objemu stejnoměrně, je hustota v kterémkoli místě rovna mezní hodnotě, které se poměr (1) blíží, když se objem bez omezení zmenšuje:

$$\rho = \frac{dM}{dV}. \quad (1')$$

Číselně je tedy průměrná hustota rovna hmotě obsažené v objemové jednotce.

Jednotky. MKSA $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$. Absolutní jednotka $[\rho]_a = \text{gcm}^{-3}$. Technickou jednotkou by měla být $[\rho]_t = [M]_t \text{m}^{-3}$, ale místo toho se užívá měrné (specifické) váhy, jež jednotka technická je $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Číselně je měrná váha (v technických jednotkách) rovna hustotě v kg m^{-3} a 1000krát větší než hustota téže látky v jednotkách absolutních. U pórovitých nebo sypkých látek často používaný pojem *objemová váha* je vlastně průměrná hodnota měrné váhy v prostoru zaujatém hmotou i vzduchovými mezerami. Ve fyzice užíváme jednotky kgm^{-3} nebo gcm^{-3} , ale v praxi bývá dosud zvykem hustotu kapalin vyjadřovat v t. zv. *Bauméových stupních*, definovaných podle stupnice areometru [36, I].

Přístroje

Z definice (1) vidíme, že k měření hustoty lze použít přístrojů, kterými měříme hmotu (25) a objem (35), nebo i přístrojů měřících vůbec veličiny prostorové. Pro snadné měření hustoty kapalin byly však sestaveny zvláštní jednoduché přístroje, z nichž nejdůležitější jsou hustoměry (areometry) a *Mohrovy* vážky.

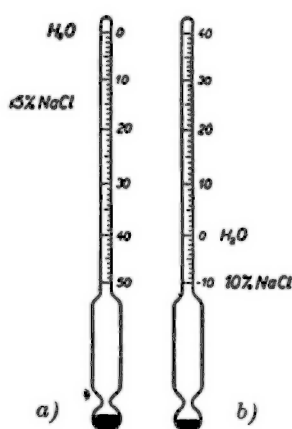
Hustoměry jsou založeny na plování těles menší průměrné hustoty než kapalina, do níž jsou ponořena. Podle Archimedova zákona je ponořený objem tělesa nepřímo úměrný hustotě kapaliny. Proto hustoměry neboli *densimetry*, udávající přímo hustotu kapaliny, kterou čteme na stupnici u dělicí čárky, ležící v rovině ponoru, mají stupnici nerovnoměrnou a hodnoty rostou od hořejšího konce trubice směrem dolů. V praxi se velmi často užívá **areometrů Bauméových**, vyráběných zvlášť pro kapaliny hustší a zvlášť pro kapaliny řidší než voda. Oba druhy jsou schematicky znázorněny na obr. 36, I. Mají rovnoměrné stup-

36, I

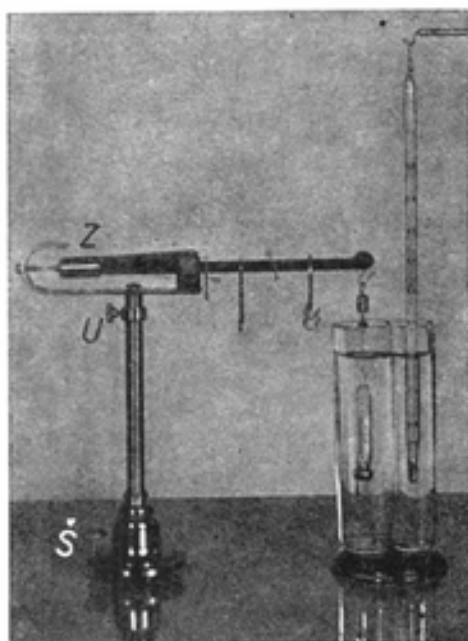
nice v rozsahu 50 dílků, zv. *stupně Bauméovy* ($^{\circ}\text{Bé}$), při čemž první druh má nultou čárku určenou rovinou ponoru v destilované vodě při 15°C u horního konce trubice a čárka 15. dílku znamená ponor areometru v 15% roztoku NaCl, který má tedy hustotu 15°Bé . Také druhý typ dává pro vodu hustotu 0°Bé a pod ním ležící čárka -10°Bé značí hustotu 10% roztoku NaCl. Rovnoměrně dělená stupnice končí nahoře čárkou $+40^{\circ}\text{Bé}$.

Abychom mohli přepočítat *stupně Baumé* na absolutní jednotky g/cm^3 , definujeme konstantu

$$C = \frac{V_0}{v} \quad (2)$$



Obr. 36,1. *Bauméovy* areometry: a – pro $\rho \geq 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; b – pro $\rho \leq 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.



Obr. 36,2. *Mohrový* vážky.

jako poměr objemu V_0 , ponořeného v H_2O , k objemu v trubice mezi dvěma sousedními dělicími čárkami. Pak se areometr pro hustší kapaliny ponoří v kapalině hustoty $\rho \text{ kg/m}^3$ po čárku n , pro kterou platí úměra (hustoty jsou v obráceném poměru objemů)

$$\rho : 1 = V_0 : (V_0 - nv) \quad \text{čili} \quad \rho = \frac{C}{C - n}. \quad (3)$$

Podobně se areometr v kapalině řidší než voda ponoří po čárku n' , určenou úměrou

$$\rho : 1 = V_0 : (V_0 + n'v).$$

Označíme-li v tomto případě poměr (2) C' , pak

$$\rho = \frac{C'}{C' + n'}. \quad (4)$$

Při stejně velkých dílcích je $C' = C$.

Konstanty mají mít hodnotu

$$C = C' = 144,3, \quad (5)$$

kteřou můžeme pro použitý areometr kontrolovat měřením kapaliny známé hustoty. Kontrola se provádí nejnázem tak, že několik kapalin změříme Mohrovými vážkami podle 36.6 a dosazením do (3) nebo (4) určíme průměrné hodnoty C nebo C' .

Mohrovy vážky jsou malé váhy pákové, jimiž se měří vztlak, kterým kapalina působí na skleněné tělísko v jednotkách rovných vztlaku destilované vody při 4 °C (obr. 36,2). Tělísko (obsahující malý teploměr) je zavěšeno tenkým drátkem na konci ramena vah, které jsou v rovnováze, pokud je tělísko ve vzduchu. Při ponoření do kapaliny se dosáhne znovu rovnováhy jezdcí, které se nasadí na zmíněné rameno, dělené na desetiny. 36,II

Největší jezdec váží tolik gramů, kolik cm^3 zaujímá tělísko, vyrovná tedy na konci vahadla vztlak kapaliny hustoty 1000 kg m^{-3} . Hmoty dalších jezdců jsou 10, 100 a 1000krát menší. Kontrola a měření jsou popsány v 36.6.

MĚŘICÍ METODY

Při měření hustoty na základě vztahu (1) je třeba určit hmotu M a objem V . Zjišťujeme-li hmotu vážením, musíme použít některé absolutní metody 28.2 nebo 28.3. To je nutno, je-li objem sám určen absolutně (tedy přímou metodou 35.1); zjišťujeme-li jej však také vážením (tedy metodou hydrostatickou 35.3 nebo pyknometrickou 35.4), stačí určit M i V vážením relativním; kromě toho se dá provést redukce na vakuum pro obě vážení zároveň. Píšeme-li totiž ve vztahu 28 (6) ρ místo ρ_M a $M = V\rho$, bude

$$V(\rho - \delta) = \left(1 - \frac{\delta}{\rho_z}\right) Z,$$

kde Z značí závaží hustoty ρ_z , vyvažující ve vzduchu hustoty δ měřenou látku. Pro vážení stejného objemu vody hustoty s závažím z platí obdobný vztah:

$$V(s - \delta) = \left(1 - \frac{\delta}{\rho_z}\right) z.$$

Vzájemným dělením obou posledních rovnic dostaneme

$$\frac{\rho - \delta}{s - \delta} = \frac{Z}{z},$$

odkud

$$\rho = \frac{Z}{z}(s - \delta) + \delta; \quad (6)$$

tímto obecným vzorcem určíme hustotu hmoty vyvážené na vzduchu závažím Z , známe-li závaží z vyvažující vodu stejného objemu. Při tom neděláme opravu ani na vztlak ani na nerovnoramennost vah. Hustotu vody s najdeme pro příslušnou teplotu v tab. T, II a za hustotu vzduchu δ dosadíme buď střední hodnotu $1,2 \text{ kg m}^{-3}$, nebo ji při větší přesnosti určíme podle T, III anebo ze vzorce 22(12), změřice tlak a vlhkost vzduchu.

36.1. Přímé metody měření hustoty pevných látek a kapalin

Určíme-li ve vzorci (1) objem některou přímou metodou 35.1, získáme přímou metodu na měření hustoty. Objem V pravidelných pevných

těles vypočteme z jejich rozměrů, objem práškových hmot změříme volumenometrem [35, VI] a objem kapalin rovněž volumenometrem nebo měrným válcem [35, I]. Také lze odměřit známý objem odměrnou baňkou [35, II] nebo pyknometrem [35, III] (korekce na roztažnost!). Hmotu M zjistíme ve všech případech absolutním vážením, tedy metodou dvojího vážení 28.2 nebo tárovací 28.3, a výsledek opravíme na vztlak vzduchu připojením korekce 28 (9)

$$\zeta = Z \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z} \right) \delta ; \quad (7)$$

za ρ dosadíme přibližnou hodnotu, která plyne dosazením Z za M do vzorce (1). Hmoty práškové a kapaliny vážíme ovšem v nějaké nádobce (na hodinovém sklíčku, v kádince nebo raději v uzavřené baňce); závaží Z vyvažující samu látku je pak rovno rozdílu závaží příslušných nádobce s látkou a nádobce prázdné.

Oprava na nerovnoramennost i na vztlak se týká tedy jen tohoto rozdílu Z . Při vážení měřené látky v nádobce je právě výhodná *metoda stálého zatížení* 28.3, které užijeme takto:

Na pravou misku dáme prázdnou nádobku (suchou a čistou), k ní přiložíme závaží Z_0 těžší než měřená látka a tárou na levé misce vyvážíme (rovnovážná poloha r_0). S přívazkem ΔZ na pravé misce se váhy ustálí v poloze r , takže citlivost

$$c = \frac{r - r_0}{\Delta Z}.$$

Nato vložíme (nalijeme) do nádobky měřenou látku a zmenšíme závaží na hodnotu Z_1 při rovnovážné poloze r_1 . Správná hodnota tohoto závaží je

$$Z_M = Z_1 + \frac{r_0 - r_1}{c}.$$

Správná hodnota závaží vyvažujícího samu hmotu je tedy

$$Z = Z_0 - Z_M ;$$

tuto hodnotu redukuje na vakuum připočtením opravy ζ dané výrazem (7), čímž dostaneme hmotu M .

Podle požadované (a při měření objemu dosažené) přesnosti konáme vážení buď na praktikantských [25, IV], nebo na analytických vahách [25, V] a všechny úkony provádíme podle příslušných návodů 30.1 nebo 30.2. Teplotu místnosti a kapaliny určíme před měřením objemu i po něm a u výsledků uvedeme střed obou teplot.

36.2. Hustota pevných látek — měření hydrostatickou metodou

Tato metoda, někdy zvaná *metodou dvojího vážení*, je založena na zjištění objemu hydrostatickou metodou 35.3. Postup je tu zjednodušen tím, že obě vážení provádíme metodou relativní 30.1 (nebo 30.2), nejlépe na vahách hydrostatických [25, VIII]. Po těchto odkazech se omezíme na stručný popis metody za předpokladu, že *kratší miska je vlevo*:

Postup

1. Pod kratší miskou upevníme závěs tak, aby byl z části ponořen do H_2O v kádince postavené pod miskou, a podle potřeby vytváříme, aby jazýček kýval ve stupnici. Určíme rovnovážnou polohu, kterou pokládáme za nulovou polohu n pro další vážení. Pak změříme teplotu t vody.

2. Měřenou látku položíme na levou miskou, pod níž předtím postavíme nádobu s kapalinou známé hustoty s tak, aby závěsné zařízení (drátek, malá miska) bylo ponořeno. Vyvážíme, určíme citlivost vah a vypočteme správné závaží Z .

3. Zavěsíme měřenou látku tak, aby byla celá ponořena, a znovu určíme správné závaží Z' .

4. Chceme-li správnost výsledku zaručit co nejpřesněji, opakujeme znovu úkon 2 a potom 1 a počítáme s průměrnými hodnotami n , c , Z a t .

5. Hustota je dána vztahem (6), kam dosadíme Z určené v 2, $z = Z - Z'$, a za s a δ hodnoty získané způsobem uvedeným při odvození tohoto vztahu.

Příklad. Byla měřena hustota mosazného válečku při teplotě 21,1 °C. Dvojím vážením na praktikantských vahách byly získány hodnoty

$$Z = 91,667 \text{ g,}$$

$$Z' = 80,780 \text{ g;}$$

v T, II nalezeno $s = 998 \text{ kgm}^{-3}$ a za δ vzata střední hodnota $1,2 \text{ kgm}^{-3}$. Závaží vyvažující vztlak $z = Z - Z' = 10,887 \text{ g}$ a dosazením do (6) vypočtena hustota válečku při 21,1 °C:

$$\rho = \frac{91,667}{10,887} (998 - 1,2) + 1,2 = 8394 \text{ kgm}^{-3}.$$

36.3. Hustota drobných tělísek (prášku) — měření pyknometrem

Metoda plyne z pyknometrické metody 35,4 měření objemu.

Potřeby: Váhy [25,IV; V; VI], pyknometr [35,III].

Postup (vážíme podle návodu 30.1 nebo 30.2; 3. Srov. 35.4 a 36.2)

1. Určíme teplotu t místnosti a nulovou polohu n vah.

2. Zvážíme tělíška, čímž dostaneme správné závaží Z .

3. Zvážíme týmž postupem pyknometr naplněný destilovanou vodou nebo jinou kapalinou známé hustoty (správné závaží Z_1).

4. Vložíme tělíška do pyknometru, osušíme je a zvážíme (správné závaží Z_2).

5. Opakujeme 1 a vezmeme průměrné hodnoty.

6. Správné závaží, kterým by se vyvážila voda uniklá z pyknometru při vložení tělísek,

$$z = Z + Z_1 - Z_2,$$

neboť je to součet hmoty tělísek a plného pyknometru, zmenšený o hmotu pyknometru s tělísky a zbytkem vody.

7. Hustota je dána vztahem (6).

36.4. Hustota kapalin — měření pyknometrem

Zvážíme-li pyknometr naplněný měřenou kapalinou a též pyknometr naplněný destilovanou vodou, můžeme určit hustotu kapaliny.

Potřeby: Jako pro 36.3.

Postup (vážíme podle 30.1 nebo 30.2. Srov. 36.3)

1. Změříme teplotu místnosti a určíme nulovou polohu vah.

2. Zvážíme suchý, čistý pyknometr (správné závaží Z_0).

3. Pyknometr naplníme kapalinou, osušíme a zvážíme (správné závaží Z_1).

4. Pyknometr řádně vypláchneme nejprve čistou vodou, pak destilovanou. Naplníme jej destilovanou vodou, uzavřeme, řádně osušíme a zvážíme (správné závaží Z_2).

5. Opakujeme 1.

6. Hustotu kapaliny vypočteme z (6), dosadíme-li

$$Z = Z_1 - Z_0, \quad z = Z_2 - Z_0, \quad \delta = 1,2 \text{ kgm}^{-3},$$

a za s vezmeme hodnotu nalezenou v **T,II** pro střední teplotu.

7. Při měření s relativní přesností 10^{-4} nesmějí se lišit teploty obou kapalin v pyknometru více než asi o 2° , jinak je nutno provést opravu na změnu objemu pyknometru podle **35** (2).

Příklad. Při měření hustoty roztoku CuSO_4 vážením na praktikantských vahách za teploty $17,9^\circ\text{C}$ bylo zjištěno:

$$Z_0 = 39,060 \text{ g}, \quad Z_1 = 145,695 \text{ g}, \quad Z_2 = 138,733 \text{ g}.$$

Je tedy

$$Z = 106,635 \text{ g}, \quad z = 99,673 \text{ g}, \quad s = 998,6 \text{ kgm}^{-3}$$

a dosazením do (6)

$$\rho = \frac{106,635}{99,673} (998,6 - 1,2) + 1,2 = 1068,3 \text{ kgm}^{-3}.$$

36.5. Hustota kapalin — měření ponorným tělískem

Je to hydrostatická metoda, při níž totéž tělísko — nejčastěji skleněné, nejlépe malý teploměr — zavěšené na tenkém stříbrném nebo platinovém drátku vážíme v měřené kapalině a v kapalině známé hustoty (pravidelně ve vodě). Podmínkou správnosti je, aby obě kapaliny měly při vážení stejnou teplotu, neboť jen tehdy má tělísko v obou případech týž objem.

Potřeby: Hydrostatické váhy [**25,VIII**], ponorné tělísko s drátkem, teploměr (není-li v tělísku).

Postup (všechna vážení provádíme methodou **30.1**)

1. Zvážíme tělísko na vzduchu. (Správné závaží Z_0 .)
2. Zvážíme tělísko v měřené kapalině (správné závaží Z_1) a zapíšeme teplotu t_1 kapaliny.
3. Zvážíme tělísko v destilované vodě (správné závaží Z_2) a zapíšeme teplotu t_2 .
4. Opakujeme 1 v H_2O a určíme nulovou polohu n' , které použijeme při výpočtu správného závaží Z_2 .
5. Vypočteme $Z = Z_0 - Z_1$, $z = Z_0 - Z_2$, najdeme v **T, II** hustotu vody s při teplotě t_2 a dosazením do (6) vypočteme hustotu ρ kapaliny při teplotě t_1 .
6. Liší-li se t_1 a t_2 o více než 2° , zvětšíme podle **35** (1) z ve vzorci (6) o korekci (vzhledem na znaménko!)

$$z \cdot \beta (t_1 - t_2),$$

kde β je objemová roztažnost tělíska (pro skleněné tělísko je $\beta = \frac{1}{40\,000} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$).

36.6. Hustota kapalin — měření Mohrovými vážkami

Potřeby: Mohrovy vážky [**36,II**] s jezdcí, ponorným tělískem a válcovou nádobkou, destilovaná voda (nemá-li tělísko teploměr, užijeme dvojité nádobky a teploměru).

Postup (viz obr. **36,2**)

1. Zavěsíme tělísko na háček na konci děleného ramena vah. Upravíme je nejprve stavěcím šroubkem S a pak protizávažím Z (nebo i malým jezdcem) tak, aby byly přesně v rovnováze.

2. Odstraníme tělísko, podstavíme válcovou nádobku s měřenou kapalinou, ponoříme do ní tělísko a zavěsíme. Stojan zajistíme šroubkem U tak, aby byl ponořen asi 1 cm drátku, jehož ponor dodržíme i při 4.

3. Porušenou rovnováhu vyrovnáme co nejpřesněji jezdcí (obecně všech velikostí), které nasadíme na dělené rameno. Největší jezdec, nasazený na k -tém dílci (desetině od osy), znamená 100 k jednotek kgm^{-3} , další jezdec postupně 10, 100 a 1000krát méně. Píšeme tedy přímo hustotu ρ' kapaliny v jednotkách MKSA při teplotě udané teploměrem.

4. Odstraníme tělísko, omyjeme destilovanou vodou, vyprázdníme nádobku a vypláchneme (také teploměr omyjeme), naplníme destilovanou vodou, tělísko zavěsíme a změříme hustotu s' vody, zaznamenavše její teplotu t .

5. Najdeme v **T, II** správnou hustotu vody s , teploty t ; tím získáme opravný poměr $\frac{s}{s'}$, kterým měřenou hustotu násobíme, čímž dostaneme opravenou hustotu kapaliny

$$\rho = \frac{s}{s'} \rho'.$$

Příklad. Měřena hustota denaturovaného lihu při 18,7 °C.

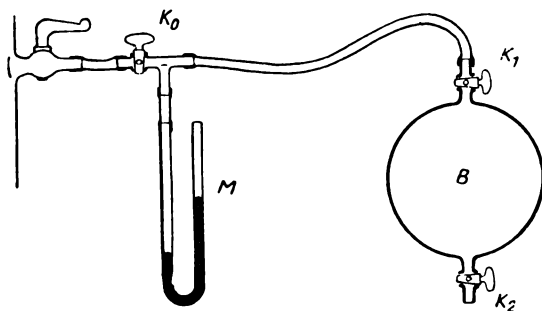
Podle 3 byl vyrovnán vztlak v lihu největším jezdcem na 8., dalším na 3., setinným na 4. a tisícinným na 7. desetině, tedy

$$\rho' = 834,7 \text{ kgm}^{-3}.$$

Podle 4 změřená hustota destilované vody při 19,0 °C $s' = 990,4 \text{ kgm}^{-3}$. V **T, II** nalezeno $s = 998,4 \text{ kgm}^{-3}$, odkud $\frac{s}{s'} = 1,0081$. Tedy správná hustota lihu při 18,7 °C $\rho = 841,4 \text{ kgm}^{-3}$.

36.7. Kontrola areometrů

Areometry přezkoušíme tak, že jimi změříme několik kapalin (na př. vodu různé teploty, roztoky různých koncentrací a teploty), jejichž hustotu buď vezmeme z tabulek, nebo změříme methodami 36.4 ÷ 6. Nejsnáze lze kontrolu provést poslední z těchto method. Změříme hustotu několika kapalin Mohrovými vážkami, opravíme podle správné hustoty vody a srovnáme s údaji areometru. Tímto způsobem lze snadno určit u areometrů Bauméových [36, I] hodnoty konstant C a C' , obsažených ve vzorcích (3) a (4) pro převod Bauméových stupňů na absolutní jednotky. Při měření areometrem se rušivě uplatňuje povrchové napětí měřené kapaliny, které zvětšuje ponor, tedy zdánlivě zmenšuje hustotu, při čemž záleží na tom, jak kapalina vzlíná po trubici areometru. Aby se tento proměnný vliv co nejvíce ustálil, je radno před měřením otřít areometr alkoholem a pečlivě osušit.



Obr. 86,3. Pycnometrické měření hustoty plynu.

36.8. Hustota plynů — měření methodou pycnometrickou

Pycnometrické metody pro kapaliny 36.4 lze použít i k měření hustoty plynů. Vzhledem k tomu, že hustota plynů závisí také značně na tlaku a že je řádově 1000krát menší než hustota kapalin, je nutno methodu ve dvou směrech pozměnit. Především měříme nejen teplotu, ale i tlak, pod nímž je plyn v pycnometru uzavřen, a kromě toho volíme obsah pycnometru pokud možno velký,

abychom hmotu plynu mohli určit s dostatečnou poměrnou přesností. Proto nahradíme pyknometr skleněnou bání B (asi litrovou), opatřenou dvěma protilehlými vzduchotěsnými kohouty (obr. 36,3). Bání se naplní buď přetlakem mírně stlačeného plynu proti atmosférickému tlaku, nebo po vyčerpání bání nestlačeným plynem. K trubici přivádějící plyn do bání se připojí manometr M (na př. otevřená trubice tvaru U se rtutí), kterým se změří tlak plynu uzavřeného v bání.

Potřeby: Skleněná bání s dvěma kohouty, trubice s manometrem a kohoutem, praktičtější váhy [25,IV], hrubé váhy na zatížení do 2 kg, teploměr, podle potřeby vývůvka.

Postup (vážení na vahách [25,IV] podle 30.1)

1. Zvážíme suchou skleněnou bání s otevřenými kohouty (správné závaží Z_0).

2. Bání připojíme trubici s manometrem M ke zdroji plynu tak, aby spojnice obou kohoutů byla svislá. Je-li plyn hustší než vzduch, vpuštěme jej spodním kohoutem, je-li řidší, horním kohoutem, aby se nemísil se vzduchem. Proto otevřeme výstupní kohout K_2 , naplní a vstupní kohout K_1 z počátku jen nepatrně a teprve později, až je vzduch prakticky vypuzen, otevřeme jej naplno, abychom vypudili i poslední zbytky vzduchu. Nato uzavřeme kohout K_0 (mezi zdrojem plynu a manometrem) současně s výstupním kohoutem K_2 , bání a vyčkáme asi 30 minut, až se teplota plynu vyrovná s okolní teplotou. Pak čteme přetlak b_1 na manometru (v totech) a uzavřeme i vstupní kohout bání K_1 , načež změříme teplotu t okolí na teploměru umístěném vedle bání.

3. Mezitím změříme barometrický tlak, který opravíme na 0°C podle 22.1—4, a relativní vlhkost φ vzduchu.

4. Zvážíme bání s plynem (správné závaží Z_1).

5. Otevřeme oba kohouty, naplníme bání vodou známé teploty a hustoty s (kterou najdeme v tabulkách) a zvážíme na kuchyňských vahách (na gramy, závaží Z_2).

6. Hustotu plynu vypočteme ze vzorce (6), kam dosadíme

$$Z = Z_1 - Z_0, \quad z = Z_2 - Z_0,$$

za s hustotu vody a za δ hustotu vlhkého vzduchu, vypočtenou podle 22 (12) z teploty t , barometrického tlaku b (v totech) a z napětí vodních par

$$e = \varphi E;$$

E je napětí nasycených par v T , XI pro teplotu t . Rychleji dostaneme δ z T, III (pro tlak $b - \frac{3}{8}e$).

Příklad. Hustota svítiplynu.

Bání je naplněna shora přetlakem svítiplynu z plynového vedení; manometr ukazoval po vyrovnání teploty na $20,0^\circ\text{C}$ vnitřní tlak + 5,2 mm. Na Fortinově tlakoměru byl zjištěn barometrický tlak (po redukcí na 0°C) 733,8 toru, relativní vlhkost (podle vlasového vlhkoměru) $\varphi = 0,65$, a tedy podle T, XI $e = 11,4$ toru. Hustota vzduchu podle T, III (pro tlak $b - \frac{3}{8}e = 729,5$ toru) $\delta = 1,157 \text{ kgm}^{-3}$.

Vážením zjištěno:

$$Z_0 = 126,927 \text{ g}, \quad Z_1 = 125,962 \text{ g}, \quad Z_2 = 1489 \text{ g},$$

takže

$$Z = -0,965 \text{ g}, \quad z = 1362 \text{ g}.$$

Při posledním vážení měla voda teplotu 19°C , a tedy podle T, II $s = 998,4 \text{ kgm}^{-3}$. Hustota svítiplynu za teploty $20,0^\circ\text{C}$ a tlaku 739,0 toru je tedy

$$\rho = \frac{-0,965}{1362} (998,4 - 1,2) + 1,157 = -0,707 + 1,157 = 0,450 \text{ kgm}^{-3}. \quad (8)$$

36.9. Hustota par — měření pyknometrickou methodou (Dumas 1827)

Předešlou metodu 36.8 lze snadno upravit pro měření hustoty par, užieme-li skleněného balonku (asi čtvrtlitrového), vytaženého do tenké trubičky.

Do něho vpravíme asi 1 cm³ kapaliny, jejíž páry chceme měřit. Otáčením balonku se postaráme o to, aby kapalina smočila všude vnitřní povrch balonku. Potom zahříváme balonek v lázni tak dlouho, až se všechna kapalina změní v páry; v okamžiku, kdy se přetlak par uvnitř vyrovná s vnějším tlakem (kdy přestanou páry unikat), zatavíme trubičku (nejlépe malým plamínkem plynovým, který zapálíme na konci skleněné zúžené trubičky, připojené hadicí k plynovému kohoutu). Po zvážení balonku ponoříme konec trubičky do destilované vody a kleštěmi ulomíme její zatavený konec, čímž balonek naplníme vodou. Nepodaří-li se to úplně, nasadíme na trubičku hadičku s malou nálevkou, do níž nalijeme vody a tenkým drátkem usnadníme vnikání vody do balonku.¹⁾

Potřeby: Analytické váhy [25,V; VI], balonek, lázeň, zatavovací trubička, kleště, destilovaná voda.

Postup (srov. 36.8, vážení podle 30.2; 3)

1. Zvážíme prázdný balonek (správné závaží Z_0).
2. Do balonku vpravíme trochu měřené kapaliny, kterou v lázni proměníme v přehřátou páru, a zatavíme za teploty t , a za barometrického tlaku b , který změříme zároveň s teplotou místnosti t a relativní vlhkostí φ vzduchu.
3. Zvážíme balonek s parou (správné závaží Z_1).
4. Balonek naplníme vodou a zvážíme i s odlomeným zataveným koncem trubice (správné závaží Z_2).
5. Hustotu par za teploty t_1 a tlaku b (v torech) dostaneme úkonem 6 metody 36.8.

37. HUTNOST (POMĚRNÁ HMOTA) PLYNŮ A PAR

Definice. Hutnost Δ plynu nebo přehřáté páry je poměr hmoty M plynu (páry) ke hmotě M_0 stejného objemu suchého vzduchu za téže teploty a téhož tlaku:

$$\Delta = \frac{M}{M_0}. \quad (1)$$

Jednotky. Hutnost je veličina bezrozměrná, měří se ve všech soustavách jednotkou $[\Delta] = 1$.

Podle *Avogadrova zákona* obsahují stejné objemy všech plynů a přehřátých par za stejné teploty a tlaku stejné množství molekul. Obsahuje-li zvolený objem n molekul libovolného plynu, z nichž každá má hmotu m , obsahuje za týchž podmínek stejný počet n molekul vzduchu o hmotě m_0 . Tedy hutnost plynu podle (1)

$$\Delta = \frac{nm}{nm_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (2)$$

kde μ a μ_0 jsou molekulové hmoty plynu a vzduchu, neboť

$$\mu = \frac{32}{m_0} m,$$

kde m_0 je hmotu 1 molekuly kyslíku O_2 (srov. 38). Hutnost plynu je tedy rovna poměru jeho molekulové hmoty k molekulové hmotě vzduchu a je pro dokonalý plyn *konstantou* (pro skutečné plyny a zvláště pro páry to neplatí zcela přesně).

³⁶⁾ Také lze určit vnitřní objem balonku tímto způsobem (podobným druhém metodě 31.8): ponořením zataveného balonku do měrné nádoby s vodou určíme jeho vnější objem, od něhož odečteme objem skla, rovný hmotě balonku, dělené hustotou skla.

Hmota plynu je součin z jeho objemu V a hustoty ρ , takže

$$\Delta = \frac{M}{M_0} = \frac{V\rho}{V\delta^*} = \frac{\rho}{\delta^*}, \quad (3)$$

kde δ^* je hustota suchého vzduchu.

Tedy: *Hutnost plynu je rovna poměru jeho hustoty k hustotě suchého vzduchu stejné teploty a tlaku.*

MĚŘICÍ METODY

37.1. Hutnost plynů a par — určení z hustoty

Hustotu ρ plynu nebo (přehřáté) páry určíme methodami 36.8 nebo 36.9; hutnost dostaneme podle vzorce (3), určíme-li hustotu δ^* suchého vzduchu pro stejnou teplotu t a stejný tlak p podle vzorce 22 (11) nebo z tabulky T, III.

Příklad. Hutnost svítivplynu vypočteme na př. podle vzorce (3), dosadíme-li tam za ρ hodnotu 36(8), zjištěnou methodou 36.8 při 20.0 °C a za tlaku 739,0 toru, a za δ^* hustotu suchého vzduchu za týchž podmínek, kterou najdeme v T,III. Tedy

$$\Delta = \frac{0,000\ 450}{0,001\ 171} = 0,384. \quad (4)$$

37.2. Hutnost par — měření výtlakovou methodou (V. Meyer 1878)

Základní myšlenka je tato: Do uzavřeného objemu vzduchu vpravíme množství M látky a proměníme ji v přehřáté páry, které vytlačí jisté množství vzduchu. Během této expanse par měl vzduch přibližně stejný tlak i teplotu jako páry jej vytlačující. Při tom prostor vzduchem uvolněný byl zaujat parou, takže množství vytlačeného vzduchu mělo v onom prostoru za téže teploty a tlaku také *stejný objem* jako ona pára. Tedy hutnost páry dostaneme z (1), zjistíme-li hmotu M_0 vytlačeného vzduchu. To by bylo možno provést na př. vážením, kdybychom uniklý vzduch jímali do vzduchoprázdné nádoby. Výhodnější však bude, jímáme-li vytlačený vzduch do měrné trubice nad vodou (nebo rtutí), tedy do *eudiometru* [35, VII]. Tam změříme objem V , tlak p a teplotu t vytlačeného vzduchu a vypočteme jeho hustotu δ^* z 22 (11) nebo ji najdeme v T, III. Pak $M_0 = V\delta^*$ a hutnost par je dána vzorcem

$$\Delta = \frac{M}{V\delta^*}. \quad (4')$$

Meyer zavedl měřicí zařízení znázorněné na obr. 37,1. Dlouhá úzká trubice T , dole ukončená baňkou B (asi 250 cm³), je spojena poblíž rozšířeného horního otvoru, uzavřeného zátkou Z , s eudiometrem E , naplněným vodou nebo rtutí. Baňka B se spodní částí trubice T se vyhřeje v kapalinové (parní) lázni nebo v peci (pak bývá B a T z porcelánu nebo z platiny) na teplotu značně vyšší než bod varu měřené látky.

Potřeby: Zařízení podle obr. 37,1, drobná skleněná trubička nebo lahvička se zabroušenou zátkou, analytické váhy [25, V; VI].

Postup (absolutní vážení podle 28.2 nebo 28.3 a 30.2; 3)

1. Zvážíme (absolutně) trubičku (lahvičku) nejprve prázdnou a pak s látkou (uzavřenou), jejíž páry chceme měřit, a z rozdílu obou vážení (oprava na vztlak!) dostaneme hmotu M par.

2. Vyhříváme baňku B tak dlouho, až do nádržky eudiometru přestanou trubičkou T_2 unikat vzduchové bublinky. Teprve pak přesuneme nad ústí trubičky T_2 měrnou trubici, která (naplněna vodou nebo rtuť) stála připravena stranou v nádržce.

3. Uvolníme zátoku Z , vhodíme dovnitř stále uzavřenou trubičku s měřenou látkou a ihned zase zazátkujeme. Náraz na dno baňky se zmírní kousky osinku, vloženými na dno baňky B .

4. Zahřátím se trubička otevře (nebo roztrhne) a unikající páry vytlačí jisté množství vzduchu do eudiometru. Jakmile se hladina v měrné trubici ustálí, odstraníme opět zátoku Z a přerušíme zahřívání.

5. Objem vzduchu V čteme buď ihned po ustálení hladiny, přisuzující vzduchu teplotu vody v nádržce, kterou prošel, nebo až po jisté době (asi 30 min.), kdy máme za to, že vzduch v trubici již přijal teplotu okolí. Teplotu vody nebo okolí trubice zjistíme teploměrem.

6. Změříme barometrický tlak b torů (po redukcí na 0°C), výšku h sloupce kapaliny v měrné trubici nad okolní hladinou a poměrnou vlhkost vzduchu (kterou potřebujeme pro přesnou opravu váhy látky na vztlak). Tlak vzduchu v trubici je roven barom. tlaku b , zmenšenému podle Daltonova zákona o napětí vodní páry E_t (užijeme-li rtuť, tato oprava se neprovádí), a o hydrostatický tlak sloupce vody h mm, který je v tórech přibližně roven $h/13,6$. Najdeme tedy v **T,III** hustotu suchého vzduchu pro tlak

$$(\text{H}_2\text{O}) \quad p = b - \frac{h}{13,6} - E_t$$

nebo

$$(\text{Hg}) \quad p = b - h,$$

eventuálně ji vypočteme ze vzorce 22 (11)

$$\delta^* = 1,293 \frac{p}{760} \cdot \frac{273,15}{273,15 + t}.$$

7. Dosazením M , V , δ^* do vzorce (4') dostaneme konečně hutnost Δ .

37.3. Hutnost plynů — určení z doby výtoku (*Bunsen* 1857)

Jak jsme řekli v 23 při definici absolutní teploty, je úhrnná pohybová energie molekul dokonalého plynu úměrna jeho absolutní teplotě, při čemž konstanta úměrnosti je pro kilogrammolekulu všech 1-atomových plynů stejná.¹⁾

$$E_{kin} = \frac{3}{2} RT, \quad (5)$$

kde plynová konstanta

$$\begin{aligned} R &= 8314 \text{ joule} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1} = 1,986 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1} = \\ &= 1,986 \text{ cal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,082 \, 051 \text{ atm} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

E_{kin} je rovna součtu pohybových energií všech molekul, které mají ovšem různé rychlosti neustále se měnící srážkami. Můžeme je však nahradit jistou střední hodnotou C těchto rychlostí, která se definuje podmínkou, že se úhrnná energie všech molekul nezmění, mají-li všechny stejnou rychlost C . Pak je energie jedné molekuly o hmotě m rovna $\frac{1}{2} mC^2$ a celkovou energii kilogrammolekuly plynu dostaneme násobením Avogadrovým číslem $N = 6,026 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ (počet molekul v kilogrammolekule):

$$E_{kin} = N \frac{1}{2} mC^2 = \frac{3}{2} RT. \quad (7)$$

37. 1) TF 4.2.8

Mají-li tedy dva plyny stejnou teplotu, mají stejnou vnitřní energii E_{kin} , takže

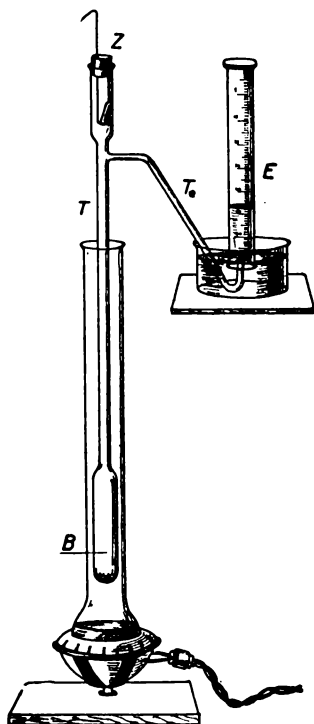
$$m_1 C_1^2 = m_2 C_2^2$$

čili

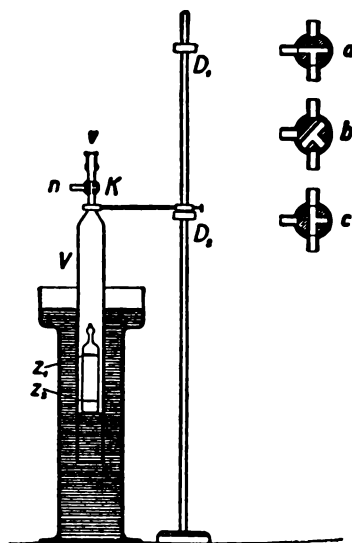
$$m_1 : m_2 = C_2^2 : C_1^2. \quad (8)$$

Střední rychlost C molekul se uplatňuje při difuzi, při pronikání plynů nepatrnými otvory a také při výtoku plynů velmi úzkými trubicemi. Podle (8) můžeme očekávat, že čtverec rychlosti výtoku je při stálé teplotě úměrný molekulové hmotě plynu. Z Avogadrova zákona plyne, že při stálém tlaku

$$m_1 : m_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$



Obr. 87,1. Měření hutnosti par výtakovou methodou.



Obr. 87,2. Bunsenův efusiometr.

a mimo to doba výtoku τ téhož objemu plynu je nepřímě úměrná rychlosti výtoku. Máme tedy výsledek (zákon Bunsenův): Hustoty plynů při stejné teplotě a tlaku mají se k sobě jako čtverce dob výtoku velmi úzkým otvorem: (9)

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \tau_1^2 : \tau_2^2.$$

Tento zákon platí pro skutečné plyny jen přibližně a jedině tehdy, nejsou-li molekuly obou plynů tvořeny stejným počtem atomů. Většina plynů (H_2 , O_2 , vzduch) má molekuly dvojatomové, kdežto vzácné (netečné) plyny (He , Ar , Kr , ...) jsou jednoatomové. Můžeme tedy většinu plynů srovnávat podle zákona (9) se vzduchem, čímž dojdeme podle (2) nebo (3) ke vztahu

$$A = \frac{\tau^2}{\tau_0^2}, \quad (10)$$

podle něhož můžeme hutnost určit měřením dob výtoku plynu a suchého vzduchu. *Bunsen* k tomu účelu sestrojil jednoduchý přístroj, zvaný efusiometr, který je znázorněn na obr. 37,2. Dole otevřený skleněný válec V , nahoře uzavřený trojcestným kohoutem K , upevní se na stojan ve svislé poloze tak, aby zasahoval do širšího válce se rtutí. Uvnitř válce V je plovák se dvěma značkami z_1, z_2 , umístěnými nad sebou. Nad hořejší značkou bývá orientační značka, která upozorní, že měřicí značka se brzo vynoří nad hladinu rtuti vnějšího válce, když plovák stoupá při výtoku plynu kohoutem. Tento kohout má široký nassávací otvor n a výtokový otvor v , který musí být velmi jemný, 0,01 nejvýše 0,1 mm (lze jej vytvořit na př. jemnou dírkou v plechu), aby měření dávala dosti přesné výsledky. Této pohodlné metody lze použít i pro přehřáté páry, pro něž ovšem poměrná chyba dosahuje asi 5%.

Potřeby: Efusiometr [87,I], stopky [21,II], trubice s H_2SO_4 nebo $CaCl_2$.

Postup

1. Otevřeme nassávací otvor válce (kohout nastaven na a), uvolníme válec v držáku a ponoříme jej tak hluboko do rtuti, aby rtuť sahala až ke kohoutu. Pak zavřeme kohout K (poloha b), nasadíme válec do držáku a vysuneme až k dorazu D_1 .

2. K otvoru n připojíme hadici vysoušecí trubici tvaru U (s H_2SO_4 a skleněnými perličkami nebo $CaCl_2$) a k ní zdroj plynu (plynové potrubí, *Kippův* přístroj a pod.), který musí mít o málo vyšší tlak než barometrický. Nastavíme K do polohy a a zpět do b , jakmile plyn vyplní válec až k vnější hladině rtuti.

3. Válec spustíme až k spodnímu dorazu D_2 a otevřeme výtok v nastavením kohoutu na c .

4. Změříme stopkami dobu τ mezi vynořením obou značek plováku nad hladinu (při vodorovném pohledu).

5. Otočíme kohout do polohy a a po odstranění vysoušecí trubice spustíme válec, naplníme jej rtutí a zdvihne k dorazu D_1 .

6. Tím je přístroj připraven k měření doby τ , výtoku vzduchu, které provedeme podle 2 až 5.

7. Hutnost plynu je dána vzorcem (10).

Měření téhož plynu opakujeme několikrát za sebou, až se válec úplně zbaví zbytků plynu dříve měřeného; projeví se to tím, že měřené doby výtoku se navzájem liší již jen v mezích měřicích chyb.

38. MOLEKULOVÁ HMOTA PLYNŮ A PAR

Definice. Molekulová hmota μ nějaké látky je poměr hmoty m její molekuly ke hmotě m_{O_2} molekuly kyslíku O_2 , násobený třiceti dvěma:

$$\mu = 32 \frac{m}{m_{O_2}}. \quad (1)$$

Jednotky. Molekulová hmota je bezrozměrná ve všech soustavách jednotek: $[\mu] = 1$.

MĚŘICÍ METHODY

Molekulovou hmotu látek ve stavu plynném můžeme snadno měřit na základě jejich hutnosti. Podle vztahu 37 (2) je molekulová hmota plynu nebo přehřáté páry

$$\mu = \mu_v \Delta. \quad (2)$$

Kdybychom znali molekulovou hmotu vzduchu μ_v , mohli bychom počítat μ z hutnosti Δ plynu (páry). Je známo, že objem kilogrammolekuly každého plynu za normálních poměrů (0 °C; 760 torů) má objem 22,421 m³. Tedy hmotu kilogrammolekuly vzduchu dostaneme násobením tohoto objemu normální hustotou vzduchu $\delta_0^* = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$ [srov. 22 (9)]:

$$M_v = 22,421 \text{ m}^3 \cdot 1,293 \text{ kg m}^{-3} = 28,98 \text{ kg}.$$

Molekulová hmotnost vzduchu je tedy

$$\mu_v = 28,98,$$

což je ovšem střední hodnota molekulových hmot plynů, z nichž se vzduch skládá; rovnice (2) dává výsledný vzorec

$$\mu = 28,98 \Delta \doteq 29,0 \Delta. \quad (3)$$

38.1. Molekulová hmotnost z měření hutnosti plynů a par

Molekulovou hmotnost plynů můžeme zjistit na základě vztahu (3) měření jejich hutnosti. Stejně zjistíme molekulovou hmotnost látek pevných a kapalných, změříme-li hutnost jejich přehřátých par.

Hutnost samu určíme kteroukoli methodou předešlého článku 37 buď z hustoty podle 37.1, nebo přímo methodou *Meyerovou* 37.2, nebo *Bunsenovou* 37.3.

Příklad. Svítiplyn je složen z většího počtu různých plynů různé molekulové hmoty. Kdybychom tedy změřili jeho hutnost, dostali bychom podle rovnice (3) jeho průměrnou molekulovou hmotnost. Tak z hodnoty 37 (4), určené v dříve uvedeném příkladu, vyjde pro svítiplyn $\mu = 29,0 \cdot 0,384 = 11,1$. Tuto hodnotu bychom mohli také vypočítat z molekulových hmot plynů, jež svítiplyn obsahuje, kdybychom znali jeho složení. Svítiplyn u nás vyráběný obsahuje hlavně 4 plyny asi v těchto procentových množstvích: 53% H₂, 25% CH₄ (methan), 15% CO a 7% N₂.

Ve 100 molekulách svítiplynu je tedy průměrně:

206 atomů H ($m_H = 1,0081$)	o celkové hmotě 207,67
40 atomů C ($m_C = 12,010$)	o celkové hmotě 480,40
14 atomů N ($m_N = 14,008$)	o celkové hmotě 196,11
15 atomů O ($m_O = 16,000$)	o celkové hmotě 240,00

celkem 1124,18;

100 molekul svítiplynu má tedy celkem 1124 jednotek molekulové hmoty a střední hodnota jeho molekulové hmoty je za uvedeného (přibližného) složení 11,24 v dobrém souhlase s naším měřením.

ČÁST TŘETÍ

Měřicí přístroje a metody

39. DOBA PERIODICKÝCH DĚJŮ

Definice. Doba T periodického děje je nejkratší doba, po níž se děj beze změny opakuje.

Jednotky. $[T] = \text{s}$.

V mechanice i v jiných oborech fyziky se často setkáme s úlohou určit dobu trvání beze změny se opakujících dějů periodických, jako je **doba oběžná** při rovnoměrném otáčení, **doba kyvu** kyvadla nebo **kmitová doba** oscilací. Obecně mluvíme o *době* neboli *periodě* takového děje a jejím změřením určíme i **kmitočet** neboli *frekvenci* kmitání (vlnění) nebo *počet otáček* rotačního (točivého pohybu), což je převrácená hodnota doby, nebo ovšem **úhlovou rychlost**, t. j. 2π -násobnou frekvenci.

M Ě Ř I C Í M E T H O D Y

Ve fyzikální laboratoři měříme obvykle doby oběžné a doby kyvu od zlomků vteřiny do několika vteřin. Pro tyto doby je nevhodnější *postupná metoda* (viz čl. 18), kdežto pro doby delší (asi od 6 s) se dobře hodí *metoda omezovací*, vyložená v čl. 18 na případu doby kyvu magnetky v magnetickém poli.

K tomu musíme poznamenat, že obě metody předpokládají neproměnnost měřené periody, což při přesném měření je nutno ověřit. Na př. doba kyvu kyvadla závisí na rozkyvu podle vzorce (6), a tedy ubýváním rozkyvu se postupně doba kyvu poněkud zkracuje. Dále je si třeba uvědomit, že při spuštění stopek musíme v okamžiku počátku 1. doby, t. j. na konci nulté doby, začít počítat od nuly.

39.1. Doba kyvu fyzického kyvadla postupnou methodou

Pohyb fyzického kyvadla ¹⁾ plyne z obecného pohybového zákona 26(7) pro otáčení kolem pevné osy, dosadíme-li za vnější dvojici (obr. 39,1)

$$D_0 = -Mga \sin \varphi,$$

kde M je hmota kyvadla, a — vzdálenost těžiště od osy a φ — úhlová výchylka osové roviny jdoucí těžištěm. Platí tedy diferenciální rovnice

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mga}{J} \sin \varphi. \quad (1)$$

39 ¹⁾ TF 2.5.15.

Pro matematické kyvadlo délky l je $a = l$, $J = MI^2$ a (1) přejde v rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (2)$$

Z toho soudíme, že pohyb fyzického kyvadla je (ve vakuu) stejný jako pohyb matematického kyvadla, jehož délka — zvaná redukovaná délkou fyzického kyvadla —

$$l = \frac{J}{Ma} = \frac{R^2}{a}, \quad (3)$$

kde R je poloměr setrvačnosti tělesa, daný rovnicí 40 (4).

Řešení rovnic (1) a (2) je obecně dáno eliptickým integrálem. Pro malé výchylky φ přejde však rovnice (1) v diferenciální rovnici harmonického pohybu ²⁾

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{Mga}{J}, \quad (4)$$

jehož kmitová doba $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ a tedy doba kyvu

$$\tau_0 = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{J}{Mga}} = \frac{\pi R}{\sqrt{ga}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5)$$

Tento vzorec platí přesně jen pro nesmírně malý rozkyv; chceme-li však měřit dobu kyvu, musíme dát kyvadlu aspoň takovou počáteční výchylku, abychom mohli pozorovat větší počet kyvů. Rozvineme-li eliptický integrál v řadu, ³⁾ dostaneme pro dobu kyvu při rozkyvu a

$$\tau_a = \tau_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right]. \quad (6)$$

Tedy z pozorované doby kyvu τ_a vypočteme theoretickou dobu τ_0 pro nulový rozkyv z rovn. (6). Většinou stačí přibližný vzorec

$$\tau_0 \doteq \tau_a \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2} \right) = \tau_a - k\tau_a, \quad (7)$$

rychleji však dostaneme τ_0 z tabulky T, VIII, v níž pro řadu rozkyvů najdeme hodnoty k , které násobíme měřenou dobou kyvu a odečteme od této doby. U měření doby kyvu musíme tedy buď uvést velikost rozkyvu, nebo ji převést na nulový rozkyv.

Poznámka. Odvozené vztahy platí přesně jen pro netlumené kmity. Doba kyvů tlumených je podle 26 (18) o něco delší. Při *malém* útlumu lze však tuto změnu pomíjet.

Příklad. Byla měřena doba kyvu železné kruhové desky hmoty $M = 774,0$ g, průměru $2r = 39,50$ cm, jež kývala na britu vzdáleném od těžiště (středu) desky o délku $a = 17,55$ cm. Měření se provádělo stopkami dělenými na 0,2 s postupnou methodou:

39 ²⁾ TF 2.1.4.

39 ³⁾ J. Vojtěch: Základy matematiky, II (6. vyd., 1946), čl. 190, 191.

Čtení na stopkách		Rozdíly	4_+	$\bar{\varphi}$
0,0 s	53,6 s	53,6	0,10	$\bar{\varphi} = \frac{\Sigma \Delta_+}{18} = 0,039$
5,4	59,0	53,6	0,10	
10,8	4,4	53,6	0,10	
16,2	10,0	53,8		
21,6	15,2	53,6	0,10	
27,0	20,4	53,4	0,30	
32,2	26,0	53,8		
37,4	31,4	54,0		
42,8	36,6	53,8		
48,2	42,0	53,8		
Průměr = $100 \tau_\alpha = 53,70$			$\Sigma \Delta_+ = 0,70$	

Průměrný rozkyv byl 15° , tedy píšeme

$$\tau_{15^\circ} = (0,5370 \pm 0,0004) \text{ s.}$$

Podle tabulky T,VIII je $k = 11 \cdot 10^{-4}$, $k\tau_{15^\circ} = 0,000 58$ a podle (7)

$$\tau_0 = (0,5364 \pm 0,0004) \text{ s.} \quad (8)$$

39.2. Měření periody methodou omezovací

Měříme-li stopkami obvyklého typu [21,II], je *krajní* chyba jednoho měření asi 0,3 s. Proto je tato metoda výhodná k měření period nejméně 6 s. Můžeme tedy určit snadno i dobu kyvu 3 s, měříme-li místo ní dvojnásobnou dobu kmitovou; při tom musíme ovšem pozorovat průchod kyvadla rovnovážnou polohou *týmž směrem*.

Ukážeme to na příkladu měření doby kyvu deklinační magnetky v zemském poli, uvedeném na konci čl. 18. Tam jsme došli k výsledku 18 (6) tak, že jsme nejprve odpočítali 10 τ , druhé čtení jsme provedli po 137. vteřině a třetí čtení po 687. vteřině. Kdybychom však měřili místo τ dobu kmitovou $T = 2\tau$, plynulo by z prvního měření

$$68,5 \text{ s} < 5 T < 69,1 \text{ s}$$

čili

$$685 \text{ s} < 50 T < 691 \text{ s.}$$

Stačí tedy kromě přesného změření doby $5T$ spustit stopky, když magnetka prochází rovnovážnou polohou, na př. vpravo, a zastavit je při *prvním* průchodu *vpravo*, po 685. vteřině; přitom dostaneme stejnou pravděpodobnou chybu 0,0006 s jako dříve.

Příklad. Měření oběžné doby válce rotačního viskosimetru, který má mít 7,2 otáčky za minutu.

Nejprve byla změřena na stopkách doba 10 oběhů. Čtení na stopkách bylo 83,4 s a platí proto nerovnost

$$83,1 \text{ s} < 10 T < 83,7 \text{ s.}$$

Z toho soudíme, že $100 T$ leží v rozmezí

$$831 \text{ s} < 100 T < 837 \text{ s,}$$

které je užší než $1 T$.

* Stopky tedy byly spuštěny na počátku libovolného oběhu a zastaveny při ukončení prvního oběhu po 831. vteřině, t. j. po uplynutí 13 min. 51 s. Čtení bylo 833,4 s s *krajní* chybou 0,3 s, což podle 18 (4 nebo 5) odpovídá asi pětkrát menší pravděpodobné chybě. Odtud výsledek

$$T = (8,334 \pm 0,001) \text{ s.}$$

40. MOMENT SETRVAČNOSTI

Definice. Moment setrvačnosti J hmoty M , rozložené s hustotou ρ v prostoru V , vzhledem k dané přímce (ose) je roven součtu všech hmotných částic $dM = \rho dV$, násobených čtverci jejich vzdáleností r od osy:

$$J = \int_M r^2 dM = \int_V r^2 \rho dV. \quad (1)$$

Jednotky. MKSA $[J] = \text{kgm}^2 = 10^7 [J]_a = 0,102 [J]_t$,
 absolutní $[J]_a = \text{g cm}^2$,
 technická $[J]_t = \text{m kg}^* \text{s}^2$.

MĚŘICÍ METODY

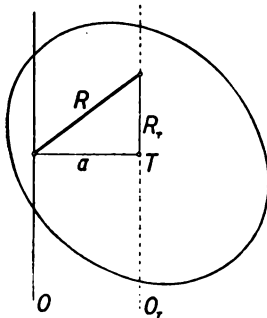
40.1. Moment setrvačnosti stejnorodých těles — určení přímou methodou

Pro stejnorodé těleso je ρ konstantní a vzorec (1) lze pak psát

$$J = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int \int \int r^2 dx dy dz. \quad (2)$$

Změříme-li rozměry tělesa, můžeme vypočítat jeho objem a z jeho celkové hmoty i jeho hustotu nebo ji změříme některou z method uvedených v 36. Pro některá tělesa a pro zvláštní polohy osy nečiní výpočet obtíží, někdy však je velmi pracný. Usnadní se použitím t. zv. *Steinerovy věty*:¹⁾

Moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose je roven momentu jeho hmoty soustředěné v těžišti, zvětšenému o moment téhož tělesa k ose vedené jeho těžištěm.



Vyjadřuje to rovnice

$$J = Ma^2 + J_T, \quad (3)$$

kde J značí moment k ose neprocházející těžištěm, J_T — moment k rovnoběžné ose vedené těžištěm, a — kolmou vzdálenost obou os. Rovnice (3) má jednoduchý tvar pro t. zv. **poloměr setrvačnosti** R (gyrační radius), definovaný vztahem

$$MR^2 = J, \quad (4)$$

Obr. 40.1. Poloměry setrvačnosti vzhledem k rovnoběžným osám.

který praví, že soustředěním hmoty tělesa ve vzdálenosti R od osy by se moment setrvačnosti nezměnil.

Z rovn. (3) plyne rovnice

$$R^2 = R_T^2 + a^2, \quad (5)$$

v níž se nevyskytuje hmota tělesa a která má jednoduchý geometrický význam (obr. 40,1).

40¹⁾ TF 2.5.11.

Pro pravidelná stejnorodá tělesa hmoty M plynou počtem tyto vzorce pro J_T a R_T vzhledem k ose O :

Pravoúhlý hranol s hranami a, b, c :

$$O \parallel a \quad J_T = \frac{M}{12} (b^2 + c^2), \quad R_T = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}, \quad (6)$$

Válec (kruhová deska) výšky v , poloměru r :

$$O \parallel v \quad J_T = \frac{M}{2} r^2, \quad R_T = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad (7)$$

$$O \perp v \quad J_T = \frac{M}{4} \left(r^2 + \frac{v^2}{3} \right), \quad R_T = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 + \frac{v^2}{3}}. \quad (8)$$

Dutý válec (trubice, prstenec) s poloměry r_1, r_2 :

$$O \parallel v \quad J_T = \frac{M}{2} (r_1^2 + r_2^2), \quad R_T = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

$$O \perp v \quad J_T = \frac{M}{4} \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{v^2}{3} \right), \quad R_T = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \frac{v^2}{3}}. \quad (10)$$

Koule poloměru r :

$$J_T = \frac{2}{5} M r^2, \quad R_T = \sqrt{\frac{2}{5}} r. \quad (11)$$

Tyč délky l (dostaneme ji z hranolu nebo válce, položíme-li $b = v = l, c = r = 0$):

$$O \perp l \quad J_T = \frac{M}{12} l^2, \quad R_T = \frac{l}{2\sqrt{3}}. \quad (12)$$

Někdy potřebujeme také moment setrvačnosti *plochy* (části roviny, na př. průřezu jako v 42.2), který je definován obdobně jako moment setrvačnosti hmotných těles. Číselně je roven momentu setrvačnosti hmoty rozložené po ploše s jednotkovou plošnou hustotou.

Tak vychází pro moment plochy obdélníku o stranách a, b vzhledem k ose souměrnosti rovnoběžné se stranou a

$$J_T = \frac{1}{12} ab^3, \quad R_T = \frac{b}{2\sqrt{3}}, \quad (13)$$

odkud pro čtverec plynou vzorce

$$J_T = \frac{1}{12} a^4, \quad R_T = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad (14)$$

kteřé platí i pro moment setrvačnosti k jeho úhlopříčce.

Moment setrvačnosti kruhu o poloměru r vzhledem k průměru

$$J_T = \frac{\pi}{4} r^4, \quad R_T = \frac{r}{2}. \quad (15)$$

Při určování poloměrů setrvačnosti jednoduchých přímkových, rovinných i prostorových útvarů je užitečné *Routhovo* pravidlo pro stejnorodá plná tělesa

- a) pravoúhlá (tyč, obdélník, kvádr),
- b) kruhová nebo eliptická (válce, desky, vrstvy),
- c) kulová nebo elipsoidová.

Pravidlo zní: Čtverec poloměru setrvačnosti útvaru vzhledem k některé ose souměrnosti je dán vzorcem

$$R^2 = \frac{\text{součet čtverců poloos kolmých k příslušné ose}}{3 \text{ nebo } 4 \text{ nebo } 5},$$

kde čísla ve jmenovateli platí pro tělesa a) nebo b) nebo c). Pravidlo si snadno ověříme na vzorcích (7), (9), (11), (13), (14) a (15).

Příklad. Pro kruhovou desku, měřenou v příkladu 39.1, dostaneme podle (7) pro geometrickou osu desky

$$J_T = \frac{774,0}{2} 19,75^2 = 1,510 \cdot 10^6 \text{ g cm}^2 = 1,510 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad (16)$$

$$R_T = \frac{19,75}{\sqrt{2}} = 13,97 \text{ cm}$$

a pro osu kyvu, vzdálenou od těžiště o délku $a = 17,55 \text{ cm}$, podle (3) a (5)

$$J = 774,0 \cdot 17,55^2 + 1,510 \cdot 10^6 = 3,894 \cdot 10^6 \text{ g cm}^2 = 3,894 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad (17)$$

$$R = \sqrt{13,96^2 + 17,55^2} = 22,43 \text{ cm}.$$

40.2. Moment setrvačnosti — určení z doby kyvu

Z rovnice 39 (5) plyne pro moment setrvačnosti k ose neprocházející těžištěm vztah

$$J = \frac{\tau_0^2}{\pi^2} Mga, \quad (18)$$

který umožňuje výpočet momentu setrvačnosti tělesa ze hmoty M a z doby kyvu τ_0 (redukované na nulový rozkvy) kolem osy vzdálené od těžiště o délku a . Přitom předpokládáme, že známe tíhové zrychlení g v místě pokusu s dostatečnou přesností a že dovedeme určit vzdálenost a . Z momentu setrvačnosti J pak můžeme podle *Steinerovy* věty (3) určit moment vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm a vůbec ke všem osám s ní rovnoběžným. Neznáme-li g , změříme je na př. methodou 41.1, nedovedeme-li pak určit a , ježto neznáme přesně polohu těžiště, použijeme tohoto postupu (obr. 39,1):

Připevníme k měřenému tělesu pomocné těleso hmoty M_1 jednoduchého tvaru, u něhož známe přesně polohu těžiště T_1 a dovedeme vypočítat jeho moment setrvačnosti J_1 k ose jdoucí tímto těžištěm. Změříme-li nyní dobu kyvu τ tělesa samého, dobu kyvu τ' tělesa s připevněnou hmotou M_1 a vzdálenost a_1 těžiště od osy, platí podle (18) a (3) pro redukované hodnoty dob kyvu:

$$\frac{\tau_0^2}{\pi^2} = \frac{J}{Mga}, \quad \frac{\tau'^2}{\pi^2} = \frac{J'}{M'ga'} = \frac{J + J_1 + M_1 a_1^2}{Mga + M_1 g a_1}, \quad (18')$$

neboť pro těleso tvořené hmotami M a M_1

$$M' = M + M_1,$$

$$a' = \frac{Ma + M_1a_1}{M + M_1}.$$

Snadno vyloučíme neznámou délku a a vypočteme moment setrvačnosti [dosadíme z první rovnice za Mga do druhé rovnice (18') a vzniklý vztah řešíme podle J]:

$$J = \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau_0'^2} \left(\frac{\tau_0'^2}{\pi^2} M_1ga_1 - J_1 - M_1a_1^2 \right). \quad (19)$$

Z doby kyvu τ_0' tělesa s pomocnou hmotou můžeme také určit přímo moment setrvačnosti samého tělesa vzhledem k ose jdoucí těžišťem. Příslušnou rovnici pro moment setrvačnosti J_T dostaneme z (19) pro $\lim \tau_0 \rightarrow \infty$

$$J_T = \frac{\tau_0'^2}{\pi^2} M_1ga_1 - J_1 - M_1a_1^2. \quad (20)$$

Příklad. Má se určit moment setrvačnosti železné desky kruhové o hmotě $M = 774,0$ g, jejíž doba kyvu kolem osy O vzdálené od jejího středu o délku $a = 17,55$ cm, byla měřena postupnou metodou v příkladu 39.1.

Dosazením příslušných hodnot za M , a a hodnoty 39 (8) za τ_0 , jakož i hodnoty $g = 9,810$ m/s² za zrychlení tíže (v Praze je normální hodnota $g = 9,81040$ m/s²), dostaneme nejprve pro moment setrvačnosti vzhledem k ose O :

$$J = \left(\frac{0,5364}{\pi} \right)^2 \cdot 774,0 \cdot 981,0 \cdot 17,55 = 3,885 \cdot 10^3 \text{ g cm}^2 = 3,885 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

a podle věty (3) pro moment setrvačnosti k ose rotace (jdoucí těžišťem)

$$J_T = 3,885 \cdot 10^3 - 774,0 \cdot 17,55^2 = 1,500 \cdot 10^3 \text{ g cm}^2 = 1,500 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2.$$

Tento výsledek je v uspokojivé shodě s početním výsledkem 40 (16), získaným přímou metodou 40.1.

40.3. Moment setrvačnosti — určení z torsních kmitů

Zavěsíme-li na drát těleso souměrné podle osy drátu, jež má vzhledem k této ose moment setrvačnosti J , a stočíme-li je kolem osy, koná po uvolnění torsní kmity, jejichž poloviční doba kmitu 42 (23)

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{K}},$$

takže

$$J = K \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^2. \quad (21)$$

Známe-li nebo určíme-li měřením konstantu K , danou výrazem 42 (20), můžeme z poslední rovnice vypočítat moment setrvačnosti tělesa z doby torsních kyvů τ , které koná těleso, upevníme-li je na drát.

Nutno zdůraznit, že zde se doba kyvu neredukuje na nulový rozkyv, neboť kmity jsou podle 42 (22) harmonické, pokud zkrut nepřekročí *mez úměrnosti* ¹⁾ Pro drát dlouhý několik decimetrů jsou přípustny výchylky 90 i více stupňů.

40 ¹⁾ TF 2.6.1.

Určení konstanty K předpokládá znalost modulu G , který závisí poněkud na teplotě drátu, a proto se volí raději postup užitý u metody 40.2 při neznámém těžišti.

Změříme dobu kyvu τ drátu s daným tělesem, jehož moment setrvačnosti J hledáme. Pak k němu připojíme další pomocné těleso (souměrné k ose drátu nebo dvě stejná tělesa souměrně položená) známého momentu setrvačnosti J_1 a změříme dobu kyvu τ' obou spojených těles. Podle (21)

$$J + J_1 = J' = K \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2,$$

a dělíme-li výrazem (21), pak

$$\frac{J + J_1}{J} = \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2,$$

odkud

$$J = \frac{J_1}{\left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2 - 1}. \quad (22)$$

Jako pomocné těleso je vhodný buď kruhový kotouč (nízký válec) se středovým otvorem, který se připojí centricky k tělesu, nebo kruhový prstenec, jehož moment setrvačnosti se počítá podle vzorce 40 (9) pro dutý válec. Jde-li o zjištění momentu setrvačnosti tělesa, které má při zavěšení vodorovnou horní stěnu, je možno na ni buď položit soustředně (kovový) prstenec, nebo postavit souměrně k drátu dva stejné (na př. kovové) válečky, které lze velmi přesně zhotovit na soustruhu.

Celkový moment setrvačnosti válečků je podle (3) a (7) dán vzorcem

$$J_1 = M_1 r_1^2 + 2M_1 a_1^2, \quad (23)$$

je-li M_1 , r_1 , a_1 hmota, poloměr a vzdálenost od osy drátu každého z nich.

Příklad. Moment setrvačnosti válce s děleným kruhem u rotačního viskosimetru [45, VIII].

Nejprve byla změřena postupnou metodou 39.1 doba kyvu samého válce s děleným kruhem, zavěšeného v přístroji na ocelovém drátu: $\tau = 2,665$ s. Doba kyvu s dvěma mosaurými válečky ($M_1 = 123,701$ g, $r_1 = 1,250$ cm), postavenými souměrně na dělený kruh ($a_1 = 7,00$ cm), byla $\tau' = 4,601$ s. Úhlný moment setrvačnosti obou válečků byl podle (23) $J_1 = 1,232 \cdot 10^4$ g · cm² = $1,232 \cdot 10^{-3}$ kg m², a tedy podle (22) moment setrvačnosti válce s kruhem

$$J = 6212 \text{ g cm}^2 = 6,212 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (24)$$

41. TÍHOVÉ ZRYCHLENÍ

Definice. Tíhové zrychlení g na povrchu zemském je zrychlení volného pádu ve vzduchoprázdnu; je stejné pro všechna tělesa.

Jako *normální tíhové zrychlení* se definuje¹⁾

$$g_n = 9,806 \text{ 65 m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (1)$$

1) Původně bylo určeno jako zrychlení na 45° sev. šířky při hladině mořské, ačkoliv se (1) poněkud liší od novější hodnoty (1') tohoto zrychlení.

Kromě toho se počítá t. zv. *normální velikost tíhového zrychlení v místě zeměpisné šířky φ a nadmořské výšky H metrů* podle vzorce, stanoveného Mezinárodní geodeticko-fyzikální unií (1930):

$$g = [9,780\ 49 (1 + 0,005\ 288\ 4 \sin^2 \varphi - 0,000\ 005\ 9 \sin^2 2\varphi) - 0,000\ 001\ 967\ H] \text{ m s}^{-2}. \quad (2)$$

Pro Prahu ($\varphi = 50^\circ 5'$, $H = 223$ m) vychází normální hodnota

$$g_P = 9,810\ 40 \text{ m s}^{-2} \quad (2')$$

a pro zrychlení na 45. rovnoběžce sev. šířky při hladině mořské normální hodnota

$$g_{45} = 9,806\ 29 \text{ m s}^{-2}. \quad (1')$$

Skutečné tíhové zrychlení se však může lišit až o několik desetin cm s^{-2} od hodnoty vypočtené z (2).

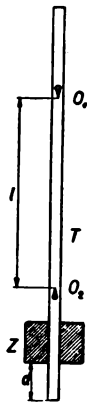
Jednotky. MKSA [g] = m s^{-2} = 100 gal.

Jednotka absolutní [g]₀ = cm s^{-2} = gal (galilei).

Přístroje

Nejpřesnější měření tíhového zrychlení konají se kyvadlem. Pro absolutní měření je nevhodnější převratné (reversní) kyvadlo, jehož redukovaná délka se najde na základě poznatku (známého již *Huygensovi*), že *pro dvě rovnoběžné osy, nesouměrně položené k těžišti, má fyzické kyvadlo jen tehdy stejnou dobu kyvu, jestliže jejich vzdálenost je právě rovna jeho redukované délce.*²⁾ Nejjednodušší typ převratného kyvadla je kovová tyč se dvěma pevnými bríty ostřím obrácenými k těžišti, které leží mezi bríty (nikoliv však uprostřed, ježto samozřejmě každé dvě k těžišti souměrné osy mají stejnou dobu kyvu). Nesouměrné polohy brítů k těžišti je dosaženo kovovým závažím připevněným k tyči poblíž jednoho jejího konce a jeho poloha se zkusmo volí tak, aby doba kyvu pro obě osy byla stejná (obr. 41,1). Kyvadla tohoto typu bývají vteřinová, ale sestavují se zvláště přesná kyvadla půlvteřinová, uzavřená v souměrné trubici, aby odpor vzduchu byl pro kyvu na obou osách stejný (obr. 41,1).

K relativním měřením stačí naproti tomu srovnat dobu kyvu téhož kyvadla na různých místech, ovšem za předpokladu, že kyvadlo má při obou měřeních stejnou redukovanou délku. Proto se převratná kyvadla zhotovují z niklové oceli nebo z taveného křemene a kromě toho se v laboratořích zjistí jejich teplotní konstanty. Pro přesná měření sestavují se přenosné čtyřkyvadlové přístroje, které mají čtyři půlvteřinová kyvadla neprodyšně uzavřená v prostoru, z něhož byl odčerpán vzduch, aby jeho odpor neznámým způsobem neměnil dobu kyvu. Kyvadla jsou opatřena zrcátky k pozorování jejich kyvů, které se koincidenční metodou srovnávají s tiky přesných hodin. Tíhová zrychlení v obou srovnávaných místech jsou pak v nepřímém poměru čtverců pozorovaných dob kyvu, které lze takto zjistit až na 1 μs (při několikahodinovém měření).



Gbr. 41,1.
Převratné
kyvadlo.

41 ²⁾ Plyne to snadným počtem ze Steinerovy věty 40(3), srov. TF 2.5.15.

41.1. Tíhové zrychlení — měření převratným kyvadlem

Kdybychom vhodným umístěním závaží dosáhli toho, aby doby kyvu τ_1 a τ_2 na obou břitech byly v mezích pozorovacích chyb stejné, stačilo by změřit vzdálenost britů $\overline{O_1O_2} = l$ a redukovat společnou dobu kyvu τ na nulový rozkvyv (τ_0) podle 39 (7). Pak bychom ze vzorce 39 (5) vypočetli tíhové zrychlení:

$$g = \frac{\pi^2}{\tau_0^2} l. \quad (3)$$

Není však snadné dosáhnout úplně stejných dob kyvu, a proto je nutno najít soustavný postup, kterým bychom v době nepříliš dlouhé došli k dosti přesnému výsledku. Takový postup nám poskytuje *interpolace* (viz čl. 18). Zde ovšem nevyhovuje interpolace přímková, a proto je třeba určit několik dvojic dob kyvu τ_1 a τ_2 , a to takových, aby pro některé z nich bylo $\tau_1 > \tau_2$ a pro jiné $\tau_1 < \tau_2$.⁹⁾ Zjištěné dvojice pak zakreslíme jako body pro různé vzdálenosti závaží od bližšího britu nebo od konce tyče a sestrojíme křivku τ_1 a křivku τ_2 . Průsečík obou křivek dává správnou hodnotu τ a zároveň vzdálenost, ve které má být závaží, aby vzdálenost obou britů byla přesně rovna redukované délce kyvadla. Stačí pak změřit tuto vzdálenost l a dosadit do (3). Správnost hodnoty τ ověříme mimo to pokusně tak, že co možná přesně nastavíme závaží do polohy určené grafickou interpolací a změříme obě doby kyvu, které se smějí lišit již jen v mezích přesnosti měření. Liší-li se více, určíme τ tímto postupem, který může vůbec nahradit interpolační metodu.

Podle 39 (5) platí pro dobu nulového kyvu — a ovšem přibližně i pro dosti malý rozkvyv:

$$\tau^2 = \frac{\pi^2 R^2}{ga} = \frac{\pi^2}{g} l. \quad (4)$$

Označíme-li a_1, a_2 vzdálenosti britů od těžiště (obr. 41,1), bude patrně

$$l = a_1 + a_2, \quad \tau_1^2 = \frac{\pi^2}{g} \frac{R_1^2}{a_1}, \quad \tau_2^2 = \frac{\pi^2}{g} \frac{R_2^2}{a_2}, \quad (5)$$

značí-li R_1 a R_2 poloměry setrvačnosti kyvadla pro obě osy. Tedy

$$a_1 \tau_1^2 - a_2 \tau_2^2 = \frac{\pi^2}{g} (R_1^2 - R_2^2),$$

a dosadíme-li sem podle 40 (5), dostaneme vztah

$$a_1 \tau_1^2 - a_2 \tau_2^2 = \frac{\pi^2}{g} (a_1^2 - a_2^2),$$

z něhož můžeme přímo počítat tíhové zrychlení:

$$g = \pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 \tau_1^2 - a_2 \tau_2^2}. \quad (6)$$

41⁹⁾ Dosáhneme toho snadno, uvědomíme-li si, že se sice posunutím závaží ke konci tyče obě doby kyvu prodlužují a opačným pohybem se opět zkrátí, ale změna je v obou případech větší pro osu bližší závaží než pro osu vzdálenou. Je-li tedy $\tau_2 < \tau_1$, odsuneme závaží ke konci tyče, je-li však $\tau_1 > \tau_2$, přiblížíme závaží k jejímu středu.

Stačí tedy změřit doby kyvu τ_1 a τ_2 pro obě osy a vzdálenosti a_1 , a_2 os od těžiště kyvadla. Těžiště určíme tak, že položíme kyvadlo napříč přes vodorovnou hranu nebo zavěsíme na drát v takovém místě, aby bylo vyváжено (tyč vodorovná). Toto místo vyznačíme na tyči (na př. na stupnici kolem těžiště) a pak změříme vzdálenosti a_1 , a_2 od břitů. Také je možno přímo měřit (na př. posuvným měřítkem) vzdálenost a_2 bližší osy od podložené hrany a celkovou vzdálenost břitů $a_1 + a_2 = l$.

Abychom dostali pro g vhodnější výraz, upravíme jmenovatele zlomku (6) na tvar

$$\begin{aligned} a_1\tau_1^2 - a_2\tau_2^2 &= (a_1 - a_2)\tau_1^2 - a_2(\tau_2^2 - \tau_1^2) = \\ &= (a_1 - a_2)\left(\tau_1^2 + a_2\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{a_1 - a_2}\right), \end{aligned}$$

který vzhledem k první z rovnic (5) po dosazení do (6) dává

$$g = \frac{\pi^2 l}{\tau_1^2 + a_2 \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{l - 2a_2}}. \quad (7)$$

Do tohoto vzorce musíme ovšem za τ_1 a τ_2 dosadit doby kyvu, redukované podle 39 (7) nebo podle T, VIII na nulový rozkvy. Vidíme z něho, že vzdálenost a_2 není třeba měřit s velkou přesností, jestliže se obě doby kyvu málo liší, neboť a_2 bývá 6—10krát menší než l . Liší-li se obě doby, na př. o méně než 5%, stačí měřit a_2 s chybou menší než 3%, abychom dostali g s přesností 1^o/₁₀₀.

Druhý člen ve jmenovateli je tím menší, čím menší je a_2 , tedy čím blíže je těžiště k jedné z os. To musí být ostatně naší snahou, neboť měření je tím přesnější, čím výstředněji leží těžiště.

Příklad. Při měření tíhového zrychlení postupnou methodou reversním kyvadlem byly získány tyto dvojice dob kyvu:

Vzdálenost závaží od bližšího konce tyče v cm d	Doby kyvu v s	
	τ_1	τ_2
5	1,010	1,056
6	1,006	1,024
7	1,000	0,999
8	0,995	0,975

Rozkvy byl menší než 5°, a proto není třeba redukce na nulový rozkvy.

Hodnoty τ_1 a τ_2 byly zakresleny na milimetrovém papíře a byl zjištěn průsečík jimi proložených křivek (obr. 41,2); jeho souřadnice $d = 6,9$ cm, $\tau = 1,001$ s byly ověřeny novým měřením dob kyvu se závažím ve vzdálenosti 6,9 cm od konce tyče. Postupnou methodou byly získány hodnoty

$$\tau_1 = (1,0014 \pm 0,0006) \text{ s,}$$

$$\tau_2 = (1,0008 \pm 0,0004) \text{ s,}$$

tedy v mezích pozorovacích chyb stejné hodnoty.

Konečně byla změřena vzdálenost obou břitů přesným kovovým měřítkem: $l = (99,35 \pm 0,05)$ cm a dosazením do vzorce (3) určeno tíhové zrychlení

$$g = (979 \pm 2) \text{ cm s}^{-2},$$

jehož pravděpodobná chyba byla vypočtena z pravděpodobné chyby 0,001 s doby kyvu a chyby 0,05 cm redukované délky podle vzorce 12 (11).

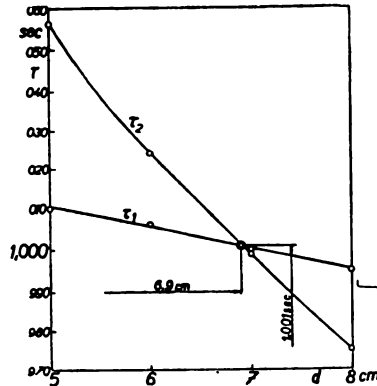
Měření bylo opakováno jiným převratným kyvadlem, pro něž byly zjištěny dvě doby kyvu:

$$[\tau_1 = (1,000 \pm 0,001) \text{ s}, \quad \tau_2 = (1,003 \pm 0,001) \text{ s};$$

vzdálenost $a_2 = 12,4 \text{ cm}$ a vzdálenost břitů $l = (99,38 \pm 0,05) \text{ cm}$. Dosazením do vzorce (7) dostaneme

$$g = \left[\frac{9,87 \cdot 99,4}{1,000 - 12,4 \frac{0,006}{74,6}} \pm 2 \right] \text{ cm s}^{-2} = (982 \pm 2) \text{ cm s}^{-2}.$$

Oba výsledky souhlasí v mezích přesnosti s hodnotou (2).



Obr. 41,2. Grafická interpolace doby kyvu.

42. MODUL PRUŽNOSTI V TAHU A VE SMYKU

Definice. Modul pružnosti E (přesněji *modul pružnosti v tahu* nebo *Youngův modul*) je poměr normálního napětí σ tyče k poměrnému prodloužení ε :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Při tom normální napětí je síla F_n (tah nebo tlak), působící ve směru osy tyče na kolmý průřez, dělená plochou S průřezu a poměrné prodloužení je dáno poměrnou změnou délky ve směru napětí (obr. 42,1)

$$\sigma = \frac{F_n}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2)$$

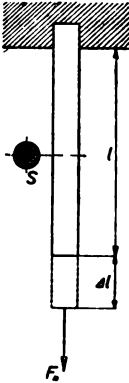
Podle *Hookova zákona*¹⁾ je E pro dosti malé deformace konstantou látky, která ovšem závisí na teplotě.

Modul pružnosti ve smyku G je poměr tečného neboli smykového napětí τ ke změně pravého úhlu γ při smykové (střihové) deformaci:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (3)$$

42¹⁾ TF 2.6.1.

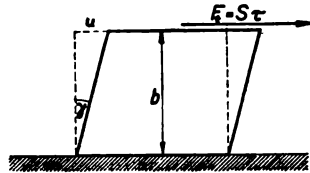
Tečné napětí je tečná nebo posouvající síla F_t , dělená velikostí S plochy, na kterou působí, a změna pravého úhlu γ — t. zv. *zkos* — je v úhlové míře dána vzájemným posunutím u dvou s povrchem rovnoběžných vrstev, děleným jejich kolmou vzdáleností b (viz obr. 42,2):



Obr. 42,1. Deformace tahem.

$$\tau = \frac{F_t}{S}, \quad \gamma = \frac{u}{b}. \quad (4)$$

Podle *Hookova zákona*²⁾ je G při malých změnách konstanta látky, závislá více nebo méně na teplotě.



Obr. 42,2. Deformace smykem.

Jednotky (pro oba moduly):

$$\text{MKSA } [E] = [G] = \text{N m}^{-2} = 10 [E]_a = 1,0197 \cdot 10^{-5} [E]_t \doteq 1,02 \cdot 10^{-5} [E]_i; \quad (5)$$

$$\text{absolutní jednotka } [E]_a = [G]_a = \text{dyn cm}^{-2} = 10^{-1} \text{N m}^{-2} = 1,0197 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}; \quad (6)$$

$$\text{technická jednotka } [E]_t = [G]_t = \text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} = 0,9807 \cdot 10^5 \text{N m}^{-2}. \quad (7)$$

Rovněž se užívá jednotky $\text{kg} \cdot \text{mm}^{-2} = 100 [G]_t$.

MĚŘICÍ METODY PRO MODUL PRUŽNOSTI V TAHU

K měření modulu pružnosti drátů, vláken a velmi tenkých tyčí lze použít přímé metody, při níž měříme prodloužení Δl drátu délky l a průřezu S , napjatého silou F_n ve směru jeho osy. Přitom podle (2) hledíme měřit všechny tyto veličiny se stejnou poměrnou chybou, jak vyplývá z věty 12 (10). F_n je dáno vahou závaží, kterými drát napínáme, a měli bychom ji ovšem přepočítat na normální zrychlení ($g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$); při obvyklé přesnosti měření toho však není třeba. Délku drátu mírně napjatého měříme přesným měřítkem dřevěným nebo kovovým na 0,5 mm, což odpovídá při délce $l = 50 \text{ cm}$ poměrné chybě 0,1%; se stejnou poměrnou chybou hledíme měřit také prodloužení Δl , řádově rovné 1 mm, a průřez S . Tedy průměr kruhového průřezu drátu musíme podle 12 (6) měřit s poměrnou chybou nepřevyšující 0,05%, čehož dosáhneme pečlivým a několikrát opakovaným měřením mikrometrem.

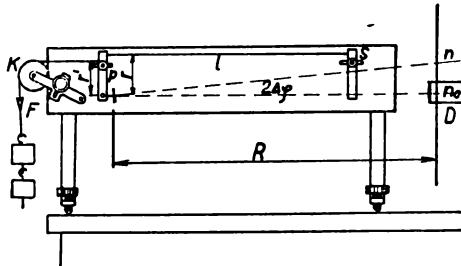
Prodloužení drátu je třeba měřit s chybou řádu 0,001 mm; k tomu použijeme *čtecích drobnohledů* [20,I] buď se značkou ve tvaru krátké stupnice

(obr. 20,2, Z_n), nebo s okulárním mikrometrem [20,IV]. Nejpřesnější měření vyžaduje dva takové mikroskopy, které umístíme v neproměnné vzájemné vzdálenosti (na př. 50 cm) nad sebou, a pozorujeme jimi dvě značky upevněné na měřeném drátu, který napínáme vahou závaží. Známe-li táru mikroskopů (viz čl. 14), vypočteme snadno ze změny polohy obou značek prodloužení drátu. Také lze vystačit s jedním drobnohledem, můžeme-li náležitým upevněním jednoho konce drátu zaručit, že poloha tohoto konce je neproměnná v mezích pozorovacích chyb. Při laboratorním měření modulu pružnosti drátu lze dobře použít také zrcátkové metody (obr. 20,5), jak vyložíme v 42.1.

Modul pružnosti tlustších tyčí se určuje ve fyzikální laboratoři metodami nepřímými, a to z prohnutí zatížené tyče, na př. metodou 42.2, nebo z hustoty tyče a z rychlosti podélných vln v tyči, jak je uvedeno v 42.3. Poslední metody lze použít i pro vzorky malých rozměrů, měříme-li rychlost ultrazvuku (Flo-risson 1939).

42.1. Modul pružnosti z poměrného prodloužení drátu zrcátkovou metodou

Pro tuto přímou metodu je vhodné zařízení znázorněné na obr. 42,3. Na silném dřevěném trámu je upevněn měřený drát délky l ve svorce s a napínán páčkou p , která je tažena vlevo závažím váhy F , zavěšeným přes kladku K . Je-li drát připevněn k páčce ve vzdálenosti r od její osy a je-li závěs nesoucí



Obr. 42,3. Měření modulu pružnosti drátu zrcátkovou metodou.

závaží upevněn na páčce ve vzdálenosti r' od její osy, pak je drát napínán silou

$$F_n = \frac{r'}{r} F,$$

neboť rovnováha nastane podle věty 26 (2), jakmile moment váhy $F r'$ se vyrovná s momentem $F_n r$ síly, kterou drát působí proti prodloužení. Toto prodloužení

$$\Delta l = r \Delta \varphi,$$

je-li $\Delta \varphi$ otočení zrcátka, jímž se při neprodlouženém drátu odrážely do dalekohledu paprsky z místa n_0 svislé stupnice. Ježto jsou výchylky zrcátka velmi malé, použijeme přibližného vzorce 20 (2), takže

$$\Delta \varphi = \frac{n - n_0}{2R},$$

vidíme-li v dalekohledu po prodloužení drátu čárku n -tého dílku stupnice. Je-li S průřezová plocha drátu, pak podle (2)

$$\sigma = \frac{r'}{r} \frac{F}{S'}, \quad \varepsilon = \frac{r}{2Rl} (n - n_0)$$

a podle (1)

$$E = \frac{2Rlr'}{r^2S} \cdot \frac{F}{n - n_0}. \quad (8)$$

Tak bychom mohli pro každé zatížení F vypočítat ze čtení n modul pružnosti, čímž bychom dostali vinou měřicích chyb různé hodnoty. Z poslední rovnice je však patrné, že poměr

$$\frac{F}{n - n_0} = \frac{1}{a}$$

má být stálý, a jde tedy o úměrnost mezi dvěma proměnnými měřenými veličinami. Nejpravděpodobnější hodnota A konstanty a je dána podle 14 (6) výrazem

$$A = \frac{\Sigma F (n - n_0)}{\Sigma F^2}, \quad (9)$$

který však můžeme nahradit jednodušším výrazem

$$A_0 = \frac{\Sigma (n - n_0)}{\Sigma F}, \quad (10)$$

k němuž vede metoda momentová 14 (30) nebo skupinová 15 (24). Tedy nejpravděpodobnější hodnota modulu pružnosti je podle (8) a (9)

$$E = \frac{2Rlr'}{r^2S} \frac{\Sigma F^2}{\Sigma F (n - n_0)}. \quad (11)$$

Můžeme ji však nahradit přibližnou hodnotou

$$E_0 = \frac{2Rlr'}{r^2S} \frac{\Sigma F}{\Sigma (n - n_0)} \quad (12)$$

Hodnotu A_0 lze snadno dostat graficky methodou 16 (1).

Potřeby: Zařízení podle obr. 42,3 včetně dalekohledu se svislou stupnicí [20,V], mikrometr [31,VI], posuvné měřítko [31,V], dvoumetrové tyčové měřítko, závěsná (půl)kilogramová závaží.

Postup

1. Měřený drát (délky asi 1 m) upneme mezi svorku a páčku a mírně jej napneme závažím 500–1000 g a hledíme, aby páčka mířila co možno svisle vzhůru.

2. Změříme délky r a r' posuvným měřítkem (několikrát a co nejpřesněji), vzdálenost R od stupnice a teplotu místnosti.

3. Změříme délku drátu na milimetry (několikrát) a jeho průměr (mikrometrem) na různých místech, celkem aspoň 30krát, a to velmi pečlivě, aniž poškodíme drát.

4. Ůteme nulovou polohu n'_0 a další výchylky pro různá zatížení, postupující po 1 kg*, do nejvyššího zatížení a zase zpět do úplného odtížení drátu (až na původní závaží, kterému přísluší nulové polohy n'_0 a n'_0 a které do součtu ΣG nepočítáme). Po skončení měření zjistíme znovu teplotu místnosti.

5. Zápis o měření vedeme takto:

$F \text{ kg}^*$	n'	n''	$n = \frac{n' + n''}{2}$	$n - n_0$
0	n'_0	n''_0	n_0	0
1	n'_1	n''_1	n_1	$n_1 - n_0$
2	n'_2	n''_2	n_2	$n_2 - n_0$
3	n'_3	n''_3	n_3	$n_3 - n_0$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ΣF				$\Sigma (n - n_0)$

Modul při zjištěné (průměrné) teplotě vypočteme z rovnice (12) nebo (11). Graficky vyznačíme závislost výchylky $n - n_0$ na zatížení F tak, že vyznačíme body s pravouhlými souřadnicemi F a $n - n_0$, sestrojíme jejich těžiště a spojíme s počátkem souřadnic. Hodnota A_0 poměru (10) je pak dána směrnici této přímky.

42.2. Modul pružnosti — určení z průhybu tyče

Vodorovná stejnorodá tyč, podepřená na dvou břitech kolmých k její ose (jako prostý nosník) a zatížená osamělou silou F uprostřed mezi podpěrnými břity, prohne se tak, že se působíště síly sníží o délku³⁾

$$y = \frac{Fl^3}{48 EJ}, \quad (13)$$

kde l je vzdálenost obou hran a J značí moment setrvačnosti průřezové plochy tyče k vodorovné ose, vedené v rovině průřezu jeho těžištěm.⁴⁾ Tento vztah platí ovšem s podmínkou, že váha tyče samé nepůsobí měřitelné prohnutí a že geometrická osa tyče se prohne v křivku ležící ve svislé rovině (že nevybočí v prostorovou křivku). Rovnice (13) říká, že středový průhyb tyče y je úměrný zatížení,

$$y = \frac{l^3}{48 EJ} F = \text{const} \cdot F.$$

Zjistíme-li tedy řadu dvojic sobě příslušných hodnot F a y , a určíme-li podle 14 (6) nejpravděpodobnější hodnotu A jejich poměru, můžeme určit i nejpravděpodobnější hodnotu modulu pružnosti:

$$E = \frac{l^3}{48 AJ} = \frac{l^3}{48 J} \frac{\Sigma F^2}{\Sigma Fy}. \quad (14)$$

Spokojíme-li se přibližnou hodnotou podle 14 (30) nebo 15 (24), pak

$$E = \frac{l^3}{48J} \frac{\Sigma F}{\Sigma y}. \quad (15)$$

Osa prohnuté tyče tvoří jistě rovinnou křivku, má-li průřez tyče svislou rovinu souměrnosti. Pro tyč pravoúhlého průřezu šířky a a výšky b a pro válcovou

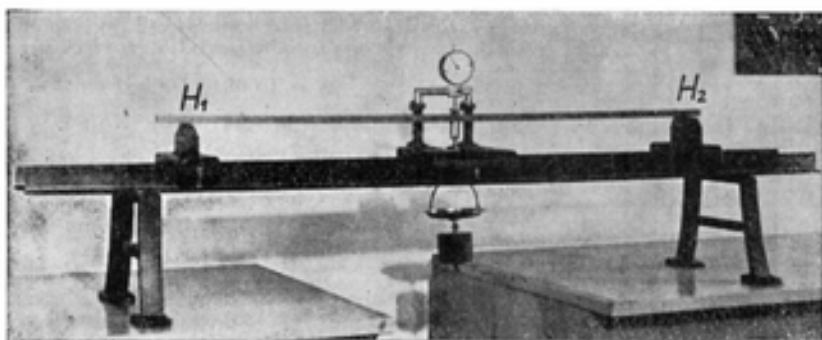
42³⁾ TF 2.6.8.

42⁴⁾ TF 2.5.11.

tyč poloměru r dostaneme tedy z (15) dosazením za J podle 40 (13; 15) vzorce

$$E = \frac{l^3}{4ab^3} \frac{\Sigma F}{\Sigma y}, \quad E = \frac{l^3}{12\pi r^4} \frac{\Sigma F}{\Sigma y}. \quad (16)$$

Při měření tyče obdélníkového průřezu musí nám ovšem vyjít v mezích přesnosti měření stejný modul pro obě možné polohy tyče. Otočením tyče o pravý úhel kolem její osy změní se moment setrvačnosti, ale zároveň se změní i průhyb. Zařízení potřebné k měření touto methodou lze celkem snadno improvizovat, jen musí být postaráno o dosti přesné měření středového průhybu y . Po-



Obr. 42,4. Měření modulu pružnosti průhybem tyče.

měrně jednoduché a přesné je zařízení ze snímku 42,4. Na litinové lavici se posouvají dva trojboké vodorovné hranoly H_1 , H_2 , jejichž vzdálenost se přímo měří na ocelovém měřítku lavice. Další běžec nese indikátor [31,IX], který se zase podle měřítka nastaví doprostřed mezi hrany H_1 a H_2 . Měřená tyč se položí na hrany H_1 a H_2 a výška indikátoru se upraví tak, aby měřicí kolíček, dotýkající se shora tyče, byl takřka úplně zasunut. Na tyč se nasune třmen s miskou na závaží, který má nahoře uprostřed mezeru pro kolíček indikátoru. Tento třmen se totiž umístí právě pod indikátor, jehož středová poloha je zaručena.

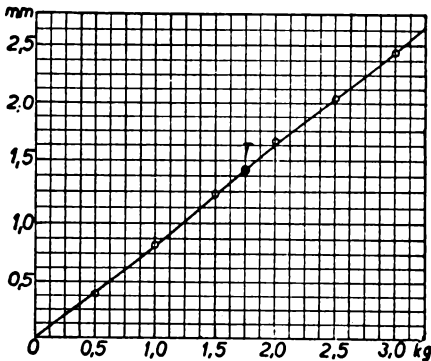
Potřeby: Zařízení podle obr. 42,4, sada závaží nebo závěsná závaží 500—1000 g, mikrometr [31,VI] nebo posuvné měřítko [31,V].

Postup

1. Změříme teplotu místnosti a rozměry a , b po př. r , průřezu tyče v různých místech mezi oběma podpěrami s poměrnou chybou, pokud možno nepřesahující 0,1 %.
2. Čteme nulovou polohu indikátoru y_0 , která přísluší poloze tyče zatížené jen třmenem a prázdnou miskou, jejichž váhu dále nepočítáme.
3. Zatěžujeme tyč postupně těžšími závažími, měříme průhyb y indikátorem, a před každým zatížením sejme všechny závaží s miskou a čteme znovu nulovou polohu, podle jejíž stálosti můžeme (aspoň přibližně) posoudit, zda nebyly překročeny meze pružnosti zkoušeného materiálu.
4. Modul pružnosti vypočteme z prvního vzorce (16), jde-li o tyč pravoúhlou, ze druhého, má-li tyč průřez kruhový.

Příklad. Modul pružnosti mosazné tyče velmi přibližně čtvercového průřezu: $a = 1,302$ cm, $v = 1,301$ cm byl měřen při vzdálenosti hran $l = 100,00$ cm. O měření byl proveden tento zápis:

F	Nulová poloha	Při zatížení	y
0,5 kg*	5,089 mm	5,483 mm	0,394 mm
1,0	90	5,918	0,828
1,5	98	6,322	1,224
2,0	90	6,731	1,641
2,5	91	7,136	2,045
3,0	92	7,532	2,440
$\Sigma F = 10,50 \text{ kg}^*$		$\Sigma y = 8,572 \text{ mm}$	



Obr. 42,5. Úměrnost průhybu tyče se zatížením.

Z uvedených hodnot byl vypočten modul pružnosti podle prvního vzorce (16):

$$E = 1,0681 \cdot 10^6 \text{ kg}^* \text{ cm}^{-2} = 1,0478 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

Kdybychom počítali nejpravděpodobnější hodnotu podle (14), dostali bychom

$$E = 1,0676 \cdot 10^6 \text{ kg}^* \text{ cm}^{-2} = 1,0473 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

Z toho vidíme, že přibližný vzorec (16) je v našem případě dostatečně přesný.

Závislost průhybu y na zatížení byla také znázorněna graficky (obr. 42,5) a přímka vyjadřující empiricky zjištěnou úměrnost byla sestrojena podle návodu 16 (1).

42.3. Modul pružnosti tyče — určení z rychlosti zvuku

Zvukové vlny (podélné) šíří se podle 49 (2) tenkou tyčí rychlostí

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde E je modul pružnosti a ρ hustota tyče. Změříme-li tedy hustotu tyče a rychlost, kterou se zvuk šíří tyčí ve směru její osy, můžeme počítat modul pružnosti podle rovnice

$$E = \rho c^2. \quad (17)$$

Měříme-li hustotu v kg m^{-3} a rychlost zvuku v ms^{-1} , dostaneme ovšem i modul v jednotkách $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{N m}^{-2}$ soustavy MKS. Modul E v technických jednotkách dostaneme pak podle tabulky T, XX:

$$E = 1,020 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^2 \rho c^2 \text{ kg}^* / \text{cm}^2. \quad (18)$$

V jednotkách $\text{kg}^* / \text{mm}^2$ by vyšla hodnota ještě stokrát menší.

Postup

1. Změříme hustotu ρ tyče v g/cm^3 nejlépe přímo metodou 36.1.
2. Změříme zvukovou rychlost c v cm/s metodou *Kundtovou* 49.4 nebo jinou metodou čl. 49.
3. Modul vypočteme v absolutních jednotkách z rovnice (17), v technických jednotkách z rovnice (18).

Příklad. Methodou 49.4 byla změřena rychlost c ve skleněné tyči, jejíž hustota $\rho = 2510 \text{ kg m}^{-3}$ byla určena vážením a výpočtem objemu z jejich rozměrů methodou 36.1. Výsledek byl podle 49 (10) $c = 5,04 \text{ km s}^{-1}$ a podle rovnic (17) a (18) vypočten modul pružnosti $E = 2,51 \cdot 25,4 \cdot 10^{10} \text{ dyn cm}^{-2} = 6,37 \cdot 10^{11} \text{ dyn cm}^{-2} = 6,37 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2} = 6,50 \cdot 10^8 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$.

MĚŘICÍ METHODY PRO MODUL PRUŽNOSTI VE SMYKU

K měření modulu G ve fyzikální laboratoři jsou nejvhodnější torsní deformace drátů a tenkých tyčí, které vznikají kroucením (krutem). Stáčíme-li totiž kruhový průřez tyče kolem její osy, zatím co jiný průřez vzdálený od něho o délku l je pevný (vetknutý), dvojicí (otáčivým momentem) D , vznikají mezi sousedními průřezy tyče tečná smyková napětí podél soustředných kružnic, jež rostou od středu průřezu k okraji. Ustálený stav nastane, když výsledný krouticí moment k ose tyče je v každém průřezu stejný a stejně velký jako vnější dvojice, neboť pak jsou momenty působící na každý průřez od obou sousedních průřezů v rovnováze, při čemž moment působící na kroucený (koncový) průřez je v rovnováze s vnější dvojicí. Výpočtem napětí τ podle (3) plyne výsledek, že k stočení koncového průřezu tyče o úhel φ (v obloukové míře) je potřeba dvojice úměrné stočení:⁵⁾

$$D = K \varphi, \quad (19)$$

kde konstanta úměrnosti

$$K = \frac{\pi G r^4}{2l} \quad (20)$$

a r je poloměr průřezu tyče.

Podle principu akce a reakce klade tyč zkroucení o úhel φ odpor daný momentem

$$D_0 = -K\varphi. \quad (21)$$

Připevníme-li tedy na dolní konec svislé tyče (drátu), upevněné na horním konci, těleso, jehož moment setrvačnosti k ose tyče je J , bude při zkroucení o úhel φ působit na těleso dvojice D_0 , která působí pohyb tělesa kolem osy tyče, daný pohybovým zákonem 26 (7):

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + K\varphi = 0. \quad (22)$$

Tato rovnice má tvar 39 (4) diferenciální rovnice harmonického pohybu s kruhovou frekvencí ω , danou podle (20) vztahem

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{K}{J} = \frac{\pi G r^4}{2lJ}.$$

Těleso zavěšené na tyči koná tedy harmonické kmity s dobou kmitu T . Z poslední rovnice plyne pro dobu kyvu $\tau = \frac{T}{2}$ těchto torsních kmitů vzorec

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{K}} = \sqrt{\frac{2\pi l J}{G r^4}}. \quad (23)$$

Na rozdíl od pohybu kyvadla platí rovnice (22), a tedy i tato rovnice přesně i pro větší rozkyvy — pokud ovšem není překročena mez úměrnosti a můžeme-li předpokládat platnost *Hookova zákona*. Proto *neopravujeme chybu torsních kyvů na nulový rozkyv* (srov. 40.3). Měli bychom ovšem provést opravu na útlum, který prodlužuje dobu kmitu harmonického pohybu [srov. 26 (18)]. Při obvyklém tvaru používaných těles je však vliv útlumu způsobeného odporem vzduchu a vnitřním třením v drátě zanedbatelný.

Modul pružnosti ve smyku je obsažen jednak v konstantě K , jednak ve výrazu pro dobu torsních kyvů. To vede ke dvěma metodám měření modulu pružnosti ve smyku: k metodě *statické*, při níž měříme zkрут způsobený známou dvojicí, a k metodě *dynamické*, při níž měříme dobu torsních kyvů tělesa se známým momentem setrvačnosti.

První metoda má přednost, že lze sledovat platnost zákona *Hookova* nebo zjistit i meze úměrnosti. Druhá metoda je při vhodném postupu rychlejší a má výhodu, že zkručování je střídavého smyslu, čímž se zmírní vliv jednostranného namáhání.

42.4. Statické měření modulu pružnosti ve smyku

Tato metoda záleží v měření konstanty úměrnosti K mezi točivou dvojicí D a úhlem zkroucení φ koncového průřezu tyče. Tyč upevníme svisle na horním konci a na dolní konec nasadíme vodorovnou kladku (kruhovou desku o průměru aspoň 20 cm, obr. 42,6). Ve dvou protilehlých místech jejího obvodu upevníme konce dvou vláken (drátů), která vedeme podél obvodu kotouče přes dvě kladky a na koncích opatříme závěsy nebo miskami pro závaží. Je-li vnější poloměr kotouče a a je-li na každém závaží váha F , pak

$$D = 2aF. \quad (24)$$

Výchylku φ (úhel zkroucení) lze měřit dvojím způsobem:

A. Kotouč připevněný k tyči má soustředný dělený kruh a výchylku ve stupních

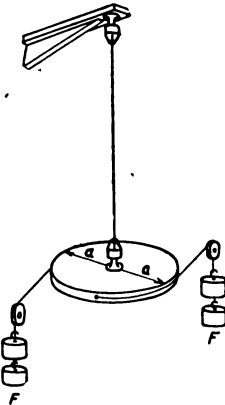
$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi \quad (25)$$

určíme tak, že čteme polohu dvou pevných ukazatelů ve dvou protilehlých bodech a z obou čtení bereme průměr (srov. 33).

B. Na osu kotouče (nad ním nebo pod ním) upevníme svislé zrcátko a měříme jeho stočení zrcátkovou metodou (obr. 20,3). Jen jsou-li výchylky zcela malé, můžeme použít přibližné rovnice 20 (2)

$$\varphi = \frac{n - n_0}{2R}, \quad (26)$$

z níž plyne úměrnost mezi D a čtením na stupnici. Jinak musíme opravit čtení na stupnici podle tabulky T,VII, čímž dostaneme zase hodnoty úměrné úhlu



Obr. 42,6. Statické měření modulu pružnosti ve smyku.

zkroucení. Proto je způsob A vhodný pro měření drátu, způsob B však pro měření tyčí (tlustých drátů). V obou případech je pak výchylka (φ° nebo $n - n_0$) úměrná váze F na jednom závěsu; konstantu úměrnosti zjistíme z řady měření (podobně jako v 42.1 a 42.2) nejlépe skupinovou metodou. V případě A bude podle (19), (24), (25)

$$F = \frac{\pi K}{360a} \varphi^\circ, \quad (27)$$

kdežto v případě B podle (19), (24), (26)

$$F = \frac{K}{4Ra} (n - n_0). \quad (28)$$

Podle vzorce 15 (24) jsou tedy vyrovnané hodnoty konstant úměrnosti dány výrazy:

$$\text{A.} \quad \frac{\pi K}{360a} = \frac{\Sigma F}{\Sigma \varphi^\circ}, \quad \text{B.} \quad \frac{K}{4Ra} = \frac{\Sigma F}{\Sigma (n - n_0)},$$

a pro modul pružnosti ve smyku dostaneme podle (20) vzorce

$$\text{A.} \quad G = \frac{720al}{\pi^2 r^4} \frac{\Sigma F}{\Sigma \varphi^\circ}, \quad \text{B.} \quad G = \frac{8Ral}{\pi r^4} \frac{\Sigma F}{\Sigma (n - n_0)}. \quad (29)$$

Potřeby: Zařízení podle obr. 42,6, mikrometr [81,VI], přesné metrové měřítko; při měření tyče dalekohled se stupnicí [20,V].

Postup

1. Zavěsíme na měřený drát (tyč) kotouč, vedeme závěsy přes kladky a změříme teplotu místnosti.

2. Změříme délku l drátu měřítkem a jeho průměr $2r$ velmi pečlivě na větším počtu míst (aspoň 20) mikrometrem tak, aby průměr byl určen s poměrnou chybou nejvýše 0,1 %. Změříme na 0,1 mm průměr $2a$ kotouče a v případě B (tyč) také vzdálenost R zrcátka od stupnice.

3. Čteme nulovou polohu kotouče α_0 , od níž pak měříme výchylky, takže v případě A děleného kruhu je $\varphi^\circ = \alpha - \alpha_0$, značí-li α průměr z obou čtení polohy vychýleného kotouče. V případě B zjistíme n_0 .

4. Zvyšujeme zatížení misek rovnoměrně a zapisujeme příslušná čtení α , (n) až do nejvyššího zatížení a potom stejným způsobem odlehčujeme až do nulového zatížení (při váze misek).

5. Modul pružnosti ve smyku vypočteme podle vzorců (29) A (drát) nebo B (tyč). V obou případech vyjde modul v jednotkách $N\ m^{-2}$, měříme-li F v newtonech a všechny délky v metrech. Chceme-li dostat modul v technických jednotkách $kg\ cm^{-2}$, měříme F v kg a všechny délky v cm.

Zápis o měření vedeme podobně jako v 42.1:

$F\ kg^*$	Výchylka při zatěžování	Výchylka při odlehčování	$\frac{\alpha' + \alpha''}{2}$	$\varphi^\circ = \alpha - \alpha_0$
0	α'_0	α''_0	α_0	0
F_1	α'_1	α''_1	α_1	$\alpha_1 - \alpha_0$
F_2	α'_2	α''_2	α_2	$\alpha_2 - \alpha_0$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
ΣF				$\Sigma \varphi^\circ$

Vyrovnnání lze také provést graficky, při čemž obě závislosti (27) i (28) jsou dány přímkou jdoucí počátkem. Proto lze použít metody 16 (1) a vést přímkou z počátku souřadnic těžištěm všech bodů získaných měřením.

42.5. Dynamické měření modulu pružnosti ve smyku

Z rovnice (23) plyne vztah

$$G = \frac{2\pi lJ}{r^4\tau^2}, \quad (30)$$

z něhož vypočteme G , změříme-li kromě rozměrů drátu i moment setrvačnosti J tělesa na drát upevněného a jeho dobu kyvu τ . Je vhodné volit těleso takového tvaru, aby se jeho moment setrvačnosti dal určit přímkou methodou 40.1, nejlépe některým ze vzorců [40 (6) až (12)]. Bývá to vodorovná tyč se dvěma stejnými válci, jejichž polohu lze upravit tak, aby doba kyvu měla žádanou velikost. Podle označení v obr. 42,7 je moment setrvačnosti tohoto tělesa k ose drátu

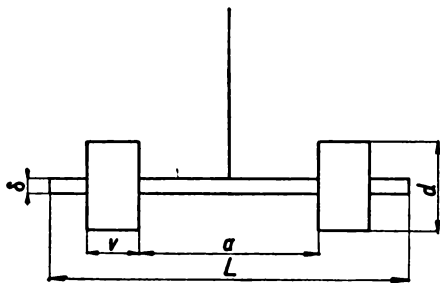
$$J = \frac{M}{12} L^2 + \frac{M_{2v}}{4} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 + \frac{v^2}{3} + (a+v)^2 \right], \quad (31)$$

jak plyne po úpravě ze vzorců 40 (10; 12; 3), značí-li M hmotu tyče a M_{2v} celkovou hmotu obou válců, které zvažíme oba najednou. Průměr d a výška v válců jsou *průměrné* hodnoty pro oba válce, které jsou přibližně stejné.

Také můžeme použít kruhové desky hmoty M a poloměru a , jejíž moment setrvačnosti je podle 40 (7)

$$J = \frac{M}{2} a^2.$$

Lze jej zvýšit připojením dvou válečků na desku souměrně postavených, jejichž celkový moment setrvačnosti je dán výrazem 40 (23). Užijeme-li takových dvou válečků, není třeba, aby mělo setrvačné těleso přesně pravidelný tvar, neboť můžeme pak jeho moment setrvačnosti určit methodou 40.3, změříme-li dobu torsních kyvů jak tělesa samotného, tak tělesa s oběma válečky.



Obr. 42,7. Setrvačné těleso pro dynamické měření modulu pružnosti ve smyku.

Potřeby: Setrvačné těleso (obr. 42,7) nebo kruhová deska s dvěma válečky, mikrometr [31,VI], posuvné měřítko [31,V], metrové měřítko, hrubší váhy.

Postup

1. Změříme teplotu místnosti, zavěsíme na drát setrvačné těleso, změříme délku drátu a jeho průměr $2r$ aspoň dvacetkrát v různých místech s poměrnou chybou pokud možno asi řádu 0,1%.

2. Změříme dobu kyvu τ tělesa na drátu methodou postupnou 39.1, nebo je-li větší než 3 s, změříme její dvojnásobek (dobu kmitu T) methodou omezovací 39.2.

3. Moment setrvačnosti určíme buď přímou methodou 40.1 — na př. výpočtem podle vzorce 40(2) — nebo methodou 40.3, opakujíc měření doby kyvu setrvačného tělesa s přídatnou hmotou.

4. Modul pružnosti ve smyku vypočteme v absolutních jednotkách dosazením do vzorce (30) a na jednotky technické $\text{kg}^* \text{cm}^{-2}$ jej převedeme podle (6).

Příklad. Měření modulu pružnosti ve smyku ocelového závěsného drátu rotačního viskosimetru [45, VIII] dynamickou methodou.

Drát měl délku $l = 60,0$ cm a průměr (střed 20 měření) $2r = 0,5110$ mm. Doba kyvu válce s momentem setrvačnosti $J = 6212$ g cm^2 byla $\tau = 2,665$ s, jak bylo uvedeno v příkladu metody 40.3. Dosazením do vzorce (16) vychází

$$G = 7,80 \cdot 10^{11} \text{ dyn cm}^{-2} = 7,80 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2} = 7,95 \cdot 10^6 \text{ kg}^* \text{cm}^{-2}.$$

43. KOEFICIENT RESTITUCE, VZPRUŽIVOST A DYNAMICKÁ PRUŽNOST

Definice. *Koeficient restituce* k_{12} dvou těles 1 a 2 je poměr kolmé rychlosti v , jakou se tělesa po přímém středovém rázu od sebe vzdalují, ke kolmé rychlosti V , jakou se srazila:¹⁾

$$k_{12} = \frac{v}{V}. \quad (1)$$

Vzpruživost e tělesa je poměr rychlosti jeho vzpružování na konci rázu k rychlosti jeho stlačování na počátku rázu.

Dynamická pružnost k látky (materiálu) je koeficient restituce při rázu (dokonale) tuhé koule na tlustou desku (poloprostor) z vyšetřované látky.¹⁾

Jednotky. Všechny tyto tři poměry jsou bezrozměrné, takže ve všech soustavách $[k_{12}] = [e] = [k] = 1$.

Podle těchto definic je koeficient restituce vlastnost dvojice těles, která závisí na druhu látek, na jejich teplotě a na rozměrech těles.

Vzpruživost je vlastnost tělesa, závislá nejen na pružných vlastnostech materiálu; ale také na tvaru a na velikosti tělesa, kdežto dynamická pružnost je vlastnost materiálu, která závisí ovšem na jeho stavu, především na teplotě.

Všechny jmenované veličiny závisí také do jisté míry na rychlosti (prudkosti) rázu.

Přímé měření vzpruživosti v obecném případě rázu dvou různých těles by působilo obtíže, avšak vzpruživosti obou těles rozhodují o jejich společném koeficientu restituce, a to způsobem, který lze odvodit theoreticky.²⁾

Vzájemný koeficient restituce dvou těles je roven váhovému aritmetickému středu vzpruživosti těles, při čemž váha každé vzpruživosti je rovna poddajnosti materiálu příslušného tělesa. To lze vyjádřit vzorcem

$$k_{12} = \frac{\vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (2)$$

v němž *poddajnost* ϑ látky je definována výrazem

$$\vartheta = \frac{1 - \mu^2}{E}. \quad (3)$$

43¹⁾ TF 2.8.5. 43²⁾ Viz [65].

Při tom značí E modul pružnosti v tahu, μ Poissonův poměr³⁾ a e_1, e_2 vzpruživosti obou těles. Převrácená hodnota poddajnosti

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad (4)$$

nazývá se někdy *penetrační modul* vzhledem k tomu, že má při stlačování oblých těles vzájemným dotykem obdobný význam jako Youngův modul při stlačování válce kolmým tlakem, stejnoměrně rozloženým po ploše podstavy. Vzorec (2) má fyzikální význam i pro případ rázu dvou různých těles z téže látky, kdy $\vartheta_1 = \vartheta_2$, takže výraz (2) přejde v aritmetický střed:

$$k_{12} = \frac{1}{2} (e_1 + e_2). \quad (5)$$

Tedy: *Vzájemný koeficient restituice těles z téhož materiálu je roven aritmetickému průměru vzpruživosti obou těles.*

Hodnota vzájemného koeficientu restituice libovolných dvou těles leží vždy mezi hodnotami jejich vzpruživosti. Jestliže jsou obě tělesa z téže látky, má koeficient restituice hodnotu rovnou průměru jejich vzpruživosti, a leží tedy právě uprostřed mezi nimi.

Ze vzorce (2) vidíme, že dynamická pružnost materiálu je vlastně experimentálně definovaná vzpruživost tlusté desky, od níž se znatelně neliší, na př. u plastických látek, užijeme-li k jejich zkoušení ocelové kuličky, jejíž poddajnost je malá proti poddajnosti zkoušené látky.

Vzpruživost i dynamickou pružnost lze tedy zjistit měřením koeficientu restituice a na tom jsou založeny běžné technické metody.

MĚŘICÍ METODY A PŘÍSTROJE

Nejjednodušší a v praxi nejčastější metoda na měření koeficientu restituice a dynamické pružnosti je založena na zjišťování výšky h odskoku koule, která dopadla svisle s výšky H na pevnou vodorovnou desku. Pro rychlost V dopadu a rychlost odskoku v platí zřejmě vztahy⁴⁾

$$V = \sqrt{2gH}, \quad v = \sqrt{2gh}, \quad (6)$$

kde g je zrychlení tíže. Vzájemný koeficient restituice k_{kd} koule a desky je pak dán vzorcem

$$k_{kd} = \frac{v}{V} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (7)$$

Protože měření výšky odskoku je nepřesné, byly měřicí přístroje všelijak upravovány, na př. jako kyvadlový přístroj s unášeným ukazatelem.

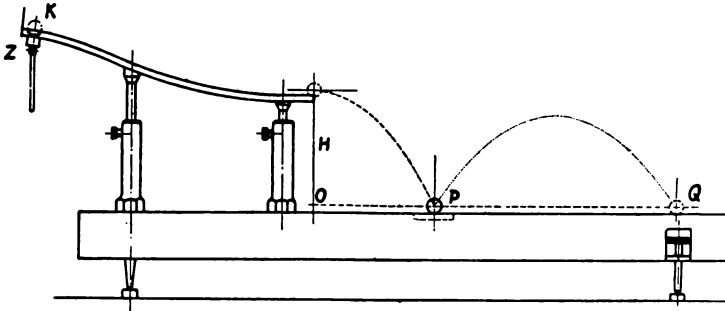
Velmi jednoduchá je novější *metoda valené koule*,⁵⁾ jejíž princip i postup vyložíme zároveň s popisem příslušného přístroje (obr. 43,1). Zkoušená destička upevní se na masivním rámu přístroje v místě P . Ocelová kulička K se vypustí mechanickým, pneumatickým nebo elektrickým zařízením Z na náběhovou

43³⁾ TF 2.6.1.

43⁴⁾ TF 2.8.5.

43⁵⁾ Viz pozn. 43²⁾.

dráhu, po které se valí beze smyku a kterou opustí ve směru vodorovném. Kulička pokračuje tedy v pohybu po parabolickém oblouku (jako při vodorovném vrhu) a v bodě P se odrazí od zkoušené desky, načež opíše druhou parabolu, která protne rovinu desky v dalším bodě Q . Bod O je určen hrotem olovničky zavěšené pod koncovou hranou náběhové dráhy. Polohy bodů P a Q se přesně zaznamenají tak, že se rovina desky nejprve pokryje kopírovacím papírem, abychom dostali otisk bodu P . Pak se kopírovací papír přesune tak, aby



Obr. 43,1. Přístroj na měření dynamické pružnosti desek.

kulička dopadla v P na obnaženou desku, aby však při druhém dopadu vznikl na bílém nebo milimetrovém papíru otisk bodu Q . Z též

$$D = \overline{OP}, \quad d = \overline{PQ} \quad (8)$$

vypočteme snadno koefficient restituce. Především víme, že gravitační síla nemění ani vodorovnou složku rychlosti kuličky, ani její rotaci, a proto je vodorovná složka rychlosti i úhlová rychlost stejná jako při valení. Proto i při odrazu v P má bod dotyku kuličky vodorovnou složku rychlosti nulovou, takže smykové tření na kuličku nepůsobí. Nepřihlížíme-li tedy k valivému tření a k odporu vzduchu, proběhne ráz koule na desce, jako by šlo o dokonale hladká tělesa, a tečná složka u rychlosti se nezmění. Je tedy délka vodorovného vrhu $D = uT$ a délka šikmého vrhu z P do Q se rovná $d = u \cdot 2t$, značí-li $T = V/g$ dobu vodorovného vrhu a $t = v/g$ dobu stoupání při šikmém vrhu po rázu. Odtud plyne z (1) pro koefficient restituce jednoduchý vztah

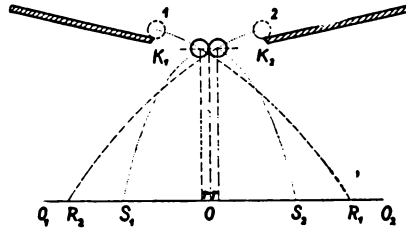
$$k_{ka} = \frac{v}{V} = \frac{t}{T} = \frac{d}{2D} = k_a, \quad (9)$$

který můžeme pokládat za výraz pro dynamickou pružnost desky. Neliší se mnoho od její vzpruživosti e_a , pro kterou snadno odvodíme přibližný výraz

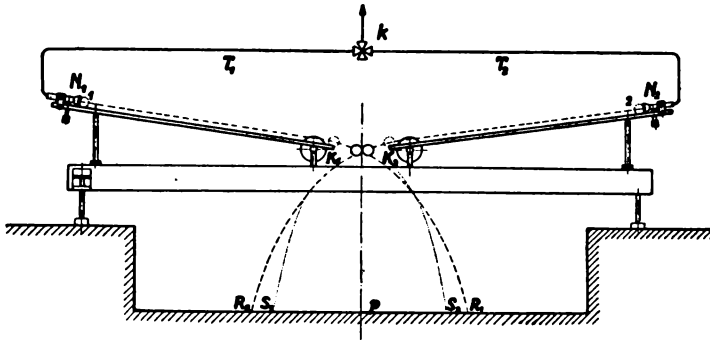
$$e_a \approx k_a - \frac{E_a}{E_k} (e_k - k_a). \quad (10)$$

Metodu valené koule je možno upravit také pro měření koefficientu restituce při rázu dvou koulí. Vyložíme její princip na případu dvou stejně velkých a stejně těžkých koulí. Představme si (obr. 43,2), že dvě stejně koule 1 a 2 jsou vypuštěny současně ve stejné výšce na přímé, stejně skloněné dráhy, po nichž se valí beze smyku. Dospějí tedy obě zároveň na koncové hrany K_1 a K_2 obou

drah, od nichž pokračují po parabolických drahách až do okamžiku srážky, k níž dojde v jisté výšce uprostřed mezi oběma hranami K_1 a K_2 . Při dokonalé souměrnosti obou pohybů mají obě koule také stejné rotace, takže při rázu vzniknou jen vodorovné nárazové síly, kolmé k společné tečné rovině obou koulí. Proto se svislé složky rychlostí koulí nárazem nezmění, kdežto vodorovné složky se zmenší v poměru daném koeficientem restituce k_{12} . Z toho plyne, že srážka koulí nebude mít vliv na dobu jejich pádu na libovolnou vodorovnou rovinu $\overline{O_1O_2}$ a že vzdálenosti míst dopadu na tuto rovinu jsou úměrné vodorovné



Obr. 43,2. Úprava metody valené koule pro měření vzpruživosti koulí.



Obr. 43,3. Přístroj na měření vzpruživosti koulí.

složce jejich rychlostí. Označíme-li tedy R_1, R_2 místa, kam by obě koule dopadly, kdyby si ve svých pohybech nepřekážely, a S_1, S_2 místa jejich dopadu po srážce, bude podle obr. 43,2 poměr vzdáleností

$$\frac{OS_2 - r}{OR_1 + r} = \frac{OS_1 - r}{OR_2 + r} = \frac{S_1S_2 - 2r}{R_1R_2 + 2r}$$

roven poměru vodorovné rychlosti obou koulí po rázu k vodorovné rychlosti před rázem. Pro koeficient restituce dostáváme tak jednoduchý vzorec:

$$k_{12} = \frac{l - 2r}{L - 2r}, \quad (11)$$

kde $2r$ je průměr obou (stejně velkých) koulí, L — vzdálenost jejich bodů dopadu do libovolné vodorovné roviny beze srážky a l — vzdálenost jejich bodů dopadu do téže roviny po srážce.

Snadno se přesvědčíme, že jednoduchý vzorec (11) zůstává v platnosti, i když jsou koule nestejně těžké (ale ovšem stejně velké). Různost jejich hmot se projeví jen tím, že místa dopadu S_1 a S_2 se posunou na stranu lehčí koule, při čemž se vzdálenost l nezmění.

I v tomto případě dává měření s dobře vyrobenými koulemi velmi přesné výsledky, je-li konstrukcí přístroje zaručena souměrnost a hlavně současnost pohybů obou koulí. Velmi dokonalé současnosti lze dosáhnout pneumatickým vypouštěním koulí, které je schematicky naznačeno na obr. 43,3.

Metoda valené koule je velmi pohodlná, ale vyžaduje zvláště v tomto druhém případě pečlivou přípravu přístroje a co nejpřesněji vyrobené koule. I při větším rozptylu bodů dopadu lze však dosáhnout vysoké přesnosti, protože měření je velmi rychlé a lze je mnohokrát opakovat v dosti krátké době.

44. SOUČINITEL SMYKOVÉHO TŘENÍ¹⁾

Definice. Statický součinitel (koeficient) smykového tření μ_0 je poměr tečné síly T_0 , která právě stačí uvést do relativního pohybu dvě tělesa, jež jsou tlačena kolmo k sobě normálnou silou N , k této síle:

$$\mu_0 = T_0/N. \quad (1)$$

Kinetický součinitel (koeficient) smykového tření μ je poměr tečné síly T , která právě stačí udržovat těleso v rovnoměrném relativním pohybu po povrchu jiného tělesa, k normální síle N mezi tělesy:

$$\mu = T/N. \quad (2)$$

Jednotky. Součinitel tření je bezrozměrné číslo, tedy $[\mu] = 1$. Definice (1) předpokládá všude stejné povrchy a rovnoměrné rozložení tlaku po styčné ploše. Vyjádříme-li však tlak na malou plošku jako součin kolmého napětí σ a její velikosti dS a vyjádříme-li i výslednou tečnou sílu tření tečným napětím τ , bude

$$\mu = \frac{\tau dS}{\sigma dS} = \frac{\tau}{\sigma}.$$

Podle *Coulombových* zákonů (potvrzených *Morrimem*) je součinitel tření nezávislý na tlaku a na teplotě a v jistých mezích nezávisí ani na rychlosti. Při obvyklém stavu povrchů se však zřetelně liší statický součinitel (za klidu) od součinitele kinetického (za pohybu). Statický součinitel μ_0 je pravidelně větší než kinetický.

Přístroje. Součinitele tření měříme tím, že odpor tření hledíme právě vyrovnat silou známé velikosti. Že jsou obě síly v rovnováze, poznáme podle toho, že těleso koná rovnoměrný přímočarý pohyb podle *zákona setrvačnosti*. Přístroje, kterými součinitele tření měříme, nazývají se *tribometry*. Užívá se hlavně dvou druhů:

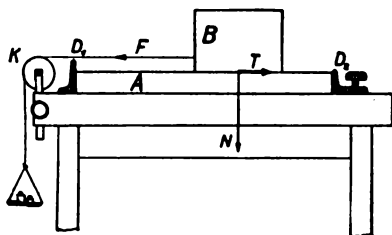
Tribometr vodorovný (obr. 44,1) je stolek s pevnou vodorovnou deskou, opatřenou dvěma dorazy (pevným D_1 a posuvným D_2), mezi něž se upíná jedno ze třecích těles ve tvaru desky A . Po straně má stolek kladku K , nastavitelnou

44,I

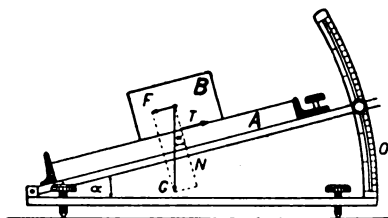
44¹⁾ O tření valivém a vrtném viz bližší v TF 2.7.2 a 2.7.3.

do různých výšek, přes kterou se vede výřezem v D_1 drát (motouz), který na těleso B , spočívající spodní rovinnou stěnou na desce A , působí vodorovnou silou F , rovnou váze misky se závažím.

44,II Tribometr sklonný (obr.44,2) má základní desku k upínání tělesa A sklonnou kolem vodorovné osy; její sklon k vodorovné rovině se měří na děleném oblouku O nebo sklonoměrem [33, V; VI]. Druhé těleso B se klade na A podobně jako u [44, I].



Obr. 44,1. Vodorovný tribometr.



Obr. 44,2. Sklonný tribometr.

MĚŘICÍ METODY

44.1. Měření kinetického součinitele tření vodorovným tribometrem

Měření vodorovným tribometrem [44, I] zakládá se na poznatku, že síla F ruší odpor tření T , jestliže za jejího působení koná těleso B rovnoměrný pohyb, do kterého je uvedeme slabým nárazem ve směru F . Kolmý tlak N je dán vahou tělesa B . Je-li tedy M hmota tělesa B a m hmota misky se závažím, bude podle (2)

$$\mu = \frac{m}{M} \quad (3)$$

Potřeby: Tribometr [44, I], sada závaží.

Postup

1. Desku A upneme mezi oba dorazy.
2. Těleso B položíme na A a připevníme k němu — co nejblíže⁴⁾ spodní základně — drát s miskou vedený přes kladku.
3. Výšku kladky upravíme tak, aby drát táhl těleso B rovnoběžně s deskou A .
4. Těleso B uvedeme malým nárazem zezadu do pohybu. Zastaví-li se při prázdné misce, přidáváme postupně závaží jako při vážení, počínajíc nejtěžším, až zjistíme, že postrčením se těleso uvede do rovnoměrného pohybu, v němž setrvá. Rychlost pohybu odhadneme.
5. Nepodaří-li se to dosti přesně, určíme dvě hodnoty hmoty m — jednu pro pohyb nejméně zpožděný, druhou pro pohyb nejméně zrychlený — a vezmeme z nich střed (jsou-li oba pohyby přibližně stejně odchylné od rovnoměrného).
6. Zvážíme těleso B na praktikantských nebo hrubších vahách, ale výsledek M neopravujeme na vztlak. Ani oprava na nerovnoramennost vah není nutná vzhledem k malé přesnosti metody.
7. Doporučuje se provést měření při různých velikostech kolmého tlaku tak, že zatěžujeme horní plochu tělesa B různými závažími.
8. Kinetického součinitele tření μ vypočteme z (3).

44²⁾ Jde o to, aby síly F a T působily co možno v téže vodorovné přímce, aby dvojice jimi tvořená byla malá a bylo možno pominout nestejnost kolmého tlaku v různých místech styčné plochy. Lze toho dosáhnout na př. jednoduchým „jhem“ ze silnějšího drátu, které nasadíme na B a jehož hmotu ovšem přičteme k M .

44.2. Měření kinetického součinitele tření sklonným tribometrem

Tímto přístrojem [44, II] se měří t. zv. *úhel tření* (neboli torný úhel) α , definovaný vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu. \quad (4)$$

Z obr. 44,2 vidíme, že tento úhel je dán sklonem roviny, po níž se těleso vlastní vahou pohybuje rovnoměrně. Složka váhy tělesa B je totiž v tomto případě (až na znaménko) rovna síle tření:

$$F_t = F \sin \alpha = T$$

a kolmý tlak $N = F \cos \alpha$, takže

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N} = \mu.$$

Rozeznává se úhel kinetického tření α a úhel statického tření α_0 , který je zpravidla větší. Je to poloviční vrcholový úhel kužele a uvnitř něho leží směry sil, které nezpůsobují smyk drsných těles.

Potřeby: Sklonný tribometr [44, II], libela [33, III] nebo sklonoměr [33, V; VI], event. několik závaží.

Postup

1. Upneme desku A na sklonnou desku přístroje v nulové poloze, kterou stavěcími šrouby upravíme tak, aby byla vodorovná. Pak na desku A položíme těleso B , jehož těžiště má být co nejblíže styčné ploše, aby dvojice sil T , F_t byla co nejmenší [srov. poznámku¹⁾].

2. Při malém sklonu desky udělíme B slabý náraz. Zastaví-li se, opakujeme pokus tak dlouho, zvyšující sklon, až těleso po nárazu pokračuje v rovnoměrném pohybu. Je-li třeba, najdeme dva sklony pro mírně zpožděný a pro mírně zrychlený pohyb, z nichž vezmeme střed.

3. Sklon α měříme na děleném oblouku přístroje a při každém čtení musíme ovšem ověřit vodorovný směr desky v nulové poloze; měříme-li úhel α sklonoměrem, není toho třeba.

4. Váhu tělesa B je nutno znát jen k určení tlaku, při němž měříme součinitele tření. Doporučuje se měření opakovat pro různé tlaky tak, že těleso B zatěžujeme různými závažími. Také je vhodné zaznamenat aspoň přibližnou rychlost pohybu.

5. Kinetického součinitele tření μ vypočteme z (4).

45. VAZKOST (VISKOSITA)

Definice. Vazkost (viskosita, součinitel vnitřního tření) η je poměr tečného napětí, působícího ve směru pohybu prostředí, k velikosti kolmé rychlostního spádu (obr. 45,1):

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}. \quad (1)$$

Tečné napětí τ je tečná síla, působící ve směru rychlosti prostředí na malou plochu rovnoběžnou s rychlostí, dělená velikostí této plochy. Kolmý *rychlostní spád* je záporně vzatý *gradient (stoupání)* rychlosti, měřený ve směru kolmém k rychlosti. Jeho velikost je rovna derivaci rychlosti v ve směru n největšího spádu rychlosti.¹⁾

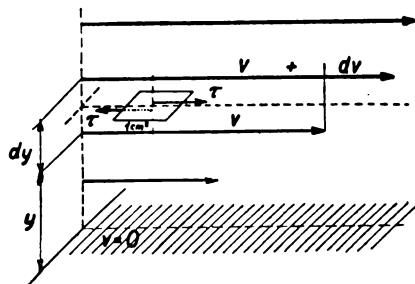
45 ¹⁾ TF 2.9.18.

Jednotky. MKSA

$$[\eta] = \text{N s m}^{-2} = 10 \text{ poise} = 0,102 [\eta]_t. \quad (2)$$

Absolutní jednotka

$$[\eta]_a = \text{poise} = \text{P} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} : \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = \text{cm}^{-1} \text{ g s}^{-1}. \quad (2')$$



Obr. 45,1. Vnitřní tření.

Praktická jednotka

$$[\eta]_p = \text{centipoise} = \text{cP} = \frac{\text{P}}{100} = \frac{\text{poise}}{100}.$$

Technická jednotka

$$[\eta]_t = \text{kg}^* \text{ s m}^{-2} = 98,07 \text{ poise}. \quad (3)$$

Rovnicí (1) definovaná vazkost se nazývá *dynamická vazkost*, aby se odlišila od *vazkosti kinematické* ν , což je vazkost dynamická dělená hustotou ρ prostředí:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (4)$$

Její jednotka MKSA $[\nu] = \text{m}^2 \text{ s}^{-1} = [\mu]_t = 10^4 \text{ stok}$;

absolutní jednotka

$$[\nu]_a = \text{stok} = \text{St} = \frac{\text{cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}} = \text{cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (5)$$

a technická jednotka

$$[\nu]_t = \text{m}^2 \text{ s}^{-1} = 10^4 \text{ stok} = 10^6 \text{ centistok}.$$

V praxi se často kinematická vazkost kapalin, zvláště olejů, měří v jednotkách, které jsou různé v různých zemích. Ve střední Evropě jsou nejobvyklejší t. zv. *Englerovy stupně* (viz 45.3). Z vazkosti E v Englerových stupních lze počítat ν v absolutních jednotkách podle vzorce (Vogel 1922)

$$\nu \text{ stok} = \frac{E}{100} \cdot 7,6 \left(1 - \frac{1}{E^2}\right). \quad (6)$$

V Anglii se kinematická vazkost vyjadřuje *vteřinovým číslem Redwoodovým R* a v Americe *vteřinovým číslem Sayboltovým S*. Uvedené jednotky se vztahují k technickým vazkoměrům [45, IV; V; VI], obvyklým v těchto zemích, a jejich vztah k absolutní jednotce je dán číselnou tabulkou T, XIII. Pro dosti vazké kapaliny (oleje) — o větší vazkosti než půl stoku — mezi všemi těmito jednotkami platí dosti přesně úměrnost. Také se někdy zavádí poměrná vazkost (relativní viskozita), což je poměr η k vazkosti vody stejné teploty.

Přístroje

Vazkost je pro plyny a většinu kapalin hodnota nezávislá na rychlostním spádu. Toliko některé koloidy, suspence nebo emulze chovají se anomálně, neboť jejich vazkost je závislá na rychlostním spádu. Vazkost pevných těles nabývá velmi značných hodnot (10^8 — 10^{15} poisů); vazkost kapalin je většinou řádu 1 centipoise, ale může dosáhnout až několika set poisů; vazkost plynů má hodnoty několika setin poise. Kinematická vazkost plynů může však mít vzhledem k jejich malé hustotě větší hodnotu než pro kapaliny (na př. pro vodu při 20,2 °C je $\mu = 1$ centistok a pro vzduch $\mu = 15$ centistoků). Vazkost všech látek je velmi závislá na teplotě; u látek pevných a u kapalin značně klesá se stoupající teplotou, kdežto vazkost plynů naopak s teplotou roste. K měření vazkosti byl sestaven velký počet přístrojů rozmanitých druhů, které nazýváme *viskosimetry* neboli *vazkoměry*.

Než přistoupíme k jejich popisu, upozorníme na základní podmínku, která musí být splněna při měření vazkosti. Proudění kapaliny nebo plynu musí být *laminární*, což značí, že nesmějí vznikat víry (turbulence).²⁾ Z theorie proudění plyne, že proudění kapaliny (plynu) hustoty ρ a vazkosti η v mezeře šířky d je laminární, jestliže střední rychlost u nepřekročí hodnotu danou zhruba podmínkou

$$R = \frac{d\rho u}{\eta} < 2000, \quad (7)$$

kde R je bezrozměrné číslo *Reynoldsovo*. Proto je třeba rozměry měřicích přístrojů a rychlost měřené kapaliny volit tak, aby podmínka (7) byla bezpečně splněna, aby tedy R mělo hodnotu podstatně nižší než 2000.

Vazkoměry lze rozdělit na tři základní skupiny: *výtokové, rotační a tělískové*.

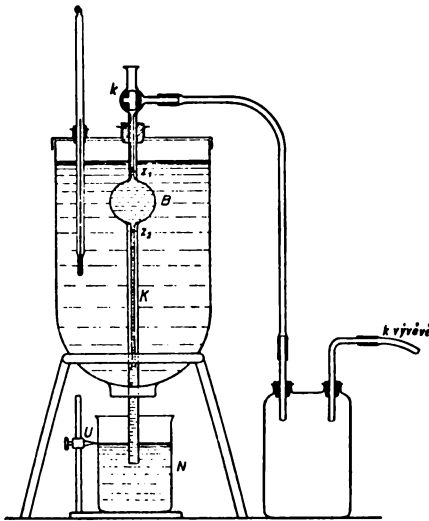
1. *Výtokové vazkoměry* jsou založeny na vztahu mezi objemem, který projde při daném přetlaku danou trubici za jednotku doby, a mezi vazkostí kapaliny. Aby byla splněna podmínka (7) laminárního proudění, je třeba pro *málo vazké kapaliny* použít velmi úzké trubice kapilární (vláskové). Takové přístroje se nazývají *kapilární vazkoměry*.

Nejjednodušší z kapilárních vazkoměrů je vazkoměr *Arrheniův*, který lze snadno v laboratoři pořídit ve tvaru naznačeném na obr. 45,2. Měřená kapalina se nassaje vodní vývěvou z nádoby N , naplněné do výše ukazatele U , kapilárou K do baňky B až po hořejší značku z_1 . Nato se trojcestným kohoutem k (srov. obr. 37,2) spojí prostor trubice nad značkou z_1 s vnějším prostorem, takže kapalina vytéká vlastní vahou z B kapilárou K do nádoby N . Přitom musí být spodní okraj trubice stále pod hladinou kapaliny v N . Přístrojem se měří kinematická nebo poměrná vazkost způsobem popsáním v 45.1.

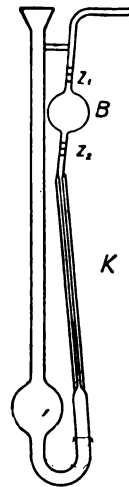
45,1

45 ²⁾ TF 2.9.19.

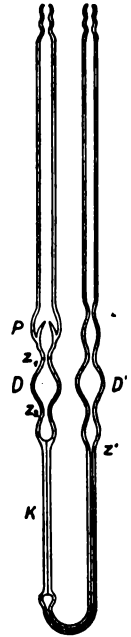
45,II Ostwaldův kapilární vazkoměr je skleněný přístroj tvaru vyznačeného na obr. 45,3. Do levé trubice se nalije několik kubických centimetrů měřené kapaliny (vždy stejný objem), která se nassaje hadičkou nasazenou k hořejšímu otvoru pravé trubice až k hořejší značce z_1 baňky B . Nato se nechá vlastní vahou vytéci kapilárou K objem mezi značkami z_1 a z_2 . Tento vazkoměr je vhodný pro měření poměrné kinematičké viskosity. Pro absolutní měření musí být cejchován kapalinami známé vazkosti, jak vyložíme v 45.I.



Obr. 45,2. Arrheniův vazkoměr.



Obr. 45,3. Ostwaldův vazkoměr.



Obr. 45,4. Kapilární vazkoměr Ubbelohde-Binghamův

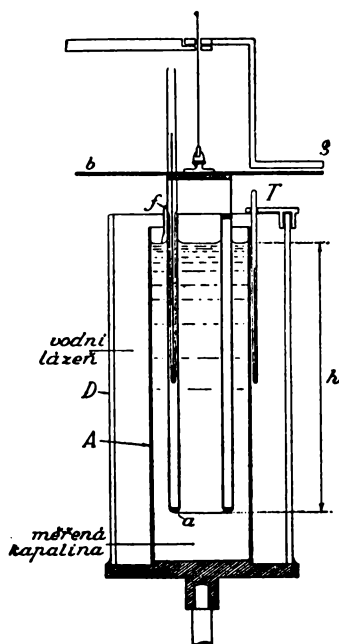
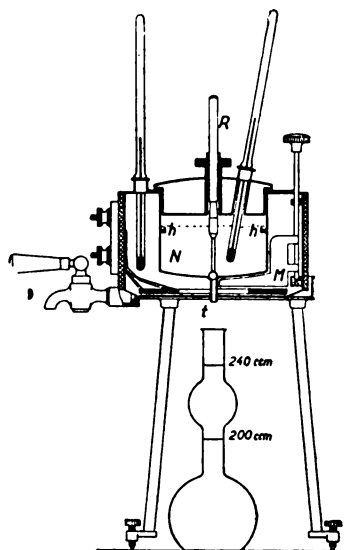
45,III Ubbelohdeův kapilární vazkoměr je znázorněn na obr. 45,4 v úpravě Binghamově. Naplní se měřenou kapalinou tak, aby vyplňovala spodní část trubice až nad nejširší místo dutin D , D' a pak se nassaje až ke značce z' ; část kapaliny se zachytí přepadem P , který tak odměří vždy stejný objem kapaliny. Přístroj má takové rozměry, že při poklesu hladiny od značky z_1 k z_2 vystoupí kapalina v druhém rameni právě do výše přepadu P , takže prochází kapilárou K pod tlakem, který je nejprve o hydrostatický tlak kapaliny větší, potom o touž hodnotu menší než stálý vnější přetlak. Tím se vyloučí vliv hustoty kapaliny a přístroj měří tedy dynamickou viskositu.

Pro velmi vazké kapaliny není třeba dlouhých a úzkých kapilár, jimiž by ostatně výtok trval příliš dlouho. To platí zvláště pro oleje, k jejichž měření bylo sestrojeno několik typů technických vazkoměrů. Ve střední Evropě je to nejužívanější Englerův vazkoměr, který je v řezu znázorněn na obr. 45,5. Je to válcová, plechová nádoba N (uvnitř zlacená) průměru 106 cm, s výtokovou trubičkou t , dlouhou 20 mm a mírně se zužující z průměru 2,9 mm na 2,8 mm; shora je trubička uzavřena tyčinkou R ukončenou kuželovým hrotem nebo kuličkou. Nádoba N je obklopena lázní, kterou lze elektricky vyhřát na žádanou teplotu. Měřená kapalina se nalije do N v takovém množství (240 cm³), aby sahala ke třem hrotům h na stěně nádoby, a měří se doba od vytažení

45,IV

tyčinky do okamžiku, kdy vyteče 200 cm³ kapaliny. Teplota se měří v kapalině i v lázni, k jejíž stejnoměrnosti přispívá míchačka *M*. Způsob měření je uveden v 45.3.

Podobně jako Englerův je konstruován výtokový viskosimetr Redwoodův, 45,V kterého se všeobecně používá v Anglii k měření vazkosti olejů. Jako míra vazkosti se uvádí prostě *vteřinové číslo Redwoodovo*, t. j. doba výtoku předepsaného objemu oleje, vyjádřená ve vteřinách. Stejným způsobem se měří



Obr. 45,5. Englerův technický vazkoměr.

Obr. 45,6. Technický rotační vazkoměr.

vazkosti olejů na *vazkoměru Sayboltově*, který je běžný v Americe. *Vteřinové číslo Sayboltovo* má obdobný význam jako předešlé číslo a vztah obou k absolutní jednotce je dán číselnou tabulkou *T, XIII*. Závislost přechází v úměrnost teprve pro viskosnější kapaliny ($\nu > 0,5$ St).

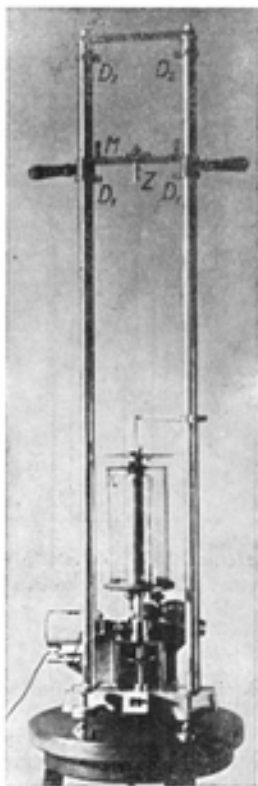
2. Rotační vazkoměry jsou přístroje, jimiž se určuje vazkost kapalin a plynů na základě odporu, který kladou otáčivému pohybu vhodně volených těles. Mohou být založeny na př. na měření útlumu torsních kmitů, které koná kruhový kotouč, koule nebo válec zavěšený v kapalině nebo duté těleso (uvedených tvarů), obsahující zkoušenou kapalinu. Nyní se dává přednost rotačním vazkoměrům, zavedeným *Coulettem* (1890), v nichž se měří tření kapaliny mezi nehybnou a rotující plochou, zpravidla válcovou. Tyto přístroje — obecně méně přesné než vazkoměry kapilární — jsou vhodné pro velmi vazké a zvláště *anomální kapaliny* (koloidy, suspence) nebo taveniny. K měření vazkosti koloidů sestrojil *Hatschek* (1910) *rotační viskosimetr torsní*. Je to v podstatě dutý válec, naplněný zkoušenou kapalinou, který se rovnoměrně otáčí kolem své svislé osy. Do kapaliny je na ocelovém drátě zavěšen soustředný válec, který se účinkem rotace kapaliny stočí o jistý úhel φ , úměrný podle 42(19) dvojici *D*,

45, VII

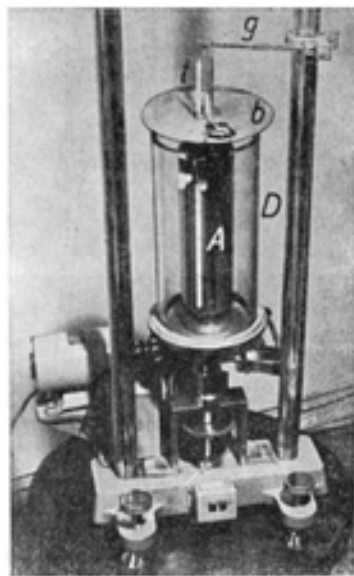
kerou naň působí kapalina. Tato dvojice je však úměrná otáčivé rychlosti vnějšího válce a vazkosti kapaliny. Při dané rychlosti je tedy úhlová výchylka visutého válce, která se měří zrcátkovou methodou, úměrná vazkosti.³⁾

45, VIII K různým zvláštním účelům byla sestrojena řada technických rotačních viskosimetrů. Popíšeme podrobněji technický rotační vazkoměr sestrojený (1938) na Českém vysokém učení technickém,⁴⁾ kterým lze konat absolutní

měření vazkosti prakticky všech kapalin (kromě rtuti) a který se zvláště hodí k zjišťování teplotních křivek. Snímky 45,7; 8 podávají celkový pohled, obrázek 45,6 schema vlastní měřicí části přístroje.



Obr. 45,7. Horákův technický vazkoměr rotační, celkový pohled.



Obr. 45,8. Vlastní měřicí zařízení vazkoměru.

V základní litinové desce, nesené třemi stavěcími šrouby, jsou zašroubovány dvě svislé ocelové trubky, vysoké 150 cm a nahoře spojené mosaznou příčkou. Na trubkách se posouvá mosazný můstek M mezi dolními dorazy D_1 , na nichž spočívá vlastní vahou, a mezi horními dorazy D_2 , kde je držen pružinami, kterými se při vysunutí přichytí. Můstek nese uprostřed závěs Z se svorkou na sevření drátu, kterou je možno v rozsahu asi 10 mm posouvat dopředu a dozadu, nalevo a napravo, nahoru a dolů. To umožňuje přesně centrovat válec visící na drátě a upravovat hloubku h jeho ponoru. Tento válec a , vysoký 21,5 cm, nahoře i dole otevřený, je zhotoven ze dvou mosazných a poniklova-

45 ³⁾ Bližší viz na př. [20]. Bd. IV, 4, 1932.

45 ⁴⁾ Viz [63].

ných trubic se stěnami tlustými 1 mm. Jeho vnější poloměr $r_1 = 2,50$ cm, vnitřní $r'_1 = 1,90$ cm, takže dutina vzniklá mezi oběma pláště má šířku 4 mm. Dutina je nahoře i dole zcela uzavřena až na malý kruhový otvor, kterým lze shora prostrčit do dutiny teploměr t , jehož nádobka je vzdálena 10 cm od spodního okraje válce a . Na válec je shora našroubován souosý hliníkový kotouč b (tloušťka 1 mm, průměr 16 cm), dělený na horní ploše na stupně. Stočení válce a určuje ukazatel g , jehož dutou osou drát prochází a který lze přibližně nastavit na nulu děleného kruhu.

Pod válcem a je umístěn druhý svislý válec A z mosazného plechu, poniklovaný, s vnitřním poloměrem $r_2 = 3,40$ cm a výškou 24,7 cm, který je obklopen souosým skleněným válcem D s vodní lázní, jejíž teplotu měříme teploměrem T těsně u stěny válce A . Tento válec i s lázní je nasazen na svislou osu, poháněnou synchronním motórkem. Soustavou ozubených kol je možno dát válci celkem 12 různých rychlostí, při nichž koná

	7,2	9	10,8	13,8	16,2	18 ot/min
nebo	24	30	36	45	54	60 ot/min.

Vazkoměr pojme asi 670 cm³ měřené kapaliny. Zjištění konstant přístroje a měřicí postup jsou podrobně uvedeny v 45.4.

Popsaný přístroj byl konstruován jako universální technický vazkoměr, vhodný i pro měření nehomogenních kapalin. Proto byla dutina mezi válci zvolena široká (9 mm) a ostatní části přístroje jsou tak dimensovány, aby nebylo třeba přihlížet k t. zv. *koncovému vlivu* (viz 45.4).

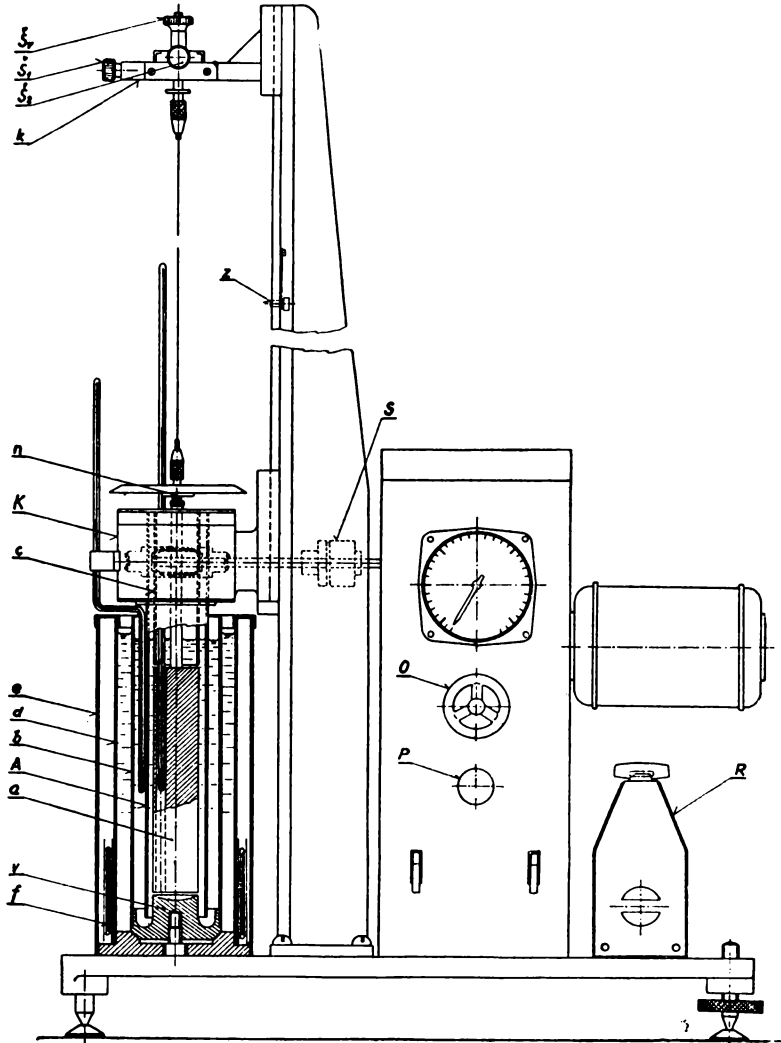
To má nevýhodu, že je třeba dosti velkého množství měřené kapaliny. Kromě toho se lázeň s teploměrem při měření otáčí, což znesnadňuje přesněji temperovat měřenou kapalinu, zvláště na nízké nebo vysoké teploty. Proto byl přístroj později rekonstruován⁵⁾ tak, jak jej vidíme z obr. 45.9. Ocelová trubka A průměru 40/38 mm, vně i uvnitř pochromovaná, která se otáčí, a souose zavěšený mosazný válec a o průměru 30 mm a výšce 150 mm, rovněž pochromovaný, jsou ponořeny do nádoby b obsahu ca 220 cm³; v nádobě b je kapalina, jejíž viskozitu měříme. Trubka A je uložena ve dvou kuličkových ložiskách v konsole K a je uváděna do rotace poháněcím zařízením prostřednictvím výsuvné spojky s , šroubu a šroubového kola. Šroubové kolo, vyrobené z umělé hmoty (novotexu), je upevněno na trubce A mezi oběma ložisky. Mosazný šroub je naklínován na hřídeli nesoucím na konci kotouček spojky. Převodový poměr tohoto soukolí je 1 : 30.

Na základové desce je čtyřmi šrouby upevněn železný stojan profilu T , opatřený rybinovitým vedením, po němž se dá duralová konsola K při sestavování nebo rozebírání přístroje posouvat. Ve své dolní poloze (při měření) je pevně fixována přítužným šroubem. Závěsný válec a je opatřen kotoučem s úhlovou stupnicí n , dělenou od 0° do 180° v obou smyslech otáčení. Kotouč lze snadno uvolnit prostřednictvím bajonetového uzávěru. Jak vidíme z obr. 45.9, je těleso válce a opatřeno vyvrtanou dutinou pro vložení teploměru. Válec visí na ocelovém drátu, jehož jedna koncovka (připájený mosazný váleček průměru 3 mm) je sevřena šroubovou svěrkou nad děleným kruhem. Druhá koncovka drátu je sevřena podobnou svěrkou závěsného zařízení, připevněného na konsole k . Tato konsola je zasunuta na rybinovité vedení stojanu v jeho horní

45 ⁵⁾ Viz [64].

části a ve své poloze upevněna dvěma přítužnými šrouby. Vlastním závěsným zařízením je trojosý křížový stolek, umožňující jednak centrování válce *a*, tak aby byl souosý s rotujícím válcem *A*, jednak jeho výškové nastavení.

Při konstrukci přístroje byla snaha odstranit vliv konečné délky válce *a*. Dno nádoby s měřenou kapalinou má válcovitý výstupek *v* stejného průměru



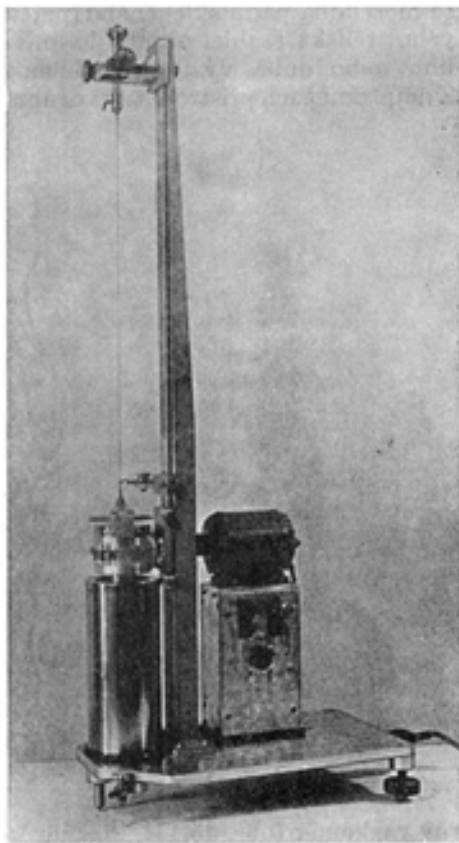
Obr. 45.9. Schema technického rotačního vazkoměru s odstraněným koncovým vlivem.

jako válec *a*, takže mezi válcem a výstupkem je malá mezera. Účelem výstupku je zabránit unášení kapaliny v mezeře a jejímu působení na dno válce *a*. Podobně je odstraněn vliv kapaliny na hořejší základnu visícího válce. Otáčení kapaliny nad hořejší základnu válce *a* je zamezeno souosou trubicí *c* s přírubou a přišroubovanou k tělesu konsoly dvěma šroubky. Nádobka *b* je vytvořena z mosazné trubky a ze zmíněného mosazného dna; jeho tvar je vidět

z obr. 45,9. Ve své poloze je zajištěna šroubem a je opřena v konickém sedle, zaručujícím vždy centrickou polohu. Je ji možno vyjmout, aby se do ní pohodlně dala nalít měřená kapalina a aby se dobře čistila. Měřená kapalina je obklopena lázní a lze ji temperovat v rozsahu od -20° do 100°C . Podle požadované teploty se tedy použije lázně lihové, vodní, olejové nebo glycerinové. Lázeň je vyhřívána topným tělískem f , umístěným těsně na vnější ploše nádoby d . Topné tělísko se skládá z odporového pásku navinutého na slídové destičky, které jsou ohnuty do válcových ploch, opět slídou izolovány a přitisknuty k trubce d . Celý válec d je pak izolován asbestovou tkaninou a zakryt měděným válcem e . Teplotu měřené kapaliny měříme v její střední výšce jednak lomeným teploměrem, jehož nádoba je těsně při vnější stěně trubky A , jednak teploměrem vsunutým do dutiny visícího válce a . Index je v jistých mezích posuvný tak, aby se dal nastavit na nulu kruhové stupnice.

Touto konstrukcí, při níž je vnější válec s lázní v klidu, je zároveň dána možnost temperovat měřenou kapalinu proudící tekutinou, která se přivádí trubkami připevněnými k vnějšímu plášti lázně. Uživeme-li na př. známého *Hoepplerova* ultrathermostatu, můžeme provádět měření i při nižších teplotách.

Hnací ústrojí se skládá z elektromotoru a třístupňové rychlostní skřínky. Motor je synchronní, jednofázový, s náběhovým kondensátorem, o výkonu 25 W a 3000 ot/min. Převodové soukolí rychlostní skříně se skládá z čelních ozubených kol z mosazi a umělé hmoty (novotexu). Jednotlivé převodové poměry (i se šroubovým soukolím v konsoli K) jsou 1/500, 1/228, 1/108, takže má-li motor 3000 ot/min, bude rychlosti I válce A odpovídat 6 ot/min, rychlosti II 13,2 ot/min a rychlosti III 27,8 ot/min. Otáčky motoru se kontrolují (vzhledem ke kolísání frekvence sítě) magnetickým otáčkoměrem, umístěným na čelní stěně rychlostní skřínky. Jednotlivé rychlosti se řadí otáčením ručního kolečka O pod otáčkoměrem, čímž se přesunují ozubená kola na předlohovém hřídeli. Smysl otáčení motoru se mění zatlačením nebo vytažením rukojeti P , která ovládá jednak přepínač motoru, jednak vratný náhon otáčkoměru, vytvořený ze tří kuželových ozubených kol. V dolní části rychlostní skřínky je umístěn kondensátor a vypínače motoru i topného proudu. Na základové desce přístroje je též umístěn reostat R , seriově zapojený v okruhu topení, jímž se



Obr. 45,10. Snímek rotačního vazkoměru 45,9.

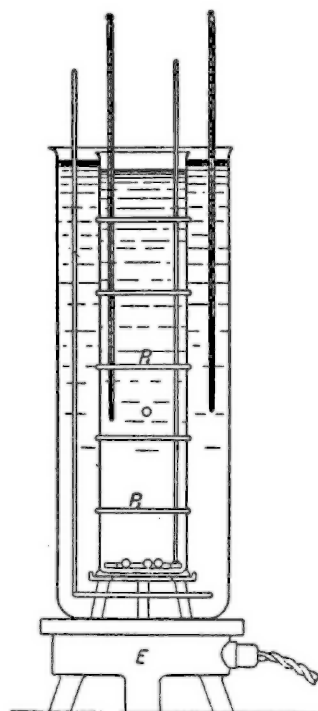
reguluje teplota lázně nebo měřené kapaliny. Postup měření je podrobně popsán v citovaném článku.⁶⁾

3. Tělískové vazkoměry jsou zařízeny pro měření rychlosti pohybu vhodně voleného tělíška ve zkoumané kapalině, z které se počítá vazkost buď podle *Stokesova* vzorce (27), nebo z empiricky odvozených vztahů, jde-li o pohyb, pro který Stokesův vzorec neplatí dosti přesně. Pro praktickou potřebu byly sestrojeny různé viskosimetry, u nichž se měří doba pádu skleněného (nejčastěji válcového) tělíška trubicí obsahující měřenou kapalinu nebo doba výstupu vzduchové bubliny.

45,IX Z nejpřesnějších přístrojů toho druhu je *Hoepple-*



Obr. 45,11. *Hoepple*ův vazkoměr tělískový.



Obr. 45,12. *Stokes*ův vazkoměr.

rův vazkoměr (obr. 45,11), kterým lze měřit s přesností asi $\frac{3}{4}\%$. Pro fyzikální měření lze však improvizovat měřicí přístroj, který při své jednoduchosti dává pro dosti viskosní kapaliny (oleje) uspokojivé výsledky, a to v míře absolutní. Je to *Stokesův* vazkoměr, naznačený schematicky na obr. 45,12. Skleněný válec má dva prstence P_1 , P_2 , z nichž aspoň horní má být posuvný, nebo řadu od sebe stejně vzdálených prstenců. Měří se doba pádu kuličky (hustší než kapalina) mezi dvěma prstenci, jejichž vzdálenost vhodně volíme podle rychlosti pádu. Vazkost kapaliny dá se jen tehdy dosti přesně vypočítat ze *Stokesova* vzorce (28), je-li pohyb mezi oběma prstenci prakticky rovnoměrný, o čemž se přesvědčíme, opakujeme-li měření doby pádu při snížené poloze horního prstence nebo mezi dvěma nižšími prstenci.

45,X

45 ⁶⁾ Viz [64].

MĚŘICÍ METHODY

Tento přehled hlavních druhů vazkoměrů dává zároveň přehled měřicích method. Proto přistoupíme ihned k podrobnému popisu jednotlivých method, ale omezíme se jen na měření vazkosti kapalin.

45.1. Měření vazkoměrem Arrheniovým a Ostwaldovým

Základem všech měření výtokovými a zvláště kapilárními vazkoměry je *Poiseuilleův zákon*,⁷⁾ který praví, že při ustáleném laminárním proudění kapaliny vazkosti η trubici délky l stálého poloměru r projde za přetlaku p průřezem trubice za dobu τ objem kapaliny

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{p}{l} \tau. \quad (8)$$

Tento vzorec neplatí však při skutečném proudění pro celou kapiláru, neboť kapalina vnikuvší různými směry do kapiláry se teprve pozvolna dostane do stavu předpokládaného teorií, k čemuž potřebuje jistou „náběhovou dráhu“. Podobný vliv má pohybová energie kapaliny vystupující z trubice, takže k výrazu, který plyne pro η výpočtem z (8), musíme připojit t. zv. *Hagenovu opravu* a dostaneme

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8V} \frac{p}{l} \tau - 1,1 \frac{\rho V}{8\pi l} \frac{1}{\tau}, \quad (9)$$

kde druhý člen je zmíněná korekce. Číselný faktor 1,1 platí jen pro dosti malé rychlosti, což je další důvod (kromě zachování laminárního proudění), abychom se při měření omezili jen na velmi malé výtokové rychlosti. Tato *Hagenova oprava* se dá vyloučit vhodným uspořádáním měření, které navrhl *Couette*, tak, že se kapalina protlačuje za sebou dvěma kapilárami stejné světlosti, ale různé délky a měří se také tlak mezi nimi. Při měření vazkoměrem Arrheniovým [45,I] i Ostwaldovým [45,II] určujeme dobu výtoku τ vždy stejného objemu V kapaliny, která přemáhá odpor kapiláry délky l svým vlastním hydrostatickým tlakem, jehož střední hodnota

$$p = h\rho g,$$

kde h je střední rozdíl obou hladin ve viskosimetru. Shrneme-li v rovnici (9) všechny veličiny dané rozměry přístroje a zrychlením g v konstanty A , B , bude

$$\eta = A\rho\tau - \frac{B\rho}{\tau}. \quad (10)$$

K určení konstant A a B je nutno změřit dobu τ pro dvě kapaliny známé viskosity (nebo pro touž kapalinu za různých teplot). Mohli bychom ovšem obě konstanty vypočítat z jejich významu, který snadno dostaneme srovnáním rovnic (9) a (10), ale byli bychom postaveni před nesnadnou úlohu kalibrovat kapiláru, jejíž poloměr je ve vzorci ve čtvrté mocnině. Pro viskosnější kapalinu je ostatně τ dosti velké a pak stačí omezit se na první člen vzorce (10). V tomto případě snadno určíme *poměrnou vazkost*:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (11)$$

značí-li index 0 veličiny pro vodu stejné teploty. Z rovnice (10) je také patrné, že Ostwaldův vazkoměr dává vlastně *kinematickou* vazkost, definovanou poměrem (4)

$$\nu = A\tau - \frac{B}{\tau}, \quad (12)$$

což platí o všech výtokových vazkoměrech, jimiž protéká kapalina vlastní vahou. Poměrná kinematická vazkost je pak dána pro kapaliny značnější vazkosti poměrem dob výtoku:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (13)$$

což platí přibližně i pro kapaliny méně vazké.

Potřeby: Vazkoměr [45,I] nebo [45,II], teplotní lázeň, stopky [21,II], přesný teploměr rtuťový, vodní vývěva.

Postup

1. Nádobku N vazkoměru [45,I] naplníme měřenou kapalinou do výše ukazatele U . Měříme-li *Ostwaldovým* vazkoměrem [45,II], naplníme jej, jak uvedeno při jeho popisu, a vložíme do teplotní lázně.

2. Nassajeme kapilárou kapalinu do baňky B až po hořejší značku z_1 . Po vyrovnání teplot změříme teplotu lázně, otevřeme kohout k , změříme stopkami dobu τ průtoku objemu mezi oběma značkami z_1 a z_2 . Pak změříme znovu teplotu.

3. Toto měření provedeme jak se zkoumanou kapalinou, tak se dvěma kapalinami známých vazkostí a hustot. Přitom je u vazkoměru [45,I] důležité, aby sahala kapalina před nassáváním vždy přesně k ukazateli; podobně do vazkoměru [45,II] musíme vpravít vždy stejný objem kapaliny (na př. pipetou [35,IV]).

4. Z průtočných dob těchto kapalin vypočteme konstanty A a B a dosazením do (12) dostaneme kinematickou vazkost dané kapaliny při průměrné teplotě lázně.

Měření teploty věnujeme obzvláštní péči, ježto vazkost závisí velmi značně na teplotě.

5. K určení dynamické vazkosti je nutno zjistit také hustotu kapaliny při teplotě měření viskosity některou methodou 36.4; 5; 6.

6. Poměrnou vazkost počítáme podle přibližných vzorců (11) nebo (13).

45.2. Měření dynamické vazkosti viskosimetrem Ubbelohdeovým

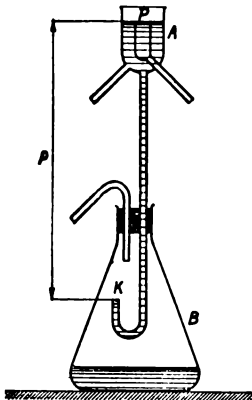
Tento přístroj [45,III], jak jsme řekli při jeho popisu, vyžaduje vnější přetlak, který je možno volit, a proto je vhodný zvláště pro kapaliny *značné vazkosti*. S výhodou volí se tento přetlak stálý, čehož se dosáhne celkem jednoduchým zařízením, patrným z výkresu 45,13. Do baňky B zasahuje vysoká trubice s nálevkou A , do níž ústí trubice od vodovodu. Stálá výše hladiny v nálevce A se udržuje přepadem P , kterým mírně odtéká přebytečná voda. Trubice v baňce je zahnuta svisle vzhůru a prostor baňky je spojen trubicí s viskosimetrem,

v němž působí na kapalinu stálý tlak p , rovný rozdílu hydrostatických tlaků mezi okrajem přepadu P a zahnutým koncem trubice v baňce.

Konstrukcí přístroje [45,III] je zaručeno, že se měří průchod vždy stejného objemu kapaliny, a použitím právě popsaného zařízení se dosáhne také stálého přetlaku p ; tedy vzorec (8) lze psát ve tvaru

$$\eta = A\tau, \quad (14)$$

kde A je konstanta měřícího zařízení. Tento výsledek



Obr. 45,13. Zařízení pro stálý tlak.

platí jen pro dosti vazké kapaliny, u nichž vzhledem k velké době průtoku můžeme pominout 2. člen v rov. (9).

Měření se provádí takto: Přístroj se naplní do poloviny dutin D a D' v obou ramenech a pak se nassaje levou trubicí tak, aby kapalina sahala v pravém rameni přesně ke značce z' ; část kapaliny přeteče přepadem P (viz obr. 45,4).

Další postup je podobný jako u 1. a 4. metody 45.1 s tím rozdílem, že tu k určení jediné konstanty A stačí měřit jednu kapalinu známé vazkosti a že dostáváme přímo *dynamickou* vazkost ze vzorce (14).

45.3. Měření vazkoměrem Englerovým

Tímto přístrojem [45,IV] měří se vazkost kinematická v t. zv. *Englerových stupních*, jejichž počet E je dán poměrem průtočné doby 200 cm³ kapaliny k průtočné době stejného objemu destilované vody teplé 20 °C (která má být 50 ÷ 52 s). Dvacetistupňová voda má tedy kinematickou vazkost rovnu $E = 1$, což odpovídá přibližně 1 cst (centistoku). Souvislost absolutních jednotek s *Englerovými* stupni je dána *Vogelovým* vzorcem (6), který pro kapaliny s kinematickou vazkostí větší než 0,5 stoku přejde v jednoduchou úměrnost

$$\nu = 0,076 E \quad (E > 7) \quad (15)$$

a podobně pro číslo *Redwoodovo* a *Sayboltovo*

$$R = 31,05 E, \quad (16)$$

$$S = 36,50 E.$$

Výpočet podle složitějšího vzorce (6) lze nahradit interpolací v tabulce T,XIII.

Potřeby: Viskosimetr [45,IV] s dvěma teploměry, baňka s vyznačenými objemy 200 cm³ a 240 cm³, stopky [21,II], destilovaná voda.

Postup

1. Do vnější nádoby přístroje nalijeme vodu, do vnitřní nádoby nalijeme (při dobře uzavřené výtokové trubicí) asi 240 cm³ destilované vody tak, aby hladina sahala ke třem hrotům. Přístroj uzavřeme shora krytem a za stálého míchání vyhřejeme obě nádoby (je-li třeba) na 20 °C.

2. Vyjmeleme rychle tyčinku z přístroje a zároveň spustíme stopky, které zastavíme v okamžiku, kdy baňka pod přístrojem obsahuje právě 200 cm³ vody. Stopky ukazují dobu τ_0 , která má být 50 ÷ 52 s.

3. Vyprázdníme vnitřní nádobu, vytřeme a vysušíme (na př. tím, že lázeň mírně zahřejeme).

4. Naplníme vnitřní nádobu měřenou kapalinou (240 cm³) až ke hrotům, uzavřeme a za stálého míchání pomalu vyhříváme na žádanou teplotu.

5. Vyčkáme, až se údaj vnitřního teploměru blíží teplotě, při které máme měřit, a zastavíme topení. Nato vysuneme tyčinku a změříme dobu τ výtoku 200 cm³ kapaliny. Během výtoku kontrolujeme teplotu kapaliny.

6. Kinematická vazkost v Englerových stupních

$$E = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

7. Dynamickou vazkost vypočteme násobením hustotou, kterou určíme některou z metod 36.4; 5; 6, a vyjádříme v poisech podle (6) nebo podle T,XIII.

Příklad. Vazkost minerálního oleje.

Nejprve byla zjištěna doba výtoku vody (20 °C) $\tau_0 = 52,0$ s. Nato byla měřena doba τ oleje při 20 °C dvakrát: $\tau_1 = 655$ s, $\tau_2 = 659$ s, střed $\tau = 657$ s. Tedy kinematičká vazkost oleje

$$E = \frac{657}{52,0} = 12,6.$$

Při 50 °C bylo naměřeno pro týž olej $\tau_1 = 228,2$ s, $\tau_2 = 227,0$ s, střed $\tau = 227,6$ s,

$$E = \frac{227,6}{52,0} = 4,38.$$

Podle (15) tedy

při 20 °C

$$\nu = 0,96 \text{ stoku}$$

a podle T, XIII

při 50 °C

$$\nu = 0,323 \text{ stoku}$$

Stejně snadno bychom výsledky přepočeti podle (16) a podle T, XIII na číslo *Redwoodovo* nebo *Sayboltovo*.

45.4. Absolutní měření technickým rotačním vazkoměrem

Jak vychází najevo z popisu přístroje [45, VIII] a z obr. 45,6, jde tu v podstatě o tření kapaliny ve válcové dutině tloušťky 9 mm mezi rotujícím válcem *A* a visutým válcem *a*. Moment, kterým kapalina působí na válec *a*, vypočteme takto: Tečné napětí mezi dvěma válcovými vrstvami kapaliny o poloměru *r* je podle (1) dáno výrazem

$$\tau = \eta \frac{dv}{dr}, \quad (17)$$

neboť v ustáleném stavu konají všechny válcové vrstvy kapaliny rovnoměrnou rotaci, mají tedy rychlost kolmou k poloměru. Otáčejí se ovšem různou úhlovou rychlostí ω , a tím právě vzniká tření. Změnou ω o $d\omega$ změní se rychlost vrstvy poloměru *r* o $dv = r d\omega$, takže rychlostní spád ve směru poloměru $\frac{dv}{dr} = r \frac{d\omega}{dr}$. Dvě sousední vrstvy výšky *h* působí na sebe podle (17) celkovým momentem

$$M = r \cdot 2 \pi r h \cdot \eta \cdot r \frac{d\omega}{dr}, \quad (18)$$

jehož velikost musí být nezávislá na poloměru *r*, neboť v ustáleném stavu otáčejí se všechny vrstvy rovnoměrně.⁴⁵⁾ Úhlové rychlosti musí tedy přibývat od vnitřního klidného válce k vnějšímu válci o úhlové rychlosti Ω tak, že *M* má stálou hodnotu. To vede podle (18) k podmínce

$$d\omega = \frac{M}{2 \pi h \eta} \frac{dr}{r^3},$$

odkud integrací

$$\omega = \frac{M}{2 \pi h \eta} \cdot \frac{-1}{2 r^2} + C.$$

⁴⁵⁾ To je možno podle 26(7) jen tehdy, když $D_0 = 0$, když tedy momenty působící na každou vrstvu s obou stran se ruší. Proto musí být moment tření *M* nezávislý na vzdálenosti vrstvy od osy otáčení.

Konstanty M a C určíme z krajových podmínek: na vnitřním válci ($r = r_1$) je $\omega = 0$ a na vnějším ($r = r_2$) je $\omega = \Omega$. Dosazením a vzájemným odečtením obou rovnic dostaneme

$$4 \pi \eta h \Omega = M \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right). \quad (19)$$

Z tohoto vztahu můžeme vypočítat η , změříme-li moment M , kterým kapalina působí na vnitřní válec a . Tento válec se ustálí v takové výchylce φ , pro kterou se moment M právě ruší torsní dvojicí D_0 , danou vztahem 42(21), tedy

$$M = -D_0 = K\varphi, \quad (20)$$

kde konstanta drátu K se vypočte podle 42(20). Výhodnější je však určit ji dynamicky na základě vztahu

$$K = \frac{\pi^2}{\tau^2} J, \quad (21)$$

který dostaneme z 42(23) a v němž τ značí dobu torsních kyvů, konaných tělesem s momentem setrvačnosti J , které je zavěšeno na drátě. Je nasnadě použit k tomu přímo válece a s děleným kruhem, jehož moment setrvačnosti určíme jednou provždy, nejlépe methodou 40.3. Vyjádříme-li ještě výchylku válce a v míře stupňové a otáčivou rychlost válce A počtem n otáček za minutu, bude

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \varphi^\circ, \quad \Omega = 2 \pi \frac{n}{60}$$

a podle (19) až (21)

$$\eta = \frac{\pi}{24} J \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{\varphi^\circ}{h \tau^2 n} = \frac{A}{h \tau^2 n} \varphi^\circ, \quad (22)$$

kde A je konstanta přístroje. Mohli bychom do ní pojmout i hloubku h ponoru válce, kterou volíme pokud možno rovnu 20,0 cm. Naproti tomu doba kyvu závisí na drátu, kterého při měření použijeme, a také počet n otoček vnějšího válce volíme podle měřené kapaliny. Jak bylo řečeno při popisu viskosimetru a v příkladu 40.3, je

$$r_1 = 2,50 \text{ cm}, \quad r_2 = 3,40 \text{ cm}, \quad J = 6212 \text{ g cm}^2,$$

což dává $A = 59,8 \text{ g}$. Vazkost kapaliny je tedy

$$\eta = \frac{59,8 \text{ g}}{\tau^2 h n} \varphi^\circ \quad (23)$$

a pro ponor $h = 20,0 \text{ cm}$ vzhledem k (2) a (3)

$$\eta = \frac{2,99}{\tau_s^2 n_{\min}} \varphi^\circ \text{ poise} = \frac{0,299}{\tau_s^2 n_{\min}} \varphi^\circ \text{ N s m}^{-2} = \frac{0,0305}{\tau_s^2 n_{\min}} \varphi^\circ \text{ kg}^* \text{ m}^{-2} \text{ s}, \quad (24)$$

značí-li τ_s dobu kyvu ve vteřinách a n_{\min} počet otáček za minutu.

Předešlé výsledky byly odvozeny za předpokladu, že rozložení rychlosti kapaliny je stejné podél celé válcové mezery. Avšak u dolního okraje zavěšeného válce se uplatňuje t. zv. koncový vliv, neboť proudění mezi válcem a dnem pozměňuje pohyb kapaliny u spodního okraje válcové mezery. Podobně je

tomu těsně pod povrchem kapaliny, který se při rotaci nakloní, avšak žádný z těchto vlivů nemění znatelně velikost dvojice sil tření a neskresluje měření, jak bylo potvrzeno pokusy. Je to pochopitelné vzhledem k tomu, že mezi spodním okrajem válce a a dnem válce A je mezera asi pětikrát větší než mezi jejich pláští, střední rychlost asi poloviční a velikost třecích ploch asi patnáctkrát menší, takže celkový odpor je jen asi 0,004 odporu mezi pláští.

Svislou polohu dáme rotační ose viskosimetru stavěcími šrouby, při čemž položíme na horní okraj válce A (nebo na planparalelní destičku) libelu buď kulovou [33,IV], nebo lépe trubkovou [33,III] (ve dvou kolmých směrech). Splynutí os obou válců A , a dosáhneme takto (obr. 45,7; 8): Mústek M s válcem vysuneme k horním dorazům a do osového otvoru ukazatele zavěsíme vodorovnou kruhovou destičku o málo menšího průměru než vnitřní průměr válce A , která je připojena k přístroji. Pak upravíme doraz ukazatele a délku jeho odklápečího ramena tak, aby úzká mezera mezi obvodem destičky a okrajem válce byla všude stejná, načež destičku odstraníme. Tím je ukazatel centrován a užijeme ho k centrování závěsu. Odklopíme ukazatele na stranu, spustíme mústek M se zavěšeným válcem a k dolním dorazům a vrátíme ukazatele do jeho správné polohy, určené dříve nastaveným dorazem. Nato posuneme závěs Z na mústku M v obou vodorovných směrech tak, aby drát procházel středem osového otvoru ukazatele, a závěs na mústku zajistíme v této poloze.

Konečně je třeba vědět, jakou nejmenší vazkost musí mít kapalina, aby proudění mezi válci bylo laminární. Dosadíme-li do podmínky (7) $d = r_2 - r_1 = 0,9$ cm a za u obvodovou rychlost vnějšího válce A při nejpomalejším otáčení ($7,2$ ot/min) $u = 2\pi r\Omega = 2\pi \cdot 3,40 \cdot \frac{7,2}{60} = 2,56$ cm/s, dostaneme podmínku $\nu = \frac{\eta}{\rho} > 0,0014$ stoku. I když přihlížíme k možným turbulentním poruchám u dna, můžeme říci, že popsáním vazkoměrem dají se měřit prakticky všechny kapaliny (kromě rtuti).

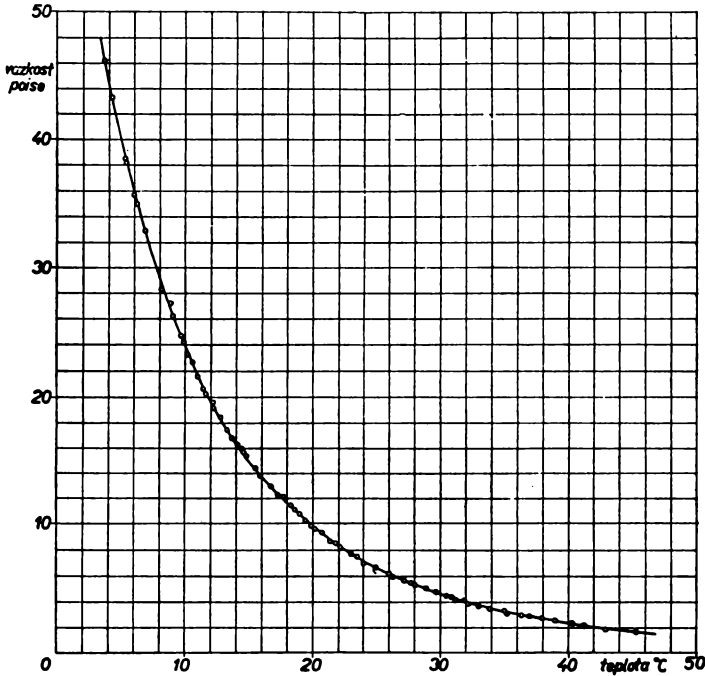
Potřeby: Vazkoměr [45,VIII] s dvěma teploměry, kruhovou destičkou a s ocelovými dráty různého průměru, asi 50 cm dlouhými, libela [33,IV] nebo [33,III], stopky [21,II], odměrná nádoba do 1 litru.

Postup

1. Postavíme svisle osu přístroje použitím libely.
2. Centrujeme nejprve ukazatele (zavěšením kruhové destičky do otvoru ukazatele) a potom závěs válce.
3. Závěsný mústek vysuneme k horním dorazům a nalijeme do válce A asi 670 cm měřené kapaliny.
4. Válec a spustíme do kapaliny a maticí na závěsu upravíme jeho výšku tak, aby byl ponořen až po značku ($h = 20,0$ cm), a je-li třeba, vypustíme spodním kohoutkem z A něco kapaliny.
5. Vložíme do přístroje oba teploměry a temperujeme lázeň na žádanou teplotu. S měřením vyčkáme, až se údaje obou teploměrů neliší více než asi o $0,2^\circ\text{C}$ (za předpokladu, že jsou v těchto mezích oba správné).
6. Ukazatele natočíme tak, aby byl přibližně na nule kruhu, který je dělen na obě strany od 0 do 180° .
7. Čteme teplotu na obou teploměrech a ihned zapneme motor. Po ustálení válce a čteme výchylku (na $0,1^\circ$) a změním smysl otáčení. Po ustálení čteme druhou výchylku a ihned opakujeme čtení na obou teploměrech. Za φ° vezmeme průměr obou protisměrných výchylek.
8. Je-li výchylka vhodné velikosti (mezi $30^\circ \div 150^\circ$), pokračujeme v měření, jinak měníme nejprve rychlost otáčení, a teprve je-li to nevyhnutelné, vyměníme drát (při stejné délce drátu je výchylka nepřímě úměrná čtvrté mocnině jeho průměru), načež musíme znovu upravit hloubku ponoru.

9. Při zjišťování teplotní křivky vyhřejeme lázeň na nejvyšší teplotu a pak ji necháme pomalu chladnout, při čemž střídavě čteme oba teploměry a výchylky na obě strany. Změřenou vazkost přisuzujeme teplotě rovné průměru obou čtení před měřením výchylky a po něm.

10. Po skončení měření vysuneme můstek s válcem a k horním dorazům a vypustíme kapalinu z A . Válec a necháme odkapat a pak jej omyjeme, vyplachující zároveň válec A , načež přístroj řádně osušíme a očistíme.



Obr. 45,14. Teplotní křivka vazkosti ricinového oleje.

11. Změříme stopkami methodou 39,1 nebo 2 dobu kyvu τ válce a na použitém drátě (nejméně s přesností 0,5%). Toto měření můžeme provést před naplněním vazkoměru kapalinou, víme-li, že zvolený drát dá přijatelné výchylky.

12. Vazkost kapaliny při střední teplotě měření dostaneme dosazením do vzorce (23) nebo (24).

Příklad. Měření vazkosti ricinového oleje.

Válec byl zavěšen na ocelovém drátě průměru 0,5 mm, délky 50 cm, ponor $h = 20$ cm. Methodou 39,1 byla určena doba kyvu $\tau = 2,550$ s a dosazením do (24) byl získán vztah

$$\eta = 0,460 \frac{\varphi^\circ}{n} \text{ poise} = 0,00469 \frac{\varphi^\circ}{n} [\eta]_k. \quad (25)$$

Při rotační rychlosti 9 ot/min byl průměr výchylek nalevo a napravo $\varphi^\circ = 106,9^\circ$ a dynamická vazkost podle (25)

$$\eta = 5,46 \text{ poise} = 0,0557 [\eta]_k.$$

Tato hodnota, která odpovídá střední teplotě oleje 27,2 °C, je v dobrém souhlase s empirickým vzorcem (Erk 1927)

$$\log \eta = \frac{532,8}{t + 101} - 3,4178, \quad (26)$$

z něhož vychází pro touž teplotu $\eta = 5,47$ P. Natto byla lázeň ohřata na 55 °C a po zchlazení na teplotu místnosti byla dále chlazena studenou vodou a posléze drobnými kousky

ledu až na teplotu 3 °C. Během tohoto pozvolného ochlazování bylo provedeno 80 měření vazkosti při různých teplotách. Výsledek měření je graficky znázorněn na obr. 45,14, kde je také zakreslena *Erkova* teplotní křivka (26). Z obrázku vidíme, že absolutní měření provedené bez kalibrace přístroje nejeví soustavných odchylek.

45.5. Měření vazkosti methodou Stokesovou

Pro odpor, který klade prostředí vazkosti η pohybu koule o poloměru r , odvodil *Stokes* důležitý vzorec

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (27)$$

kteřý platí ovšem jen pro malé rychlosti v , při nichž je proudění laminární. Vzorec platí theoreticky jen pro nekonečně rozsáhlé prostředí, lze ho však dobře použít i pro pohyb malé koule v širší trubici. Značný praktický význam má pád koule hustoty ρ v klidném prostředí hustoty ρ_p ($< \rho$). Na kouli (objemu V) působí její váha zmenšená o vztlak, tedy síla

$$F' = Mg - V\rho_p g = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_p) g,$$

kteřá ji z počátku zrychluje. Proti ní však působí odpor F , který ji zpomaluje tím více, čím větší je rychlost v . Pokud $F' > F$, zrychluje se pád koule, a tím roste v a podle (27) také F . Jakmile nabude rychlost takové hodnoty c , pro kterou $F = F'$, ruší se obě síly a koule se pohybuje nadále podle zákona setrvačnosti rovnoměrně. Tato *mezní rychlost* c , které koule dosáhne theoreticky po nekonečně dlouhé době, je tedy dána podmínkou

$$6 \pi \eta r c = \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho - \rho_p),$$

ze které ji můžeme vypočítat, známe-li vazkost η . Změříme-li však c , můžeme počítat vazkost podle vzorce

$$\eta = \frac{2}{9} g (\rho - \rho_p) \frac{r^2}{c}, \quad (28)$$

známe-li ovšem obě hustoty ρ a ρ_p .

Ukazuje se, že zvláště při malém rozdílu hustot dosáhne koule dosti brzo rychlosti velmi blízké mezní hodnotě c , a na tom je právě založena *Stokesova* metoda měření vazkosti kapalin. Lze pro ni použít jednoduchého přístroje [45, X], ovšem s podmínkou, že si ověříme, jak dalece se rychlost koule přiblížila mezní rychlosti, tedy jak je pohyb koule blízký rovnoměrnému pohybu. Podmínkou dosti přesných výsledků je také stejnoměrnost teploty kapaliny v nádobě, kterou je nutno dobře promíchat a provést měření, jakmile se kapalina uklidní. Abychom nemuseli měřit průměr mnoha kuliček (nemáme-li po ruce větší počet zaručeně stejných kuliček, na př. z kuličkových ložisek), uijeme sítky na držátku, kterou před pokusem ponoříme na dno a kterou pak kuličku zase vyjmeme pro další měření. Sítky lze použít zároveň pro míchání kapaliny. Kuličku spouštíme nejlépe tak, že ji uchopíme pinsetou, ponoříme těsně pod hladinu a uvolníme, aniž jí udělíme rotaci.

Teplotu měříme jednak přímo ve zkoušené kapalině teploměrem T , jednak v lázni teploměrem T' (po promíchání míchačkou), abychom mohli snáze řídit zahřívání elektrickým topným tělesem E .

Potřeby: Přístroj [45,X] se sítkou, 2 teploměry rtuťové, měřítko, stopky [21,II], různé velké kuličky, mikrometr [31,VI], pinseta.

Postup⁹⁾

1. Naplníme válec měřenou kapalinou, nastavíme horní prsteneček P_1 asi do poloviny výšky válce a změříme jeho vzdálenost od spodního prstenečku P_2 .

2. Pinsetou vypustíme kuličku od hladiny a změříme dobu jejího pádu mezi prstenci. Vypočteme její průměrnou rychlost dělením vzdálenosti dobou.

3. Vysuneme horní prsteneček P_1 asi do dvou třetin výšky válce, změříme vzdálenost obou prstenců a opakujeme měření rychlosti kuličky. Není-li tato rychlost zřetelně menší než v případě 2, opakujeme měření doby pádu desetkrát a průměrem měření dělíme vzdálenost prstenců, čímž dostaneme mezní rychlost c . Před měřením rychlosti i po něm čteme teplotu kapaliny na teploměru T .

4. Je-li rychlost změřená v 3 menší než v 2, opakujeme postup 2 a 3 pro dvě nižší polohy prstenečku P_1 (na př. v třetině a v polovině výšky válce). Nedosáhneme-li ani pak stejných rychlostí, volíme menší kuličku a opakujeme zkoušku. Totéž učiníme, je-li rychlost kuličky velká, takže měření doby pádu je zatíženo velkou poměrnou chybou.

5. Změříme poloměr kuličky mikrometrem (co nejpřesněji) a zjistíme hustotu kuličky a kapaliny některou z method čl. 36 nebo je najdeme v tabulkách.

6. Dynamickou vazkost kapaliny vypočteme pro zjištěnou teplotu podle vzorce (28)

46. POVRCHOVÉ NAPĚTÍ (KAPILÁRNÍ KONSTANTA)

Definice. Povrchové napětí σ kapaliny je napětí působící v rovině povrchu kolmo na délkový prvek povrchu. Při tom rozumíme napětím sílu dF , působící na úsečku délky dl kolmou k síle, dělenou dl :

$$\sigma = \frac{dF}{dl}. \quad (1)$$

Jednotky. Povrchové napětí se měří v jednotkách MKSA:

$$[\sigma] = \text{Nm}^{-1} = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} = 10^3 [\sigma]_a = 0,102 [\sigma]_t \text{ a v absolutních jednotkách}$$

$$[\sigma]_a = \text{dyn} \cdot \text{cm}^{-1} = \text{erg cm}^{-2}.$$

Poslední výraz vznikl násobením a dělením centimetrem a říká, že povrchové napětí je rovno práci, kterou vykonají kapilární síly při posunutí úsečky dlouhé 1 cm o délku 1 cm kolmo k jejímu směru (ovšem v rovině povrchu kapaliny, obr. 46,1). Na každý délkový prvek, který neleží na okraji, působí ovšem stejně velké kapilární síly s obou stran a jejich účinek se ruší. Projeví se teprve na hranici povrchu kapaliny, na kterou působí napětí jen s jedné strany (dovnitř plochy povrchu). Posuneme-li tedy část ohraničení, délky 1 cm, kolmo proti povrchovému napětí o 1 cm, vykonáme práci rovnou přírůstku energie, potřebnému k zvětšení povrchu o 1 cm², tedy rovnému povrchové energii plošné jednotky povrchu. Povrchové napětí je tedy i rozměrově rovno t. zv. *kapilární konstantě*, definované jako plošná hustota povrchové energie.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

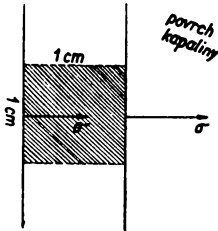
Povrchové napětí můžeme určit přímo tak, že změříme sílu, kterou je kapilarita schopna působit na známou délku omezující povrch kapaliny, a dělíme její délkou. Můžeme ovšem užít také některých jiných *kapilárních* jevů.

45⁹⁾ Návod předpokládá, že hořejší prsteneček je posuvný; má-li přístroj několik pevných prstenců, volíme (místo posouvání) prstence, jejichž polohy odpovídají návodu.

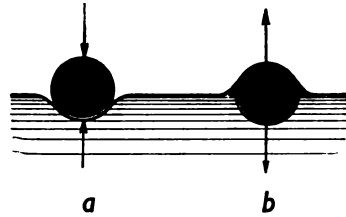
Je to zejména *kapilární vzestup* (elevace) kapalin v úzké trubici (kapiláře), jestliže kapalina k stěně trubice lne, nebo *kapilární pokles* (deprese) povrchu kapalin, které k stěně kapiláry nelnou. Pro srovnávací měření lze použít také jevu tvoření kapek.

46.1. Povrchové napětí — měření přímou methodou (odtrhovací)

Na tenký drát délky l cm, položený na hladinu kapaliny, která k němu nelne (obr. 46,2a), působí povrchové napětí svisle vzhůru výslednou silou $2 \sigma l \cos \alpha$, je-li α úhel, který svírá povrch kapaliny podél drátu s vertikálním



Obr. 46,1. Povrchové napětí — kapilární konstanta.



Obr. 46,2. Drát na povrchu kapaliny: a — nesmočený; b — smočený.]

směrem. Při tom vzniknou dvě přímá ohraničení volného povrchu kapaliny, délky l (pomineme-li průměr drátu proti jeho délce). Drát se tedy udrží na hladině, pokud je σ tak velké, že lze splnit rovnici

$$G = 2 \sigma l \cos \alpha,$$

kde G je váha drátu, zmenšená o vztlak.

Podobně je tomu, když drát, k němuž kapalina lne, ponoříme do kapaliny a snažíme se jej (ve vodorovné poloze) z kapaliny vyzdvihnout. Působí-li naň svisle vzhůru síla F , vznikne stav naznačený na obr. 46,2b; odtržení drátu se podaří, bude-li

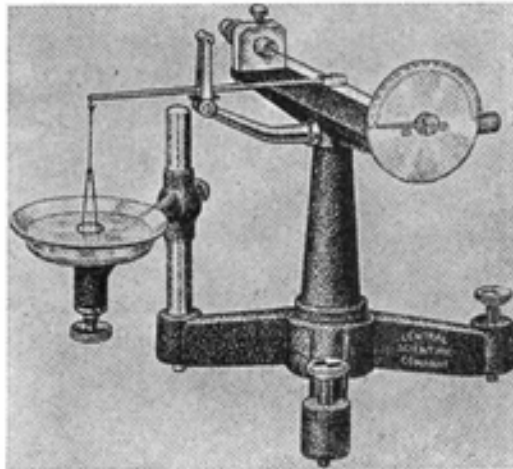
$$F \geq 2 \sigma l \cos \alpha.$$

V okamžiku ponoření drátu v prvním případě a při odtržení drátu v druhém případě bude přibližně $\alpha = 0$ ($\cos \alpha \doteq 1$). Z toho plyne tato methoda: Drát přímý nebo kruhový (nebo tenký plech ve svislé poloze s přímou vodorovnou hranou), dlouhý několik cm, zavěsíme ve vodorovné poloze (upevněný ve dvou, kruhový ve třech místech) na lehké vahadlo, které má na druhém rameni buď lehkou misku, nebo dělenou stupnici. Drát, nejlépe platinový, vyvážíme tak, aby visel těsně pod povrchem měřené kapaliny (která k němu lne) a přidáváme opatrně několikamiligramová závaží (nebo posouváme centigramovým jezdcem od osy ke kraji vahadla), až se drát odtrhne od povrchu. Je-li M hmota závaží přidaného po vyvážení drátu v kapalině, pak

$$\sigma = \frac{Mg}{2l}. \quad (2)$$

46,I Pohodlněji lze měření provést přístrojem Du-Noüyho (viz snímek 46,3), na němž se síla potřebná k odtržení prstence z platinového drátu měří torsní dvojicí vodorovně napjatého ocelového drátu, v jehož středu je připevněno

lehké vodorovné rameno, nesoucí závěs s prstencem. Prstenec smočený kapalinou se odtrhuje od povrchu kapaliny stáčením ukazatele vpravo a jeho poloha se po odtržení čte na půlkruhové stupnici. Jakou svislou silou přitom působí kroucený drát na závěs prstence, zjistíme tak, že přístroj kalibrujeme závažími, kladouce na prstenec pokrytý kouskem papíru postupně závaží 0,1; 0,2; 0,3; . . . gramů, a že sestrojíme tabulku nebo graf závislosti otočení ukazatele na velikosti závaží. Přitom za nulovou polohu pokládáme stočení, jímž se udrží v rovnováze závěs s prstencem i s papírem naň položeným.



Obr. 46,3. *Du Noüyho* přístroj na měření povrchového napětí, vyráběný Central Scientific Co.

Potřeby: Lehké vahadlo s vodorovným platinovým drátem na levé straně a s miskou nebo děleným ramenem na pravé straně, nebo přístroj [46,I], drobná závaží nebo jezdec (mg, cg), posuvné nebo přesné čárkové měřítko, nádobka na kapalinu.

Postup

1. Změříme délku l drátu nebo průměr prstence (desetkrát) a teplotu kapaliny.
2. Ponoříme drát (prstenec) těsně pod hladinu a vyvážíme.
3. Přidáváme opatrně závaží až do odtržení drátu. Pokus opakujeme desetkrát.
4. Vypočteme průměr závaží přidaných v 3 a dosadíme za M do 2. Přitom za g položíme $9,81 \text{ m s}^{-2}$. Chyba výsledku činí několik procent. Proto neopravujeme váhu závaží o vztlak vzduchu; počítáme na tři a výsledek zaokrouhlíme na dvě místa.

Při měření *Du-Noüyho* přístrojem [46,I] zůstávají úkony 1 a 2 beze změny. Úkon 3 se ovšem nahradí určením nulové polohy (desetkrát) a stáčením ukazatele vpravo, až se prstenec odtrhne. To opakujeme desetkrát a ze zaznamenaných stočení vezmeme průměr, k němuž najdeme interpolaci z tabulky nebo z grafu, jaké závaží M by právě udrželo rameno přístroje v rovnováze. Není-li ovšem přístroj kalibrován, musíme kalibraci závažími provést, jak bylo řečeno při popisu přístroje. Povrchové napětí vypočítáme zase podle 4 dosazením do vzorce (2).

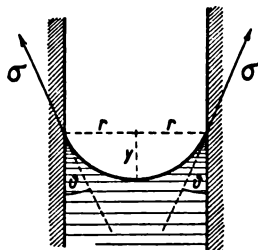
46.2. Povrchové napětí — měření z kapilárního vzestupu

Kapalina hustoty ρ , lnoucí ke stěnám trubice o vnitřním poloměru r , vystoupí nad okolní hladinu o výšku h (kapilární vzestup), která je dána podmínkou

$$\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \sigma \cos \vartheta, \quad (3)$$

kde ϑ je sklon povrchu kapaliny podél svislé stěny trubice, měřený od svislice (obr. 46.4). (Váha sloupce kapaliny v trubici je rovna svislé výslednici sil, kterými působí kapilární síly směrem tečným k povrchu ve všech okrajových bodech na rozhraní kapaliny a stěny trubice.)

Smočíme-li dobře stěnu trubice kapalinou, je úhel většinou velmi malý ($\cos \vartheta \doteq 1$). Lze jej ostatně také změřit, nejlépe tím, že určíme hloubku y dutého povrchového vrchlíku. Pokládáme-li povrch za část koule, odvodíme snadno, že¹⁾



$$\cos \vartheta = \frac{2ry}{r^2 + y^2}. \quad (4)$$

Povrchové napětí lze tedy počítat buď z přibližného vzorce:

$$\sigma = \frac{1}{2} g \rho h r \quad (5)$$

Obr. 46.4. Vrchlík kapaliny lnoucí ke kapiláře.

nebo podle (3) přesněji z rovnice

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{g \rho h r}{2 \cos \vartheta} = \frac{1}{2} g \rho h r \frac{1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{2} g \rho h r \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon)} \right] \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} g \rho h r \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

kde

$$\varepsilon = 1 - \frac{y}{r} = \frac{r - y}{r}$$

je malá hodnota, ježto rozdíl poloměru a hloubky y vrchlíku je proti r dosti malý (na př. pro vodu je $\vartheta \doteq 8^\circ$, $\cos \vartheta \doteq 0,990$ a $\varepsilon \doteq 0,02$). Je tedy nutno y zjistit při měření výšky h , rovné výšce nejnižšího bodu vrchlíku, zvětšené o $\frac{r}{3}$, neboť při malém ϑ má kapalina ve vrchlíku objem $\doteq \frac{1}{3} \pi r^2$. Nejlépe je promítnout vrchlík projekčním přístrojem na plátno, na něm ve zvětšeném měřítku určit r a y a vypočítat ε , které je nezávislé na užitém zvětšení. Absolutní velikost poloměru r určíme ovšem zvlášť, nejlépe naplněním kapiláry rtutí podle 31.3.

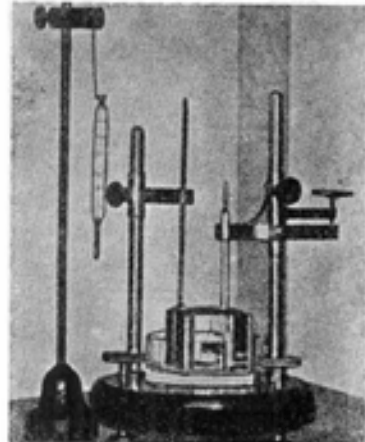
Přesně vzato měli bychom rozeznávat poloměr r_h v místě vrchlíku, který máme na pravé straně rovnice (3), od průměrné hodnoty poloměru r v celém sloupci vyplněném kapalinou, kterou bychom měli dosadit za r do levé strany rovnice. Tyto dvě hodnoty se totiž vzhledem k nedokonalosti kapiláry poněkud liší, a proto bychom měli kromě střední hodnoty r (získané vážením sloupce rtuti) určit také co nejpřesněji r_h tak, že bychom kapiláru v místě vrchlíku přeřízli a změřili její světlost mikroskopem s okulárovým mikrometrem [20,IV]. Tomu se vyhneme, opakuje-li měření kapilárního vzestupu v různých místech

46¹⁾ TF 2.9.9.

kapiláry, kterou musíme napřed po celém vnitřním povrchu smočit měřenou kapalinou.

Hustotu ρ kapaliny najdeme buď v tabulkách, nebo ji změříme vhodnou methodou, na př. 36.4; 5; 6.

Zbývá ještě určit vzestup h , který bývá jen několik centimetrů. Nej-
přesněji lze jej změřit takto: Naplníme nádobu měřenou kapalinou vrchovatě,
aby se její hladina kapilaritou udržela nad
okrajem nádoby. Výšku hladiny vyznačíme
pak ostrým skleněným hrotem, vytaženým
z tyčinky tvaru U, který upevníme do stojanu
za delší svislé rameno tyčinky tak, aby se
hrot zespoda právě dotýkal hladiny. Výškový
rozdíl mezi hrotem a vrchlíkem v kapiláře pak
změříme kathetometrem [32,I] (viz obr. 46,6b
a obr. 46,5). Jednodušší — ač méně přesné —
je měření h zrcadlovým měřítkem (kterého je
třeba při kalibraci kapiláry). K tomu připev-
níme za kapiláru měřítko tak, abychom mohli
číst bez chyby úkosu polohu vrchlíku i výšku
hladiny v okolní nádobě, která musí být zase
buď naplněna nad okraj, nebo aspoň přední
stěna musí být svislá a z rovinného skla
(„zrcadlového“²⁾ obr. 46,6a).



Obr. 46.5. Měření povrchového na-
pětí z kapilárního vzestupu.

Potřeby: Nádoba (kyveta) na měřenou kapa-
linu, kapilára, mikrometr [31,VI], zrcadlové měřítko,
teploměr, praktikantské nebo analytické váhy
[25,IV] nebo [25,V; VI], hodinové sklíčko, hadička s nálevkou, stojany, rtuť. Pro přes-
nější měření kathetometr [32,I] a zahrocený skleněný háček, eventuálně promítací
přístroj s promítací stěnou a čárkové nebo posuvné měřítko.

Postup

1. Určíme průměrnou hodnotu r poloměru kapiláry methodou 31.3.
2. Naplníme nádobu (kyvetu) měřenou kapalinou a kapiláru ponoříme do kapaliny,
načež ji upevníme ve svislé poloze i se zrcadlovým měřítkem na stojan (co nejhlouběji)
a umístíme poblíž ní teploměr. Při přesnějším měření použijeme místo zrcadlového měřítka
kathetometru (který předtím správně postavíme) a výšku hladiny vyznačíme hrotem skle-
něného háčku.
3. Čteme teplotu kapaliny a změříme vzestup h , nato povysuneme kapiláru a znovu
změříme h . To opakujeme (desetkrát) tak, aby se vrchlík utvořil na různých místech
kapiláry v rozsahu použitím k měření středního poloměru. Při každém měření zjišťujeme
teplotu kapaliny.
4. Určíme hustotu ρ kapaliny při průměrné teplotě měření. Není-li úhel θ dosti malý,
promítneme zvětšený vrchlík na promítací stěnu, změříme na průmětu vnitřní průměr $2r$
a hloubku y vrchlíku a vypočteme

$$\varepsilon = 1 - \frac{y}{r}.$$

6. Povrchové napětí vypočteme z (5) nebo z (6).

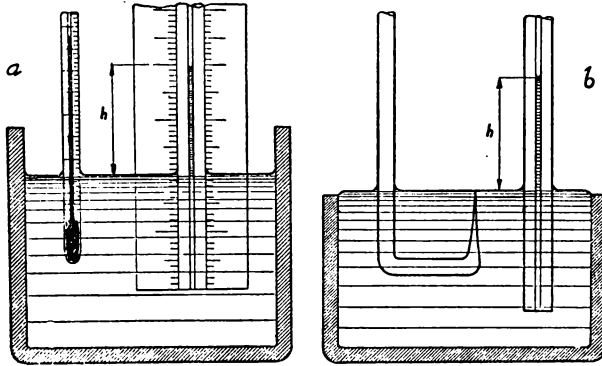
Příklad. Bylo měřeno povrchové napětí vody při 14,5 °C z kapilárního vzestupu,
určeného zrcadlovým měřítkem. Nejprve byl zjištěn s:řední poloměr užitých kapiláry.
Methoda 31.3 dala výsledek $r = (0,0346 \pm 0,0001)$ cm. Výška vzestupu (průměr pěti
měření) $h = (4,30 \pm 0,01)$ cm. V tabulce T,II byla nalezena hustota vody $s = 999,2$ kg m⁻³
a za zrychlení tíže vzata hodnota $g = 9,810$ m/s². Pro vodu je podle dřívějšího výkladu

46 ²⁾ Pravoúhlé nádoby stmelené z takového skla se nazývají *kyvety* a užívá se jich
při promítání kapalin, pro absorpční spektra a pod.

$\frac{\varepsilon^3}{2} = 0,01$, a proto bylo povrchové napětí počítáno podle vzorce (6) $\sigma = \frac{1,01}{2} g \rho h r = (73,6 \pm 0,3) 10^{-3} \text{ N/m} = (73,6 \pm 0,3) \text{ dyn/cm}$, při čemž pravděpodobná chyba výsledku byla určena podle věty 12 (10).

46.3. Srovnávání povrchových napětí kapkovou methodou

Tato jednoduchá metoda je založena na tom, že kapalina pomalu vytékající ze svislé trubice zůstává opět na jejím spodním okraji ve tvaru kapky, která se odtrhne teprve v okamžiku, kdy váha kapky překoná kapilární síly,



Obr. 46,6. Měření kapilárního vzestupu:
a – zrcadlovým měřítkem; b – kathetometrem.

působící na vnějším obvodu trubice. Je-li vnější poloměr trubice R , je hmota m kapky dána rovnicí

$$mg = 2\pi R\sigma. \quad (7)$$

Povrchové napětí je tedy dáno vnějším poloměrem kapiláry a hmotou kapky. Tuto hmotu však nemůžeme snadno určit, ježto odpadne jen větší část kapky, kdežto menší část (asi 1 třetina) její hmoty zůstane na trubici. Ukazuje se však, že pro většinu kapalin zůstává přibližně táž poměrná část kapky na trubici, takže zvážení stejného počtu kapek dvou kapalin dostaneme hmoty M_1 , M_2 , které jsou v poměru hmot $m_1 : m_2$ jejich kapek. Proto lze poměr povrchových napětí počítat ze vztahu

$$\sigma_1 : \sigma_2 = M_1 : M_2. \quad (8)$$

Měření se provádí tak, že se kapaliny nechají zvolna odkapávat z téže tlustostěnné, dole rovně zabroušené kapiláry, a na analytických vahách se odváží stejný počet kapek obou kapalin.

I. A K U S T I K A

47. K M I T O Č E T (F R E K V E N C E)

Definice. Kmitočet (frekvence) ν je počet kmitů za vteřinu a určuje prostou (absolutní) výšku tónu.

Jednotky

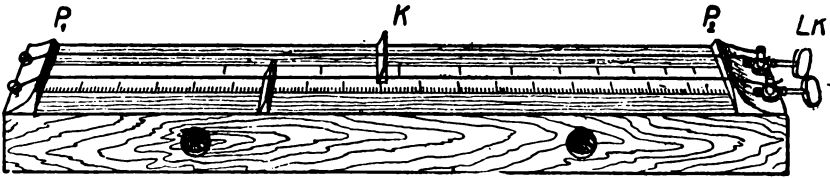
[ν] = hertz = Hz = s⁻¹ = cykl/s = c/s¹⁾

kilohertz = kHz = 10³ Hz = kilocykl/s = kc/s = 10³ c/s.

megahertz = MHz = 10⁶ Hz = megacykl/s = Mc/s = 10⁶ c/s.

Přístroje

Z velikého množství zvukových zdrojů (zvukových generátorů) uvedeme jen základní zdroje fyzikální a hlavní typy zdrojů technických, jejichž teorie, výroba a zkoušení tvoří dnes zvláštní obor technické akustiky, zvaný *elektroakustika*. Přitom je třeba také rozlišovat zdroje slyšitelných zvuků, které tvoří předmět studia vlastní akustiky, od zdrojů zvuku, jejichž kmitočet je vyšší než kmitočet slyšitelných tónů. Část akustiky, která se zabývá těmito neslyšitelnými *ultrazvuky*, nazývá se *ultraakustika*. *Ultrazvukovými* neboli *nadzvukovými* nazýváme kmitočty asi od 20 kc/s; byly vytvořeny nadzvukové kmitočty až 80 Mc/s.²⁾



Obr. 47,1. Strunák.

Mechanické zdroje zvukové jsou tyto: Strunák (monochord, též sonometr) je plochá dřevěná skříň asi 1 m dlouhá, nad kterou se napne struna nebo několik strun (*polychord*) přes dva krajní pražce P_1 , P_2 (dřevěné trojboké hranoly). Struna se napíná ladicím klíčem LK , který bývá opatřen pérovým siloměrem. Výška tónů se může měnit také změnou polohy posuvné kobylky K (obr. 47,1). Její vzdálenost od krajních pražců se měří na měřítku, které je na skříni přístroje. Struna se rozezvucí smyčcem potřeným kalafunou (nebo drn-

47 ¹⁾ Někdy se také říká prostě cykl, kilocykl bez označení „za sekundu“.

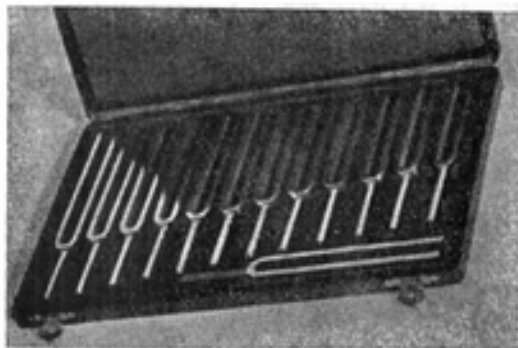
47 ²⁾ Bližší viz [57].

káním) a je třeba dbát na to, aby vydávala skutečně základní (nejnižší) tón, při němž vyšší harmonické tóny zní jen slabě.

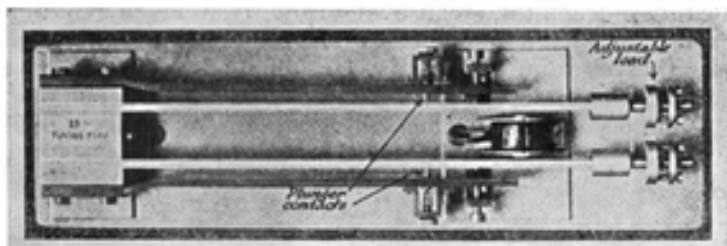
47,II Ladička je kovová vidlice buď z oceli, nebo lépe z *elinvaru* (slitiny 53% Fe + 35% Ni + 12% Cr), jehož modul pružnosti se s teplotou takřka nemění. Proto elinvarové ladičky mají prakticky stálý kmitočet, kdežto ocelová ladička při teplotě t °C vydává tón kmitočtu

$$\nu = \nu_0 (1 - 0,00011 t), \quad (1)$$

je-li ν_0 její kmitočet při 0 °C. V Americe se vyrábějí také ladičky z duralumina.



Obr. 47,2. Sada ladiček.



Obr. 47,3. Elektromagnetická ladička pro nízký kmitočet, který je možno měnit nastavným přívazků „Adjustable load“.

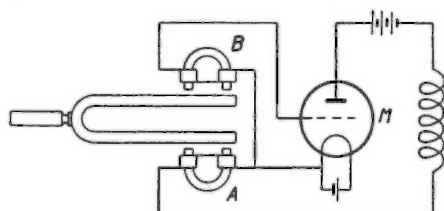
Proud jdoucí elektromagnetem se periodicky přerušuje kontakty „plunger contacts“.

Ladičky bývají cejchovány (označeny kmitočtem základního tónu) a sestávají se v sady (viz snímek 47,2), které obvykle obsahují t. zv. *komorní a* (a^1) o kmitočtu 435 Hz (v Americe a v Německu 440 Hz). Ladičku rozezvučíme úderem měkkého kladívka (pryžové paličky) ve směru spojnice konců obou ramen, která kmitají příčně proti sobě. Podélně chvějící nožka ladičky se staví na ozvučnou (resonanční) dřevěnou skříňku. Často se používá trvale znějící elektromagnetické

47,III ladičky, jejíž kmitý se udržují elektromagnetickými impulsy, kterým ladička vnucuje vlastní frekvenci tím, že mechanicky přerušuje proud napájející elektromagnet (47,3). V novější době se udržuje znění ladičky také elektronkou. Přitom ladička může vydávat i zesílené vyšší harmonické tóny, které se jinak rychle utlumí. Schema takové elektronkové ladičky podává obr. 47,4. Ke každému ramenu ladičky je přiložena elektromagnetická cívka, z nichž jedna (A)

ladičce dodává elektromagnetické impulsy, které druhá cívka (*B*) synchronuje s kmity ladičky tím, že dává mřížce *M* triody [80,I] střídavé napětí, jež v ní ladička indukuje. Dnes je známa řada různých úprav tohoto zařízení. Na obr. 47,5 je snímek ladičky buzené cívkou umístěnou mezi jejími rameny.

Další mechanické zdroje jsou sirény a píšťaly, kterými při vhodné úpravě je možno získat i tóny nadzvukové frekvence (Galtonova píšťala). Pro ultra-

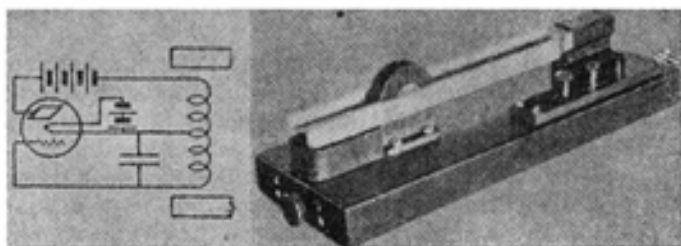


Obr. 47,4. Zapojení elektronkové ladičky.

zvuky je určen **Hartmannův akustický generátor**, v němž proud vzduchu, unikající z kuželové trubice, naráží nadzvukovou rychlostí na válcový resonátor. Kmitočet závisí na rozměrech přístroje a na rychlosti vzdušného proudu a lze jej vystupňovat až na 130 kc/s. Proudem vodíku lze dosáhnout frekvencí až 500 kc/s. 47,V

Elektrické zvukové zdroje jsou v zásadě založeny na tom, že elektromagnetický okruh, v němž je zařazen kondensátor kapacity *C* a indukční cívka indukčnosti *L*, má podle *Thomsonova* vztahu³⁾ kmitočet

$$\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$



Obr. 47,5. Elektronková ladička Leeds and Northrup Company.

Kmitočet lze snadno měnit změnou *L* nebo *C*. Toto ladění okruhu se provádí nejčastěji otočným kondensátorem [65,II]. Kmitů okruhu se obvykle budí elektronkou a jeho frekvence je při stálém anodovém a žhavicím proudu a při stálém napětí na mřížce elektronky rovněž ve značné míře stálá.

Akustické kmitů je možno získat také nepřímou z elektromagnetických kmitů vysokofrekvenčních, uijeme-li dvou okruhů, jejichž kmitočty se liší o několik set až tisíc Hz. Tím vznikají „rázy“, jejichž počet za vteřinu je rovný rozdílu obou kmitočtů a které tedy dávají tóny, jejichž výšku můžeme takřka neomezeně volit; to je princip „rázového (záznějového) bzučáku“.

47³⁾ TF 5.14.1.

Popsaným způsobem jsme tedy získali kmity akustické frekvence, ovšem stále jsou to kmity elektromagnetické. Podle způsobu, jakým je měníme v kmity akustické, t. j. v mechanické oscilace pevných, kapalných nebo plyných látek, rozeznáváme různé druhy zvukových generátorů.

47,VI Tónový generátor elektronkový představuje nejobvyklejší způsob, při němž se užívá *telefonu*⁴⁾ nebo *amplionu*⁴⁾ (srov. snímek 47,6). Přitom je důležité, že tento způsob nijak neovlivňuje kmitočet (výšku tónu) generátoru, který mů-



Obr. 47,6. Tónový generátor elektronkový Tesla pro kmitočty 20 Hz — 1,2 MHz.

žeme naladit libovolně v mezích proměnnosti kapacity kondensátoru. Není tomu tak u dalších typů generátorů, které jsou v podstatě shodné s elektronkovou ladičkou [47,IV]; liší se od ní tím, že ladičku v nich zastupuje jiný mechanický *kmitač* (*oscilátor*) s vlastním kmitočtem. Jsou vhodné hlavně pro velmi vysoké, zvláště ultrazvukové frekvence a nejdůležitější jsou dva druhy:

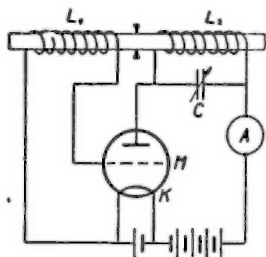
47,VII Krystalový piezoelektrický generátor je založen na t. zv. *piezoelektrickém jevu*⁵⁾, který pozorujeme na některých krystalech (křemen, turmalín, *Seignettova sůl*).⁶⁾ Nejčastěji se používá destičky nebo tyčinky vyříznuté z krystalu křemene (nebo Seignettovy soli) rovnoběžně s optickou osou krystalu, na jejichž dvou protilehlých stěnách jsou vodivé (kovové) elektrody (polepy). Stlačíme-li destičku, vznikne na elektrodách elektrické napětí, napínáme-li ji kolmo k polepům, vznikne napětí opačného smyslu. Obráceně při vložení napětí na polepy se destička buď roztáhne, nebo smrští podle smyslu napětí. Koná-li tedy destička pružné mechanické kmity, vzniká na polepech střídavé napětí v rytmu jejich kmitů a spojíme-li polepy se zdrojem střídavého napětí, kmitá destička kmitočtem těchto oscilací. Jestliže se kmitočet napětí shoduje s vlastním kmitočtem destičky (tedy při resonanci), je tím vzniklá přeměna elektrické energie na

47 ⁴⁾ TF 3.3.6.

47 ⁵⁾ TF 5.3.6.

47 ⁶⁾ Vínan sodnodraselný $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6$, zv. též *Rochellova sůl*.

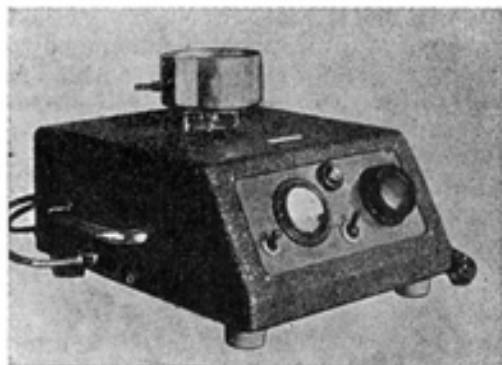
mechanickou velmi vydatná. Proto se k destičce připojuje oscilační okruh s elektronkou (nebo se dvěma), který se naladí na kmitočet destičky (srov. obr. 47,8). Lze použít různých zapojení, která lze provést podobně jako u elektronkové ladičky (obr. 47,4). Jeden z obvyklých způsobů je popsán u rezonančního interferometru na obr. 48,7. V podstatě tu jde o *elektromechanický* zvukový generátor, kdežto další druh generátoru lze označit jako *magnetochemický*.



Obr. 47,7. Ultrazvukový magnetostrikční generátor.

Obvykle se nazývá **magnetostrikční zvukový generátor**, ježto je založen na *magnetostrikčním jevu*. Magnetostrikci nazýváme změnu rozměrů ferromagnetické látky, způsobenou jejím zmagnetováním. Také zde (jako u piezoelektrického jevu) nastává jev obrácený, že totiž mechanickým působením můžeme měnit zmagnetování látky. Vložíme-li tedy na př. niklovou tyč do střídavého magnetického pole rovnoběžného s osou tyče, prodlužuje a zkracuje se v rytmu změn pole. Tyto mechanické oscilace jsou největší, když kmitočet střídavého pole je shodný s vlastním kmitočtem tyče. Zapojení magnetostrikčních generátorů může být provedeno rozmanitým způsobem, v podstatě ovšem obdobným elektromagnetické elektronkové ladičce nebo zvukovému generátoru.

Magnetostrikční generátory jsou vhodné především pro nižší frekvence, ale dají se upravit i pro ultrazvuk, jak učinil 1928 *Pierce*, jehož generátor je schematicky znázorněn na obr. 47,7. Uprostřed upevněná (niklová) tyč zasahuje do cívek L_1 , L_2 ; první je spojena s katodou K a s mřížkou M triody [80,I], druhá je částí anodového okruhu, který se naladí na vlastní frekvenci



Obr. 47,8. Ultrazvukový generátor piezoelektrický pro biologické pokusy (o výkonu 80 W, pro kmitočet 990 000 Hz). Střídavé napětí se přivádí z elektronkového oscilátoru ve skřínce na kruhovou křemennou destičku na dně hliníkového válce, který se naplní olejem.

podélných kmitů tyče. Rozkmitaná tyč indukuje periodickými změnami magnetisace v obou cívkách střídavé napětí (opačné fáze), čímž se okruh i s tyčí udržuje trvale v oscilacích. Zvukové vlny se šíří od obou čel tyče, což není výhodné, byly však nalezeny vhodnější úpravy, které mají větší výkon. Výhodou magnetostrikčních generátorů je poměrná jednoduchost a láce, ale při

vyšších kmitočtech jsou málo výkonné a při provozu se zahřívají, a to je příčinou rozladování. Kromě toho nelze jich užít při teplotách vyšších než teplota zániku,⁷⁾ nad kterou již látka ztrácí ferromagnetismus.

47,IX Elektrické kmity se mohou měnit v akustické také tepelným účinkem proudu ve vodiči. Toho je použito v přístroji zvaném *thermofon*. Tenký drát nebo kovový list je napjat v malém prostoru, uzavřeném velmi tenkými stěnami. Prochází-li drátem (folií) střídavý proud (harmonický), ohřívá a ochlazuje se vodič a od něho okolní vzduch (nebo jiný plyn, na př. vodík), takže vznikají tlakové oscilace o dvojnásobné frekvenci (teplo se vyvíjí bez zřetele na směr proudu). Proto se raději posílá vodičem zároveň se střídavým též stejnosměrný proud větší než amplituda střídavého proudu. Pak se oba proudy v jedné půlperiodě sčítají, ve druhé odčítají, a tím vzniklé tlakové změny mají kmitočet střídavého proudu.

Tento přístroj má tu přednost, že zvuk, který vydává, má známou výšku a jeho síla se může vypočítat z výkonu výsledného proudu. Užívá se ho k měřicím účelům, k cejchování mikrofonů a pod.

MĚŘICÍ METHODY

Kmitočet, který je roven převrácené hodnotě doby kmitové T , souvisí s dalšími dvěma základními akustickými veličinami, totiž s *délkou vlny* λ a *rychlostí zvuku* c jednoduchým vztahem

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \cdot \quad (2)$$

Můžeme jej tedy určit buď přímým změřením počtu kmitů ve známé době, nebo výpočtem z (2), zjistíme-li λ a c . Z přímých method lze uvést metodu *registrační (oscilografickou)*, při níž se kmity konané pevným tělesem zapisují na válec, a *metodu rázů*, již se určuje rozdíl dvou blízkých kmitočtů. Poměr dvou kmitočtů měří se snadno strunákem [47,I]. Konečně můžeme určit kmitočet tónu tak, že vyladíme tónový generátor [47,VI] na stejnou výšku tónu (až zcela vymizí rázy) a z polohy ladičícího kondensátoru vypočteme (nebo na stupnici přímo čteme) kmitočet vydávaný generátorem.

Z nepřímých method uvádíme měření frekvence otevřeným resonátorem; lze ovšem užít kterékoli metody určující vlnovou délku ve vzduchu, ježto rychlost zvuku ve vzduchu se dá vypočítat podle vzorce 49 (5) nebo 49 (6).

47.1. Kmitočet — měření chronografickou methodou

K měření kmitočtu pevných těles je možno použít válcového chronografu [21,IV] nebo aspoň chronografického válce. Přitom je nutno zapisující pero volit co nejlehčí, aby se jeho upevněním na kmitající těleso nezměnil kmitočet. Nejlépe je použít válce pokrytého očazeným papírem. Pro záznam kmitů ladičky je vhodný tenký drátek, plíšek (tužší papír), žině nebo pírkó, které upevníme na konec jednoho jejího ramena. Ladičku upneme do stojanu tak, aby ramena kmitala rovnoběžně s osou válce. Hledíme, aby zápis kmitů ladičky byl co nejlépe zápisu pera chronografu, které svými výchylkami vyznačuje celé vteřiny.

47 ⁷⁾ TF 5.7.5.

K přesnějšímu měření je nutno, aby tyto vteřinové intervaly byly dosti velké, aby se daly přesně spočítat kmity na ně připadající. Proto se musí válec otáčet větší rychlostí a ovšem rovnoměrně, což má být zaručeno regulačním orgánem chronografu. Na tyto vlastnosti je třeba dbát při absolutním měření kmitočtu. Snazší a přesnější je srovnávání kmitočtů se známým kmitočtem jiného tělesa. Nejlépe se k tomu hodí cejchovaná ladička s označením kontrolovaného kmitočtu. Při tomto relativním měření je zbytečný vteřinový záznam chronografu a srovnávají se prostě počty n_1 , n_2 vlnek zapsaných za stejnou dobu oběma ladičkami, neboť dávají přímo poměr kmitočtů:

$$\nu_1 : \nu_2 = n_1 : n_2. \quad (3)$$

47.2. Rozdíl blízkých kmitočtů — určení z počtu rázů

Znějí-li zároveň dva tóny málo rozdílných kmitočtů ν_1 , ν_2 ($\nu_2 > \nu_1$), vzniká křížením jimi vysílaných vln střídavé zesilování a zeslabování zvuku. Tento jev nazýváme *rázy* neboli *zázněje*; snadnou úvahou se přesvědčíme, že počet těchto rázů za vteřinu je dán rozdílem kmitočtů:⁹⁾

$$f = \nu_2 - \nu_1.$$

Toho lze použít k srovnávání dvou blízkých kmitočtů, změříme-li stopkami dobu τ trvání určitého počtu n rázů. Pak

$$\nu_2 - \nu_1 = \frac{n}{\tau}. \quad (4)$$

Jsou-li oba tóny tak blízké, že nerozeznáme bezpečně, který z nich je vyšší, připevníme na konec ramena jedné z ladiček malý kousek vosku, čímž určité snížíme její tón. Zmenší-li se tím ν , je kmitočet ladičky s voskem vyšší než kmitočet druhé. Zvýší-li se však počet rázů, platí obrácený úsudek bezpečně jen tehdy, když přivažek je tak malý, že nemůže změnit znaménko rozdílu $\nu_2 - \nu_1$. Proto je jistější při vzrůstu počtu rázů ověřit výsledek tak, že přivažek přendáme od první ladičky na druhou. Jestliže se potom sníží, víme, že ladička s voskem má vyšší tón, zvýší-li se však opět počet rázů, má vyšší kmitočet ladička, u níž způsobí týž přivažek menší změnu počtu rázů.

47.3. Poměr kmitočtů — měření strunákem

Struna délky l m, napjatá tahem F newtonů vydává nejsilněji svůj základní tón kmitočtu⁹⁾

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \text{ s}^{-1}, \quad (5)$$

značí-li μ délkovou hustotu její hmoty v kg/m. Výšky základních tónů dvou stejných a stejně napjatých strun, jež se liší jen délkou, jsou tedy v obráceném poměru jejich délek:

$$\nu_1 : \nu_2 = l_2 : l_1. \quad (6)$$

Z toho plyne tato metoda srovnávání kmitočtů dvou tónů strunákem [47, I].

47 ⁹⁾ TF 3.1.3.

47 ⁹⁾ TF 3.2.8, 3.3.5.

Postup

1. Rozezvůčíme zdroj nižšího tónu a naladíme strunu ladicím klíčem na stejný tón. K přesnému vyladění použijeme metody rázů, které jsou podle 47.2 tím volnější, čím bližší jsou oba tóny, a vymizí při dokonalém sladění. Také lze využít skutečnosti, že při přesném vyladění nastává *resonance* (spoluznění) struny se zdrojem. Toho lze dosáhnout u ladičky tím, že se dotkneme její nožkou horní stěny strunáku. Při správném naladění se struna rozezvučí. Změříme délku struny l_1 (průměr 10 měření).

2. Nato rozezvůčíme zdroj o vyšším tónu a naladíme stejným způsobem strunu. Přitom posouváme kobylku tak, až zmizí rázy nebo nastane *resonance* (což opakujeme desetkrát) a změříme po každé střední vzdálenosti kobylky od krajního pražce, a to pro tu část struny, kterou rozezníváme. Je-li l_2 střední hodnota této vzdálenosti, je poměr kmitočtů dán rovnicí (6).

3. Prostou výšku zdroje můžeme dostat srovnáním se zdrojem známé frekvence. Užijeme-li k tomu cejchované ladičky, musíme mít — vyžaduje-li to přesnost měření — zřetel na závislost (1) kmitočtu ladičky na teplotě.

47.4. Kmitočet — určení z délky vlny a rychlosti zvuku

Kmitočet lze vypočítat absolutně podle vzorce (2), změříme-li délku vlny a určíme-li rychlost zvuku. Délku zvukové vlny změříme některou z method 48.1; 2; 3 a rychlost zvuku najdeme buď v tabulkách, nebo ji vypočteme podle známých vzorců 49 ($1 \div 6$).

48. DÉLKA ZVUKOVÉ VLNY

Definice. Délka zvukové vlny λ je vzdálenost dvou nejbližších míst, v nichž je stav proměnného tlaku a rychlosti v každém okamžiku stejný, nebo jak pravíme, je to vzdálenost dvou nejbližších míst *stejně fáze* zvukových kmitů.

Při chvění (stojatém vlnění) vytvoří se *uzly a kmitny*, při čemž *vzdálenost sousedních uzlů nebo kmiten je rovna polovině vlnové délky*¹⁾ a vzdálenost uzlu od nejbližší kmitny je čtvrt vlnové délky.¹⁾ (1)

Jednotky. Délka vlny se měří buď v metrech nebo v absolutních jednotkách, $[\lambda]_a = \text{cm}$. Přitom nutno zdůraznit, že délka zvukové vlny závisí podle (2) nejen na kmitočtu zdroje, nýbrž i na rychlosti zvuku v prostředí, jímž se zvuk šíří.

Přístroje

Měření vlnové délky se zakládá na větě (1), při čemž poloha uzlů a kmiten v rezonujícím tělese je buď dána jeho tvarem, nebo se zjistí obrazci vytvořenými korkovým nebo plavuňovým práškem. Konečně je možno měřit vlnovou délku na základě interference zvukových vln.

Prvního způsobu se užívá u resonátorů. Jsou dvojího druhu:

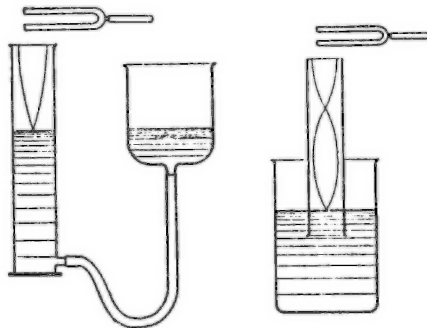
48,I Resonátor otevřený je válcová nádoba (skleněný válec) nahore otevřená, kterou lze naplnit kapalinou (vodou) do různé výše tak, aby vzduchový prostor nad hladinou měl žádanou výšku. Dva jednoduché typy otevřených válcových resonátorů s proměnným resonančním prostorem jsou naznačeny na obr. 48,1. Průměr válce bývá několik cm.

48,II Resonátor uzavřený je válcová trubice na obou koncích uzavřená rovným čelem s malým otvorem ($\varnothing \doteq 1 \text{ mm}$), sestavená ze dvou částí spojených

48 ¹⁾ TF 3.2.3.

závitem. Délka zvukového sloupce resonátoru se mění šroubovým pohybem, při čemž se část trubice zasouvá do její druhé části.

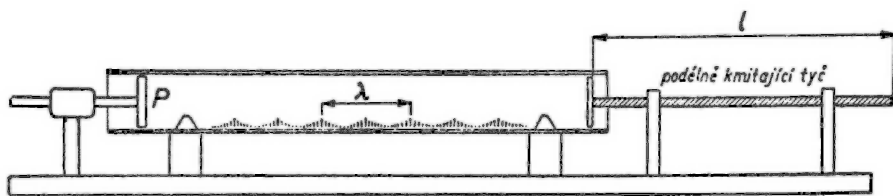
Druhý případ je uskutečněn **Kundtovou trubicí**. Je to skleněná trubice 48,III průměru několika cm, asi 150 cm dlouhá a uložena vodorovně (obr. 48,2a). S jedné strany do ní zasahuje volně pohyblivý píst (kruhový terč) P a před



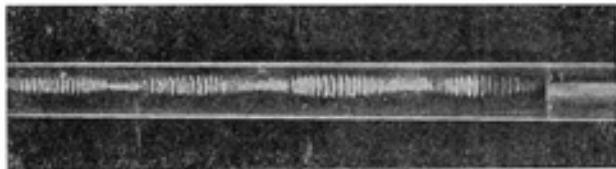
Obr. 48,1. Otevřené resonátory.

druhý otvor trubice se umístí zvukový zdroj. Uzly a kmitny stojatých vln vzniklých v trubici se zobrazí korkovým práškem, naspaným po celé délce trubice (obr. 48,2b). Pro vysoké frekvence o malé délce vlny užívá se trubic přiměřeně menších (kratších, užších) a plavuně místo korkového prachu.

Na měření délky vlny interferencí se hodí **Quinceho trubice**, v níž se zvuk 48,IV



a



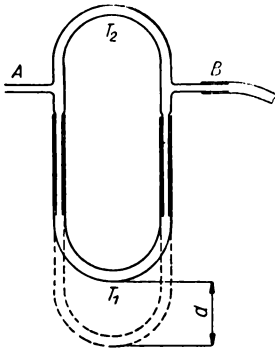
b

Obr. 48,2. a — Kundtova trubice; b — Kundtovy obrazce.

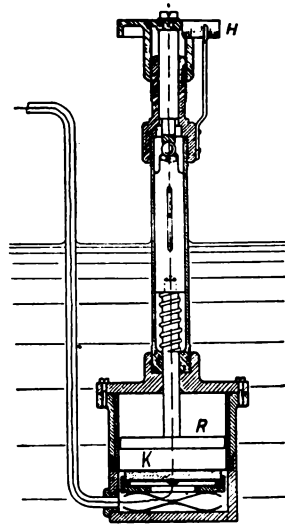
vstupující u A rozděljuje do dvou trubic T_1 , T_2 , načež je veden k společnému výstupu B . Délku jedné větve je možno měnit.

K měření nadzvukových vln je vhodný rezonanční (ultrazvukový) interferometr (Pierce 1925). Je to váleček, jehož dno tvoří rovinná plocha křemenné destičky piezoelektrického ultrazvukového generátoru [47,VII], proti němuž je 48,V

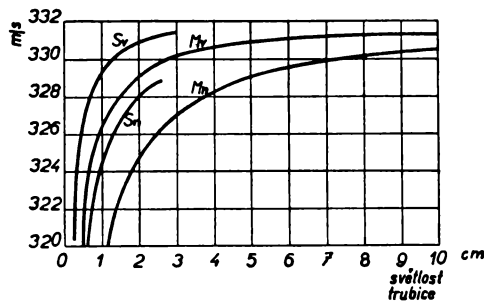
postaven posuvný reflektor (odrazný terč). Jeho poloha se mění, při čemž pro určitou polohu terče vzniká v prostoru mezi plochou křemene a terčem stojaté nadzvukové vlnění. Obr. 48,4 ukazuje rezonanční interferometr (Freyer, Hubbard, Andrews 1929) v lázni thermostatatu. Reflektor se posouvá mikrometrickým šroubem a jeho poloha se čte na dělené hlavici H šroubu. Jmenování autoři provedli jím četná měření, hlavně v kapalinách.



Obr. 48,3. Quinckeho trubice.



Obr. 48,4. Resonanční interferometr.

Obr. 48,5. Závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na průměru skleněné a mosazné trubice pro nižší (n) a vyšší (v) tóny.

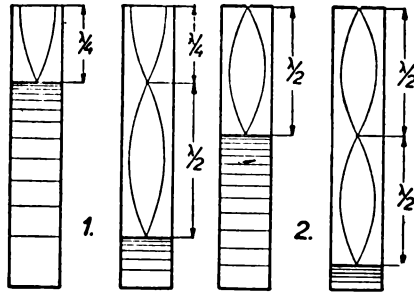
MĚŘICÍ METHODY

Všeobecně nutno poznamenat, že výsledky všech měření, provedených na základě věty (1) různými přístroji již uvedenými, jsou poněkud skresleny vlivem okolností, že neměříme délku vlny v dostatečně velkém prostoru volného prostředí. Ukazuje se totiž, že rychlost šíření zvuku v trubicích je účinkem vnitřního tření, tepelné vodivosti a působením konců trubice poněkud jiná než ve volném prostoru. Při obvyklé přesnosti měření lze však tyto vlivy pomíjet, pokud trubice má průměr aspoň 4 cm, zvláště u trubic skleněných. Jak

klesá rychlost, a tedy také vlnová délka zvuku s klesajícím průměrem trubice, vidíme z obr. 48,5 (podle měření, která provedl *Blaisley* a později *Muller*). Křivky označené S_n a S_v týkají se skleněných, křivky M_n , M_v mosazných trubíc; index n značí rychlosti tónů nižších a v vyšších kmitočtů.

48.1. Délka zvukové vlny — měření resonátorem

Poloha uzlů a kmiten ve válcovém resonátoru otevřeném [48,I] a uzavřeném [48,II] je naznačena na obr. 48,6, kde je podélné vlnění (zhuštění a zředění) znázorněno příčným chvěním. Podle toho resonátor rezonuje (nejsilněji zní), jestliže zvukové vlny, šířící se od zdroje vzduchovým sloupcem ve



Obr. 48,6. Uzly a kmitny ve válcovém resonátoru:
1 — nahore otevřeném; 2 — uzavřeném.

válci, mohou vytvořit odrazem na uzavřeném konci stojaté vlnění. Takové vlnění vznikne, je-li výška otevřeného resonátoru rovna lichému počtu čtvrtvln a výška uzavřeného resonátoru sudému počtu čtvrtvln (celistvému počtu půlvln). V obou případech se však dvě sousední výšky rezonujícího sloupce liší o poloviční délku vlny. Měříme vždy nejméně dvě polohy hladiny při resonanci, protože poloha krajní kmitny nesouhlasí přesně s okrajem válce.

Je tedy postup měření pro oba druhy resonátorů stejný:

1. Změříme teplotu vzduchu (nejlépe přímo v resonátoru).
2. Přiblížíme zdroj (na př. ladičku) k otvoru resonátoru a měníme výšku sloupce, až nastane resonance, kterou poznáme podle nejsilnějšího znění resonátoru. Doporučuje se naslouchat trubičkou, jejíž konec umístíme u otvoru resonátoru.
3. Měníme spojitě výšku sloupce tak, abychom zjistili *nejblíže* resonanci.
4. Měření obou výšek opakujeme desetkrát.
5. Změříme znovu teplotu.
6. Délka zvukové vlny ve vzduchu je rovna dvojnásobnému rozdílu průměrných výšek obou rezonujících vzduchových sloupců téže střední teploty.

48.2. Délka zvukové vlny v plynech — měření Kundtovou trubicí

Kundtovou trubicí [48,III] měříme délku vlny z obrazců vytvořených korkovým prachem. Obvykle se vytvoří řada uzlů, jejichž vzájemné vzdálenosti proměříme. Měříme buď celkovou vzdálenost l prvního a posledního uzlu, kterou dělíme počtem n půlvln, takže

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad (2)$$

nebo přesněji *postupnou methodou* (čl. 18) tak, že přiložíme k trubici měřítko, a aniž jím pohrneme, čteme polohu sudého počtu ($2k$) uzlů. První čtení pak odečteme od ($k + 1$), druhé od ($k + 2$) čtení atd., čímž dostaneme k rozdílů, rovných k -násobné vzdálenosti sousedních uzlů. Vypočteme průměr D těchto rozdílů a jeho pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}$ podle 12 (32). Pak délka vlny

$$\lambda = 2 \frac{D}{k} \pm \frac{2}{k} \bar{\vartheta}, \quad (3)$$

kde druhý člen je její pravděpodobná chyba.

Také je možno změřit zvlášť jednotlivé vzdálenosti sousedních uzlů (na př. posuvným měřítkem); při tom čteme po každé poloze obou uzlů, z výsledků vezmeme průměr a násobíme dvěma. Methody lze použít k měření délky zvukové vlny nejen ve vzduchu, ale i v jiných plynech, kterými naplníme trubici a pak utěsníme.

Potřeby: Kundtova trubice [48,III], dvoumetrové tyčové nebo posuvné měřítko [31,V].

Postup

1. Trubicí vysušíme (na př. mírným ohřátím nad topným tělesem) a postaráme se, aby byl také korkový prvek dokonale suchý. Nasypeme jej do trubice a setřese se tak, aby tvořil souvislý a stejnoměrný pruh na stěně trubice. Trubicí položíme do lůžek a stočíme ji poněkud (kolem osy), aby pruh korku byl na šikmém ploše, ale nesespál se dolů.

2. Přistavíme k otevřenému konci trubice zvukový zdroj a zasuneme s druhé strany pohyblivý píst P (obr. 48,2a). Změříme teplotu.

3. Rozezvučíme zdroj a hledáme polohu, při níž se vytvoří co *nejostřejší uzly* (kde korek zůstane v původní poloze) a *kměny* (v nichž se korek rozptýlí na drobně zvlněné čočkovité plošky).

4. Změříme vzdálenosti co největšího počtu uzlů, nejlépe postupnou methodou, a vypočteme délku vlny podle vzorce (2) nebo při použití postupné metody podle (3).

5. Měření opakujeme několikrát vždy s nově utvořenými obrazci.

Poloha uzlů v cm	Rozdíly v cm	Δ_+ cm	Pravděpodobná chyba průměru
1,2	35,2	34,0	$\bar{\vartheta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{18} = 0,05 \text{ cm}$
4,5	38,8	34,3	
8,1	42,2	34,1	
11,5	45,4	33,9	
14,7	48,9	34,2	
18,3	52,1	33,8	
21,6	55,5	33,9	
24,0	58,4	34,4	
27,2	61,6	34,4	
30,7	64,7	34,0	
Průměr $D = 10 \frac{\lambda}{2} = 34,10 \text{ cm}$		$\Sigma \Delta_+ = 0,9 \text{ cm}$	

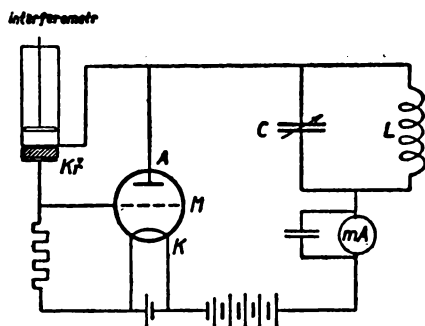
Příklad. Byla měřena délka zvukových vln ve vzduchu. Teplota vzduchu v Kundtově trubici byla $20,5^\circ \text{C}$. Zvukovým zdrojem byla skleněná tyč délky $99,8 \text{ cm}$, průměru $1,8 \text{ cm}$, upevněná v 1. a 3. čtvrtině (obr. 48,2a) a třená podélně sukem navlhčeným vodou s octem. Přesným dřevěným měřítkem bylo proměřeno 20 uzlů a zpracováno postupnou methodou.

Dosažením do (3) za $k (= 10)$, D , $\bar{\vartheta}$ dostaneme vlnovou délku:

$$\lambda = (6,82 \pm 0,01) \text{ cm}. \quad (4)$$

48.3. Interferenční metoda měření vlnové délky

Délku zvukových vln — zvláště velmi krátkých — lze měřit *Quinckeho* trubici [48, IV], obr. 48,3. Zdroj umístíme před vstupním otvorem *A* a zvuk po interferenci vedeme od *B* hadičkou k uchu. Posunutím oblouku T_1 dolů o délku d prodlouží se dráha zvuku o $2d$. Vysouváme-li oblouk T_1 , pozorujeme, že se zvuk střídavě zesiluje a zeslabuje; je to způsobeno tím, že se dráhový rozdíl zvuku v obou trubiciích mění. Je-li právě roven lichému počtu půlvln, je zvuk nejslabší, při rozdílu rovném sudému počtu půlvln (tedy celému počtu vln) je



Obr. 48,7. Zapojení interferometru.

naopak nejsilnější. Posouváme-li oblouk T_1 stále týmž směrem, liší se délky trubice pro dvě po sobě jdoucí minima právě o celou délku vlny. Posunutím oblouku T_1 o délku d zvětší se dráha zvuku o $2d$, a tedy dvě sousední zeslabení nastanou v polohách vzdálených o délku d , určenou podmínkou

$$2d = \lambda.$$

Délku vlny měříme tak, že zjistíme (na př. při prodlužování trubice T_1) dvě po sobě jdoucí zeslabení a na milimetrovém měřítku čteme polohu výsuvného oblouku. To opakujeme několikrát a z vypočtených rozdílů dvou a dvou poloh vezmeme střed, čímž dostaneme d . Pak vlnová délka

$$\lambda = 2d.$$

48.4. Délka nadzvukové vlny — měření interferometrem

Měření vlnových délek, které při nadzvukových frekvencích jsou ve vzduchu řádu 10^{-4} cm \div 1 cm, provádí se interferometrem [48, V] v podstatě stejným způsobem jako uzavřeným rezonátorem, tedy způsobem popsaným v 48.1. Hlavní rozdíl je v tom, že nemůžeme sluchem postřehnout resonanci, která nastává podle obr. 48,4, když vzdálenost pístu *R* od plochy křemene *K* je rovna celistvému násobku půlvlny. Při zapojení *Pierceově* (obr. 48,7)³⁾ projeví se resonance změnou anodového proudu triody (měřeného miliampérmetrem *mA*), k jejíž mřížce *M* je připojena jedna elektroda křemenné destičky. Oscilační okruh se vyladí na vlastní kmity destičky ladicím kondensátorem *C*. Také je možno zjistit resonanci přímo ze změny střídavého vysokofrekvenčního proudu, kterým se udržují kmity křemene (*Hubbard* 1932).

48 ³⁾ Srov. schema 76,2 elektronkového oscilátoru [76, III].

Měření rezonančními interferometry může být velmi přesné (poměrná chyba menší 0,1%), ale musíme splnit všechny nutné podmínky (stálá teplota, rovinné vlny, náležitá velikost křemene).

Interferometr je vhodný pro měření délky vlny jak v plynech, tak v kapalinách. V kapalinách lze vedle toho použít i jiných metod, zejména *ohybu světelných vln* na prostorové mřížce, vytvořené v kapalině stojatým vlněním ultrasonickým (změnám hustoty kapaliny v rovnoběžných rovinách pravidelně rozložených přísluší změny indexu lomu, čímž vzniká jistý druh optické mřížky, viz pozn. 47²⁾).

49. RYCHLOST ZVUKU

Definice. Rychlost zvuku c je dráha zvukové vlny, dělená dobou.

Jednotky. Místo v absolutních jednotkách $[c]_a = \text{cm s}^{-1}$ měří se obvykle v jednotkách MKSA:

$$[c] = 100 [c]_a = \text{m s}^{-1}.$$

Rychlost zvuku v plynech a v kapalinách je dána *Laplaceovým* vzorcem

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (1)$$

kde K je *modul objemové pružnosti*¹⁾ a ρ hustota prostředí. V látkách pevných vznikají také vlny příčné (kmity kolmé ke směru postupu vlny) a úloha je složitější. Nicméně platí pro *podélné* vlny v *tenkých* tyčích (jejichž průměr je malý proti délce zvukové vlny) vzorec podobný vzorci (1)²⁾

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2)$$

kde E je modul pružnosti (v tahu) a ρ hustota tyče. Z uvedených vzorců vidíme, že rychlost zvuku závisí na mechanických konstantách prostředí, ale neměla by záviset na kmitočtu, tedy na délce vlny. To skutečně platí pro t. zv. *jednoatomové* plyny, složené z molekul tvořených jediným atomem (jak je tomu na př. u netečných plynů). Málo závisí na frekvenci také rychlost zvuku v kapalinách; naproti tomu rychlost zvuku v *několikaatomových* plynech, jejichž molekuly obsahují dva nebo více atomů, závisí na kmitočtu, a to zvláště v oboru vln nadzvukových. Slyšitelné tóny šíří se i v těchto plynech prakticky rychlostí danou vzorcem *Laplaceovým* (1), který můžeme psát ve tvaru

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (3)$$

kde p značí tlak plynu a κ *Poissonovu* konstantu rovnou poměru specifických tepel plynu při stálém tlaku a při stálém objemu. Přihlížíme-li konečně k závislosti hustoty plynu na teplotě a tlaku, dostaneme vzorec³⁾

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t)}, \quad (4)$$

49¹⁾ TF 2.9.2.

49²⁾ TF 3.2.8.

49³⁾ TF 3.3.4.

kde p_0 je tlak 1 atm = $1,013\ 25 \cdot 10^5$ N m⁻², ρ_0 — hustota plynu za tlaku p_0 a teploty 0 °C a γ — teplotní roztažnost plynu, rovná pro všechny plyny přibližně $\frac{1}{273^\circ}$. Dosadíme-li pro vzduch za ρ_0 hodnotu 22 (9) a $\kappa = 1,405$, dostaneme³⁾

$$c = c_0 \sqrt{1 + \gamma t} \doteq 331,8 (1 + 0,001\ 83 t) \text{ m/s}, \quad (5)$$

kde $c_0 = 331,8$ m/s je zvuková rychlost v suchém vzduchu za normálních podmínek (0 °C, 1 atm).

V přírodě i v laboratoři obsahuje vzduch jisté množství vodních par — vzduch je vlhký. Podle 22 (12) je hustota δ vlhkého vzduchu za stejných podmínek menší než hustota suchého vzduchu, tedy rychlost zvuku c' ve vlhkém vzduchu bude větší. Přítomností vodních par se však zmenší hodnota konstanty κ na κ' , neboť vodní pára má tříatomové molekuly H₂O. Vypočítáme-li tyto změny pro teplotu 20 °C a poměrnou vlhkost 50%, dostaneme

$$\frac{\rho}{\delta} = 1,004, \quad \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1,402}{1,405} = \frac{1}{1,002},$$

a tedy podle (3)

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa} \cdot \frac{\rho}{\delta}} = 1,001.$$

Rychlost je tedy při 50% vlhkosti o 1‰ větší a tento přírůstek roste s teplotou. Stejným výpočtem dostaneme, že při 100% vlhkosti stoupne zvuková rychlost o 2‰, v soulase s měřením.⁴⁾ Snadno odvodíme z hořejšího výsledku a z rovn. (5), že v okolí 20 °C je rychlost zvuku ve vzduchu 50% vlhkosti dána vzorcem

$$c' = [344,3 + 0,62 (t - 20^\circ)] \text{ m/s}. \quad (6)$$

MĚŘICÍ METODY

Rychlost zvuku můžeme určit podle předešlých vzorců (aspoň pro slyšitelný obor), zjistíme-li potřebné konstanty nebo najdeme-li je pro příslušnou teplotu v tabulkách. *Rychlost zvuku ve vzduchu vypočteme prostě tak, že změříme teplotu vzduchu t a dosadíme do vzorce (5), nebo v okolí 20 °C přesněji podle vzorce (6).* Jinak se určuje rychlost zvuku ze základní rovnice 47(2) jako *součin kmitočtu a vlnové délky*. Podle toho, jaké metody uijeme pro zjištění těchto dvou veličin, dostaneme různé nepřímé metody měření rychlosti. Nejčastěji se volí zvukový zdroj známé frekvence (ladička, tónový generátor a pod.) a měří se jen délka vlny. Někdy je opět dána délka vlny a měří se kmitočet nebo konečně se měří délka vlny téhož zvuku v různých prostředích a z nich se počítá poměr rychlostí.

49.1. Měření rychlosti zvuku známého kmitočtu v plynech a kapalinách

Při této metodě použijeme zvukového zdroje známého, přesně definovaného kmitočtu, tedy buď ladičky [47,II], nejlépe elektromagnetické [47,III], nebo elektronkové [47,IV], nebo jiného generátoru [47,VI; VIII]. Pro ultrazvuk použijeme příslušných zdrojů [47,V; VII; VIII].

49 ⁴⁾ Srov. [66].

Délku vlny zvoleného zdroje změříme v prostředí, v němž chceme určit zvukovou rychlost. Jde-li o plyn, užijeme resonátoru otevřeného [48,I] nebo uzavřeného [48,II], event. *Kundtovy* trubice [48,III]. Postup měření je uveden v 48.1 nebo v 48.2. Jde-li o kapalinu, použijeme rezonančního interferometru, na př. [48,V], a zdroj volíme s tak velkým kmitočtem, aby délka vlny byla několikrát menší než průměr měřicího válce interferometru. Měříme methodou 48.4.

49.2. Rychlost zvuku v plynech a kapalinách měřením vlnové délky a kmitočtu

Spojením method popsanych v předešlém článku 49.1 s methodami měření kmitočtu dojdeme k methodám měření rychlosti zvuku vydávaného libovolným zdrojem. Tak na př. pro měření kmitočtu lze použít buď metody chronografické 47.1, nebo strunáku, jak popsáno v 47.3. Pro jiné plyny než vzduch hodí se Kundtova trubice [48,III], pro kapalinu ovšem zase interferometr [48,V] s nadzvukovým zdrojem.

49.3. Rychlost zvuku v tyči měřením kmitočtu

Tyč je zdroj zvuku o známé délce vlny. Rozkmitáme-li tyč podélně, vydává zvuk, který se šíří v tyči rychlostí rovnou součinu z délky vlny a kmitočtu. Podle způsobu upevnění tyče soudíme na polohu uzlů a kmíten podélného stojatého vlnění a podle věty 48 (1) zjistíme délku vlny. Upevníme-li tyč uprostřed, má v tomto místě uzel a na obou koncích kmítny. Délka tyče l rovná se tedy dvěma čtvrtvlnám a délka vlny je rovna dvojnásobné délce tyče:

$$\lambda = 2l.$$

Upevníme-li však tyč v první a třetí čtvrtině (jako na obr. 48,2), víme podle 48 (1), že čtvrtina tyče je rovna čtvrtvlně a že

$$\lambda = l. \quad (7)$$

Délku vlny tedy známe předem a stačí změřit kmitočet tyče, který určíme nejnázve strunákem [47,I] methodou 47.3 (nebo máme-li zdroj blízkého kmitočtu, methodou rázů 47.2).

49.4. Poměr zvukových rychlostí srovnáním vlnových délek

Z rovnice 47 (2) plyne, že rychlosti téhož tónu v různých látkách jsou v poměru vlnových délek:

$$c_1 : c_2 = \lambda_1 : \lambda_2. \quad (8)$$

Toho lze použít k určení poměru rychlostí, změříme-li vlnovou délku téhož zvuku ve dvou prostředích. Užijeme-li jako druhého prostředí vzduchu, můžeme rychlost c_2 vypočítat podle vzorce (6), čímž se naše metoda stává absolutní. Tak můžeme měřit na př. methodou Kundtovou 48.2 rychlost zvuku v *plynech* i v látkách pevných, na př. v *tyčích*.

K určení rychlosti zvuku v tenké tyči použijeme tohoto postupu (obr. 48,2):

1. Upevníme tyč ve dvou místech (v 1. a 3. čtvrtině); pak podle (7) $\lambda_1 = l$. Proto změříme délku tyče přesným měřítkem.

2. Na jeden konec tyče dáme kruhovou destičku, kterou zasuneme do Kundtovy trubice, připravené podle 48.2.

3. Podélným třením tyče (kovové koží s kalafunou, skleněné sukmem navlhčeným vodou s octem) rozkmitáme ji tak, aby vydávala nejsilnější svůj základní (nejnižší) tón.

4. Způsobem popsaným v 48.2 vytvoříme a proměříme uzlové obrazce, z čehož vypočteme vlnovou délku λ_2 zvuku ve vzduchu, jehož teplotu t změříme.

5. Vypočteme c_2 ze vzorce (6) a dosazením do (8) dostaneme pro rychlost zvuku v tyči

$$c_1 = \frac{l}{\lambda_2} c_2. \quad (9)$$

Příklad. Byla měřena rychlost zvuku ve skleněné tyči délky $l = 99,8$ cm, průměru 1,8 cm při teplotě 20,5 °C. Tyč byla upevněna ve dvou svorkách (v 1. a 3. čtvrtině své délky jako v obr. 48,2) tak, že $\lambda_1 = l$. Podélným třením byla rozechvěna a vytvořeny Kundtovy obrazce. Byla proměřena postupnou methodou poloha 20 uzlů, což dalo výsledek

$$\lambda_2 = (6,82 \pm 0,01) \text{ cm},$$

jak bylo podrobně uvedeno v příkladu 48.2. Rychlost zvuku ve vzduchu vypočteme podle (6) $c_2 = 344,5$ m/s a dosazením do (9) získáme rychlost ve skle

$$c_1 = (5040 \pm 7) \text{ m/s}. \quad (10)$$

Pravděpodobná chyba výsledku byla určena za předpokladu, že l je změřeno s krajní chybou 1 mm, tedy podle 18 (4) s poměrnou pravděpodobnou chybou 0,2‰, kterou lze proti chybě λ_2 pominout, což platí ovšem i o chybě rychlosti c_2 .

50. SÍLA ZVUKU

Definice. Síla zvuku I (fyzikální intenzita zvuku) je rovna intenzitě zvukových vln. U postupných vln je to energie prošlá za vteřinu plošným prvkem, kolmým ke směru šíření zvuku, a dělená velikostí prvku. Síla zvuku je tedy dána měrným výkonem zvukových vln a vyjadřuje se obvykle výrazem

$$I = \frac{p_e^2}{c\rho}, \quad (1)$$

kde p_e značí t. zv. *efektivní tlak*¹⁾ zvukové vlny, c její rychlost a ρ hustotu prostředí.

Jednotky

$$\text{MKSA } [I] = \text{watt} \cdot \text{m}^{-2} = 10^{-4} [I]_p.$$

$$\text{Absolutní jednotka } [I]_a = \text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

$$\text{Praktická jednotka } [I]_p = \text{watt} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^7 \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

V praxi se měří buď v absolutních jednotkách, nebo v miliontinách praktické jednotky:

$$1 \mu\text{W/cm}^2 = \text{mikrowatt/cm}^2 = 10 [I]_a = 10^{-6} [I]_p.$$

Efektivní tlak se měří v jednotkách absolutních $[p_e]_a = \text{dyn cm}^{-2} = \text{barye}$. Ve vzduchu odpovídá absolutní jednotce síly efekt. tlak

$$p_{e1} = 6,44 \text{ barye}, \quad (2)$$

jak plyne dosazením hustoty vzduchu při 20 °C, tlaku 760 torů a zvukové rychlosti, určené podle 49 (6), do vztahu (1).

50 ¹⁾ TF 3.3.1.

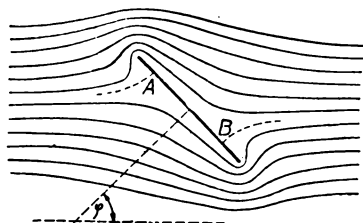
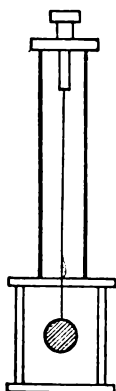
Přístroje

Přístroje, jimiž se měří síla zvuku, jsou velmi rozmanité. Lze je dělit na ryzo *mechanické* a *elektrické*, které se zakládají na podobných principech jako elektrické zvukové zdroje.

Mechanické přístroje

50,I **Rayleighova destička** (1882) je dnes již klasický přístroj, který přesto zůstává i v moderní době základem absolutního měření a kterým se cejchují novější měřicí přístroje. Je to tenká destička (nejčastěji kruhová), obvykle slídová, zavěšená svisle na tenounkém vlákně, které tvoří prodloužení jejího svislého průměru. (Obr. 50,1.) Účinek zvukových vln na destičku odvodíme

v 50.1 z jednoduššího případu působení *ustáleného* proudění. Proudění, t. j. křivky udávající svým směrem směr proudu a svou hustotou jeho rychlost²⁾, mají při obtékání destičky, skloněné k původnímu směru proudu o $\varphi = 45^\circ$, v ustále-



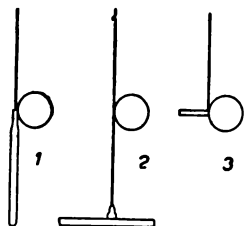
Obr. 50,1. Rayleighova destička. Obr. 50,2. Proudění kolem šikmo postavené destičky

ném stavu tvar naznačený zhruba na obr. 50,2. Je zřejmo, že rychlost je nejmenší (nulová) ve dvou místech *A* a *B*, v nichž je proud kolmý na destičku. Z nauky o proudění je známo, že tlak v proudící kapalině nebo plynu je tím menší, čím větší je rychlost proudění.²⁾ Tedy s levé strany působí na destičku největší tlak v *A*, tlak s pravé strany je však největší v místě *B*. Z toho vidíme, že na destičku otáčivou kolem průměru působí proudící prostředí točivou dvojicí, která ji stáčí do polohy kolmé k původnímu směru proudění. Tato dvojice se při tom zmenšuje, ježto místa největšího tlaku se blíží ose otáčení, které dosáhnou právě v kolmé poloze, která je u volné otáčivé destičky stabilní. Zavěsíme-li však destičku na vlákně, které se při stáčení destičky zkroutí, ustálí se destička v takové poloze, v níž torsní dvojice je v rovnováze s výslednou dvojicí tlakovou, kterou lze takto měřit.

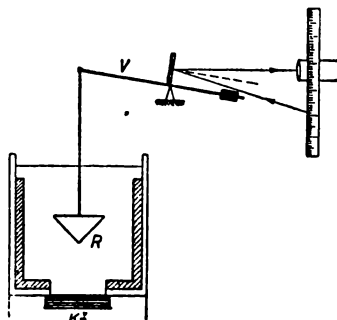
Způsob měření je blíže popsán v 50.1, zde jen uvedeme, že destička musí být velmi tenká a její průměr musí být malý proti délce zvukové vlny, aby platil theoretický vzorec *Königův* (5), který je základem absolutních měření. Pokusně byly zjištěny odchylky již při průměru větším než asi osmina délky vlny. Konstrukce musí být velmi jemná a destička musí být chráněna před vzdušnými proudy. K cejchování amplitud lze použít na př. zařízení (*Meyer* 1926), které odpovídá nákrese 50,1. Slídový kruhový lístek průměru 5 mm,

tloušťky 0,05 mm, s drobkým zrcadélkem³⁾ je zavěšen na tenounkém drátku (několik tisícín mm) délky 10 cm ve svislé trubici, nasazené na malé skřínce. Postranní stěny skřínce jsou z pórovité tkaniny (gázy), která chrání před vzdušnými proudy. Velmi slabé zvuky lze měřit resonátorem s výstupním otvorem obráceným k destičce.

Pro zvuky dosti silné je možno použít jiného mechanického způsobu měření intenzity. Jsou to *radiometry*, kterými se měří *tlak zvukových vln*, dopadajících kolmo na plochu známé velikosti. Jde o jev obdobný tlaku záření, kterým působí světlo a vůbec každé vlnění, šířící se nějakým prostředím. Ukazuje



Obr. 50,3. Boyleův torsní radiometr:
1 — vlákno dole zatíženo; 2 — vlákno svisle napjato; 3 — destička vyvážená.



Obr. 50,4. Měření síly ultrazvuku Baumgardtovým radiometrem.

se totiž, že tento tlak na 1 cm² je *přímo úměrný síle zvuku*, nepřímou zvukové rychlosti a že je tím větší, čím dokonaleji plocha zvuk odráží. Na obr. 50,3 jsou naznačeny tři tvary jednoduchého radiometru Boylova (1930), který měří velikost zvukového tlaku, působícího na lehkou (na př. slídovou) kruhovou destičku, upevněnou excentricky na svislém vlákně. Z pootočení destičky soudíme na velikost tlaku a sílu zvuku.

Přesněji pracuje radiometr Baumgardtův (1938), který je na obr. 50,4 znázorněn při měření síly ultrazvuku vycházejícího z krystalového generátoru [47,VII] *Kř*. Místo ploché destičky má kuželový reflektor *R* (dokonale odrážející). Tlak se určí z výchylky vahadla *V*, měřené zrcátkovou methodou (čl. 18). Stěny nádoby jsou tlumeny (plstí nebo osinkem), aby pohltily vlny odražené od *R* (47²⁾).

Radiometry jsou zvláště vhodné k měření síly ultrazvuku, a to jednak vzhledem k jeho značné energii, jednak pro krátkost jeho vln. Podmínkou správného měření radiometry je nutnost, aby rozměry tlakové plochy byly velké proti vlnové délce. Zde jsou poměry obrácené než u *Rayleighovy* destičky, která by pro ultrazvuk musela mít příliš nepatrné rozměry.

Elektrické přístroje

Elektrické (nebo elektromechanické a magnetomechanické) přístroje k měření síly zvuku mění nejprve mechanické kmity v elektrické, jejichž amplituda nebo energie se pak měří buď přímo, nebo se dříve vhodně zesílí (elektronkovým zesilovačem).⁴⁾

50 ³⁾ K měření výchylky destičky zrcátkovou methodou také bývá destička sama postříbřena.

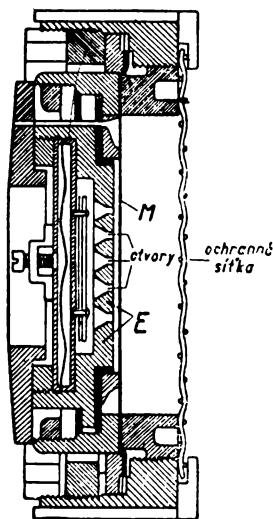
50 ⁴⁾ TF 5.12.5.

50,II

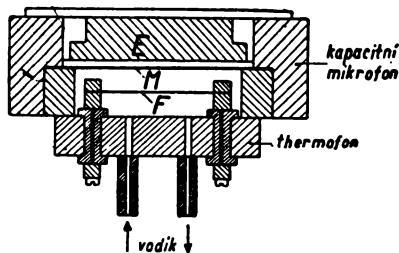
50,III

50,IV

Vlastní přijímač zvuku, jímž se přeměna provádí, může být sestaven na různých principech; jejich studiem se zabývá elektroakustika. Uvedeme jen kapacitní (kondensátorový) mikrofon,⁵⁾ který je velmi vhodný pro měřicí účely, zvláště jeho americký tvar (Wente 1917), znázorněný v řezu na obr. 50,5. Je to v podstatě kondensátor s jednou elektrodou E pevnou, kdežto druhou tvoří napjatá membrána M . Zvukem se tato membrána rozechvěje, takže se periodicky mění kapacita. Při stálém napětí vzniká proto při spojení elektrod střídavý



proud, který je mírou síly zvuku. Pevná elektroda bývá dírkovaná, aby se zmenšila pružnost vzduchové „podušky“ mezi elektrodami. Vzadu je zařízení na tlumené vyrovnávání tlaku. Přístroj má tu výhodu, že duraluminiová membrána je velmi napjata a její vlastní kmitočet je tak vysoký (10 až 17 kc/s), že leží mimo obor měřených tónů. Proto má přibližně stálou citlivost



Obr. 50,5. Kapacitní mikrofon Wenteův. Obr. 50,6. Cejchování mikrofonu thermofonem.

v dosti velkém oboru slyšitelných zvuků. Kapacitní mikrofon je ovšem nutno cejchovat, což se provádí buď elektrostaticky, nebo thermofonem [47, IX], nebo Rayleighovou destičkou [50, I]. Cejchování thermofonem je schematicky naznačeno na obr. 50,6. Thermofon se přiloží k mikrofonu tak, že mezi folií F thermofonu a membránou M mikrofonu vznikne uzavřená „tlaková komora“, v níž vznikají periodické změny tlaku, jak bylo vyloženo při popisu thermofonu. Amplituda těchto změn se dá vypočítat z konstant užitého zařízení a převést na sílu zvuku.

MĚŘICÍ METODY

Pro sílu zvuku jsme uvedli výraz (1), kde p_e značí efektivní tlak prostředí; jeho čtverec je roven střední hodnotě čtverce střídavého tlaku, který vzniká zhušťováním a zředováním prostředí, způsobeném akustickými kmity. Podobně lze definovat také efektivní rychlost kmitovou v_e (zvanou též akustická rychlost⁶⁾ v_e), jejíž čtverec je rovněž dán střední hodnotou čtverců proměnných okamžitých rychlostí v , kterých nabývá částice při harmonickém kmitání.

50⁵⁾ TF 3.3.6.

50⁶⁾ Tuto rychlost je třeba rozlišovat od rychlosti zvuku c , kterou postupují zvukové vlny v prostředí.

Energie kmitající částice hmoty m je rovna součtu pohybové energie $\frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energie, jejíž průměrná hodnota je rovna střední hodnotě pohybové energie.⁷⁾ Střední hodnota celkové energie je tedy rovna mv_e^2 . Střední energie objemové jednotky (malé proti délce vlny) je tedy ρv_e^2 a při postupu vlny rychlostí c projde za vteřinu plochou 1 cm^2 energie obsažená ve sloupci o podstavě 1 cm^2 a výšce c . To je však fyzikální intenzita čili síla zvuku:

$$I = c\rho v_e^2. \quad (3)$$

Srovnáním výrazů (1) a (3) plyne konečně vztah

$$p_e = c\rho \cdot v_e, \quad (4)$$

kde součin $c\rho$ se nazývá *zvukový odpor*; je to konstanta úměrnosti mezi efektivními hodnotami kmitové rychlosti a zvukového tlaku.

Z předešlého výkladu je patrné, že sílu zvuku můžeme určit měřením buď efektivního tlaku p_e , nebo efektivní kmitové rychlosti v_e , jejichž čtvercům je síla zvuku úměrná. K tomu přistupuje další možnost, určit sílu zvuku z tlaku zvukového záření, jemuž je také úměrná. Tato poslední metoda radiometrická byla vyložena již při popisu příslušných přístrojů [50, II], [50, III] a je vhodná především pro měření intenzity ultrazvuku.

Absolutní měření síly slyšitelných zvuků provádí se fyzikálně nejlépe na základě měření efektivní kmitové rychlosti V , a to nejčastěji Rayleighovou destičkou [50, I]. Také lze použít t. zv. *ochlazovacího efektu*, který záleží v tom, že velmi tenký (několik μ) platinový drát vyhříváný elektrickým proudem se při dopadu zvukové vlny ochladí kmitavým pohybem částic vzduchu, způsobeným akustickým vlněním. Ochlazení se měří změnou elektrického odporu drátku (Tucker 1921, Richardson 1926, Waetzmann 1930). Praktická měření se ovšem konají methodami elektroakustickými, na př. kapacitním mikrofonom [50, IV].

50.1. Měření síly zvuku Rayleighovou destičkou

Z theorie obtékání kruhové destičky („nekonečně tenké“) o poloměru a , jejíž normála svírá se stálou rychlostí v , homogenního proudu úhel ϑ , plyne, že dvojice zmenšující úhel ϑ má velikost (König 1891)

$$M = \frac{4}{3} \rho a^3 v_e^2 \sin 2\vartheta, \quad (5)$$

značí-li ρ hustotu prostředí. Tento moment je úměrný druhé mocnině rychlosti, a tedy nezávislý na jejím znaménku. Proudí-li vzduch střídavě sem a tam proměnnou kmitovou rychlostí, pak střední hodnota momentu je dána střední hodnotou čtverce rychlosti, t. j. čtvercem efektivní rychlosti v_e . Platí to ovšem za předpokladu, že proud je v celém rozsahu destičky stejnorodý, že tedy průměr destičky je malý proti délce vlny. Kromě toho musí být zdroj tak daleko od destičky, aby dopadající vlna byla dosti přesně rovinná. Z rovnice (5) můžeme tedy vypočítat rychlost v_e a ovšem podle (3) také sílu zvuku

$$I = \frac{3}{4} \frac{c}{a^3} \frac{M}{\sin 2\vartheta}, \quad (6)$$

změříme-li moment M pro danou výchylku ϑ a známe-li zvukovou rychlost c . Moment M se vyrovná torsní dvojici, která je podle 42 (19) úměrná úhlovému stočení destičky. Moment (5) je největší pro $\vartheta = 45^\circ$, a proto se otáčivá hlavice závěsu otočí tak, aby destička před dopadem zvukové vlny visela v této poloze.

Potřeby: *Rayleighova* destička [50,I], dalekohled se stupnicí [20,V], event. značková lampa [20,VI].

Postup

Otáčivou hlavici závěsu destičky upravíme její polohu tak, aby svírala 45° s očekávaným směrem zvuku (nejlépe použitím zrcátkové metody, obr. 20,6).

2. Změříme teplotu místnosti a určíme nulovou polohu n_0 na stupnici.

3. Uvedeme v činnost měřený zvukový zdroj — dosti vzdálený — a čteme polohu na stupnici n (několikrát).

4. Vypneme zdroj, opakujeme určení polohy n_0 a změříme znovu teplotu.

5. Vychýlíme mírně destičku (na př. slabým vzdušným proudem) a změříme její dobu kyvu $\bar{\tau}$ na vlákně. Tato doba je vzhledem k značnějšímu útlumu delší než doba τ kyvů netlumených. Obě souvisí podle 26 (18) a 26 (20') vztahem

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2}}},$$

kde A je logaritmický dekrement útlumu, t. j. přirozený logaritmus poměru dvou po sobě jdoucích výchylek na touž stranu.

6. Ze známé hmoty a z rozměrů destičky vypočteme její moment setrvačnosti J podle 40 (8).

7. Dosazením τ a J do 42 (23) určíme konstantu úměrnosti K mezi torsní dvojicí vlákně a výchylkou φ destičky.

8. Vypočteme moment

$$M = K \varphi.$$

9. Vypočteme rychlost zvuku c pro střední teplotu podle vzorce 49 (6).

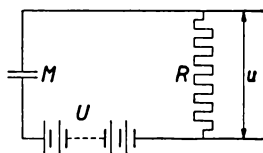
10. Sílu zvuku vypočteme podle vzorce (6), kladouce

$$\vartheta = 45^\circ - \varphi.$$

Poznámka. Je-li hlavice závěsu vlákna dosti přesně dělena, lze místo úkonu 3 vyrovnat moment zvukové vlny opačným natočením hlavice tak, aby destička zaujala zase původní polohu. Další postup je stejný, klademe-li v 8 za φ velikost otočení hlavice, jenom výpočet 10 se zjednoduší tím, že ve vzorci (6) je nyní $\vartheta = 45^\circ$, tedy $\sin 2\vartheta = 1$.

50.2. Síla zvuku — měření kapacitním mikrofonom

Měření kapacitním mikrofonom [50,IV], jehož *frekvenční křivka* (udávající závislost citlivosti na kmitočtu měřeného zvuku) byla stanovena cejchováním, provádí se několika způsoby. Schema 50,7 udává princip t. zv. nízkofrekvenčního zapojení mikrofону M , na který dopadá tón kmitočtu ν ; předpokládáme, že budí harmonické (sinusové) změny kapacity mikrofону o amplitudě C . Je-li klidová kapacita C_0 , vznikne na velmi velkém odporu R ($10 \div 50 \text{ M } \Omega$) střídavé, rovněž sinusové napětí



$$u = \frac{RUC}{\sqrt{R^2 C_0^2 + \frac{1}{4\pi^2 \nu^2}}} \sin 2\pi \nu t,$$

jestliže $\frac{1}{2\pi\nu} \ll RC_0$ a $C \ll C_0$. Stálé napětí U bývá $100 \div 400$ voltů. Střídavé napětí u je ovšem velmi slabé a vede se obvykle na mřížku zesilovací elektron-

Obr. 50,7. Nízkofrekvenční zapojení kapacitního mikrofону.

ky. Citlivost bývá v mezích $1 \div 10$ mV/barye, což přepočteno podle (2) na jednotky síly zvuku (měrný výkon) dává citlivost asi $6 \div 60$ mV/[I_0], čili $60 \div 600$ mV/ μ W cm⁻².

51. HLADINA INTENSITY A HLADINA HLASITOSTI

Definice. Hladina intenzity zvuku B je logaritmická míra síly zvuku, rovná desetinásobnému dekadickému logaritmu poměru síly zvuku I k jisté základní síle zvuku I_0 , zvané *prahová intenzita*

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}. \quad (1)$$

Nulový bod takto definované stupnice, ve kterém $B = 0$, je podle mezinárodní dohody (1937) definován měrným výkonem.

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} = 10^{-6} \mu\text{W m}^{-2} = 10^{-12} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

čili

$$I_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-10} \mu\text{W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-9} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

nebo efektivním tlakem

$$p_{e0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2}$$

čili

$$p_{e0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ barye} = 0,0002 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}; \quad (3)$$

pro týž tlak ve vzduchu 20 °C za tlaku 760 torů plyne z 50 (1) a 50 (2) poněkud větší hodnota

$$6,44 \sqrt{10^{-9}} \text{ barye} = 204 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-2} = 0,000 204 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Jednotky. Jednotkou bezrozměrného čísla B je ve všech soustavách $[B] = 1 = \text{decibel} = 1 \text{ dB}$. Hladinu intenzity rovnou 1 má zvuk měrného výkonu (srov. čl. 5):

$$I_1 = \sqrt[10]{10} I_0 = 1,259 I_0 = 1,259 \cdot 10^{-6} \mu\text{W m}^{-2} \quad (4)$$

a efektivního tlaku

$$\sqrt[20]{10} p_{e0} = 224 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-2} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ barye} = 0,000 224 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Přístroje a měřicí metody jsou stejné jako pro sílu zvuku, jak byly popsány v předešlém článku 50.

Hladina intenzity je základem pro definici další veličiny, která není již ryze fyzikální. Je to *hladina hlasitosti* čili *zdánlivá (subjektivní) intenzita zvuku, vnímaná normálním lidským uchem* zvaná dříve jenom *hlasitost*. V dalším výkladu se přidržíme tohoto staršího názvu, přesto, že nyní hlasitostí rozumíme jinou veličinu (viz TF čl. 3.3.3).

Definice. Hlasitost H zvuku je rovna hladině intenzity tónu o kmitočtu 1000 Hz, který má pro ucho stejnou zdánlivou intenzitu.

Jednotky. Jednotkou hlasitosti je fon (phon) = Ph = *hlasitost tónu frekvence 1000 Hz, jehož hladina intenzity se rovná 1 decibelu* (srov. 5).

Počet fonů libovolného zvuku je tedy roven počtu decibelů stejně hlasitého tónu frekvence 1000 Hz, který se nazývá *srovnávací* neboli *referenční tón*. Z toho plyne, že referenční tón intenzity 0 dB má hlasitost rovnu nule (0 Ph). Proto byl při definici hladiny intenzity zvolen za nulový bod měrný výkon (2), který má referenční tón takové síly, že normálnímu uchu právě ještě není slyšitelný (zvukový „práh“), kdežto týž tón síly (4) již bezpečně slyšíme. Také velikost decibelu (zvětšení síly zvuku o 26%) odpovídá právě nejmenšímu rozdílu hlasitosti, který ucho ještě postřehne.¹⁾

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Methody na měření hlasitosti jsou dvojího druhu: *subjektivní a objektivní*. K prvnímu druhu patří metoda srovnávací a metoda přehlušení.

Metoda srovnávací (*Barkhausen* 1926) záleží v tom, že srovnáváme měřený zvuk s referenčním tónem, jehož sílu můžeme spojitě měnit. Nasloucháme oběma srovnávacím zvukům buď týměž uchem — ovšem střídavě — nebo měření zařídíme tak, abychom současně slyšeli oba zvuky, každý jedním uchem (na př. telefonem nebo naslouchátkem). Sílu referenčního tónu (1000 Hz) měníme tak dlouho, až oba zvuky mají pro naše ucho stejnou hlasitost. Nato určíme sílu zvuku (nebo přímo hladinu intenzity) referenčního tónu v decibelech a týměž číslem je dána hlasitost měřeného zvuku ve fonech. Přitom není třeba srovnávat zvuk *přímo* s referenčním tónem, stačí srovnání s kterýmkoli zvukovým zdrojem, jehož hlasitost ovšem musí být zjištěna srovnáním s tónem frekvence 1 kHz. Při měření to může být právě výhodné, neboť srovnání dvou zvuků různé výšky a barvy je tím nesnadnější — a ovšem i méně přesné — čím více se oba zvuky liší. Proto je výhodno používat k měření hlasitosti několik zdrojů různé povahy, cejchovaných ve fonech podle referenčního tónu. Konstruují se vhodné přístroje přenosné, které mívají více rozsahů hlasitosti v celkovém oboru od 0 do $110 \div 130$ fonů.

Metoda přehlušení je založena na známém jevu, že dosti silný zvuk může úplně znemožnit současně vnímání slabšího zvuku, který, jak říkáme, je silnějším zvukem přehlušen. Tu lze zjistit zvýšení zvukového prahu z hodnoty známé pro určitý zvuk v úplně tichém prostoru na hodnotu, které musí dosáhnout jeho hlasitost, aby byl slyšitelný zároveň s měřeným zvukem. Toto zvýšení lze pokládat za míru jeho hlasitosti nebo přímo položit jeho hlasitost rovnu maximální hlasitosti ještě přehlušeného zvuku, kterou spojitě měníme. Měření lze provést na př. tímto jednoduchým způsobem (*Davis* 1930): Jako přehlušovaného zvuku použijeme tónu ladičky, kterou rozezvučíme vždy stejným způsobem. Ladička odeznívá, při čemž síla jejího zvuku klesá exponenciálně s dobou znění. Ježto logaritmus exponenciální funkce času je úměrný času, klesá hlasitost ladičky rovnoměrně s časem (*Davisova* ladička o výšce tónu 640 Hz ztrácela na hlasitosti 1,5 Ph za vteřinu). Měření se provádí tak, že znějící ladička se přidrží u ucha a měří se stopkami, za jakou dobu klesne hlasitost jejího tónu tak, že ji přehluší měřený zvuk.

Metoda přehlušení je velmi citlivá, avšak vztah mezi hlasitostmi právě přehlušeného zvuku a zvuku přehlušujícího není přesně znám. Pokládáme-li je

za sobě rovny, vychází na př. v oboru tónů kolem 1000 Hz hlasitost asi o 15 Ph menší než srovnávací methodou. Ukazuje se také, že přehlušování jednoduchých tónů nedává nejlepší výsledky. Příznivější podmínky jsou pro zvuky složené z co největšího počtu tónů různých frekvencí s co možná spojitým „akustickým spektrem“.

Objektivní měření hlasitosti provádí se zvláštními přístroji, zvanými **hlukoměry**. Jsou to elektrické měřiče síly zvuku, jejichž stupnice udává přímo hlasitost měřeného zvuku ve fonech.

Hlukoměr se skládá z mikrofону, několikastupňového zesilovače²⁾ a z měřicího přístroje. Přístroj musí splňovat především podmínku, aby pro prahovou sílu referenčního tónu vycházela hlasitost nulová (0 Ph) a pro sílu $1 \mu\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ hlasitost 100 Ph [jak vyžadují rovn. (1), (2)]. Obtížnější je splnění další podmínky, aby přístroj sčítal síly jednotlivých harmonických složek měřeného zvuku podle citlivosti ucha, která není pro všechny tóny stejná. Podle své definice souhlasí hlasitost s hladinou intenzity nutně pro referenční tón, kdežto pro ostatní tóny se více nebo méně liší; to se týká i prahových (nulových) intenzit různě vysokých tónů.³⁾ Graficky je dána tato závislost *křivkami stejné hlasitosti*. Proto je nutno frekvenční křivku užitého mikrofónu vhodnou úpravou zesilovače tak pozměnit, aby se výsledná hlasitost shodovala s hlasitostí skutečně vnímanou normálním uchem. Přístroje mívají několik měřicích oborů o rozsahu 30 ÷ 40 Ph nebo volitelný rozsah. Mikrofon je buď kapacitní [50,IV], nebo krystalový (piezoelektrický). Konstrukce těchto moderních přístrojů je ostatně různá podle výrobce a jejich vývoj není patrně dosud ukončen.

51 ²⁾ TF 5.12.5.

51 ³⁾ TF 3.3.3.

J. T H E R M I K A

52. T E P L O T N Í R O Z T A Ž N O S T P E V N Ý C H L Á T E K

Definice. *Délková roztažnost* α (součinitel délkové teplotní roztažnosti) je poměr relativního zvětšení $\frac{dl}{l_0}$ délky l_0 , měřené při 0°C , k změně teploty:

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}, \quad (1)$$

kde dl je prodloužení způsobené změnou teploty dt .

Objemová roztažnost β (součinitel objemové teplotní roztažnosti) je poměr relativního zvětšení $\frac{dV}{V_0}$ objemu V_0 , měřeného při 0°C , ke změně teploty:

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt}, \quad (2)$$

kde dV je změna objemu, způsobená změnou teploty dt . Oba součinitelé u téže látky za stejné teploty souvisí jednoduchým vztahem

$$\beta = 3\alpha, \quad (3)$$

neboť poměrná změna objemu krychle o hraně l je

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(l^3)}{l^3} = \frac{3l^2 dl}{l^3} = 3 \frac{dl}{l}.$$

Proto stačí zabývat se dále jen jedním součinitelem, na př. α .

Jednotky. Absolutní jednotka

$$[\alpha]_a = (\text{°K})^{-1}$$

je prakticky totožná s jednotkou MKSA $[\alpha] = [\alpha]_p = (\text{°C})^{-1}$ (srov. 23).

Délkové rozměry pevného tělesa jsou funkcí teploty a derivace této funkce, dělená velikostí při 0°C , je délková roztažnost tělesa. Obecně je ovšem roztažnost sama závislá na teplotě, neboť většina látek se neroztahuje lineárně, ale spíše kvadraticky:

$$l = l_0 (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2), \quad (4)$$

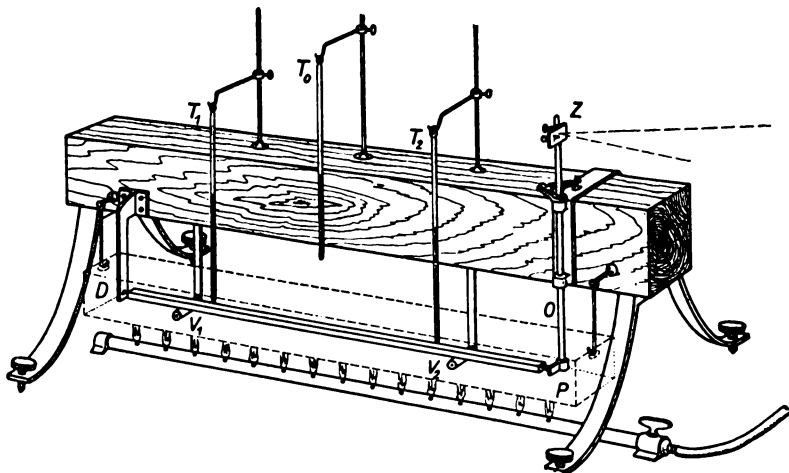
takže podle (1)

$$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 t$$

je lineární funkcí teploty (α_1, α_2 jsou konstanty). Proto zavádíme *průměrnou roztažnost* v určitém oboru teplot (t_1, t_2):

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_0} \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}, \text{ takže } l = l_0 (1 + \bar{\alpha} t). \quad (5)$$

Skutečná roztažnost α pro určitou teplotu nazývá se též *pravá roztažnost*. Kromě toho se užívá pojmu *zdnálivá roztažnost* látky vzhledem k jiné látce. Měříme-li



Obr. 52,1. Edelmannův dilatometr.

totiž změnu délky l tělesa měřítkem l' z jiné látky, zjistíme jen rozdíl prodloužení obou délek:

$$l - l' = l_0 (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}') t, \quad (6)$$

kde $\bar{\alpha}'$ je průměrná roztažnost měřítka. Tedy pozorovaná změna délky odpovídá zdánlivé roztažnosti, dané rozdílem roztažností tělesa a měřítka.

Podobné vztahy platí ovšem i pro objemovou roztažnost β .

Přístroje

Přístroje, jimiž se měří roztažnost, nazývají se *dilatometry*; liší se navzájem způsobem, kterým se zjišťují malé změny délky při změně teploty.

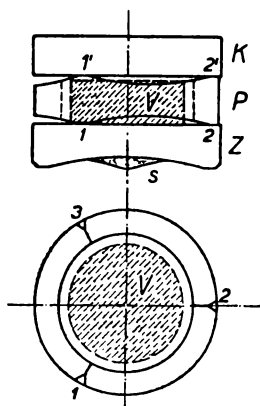
K tomu, jak víme, je vhodná zrcátková metoda (obr. 20,5) a na ní je založen jednoduchý dilatometr Edelmannův, sestavený pro absolutní měření roztažnosti tyčí. Je znázorněn na obr. 52,1. Měřená tyč délky 50 cm spočívá na dvou válečcích V_1, V_2 ve vodní nebo v jiné kapalinové lázni, opírajíc se levým koncem o pevný doraz D , pravým o hrot vodorovné páčky P , otáčivé kolem svislé osy O ; tato osa je prodloužena vzhůru do prostoru nad lázní, kde je opatřena svislým zrcátkem Z . Vhodný ohřivač je buď pod lázní (na př. plynová trubice s řadou otvorů), nebo přímo v lázni (na př. elektrický trubkový ohřivač na dně lázně). Teplota lázně se měří dvěma teploměry T_1, T_2 , jejichž termomérné nádobky jsou těsně u tyče v 1. a 3. čtvrtině její délky. Prostředním teploměrem T_0 měříme teplotu vzduchu nad lázní. Proti zrcátku je postaven dalekohled se stupnicí.

Ze speciálních přístrojů popíšeme podrobněji dva přesné dilatometry, kterých používají optické interferenční metody a jsou vhodné pro měření za nízkých i vysokých teplot.

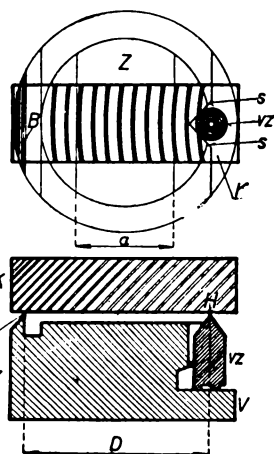
57,II

Starší z nich je křemenný interferenční dilatometr (*Fizeau-Abbe-Pulfrich*), kterým se měří změny délky malého pokusného válečku stejným způsobem jako rozdíl koncových měrek interferenčním komparátorem [31,III].

Vlastní měřicí zařízení (obr. 52,2) je z taveného křemene, jehož roztažnost je velmi malá; lze ji určit předběžným měřením. Základní křemenná destička *Z*



Obr. 52,2. Měřicí zařízení křemenného interferenčního dilatometru.



Obr. 52,3. Měřicí orgán Priestova dilatometru.

má horní rovinnou plochu hlazenou, kdežto spodní plocha *s* je klenutá a černě lakovaná. Na ní spočívá měřený váleček *V*, 1 cm vysoký, uvnitř křemenného prstence *P*, který se opírá o výstupky 1, 2, 3 o destičku *Z*; na horní ploše má výstupky 1', 2', 3', na něž se položí skleněná krycí destička *K*. Prstenec je o málo vyšší než zkoušený váleček, takže mezi spodní stěnou destičky *K* a horní stěnou měřeného válečku vznikne mírně klínová vrstva vzduchu. Při kolmém dopadu světla pozorujeme tedy interferenční proužky.¹⁾ Popsané zařízení se vloží do plechové nádoby a s ní do termostatu, jehož teplotu zvolna měníme. Při zvyšování teploty roztahuje se měřený váleček (zpravidla) více než křemenný prstenec a klínová vrstva vzduchová se zužuje, aniž se mění její sklon. Proto se interferenční proužky posouvají kolmo k svému směru, zůstávajíce navzájem stejně vzdáleny. Při zmenšení vzduchové vrstvy o půl vlnové délky λ dopadajícího světla změní se dráhový rozdíl všech paprsků o λ , takže se proužky posunou právě o vzdálenost dvou sousedních proužků. Změříme-li tedy posunutí proužků při známé změně teploty, máme změnu výšky válečku (proti křemennému prstenci) vyjádřeno ve vlnové délce užitého světla. Okulárním mikrometrem [20,IV] lze měřit posunutí až na padesátinu šířky proužku, což znamená změnu výšky válečku o setinu λ . Při použití sodíkového světla ($\lambda \doteq 0,6 \mu$) lze tedy určit změny výšky válečku s přesností $6 \cdot 10^{-4}$ mm. Počítání prošlých proužků při rychlejší změně teploty však není snadné, a proto

se raději měří výsledné změny polohy proužků vytvořených několika monochromatickými světly, které vysílá na př. *Geisslerova* výbojka [97,II], obsahující rtuťové páry s heliem nebo s vodíkem. Ze vztahu mezi těmito změnami poloh (různých pro různé barvy) počítá se celkové ztenčení vzduchového klínu podobně jako při absolutním měření koncových měrek *Péardovým* interferometrem [31,IV]. Výpočet se usnadní, známe-li přibližnou hodnotu měřené roztažnosti. Přitom se ovšem musí přihlížet také k závislosti vlnové délky světla na indexu lomu vzduchu, který závisí na teplotě a je tedy proměnný během měření. Aby se tato nevýhoda odstranila, připojuje se k prostoru obsahujícímu měřicí zařízení vývěva, takže interference nastává ve velmi zředěném vzduchu a vlnová délka je prakticky na teplotě nezávislá. Teplota se měří nejčastěji odporovým teploměrem [23,VII], jehož platinový drát bývá přímo navinut na prstenec *P*. Měření se velmi usnadní registrační úpravou přístroje (*Arnulf* 1924): proměnná poloha proužků se fotografuje na pohyblivou desku, která se pak proměří.

Výhodnější je **Priestův interferenční dilatometr** (sestrojený v britském **57,III** Bureau of Standards 1920), jehož princip je patrný ze schematického nákresu 52,3. Základní deska *Z* má s jedné strany přímý břit *B* a s druhé strany stupňovitý výběžek *V*, na který se postaví zkoušený vzorek *vz* ve tvaru válečku vybiňajícího v sousedí kužel. Přitom se váleček musí dotýkat obou stěn *s* klínového výřezu v desce *Z*. Z jeho poloměru a známého tvaru desky *Z* plyne vodorovná vzdálenost *D* hrotu *H* kužele od břitu *B*. Hrot *H* musí být přibližně ve výši břitu, takže krycí skleněná destička *K* je jen nepatrně skloněna k horní lesklé ploše základní desky *Z*, která je buď také skleněná, nebo z taveného křemene. Osvětlíme-li zařízení shora svislým a pokud možno rovnoběžným monochromatickým svazkem paprsků, vzniknou interference v klínové vrstvě vzduchu světlé a tmavé proužky. Jejich počet mezi dvěma úsečkami, vedenými rovnoběžně s břitem ve stálé vzdálenosti *a* od sebe, závisí na sklonu krycí destičky. Velmi jednoduchý vztah platí mezi zvýšením Δl hrotu *H* a přírůstkem Δn počtu proužků na délce *a*. Je-li na př. hrot *H* nad břitem *B*, pak jeho zvýšením o $k \frac{\lambda}{2}$ přibude *k* proužků na délce *D*, takže na délce *a* přibude $\frac{a}{D} k$ proužků. Tedy

$$\Delta n = \frac{a}{D} k, \quad \Delta l = k \frac{\lambda}{2},$$

odkud roztažnost:

$$a = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2 l_0} \frac{D}{a} \frac{\Delta n}{\Delta t}.$$

Je-li hrot *H* pod břitem, pak se relativním zvětšením válečku proti základní desce počet proužků zmenší. Poměry by byly ovšem obrácené, kdyby roztažnost zkoušeného materiálu byla menší než roztažnost základní desky. Je-li hrot *H* výše nebo níže než břit *B*, poznáme podle slabého zakřivení interferenčních proužků, které jsou vypuklé (konvexní) na stranu spádu krycí destičky.

MĚŘICÍ METODY

Pokud jde o laboratorní metody měření roztažnosti pevných těles, bylo vypracováno velmi mnoho method absolutních i relativních. Většinou se měří změny délky tyčí (50—100 cm dlouhých), a to v podstatě dvojím způsobem: komparátorem nebo zrcátkovou methodou.

Příčným komparátorem [31,I] lze měřit roztažnost tyčí absolutně tak, že tyč zvolna ohříváme ve vhodné vodní nebo olejové lázni a měříme změny vzdálenosti dvou značek (rysek) okulárními mikrometry mikroskopů. Tohoto způsobu se používá zejména při zjišťování roztažnosti měřitek.

Podobným způsobem se měří také zdánlivá (relativní) roztažnost, a to tak, že se měří rozdíl délek dvou tyčí, zahříváných ve společné lázni, při čemž se jejich konce udržují dorazem ve stálé poloze a pozoruje se mikroskopem změna relativní polohy druhých konců.

Zrcátkové metody (obr. 20,5) se užívá v rozmanitých úpravách, a to jak pro měření absolutní, které popíšeme podrobně v 52.1, tak pro měření relativní.

52.1. Roztažnost tyčí — měření zrcátkovou metodou

Pro absolutní měření je vhodný *Edelmannův* přístroj [52,I], jímž měříme přímo prodloužení zahřáté tyče zrcátkovou metodou. jako jsme v 31.6 měřili posunutí šroubu. Průměrná délková roztažnost v oboru teplot (t_1, t_2) je dána vztahem (5), při čemž l_0 je délka při teplotě 0°C . Roztažnost pevných látek je řádu asi $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, a proto můžeme při malé poměrné přesnosti jejího měření položit za l_0 délku tyče při počáteční teplotě měření t_0 . Při stoupaní teploty na t se tyč prodlouží o velmi malou délku $l - l_0$ a páčka P délky r se otočí o malý úhel

$$\varphi \doteq \operatorname{tg} \varphi = \frac{l - l_0}{r}.$$

Tento úhel měříme změnou $n - n_0$ čtení na stupnici, při čemž podle 20 (1) a 20 (2)

$$2\varphi \doteq \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n - n_0}{R},$$

takže

$$l - l_0 = \frac{r}{2R} (n - n_0)$$

a podle (5)

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{2Rl_0} \frac{n - n_0}{t - t_0}. \quad (7)$$

Při měření opakovaném za různých teplot t dostaneme tedy řadu rozdílů $n - n_0$, které jsou podle poslední rovnice úměrné příslušným teplotním rozdílům $t - t_0$. Máme zde, jako v případě měření modulu pružnosti v tahu a ve smyku 42, úměrnost mezi měřenými veličinami, kterou vyrovnáme buď metodou nejmenších čtverců podle 14 (6), nebo jednodušeji skupinovou metodou podle 15 (24). V prvním případě vypočteme průměrnou roztažnost ze vztahu

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{2Rl_0} \frac{\sum (t - t_0) (n - n_0)}{\sum (t - t_0)^2}, \quad (8)$$

v druhém případě ze vztahu

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{2Rl_0} \frac{\sum (n - n_0)}{\sum (t - t_0)}. \quad (9)$$

Výpočet podle posledního vzorce lze nahradit grafickou methodou 16 (1): Sestrojíme těžiště bodů o pravouhlých souřadnicích $t - t_0$, $n - n_0$ spojíme s počátkem souřadnic přímkou, jejíž směrnice dává poměr $\frac{\sum (n - n_0)}{\sum (t - t_0)}$.

Z toho, jak těsně u naryšované přímky leží body jednotlivých měření, můžeme posoudit přesnost měření a zároveň se přesvědčit, lze-li v mezích přesnosti měření pokládat závislost délky tyče na teplotě za přímkovou. Kdyby rozložení bodů jevílo sklon k zakřivení, musili bychom nahradit přímkou křivkou — na př. parabolou, kterou bychom mohli určit methodou nejmenších čtverců nebo skupinovou (čl. 14 a 15). Roztažnost bychom pak musili určit pro každou teplotu zvlášť (ze směrnice tečny naryšované křivky).

Potřeby: *Edelmannův* dilatometr [52,I], dalekohled se stupnicí [20,V], tyčové nebo pásově měřítko (aspoň dvoumetrové), míchačka (nejlépe ptačí pero), mikrometr [31,VI] nebo posuvné měřítko [31,V].

Postup

1. Změříme co nejpřesněji vzdálenost hrotu páčky P od její osy (není-li u přístroje přímo udána); měříme pokud možno mikrometrem nebo aspoň posuvným měřítkem. Dále změříme délku zkoušené tyče a vložíme tyč do lázně tak, aby se dotýkala obou dorazů, při čemž hledíme, aby páčka P byla přibližně kolmá k ose tyče.

2. Postavíme správně dalekohled se stupnicí, zaostříme na stupnici a změříme R . Upravíme polohu teploměrů tak, aby krajní teploměry udávaly teplotu lázně co možno blízko tyče a aby střední ukazoval průměrnou teplotu vyčnívajících sloupců obou krajních teploměrů.

3. Promícháme lázeň, čteme všechny tři teploměry a (pokud lze současně) polohu n_0 na stupnici. Nato opravíme průměr čtení obou krajních teploměrů na vyčnívajícím sloupci podle 23(2), kam dosadíme za teplotu okolí údaj prostředního teploměru. Tak dostaneme počáteční teplotu tyče t_0 .

4. Zahájíme topení pod lázní, kterou neustále promícháváme; stoupne-li teplota o několik stupňů (na př. o 10 °C), přerušíme topení, a stále mícháme lázeň, sledujeme, jak se mění čtení na stupnici. V okamžiku, kdy se toto čtení ustálí a jeví sklon k zpětnému chodu, zaznamenáme jeho velikost n ; zároveň čteme všechny tři teploměry. Po opravě průměru na vyčnívajícím sloupci dostaneme teplotu t .

5. Úkon 4 opakujeme za stálého zvyšování teploty tak, abychom dostali délky tyče pro řadu teplot rozložených přibližně rovnoměrně v oboru, pro něž chceme určit roztažnost.

6. Roztažnost vypočteme podle vzorce (8) nebo (9) a sestrojíme přímkou (nebo křivku) závislosti délky tyče na teplotě.

Příklad. Měřili jsme roztažnost cínové tyče.

Tyč měla při teplotě 22 °C délku $l_0 = 50,4$ cm, délka páčky P byla $r = 2,04$ cm, vzdálenost zrcátka od stupnice $R = 257,0$ cm. Oba krajní teploměry T_1 a T_2 byly ponořeny v lázni po rysku — 10° a nádobka středního teploměru T_0 byla asi v polovině výšky sloupců krajních teploměrů. Výsledky měření jsou shrnuty v tabulce, z níž plyne

$$\sum (t - t_0) = \sum_0^3 t - 10 t_0 = 210,2 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$\sum (n - n_0) = \sum_0^3 n - 10 n_0 = 57,2 \text{ cm};$$

podle vzorce (9)

$$\bar{\alpha} = \frac{2,04}{2 \cdot 257 \cdot 50,4} \cdot \frac{57,2}{210,2} = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Z obr. 52,4 je zřejmo, že přímkou vedená podle návodu 16(1) společným těžištěm T všech bodů (kromě nultého) dobře vyjadřuje průběh čtení na stupnici a že délka tyče roste s teplotou v mezích přesnosti měření lineárně.

	Čtení na teploměrech v °C			Délka vyčn. sloupce v °C	Oprava v °C	Opravená teplota t °C	Čtení na stupnicí cm	
	T ₁	T ₂	T ₃					
0	22,4	22,4	21	32	0,01	22,4	28,5	
1	26,0	25,5	22	36	0,02	26,0	29,5	
2	28,6	28,5	24	39	0,03	28,6	30,4	
3	33,2	33,2	28	43	0,04	33,2	31,7	
4	37,7	37,5	30	48	0,06	37,7	32,8	
5	42,0	41,8	32	52	0,08	42,0	33,9	
6	49,0	48,9	36	59	0,12	49,1	35,7	
7	57,6	57,4	40	67	0,18	57,7	38,1	
8	66,4	66,2	45	76	0,25	66,6	40,2	
9	70,7	70,5	49	81	0,31	70,9	41,4	
					$\Sigma_0^9 t = 434,2$ $\Sigma_0^9 n = 343,2$			

52.2. Objemová roztažnost nádoby — měření vážením kapaliny

Prostor (dutina, otvor, mezera) ohraničený tělesem z nějaké látky mění své rozměry s teplotou, jako by byl vyplněn látkou téhož tělesa, a proto lze určit roztažnost měřením rozměrů dutin. Zvláště to má význam pro zjišťování součinitele objemové roztažnosti $\beta = 3\alpha$ odměrných nádob, na př. pyknometrů [35, III], na jejichž proměnnost s teplotou jsme již poukázali v 35. K určení β stačí změřit aspoň dva objemy nádoby pro dvě co nejvíce odlišné teploty, a to nejlépe metodou 35.2, to je vážením kapaliny známé hustoty (na př. vody nebo ještě lépe rtuti).

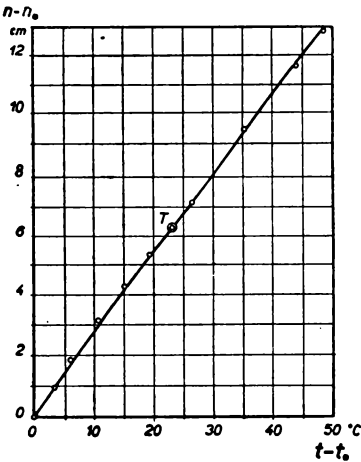
Pro střední objemovou roztažnost β platí podle (1), (2), (5)

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \bar{\beta}(t - t_0), \quad (10)$$

kde jsme vzali za V_0 objem při počáteční teplotě t_0 a zároveň ovšem za t dosadili $t - t_0$. Je-li m_0 hmota použité kapaliny za teploty t_0 a m za teploty t , je poměr objemů nádoby:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{m}{s} : \frac{m_0}{s_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{s_0}{s}, \quad (11)$$

Obr. 52.4. Roztažnost cínu mezi 20° a 70 °C.



značí-li s_0 a s hustotu kapaliny při obou teplotách. Ježto hustota je nepřímo úměrná objemu, pak

$$\frac{s_0}{s} = 1 + \beta^*(t - t_0),$$

kde β^* je objemová roztažnost kapaliny v daném teplotním oboru.

Položíme-li $m - m_0 = -\Delta m$, bude podle (10) a (11)

$$1 + \bar{\beta}(t - t_0) = \left(1 - \frac{\Delta m}{m_0}\right) [1 + \beta^*(t - t_0)].$$

Avšak rozdíl hmoty kapaliny obsažené v nádobě při obou teplotách je velmi malý proti celkové hmotě, a proto pomineme součin $\frac{\Delta m}{m_0} \beta^* (t - t_0)$, čímž dostaneme jednoduchý vzorec

$$\bar{\beta} = \beta^* - \frac{\Delta m/m_0}{t - t_0}. \quad (12)$$

Zde se vyskytuje pouze poměrný úbytek hmoty $\Delta m/m_0$, a proto není třeba vážit absolutně; kromě toho není ani třeba redukovat vážení na vzduchoprázdno; na př. pro rtuť podle 28 (11') činí vztlak méně než setinu procenta, což je v tomto případě zanedbatelné proti měřicím chybám. Proto se doporučuje použít rtuti, pro kterou má (vzhledem k její velké hustotě) úbytek Δm největší hodnotu, takže jej lze určit s největší poměrnou přesností. Její roztažnost je také velmi dobře známa. Tak pro roztažnost β_t^* za teploty t platí v oboru teplot 0° až 100°C jednoduchý vztah:

$$\beta_t^* = (181,82 \cdot 10^{-6} + 7,8 \cdot 10^{-9} t) ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (13)$$

Potřeby: Analytické [25,V; VI] nebo praktikantské [25,IV] váhy, vodní nebo jiná kapalinová lázeň s teploměrem.

Postup

1. Zvážíme prázdnou a čistou nádobu (na př. pyknometr), jejíž roztažnost chceme určit, methodou 30.2; 3 nebo 30.1 bez opravy na vztlak (závaží Z').
2. Naplníme nádobu dokonale (bez vzduchových bublin) rtutí za teploty t_0 , při čemž se postaráme o to, aby rtuť i nádoba přijaly co možná přesně teplotu lázně.
3. Nádobu se rtutí vyjmeme z lázně, osušíme a vyčkáme, je-li třeba, až dosáhne teploty vah. Nato ji zvážíme jako v 1 (závaží Z_0).
4. Nádobu se rtutí vložíme do lázně teploty t , kde ji ponecháme dosti dlouho, aby dosáhla teploty udané teploměrem v lázni (poznáme to podle toho, že přestane z ní unikat rtuť).
5. Nádobu vyjmeme, osušíme, necháme vychladnout a zvážíme jako v 3 (závaží Z).
6. Vypočteme z (13) roztažnost rtuti β_t^* pro střední teplotu $\tau = \frac{1}{2} (t_0 + t)$.
7. Roztažnost nádoby vypočteme ze vzorce (12), kam dosadíme: za β^* hodnotu β_t^* vypočtenou v 6, za m_0 rozdíl $Z_0 - Z'$ a za Δm rozdíl $Z_0 - Z$.

53. ROZTAŽNOST KAPALIN

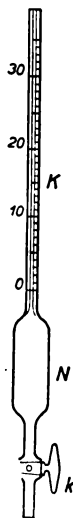
Definice. Objemová roztažnost β (součinitel neboli koeficient objemové teplotní roztažnosti) je pro kapaliny definována stejně jako pro pevné látky, tedy rovnicí 52 (2), a měří se ve stejných jednotkách ($^\circ\text{C}^{-1}$).

Přístroje

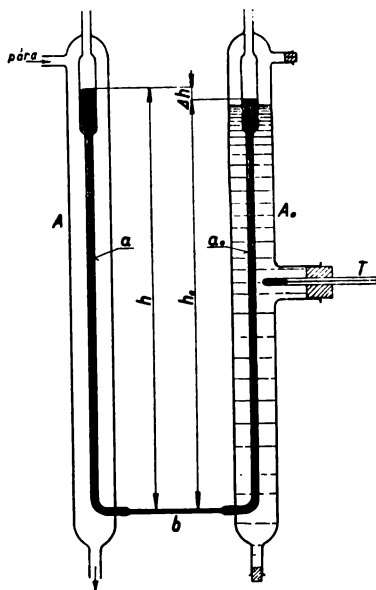
Nejjednodušší z přístrojů na měření roztažnosti kapalin je kapilární dilatometr. Je to skleněná nebo křemenná nádobka N s natavenou dělenou kapilárou K a kohoutkem k (obr. 53,1). Kapilára musí být co možná stejnoměrná; objem příslušný jejímu jednomu dílku v poměru k objemu nádobky se určí kalibrací rtutí, jak bude popsáno v 53.2.

Přesná absolutní měření roztažnosti se konají přístroji založenými na měření hustoty methodou spojených nádob (*Dulong a Petit, Regnault*). Na obr. 53,2 je nejjednodušší úprava *Dulong-Petitova dilatometru*. Jsou to dvě svislé trubice a, a_0 , nahoře rozšířené a otevřené, dole spojené tenkou vodorovnou trubicí b .

Obě svislé trubice jsou obklopeny širšími trubicemi A , A_0 , které mohou být udržovány na různých teplotách (jednu z nich naplníme na př. vodou nebo směsí ledu a vody a její teplotu kontrolujeme teploměrem T ; druhou udržujeme na teplotě varu vody, proháníme-li jí dosti dlouhou dobu vodní páru. Tím vznikne rozdíl hustot a hydrostatická rovnováha se obnoví tím, že v teplejší trubici kapalina vystoupí, v chladnější poklesne. Z rozdílu obou hladin, který se změní na př. kathetometrem [32, I], určí se roztažnost zkoušené kapaliny.



Obr. 53,1. Kapilární dilatometr.



Obr. 53,2. Dulong-Petitův dilatometr.

MĚŘICÍ METODY

53.1. Roztažnost kapalin — měření pyknometrem

Je to vlastně metoda 52.2, užitá k určení roztažnosti pyknometru. Označíme-li nyní hledanou střední roztažnost kapaliny $\bar{\beta}$, dostaneme příslušný vzorec z 52 (12), položíme-li v něm β místo β^* a β' místo $\bar{\beta}$, které značí roztažnost nádoby (pyknometru):

$$\bar{\beta} = \beta' + \frac{\Delta m/m_0}{t - t_0}. \quad (1)$$

Zde značí tedy $\bar{\beta}$ hledanou střední roztažnost kapaliny v oboru teplot t_0 až t , m_0 hmotu kapaliny obsažené v pyknometru při teplotě t_0 a Δm úbytek hmoty kapaliny obsažené v pyknometru po zvýšení teploty na t . Metoda plyne ihned z metody 52.2.

Potřeby: Váhy [25, IV; V; VI], pyknometr [35, III], kapalinová lázeň s teploměrem.

Postup

1.—5. jako v 52.2, při čemž užitou nádobou je tu pyknometr a rtuť je nutno nahradit měřenou kapalinou.

6. Najdeme v tabulkách objemovou roztažnost β' nádoby (obyčejné sklo $\beta' = 0,000\ 025\ ^\circ\text{C}^{-1}$, jenské sklo 16III $\beta' = 0,000\ 024\ ^\circ\text{C}^{-1}$, verre dur $\beta' = 0,000\ 023\ ^\circ\text{C}^{-1}$, tavený křemen $\beta' = 0,000\ 001\ 5\ ^\circ\text{C}^{-1}$) nebo ji změříme methodou 52.2 na základě známé roztažnosti rtuti, dané vzorcem 52 (13).

7. Střední roztažnost kapaliny $\bar{\beta}$ v teplotním oboru t_0 až t dostaneme ze vzorce (1), kam za β' dosadíme objemovou roztažnost pyknometru, za m_0 rozdíl $Z_0 - Z'$ a za Δm rozdíl $Z_0 - Z$.

53.2. Roztažnost kapalin — měření kapilárním dilatometrem

Měření se provádí tak, že naplníme kapalinou jen nádobku N dilatometru [53, I] tak, aby kapalina sahala k rysce n_0 , která je blízko nuly stupnice. Pak vložíme přístroj do lázně vyšší teploty a čteme výšku n kapaliny v kapiláře. Víme-li, jakou částí původního objemu V_0 je objem v kapiláry mezi dvěma sousedními dělicími čárkami, můžeme určit poměrné zvětšení objemu:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (n - n_0) \frac{v}{V_0}.$$

Zvětšení objemu, které pozorujeme, je ovšem jen *zdánlivé* zvětšení objemu kapaliny, rovné rozdílu skutečného zvětšení jejího objemu a zvětšení části dilatometru, naplněné kapalinou při teplotě t_0 . Jsou-li totiž roztažnosti dilatometru a kapaliny β' a $\bar{\beta}$, pozorujeme zvětšení objemu

$$\begin{aligned} \Delta V &= \bar{\beta} (t - t_0) V_0 - \beta' (t - t_0) V_0 = \\ &= (\bar{\beta} - \beta') (t - t_0) V_0, \end{aligned}$$

takže

$$\bar{\beta} = \beta' + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{t - t_0} = \beta' + \frac{v}{V_0} \frac{n - n_0}{t - t_0}. \quad (2)$$

Abychom určili $\bar{\beta}$, zjistíme poměr v/V_0 , což provedeme takto: Naplníme dilatometr rtutí až po k -tou čárku kapiláry (pokud možno až po nejvyšší). Do odvážené kádinky vypustíme pak rtuť obsaženou mezi k -tou a nultou čárkou kapiláry a zvážíme ji. Nato zvážíme zbytek rtuti, t. j. rtuť vyplňující nádobku dilatometru až po nultou čárku. Je-li m_k hmota rtuti v k dílcích kapiláry a M hmota rtuti v nádobce dilatometru, pak

$$v : V_0 = \frac{m_k}{k} : M,$$

což dává dosazením do (2) výsledek

$$\bar{\beta} = \beta' + \frac{m_k}{kM} \frac{n - n_0}{t - t_0}. \quad (3)$$

Podobně jako při měření délkové roztažnosti zrcátkovou methodou 52.1 dostáváme úměrnost mezi změnou teploty a změnou čtení na dilatometru. Řadu měření při různých teplotách vyrovnáme tedy stejným způsobem, čímž dostaneme konečný vzorec buď podle metody nejmenších čtverců

$$\bar{\beta} = \beta' + \frac{m_k}{kM} \frac{\Sigma (t - t_0) (n - n_0)}{\Sigma (t - t_0)^2}, \quad (4)$$

nebo jednodušeji (podle skupinové metody)

$$\bar{\beta} = \beta' + \frac{m_k}{kM} \frac{\sum (n - n_0)}{\sum (t - t_0)}. \quad (5)$$

Také grafické znázornění závislosti objemu na teplotě provedeme zcela obdobným způsobem jako při měření metodou 52.1.

Potřeby: Dilatometr [53,I], váhy [25,IV; V; VI], kádinka, hadička s tlačkou, kapalinová (vodní) lázeň s teploměrem a míchačkou, rtuť.

Postup

1. Do čistého a suchého dilatometru nassajeme hadičkou rtuť až ke k -té (nejvyšší) dělicí čáře kapiláry a uzavřeme kohout.

2. Metodou 30.1 nebo 30.2; 3 zjistíme (bez redukce na vakuum) hmotu m_k rtuti mezi nultou (nejnižší) a k -tou čárkou.

3. Stejně zjistíme hmotu rtuti M v nádobce dilatometru (naplněné až po nultou čárku).

4. Do dilatometru nassajeme hadičkou měřenou kapalinu až těsně nad nultou čárku, vložíme do lázně a velmi zvolna zahříváme za stálého míchání, aby kapalina v dilatometru sledovala změny teploty lázně. Přitom zaznamenáme pro řadu teplot (aspoň přibližně stejně od sebe vzdálených) výšku sloupce v kapiláře, odhadující desetiny dílků.

5. Teplotu, při níž sahala kapalina k nulté dělicí čáře nebo k čáře jí blízké n_0 , označíme t_0 a další pozorované teploty t a čtení n dosadíme do vzorce (4) nebo (5); tím dostaneme objemovou roztažnost kapaliny $\bar{\beta}$, známe-li roztažnost β' dilatometru. Hodnoty β' pro sklo a křemen viz úkon 6 metody 53.1.

6. Sestrojíme křivku závislosti objemu na teplotě, nebo je-li závislost v mezích přesnosti měření přímková, vedeme přímkou počátkem souřadnic a těžištěm bodů o souřadnicích $t - t_0$, $n - n_0$.

Příklad. Roztažnost benzenu.

Při kalibraci dilatometru byla nassáta rtuť do výšky $n_k = 280$ dílků (přibližně milimetrových). Rtuť vypuštěná až po dílek $n_0 = 0,6$ d (dílků) vážila $m_k = 1,8594$ g, zbytek rtuti v nádobce měl hmotu $M = 55,120$ g. Bylo tedy $k = 279,4$ d a poměr

$$\frac{v}{V_0} = \frac{m_k}{kM} = 0,000\ 120\ 7\ \text{d}^{-1}.$$

Dilatometr byl naplněn benzenem něco nad nultou čárku a vložen do vodní lázně, která byla velmi zvolna zahřívána a promíchávána. Vždy při stoupnutí teploměru o 5°C byla čtena výška n sloupce v kapiláře. Zápis byl veden takto:

$t\ ^\circ\text{C}$	n	$t - t_0\ ^\circ\text{C}$	$n - n_0$
18,8	35,8		
23,8	80,5	5,0	44,7 d
28,8	132,2	10,0	96,4
33,8	183,0	15,0	147,2
38,8	233,2	20,0	197,4
43,8	286,0	25,0	250,2
$\Sigma = 75,0\ ^\circ\text{C}$			735,9 d

Dosazením do (5) dostaneme zdánlivou roztažnost

$$\bar{\beta} - \beta' = 0,000\ 120\ 7 \frac{735,9}{75,0} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} = 0,001\ 185\ ^\circ\text{C}^{-1},$$

a položíme-li pro skleněný dilatometr $\beta' = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, bude skutečná roztažnost

$$\bar{\beta} = 0,00121 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Výsledek měření je znázorněn graficky na obr. 53.3, kde přímka byla vedena počátkem souřadnic a těžištěm ostatních bodů, které tu prakticky splývá s 3. bodem.

53.3. Skutečná roztažnost kapalin — měření methodou spojených trubic

Měření se provádí na přístroji [53,II] tak, že se určí výšky sloupců h a h_0 v obou trubicích, udržovaných na středních teplotách t a t_0 . Rovnost hydrostatických tlaků dává podmínku¹⁾

$$hs = h_0 s_0,$$

při čemž hustoty jsou v obráceném poměru specifických objemů, tedy

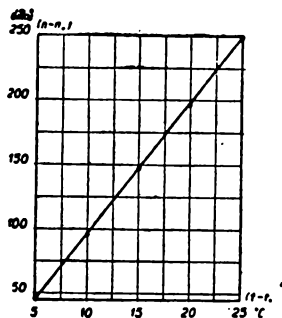
$$\frac{s_0}{s} = \frac{1 + \bar{\beta}t}{1 + \bar{\beta}t_0} \doteq 1 + \bar{\beta}(t - t_0).$$

Z toho plyne dále

$$\frac{h - h_0}{h_0} = \frac{s_0 - s}{s} = \bar{\beta}(t - t_0)$$

čili

$$\bar{\beta} = \frac{\Delta h/h_0}{t - t_0}. \quad (6)$$



Obr. 53.3. Měření roztažnosti benzenu.

Potřeby: *Dulong-Petitův* dilatometr [53,II], kathetometr [32,I], zdroj vodní páry spojený s jednou trubicí dilatometru, event. led.

Postup

1. Spojené trubice naplníme měřenou kapalinou a do chladicí trubice (vpravo) nalijeme studenou vodu nebo ji naplníme směsí vody a ledu, ovšem tak, aby vrchlík měřené kapaliny byl několik cm nad hladinou lázně.

2. Zavedeme páru do hořejšího otvoru levé vnější trubice tak, aby unikala spodním otvorem. Páru necháme procházet delší dobu, asi hodinu, aby se ustálil proud vodní páry a teplota kapaliny.

3. Mezitím postavíme a justujeme kathetometr podle návodu uvedeného při jeho popisu, změříme barometrický tlak podle 22.1 ÷ 4, opravíme na 0 °C podle 22(6) nebo podle T,IV a najdeme v T,XII bod varu vody t za tohoto tlaku.

4. Zjistíme teplotu t_0 lázně vpravo a zničíme buď metrovým měřítkem (s chybou menší než 1 mm), nebo raději kathetometrem (na 0.1 mm) výšku h_0 chladnějšího sloupce, t. j. rozdíl výšky vrchlíku a horního okraje vodorovné spojovací trubice, k němuž přičteme tloušťku stěny této trubice.

5. Změříme kathetometrem velmi pečlivě a co nejpřesněji (několikrát) rozdíl výšek Δh obou vrchlíků, načež opakujeme čtení teploty t_0 .

6. Střední roztažnost v oboru teplot t_0 až 100 °C plyne ze vzorce (6).

54. MECHANICKÝ EKVIVALENT TEPLA

Definice. Mechanický ekvivalent tepla J je převodní konstanta mezi mechanickou energií (prací) A a tepelnou energií Q :

$$J = \frac{A}{Q}. \quad (1)$$

Jeho převrácená hodnota $K = \frac{1}{J}$ se nazývá *tepelný ekvivalent práce*.¹⁾

Jednotky. Hodnota J závisí na volbě jednotek mechanické a tepelné energie (srov. 5).

$$J = 4,1863 \text{ joule cal}^{-1} = 0,426 77 \text{ kg} \cdot \text{m cal}^{-1} = 426,77 \text{ kg} \cdot \text{m kcal}^{-1} =$$

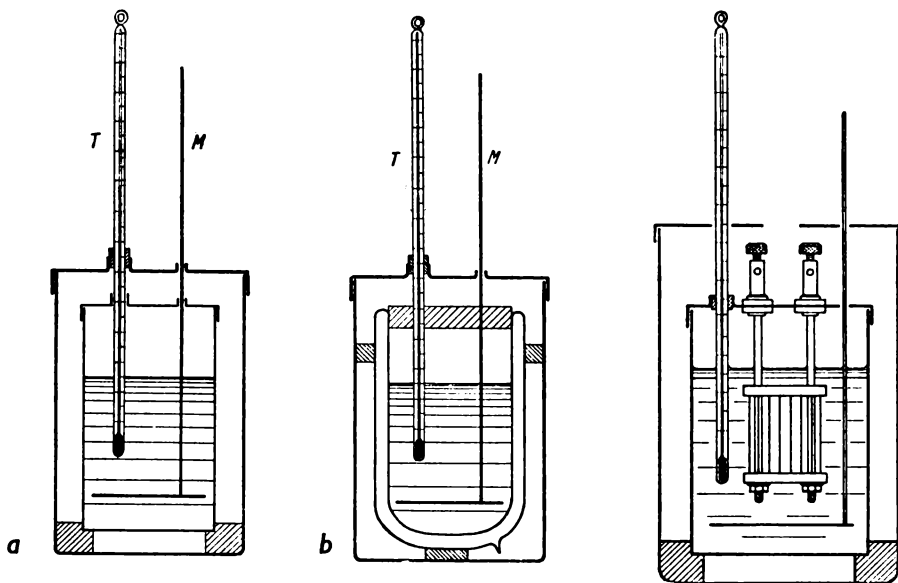
$$= 0,001 162 \text{ Wh cal}^{-1} = \frac{1}{860} \text{ Wh cal}^{-1} = \frac{1}{860} \text{ kWh kcal}^{-1}. \quad (2)$$

$$K = 0,2389 \text{ cal joule}^{-1} = 2,343 \text{ cal (kg} \cdot \text{m)}^{-1} = 860 \text{ kcal kWh}^{-1}. \quad (3)$$

Uvedená čísla zaokrouhlujeme podle přesnosti měření.

Přístroje

Určení mechanického ekvivalentu tepla vyžaduje kromě určení mechanické práce také měření tepla (tepelné energie), které vzniklo přeměnou mechanické energie. Množství tepla měříme přístroji, které se obecně nazývají kalori-



Obr. 54,1. Kalorimetry směšovací:

a — Regnaultův (plechový); b — Dewarův (skleněný).

Obr. 54,2. Elektrický kalorimetr.

rimetry. Sestavují se na velmi různých principech; je při tom postaráno o pokud možno dobrou tepelnou izolaci, kterou lze uskutečnit buď dvojitými stěnami se vzduchovou mezerou, nebo dvojitou stěnou skleněnou se vzduchoprázdnou mezerou (nebo též s lesklým kovovým povlakem podle vzoru Dewarových nádob). Někdy lze použít i *ochranného pláště*, udržovaného vhodným způsobem na teplotě prostoru, který má izolovat.

54¹⁾ TF 4.1.11.

Kalorimetr směšovací (obr. 54,1) je dvojitá nádoba, naplněná kapalinou 54,I (nejčastěji destilovanou vodou), jejíž teplota se měří rtuťovým teploměrem T za stálého míchání míchačkou M . Nejobvyklejší je plechový kalorimetr *Regnaultův* (obr. 54,1a), složený ze dvou mosazných (lesklých) válců, mezi nimiž je vzduchová mezera udržovaná korkovými vložkami. Často se používá dvojitých skleněných *Dewarových* nádob (obr. 54,1b), které velmi dobře izolují; jejich *tepelná kapacita (vodní hodnota²⁾*, t. j. množství tepla potřebné k jejich ohřátí o jeden stupeň Celsia, musí se zjistit experimentálně (podle 55.1). Naproti tomu lze tepelnou kapacitu plechového kalorimetru (včetně míchačky) dostat použitím násobením celkové hmoty vnitřní nádoby a míchačky specifickým teplem mosazi ($0,093 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$). Pokud jde o vodní hodnotu teploměru, je vzhledem k malé tepelné vodivosti skla dána tepelnou kapacitou jen části teploměru, ponořené do vnitřní nádoby kalorimetru. Určí se snadno u *tlustostěnných* teploměrů rtuťových (vyrobených z tlustostěnné kapiláry, bez ochranné tenké trubice), vzhledem k šťastné okolnosti, že *objemové teplo* (potřebné k ohřátí 1 cm^3 o 1°C) je pro sklo i pro rtuť přibližně rovno $0,46 \text{ cal cm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Vodní hodnota ponořené části tlustostěnného teploměru je číselně rovna 46% jejího objemu (který zjistíme v odměrném válci). (4)

Vodní hodnotu trubicových teploměrů určíme tak, že vnoříme do kalorimetru naplněného malým (známým) množstvím vody část teploměru vyhrátého na vyšší teplotu a změříme výslednou teplotu kalorimetru.

Při kalorimetrických měřeních jde často o malé rozdíly teplot, které musíme zjistit s velmi malou absolutní chybou, aby poměrná přesnost byla postačující. Proto se používá velmi přesných teploměrů (pravidelně tlustostěnných), dělených obvykle na $0,1^\circ$. Při všech čteních odhadujeme pak $0,01^\circ$.

Jako kalorimetrické látky používáme nejčastěji destilované vody a pak se nazývá přístroj [54,I] *vodní kalorimetr*.

Elektrický kalorimetr je založen na přeměně elektrické energie v tepelnou 54,II energii podle *Joulova zákona* 62 (3).

Elektrický proud vyrobí za vteřinu ve vodiči teplo Q_1 rovnocenné s výkonem proudu:

$$Q_1 = KP = \frac{P}{J}. \quad (5)$$

Měříme-li výkon proudu ve wattech (absolutních³⁾), bude podle (3)

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0,2389 \text{ cal. joule}^{-1} \cdot P = 0,2389 \text{ W}^{-1} \cdot \text{cal} \cdot \text{s}^{-1} \cdot P \doteq \\ &\doteq 0,239 \text{ W}^{-1} \cdot \text{cal} \cdot \text{s}^{-1} \cdot P \end{aligned} \quad (5')$$

Jednoduchý elektrický kalorimetr dostaneme z kalorimetru směšovacího, ponoříme-li do kapaliny topnou cívku z odporového drátu (argentanu, konstantanu a pod.), který má být pokud možno izolován (obr. 54,2 a 54,3). Kromě toho se užívá elektrických kalorimetrů skleněných i jinak upravených.

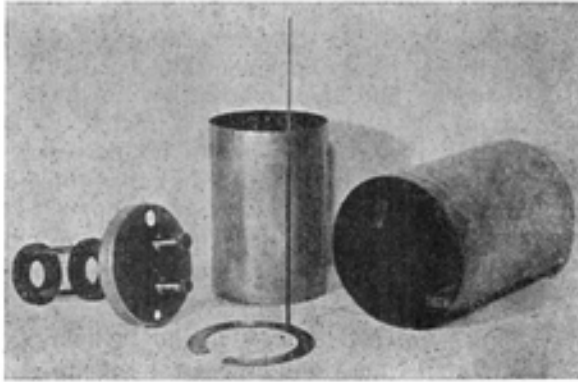
Na základě známých hodnot skupenského tepla tání a skupenského tepla

54²⁾ Tento starší název je odůvodněn tím, že tepelná kapacita libovolného množství kterékoli látky je číselně rovna množství vody (v gramech), které má stejnou tepelnou kapacitu.

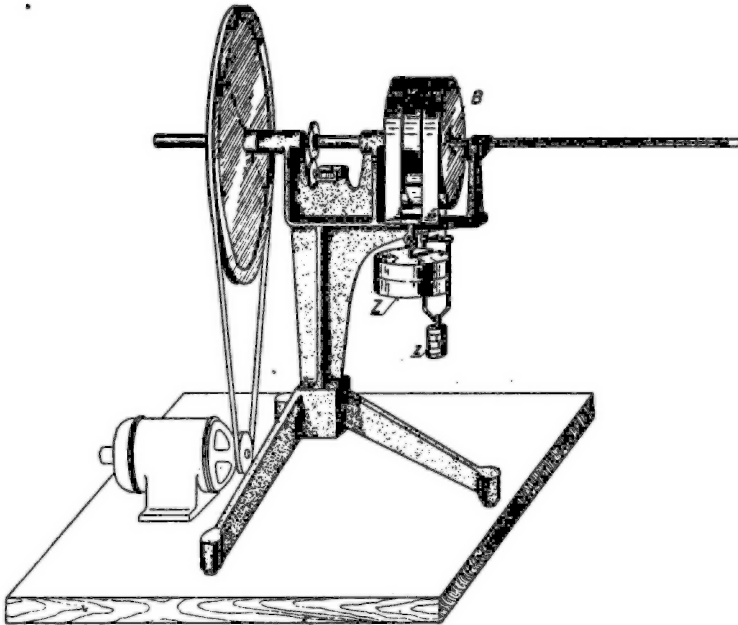
54³⁾ Měříme-li P v int. wattech (W_i), dostaneme podle 6(4) o něco větší číselný faktor, který však souhlasí dosti přesně se zaokrouhlenou hodnotou 0,2389.

varu lze měřit tepelnou energii v *ledovém kalorimetru (Bunsenově)* a v *kalorimetru parním*.

Z uvedených přístrojů je pro měření mechanického ekvivalentu nejhodnější elektrický kalorimetr v popsané úpravě (na př. s vodou jako kalorime-



Obr. 54,3. Elektrický kalorimetr plechový (rozložený).

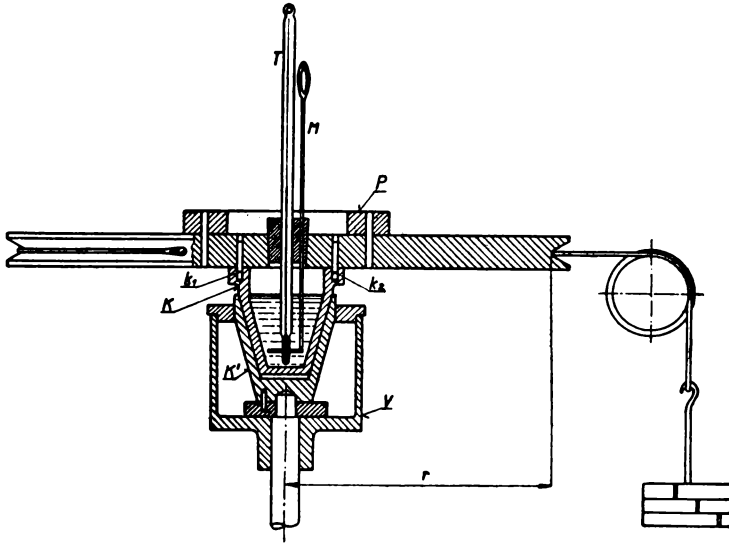


Obr. 54,4. Callendarův přístroj k měření mechanického ekvivalentu tepla.

trickou kapalinou). V podstatě jsou ovšem všechny přístroje pro měření J jen účelně zařízené kalorimetry, v nichž se mění mechanická energie v teplo, a to buď třením pevných těles, nebo vnitřním třením v kapalinách. Poslední případ je uskutečněn v přístroji *Rubensově*, jímž se měří teplo vzniklé opakovaným pádem olověného závaží ve velmi vazkém oleji, vyplňujícím dutý buben s dvo-

jitými stěnami. Vyzdvižení závaží a jeho pád nastane při každém otočení bubnu kolem jeho vodorovné osy. Ze známé vodní hodnoty přístroje a ze zvýšení teploty počítá se vyvinuté teplo, které je rovnomocné s prací vykonanou při jednom zdvižení závaží, násobenou celkovým počtem zdvihů.

Na tření pevných těles se zakládá přístroj *Callendarův* (obr. 54,4). Je to rovněž plechový buben *B* s vodorovnou osou, který se naplní známým množstvím vody a udržuje se motorem v takové rotaci, aby váha závaží *Z*, zavěšeného na dvou sametových páscích, obepínajících plášť bubnu, byla právě vy-



Obr. 54,5. Řez přístrojem *Searleovým*.

rovnána třením pásků o buben. Aby se pásky třely o buben pokud možno na celé ploše bubnu, jsou k němu přitaženy pomocným závažím *z*, které je zavěšeno na druhém konci středního pásku, otočeného kolem bubnu. Ručně nebo motorem se buben otáčí tak, aby tření s pomocným závažíčkem právě udrželo v rovnováze velké závaží *Z*. Zmařená práce je dána rozdílem vah obou závaží *Z — z*, násobeným obvodem bubnu a celkovým počtem otáček, který se zjistí na počítadle.

V některých směrech je dokonalejší *Searleův* přístroj, jehož řez vidíme na obr. 54,5. Zde se mění mechanická energie v teplo třením plášťů dvou dutých mosazných kuželů *K, K'*, které do sebe zapadají. Vnější kužel *K'*, opatřený tepelně izolujícím válcem *V*, otáčí se na svislé ose, poháněné buď ručně, nebo motorem. Vnitřní kužel obsahuje vodu s míchačkou *M* a teploměrem *T* a je kryt kruhovou dřevěnou deskou poloměru *r*; deska zasahuje dvěma kolíčky *k₁, k₂* do jeho okraje a je zatížena ještě prstencem *P*. Na obvodu této desky je upevněn motouz, na němž visí přes kladku tak těžké závaží, aby deska působením zmíněných kolíčků udržela vnitřní kužel *K* v klidu. Měří se zvýšení teploty obou kuželů (a vody), které nastane po jistém počtu otáček vnějšího kužele (postup viz 54,2).

54,III

MĚŘICÍ METHODY

Při tepelných měřeních není možno zcela vyloučit tepelné ztráty. V některých případech se jich sice nemusí dbát, jindy však přesahují měřicí chyby a je nutno vhodným způsobem je zjistit. Vždy se snažíme, abychom je co nejvíce zmenšili, a proto volíme počáteční teplotu kalorimetru tak, aby jeho teplota se měnila při vlastním měření pokud možno souměrně kolem teploty místnosti jako střední hodnoty. Pak se ztracené teplo přibližně vyrovná teplem získaným a opravy na ztráty není zapotřebí. Nejsme-li jisti, že tato podmínka je dosti přesně splněna, provedeme pozorování, z něhož ztráty vypočteme. Postup se zakládá na této úvaze: Tepelné ztráty za jednotku doby jsou přibližně úměrné rozdílu teploty kalorimetru t a okolí ϑ . Ztrátě tepla je však úměrný pokles teploty, způsobený ztrátou; označíme-li tedy minutový pokles teploty t_i znakem Δ_i , bude pro dvě libovolné teploty

$$\Delta_i = a (t_i - \vartheta), \quad \Delta_k = a (t_k - \vartheta),$$

to jest

$$\Delta_k = \Delta_i + a (t_k - t_i),$$

kde a je konstanta úměrnosti, kterou můžeme vyloučit, zjistíme-li minutový pokles teploty před vlastním měřením a po něm. Minutová ztráta roste tedy úměrně s teplotou kalorimetru a můžeme ji pro třetí teplotu t , ležící mezi t_i a t_k , počítat lineární interpolací podle vzorce 18 (1):

$$\Delta = \Delta_i + \frac{\Delta_k - \Delta_i}{t_k - t_i} (t - t_i). \quad (6)$$

Toho použijeme k zjištění opravy konečné teploty kalorimetru:

Před počátkem měření pozorujeme a zapisujeme teplotu kalorimetru počátkem každé minuty po dobu (I) několika minut (sudý počet). V poslední minutě této doby (I) začneme vlastní měření, čtouce dále teplotu počátkem každé minuty během celého měření (doba II). Mění-li se teplota značněji, čteme ji každých 30 vteřin. V tomto čtení pokračujeme ještě několik minut (sudý počet) po skončení pokusu, kdy se již teplota kalorimetru mění jen sdílením tepla okolí (III. doba). Postupnou methodou (čl. 18) určíme střední teplotu t_I a střední minutový pokles Δ_I , příslušející této teplotě. Totéž učiníme v závěrečné době (III) po skončení pokusu, čímž dostaneme střední teplotu t_{III} s příslušnou minutovou ztrátou Δ_{III} . Konečně vypočteme průměr t_{II} všech teplot doby (II) vlastního pokusu a interpolací podle (6) určíme minutovou ztrátu Δ_{II} . Násobením této hodnoty délkou doby (II) v minutách dostaneme celkový pokles teploty na konci pokusu, o který opravíme tuto teplotu. Přitom značíme stále kladně pokles teploty, t. j. Δ počítáme kladně, klesá-li teplota s časem.

Zápis vedeme podle schematu patrného z příkladu:

Elektrický kalorimetr [54,II], naplněný vodou, byl pozorován před zapnutím proudu po dobu 10 minut (I), pak byl zapjat proud na dobu 10 minut, během níž byla dále čtena teplota po minutách (II); ve čtení teploty se pokračovalo ještě 10 minut po vypnutí proudu (III). Pozorované teploty jsou uvedeny v přehledu (7), kde střední minutový pokles Δ_{II} byl vypočten podle (6). Násobením dobou (II) v minutách (t. j. 10) vychází oprava $+ 0,06$ °C, kterou přičteme k pozorované nejvyšší teplotě 25,68 °C (na konci 10. minuty doby II).

Tím dostaneme opravenou teplotu t^* , které by kalorimetr dosáhl na konci doby (II), kdyby nebylo tepelných ztrát. V našem případě je oprava poměrně malá, ježto byla dosti dobře splněna podmínka, že teplota kalorimetru se má pohybovat v malém oboru teplot, souměrně položeném kolem teploty místnosti (která byla asi 23,5 °C).

Oprava na tepelné ztráty kalorimetru

(7)

Mínuty	I		II	III	
1	19,00°	Pokles teploty za 5 min.	19,15°	25,68°	Pokles teploty za 5 min.
2			19,83		
3			20,50		
4			21,18		
5			21,81		
6	09	22,48	60	63	66
7	10	— 0,10°	23,15	57	+ 0,11°
8	11	08	23,77	55	11
9	12	07	24,40	54	09
10	13	06	25,03	52	09
	15	06	25,68	50	10
Středy: $t_I = 19,085$		— 0,074	$t_{II} = 22,453$	$t_{III} = 25,586$	+ 0,100

$$\Delta_I = -0,015 \text{ °/min}, \quad \Delta_{II} = +0,006 \text{ °/min}, \quad \Delta_{III} = 0,020 \text{ °/min},$$

$$t^* = 25,68 \text{ °C} + 10 \Delta_{II} = 25,74 \text{ °C}.$$

Toto početní určení opravy můžeme nahradit *grafickým řešením* úlohy, které plyne ze schematu (7) a ze vzorce (6) elementární geometrickou úvahou. Provedeme-li konstrukci ve vhodném měřítku na milimetrovém papíru, dosáhneme snadno dostatečné přesnosti, zvláště měříme-li teplotu teploměrem děleným jen na stupně, odhadující desetiny.

Závislost teploty na čase je v pravoúhlé soustavě (obr. 54,6) dána čarou složenou z úseček I a III spojených mírně zakřiveným obloukem II. Těžiště T pozorovaných bodů⁴⁾ oblouku II promítneme vodorovně do bodu T_2 na pořadnici bodu t_2 a tímto bodem vedeme rovnoběžku se spojnicí $t_1 t_2$ obou krajních bodů oblouku. Bodem T_1 , v němž tato rovnoběžka protne úsečku bodu t_1 , vedeme svislou přímkou s ; na ní vytínají přímkou I a III délku $t_1^* t_2^*$, rovnou hledané změně teploty (která by nastala v kalorimetru bez tepelných ztrát).

54.1. Mechanický ekvivalent tepla — měření elektrickým kalorimetrem

Z rovnice (5) plyne pro mechanický ekvivalent tepla⁵⁾

$$[J = \frac{P\tau}{Q}, \quad (8)$$

54⁴⁾ Sestrojíme postupně půlením spojnic dvou bodů jako u grafické vyrovnávací metody 16(2).

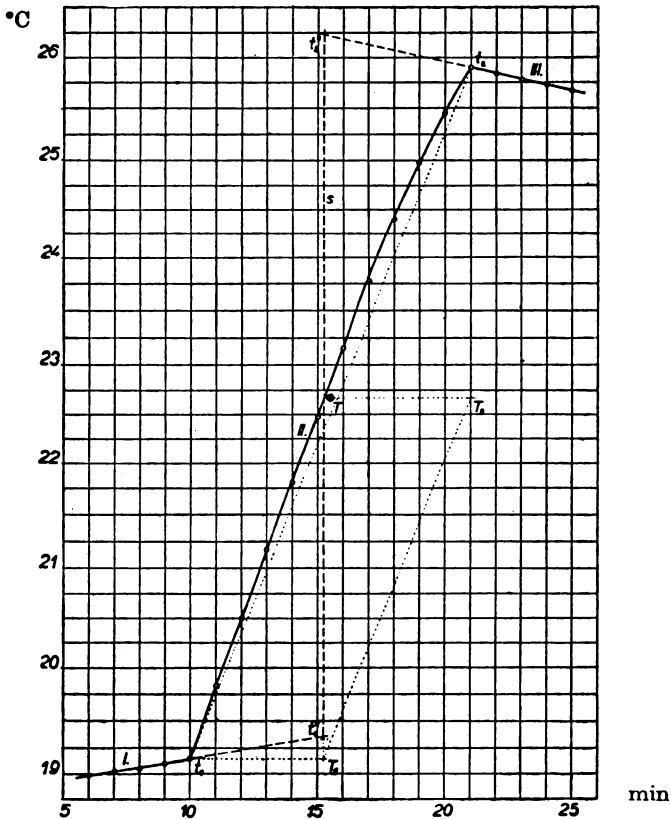
54⁵⁾ Energie proudu je práce vykonaná elektrickým polem ve vodiči a jeví se jako pohybová energie volných elektronů urychlovaných polem, tedy jako mechanická energie, která se srážkami s ionty kovu mění v energii těchto částic, t. j. v teplo. Měříme-li výkon proudu v int. wattech, vyjde pro J hodnota o 0,2‰ menší, než plyne z 6 (4).

kde P značí výkon proudu v topné cívce kalorimetru, τ — dobu průchodu proudu o (přibližně) stálém výkonu (středním) a Q — teplo vyvinuté v kalorimetru za dobu τ vteřin.

Je-li Δt zvýšení teploty kalorimetru po n -minutovém průchodu proudu, je

$$\tau = 60 n \text{ s a } Q = V \cdot \Delta t, \quad (9)$$

kde V je vodní hodnota (tepelná kapacita) kalorimetru i s vodou.



Obr. 54,6. Grafické vyloučení vlivu tepelných ztrát.

Tedy podle (8)

$$J = \frac{60 \text{ s}}{V} \frac{nP}{\Delta t}; \quad (10)$$

vodní hodnota každé části je rovna součinu její hmoty a specifického tepla a pro teploměr se určí podle (4).

Topíme-li stejnosměrným proudem, je průměrný výkon $P = UI$, kde I je průměrný proud jdoucí cívkou a U průměrné napětí na koncích cívky (na svorkách kalorimetru), které měříme ampérmetrem [67,VI] a voltmetrem [68,II]; můžeme je nahradit také jediným přístrojem, měřícím přímo výkon proudu ve wattech, totiž wattmetrem [70,I], který zapojíme způsobem uvedeným v 70.

Zapojení s dvěma přístroji je naznačeno na obr. 54,7. Proud z baterie vedeme přes ampérmetr A a klíč k k jedné svorce kalorimetru K a z druhé svorky přes posuvný odpor r zpět do baterie. Napětí měříme voltmetrem připojeným ke svorkám kalorimetru.

Při měření střídavým proudem je podle 76 (4)

$$P = UI \cos \varphi,$$

kde $\cos \varphi$ bývá blízky jedné. Měříme ovšem přístroji pro střídavý proud (čl. 76).

Potřeby: Elektrický kalorimetr [54,II] s teploměrem a míchačkou, ampérmetr [67,VI], voltmetr [68,II], event. wattmetr [70,I] nebo [76,X], posuvný odpor [71,III], akumulátorová baterie, event. zdroj střídavého proudu, hrubší váhy (do 1000 g), malý odměrný válec, destil. voda.

Postup (všechna vážení provádíme na decigramy)

1. Zvážíme vnitřní nádobu kalorimetru s míchačkou (m_k).

2. Zvážíme vnitřní nádobu s míchačkou a s vodou naplňující kalorimetr asi 3 cm pod okraj nádoby (M_k).

3. Určíme hmotu m_e topné cívky.

4. Sestavíme kalorimetr a změříme objem v teploměru uvnitř kalorimetru.

5. Zapojíme podle 54,7 a upravíme odpor r tak, aby proud i napětí byly měřitelné s poměrnou přesností pokud možno nejméně 0,5%.

6. Změříme teplotu kalorimetru, a není-li aspoň o několik stupňů nižší než teplota okolí, ochladíme jej (nebo vyměníme vodu a znovu zvážíme).

7. Pozorujeme teplotu podle schématu (7) nebo ji zanášíme do grafu (obr. 54,6). Proud zapneme na konci doby (I) a vypneme, až teplota přestoupí teplotu okolí o tolik, oč byla na počátku níže. Během této doby (II), t. j. po n minut, čteme proud i napětí nebo údaj wattmetru každou minutu. Po vypnutí proudu pozorujeme teplotu ještě po dobu (III), trvající několik minut.

8. Podle (7) a vzorce (6) určíme střední minutovou změnu Δ_{II} a vypočteme opravené zvýšení teploty:

$$\Delta t = t_2 - t_1 + n \Delta_{II},$$

je-li t_1 a t_2 počáteční a konečná teplota doby (II). Při grafickém postupu je $\Delta t = t_2^* - t_1^*$.

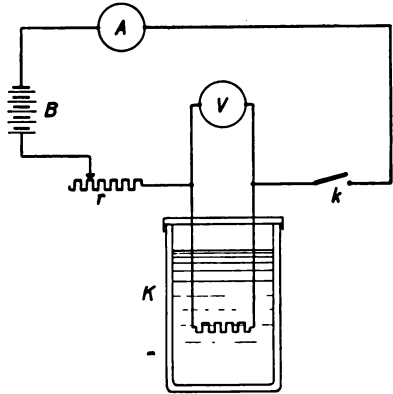
9. Vypočteme vodní hodnotu V (cal °C⁻¹) sečtením

vodní hodnoty vody	$M_k - m_k$
vodní hodnoty kalorimetru	$0,093 m_k$
vodní hodnoty teploměru	$0,46 v$
vodní hodnoty topné cívky (argentanové).	$0,096 m_e$

kde hmoty jsou v gramech, v v cm³.

10. Mechanický ekvivalent v v jednotkách watt s cal⁻¹ = joule . cal⁻¹ vypočteme z (10), kam za P dosadíme součin průměrných hodnot U ve voltech a I v ampérech nebo P ve wattech.

Příklad. Měřili jsme podle zapojení 54,7 kalorimetr s argentanovou cívkou odporu 6 Ω, ampérmetrem do 3 A a voltmetrem do 20 V. Tlustostěnný teploměr, dělený na 0,1°, byl v kalorimetru zasunut objemem $v = 2,5$ cm³. Dále bylo:



Obr. 54,7. Měření elektrickým kalorimetrem.

$m_k = 127,5 \text{ g,}$	$M_k = 562,0 \text{ g,}$	$m_c = 93,8 \text{ g}$
vodní hodnota vody		434,5 cal °C ⁻¹
vodní hodnota kalorimetru		11,9 cal °C ⁻¹
vodní hodnota topné cívky		9,0 cal °C ⁻¹
vodní hodnota teploměru		1,1 cal °C ⁻¹
		$V = 456,5 \text{ cal °C}^{-1}$

Průběh teplot je dán zápisem (7), z něhož vychází

$$t_1 = 19,15^\circ, \quad t_2 = 25,68^\circ,$$

tedy neopravený přírůstek teploty za $n = 10$ minut $t_2 - t_1 = 6,53^\circ$, kdežto opravené zvýšení teploty

$$\Delta t = t_2 + n \Delta_{II} - t_1 = 6,59^\circ.$$

Průměrný proud a napětí (střed 10 měření) byl

$$I = 1,875 \text{ A,} \quad U = 11,24 \text{ V}$$

a podle (10)

$$J = \frac{60}{456,5} \cdot \frac{10 \cdot 11,24 \cdot 1,875}{6,59} = 4,20 \text{ joule} \cdot \text{cal}^{-1},$$

tedy podle (2) jen o $1/3\%$ větší než správná hodnota, kdežto bez opravy na tepelné ztráty by vyšla hodnota asi o $1,3\%$ větší.

54.2. Mechanický ekvivalent tepla — měření Scarleovým přístrojem

Z popisu přístroje [54,III] plyne, že ekvivalent

$$J = \frac{A}{Q},$$

kde A je práce vykonaná motorem během n otáček a Q — teplo vzniklé jejím zmařením. Je-li V celková tepelná kapacita obou kuželů s vodou, míchačkou a teploměrem, je k zvýšení teploty o Δt třeba tepla

$$Q = V \cdot \Delta t.$$

Práce vykonaná dvojicí D při jedné otáčce^{*)} je $2\pi D$. Dvojice, kterou působí motor na vnitřní kužel, je v rovnováze s momentem, kterým působí závaží na kruhovou desku poloměru r , tedy $D = rZ$, je-li Z váha závaží. Při n otáčkách se tedy zmaří práce

$$A = 2\pi nrZ.$$

Vyjádríme-li r v cm a Z v kg*, bude

$$J = \frac{\pi nrZ}{50V\Delta t} \text{ kg}^* \cdot \text{m} \cdot \text{cal}^{-1}. \quad (11)$$

Potřeby: Přístroj [54,III], váhy do 1000 g, destilovaná voda, přesné tyčové měřítko.

Postup

1. Změříme průměr kruhové desky $2r$ cm.
2. Vyčistíme třecí plochy obou mosazných kuželů a natřeme kapkou oleje.
3. Zvážíme oba kužele s míchačkou (celková hmota m g).
4. Zvážíme totéž s vodou (asi do $1/3$ výšky), pokud možno chladnou (M).
5. Sestavíme přístroj a zjistíme objem v teploměru, obsažený uvnitř kalorimetru.
6. Zapneme motor a najdeme taková závaží Z kg*, která se udrží v rovnováze třením kuželů při střední rychlosti motoru, načež motor zastavíme.

54 *) TF 2.5.14.

7. Pozorujeme, jak se mění teplota kuželů s vodou, která má teplotu ještě stále o několik stupňů nižší, než je teplota okolí. Mění-li se rovnoměrně s dobou, zaznamenáváme ji každou minutu po sudý počet minut, jak je uvedeno ve schématu 54(7) pro dobu (I).

8. Zapneme motor na dobu (II), za kterou vystoupí teplota kuželů o přibližně stejný počet stupňů nad teplotu okolí, o něžž byla na počátku pod ní.

9. Po vypnutí motoru pozorujeme teplotu ještě po dobu (III) a zaznamenáme stav počítadla.

10. Podle 54 (7) vypočteme minutovou ztrátu Δ_{II} , z níž násobením dobou (II) v minutách vypočteme opravu konečné teploty. Přičteme ji k pozorovanému rozdílu teplot a dostaneme Δt .

11. Vodní hodnota v cal. $^{\circ}\text{C}^{-1}$.

$$V = M - m + 0,093 m + 0,46 v.$$

12. Ekvivalent vypočteme z (11), kam za n dosadíme rozdíl obou stavů počítadla.

55. SPECIFICKÉ (MĚRNÉ) TEPLO PEVNÝCH LÁTEK A KAPALIN

Definice. Specifické neboli měrné teplo c látky při teplotě t je množství tepla dQ , kterým se její teplota zvýší na $t + dt$, dělené hmotou látky M v gramech a zvýšením teploty ve stupních:

$$c = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dt}. \quad (1)$$

Jednotky

MKSA $[c] = \text{J kg}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1} = 2,389 \cdot 10^{-4} \cdot [c]_p.$

Jednotka praktická

$[c]_p = \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1} = \text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}.$ (2)

Tabulka 55,I. Specifické teplo čisté vody mezi $0 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ až $120 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ v cal. $\text{g}^{-1} \cdot \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$

0 $^{\circ}\text{C}$	1,008	21 $^{\circ}\text{C}$	0,9988
5	1,0030	22	87
8	1,0019	23	85
9	1,0016	24	84
10	13	25	83
11	10	30	79
12	08	35	79
13	05	40	82
14	02	50	96
15	00	60	1,0017
16	0,9998	70	1,0034
17	96	80	1,005
18	94	90	1,007
19	92	100	1,010
20	90	120	1,017

Specifické teplo se mění dosti málo s teplotou, a proto je můžeme názorně definovat jako hodnotu číselně rovnou teplu potřebnému k ohřátí 1 g látky o jeden stupeň Celsia (z teploty $t - 0,5^{\circ}$ na $t + 0,5^{\circ}$). Tak na př. specifické teplo vody se mění podle tabulky I, z níž vidíme, že se mezi 8° a 60° liší od praktické jed-

notky $[c]_p$ nejvýše o $\pm 3\%$. To odůvodňuje název „vodní hodnota“ pro tepelnou kapacitu (čl. 54) a všeobecné používání vody jako kalorimetrické látky. Obvykle měříme průměrné specifické teplo v širším nebo užším oboru teplot, které přisuzujeme střední teplotě oboru.

Přístroje

K měření specifických tepel pevných látek je nejvhodnější směšovací kalorimetr [54,I] (vodní), specifická tepla kapalin pak měříme buď směšovací, nebo elektrickým kalorimetrem [54,II]. V prvním případě je výhodná 55,I jednoduchá pomůcka, zv. **thermofor** nebo **kalorifer** (*Andrews*). Je to zatavená skleněná baňka, protažená vzhůru v kapiláru a naplněná rtutí, nad níž je vzduchoprázdno (obr. 55,1). Kapilára má dvě značky Z_1, Z_2 ; mezi nimi a na hořejším konci je mírně rozšířena. Zahřeje se ve vodní lázni tak, aby rtuť vystoupila přes značku Z_1 do hořejší dutiny. Po vyjmutí z lázně ovšem chladne a rtuť klesá. Při ochlazení odpovídajícím poklesu rtuti od Z_1 k Z_2 ztratí jisté množství tepla, které můžeme odevzdat kapalině, ponoříme-li do ní thermofor na dobu průchodu rtuti mezi oběma značkami (srov. 55.4). Toto množství tepla Q_T je konstantou kaloriferu, zvanou jako *tepelná hodnota*; zjistí se na př. ponořením do kalorimetru naplněného kapalinou o známém specifickém teple, na př. destilovanou vodou.



55.1. Měření tepelné kapacity kalorimetru

Obr. 55.1.
Thermoform
čili kalorifer.

Tepelnou kapacitu čili vodní hodnotu (vnitřní nádoby, míchačky a teploměru) kalorimetru *Regnaultova* nebo topné cívky elektrického kalorimetru lze určit způsobem popsáným v článku 54. Topná cívka však bývá navinuta na izolační kostře, jejíž specifické teplo nebývá přesně známo. Vodní hodnotu kalorimetru skleněného pak nelze vůbec určit ze specifického tepla skla, ježto vnější stěna nedosáhne teploty stěny vnitřní. Konečně ani vodní hodnotu tenkostěnného teploměru s ochrannou trubici nelze určit podle předpisu 54 (4). V těchto případech musíme určit tepelnou kapacitu všech součástí kalorimetru (i s teploměrem a topnou cívkou) jednoduchým měřením, které uvádíme v souhrnu:

Potřeby: Kalorimetr [54,I] nebo [54,II], váhy do 1000 g, kádinka, vaříč.

Postup (všechna vážení provádíme na decigramy)

1. Zvážíme kalorimetr se všemi součástmi potřebnými při kalorimetrických měřeních (M_k).
2. Naplníme jej do třetiny destilovanou vodou teploty nižší než asi 10°C a znovu zvážíme (M_1).
3. Ohřejeme další destilovanou vodu v množství potřebném k doplnění kalorimetru asi na 40°C .
4. Čteme teplotu t_1 kalorimetru a teplotu t_2 ohřáté vody, kterou ihned doplníme kalorimetr, uzavřeme a míchajíc pozorujeme teploměr, jehož teplotu t čteme v okamžiku, kdy dostoupí maxima (přestane stoupat).
5. Nato zvážíme plný kalorimetr (M_2).
6. Podle zákona o zachování energie musí se teplo Q , ztracené teplotou vodou, rovnat teplu přijatému chladnou vodou a kalorimetrem.¹⁾

55 ¹⁾ Teplo odevzdané okolí se může vzít v počet podle 54 (7). Při této úloze toho zpravidla není třeba.

$$Q = m_2 (t_2 - t) = (m_1 + V_k) (t - t_1), \quad (3)$$

kde hmota chladné vody $m_1 = M_1 - M_k$ a hmota teplé vody $m_2 = M_2 - M_1$. Odtud hledaná celková vodní hodnota kalorimetru

$$V_k = m_2 \frac{t_2 - t}{t - t_1} - m_1. \quad (4)$$

Rychleji lze zjistit V_k thermoforem [55, I], známe-li jeho tepelnou hodnotu Q_T v kaloriích, právě popsaným postupem; nahradíme jen teplou vodu vyhřátým thermoforem a množstvím studené vody volíme tak, aby se do ní mohl ponořit thermofoor až těsně pod spodní značku Z_2 . Thermofoor ponoříme do kalorimetru v okamžiku průchodu rtuti horní značkou Z_1 a vyčkáme jejího klesnutí k spodní značce, načež ihned čteme teplotu t kalorimetru. Levá strana rovnice (3) je pak rovna Q_T , takže

$$V_k = \frac{Q_T}{t - t_1} - m_1. \quad (5)$$

Obě popsané metody mají tu přednost, že vyrovnání teplot je obvykle dosti rychlé a není třeba přihlížet k tepelným ztrátám, pokud se průměrná teplota kalorimetru neliší značněji od okolní teploty. Vodní hodnotu elektrického kalorimetru lze konečně změřit i methodou 54.1, dosadíme-li do 54 (10) za J známou hodnotu 54 (2).

55.2. Specifické teplo pevných látek — měření směšovací kalorimetrem

Jestliže do kalorimetru teploty t_1 a vodní hodnoty V_k , naplněného množstvím m_v kapaliny o specifickém teple c_v , vnoříme těleso hmoty M teploty t_2 , je výsledná teplota t dána rovnicí obdobnou vztahu (3):

$$Q = Mc (t_2 - t) = (m_v c_v + V_k) (t - t_1). \quad (6)$$

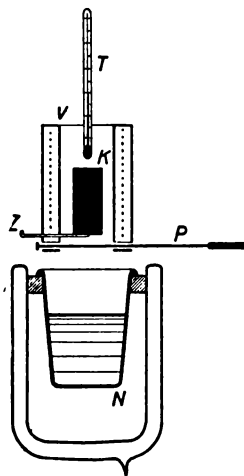
Tato rovnice vyjadřuje samozřejmou skutečnost, že teplo ztracené pevným tělesem a teplo přijaté kalorimetrem mají stejnou velikost Q , odkud plyne pro specifické teplo tělesa

$$c = \frac{m_v c_v + V_k}{M} \frac{t - t_1}{t_2 - t}. \quad (7)$$

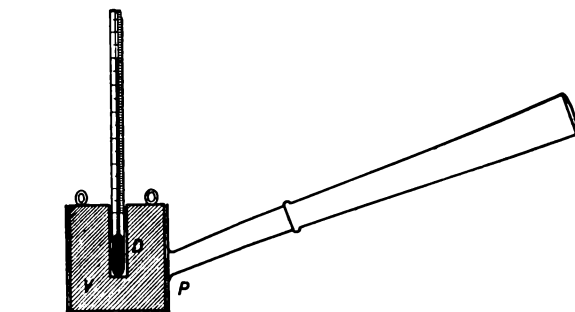
Postup měření se pro různé látky liší jen způsobem, jakým je zahřejeme na známou teplotu t_2 . Látky malé *teplotní* vodivosti (58) je třeba vyhřívat dosti dlouho, aby dosáhly okolní teploty i uvnitř. Děje je tak buď v kapalinové, nebo v parní lázni, nebo též ve vzduchové lázni (nejlépe v thermostatu [23, V] s volitelnou teplotou), vyhřívané nepřímou buď kapalinou, parou, nebo elektricky. Teplota se měří v lázni poblíž vyhřívajícího vzorku. Při vyhřívání parou je po dosti dlouhé době teplota t_2 rovna teplotě varu. Aby poměrná chyba teplotního rozdílu byla malá, hledíme dosáhnout co nejvyšší teploty t_2 . Je-li kalorimetrickou kapalinou voda, spokojíme se teplotou kolem bodu varu, aby se nespoutřekovalo nezjistitelné množství tepla na vznik páry (jenž se projeví syčením). Zkoušené vzorky zavěsíme na drátek, drobné kousky v drátěném košíčku nebo v misce (nádobce), kterou můžeme vložit i s látkou do kalorimetru, počítajíc s její vodní hodnotou. Teplota vyhřátého vzorku při vkládání do kalorimetru

musí být co nejpřesněji známa a podle toho třeba upravit způsob měření. Při měření specifického tepla dobrých vodičů (zvláště kovů) není třeba přihlížet k tepelným ztrátám, neboť teplota v kalorimetru se ustálí ve velmi krátké době.

Pro vyhřívání kovových vzorků libovolného tvaru lze použít na př. zařízení obr. 55,2. Měřený kov K vložíme do elektricky vytápěného válce V , v němž je držen západkou z ; uzavřeme přepážku P a shora vsuneme teploměr T (s rozsahem aspoň do $120\text{ }^{\circ}\text{C}$). Topný válec je nad kalorimetrem, na př. skleněným s aluminiovou nádobkou (pohárkem) N , naplněným asi ze dvou třetin odváženým množstvím vody m_w , která má teplotu místnosti t_1 . Vodní hodnota celého kalorimetru budiž známa (na př. určena podle 55.1). Vyhříváme pomalu vzorek ve válci; po jisté době vypneme proud a počkáme, až se teplota poněkud ustálí (asi kolem $100\text{ }^{\circ}\text{C}$). Čteme údaj teploměru T , vysuneme



Obr. 55,2. Zařízení k měření měrného tepla kovů.



Obr. 55,3. Vyhřívání kovového válečku podle Kolářka.

přepážku P a ihned uvolněním západky vypustíme vzorek do kalorimetru. Pak odsuneme stojan s ohřivacím válcem, vložíme do kalorimetru míchačku a teploměr (které mají rovněž teplotu místnosti) a za vydatného míchání zjistíme vrcholnou teplotu kalorimetru t_2 . Specifické teplo vzorku dostaneme podle rovnice (7).

Můžeme-li si opatřit vzorek ve tvaru válečku V , předepsaných rozměrů, opatříme jej osovou dutinou D pro teploměrnou nádobku a dvěma nebo třemi očky, k nimž připevníme tenký drátek (k uchopení horkého válečku). Vzorek vyhřejeme v plechovém pouzdře P , do kterého právě zapadá, držiče jej za rukojeť nad plamenem nebo elektrickým vařičem (obr. 55,3). Měření tímto způsobem (Kolářek) provedeme podle tohoto návodu:

Potřeby: Směšovací kalorimetr [54,1] s míchačkou a teploměrem, válcové pouzdro s rukojetí a teploměrem do $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ (obr. 55,3), váhy do 1000 g, destilovaná voda.

Postup (srov. 55.1; všechna vážení na 0,1 g)

1. Určíme celkovou tepelnou kapacitu kalorimetru methodou 55.1; je-li to plechový (Regnaultův) kalorimetr, lze ji určit pro každou součást zvlášť jako součin hmoty a specifického tepla, pro teploměr podle 54 (4).

2. Zvážíme kalorimetr nejprve prázdný, pak s destilovanou vodou teploty místnosti a odečtením obou výsledků dostaneme hmotu m_w vody.

3. Zvážíme váleček s drátkem (M) a kromě toho také s kapkou vody v dutině, abychom mohli přičíst její hmotu μ k vodní hodnotě válečku,²⁾ jestliže se ovšem při vyhřívání válečku nevyparí.

4. Sestavíme kalorimetr bez krytu, čteme jeho teplotu t_1 a počneme s vyhříváním zkoušeného válečku v pouzdře nad malým plamenem kahanu (nebo elektrickým vaříčem).

5. Stoupne-li teplota válečku nad 90°C , sejme jej s plamene a pozorujeme teploměr, který teprve za chvíli dosáhne nejvyšší teploty t_2 . Pak rychle vyjmeme teploměr, uchopíme drátek válečku, který ihned vnoříme do kalorimetru. Neustále míchající, čteme maximální teplotu t kalorimetru (bez oprav na tepelné ztráty).

Specifické teplo c válečku vypočteme podle rovnice (6), v níž položíme $c_v = 1 \text{ cal} \times \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ a Mc nahradíme součtem $Mc + \mu$. Tak dostaneme vzorec

$$c = \frac{m_v + V_k}{M} \frac{t - t_1}{t_2 - t} - \frac{\mu}{M}, \quad (8)$$

v němž malý člen $\frac{\mu}{M}$ činí obvykle méně než 1% c . Lze jej tedy vynechat, měříme-li teplotu kalorimetru jen na $0,1^\circ$.

Příklad. Specifické teplo ocelového válečku:

kalorimetr s míchačkou vážil	164,6 g
objem teploměru v kalorimetru	2,4 cm ³
vodní hodnota	164,6 · 0,093 = 15,3
	2,4 · 0,46 = 1,1
	$V_k = 16,4$;

kalorimetr s vodou vážil	459,8 g
vodní hodnota vody	$m_v = 295,2$
váleček suchý vážil	$M = 354,7$ g
váleček s kapkou vody	354,9 g
	hmota kapky $\mu = 0,2$ g

Teplota vyhřátého válečku změřená teploměrem děleným na stupně	$t_2 = 92,6^\circ\text{C}$
Teplota kalorimetru změřená teploměrem děleným na počáteční	$0,1^\circ$
vrcholná	$t_1 = 19,25^\circ\text{C}$
	$t = 27,79^\circ\text{C}$

Dosažením do (8) specifické teplo oceli při teplotě kolem 60°C

$$c = \frac{295,2 + 16,4}{354,7} \cdot \frac{8,54}{64,8} - \frac{0,2}{355} =$$

$$= 0,1158 - 0,0006 = 0,115 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 481,42 \text{ J kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}.$$

55.3. Specifické teplo kapalin — měření kalorimetrem vodním

Specifické teplo kapalin lze určit vodním kalorimetrem o známé vodní hodnotě V_k přešlou methodou 55.2 pro specifické teplo látek pevných. Měřenou kapalinu zalijeme na t_2° vliveme v množství m do kalorimetru s m_v g vody teplé t_1° , zamícháme a čteme nejvyšší teplotu t . Tento jednoduchý způsob, při němž jako u těles pevných není třeba korekce na tepelné ztráty, není vždy přípustný (pro kapaliny reagující chemicky s kovem kalorimetru nebo vyvinující při styku s vodou teplo a pod.). V tom případě upravíme postup tak, že uzavřeme kapalinu, na př. do skleněné lahvičky, jejíž vodní hodnotu μ musíme

^{55 2)} Voda má asi 10krát větší specifické teplo než většina kovů, proto 1 dkg vody odpovídá asi 1 g kovu.

ovšem připočítat k vodní hodnotě mc měřené kapaliny. Vidíme, že v tomto případě bude specifické teplo kapaliny dáno rovnicí, která plyne z (8), klademe-li tam $M = m$, tedy

$$c = \frac{m_v + V_k}{m} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} - \frac{\mu}{m}, \quad (9)$$

kde vodní hodnota μ je pro skleněnou nádobku rovna její hmotě násobené specifickým teplem skla $0,19 [c]_p$.

Při tomto způsobu trvá ovšem delší dobu, než kalorimetr dosáhne vrcholné teploty, a proto je nutno ji opravit na tepelné ztráty podle 54 (7) nebo graficky (obr. 54,6). Rovnice pro první případ, kdy měřenou kapalinu smísíme přímo s vodou kalorimetru, plyne z (9) pro $\mu = 0$.

55.4. Specifické teplo kapalin - měření směšovací kalorimetrem (thermoforem)

Specifické teplo kapaliny lze také často měřit tak, že jí použijeme jako kalorimetrické kapaliny (místo vody) a nalijeme ji v odváženém množství m do kalorimetru známé vodní hodnoty V_k (je-li nutno, určí se methodou 55.1). Vnoříme-li do ní těleso známé tepelné kapacity, vyhřáté na teplotu t_2 , můžeme methodou 55.2 změřit specifické teplo c kapaliny, které vypočteme z téže základní rovnice (6), z níž jsme počítali tehdy neznámé specifické teplo pevné látky. Bude tedy v nyníjším označení

$$Q = (mc + V_k)(t - t_1), \quad (10)$$

kde Q je teplo dodané kalorimetru s kapalinou teploty t_1 a t je výsledná (maximální) teplota. Teplo Q můžeme ovšem kalorimetru a měřené kapalině dodat rozmanitým způsobem. Učiníme-li to válečkem vyhřátým podle Kolářkova návodu, bude podle 55.2

$$Q = (Mc' + \mu)(t_2 - t),$$

značí-li nyní c' specifické teplo válečku. Tak dostaneme z (10)

$$c = \frac{Mc' + \mu}{m} \frac{t_2 - t}{t - t_1} \frac{V_k}{m}. \quad (11)$$

Místo pevné látky (válečku) mohli bychom ovšem užít jako u metody 55.3 i kapaliny (zvláště vody) odvážené a ohřáté na známou teplotu.

Lépe je však použít k tomu thermoforu [55,I]. Jeho tepelnou hodnotu Q_T musíme ovšem znát nebo ji nejprve určit ponořením do vody. Přesto je tato metoda praktičtější než předešlá metoda, která vyžaduje kromě vážení válečku také zjištění jeho teploty, které nelze provést dosti přesně.

Potřeby: Směšovací kalorimetr [54,I], thermofor [55,I], vodní lázeň, váhy do 1000 g, filtrační papír.

Postup (vážíme na 0,1 g)

A. Určení tepelné hodnoty Q_T thermoforu vodou

1. Do kalorimetru, který má (s příslušenstvím) vodní hodnotu V_k , nalijeme m_v gramů destilované vody o několik stupňů chladnější než teplota místnosti.
2. Vyhřejeme thermofor tak, aby rtuť stoupla až do hořejší dutiny.
3. Vyjmeme thermofor z lázně, osušíme filtračním papírem a v okamžiku, kdy rtuť klesne k horní značce Z_1 , vnoříme jej do kalorimetru, jehož teplotu t_v jsme těsně předtím změřili. Tam jej ponecháme (vydatně míchajíce) až do průchodu rtuti spodní značkou Z_2 .

V tomto okamžiku jej hbitě vyjmeme a zjistíme maximální teplotu t_v , které nato kalorimetr dosáhne.

4. Tepelná hodnota thermoformu v kaloriích je podle (10)

$$Q_T = (m_v + V_k) (t_v - t_{1v}).$$

B. Měření specifického tepla kapaliny

1. Ochladíme měřenou kapalinu o několik stupňů pod teplotu místnosti. Vyprázdníme kalorimetr a osušíme (filtračním papírem) všechny jeho součásti i teploměr. Naplníme kalorimetr měřenou kapalinou v takovém množství m , aby sahala asi 5 cm od okraje.

2. Jako v A.

3, 4. Jako v A, ale počáteční teplotu kapaliny označíme t_1 a nejvyšší teplotu t (bez indexu), takže bude

$$Q_T = (mc + V_k) (t - t_1).$$

5. Pro specifické teplo c kapaliny plyne z obou rovnic výraz

$$c = \frac{Q_T}{m(t - t_1)} - \frac{V_k}{m} = \frac{m_v + V_k}{m} \frac{t_v - t_{1v}}{t - t_1} - \frac{V_k}{m}. \quad (12)$$

Při vhodném uspořádání měření nebývá třeba opravy na tepelné ztráty.

55.5. Specifické teplo kapalin — měření elektrickým kalorimetrem

Methodou 54.1 měříme elektrickým kalorimetrem [54,II] mechanický ekvivalent tepla na základě známého specifického tepla kapaliny (vody). Známe-li velikost mechanického ekvivalentu tepla, můžeme touž methodou určit specifické teplo kapaliny, naplníme-li jí kalorimetr a vytápíme-li jej elektrickým proudem známého výkonu P po dobu n minut čili $\tau = 60 n$ vteřin.

Teplo Q_1 vyrobené proudem za vteřinu je podle 54 (5) rovno $\frac{P}{J} = KP$, a tedy teplo dodané kapalině za n minut

$$Q = 60 s n KP. \quad (13)$$

Vyjádríme-li teplo v kaloriích a výkon proudu ve wattech, bude podle 54 (5')

$$Q = 0,239 \cdot 60 s \cdot W^{-1} \text{ cal } s^{-1} \cdot nP = \quad (14)$$

$$= 14,34 \text{ cal } W^{-1} \cdot nP. \quad (15)$$

Skutečnost, že v této rovnici je uveden rozměr $\text{cal } W^{-1}$ číselné konstanty v kaloriích a ve wattech, neznamená nikterak, že rovn. (15) přestává být správná, vyjádříme-li Q a P v jiných jednotkách. Její aplikace je ovšem pro tyto jednotky nejjednodušší: teplo vyrobené proudem za n minut dostaneme v kaloriích, násobíme-li výkon proudu ve wattech číslem 14,34 n . Pro libovolné jiné jednotky bychom však dostali správnou hodnotu Q zase z téže rovn. (15). Bylo by pak třeba vyjádřit rozměr $\text{cal } W^{-1}$ v nově zvolených jednotkách; tím bychom došli k nové číselné hodnotě konstanty. Toto teplo zvýší teplotu kalorimetru vodní hodnoty V_k , obsahujícího kapalinu hmoty m a specifického tepla c , o hodnotu Δt , danou rovnicí (10):

$$Q = (mc + V_k) \Delta t. \quad (16)$$

Pro tepelné ztráty nepozorujeme ovšem hodnotu Δt na kalorimetru v plné velikosti, ale určíme ji, přičteme-li k pozorovanému rozdílu $t - t_1$ opravu podle

54 (7) nebo jako délku $\overline{t_1 t_2}$, odměřenou v grafu 54,6. Spojením rovnic (13) a (16) pak plyne

$$c = \frac{60s Kn \cdot P}{m\Delta t} - \frac{V_k}{m} = \frac{14,34 W^{-1} cal s^{-1} \frac{nP}{m\Delta t}}{m\Delta t} - \frac{V_k}{m}. \quad (17)$$

Měření provádíme nejčastěji v zapojení 54,7, v němž měříme výkon stejnosměrného proudu jako součin UI , ale můžeme přímo měřit výkon wattmetrem. Potřeby (až na destilovanou vodu) a postup jsou stejné jako u metody 54.1 až na to, že místo J podle rovn. 54 (10) počítáme c podle vzorce (17).

56. POMĚR SPECIFICKÝCH TEPEL PLYNŮ

(Poissonova konstanta)

Definice. *Poissonova* konstanta κ je poměr specifického tepla c_p při stálém tlaku k specifickému teplu c_v při stálém objemu:¹⁾

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (1)$$

Jednotky. Jako bezrozměrné číslo má u všech soustav jednotku $[\kappa] = 1$.

MĚŘICÍ METODY

Poměr specifických tepel κ je pro všechny plyny větší než 1 a má pro každý plyn velmi stálou hodnotu; můžeme ji určit ze změny tlaku při *adiabatickém* ději, pro který platí *Poissonova* rovnice²⁾

$$pV^\kappa = p_1 V_1^\kappa = \text{const};$$

zde značí p , V — původní tlak a objem, p_1 , V_1 — tytéž veličiny po *adiabatické* změně (při níž si plyn nevyměňuje teplo s okolím). Je-li hmota plynu M , jsou jeho hustoty

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \rho_1 = \frac{M}{V_1},$$

takže

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\kappa. \quad (2)$$

Naproti tomu hustota plynu při *stálé* teplotě je podle *Boyle-Mariottova* zákona úměrna tlaku³⁾, takže poměr hustot je rovný poměru tlaků:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{V}{V'} = \frac{p'}{p}. \quad (3)$$

56 ¹⁾ TF 4.1.12, 4.3.2.

56 ²⁾ TF 4.3.2.

TF 2.11.2.

Poissonovu konstantu měříme buď pozorováním adiabatických změn plynu, které uměle přivodíme, nebo použijeme adiabatických dějů, které v plynu probíhají při šíření zvuku. Poslední způsob převádí měření κ na měření rychlosti zvuku v plynech. Příslušné metody byly vloženy v čl. 49.

56.1. Clément-Desormesova metoda na měření poměru specifických teplot plynů

Poissonovu konstantu bychom mohli vypočítat z rovnice (2), kdybychom změřili původní tlak p a hustotu ρ plynu a tytéž veličiny p_1 , ρ_1 po adiabatické změně. Měření hustot můžeme však vzhledem k úměře (3) nahradit zjištěním poměru tlaků plynu před expansí a po ní, které by plyn měl, kdyby jeho expanse byla isothermická, t. j. kdyby se dala za stálé teploty. Necháme-li tedy plyn ochlazený expansí prostě ohřát na teplotu místnosti, bude mít stejnou teplotu jako před expansí a jeho tlak stoupne na p' . Ohřátím plynu při stálém objemu se však nezmění jeho hustota, a proto bude proň platit vztah plynoucí z (3) pro $\rho' = \rho_1$. Dosazením do (2) dostaneme tedy

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{p}{p'} \right)^\kappa, \quad (4)$$

odkud

$$\kappa = \frac{\log p - \log p_1}{\log p - \log p'}. \quad (5)$$

K měření se používá jednoduchého přístroje podle Clémenta a Desormesa (obr. 56,1). Je to skleněná bāň B s otevřeným manometrem M (obvykle vodním) a s dvěma kohouty. Jedním z nich k se plyn do bāně propustí a mírně stlačí, takže manometr ukazuje přetlak daný rozdílem h cm vodního sloupce. Otevřením druhého širokého kohoutu K se nechá plyn adiabaticky rozepnout, čímž klesne jeho tlak na vnější barometrický tlak b a zároveň se plyn ochladí pod teplotu místnosti (ježto při zvětšování objemu vykoná na újmu své vnitřní energie práci proti vnějšímu tlaku). Po jisté době se opět teplota plynu vyrovná s okolní teplotou, při čemž se ovšem hustota plynu nezmění (stálý objem), a proto stoupne manometr o h' cm. Vyjádříme-li tedy tlak b v cm vodního sloupce, bude

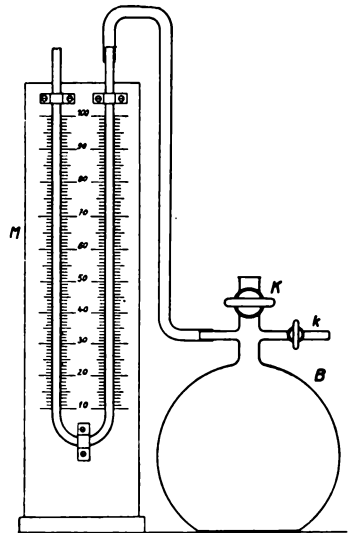
$$p = b + h, \quad p_1 = b, \quad p' = b + h', \quad \rho' = \rho_1 \quad (6)$$

a dosazením do (4)

$$\frac{b + h}{b} = \left(\frac{b + h}{b + h'} \right)^\kappa$$

Jsou-li h a h' malé proti b , můžeme psát

$$\begin{aligned} 1 + \frac{h}{b} &= \left(\frac{b + h' - h' + h}{b + h'} \right)^\kappa = \\ &= \left(1 + \frac{h - h'}{b + h'} \right)^\kappa \doteq 1 + \kappa \frac{h - h'}{b + h'}, \end{aligned}$$



Obr. 56,1. Clément-Desormesův přístroj k měření c_p/c_v .

odkud

$$\kappa \doteq \frac{h}{h-h'} \left(1 + \frac{h'}{b} \right).$$

Průměrnému tlaku (v Praze asi 740 torů) odpovídá vodní sloupec

$$b = 74 \cdot \frac{13,54}{0,998} = 1004 \text{ cm H}_2\text{O (20 }^\circ\text{C)},$$

a proto můžeme s dostatečnou přesností vypočítat κ podle vzorce

$$\kappa = \frac{h}{h-h'} \left(1 + \frac{h'}{1000} \right). \quad (7)$$

Potřeby: Přístroj 56,1 podle potřeby hustilka.

Postup

1. Otevřeme oba kohouty a kohoutkem k vháníme měřený plyn do bání, až vypudí všechen vzduch. Pak uzavřeme napřed K a pak k tak, aby manometr ukazoval přetlak několika decimetrů vodního sloupce. Vyčkáme, až se teplota plynu v bání ustálí na teplotě místnosti, což se projeví ustálením manometru. Změříme rozdíl h výšek obou sloupců manometru (v cm).

2. Otevřeme na zlomek vteřiny kohout K , na př. tak, že jej otočíme o 180° .

3. Ochlazený plyn se pomalu otepluje a manometr zvolna stoupá. Jakmile se ustálí, čteme přetlak h' cm.

4. Poměr specifických tepel je dán vzorcem (7). Celé měření několikrát opakujeme, při čemž přetáčíme kohout K různou rychlostí.

5. Chceme-li počítat κ podle přesného vzorce (5), musíme při měření zjistit také barometrický tlak b a dosadit ze vztahů (6); přitom vyjádříme všechny tlaky v týchž jednotkách (tor nebo cm vodního sloupce).

Příklad. *Poissonova* konstanta vzduchu.

Vzduch byl v bání mírně stlačen hustilkou a přetlak v cm H_2O byl změřen po ustálení manometru (až kompresi ohřátý vzduch nabyl teploty místnosti). Mezitím byl změřen barometrický tlak a opraven na 0°C podle 22 (6). Výsledek měření byl tento:

Teplota místnosti $19,3^\circ\text{C}$

$$b = 741 \text{ tor} = 1010 \text{ cm H}_2\text{O}, \quad h = 31,1 \text{ cm}, \quad h' = 8,5 \text{ cm};$$

podle (7)

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{31,1}{31,1 - 8,5} (1 + 0,0085) = 1,376 + 1,4 \cdot 8,5 \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,376 + 0,012 = 1,388 \doteq 1,39. \end{aligned}$$

Výpočet podle složitějšího vzorce (5) dal hodnotu $\kappa = 1,384$, tedy v mezích přesnosti shodnou s hořejší. Správná hodnota je $1,405$, a to je v soulase s tím, že tato metoda dává vždy spíše menší hodnoty κ .

57. SKUPENSKÉ TEPLŮ

Definice. Skupenské teplo (utajené, latentní) l dané látky je teplo, které nutno dodat jednotce hmoty látky, aby při stálé teplotě změnila skupenství. Je-li třeba tepla L k změně skupenství hmoty M , pak skupenské teplo

$$l = \frac{L}{M}. \quad (1)$$

Jednotky. Skupenské teplo se měří v jednotkách MKSA

$$[L] = \text{J kg}^{-1} = 2,389 \cdot 10^{-4} [L]_p$$

a v praktických jednotkách

$$[L]_p = \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}.$$

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Měření se provádí různými druhy kalorimetrů a metody se liší především pro oba druhy tepla: *tání* a *vypařování* (varu). Skupenské teplo tání se měří nejčastěji směšovacím kalorimetrem [54,I]; skupenské teplo varu se určí také dobře elektrickým kalorimetrem [54,II]. Kromě toho je třeba použít poněkud jiné úpravy při měření tepla tání látek s bodem tání nižším než teplota místnosti a při měření tepla látek s vyšším bodem tání.

57.1. Skupenské teplo tání látek tajících nad teplotou místnosti

Měření skupenského tepla tání látek, jejichž bod tání je vyšší než teplota místnosti, provádíme směšovacím kalorimetrem.

Postup je v podstatě shodný s methodou 55.2 měření specifického tepla pevných látek. Rozdíl je ovšem v tom, že látku zahřátou na teplotu t_2 , vyšší než bod tání ϑ , vkládáme do kalorimetru (na př. vodního) ve skupenství tekutém, nejlépe v kovové nádobce, jejíž vodní hodnotu μ vypočteme jako součin její hmoty a specifického tepla nebo ji určíme předběžným měřením. Kromě toho musíme uvážit, že látka hmoty M ve skupenství kapalném (spec. teplo c') se ochladí na teplotu tání, pak ztuhne, čímž se uvolní teplo Ml , a dále se ochladí na teplotu t . Je-li její specifické teplo v pevném stavu c , získá kalorimetr celkem teplo

$$Q = M [c' (t_2 - \vartheta) + l + c (\vartheta - t)] + \mu (t_2 - t), \quad (1a)$$

kteří se spotřebuje na ohřátí kalorimetru (vodní hodnota V_k) a vody (v. h. m_v) z teploty t_1 na t . Počítáme tedy skupenské teplo tání l z rovnice obdobné 55 (6)

$$Q = (m_v + V_k) (t - t_1), \quad (2)$$

kam dosadíme za Q z (1) a podle potřeby opravíme rozdíl teplot $t - t_1$ na tepelné ztráty podle 54 (7) nebo 54,6.

Potřeby: Kalorimetr [54,I], praktikantské váhy [25,IV], hrubší váhy do 1000 g, kovová miska (nádobka), vodní lázeň nebo thermostat [23,V] s teploměrem, destilovaná voda.

Postup

1. Určíme vodní hodnotu kalorimetru V_k a nádobky μ .
2. Neznáme-li specifická tepla c a c' , změříme je některou z method uvedených v 55. Bod tání ϑ najdeme v tabulkách nebo jej určíme podle 59.
3. Na praktikantských vahách zvážíme prázdnou nádobku, potom nádobku s měřenou látkou; rozdíl dává hmotu M látky.
4. Roztavíme látku v nádobce, zahřejeme ji na teplotu t_2 a změříme teplotu t_1 kalorimetru.
5. Vložíme ji i s nádobkou do kalorimetru a pozorujeme za neustálého míchání maximální teplotu t kalorimetru.
6. Skupenské teplo tání l vypočteme z (1) a (2).

57.2. Skupenské teplo látek tajících pod teplotou místnosti

Předešlý postup lze snadno upravit pro případ, kdy bod tání je nižší než teplota místnosti. Rozdíl je jen v tom, že látku vkládáme do kalorimetru v pevném stavu (nejčastěji bez nádoby) a že se skupenské teplo l odnímá kalorimetru. Při stejném označení jako v 57.1 bude tedy teplo přijaté látkou

$$Q = M [c (\vartheta - t_2) + l + c' (t - \vartheta)] = \quad (3)$$

$$= (m_v + V_k) (t_1 - t).$$

Jinak je postup stejný jako v 57.1.

57.3. Skupenské teplo ledu

Právě vyložená metoda se může někdy značně zjednodušit, a to jednak tím, že použijeme kapalného skupenství měřené látky jako kalorimetrické kapaliny, jednak tím, že vkládáme látku do kalorimetru za teploty tání.

Objasníme to na měření skupenského tepla ledu. Tu je především $\vartheta = t_2 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ a $c' = 1$, takže rovnice (3) dává:

$$l = \left(\frac{m_v + V_k}{M} + 1 \right) \Delta t - t_1; \quad (4)$$

místo rozdílu $t_1 - t$ položili jsme tu jeho opravenou hodnotu Δt , o kterou by byla teplota kalorimetru poklesla, kdyby nebylo tepelných ztrát [viz 54 (7) nebo 54,6].

Led musí být pokud možno čistý a hlavně nesmí obsahovat nezmrzlou vodu. Při tom však má mít teplotu $0 \text{ } ^\circ\text{C}$. Je nejlépe roztlouci led na menší kousky a nechat je chvíli rozloženy na filtračním papíře. Když led na povrchu taje, lze předpokládat, že má velmi přibližně nulovou teplotu. Doporučuje se také rozmělněný led nasypat do kovového válce se silným pístem a náhlým tlakem (využitím regelace) vytvořit ledový váleček. Rychleji taje ledové tělísko tvaru čočky, které stejným způsobem vytvoříme z rozdrceného ledu vloženého mezi dvě kulové vyhloubené desky a pak prudce stlačíme lisem. Nejrychleji tají drobné kousky ledu, které však musíme dobře osušit filtračním papírem; pak je ihned nabere na drátěnou sítku nebo do drátěného košíčku a vsypeme do kalorimetru s vlažnou vodou.

Potřeby: Vodní kalorimetr [54,I], hrubší váhy do 1000 g, sítko na led, filtrační papír, led, event. kovový válec nebo kadlub a lis, destilovaná voda.

Postup

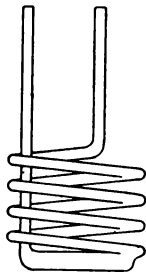
1. Zjistíme vodní hodnotu V_k kalorimetru buď tak, že násobíme hmoty jednotlivých součástí jejich specifickým teplem a ponořený objem teploměru číslem 0,46 [srov. (54,4), 54.1, postup: 1, 2, 4, 9], nebo zvláštním měřením podle 55.1.
2. Roztlučeme led na kousky a rozložíme na filtrační papír.
3. Zvážíme prázdný kalorimetr, naplníme asi ze tří čtvrtin vlažnou vodou a znovu zvážíme. Rozdíl dá hmotu m_v vody.
4. Sestavíme kalorimetr a pozorujeme asi 10 minut (doba I) teplotu.
5. Osušené kousky ledu (ledový váleček nebo čočku) vložíme do kalorimetru, uzavřeme jej a vydatně míchající čteme každých 30 vteřin teplotu, pokud neustane její rychlý pokles (doba II).
6. Jakmile všechn led roztaje a pokles teploty se znatelně zmírní, čteme dále (asi 10 minut) každou minutu teplotu kalorimetru (doba III).

7. Zvážíme (po měření) plný kalorimetr a od jeho hmoty odečteme hmotu zjištěnou v 3, čímž dostaneme hmotu M roztáleného ledu.
8. Najdeme podle 54 (7) nebo graficky (obr. 54,6) opravený pokles teploty Δt .
9. Dosazením do (4) vypočteme l .

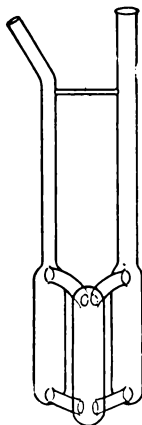
57.4. Skupenské teplo varu — měření kondensací v kalorimetru

Skupenské teplo vypařování závisí na teplotě, a proto se jím rozumí obyčejně teplo vypařování pro bod varu kapaliny, které má největší význam a nazývá se *skupenské teplo varu*.

Kapalinu, jejíž skupenské teplo varu máme zjistit, vaříme v baňce (s kousky platinových odpadků, aby var byl klidný bez přehřátí kapaliny) a vedeme skleněnou trubičkou do *chladiče* (obr. 57,1) nebo *srážeče* (obr. 57,2) skrze *jimač*



Obr. 57,1. Chladič.



Obr. 57,2. Srážeč.



Obr. 57,3. Jimač sražené páry.

sražené páry (obr. 57,3). Chladič (nebo srážeč) je ve směšovací (vodní) kalorimetru. Jimač páry zařazujeme těsně před chladič proto, aby do kalorimetru nestékaly kapky již dříve sražené páry. Mezi vařič a kalorimetr postavíme izolační stěnu, abychom zabránili vyzařování tepla na kalorimetr.

Lze-li použít *měřené kapaliny jako kalorimetrické*, srážíme páru přímo v kalorimetru, který pak musí být dobře utěsněn, aby se odpařováním kapaliny nezvyšovaly tepelné ztráty.

Vodní hodnota kalorimetru budiž i s teploměrem a míchačkou V_k , množství vody v něm m_v a hmota skleněného chladiče (srážeče) M_{ch} , takže jeho vodní hodnota $V_{ch} = 0,19 M_{ch}$ ¹⁾ Srazí-li se v chladiči m gramů páry skupenského tepla l v kapalinu specifického tepla c , získá kalorimetr teplo

$$Q = ml + mc (\Theta - t), \quad (5)$$

kde Θ je bod varu kapaliny a t teplota kalorimetru při ukončení kondensace. Toto teplo se spotřebuje na zvýšení teploty kalorimetru z původní teploty t_1 na t , tedy

$$Q = (m_v + V_k + V_{ch}) (t - t_1). \quad (6)$$

57¹⁾ Specifické teplo jenského skla má hodnotu $0,19 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 795 \text{ J kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

Srovnáním obou rovnic dostaneme pro skupenské teplo výraz

$$l = (m_v + V_k + V_{ch}) \frac{\Delta t}{m} - c (\Theta - t_1 - \Delta t), \quad (7)$$

kde Δt značí rozdíl teplot $t - t_1$, opravený vzhledem k ztrátám podle 54 (7) nebo 54,6.

Potřeby: Směšovací kalorimetr [54,I] uzavřený, varná baňka, jimač sražené páry (57,3), chladič nebo srážec (57,1; 2), isolační stěna, vařič, hrubší váhy do 1000 g.

Postup (srov. 54.1, 55.1, vážení na 0,1 g)

1. Měřenou kapalinou naplníme varnou baňku a necháme několik minut vařit.
2. Připravíme kalorimetr (vodní hodnoty V_k) a zvážíme. Pak jej naplníme studenou vodou (nebo měřenou kapalinou) v množství m , jež zjistíme novým vážením kalorimetru. Není-li měřená kapalina zároveň kapalinou kalorimetrickou, zvážíme ještě chladič nebo srážec a vložíme jej do kalorimetru.
3. Zjistíme tlak vzduchu a opravíme na 0 °C.
4. Pozorujeme teplotu kalorimetru po dobu několika minut (I) a vyznačíme ji do schématu 54(7) nebo do grafu 54,6.
5. Pak ihned zavedeme páru přes jimač sražené páry do kalorimetru (chladiče, srážece) a pozorujeme dále teplotu po dobu (II) srážení páry, zvláště v okamžiku odpojení od jimače.
6. Pokračujeme v zapisování teploty po další dobu (III) několika minut.
7. Zjistíme vážením kalorimetru nebo chladiče množství m sražené páry.
8. Vypočteme opravený přírůstek Δt teploty kalorimetru.
9. Skupenské teplo varu je dáno výrazem (7), kam za Θ dosadíme teplotu varu (při změřeném tlaku), zjištěnou buď v tabulkách, nebo methodou 60.1.

57.5. Skupenské teplo varu vody — měření elektrickým kalorimetrem

Skupenské teplo varu můžeme měřit velmi jednoduše elektrickým kalorimetrem [54,II], naplníme-li jej měřenou kapalinou, kterou uvedeme elektrickým proudem do varu a připojíme k srážeci ponořenému v chladičí směsi. Úspřádání měření je vidět na obr. 57,4 a je velmi vhodné k měření skupenského tepla vodní páry. V tomto případě není třeba ani měřit teplotu, ani určovat vodní hodnotu kalorimetru, stačí zvážením srážece před měřením a po něm zjistit hmotu m sražené vodní páry za dobu n minut a vypočítat skupenské teplo z rovnice plynoucí z 55 (15):

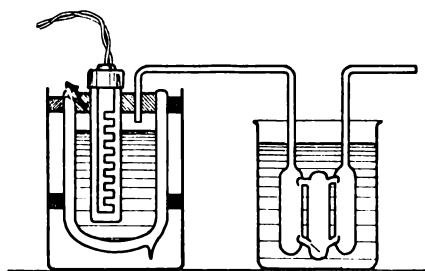
$$ml = 14,34 \text{ cal } W^{-1} \cdot nP.$$

Tak bychom ovšem dostali pro l hodnotu příliš velkou, neboť nepřihlížíme k tepelným ztrátám, které tu mohou být značnější. Ztracené teplo Q_s můžeme však určit, srážíme-li páru dvakrát po

stejnou dobu n minut, ale při různých příkonech P a P' . V obou případech bude totiž vzhledem k stejnému rozdílu teplot a stejné době obou měření také vyzářené teplo stejné, takže

$$ml + Q_s = 14,34 \text{ cal } W^{-1} nP,$$

$$m'l + Q_s = 14,34 \text{ cal } W^{-1} nP'.$$



Obr. 57,4. Schema měření skupenského tepla varu elektrickým kalorimetrem.

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$l = 14,34 \text{ cal W}^{-1} n \frac{I - I'}{m - m'}. \quad (8)$$

Potřeby: Elektrický kalorimetr [54,II], srážec 57,2 v nádobě s tajícím ledem, ampérmetr [67,VI], voltmetr [68,II], event. wattmetr [70,I] nebo [76,X], posuvný odpor [71,III], baterie akumulátorů nebo zdroj střídavého proudu, hrubší váhy do 1000 g, destilovaná voda.

Postup

1. Utvoříme zapojení 54,7 a spojíme proud. Jeho velikost a napětí nebo údaj wattmetru upravíme posuvným odporem tak, aby přístroje ukazovaly co největší hodnoty (podle svých rozsahů).

2. Kalorimetr uzavřeme a zatím zvážíme srážec (M_1) a vložíme jej do chladicí směsi ledu s vodou.

3. Několik minut po tom, kdy voda počne vřít, spojíme kalorimetr se srážecem a od toho okamžiku měříme dobu průchodu proudu, zaznamenávajíc proud i a napětí (nebo výkon) každou minutu nebo řidčeji, podle toho, jak měřené hodnoty probíhají.

4. Po uplynutí n minut odpojíme srážec a zvážíme jej (M_2). Je-li naplněn více než z poloviny (pro větší přesnost je lépe přerušit proud, až sražená voda naplní celý srážec), vyprázdníme jej, event. znovu zvážíme (M'_1) a opět vložíme do chladicí směsi.

5. Posuvným odporem snížíme proud (i napětí) na dvě třetiny dřívější průměrné hodnoty — tedy výkon proudu asi na polovinu — a připojíme srážec na stejný počet minut jako v 4.

6. Po n minutách odpojíme srážec a vypneme proud. Srážec zvážíme (M'_2) a vypočteme hmotu sražené páry pro obě měření:

$$m = M_2 - M_1, \quad m' = M'_2 - M_1 \text{ (nebo } = M'_2 - M'_1)$$

a vypočteme průměrné výkony. (Pro stejnosměrný proud $P = UI$, $P' = U'I'$.)

7. Dosazením do (8) vypočteme skupenské teplo varu vody l .

58. TEPELNÁ VODIVOST

Definice. Tepelná vodivost λ (součinitel tepelné vodivosti) je hustota i ustáleného tepelného proudu, dělená teplotním spádem σ .

$$\lambda = \frac{i}{\sigma}. \quad (1)$$

Při tom hustotou ustáleného a stejnorodého tepelného proudu rozumíme množství tepelné energie, prošlé za čas τ plochou p kolmou ke směru proudu, dělené dobou a velikostí plochy:

$$i = \frac{Q}{S\tau} = \frac{Q_1}{S}. \quad (2)$$

Teplotní spád je pokles teploty ($-dt$) na malé délce dl ve směru tepelného proudu, dělený touto délkou:

$$\sigma = -\frac{dt}{dl}. \quad (3)$$

Jednotky

MKSA

$$[\lambda] = \text{Jm}^{-1} \text{s}^{-1} \text{°C}^{-1} = \text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1} = 2,389 \cdot 10^{-3} [\lambda]_p = 0,8546 [\lambda]_i. \quad (4)$$

Praktická jednotka

$$[\lambda]_p = \text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 360 [\lambda]_t, \quad (5)$$

technická jednotka

$$[\lambda]_t = \text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \text{hod}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{[\lambda]_p}{360}. \quad (6)$$

Poznámka. Od tepelné vodivosti, která je mírou vedení *tepla* (tepelné energie), je třeba rozeznávat t. zv. *vodivost teplotní*

$$a = \frac{\lambda}{\rho c},$$

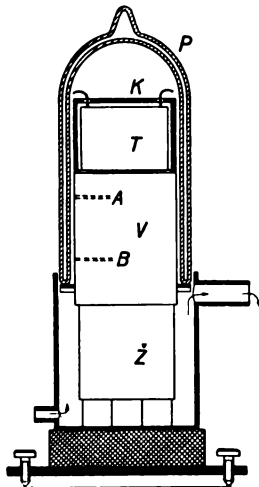
kde ρ je hustota látky a c její specifické teplo. Podle této veličiny posuzujeme, jak látka vede teplotu, t. j. jak snadno se v ní vyrovnávají teplotní rozdíly. Její jednotky jsou

$$[a] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad [a]_p = [a]_o = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad [a]_t = \text{m}^2 \cdot \text{hod}^{-1}.$$

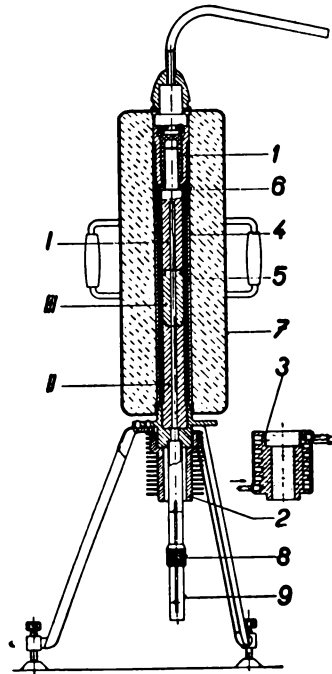
Přístroje

Přístroje, kterých se používá k měření tepelné vodivosti, jsou různé jednak pro různá skupenství, jednak se liší u látek pevných pro dobré vodiče tepla (zejména kovy) a pro špatné vodiče (zvláště izolační hmoty); konečně byly sestaveny speciální přístroje pro měření tepelné vodivosti látek sypkých, které jsou nejlepšími izolátory (kromě vakua).

Při popisu přístrojů omezíme se na několik hlavních typů určených k přesnému měření, kdežto o některých jednoduchých zařízeních, která lze v laboratorních snadno improvizovat, promluvíme při výkladu o měřicích metodách.



Obr. 58,1. Jakobův přístroj.



Obr. 58,2. Schema technického přístroje na měření tepelné vodivosti kovů.

Kovy. Tepelná vodivost kovů se měří nejčastěji na vzorcích tvaru válce (válečku), jež na horní podstavě zahříváme (elektricky) a na spodní podstavě ochlazujeme. Přivádění i odvádění tepla děje se ovšem prostřednictvím kovových válců, mezi něž se vkládá měřený válec. Při tom se vhodným způsobem co nejvíce zmenšuje množství tepla unikajícího pláštěm válce, a to buď tepelnou izolací, nebo t. zv. *ochranným pláštěm* (válcem, prstencem, *Berget* 1888). Měřený válec je obklopen soustředným dutým válcem nejlépe z téhož kovu, vytápěným a chlazeným tak, aby co možná měl v každém řezu stejnou teplotu jako měřený válec. Čím dokonaleji je tento požadavek splněn, tím menší je výměna tepla pláštěm válce. Obr. 58,1 podává schema **Jakobova přístroje** pro měření tepelné vodivosti kovových válců, kde jsou postranní ztráty velmi zmenšeny *Dewarovým* příklopem *P*, nasazeným přes elektrické topné těleso *T* a měřený válec *V*, který spočívá na železném válci *Ž*, chlazeném proudící vodou. Topné těleso je kromě toho chráněno měděným krytem *K*, takže celkem jsou ztráty malé a dají se početně dosti přesně určit. Teplo vyrobené v *T* (zmenšené o tyto ztráty) proudí válcem *V* do chlazeného válce *Ž*. Tepelný spád, který je v celém měřeném válci přibližně stejný, zjistí se z rozdílu teplot měřených ve dvou místech *A*, *B* termočlásky zapuštěnými do válce.

58,I

Absolutní měření tepelné vodivosti kovů je zvláště při vyšších teplotách dosti obtížné, a proto jsou pro technická měření vhodnější metody srovnávací (relativní). Jejich přesnost a spolehlivost závisí ovšem na stupni přesnosti a spolehlivosti, s jakou známe tepelnou vodivost užitého etalonu v příslušném teplotním oboru. Některé z těchto method jsou popsány v čl. 58.4 a 58.5; zde se omezíme na popis **technického přístroje na měření tepelné vodivosti kovů**, který je vhodný zvláště pro měření ocelí při teplotách 20 až 500 °C.¹⁾

58,II

Obr. 58,2 ukazuje celkové provedení přístroje pro praktické měření tepelné vodivosti. Jádrem zařízení jsou válečky *I* a *II*, tvořící etalonu, podle nichž se určuje tepelná vodivost válečku *III*, který je zkoumaným vzorkem. Materiálem pro etalonu *I* a *II* byl zvolen velmi čistý nikl, a to ze tří důvodů: a) závislost tepelné vodivosti niklu na teplotě lze v rozsahu 0 až asi 400 °C s dostatečnou přesností znázornit přímkou, b) tepelná vodivost niklu je podobná vodivosti běžných druhů ocelí, pro něž je přístroj určen, c) nikl je velmi trvanlivý kov, který netrpí oxidační ani korozí.

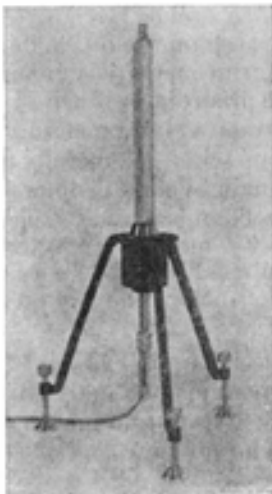
Všechny válečky jsou do sebe našroubovány a tvoří vodič tepla ve tvaru kompaktní tyče (přesněji dutého válce). Tyč je nahoře zahřívána topným tělískem *I*, které dodává teplo, jež proudí tyčí k dolnímu konci. Tam je tyč našroubována do příruby, která má za úkol odvést teplo do chladicího prostředí, které volíme podle toho, při jaké střední teplotě vodivost vzorku určujeme: a) při středních a vyšších teplotách se teplo odvádí do vzduchu prostřednictvím chladicího tělesa *2*, jež je na průrubě našroubováno, b) při nižších teplotách do vody, protékající chladicím tělesem *3*, jež se našroubuje na průrubě jako těleso *2*. Chladicím tělesem má protékat stále stejné množství vody stejné teploty pro přesné zachování rovnovážného stavu. Je proto výhodné, proudí-li voda z přepadu; při běžných zkouškách však postačí, připojíme-li přívod chladicí vody přímo na vodovod, ježto účinek normálního kolísání průtočného množství chladicí vody na změnu rovnovážného stavu je většinou nepatrný.

Přístroj stojí na třínožce, s níž je spojen přírbou. Z topného tělesa *I* se teplo šíří též lůžkem pro tělísko do ochranné trubky *4* a *6*, jež teplo odvádí rovněž do dolní příruby a odtud do vzduchu nebo chladicí vody. Je tedy ochranná trubka vytápěna a chlazena společně s tyčí sestavenou z etalonu a zkoumaného vzorku. Přesto je nutno očekávat, že pro větší radiální tepelné ztráty v ochranné trubce bude v ní teplota klesat podle křivky ztelněji prohnuté, takže místa stejné teploty budou na ochranné trubce a na střední tyči vzájemně posunuta, a to tak, že na př. střední teplota ve zkoumaném vzorku bude ležet o jistou míru níže směrem k chladnému konci než též teplota v ochranné trubce *4*. Tato nepříznivá okolnost byla částečně napravena tím, že horní část ochranné trubky *6*

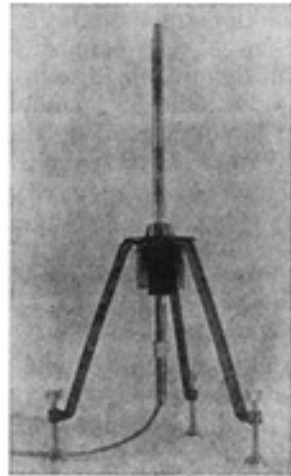
58¹⁾ Srov. TF 4.6.5 a [56].

byla v okolí topného tělíska vytvořena z mědi. V mědi, protože je výborným vodičem tepla, vzniká menší teplotní spád a tím se místa stejných teplot v ochranné trubce posunou níže k chladnému konci.

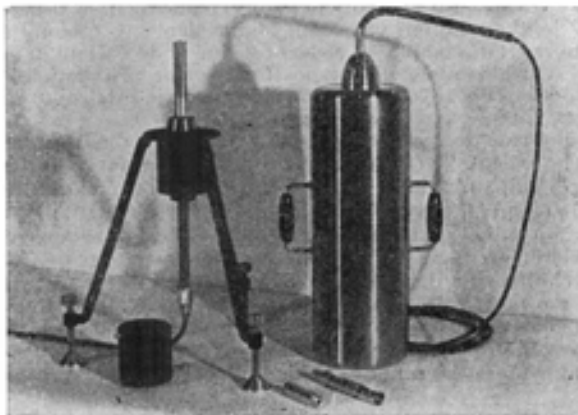
Přesně stejného průběhu teplot v ochranné trubce 4 a ve válečcích nelze ovšem dosáhnout při všech možných středních teplotách přirozeným způsobem bez umělé regulace. Umělá regulace teplotního spádu v ochranné trubce by však velmi zkomplikovala celé



Obr. 58,3. Vnitřní část přístroje s porcelánovou trubkou.



Obr. 58,4. Vnitřní část přístroje pro sejmутí porcelánové trubky. Uprostřed vidíme měřený vzorek zařazený mezi oba niklové etalony.



Obr. 58,5. Přístroj připravený k výměně vzorku.

zařízení. S nestejným průběhem teplot v ochranné trubce a ve válečcích bylo právě počítáno při této metodě: srovnává se hustota tepelného proudu před zkoumaným vzorkem a za ním a předpokládá se, že hustota proudu ve vzorku je rovna aritmetickému středu obou těchto hustot. To je však splněno, jak již bylo podotknuto, jen pokud jsou nad vzorkem stejné radiální ztráty jako pod ním, a ovšem tím bezpečněji, čím menší jsou tyto ztráty. Pro zmenšení tepla ztraceného sáláním, jež vzniká nestejností teplot naproti sobě ležících povrchů válečků a ochranné trubky, vkládá se proto do dutiny mezi nimi porcelánová trubka 5 (obr. 58,3 a 58,4).

Topné tělísko je vyměnitelné a je zajištěno ve své poloze maticí. Otvorem v matici procházejí dráty pro přívod elektrického proudu do topného tělíska, izolované šamotovými korálky. Dráty jsou vyvedeny z přístroje trubičkou tak, aby se jejich izolace nepoškodila vysokou teplotou přístroje.

Kryt 7 kolem ochranné trubky je vyplněn isolační látkou (skelnou vlnou), čímž se radiální ztráty ještě více sníží. Kryt s ochrannou trubičkou a topným tělískem tvoří jedinou součást, kterou lze sejmout se střední tyče vysunutím vzhůru (obr. 58,5). Tím se obnaží měřící válečky a je možno vyměnit vzorek. Kryt má rukojeti, aby se dal snadno zvedat.

Styčná plocha ochranné trubky 4 s dolní přírubou, jíž přestupuje teplo vedené ochrannou trubičkou do chladicího tělesa, je vytvořena ve tvaru zabroušeného kužele, takže eventuální nedokonalosti obrobení jsou vyrovnány větší styčnou plochou.

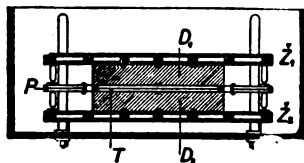
Do příruby je našroubována trubka 9; v ní je vedena tyčka thermočláňku, jímž se měří teploty ve válečkách I, II a III. Jak se měří teploty, je popsáno v čl. 58.5 i s konstrukčním provedením thermočláňku.

Pevné izolanty. Málo vodivé pevné látky měří se nejčastěji ve tvaru desek, neboť při měření válce by dosti značná část tepla vystupovala jeho pláštěm. Proto se volí velká plocha desky a malá tloušťka, na níž vznikne pro malou vodivost dostatečně velký teplotní rozdíl.

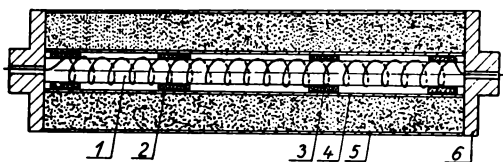
Pro měření špatných vodičů lze upravit přístroj [58,I] tak, že se válec V nahradí kruhovou deskou ze zkoušeného materiálu, která se vloží mezi dva měděné kotouče, do nichž se zapustí spoje thermočláňků. Těmito thermočláňky se změří rozdíl teplot na plochách desky a dělením její tloušťkou se vypočte teplotní spád σ . Hustota tepelného proudu i je rovna (až na ztráty na okrajích desky) *Joulovu* teplu topného tělesa, děleného plochou desky. Při přesném měření — zvláště za vyšších teplot — doporučuje se místo Dewarovy nádoby použít ochranného prstence vytápěného elektricky a dalšího ochranného topného tělesa, umístěného nad vlastním topným tělesem T . Teploty obou těchto zařízení se kontrolují několika thermočláňky a podle jejich údajů se upravuje topný proud. Ustálený teplotní stav nastane u špatných vodičů tepla teprve po větším počtu hodin, což velmi znesnadňuje měření.

Jisté výhody má dvojdeskový přístroj (Lees 1898), jehož novější úpravu vidíme z obr. 58,6. Dvě stejné desky D_1 a D_2 ze zkoušené látky, mezi nimiž leží ploché topné těleso T , jsou obloženy dvěma železnými deskami \check{Z}_1, \check{Z}_2 , prostoupenými kanálky, jimiž protéká voda. Aby veškeré teplo, vyrobené elektrickým

58,III



Obr. 58,6. Dvojdeskový přístroj pro špatné vodiče.



Obr. 58,7. Řez válcovým přístrojem na měření tepelné vodivosti sypkých látek.

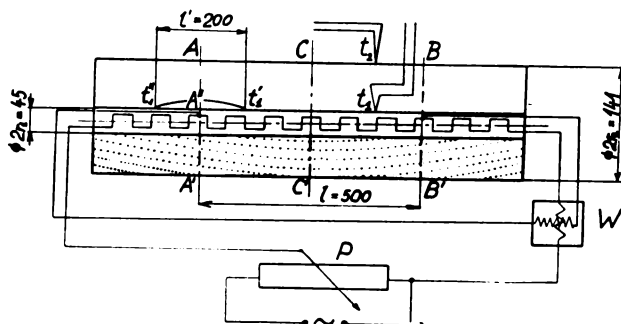
proudem v T , procházelo deskami, je T obklopeno ochranným prstencem P , vytápěným elektricky na stejnou teplotu jako T . Celé zařízení je umístěno v plechové krabici vyplněné sypkou isolační hmotou (korkovou drtí, křemelinou a pod.). Ježto chladicí desky překrývají s obou stran také ochranný prstenc, vznikne na okraji desek D_1 a D_2 prakticky stejný spád teploty jako v deskách samých a ztráty jsou zanedbatelné.

Na měření tepelné vodivosti špatných vodičů ve tvaru desek je vhodný **Fitchův přístroj**. Jde tu o nestacionární metodu, která má tu výhodu, že není

58,IV

třeba čekat, až nastane ustálený tepelný proud, protože se vodivost zjišťuje podle časového průběhu proměnného teplotního rozdílu. V oboru teplot asi od 20° do 100 °C dává tato rychlá metoda dobré výsledky.²⁾

Sypké látky lze měřit stejnými přístroji jako pevné špatné vodiče, vložíme-li místo měřené desky mezi topné těleso a chladicí desku tři hranolky (nebo destičky) z izolační hmoty (na př. skleněné), které mají předepsanou tloušťku a proti deskám malou plochu. Tak vzniklá mezera se zasype měřenou sypkou látkou, jejíž vodivost ovšem podstatně závisí na jejím stlačení, které (je-li stejnoměrné) určíme průměrnou hustotou sypké látky v mezeře.



Obr. 58,8. Schema měření válcovým přístrojem.

Sypké látky mívají (jsou-li suché) ještě menší tepelnou vodivost než pevné izolanty, a proto u deskových přístrojů je třeba volit velmi tenké vrstvy, aby teplo unikající jejich okraji bylo malé proti teplu prostupujícímu napříč vrstvou. U hrubších materiálů nelze libovolně snižovat tloušťku vrstev a pro takové látky jsou výhodnější válcové přístroje, u nichž axiální tepelné ztráty lze snáze početně vyjádřit. Abychom to ukázali, popíšeme válcový přístroj, který byl pro hrubší sypké látky navržen a zhotoven v posledních letech na ČVUT a upraven tak, aby bylo možno snadno a dosti přesně zjistit tepelné ztráty.

Topná cívka 2, stejnoměrně vintutá (viz obr. 58,7) na porcelánové trubce 1, je asbestovými vložkami 3 držena v osové poloze uvnitř duralové trubky 4, která tvoří vnitřní plášť dutého válce s vnějším měděným pláštěm 5. Prostor mezi válci 4 a 5 se naplní měřenou sypkou látkou a uzavře duralovými víky 6, jímž jsou vyvedeny konce topné cívky. Ačkoliv válec je ve vodorovné poloze stejnoměrně vytápěn, nejsou plochy stejné teploty v měřené látce přesně válcové, ale jsou vlivem ochlazování obou duralových čel deformovány způsobem naznačeným tečkovanými čarami na obr. 58,8.

Vzhledem k souměrnosti přístroje podle roviny CC' jsou isothermické plochy rovněž souměrné k CC' a tepelný tok (t. j. množství tepla, procházející celou plochou kolmého průřezu válce za vteřinu) podél osy válce je na obě strany stejný. Množství tepla, které tak odchází libovolným průřezem AA' dutého válce, vypočteme takto: Změříme teplotní rozdíl $t'_1 - t'_2$ na délce l'

58 ²⁾ Bližší viz TF 4.6.5.

trubky 4 kolem místa A'' a ze známé tepelné vodivosti λ_D duralu a plochy S vodivé vrstvy určíme tepelný tok Q'' trubkou:

$$Q'' = \lambda_D S \frac{t'_1 - t''_1}{l'} = \lambda_D S \Delta_D, \quad \Delta_D = \frac{t'_1 - t''_1}{l'}. \quad (7)$$

Axiální tepelný tok měřenou látkou vypočteme vzhledem k malé tepelné vodivosti za předpokladu, že teplotní spád klesá v řezu AA' se vzdáleností od středu řezu lineárně od hodnoty v trubce 4 k nule na měděném (velmi vodivém) plášti 5. Je tedy na poloměru r roven

$$\Delta = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \Delta_D$$

a tepelný tok

$$Q''' = \int_{r_1}^{r_2} \lambda \cdot 2\pi r \, dr \cdot \Delta,$$

je-li λ tepelná vodivost látky. Dosazením za Δ a integrací plyne

$$Q''' = \frac{\pi \lambda \Delta_D}{3} (r_2^2 + r_1 r_2 - 2r_1^2). \quad (8)$$

Stejně vteřinové ztráty vznikají i tokem tepla v souměrně položeném řezu BB' takže celková vteřinová ztráta je

$$Z = 2Q'' + 2Q'''. \quad (9)$$

Největší množství tepla prostupuje ovšem měděným pláštěm mezi oběma řezy, jejichž vzdálenost označme l . Je-li t_1 ustálená teplota vnitřní trubky 4 a t_2 teplota válce 5, je radiální tepelný tok³⁾ válcem výšky l

$$Q' = lq = 2\pi\lambda \frac{t_1 - t_2}{l \ln \frac{r_2}{r_1}} l,$$

značí-li q množství tepla, vystupující radiálně za vteřinu válcem 5 mezi dvěma kolmými řezy, vzdálenými od sebe o jednotku délky. Celkové množství tepla, které uniká radiálně i axiálně z válce délky l , je ovšem rovno Joulovu teplu Q , vyrobenému na téže délce topné cívky, což dává rovnici

$$Q' + Z = Q,$$

čili podle (9), (7) a (8)

$$\frac{2\pi l (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \lambda + 2S \frac{t'_1 - t''_1}{l'} \lambda_D + \frac{2}{3} \frac{\pi}{l'} (t'_1 - t''_1) (r_2^2 + 2r_1 r_2 - 2r_1^2) \lambda = Q.$$

Odtud vypočteme

$$\lambda = \frac{Q - A\tau}{B(t_1 - t_2) + C\tau}, \quad (10)$$

58 *) TF 4.6. rovn. (10).

kde

$$A = \frac{2\lambda_D S}{l'}, \quad B = \frac{2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad C = \frac{2\pi}{3l'} (r_2^2 + r_1 r_2 - 2r_1^2) \quad (11)$$

jsou známé hodnoty a $\tau = t'_1 - t''_1$ je axiální teplotní rozdíl, měřený (nejlépe diferenciálním thermočlánekem) na známé délce l' trubky 4. Teploty t_1 a t_2 měříme ovšem absolutně (rovněž thermočlánek) a Q měříme wattmetrem, jehož voltové svorky připojíme na délku l topné cívky. Prototyp tohoto přístroje měl celkem délku 1 m a $l = 500$ mm, $l' = 200$ mm.

Teplná vodivost λ vypočtená z (10) přísluší jistě střední teplotě t_{stf} , která není rovna aritmetickému středu teplot t_1 a t_2 , protože teplota mezi válci 4 a 5 neklesá se vzdáleností x od osy lineárně, ale podle vzorce⁴⁾

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}.$$

Výpočtem dostaneme

$$t_{stf} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} t \, dr = t_1 - (t_1 - t_2) \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} - \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (12)$$

Teplnou vodivost kapalin lze měřit deskovými aparáty s mezerami přesně vymezenými na př. skleněnými hranolky. Mezi vodorovnými deskami udrží se kapalina kapilárními silami ve vrstvě dosti tlusté (několik mm), aby v ní vznikl postačující teplotní rozdíl, neboť kapaliny mají velmi malou vodivost. U kapalin nesmí ovšem nastat proudění, kterým by se přenášela tepelná energie. U vazkých kapalin nevzniká v tenkých vrstvách zřetelné proudění; méně vazké kapaliny, zvláště v tlustší vrstvě, zahříváme proto vždy shora, aby se teplejší (řidší) vrstvy nemísily s hustšími. Kapaliny ve velmi úzké kapiláře může se zahřívát tenkým platinovým drátkem, napjatým v ose kapiláry, z něhož se teplo šíří vedením ke stěně kapiláry, aniž nastává zřetelné proudění. Tímto způsobem byla měřena tepelná vodivost kapalin (Goldschmidt 1911) ve stříbrné kapiláře, při čemž se topného platinového drátku zároveň užilo jako odporového teploměru [23, VII].

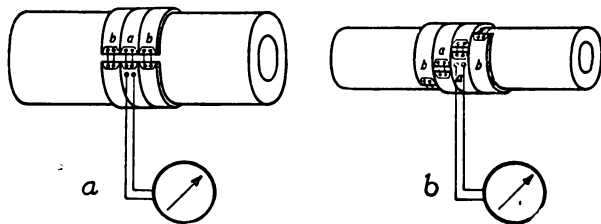
Plyny. Tepelná vodivost plynů se dá měřit stejnými methodami jako vodivost kapalin s tím rozdílem, že u nich ještě snáze vzniká proudění a že vzhledem k jejich nepatrné vodivosti a malé absorpci záření je třeba provádět opravu na tepelnou energii, která se jimi přenáší z teplejšího tělesa na chladnější tepelným zářením.

Užijeme-li pro měření tenké vodorovné vrstvy plynu mezi dvěma vodorovnými deskami, zahříváme ji ovšem shora (Todd 1909). Také popsaná metoda platinového drátku v trubici je vhodná pro plyny za předpokladu, že kapilára je dosti úzká (na př. stříbrná kapilára vnitřního průměru 1 mm, Eucken 1911).

V praxi lze často použít jednoduchého přístroje, kterým se měří přímo *hustota tepelného proudu*, který vystupuje při daném teplotním rozdílu ze stěny 58, VI teplého tělesa do okolního vzduchu. Je to *teplný proudoměr* (Schmidt 1923),

58 ⁴⁾ TF 4.6. rovn. (11).

kterým vlastně měříme teplotní spád σ ve vrstvě látky známé tloušťky a vodivosti, z něhož můžeme podle rovnice (1) určit hustotu i vrstvou procházejícího tepelného proudu. Jak je zařízen a jak se ho používá, je naznačeno na obr. 58,9. Je to pryžová destička nebo pásek tloušťky 2 mm, který se přiloží na plochu, z níž vychází tepelný proud. Tím vznikne ve vrstvě pryže teplotní spád, který se měří thermoelektricky. Teplotní rozdíl bývá ovšem malý, a proto je v destičce uloženo 100 thermočlánků měď \rightarrow konstantan [23,IX] spojených za sebou, jejichž spoje leží střídavě na obou stranách destičky. Pro měření tepelného proudu procházejícího křivými povrchy (zvláště trubek, izolovaných parních vedení a pod.) má proudoměr tvar asi 60 cm dlouhého pásku a šířky 6 cm, který



Obr. 58,9. Tepelný proudoměr na trubce.

se navine na trubku spolu s dvěma stejnými pásky b (58,9a), které působí jako ochrana vlastního měřicího pásku, zabráňující postrannímu unikání tepla z plochy pod ním. Je-li obvod trubky menší než 60 cm, připojí se ochranné pásky k oběma koncům měřicího pásku a navinou se šroubově (58,9b), takže zase je měřicí pásek uprostřed. Milivoltmetr, kterým se měří výsledné napětí thermočlánků, bývá již cejchován tak, že udává hustotu tepelného proudu v $\text{kcal} \times \text{m}^{-2} \cdot \text{hod}^{-1}$.

MĚŘICÍ METHODY

Všemi popsanými přístroji měří se tepelná vodivost stejným způsobem. Vyčkáme, až nastane ustálený a pokud možno stejnoměrný tepelný proud, který přenáší stálé a známé množství tepla měřenou látkou, a změříme teplotní spád, který se v ní při tom vytvoří. Tento spád je tím přesněji konstantní v celé měřené látce, čím dokonaleji je zamezeno boční proudění tepla. Je-li to splněno v mezích přesnosti měření, určíme spád jako podíl poklesu teploty Δt na délce l a této délky. Tepelnou vodivost počítáme pak podle (1) a (2) podle vzorce

$$\lambda = \frac{Q}{S\tau} \frac{l}{\Delta t}, \quad (13)$$

kde Q je teplo prošlé za dobu τ celým průřezem S měřené látky (válece, desky).

Vzorec (13) platí pro měření všemi uvedenými přístroji, ať už měříme Q na př. kalorimetricky, nebo je počítáme jako Joulovo teplo vyrobené v topném tělese. Výjimku činí případ kapiláry naplněné kapalinou nebo plynem a vytápěné osovým drátem. Zde totiž se tepelný proud rozširuje radiálně na větší a větší válcové plochy, čímž jeho hustota klesá se vzdáleností a stejně klesá ovšem i spád teploty. Místo vzorce (13) pak platí vzorec složitější, avšak jde-li o vedení tepla mezerou úzkou proti oběma poloměrům válce, lze jej

s dostatečnou přesností nahradit vzorcem (13). Proto můžeme měření málo vodivých látek, zvláště látek sypkých a kapalin, provádět místo na tenkých rovinných vrstvách také na vrstvách válcových, jsou-li dosti tenké proti svému poloměru křivosti. Toho použijeme při výkladu jednoduchých method 58.1 až 58.3. Naproti tomu pro měření kovů nelze použít podobného zařízení, a proto uvedeme jednoduchou metodu 58.4 na měření tepelné vodivosti kovových tyčí, která vystačí se zařízením, jež lze dosti snadno sestojit v každé laboratoři.

58.1. Tepelná vodivost pevných izolantů

Tepelnou vodivost špatných vodičů můžeme měřit jednoduchým zařízením (obr. 58, 10), lze-li je opatřit ve tvaru dutého válce (trubice), jehož tloušťka je malá proti poloměru křivosti. Do válce z měřené látky vpravíme topnou cívku C (z izolovaného drátu), teploměr T_1 a drátěnou míchačku M , dole uzavřeme tlustou korkovou zátkou, naplníme vodou a uzavřeme shora druhou korkovou zátkou. Trubicí vnoříme do větší vodní lázně, kterou rovněž promícháváme a v níž měříme teplotu teploměrem T_2 . Do lázně přitéká hadicí z vodovodu stejnoměrným proudem voda a přepadem nebo trubící odtéká. Podle 54 (5') je teplo Q_1 , vyrobené za vteřinu proudem výkonu P ,

$$Q_1 = 0,239 P W^{-1} \cdot \text{cal s}^{-1}, \quad (14)$$

což dosadíme do vzorce (13) za Q/τ . Střední plocha, kterou jde tepelný proud,

$$S = 2\pi h \frac{r_1 + r_2}{2}$$

a $l = r_2 - r_1$, je-li h výška válce a r_1 , r_2 vnitřní a vnější poloměr. Tedy

$$\lambda = \frac{1}{\pi h} \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{P}{t_1 - t_2} = 0,239 \text{ cal } W^{-1} \text{ s}^{-1} \frac{1}{\pi h} \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{P}{t_1 - t_2}, \quad (15)$$

je-li t_1 teplota uvnitř válce a t_2 teplota vnější lázně. Tyto teploty pozorujeme a zapisujeme tak dlouho, až se buď úplně ustálí, nebo aspoň kolísají kolem stálých hodnot. Do vzorce (15) dosadíme pak tyto ustálené hodnoty nebo průměrné hodnoty posledních čtení, pomíjíme hodnoty za neustáleného stavu.

Popsanou methodou dostaneme výsledek jen přibližný, a to z těchto důvodů: Užítý vzorec není zcela přesný; teplota vody uvnitř i vně válce se liší poněkud od teploty vnitřní i vnější stěny válce;⁵⁾ nepřihlížíme k teplu prostupujícímu korkovými zátkami. Tyto tepelné ztráty je možno zjistit tak, že opakujeme měření se stejným válcem, ale jiné výšky h' , a upravíme výkon P' elektrického proudu tak, aby rozdíl teplot $t_1 - t_2$ byl v obou případech co možná stejný. Označíme-li teplo uniklé za vteřinu oběma zátkami, které je v obou případech stejné, písmenem p , plyne z rovnice (15)

$$\frac{P - p}{h} = \frac{P' - p}{h'},$$

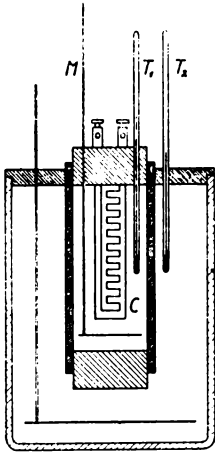
odkud

$$p = \frac{Ph' - P'h}{h' - h}. \quad (16)$$

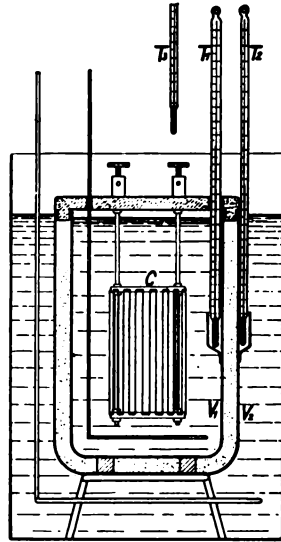
58 ⁵⁾ TF 4.6.2.

Tím je určena část p celkového výkonu proudu, který se spotřebuje na teplo uniklé zátkami; o ni zmenšíme hodnotu P ve vzorci (15), kam tedy dosadíme místo P rozdíl $P - p$.

Měříme-li výkon proudu ampérmetrem a voltmetrem, zapojíme topnou cívku stejně jako elektrický kalorimetr ve schematu 54,7. Výkon je dán jako v 54.1 v nejjednodušším případě stejnosměrného proudu jako součin napětí a proudu.



Obr. 58,10. Měření tepelné vodivosti trubice.



Obr. 58,11. Měření tepelné vodivosti sypkých látek.

58.2. Tepelná vodivost sypkých látek

Měřicí metody pro sypké látky jsou různé podle jejich zrnitosti. Tepelná vodivost jemnozrnných látek, zvláště *práškových hmot*, které jsou velmi důležitým izolačním prostředkem, dá se měřit způsobem podobným předešlému 58.1.⁶⁾ Příslušné zařízení je zřejmo z obr. 58,11. Měřená látka se navrství na dno vnější kovové (měděné, mosazné) válcové nádoby V_2 do výše malých skleněných hranolků (destiček), na které se postaví vnitřní válcová nádoba V_1 , a mezera mezi oběma nádobami se rovněž vyplní měřenou látkou. Vodivost ovšem závisí podstatně na průměrné hustotě (objemové hmotě) navrstvené látky, a proto je nutno dbát co možná stejnoměrného rozložení a po každé tuto průměrnou hustotu zjistit (na př. vážením a určením objemu). Obě nádoby mají rovinné dno, které přechází oblou plochou ve válcovou stěnu, takže mezi nimi vznikne velmi přibližně všude stejně tlustá vrstva. Její průměrná šířka se přesně určí takto: Nejprve se zjistí vnější poloměr r_1 nádoby V_1 , vnitřní poloměr r_2 nádoby V_2 a výška skleněných hranolků. Nato se dutina naplní do výšky h vodou, jejíž hmota se určí vážením. Je-li dutina dosti úzká, je obsah roven součinu průměrné šířky δ dutiny a aritmetického středu z povrchů obou nádob, které určíme z jejich rozměrů. Ze známé hustoty vody vypočteme tedy

58 ⁶⁾ Viz [62].

δ . Voda ve vnitřním válci se udržuje na vyšší teplotě topnou cívkou C a vnější nádoba se ochlazuje vnější lázní, kterou protéká voda z vodovodu. Ustálení teplot se urychlí a je dokonalejší, přitéká-li voda pod stálým tlakem, nejlépe stejnoměrně rozloženými otvory v kruhové trubici umístěné nad vnější lázní. Teploty se měří přesnými teploměry T_1 , T_2 , jejichž teploměrné nádoby jsou zasunuty v měděných objímkách na vnitřní straně válce V_1 a na vnější straně válce V_2 uprostřed výšky měřené vrstvy.

Je-li střední plocha vrstvy S , její střední tloušťka δ a výkon proudu P , pak hustota ustáleného tepelného proudu podle (2) a (14)

$$i = \frac{Q_1}{S} \doteq 0,239 \frac{P}{S} \text{ W}^{-1} \cdot \text{cal}$$

a podle (13) tepelná vodivost

$$\lambda = 0,239 \text{ cal W}^{-1} \cdot \frac{\delta}{S} \frac{P}{t_1 - t_2}, \quad (17)$$

jsou-li t_1 a t_2 teploty vnitřního a vnějšího válce. Vzorec je ovšem jen přibližný podobně jako (15), nezjistíme-li teplotní *skoky* mezi povrchem obou kovových nádob a k nim přilehlou vrstvou měřené látky a nepřihlédneme-li také k tepelným ztrátám, vzniklým sdíleným tepla krytem vnitřního válce okolnímu vzduchu.

Tyto tepelné ztráty určíme takto: Především zavěsíme nad kryt další teploměr T_3 na měření teploty vzduchu. Dutinu mezi nádobami necháme prázdnou a vodu tekoucí do vnější lázně přehříváme na stálou teplotu t'_2 , vyšší asi o 10 °C než teplota t_2 čtená na teploměru T_2 . Proud v topné cívce pak upravíme tak, aby $t'_1 = t'_2$. Kolísá-li poněkud teplota vnější lázně, hledíme, aby tato rovnost platila pro střední hodnoty teplot. Vzhledem k malé vodivosti vzduchové mezery přechází, při nepatrném rozdílu teplot obou válců, prakticky všechno teplo, vyrobené proudem, horním krytem do vzduchu. Je-li při tom P' výkon proudu a předpokládáme-li, že teplo prošlé krytem za vteřinu je úměrné rozdílu teplot t'_1 a teploty vzduchu t'_3 , připadá na jeden stupeň rozdílu výkon

$$p = \frac{P'}{t'_1 - t'_3}. \quad (18)$$

Určíme-li tedy n popsáním měření, můžeme vypočítat tepelnou vodivost ze vzorce (17) opraveného vzhledem ke ztrátám:

$$\lambda = 0,239 \text{ cal W}^{-1} \cdot \frac{\delta}{S} \frac{P - p(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}. \quad (19)$$

Příklad určení ztrátového výkonu p .

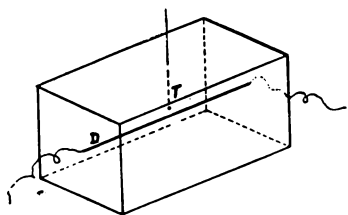
Voda přiváděná kruhovou trubici s otvory do vnější lázně byla přehřívána a vnitřní lázeň byla zkusmo určeným slabým proudem z akumulátorů udržována na stejné teplotě. Po několika hodinách nastal ustálený stav, při němž teplota vnitřní lázně měla stálou teplotu $t'_1 = 33,65^\circ \pm 0,01^\circ$ a teplota t'_2 kolísala kolem této hodnoty v rozmezí několika setin stupně. Teplota vzduchu nad krytem byla $t'_3 = 23,75^\circ$. Proud potřebný k udržení teplotního rozdílu $t'_1 - t'_3 = 9,90^\circ$ byl 120 mA při napětí na cívce 5,2 V. Tedy $P' = 0,624 \text{ W}$ a podle (18)

$$p \equiv \frac{0,624}{9,90} = 0,063 \text{ W } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

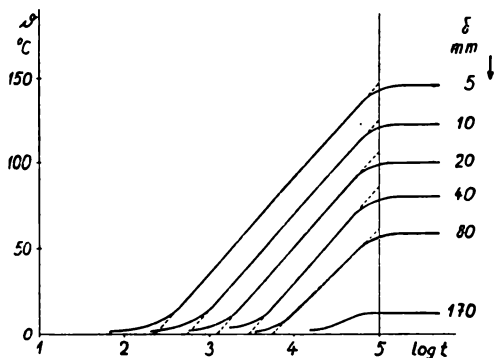
Tato hodnota byla dosazena do (19) při vlastním měření tepelné vodivosti, při čemž se ostatně dbalo toho, aby teplota t_1 přesahovala teplotu vzduchu t_3 jen o několik stupňů.

Pro měření tepelné vodivosti hrubozrnných látek (různých druhů písku, drobného štěrku, hlíny, stavebních hmot a pod.) je vhodný válcový přístroj [58,IV]. Postup měření tímto přístrojem byl naznačen již při jeho popisu; zde uvedeme ještě jinou velmi praktickou měřicí metodu, které lze použít pro měření tepelné vodivosti půdy přímo v terénu.

Experimentální zařízení, na němž se koná měření touto metodou, kterou nazveme *metoda topného drátu*,⁷⁾ je velmi prosté (obr. 58,12). V krabici tvaru kvádrů, jehož rozměry délkové nejsou menší než 10 cm, je napjat vodorovný konstantanový drát D ($\varnothing = 0,5$ mm), vytápený proudem, jehož příkon se



Obr. 58,12. Úprava měření metodou topného drátu.



Obr. 58,13. Experimentálně zjištěný časový průběh teploty v sypké látce pro různé vzdálenosti od topného drátu. Nejbližší vzdálenost stěn krabice od topného drátu byla 17 cm.

měří wattmetrem. Drát D je obklopen měřenou sypkou látkou. Thermočlánkem T se měří časový průběh její teploty ϑ ve vzdálenosti 5 až 20 mm od topného drátu (malé proti rozměrům krabice). Z teorie plyne, že závislost teploty ϑ na čase t má průběh znázorněný graficky na obr. 58,13, kde na vodorovnou osu jsou naneseny přirozené logaritmy času měřeného ve vteřinách od okamžiku, kdy drátem počal procházet proud.

Pozorujeme, že křivky sestavené pro různé vzdálenosti δ thermočlánku od topného drátu jsou sice navzájem posunuty o délky příslušné dobám potřebným k rozšíření teplotní vlny do místa thermočlánku, mají však zhruba stejný průběh a také sklon jejich přímé části je pro nejmenší vzdálenosti δ (asi od 5 do 20 mm) prakticky u všech křivek stejný. To je v souladu s teorií, z níž plyne, že směrnice přímkové části křivky zobrazující závislost ϑ na $\ln t$ je v těsné blízkosti drátu nezávislá na vzdálenosti od D a je určena přibližným vzorcem

$$\frac{d(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{d \ln \frac{t_2}{t_1}} = \frac{Q_1}{4\pi l} \frac{1}{\lambda}, \quad (20)$$

značí-li Q_1 Joulovo teplo, vyvinuté proudem za jednotku času v topném drátu délky l , a λ — tepelnou vodivost sypké látky, kterou z hořejšího vztahu snadno vypočteme. Pro skutečný výpočet je ovšem výhodné vyjádřit výkon P proudu

58⁷⁾ Tato metoda, jejímiž autory jsou *Stahlane a Pijk*, je podrobně theoreticky i experimentálně vyšetřena v pojednání [75].

ve wattech a místo přirozeného logaritmu $\ln \frac{t_2}{t_1}$ užít logaritmu dekadického $\log \frac{t_2}{t_1}$. Pak můžeme křivku $\vartheta(\log t)$ snadno sestrojít na jednoduchém logaritmickém papíru, a označíme-li směrnici její přímé části

$$k = \frac{d(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{d \log \frac{t_2}{t_1}}, \quad (21)$$

bude tepelná vodivost podle (20) vyjádřena vzorcem

$$\lambda = \frac{Q_1}{4\pi} \cdot \frac{\ln 10}{k} = \frac{[0,239 \cdot \ln 10]}{4\pi} \text{ cal W}^{-1} \cdot \frac{P}{lk} = 0,0437 \text{ cal W}^{-1} \frac{P}{lk}, \quad (22)$$

v němž l měříme v cm.

Popsaná metoda nevyžaduje ani nákladného a složitého zařízení ani dlouhé doby, protože je to metoda nestacionární stejně jako metoda *Fitchova* pro pevné izolátory.

58.3. Tepelná vodivost kapalin

Tepelnou vodivost kapalin lze měřit zařízením pro sypké látky (obr. 58,11), *nevzniká-li značnější proudění* kapaliny ve svislé mezeře mezi válci. Vliv tohoto proudění lze udržet v mezích přesnosti měření,

1. je-li mezeře dostatečně úzká,

2. je-li rozdíl teplot mezi oběma stěnami dosti malý. Obě tyto podmínky lze splnit pro kapaliny průměrné vazkosti (a zvláště pro kapaliny velmi vazké jako oleje a pod.), volíme-li mezeru asi 2 mm a rozdíl teplot t_1, t_2 kolem 5° . Vliv proudění ostatně snižuje nepříznivý vliv teplotních skoků mezi kapalinou a stěnami nádob. Tyto skoky totiž snižují naměřenou vodivost proti její skutečné hodnotě, ježto zvětšují měřený rozdíl teplot t_1, t_2 ve jmenovateli zlomku (12). Naproti tomu proudění kapaliny zvyšuje zdánlivě vodivost kapaliny. Za takových podmínek lze výsledky měření pokládat za správné s chybou 2%.

Postup měření včetně i se zjištěním tepelných ztrát je stejný jako v 58.2 a vodivost počítáme podle téhož vzorce (19).

【58.4. Srovnávání tepelných vodivostí kovových tyčí

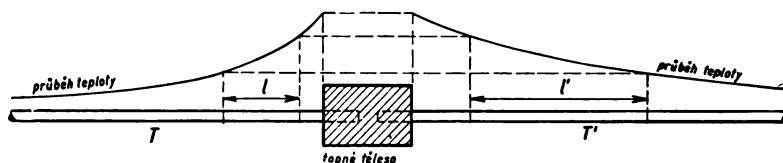
Při dosud probíraných metodách se předpokládalo, že teplotní spád je stálý nejen časově, nýbrž i prostorově, a že tedy tepelný proud je stejnorodý. Při vedení tepla kovovou tyčí se vzdáváme tohoto požadavku a sledujeme průběh teploty podél tyče. Vlivem sdílení tepla okolí (vzduchu), jehož množství připadající na plošnou jednotku povrchu tyče je úměrné rozdílu teploty povrchu tyče a okolí, mají teploty dvou nekonečně dlouhých tyčí T a T' o tepelných vodivostech $\lambda < \lambda'$ průběh, který je zhruba naznačen na obr. 58,14.

Z theorie vedení tepla plyne, že pro nekonečně dlouhé tyče platí jednoduchý vztah, že dvojice míst stejné teploty jsou od sebe vzdáleny o délky l, l' , jejichž poměr

$$l : l' = \sqrt{\frac{r\lambda}{a}} : \sqrt{\frac{r'\lambda'}{a'}},$$

kde r, r' jsou poloměry tyčí (kruhového průřezu) a α, α' součinitelé přestupu⁵⁾ tepla z tyčí do vzduchu. Tyto poslední veličiny závisí jednak na povaze *povrchu* tyčí, jednak na *teplotě* tyčí. První závislost se vyloučí tím, že obě tyče mají stejný povrch (nejlépe pokovením týmž kovem, který se dá dobře vyleštit, aby α mělo co nejmenší hodnotu); závislost přestupních součinitelů na teplotě znesnadňuje podstatně srovnávání tepelných vodivostí, ježto teplota má právě pro různě vodivé tyče různý průběh. I když tedy volíme stejně tlusté tyče ($r' = r$) a postaráme se o to, aby měly stejné povrchy, platí pro jejich vodivosti vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \left(\frac{l}{l'} \right)^2; \quad (23)$$



Obr. 58,14. Ustálený stav teploty různě vodivých nekonečných tyčí.

uplatňuje se tu poměr přestupních součinitelů, který není roven jedné, pokud střední teploty obou tyčí v rozsahu použitém k měření se znatelněji liší. Podle pokusů *Nusseltových* (1915) závisí přestupní součinitel kovového válce vodorovně uloženého v klidném vzduchu na rozdílu jeho teplot t a teploty okolního vzduchu t_0 (pokud hodnota α leží v mezích $1 \div 3 \cdot 10^{-4} \text{ cal.cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \times \text{°C}^{-1}$) tak, že poměrná změna jeho hodnoty je rovna pětina poměrné změny teplotního rozdílu:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = 0,2 \frac{d(t - t_0)}{t - t_0}. \quad (24)$$

Chceme-li tedy vypočítat poměr tepelných vodivostí z jednoduchého vztahu

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \left(\frac{l}{l'} \right)^2, \quad (25)$$

který nevyžaduje znalost přestupních součinitelů, s relativní přesností 1%, nesmějí se střední rozdíly teploty tyčí a vzduchu lišit o více než asi o 3%.

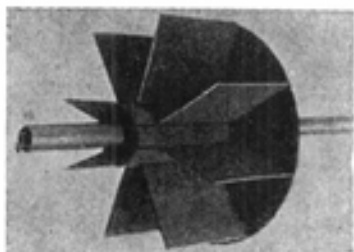
I kdyby tato podmínka byla splněna, musíme si být vědomi toho, že rovnice (23), z níž jsme vyšli, platí přesně jen pro nekonečně dlouhé a tenké tyče. Lze ji ovšem užít, jakož i rovnice (25), i pro tyče velmi dlouhé a tenké (dráty) při čemž teplota již v malé vzdálenosti klesá na teplotu okolí. Měření se dá pak provést jen pro velmi krátké části tyčí a je nepřesné, nemluvic ani o málo přesném měření teploty tenké tyče.

Z toho vidíme, že *Despretzova metoda*, která je založena na vztahu (25), má malou přesnost a může vést i k chybným výsledkům. Vzhledem k své jednoduchosti, která záleží hlavně v tom, že se hledají jen místa stejné teploty na obou tyčích a měří se jejich vzdálenosti, byla různým způsobem obměňována.⁶⁾ Lze však theoreticky dokázat větu: *Jsou-li vzájemné vzdálenosti bodů*

58 ⁵⁾ TF 4.6.2, 4.6.3.

58 ⁶⁾ Srov. na př. *Horák*, *Strojnický obzor* 1939.

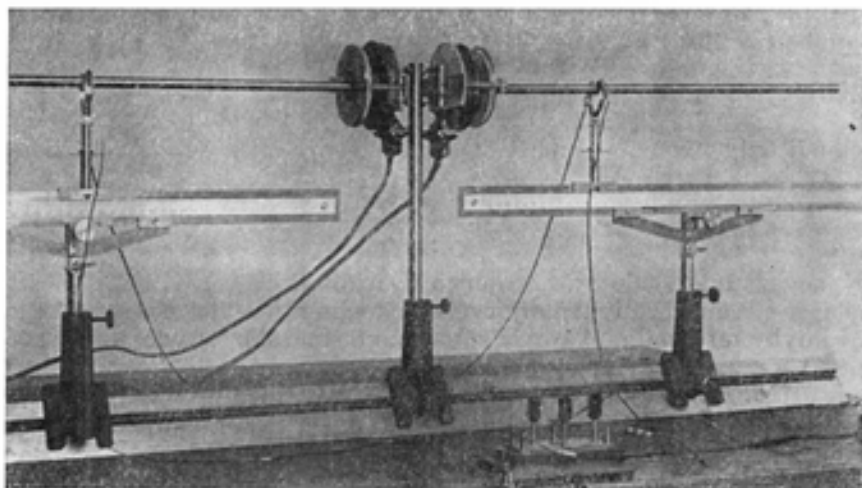
stejné teploty na obou tyčích ve stálém poměru, je poměr jejich tepelných vodivostí roven čtvrtci tohoto poměru. Zvolíme-li tedy na př. na tyči T dva body A , B , vzdálené od sebe o délku l , a mají-li body A' , B' stejných teplot na tyči T' vzájemnou vzdálenost l' , pak poměr vodivostí je dán rovnicí (25), jestliže bod půlící úsečku AB na T má stejnou teplotu jako půlící bod úsečky $A'B'$ na T' .



Obr. 58,15. Posuvný vyzařovač na kovové tyči.

Takové rozložení teplot na srovnávaných tyčích lze přivodit užitím jednoduchého posuvného vyzařovače (chladiče), který nasadíme na tyč, abychom zvětšením povrchu tyče nahradili chybějící část povrchu nekonečné tyče. Snímek 58,15 ukazuje takový vyzařovač s matným černým povrchem, zhotovený z měděného dutého válečku a měděného plechu. Změnou polohy vyzařovače na tyči lze měnit rozložení teploty podél tyče tak, až dostaneme rozložení jako na nekonečné tyči, o čemž se přesvědčíme ze stálosti poměru $l : l'$ pro různé polohy bodů. Body stejné teploty zjišťujeme thermočlánkem, jak uvidíme dále.

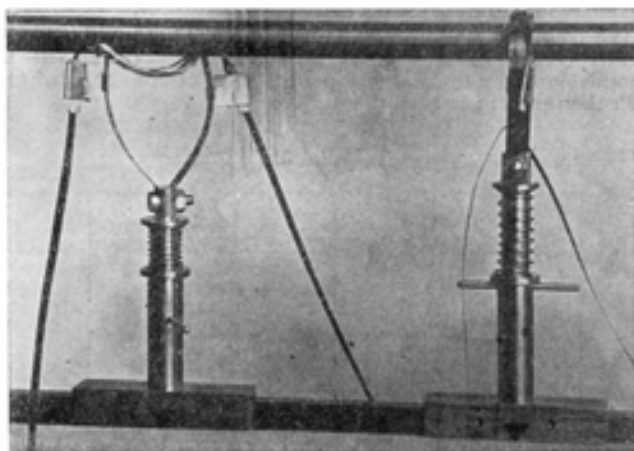
Snímek 58,16 ukazuje zařízení na srovnávání tepelných vodivostí kovových tyčí. Obě tyče se upevní do měděných kotoučů vytápěných elektrickým proudem a upevněných na stojánku z málo vodivé niklové oceli. Měděné kotouče, a tedy i měřené tyče jsou navzájem elektricky izolovány (jsou vytápěny jen sáláním plochých topných těles). Stojánek je nasazen na hranolovou litinovou



Obr. 58,16. Zařízení pro srovnávání tepelných vodivostí kovových tyčí.

tyč, obvyklou u optických lavic, po níž se posouvají dva další stojánky, nesoucí spoje thermočlánku, a vodorovné stupnice, na nichž čteme polohu spojů. Spoje jsou upraveny způsobem patrným ze snímků 58,17 tak, aby dobře přilehly k povrchu tyče a co nejméně rušily rozložení teploty. Lze je buď přitisknout zespoda k tyči (uvolněním šroubového pera, na obr. vpravo), nebo oddálit od

tyče a v této poloze zajistit (pootočením příčky, na obr. vlevo). Na snímku jsou vidět pásy obou kovů: Niklochromový pásek (0,1 mm tlustý a 2 mm široký) tvoří přímé spojení obou spájených míst, kdežto měděné pásy stejných rozměrů vedou ke klíči a ke galvanoměru. Umístíme-li tedy na každou tyč jeden spoj, měříme přímo rozdíl teplot v místech spojů (zapojení na obr. 23,8a). Oba spoje jsou zespoda chráněny úzkým proužkem impregnovaného papíru; tím se kompenzuje ztráta tepla, způsobená vedením v páscích, které se dotýkají tyče průměru 10 mm téměř na polovině obvodu. Proti povrchu tyčí nejsou spoje izolovány vzhledem k zmíněné vzájemné izolaci tyčí samých.



Obr. 58,17. Úprava thermočláнку v zařízení 58,16.

Při měření musíme dbát toho, aby vzduch kolem tyčí byl co možná v klidu, jinak je dosažení ustáleného stavu dosti neseadné. Po změně polohy vyzářovačů, které umístíme na obě tyče, je vždy nutno vyčkat vytvoření nového stacionárního rozložení teploty, což ostatně netrvá dlouho a prozradí se ustálením galvanoměru.

Při přesném měření doporučuje se provést srovnání s dvěma tyčemi známých vodivostí, z nichž jedna je vodivější a druhá méně vodivá než měřená tyč. Aby se využilo celé měřené tyče, je vhodné mít etalon delší v poměru odměrcin teplotních vodivostí.

Potřeby: Přístroj k vytápění tyčí (na př. 58,16), 2 vyzářovače 58,15, thermočlánek [23,IX;X], galvanoměr zrcátkový [67,II], tyč známé tepelné vodivosti (etalon).

Postup

1. Upevníme tyče do topného stojánku a nasadíme na ně vyzářovače (u vodivější tyče na samý kraj).

2. Jeden spoj thermočláнку nasadíme na měřenou tyč (poblíž vytápěného konce) a druhý na etalon. Pozorujeme galvanoměr, a jakmile se bezpečně ustálí, vyhledáme na etalonu bod, pro který je galvanoměr na nule. Zaznamenáme polohy x_0 , x'_0 obou bodů na stupnicích.

3. Posuneme spoj na měřené tyči do bodu $x_0 + l_0$ (poblíž vyzářovače) a vyhledáme na etalonu bod $x'_0 + l'_0$, pro nějž je galvanoměr na nule (při tom měříme vzdálenosti na obou tyčích ve směru klesající teploty).

4. Umístíme spoj na měřeně tyči do půlčího bodu $x_0 + \frac{1}{2}l_0$, druhý spoj do půlčího bodu $x'_0 + \frac{1}{2}l'_0$. Není-li přitom galvanoměr přesně na nule, měníme polohu jednoho vyzářovače tak, že jej posuneme k vytápěnému konci tyče, je-li teplota v jejím půlčího bodě vyšší než teplota půlčího bodu na druhé tyči. Volíme raději posuvy menší, což má výhodu brzkého ustálení teploty. Tak pokračujeme, až je galvanoměr opět na nule.

5. Nato provedeme ještě kontrolní měření tak, že zjistíme řadu dvojic bodů stejné teploty na obou tyčích, měříce jejich vzdálenosti l a l' od bodů x_0 a x'_0 . Poměr těchto vzdáleností má být pro všechny body v mezích chyb pozorování stejný.

6. Vypočteme poměry $l : l'$ a jejich čtverce pro všechny dvojice bodů stejné teploty a vypočteme průměr, který podle (25) dává poměr tepelných vodivostí λ tyče k tepelné vodivosti λ' etalonu.

Příklad. Tepelná vodivost bronzové tyče.

Bronzová tyč průměru 10 mm, dlouhá 75 cm, je srovnávána vylíčeným postupem s etalonem z elektrolytické mědi průměru 10 mm a délky 100 cm. Bronzová tyč byla elektrolyticky poměděna, aby měla stejný povrch jako etalon. Střední teplota obou tyčí byla asi 30 °C. Průběh měření je shrnut v tabulce I.

Tabulka 58,I

l cm	l' cm	$\left(\frac{l}{l'}\right)^2$	Δ
$l_0 = 57,95$	$l'_0 = 88,7$	0,426	+ 0,002
14,1	21,45	0,432	— 0,004
23,1	35,35	0,431	— 0,003
24,1	36,4	0,438	— 0,010
28,5	43,9	0,422	+ 0,006
31,3	48,4	0,418	+ 0,010
38,85	58,7	0,438	— 0,010
39,0	60,7	0,413	+ 0,015
39,4	59,7	0,435	— 0,007
57,65	88,05	0,428	0,000
Průměr = 0,428, $\Sigma\Delta = 0,033$			

Poměr vodivosti je tedy

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = 0,428 \pm 0,002,$$

kde pravděpodobná chyba byla vypočtena podle 12 (33). Tepelná vodivost ryzí mědi při 30 °C je $\lambda' = 0,92$ [λ]_p, tedy tepelná vodivost bronzu při téže teplotě

$$\lambda = 0,394$$
 [λ]_p = 142 [λ]_t = 164,9 [λ].

58.5. Měření tepelné vodivosti kovů technickým přístrojem

Měření přístrojem [58,II] se zakládá na této srovnávací metodě:¹⁰⁾

Mějme vodič tepla ve tvaru tyče složené ze tří částí, z nichž obě krajní I a II jsou z téhož kovu a střední část III z jiného (obr. 58, 18). Na jednom konci tyče dodává topné těleso stálé vteřinové množství tepla Q , jež tyč odvádí do chladicího tělesa. Za rovnovážného stavu (není-li radiálních ztrát a je-li průřez tyče S v každém místě stejný) bude jednotkovou plochou každého řezu, kolmého na osu tyče, za jednotku času proudit stejné množství tepla čili *hustota tepelného proudu* bude v celé tyči stejná.

58¹⁰⁾ TF 4.6.5 a [56].

Hustota tepelného proudu

$$i = \frac{Q}{S} \quad (26)$$

a celkové množství tepla, prošlé za 1 s celou plochou libovolného průřezu, je dáno známou Biotovou rovnicí

$$Q = \lambda \cdot S \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2}, \quad (27)$$

kde konstanta úměrnosti λ je tepelná vodivost zkoušeného materiálu. Z obou rovnic plyne, že hustota tepelného proudu i je též

$$i = \lambda \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (28)$$

kde t_1 a t_2 jsou teploty ve dvou místech vodiče, vzdálených o délku Δx .

Protože hustota i v částech I, II a III musí být stejná (teplo, jež proudí válečkem I, musí projít též oběma dalšími válečky, není-li postranní ztrát), vytvoří se různou tepelnou vodivostí teplotní rozdíly Δt_I , Δt_{II} a Δt_{III} (obr. 58,18), při čemž podle (28)

$$i = \lambda_I \frac{\Delta t_I}{\Delta x} = \lambda_{II} \frac{\Delta t_{II}}{\Delta x} = \lambda_{III} \frac{\Delta t_{III}}{\Delta x}.$$

Z této rovnice lze tedy určit poměr vodivostí λ_I a λ_{III} ze změřených teplotních spádů

$$\frac{\Delta t_I}{\Delta x} \text{ a } \frac{\Delta t_{III}}{\Delta x}.$$

Ani v tomto případě však, jako při všech způsobech určování tepelné vodivosti, nelze zcela zabránit radiálním ztrátám, takže podmínka stejnosti hustoty tepelného proudu podél celého vodiče nemůže být dokonale splněna. V tyči klesá tedy radiálními ztrátami hustota tepelného proudu směrem od teplejšího konce k chladnějšímu, takže průměrné hustoty v částech I, II, III budou

$$i_I > i_{III} > i_{II}.$$

Jsou-li však radiální ztráty ve všech třech částech tyče přibližně stejné, bude tepelný proud v tyči klesat prakticky lineárně a jeho průměrná hustota i_{III} ve střední části bude aritmetickým středem hustot i_I a i_{II} , tedy

$$i_{III} = \frac{i_I + i_{II}}{2}.$$

Předpokládáme-li, že všechny vzdálenosti Δx jsou stejné, obdržíme z rovnice (28)

$$i_{III} = \frac{\lambda_{III} \Delta t_{III}}{\Delta x} = \frac{\lambda_I \Delta t_I + \lambda_{II} \Delta t_{II}}{2 \Delta x}. \quad (29)$$

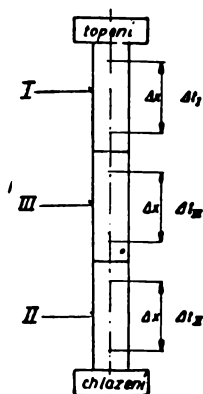
Tepelnou vodivost $\lambda = \lambda_{III}$ středního válečku lze tedy počítat z teplotních rozdílů $\Delta t = \Delta t_{III}$, Δt_I a Δt_{II} podle vzorce

$$\lambda = \frac{\lambda_I \Delta t_I + \lambda_{II} \Delta t_{II}}{2 \Delta t}. \quad (30)$$

Metoda záleží v tom, že měřený váleček vložíme mezi dva válečky přesně stejného průměru z materiálu známé vodivosti a měříme teplotní rozdíly, připadající na touž vzdálenost jak ve středním válečku, tak v obou krajních etalonech, a to v místech souměrně položených k měřenému střednímu vzorku.

Z uvedeného výkladu plyne, že je nutno splnit tyto podmínky:

- Plochy průřezů všech válečků musí být stejné.
- Vzdálenosti Δx (obr. 58,18), na nichž vznikají teplotní rozdíly Δt , musí být stejné.



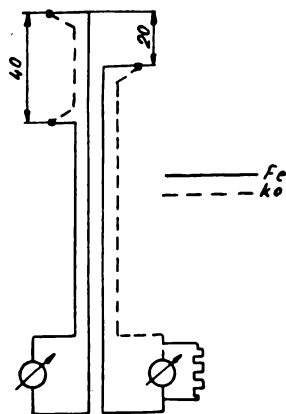
Obr. 58,18. Schema principu metody.

c) Hustota tepelného proudu ve středním válečku musí být aritmetickým středem hustot v krajních válečcích.

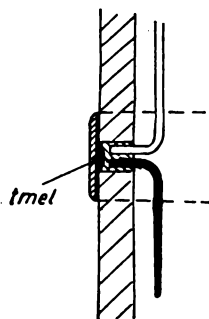
První podmínka a), aby plochy průřezů kolmých na tepelný proud byly stejné, může být snadno dodržena pečlivou výrobou zkušebního válečku.

Dodržet podmínku b), vyžadující stejnost vzdáleností, v nichž se měří teplotní rozdíly Δt , je jistým problémem, chceme-li tyto teplotní difference měřit thermočláanky a jestliže střední váleček (zkoumaný vzorek) má být vyměnitelný.

Použilo se k tomu diferenciálního thermočláanky, jehož spájené spoje jsou uloženy ve skleněné trubici, která se posouvá v ose válečků, v nichž je pro článek vyvrtána válcová



Obr. 58,19. Zapojení termoelektrických okruhů.



Obr. 58,20. Čidlo teploty s platinovým kroužkem.

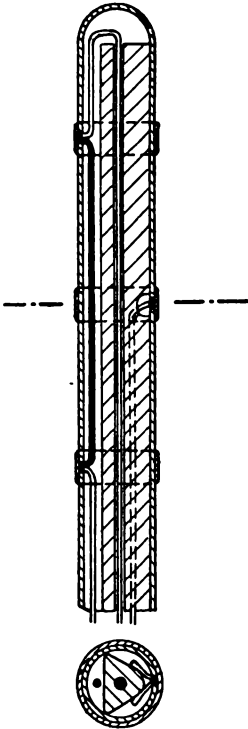
dutina. Potom podmínka stejnosti vzdálenosti Δx je dokonale splněna a žádané symetrie, vzhledem ke střednímu válečku lze dosáhnout vhodnou úpravou posuvu thermočláanky, jak uvidíme později.

Válcovou dutinou vyvrtanou v ose válečků se poměry proudění tepla v podstatě nezmění, teplo místo plochou kruhovou proudí plochou omezenou mezikružím. Vzduchový sloupec a rovněž skleněné trubičky diferenciálního thermočláanky sice odvádějí též určité množství tepla, ježto však jak vzduch, tak i sklo mají proti kovům velmi nízkou tepelnou vodivost, nemůže mít tato okolnost větší vliv na přesnost měření, jež se žádá od technického přístroje pro určování tepelné vodivosti. Jedině odvádění tepla prouděním vzduchu by mohlo podstatněji ohrozit přesnost měření; protože však, jak plyne z celkového uspořádání (obr. 58,2), topné tělísko je nahoře a teplotní rozdíly se měří thermočláankem směrem odzdoła nahoru a otvor pro článek je nahoře uzavřen, teplejší vrstvy vzduchu se pro menší hustotu drží nahoře a znatelné proudění nemůže vzniknout.

Podmínka c) bude patrně splněna, jestliže radiální ztráty mezi středním řezem horního etalonu a středním řezem vzorku budou rovny radiálním ztrátám mezi středním řezem vzorku a středním řezem dolního etalonu. Je obtížno vyhovět dokonale této podmínce pro různé vodivé vzorky, její přibližné splnění však bude tím snazší, čím menší budou tyto ztráty proti celkovému tepelnému toku. Proto byla přes válečky I, II a III, jimiž prochází tepelný proud, převlečena isolační porcelánová trubka a celá soustava válečků mezi topným a chladícím tělesem byla obklopena ochrannou ocelovou trubicí podobné tepelné vodivosti, jakou mají etalony. Ochranná trubka je na horním konci vytápěna společně s válečky a dole je společně s nimi chlazena. Kolem trubky pak je ocelový kryt a prostor mezi krytem a ochrannou trubicí je vyplněn isolační látkou (skleněnou vlnou). Potom v ochranné trubce vznikne zhruba stejný průběh teplot jako ve válečcích, takže radiální přestup tepla je tím značně snížen. Podmínkou ovšem je, aby na obou styčných plochách vzorku s etalony nevznikly znatelné a hlavně různé velké teplotní skoky. Proto je nutno zaručit dobrý kovový styk mezi nimi, jehož lze dosáhnout tím, že se válečky navzájem do sebe našroubují, při čemž želní dosedací plochy musí být pečlivě opracovány. Tím vznikne vodič tepla ve tvaru kompaktní kovové tyče, v němž teplota

klesá spojitě shora dolů. Ježto pak ochranná trubice má na obou koncích přibližně stejnou teplotu jako tato vnitřní tyč, bude rozdíl teploty tyče a trubice takřka nulový na obou koncích a největší hodnoty dosáhne poblíž středu vzorku. Pak lze očekávat, že radiální ztráty budou zhruba probíhat souměrně vzhledem k tomuto středu, a že podmínka c) bude prakticky splněna.

Thermočlánekem se měří jednak teplotní difference, jednak střední teploty ve válečcích I a II a ve vzorku. Přitom, jak již jsme řekli, má být dodržena podmínka, aby vzdálenosti, v nichž difference vznikají, byly stejné. Pro tento účel se nejlépe hodí dva samostatné termoeltrické okruhy podle schematu na obr. 58,19. Skládají se z drátků železných a konstantanových, spájených stříbrnou pájkou. Jedním se měří teplotní difference v místech vzájemně vzdálených o 40 mm tak, že zapojený galvanoměr přímo udává difference v dílech stupnice. Druhým okruhem se určuje absolutní střední teplota ve válečcích uprostřed mezi místy, v nichž se měří teplotní difference. Studeným spojem jsou tu svorky druhého galvanoměru, neboť střední teploty stačí určovat s menší absolutní přesností.



Spájené spoje thermočláunku jsou zapuštěny do stěny jediné skleněné trubičky podle obr. 58,20 a 58,21 tak, že spoje diferenciálního thermočláunku jsou od sebe vzdáleny o 40 mm a uprostřed mezi nimi je spoj thermočláunku pro absolutní teploty (obr. 58,21). Přes spoje jsou přitmeleny platinové kroužky šířky 2 mm, které se při měření teplot dotýkají stěny vrtání válečku a přijímají teplotu styčného místa (obr. 58,22). U středního thermočláunku není použito tmelu a spoj thermočláunku se dotýká přímo kroužku, který je židlem teploty. Skleněná trubička je nahoře zatavena a v ní jsou drátky navzájem izolovány skleněnou kapilárou, sbrušenou ve tvaru trojbokého hranolu, jak je vidět na obr. 58, 21.



Obr. 58,21. Řez trojitým thermočláunkem.

Obr. 58,22. Snímek posuvného thermočláunku s třemi čidly.

Potřeby: Přístroj [58,II], galvanoměr pro teplotní rozdíly, galvanoměr pro střední teploty s bočnickem (shuntem), rtuťový teploměr, potenciometr, stabilisátor napětí (přepadové zařízení pro stálý tlak chladicí vody).

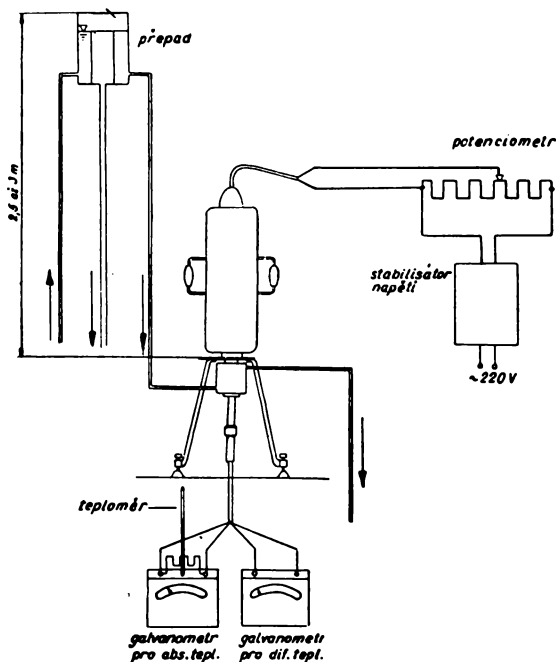
Postup

1. Sestavíme měřicí zařízení podle obr. 58, 23.
2. Potenciometrem se nastaví příslušný výkon a pak se vyčká, až nastane rovno-

vážný stav, což bývá průměrně za 5 až 6 hod. Výhodné je zapnout přístroj večer a ráno provést měření.

3. Na začátku měření, jak jsme již řekli, je thermočlánek ve střední poloze a rovnovážný stav se projeví tím, že ukazatelé na obou galvanoměrech již nemění svou polohu.

4. Když jsme se několikrát čtením údajů na galvanoměrech, provedeným asi v 15minutových intervalech, přesvědčili, že rovnovážný stav skutečně nastal, čteme údaj n' galvanoměru pro absolutní teploty a údaj Δt galvanoměru pro teplotní rozdíly. Nato



Obr. 58,23. Schema úplného měřicího zařízení.

posuneme objímku δ (obr. 58,2) do horní polohy tak, aby západka správně zapadla, vyčkáme, až se údaje galvanometrů zcela ustálí, a zapíšeme konečné hodnoty n_I , Δt_I . To opakujeme znova ve střední poloze, pak v poloze spodní a nakonec opět ve střední. Ze tří údajů galvanometrů ve střední poloze bereme aritmetické střeďy.

Schematicky je tedy postup měření takový:

1. čtení uprostřed	n' , $\Delta t'$,
čtení nahore	n_I , Δt_I
2. čtení uprostřed	n'' , $\Delta t''$,
čtení dole	n_{II} , Δt_{II} ,
3. čtení uprostřed	n''' , $\Delta t'''$
průměry	n , Δt .

Příklad. Byl vyšetřován ocelový vzorek, pro nějž chemická analýsa dala 0,16 % C, 0,69 % Mn, 0,44 % Si, 0,014 % P, 0,020 % S, 0,20 % Cu, 6,65 % Cr, 0,52 % Mo. Tepelné zpracování vzorku bylo: normalizační žhání 900 °C/1 hod/vzduch a žhání 750 °C/1 hod/vzduch. Po tepelném zpracování měl vzorek tvrdost 197 H_B . Tvrdost byla určena kuličkou průměru 2,5 mm při zatížení 187,5 kg. Při rovnovážném stavu, který nastal asi po 5 hodinách, byly naměřeny tyto hodnoty:

	Střed. teplota °C	Teplotní rozdíl dílký stup. galv.	Tepelná vodivost nkl. etalonu cal.cm ⁻¹ . s. ⁻¹ C ⁻¹
Etalon I	212,0	50,2	0,1403
Vzorek III	154,5	94,2	—
Etalon II	99,0	47,7	0,1465

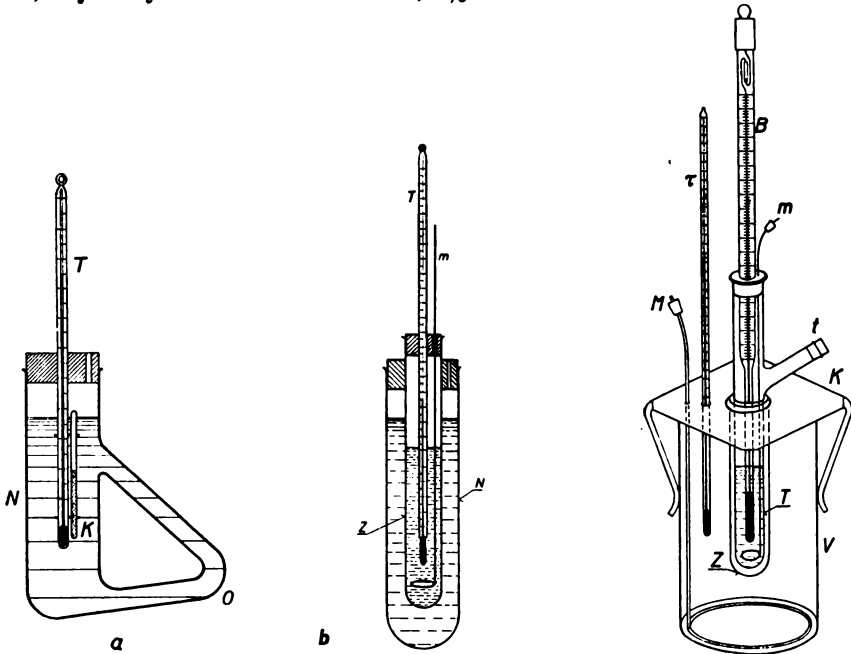
Použitím rovnice (30) vypočteme tepelnou vodivost tohoto vzorku 0,0746 cal/cm × s.°C při 154,5 °C.

Vidíme, že rozdíl mezi

$$a \quad \lambda_I \Delta t_I = 0,1403 \cdot 50,2 = 7,05$$

$$\lambda_{II} \Delta t_{II} = 0,1465 \cdot 47,7 = 6,98$$

je pouze asi 1 %. Při vyšších teplotách je ovšem zato diference poněkud vyšší, ukázalo se však, že je obvykle menší než asi 3 až 3,5 %.



Obr. 59,1a, b. Nádobky na měření bodu tání a tuhnutí. Obr. 59,2. Beckmannův přístroj.

59. BOD TÁNÍ A TUHNUTÍ

Definice. Bod tání ϑ je teplota, za níž je pevné skupenství (fáze) v rovnováze se skupenstvím kapalným.¹⁾ Pro látky chemicky čisté je totožný s bodem tuhnutí. Pro látky znečištěné a pro směsi látek definujeme bod tání jako teplotu, za níž se teplota látky nejpomaleji mění při stejnoměrném dodávání tepelné

59¹⁾ TF 4.4.4.

energie. Podobně je u nich bod tuhnutí teplota, za níž se látka nejpomaleji ochlazuje při stejnoměrném odnímání tepla.

Jednotky. Praktická jednotka je Celsiův stupeň = °C.

Přístroje

Pro zjišťování bodu tání a tuhnutí se používá jednoduchých skleněných nádobek. Pro malé množství látky je vhodný druh tvaru 59,1a, kdežto druh 59,1b vyžaduje poněkud větší množství. Pro zjišťování bodu tuhnutí roztoků se hodí Beckmannův přístroj, jehož úprava je vidět na obr. 59,2. Válcová skleněná nádoba V má plechový (poniklovaný) kryt K , jímž prochází míchačka M a teploměr τ . Do středního kruhového otvoru krytu je zapuštěna širší zkumavka Z , v níž je zasazena vlastní trubice T na rozpouštědlo (a na roztok) tak, že mezi ní a Z zbývá vzduchová mezera. V trubici je také míchačka m a Beckmannův teploměr B [23,III]. Trubice T má postranní trubičku t se zátkou, kterou lze vpravit do T látku, jejíž roztok se má měřit. Nádoba V se před měřením naplní mrazivou směsí.

MĚŘICÍ METODY

59.1. Bod tání chemicky čistých látek

Nejjednodušší — ovšem také málo přesné — je měření bodu tání chemicky čistých látek v nádobce (obr. 59,1a).

Postup:

1. Několik zrněk měřené látky vpravíme do úzké tenkostěnné kapiláry K , připevněné k teploměru tak, aby jeho nádobka byla co nejbližší měřené látce.
2. Teploměr s kapilárou ponoříme do lázně (nejčastěji vodní) v nádobce N s obloukovou trubicí O a velmi pomalu zahříváme jen oblouk O nad slabým plynovým nebo lihovým plamenem. Přitom sledujeme teploměr a pozorujeme okamžik, kdy se zrnka látky počnou hroutit.
3. V okamžiku, kdy se tak stane, čteme na teploměru teplotu lázně a tuto teplotu pokládáme za teplotu tání.

59.2. Měření bodu tání a tuhnutí z průběhu teploty

Bod tání měříme nejjednodušeji v nádobce 59,1b pozorováním průběhu teploty při stejnoměrném dodávání tepla látce v pevném skupenství. Tu stoupá teplota látky (měřená někdy v lázni, která ji obklopuje) přibližně rovnoměrně s časem. Jde-li o látku chemicky čistou, pozorujeme při stálém stejnoměrném dodávání tepla, že teplota látky v jistém okamžiku přestane stoupat, a současně počne tát. Teplota zůstává nezměněna, dokud všechna látka neroztaje, načež opět počne stoupat lineárně, jak je naznačeno na obr. 59,3 lomenou čarou I . Teplota, kterou má látka při tání, je bod tání ϑ .

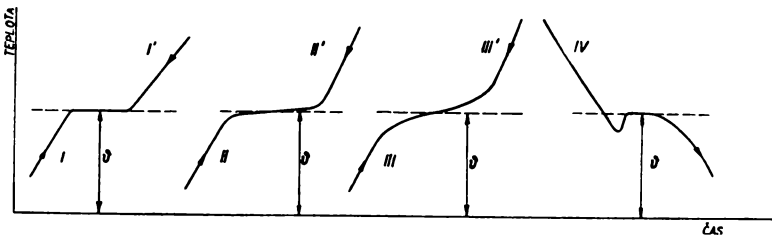
Bod tání závisí poněkud na tlaku, ale v mezích obvyklých změn barometrického tlaku lze pokládat teplotu tání za stálou. Mluvíme-li o bodu tání bez udání tlaku, míníme tím bod tání za obvyklých tlakových poměrů.

Je-li látka znečištěna menším množstvím jedné nebo více látek, je průběh teploty dán zpravidla čarou tvaru II , poněkud zaoblenou, jejíž střední část není přesně vodorovná ani přesně přímková. Za bod tání lze vzít střední teplotu v místě nejmenšího spádu.

Konečně látky smíšené z různých složek jeví průběh více nebo méně

stupňový tvaru naznačeného křivkou *III*. Zde pokládáme za bod tání teplotu, která přísluší bodu obratu křivky a při které se látka nejpomaleji otepluje. Je to teplota, při níž většina složek látky taje a má stálou teplotu.

Podobným způsobem měříme bod tuhnutí, pozorující teplotu při stejnoměrném odnímání tepla měřené látky. Průběh teploty je dán u látek chemicky čistých křivkou *I'*, která probíhá v obráceném časovém sledu, ale jinak stejně jako při zahřívání látky. Bod tuhnutí je u nich vždy shodný s bodem tání. Podobně u látek znečištěných a u směsí je průběh při odnímání



Obr. 59,3. Průběh teploty při tání a tuhnutí.

tepla dán křivkami *II'*, *III'*, které však nemusí vždy dávat bod tuhnutí zcela souhlasný s bodem tání. To platí zejména o směsích většího počtu různých látek.

Postup při měření v nádobce 59,1b je tento:

1. Vnitřní zkumavku *Z* s míchačkou naplníme zrnky nebo kousky měřené látky a zasuneme teploměr *T* se zátkou.

2. Zkumavku vložíme do lázně (nejčastěji vodní) a v ní velmi pomalu zahříváme, zapisující teplotu čtenou v pravidelných intervalech na teploměru *T* (na př. po minutách).

3. Jakmile počne látka tát (měknout), promícháváme ji, za stálého sledování teploty, aby měla všude stejnou teplotu.

4. Ve čtení teploty pokračujeme ještě několik minut po tom, kdy látka úplně roztaje. Bod tání je dán teplotou, při níž teplota látky nejmírněji stoupá. Je vyznačen nejmenší minutovou změnou Δt , kterou určíme buď početně, nebo z průběhu teplotní křivky. Tato křivka má nejmenší stoupání pro bod tání, který je dán středem prodlevy nebo bodem obratu křivky.

5. Chceme-li také zjistit bod tuhnutí, necháme látku zvolna chladnout v téže lázni, kterou můžeme z počátku trochu ochladit, abychom bezvýznamnou část pozorování zkrátili. Také je možno chladnutí urychlit ponořením zkumavky i s lázní v *N* do nádoby s vlažnou vodou.

6. Bod tání i bod tuhnutí zjistíme podle průběhu teploty (tvaru křivky) způsobem prve vyloučeným.

Příklad. Bod tuhnutí parafinu, měřený v nádobce 59,1b.

Průběh teploty čtené po minutách je patrný z tabulky I a z obr. 59,4.

Z 59,I a 59,4 plyne bod tuhnutí parafinu

$$\vartheta = 50,4 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

59.3. Bod tuhnutí — měření po přechlazení

Bod tuhnutí lze dobře určit také na základě známého jevu *přechlazení*.²⁾ Necháme-li totiž kapalinu v klidu a beze styku s pevnou fází pomalu chlad-

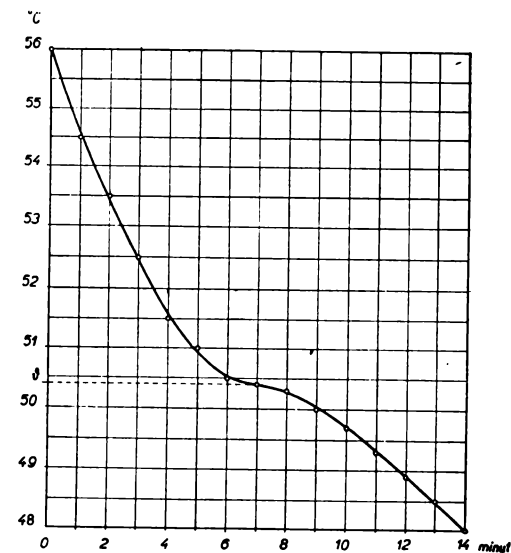
59²⁾ TF 4.4.4.

nout, klesne její teplota pod bod tuhnutí, aniž látka ztuhne. Vhodíme-li pak do přechlazené kapaliny několik zrněk její pevné fáze, počne ihned tuhnout, při čemž teplota rychle stoupne až na bod tuhnutí. Průběh teploty je zhruba dán křivkou *IV* na obr. 59,3.

Při měření tímto způsobem užijeme nádobky 59,1b a roztavíme (ovšem v lázni *N*) všechnu látku, načež ji necháme v klidu přechladit. Nato vhodíme do vnitřní zkumavky *Z* několik zrněk původní látky a zároveň začneme tuhnoucí kapalinu promíchávat míchačkou *m*, sledující teplotu. Jakmile se teplota ustálí, čteme teplotu, která je bodem tuhnutí látky.

Tabulka 59,I. Měření bodu tuhnutí parafinu

Čas v min.	Teplota °C	Δt °C
0	56,0	1,5
1	54,5	1,0
2	53,5	1,0
3	52,5	1,0
4	51,5	0,5
5	51,0	0,5
6	50,5	0,1
7	50,4	0,1
8	50,3	0,3
9	50,0	0,3
10	49,7	0,4
11	49,3	0,4
12	48,9	0,4
13	48,5	0,4
14	48,0	0,5



Obr. 59,4. Průběh teploty při tuhnutí parafinu.

59.4. Snížení bodu mrazu roztoků — měření přístrojem Beckmannovým

Bod tuhnutí neboli mrazu roztoku je nižší než u čistého rozpouštědla. Pro zředěný (málo koncentrovaný) roztok, obsahující *m* gramů látky molekulové hmoty μ v 1000 g rozpouštědla, platí *Raoultův zákon*:³⁾ Snížení bodu mrazu je úměrno molekulové (molární) koncentraci, t. j. počtu grammolekul rozpuštěných v 1000 g rozpouštědla:

$$\Delta\vartheta = K \frac{m}{\mu}. \quad (1)$$

Konstanta úměrnosti *K* se nazývá *kryoskopická konstanta* a vypočte se ze vzorce *van't Hoffova*:

$$K = \frac{RT_0^2}{1000 l_0}, \quad (2)$$

kde $R = 1,987 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{°K}^{-1} = 8317 \text{ joule kmol}^{-1} \cdot \text{°K}^{-1}$ je plynová konstanta, $T_0 = 273,15^\circ + \vartheta_0$ absolutní bod tuhnutí čistého rozpouštědla a l_0 jeho skupenské teplo tání. Změříme-li tedy snížení $\Delta\vartheta$ a známe-li kryoskopickou

konstantu K , můžeme z (1) vypočítat molekulovou hmotu μ rozpuštěné látky. Neznáme-li K , určíme ji podle (2) z bodu tání ϑ_0 rozpouštědla a ze skupenského tepla l_0 , změřeného podle 57.2, nebo ji najdeme v T,XV.

Potřeby: Beckmannův přístroj [59,I] s přestavným teploměrem [23,III], mrazivá směs⁴⁾, analytické váhy [25,V; VI].

Postup

1. Vnější nádobu *Beckmannova* přístroje naplníme mrazivou směsí a nastavíme přestavný teploměr na bod mrazu ϑ_0 rozpouštědla.

2. Kryoskopickou trubici přístroje naplníme odváženým množstvím M gramů ochlazeného čistého rozpouštědla a vložíme do přístroje.

3. Za stálého míchání pozorujeme teploměr i rozpouštědlo a dbáme, aby se vnitřní zkumavka nedotýkala vnější trubice, obklopené mrazivou směsí.

4. Klesne-li teplota pod bod tuhnutí ϑ_0 , aniž kapalina počne tuhnout, vhodíme do ní trubičkou t zrnko pevné fáze, kterou si připravíme v mrazivé směsi mimo přístroj. Kapalina počne tuhnout a její teplota vystoupí náhle na bod mrazu ϑ_0 , který je tak zjištěn (srov. 59.3). Před čtením teploty poklepeme mírně na teploměr.

5. Předěšlé měření se doporučuje opakovat tak, že necháme kapalinu jen nepatrně přechladit asi 0,05 až 0,1° pod ϑ_0 zjištěné v 4 (za stálého míchání) a ihned do ní vhodíme zrnko ztuhlé kapaliny. Teplota vystoupí na bod ϑ_0 , který je takto zjištěn přesněji.

6. Ztuhlou kapalinu rozehrějeme a vpravíme do ní malé množství (asi 1 g) měřené látky, jejíž hmotu m' určíme na miligramy na analyt. vahách podle 30.2; 3.

7. Po rozpuštění zjišťujeme bod tuhnutí ϑ roztoku, a to několikrát za sebou. Z průměru určíme snížení $\Delta\vartheta$.

8. Hmotu látky, připadající na 1000 g rozpouštědla,

$$m = 1000 \frac{m'}{M} \quad (3)$$

a dosazením této hodnoty a konstanty K do (1) dostaneme molekulovou hmotu μ rozpuštěné látky:

$$\mu = 1000 K \frac{m'}{M \Delta\vartheta} \quad (4)$$

Hodnoty K jsou pro některé kapaliny uvedeny v T,XV.

60. B O D V A R U

Definice. *Bod varu* Θ kapaliny za daného tlaku je teplota, při níž je kapalina v rovnováze s parou, to znamená teplotu, při níž je tlak nasycené páry kapaliny roven danému tlaku.

Normální bod varu je bod varu za normálního tlaku 760 torů = $1,013\ 25 \times 10^5$ Nm⁻² = 1,013 25 megabarye.

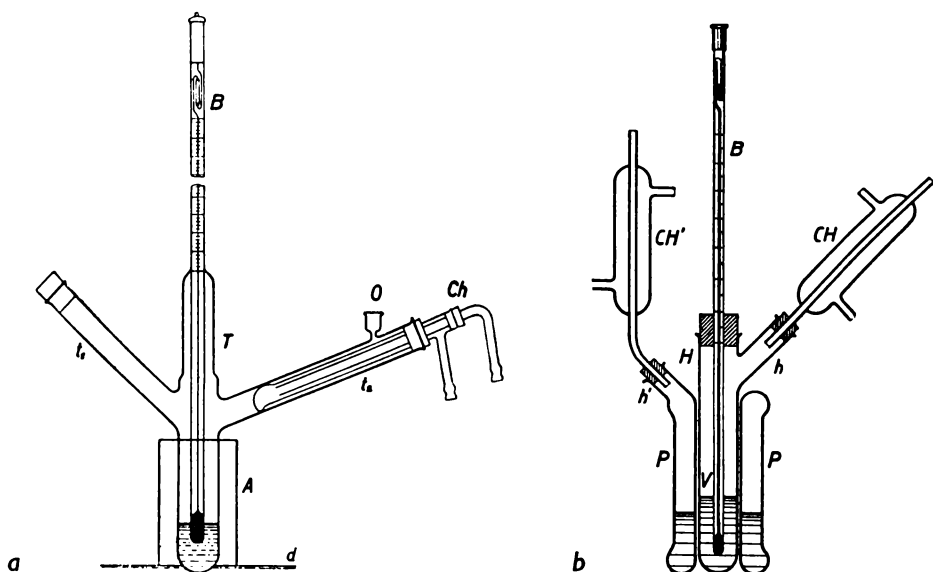
Jednotky. Praktická jednotka: Celsiův stupeň = °C.

Přístroje

Bod varu se měří v přístrojích, které jsou v podstatě stejné s nádobami (obr. 23,10), které byly popsány v čl. 23.1, pojednávajícím o kontrole teploměrů. Pro jiné kapaliny než pro vodu dává se přednost nádobám skleněným (též porcelánovým nebo křemenným), které mají buď jednoduchý tvar b (obr. 23,10), nebo je prostor s parou omezen dvojitou stěnou podobně jako u plechové nádoby a .

⁵⁹ 4) Pro teploty o málo nižší než 0 °C stačí do sněhu nebo rozdrčeného ledu přisypat trochu soli. Směs 22,4% NaCl a 77,6% sněhu se ochladí až na -21 °C.

60,I K měření zvýšení bodu varu roztoků je vhodný přístroj Beckmannův, jehož dva typy *a* a *b* jsou schematicky naznačeny na obr. 60.1. První typ tvoří varná trubice *T* se dvěma postranními trubičkami t_1 a t_2 . Jednou z nich se po odstranění zátky vpraví do rozpouštědla měřená látka, druhá trubička je opatřena vodním chladičem *Ch* na srážení par a otvorem *O* pro vyrovnání tlaku. Do *T* je shora nasazen Beckmannův teploměr *B* tak, aby do kapaliny zasahovala jen teploměrná nádobka. Aby se kapalina nepřehřála, je styk plamene s trubicí *T* omezen na malou plochu jejího dna a zbývající povrch je chráněn



Obr. 60,1a, b. Beckmannovy přístroje na zjišťování bodu varu.

asbestovou destičkou *d* a válcovým pláštěm *A*. Proto se též vkládají do *T* platinové nebo železné odpadky, granátky (tárovací) nebo skleněné kuličky (perly).

Druhý typ *b* je válcová nádoba (skleněná nebo porcelánová) s dvojitým pláštěm *P* a s dvěma hrdly *H* a *h*. Do vnitřního prostoru *V* se nalije rozpouštědlo a do zátky hrdla *H* se vsune přestavný teploměr *B*. Na hrdlo *h* se nasadí chladič *Ch*, v němž se srážejí páry rozpouštědla. Do dutiny pláště *P* se nalije čisté rozpouštědlo hrdlem h' , které se uzavře zátkou s chladičem *Ch'*. Kapalina ve vnitřní i vnější dutině se současně přivede do varu a tak je vlastní varná baňka *V* obklopena ochranným pláštěm stejné teploty.

60.1. Bod varu kapalin

Potřeby: Varná baňka skleněná (nebo plechová 23,10), přesný teploměr rtuťový (normální nebo se známými opravami).

Postup

1. Naplníme baňku měřenou kapalinou a zasuneme teploměr tak, aby jeho teploměrná nádobka byla v prostoru naplněném parou, nikoli v kapalině samé.

2. Není-li celé vlákno teploměru v páře, umístíme poblíž něho další teploměr, jímž měříme teplotu vyčnívajícího sloupce rtuťi.

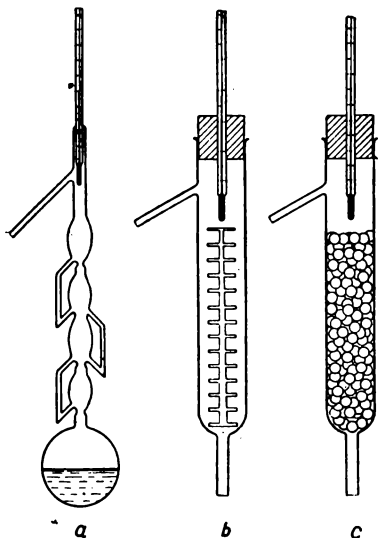
3. Dbáme, aby tlak páry v trubici nebyl vyšší než tlak okolního vzduchu b , který zjistíme na barometru a opravíme na $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ podle 22 (6).

4. Po delším klidném varu kapaliny čteme teplotu na teploměru, kterou v případě b opravíme na vyčnívající sloupec podle 23 (2).

5. Opravená teplota teploměru je bod varu Θ kapaliny při zjištěném barometrickém tlaku.

Poznámka. Je-li kapalina znečištěna látkami s vyšším bodem varu, tedy méně těkavými než sama kapalina, nasadíme na hrdlo varné baňky nejprve trubici tvaru naznačeného na obr. 60,2, která je buď naplněna skleněnými kuličkami (perlami) nebo jinak upravena, aby se na velkém povrchu ochladily páry méně těkavých příměsí a srazily. Vyrábějí se také varné baňky, u nichž se toto srážení příměsí děje v chladnějších místech stěny baňky (v trubičkách, které souvisí s vlastním prostorem naplněným horkými parami kapaliny, obr. 60,2c). Tato zařízení, která umožňují zjistit bod varu čisté kapaliny, i když je znečištěna, nazývají se deflegmátory.

60,II



60.2. Zvýšení bodu varu roztoků — měření Beckmannovým přístrojem

Bod tuhnutí roztoků je nižší než u čistého rozpouštědla (srov. 59.4), avšak naopak jeho bod varu je vyšší než bod varu Θ_0 rozpouštědla. Jeho zvýšení $\Delta\Theta$ je dáno pro zředěné roztoky neelektrolytů zákonem Raoultovým, vyjádřeným vztahy¹⁾

$$\Delta\Theta = E \frac{m}{\mu}, \quad (1)$$

$$E = \frac{RT_1^2}{1000 l_1}, \quad (2)$$

Obr. 60,2. Různé tvary deflegmátorů.

zcela obdobnými vztahům 59 (1) a 59 (2). Tedy i zvýšení bodu varu je úměrné molekulové koncentraci roztoku, dané podílem množství m (v gramech) látky rozpuštěné v 1000 g rozpouštědla a její molekulové váhy. Konstanta E se v tomto případě nazývá *ebulioskopická* a určí se podle (2) z plynové konstanty $R = 1,987 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{K}^{-1}$ $R = 8317 \text{ joule} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{K}^{-1}$ z absolutní teploty varu $T_1 = 273,15^{\circ} + \Theta_0$ rozpouštědla a z jeho skupenského tepla varu l_1 nebo z tabulek (na př. T,XV).

Potřeby: Beckmannův přístroj [60,I] typu a nebo b (obr. 60,1), přestavný teploměr [23,III].

Postup

1. Do baňky přístroje [60,I] vložíme platinové odpadky a pod. (proti přehřátí kapaliny), zčásti ji naplníme odváženým množstvím (M gramů) čistého rozpouštědla a pomalu zahříváme. Nato uvedeme v činnost chladič. Při použití přístroje typu b naplníme také vnější nádobu rozpouštědlem a uvedeme v činnost také druhý chladič Ch' .

60¹⁾ TF 4.5.2.

2. Nastavíme teploměr na vhodný rozsah podle očekávaného bodu varu a zasuneme jej tak hluboko, aby zasahoval do kapaliny jen teploměrnou nádobkou.

3. Po uplynutí několika minut od počátku varu čteme teploměr, což opakujeme několikrát, abychom zjistili, je-li jeho stav již ustálen. Je-li tomu tak, udává teploměr bod varu Θ_0 rozpouštědla.

4. Trubkou t_1 u typu *a* vpravíme do rozpouštědla známé množství m gramů měřené látky a trubku ihned zazátkujeme. U typu *b* odejmems na okamžik chladíč *Ch*, vpravíme dovnitř m' gramů látky a ihned chladíč nasadíme (jde o to, aby se koncentrace roztoku nezměnila uniknutím většího množství páry rozpouštědla).

5. Určíme zvýšený bod varu roztoku $\Theta_0 + \Delta\Theta$, jakmile se teploměr ustálí.

6. Hmotu látky, připadající na 1000 gramů rozpouštědla,

$$m = 1000 \frac{m'}{M} \text{ gramů}$$

a dosazením do (1) plyne pro molekulovou hmotu μ rozpuštěné látky

$$\mu = 1000 E \frac{m'}{M \Delta\Theta}.$$

Hodnotu E pro užitě rozpouštědlo buď vypočteme z (2), nebo ji najdeme v tabulkách (na př. v T, XV).

61. VLHKOST VZDUCHU

Definice. A. *Absolutní (prostá) vlhkost vzduchu* φ je hmota m vodní páry, obsažené v objemu V vzduchu, dělená objemem:

$$\varphi = \frac{m}{V}. \quad (1)$$

B. *Relativní (poměrná) vlhkost vzduchu* φ_r za dané teploty je poměr hmoty m vodní páry obsažené ve vzduchu ke hmotě M vodní páry, kterou by byl týž objem vzduchu za dané teploty nasycen:

$$\varphi_r = \frac{m}{M}. \quad (2)$$

Napětí vodních par ve vzduchu je úměrno počtu molekul H_2O , obsažených v jednotce objemové, a proto můžeme psát také

$$\varphi_r = \frac{e}{E}, \quad (3)$$

kde e je skutečné napětí vodních par ve vzduchu a E je napětí nasycených vodních par za dané teploty. Označíme-li konečně značkou Φ absolutní vlhkost vzduchu při nasycení vodními parami za dané teploty, bude podle (1)

$$\Phi = \frac{M}{V}.$$

Tedy

$$\varphi_r = \frac{\varphi}{\Phi}, \quad (4)$$

kde Φ je největší možná absolutní vlhkost vzduchu dané teploty.

Jednotky. A. Absolutní vlhkost se měří v jednotkách MKSA [φ] = $= \text{kg m}^{-3} = 10^3 \text{ g m}^{-3} = 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, ale častěji v jednotkách

$$\text{g m}^{-3} = 10^{-3} \text{ kg m}^{-3} = 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}, \quad (5)$$

takže *absolutní vlhkost je číselně rovna počtu gramů vodní páry v krychlovém metru vzduchu.*

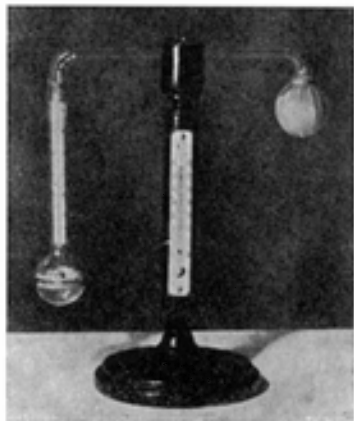
B. Relativní vlhkost jako bezrozměrná veličina se vyjadřuje buď *pouhým číslem* (≤ 1), nebo v procentech; v posledním případě píšeme podle (2) až (4)

$$\varphi_r = 100 \frac{m}{M} \% = 100 \frac{e}{E} \% = 100 \frac{\varphi}{\Phi} \% . \quad (6)$$

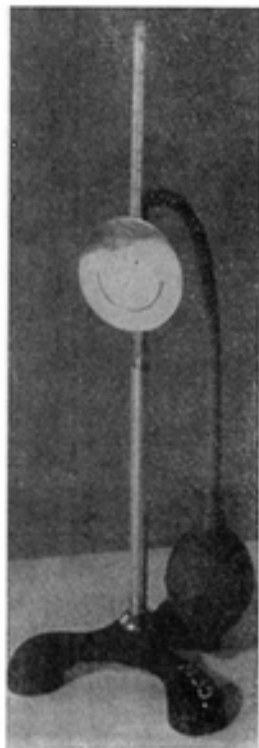
Přístroje

Pro měření poměrné vlhkosti vzduchu byla sestrojena řada přístrojů zvaných *vlhkoměry (hygrometry)*, z nichž uvedeme nejdůležitější.

Rosný vlhkoměr je přístroj, kterým se zjišťuje *rosný bod*, to jest teplota, při níž se páry obsažené ve vzduchu stávají nasycenými, tedy se právě začínají srážet. Dva druhy těchto přístrojů jsou patrný ze snímků 61. Všem je společné ochlazování lesklé plošky odpařováním etheru, na níž se dosažení rosného bodu prozradí slabým zamžením. U staršího hygrometru *Daniellova* (obr.61,1) se kape ether na povrch duté skleněné koule, obalené mušelinem. Jeho odpařováním



Obr. 61,1. Rosný vlhkoměr *Danielův*.

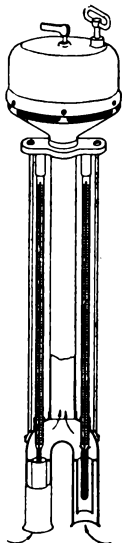


Obr. 61,2. Rosný vlhkoměr *Lambrechtův*.

se koule ochlazuje a sráží se v ní etherové páry unikající z druhé koule (s teploměrem), která se tím ochladí až na rosný bod a lesklý (zclacený) prsteneček na jejím povrchu se zamžije. V novějším hygrometru *Lambrechtově* (obr. 61,2) vháňá se pryžovým balonkem vzduch do lesklé kovové nádoby s teploměrem, v níž se odpařuje ether až do orosení (popis měření viz 61.2).

61,II

Psychrometr s vlhkým teploměrem. Pro nepřetržitě měření relativní vlhkosti se používá (hlavně v meteorologii) vlhkoměrů, kterými se určuje ochlazení „vlhkého“ teploměru, způsobené vypařováním vody z mušelinového obalu jeho baňky. Přístroj má ovšem kromě toho i „suchý“ teploměr a k dosažení většího rozdílu čtení obou teploměrů buď oběma teploměry (navzájem pevně spojenými) ručně pohybuje (na př. udržujeme kývání), nebo je přístroj v klidu v proudícím vzduchu. Tak je tomu u *aspiračního psychrometru* (Assmann, obr. 61,3), který má nádobky obou teploměrů v krátkých dole otevřených trubkách; trubky ústí do společné trubice vedoucí k ventilátoru, jenž ssaje vzduch stálou rychlostí (2 m/s). Ukazuje se, že psychrometrický rozdíl, t. j. pokles „vlhké“ teploty t' proti „suché“ teplotě t , je úměrný rozdílu napětí E' nasycených par při teplotě t' a skutečného napětí par e (dělenému barometrickým tlakem b torů), což vede k empirickému vzorci¹⁾



Obr. 61,3.

Assmannův aspirační psychrometr.

$$\varphi_r = \frac{E' - Ab(t - t')}{E}; \quad (7)$$

E je napětí nasycených par za suché teploty t a A je konstanta, která má hodnotu 0,000 66 (pro Assmannův psychrometr) až 0,000 80. Lépe je použít přímo tabulek, které bývají připojeny k psychrometru. Vzhledem k malé přesnosti měření lze se často spokojit jednoduchým přibližným vzorcem (pro střední tlak vzduchu)

$$\varphi = \Phi' - 0,64(t - t'), \quad (8)$$

kde φ je hledaná absolutní vlhkost a Φ' vlhkost vzduchu nasyceného parami při vlhké teplotě t' (v g/m^3), kterou najdeme v tabulce T, XI. Poměrnou vlhkost φ_r dostaneme z φ podle (4)

dělením absolutní vlhkostí Φ vzduchu nasyceného vodní parou za suché teploty. Psychrometr lze použitím odporových teploměrů [23, VII] upravit jako *samopisný (registrační) vlhkoměr* (Behr 1926).

61,III

Vlasový vlhkoměr je založen na hygroscopické vlastnosti odtučněného vlasu prodlužovat se s přibývajícím vlhkostí vzduchu. Změny délky mírně napjatého vlasu se přenášejí na ručku, která ukazuje na empirické stupnici poměrnou vlhkost v procentech. Chceme-li vlasovým hygrometrem získat jen trochu spolehlivé hodnoty, musíme ověřit aspoň oba krajní body stupnice $\varphi = 0\%$ a 100% . Pro všechny přístroje lze použít tohoto způsobu: Poklopíme přístroj skleněným zvonem tak, aby byl neprodyšně uzavřen (zabroušený recipient, na okraji natřený vaselinou, přitiskneme na rovnou desku nebo na pryžovou podložku) a postupujeme takto:

Pro ověření bodu 100% postavíme pod zvon vedle vlhkoměru misku (káďinku) s vodou, pro ověření bodu 0% nádobu s koncentrovanou kyselinou sírovou. Obě čtení provedeme po úplném ustálení ukazatele. Kontrola nulového bodu se u některých hygrometrů nedoporučuje, ježto se mohou úplným vysušením vlasu poškodit. Vlasový vlhkoměr je třeba pro přesnější měření přezkoušet v celém rozsahu a sestavit *tabulku oprav*. To lze provést buď srovnáním

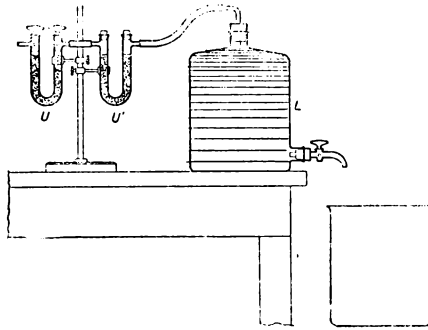
s přesným hygrometrem, nebo uvedeným postupem, postavíme-li pod zvon nádobu s ředěnou kyselinou sírovou, na jejíž koncentraci k závisí relativní vlhkost vzduchu φ , pod zvonem podle této tabulky:

k	0	10	20	30	40	50	60	70	80 % H_2SO_4
φ	100	95	87	76	57	35	18	7	2 %

Kapalinu je třeba dobře promíchat a vyčkat ustálení hygrometru.

61.1. Absolutní vlhkost — měření vážením pohlcené vodní páry

Absolutní vlhkost určíme nejpřesněji *přímou metodou*, při níž zjistíme množství vodní páry m , obsažené ve známém objemu V vzduchu, a dosadíme do (1). Měření uspořádáme podle obr. 61,4. Dvě skleněné trubice U a U' tvaru U naplníme hygroskopickou látkou (nejčastěji drobnými kousky chlo-



Obr. 61,4. Zařízení na měření absolutní vlhkosti.

ridu vápenatého $CaCl_2$ nebo P_2O_5 , nebo i koncentrovanou kyselinou sírovou, již doplníme trubici naplněnou skleněnými perličkami pro zvýšení povrchu kyseliny). První trubice U budiž na obou stranách uzavřena zabroušenými kohoutky. Při měření jsou obě trubice spojeny za sebou, takže vzduch nassávaný vodou vytékající z několikolitrové láhve L do podstavené nádoby N prochází nejprve trubicí s kohoutky U a pak trubicí U' , spojenou skleněnou trubičkou s prostorem nad vodní hladinou v láhvi L .

Aby veškerá vodní pára mohla být v trubicí U pohlcena, upravíme (kohoutem nebo tlačkou) spodní otvor láhve tak, aby voda jen odkapávala. Trubice U' je zařazena mezi U a L , aby vodní páry z láhve nevníkaly do trubicí U .

Potřeby: Dvě trubice tvaru U s vysoušecí látkou, několikolitrová láhev, stejně velká nádoba, skleněná a kaučukové trubice, analytické váhy [25, V; VI], hrubé váhy asi do 10 kg, stojany.

Postup

1. Naplníme láhev L vodou, zjistíme váhu (M_1 gramů) prázdné nádoby N a sestavíme aparaturu podle obr. 61,4.

2. Zvážíme trubicí U s vysoušecí látkou (s uzavřenými kohoutky) na analytických vahách postupem 30.2 nebo 30.3 na 0,1 mg (m_1). Ačkoliv jde o absolutní zjištění hmoty, není třeba vzhledem k malé poměrné přesnosti měření vlhkosti vážít absolutně a také neopravujeme výsledek na vztlak vzduchu.

3. Zváženou trubici U připevníme na stojan a spojíme s trubicí U' . Nato otevřeme oba kohoutky a necháme odkapávat vodu do nádoby N .

4. Čteme teplotu místnosti t (kterou potřebujeme k určení poměrné vlhkosti).

5. Když se láhev téměř vyprázdní, uzavřeme nejprve výtok vody z láhve L a odstavíme nádobu N , načež ihned uzavřeme oba kohoutky trubice U .

6. Zjistíme hmotu M_2 nádoby N s vyteklou vodou (na gramy).

7. Zvážíme znovu na analytických vahách trubicí U — se zavřenými kohoutky — stejně jako v 2 (hmota m_2).

8. Vypočteme hmotu vodní páry v gramech:

$$m = m_2 - m_1.$$

9. Vypočteme objem V vzduchu prošlého trubicí; dostaneme jej v cm^3 s dostatečnou přesností jako hmotu vyteklé vody v gramech:

$$V = \frac{M_2 - M_1}{S_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{M_2 - M_1}{g} \text{ cm}^3.$$

10. Absolutní vlhkost je tedy podle (1) vzhledem k (5)

$$\varphi = \frac{m}{V} = \frac{m_2 - m_1}{M_2 - M_1} \text{ g/cm}^3 = 10^6 \frac{m_2 - m_1}{M_2 - M_1} \text{ g/m}^3, \quad (9)$$

kde všechny hmoty jsou v gramech.

11. Relativní vlhkost podle (4)

$$\varphi_r = \frac{\varphi}{\Phi} = 100 \frac{\varphi}{\Phi} \%, \quad (10)$$

kde Φ je hmotu nasycené vodní páry, obsažené v 1 m^3 vzduchu teploty t , kterou vyhledáme v T,XI.

Příklad. Byla měřena vlhkost při $18,3^\circ\text{C}$.

Vážením zjištěno $m_1 = 63,1952 \text{ g}$, $m_2 = 63,2255 \text{ g}$, tedy množství pohlcené páry $m = 0,0303 \text{ g}$. Váha prázdné nádoby $M_1 = 227 \text{ g}$, s vyteklou vodou $M_2 = 5918 \text{ g}$, takže objem prošlého vzduchu byl $V = 3642 \text{ cm}^3$ a podle (9) absolutní vlhkost $\varphi = \frac{0,0303}{3642} \text{ g/cm}^3 = 8,32 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3 = 8,32 \text{ g/m}^3$. V T,XI najdeme interpolaci pro $t = 18,3^\circ\text{C}$

$$\Phi = 15,7 \text{ g/m}^3, \text{ takže podle (10) } \varphi_r = 0,53 = 53\%.$$

61.2. Poměrná vlhkost — měření rosným vlhkoměrem

Rosnými vlhkoměry [61,I] se zjišťuje teplota τ , při níž se páry obsažené ve vzduchu stanou nasycenými. Najdeme-li v tabulce T,XI napětí E_τ páry, kterou je vzduch nasycen při teplotě τ , určíme zároveň napětí e vodní páry za daných poměrů skutečně ve vzduchu obsažené, neboť ochlazením se tlak vzduchu v okolí vlhkoměru nezmění; totéž platí o parciálním tlaku vodní páry. Zjistíme-li tedy v T,XI napětí nasycené páry E_τ pro rosný bod, známe také e a podle (3) relativní vlhkost²⁾

$$\varphi_r = \frac{e}{E_t} = \frac{E_\tau}{E_t} = 100 \frac{E_\tau}{E_t} \%, \quad (11)$$

kde E_t je napětí nasycených par při teplotě místnosti t ; zjistíme je rovněž v T,XI.

61²⁾ Určovat φ_r na základě rovn. (4) by bylo složitější, neboť ochlazením vzduchu těsně u měřicí plochy hygrometru vzroste jeho hustota (ježto tlak se nezmění) v poměru $\lambda = \frac{273,15 + t}{273,15 + \tau}$.

Ačkoli se tedy (před počátkem orosení) nezmění množství vodní páry ve vzduchu, připadá na 1 m³ ochlazeného vzduchu, který vznikne z většího objemu teplejšího vzduchu, také větší počet gramů vodní páry — takže tento vzduch má větší absolutní vlhkost. Kdybychom tedy chtěli počítat φ_r z rovnice (4), museli bychom poměr $\frac{\Phi_r}{\Phi_t}$ dělit λ , čímž bychom dostali ovšem stejnou hodnotu pro φ_r jako podle rovn. (11), která je jednodušší.

Potřeby: Rosný hygrometr [61,I], ether.

Postup

1. Čteme teplotu místnosti t na přístroji nebo poblíž přístroje.
2. Naplníme nádobku přístroje malým množstvím etheru a vhnáme do ní vzduch, pozorujeme teploměr nádobky. Přitom hledíme na lesklou plošku přístroje tak, aby se v ní zrcadilo okno (aby se leskla) nebo světlo slabé žárovky (svíčky), a dbáme, abychom nejen na plošku snad nedýchali, ale byli vůbec co nejdále od přístroje (jednak bychom skreslovali měření, jednak bychom vdechovali etherové páry). Nejlépe je pozorovat skleněnou deskou postavenou svise před vlhkoměr.
3. Jakmile se počne ploška kalit, přestaneme s ochlazováním a čteme ihned teplotu, kterou zjistíme po druhé v okamžiku, kdy zamžení plošky úplně zmizí. Pamatujeme si průměr obou teplot.
4. Měření opakujeme a zmírníme ochlazování, jakmile se teploměr přiblíží prve zjištěné teplotě orosení. Při prvním náznaku zamžení ustaneme v odpařování etheru a čteme teplotu; při úplném vyjasnění měřicí plošky opakujeme čtení. Několikerým opatrným ochlazením se nám podaří získat počáteční a konečnou teplotu, lišící se jen v desetínách stupně; průměr obou pokládáme za rosný bod τ .
5. Opakujeme čtení teploty místnosti t .
6. Najdeme v T,XI hodnoty E_r , E_t a dosazením do (11) vypočteme relativní vlhkost při teplotě místnosti.
7. Pro zjištění absolutní vlhkosti by bylo třeba najít v T,XI maximální vlhkost Φ_t pro teplotu t a dosadit do rovnice (4) nebo (6):

$$\varphi = \varphi_r \Phi_t \text{ g/m}^3 = \frac{\varphi_r \%}{100} \Phi_t \text{ g/m}^3. \quad (12)$$

Příklad. Byla měřena vlhkost Lambrechtovým vlhkoměrem při 19,6 °C.

Opakovaným určením rosného bodu byla nalezena teplota při počátku zarosení $\tau' = 8,0$ °C a při jeho vymizení $\tau'' = 8,2$ °C, tedy rosný bod $\tau = 8,1$ °C. Interpolací v T,XI nalezeno $E_r = 8,06$ tor, $E_t = 17,1$ tor, tedy relativní vlhkost $\varphi_r = \frac{8,06}{17,1} = 0,47 = 47\%$.

Dále bylo nalezeno v T,XI $\Phi_t = 16,9$ g/m³, takže absolutní vlhkost

$$\varphi = 0,47 \cdot 16,9 \text{ g/m}^3 = 7,9 \text{ g/m}^3.$$

62. SCHEMATICKÉ ZNAČKY A ZÁKLADNÍ VZTAHY

62.1. Schematické značky

Při schematickém znázorňování elektrických zapojení se nejčastější zařízení označují jednoduchými grafickými značkami. Ve všech schemech budeme používat důsledně značek uvedených v přehledné tabulce (62,I).

62.2. Základní vztahy

v jednotkách MKSA podle 6.6.2.

Náboj kondensátoru Q (coulombů) je roven součinu jeho kapacity C (faradů) a potenciálového rozdílu V (voltů):

$$Q = CV. \quad (1)$$

Ohmické napětí U (voltů) na vodiči je rovno součinu jeho odporu R (ohmů) a stejnosměrného stálého proudu I (ampérů)

(Ohmův zákon):
$$U = RI. \quad (2)$$

Výkon P (wattů) stejnosměrného proudu je dán součinem napětí U (voltů) na vodiči a proudu I (ampérů)

(Joulův zákon):
$$P = UI = RI^2. \quad (3)$$

Stálý stejnosměrný proud I (ampérů), protékající kruhovým vodičem poloměru R (m), vzbuzuje podle 3 (12) ve středu vodiče magnetické pole H (Am^{-1}), rovné ve všech prostředích

(Biot-Savartův zákon):
$$H = \frac{I}{2R}. \quad (4)$$

Chemický kilogramekvivalent χ kterékoliv látky přenese při elektrolyse totéž množství náboje $F = 9,652 \cdot 10^7$ coulombů, to znamená

(Faradayův elektrolytický zákon):
$$\frac{M}{\chi} = \frac{Q}{F}, \quad (5)$$

kde M je množství látky (v kilogramech), Q vyloučený náboj (v coulombech) a χ značí *chemický kilogramekvivalent* látky, t. j. kilogramatom (u radikálů kilogrammolekulu) dělený mocenstvím.

Tabulka 62, I. Tabulka schematických značek

	vodiče v elektrickém dotyku		tangentová busola
	vodiče bez dotyku (isolované)		sluchátka, telefon
	klíč (spínač)		žárovka
	přepínač		odpor, reostat
	komutátor		posuvný odpor, potenciometr
	zdfka (svorka)		kolíčkový reostat
	uzemnění		odporová nádobka
	zdroj stejnosměrného proudu		kondensátor (kapacita)
	zdroj střídavého proudu		otočný kondensátor
	článek, akumulátor		sada kondensátorů
	baterie článků, akumulátorů		elektrometr
	bzučák, induktor		coulometr (voltametr)
	měřicí přístroj		cívka (indukčnost)
	galvanoměr		cívky induktivně spřažené
	ampérmetr		transformátor
	miliampérmetr		dioda: A anoda K katoda
	voltmetr		trioda: A anoda K katoda M mřížka
	milivoltmetr		
	wattmetr		

Indukční tok Φ (weberů = Vs = 10^8 maxwellů), který posílá vodič svou vlastní plochou, je roven součinu jeho indukčnosti L (henryů) a proudu I (ampérů):

$$\Phi = LI. \quad (6)$$

Elektromotorická síla \mathcal{E}_i (voltů), indukovaná v uzavřeném vodiči, rovná se časovému poklesu indukčního toku Φ (weberů) plochou vodiče

(Faradayův indukční zákon):
$$\mathcal{E}_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad (7)$$

je-li vyjádřen tok Φ v maxwellech, je třeba pravou stranu dělit 10^8 , aby \mathcal{E}_i vyšlo ve voltech.

Efektivní napětí U (voltů) střídavého (sinového, harmonického) proudu je rovno součinu zdánlivého odporu neboli *impedance* Z (ohmů) a efektivního proudu I (ampérů):

$$U = ZI, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (8)$$

kde $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence proudu, R ohmický odpor, L (henryů) indukčnost a C (faradů) kapacita vodiče.

Střední výkon P (wattů) střídavého proudu je roven součinu efektivního napětí U (voltů), efektivního proudu I (ampérů) a účinniku $\cos \varphi$

$$P = UI \cos \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (9)$$

kde φ je fázové zpoždění proudu za napětím.

Obecně platí pro ustálené proudy v libovolné vodivé síti tyto dva zákony Kirchhoffovy, které jsou důsledkem *Ohmova* zákona (2) a samozřejmých předpokladů, že elektřina se nikde nehromadí a že potenciál je všude jednoznačný:

A. *Součet proudů I_k vstupujících do libovolného bodu sítě je rovný součtu proudů I_i z něho vystupujících:*

$$\Sigma I_k = \Sigma I_i. \quad (10)$$

B. *Součet ohmických napětí v uzavřeném kruhu sítě je roven součtu elektromotorických sil \mathcal{E}_i všech zdrojů v něm zapjatých:*

$$\Sigma R_k I_k = \Sigma \mathcal{E}_i. \quad (11)$$

Z těchto zákonů plynou pro dva důležité případy řadového a bočního spojení vodičů tyto výsledky:¹⁾

Vodiče v řadovém spojení (za sebou, v serií — obr. 62,1) o odporech R_k ($k = 1, 2, \dots$) mají výsledný odpor R rovný součtu odporů:

$$R = \Sigma R_k. \quad (12)$$

Výsledné napětí U je rovno součtu napětí U_k na jednotlivých odporech,

$$U = \Sigma U_k, \quad (13)$$

a je na ně rozděleno v poměru odporů:

$$U_k : U_l = R_k : R_l, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Proudy I_k jsou ve všech vodičích stejné a rovné výslednému proudu

$$I = I_k = I_l = \dots \quad (15)$$

Vodiče v bočním spojení (vedle sebe, paralelně, souběžně — obr. 62,2) mají výslednou vodivost $1/R$ rovnu součtu vodivostí $1/R_k$, tedy sčítají se převrácené odpory:

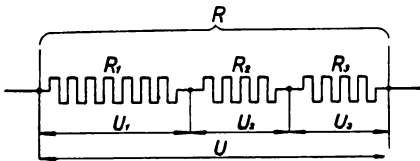
$$\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_k}. \quad (16)$$

Napětí U_k jsou na všech vodičích stejná a rovná výslednému napětí:

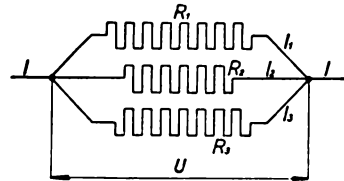
$$U = U_k = U_l = \dots \quad (17)$$

Výsledný proud I je roven součtu proudů I_k v jednotlivých větvích:

$$I = \Sigma I_k \quad (18)$$



Obr. 62,1. Vodiče v řadovém spojení.



Obr. 62,2. Vodiče v bočném spojení.

$$\frac{C_1}{Q} \parallel \frac{C_2}{Q} \parallel \frac{C_3}{Q}$$

$$\frac{C_1}{Q_1} \parallel \frac{C_2}{Q_2} \parallel \frac{C_3}{Q_3}$$

Obr. 62,3. Kondensátory v řadovém spojení. Obr. 62,4. Kondensátory v bočném spojení.

a je rozdělen v poměru vodivosti (převrácených odporů):

$$I_k : I_l = \frac{1}{R_k} : \frac{1}{R_l} \quad (19)$$

Snadno pochopíme, že pro spojování kondensátorů (viz obr. 62,3 a 62,4) platí obdobné vztahy jako pro spojování vodičů, píšeme-li rovnici (2) ve tvaru

$$I = \frac{1}{R} U,$$

který se liší od (1) tím, že proud nahrazuje náboj a že převrácený odpor (vodivost) je na místě kapacity, kdežto V a U jsou rozdíly potenciálů a napětí. Klademe-li tedy ve vztazích (11) až (18) $1/C$ za R , Q za I a V za U , dostaneme příslušné rovnice pro kondensátory. Všechny tyto výsledky dají se shrnout takto:

Při řadovém spojení vodičů (kondensátorů) se sčítají odpory (převrácené kapacity) a napětí; jsou navzájem úměrné. (20)

Všemi vodiči prochází stejný proud (všechny kondensátory mají stejný náboj).

Při bočném spojení vodičů (kondensátorů) se sčítají převrácené odpory (kapacity) a proudy (náboje) a jsou si úměrné.

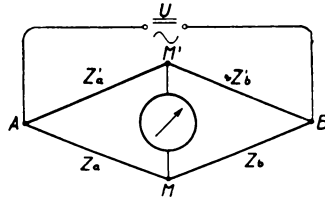
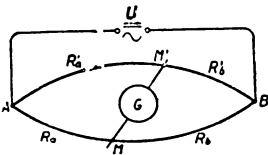
Na všech vodičích (kondensátorech) je totéž napětí (týž potenciální rozdíl).

62.3. Můstkové zapojení

Pro měření odporů, kapacit a indukčností je důležité t. zv. můstkové zapojení.

Jednoduchý (Wheatstonův) můstek (obr. 62,5 a 62,6).

Body A, B , na které vložíme stejnosměrné (nebo střídavé) napětí U , buďte spojeny dvěma vodiči o ohmických odporech R, R' , kapacitách C, C' a vlastních indukčnostech L, L' . Jejich impedance (zdánlivé odpory), dané druhou rovnicí (8), necht' jsou Z, Z' . Předpokládejme nejprve nejjednodušší případ, že oba tyto vodiče jsou prostě dráty, u nichž lze závorku pod odmocninou v (8) pominout, takže $Z = R, Z' = R'$. Pak potenciál v každém z nich přechází spojitě z hodnoty V_A v A k hodnotě V_B v B a ke každému místu M na jednom vodiči lze najít na druhém odpovídající místo M' , které má stejný potenciál: $V_{M'} = V_M$.



Obr. 62,5. Princip můstkového spojení. Obr. 62,6. Jednoduchý (Wheatstonův) můstek.

Spojíme-li taková dvě místa dalším vodičem, nebude jím procházet proud, což můžeme zjistit měřicím přístrojem (na př. galvanoměrem). Tento vodič, kterým jsme „přemostili“ oba původní vodiče, nazývá se můstek; dělí oba vodiče na části, které mají odpory R_a, R_b a R'_a, R'_b . Mezi body A, M, B a A, M', B jsou podle (14) napětí úměrná odporům:

$$U_a : U_b = R_a : R_b; \quad U'_a : U'_b = R'_a : R'_b. \quad (21)$$

Je-li však můstek bez proudu, pak

$$U_a = V_A - V_M = V_A - V_{M'} = U'_a$$

a stejně

$$U_b = U'_b,$$

takže podle (21)

$$R'_a : R'_b = R_a : R_b \quad (22)$$

nebo též

$$R'_a : R_a = R'_b : R_b. \quad (23)$$

Tedy bezproudový můstek dělí odpory obou vodičů v téměř poměru.

Z přehledných výsledků čl. 62.2 snadno pochopíme, že předešlá věta platí nejen pro ohmické odpory, ale i pro impedance (8), t. j. pro zdánlivé odpory vodičů s kondensátory a indukčními cívkami. Utvoříme-li pak můstkové spojení podle obr. 62,6, při němž na koncích M a M' můstku je stejný potenciál, bude podle hořejší věty

$$Z'_a : Z'_b = Z_a : Z_b \quad (24)$$

čili

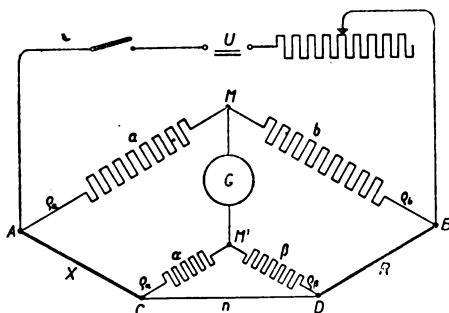
$$Z'_a : Z_a = Z'_b : Z_b. \quad (24')$$

Při bezproudovém můstkovém zapojení jsou impedance vodičů přilehlých k oběma koncům můstku ve stejném poměru. (25)

Toho lze použít k srovnávání zdánlivých odporů a za vhodných podmínek i k srovnávání ohmických odporů (71.3; 4), kapacit 65.2 nebo indukčností 77.2.

Můstkové metody založené na větě (25) nedávají dosti přesné výsledky, jde-li o měření malých odporů, proti nimž nelze pomíjet neznámé odpory přívodních drátů a dotyků. Tuto nevýhodu nemá

dvojitý (Thomsonův, Kelvinův) můstek, který je schematicky naznačen na obr. 62,7. Označme R_g odpor galvanoměru, I_g proud jím procházející od M k M'



Obr. 62,7. Schema dvojitého Kelvinova můstku.

a proudy jednotlivými odpory označme I s příslušnými indexy. Počítáme-li všechny proudy kladně od A k B , bude podle druhého zákona Kirchhoffova (11)

$$\left. \begin{aligned} XI_X + \alpha I_\alpha - R_g I_g - a I_a &= 0, \\ RI_R - b I_b + R_g I_g + \beta I_\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Volíme-li nyní poměr odporů a , b a α , β stejný,

$$a : b = \alpha : \beta, \quad (27)$$

a odpor R takový, aby můstek $M M'$ byl bez proudu, pak podle zákona (10)

$$I_g = 0, I_a = I_b, I_\alpha = I_\beta, I_X = I_\alpha' + I_n = I_\beta + I_n = I_R.$$

Dosazením do (26) dostaneme nejprve

$$XI_X + \alpha I_\alpha - a I_a = 0, \quad RI_X + \beta I_\alpha - b I_a = 0,$$

odkud

$$\frac{X}{a} I_X + \frac{\alpha}{a} I_\alpha = I_a = \frac{R}{b} I_X + \frac{\beta}{b} I_\alpha,$$

takže vzhledem k (27)

$$\frac{X}{a} = \frac{R}{b}$$

čili

$$X : R = a : b = \alpha : \beta. \quad (28)$$

Ze známého odporu R a známého poměru (27) můžeme tedy vypočítat neznámý odpor X .

Přednost *Kelvinova* zapojení je v tom, že i při měření malých odporů můžeme volit čtyři odpory a, b, α, β dosti velké, aby se daly proti nim pominout odpory $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_\alpha, \varrho_\beta$ přívodních drátů a dotyků. Přitom není na závadu, že nelze pomíjet odpor n proti X a R , neboť tento odpor nemá vliv na průchod proudu galvanoměrem. Praktické provedení viz [71, VIII].

63. POTENCIÁL (ELEKTROSTATICKÝ)

Definice. Potenciál V v daném místě elektrostatického pole je potenciální energie W_p , náboje Q , dělená nábojem:

$$V = \frac{W_p}{Q}. \quad (1)$$

Potenciální rozdíl mezi dvěma místy A, B je tedy roven práci potřebné k přenesení náboje z B do A , dělené nábojem.¹⁾

Jednotky. MKSA (praktická) volt (absolutní) = 1 V = 10⁻³ kV =

$$= \frac{1}{300} [V]_{as} = 10^8 [V]_{am}. \quad (2)$$

Absolutní jednotky:

elektrostatická $[V]_{as} = \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$,

elektromagnetická $[V]_{am} = \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}$. (3)

Mezinárodní jednotka: int. volt = 1 V_i = 1,000 34 V. (4)

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Přístroje, jimiž se měří potenciál (vlastně rozdíl potenciálů), nazývají se elektrometry.

63,I Základní význam mají absolutní elektrometry, které měří potenciální rozdíl mezi dvěma deskami na základě elektrostatické síly, kterou se desky přitahují. Tato síla souvisí s potenciálním rozdílem vztahem²⁾

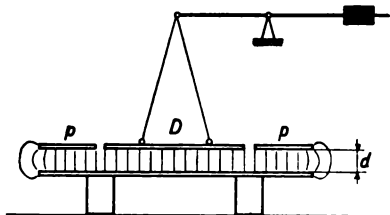
$$F = \frac{\varepsilon V^2}{2 d^2} S = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 S}{2 d^2}, \quad (5)$$

v němž S je plocha jedné z desek, d jejich vzdálenost, ε absolutní a ε_r poměrná dielektrická konstanta izolantu mezi deskami a ε_0 absolutní dielektrická konstanta vakua. Vztah (5) platí ovšem jen tehdy, je-li elektrické pole mezi deskami stejnorodé, což je velmi přibližně splněno při deskách rovnoběžných s výjimkou míst blíže k okraji. Proto mají takové elektrometry ochranné prstence, jak je vidět na obr. 63,1, který představuje nejstarší absolutní elektrometr (*W. Thomson* 1867), zvaný též *Kelvinovy váhy*. Kruhová deska D , zavěšená na torsních vahách, je chráněna pevným prstencem p , nabitým na stejný potenciál

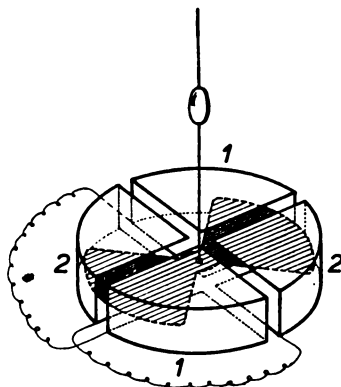
63¹⁾ TF 5.2.5.

63²⁾ TF 5.4.4.

V jako deska sama. Siločáry naznačují, že pole je deformováno jen na vnějším okraji prstence, takže pro desku samu platí vzorec (5) s dostatečnou přesností, vezmeme-li ovšem opravu na konečnou šířku mezery mezi deskou a prstencem. Je-li tato šířka malá proti vzdálenosti d desek, provede se oprava podle *Maxwella* tak, že se plocha desky zvětší o polovinu plochy mezery. Předpokládá se, že vlastní měřicí deska je přesně v rovině prstence, což se zaručí tím, že se poloha prstence p mikrometrickými šrouby upraví tak, aby byl v rovině desky, když torsní váhy jsou přesně v nulové poloze. Váhy se cejchují přesnými závažími. Vzorec (5) dává potenciál U v jednotkách MKSA, které můžeme přepočítat na internacionální volty podle (4).



Obr. 63,1. Kelvinovy váhy.



Obr. 63,2. Měřicí orgán kvadrantového elektrometru.

Na stejném principu sestrojil *Palm* (1920) absolutní elektrometr pro napětí až 300 kV, v němž užil jako izolantu mezi deskami dusíku stlačeného na 12 atm. Různé tvary absolutních elektrometrů byly sestrojeny na podobných principech; měří se přitahování dvou koulí, válců nebo i přitažlivá síla mezi vodorovnou deskou a hladinou rtuti (*Barus* 1921). Popsané elektrometry dávají přesné výsledky jen pro dosti velká napětí (řádu asi 10^2 V). Pro přesná měření menších potenciálů je vhodný klasický přístroj, t. zv.

kvadrantový elektrometr (*W. Thomson* 1855), který byl později zdokonalován a upravován pro zvýšení citlivosti a přesnosti měření. Uvnitř válcové krabice, složené ze 4 kvadrantů, visí na jemném vodivém vlákne plochá „jehla“ tvaru dvou čtvrtkruhových výsečí (obr. 63,2). Má-li jehla potenciál V a dvojice dvou protilehlých kvadrantů různé potenciály V_1 a V_2 , bude na jehlu působit otáčivý moment, který určíme takto: Energie kondensátoru⁹⁾ tvořeného jehlou a dvojicí kvadrantů I

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 (V - V_1)^2,$$

kde C_1 je kapacita tohoto kondensátoru, která ovšem závisí na úhlu otočení jehly ze souměrné polohy ke kvadrantům. Za daných poměrů bude její změna úměrna tomuto úhlu, takže lze psát

$$C_1 = C_0 + a\varphi.$$

Při malé změně $d\varphi$ vzroste energie o práci vykonanou otáčivým momentem M_1 , tedy

$$dW_1 = \frac{1}{2} a d\varphi (V - V_1)^2 = M_1 d\varphi,$$

takže

$$M_1 = \frac{a}{2} (V - V_1)^2.$$

Stejný výsledek platí ovšem pro druhou dvojici kvadrantů s tím rozdílem, že otočení $d\varphi$ má pro druhý kvadrant opačné znaménko (kapacita se zmenší). Tedy celkový moment působící na jehlu

$$M = M_1 + M_2 = \frac{a}{2} [(V - V_1)^2 - (V - V_2)^2].$$

Je-li nyní jehla zavěšena na vlákně, které se podle 42 (19) brání zkrutu dvojicí $D_0 = -K\varphi$, ustálí se jehla v poloze α , dané podmínkou $D_0 + M = 0$. Pak po snadné úpravě dostaneme

$$\alpha = \frac{a}{K} (V_2 - V_1) \left[V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right], \quad (6)$$

kde konstanta a značí kapacitu jehly a kvadrantů, příslušnou ploše výseče o jednotkovém úhlu (radiánu), a K je konstanta závěsného vlákna [daná výrazem 42 (20)].

Předpoklady, za nichž byla rovnice (6) odvozena, nejsou ovšem naprosto přesně splněny (už proto, že souměrnost není dokonalá), a proto je třeba jistých korekcí.

Nejčastěji se měřený potenciál v vkládá na jednu dvojici kvadrantů ($V_2 = v$), druhá se spojí se zemí ($V_1 = 0$) a jehla se nabije na vysoký potenciál (na př. 100 V). Pak plyne z (6)

$$\alpha = \frac{a}{K} v \left(V - \frac{v}{2} \right) \doteq \text{const} \cdot v. \quad (7)$$

Tedy pro potenciály v malé proti V je při tomto *kvadrantovém spojení* výchylka jehly velmi přibližně úměrná měřenému potenciálu. Výchylka se měří zrcátkovou methodou (obr. 20,3).

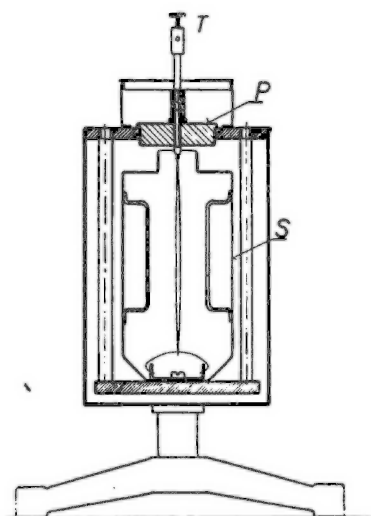
Vhodnou úpravou kvadrantového elektrometru lze dosáhnout značné citlivosti. Tak na př. *Compton* (1919) nahradil obvyklou hliníkovou jehlu platinovanou jehlou slídovou průměru asi 10 mm, zavěšenou na tenounkém křemenném vlákně, rovněž platinovaném. Citlivost se dá na jeho přístroji měnit svislým posunem jednoho kvadrantu. Běžně lze jím dosáhnout citlivosti 0,1 mV na 1 mm (stupnice používané při zrcátkové metodě), kterou lze ještě zvýšit vhodnou úpravou. U různých typů kvadrantových elektrometrů leží citlivost asi mezi 2 mV/mm až 0,02 mV/mm (závěs: *Wollastonův* platinový drátek průměru 5 μ , vzdálenost stupnice od zrcátka 3 m).

Při praktickém měření elektrostatických potenciálů používá se jednodušších elektrometrů, z nichž popíšeme dva přístroje vláknové.

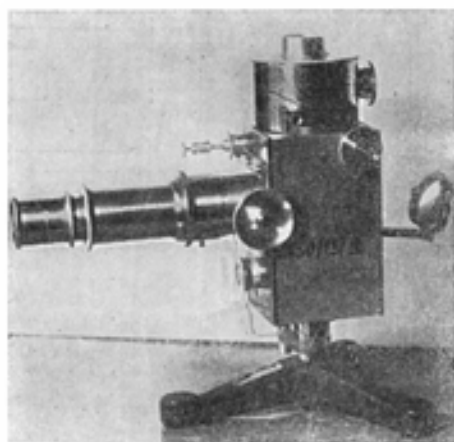
63,III

Dvouvláknový elektrometr (Wulf 1907). V ose vodivé skřínky S jsou napjata těsně vedle sebe dvě svislá tenká vodivá vlákna, izolovaná jantarovým prsten-

cem P od S . Vlákna jsou dolními konci upevněna na pružném křemenném vlákně, zahnutém do oblouku, které obě vlákna mírně napíná. Nabijeme-li obě vlákna (sdělením náboje tyčince T nebo indukci) na jistý potenciál U proti skřínce S , která může být buď uzemněna, nebo nabita na libovolný potenciál, rozestoupí se obě vlákna, jak je naznačeno na obr. 63,3. Jejich největší vzdálenost (uprostřed), a ovšem také výchylka každého z nich z původní polohy, je velmi přibližně úměrna potenciálnímu rozdílu mezi vlákny a skřínkou. Poloha vláken (uprostřed) se pozoruje drobnohledem, který má v ohniskové



Obr. 63,3. Dvouvláknový elektrometr (schema).



Obr. 63,4. Dvouvláknový elektrometr.

rovině okuláru jemně dělenou stupnicí. Ostrý obraz vlákna je dobře patrný v jasném poli, osvětleném zrcátkem umístěným vzadu. Při zvětšení asi 70násobném je citlivost přístroje obvykle několik voltů na dílek. Desetiny dílků se odhadují. Vlákna ovšem musí být co nejtenčí (několik mikronů) a zhotovují se buď z platinovaného vlákna křemenného, nebo z prve zmíněného *Wollastonova* drátku. U novějších druhů jsou vlákna výměnná (*Wulf* 1925). Skříňka bývá neprodyšně uzavřena. Poloha vláken se ustálí během zlomku vteřiny (srov. snímek 63,4).

Jednovláknový elektrometr je přístroj podobný předcšlému, s jediným svislým vláknem, které probíhá mezi dvěma svislými břity, které se nabíjejí na různý potenciál. Vlákno se vodivě spojí s jedním z nich, kterým je pak odpuzováno, kdežto druhý břit je přitahuje. Výchylka se pozoruje mikroskopem se stupnicí jako u [63,III]. Nejlépe se osvědčují elektrometry, jejichž vlákno je dole upevněno ke křemennému obloučku (smyčce) jako u [63,III] (*Wulf* 1914, *Lutz* 1923). Také bývá vlákno napjato mezi dvě pevné svorky (*strunový elektrometr*) nebo je konečně vlákno jen na spodním konci mírně zatíženo. Při upevnění na křemenné smyčce ustálí se vlákno i při zvýšené citlivosti velmi rychle (na př. pro platinový drátek průměru 3μ za 0,05 s při citlivosti 0,04 volt/dílek).

Vláknové elektrometry jsou velmi vhodné pro srovnávací měření, kdežto pro absolutní měření se ovšem musí cejchovat.

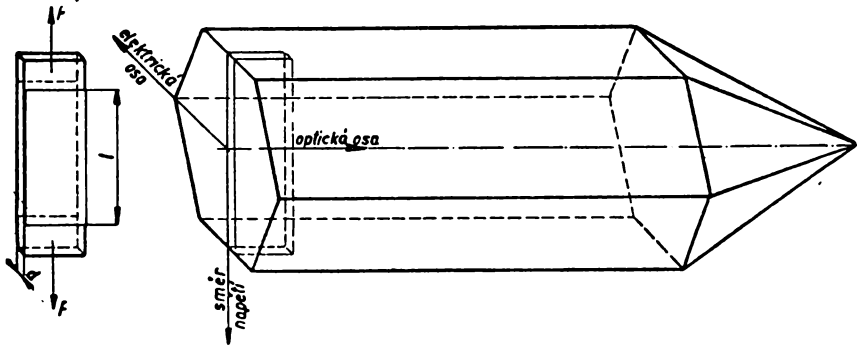
63,IV

64. N Á B O J (E L E K T R I C K É M N O Ž S T V Í)

Definice. *Záporný* náboj nabitého tělesa je dán přebytkem elektronů proti neutrálnímu stavu nenabitého tělesa.

Kladný náboj nabitého tělesa je dán množstvím elektronů, o které má těleso méně než v neutrálním stavu, kdy není nabit.

Jednotky. MKSA (praktická): coulomb = 1 C = 1 As = $3 \cdot 10^9 [q]_{as} = 10^{-1} [q]_{am}$. (1)



Obr. 64,1. Curieova destička.

Absolutní jednotky:

$$\text{elektrostatická } [q]_{as} = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}, \quad (2)$$

$$\text{elektromagnetická } [q]_{am} = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2}. \quad (3)$$

$$\text{Mezinárodní: ampérsekunda} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} = 0,9999 \text{ C}. \quad (4)$$

Přístroje

Na měření náboje používá se jednak elektrometrů (viz [63, I až IV]), jednak také t. zv. balistického galvanoměru [67, III]. Kromě toho lze použít i piezoelektrické Curieovy destičky. Je totiž známo,¹⁾ že tahem na křemennou destičku vyříznutou z krystalu, jak naznačeno na obr. 64,1, objeví se na jejích protilehlých pokovených plochách náboj: na jedné + Q, na druhé - Q, rovný

$$Q = kS\sigma,$$

kde S je plocha jednoho polepu a σ značí napětí, kterým je destička napínána ve směru kolmém k optické i k elektrické ose krystalu. Konstanta k, zvaná Curieova, udává množství náboje v C, který vznikne napětím 1 N/m² na polepu velikosti 1 m²:

$$k = 6,90 \cdot 10^{-8} [Q]_{as}/\text{dyn} = 2,30 \cdot 10^{-12} \text{ C/N}.$$

Měříme-li však sílu F, působící na destičku, v kg*, délku polepů l ve směru napětí a tloušťku destičky d v m, bude

$$S\sigma = \frac{l}{d} F, \quad Q = k^* \frac{l}{d} F \quad (5)$$

a *Curieova* konstanta v tomto případě

$$k^* = 0,0677 [Q]_{as}/kg^* = 2,26 \cdot 10^{-11} C/kg^*. \quad (6)$$

Roentgen (1913) udává pro *destičku chemicky postříbřenou* hodnotu asi o 0,6% větší:

$$k^* = 0,0681 [Q]_{as}/kg^* = 0,0227 C/kg^*. \quad (7)$$

Curieovy destičky užívá se při kompenzačních methodách měření nábojů i malých potenciálních rozdílů (na př. v radiologii).

MĚŘICÍ METODY

Náboj kondensátoru se určí podle rovnice 62(1) z potenciálního rozdílu V a kapacity C nebo vybitím kondensátoru skrze balistický galvanoměr. To jsou dvě základní metody, které stručně vyložíme.

64.1. Měření náboje elektrometrem

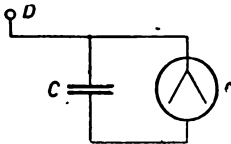
Náboj, jehož množství chceme změřit, přivedeme dotykem D na jeden pól kondensátoru, k němuž je paralelně (bočně) připojen elektrometr, jak je naznačeno na obr. 64,2. Obvykle můžeme kapacitu přívodů s dotykem pomíjet proti kapacitě C kondensátoru. Je-li c kapacita elektrometru, který ukazuje potenciální rozdíl V , platí podle 62(1) pro měřený náboj Q vztah

$$Q = (C + c) V. \quad (8)$$

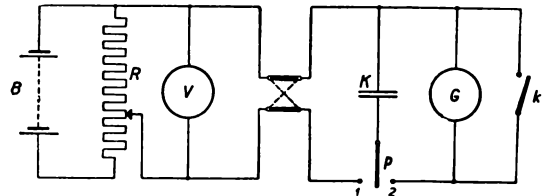
Přitom ovšem kapacita c závisí na V , což je právě podstatná vlastnost elektrometru. Proto je výhodné volit kondensátor velké kapacity C , proti níž je možno c pomíjet. Je-li na př. $c \approx 10^{-4} \mu F$, stačí volit kondensátor o kapacitě $C \approx 1 \mu F$ ($= 900\,000 \text{ cm}$) a pak je měřený náboj dán prostě součinem

$$Q = CV.$$

Je-li C sice menší, ale ještě proti kapacitě c elektrometru dosti velké, lze nechat změnu kapacity c a použít rovnice (8), kde korekční člen c zahrnuje



Obr. 64,2. Měření náboje elektrometrem.



Obr. 64,3. Graduace balistického galvanoměru.

i kapacitu přívodů, která se ovšem mění přiblížením jiných vodičů. Proto se doporučuje chránit vedení vodivým pouzdrem (na př. kovovou trubici), které uzemníme. Konstantu c pak určíme cejchováním, k čemuž uijeme náboje kondensátoru známé kapacity.

64.2. Měření náboje balistickým galvanoměrem

Balistický galvanoměr, kterým projde ve velmi krátké době náboj Q , se vychýlí, načež se ukazatel vrací do nulové polohy. Tato *balistická* (největší) výchylka β je podle 67 (8) úměrná množství prošlého náboje a obráceně lze psát podle 67 (11)

$$Q = B\beta. \quad (9)$$

Je-li známa balistická konstanta B galvanoměru, stačí nechat projít měřený náboj galvanoměrem, změřit první výchylku β a dosadit do (9).

Konstanta B se najde kalibrací (graduací) balistického galvanoměru použitím kondensátoru známé kapacity C_0 (na př. standardního kondensátoru [65,II;III]).

Potřeby: Balistický galvanoměr [67,III], standardní kondensátor [65,II; III], voltmetr [68,II], posuvný odpor (potenciometr) [68,IV] komutátor, přepínač, baterie o napětí několika set voltů.

Postup

1. Utvoříme zapojení 64.3, v němž G značí graduovaný galvanoměr, V — voltmetr na několik set voltů (pro stejnosměrný proud), K standardní kondensátor a p vybíjecí přepínač, který musí být dobře izolován a s izolovanou rukojetí.

2. Posuvným kontaktem odporu R , zapojeného jako potenciometr, odvětvíme z baterie B nejprve nižší napětí, jehož velikost U čteme na voltmetru. Na toto napětí nabijeme kondensátor K dotykem páčky přepínače s kontaktem 1, načež ihned jej (kontaktem 2) vybijeme přes galvanoměr G a čteme balistickou výchylku. Galvanoměr utlumíme uzavřením bočního okruhu klíčem k .

3. Klíč k opět otevřeme, přepneme komutátor tak, aby se kondensátor nabil obráceně, a znovu vybijeme přes galvanoměr. Pozorujeme výchylku (opačného smyslu než v 2) a zapneme klíč.

4. Z prostých velikostí obou výchylek vezmeme střed β a poznamenejme jej jako výchylku příslušnou napětí U .

5. Úkony 2 ÷ 4 opakujeme pro různá napětí, čímž dostaneme závislost výchylky β na U , kterou znázorníme graficky.

6. Vzhledem k úměrnosti obou veličin dostaneme body ležící přibližně na přímce, jež jde počátkem soustavy. Měříme-li výchylky galvanoměru zrcátkovou metodou (obr. 20,8), musíme ovšem výchylky (aspoň větší) opravit podle tabulky T,VII. Nedostaneme-li ani pak dosti přesnou úměrnost, omezíme se při dalším měření na obor, v němž je závislost aspoň zhruba přímková.

7. Závislost $U = a\beta$ vyrovnáme buď graficky, nebo početně (nejlépe metodou skupinovou 16.1; 15.2), čímž dostaneme hodnotu poměru U/β .

8. Konstanta B galvanoměru je pak

$$B = \frac{Q}{\beta} = C_0 \frac{U}{\beta} = C_0 a. \quad (10)$$

65. K A P A C I T A

Definice. Kapacita C (kondensátoru) je poměr náboje Q (na jednom polepu kondensátoru) k potenciálnímu rozdílu V :

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (1)$$

Jednotky. MKSA (praktická): farad = 1 F = 9 · 10¹¹ cm. (2)

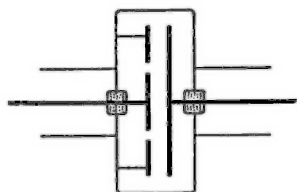
Absolutní: elektrostatická $[C]_{es} = \text{cm}$,
elektromagnetická $[C]_{em} = \text{cm}^{-1} \text{s}^2$. (3)

V praxi se užívá jednotek 5 (31).

Přístroje

Na měření kapacit, které provádíme většinou srovnávacími metodami, potřebujeme vodiče se známou — mnohdy značnou — kapacitou, které nazýváme kondensátory.¹⁾

K měřicím účelům se používá hlavně t. zv. normálních (standardních) kondensátorů, jejichž kapacita se dá buď dosti přesně vypočítat, nebo má prostě známou hodnotu nebo i více volitelných hodnot. K prvním druhu,



Obr. 65,1. Deskový kondensátor s ochranným prstencem.

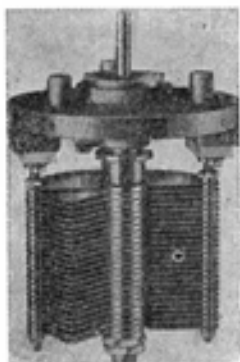
65,I který nazveme **absolutní kondensátory**, patří zejména *deskový kondensátor s ochranným prstencem* (stíněný kondensátor), jehož úprava podobná konstrukci *Kelvinových vah* (63,1) je vidět z obr. 65,1. Je chráněn také vodivým pouzdem a siločáry neprocházejí pevnými izolátory, aby se vyloučily při střídavém napětí ztráty způsobené dielektrickou hysteresí.

Absolutní válcový kondensátor lze pořídit vhodnou konstrukcí, při níž se vyloučí vliv konců válců (*Gerdien* 1905) nebo lze válce přesným šroubem tak posunout, aby kapacita měla hodnotu předem zvolenou v daných mezích (*Wulf* 1925).

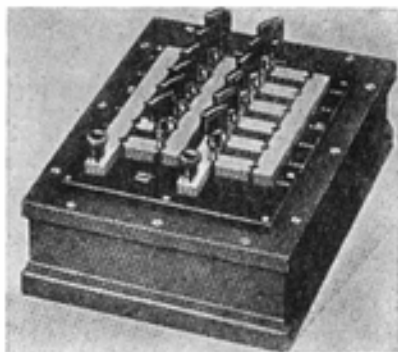
Pro praktická měření jsou vhodné hlavně dva typy:

Normální kondensátor otočný (vzduchový), jehož princip i běžná konstrukce jsou zřejmy ze snímku 65,2. Dvě soustavy desek se otáčením přesunují přes sebe, čímž lze spojitě měnit kapacitu; její velikost čteme na kruhové stupnici.

Měřicí kondensátor (slídový) je tvořen sadou kondensátorů spojených vedle sebe (bočně), které se zařazují nejčastěji zasunutím kolíčku podobně jako



Obr. 65,2. Normální kondensátor otočný.



Obr. 65,3. Měřicí kondensátor slídový.

u kolíčkových reostatů [71,II]. Zasunutím kolíčku do otvoru se celková kapacita zvýší o hodnotu označenou u otvoru.²⁾ Na snímku 65,3 je takový kondensátor s třemi dekádami kapacit (sestavěnými obdobně jako závaží v sád-

65¹⁾ TF 5.4.1, 5.4.2.

65²⁾ U kolíčkových reostatů se zasunutím kolíčku příslušný odpor vyřadí.

kách) o celkové hodnotě $1 \mu\text{F}$. Kondensátory nesmíme zatížit libovolně vysokým napětím. Obvykle lze bez poškození použít napětí několika set voltů. Pro vysoká napětí konstruuji se speciální kondensátory, v nichž bývá izolantem buď zvláštní druh skla velké dielektrické pevnosti,³⁾ nebo stlačený plyn (vzduch, dusík, CO_2).

MĚŘICÍ METODY

Měření kapacit provádí se jednak methodou balistickou, jednak můstkovou, při níž se nejčastěji používá střídavého proudu se sluchátky. Lze však měřit také stejnosměrným proudem a galvanoměrem a konečně stejnosměrným proudem a elektrometrem. Poslední způsob je nejpřesnější.

65.1. Měření kapacity balistickou methodou

Balistická metoda záleží v tom, že balistickým galvanoměrem [67,III] určíme náboj Q potřebný k nabití daného kondensátoru na známý potenciální rozdíl V a kapacitu vypočteme z (1).

Potřeby: Jako při měření balistickým galvanoměrem 64.2.

Postup

1. Neznáme-li konstantu B galvanoměru, určíme ji methodou 64.2.

2. Nato stejným způsobem 64.2 změříme oboustranné balistické výchylky při vybíjení měřeného kondensátoru, který nabíjíme na takový potenciál, aby výchylky galvanoměru měly vhodnou velikost (polovinu až tři čtvrtiny celé stupnice). Doporučuje se zjistit výchylku β pro několik různých potenciálů.

3. Vzhledem k 64 (9) dává rovnice (1) pro kapacitu

$$C = \frac{Q}{V} = B \frac{\beta}{V};$$

za β/V dosadíme průměr těchto poměrů vypočtených pro hodnoty β a V získané měřením. Přitom vyjadřujeme všechny veličiny v těchž jednotkách, kterých jsme použili při určování konstanty B . Obvykle měříme V ve voltech, β v dílcích stupnice galvanoměru a kapacitu C v μF .

65.2. Můstková metoda se střídavým proudem

Obecného můstkového zapojení 62,6 se dá použít k srovnávání kapacit, jestliže dva vodiče, na př. Z'_a , Z'_b , nahradíme kondensátory, jejichž ohmický odpor a indukčnost můžeme pominout proti výrazu $1/\omega C$. Pak podle druhé rovnice 62 (8)

$$Z'_a = \frac{1}{\omega C_a}, \quad Z'_b = \frac{1}{\omega C_b},$$

jsou-li C_a a C_b kapacity srovnávaných kondensátorů. Za druhé dva vodiče můstku zvolíme známé odpory, u nichž zase lze pominout členy v závorce pod odmocninou 62 (8), takže

$$Z_a = R_a, \quad Z_b = R_b.$$

Pak podle 62 (24) platí úměra

$$C_a : C_b = R_b : R_a. \quad (4)$$

65 ³⁾ TF 5.3.6.

K měření se hodí *Wheatstonův* můstek, užívaný běžně k srovnávání odporů, a to buď s drátem přímým [71,IV], nebo šroubově navinutým na válec [71,V]. Zapojení je vidět z obr. 65,4. Je-li drát AB homogenní, jsou odpory R_a, R_b v poměru délek $a = AM, b = MB$. Jsou tedy srovnávané kapacity v poměru

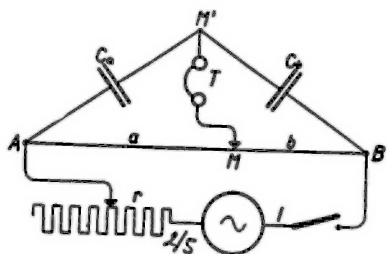
$$C_a : C_b = b : a. \quad (5)$$

Posuvný kontakt M posouváme po drátě AB tak, aby se zvuk v telefonu T zeslaboval, a zjistíme polohu kontaktu M , při níž zvuk vymizí nebo aspoň je nejslabší. Jako zdroj střídavého proudu je vhodný induktor [76,I] nebo t. zv.

bzučák [76,II]. Má být pokud možno zvukově izolován, aby jeho zvuk nerušil pozorování minimální hlasitosti v telefonu. Také je možno telefon a zdroj proudu (bzučák) vzájemně zaměnit; tím se neruší platnost rovnice (5), jak je zřejmo ze současné platnosti rovnic 62 (24) a 62 (24').

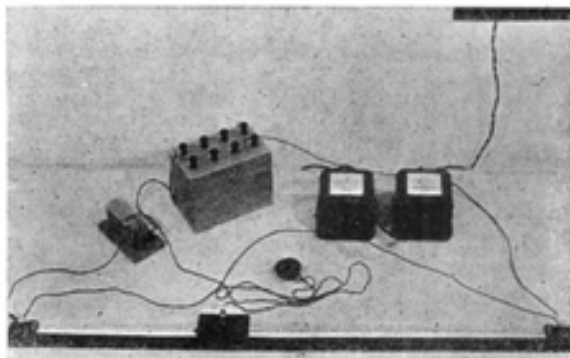
Konstruuji se také speciální přístroje, zv. kapacitní můstky, v nichž jsou vestavěny i normální kondensátory známé kapacity, které je možno podle libosti zařazovat. Na obr. 65,6 je schema takového kapacitního můstku. Klouzavý kontakt M se posunuje otáčením hlavice spojené s kru-

65,IV



Obr. 65,4. Srovnávání kapacit střídavým proudem.

hovou stupnicí, na níž čteme přímo poměr $b : a$. Zasunutím kolíčku zařadíme některý ze tří normálních kondensátorů, obsažených v přístroji. Přitom hledíme, aby poměr $b : a$ vyšel pokud možno blízký jedné, v kterémžto případě je měření nejpřesnější. Také lze použít libovolného kondensátoru, který připojíme k příslušným svorkám přístroje. K odporu AB je bočně zapojen druhý



Obr. 65,5. Srovnávání kapacit kondensátorů můstkovou metodou se střídavým proudem.

odpor s kontaktem pro uzemnění. Toto uzemnění je nutné zvláště při měření malých kapacit, proti nimž nelze pomíjet kapacity přívodů a některých částí přístroje.

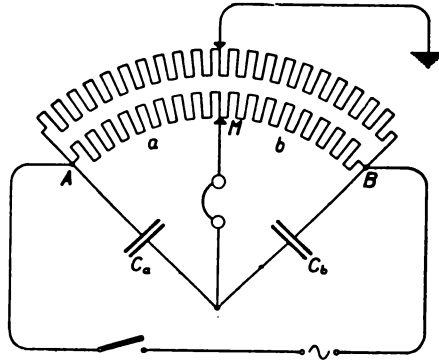
Potřeby: Zařízení pro *Wheatstonův* můstek přímý nebo válcový [71,IV; V], upravené pro střídavé proudy, s bzučákem [76,II], telefonem (sluchátky), nebo universální kapacitní můstek [65, IV], normální kondensátor otočný [65,II] nebo [65,III].

Postup

1. Provedeme zapojení podle obr. 65,4 a nastavíme posuvným odporem r vhodný proud.

2. Zkusmo vyhledáme takovou kapacitu na normálním otočném nebo měřicím kondensátoru, aby dotyk M byl poblíž středu stupnice.

3. Určení polohy a dotyku M opakujeme několikrát, z nalezených hodnot vezmeme střed a vypočteme jeho poměrnou pravděpodobnou chybu $\vartheta_r(a)$ podle 12 (32).



Obr. 65,6. Kapacitní můstek.

4. Poměrná chyba podílu b/a je podle 12(10)

$$\vartheta_r\left(\frac{b}{a}\right) = \vartheta_r(a) \sqrt{1 + \left(\frac{a\vartheta(b)}{b\vartheta(a)}\right)^2} = \vartheta_r(a) \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \doteq \sqrt{2} \vartheta_r(a), \quad (6)$$

ježto měříme poblíž středu stupnice. Měřená kapacita dosazením do (5)

$$C_a = \frac{b}{a} C_b [1 \pm \sqrt{2} \vartheta_r(a)]. \quad (7)$$

65.3. Můstková metoda se stejnosměrným proudem

Při měření větších kapacit metodou 65.2 dá se také použít stejnosměrného proudu. V schématu 65,4 nahradíme bzučák baterií akumulátorů s přepínačem p a telefon nahradíme ovšem galvanoměrem, čímž dostaneme zapojení 65,7. Měření provádíme tak, že baterií nabíjíme a vybíjíme kondensátory, zapínající střídavě oba kontakty 1 a 2 přepínače p . Při zapnutí proudu projeví galvanoměr okamžitou výchylku, jejíž směr a velikost závisí na poměru odporů a kapacit v obou větvích zapojení. Neboť podle 62(20) napětí baterie rozdělí se na dráty a , b v poměru jejich odporů a potenciální rozdíly na obou kondensátorech jsou v obráceném poměru obou kapacit: $V_a : V_b = C_b : C_a$.

Najdeme-li tedy takovou polohu dotyku M , že se galvanoměr nevychýlí ani při nabíjení kondensátorů (kontaktem 2), ani při jejich vybíjení (kontaktem 1), mají body M a M' stejné napětí, a tedy platí úměra (5), obecněji (4).

Potřeby: *Wheatstonův* můstek [71,IV; V] pro měření odporů (s galvanoměrem a baterií), přepínač, normální kondensátor [65,II; III].

Postup

1. Sestavíme zapojení 65,7 a posuvný odpor r zařadíme naplno.

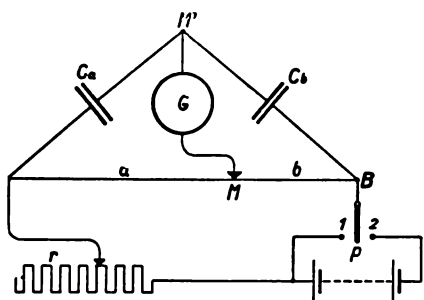
2. Nastavíme posuvný dotyk M doprostřed stupnice a volíme kapacitu C_b normál-

nho kondensátoru tak, aby výchylka galvanoměru při vybíjení kondensátoru byla co nejmenší.

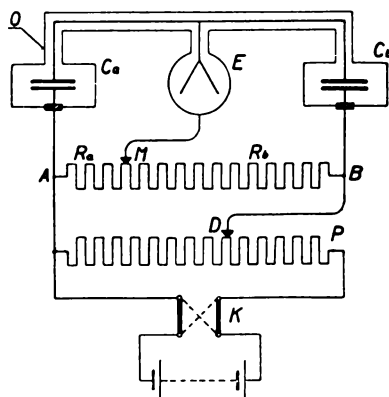
3. Najdeme polohu M , při níž zůstává galvanoměr v klidu, a zmenšíme odpor r . Opravíme polohu M , aby znovu vymizela výchylka galvanoměru. Tak postupujeme, až vyřadíme úplně odpor r ; pak najdeme přesnou polohu M a zapíšeme délku a , čtenou na desetiný nejmenšího dílku stupnice (u přímého drátu obvykle na 0,1 mm).

4. Znovu zapneme odpor r naplno, vysuneme M poněkud z nalezené polohy a opakujeme měření a několikrát. Z nalezených hodnot a vezmeme průměr a vypočteme podle 12(32) poměrnou pravděpodobnou chybu.

5. Vypočteme poměrnou chybu $\vartheta_r \left(\frac{b}{a} \right)$ podle (6) a dosazením do (7) kapacitu C_a a její chybu.



Obr. 65,7. Srovnávání kapacit stejnosměrným proudem.



Obr. 65,8. Srovnávání kapacit elektrometrem.

65.4. Můstková metoda s elektrometrem (Lebeděv 1891)

Nejpřesněji lze srovnávat kapacity předešlou methodou, zjišťujeme-li stejnost potenciálu v místech M a M' citlivým elektrometrem. Abychom vyloučili proměnné kapacity přírodních drátů a vůbec blízkých vodičů, obklopíme srovnávané kondensátory ochranným vodivým pouzdem, které spojíme vodivě s pouzdem elektrometru. Úprava zařízení je vidět na obr. 65,8. Napětí baterie se vede přes komutátor K na potenciometr P . Z něho posuvným dotykem D odvětvíme vhodné napětí, které přivedeme na oba kondensátory kapacit C_a , C_b , zatím co druhé dva polepy jsou spojeny s měřicím orgánem elektrometru E . Jeho pouzdro vodivě spojené s ochranným pouzdem O má proměnný potenciál, který měníme odpory R_a a R_b . Z důvodů vyložených v 65.2 platí úměra (4), takže

$$C_a = \frac{R_b}{R_a} C_b.$$

Proměnné odpory R_a , R_b můžeme ovšem nahradit přímým nebo šroubovým drátem s klouzavým dotykem M a pak platí rovnice (5). Tato metoda poskytuje při správném postupu velmi přesné výsledky. I kapacity řádu $\mu\mu F$ (pikofarad) lze srovnávat s přesností 0,1 %.

Potřeby: Elektrometr [63, I ÷ IV], Wheatstonův můstek přímý nebo válcový [71, IV; V], potenciometr [68, IV], normální kondensátor [65, II; III], baterie, komutátor. Ochranné vodivé pouzdro.

Postup

Viz 65.3, úkon 1—5, při čemž citlivost metody postupně zvyšujeme potenciometrem P (místo posuvného odporu r) a zapínání napětí provádíme střídavě oběma polohami komutátoru K (místo přepínače p) podle zapojení 65,8.

66. PERMITIVITA (DIELEKTRICKÁ KONSTANTA)

Definice. Poměrná dielektrická konstanta ϵ_r izolantu je poměr intenzity elektrostatického pole ve vakuu k intenzitě pole v daném izolátoru, jak plyne z *Coulombova* zákona 3 (10).

Jednotky. Ve všech soustavách $[\epsilon_r] = 1$. Absolutní dielektrická konstanta ϵ se vypočte z poměrné (relativní) dielektrické konstanty ϵ_r násobením absolutní dielektrickou konstantou vakua ϵ_0 :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

V soustavě MKSA $\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$,

v soustavě absolutní elektrostatické $\epsilon_0 = 1$,

v soustavě absolutní elektromagnetické $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^2$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Při měření dielektrické konstanty vycházíme ze základního vztahu, který je přímým důsledkem definice potenciálu (čl. 63) a *Coulombova* zákona, že totiž potenciál pole vzbuzeného daným prostorovým rozložením náboje je nepřímo úměrný dielektrické konstantě ϵ prostředí. Ve zvláštním případě kondensátoru daných rozměrů vznikne daným množstvím náboje na jeho polepech potenciální rozdíl V_ϵ , který závisí na jeho dielektrické konstantě podle vztahu

$$V_\epsilon : V_1 = 1 : \epsilon_r,$$

kde V_1 je potenciální rozdíl na kondensátoru, jsou-li desky odděleny prostředím o jednotkové dielektrické konstantě, kterou přisuzujeme vakuu. Avšak dielektrická konstanta plynů je blízká jedné a závisí poněkud na hustotě; pro vzduch 0 °C za normálního tlaku vychází z měření střední hodnota (*Lichten-ecker* 1926)

$$\epsilon_{r \text{ vzduch}} = 1,000\,582,$$

kteou lze při měření obvyklé přesnosti položit rovnu 1.

Podle rovnice 65 (1), definující kapacitu, plyne z předešlého výkladu

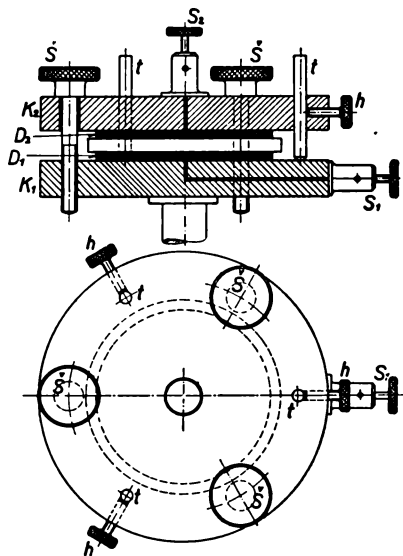
$$\epsilon_r = \frac{Q}{V_\epsilon} : \frac{Q}{V_1} = \frac{C_\epsilon}{C_1}, \quad (1)$$

při čemž za kapacitu C_1 můžeme s dostatečnou přesností položit kapacitu vzduchového kondensátoru.

Tím je dána základní rovnice pro měření dielektrické konstanty jako poměru kapacit téhož kondensátoru s libovolným prostředím jako dielektrikem a se vzduchem. Měřicí metody jsou tedy dány metodami 65.1 až 65.4 pře-

dešlého článku. Jen je třeba zdůraznit, že při přesném měření dielektrické konstanty pevných izolantů se vzhledem k jejich elektrické hysterese nedoporučují metody používající proměnného napětí a tím méně 65.2 se střídavým napětím (zejména vysokofrekvenčním). Tu je vhodná některá metoda elektrostatická, na př. 65.4.

Při srovnávání kapacit téhož kondensátoru (nebo dvou stejných kondensátorů) s různými dielektriky je ovšem třeba zaručit stejné rozměry, zvláště vzdálenost desek, s náležitou poměrnou přesností. K tomu je rozkládací kondensátor, který lze jednoduše sestavit podle obr. 66.1. Dva tlusté kruhové kotouče K_1 , K_2 z isolační hmoty (ebonit, bakelit a pod.) mají menší kovové destičky D_1 a D_2 , které jsou vodivě spojeny se svorkami S_1 , S_2 . Mezi destičky D_1 a D_2 se vloží deska z měřeného materiálu a desky se stáhnou třemi šrouby \check{S} tak, aby k sobě dobře přilehly. Nato se vysunou z hořejšího kotouče K_2 tři tyčinky t (na př. ocelové se zaoblenými konci) uvolněním fixačních šroubků h , až se dotknou spodního kotouče K_1 . V této poloze se zajistí šroubky h . Na svorky S_1 , S_2 vložíme napětí a provedeme měření kapacity C_2 . Potom uvolníme šrouby \check{S} , vyjeme měřenou desku a opět posuneme kotouč tak, aby dosedl tyčinkami t na K_1 . Tím je zaručeno, že tak vzniklý vzduchový kondensátor má stejně velkou mezeru mezi destičkami D_1 a D_2 . Změříme tedy stejným postupem kapacitu C_1 tohoto kondensátoru a vypočteme dielektrickou konstantu ϵ desky z rovnice (1).



Obr. 66.1. Rozkládací kondensátor k měření dielektrické konstanty.

67. PROUD (VELIKOST PROUDU)

Definice. Proud neboli velikost proudu I je náboj dQ (elektrické množství), prošlý za dobu dt , dělený dobou průchodu:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1)$$

Takto definovaný proud je průměrný proud v době dt ; okamžitý proud je dán mezní hodnotou poměru (1) pro $dt \rightarrow 0$ (časovou změnou náboje).

Jednotky. MKSA (praktická): $[I] = \text{ampér} = \text{coulomb/s} = 1 \text{ A} = 10^{-1} [I]_{am} = 3 \cdot 10^9 [I]_{as}.$ (2)

Absolutní:

elektrostatická $[I]_{as} = \text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2},$
 elektromagnetická $[I]_{am} = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}.$

• Mezinárodní $[I]_i = \text{mezinár. ampér} = 1 \text{ A}_i = 0,999 85 \text{ A}. (3)$

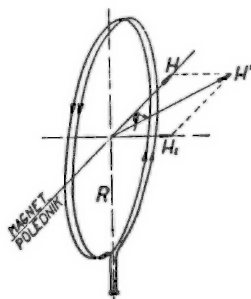
Pro slabé proudy se používá jednotek
 miliampér = mA = 10^{-3} A,
 mikroampér = μ A = 10^{-6} A.

Přístroje

Ve fyzice mčíme nejčastěji proud stálé velikosti, tedy množství náboje prošlé vodičem za vteřinu při ustáleném (časově neproměnném) proudu. I když není proud dokonale stálý, měříme průměrnou velikost proudu stejně, jako kdyby byl přesně stálý; čteme údaj měřicího přístroje v pravidelných časových intervalech a bereme z měřených hodnot aritmetický střed. U proudů periodicky proměnných (střídavých, tepavých) měříme místo proudu definovaného rovnicí (1) veličinu zvanou *efektivní proud*; bude o ní pojednáno v čl. 76.



Obr. 67,1. Tangentová busola.



Obr. 67,2. Tangentová busola (schema).

67,I Základním přístrojem pro absolutní měření proudu je **tangentová busola**, vyobrazená na snímku 67,1. Je to jeden nebo několik stejně velkých závitů drátu, navinutých těsně vedle sebe na svislém kruhu, které budi ve svém středu magnetické pole kolmé k rovině závitů. Intenzita H_I tohoto pole je podle 62 (4) dána v Am^{-1} vzorcem

$$H_I = \frac{NI}{2R}, \quad (4)$$

kde I je proud v ampérech, jdoucí jedním kruhovým závitem poloměru R metrů, a N je počet závitů busoly. Rovina závitů postaví se do roviny magnetického poledníku, v němž působí horizontální složka H zemského magnetického pole. Krátká magnetka ustálí se po zapnutí proudu ve směru výsledné intenzity H' , odchýlené od magnetického poledníku o úhel φ , který je dán podle obr. 67,2 vztahem

$$\text{tg } \varphi = \frac{H_I}{H}. \quad (5)$$

Dosazením z (4) plyne tedy pro proud v ampérech vzorec

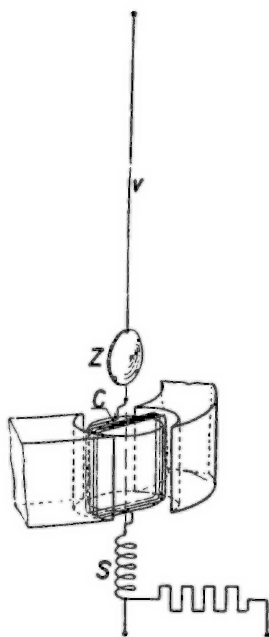
$$I = C \text{tg } \varphi, \quad (6)$$

kde *převodní součinitel* (redukční faktor) C busoly má hodnotu

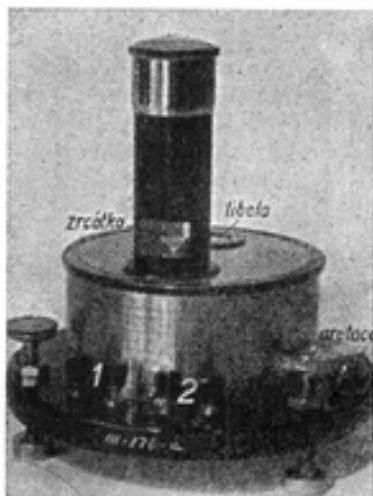
$$C = \frac{2RH}{z} \quad (7)$$

Určíme-li tuto hodnotu ze známých konstant přístroje R a z a z velikosti horizontální složky H zemského pole, můžeme podle (6) počítat velikost proudu I , procházejícího závity busoly. Je ovšem třeba zdůraznit, že H je nejen místně, ale i časově proměnné, a proto pro přesné absolutní měření proudu je třeba horizontální intenzitu určit zvláštním měřením, na př. methodou 84.2.

Na měření úhlu φ má magnetka lehkého ukazatele z nemagnetického kovu, který oběma konci udává výchylku magnetky v desetinách stupně na vodorovném kruhu, děleném na stupně. Ze čtení u obou konců ukazatele bereme střed.



Obr. 67,3. Zrcátkový galvanoměr Deprez-D'Arsonvalův.



Obr. 67,4. Zrcátkový galvanoměr se dvěma citlivostmi. Při zapojení proudu na svorky 1 je citlivost $2,0 \cdot 10^{-8}$ A/mm a odpor 500Ω , při užití svorek 2 je citlivost $1,5 \cdot 10^{-8}$ A/mm a odpor 30Ω .

Nejdůležitějšími fyzikálními přístroji pro měření proudu jsou galvanoměry. Jsou to velmi citlivé přístroje, založené na různých principech. Dnes jsou nejužívanější galvanoměry s měřicí cívkou, otáčivou v silném poli permanentního magnetu (výjimečně elektromagnetu), které se nazývají jmény svých původců *Deprez, d'Arsonval*. Nejcitlivějším přístrojem toho druhu je zrcátkový galvanoměr. Jeho úprava je schematicky naznačena na obr. 67,3; jeho praktické provedení je zřejmé ze snímku 67,4. Lehká plochá cívka C je zavěšena na vodivém vlákně v (což bývá tenounký drátek nebo bronzový pásek), kterým se do ní přivádí proud. Její druhý konec je vodivě připojen několika závity tenkého drátu („spirálou“) S k spodnímu kontaktu se svorkou. Cívka navinutá na obdélníkovém rámečku volně prochází při stáčení úzkou válcovou mezerou mezi póly silného magnetu a nehybným vnitřním válečkem

z měkkého železa. Nulová poloha cívky a lehounkého zrcátka Z , upevněného nad ní, je určena nezkrouteným vláknem; volí se tak, aby cívka ležela v rovině obou pólů magnetu. Prochází-li cívkou (velmi slabý) proud, ustálí se cívka v poloze, v níž se moment magnetického pole právě vyrovná torsní dvojici krouceného vlákna. V úzké válcové mezeře, v níž se cívka otáčí, je magnetické pole takřka přesně radiální a podle 42 (21) je torsní dvojice úměrná výchylce. Kromě toho je magnetické pole vodiče úměrné proudu procházejícímu vodičem. Tento galvanoměr má tedy důležitou vlastnost, že výchylka je úměrná proudu. Platí to (ve značném rozsahu) pro úhlovou výchylku; pozorujeme-li ovšem zrcátkovou metodou (obr. 20,8), je čtení na stupnici úměrné jen při nejmenších výchylkách. Úměrnost i pro větší výchylky dostaneme opravou čtení podle T,VII.

Podstatný význam má u galvanoměrů velikost útlumu kyvů cívky, které vzniknou náhlým zapnutím proudu. Útlum nastává proto, že v cívce samé i v rámečku, na němž je navinuta, indukují se při kývání v silném magnetickém poli t. zv. vířivé proudy, které působí proti okamžitému pohybu cívky. Jejich intenzita v cívce závisí na jejím odporu a ovšem i na odporech, které jsou zapojeny v okruhu cívky. Vhodnou volbou celkového odporu můžeme tedy útlum upravit na žádanou míru. Jak je známo z teorie tlumených kyvů a jak bylo podrobně vyloženo v čl. 26 u rovnoramenných vah, je při malém útlumu pohyb periodický (s klesajícím rozkyvem), kdežto při větším útlumu je pohyb aperiodický. Nejmenší hodnotě útlumu, při níž koná cívka ještě pohyb aperiodický (blíží se asymptoticky správné poloze), přísluší jistý odpor, zvaný *mezní*. Pro měření je nejvýhodnější odpor o málo menší než tento mezní odpor. Vede totiž k nejrychlejšímu ustálení galvanoměru na výchylku příslušející měřenému proudu. Při menším odporu galvanometr kolísá (ovšem tlumeně), při větším odporu naopak jen zvolna dosahuje správné výchylky.

67,III

V jednom případě však volíme odpor podstatně větší než odpor mezní, a to chceme-li měřit krátkodobé nárazové proudy, vlastně celkový náboj, který prošel galvanoměrem za takového proudového nárazu. Málo tlumený galvanoměr s dlouhou dobou kyvu se nazývá **balistický galvanoměr**.¹⁾ Tímto přístrojem neměříme vlastně proud, nýbrž celkové množství elektrického náboje prošlého jeho cívkou za velmi krátkou dobu, kterou můžeme při vhodném uspořádání určit z výchylky (srov. 64.2, 21.3 a 21.4). Přesná teorie balistického galvanoměru²⁾ je zcela podobná teorii nebrzděných vah, podané v 26, ale pro vlastní měření je z ní nejdůležitější toto:

Balistická výchylka je úměrná množství náboje prošlého galvanoměrem v čase krátkém proti době kyvu, což stručně odvodíme. (8)

Pro cívku (nebo i magnetku) galvanoměru platí pohybový zákon 26(7)

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = D_0, \quad (9)$$

kde J je její moment setrvačnosti a D_0 dvojice, která na ni působí. Trvá-li proudový náraz jen velmi krátký čas ϑ , během něhož se cívka prakticky nevychýlí z rovnovážné polohy, neuplatní se znatelně ani torsní dvojice závěsu a dvojice D_0 bude úměrná průměrné hodnotě proudu I , jdoucího galvanoměrem:

$$D_0 = kI.$$

67¹⁾ Název je utvořen podle obdoby s balistickým kyvadlem, jímž se měří rychlost střely zachycené kyvadlem (naplněným pískem).

67²⁾ Viz na př. [79] čl. 41.

Tuto hodnotu můžeme pokládat za stálou během doby ϑ , takže integrací rovnice (9) dostaneme

$$\int_0^{\vartheta} J \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt = \int_0^{\vartheta} D_0 dt = kI\vartheta.$$

Cívka byla na počátku nárazu v klidu, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, a na konci nárazu nechť má úhlovou rychlost Ω , pro niž tedy dostaneme z poslední rovnice

$$J \int_0^{\vartheta} d \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = J \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]_0^{\vartheta} = J\Omega = kI\vartheta.$$

Z toho vidíme, že úhlová rychlost cívky na konci nárazu je úměrná součinu $I\vartheta = Q$, což je celkové množství prošlého náboje:

$$\Omega = \frac{k}{J} Q. \quad (10)$$

Místo Ω měříme ovšem t. zv. *balistickou* (první) *výchylku* β galvanoměru, která při malém tlumení je přibližně úměrná Ω . Kdyby totiž nebylo vůbec útlumu, proběhl by první výkyv cívky jako část harmonického kmitu

$$\varphi = \beta \sin \omega t,$$

jehož amplitudu β najdeme z podmínky, že pro $t = 0$ je $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$. Derivací φ podle t plyne

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta\omega \cos \omega t,$$

a tedy pro $t = 0$

$$\Omega = \beta\omega,$$

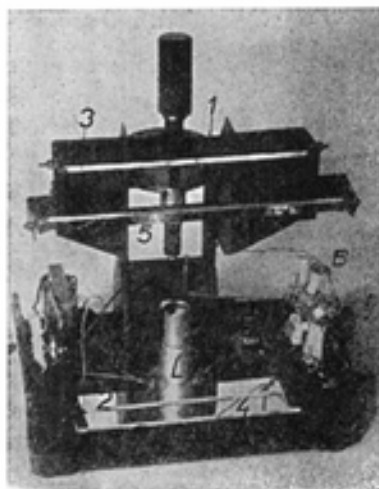
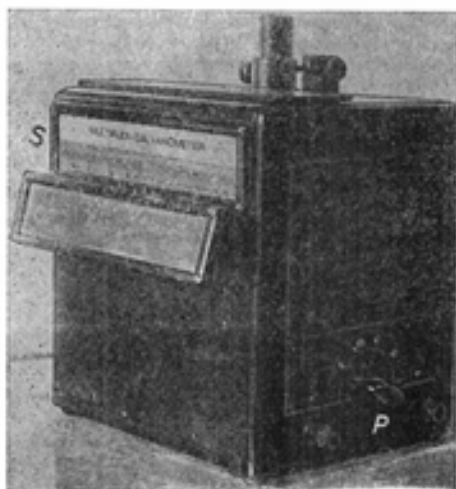
kde kruhová frekvence netlumených kmitů $\omega = \frac{\pi}{\tau}$, značí-li τ dobu kyvu cívky (která bývá kolem 30 s). Tedy podle (10)

$$Q = \frac{J}{k} \Omega = \frac{\pi J}{\tau k} \beta = B\beta, \quad (11)$$

kde B je balistická konstanta galvanoměru. Tím je dokázána platnost věty (8) pro netlumený galvanoměr a můžeme ji aplikovat bez pozorovatelné chyby na balistické galvanoměry obvyklého tlumení. Balistickou konstantu B lze určit výpočtem z theoretického vztahu mezi citlivostí galvanoměru při ustáleném proudu a z útlumu nebo ji vypočteme z balistické výchylky, způsobené průchodem známého náboje podle 64.2.

Zrcátková metoda, které se používá pro měření proudu zrcátkovými galvanoměry, vyžaduje postavení dalekohledu se stupnicí [20, V] nebo značkové lampy [20, VI] a čtení na stupnici závisí na vzdálenosti stupnice od zrcátka, která se volí obvykle 1 m nebo i více. Celé zařízení je prostorově neúsporné a málo praktické. Proto se konstruují zrcátkové galvanoměry tak, že zařízení pro měření výchylky je pevně spojeno s přístrojem a soustředěno

67,IVa na malý prostor. Zrcátkový galvanoměr Multiflex (vyobrazený na snímcích 67.5a) je upraven tak, že se paprsek dopadající ze značkové lampy na zrcátko několikrát odráží mezi dvěma obdélníkovými zrcátky, takže jeho stopa se pohybuje po průsvitné stupnici, umístěné na skřínce přístroje, na níž čteme výchylku zrcátka stejně jako při obvyklé zrcátkové metodě.



Obr. 67,5a — Zrcátkový galvanoměr Multiflex fy Lange (citlivost $5,71 \cdot 10^{-8}$ A/mm a odpor 13Ω).

Vlevo uzavřený přístroj, vpravo otevřený. Světlo svíslé stonající ze značkové lampy *L* odráží se od zrcátka *1* na zrcátko na vlákně, od něho zpět na *1*, odkud po odraze na zrcátkách *2, 3, 4, 5* dopadá vodorovně na průsvitnou stupnici *S*. Citlivost lze zmenšit zařazením bočnicku *B* přepínačem *P*.

67,IVb Nejmodernější konstrukci galvanoměru vidíme na obr. 67,5b. Je to stupnicový galvanoměr fy Zeiss s nehybným ukazatelem, na kterého se promítá pohyblivá světelná stupnice o 1000 dílcích. Přístroj má dva rozsahy v poměru 1 : 10. V citlivějším zapojení má rozsah 0 až $1 \mu\text{A}$ a konstantu (převrácenou citlivost) $6-8 \cdot 10^{-10}$ A.

Citlivost zrcátkových galvanoměrů se charakterizuje počtem ampérů, který způsobí změnu čtení o 1 mm na stupnici vzdálené 1 m od zrcátka. Toto číslo je ovšem tím menší, čím je galvanoměr citlivější, a proto se pro toto číslo zavádí název *konstanta galvanoměru* místo dřívějšího *citlivost galvanoměru*.

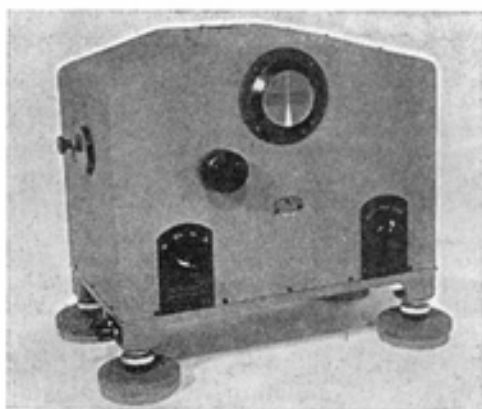
U obvyklých druhů (s otáčivou cívku) bývá tato konstanta řádu 10^{-8} až 10^{-9} A/mm, výjimečně 10^{-10} až 10^{-11} A/mm.³⁾

67,V Při laboratorních měřeních se často používá méně citlivých, ale praktických ručkových galvanoměrů. Jejich jemnější druh je v podstatě stejné konstrukce jako zrcátkový galvanoměr, jen má místo zrcátka lehkého ukazatele s kruhovou stupnicí, která má řadu dílků (asi milimetrových) po obou stranách nulové polohy. Při měření musí trubka s vláknovým závěsem stát svíslé a při

67³⁾ Dalšímu stupňování citlivosti brání kolísání čtených hodnot, způsobené nepravidelnými nárazy molekul vzduchu na měřicí orgán galvanoměru (*Brownův* pohyb, viz TF 4.2.1). Tomu nelze odpomoci vyčerpáním vzduchu, neboť pak je nutno tlumit galvanoměr indukčními proudy, u nichž se projevuje statistické kolísání pohybů elektronů; tím vzniká proměnné magnetické pole se stejným účinkem jako dříve.

přenášení musí se závěs podechytit (zajistit, aretovat). Proto se nahrazuje torsní závěs uložením cívky na ose otáčivé kolem hrotů v důlcích a nulová poloha cívky je určena jemným spirální perem. Konstanta ručkových galvanoměrů je asi 10^{-5} až 10^{-7} A/mm (t. j. přibližně na 1 úhlový stupeň).

Galvanoměrů se používá nejčastěji jako přístrojů nulových, jejichž účelem je určit podmínky, při nichž okruhem neprochází proud. Proto mívají nulu uprostřed stupnice a pro měření velikosti proudů (ovšem velmi slabých) musí se nejprve graduovat (kalibrovat), jak bude vyloženo v 67.1.



Obr. 67,5b — Stupnicový galvanoměr fy Zeiss

Vlastní proudoměrné přístroje jsou galvanoměry upravené vhodným způsobem. Především mají nulu na kraji (levém) stupnice, která je cejchována již v ampérech nebo v jejich zlomcích (mA, μ A). Takové přístroje se nazývají ampérmetry (miliampérmetry, mikroampérmetry). Nej přesnější jsou *Westonovy* („deprezské“) přístroje, sestavené jako ručkové galvanoměry s cívkou na ose. Mívají několik rozsahů, které je možno zapojovat podle přání. Rozsah měřicího přístroje se mění použitím odporu zvaného bočník (shunt, šent), což je odpor — obyčejně malý — bočně (paralelně) zapojený k přístroji. Chceme-li totiž, aby cívkou přístroje s odporem r_g procházela jen n -tá část celkového proudu I , připojíme k jeho svorkám bočně odpor r_b , daný podle 62 (19) podmínkou

$$r_b : r_g = i_g : i_b;$$

položíme zde

$$i_g = \frac{I}{n}, \quad i_b + i_g = I,$$

takže bude

$$r_b = \frac{r_g}{n - 1}.$$

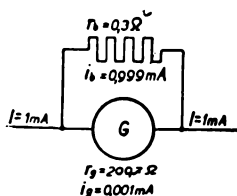
Odtud plyne:

Rozsah ampérmetru (galvanoměru) zvětšíme na n -násobný, připojíme-li k jeho svorkám paralelně bočník, jehož odpor je $(n - 1)$ krát menší než odpor přístroje.

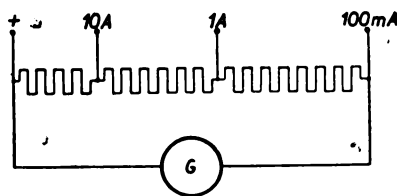
Bočníky jsou často vestavěny přímo do přístroje; jinak je připínáme mezi přeepsané svorky. U přístrojů s nulou na kraji stupnice je třeba připojit kladný pól baterie ke svorce označené +.

Odpor r_g samého galvanoměru bývá dosti značný (několik set ohmů), kdežto výsledný odpor r měřícího přístroje s bočníkem je podle 62 (16)

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_g} + \frac{1}{r_b}} = \frac{r_b}{1 + \frac{r_b}{r_g}}; \quad (13)$$



Obr. 67,6. Úprava galvanoměru na miliampérmetr.



Obr. 67,7. Přístroj k měření proudu se třemi rozsahy.

je přibližně rovný odporu r_b bočníku ($r_b \ll r_g$), a tedy poměrně malý. Na obr. 67,6 je znázorněno zapojení v miliampérmetru, vzniklé připojením bočníku o odporu $0,3 \Omega$ ke galvanoměru o odporu $r_g = 299,7 \Omega$. Úprava přístroje se třemi rozsahy je naznačena na obr. 67,7. Kladný pól připojíme vždy ke svorce označené + a druhý pól ke svorce s označením rozsahu, t. j. největšího proudu, který při daném zapojení smí přístrojem procházet.

Kromě vlastních proudoměrných přístrojů je třeba také přístrojů kontrolních. Jako kontrolních přístrojů se používá přístrojů druhu [67,VI], jejichž chyby buď jsou tak malé, že je při obvyklé přesnosti můžeme pomíjet, nebo byly zjištěny přesným měřením. Takové přístroje nazýváme normální ampérmetry.

67, VII

Nejpřesnější kontrola jak obyčejných, tak zejména normálních ampérmetrů se provádí přístroji zvanými coulometry (coulombmetry) neboli voltametry, které měří vlastně průměrnou hodnotu proudu v jisté době, a to na základě chemických účinků proudu. Nejobvyklejší jsou:

67, VIII

Coulometr na stříbro je sestaven z platinového kelímku (postaveného na vodivou desku), do něhož zasahuje stříbrná tyčinka (váleček). Kelímek se naplní 13% ÷ 25% roztokem dusičnanu stříbrného (AgNO_3) v chemicky čisté vodě (bez chloru). Stříbrná tyčinka se spojí s kladným, deska (kelímek) se záporným pólem baterie. Vážením se určí přírůstek M hmoty platinového kelímku. Podle 62 (5) vyloučí náboj $Q = 1$ coulombu množství

$$M_1 = \alpha \frac{1}{F} = \frac{107,88 \text{ kg kg atom}^{-1}}{9,652 \cdot 10^7 \text{ C kg atom}^{-1}} = 1,1177 \text{ mg C}^{-1} \quad (14)$$

jednomocného stříbra atomové váhy 107,88. Vyloučí-li tedy stálý proud za n minut M_{Ag} miligramů stříbra, je jeho velikost

$$I = \frac{M_{\text{Ag}}}{60 n M_1} = \frac{M_{\text{Ag}}}{67,06 n} = 0,014 912 \frac{M_{\text{Ag}}}{n} \text{ ampérů.} \quad (15)$$

Coulometr na měď je skleněná nádoba s měděnými elektrodami, naplněná 67,IX
roztokem modré skalice (CuSO_4) hustoty asi $1150 \div 1200 \text{ kg/m}^3$, mírně oky-
seleným kyselinou sírovou, do něhož přidáme trochu alkoholu. Roztok dostaneme
tak, že v litru vody rozpustíme asi 150 g čistých krystalků CuSO_4 a přidáme po
50 g H_2SO_4 a alkoholu. Je vhodné použít dvou desek měděných jako anody,
uprostřed nichž je třetí deska (kathoda), takže se měď vylučuje na obou jejích
stranách. Stejným způsobem jako v rovnici (14) odvodíme množství dvoj-
mocné mědi vyloučené 1 coulombem

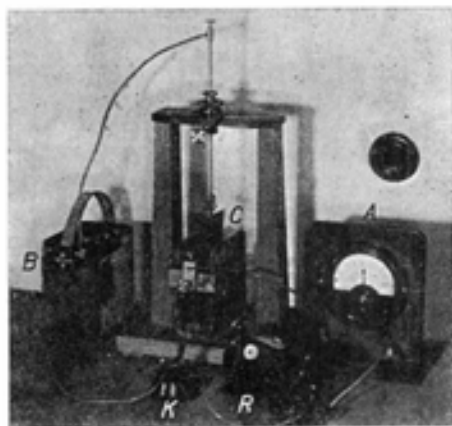
$$M_1 = \frac{63,54 \text{ Cu}^{II}}{2,9,649 \cdot 10^7 \text{ C}} = 0,32915 \text{ mg C}^{-1}$$

a stálý proud, který za n minut vyloučí $M_{\text{Cu}^{II}}$ miligramů mědi,

$$I = \frac{M_{\text{Cu}^{II}}}{19,749 n} = 0,05035 \frac{M_{\text{Cu}^{II}}}{n} \text{ ampérů.} \quad (16)$$

Srovnaj snímek 67,8 a popis měření 67.4.

Coulometr (voltametr) na vodík je skleněná láhev se širokým hrdlem, uza- 67,X
vřeným zátkou (snímek 67,9), jíž procházejí dvě skleněné trubičky se zata-
venými platinovými elektrodami (obvykle drátky). Jedna z nich je ohnuta
vzhůru, a tu spojíme se záporným pólem baterie, takže při průchodu proudu



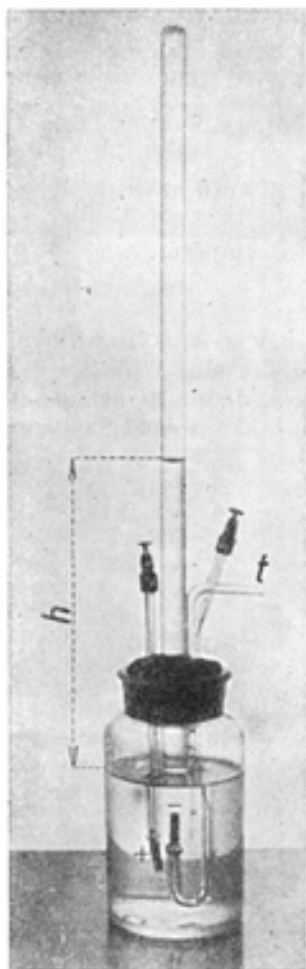
Obr. 67,8. Měření coulometrem na měď. Coulometr C, ampérmetr A, posuvný odpor R, baterie ocelových akumulátorů B, klíč K.

15% ÷ 20% roztokem kyseliny sírové se na ní vylučuje vodík, který stoupá
v bublinkách do odměrné trubice (eudiometru) [35, VII], kde se hromadí. Prostor
láhve nad roztokem souvisí s okolním vzduchem skleněnou trubičkou t , kterou
uniká kyslík, který se vylučuje na anodě.⁴⁾ Vyloučený vodík ovšem nevážíme,

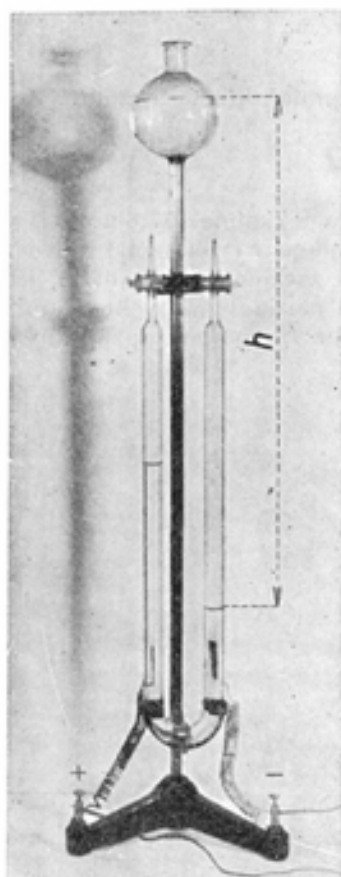
67 ⁴⁾ Kyselina sírová je v roztoku disociována na kladné ionty H^+ a záporné SO_4^{2-} .
Vložíme-li na elektrody vyšší napětí než rozkladné napětí 1,68 V, putují ionty H^+ ke ka-
thodě, kde odevzdají svůj náboj a utvoří molekuly H_2 vodíku, který se uvolňuje v bublin-
kách. Dvojmocné záporné ionty SO_4^{2-} odevzdají náboj na anodě a reagují s vodou podle
rovnice $2\text{SO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} = 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{O}_2$. Tím se uvolní u anody kyslík (poloviční objem
vodíku, ježto je dvojmocný).

ale měříme jeho objem, který přepočteme na normální podmínky (0°C , 760 torů). Ježto normální objem kilogrammolekuly plynu je $22,421 \text{ m}^3$ ⁵⁾, je normální objem kilogramatomu dvouatomového plynu (jakým je H_2) $11,2105 \text{ m}^3$, což je zároveň objem kilogramekvivalentu. Průchodem náboje 1 C se tedy vyloučí podle 62 (5) normální objem vodíku.

$$V_{01} = \frac{11,2105 \text{ m}^3}{9,652 \cdot 10^7 \text{ C}} = 0,11518 \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}. \quad (17)$$



Obr. 67,9. Coulometr na vodík.



Obr. 67,10. Hofmannův přístroj.

Vyloučí-li tedy stálý proud za n minut množství vodíku, jehož normální objem je V_0 , je velikost proudu dána vzorcem

$$I = \frac{V_0}{60 n V_{01}} = 0,1435 \frac{V_0}{n} \text{ ampérů}. \quad (18)$$

Místo coulometru na vodík [67,X] lze použít na měření proudu přístroje 67,XI známého pod jménem Hofmannův přístroj, jež vidíme na snímku 67,10.

67 ⁵⁾ TF 2.11.3.

Proud posuzujeme podle množství vyloučeného vodíku jednak pro jeho dvojnásobný objem, jednak proto, že v kyslíku bývají přítomny molekuly ozonu O_3 , čímž se jeho objem zmenší.

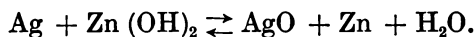
Jako zdroje stejnosměrného proudu se ve fyzikální laboratoři používá nejčastěji akumulátorových baterií, sestavených z jednotlivých akumulátorů spojených mezi sebou řadově i bočně podle napětí, které potřebujeme, a podle síly proudu, který z baterie hodláme odbírat. Jak vyplývá z 62 (13; 19) *sčítají se napětí článků spojených za sebou (řadově), a proud se rozdělí stejnoměrně na články zapojené vedle sebe (bočně).*

67, XII

U olověných akumulátorů⁶⁾ jsou kladné desky pokryty kysličníkem olovičitým (PbO_2) a jsou tmavohnědé, kdežto záporné desky mají šedou barvu olova. Zředěná kyselina sírová má u akumulátoru nabitého na plné napětí 2,1 V hustotu 1200 kg/m^3 , která vybíjením akumulátoru klesá. *Klesne-li asi na hodnotu 1150 kg/m^3 (při sníženém napětí 1,85 V), je třeba akumulátor ihned znovu nabít.* V nenabitém olověném akumulátoru probíhají chemické pochody, které jej znehodnocují. Aby se nemusilo přesně měřit napětí nebo hustota kyseliny v akumulátorech, mívají červenou kuličku, která u nabitého akumulátoru plave na povrchu, u vybitého však klesne poněkud pod hladinu (na dno malé skleněné nádržky na stěně nádoby). Vnitřní odpor olověného akumulátoru je velmi malý (několik tisíců ohmů), proto by akumulátorem spojeným nakrátko, t. j. bez zařazení vhodného odporu, procházel proud několika set ampérů, který by akumulátor zničil. Také otřesy se desky olověného akumulátoru poškozují.

Edisonův ocelový akumulátor (Ni-Fe)⁷⁾ má kladnou desku niklovou, pokrytou ve stavu nabitém hydroxydem niklitým $Ni(OH)_3$, zápornou desku železnou⁸⁾ a elektrolytem je 21% roztok hydroxydu draselného (KOH) s malým množstvím hydroxydu lithia. Plné napětí je 1,4 V, které vybíjením poklesne až na 1,15 V. Roztok louhu je třeba vyměnit vždy asi po $\frac{3}{4}$ roku. Napětí tohoto akumulátoru je téměř nezávislé na koncentraci roztoku a akumulátor může zůstat bez poškození nenabit. Má dosti velký vnitřní odpor, a proto jej lze zapojit i přes menší vnější odpor.

Stříbrný akumulátor je novější druh akumulátoru, kterého se prakticky používá teprve v posledních letech. Ve stavu nabitém je to vlastně článek s kladným pólem tvořeným peroxydem stříbra (Ag_2O) v zinečnanu draselném $Zn(OH)_2$ jako elektrolytu a se záporným pólem zinkovým (Zn). Obě elektrody jsou práškové a jsou odděleny od elektrolytu celofánovými vložkami. Reakce při nabíjení a vybíjení jsou



Stříbrný akumulátor má řadu výhod. Jeho nábojová účinnost je velmi vysoká (98% až 99%) a také pracovní účinnost je velmi dobrá (přes 85%). Energie akumulovaná v jednotce hmoty stoupá s velikostí akumulátoru od 60 Wh/kg (pro malé akumulátory) do 120 Wh/kg (pro akumulátor kilogramový). Váhová koncentrace elektrické energie je tedy několikrát větší než u obou starších druhů akumulátoru a podobně je tomu i s koncentrací objemovou.

67 ⁶⁾ TF 5.10.5.67 ⁷⁾ TF 5.10.5.67 ⁸⁾ Eventuálně s přísadou kadmia (Jungner).

Ať již uijeme jako zdroje proudu akumulátorů, *galvanických článků*⁹⁾ nebo jiných zdrojů, dbáme tohoto pravidla:

Do okruhu proudového zdroje zařazujeme vždy regulační odpor a klíč (vypínač), kterým spojíme proud jen na dobu vlastního měření. Přívodní dráty zapíname ke svorkám proudového zdroje jako poslední, když jsme se přesvědčili, že celé zapojení je správně provedeno. Rovněž po skončeném měření odpojíme nejprve oba dráty od svorek baterie. (19)

MĚŘICÍ METODY

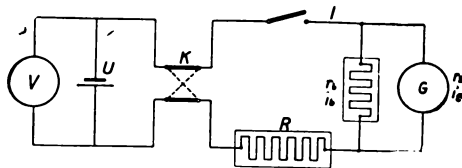
Měření proudu správným proudoměrným přístrojem je snadné. Jen je třeba pamatovat na to, aby proud nepřekročil rozsah přístroje, který měří jen proud, který jím prochází. Odtud pravidlo:

Proudoměrný přístroj zapojíme řadově přímo do okruhu, v němž proud měříme, spolu s odporem nejméně tolika ohmů, kolikrát je užitá napětí ve voltech větší než rozsah přístroje v ampérech. (20)

Běžné přístroje jednak nemají stupnici označenu přímo v ampérech (galvanoměry), jednak jejich stupnice není dosti přesná. Proto je nutno galvanoměry graduovat a ampérmetry (miliampérmetry) přezkoušet a podle potřeby určit opravy; jejich připojením k údajům přístroje dostaneme teprve správné hodnoty měřeného proudu. Takové přezkoušení (kontrolu) stupnice lze provést jednak srovnáním s normálním ampérmetrem (nebo i voltmetrem), jednak s některým voltmetrem nebo i tangetovou busolou.

【67.1. Graduace galvanoměru

Graduaci galvanoměru provádíme tak, že si opatříme proud známé velikosti, který posíláme galvanoměrem, měníce velikost proudu tak, abychom prošli celou jeho stupnicí. Známe-li vnitřní odpor galvanoměru, můžeme proud jdoucí galvanoměrem vypočítat na př. z užitého napětí (které měříme přesným voltmetrem) a z odporů zapojených do okruhu. Vždy musí mít galvanoměr *bočník* o malém odporu, abychom největší část proudu svedli do tohoto boč-



Obr. 67,11. Graduace galvanoměru.

níku. Nejjednodušší způsob takového zapojení je dán schematem 67,11. Proud z akumulátoru o napětí U , které měříme paralelně zapojeným voltmetrem, vedeme komutátorem K přes velký kličkový reostat R (několik tisíc ohmů) do galvanoměru o známém odporu r_g s bočníkem r_b (několik desetin ohmu). Není při tom třeba regulačního odporu, neboť proud lze vhodně upravit volbou

67 ⁹⁾ TF 5.10.4.

obou kolíčkových odporů. Proud I_o jdoucí galvanoměrem vypočteme takto: je-li r výsledný odpor galvanoměru s bočником, pak proud jdoucí komutátorem

$$I = \frac{U}{R + r}, \quad (21)$$

kde r je dáno rovnicí (13). Podle 62 (18; 19) splňuje proud i_b (jdoucí bočником) vztahy

$$r_b : r_o = I_o : I_b, \quad I_o + I_b = I \quad (22)$$

čili

$$I_o = (I - I_o) \frac{r_b}{r_o}. \quad (23)$$

Dosazením z (21) dostaneme

$$I_o \left(1 + \frac{r_b}{r_o} \right) = \frac{r_b}{r_o} \frac{U}{R + r}$$

a vzhledem k (13) po úpravě

$$I_o = \frac{U}{R + r_o + R \frac{r_o}{r_b}}. \quad (24)$$

Potřeby: Akumulátor [67, XII], voltmetr [68, II], dva kolíčkové reostaty [71, II] (řádu 10^3 a $10^{-1} \Omega$), komutátor, klíč.

Postup

1. Utvoříme zapojení podle obr. 67, 11.
2. Před zapojením akumulátoru vyjme všechny kolíčky v R a zařadíme nejmenší odpor v r_b .
3. Je-li výchylka galvanoměru po zapojení akumulátoru příliš malá, zmenšíme poněkud R (nebo zvětšíme r_b). Nato čteme napětí U článku na voltmetru, polohu galvanoměru vpravo n' a vlevo n'' (komutátor!).
4. Tak postupujeme, zmenšující R , zvětšující r_b a zjišťující výchylky při obou polohách galvanoměru, až projdeme celou stupnicí. Přitom stále kontrolujeme napětí článku voltmetrem.
5. Pro každou dvojici užitých odporů R a r_b vypočteme rozdíl čtení na obou stranách a dělíme dvěma.
6. Ze změřeného napětí U vypočteme dosazením do (24) proud I_o pro každou výchylku a hodnoty sobě příslušné sestavíme v tabulku.
7. Závislost výchylky n na proudu I_o znázorníme křivkou, proloženou body s pravouhlymi souřadnicemi (I_o, n).
8. Střední citlivost v proměřeném oboru zjistíme tak, že vypočteme, jaký průměrný proud přísluší změně polohy o 1 dílek (nejmenší) stupnice. Závislost je přibližně přímková, a proto můžeme počítat tuto průměrnou hodnotu podle 17(22) ze vzorce

$$I_o/\text{dílek} = \frac{\sum I_o}{\sum n}. \quad (25)$$

Graficky je tato hodnota dána podle 16(1) směrnici spojnice počátku souřadnic s těžištěm všech bodů zjištěných měření.

Vedení zápisu o měření je zřejmo z následujícího příkladu.

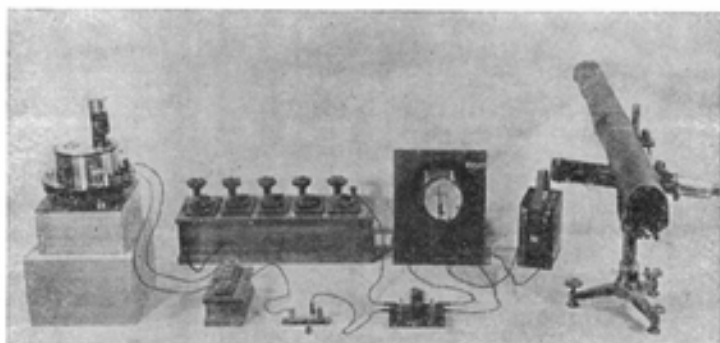
Příklad. Graduace zrcátkového galvanoměru Cambridge Instrument Co.

Odpor galvanoměru (vyznačený na přístroji) $r_o = 453 \Omega$. V zapojení 67, 11 bylo během celého měření stále $U = 2,05 \text{ V}$ (olověný akumulátor). Jako předřadného odporu R užilo se kolíčkového reostatu s odpory 100, 200 až 4000 Ω o celkové hodnotě 11 000 Ω

a jako bočníku kolíčkového reostatu s odpory 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 Ω . Bylo užito značkové lampy se stupnicí vzdálenou 1 m od zrcátka galvanoměru. Výsledky měření jsou v tab. I.

Tabulka 67,I.

R	r_b	U	n'	n''	n	I_g	
11 000 Ω	0,1 Ω	2,05 V	223,5 mm	277,0 mm	26,75mm	$4,11 \cdot 10^{-8}$ A	
9 000	0,1		217,2	282,6	32,7	5,03	
7 000	0,1		208,2	292,4	42,1	6,46	
5 000	0,1		190,6	309,8	59,5	9,05	
7 000	0,2		167,0	333,8	83,2	12,93	
3 000	0,1		151,4	349,6	98,7	15,08	
10 000	0,4		133,0	368,0	116,8	18,08	
8 000	0,4		105,6	395,4	143,8	22,09	
7 000	0,4		81,8	420,0	167,5	25,84	
7 000	0,5		57,9	444,6	191,0	32,30	
Součet:						962,05 $150,97 \cdot 10^{-8}$ A/mm	



Obr. 67,12. Graduace zrcátkového galvanoměru.

Hodnoty n , uvedené v tabulce, jsou již opraveny podle T,VII. Jejich závislost na I_g je graficky vyjádřena křivkou 67,13, která je až do $0,25 \mu\text{A}$ velmi blízká přímce, jdoucí počátkem souřadnicové soustavy. Dosazením podle tab. I plyne z (25), že výchylce 1 mm přísluší proud

$$I_g/\text{dílek} = 1,569 \cdot 10^{-9} \text{ A/mm.}$$

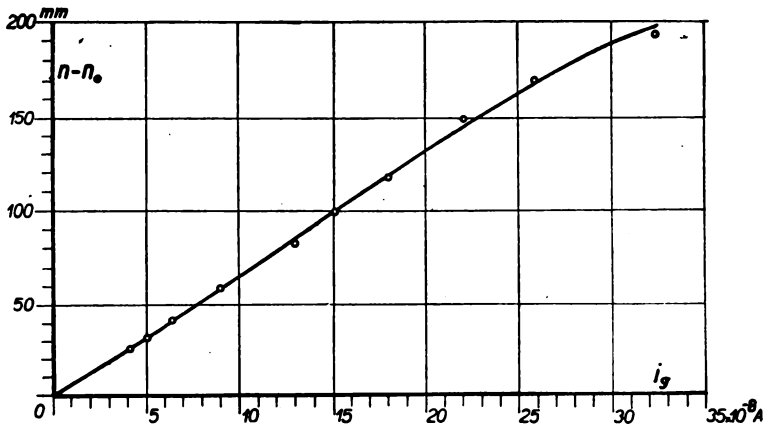
67.2. Kalibrace ampérmetru normálním ampérmetrem (obr. 67,14)

Opravy pro jednotlivé body stupnice ampérmetru dostaneme nejspíše srovnáním ampérmetru s ampérmetrem normálním [67,VII]. Zapojíme prostě oba ampérmetry za sebou do téhož okruhu se zdrojem proudu Z a s proměnným odporem, který vytvoříme ze dvou posuvných odporů (velkého R a malého r). Spojíme je řadově (za sebou), potřebujeme-li značný odpor výsledný, nebo bočně (vedle sebe), chceme-li mít výsledný odpor malý. Dosáhneme tak velmi jemných změn proudu v širokém rozmezí: velkým odporem regulujeme proud tak, aby ručka zkoušeného ampérmetru A ukazovala přibližně na

některou dělicí rysku stupnice a pak jemným odporem r ji přivedeme k přesnému krytí s ryskou. V každé takové poloze čteme zároveň údaj normálního ampérmetru NA . Projdeme tak celou stupnicí zkoušeného přístroje, kontrolující vždy znovu nulovou polohu, a zjištěné hodnoty sestavíme v tabulku podle vzoru (26).

Čtení na zkoušeném ampérmetru (celé dílky)	Čtení na normálním ampérmetru		Průměr čtení norm. ampérmetru	Oprava
	při vzrůstu proudu	při klesajícím proudu		
	↓	↑		

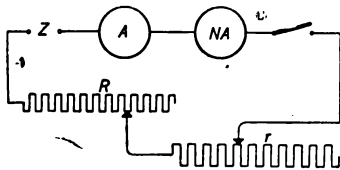
(26)



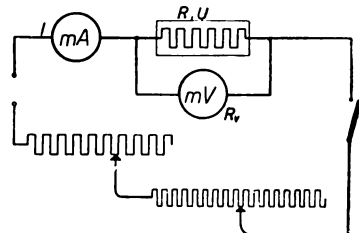
Obr. 67,13. Graduační křivka zrcátkového galvanoměru.

67.3. Kalibrace miliampérmetru normálním milivoltmetrem

Kontrolu proudoměrného přístroje lze také provést srovnáním s normálním (nebo jiným přesným) voltmětrem na základě *Ohmova* zákona. K tomu je třeba odporu známé velikosti. Avšak přesnými odpory (na př. kolíčkovými reostaty) smějí poslat jen dosti slabý proud. Mohli bychom užít jakéhokoliv



Obr. 67,14. Kalibrace ampérmetru normálním ampérmetrem.



Obr. 67,15. Kalibrace miliampérmetru milivoltmetrem.

odporu, kdybychom jej přesně změřili. Silnějším proudem se však odporový drát zahřívá, čímž se zároveň jeho odpor poněkud mění. Proto je tato metoda vhodná hlavně pro jemnější proudoměrné přístroje, na př. pro miliampérmetry a mikroampérmetry, k jejichž kalibraci uijíme ovšem přesného milivoltmetru.

Měření provádíme v zapojení naznačeném na obr. 67,15. Do okruhu zkoušeného miliampérmetru zapojíme přesný kolíčekový reostat R a regulační odpor (nejlépe hrubší a jemnější posuvný reostat, spojené řadově) s klíčem. Napětí U na odporu R měříme přesným (normálním) milivoltmetrem. Podle 62 (2) a 62 (16) je proud I , jdoucí miliampérmetrem,

$$I = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right), \quad (27)$$

značí-li R_V odpor milivoltmetru, který bývá uveden na přístroji.

Kalibraci provádíme tak, že regulačními odpory upravíme proud postupně na hodnoty, při nichž se ručka miliampérmetru přesně kryje s jednotlivými ryskami stupnice, a zjistíme vždy příslušné napětí U . Dosazením do (27) získáme ke každému údaji zkoušeného přístroje správnou hodnotu I . Měření provedeme při stoupajícím i při klesajícím proudu, kontrolujíc nulovou polohu, a výsledky sestavíme v tabulku podle vzoru (26), kde ovšem nahradíme čtení na normálním ampérmetru čtením na milivoltmetru.

Je-li odpor milivoltmetru velký proti odporu R , můžeme v rovnici (27) vynechat člen $1/R_V$.

67.4. Kontrola normálního ampérmetru coulometrem na měď

Kontrola normálních a vůbec přesných ampérmetrů se provádí coulometry, zejména kovovými, které při správném postupu dávají velmi spolehlivé výsledky. Pro základní měření je nejvýhodnější coulometr na stříbro [67,VIII], ale pro laboratorní měření je dostatečně přesný i coulometr na měď [67,IX], jímž provádíme kontrolu na základě rovnice (16). K měření stačí zásadně jediný coulometr, ale pro větší spolehlivost se doporučuje zařadit do okruhu ampérmetru dva coulometry za sebou, na jejichž katodách se musí vyloučit velmi přibližně stejné množství mědi. Tak máme možnost ověřit splnění podmínek, za nichž platí rovnice (16) s dostačující přesností. Především nesmí být proud příliš silný. Jako nejvhodnější hustota proudu se uvádí 2 A dm^{-2} , což značí, že coulometrem má procházet takový proud, že na čtvereční decimetr účinné plochy katody připadají 2 ampéry. U coulometru s dvěma anodami a jednou katodou uprostřed nich je účinná plocha dána povrchy obou stran katody.

Potřeby: Dva stejné (jeden) coulometry na měď [67,IX], akumulátorová baterie [67,XII], posuvný reostat [71,III], klíč, analytické váhy [25,V; VI] se sádkou závaží, jemný smírkový nebo skelný papír, vaříč s železným plechem, stopky (hodinky s vteřinovou ručkou).

Postup (vážení relativní podle 30.2 nebo 30.3 bez opravy na vztlak, neboť vyloučené mědi je malé množství a

$$S_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg/m}^3 \doteq S_Z.$$

1. Utvoříme zapojení podle 67,16, odhadneme ponořenou plochu katody jednoho z coulometrů a posuvným reostatem upravíme proud tak, aby jeho hustota byla asi $0,02 \text{ A/cm}^2 = 200 \text{ A/m}^2$; pak přerušíme proud.

2. Vyjmeme obě kathody, opláchneme je a třeme jemným smirkovým papírem, až celá účinná plocha má barvu čisté mědi. Pak je opereme v čisté vodě a omyjeme alkoholem. Osušíme je na horkém (ne žhavém) plechu na vařiči.

3. Suché a vychladlé kathody zvážíme (odděleně) a dostaneme hmoty M_0 a M_0' .

4. Kathody vložíme — aniž se dotýkáme účinné plochy — do coulometru a v okamžiku zapnutí proudu spustíme stopky (zapišeme čas).

5. Údaj ampérmetru čteme — podle proměnnosti — v kratších či delších pravidelných intervalech nebo pozorujeme ukazatele a posuvným odporem jej udržujeme ve stálé poloze.

6. Po $20 \div 40$ min přerušíme proud ve vhodném okamžiku (na př. na konci minuty) a zastavíme stopky (zapišeme čas).

7. Vyjmeme obě kathody a nedotýkajíce se smočených ploch, opláchneme je v čisté vodě, polijeme alkoholem a osušíme nad horkým plechem.

8. Suché a vychladlé kathody zvážíme každou zvlášť a dostaneme hmoty M_1 a M_1' .

9. Neliší-li se přírůstky $M_1 - M_0$ a $M_1' - M_0'$ o více než několik málo % (podle žádané přesnosti), vezmeme průměr obou přírůstků v gramech za M_{CuII} .

10. Určíme dobu n průchodu proudu v minutách a střední hodnotu I_A čtení na zkoušeném ampérmetru, vypočteme správný proud I podle (16) a konstantu ampérmetru

$$C = \frac{I}{I_A}, \quad (28)$$

kteřou je nutno násobit jeho údaj, abychom dostali správnou velikost proudu.

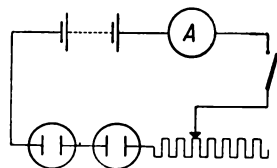
67.5. Kontrola ampérmetru coulometrem na vodík (nebo Hofmannovým přístrojem)

Pro kontrolu obyčejných ampérmetrů je také vhodný coulometr na vodík [67,X] nebo i *Hofmannův* přístroj [67,XI]. Zapojení je stejné jako u předešlé metody 67.4 (užívá se většinou jediného přístroje, nikoli dvou), při čemž musíme dbát toho, abychom z záporný pól připojili k elektrodě ústící v odměrné trubici. Správnou velikost proudu vypočteme z (18), kde V_0 je objem vodíku, přepočtený na normální podmínky, který souvisí s objemem V plynu za tlaku p torů a teploty t °C podle stavové rovnice 22 (10) vztahem [srovn. též rovnici 22 (11)]

$$V_0 = V \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = \frac{p}{760} \frac{273,15}{273,15 + t} V. \quad (29)$$

Teplota vyloučeného vodíku je v ustáleném stavu dána teplotou okolního vzduchu a tlak, pod nímž je v trubici uzavřen, je roven vnějšímu tlaku b , zmenšenému o hydrostatický tlak sloupce h v odměrné trubici (měřeného v mm od hladiny v láhvi) a o tlak nasycené vodní páry. Hydrostatický tlak v totech je patrně roven $h \frac{\rho}{\rho'}$, kde ρ je hustota zředěné kyseliny sírové (1100 kg/m^3) a ρ' hustota rtuti ($13\,550 \text{ kg/m}^3$). Tento tlak je tedy $0,081 h$ (toru). Napětí nasycené vodní páry nad roztokem je nižší než nad čistým rozpouštědlem [neboť bod varu je podle *Raoultova* zákona 60 (1) vyšší]. V našem případě je napětí par asi o 10% nižší než nad čistou vodou za stejné teploty. Je-li tedy E napětí nasycené vodní páry, nalezené v T,XI pro teplotu místnosti, pak výsledný tlak vodíku v coulometru, vyjádřený v totech,

$$p = b - 0,081 h - 0,9 E. \quad (30 A)$$



Obr. 67.16. Měření coulometrem na měď.

Pro průměrnou hodnotu proudu vychází tedy z (18) a (29)

$$I = \frac{0,1435 p}{760 + 2,78 t} \frac{V}{n} \text{ ampérů} = \frac{p}{5296 + 19,39 t} \frac{V}{n} \text{ ampérů}, \quad (31)$$

kam za p je třeba dosadit výraz (30 A).

Podobným postupem vypočteme proud při měření *Hofmannovým* přístrojem. Rozdíl je jen v tom, že vodík je v trubici pod vyšším tlakem než b , ježto hladina v zásobní baňce je výše než hladina v trubici s vodíkem. Označíme-li rozdíl výšek obou hladin v milimetrech opět h , bude patrně tlak dán vzorcem

$$p = b + 0,081 h - 0,9 E, \quad (30 B)$$

který se liší od (30 A) jen znaménkem u h .

Potřeby: (A) coulometr na vodík [67,X] nebo (B) *Hofmannův* přístroj [67,XI], akumulátorová baterie [67,XII], posuvný reostat [71, III], klíč, teploměr, stopky (hodinky s vteřinovou ručkou).

Postup (srov. 67.4).

1. Připravíme přístroj k měření tím, že (A) ucpeme prstem otvor trubičky t a překloupíme coulometr tak, aby kapalina vyplnila celou odměrnou trubici, nebo (B) tím, že pootevřením hořejších kohoutků obou odměrných trubic vypustíme několik kapek zředěné kyseliny, abychom byli jisti, že jsou zcela naplněny kapalinou. V obou případech dbáme, aby v odměrných trubicích nebylo vzduchových bublin.

2. Utvoříme zapojení podle 67,16 (s jedním elektrolytickým přístrojem místo dvou). Je-li třeba, upravíme posuvným reostatem proud a pak opakujeme úkon 1, abychom vypudili vodík uvolněný průchodem proudu. Nato změříme teplotu t místnosti a tlak vzduchu b , který redukuje na 0°C .

3. Zapneme proud a současně spustíme stopky (zaznamenanáme čas). Čteme v pravidelných intervalech údaj ampérmetru nebo regulujeme proud tak, aby byl stálý. Když se větší část odměrné trubice naplní, přerušíme proud a stiskneme stopky (zapíšeme čas).

4. Změříme (A) výšku sloupce odměrné trubice nebo (B) rozdíl hladin v zásobní baňce a v trubici s vodíkem.

5. Najdeme v T,XI napětí E nasycených vodních par a vypočteme tlak p (A) z rovnice (30 A) nebo (B) z rovnice (30 B).

6. Čteme objem V vyloučeného vodíku a určíme střední hodnotu I_A údaje ampérmetru, jakož i dobu n průchodu proudu v minutách.

7. Dosazením do (31) vypočteme správnou průměrnou velikost I proudu a dosazením do (28) konstantu ampérmetru C , kterou je třeba násobit údaj ampérmetru.

67.6. Převodní činitel tangentsvé busoly

Proudoměrné přístroje lze kontrolovat také tangentsvou busolou [67,I], jejíž převodní činitel C , daný rovnicí (7), obsahuje málo přesně známou a poněkud kolísající velikost H horizontální intenzity zemského magnetického pole; pro přesné měření je třeba ji určit přímo, na př. methodou 84.2.

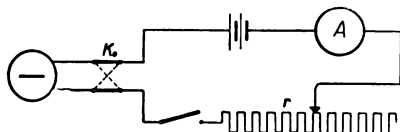
Místo toho je možno určit C ze známého proudu I a z výchylky φ způsobené proudem podle rovnice (6):

$$C = \frac{I}{\text{tg } \varphi}. \quad (32)$$

Určovat C lze tedy stejnými methodami, jako se kontroluje ampérmetr: 67.2; 4; 5. Methody se změní jen v tom, že místo kontrolovaného ampérmetru zařadíme do okruhu busolu, a to přes komutátor K (obr. 67,17). Výchylku φ měříme u obou konců ukazatele a pro oba směry proudu. Při měření coulometrem čteme

tuto výchylku v pravidelných intervalech a do rovnice (32) dosadíme průměr všech čtení.

Známe-li převodního činitele C , můžeme pak busoly použít buď přímo k měření silnějších proudů, nebo k rychlé kontrole ampérmetrů, nebo i k určení magnetického momentu nebo horizontální intenzity zemského pole (srov. 83.1, 84.1). Hodnota C se ovšem poněkud mění s časem, a proto je třeba ji kontrolovat.



Obr. 67,17. Zapojení tangentové busoly.

68. NAPĚTÍ PROUDU

Definice. Napětí U proudu mezi dvěma místy vodiče protékaného proudem je záporně vzatý přírůstek potenciálu (viz 63). Napětí U_{AB} mezi body A a B je tedy rovno úbytku (poklesu) potenciálu při přechodu z A do B :¹⁾

$$U_{AB} = -(V_B - V_A) = V_A - V_B.$$

Podle *Ohmova zákona* 62 (2) definuje se jako **ohmické napětí** součin odporu a proudu.

$$\begin{aligned} \text{Jednotky. MKSA (praktická) volt} &= 1 \text{ V} = \frac{1}{300} [U]_{as} = \\ &= 10^8 [U]_{am} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Absolutní: } 10^3 \text{ mV} = 10^6 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ MV}, \quad (2)$$

$$\text{elektrostatická } [U]_{as} = \text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1},$$

$$\text{elektromagnetická } [U]_{am} = \text{cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-2},$$

$$\text{mezinárodní: internacionální volt} = 1 \text{ V}_i = 1,000 \text{ 34 V}.$$

Přístroje

K měření napětí proudu potřebujeme jednak vlastní měřicí přístroje, jednak etalony (standards) napětí, které nám umožňují srovnávacími metodami vyjádřit měřené napětí v absolutních (V) nebo přímo v internacionálních (V_i) voltech. Jako etalon je nejvhodnější **Westonův normální článek kadmiový**, 68, I, kterým je definován mezinárodní volt (čl. 6). Z obr. 68,1 je zřejmý tvar a rozměry (v mm) tohoto přesného etalonu, při laboratorních měřeních užívá se však jednoduššího provedení (snímek 68,2). Je to skleněná nádobka tvaru H se zatavenými platinovými drátky, obsahující nasycený roztok síranu kademnatého ($\text{CdSO}_4 + 8/3 \text{ H}_2\text{O}$), který může být buď neutrální, nebo okyselený kyselinou sírovou. Kladný pól tvoří rtuť, záporný pól kadmiový amalgam, obsahující 7 dílů rtuti na 1 díl kadmia. Polarizaci²⁾ kladné elektrody brání pasta,

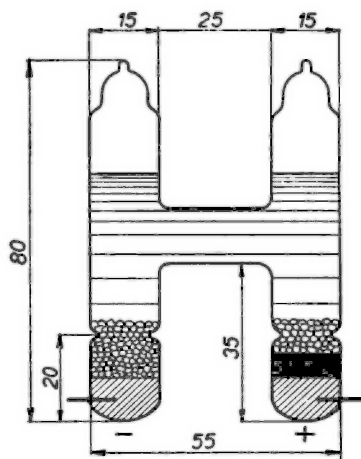
68¹⁾ TF 5.8.2.

68²⁾ TF 5.10.4.

vzniklá smíšením Hg_2SO_4 a krystalků CdSO_4 v nasyceném roztoku CdSO_4 . Nad oběma elektrodami je vrstva těchto krystalků. Podle londýnské konference (1911) je elektromotorická síla tohoto článku v internacionálních voltech

$$\mathcal{E}_W = 1,018\ 30 - 0,0406 \Delta t - 0,95 \Delta t^2 - 10 \Delta t^3, \quad \Delta t = \frac{t - 20}{1000}, \quad (3)$$

mají-li obě elektrody stejnou teplotu t °C. S rostoucí teplotou tedy mírně klesá (asi o $40 \mu\text{V}$ na stupeň), stejně velký rozdíl teplot elektrod způsobí však asi desetkrát větší změnu \mathcal{E}_W . Proto se vkládají normální články při přesném



Obr. 68,1. *Westonův* normální článek kadmi-
ový (podle *Pérarda*).

Obr. 68,2. Normální kadmiový článek
Westonův.

měření do olejové lázně, a to po skupinách několika článků, z jejichž elektromotorických sil se bere průměr, aby se vyrovnalo individuální kolísání napětí jednotlivých článků.

Westonova společnost vyrábí také článek, jehož roztok je nasycen při 4 °C; jeho elektromotorická síla má hodnotu $1,0187$ V, téměř nezávislou na teplotě.

Měření napětí převádíme podle *Ohmova* zákona na měření proudu a odporu. Prochází-li totiž odporem R proud I , je podle 62 (2) na jeho koncích napětí $U = RI$. Tak můžeme použít proudoměrných přístrojů o známém odporu k měření napětí. Aby nebylo třeba přepočítávat ampéry na volty, opatříme příslušný přístroj stupnicí ve voltech a přímo čteme měřené napětí. To lze skutečně provést vhodnou úpravou měřicího přístroje — ovšem jen s omezenou
68,II přesností — který pak nazýváme *voltmetr*, event. *milivoltmetr*. Chceme-li totiž popsaným způsobem zjistit napětí, které je při průchodu proudu mezi body A a B , musíme připojit měřicí přístroj k bodům A , B , aniž ovšem přerušíme jejich spojení vodičem, na němž máme napětí měřit. Tím zasáhne rušivě do rozdělení napětí na vodiči, neboť část proudu jdoucího původně vodičem mezi oběma body A a B se odvětví do přístroje zapojeného paralelně k původnímu vodiči.

Označme U původní napětí mezi místy A a B , spojenými vodičem o odporu r (obr. 68,3). Původní napětí se připojením voltmetru o odporu R_V zmenší na hodnotu U_V , která je dána zmenšením výsledného odporu:

$$U : U_V = r : R',$$

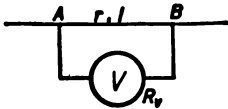
kde podle 62 (20)

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_V},$$

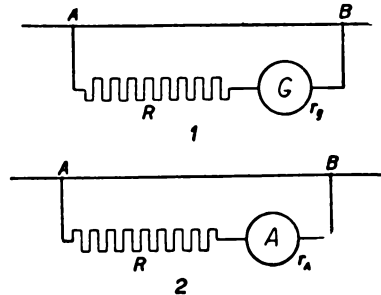
takže

$$U = U_V \left(1 + \frac{r}{R_V} \right). \quad (4)$$

Tedy na voltmetru měříme napětí U_V , z něhož můžeme vypočítat původní napětí U podle rovnice (4), známe-li jak odpor voltmetru, tak i odpor části vodiče AB , na němž měříme napětí. Z rovnice (4) však vidíme, že napětí na voltmetru se tím méně liší od původního, čím menší je poměr r/R_V , tedy čím větší je odpor R_V voltmetru. Volíme-li tento odpor velmi velký, můžeme zlomek r/R_V zanedbat proti 1 a voltmetr udává prakticky nezměněné původní napětí U (jestliže ovšem odpor r vodiče samého není neobvykle velký). Z tohoto důvodu nedostaneme přístroj vhodný pro měření napětí pouhým přecejchováním stupnice



Obr. 68,3. Měření voltmetrem.



Obr. 68,4. Předřadný odpor: 1 — milivoltmetru; 2 — voltmetru.

ampérmetru (nebo jiného proudoměrného přístroje), jehož odpor bývá malý. Prakticky upotřebitelný voltmetr získáme z proudoměrného přístroje teprve, zvětšíme-li jeho odpor tím, že mu předřadíme značný odpor R , jak je naznačeno na obr. 68,4. Předřadíme-li takový odpor galvanoměru nebo miliampérmetru, získáme velmi citlivý přístroj na měření napětí (*milivoltmetr*), podobně předřazením velkého odporu ampérmetru vznikne méně citlivý přístroj (*voltmetr*), kterým můžeme měřit větší napětí. Předřazením dalšího odporu R_1 dá se měnit rozsah voltmetru podle potřeby. Na vlastním měřicím přístroji vznikne totiž napětí U_V , pro něž platí podle 62 (20)

$$U_1 : U_V = R_1 : R_V,$$

kde U_1 je napětí na R_1 , a tedy

$$U = U_V + U_1 = U_V \left(1 + \frac{R_1}{R_V} \right).$$

Volíme-li

$$R_1 = (n - 1) R_V,$$

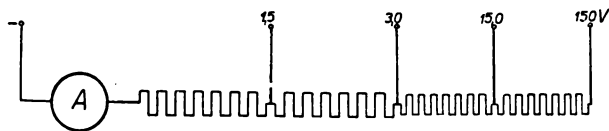
pak

$$U = nU_V,$$

odkud plyne závěr:

Předradíme-li voltmetru odpor $(n - 1)$ krát větší než jeho odpor, zvětšíme jeho rozsah na n -násobný. (5)

Tak lze snadno sestrojít voltmetry i milivoltmetry o několika různých rozsazích. Schematicky je úprava takového přístroje se čtyřmi rozsahy naznačena na obr. 68,5. Uvedená zapojení jsou jen povšechná. Každý takový přístroj je v podstatě ručkový galvanoměr, který je aperiodicky tlumený a má i u nejcitlivějších přístrojů několik odporů zapojených jednak řadově, jednak bočně,



Obr. 68,5. Voltmetr se čtyřmi rozsahy.

kteří jsou uspořádány tak, aby útlum měl správnou velikost a aby přístroj byl tepelně kompenzován. Předradné odpory zhotovují se ze slitiny zvané *manganin* (srovn. [71,I]), jejíž odpor se jen nepatrně mění s teplotou.

Při přesném měření napětí je nutno opravit čtení U_V na voltmetru na správnou hodnotu U podle rovnice (4), k čemuž je třeba určit jak odpor r vodiče, tak i odpor voltmetru (některou methodou čl. 71). Odpor voltmetru bývá na přístroji vyznačen. U voltmetrů s několika rozsahy se udává odpor připadající na 1 V rozsahu ($v \Omega/V$). R_V z něho plyne *násobením počtem voltů užitého rozsahu*.

68,III Normální voltmetry jsou přesné voltmetry nebo milivoltmetry, které udávají napětí s velmi malými chybami, které lze při měření obvyklé přesnosti pomíjet. Jsou určeny pro kontrolu voltmetrů užívaných v praxi.

68,IV Potenciometr (dělič napětí) je v podstatě vodič (obvykle reostat značného odporu) s dvěma pevnými dotyky A, B a s dvěma proměnnými dotyky C, D . Připojíme-li k pevným dotykům, které bývají na konci vodiče, napětí U' , je mezi C a D napětí U , dané podle 62 (20) úměrou

$$U' : U = R_{CD} : R_{AB}, \quad (6)$$

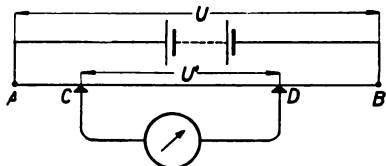
kde R_{AB} značí odpor celého vodiče, R_{CD} — odpor jeho části mezi C a D (obr. 68,6).

Nejjednodušší potenciometr je posuvný odpor [71,III] se třemi svorkami (obr. 68,7). Ke krajním svorkám A, B připojíme zdroj napětí (stejnoseměrného, na př. akumulátorovou baterii, *Westonův* nebo jiný článek). Je-li reostat rovnoměrně vinut z homogenního drátu, jsou odpory částí AC a CB v poměru vzdáleností posuvného dotyku od krajních svorek a napětí mezi nimi jsou v poměru délek:

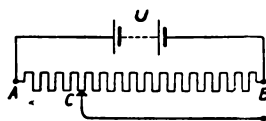
$$U_{AC} : U_{CB} = AC : CB. \quad (7)$$

Tak můžeme napětí rozdělit v libovolném poměru a odvést libovolnou část (srov. obr. 71,3); je to pohodlný způsob *regulace napětí*.

Pro přesnější měření sestavují se speciální **kompensační potenciometry 68,V (reostaty)** s dvěma nebo více pohyblivými dotyky, jimiž odvétvíme napětí na libovolné známé části celého reostatu; jedním kontaktem, klouzajícím po prstencově vinutém odporovém drátu, volíme na př. sta ohmů, dalšími desítky, jednotky a desetiny.



Obr. 68,6. Dělení napětí.



Obr. 68,7. Potenciometrické zapojení posuvného reostatu.

MĚŘICÍ METODY

Napětí proudu lze měřit především přímou metodou jakožto ohmické napětí dané součinem odporu a proudu. To je podstata měření napětí voltmetrem [68,II], jak jsme vložili při popisu tohoto přístroje. Také lze měřit napětí proudu srovnávací metodou, při níž srovnáváme měřené napětí s elektromotorickou silou normálního článku kadmiového [68,I]. Tato metoda je zvláště přesná, použijeme-li jí jako kompenzační metody (čl. 18), která záleží v tom, že známou část měřeného napětí, oddělenou z něho potenciometrem [68,IV], vyrovnáme elektromotorickou silou normálního článku. Její přesnost je umožněna skutečností, že je metodou nulovou, která nevyžaduje přesně kalibrované stupnice. Proto můžeme použít velmi citlivého galvanoměru, kterým prostě zjišťujeme, kdy jím neprochází proud; k tomu postačí znát přesně jeho nulovou polohu.

Tyto metody jsou ovšem méně rychlé a méně vhodné pro praktická měření než užití voltmetrů, jsou však potřebné ke kontrole a ke kalibraci těchto přístrojů, jimiž pak bezpečně a pohodlně měříme napětí s přesností postačující pro běžné účely. Proto popíšeme podrobněji, jak se uvedených method užívá při kontrolních měřeních.

68.1. Měření napětí ampérmetrem (kontrola voltmetru)

Utvoříme-li zapojení podle obr. 68,8, je na odporu R podle 62(2) napětí

$$U_R = RI, \quad (8)$$

kde I značí proud protékající odporem a měřený ampérmetrem. Připojíme-li ke koncům odporu R voltmetr o odporu R_V , můžeme podle obr. 68,9 počítat napětí na voltmetru z rovnice

$$U_V = R'I_A,$$

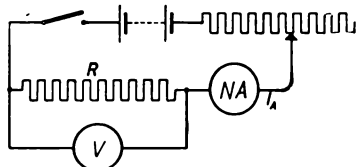
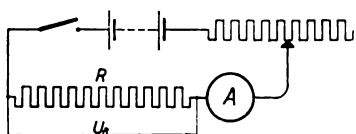
kde podle 62 (20)

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} = \frac{R_V + R}{RR_V}$$

čili

$$U_V = \frac{R I_A}{1 + R/R_V} \quad (9)$$

Je-li užitý odpor R dosti malý proti odporu voltmetru R_V , přejde poslední rovnice v jednoduchý vztah (8). Tím je dána metoda kontroly voltmetru ampérmetrem (na př. normálním), jejíž přesnost závisí ovšem na přesnosti, s jakou známe velikost odporů R_V a hlavně R . Užijeme-li jako odporu R kolíčkového reostatu nebo jiného odporu známé velikosti, musíme být jisti, že se při

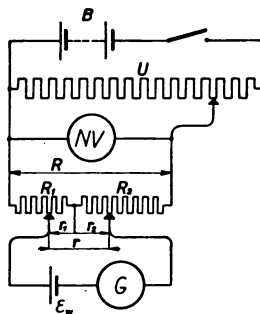
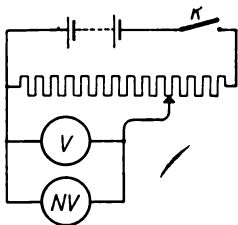


Obr. 68,8. Měření napětí ampérmetrem. Obr. 68,9. Kontrola voltmetru ampérmetrem.

měření v zapojení 68,9 jeho hodnota průchodem proudem ztelně nezmění proti jeho jmenovité hodnotě nebo hodnotě zjištěné měřením při velmi slabém proudě (na př. methodou můstkovou 71.3).

68.2. Kalibrace voltmetru normálním voltmetrem

Ověření stupnice obyčejného voltmetru [68,II] provedeme nejnázorněji srovnáním jeho údajů s voltmetrem normálním [68,III], jehož chyba nemusíme dbát nebo jehož opravy jsou známy. Vhodné napětí odvětvíme z baterie potenciometrem [68,IV], k jehož pohyblivému dotyku připojíme bočně oba srovnávané voltmetry (obr. 68,10). Polohu dotyku volíme tak, aby ručka kalibrovaného voltmetru přesně splynula postupně se všemi dílci stupnice a čteme správné napětí na normálním voltmetru. Po každém čtení přezkoušíme stálost nulové polohy vypnutím klíče K . Z výsledků sestojíme *tabulku oprav*.



Obr. 68,10. Ověření stupnice voltmetru normálním voltmetrem. Obr. 68,11. Kalibrace normálního voltmetru kompenzační methodou.

68.3. Kalibrace normálního voltmetru Westonovým článkem

Kalibraci voltmetru normálním článkem provádíme kompenzační methodou podle zapojení na obr. 68,11.

Z baterie B odvětvíme na posuvném reostatu postupně různá napětí U , která přivedou ručku voltmetru ke splynutí s jednotlivými dílci stupnice.

Každé z těchto napětí měříme potom tak, že jeho známou část kompensujeme elektromotorickou silou *Westonova* normálního článku [68,I]. To provedeme tak, že napětí voltmetru vložíme zároveň na konce stálého odporu R , z něhož jedním nebo dvěma posuvnými kontakty oddělíme na odporu r ($< R$) napětí, které právě vyrovnává napětí U_w *Westonova* článku (při nulové poloze galvanoměru). Pak podle (6) a obr. 68,6

$$U_w : U = r : R$$

čili

$$U = \frac{R}{r} U_w,$$

čímž je správná hodnota U napětí na voltmetru určena poměrem obou odporů a hodnotou U_w , určenou (pro danou teplotu) v mezinárodních voltech výrazem (3).

Ve skutečnosti se v zájmu přesnosti měření nahrazuje jediný posuvný odpor (potenciometr) dvěma posuvnými odpory [71,III] nebo kolíčkovými reostaty [71,II], spojenými řadově. Jedním z nich (R_1) měníme odpor ve větších mezích, druhým (R_2 jemnějším) jen o malé hodnoty, abychom dosáhli přesnější kompenzace. Nejpresněji se provádí podobná kalibrace zvláště k tomu určenými *kompenzačními potenciometry* nebo *reostaty* [68,V].

69. ELEKTROMOTORICKÁ SÍLA A SVORKOVÉ NAPĚTÍ

Definice. *Elektromotorická síla* \mathcal{E} zdroje proudu je potenciální rozdíl nezatíženého zdroje.

Svorkové napětí e zdroje proudu je napětí zatíženého zdroje.

Přitom rozumíme *zatížením* odbírání proudu ze zdroje při spojení pólů zdroje konečným vnějším odporem. Zdroj je tedy *nezatížený*, neprochází-li jím proud. Tak je tomu na příklad, nejsou-li jeho póly spojeny vnějším vedením — jinak řečeno — jsou-li spojeny nekonečně velkým vnějším odporem; zdroj proudu je, jak pravíme, *otevřen*.

Jednotky. Elektromotorickou sílu i svorkové napětí měříme ve stejných jednotkách jako potenciální rozdíl a napětí, nejčastěji v jednotkách MKSA 68 (1) a mezinárodních 68 (2).

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Svorkové napětí je vlastně ohmické napětí proudu na pólech zdroje a jeho měření lze v zásadě provést kteroukoli methodou článku 68.

Měříme je nejčastěji voltmetrem [68,II], jehož odpor R_v bereme při přesných měřeních v počet podle rovnice 68 (4), kdežto při méně přesných měřeních jej můžeme pokládat prakticky za nekonečně veliký. Svorkové napětí článků (akumulátorů) při daném zatížení lze určit také methodou 68.1.

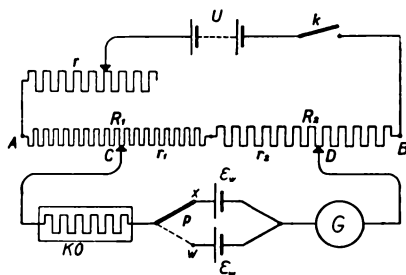
Naproti tomu elektromotorická síla je v podstatě elektrostatický potenciál a měli bychom ji tedy měřit elektrostaticky podle čl. 63, tedy elektrometry, na př. vláknovými [63,III;IV]. Elektrostatické metody jsou však většinou

málo citlivé pro přesné měření menších elektromotorických sil (na př. galvanických článků nebo akumulátorů), a proto dáváme přednost metodám obvyklým při měření napětí proudů (68). Tak na př. elektromotorickou sílu galvanických článků a akumulátorů měříme obvykle voltmetrem [68,II] značného odporu. Ježto pak vnitřní odpor je v tomto případě poměrně malý (rovný zlomku ohmu), je článek spojen prakticky nekonečně velkým odporem R_V , a proto podle 68(4) *elektromotorická síla článku je rovna napětí otevřeného článku, měřenému voltmetrem.*

Pro přesné určení elektromotorické síly je nejvhodnější metoda kompenzační, která umožňuje vyjádřit měřenou elektromotorickou sílu přímo v internacionálních voltech. Měření touto důležitou metodou popíšeme podrobněji.

69.1. Elektromotorická síla článku — měření kompenzační metodou (potenciometrem)

Kompenzační metoda měření napětí, jak byla vyložena v 68, je zvláště vhodná pro měření elektromotorické síly srovnáním s normálním článkem, ježto v okamžiku vyrovnání obou napětí neprochází měřeným článkem proud. Poskytuje tedy — nehledě k měřicím chybám — přesnou hodnotu napětí nezátíženého článku, tedy elektromotorickou sílu, a při vhodném postupu měření



Obr. 69,1. Kompenzační metoda měření elektromotorické síly článku.

nezpůsobuje polarisaci normálního článku. Zapojení se provede v zásadě podle 68,11, a to v uspořádání znázorněném na obr. 69,1. Akumulátorovou baterii napětí U připojíme přes regulační odpor a klíč ke koncům A, B odporu $R = R_1 + R_2$, složeného z hrubšího posuvného (nebo kličkového) reostatu R_1 a z jemnějšího R_2 , k jejichž posuvným dotykům C, D připojíme okruh měřeného článku o elektromotorické síle \mathcal{E}_x s kličkovým (nebo jiným regulačním) odporem značného rozsahu (řádu $10^4 \Omega$), přepínačem p a galvanoměrem. Je-li $r_x = r_1 + r_2$ odpor oddělený posuvnými dotyky C, D při nulové výchyлке galvanoměru a je-li kličkový odpor KO spojen nakrátko, platí podle 68 (6) úměra

$$\mathcal{E}_x : U = r_x : R.$$

Stejně platí při zařazení *Westonova* článku o napětí \mathcal{E}_w

$$\mathcal{E}_w : U = r_w : R.$$

Tedy elektromotorická síla měřeného článku (akumulátoru)

$$\mathcal{E}_x = \frac{r_x}{r_w} \mathcal{E}_w. \quad (1)$$

Potřeby: Akumulátorová baterie [67,XII], normální článek [68,I], galvanoměr ručkový [67,V] nebo zrcátkový [67,II; IV], kompenzační potenciometr [68,V]. Poslední přístroj lze sestavit podle 68.3 z těchto součástí: dva posuvné nebo kolíčkové reostaty R_1, R_2 , předřazený kolíčkový reostat KO , regulační odpor r , přepínač p , klíč k .

Postup (srov. 68.3)

1. Utvoříme zapojení 69,1 nebo připojíme baterii, měřený a normální článek a galvanoměr k příslušným svorkám potenciometru.
2. Změříme teplotu místnosti.
3. Předřazený odpor KO zařadíme v plné hodnotě (t. j. vyjmeme všechny kolíčky) a zařadíme měřenou elektromotorickou sílu \mathcal{E}_x článkem spojením přepínače s x . Úpravou odporů r_1 a r_2 přivedeme galvanoměr do nulové polohy. Zmenšíme odpor KO zasunutím kolíčku u některé menší hodnoty a pozměníme odpory tak, aby galvanoměr byl znovu na nule. Tak postupujeme, až úplně vyřadíme předřazený odpor (zasunutím všech kolíčků). Zjistíme hodnotu $r'_x = r'_1 + r'_2$ odporu při nulové výchylce galvanoměru.
4. Přepínač spojíme s w , čímž nahradíme měřený článek normálním článkem. Pak opakujeme postup 3, až vyřadíme odpor KO , a zjistíme příslušný odpor $r_w = r_1 + r_2$.
5. Přepínač otočíme na dotyk x a opakujeme postup 3 s výsledkem $r''_x = r''_1 + r''_2$.
6. Opakujeme měření teploty a vezmeme průměr t .
7. Elektromotorickou sílu \mathcal{E}_x vypočteme z (1), kam dosadíme $r_x = \frac{1}{2} (r'_x + r''_x)$ a za \mathcal{E}_w hodnotu 68 (3).

70. VÝKON PROUDU

Definice. Výkon P ustáleného (stejnoseměrného) proudu je práce vykonaná proudem, dělená dobou průchodu proudu; je číselně roven práci vykonané proudem za jednotku doby (s).

Jednotky. MKSA (praktická): $[P] = \text{watt} = 1 \text{ W} = 10^{-3} \text{ kW} = 10^7 [P]_a$.

Absolutní: $[P]_a = \text{erg. s}^{-1}$

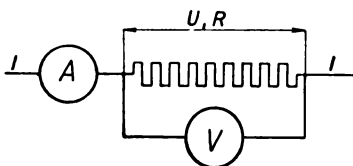
PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Podle Joulova zákona 62 (3) je výkon ustáleného proudu (stejnoseměrného)

$$P = UI = RI^2.$$

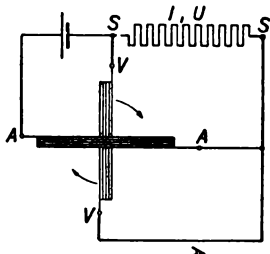
Lze jej tedy měřit ve wattech jako součin napětí U ve voltech a proudu I v ampérech nebo jako součin odporu R v ohmech a čtverce proudu v ampérech. Přitom je U napětí na té části vodiče, v níž výkon měříme, a stejně R je odpor právě té části vedení, pro kterou chceme výkon určit. Chceme-li tedy určit výkon proudu (na př. příkon žárovky nebo energii dodanou elektrickému kalorimetru [54,II]), musíme měřit proud jdoucí vodičem a napětí na koncích vodiče (na svorkách žárovky nebo cívky kalorimetru), jak je naznačeno na obr. 70,1, kde ampérmetr je zapjat řadově a voltmetr bočně k měřenému spotřebiči. Je-li odpor R_V voltmetru velmi velký proti odporu R spotřebiče, můžeme za U vzít přímo U_V voltmetru; jinak je nutno přepočítat jej podle rovnice 68 (4), kde ovšem klademe $r = R$.

K rychlému měření výkonu proudu ve wattech užívá se přístrojů zvaných **70,I wattmetry**. Obvyklá konstrukce elektrodynamická je naznačena na obr. 70,2. Pevná plochá cívka AA s malým odporem působí podle zákonů o vzájemném působení proudů¹⁾ na plochou cívku VV pružně zavěšenou. Cívky původně zkřížené se stáčí do téže roviny, až se moment vyrovná torsní dvojičí závěsu. Pevnou cívku AA , zapjatou do okruhu baterie řadově s měřeným spotřebičem

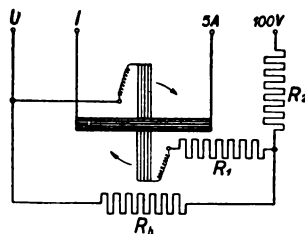


Obr. 70,1. Měření výkonu proudu ampérmetrem a voltmetrem.

SS , prochází týž proud I jako spotřebičem, druhou cívku VV však jde velmi slabý proud i , který je úměrný napětí U na spotřebiči. Otáčivý moment, kterým na sebe cívky působí, je přibližně úměrný součinu obou proudů, a tedy také součinu UI , t. j. výkonu P proudu v spotřebiči. Cívka AA zastupuje vlastně ampérmetr a cívka VV voltmetr a *nesmíme je při zapojení wattmetru zaměnit*. Vývody obou cívek jsou proto na wattmetru označeny zároveň s uvedením rozsahů, jak je zřejmo ze schematu 70,3 obvyklé úpravy wattmetru s předřazenými odpory R_1, R_2 a s bočnickem R_0 .



Obr. 70,2. Zapojení elektrodynamického wattmetru.



Obr. 70,3. Wattmetr s rozsahy do 5 A a 100 V (500 W).

71. ODPOR

Definice. Odpor (ohmický) R vodiče je poměr napětí U na koncích vodiče k proudu I procházejícímu vodičem:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Jednotky

$$\text{MKSA (praktická): ohm} = 1 \Omega = \frac{1}{9} 10^{-11} [R]_{\text{as}} = 10^9 [R]_{\text{am}}. \quad (2)$$

¹⁾ TF 5.8.1.

Absolutní:

elektrostatická $[R]_{as} = \text{cm}^{-1} \text{s}$,

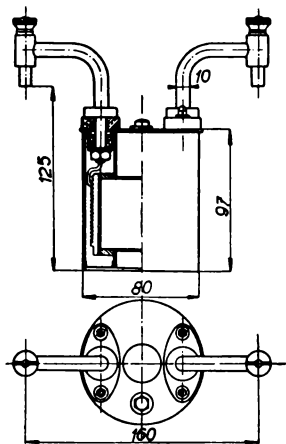
elektromagnetická $[R]_{am} = \text{cm s}^{-1}$.

Mezinárodní: intern. ohm = $1 \Omega_i = 1,000\,49 \Omega$.

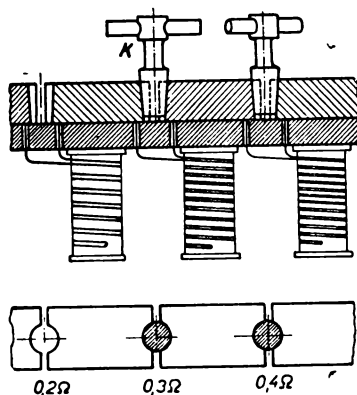
Přístroje

K elektrickým měřením potřebujeme jednak prakticky realizované odpory, t. j. vodiče buď stálého, nebo volitelného odporu, jednak měřicí přístroje, kterými zjišťujeme velikost odporů.

Základem měření odporu, které provádíme často metodami srovnávacími, jsou normální odpory, jejichž velikost je velmi přesně rovna 1Ω , nebo známému **71,I**



Obr. 71,1. Odporový etalon mezinár. ohmu (podle Pérarda).



Obr. 71,2. Řazení odporů v kolíčkovém reostatu.

násobku této hodnoty. Jsou to cívky vinuté z odporového drátu, nejčastěji ze slitiny zv. *manganin* (asi 85% Cu, 11% Mn, 4% Ni), jejíž specifický odpor $43 \div 50 \mu \Omega \text{ cm}$ se mění jen nepatrně s teplotou (o $10 \div 20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$). Jejich tvar (válece s měděnými přívody), je pro zvláště přesné *odporové etalony* předepsán mezinárodní dohodou způsobem naznačeným na obr. 71,1. Při měření se udržují na stálé teplotě v olejové lázni a napětí se klade na konce měděných vodičů (průměru 10 mm), ponořené do kalíšků se rtutí.

Pro běžnou potřebu jsou vhodné přesné *kolíčkové odpory (reostaty)*. Jsou to řadově spojené cívky¹⁾ z odporového drátu, uzavřené ve skřínce, z níž každou je možno spojit nakrátko zasunutím kuželového mosazného kolíčku *K* mezi dva mosazné hranoly, spojené s konci cívky. Na obr. 71,2 je odpor 0,2 Ω zařazen, odpory 0,3 Ω a 0,4 Ω jsou vyřazeny zasunutými kolíčky. Vzhledem se takřka neliší od kondensátoru 65,3. Odpory kolíčkového reostatu jsou sestaveny podle soustavy **71,II**

0,1 0,2 0,3 0,4; 1 2 3 4; 10 20 30 40 Ω
nebo 0,1 0,2 0,2 0,5; 1 2 2 5; 10 20 30 50 Ω .

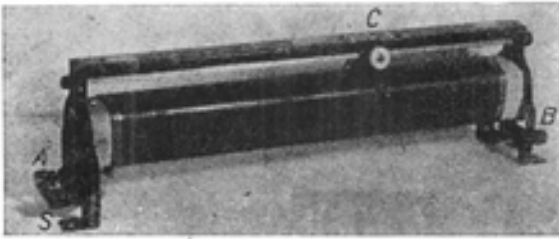
71 ¹⁾ Vinuté tak, aby měly malou indukčnost i kapacitu.

V obou případech lze z těchto dvanácti hodnot získat všechny odpory postupující po $0,1 \Omega$ do 111Ω .

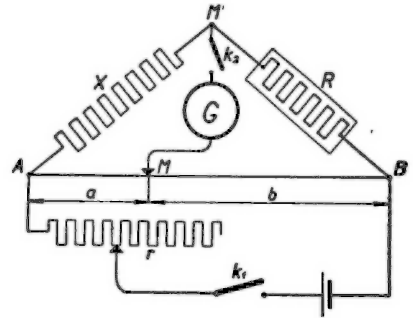
Količkové reostaty jsou jemné přístroje, které snesou jen omezený proud podle této tabulky:

Dovolené zatížení dekády $(1 \div 5) \cdot 10^n \Omega$:

(řád dekády)	$n = +1$	0	-1	-2	-3	-4
(proud v ampérech) A =	1,5	0,8	0,25	0,08	0,03	0,008



Obr. 71,3. Posuvný reostat.



Obr. 71,4. Pravitkový odporový můstek.

K regulaci proudu zapojujeme do okruhu zdroje regulační odpory; pro silnější proudy hodí se reostaty klikové nebo žárovkové, u nichž roste proud s počtem zapjatých žárovek, které jsou zapojeny vedle sebe. Pro spojitou regulaci slabších proudů je vhodný posuvný odpor. Je to odporový drát navinutý na porcelánové trubce (snímek 71,3) nebo na dvou trubkách. Posuvný dotyk C odvětjuje ze závitů proud do masivní mosazné tyče (nepatrného odporu), která je vodivě spojena se svorkou S . Proud prochází částí cívky mezi jedním jejím koncem A až k dotyku C , která má tím větší odpor, čím dále je kontakt C od A . Na přístroji bývá uvedena největší hodnota odporu v ohmech a dovolené zatížení v ampérech.

Kromě popsaného posuvného odporu válcového se používá i posuvných odporů prstencových, kde po kruhovém prstenci ovinutém odporovým drátem klouže konec páky otáčivé kolem osy prstence.

Z měřicích přístrojů jsou nejdůležitější různé typy odporových můstků (mostů), jejichž theoretický podklad byl objasněn již v 62.3. Měření se provádí stejnsměrným stálým proudem, a proto impedance Z v úměře 62 (24) přejdou v ohmické odpory užitých vodičů. Zapojíme-li tedy v 62,5 mezi svorky A a M' neznámý odpor X a mezi svorky M', B známý odpor R , bude galvanoměr v nulové poloze, zvolíme-li zbývající odpory R_a, R_b tak, aby platila úměra

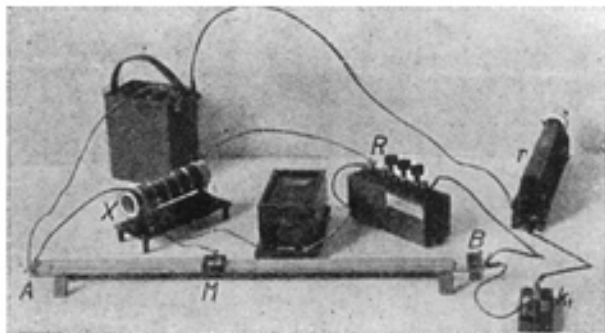
$$X : R = R_a : R_b. \quad (3)$$

Různé druhy můstků liší se pak jen ve způsobu, jakým dosáhneme splnění této základní podmínky.

Pravitkový můstek (Wheatstonův můstek s přímým drátem). Volíme známý odpor R přibližně rovný měřenému a spoj M nahradíme dotykem posuvným po přímém stejnorodém drátě (argentanovém), všude stejného průřezu, na-

pjatém na metrovém pravítku, děleném na milimetry mezi svorkami A a B (obr. 71,4). Praktické provedení měřicího zařízení ukazuje snímek 71,5. Odpor R_a , R_b jsou pak úměrný vzdálenostem a , b dotyku M od konců drátu a z (3) plyne

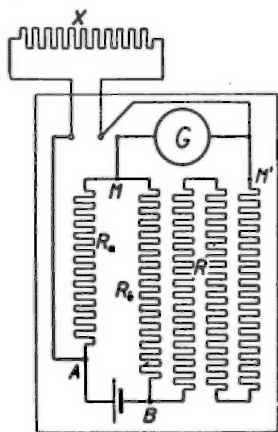
$$X : R = a : b. \quad (4)$$



Obr. 71,5. Měření odporu pravítkovým můstkem.

Popis měření viz 71.3.

Nahradíme-li v předešlém zařízení přímý drát drátem šroubově navinutým na otáčivý válec, po němž klouže kontakt M spojený s galvanoměrem, dostaneme válcový můstek (*Wheatstonův můstek se šroubovým drátem*), u nichž se 71,V
délky a , b měří stočením válce na kruhové stupnici. Přitom se celé otáčky válce zjistí posunutím kontaktu ve směru osy válce; M je totiž malá kladka, volně pohyblivá podél stupnice na ose rovnoběžné s osou válce. Způsob měření je stejný jako u můstku [71,IV] (viz 71.3).



Obr. 71,6. Dekadický můstek.

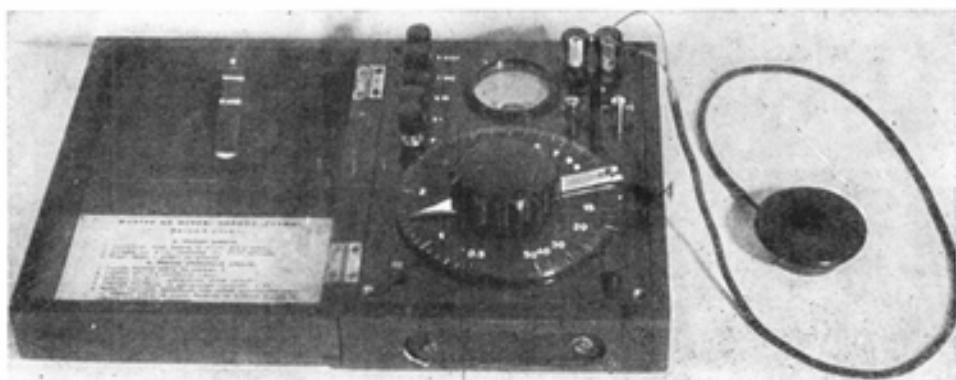
Jiný postup měření vyžaduje přístroj zvaný 71,VI
technický (dekadický) můstek (*universální reostat*). Schema jeho zapojení podává obr. 71,6, v němž je význam označení stejný jako na obr. 71,3. Jak naznačuje jméno, volí se poměr $R_a : R_b$ rovný mocninám deseti a hledá se odpor R , při kterém je galvanoměr na nule. Baterie i galvanoměr se zapínají jen na okamžik tlačítkovými pružnými kontakty. Měření viz 71.4.

Tyto technické můstky s vestavenou baterií a srovnávacími odpory konstruují se také tak, že je možno jimi měřit i odpor elektrolytů (metodou 75. 1), přepneme-li baterii na bzučák [76, II] rovněž vestavený do přístroje. Podrobný návod je na nich uveden (srov. snímek 71,7).

Pro rychlé (a ovšem méně přesné) měření odporů vyrábějí se přístroje zvané ohmmetry. Jsou to v podstatě můstky s pákovým dotykem, který se 71,VII
posouvá po prstencovém odporu, až se galvanoměr ustálí v nulové poloze. To se děje otáčením kruhové stupnice, na níž udává pevný ukazatel přímo odpor měřeného vodiče v ohmech. Suchá baterie i galvanoměr jsou vestaveny do přístroje zároveň se srovnávacími odpory R . Rozsah přístroje se mění přepi-

načem zařazováním různě velkého odporu R . Měřený odpor se připne ke svorkám přístroje. Na snímku 71,8 vidíme ohmmetr *Omega*, vyráběný firmou Metra, n. p., v Blansku, s rozsahem od 0,05 do 50 000 Ω .

Měření velmi malých odporů jednoduchými můstky je málo přesné. K takovým měřením je vhodný dvojitý můstek Kelvinův (Thomsonův). Jeho theo-

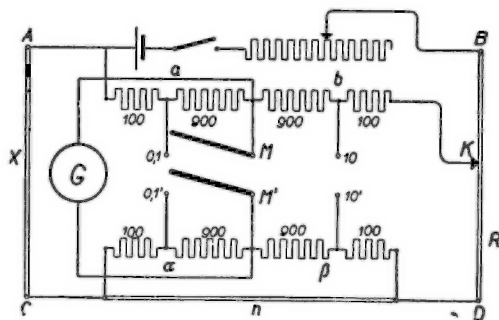


Obr. 71,7. Technický můstek na měření odporů kovů i elektrolytů fy Fysma. Přístroj obsahuje suchou baterii a galvanoměr k měření odporů kovů; k měření vodivosti elektrolytů zapojíme bzučák s přerušovačem a sluchátkem.

retické odůvodnění bylo podáno v čl. 62. Schema zapojení podává obrázek 62,7. Příslušný měřicí přístroj se konstruuje tak, že je možno volit poměr $a : b$, který podle 62 (27) musí být stejný jako poměr $\alpha : \beta$. Srovnávací odpor R se pak mění posouváním klouzavého dotyku po přímém drátě, až výchylka galvanoměru vymizí. Na přístroji takto upraveném a znázorněném na obr. 71,9 se tedy měření provádí *kompenzační metodou*. Nehledá se totiž poměr dvojice odporů X a R , nýbrž poměr obou se předem volí a mění se srovnávací odpor R tak, aby poměr $X : R$ měl zvolenou hodnotu.



Obr. 71,8. Ohmmetr *Omega* (0,05–50 000 Ω).



Obr. 71,9. Kompenzační *Kelvinův* můstek.

MĚŘICÍ METODY

Absolutní měření odporu provádí se methodou *přímou*, založenou na definici odporu (1). Ostatní metody jsou srovnávací; kromě metody *substituční* používá se zvláště method *můstkových*, a to dvojím způsobem:

a) volíme srovnávací odpor a měřením určíme jeho poměr k měřenému odporu (*vlastní metoda můstková*);

b) volíme tento poměr a hledáme takový srovnávací odpor, který je ve zvoleném poměru k měřenému odporu (*kompensační metoda*).

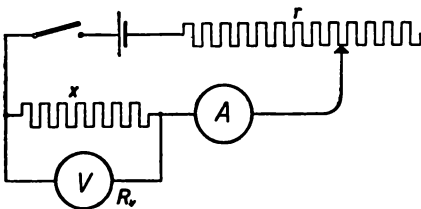
F. Konečně lze srovnávat odpory na základě vztahu 62 (14) tak, že je zapojíme za sebou do téhož proudového okruhu a změříme voltmetrem napětí na obou srovnávaných odporech, čímž dostaneme poměr jejich velikostí.

71.1. Přímá metoda

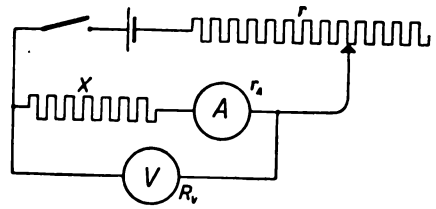
Pro přímou methodu se užívá dvojího zapojení:

1. Malý odpor x se měří podle schematu 71,10a, které je shodné se zapojením 68,9, tedy stejně jako 68 (9) plyne vztah

$$x = \left(\frac{I_A}{U_V} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \doteq \frac{U_V}{I_A}, \quad (5)$$



a



b

Obr. 71,10. Zapojení při přímé methodě měření a — malých, b — velkých odporů.

kde poslední přibližná hodnota platí tím přesněji, čím menší je měřený odpor proti odporu voltmetru.

2. Velký odpor X se měří podle 71,10b, kdy platí podle Ohmova zákona 62 (2)

$$U_V = (X + r_A) I_A$$

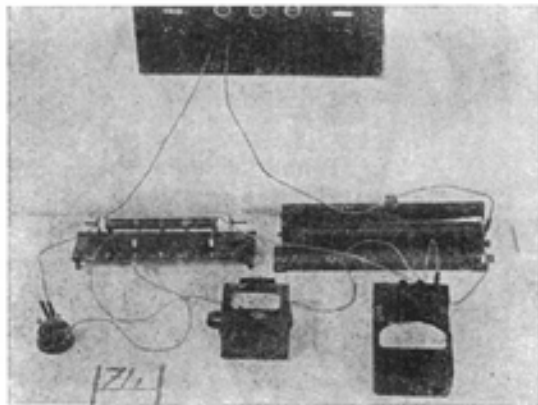
čili

$$X = \frac{U_V}{I_A} - r_A \doteq \frac{U_V}{I_A}; \quad (6)$$

poslední přibližná hodnota je tím správnější, čím menší je odpor r_A ampérmetru proti měřenému odporu. V obou případech postupujeme při měření tak, že měříme několikrát, pro různě velké výchylky ampérmetru i voltmetru. Výchytky upravíme regulačním odporem r tak, aby dosahovaly asi tří čtvrtin rozsahů stupnic, které vhodně volíme podle velikosti odporů.

71.2. Substituční metoda

Tato nahrazovací metoda se provádí tak, že v daném okruhu nahradíme měřený odpor X takovým známým odporem R , aby výchylka citlivého galvanoměru byla stejná jako pro měřený odpor. Úprava zapojení je naznačena na obr. 71,12, kde v okruhu akumulátoru A (nebo stálého článku) je zařazen předřazený odpor R_p , bočník R_b a komutátor K , abychom mohli měřit výchylky

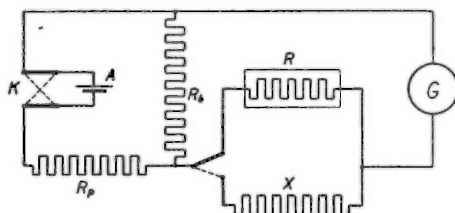


Obr. 71,11. Měření odporu (malého proti odporu voltmetru) přímou metodou.

galvanoměru na obě strany. Tyto odpory upravíme tak, aby výchylka n galvanoměru, kterou měříme na obě strany, činila asi $\frac{3}{4}$ jeho rozsahu. Pak vyhledáme v količkovém reostatu takový odpor R_1 , aby výchylka n_1 byla co nejbližší původní výchylce. To opakujeme se změněným odporem R_2 , pro nějž leží výchylka n_2 na opačné straně původní výchylky než pro R_1 . Přímkovou interpolací 18 (2) vypočteme hodnotu R příslušející výchylce pro měřený odpor X , takže

$$X = R = R_1 + \frac{n - n_1}{n_2 - n_1} (R_2 - R_1), \quad (7)$$

kde n , n_1 , n_2 značí průměry výchylek vpravo a vlevo.



Obr. 71,12. Substituční metoda.

Příklad. Je kontrolován količkový reostat o odporech 100, 200, 200, 500 Ω přesným količkovým reostatem. Při kontrole odporu 100 Ω bylo $R_p = 900 \Omega$, $R_b = 1 \Omega$.

Odpor	Výchylka galvanoměru		n
	vpravo	vlevo	
X	51,5 51,5	51,9 51,8	51,68
$R_1 = 100 \Omega$	50,9 50,9	51,4 51,35	51,14
$R_2 = 95 \Omega$	52,6 52,7	52,9 52,9	52,78
X	51,4 51,5	51,9 51,9	51,68

Tedy podle (7)

$$X = 100 + \frac{51,68 - 51,14}{52,78 - 51,14} (95 - 100) = 98,35 \Omega.$$

Výsledek kontroly:

Hodnota odporu v Ω				
Jmenovitá	100	200	200	500
Skutečná	98,4	196,0	196,8	494,4

71.3. Můstková metoda (*Wheatstone*)

Měření *Wheatstonovým* můstkem s posuvným dotykem je můstková metoda měření odporu (vlastní). Utvoříme zapojení 71,4, při čemž za srovnávací odpor R vezmeme takový kolíčkový reostat, abychom mohli přibližně volit $R = X$. Měříme-li vzdálenost a dotyku M od levého konce A drátu v milimetrech a je-li celková délka drátu 1000 mm, pak hledaný odpor podle (4)

$$X = \frac{a}{1000 - a} R. \quad (8)$$

Značí-li $\vartheta(a)$ absolutní chybu délky a , je podle 12 (3) prostá chyba výsledku

$$\vartheta(X) = \frac{\partial X}{\partial a} \vartheta(a) = \frac{1000}{(1000 - a)^2} R \vartheta(a)$$

a poměrná chyba

$$\vartheta_r(X) = \frac{\vartheta(X)}{X} = \frac{1000 \vartheta(a)}{a(1000 - a)} \quad (9)$$

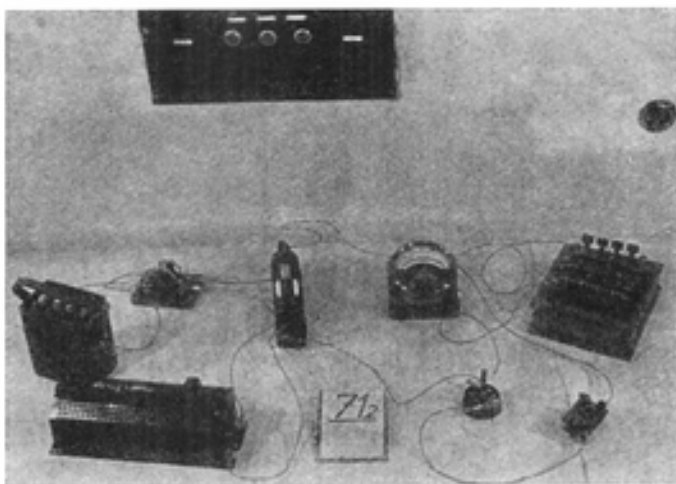
je nejmenší, když jmenovatel je největší, tedy když $1000 - 2a = 0$. Vidíme, že měření je nejpřesnější, pracujeme-li poblíž středu drátu ($a \doteq 500$ mm), t. j. když

$X \doteq R$. Pak můžeme vzít za poměrnou chybu přibližný výraz

$$\vartheta_r(X) \doteq 2 \frac{\vartheta(a)}{a} = 2 \vartheta_r(a), \quad (10)$$

takže číselně

$$\vartheta(X) \doteq 0,004 X \vartheta(a). \quad (10')$$



Obr. 71,13. Měření odporu substituční methodou.

Přitom ovšem značí $\vartheta(X)$ pravděpodobnou chybu výsledku, počítanou z náhodných měřicích chyb; nehledí se ani na chybu, kterou je zatížena hodnota srovnávacího odporu R , ani na chyby vzniklé tím, že k odporům X a R přistupují odpory přívodních drátů a odpory ve spojovacích kontaktech (svorkách). Také zde nepřehlídíme k chybám, které vznikají nestejnorodostí napjatého drátu, které by bylo třeba určit zvláštním měřením (*kalibrací můstku*).

Při měření větších odporů (desítek a set Ω) není třeba přihlížet k těmto „parasitním“ odporům. Jejich velikost se dá ostatně zjistit takto:

Vyřadíme odpor X a spojíme přívodní dráty (nakrátko). Změříme jejich odpor ξ můstkovou methodou, při čemž pomíjeme odpor ϱ přívodních drátů proti R . Pak vyřadíme odpor R a zařadíme odpor X a stejně změříme odpor ϱ přívodních drátů u R . Místo rovnice (8) pak máme

$$X = \frac{a}{1000 - a} (R + \varrho) - \xi. \quad (11)$$

Oprava se nedělá, volíme-li přívodní dráty k X i k R stejné, neboť pak

$$\xi/\varrho \doteq 1 \doteq X/R, \text{ a tedy } X/R = (X + \xi)/(R + \varrho).$$

K srovnání velmi malých odporů použijeme raději dvojitého můstku (dl. 71.5).

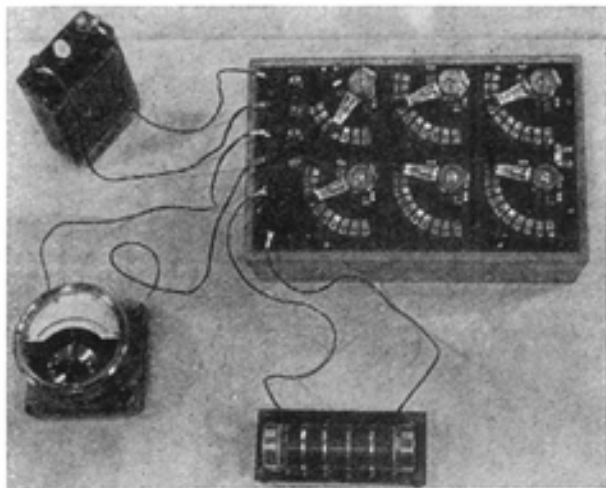
Pokud jde o nepřesnost R samého, vystříháme se jí zvyšovat silnějším proudem, který by způsobil stoupaní odporu. Také dobu průchodu proudem

omezíme na nejnutnější míru. K tomu je vhodný buď dvojitý klíč, kterým skoro současně zapneme akumulátor a galvanoměr, nebo bývá dotyk M zařízen tak, že se vodivě spojí s drátem teprve mírným tlakem. Pak není třeba klíče k_2 .

Potřeby: Pravitkový nebo válcový můstek [71,IV; V], přesný kolíčkový odpor [71,II] nebo normální odpor [71,I] (blízký měřenému odporu), citlivý galvanoměr [67,II; IV; V], regulační posuvný odpor [71,III], akumulátor (článek) [67,XII], dva klíče.

Postup

1. V zapojení 71,4 zařadíme celý odpor r , dotyk M umístíme doprostřed AB a zvolíme R rovně odhadnuté velikosti X .
2. Zapneme k_1 a lehce se dotkneme klíče k_2 , pozorujíc výchylku galvanoměru. Opakovanými dotyky klíče při různých polohách M zjistíme přibližný poměr $X : R$ a upravíme R tak, aby $X : R \doteq 1$.
3. Najdeme polohu M , při níž se galvanoměr spojením k_2 nevychyluje. Pak zmenšíme regulační odpor r a opravíme polohu M , aby galvanoměr zůstal opět v klidu. Tak postupujeme, až dostaneme přesnou polohu dotyku M při úplně vyřazeném odporu r . Zaznamenáme příslušné a .
4. Změníme mírně polohu M a zařadíme malý odpor r . Opakujeme poslední část úkonu 3. až dostaneme novou hodnotu a při nejvyšší citlivosti.
5. Opakujeme úkon 4 několikrát (na př. pětkrát) a ze zjištěných hodnot a vezmeme průměr a určíme podle 12 (32) pravděpodobnou chybu δ (a).
6. Vyřadíme odpor X a zjistíme jedním měřením odpor přívodních drátů ξ .
7. Vyřadíme také odpor R , spojíme přívodní dráty a zjistíme poměr $\rho : \xi$.
8. Dosazením do (11) vypočteme X , k němuž připojíme (s oběma znaménky), pravděpodobnou chybu (10^{\cdot}).



Obr. 71,14. Měření odporu technickým můstkem.

71.4. Měření kompenzační methodou (technickým můstkem)

Při této methodě volíme předem poměr odporů $R_a : R_b$ a měníme srovnávací odpor R , až galvanoměr zůstává při spojení proudu v nulové poloze. Nejčastěji se podaří pouze najít dvě hodnoty R , pro které galvanoměr nezůstává přesně na nule, ale vychyluje se co nejméně na opačné strany. U technických můstků dekadických [71,VI] lze měnit poměr $R_a : R_b$ po celých mocninách deseti. Postupujeme tak, že zvolíme nejprve oba odpory stejné (na př. 1 Ω),

tedy $R_a : R_b = 1 : 1$, a najdeme dva nejméně odlišné odpory s opačnými výchylkami galvanoměru. Nato zvýšíme odpor na desateronásobek menší z obou hodnot a volíme poměr $R_a : R_b = 1 : 10$. Pak najdeme zase dvě hodnoty R s nejmenšími oboustrannými výchylkami. Tím dostaneme stejně úzké meze jako dříve, ale pro 10 X . Postup opakuje pro všechny poměry $R_a : R_b = 1 : 10^n$, které máme na můstku. Postup měření je zřejmý z dalšího příkladu.

Příklad. Byl měřen odpor bočnicku.

Odpor R bylo možno měnit po 0,1 Ω . Přehled měření:

$R_a : R_b = 1 : 10^n$	Odpor při výchylce	
	vlevo	vpravo
$n = 0$	0,7 Ω	0,8 Ω
1	7,3	7,4
2	73,6	73,7
3	736,4	736,5
$X = 10^{-3} \cdot 736,45 \Omega = 0,736 45 \Omega$		

Chyba tohoto výsledku by byla za předpokladu naprosté správnosti přístroje menší než $5 \cdot 10^{-5} \Omega$.

71.5. Měření malých odporů dvojitým můstkem Kelvinovým

K měření malých odporů je vhodný *Kelvinův* dvojitý můstek [71,VIII], při němž není třeba přihlížet k odporům přívodních drátů. Lze jím proto měřit dosti přesně i odpory kovových tyčí, bočnicků a podobně. Měření se provádí kompenzační metodou v podstatě stejně jako při měření technickým můstkem jednoduchým, jak jsme vyložili v 71.4.

Zapojení kompenzačního *Kelvinova* můstku, sestaveného podle 71.9, je provedeno podle schématu 62.7, při čemž jsou v obou schématech stejnohlé body stejně označeny. Měřený odpor X upneme tedy do svorek A a C , baterii s regulačním odporem připojíme mezi A a B a galvanoměr k svorkám M a M' . Odpor X srovnáváme na př. s odporem části tyče mezi D a posuvným kontaktem K , kterému dáme takovou polohu, aby galvanoměr byl na nule. Pak je X rovno odporu R části DK srovnávacího odporového etalonu. Odpor R je dán výrazem

$$R = \frac{DK}{DB} R_0,$$

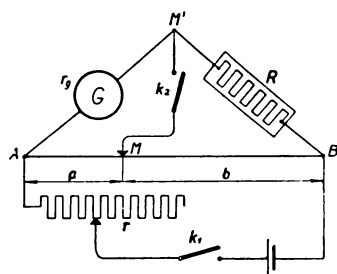
značí-li R_0 odpor celé tyče DB . Lze jej na příklad vypočítat z měrného odporu (viz 72) nebo ze známé specifické vodivosti kovu, z něhož je tyč zhotovena, a z jejich rozměrů. Je-li X příliš velké nebo malé proti R_0 , spojíme svorky M a M' nakrátko s kontakty 10 a 10' nebo s 0,1 a 0,1', čímž změním poměr $X : R$ na 10 : 1 nebo 1 : 10. Pak ovšem $X = 10 R$ nebo $X = \frac{1}{10} R$.

71.6. Odpor galvanoměru — měření Thomsonovou metodou

Je jasno, že odpor galvanoměru se dá měřit stejnými metodami jako jiné odpory. K tomu ovšem potřebujeme další měřicí přístroj, další galvanoměr. Ně-

kteřé metody lze však upravit tak, že vystačíme s galvanoměrem, jehož odpor měříme. Velmi jednoduše lze pro to podle *Thomsona* upravit můstkovou metodu 71.3. V zapojení 71,4 odstraníme galvanoměr z můstku MM' , takže uzly M , M' jsou spojeny nakrátko přes dotykový klíč k_2 . Měřený galvanoměr pak zapneme místo neznámého odporu X . Tím dostaneme spojení 71,15, o němž uvažujeme takto: Spojíme-li klíčem k_2 body M a M' nakrátko, vyrovnají se jejich potenciály; jestliže před spojením klíče k_2 byly různé, změní se tím také proud v galvanoměru a rovněž výchylka. Jsou-li však potenciály v M a M' stejné i při otevřeném klíči k_2 , výchylka galvanoměru se spojením klíče k_2 nezmění. Najdeme-li tedy takovou polohu dotyku M na drátě AB , při níž se výchylka galvanoměru zapojením klíče k_2 nemění, mají body M a M' i při otevřeném klíči stejný potenciál a je splněna základní podmínka obvyklé můstkové metody (galvanoměr zařazený mezi M a M' by byl trvale na nule). Platí tedy úměra 62 (22) nebo 71 (4), z níž plyne

$$r_g = \frac{a}{b} R. \quad (12)$$



Obr. 71,15. Thomsonova metoda

Postup měření je jinak stejný jako postup obšírně vyložený v 71.3 s tím rozdílem, že měřený galvanoměr má ovšem nenulovou výchylku, která se při správné poloze dotyku M nesmí měnit spojením klíče k_2 .

71.7. Vnitřní odpor článku (akumulátoru) — zjišťování z elektromotorické síly a svorkového napětí

Svorkové napětí článku spojeného přes vnější odpor R_e je vždy menší než elektromotorická síla otevřeného článku \mathcal{E} , jak bylo vyloženo v 69. Připojíme-li k svorkám článku (akumulátoru) jen voltmetr, jehož odpor R_V je veliký proti vnitřnímu odporu x článku, je podle druhého *Kirchhoffova* zákona 62 (11)

$$\mathcal{E} = (R_V + x) I_V \doteq R_V I_V = U_V,$$

značí-li I_V proud jdoucí voltmetrem a U_V napětí čtené na voltmetru. Připojíme-li však ke svorkám článku zároveň vodič s odporem R_e , klesne napětí na svorkách na hodnotu $U = R_e I_A$, kde I_A je proud v odporu R_e . Podle 62 (11) ovšem

$$\mathcal{E} = xi + R_e I_A = xi + U,$$

při čemž proud i , jdoucí článkem s vnitřním odporem x , je velmi přibližně roven I_A , ježto část tohoto proudu, probíhající voltmetrem, můžeme vzhledem k jeho velikému odporu pominout.

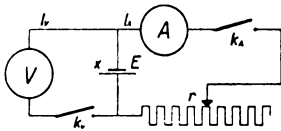
Vnitřní odpor článku je tedy dán výrazem

$$x = \frac{U_V - U}{I_A}. \quad (13)$$

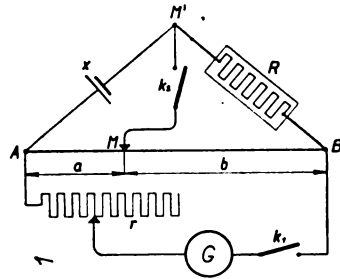
Potřeby: Voltmetr [68,II], ampérmetr [67,VI], regulační odpor [71,III], dva klíče k_V a k_A .

Postup

1. Utvoříme zapojení 71,16.
2. Při otevření klíči k_A změříme voltmetrem elektromotorickou sílu $E = U_T$.
3. Vypneme klíč k_T . Spojíme klíčem k_A proud v okruhu ampérmetru a upravíme posuvným odporem r jeho výchylku na hodnotu pokud možno velkou. Změříme proud I_A .
4. Zapojíme klíčem k_T voltmetr (čímž se nesmí ztlačně změnit čtení ampérmetru) a změříme svorkové napětí U (při spojení k_A).
5. Opakujeme několikrát postupně úkony 2, 3, 4 a vypočteme průměry získaných hodnot.
6. Dosazením do (13) vypočteme vnitřní odpor x článku.



Obr. 71,16. Měření vnitřního odporu článku.



Obr. 71,17. Manceova metoda.

71.8. Vnitřní odpor článku — měření můstkovou metodou (Mance)

Jednoduchou *Thomsonovu* metodu 71.6 upravíme pro měření vnitřního odporu článků a akumulátorů prostě tak, že v zapojení 71,15 zaměníme galvanoměr a baterii. Tím dostaneme schema 71,17, z něhož je zřejmo, že se (při spojení klíči k_1) uzavřením klíče k_2 v můstku MM' změní výchylka galvanoměru tím více, čím více se liší potenciály na jeho koncích M a M' . Mají-li však oba konce stejný potenciál, nemá dotyk klíče k_2 vliv na výchylku galvanoměru.

Z toho plyne, že postup měření je zcela stejný jako u *Thomsonovy* metody měření odporu galvanoměru 71.6 (srov. 71.3) a že vnitřní odpor článku je dán vzorcem (12)

$$x = \frac{a}{b} K.$$

Vzhledem k tomu, že odpor článků a akumulátorů bývá velmi malý, doporučuje se použít pro *Manceovu* metodu dvojitého můstku Kelvinova [71,VIII]. Připojíme ovšem v 71,9 k svorkám A a C měřený článek a k svorkám A, B galvanoměr; svorky M a M' pak spojíme drátem přerušeným dotykovým klíčem. Že uvedený vzorec platí i pro můstek *Kelvinův*, je nejlépe vidět ze schematu 62,7.

72. MĚRNÝ ODPOR PEVNÝCH VODIČŮ

Definice. Měrný odpor ρ je odpor R vodiče, dělený jeho délkou l (rozměrem ve směru proudu) a násobený jeho průřezem S (kolmým ke směru proudu):

$$\rho = R \frac{S}{l}. \quad (1)$$

Převrácená hodnota $1/\rho$ se nazývá *specifická (elektrická) vodivost*.

$$\text{Jednotky. MKSA } [\rho] = \Omega \text{ m} = 10^9 [\rho]_p. \quad (2)$$

Absolutní: elektrostatická: $[\rho]_{as} = [R]_{as} \text{ cm} = \text{s}$,

elektromagnetická: $[\rho]_{am} = [R]_{am} \text{ cm} = \text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Praktické jednotky jsou dvojití; první dostaneme, měříme-li rozměry vodiče v cm:

$$[\rho]_p = \Omega \text{ cm } 10^{-2} \cdot [\rho] \quad (3)$$

druhou, měříme-li délku vodiče v m a průřez v mm^2 :

$$[\rho']_p = \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-4} [\rho]_p. \quad (4)$$

Pro měrný odpor ρ měřený v jednotkách (2) a měrný odpor ρ' , vyjádřený v jednotkách (4), plyne z (4)

$$\rho' = 10\,000 \rho,$$

při čemž ρ je číselně rovno odporu krychle s hranou 1 cm a ρ' odporu metrového drátu průřezu 1 mm^2 [srov. 5 (33; 35)].

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Měření měrného odporu provedeme tak, že změříme odpor vodiče, jehož rozměry jsou pokud možno pravidelné, abychom mohli určit délku a zejména průměr vodiče s postačující poměrnou přesností. Proto bychom měli volit vodič ve tvaru tyče, což ovšem klade větší nároky na absolutní přesnost měření odporu. Z důvodů uvedených v 12 snažíme se určit všechny tři veličiny ve výrazu (1) s přibližně stejnou poměrnou chybou; počítáme-li tedy průřez S z průměru drátu (tyče), je třeba určit průměr s poloviční poměrnou chybou, jak plyne z 12 (5). Měření rozměrů vodiče konáme methodou 31.1. K měření odporu lze použít různých method; nejvhodnější jsou ovšem metody můstkové 71.3; 4; 5. Při přesných měřeních — zvláště měříme-li vzorky ve tvaru tyčí — dáme přednost poslední z nich, ježto u dvojitého můstku neruší odpory přívodů a dotyků.

Protože specifický odpor závisí na teplotě (viz 73), je třeba zjistit také teplotu vodiče. Je rovna teplotě okolí, pokud ovšem proud jdoucí vodičem při měření nezvýší znatelně teplotu. Proto se nehodí k tomuto měření metody, vyžadující poněkud silnější proud.

73. TEPLOTNÍ SOUČINTEL ODPORU

Definice. Teplotní součinitel (koeficient) odporu α je poměrná změna odporu vodiče, dělená malou změnou teploty dt , která změnu odporu způsobí:

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{dt}, \quad (1)$$

při čemž R_0 je odpor při teplotě 0°C .

Jednotky. Ve všech soustavách $[x] = ^\circ\text{C}^{-1}$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Podle (1) je teplotní součinitel dán derivací odporu podle teploty. Závislost odporu kovů na teplotě je *přibližně přímková*,¹⁾ takže můžeme pokládat α v menším rozmezí teplot za stálé a psát

$$R = R_0 (1 + \alpha t). \quad (2)$$

Z této rovnice můžeme počítat α , aniž měříme odpor R_0 při 0 °C. Stačí změřit odpory R_1, R_2 pro libovolné teploty t_1, t_2 , dosadit do (2), dělením vyloučit R_0 a vypočítat. Tak dostaneme

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1}. \quad (3)$$

Měříme ovšem odpor pro několik různých teplot a z řady těchto hodnot bychom měli určit nejpravděpodobnější hodnotu teplotního součinitele. Přesný výpočet methodou nejmenších čtverců (podle 14) je dosti pracný, a proto je výhodnější použít skupinové metody 15 (23). Měření seřazená podle stoupající teploty rozdělíme na dvě přibližně stejně početné skupiny a vypočteme průměry hodnot t a R v každé skupině:

$$\bar{t}_I, \bar{R}_I; \bar{t}_{II}, \bar{R}_{II}, \quad (4)$$

kteří dosadíme do (3) za $t_1, R_1; t_2, R_2$, takže

$$\alpha = \frac{\bar{R}_{II} - \bar{R}_I}{\bar{R}_I \bar{t}_{II} - \bar{R}_{II} \bar{t}_I} \quad (5)$$

Toto přibližné vyrovnání můžeme také provést graficky podle návodu 16(2).

Narýsujeme body o souřadnicích (t, R) a sestrojíme těžiště I levé poloviny a těžiště II pravé poloviny bodů. Souřadnice těchto těžišť $t_I, R_I; t_{II}, R_{II}$ jsou rovny průměrům (4), a lze tedy určit α ze vzorce (5), kam dosadíme místo počítaných průměrů souřadnice těžišť odměřené v grafu.

Úsečka spojující I a II udává závislost odporu na teplotě a z rozptylu bodů do okolí této úsečky můžeme posoudit jednak přesnost měření, jednak lineárnost zkoušené závislosti. Prodloužená úsečka protne osu $t = 0$ v bodě určujícím R_0 a z rovn. (2) lze α počítat také podle rovnice

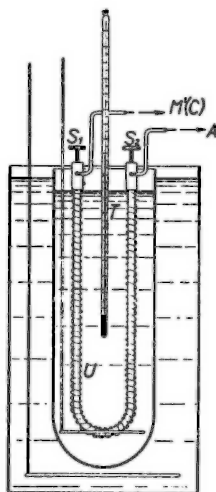
$$\alpha = \frac{\bar{R}_{II} - R_0}{R_0 \bar{t}_{II}}.$$

Volíme souřadnice těžiště pravé poloviny, které jsou určeny s větší poměrnou přesností. Odpor měříme nejlépe můstkovou methodou.

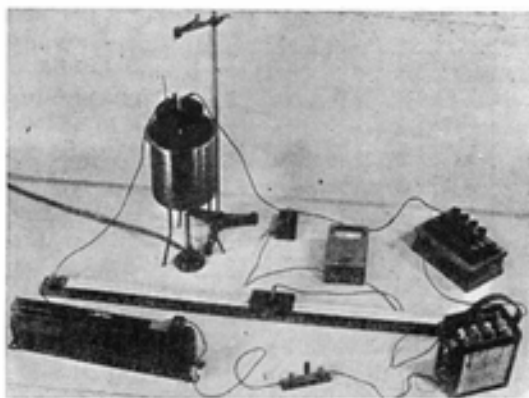
73.1. Teplotní součinitel — měření odporu můstkovou methodou

Měření provádíme některou z method 71.3; 4; 5. Drát z měřeného kovu navineme na skleněnou trubici U , opatřenou svorkami S_1, S_2 , k nimž připojíme konce drátu. Trubicí s drátem ponoříme do oleje v širší skleněné nádobě s míchačkou nebo raději do širší skleněné trubice s olejem, kterou vnoříme do

většího vodního kalorimetru. V obou případech zahříváme lázeň velmi zvolna a měříme teplotu oleje teploměrem T , umístěným mezi oběma rameny trubice U . Užijeme-li vodního kalorimetru [54,I], zvýšíme teplotu (plynovým kahanem nebo elektrickým topným tělesem ponořeným do vody) o několik stupňů, přerušíme ohřívání a za stálého míchání vyčkáme ustálení teploměru a ihned změříme odpor. Zahříváme-li přímo větší olejovou lázeň, můžeme postupovat stejně nebo také tak, že lázeň velmi zvolna zahříváme a posuneme vždy o něco dotyk nebo zvětšíme mírně srovnávací odpor R a čteme teplotu v okamžiku, kdy galvanoměr projde nulou.



Obr. 73,1. Schema měření teplotního součinitele odporu.



Obr. 73,2. Měření teplotního součinitele odporu.

Potřeby: Odporový můstek jednoduchý [71,IV; V] nebo dvojitý [71,VIII] s kolečkovým reostatem [71,II] nebo odporovým etalonem, galvanoměr [67,II; IV; V], akumulátor [67,XII], trubice U se svorkami, olejová lázeň, kahan (elektr. topné těleso).

Postup

1. Měřený odpor upravený podle obr. 73,1 připojíme k svorkám A a M' zapojení 71,4 nebo 71,6 nebo k svorkám A a C můstku 71,9.
2. Odpor měříme jednoduchým můstkem methodou 71.3 nebo 71.4, dvojitým můstkem podle 71.5.
3. Měření provedeme nejprve při počáteční teplotě t_1 lázně (R_1).
4. Pak lázeň pomalu zahříváme a změříme R_k postupně pro různé teploty t_k , přibližně stejně od sebe vzdálené tak, abychom měli celkem sudý počet dvojic t, R .
5. Vypočteme průměry t a R pro první polovinu měření a stejně učiníme s druhou polovinou. Dosazením do (5) vypočteme α .
6. Výsledky měření znázorníme graficky, sestrojíme těžiště obou polovin bodů, změříme jejich souřadnice a dosazením těchto hodnot do vzorce (5) určíme α . Srovnáme oba výsledky a ověříme lineárnost zjištěné závislosti.

74. CHARAKTERISTIKA VODIČE

Definice. Charakteristika vodiče je křivka závislosti proudu na napětí,

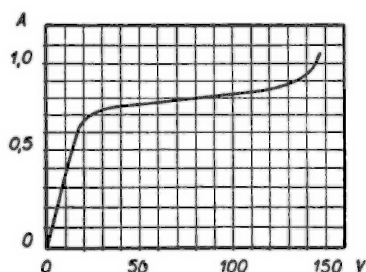
$$I = F(U). \quad (1)$$

Proud je podle *Ohmova zákona* 62 (2) úměrný napětí. Konstanta úměrnosti

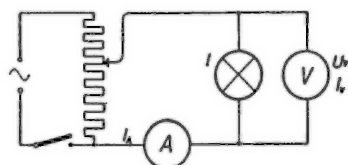
(převrácený odpor R) však podle 73 závisí na teplotě vodiče, která stoupá s proudem. Ježto pak proud obecně stoupá s napětím, přejde úměrnost v obecnější závislost. Charakteristika není obecně přímková, při čemž její směrnice je rovna převrácenému odporu, závislému na napětí:

$$\frac{dI}{dU} = \frac{1}{R}.$$

Charakteristika prochází vždy počátkem souřadnicové soustavy (U, I) a její směrnice v tomto bodě je rovna převrácenému odporu (vodivosti) vodiče při teplotě místnosti. Závisí tedy její tvar na teplotě okolí a ovšem i na způsobu uložení vodiče, na prostředí, kterým je obklopen. Proto musí být tyto podmínky při určení charakteristiky přesně definovány. Tak je tomu na př. u žárovek nebo u některých odporů upravených vhodným způsobem. Praktický význam

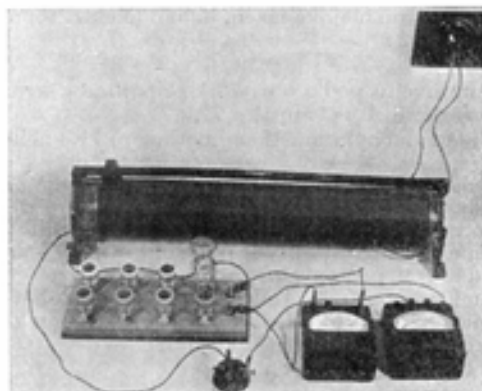


Obr. 74,1. Charakteristika variátoru.



Obr. 74,2. Zapojení při zjišťování charakteristiky žárovky.

má zejména charakteristika t. zv. **variátoru (železného odporu)**. Je to železný drátek napjatý ve skleněné baňce plněné vodíkem (který má poměrně velkou tepelnou vodivost) v úpravě zcela podobné obyčejné žárovce. Charakteristika variátoru má tvar patrný z obr. 74,1. Obor napětí, v němž je křivka přibližně

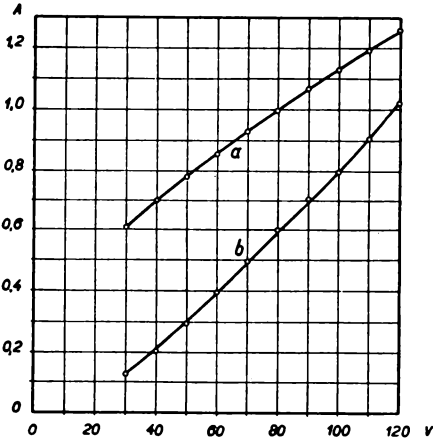


Obr. 74,3. Zjišťování charakteristiky žárovky a variátoru.

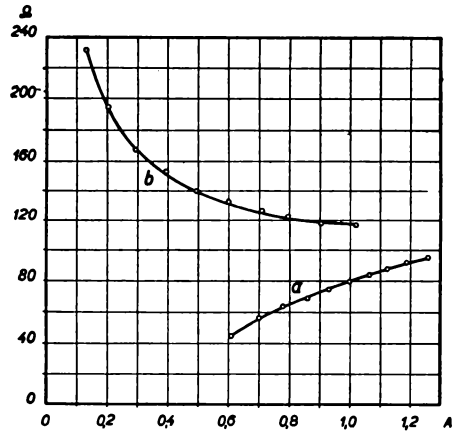
vodorovná, nazývá se **regulační obor**; pokud se totiž mění napětí uvnitř tohoto oboru (v okolí inflexního bodu), zůstává proud takřka stálý. Zařazením variátoru do okruhu spotřebiče regulujeme proud, t. j. udržujeme jej konstantní při kolísání napětí. K zjištění charakteristiky použijeme zapojení 74,2, jímž poten-

ciometricky měníme napětí na vodiči (na př. žárovce), které měříme zároveň s proudem. Užitím známých zákonů pro větvení proudů 62 (10; 11) plynou ze schématu 74,2 vztahy

$$I = I_A - I_V, \quad I_V = \frac{U_V}{R_V}, \quad I = \frac{U}{R} = \frac{U_V}{R},$$



Obr. 74,4. Charakteristiky žárovek.



Obr. 74,5. Závislost odporu na proudě.

kde I , U , R se vztahují k vodiči (žárovce), I_A je proud měřený ampérmetrem a I_V , U_V , R_V příslušejí voltmetru. Je tedy

$$I = I_A - \frac{U}{R_V}, \quad R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_A - \frac{U}{R_V}}. \quad (2)$$

Mění-li se odpor R málo s napětím, blíží se křivka (1) přímce; pak je lépe místo vlastní charakteristiky znázornit závislost odporu na proudě. Postup měření najdeme v následujícím příkladu.

Příklad. Charakteristiky žárovek.

V zapojení 74.2 byla měřena závislost proudů na napětí (a) u wolframové žárovky a (b) u dvou stejných uhlíkových žárovek, spojených za sebou. Odpor voltmetru $R_V = 2700 \Omega$. Výsledky měření podává tabulka:

$U = U_V$	$I_A \text{ v mA}$		$I \text{ v mA}$		$R \text{ v } \Omega$	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
30 V	620	140	609	129	49,3	233,0
40	715	220	700	205	57,1	195,1
50	798	315	780	297	64,1	168,4
60	880	415	858	393	69,9	152,7
70	955	522	929	498	75,3	140,5
80	1025	630	995	600	80,4	133,3
90	1100	740	1067	707	84,2	127,3
100	1165	835	1128	798	88,6	125,4
110	1230	945	1189	904	92,5	118,0
120	1305	1065	1261	1021	95,1	117,5

Pro napětí postupující po 10 V byl měřen proud I_A ampérmetrem a z něho vypočten podle (2) proud I jdoucí žárovkou s kovovým (a) i s uhlíkovým (b) vláknem. Z hodnot uvedených v tabulce sestrojeny charakteristiky (a), (b) (obr. 74,4). Obě jsou málo zakřiveny, a proto byly sestrojeny na obr. 74,5 také křivky závislosti odporu na proudou.

75. MĚRNÁ VODIVOST ELEKTROLYTU

Definice. Měrná vodivost γ elektrolytu je převrácený měrný odpor ϱ :

$$\gamma = \frac{1}{\varrho} = \frac{l}{S} \frac{1}{R}, \quad (1)$$

kde l je délka sloupce elektrolytu ve směru proudu a S jeho průřez kolmý k tomuto směru.

Jednotky. MKSA: $[\gamma] = \Omega^{-1} \text{ m}^{-4} = 10^{-2} [\gamma]_p$.

Jednotka praktická:

$$[\gamma]_p = \frac{1}{[\varrho]_p} = \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = 100 [\gamma]. \quad (2)$$

V těchto jednotkách vyjádřená měrná vodivost je číselně rovna vodivosti krychle o hraně 1 cm.

Přístroje

Měrnou vodivost elektrolytů měříme ve vhodných odporových nádobkách s pevnými nebo posuvnými elektrodami. Velikost a vzdálenost elektrod se volí podle vodivosti měřené kapaliny.

75,I Nejužívanější odporové nádoby s pevnými elektrodami jsou znázorněny na obr. 75,1. První tři typy jsou vhodné pro málo vodivé kapaliny. Tvar *a* umožňuje přímé měření teploty elektrolytu, který zahříváme v lázni za stálého míchání míchačkou. Elektrody jsou platinové nebo poplatinované, po př. pokryté platinovou černí, kterou na nich vyloučíme elektrolyticky. Jejich přívody jsou izolovány zatavenou skleněnou trubicí. Tvar *b* se vloží do lázně, jejíž teplotu měříme. Ponorná nádoba *c* se vnoří do nádoby s měřenou kapalinou. Pro vodivější kapaliny se používá nejčastěji typu *d*, který vkládáme do vodní lázně, nebo ponorného typu *e*, jehož elektrody tvoří válečky nasazené ve skleněné trubicí. V prvním případě mají elektrody tvar kulových vrchlíků, v druhém jsou to dva platinové prstence, nasazené na zatavené skleněné trubicí s přívodními drátky.

75,II Odporové nádoby s posuvnými elektrodami mají tu přednost, že se celkový odpor elektrolytu dá měnit podle potřeby. Kohlrauschova nádoba tvaru **U** (obr. 75,2) je dokonce cejchována tak, že ze změřeného odporu můžeme vypočítat přímo měrnou vodivost elektrolytu.

Naplníme-li danou nádobku týmž objemem různých elektrolytů, jsou jejich odpory X při stálé poloze elektrod úměrný jejich měrným odporům, tedy převráceným hodnotám jejich měrných vodivostí:

$$X = \frac{A}{\gamma};$$

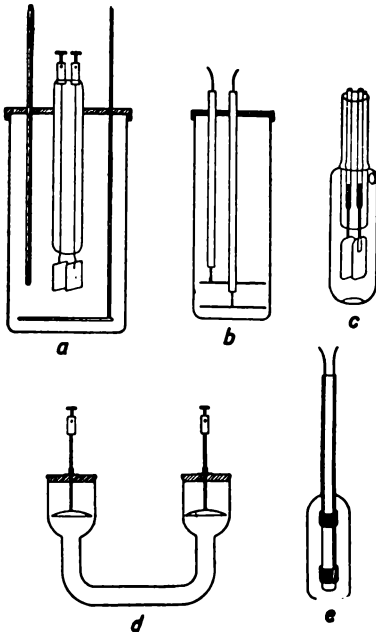
veličina

$$A = \gamma X$$

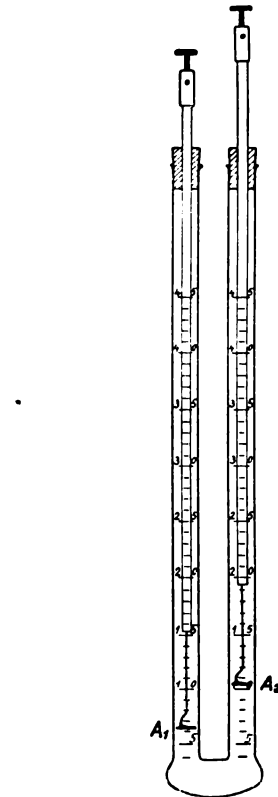
(3)

je t. zv. *odporová kapacita* nádoby, která pro daný objem elektrolytu je konstantou nádoby, stejnou pro všechny elektrolyty. Známe-li její hodnotu v m^{-1} vypočteme vodivost elektrolytu v $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ podle rovnice

$$\gamma = \frac{A}{X}, \quad (4)$$



Obr. 75,1. Odporové nádoby s pevnými elektrodami.



Obr. 75,2. Odporová nádoba s nastavitelnými elektrodami (Kohlrausch).

kde X je odpor v Ω . U některých nádobek (na př. *b*) lze A určit z rozměrů a vzdálenosti elektrod. Bezpečnější je zjistit A měřením odporu R_0 kapaliny známé měrné vodivosti γ_0 z rovnice (3). Užívá se k tomu některých *normálních kapalin*, nejčastěji roztoků, a to buď nasycených, nebo známé koncentrace. Měrné vodivosti některých normálních kapalin jsou uvedeny v tab. 75, I pro teploty $t = 15^\circ - 25^\circ \text{C}$. Koncentrace vodních roztoků je udána v procentech váhy roztoku. Normální roztok chloridu draselného obsahuje 74,55 kg (1 kilogrammol) KCl v 1 litru roztoku, 1/10 normální roztok 1 desetinu tohoto množství a t. d.

MĚŘICÍ METODY

Měření měrné vodivosti γ provádí se na základě rovnice (4) tak, že se změří odpor X elektrolytu v odporové nádobce a vypočte se γ . Měříme-li odpor některou z metod čl. 71 *stejnoseměrným* proudem, nastává vylučování iontů na

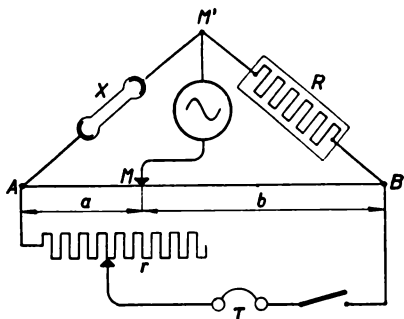
Tabulka 75,I. Měrná vodivost normálních kapalin v $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

t °C	H_2SO_4 30 %	NaCl (nasyc. 26,4 %)	MgSO_4 17,4 %	KCl		
				normál.	1/10 norm.	1/100 norm.
15	70,28	20,146	4,555	9,252	1,048	0,1147
16	71,51	20,629	4,676	9,441	1,072	1173
17	72,75	21,115	4,799	9,631	1,095	1199
18	73,98	21,605	4,922	9,822	1,119	1225
19	75,22	22,099	5,046	10,014	1,143	1251
20	76,45	22,596	5,171	10,207	1,167	1278
21	77,68	23,096	5,297	10,400	1,191	1305
22	78,90	23,600	5,424	10,594	1,215	1332
23	80,13	24,11	5,521	10,789	1,239	1359
24	81,35	24,62	5,679	10,984	1,264	1386
25	82,57	25,13	5,808	11,180	1,288	1413

elektrodách a změna koncentrace roztoku — elektrody se polarisují. Tím se sníží napětí na elektrodách a odpor se zdánlivě zvětší. Proto lze použít stejnosměrného proudu jen u velmi málo vodivých kapalin (na př. pro čistou vodu $\gamma = 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, ve vakuu $4 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, ether $10^{-13} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$). Při jejich velkém odporu vzniká jen velmi slabý proud a polarisaci lze pomíjet. U vodivějších kapalin se používá pravidelně proudů *střídavého*, jehož zdrojem bývá buď malý inductor s přerušovačem, nebo bzučák [76,II], nebo i elektronkový vysílač [76,III] (oscilační okruh s triodou). Měřicím přístrojem je nejčastěji elektromagnetický telefon (sluchátka) nebo jiný citlivý přístroj pro střídavý proud jako dynamometr [76,IV] nebo galvanoměr s thermočlánekem [76,VIII]. Nejběžnější jsou metody můstkové, které se poněkud liší podle druhu použité odporové nádoby. Pro nádoby s pevnými elektrodami užívá se vlastní metody můstkové 71.3, kdežto pro nádoby s posuvnými elektrodami lze užít i metody kompenzační 71.4.

75.1. Můstková metoda se stálou odporovou kapacitou

Tato metoda je metoda *Wheatstonova* můstku, upravená pro střídavý proud. Zdrojem proudu je inductor nebo bzučák a měřicím přístrojem obvykle telefon nebo lépe sluchátka nasazená na obě uši. Lze použít zapojení obdobného 65,2 pro srovnávání kapacit. Častěji se zaměňuje poloha telefonu a bzučáku, což vede k zapojení naznačenému na obr. 75,3. Měření se provádí pravítkovým nebo válcovým můstkem s posuvným dotykem. Inductor nebo bzučák má být vzdálen nejméně metr od telefonu, aby naň nepůsobil přímo. Ani tak se obvykle nepodaří najít takovou polohu M , aby zvuk ve sluchátkách úplně ustal, což může být způsobeno kapacitou nebo indukčností nádoby nebo odporu a pod.; pak je nutno hledat polohu, kdy je zvuk nejslabší. Toto minimum bývá nejostřejší,



Obr. 75,3. Měření se stálou odporovou kapacitou.

je-li odpor X nádoby mezi 30 až $10^3 \Omega$; pro velmi velké odpory (řádu $10^5 \Omega$) je málo význačné. Na to je třeba mít zřetel při volbě odporové nádoby. Postup měření je v podstatě stejný jako při měření odporu kovů methodou 71.3. Vzhledem k dosti velkému odporu X elektrolytu lze většinou pomíjet odpory přívodů a počítat z rovnice 71 (8)

$$X = \frac{a}{1000 - a} R, \quad (5)$$

kde a značí vzdálenost AM v mm, jestliže $AB = 1000$ mm.

Měření se pohodlně provádí universálním můstkem [71,VI] způsobem uvedeným při popisu tohoto přístroje.

Potřeby: Odporová nádoba stálé kapacity [75,I], můstek pravítkový nebo válcový [71,IV; V], nebo universální technický můstek [71,VI], kolíčkový reostat [71,II], bzučák [76,II] nebo induktorek s baterií několika voltů, sluchátka (telefon), regulační odpor, dva klíče, teploměr.

Postup

1. Sestavíme zapojení 75,3 při čemž primární cívku bzučáku spojíme přes klíč s baterií.

2. Podle vodivosti elektrolytu volíme nádobku tak, aby její odpor X byl v mezích 30 až několika tisíc ohmů a v kolíčkovém reostatu volíme odpor R přibližně rovný X . Změříme teplotu elektrolytu.

3. Vyhledáme takovou polohu M , aby zvuk ve sluchátkách byl nejslabší, což opakujeme nejméně desetkrát, a z hodnot vezmeme průměr. Určíme znovu teplotu elektrolytu.

4. Odpor pro zjištěnou teplotu vypočteme z (5), event. určíme i jeho pravděpodobnou chybu ze 71 (9) nebo 71 (10').

5. Vyprázdníme nádobku do odměrného válce a určíme objem elektrolytu. Nádobku dobře promyjeme a nakonec vypláchneme menším množstvím některé normální kapaliny, uvedené v tab. 75,I.

6. Postupem 2, 3, 4 určíme odpor X_0 téhož objemu normální kapaliny, při čemž dbáme na přesné určení její teploty.

7. Najdeme v tab. I. specifickou vodivost γ_0 užitě kapaliny (interpolací) a vypočteme podle (3) odporovou kapacitu $A = \gamma_0 X_0$.

8. Měrná vodivost γ měřeného elektrolytu je dána rovnicí (4). Její poměrná pravděpodobná chyba podle 12 (10)

$$\theta_r(\lambda) = \sqrt{\theta_r^2(X) + \theta_r^2(A)} = \sqrt{\theta_r^2(X) + \lambda_0^2 \theta_r^2(X_0)},$$

kde chybu X_0 vypočteme stejně jako chybu X .

9. Při měření závislosti měrné vodivosti na teplotě zahříváme velmi zvolna odporovou nádobku ve vodní lázni a určíme závislost jejího odporu na teplotě (srov. 73); z řady odporů zjištěných pro různé teploty vypočteme podle (4) příslušné hodnoty vodivosti. Závislost znázorníme graficky.

75.2. Kompensační metoda s proměnnou odporovou kapacitou

Tato metoda je velmi pohodlná, je-li odporová nádoba cejchována v hodnotách odporové kapacity. Ujijeme-li Kohlrauschovy nádoby 75,2, čteme polohy A_1 , A_2 obou elektrod a odporová kapacita A v m^{-1} je pak dána součtem

$$A = A_1 + A_2. \quad (6)$$

K měření lze dobře použít dekadického můstku [71,VI], k němuž místo baterie připojíme bzučák [76,II] nebo induktorek a místo galvanoměru sluchátka nebo telefon. Postup měření je stejný jako při kompenzační metodě 71.4 s tím rozdílem, že místo odporu R měníme polohu jedné nebo obou elektrod

nádobky, až dosáhneme při daném poměru $R_a : R_b$ nejslabšího zvuku ve sluchátkách; pak

$$X = R \frac{R_a}{R_b} \quad (7)$$

a dosazením z (6) a (7) do (4) dostaneme γ .

Nejsnáze se tato metoda provádí jednoduchým můstkovým zapojením dvou stejných odporů $R_a = R_b$, k nimž paralelně připojíme nádobku 75,2 a známý odpor 100 nebo 1000 Ω . Při měření zavěsí se nádobka do vodní lázně, jejíž teplota se měří.

Stupnici nádobky lze ověřit změřením odporu některé normální kapaliny, uvedené v tab. 75, I.

76. STŘEDNÍ HODNOTY VELIČIN U STŘÍDAVÉHO PROUDU

Definice. Střední hodnota F veličiny f u periodického střídavého proudu periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je obecně dána výrazem

$$F = \frac{1}{T} \int_0^T f dt,$$

kde f značí okamžitou hodnotu oné veličiny. Střední hodnoty proudu a napětí jsou ovšem rovny nule. Místo nich se zavádí *efektivní (účinné) hodnoty*, definované jako kvadratické středy:¹⁾

Efektivní proud I je dán vztahem

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (1)$$

a *efektivní napětí* U podobným vztahem

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt. \quad (2)$$

Naproti tomu se počítá *střední výkon* P jako střední hodnota okamžitého výkonu p :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

Pro harmonické proudy (sinové) je

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 I_0, \quad U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 U_0, \quad (3)$$

76¹⁾ TF 5.11.7.

kde I_0 a U_0 jsou vrcholné hodnoty proudu a napětí; dále je

$$P = UI \cos \varphi = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi, \quad (4)$$

kde $\cos \varphi$ se nazývá *účinnost* a φ je fázové zpoždění proudu za napětím, dané druhou rovnicí 62 (9).

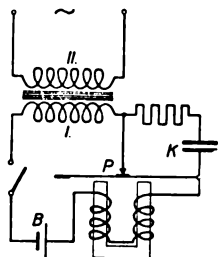
Jednotky. Efektivní a střední hodnoty se měří v týchž jednotkách jako obdobné veličiny u proudů stejnosměrných. Tedy I se měří podle 67 nejčastěji v ampérech, U podle 68 nejčastěji ve voltech a P podle 70 nejčastěji ve wattech.

Přístroje

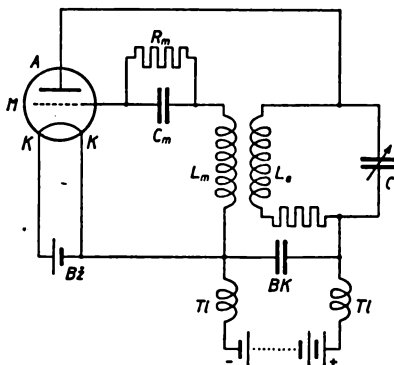
Ve fyzikální laboratoři jsou běžné hlavně tyto zdroje střídavých proudů (napětí):

Sít se střídavým proudem, kterou přivádíme střídavé napětí z generátoru střídavého proudu.²⁾ U nás bývá napětí 120 nebo 220 V s kmitočtem 50 Hz, tedy s kruhovou frekvencí $\omega = 314$ Hz. Pro zvláštní účely se užívá generátorů poháněných motorem na střídavý proud ze sítě, které dávají vyšší frekvenci, na př. 500 Hz.

Induktor (*Ruhmkorffův transformátor*)³⁾, známý ze školních pokusů, skládá se z primární cívky se železným jádrem, k níž připojíme baterii přes Wagnerovo kladívko nebo jiný přerušovač (na př. rtuťový nebo elektrolytický *Wehneltův*), nebo s bočně zapojeným kondensátorem. Při spojení a zvláště při přerušení proudu indukuje se v sekundární cívce střídavé napětí, jehož časový prů-



Obr. 76,1. Bzučák s transformátorkem.



Obr. 76,2. Elektronkový oscilátor (vysiláč)

běh se ovšem značně liší od sinusového. Pro můstková měření odporu elektrolytů a kapacit kondensátorů je vhodný induktorek malých rozměrů s péroým přerušovačem; na jeho primární cívku připojujeme podle jejího odporu jeden nebo dva akumulátory (řadově spojené).

Bzučák je elektromagnet napájený akumulátorem, do jehož okruhu je zapojen pérový přerušovač P (obr. 76,1). Jiskření v dotyku se zmírní kondensátorem K , připojeným přes odpor paralelně k přerušovači. Tím vznikají střídavé proudy, které se někdy ještě vedou do primární cívky I transformátorku, v jehož sekundárním okruhu II se indukuje střídavé napětí.

76 ²⁾ TF 5.11.9.

76 ³⁾ 1 F 5.11.11.

76,III Elektronkový oscilátor (*vysilač*) je oscilační okruh s vlastní indukčností (cívkou), kapacitou (kondensátorem) a triodou [80,I] v t. zv. *zpětnovazebním zapojení*,⁴⁾ nejčastěji induktivním (transformátorovým). Jednoduché zapojení, vhodné k laboratorním účelům, je naznačeno na obr. 76,2. Do anodového okruhu je zařazena proměnná kapacita C (ladicí kondensátor) a samoindukční cívka L_a , s níž je induktivně spřažena cívka L_m mřížkového okruhu. Mezi ní a mřížku bývá zařazen odpor R_m přemostěný kondensátorem C_m , čímž vzniká na mřížce záporné předpětí.⁵⁾ Tak se kmity v obou okruzích vzájemně zesilují, takže se udržují netlumené kmity stálé amplitudy.

Měřicí přístroje pro střídavé proudy udávají efektivní hodnotu proudu, nebo napětí, nebo střední hodnotu výkonu.

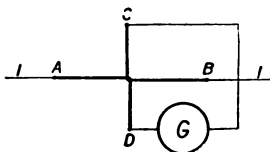
Efektivní hodnota střídavého proudu měří se přístroji v podstatě trojího druhu: elektrodynamickými, elektromagnetickými a tepelnými.

76,IV Dynamometr (*elektrodynamometr*) je založen na vzájemném účinku pevné a otáčivé ploché cívky, kterými prochází též proud, ježto jsou spojeny za sebou. Otáčivá cívka, nejčastěji vnitřní (srov. wattmetr [70,I]), je pružně upevněna tak, aby její rovina byla kolmá k rovině pevné cívky, neprochází-li přístrojem proud. Pravíme, že v nulové poloze jsou cívky zkříženy. Podle *Biot-Savartova* zákona 62 (4) je moment, kterým na sebe cívky působí, úměrný součinu okamžitých proudů jimi procházejících, tedy čtverci okamžitého proudu. Střídavý proud mění velikost i směr v obou cívkách současně a otáčivá cívka se ustálí v poloze odpovídající střední hodnotě čtverce proudu, t. j. podle (1) čtverci efektivního proudu I . Dvojice pružného závěsu cívky, která brání jejímu vychýlení z nulové polohy, je však podle 42 (21) úměrná velikosti vychylky φ , takže

$$I = C \sqrt{\varphi},$$

kde C je *převodní součinitel* dynamometru. Stupnice proudu je tedy nerovnoměrná.

76,V Elektromagnetické ampérmetry (technické) jsou založeny na působení cívky protékané proudem na měkké železo, které se zmagnetuje souhlasně se střídavým magnetickým polem proudu, takže směr vychylky nezáleží na směru proudu. U technických ampérmetrů se používá dvou železných (válcových) segmentů, které se při průchodu proudu souhlasně zmagnetují a odpuzují. Měří se efektivní proud na nerovnoměrné stupnici.



Obr. 76,3. Thermokríž.

Tepelných účinků střídavých proudů lze použít k měření proudu rozličným způsobem. Obvykle se měřený proud vede napjatým tenkým drátkem (železným, niklovým nebo platinoiridiovým), který se ohřátím prodlouží. Tím se vychýlí bod drátku, který je tažen pružným pérem, a jeho pohyb se přenáší na ručku přístroje s nerovnoměrnou stupnicí. Tento přístroj se obvykle nazývá *tepelný ampérmetr*, přesněji jej nazveme *dilatační ampérmetr*, abychom jej roz-

76,VI
76,VII lišili od *thermoelektrického ampérmetru* neboli *thermokríže* (obr. 76,3). Zde se vede měřený střídavý proud k svorkám A, B , spojeným zkříženými drátky ze dvou různých kovů, které jsou na styčném místě spájeny. Efektivní proud se posuzuje podle *thermoelektrického napětí*, vzniklého ohřátím tohoto spoje; měříme je galvanoměrem připojeným k C a D .

76⁴⁾ TF 5.14.2.

76⁵⁾ Srov. [67] str. 342.

Citlivost předešlých přístrojů se dá zvýšit, umístíme-li proudem vyhřívaný drátek ve vzduchoprázdnu, čímž snížíme ochlazování.

Nejcitlivější z tepelných proudoměrných přístrojů je **thermoelektrický galvanoměr (thermogalvanoměr, Duddel 1904)**. Měřený proud se vede několik mm dlouhým platinovaným křemenným vláknem, které sáláním vzbudí termoelektřinu v termočláncu Sb → Bi, spojeném malou smyčkou stříbrného drátu. Tato smyčka visí mezi póly silného magnetu na křemenném vlákně se zrcátkem. Zrcátkovou metodou (obr. 20,8) lze tak dosáhnout konstanty až $2 \cdot 10^{-6}$ A/mm (při metrové vzdálenosti zrcátka od stupnice). Výchyłka i tu roste přibližně s čtvercem proudu a citlivost lze měnit volbou odporu platinovaného vlákna (na př. od 1 do 1000 Ω). K měření střídavých proudů akustických frekvencí se používá také telefonu.^{o)}

76,VIII

Uvedené proudoměrné přístroje [76,IV až VIII] dají se upravit i na měření efektivního napětí. Tak dostaneme voltmetry pro střídavé napětí.

76,IX

Konečně i střední výkon střídavého proudu lze měřit wattmetry pro střídavý proud, zcela podobnými wattmetrům [70,I] pro stejnosměrný proud. Při správné konstrukci dávají tyto přístroje přímo střední výkon, tedy součin 62 (9).

76,X

Všechny měřicí přístroje pro střídavý proud zapojují se jako přístroje stejného druhu pro proud stejnosměrný a jejich rozsahy se stejně dají měnit bočníky a předřazenými odpory:

Ampérmetr zapojujeme řadově přímo do okruhu měřeného proudu; platí proň věty 67 (12) a 67 (20).

Voltmetr připojíme bočně k vodiči, na němž měříme efektivní napětí; platí proň věta 68 (5).

Wattmetr zapojíme podle schématu 70,2.

77. INDUKČNOST (INDUKTIVITA)

Definice. Indukčnost (vlastní) neboli koeficient vlastní indukce (samoindukce) L vodiče je indukční tok Φ , který prostupuje plochou vodiče při proudu I , dělený velikostí proudu:

$$L = \frac{\Phi}{I} . \quad (1)$$

Jednotky

MKSA (praktická): $[L] = \text{henry} = 1 \text{ H} = 10^3 \text{ m H} = 10^6 \text{ } \mu\text{H} =$

$$= \frac{1}{9} 10^{-11} [L]_{as} = 10^9 [L]_{am} = 10^9 \text{ cm} . \quad (2)$$

Absolutní: elektrostatická $[L]_{as} = \text{cm}^{-1} \text{ s}^2$;

elektromagnetická $[L]_{am} = \text{cm}$.

Přístroje

K měření indukčností srovnávacími methodami užívá se, podobně jako pro jiné elektrické veličiny, indukčních normálů, jejichž indukčnost je dosti přesně známa. Jsou to na př. pevné indukční cívky buď jednovrstvé, nebo

77,I

vícevrstvé, vinuté na porcelánu nebo na mramoru nasyceném za horka parafinem.

- 77,II Proměnné hodnoty indukčnosti poskytují sady indukčních cívek s ferromagnetickým jádrem, sestavené z několika dekád, na př. v rozsahu $10 \mu\text{H}$ až 10mH (*Shackelton* 1927). Spojitě proměnnou indukčnost mají variometry s pevnou a s posuvnou nebo otáčivou cívkou. Poslední způsob je výhodnější a je na něm založen na př. *Brooksův induktometr*, jehož kruhová stupnice je cejchována v milihenry.

MĚŘICÍ METODY

Indukčnosti se měří jednak methodou *absolutní*, k níž je třeba znát frekvenci užitého proudu, jednak methodou *srovnávací*, k níž je třeba mít indukční normál známé velikosti. Srovnávání indukčnosti se pravidelně provádí můstkovými methodami, kterých se používá rozmanitým způsobem. Omezíme se na popis jedné metody absolutní a jedné metody srovnávací.

77.1. Určení indukčnosti z ohmického a zdánlivého odporu

Tato absolutní metoda se zakládá na vztazích 62 (8), které pro okruh bez kondensátoru ($C \rightarrow \infty$) přejdou v rovnice

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad Z = \frac{U}{I}, \quad (3)$$

odkud

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega}. \quad (4)$$

K určení L musíme tedy zjistit ohmický odpor cívky, daný podle *Ohmova* zákona výrazem

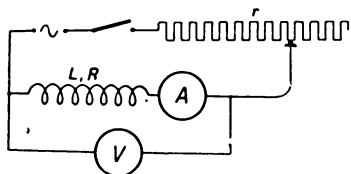
$$R = \frac{U'}{I'}, \quad (5)$$

kde I' je ustálený proud, jdoucí cívkou při *stejnoseměrném* napětí U' . Dosazením za impedanci (zdánlivý odpor) Z do (4) plyne

$$L = \frac{\sqrt{U^2 - R^2 I^2}}{\omega I}, \quad (6)$$

kde I je proud jdoucí cívkou při střídavém harmonickém napětí U kruhové frekvence ω . Aby frekvence proudu měla určitou hodnotu, musí být proud pokud možno ryze harmonický (sinusový). Je proto třeba použít takového zdroje, který má vyšší harmonické složky co možná potlačeny proti základnímu kmitočtu.

K tomu se nejlépe hodí elektronkový oscilátor [76,III]; k méně přesným měřením lze také použít městské střídavé sítě (v Praze $\omega = 314 \text{ Hz}$). Ohmický odpor R cívky můžeme určit některou z method popsaných v 71. Výhodná je tu přímá metoda 71.1 v zapojení 71,10b, kterého uijeme také k měření impedance Z střídavým proudem (obr. 77,1).



Obr. 77,1. Absolutní měření indukčnosti.

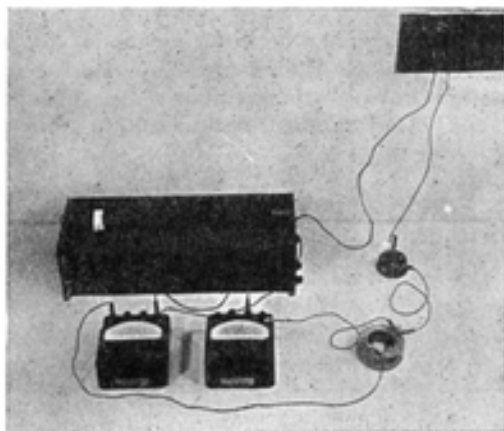
Toto zapojení předpokládá, že indukčnost ampérmetru je malá proti L .

Potřeby: Městské střídavé napětí nebo jiný zdroj harmonického proudu známé kruhové frekvence ω , regulační odpor, ampérmetr [76,V; VI], voltmetr [76,IX], klíč.

Postup

1. Utvoříme zapojení 77,1 a upravíme proud tak, aby výchylka ampérmetru i voltmetru byla co největší v mezích jejich rozsahu.

2. Změříme efektivní proud I v ampérech a efektivní napětí U ve voltech a dosazením do (6) vypočteme ze známého ohmického odporu R a ω indukčnost L v praktických jednotkách henry.



Obr. 77,2. Měření indukčnosti cívky z ohmického a zdánlivého odporu.

3. Přesnější výsledek dostaneme, volíme-li několik různých napětí U a proudů I . Pak vypočteme Z z druhé rovnice (3), kam za U dosadíme součet ΣU a za I součet ΣI zjištěných hodnot, jak plyne ze vzorce 15(24) skupinové vyrovnávací metody. Dosazením Z do (4) vypočteme L .

4. Neznáme-li odpor R , můžeme jej nejrychleji určit z (5), změříme-li v témže zapojení napětí U na cívce a proud I' jí procházející při stejnosměrném napětí. Užijeme-li k tomu týchž měřicích přístrojů jako při 2, čteme jejich údaje na stupnici platné pro stejnosměrný proud.

Příklad. Indukčnost cívky odporu $R = 326 \Omega$. Měření střídavým proudem ($\omega = 314 \text{ Hz}$) bylo provedeno pro 5 různých napětí, jak vidíme z vedlejší tabulky.

U	I
60 V	0,162 A
70	0,193
80	0,217
90	0,245
100	0,267
$\Sigma U = 400 \text{ V}$	$\Sigma I = 1,084 \text{ A}$

77.2. Místkové metody na srovnávání indukčností

Podle věty 62(25) a obr. 62,6 je v zapojení 77,3 měřicí přístroj v klidu, jestliže

$$\frac{Z'_a}{Z'_b} = \frac{\sqrt{R_a^2 + \omega^2 L_a^2}}{\sqrt{R_b^2 + \omega^2 L_b^2}} = \frac{Z_a}{Z_b} = \frac{a}{b}$$

čili

$$b^2 R_a^2 + \omega^2 b^2 L_a^2 = a^2 R_b^2 + \omega^2 a^2 L_b^2. \quad (7)$$

Přítom je R_a ohmický odpor cívky L_a a R_b součet ohmických odporů cívky L_b a posuvného reostatu r . Je-li tedy

$$R_a : R_b = a : b, \quad (8)$$

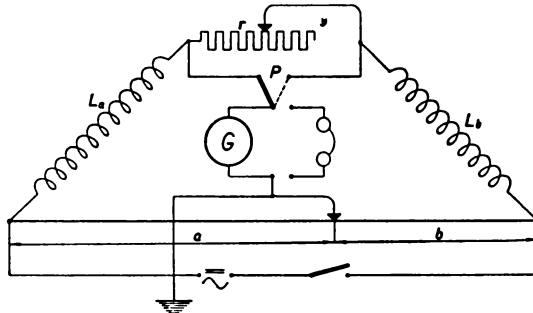
to jest

$$bR_a = aR_b,$$

plyne ze (7)

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{a}{b}. \quad (9)$$

Na vztazích (8) a (9) je založena můstková metoda srovnávání indukčností, kterou lze provádět v podstatě dvěma způsoby. Buď zvolíme za srovnávací indukčnost L_b pevnou cívku a hledáme odpor r a poměr $a : b$ na pravitkovém [71,IV] nebo válcovém [71,V] můstku, nebo zvolíme stálý poměr $a : b$ ($= 10^n$)



Obr. 77,3. Můstek pro srovnávání indukčností.

a najdeme v sadě cívek [77,II] nebo na variometru [77,III] takovou hodnotu L_b a takové r , aby byly splněny podmínky (8) a (9). V obou případech je nutno můstek uzemnit, jak naznačeno v 77,3. Při tomto druhém způsobu postupujeme takto:

Zvolíme poměr $a : b$ na př. 1 : 1 a přepneme přepínač P na stranu cívky o větším ohmickém odporu. Pak zapojíme k můstku akumulátor a vyrovnáme posuvným reostatem galvanoměr na nulu. Nato nahradíme akumulátor zdrojem střídavého proudu a galvanoměr telefonem (sluchátky). Vyhledáme takovou hodnotu L_b , aby zvuk v sluchátkách byl nejslabší. Pak podle (9)

$$L_a = L_b.$$

Postup opakujeme pro jiné hodnoty poměru $a : b$ podobně jako při měření odporu methodou 71.4.

Měření lze provádět také samotným *stejnoseměrným* proudem (s galvanoměrem). První část měření, totiž určení odporu r , provedeme stejně jako prve. Místo zapojení střídavého proudu pak pozorujeme, zdali se galvanoměr vychyluje při zapnutí a přerušení proudu (stejnoseměrného). Nemají-li obě větve můstku stejnou indukčnost (obecně není-li jejich poměr roven $a : b$), vychyluje se galvanoměr a tyto výchylky se dají odstranit vhodnou volbou indukčnosti L_b , která pak splňuje podmínku (9).

Konečně je možno provést měření jen *střídavým* proudem (se sluchátky),

při čemž můžeme použít za L_b stálé indukčnosti s pravítkovým nebo válcovým můstkem. Postupujeme tak, že posuvným kontaktem nejprve dosáhneme minimální hlasitosti zvuku ve sluchátkách. Toto minimum, málo výrazné, zlepšíme vhodnou volbou odporu r posuvného reostatu. Nato opravíme polohu dotyku můstku a znovu pozměníme odpor r . Tak pokračujeme, až dosáhneme nejzřetelnějšího minima hlasitosti (pokud možno úplného vymizení zvuku), a vypočteme L_a z rovnice (9).

78. V Z Á J E M N Á I N D U K Č N O S T

Definice. Vzájemná indukčnost (koeficient vzájemné indukce) M dvou vodičů je poměr indukčního toku Φ_{21} , který posílá plochou prvního vodiče druhý vodič, k proudu i_2 , jdoucímu tímto vodičem, a obráceně:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_2} = \frac{\Phi_{12}}{i_1}. \quad (1)$$

Jednotky. Jako pro vlastní indukčnost 77.

P Ř Í S T R O J E A M E T H O D Y

Vzájemné indukčnosti lze zhruba měřit stejnými methodami jako vlastní indukčnost. Tak lze užít absolutní metody obdobné 77.1 a různých srovnávacích method, k nimž potřebujeme *normály vzájemné indukčnosti*, tvořené dvojitými cívkami vinutými buď na témže válci, nebo na válcích sousedících. Také lze převést měření vzájemné indukčnosti na měření vlastní indukčnosti způsobem popsaným v 78.2.

78.1. Absolutní měření vzájemné indukčnosti

Podle (1) je indukční tok, který primární cívka posílá plochou sekundární cívky,

$$\Phi_{12} = M i_1,$$

takže se v ní vzhledem k 62 (7) indukuje napětí

$$u_2 = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - M \frac{\partial i_1}{\partial t}.$$

Prochází-li tedy první cívkou harmonický proud

$$i_1 = I_0 \sin \omega t,$$

má indukované napětí

$$u_2 = -M I_0 \omega \cos \omega t$$

efektivní hodnotu

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M I_0 \omega = M I_1 \omega,$$

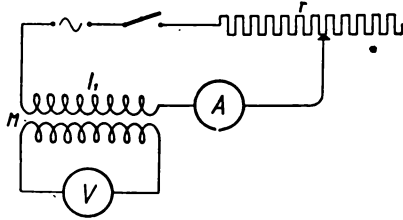
značí-li I_1 efektivní proud v primární cívce. Odtud

$$M = \frac{U_2}{I_1 \omega}. \quad (2)$$

Potřeby: Zdroj střídavého (co možná harmonického) napětí známé kruhové frekvence ω , ampérmetr [76,V; VI], voltmetr [76,IX], regulační odpor, klíč.

Postup

1. Utvoříme zapojení 78,1.
2. Změříme pro různé efektivní proudy I_1 v primární cívce příslušná efektivní napětí U_2 v sekundární cívce.
3. Dosazením do (2) vypočteme M a z hodnot získaných pro různé proudy vezmeme střed.
4. Přitom je napětí U_2 dáno velmi přibližně napětím změřeným na voltmetru, je-li jeho odpor R_v velmi velký proti ohmickému i indukčnímu odporu sekundární cívkvy.



Obr. 78,1. Absolutní měření vzájemné indukčnosti.

78.2. Určení vzájemné indukčnosti z vlastní indukčnosti

Zapojíme-li cívky, jejichž vzájemnou indukčnost M měříme, řadově do téhož okruhu, bude jejich výsledná vlastní indukčnost rovna

$$L_I = L_1 + L_2 + 2M,$$

prochází-li jimi proud v souhlasném směru. Naproti tomu bude mít hodnotu

$$L_{II} = L_1 + L_2 - 2M$$

při protisměrném zapojení cívek, jsou-li L_1 a L_2 indukčnosti cívek. Odtud

$$M = \frac{1}{4} (L_I - L_{II}).$$

Určíme-li tedy L_I a L_{II} některou z method uvedených v 77, vypočteme M podle poslední rovnice.

79. ANODOVÁ CHARAKTERISTIKA DIODY

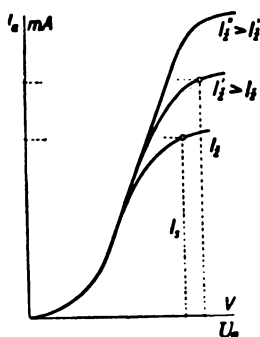
Definice. Anodová charakteristika diody je křivka závislosti anodového proudu I_a na anodovém napětí U_a .

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

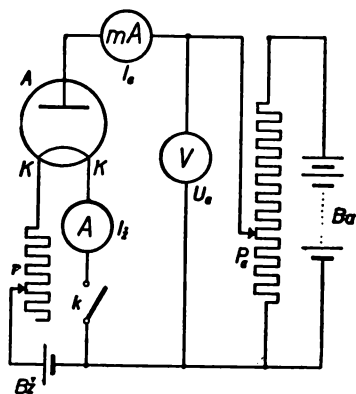
79,I Dioda je vysoce vyčerpaná skleněná baňka se žhavenou katodou a válcovou anodou, která obklopuje katodu. *Přímo žhavená* katoda je kovové vlákno wolframové (nebo s povlakem i jiného kovu nebo kysličníku), žhavené několikavoltovou žhavicí baterií; *nepřímo žhavená* katoda vysílá elektrony

z válcové vrstvy kysličníku, obklopující vlastní žhavicí vlákno, od něhož je elektricky izolována.¹⁾

Obvyklý tvar charakteristik přímo žhavených diod je patrný z obr. 79,1. Anodový proud stoupá s rostoucím anodovým napětím, pokud nedosáhne *nasycení*, při němž všechny elektrony uvolněné z katody přecházejí na anodu. Hodnota sytného (nasyceného) proudu I_a roste se žhavicím proudem I_f . U silně emitujících povrchových katod však nesmíme zvyšovat napětí až do nasycení proudu, abychom je neporušili. K určení závislosti anodového proudu



Obr. 79,1. Anodová charakteristika diody.



Obr. 79,2. Měření anodové charakteristiky diody.

I_a na anodovém napětí U_a vytvoříme zapojení 79,2. Katodu KK žháváme baterií $B\check{z}$ ($2 \div 4$ V), kterou zapojíme přes posuvný odpor r , a ampérmetr, kterým měříme žhavicí proud I_f . K zápornému pólu žhavicí baterie připojíme záporný pól anodové baterie Ba (několik set voltů), z níž odčítáme anodové napětí U_a potenciometrem P_a . Napětí U_a měříme voltmetrem a anodový proud I_a miliampérmetrem.

Postup

1. Volíme žhavicí proud I_f tak, aby miliampérmetr při anodovém napětí několika desítek voltů ukazoval měřitelnou výchylku.
2. Anodové napětí snížíme na nulu a zvětšujeme je postupně, měříce anodový proud I_a , příslušný rostoucím hodnotám U_a .
3. Napětí U_a zvyšujeme až do přípustné výše nebo tak dlouho, až se anodový proud už znatelně nemění (sytný proud).
4. Soubě příslušné hodnoty U_a , I_a znázorníme body na milimetrovém papíru a jejich spojením dostaneme anodovou charakteristiku.
5. Měření opakujeme pro různé žhavicí proudy.

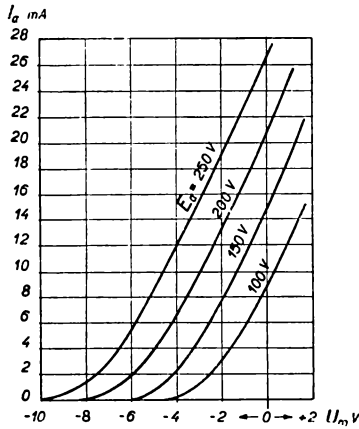
80. CHARAKTERISTIKY TRIODY

Definice.¹⁾ *Charakteristika* nebo přesněji *statická převodní charakteristika* triody je křivka závislosti anodového proudu I_a na mřížkovém napětí U_m (při stálém anodovém napětí). *Anodová charakteristika* triody je křivka závislosti anodového proudu I_a na anodovém napětí U_a (při stálém mřížkovém napětí).

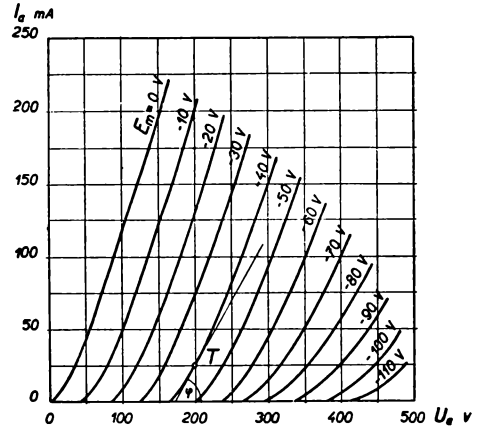
79 ¹⁾ Bližší viz v citované knize J. Stránského 76 ¹⁾.

80 ¹⁾ TF 5.12.5.

Přitom převodní charakteristika sama závisí na hodnotě stálého anodového napětí U_a a obráceně anodová charakteristika závisí na stálé hodnotě mřížkového napětí U_m . Obě tyto charakteristiky jsou zřejmé z obr. 80,1 a 80,2 (podle *Stránského* [67]).



Obr. 80,1. Převodní charakteristiky triody Philips AC2.

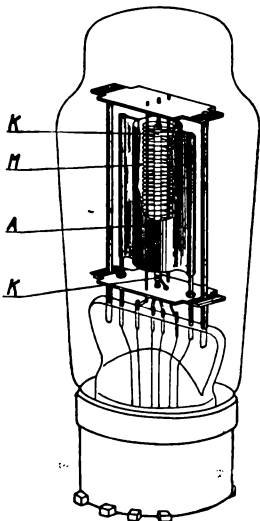


Obr. 80,2. Anodové charakteristiky americké triody 2A3.

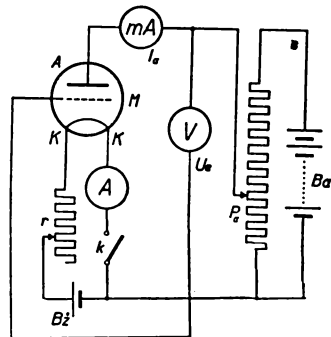
PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

80,I

Běžný typ triody (elektronky s třemi elektrodami) je patrný z obr. 80,3. Je to skleněná baňka, vyčerpaná až na nepatrný tlak 10^{-3} barye (dyn/cm^2) = $= 10^{-4} \text{ N/m}^2$. Kathoda KK , žhavená proudem z několikavoltové baterie, je obklopena drátěnou „řidičí“ mřížkou M tvaru šroubovice a válcovou anodou A . Kathoda je buď *přímo žhavená* (tenké vlákno wolframové nebo thorio-wolframové), nebo *nepřímo žhavená*, kde žhavicí proud prochází kovovým vláknem,



Obr. 80,3. Trioda.



Obr. 80,4. Zjištění anodové charakteristiky triody.

kteřé vyhřívá vlastní katodu, tvořenou niklovou trubičkou, potaženou vrstvou kysličníku barya nebo stroncia. V obou případech vysílá žhoucí katoda elektrony, jež jsou přitahovány anodou, která má proti katodě dosti vysoký kladný potenciál (anodové napětí několika desítek až několika set voltů). Tím vzniká anodový proud, který závisí jak na anodovém napětí, tak na mřížkovém napětí mezi mřížkou a katodou.

Trioda se schematicky značí, jak uvedeno v 62.1.

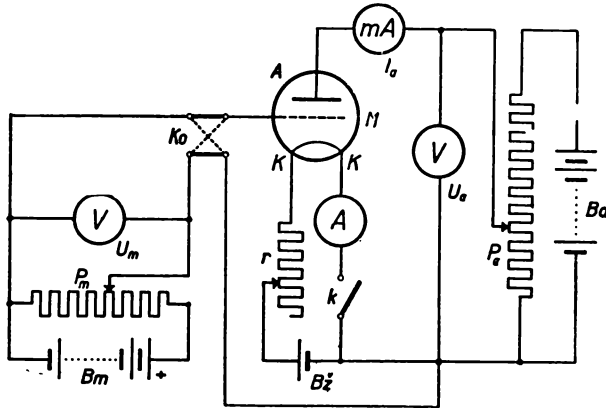
80.1. Určení anodové charakteristiky triody

Sestavíme zapojení podle schematu 80,4. Anodové napětí U_a , měřené voltmetrem, odvětvíme potenciometrem P_a z anodové baterie B_a (až několik set voltů podle druhu triody). Anodový proud I_a měříme miliampérmetrem. Mřížku M připojíme k zápornému pólu baterie zároveň se záporným pólem žhavicí baterie $Bž$ (4–6 V). Žhavicí proud upravíme posuvným reostatem r a měříme jej ampérmetrem.

Potřeby: Trioda [80,I], voltmetr [68,II], ampérmetr [67,VI], miliampérmetr, potenciometr [68,IV] nebo posuvný reostat [71,III] s odporem řádu $10^3 \Omega$, regulační odpor, anodová baterie, žhavicí baterie, klíč.

Postup

1. Regulační odpor r zařadíme naplno, zapneme klíč k a pomalu zmenšujeme odpor r , až žhavicí proud dosáhne jisté hodnoty I_g .
2. Anodové napětí U_a volíme co nejmenší a postupně je zvětšujeme potenciometrem P_a , čtouce zároveň každému U_a příslušný anodový proud I_a na miliampérmetru.
3. Měření opakujeme pro několik hodnot žhavicího proudu I_g .
4. Dvojice hodnot U_a, I_a vyznačíme body v pravoúhlých osách (U_a na vodorovné, I_a na svislé) na milimetrovém papíru.
5. Spojením bodů pro stejné I_g hladkou křivkou dostaneme anodovou charakteristiku. Konstrukci provedeme pro všechny užitě proudy.



Obr. 80,5. Zjištění převodní charakteristiky triody.

80.2. Určení převodní charakteristiky triody

K měření uijeme zapojení 80,4, které doplníme vložením mřížkového napětí U_m mezi mřížku a záporný pól žhavicí baterie $Bž$. Toto napětí odvětvíme potenciometrem P_m z baterie B_m (několik desítek voltů podle druhu triody) a připojíme komutátorem Ko (obr. 80,5).

Potřeby: Potřeby metody 80.1 a vedle toho: baterie 30 ÷ 40 V, potenciometr [68,IV], voltmetr [68,II] a komutátor.

Postup

1. Zapneme klíč k a reostatem r nastavíme pro triodu předeepsaný žhavicí proud I_a .
2. Potenciometrem P_a nastavíme anodové napětí U_a .
3. Potenciometr P_m nastavíme na nejvyšší napětí a komutátor K_o nastavíme tak, aby mřížkové napětí U_m bylo záporné.
4. Záporné mřížkové napětí snižujeme postupně při stálém anodovém napětí o stejné hodnoty a pro každou hodnotu čteme na miliampérmetru anodový proud I_a .
5. Při dosažení nulového napětí ($U_m = 0$) přepojíme komutátor K_o a zase postupně zvyšujeme U_m do maxima, zapisujeme příslušné hodnoty I_a .
6. Sestrojíme na milimetrovém papíře závislost I_a na U_m , čímž dostaneme charakteristiku pro dané anodové napětí.
7. Měření opakujeme pro několik hodnot anodového napětí.

81. STRMOST, VNITŘNÍ ODPOR A PRŮNIK TRIODY

Definice. *Strmost* S triody je rovna směrnici charakteristiky:

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial U_m}. \quad (1)$$

Vnitřní odpor R_i triody je roven převrácené směrnici anodové charakteristiky:

$$R_i = \frac{\partial U_a}{\partial I_a}. \quad (2)$$

Průnik P (také D) triody je převrácená hodnota zesilovacího činitele μ :

$$P = \frac{1}{\mu} = \left| \frac{\partial U_m}{\partial U_a} \right| = - \frac{\frac{\partial I_a}{\partial U_a}}{\frac{\partial I_a}{\partial U_m}} = \frac{1/R_i}{S}, \quad (3)$$

odkud plyne *Barkhausenův* vztah

$$R_i S P = 1. \quad (4)$$

Jednotky. Strmost měříme v jednotkách $[S] = \text{mA/V}$, vnitřní odpor v ohmech $[R_i] = \Omega$ a průnik v procentech.

Strmost i vnitřní odpor jsou závislé na anodovém a na mřížkovém napětí. Naproti tomu je průnik (a zesilovací činitel) takřka konstantní. Jeho hodnota je dána rozměry elektrod a jejich vzájemnou polohou, tedy konstrukcí triody.

MĚŘICÍ METODY

Z měřicích metod popíšeme jen metody grafické, které jsou založeny na výsledcích předešlého článku 80.

81.1. Grafické určení strmosti, vnitřního odporu a průniku

Střední hodnotu strmosti S pro dané anodové napětí U_a určíme podle (1) jako směrnici přímé části převodní charakteristiky. Zvolíme proto na přímé

části charakteristiky dva body, jejichž souřadnice se liší o hodnoty ΔU_m , ΔI_a , které změříme na grafu. Střední hodnota je pak dána poměrem

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_m}, \quad (5)$$

kde ΔI_a vyjadřujeme v miliampérech a ΔU_m ve voltech.

Vnitřní odpor R_i v anodovém okruhu triody je při stálém mřížkovém napětí závislý na poloze „pracovního bodu“, t. j. na anodovém napětí U_a . Tento odpor je podle (2) dán převrácenou směrnici anodové charakteristiky v pracovním bodě T . Je tedy dán převrácenou tangencí úhlu φ , sevřeného tečnou charakteristiky s osou anodového napětí

$$R_i = \cotg \varphi.$$

Úhel φ můžeme změřit z narýsované anodové charakteristiky, jak je to provedeno na obr. 80,2 pro mřížkové napětí $U_m = -40$ V v pracovním bodě $U_a = 200$ V, $I_a = 23$ mA. Při zvolených jednotkách grafu, v němž 50 mA odpovídá 100 V, je $\cotg \varphi = 3/5$, měříme-li však I_a v ampérech, bude hodnota R_i 2 · 10³krát větší, tedy

$$R_i = 1200 \Omega.$$

Průnik P triody najdeme nejspíše ze strmosti a vnitřního odporu na základě *Barkhausenovy* rovnice (4). Také se dá určit z průběhu převodních charakteristik pro různá anodová napětí. Jak je patrné z definiční rovnice (3), je P dáno parciální derivací U_m podle U_a ; to znamená, že můžeme počítat přibližnou hodnotu P jako poměr změny ΔU_m k změně ΔU_a při stálém anodovém proudu I_a . Tyto změny se však dají vyčíst z průběhu převodních charakteristik; zvolíme dvě charakteristiky pro U_a a $U_a + \Delta U_a$, protneme je přímkou $I_a = \text{const}$ a změříme vzdálenost průsečíků ΔU_m . Průnik je pak

$$P = \frac{\Delta U_m}{\Delta U_a}.$$

Vedeme-li na př. v obr. 80,1 přímkou $I_a = 10$ mA, protne charakteristiky $U_a = 150$ V a $U_a + \Delta U_a = 250$ V v bodech vzdálených o $\Delta U_m = 1,6$ V. Tato hodnota jen málo závisí na volbě I_a . Tak na př. pro $I_a = 20$ mA je $\Delta U_m = 1,5$ V a pro $I_a = 2$ mA je $\Delta U_m = 1,7$ V. Vezmeme-li tedy střední hodnotu, dostaneme průnik

$$P = \frac{\Delta U_m}{\Delta U_a} = \frac{1,6 \text{ V}}{100 \text{ V}} = 1,6\%$$

a zesilovací činitel $\mu = 1/P = 62,5$.

82. ZÁVISLOST THERMIONICKÉ EMISE NA TEPLOTĚ

Definice. Thermionická (thermoelektronová) emise i je hustota elektronového proudu vysílaného kovem nebo polovodičem.

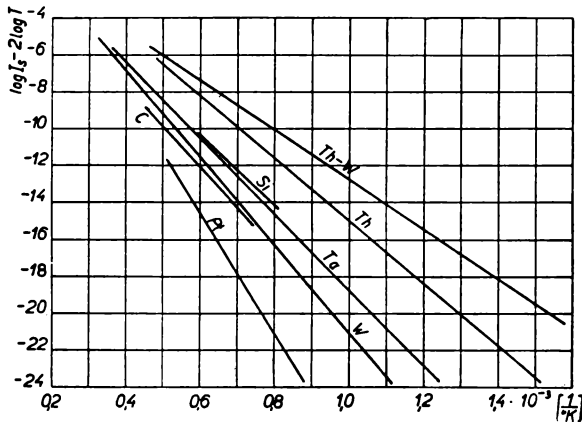
Jednotky. MKSA: $[i] = \text{A} \cdot \text{m}^{-2} = 10^4 [i]_c$.

Praktická jednotka: $[i]_c = \text{ampér/cm}^2 = \text{A} \cdot \text{cm}^{-2}$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Thermický výron elektronů má původ v unikání volných elektronů, obsažených ve vodičích a polovodičích.¹⁾ Pohybová energie volných elektronů roste úměrně s absolutní teplotou T kovu. Uniknout mohou jen elektrony, jejichž energie je větší než *výstupní práce* w , potřebná k překročení „potenciálního valu“ U na povrchu kovu. S rostoucí teplotou přibývá elektronů, které této energie dosáhnou; množství záporného náboje, které se tak uvolní za vteřinu, je podle vzorce *Richardson—Dushmanova*¹⁾

$$i = AT^2 e^{-\frac{b}{T}} \quad (e = 2,71828\dots), \quad (1)$$



Obr. 82,1. *Richardsonovy* přímky pro různé prvky (Th—W značí wolframové vlákno s jednoatomovým povlakem thoria).

kde A a b jsou konstanty nezávislé na teplotě. Hodnota A je pro většinu čistých kovů (Ag, Au, Cu, W, Mo, Th, Ca) rovna $6,02 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$. Hodnota b je úměrna w a tedy také U

$$b = \frac{w}{k} = \frac{eU}{k}, \quad (2)$$

kde *Boltzmannova* konstanta $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws} \cdot \text{K}^{-1}$ a náboj elektronu $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Závislost (1) má průběh přibližně exponenciální a pro její experimentální zkoumání je výhodné psát ji ve tvaru

$$\ln \frac{i}{T^2} + \frac{b}{T} = \ln A.$$

Položíme-li

$$y = \ln \frac{i}{T^2}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

dostaneme rovnici t. zv. *Richardsonovy* přímky

$$y + bx = \ln A, \quad (4)$$

z jejíž polohy lze zjistit konstanty A a b . Obr. 82,1 ukazuje průběh této přímky pro některé kovy²⁾ a polovodiče.³⁾

Měření se provádí u kovů obvykle tak, že se kovové vlákno ve vakuu zahřívá „žhavicím proudem“ a měří se t. zv. sytný (nasyčený) proud, který vzniká mezi vláknem a anodou při takovém napětí, které stačí odssát všechny elektrony uvolněné z vlákna. Tento sytný proud I_s je roven součinu povrchu p vlákna a emise i . Označíme-li tedy

$$Y = \log \frac{I_s}{T^2}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad B = b \cdot \log e = 0,4343 b, \quad (5)$$

platí podle (1) vztah

$$Y + Bx = \log(pA) = \text{const.} \quad (6)$$

Polovodiče je možno vyhřívat vakuovou pecí a jejich teplotu měřit optickým žároměrem.⁴⁾

Přesné řešení úlohy není snadné; uvedeme jen jednoduchou metodu, kterou lze studovat závislost (5) a zjistit konstantu B , k čemuž není třeba znát velikost povrchu vlákna.

82.1. Měření thermionické emise wolframu a thoriovaného wolframu

Bez zvláštního měřicího zařízení se obejdeme, použijeme-li diody [79,I] nebo triody [80,I] s vláknovou katodou z kovu, jehož emisi chceme studovat. Katodu žhavíme přímo; měříme-li tedy žhavicí napětí U_s a žhavicí proud I_s , můžeme určit ohmický odpor katody:

$$R = \frac{U_s}{I_s}. \quad (7)$$

Zvyšujeme-li žhavicí napětí, stoupá teplota vlákna a s ní počet uvolněných thermoelektronů. Pro každou hodnotu U_s změříme jednak I_s , jednak velikost sytného anodového proudu I_a ; je to proud, který prochází anodovým okruhem při dostatečně vysokém anodovém napětí. Jeho hodnotu zjistíme jako *maximální proud*, který dostaneme při užitém žhavení, zvyšující anodové napětí.

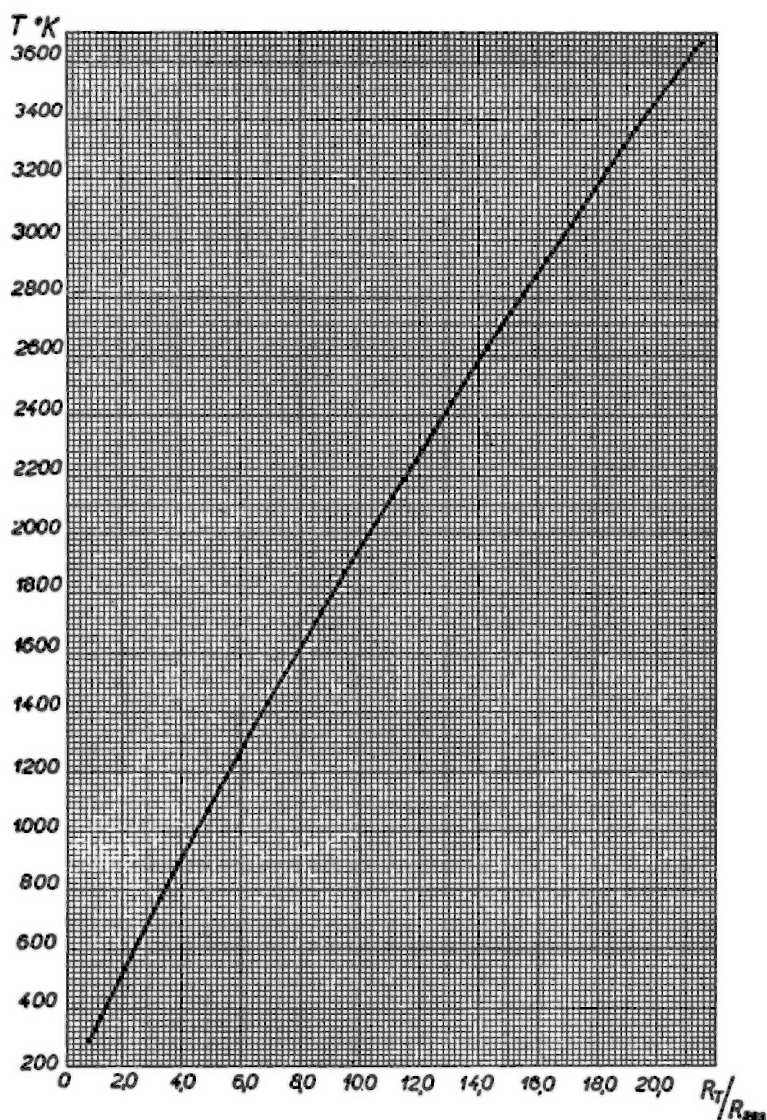
Absolutní teplotu vlákna zjistíme tak, že určíme nejprve jeho „chladný“ odpor R_{293} při $20^\circ\text{C} = 293^\circ\text{K}$ a pro každé měření vypočteme ze (7) jeho „horký“ odpor R_T při $T^\circ\text{K}$. Ze známé závislosti odporu kovu na teplotě vypočteme pak teplotu vlákna. Pohodlnější je grafická interpolace z teplotní křivky užitého vlákna. Teplotní křivka pro wolfram je naryšována na obr. 82,2 a lze jí použít i pro thoriovaný wolfram, ježto jednoatomový povlak nemění prakticky odpor wolframu (zato podstatně zvýší emisi; srov. obr. 82,1). Měření na triodě provádíme stejně jako na diodě, jen je třeba spojit mřížku triody s anodou, aby všechny emitované elektrony byly zahrnuty do sytného anodového proudu. Pokud jde o určení chladného odporu R_{293} , nesmíme měřicím proudem zvýšit teplotu vlákna. Při měření přímou metodou 71.1 musili bychom proto použít velmi citlivých přístrojů. Lze jej však také určit extrapolací pro nulový proud: Vlákem posíláme co nejslabší žhavicí proud a

82 ²⁾ [77].

82 ³⁾ [78].

82 ⁴⁾ Podle číselné tabulky z [76].

vypočteme jeho odpor pro několik malých hodnot I_f (nejméně pro tři). Závislost R na I_f znázorníme graficky a protněme prodlouženou křivku (blízkou přímce) pořadnicí $I_f = 0$. Vzdálenost průsečíku od osy $R = 0$ je rovna R_{293} .



Obr. 82,2. Závislost teploty wolframu na poměrném odporu.

Potřeby: Dioda [79,I] nebo trioda [80,I], dva voltmetry [68,II], ampérmetr [67,VI], miliampérmetr, potenciometr [68,IV], regulační odpor, anodová baterie, žhavicí baterie, klíč.

Postup

1. Utvoříme zapojení 79,2 nebo 80,4 (jako pro měření anodové charakteristiky),

kteřé doplníme připojením druhého voltmetru ke koncům KK katody; měřtme jím žhavicí napětí U_z . V případě triody spojíme mřížku s anodou.

2. Neznáme-li chladný odpor vlákná, určíme jej grafickou extrapolací, jak jsme již vyložili.

3. Regulačním odporem r zvyšujeme postupně žhavicí napětí U_z na vlákně a ke každé hodnotě poznamenáme žhavicí proud I_z .

4. Pro každou hodnotu U_z změříme I_z v anodovém okruhu, zvyšující U_a , až se již I_z prakticky nemění.

5. Vypočteme pro každé měření odpor R_T ze (7) a k poměru R_T/R_{200} najdeme grafickou interpolací z 82,2 teplotu T .

6. Vypočteme podle (5) x a Y a sestojíme *Richardsonovu* přímku, nejlépe jako spojnicí dvou těžišť metodou 16(2).

7. Konstantu b vypočteme podle 15(23) z přibližného vzorce 15(16):

$$b = B \cdot \ln 10 = 2,303 \frac{Y_{II} - Y_I}{x_{II} - x_I}.$$

83. MAGNETICKÝ MOMENT A MAGNETISACE

Definice. *Magnetický moment* M magnetu je součin z magnetického množství p na jednom pólu a vzdálenosti pólů (*redukované délky magnetu*) l :

$$M = pl. \quad (1)$$

Magnetisace (intensita magnetisace, magnetičnost) J magnetu je magnetický moment dělený objemem magnetu:

$$J = \frac{M}{V}. \quad (2)$$

Redukovaná délka tyčového magnetu závisí na rozměrech magnetu a je o něco menší než celková délka magnetu L . Měřením bylo zjištěno, že pro magnety obvyklých tvarů je ¹⁾

$$\frac{l}{L} = \frac{3}{4} \text{ až } \frac{5}{6}. \quad (3)$$

Jednotky. Magnetický moment měříme v jednotkách, které jsou zároveň jednotkami praktickými: MKSA: $[M] = \text{Wb} \cdot \text{m} = \text{weber} \cdot \text{metr} = \text{J} \cdot \text{mA}^{-1} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$. (4)

Jednotkou magnetisace je pak

$$[J] = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (5)$$

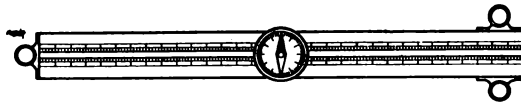
Přístroje

Ježto magnetisace souvisí jednoduchým vztahem (2) s magnetickým momentem magnetu, jsouc číselně rovna průměrnému magnetickému momentu objemové jednotky magnetu, promluvíme jen o měření magnetického momentu. K tomu se používá nejčastěji přístrojů zvaných *magnetometry* (magnetoměry), z nichž popíšeme dva druhy:

Jednoduchý magnetoměr je přístroj, kterým se měří intensita vzbuzená zkoušeným magnetem; určí se z úhlu, o který se z magnetického poledníku vychýlí deklinační magnetka (střelka) nebo jiný vodorovný magnet, volně otáčivý kolem svislé osy. 83,I

Pro méně přesná měření postačí školní přístroj tvaru naznačeného na obr. 83,1. Uprostřed prkna dlouhého asi 120 cm, s třemi stavěcími šrouby, je upevněn kompas (busola) s děleným kruhem; po obou stranách má prkno osový žlábek, do něhož se klade měřený magnet; jeho vzdálenost se měří na stupnici nanesené podél žlábků.

Dokonalejší magnetoměry toho druhu mají magnetku nebo malý magnet zavěšený na vlákně (na př. křemenném), které má velmi malou torsí. Lze ji buď vůbec pomíjet nebo se uplatňuje ve výpočtech jen v korekčním členu. Výchyšky magnetu se pozorují zrcátkovou methodou (obr. 20,8). Magnet je chráněn před vzdušnými proudy válcovou schránkou se skleněným okénkem, kterým se pozoruje stáčení zrcátka (obr. 83,2).



Obr. 83,1. Jednoduchý magnetoměr.

83,II

Astatický magnetoměr je sestaven tak, aby se vyloučily vlivy poruch, které jeví zemské magnetické pole. Proto je jednoduchý magnet nahrazen *astatickou* dvojicí magnetů. Jsou to dva co možná stejné magnety nad sebou, pevně spojené v protisměrných polohách (jejich vodorovné osy spolu svírají 180°). Proto na ně prakticky nepůsobí horizontální zemské pole. Měřeným magnetem působíme pak jen na jediný magnet, v jehož vodorovné rovině jej umístíme do známé vzdálenosti. Astatická dvojice magnetů je zavěšena na dlouhém tenkém vlákně (nebo na nemagnetickém drátě nebo pásku), při čemž oba magnety jsou pevně spojeny lehkou tyčí nebo několikamilimetrovým (mosazným) drátem, po němž lze magnety posouvat. Jejich vzdálenost se volí značná (na př. $1 \div 2$ m), aby měřený magnet působil jen na spodní magnet dvojice. Výchyška magnetu z nulové polohy (při nezkrouteném vlákně) je pak nezávislá na zemském poli a je podle 42 (21) úměrná dvojici, kterou na spodní magnet působí pole měřeného magnetu. Výchyška se určí zrcátkovou methodou.

Magnetoměry jsou vhodné i k měření elektromagnetů nebo i pro studium ferromagnetických látek. Obráceně lze užít magnetického účinku elektrického proudu k měření permanentních magnetů. Velmi jednoduše lze to provést na př. tangentovou busolou (srov. 83,1).

M Ě Ř I C Í M E T H O D Y

Methody měření magnetického momentu jsou v zásadě dvojího druhu.

Methody statické jsou založeny na měření intenzity magnetického pole, vzbuzeného magnetem v jistém místě. Jednoduchým způsobem se dá vypočítat intenzita ve dvou zvláštních polohách, které zavedl *Gauss* (obr. 83,3).

I. Gaussova poloha. Magnet redukované délky l vzbuzuje v bodě P_1 ve vzdálenosti r od jeho středu S (ve směru osy magnetu) magnetické pole, jehož intenzita je ve vzduchu ($\mu = 1$) podle *Coulombova zákona* 3 (11)

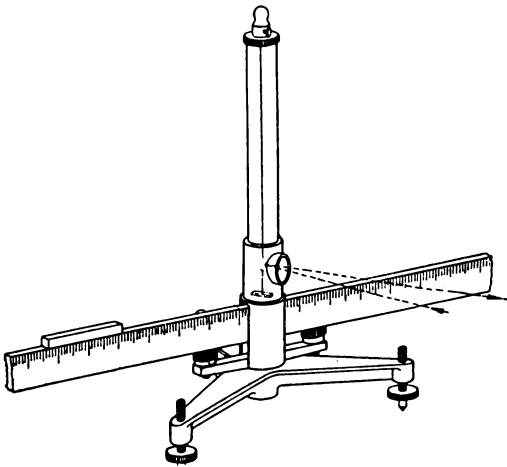
$$4\pi\mu_0 H_1 = \frac{p}{(r - l/2)^2} - \frac{p}{(r + l/2)^2}.$$

Označíme-li

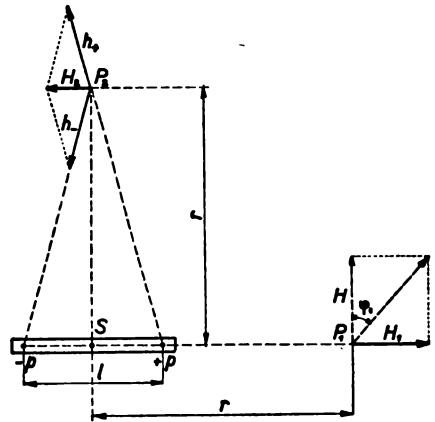
$$\lambda = \frac{l}{2r}, \quad (6)$$

dostaneme po snadné úpravě vzhledem k (1) výraz

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{2M}{r^3 (1 - \lambda^2)^2}. \quad (7)$$



Obr. 88,2. Magnetometr zrcátkový.



Obr. 88,3. Gaussovy polohy.

II. Gaussova poloha. V místě P_2 , ležícím v rovině souměrnosti magnetu (kolmé k jeho ose) ve vzdálenosti r od jeho středu S , vzbuzuje kladné množství m pole intensity

$$4\pi\mu_0 h_+ = \frac{p}{r^2 + l^2/4} = \frac{p}{r^2 (1 + \lambda^2)}.$$

Stejně silné pole h_- budí v P_2 záporný pól magnetu; jeho směr je však souměrný k rovnoběžce, vedené bodem P_2 k magnetické ose magnetu. Výslednice H_2 obou polí je proto rovnoběžná s osou magnetu, takže platí úměra

$$H_2 : h_+ = l : \sqrt{r^2 + l^2/4} = l : r \sqrt{1 + \lambda^2}$$

čili

$$H_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{M}{r^3 (1 + \lambda^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Redukovaná délka l není dosti přesně známa, a proto se volí vzdálenost r velká proti délce magnetu, aby málo přesná hodnota λ měla malý podíl na chybě výsledku.

Měření se provádí tak, že se do polohy P_1 nebo P_2 umístí magnetická střelka s děleným kruhem (kompas), která se ustálí ve směru výsledného pole, vzniklého vektorovým složením horizontálního zemského pole H a pole magnetu H_1 nebo H_2 . Její odchylky φ_1 a φ_2 od magnetického poledníku jsou tedy dány vztahy

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{H_1}{H} = \frac{M}{4\pi\mu_0 H} \frac{2}{r^3(1-\lambda^2)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{H_2}{H} = \frac{M}{4\pi\mu_0 H} \frac{1}{r^3(1+\lambda^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

z nichž lze vypočítat poměr M/H . K výpočtu stačí ovšem jedna z rovnic (9), ale vzhledem k měřicím chybám počítáme z obou a bereme střed. Volíme-li však obě polohy stejně vzdálené od S , tedy r stejné v obou rovnicích, můžeme nepřesnou hodnotu λ vyloučit. Umocněním obou rovnic dostaneme totiž

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H}\right)^3 = \frac{r^3}{8} (1-\lambda^2)^6 \operatorname{tg}^3 \varphi_1, \quad \left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H}\right)^4 = r^{12} (1+\lambda^2)^6 \operatorname{tg}^4 \varphi_2,$$

takže

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H}\right)^7 = (1-\lambda^4)^6 \frac{r^{21}}{8} \operatorname{tg}^3 \varphi_1 \operatorname{tg}^4 \varphi_2$$

čili

$$\frac{M}{H} = 4\pi\mu_0 (1-\lambda^4)^{3/2} \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi_1\right)^3 \operatorname{tg}^4 \varphi_2}. \quad (10)$$

Vzdálenost r musí však být několikrát větší než délka magnetu. Je-li na př.

$$\left. \begin{array}{lll} r > 2l, & \lambda < \frac{1}{4}, & \lambda^4 < 0,004; \\ r > 3l, & \lambda < \frac{1}{6}, & \lambda^4 < 0,0008. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Proto můžeme v binomickém rozvoji

$$(1-\lambda^4)^{3/2} = 1 - \frac{6}{7} \lambda^4 - \frac{3}{4} \lambda^8 \dots$$

vynechat všechny členy až na první, čímž dostaneme

$$\frac{M}{H} = 4\pi\mu_0 r^3 \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi_1\right)^3 \operatorname{tg}^4 \varphi_2} \doteq \frac{4\pi\mu_0 r^3}{7} \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi_1 + 4 \operatorname{tg} \varphi_2\right). \quad (12)$$

Poslední výraz vznikl nahrazením obecného geometrického průměru obecným aritmetickým průměrem, které se liší jen o veličiny řádu λ^4 , jak se snadno přesvědčíme.⁸⁾

Místo měření odchylky magnetky můžeme také působení magnetu vykompenzovat známým magnetickým polem proudu, na př. tangentovou busolou.

Metoda dynamická záleží v tom, že zavěsíme měřený magnet poblíž těžiště tak, aby byl vyvážen a mohl kývat v horizontální poloze. Působením

88 *) Je-li totiž $b = a(1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \ll 1$, plyne z binomické věty

$$\sqrt[7]{a^3 b^4} = a(1 + \varepsilon)^{3/7} = a \left(1 + \frac{4}{7} \varepsilon - \frac{6}{49} \varepsilon^2 + \dots\right) = \frac{3a + 4b}{7} - \frac{6a}{49} \varepsilon^2 + \dots$$

Z rovnic (9) pak vychází

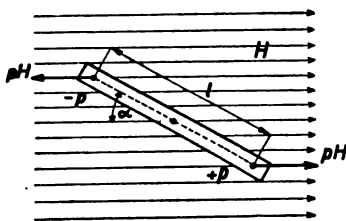
$$\operatorname{tg} \varphi_2 \doteq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi_1 \left(1 - \frac{7}{2} \lambda^4\right), \text{ a tedy } \frac{6}{49} \varepsilon^2 \approx \frac{3}{2} \lambda^4.$$

horizontální složky zemského pole a torsní dvojice vláknů koná magnet kyvy, jejichž dobu vypočteme z pohybového zákona 26 (7). Torsní dvojice je podle 42 (21) rovna $-Ka$ a stejnorodé pole H působí na magnet, jak zřejmo z obr. 83,4, dvojicí

$$D_0 = -pIH \sin \alpha = -MH \sin \alpha.$$

Pohybová rovnice pro malé α ($\doteq \sin \alpha$) zní (je-li Θ moment setrvačnosti magnetu)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{MH + K}{\Theta} \alpha = 0.$$



Obr. 83,4. Magnet ve stejnorodém poli.

Koná tedy magnet v zemském poli magnetickém podle 39.1 podobný pohyb jako fyzické kyvadlo a jeho doba kyvu při nulové výchylce

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{\Theta}{MH + K}}.$$

Změříme-li tedy dobu kyvu τ_0 magnetu a přepočteme-li ji podle vzorce 39 (7) podle T, VIII na nulovou výchylku, můžeme určit součin

$$MH = \Theta \frac{\pi^2}{\tau_0^2} - K. \quad (13)$$

Malou hodnotu K můžeme určit na př. tak, že horní konec vláknů stočíme o úhel γ . Magnet se ustálí v poloze odchýlené od magnetického poledníku o úhel δ , takže

$$MH \sin \delta = K\gamma = \frac{\pi}{180} K\gamma^\circ.$$

Dosazením do (13) plyne pak

$$MH = \frac{\pi^2}{1 + \frac{180}{\pi} \frac{\sin \delta}{\gamma^\circ}} \cdot \frac{\Theta}{\tau_0^2}. \quad (14)$$

83.1. Magnetický moment magnetu — měření tangentovou busolou (kompensační metoda)

Podle základního vztahu 67 (4) vzbuzuje proud I ampérů, jdoucí N závitů tangentové busoly poloměru R , magnetické pole intenzity

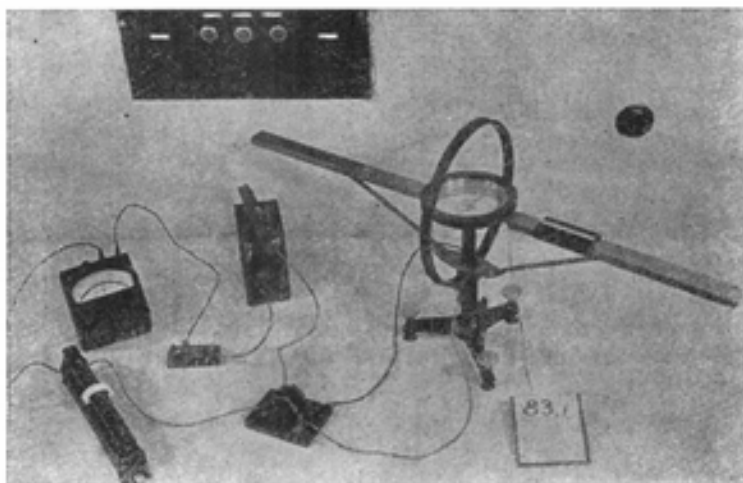
$$H_I = \frac{NI}{2R} \text{ Am}^{-1}.$$

Zrušíme-li tedy magnetické pole H_1 , vzbuzené magnetem o momentu M , ležícím v ose závitů ve vzdálenosti r od magnetky, platí podle rovnice (7) vztah

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{2M}{r^3(1-\lambda^2)^2} = H_I = \frac{zI}{2R}$$

odkud

$$M = \frac{\pi\mu_0 z}{R} I r^3 (1-\lambda^2)^2.$$



Obr. 83,5. Magnetický moment magnetu tangentovou busolou (kompensační metoda).

Volíme-li vzdálenost r dosti velkou proti l (na př. $r > 2l$), můžeme podle (11) psát s dostatečnou přesností

$$M = \frac{\pi\mu_0 z}{R} I r^3 (1 - 2\lambda^2) = \frac{4\pi^2 z}{10^7 R} I r^3 (1 - 2\lambda^2), \quad \lambda = \frac{l}{2r} \doteq \frac{2L}{5r}. \quad (15)$$

Do korekčního členu dosadíme za l přibližnou hodnotu, rovnou $4/5$ délky L magnetu.

Potřeby: Tangentová busola [67,I] s můstkem na uložení magnetu, opatřeným stupnicí udávající vzdálenost od středu závitů (obr. 83,5), akumulátorová baterie [67,XII], ampérmetr [67,VI], posuvný reostat [71,III], milimetrové měřítko.

Postup

1. Změříme délku L magnetu a spočítáme závitů busoly. Poloměr R závitů vypočteme z obvodu vinutí, který zjistíme buď ohebným měřítkem, nebo z délky několikrát ovinutého nepružného vlákna (na př. drátu).

2. Postavíme busolu do magnetického meridiánu tak, aby ukazatel byl na nule děleného kruhu, a utvoříme zapojení 67,17.

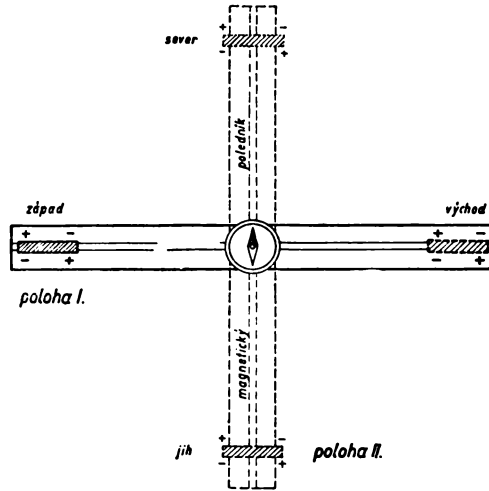
3. Magnet položíme na východ tak, aby jeho osa splývala s osou závitů a jeho střed byl vzdálen od magnetky o délku r , větší než dvojnásobná délka magnetu.

4. Výchylku magnetky zrušíme tím, že po zapnutí klíče upravíme velikost odporu tak, aby magnetka zaujala zase původní nulovou polohu. Změříme ampérmetrem proud I_{∇} a obrátíme magnet o 180° — neméněce jeho vzdálenost — komutujeme proud a (je-li třeba) upravíme proud na hodnotu I_{∇} .

5. Magnet přeložíme na západní stranu závitů, opakujeme měření a dostaneme hodnoty proudu I_Z a I'_Z .
6. Je-li r v obou případech stejné, vezmeme průměr ze všech čtyř hodnot I a dosazením do (15) vypočteme M .
7. Měření opakujeme pro různé vzdálenosti magnetu.

83.2. Magnetisace — měření Gaussovou metodou

Magnetisaci rovnou podle (2) magnetickému momentu $l \text{ cm}^3$ magnetu zjistíme z magnetického pole vzbuzeného magnetem v první nebo druhé *Gaussově* poloze. Známe-li totiž horizontální složku zemského pole, můžeme jeho moment určit z rovnic (9) nebo ovšem ze spojené rovnice (12). Avšak hodnota H



Obr. 83,6. Gaussova metoda.

je místně i časově dosti proměnná, a proto se obvykle spojuje měření magnetického momentu se zjišťováním H . Můžeme to provést na př. metodou dynamickou na základě rovnice (13), čímž právě dostaneme *Gaussovou metodu* (obr. 83,6).

Potřeby: Jednoduchý magnetoměr [83,I], nemagnetický (dřevěný) stojánek s vláknem velmi malé torsní dvojice.

Postup

Určení poměru M/H

1. Změříme rozměry zkoušeného magnetu, zvážíme jej a vypočteme jeho objem V a moment setrvačnosti J vzhledem k příčné ose (podle vzorců uvedených v 40).

2. Postavíme magnetometr do vodorovné roviny tak, aby jeho podélná osa byla kolmá k magnetickému poledníku (obr. 83,6 poloha I) a čteme nulovou polohu magnetky (při čemž všechny ferromagnetické látky i měřený magnet odstraníme z blízkosti přístroje).

3. Měření v I. poloze provedeme dvakrát s magnetem na východě od magnetky a dvakrát s magnetem na západě, při čemž magnet vždy otočíme o 180° . Odchylky čteme po každé u obou konců magnetky (nebo ukazatele), takže dostaneme celkem 8 hodnot pro odchylku φ , od meridiánu; vezmeme z nich průměr. Vzdálenost r středu magnetu od osy magnetky volíme vždy stejnou.

4. Pak otočíme magnetometr o 90° tak, aby jeho podélná osa ležela v magnetickém poledníku (obr. 88,6 poloha II). Magnet položíme napříč, aby jeho osa směřovala od západu k východu. Provedeme zase 4 měření, dvakrát s magnetem na severu, dvakrát na jihu, přetáčejíce magnet vždy o 180° . Odchylky φ_2 od meridiánu čteme zase u obou konců magnetky; tím získáme 8 čtení, z nichž vezmeme průměr.

Vzdálenost r středu magnetu od střelky volíme ve všech polohách stejnou jako při úkonu 3.

5. Poměr M/H vypočteme z (12).

Určení součinu MH

1. Měřený magnet zavěsíme ve vodorovné poloze na tenké vlákno, jehož torsní dvojice je velmi malá. Užijeme na př. niti, kterou zbavíme zkroucení tím, že na ni zavěsíme závaží stejné váhy jako magnet. Torsní dvojici lze pak v prvním přiblížení pomíjet. Má-li závěs dělenou hlavici, umístíme pod magnet úhloměr, stočíme hlavici o úhel γ' a určíme výchylku δ ustáleného magnetu od meridiánu.

2. Vychýlíme magnet z meridiánu (nejlépe působením jiného magnetu, který pak odstraníme) a změříme dobu kyvu τ buď methodou postupnou 89.1, nebo methodou omezovací 89.2, která je tu zvláště výhodná vzhledem k tomu, že doba kyvu bývá kolem 8 s. Měříme-li dobu kmitovou (2τ), dává tato metoda při nejmenší námaze přesné výsledky. Je-li rozkmit magnetu větší než asi 3° , opravíme τ na τ_0 podle 89(7) nebo T, VIII.

3. Dosazením do (13) nebo do (14) vypočteme součin MH .

Určení magnetisace

Znásobením poměru M/H a součinu MH dostaneme čtverec magnetického momentu M a dělením objemem V magnetu vypočteme jeho magnetisaci i .

Příklad. Měli jsme zjistit magnetisaci hranolového magnetu. Délka magnetu $L = b = 10,0$ cm, šířka a výška $a = c = 1,0$ cm. Hmota magnetu je 77,60 g. Moment setrvačnosti podle 40 (6)

$$J = \frac{0,0776 \text{ kg}}{12} (0,1^2 + 0,01) \text{ m}^2 = 6,531 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vzdálenost $r = 25$ cm ve všech polohách:

<i>I. poloha:</i> magnet na východě $\varphi = 52,4^\circ$	52,0°
magnet otočen o 180°	51,8°
magnet na západě	52,0°
magnet otočen o 180°	51,2°
$\varphi_1 = 51,87^\circ$	= 51°52'.
<i>II. poloha:</i> magnet na severu $\varphi = 29,8^\circ$	
magnet otočen o 180°	31,0°
magnet na jihu	29,9°
magnet otočen o 180°	30,0°
$\varphi_2 = 30,1_1^\circ$	= 30° 7'

$$\frac{M}{H} = 2,256 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3}{2} \cdot 1,274 + 4 \cdot 0,58 \right) \cdot 0,015 \text{ 625} = 1,49 \cdot 10^{-7} \text{ H m}^2. \quad (16)$$

K torsní dvojici vlákna se nepřihlíželo. Doba kyvu změřena methodou omezovací: $\tau = 6,868 \pm 0,003$ s.

Rozkvy byl 5° , takže podle T, VIII $\tau_0 = 6,860$ s,

$$MH = 6,531 \cdot 10^{-8} \frac{9,870}{6,860^2} \text{ joule} = 1,37 \cdot 10^{-8} \text{ joule}.$$

Tedy
$$M = \sqrt{\frac{M}{H} \cdot MH} = 1,43 \cdot 10^{-8} \text{ Vsm}$$

a magnetisace

$$i = \frac{M}{V} = \frac{1,43 \cdot 10^{-8} \text{ Vsm}}{10^{-8} \text{ m}^3} = 0,143 \text{ Vsm}^{-3}.$$

84. HORIZONTÁLNÍ INTENZITA ZEMSKÉHO MAGNETICKÉHO POLE

Definice. Horizontální intenzita H zemského magnetického pole je vodorovná složka intenzity zemského pole.

Jednotky. MKSA: $[H] = \text{Am}^{-1} = \text{NWb}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ oersted} =$
 $= 12 \pi \cdot 10^{-7} [H]_{\text{cgs}}$.

Absolutní: elektrostatická $[H]_{\text{es}} = \text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-2}$,

elektromagnetická $[H]_{\text{em}} = \text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$;

praktická $[H]_{\text{p}} = \text{oersted} = 1 \text{ Oe} = [H]_{\text{em}}$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Horizontální složku zemského pole můžeme měřit stejnými metodami jako magnetický moment: tangentovou busolou nebo *Gaussovou* methodou.

84.1. Horizontální intenzita zemského magnetického pole — měření tangentovou busolou

Podle 67 (6; 7) je výchylka φ magnetky tangentové busoly v magnetickém poli intenzity H dána vztahem

$$I = C \operatorname{tg} \varphi = \frac{2RH}{z} \operatorname{tg} \varphi,$$

odkud

$$H = \frac{zI}{2R \operatorname{tg} \varphi} = \frac{z}{2R} I \operatorname{cotg} \varphi. \quad (1)$$

Potřeby: Tangentová busola [67,I], baterie akumulátorů [67,XII], ampérmetr [67,VI], posuvný odpor [71,III], komutátor, klíč, milimetrové ohebné měřítko (drát).

Postup

1. Zjistíme počet z závitů busoly a jejich poloměr R , nejlépe tak, že změříme délku tenkého drátu navinutého několikrát na obruč busoly (podle potřeby vezmeme opravu na tloušťku závitů).

2. Postavíme busolu do magnetického poledníku tak, aby ukazatel byl na nule; utvoříme zapojení 67,17.

3. Upravíme proud tak, aby vznikla pokud možno velká výchylka, a čteme I a polohu φ magnetky u obou konců ukazatele.

4. Komutátorem změníme směr proudu a čteme znovu I a výchylku. Z obou hodnot I a ze všech čtyř hodnot φ vezmeme průměr.

5. Dosazením do (1) získáme H .

6. Měření opakujeme pro různé proudy.

84.2. Horizontální složka zemského pole — měření Gaussovou methodou

Měření horizontální intenzity *Gaussovou* methodou provádí se týmž postupem jako měření magnetického momentu (magnetisace) methodou 83.2; z podílu M/H a součinu MH tentokrát ovšem vyloučíme M a vypočteme H .

Příklad. Z hodnot 88 (16; 17), získaných *Gaussovou* methodou při měření magnetisace, plyne dělením a odmocněním

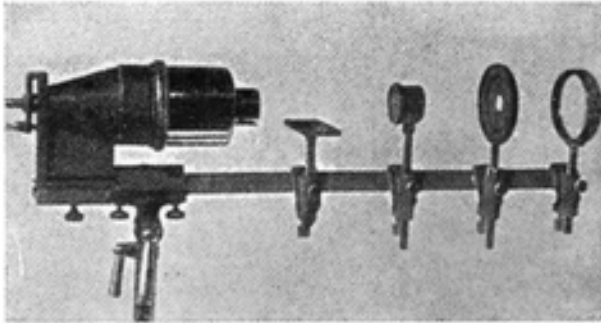
$$H = \sqrt{MH : \frac{M}{H}} = \sqrt{\frac{1,37 \cdot 10^{-4} \text{ J}}{1,49 \cdot 10^{-7} \text{ H m}^2}} = 9,58 \text{ Am}^{-1} = 0,1204 \text{ Oe.}$$

Tato hodnota je značně nižší než hodnota $15 \text{ Am}^{-1} = 0,19 \text{ Oe}$, udávaná pro Prahu, což je způsobeno odstíněním železobetonovou konstrukcí budovy fyzikálního ústavu ČVUT.

85. OHNISKOVÁ DÁLKA ČOČKY

Definice. Ohniskové dálky f , f' čočky jsou vzdálenosti ohniska předmětového prostoru a ohniska obrazového prostoru, měřené od předmětového a obrazového hlavního bodu¹⁾ čočky. Je-li čočka obklopena s obou stran prostředím stejného indexu lomu (na př. vzduchem), platí mezi předmětovou ohniskovou dálkou f a obrazovou ohniskovou dálkou f' vztah

$$f = -f'. \quad (1)$$



Obr. 85,1. Optická lavice.

Optická mohutnost čočky D je převrácená hodnota obrazové ohniskové dálky.¹⁾

Jednotky. Ohnisková dálka se měří nejčastěji v cm, někdy v m nebo v mm.

Optická mohutnost se měří v jednotkách:

$$[D] = \text{dioptrie} = \text{m}^{-1}. \quad (2)$$

Měříme-li tedy také f' v metrech, platí vztah

$$D = \frac{1}{f'}. \quad (2')$$

Přístroje

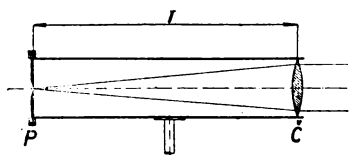
Základním zařízením pro optická měření je optická lavice. Je to vodorovná hranolová tyč nebo soustava dvou rovnoběžných tyčí s milimetrovým měřít-

85 ¹⁾ TF 6.2.11.

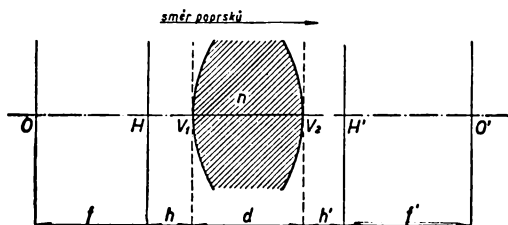
kem. Po této lavici lze posouvat jezdec nesoucí čočky, clonky nebo stolky, na které klademe optické pomůcky a součásti (snímek 85,1).

85,II Jiný důležitý přístroj je kolimátor, složený v nejjednodušším tvaru z vodorovné trubice, opatřené na jednom konci spojnou čočkou (po př. soustavou čoček), na druhém konci rovinným předmětem (maskou), umístěným v ohniskové rovině čočky. Nejčastěji to bývá nitkový kříž nebo úzká (svislá) štěrbinina.

85,III Také se zhotovují stupnicové kolimátory se stupnicí rytou na matné desce. Paprsky, které vycházejí z každého bodu předmětu v ohniskové rovině čočky, vystupují z kolimátoru rovnoběžně, takže kolimátor nám dává předmět v nekonečnu (umělé nekonečno). Na obr. 85,2 je nakreslen kolimátor se štěrbinou, na obr. 89,1 vlevo kolimátor *K* s velkou kruhovou maticí se stupnicí (srov. snímek 89,2).



Obr. 85,2. Kolimátor se štěrbinou.



Obr. 85,3. Ohniska OO' a hlavní body H, H' tlusté čočky.

M Ě Ř I C Í M E T H O D Y

Ohnisková délka f čočky, omezené přední kulovou plochou o poloměru r_1 a zadní kulovou plochou o poloměru r_2 , je dána vztahem²⁾

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n - 1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2}, \quad (3)$$

kde n je index lomu skla čočky³⁾ a d je tloušťka čočky, t. j. vzdálenost vrcholů obou kulových ploch. Vzdálenost h hlavního bodu H od předmětového vrcholu V_1 a vzdálenost h' hlavního bodu H' od obrazového vrcholu V_2 jsou dány výrazy

$$h = - \frac{n - 1}{n} \frac{f'd}{r_2}, \quad h' = - \frac{n - 1}{n} \frac{f'd}{r_1}. \quad (4)$$

Při tom počítáme všechny délky kladně, směřují-li od bodu, z něhož je měříme, ve směru paprsků dopadajících na čočku. Jinak je počítáme záporně. Bývá zvykem volit směr dopadajících paprsků zleva doprava. Pak úsečky kolmé k ose počítáme kladně směrem vzhůru, směrem dolů záporně. Úhly mají znaménko shodné s podílem délek, který určuje jejich tangentu. Tak počítáme poloměr r_1 měřený od vrcholu V_1 ke středu křivosti kladně, je-li čočka na předmětové straně vypuklá (konvexní), a záporně, je-li čočka na této straně vydutá (konkávní). Poloměr r_2 počítáme záporně, je-li čočka na zadní straně vypuklá a kladně, je-li na této straně vydutá. Na obr. 85,3 mají f (měřeno od bodu H),

85 ²⁾ TF 6.2.11.

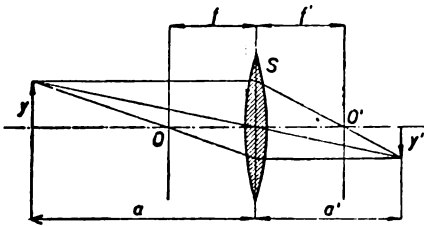
85 ³⁾ Vzhledem ke vzduchu (viz 91).

h (měřeno od bodu V_1) zápornou hodnotu, h' (měřeno od bodu V_2) a f' (měřeno od bodu H') kladnou hodnotu. Tloušťka d čočky je vždy kladná. Na obr. 85,4 je y kladné a y' záporné. Na obr. 88,1 je úhel u záporný a úhel u' kladný.

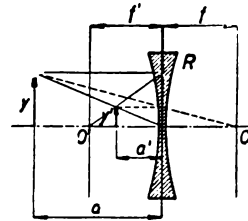
Zpravidla bývá tloušťka čočky dosti malá proti poloměrům obou ploch; pak rozhoduje o znaménku ohniskové dálky znaménko výrazu

$$\varrho = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}, \quad (5)$$

který se nazývá *vypuklost*. Čočky s kladnou vypuklostí, zvané *vypuklé*, mají kladnou obrazovou ohniskovou dálku, jsou to *spojky*. Čočky se zápornou vypuklostí, zvané *vyduté*, mají zápornou ohniskovou dálku, jsou to *rozptylky*.



Obr. 85,4. Tenká spojka.



Obr. 85,5. Tenká rozptylka.

Pro vzdálenost předmětu a od hlavní roviny H a pro vzdálenost a' obrazu od hlavní roviny H' platí základní „čočková“ rovnice⁴⁾

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \text{ neboli } \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}. \quad (6)$$

Vztahy (3) a (4) se značně zjednoduší, je-li tloušťka čočky d tak malá, že ji můžeme proti r_1 i proti r_2 pominout. Takové čočky označujeme jako *tenké* (nekonečně tenké) a platí pro ně

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \varrho, \quad h = h' = 0. \quad (7)$$

U tenké čočky splývají tedy hlavní body s vrcholy čočky, které samy jsou těsně u sebe. Myslíme si proto všechny tyto body ztotožněny ve středu čočky na její optické ose a od tohoto středu měříme všechny vzdálenosti. U tenké čočky značí tedy a a a' vzdálenosti předmětu a obrazu od čočky (měřené od jejího středu kladně ve směru dopadajících paprsků) a pro tyto vzdálenosti platí základní rovnice (6), z níž plynou obecně známé věty o poloze předmětu a obrazu u spojky ($f' > 0$) a rozptylky ($f' < 0$). Konstrukce obrazu jsou naznačeny na obr. 85,4 pro spojku a na obr. 85,5 pro rozptylku. Z obou obrázků vysvítá, že zvětšení (poměr velikosti obrazu k velikosti předmětu)

$$Z = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - a} = \frac{f' - a'}{f'} = \frac{a'}{a}. \quad (8)$$

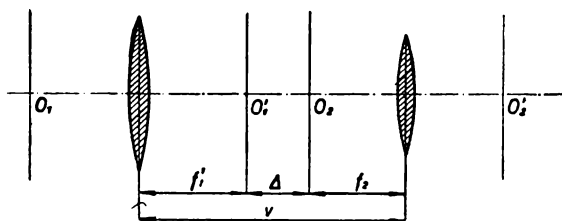
Tento vztah platí i pro tlustou čočku, měříme-li a , a' od hlavních rovin.

Tenké čočky se společnou optickou osou tvoří *optickou soustavu*, jejíž výslednou ohniskovou vzdálenost f' můžeme vypočítat z teorie optického zobrazování. Jsou-li f'_1 a f'_2 ohniskové vzdálenosti obou čoček a v jejich vzdálenost, nazývá se vzdálenost Δ obrazového ohniska O_1' přední čočky od předmětového ohniska O_2 zadní čočky *optický interval* čoček. Podle obr. 85,6 je

$$v = f'_1 + \Delta - f'_2,$$

tedy

$$\Delta = v - f'_1 + f'_2 = v - f'_1 - f'_2.$$



Obr. 85,6. Rozptylná soustava dvou spojek s kladným optickým intervalem.

Z obecného vztahu pro výslednou ohniskovou vzdálenost⁵⁾

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \quad (9)$$

plyne

$$D = \frac{1}{f'} = \frac{f'_1 + f'_2 - v}{f'_1 f'_2} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{v}{f'_1 f'_2}. \quad (10)$$

Z rovnice (9) je vidět, že dvě spojky tvoří rozptylnou (dispansivní) soustavu, jestliže $\Delta > 0$; spojka s rozptylkou tvoří rozptylnou soustavu, je-li $\Delta < 0$.

Umístíme-li obě tenké čočky těsně za sebe, bude $v = 0$ a podle (10)

$$D = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = D_1 + D_2. \quad (11)$$

Tedy *optické mohutnosti dvou těsně spojených tenkých čoček se algebraicky sčítají*. Výsledná soustava spojky a rozptylky je proto spojná nebo rozptylná podle toho, která z čoček má větší mohutnost.

Na základě uvedených vztahů je možno určit ohniskovou vzdálenost různými způsoby. Nejjednodušší je postup u tenkých čoček spojných. Měření rozptylky lze převést na měření opticky silnější spojky. Soustavy čoček však vyžadují zvláštní metody. Uvedeme několik nejjednodušších způsobů měření s podotknutím, že platnost předešlých rovnic je ve skutečnosti jen přibližná, ježto neužíváme jen osových (paraxiálních) paprsků ležících v *Gaussově nitkovém prostoru*.⁶⁾ Proto hledíme aspoň vhodnými kruhovými clonkami omezit kužel paprsků na nejmenší míru, pokud ovšem zmenšená světelnost obrazů nesnižuje příliš přesnost měření.

85⁵⁾ TF 6.2.11, 6.2.12.

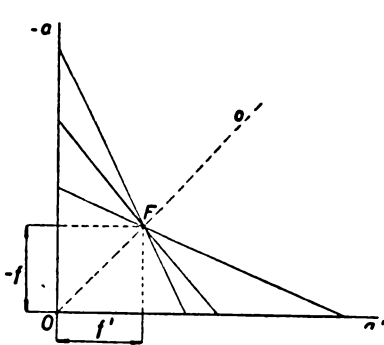
85⁶⁾ TF 6.2.8.

85.1. Ohnisková dálka tenké spojky — měření z polohy předmětu a obrazu

Předmět vzdálený od spojky o délku $|a| > |f|$ má skutečný obraz ve vzdálenosti a' , splňující rovnici (6). Z této rovnice plyne vzorec

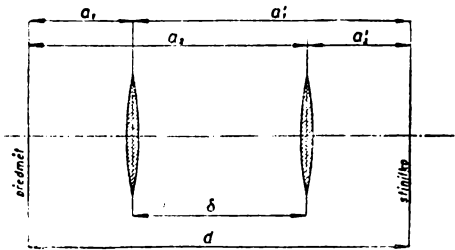
$$f' = \frac{aa'}{a - a'}, \quad (12)$$

který dává pro každou dvojici hodnot a, a' hodnotu f' . Z hodnot takto získaných vezmeme pak průměr. Také lze odvodit ohniskovou dálku graficky. Rovnici (6) můžeme totiž vzhledem k (1) psát ve tvaru úsekové rovnice přímky



Obr. 85,7. Grafické určení ohniskové dálky spojky.

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$



Obr. 85,8. Besselova metoda.

což značí, že bod s pravouhlymi souřadnicemi (f, f') leží na přímce, která vytíná na osách souřadnic úseky rovné vzdálenostem předmětu a obrazu od čočky (obr. 85,7). Měníme-li tedy polohu předmětu, dostaneme pro každou dvojici a, a' přímku; všechny tyto přímky se protínají v bodě F , který je od obou os vzdálen o ohniskové dálky f a f' spojky. Při stejném prostředí před čočkou i za ní leží F na ose o úhlu obou os.

Potřeby: Optická lavice [85, I] s předmětem (osvětleným obrazcem na matnici) a stínítkem (z matného skla nebo průsvitného papíru).

Postup

1. Na levý konec lavice postavíme předmět, na pravý konec stínítko a měřenou spojku na posuvném stojánku odsouváme od předmětu, až dostaneme ostrý obraz na stínítku. Nepodaří-li se to v žádné poloze, je třeba použít delší lavice.

2. Opatrně posouváme stínítkem, až najdeme polohu nejostřejšího obrazu a čteme polohy ukazatelů všech tří jezdců na stupnici lavice. Tento úkon opakujeme několikrát a ze středních hodnot čtení vypočteme vzdálenosti a, a' krajních poloh od střední a vypočteme f' z (12). Při tom nesmíme zapomenout, že vzdálenost a má zápornou hodnotu.

3. Posuneme čočku o několik cm vpravo a zaostříme obrázek posunutím stínítka. Opakujeme čtení a výpočet f' .

4. Abychom dostali obě délky a, a' přibližně se stejnou poměrnou chybou, konáme nejvíce měření v okolí polohy, při níž předmět i obraz leží souměrně k čočce (jsou od ní vzdáleny o dvojnásobnou ohniskovou dálku).

5. Z vypočtených hodnot f' vezmeme průměr.

6. Měřením získané hodnoty a nanese na vodorovnou osu, hodnoty a' na vodorovnou osu a příslušné dvojice bodů spojíme přímkami. Všechny tyto přímky protínají přímku o půlící úhel os přibližně v témž bodě F , vzdáleném od vodorovné osy a o f ($f = -f'$). Je-li neurčitost tohoto průsečíku značnější, vezmeme za F těžiště všech průsečíků.

85.2. Ohnisková dálka tenké spojky — měření Besselovou methodou

Z věty o záměnnosti chodu paprsků⁷⁾ plyne, že je možno zaměnit polohy předmětu a obrazu. Na této větě je založena *metoda Besselova*, která využívá skutečnosti, že při dané celkové vzdálenosti předmětu a stínítka $d = a' - a = a' + |a|$. Najdeme tedy dvě polohy čočky, v nichž se tvoří na stínítku ostrý obraz předmětu (jednou zvětšený, po druhé zmenšený, jak plyne z (8)). Označíme-li vzdálenosti čočky od předmětu v obou polohách a_1, a_2 a od obrazu a'_1, a'_2 , bude podle obr. 85,8

$$a'_1 - a_1 = a'_2 - a_2 = d, \quad a'_2 = -a_1, \quad a'_1 = -a_2$$

nebo též

$$a'_1 + |a_1| = a'_2 + |a_2| = d, \quad |a_1| = a'_2, \quad |a_2| = a'_1.$$

Označíme-li pak δ vzdálenost obou poloh čočky, bude

$$a' - a = d, \quad a' + a = a' - |a| = \delta$$

a odečtením čtverců dostaneme

$$d^2 - \delta^2 = -4aa'.$$

Podle (12) tedy

$$f = \frac{aa'}{a - a'} = \frac{d^2 - \delta^2}{4d}. \quad (13)$$

Měření záleží v tom, že předmět a stínítko umístíme na koncích lavice a vyhledáme dvě souměrné polohy spojky, ostře zobrazující předmět na stínítku. Změříme vzdálenost d stínítka od předmětu a vzdálenost δ obou poloh čočky, což opakujeme několikrát. Dosazením do (13) vypočteme ohniskovou dálku čočky.

85.3. Ohnisková dálka tenké spojky — měření ze zvětšení

Ohniskovou dálku můžeme vypočítat také z rovnice (8), kde zvětšení Z má pro spojku znaménko záporné (obraz převrácený!). Tak dostaneme vztahy

$$f' = \frac{Z}{1 - Z} a = \frac{a'}{1 - Z}, \quad (14)$$

při čemž

$$f' > 0, \quad Z < 0, \quad a < 0, \quad a' > 0.$$

K měření zvětšení užijeme dvou matnic se svislou milimetrovou stupnicí. Jednu osvětlíme a na druhou zachytíme skutečný obraz vytvořený spojkou tak, aby se překrýval se stupnicí. Zobrazí-li se n mm 1. stupnice na n' mm 2. stupnice, je prostá hodnota zvětšení

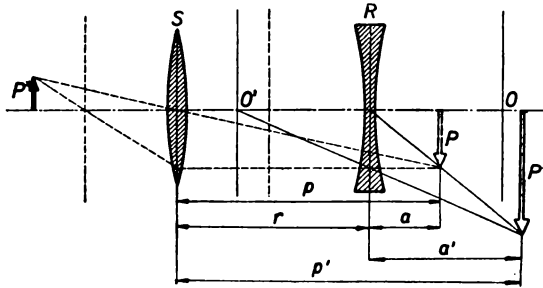
$$Z = \frac{n'}{n},$$

které vyjde ovšem záporné v soulase s tím, že obraz stupnice je převrácený a že tedy zobrazené dílky počítáme záporně, takže $n'/n < 0$.

Kromě toho určíme vzdálenost a předmětu nebo vzdálenost a' obrazu postupem uvedeným v čl. 85.1. Dosazením do prvního nebo do druhého výrazu (14) vypočteme ohniskovou dálku. Měření provedeme při různých vzdálenostech a zvětšeníh a z výsledků vezmeme průměrnou hodnotu f' . Nastavení stínítka a čtení n a n' opakujeme vždy několikrát.

85.4. Ohnisková dálka tenké rozptylky — měření zobrazením virtuálního předmětu

Ačkoliv rovnice (6), (8), (12), (13) platí pro všechny tenké čočky, není jejich užití pro rozptylky tak bezprostřední jako pro spojky. Rozptylka zobrazuje totiž reálný předmět virtuálně, t. j. dává neskutečný (zdánlivý) obraz, který nelze zachytit na stínítku; naopak dává skutečný obraz předmětu virtuálního.



Obr. 85,9. Měření ohniskové dálky rozptylky.

Abychom tedy mohli použít předešlých method pro tenkou rozptylku, vytvoříme nejprve spojkou S reálný obraz P' zvětšeného předmětu P a použijeme ho jako virtuálního předmětu rozptylky R , postavenou mezi S a P . Podle obr. 85,9 vytváří nový obraz P' na téže straně, jak vidíme na obr. 85,9. Ohniskovostruktura obrazu vytvořeného spojkou jsou naznačeny čárkovaně. Brazu vytvořeného rozptylkou s ohnisky O , O' je provedena plným vzdálenosti a , a' předmětu P a obrazu P' od rozptylky R platí pak prve zmínene rovnice.

Ohniskovou dálku rozptylky lze tedy měřit methodami 85.1; 3; zachytíme nejprve na stínítku ostrý obraz P , vytvořený spojkou S , a zapíšeme polohu p stínítka. Pak teprve vsuneme měřenou rozptylku R mezi S a P a stínítko posuneme do takové polohy p' , aby na něm vznikl ostrý obraz P' (při tom ovšem musí zůstat poloha předmětu i spojky S stejná jako při měření samotnou spojkou). Čteme polohu r rozptylky a vypočítáme:

$$a = p - r, \quad a' = p' - r,$$

kde $a > 0$, $a' > 0$. Výpočet f' pak provedeme podle vzorce (12), nebo změříme-li také zvětšení, podle vzorce (14).

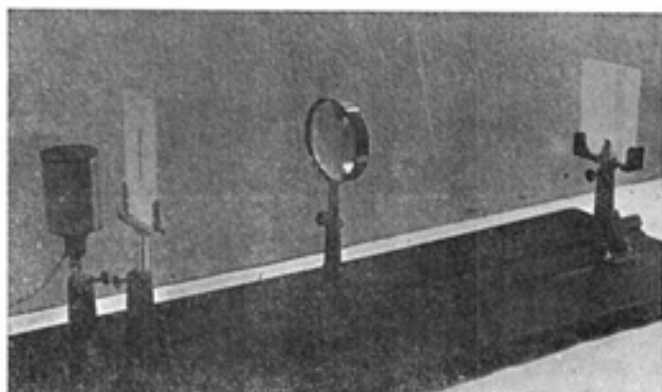
85.5. Ohnisková dálka tenké rozptylky — měření Besselovou methodou

Podle rovnice (11) vznikne těsným spojením *opticky mohutnější spojky* se slabší rozptylkou „tenká“ čočka spojná. Známe-li ohniskovou dálku spojky $f_s (> 0)$ a změříme-li obrazovou ohniskovou dálku složené čočky f_{sR} , plyne

z rovnice (11) pro hledanou obrazovou ohniskovou vzdálenost rozptylky $f'_R (< 0)$ hodnota

$$f'_R = - \frac{f'_{SR} \cdot f'_S}{f'_{SR} - f'_S}.$$

Obě čočky upevníme voskem těsně za sebou na týž posuvný stojánek na optické lavici a stmelíme je voskem i podél obvodu. Dbáme, aby byly správně centrovány (aby jejich optické osy splývaly). Tak vzniklá kombinace čoček liší se již více nebo méně od dokonale tenké čočky, a proto volíme vzdálenost předmětu (a obrazu) pokud možno velkou.



Obr. 85,10. Měření ohniskové vzdálenosti tenké spojky ze zvětšení.

Nejvhodnější je metoda *Besslova* 85.2, při níž měříme rozdíl dvou poloh čočky. Tím se vylučuje chyba vznikající neurčitostí v poloze středu čočky. Ještě přesnější výsledek dostaneme použitím metody 85.6 pro tlusté (a složené) čočky.

85.6. Ohnisková vzdálenost tlustých čoček — měření Abbeovou metodou

Ohniskovou vzdálenost tlusté čočky, u níž neznáme přesně polohy hlavních rovin (od nichž se měří ohnisková vzdálenost), zjistíme podle *Abbeho*, tímto postupem:

1. Určíme na optické lavici dvě různé polohy a'_1 , a'_2 reálného obrazu, příslušející dvěma polohám předmětu při pevné poloze čočky.
2. V obou případech změříme metodou 85.3 hodnoty Z_1 a Z_2 zvětšení.
3. Odečtením rovnic (8) pro obě polohy dostaneme pro ohniskovou vzdálenost vzorec

$$f' = \frac{a'_1 - a'_2}{Z_1 - Z_2}.$$

Tento vzorec obsahuje jen rozdíl obou poloh obrazu a nevyžaduje znalost poloh hlavních rovin.

4. Je-li měřená čočka *spojná*, použijeme *reálného* předmětu, je-li *rozptylná*, použijeme předmětu *virtuálního*, který vytvoříme pomocnou spojkou jako při měření metodou 85.4.

86. ZVĚTŠENÍ LUPY (OKULÁRU)

Definice. Zvětšení Z lupy je poměr zorného úhlu u' , pod nímž vidíme předmět lupou, k zornému úhlu u_i , pod nímž se oku jeví v konvenční vzdálenosti (zřetelného vidění) $l = -25$ cm:

$$Z = \frac{u'}{u_i}. \quad (1)$$

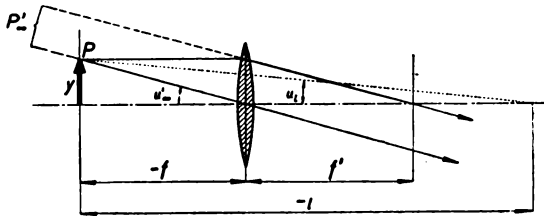
Jednotky. Ve všech soustavách $[Z] = 1$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Ve skutečnosti není zvětšení lupy konstantou, neboť závisí na akomodaci oka. Proto rozeznáváme dvojí zvětšení, která nastávají ve dvou krajních případech:

a) zvětšení Z_∞ při neakomodovaném oku podle obr. 86,1

$$Z_\infty = \frac{u'_\infty}{u_i} = \frac{\operatorname{tg} u'_\infty}{\operatorname{tg} u_i} = \frac{y}{f} : \frac{y}{l} = \frac{l}{f} = -\frac{l}{f'}. \quad (2)$$



Obr. 86,1. Zvětšení lupy při neakomodovaném oku.

b) zvětšení Z_l při normální akomodaci oka podle 85 (8)

$$Z_l = \frac{f' - a'}{f'} = 1 - \frac{l}{f'}, \quad (3)$$

neboť lupou pozorujeme předmět z velmi blízké vzdálenosti, menší než její ohnisková délka ($|a| < |f'|$), a proto vznikne přímý virtuální obraz před čočkou, který vidíme zřetelně ve vzdálenosti 25 cm od oka. Přitom je zornice oka těsně u lupy, takže $a' \doteq l$.

Skutečné zvětšení lupy leží mezi oběma krajními hodnotami (2) a (3), obvykle blíže druhé.

Z rovnic (2) a (3) plyne vzhledem k 85 (2) a vzhledem k tomu, že $l = -0,25$ m,

$$Z_\infty = \frac{1}{4} D, \quad Z_l = \frac{1}{4} D + 1, \quad (4)$$

kde D značí optickou mohutnost lupy nebo okuláru v dioptriích.

Na základě vztahů (2), (3) a (4) lze tedy zvětšení vypočítat z ohniskové délky (optické mohutnosti) lupy, změřené metodou 85.1 nebo 85.2.

Zvětšení Z_l můžeme však zjistit *přímou metodou* z poměru (1).

86.1. Zvětšení lupy — měření přímou methodou

Zvětšení Z_1 je dáno poměrem (1), kde u' je zorný úhel předmětu pozorovaného lupou při normální akomodaci oka.

Poměr úhlů u' a u_1 měříme tak, že lupu upevníme na výsuvném stojánku (obr. 86,2) ve výši 25 cm nad stolem, na který položíme ploché milimetrové měřítko M . Na posuvný stolek S položíme milimetrové měřítko m (nejlépe skleněné). Výšku lupy a polohu měřítka m upravíme tak, abychom viděli ostře obě měřítka položená rovnoběžně, jestliže zíráme pravým okem přiloženým těsně k lupě a levým okem pozorujeme měřítko na stole. Krátkozraké nebo dalekozraké oči ozbrojíme skly. Obrazy vzniklé v obou očích se překrývají, takže snadno zjistíme počet N milimetrů měřítka M , které připadají na n milimetrů pozorovaných lupou na měřítku m . Je-li zorný úhel jednoho milimetru u_1 a po zvětšení lupou u'_1 , pak

$$Nu_1 = nu'_1$$

a podle (1)

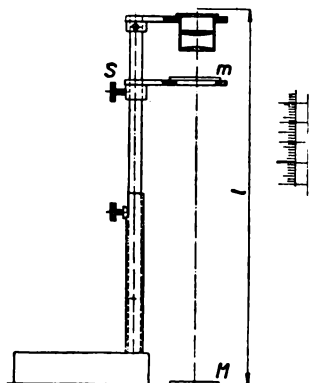
$$Z_1 = \frac{N}{n}. \quad (5)$$

Podle obr. 86,2

$$n = 4,0, \quad N = 28,9,$$

takže

$$Z_1 = 7,23.$$



Obr. 86,2. Zvětšení lupy přímou methodou.

87. ZVĚTŠENÍ DROBNOHLEDU

Definice. Zvětšení mikroskopu Z_∞ je poměr zorného úhlu u'_∞ , pod nímž vidíme předmět mikroskopem při neakomodovaném oku, k zornému úhlu u_1 , pod nímž se předmět jeví prostému oku ze vzdálenosti $l = -25$ cm.

$$Z_\infty = \frac{u'_\infty}{u_1}. \quad (1)$$

Jednotky. Ve všech soustavách $[Z] = 1$.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

87,I Drobnohled (mikroskop) je centrovaná soustava dvou složených spojných čoček. Přední čočka (*objektiv*) má velmi malou ohniskovou vzdálenost f'_1 (řádů několik mm) a zadní čočka (*okulár*) má ohniskovou vzdálenost f'_2 několik cm (obr. 87,1). Obě jsou ovšem složité optické soustavy,¹⁾ k nimž přistupuje další důležitá součást mikroskopu, *kondenzor a osvětlovací lampá*. Optický interval Δ (viz 85) objektivu a okuláru má kladnou hodnotu, velkou proti ohniskovým vzdálenostem objektivu i okuláru (zpravidla 160 mm). Aby se oko při pozorování

87¹⁾ TF 6.2.18.

mikroskopem nenamáhalo akomodací, klade se předmět y mezi dvě tenká sklíčka na stolek mikroskopu do malé vzdálenosti před přední ohniskovou rovinu φ_1 objektivu, který vytvoří zvětšený a převrácený reálný obraz y'_1 v přední ohniskové rovině φ_2 okuláru; okulár zobrazí tedy předmět v nekonečnu, takže pozorujeme neakomodovaným okem. Mikroskop se zaostřuje otáčením dvou hlavice: jednou se zaostří předmět zhruba, druhou se jemným pohybem provede přesné zaostření.

Zvětšení objektivu je podle 85 (8) dáno poměrem

$$Z_1 = \frac{y'_1}{y} = \frac{f'_1 - a'}{f'_1} = \frac{f'_1 - f'_1 - \Delta}{f'_1} = -\frac{\Delta}{f'_1} = \frac{\Delta}{f_1}, \quad (2)$$

neboť obraz y'_1 , vytvořený objektivem v ohniskové rovině φ_2 okuláru, má od hlavní roviny objektivu vzdálenost $a' = f'_1 + \Delta$.

Zvětšení okuláru je při pozorování neakomodovaným okem podle 86 (2)

$$Z_2 = \frac{l}{f_2} = -\frac{l}{f'_2} \quad (3)$$

a celkové zvětšení mikroskopu, dané poměrem (1),

$$Z_\infty = u'_\infty : u_i = \frac{y'_1}{f_2} : \frac{y}{l} = \frac{y'_1}{y} \cdot \frac{l}{f_2},$$

odkud vzhledem k (2) a (3)

$$Z_\infty = Z_1 \cdot Z_2 = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{l}{f_2} = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{l}{f'_2}. \quad (4)$$

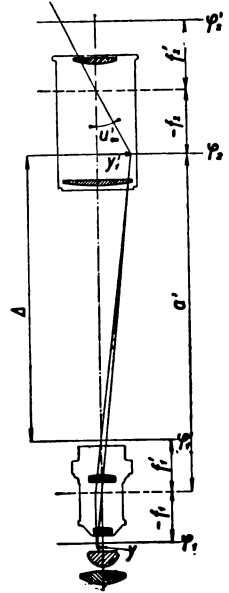
Tedy zvětšení drobnohledu je dáno součinem zvětšení objektivu a zvětšení okuláru a je nepřímo úměrné jejich ohniskovým dálkám.

Známe-li zvětšení objektivu a okuláru, vypočteme zvětšení drobnohledu jako součin obou zvětšení. Bývají uvedena na objektivě (Z_1 dosahuje až hodnot 120) i na okulárech (dosahuje až hodnoty 30) a jejich vhodnou volbou dosáhneme žádaného zvětšení. Naopak, známe-li na př. zvětšení okuláru nebo změříme-li je methodou 86.1 a určíme-li mimo to celkové zvětšení Z_∞ methodou 87.1, můžeme z rovnice (4) vypočítat zvětšení (nebo i ohniskovou dálku f_1) objektivu.

87.1. Zvětšení mikroskopu — měření přímou methodou

Methoda 86.1 se dá snadno upravit i pro mikroskop. Je ovšem nutno si uvědomit, že tato methoda dává vzhledem k (4) a 86 (3) vlastně součin

$$Z^* = Z_1 \cdot Z_2 = -\frac{\Delta}{f_1} \left(1 - \frac{l}{f'_2}\right) = Z_\infty + Z_1,$$



Obr. 87.1. Chod paprsků v mikroskopu.

neboť při současném pozorování stupnice, vzdálené od oka o 25 cm, máme obě oči akomodovány na konvenční dálku l . Proto má okulár zvětšení Z_1 dané výrazem 86 (3). Správné zvětšení Z_∞ dostaneme pak ze změřeného Z^* odečtením zvětšení samotného objektivu:

$$Z_\infty = Z^* - Z_1 = Z^* - \frac{Z^*}{Z_1} = Z^* \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right). \quad (5)$$

Zjistíme-li tedy methodou 86.1 kromě Z^* také samotné zvětšení Z_1 okuláru, dostaneme zvětšení Z_∞ drobnohledu při neakomodovaném oku podle rovnice (5).

Zvětšení bývá několik set až tisíc, a proto pozměníme methodu 86.1 tak, že volíme měřítko m přiměřeně jemnější. Při menších zvětšeníh nahradíme je stupnicí dělenou na 0,1 mm, při větších zvětšení velmi jemnou stupnicí, dělenou na 0,01 mm. Tím rovnice 86 (5) nabude tvaru

$$Z^* = \frac{10 N}{n} \text{ nebo } Z^* = 100 \frac{N}{n}. \quad (6)$$

Při tom je nutno počítat délky pozorované v mikroskopu záporně (ježto obraz stupnice je obrácený), takže vyjde zvětšení záporné, jak má být.

Kromě toho se doporučuje další experimentální úprava k usnadnění pozorování. U mikroskopu bývá totiž obtížné pozorovat zároveň měřítko na stole. Proto se těsně nad okulár upevní slabě postříbřené zrcátko (poloprůhledná skleněná destička), která propouští i odráží světlo. Tímto zrcátkem, skloněným pod úhlem 45° , pozorujeme pak jedním okem současně obraz měřítka v mikroskopu i milimetrové měřítko, upevněné rovnoběžně s optickou osou drobnohledu ve vzdálenosti 25 cm od zrcátka.

88. ZVĚTŠENÍ DALEKOHLEDU

Definice. Zvětšení Z dalekohledu je poměr zorného úhlu u' obrazu, vytvořeného dalekohledem, k zornému úhlu u předmětu, pozorovaného prostým okem:

$$Z = \frac{u'}{u}. \quad (1)$$

Jednotky. Ve všech soustavách $[Z] = 1$.

Přístroje

88,I Ve fyzikální laboratoři je běžný hvězdářský dalekohled (Keplerův), jak jsme již uvedli při popisu čtečího dalekohledu [20,II]. Skládá se z objektivu Ob a z okuláru Ok , nejčastěji *Ramsdenova*¹⁾ nebo *Huygensova*¹⁾ (obr. 88,1). Vždy jsou objektiv i okulár spojné soustavy, jejichž polohu upravíme při pozorování tak, abychom viděli ostře neakomodovaným okem. To nastane tehdy, když

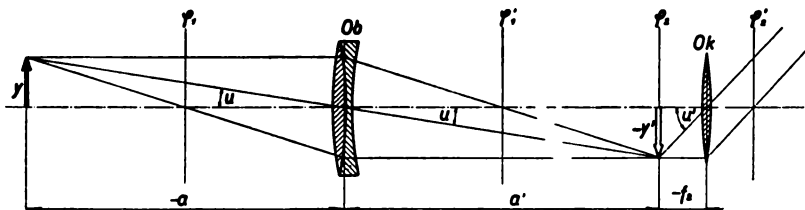
88 ¹⁾ TF 6.2.18.

obraz y' předmětu y padne do přední ohniskové roviny φ_2 okuláru. Z obr. 88,1 plyne, že zvětšení dalekohledu

$$Z = \frac{u'}{u} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{y'/f_2}{y/a} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{a}{f_2}.$$

Poměr y'/y je však zvětšení objektivu, tedy vzhledem k 85 (8)

$$Z = \frac{a}{f_1 - a} \cdot \frac{f_1}{f_2} = \frac{a}{f_1 - a} (-Z_\infty), \quad (2)$$



Obr. 88,1. Hvězdářský dalekohled.

kde

$$Z_\infty = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{f_1'}{f_2'}. \quad (3)$$

Je-li totiž vzdálenost a předmětu od objektivu velmi velká proti jeho ohniskové dálce, klesne Z na nejmenší možnou hodnotu Z_∞ . Podle (3) toto zvětšení dalekohledu zaostřeného na nekonečno (afokálního) je rovno zápornému poměru ohniskových dalek objektivu a okuláru.

K měření zvětšení metodou 88.3 je nejvhodnější dynametr (Ramsden). 88,II Je to lupa nebo okulár s krátkou průsvitnou stupnicí v ohniskové rovině, dělenou na 0,1 mm. Lze však užít také stupnicového kolimátoru [85,III].

MĚŘICÍ METODY

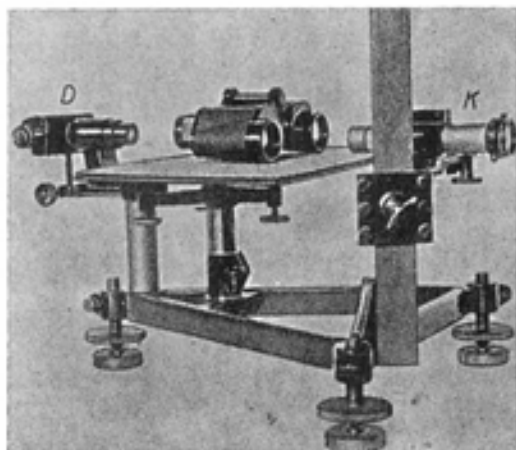
Zvětšení hvězdářského dalekohledu lze zjistit především metodou přímou, dále výpočtem z ohniskových dalek objektivu a okuláru a konečně metodou pupil. Přitom je důležité určit zvětšení Z_∞ afokálního dalekohledu, z něhož vypočteme zvětšení Z pro libovolnou vzdálenost $|a| > |f_1|$ podle vzorce (2).

88.1. Zvětšení dalekohledu — měření přímou metodou

Tato metoda je shodná s metodou 86.1 pro lupu. Dalekohled s vodorovnou osou zaostříme na svislé měřítko, vzdálené několik metrů a dělené na centimetry (nejlépe se střídavými černými a bílými pruhy šířky 1 cm). Pravým okem pozorujeme v dalekohledu, levým zíráme přímo na měřítko. Kryje-li se N dílků viděných prostým okem s n dílky v dalekohledu, je zvětšení

$$Z = \frac{N}{n}.$$

Zvětšení Z_∞ lze vypočítat podle (2), změříme-li vzdálenost a a ohniskovou dálku objektivu f_1 . Tato metoda se dá upravit k přímému měření zvětšení Z_∞ , použijeme-li zařízení na snímku 88,2²⁾. V ohniskové rovině kolimátoru K jsou dvě rovnoběžná vlákna, která pozorujeme dalekohledem D , majícím okulární mikrometr [20,IV] s dvěma posuvnými vlákny. Změříme nejprve mikrometrem vzdálenost v obrazů obou vláken kolimátoru, vytvořených daleko-



Obr. 88,2. Měření zvětšení triedru methodou přímou [43].

hledem D . Potom vsuneme mezi K a D měřený dalekohled zaostřený na nekonečno a změříme znovu vzdálenost v' vláken. Zvětšení

$$Z_\infty = \frac{v'}{v}.$$

88.2. Zvětšení afokálního dalekohledu — určení z ohniskových dálek

Změříme ohniskové dálky objektivu f_1 a okuláru f_2 Abbeovou methodou 85.6. Ohniskovou dálku f_1 objektivu můžeme také určit jinou methodou, na př. 85.1; 2. Je-li dálka příliš velká, můžeme objektiv kombinovat se známou spojkou podobně jako při měření rozptylky methodou 85.5.

88.3. Zvětšení afokálního dalekohledu — určení měřením pupil

Zvětšení dalekohledu se jeví také v úhlovém zvětšení t. zv. *pupil*.³⁾ Vstupní pupilu p tu tvoří obruba objektivu nebo kruhová clonka, umístěná těsně před objektivem. Výstupní pupila p' je dána reálným obrazem vstupní pupily, vytvořeným okulárem. Konstrukce 88,3 tohoto obrazu je provedena podle 85,4 pro dalekohled zaostřený na nekonečno. Je z něho vidět, že vzhledem k (3)

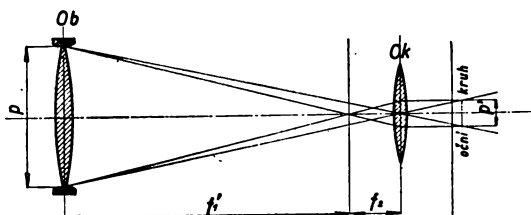
$$Z_\infty = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{p/2}{p'/2} = -\frac{p}{p'}. \quad (4)$$

88²⁾ Viz [43], str. 250.

88³⁾ TF 6.2.15.

Zvětšení afokálního dalekohledu je tedy rovno poměru vstupní a výstupní pupily, tedy podílu průměru obruby objektivu (nebo clonky přiložené k objektivu) k průměru *očního kruhu*, jak nazýváme skutečný obraz obruby.

Potřeby: Optická lavice [85,I], dynametr [88,II] nebo stupnicový kolimátor [85,III], kruhová clonka (menší než otvor objektivu), posuvné měřítko [31,V], posuvné stojánky.



Obr. 88,3. Vstupní a výstupní pupila afokálního dalekohledu.

Postup

1. Zaostríme měřený dalekohled na nekonečno, namíříme jej na vzdálený předmět (hrot věže a pod.).

2. Dalekohled upevníme ve vodorovné poloze na jezdce optické lavice (přilepíme jej na př. dvěma kousky vosku nebo formely na stůlek jezdce) a podle potřeby postavíme těsně před něj centrovanou clonku.

3. Za okulár postavíme dynametr nebo stupnicový kolimátor a změříme průměr p' očního kruhu. Zaostrění dynametru a měření p' opakujeme několikrát (5 až 10krát podle rozptylu čtených hodnot).

4. Změříme posuvným měřítkem 10krát průměr p clonky. Pozorujeme-li bez clonky, změříme vnitřní průměr obruby objektivu, a to velmi opatrně, abychom nepoškodili sklo objektivu (doporučuje se přidržet na čočce hedvábný papír).

5. Dosazením do (4) vypočteme Z_{∞} .

89. ZORNÉ POLE DALEKOHLEDU

Definice. Zorné pole dalekohledu je dáno vrcholovým úhlem ω kužele (rotačního), uvnitř něhož leží všechny body viditelné dalekohledem.

Jednotky. Absolutní $[\omega]_a = \text{radián}$,

praktická $[\omega]_p = \text{úhlový stupeň}$.

ŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Zorné pole afokálního dalekohledu lze zjistit v podstatě dvěma dále popsanými methodami, jejichž theorie je zřejmá.

89.1. Methoda krajních poloh

Pozorujeme dalekohledem vzdálený bod a zjistíme oba krajní směry osy dalekohledu, při nichž vidíme onen bod na koncích téhož průměru obruby objektivu (zorného pole). Úhel, který svírají oba krajní směry dalekohledu, určuje zorné pole ω dalekohledu.

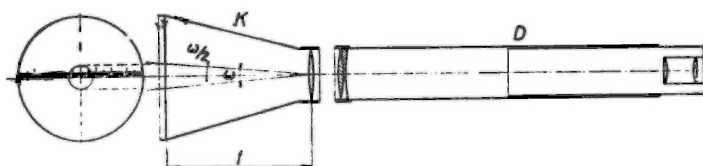
Měření provádíme tak, že dalekohled připevníme nad průměr děleného

kruhu [33,I] a čteme úhel otočení pro obě krajní polohy. Také lze úhel otočení měřit zrcátkovou metodou nebo dosti pohodlně sklonoměrem [33,V; VI,] který připevníme k dalekohledu otáčivému kolem *vodorovné osy*.

89.2. Zorné pole — měření stupnicovým kolimátorem

Postavíme do značné vzdálenosti R (na př. 50, 100 m, podle ohniskové vzdálenosti objektivu) od dalekohledu větší měřítko tak, aby leželo v průměru zorného pole. Je-li N délka měřítka viditelného v dalekohledu, pak

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{N}{2R} \quad (1)$$

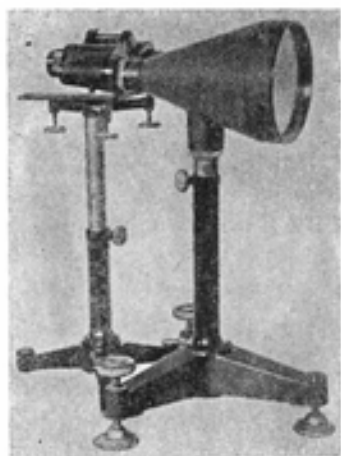


Obr. 89,1. Schema měření zorného pole dalekohledu stupnicovým kolimátorem.

a pro malé úhly

$$\omega = \frac{N}{R} \quad \text{nebo} \quad \omega^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{N}{R} = 57,3^\circ \frac{N}{R}. \quad (2)$$

Totéž měření můžeme však provést pohodlněji v laboratoři, použijeme-li stupnicového kolimátoru [85,III]. Jeho průsvitnou stupnicí stejnoměrně osvětlíme (na př. obrácením kolimátoru proti oknu) a těsně před jeho čočku postavíme (na optické lavici) objektiv měřného dalekohledu, tak, aby jejich optické osy splývaly (viz obr. 89,1, snímek 89,2). Je-li f ohnisková délka kolimátoru a vidíme-li v dalekohledu (zařízeném na nekonečno) kruh o průměru ϱ , dostaneme zorné pole ze vzorce (1) nebo (2), klademe-li $N = \varrho$ a $R = f$.



Obr. 89,2. Měření zorného pole triedru metodou 89,2 stupnicovým kolimátorem.

K usnadnění výpočtu poměru ϱ/f bývají dílky stupnice voleny tak, aby f bylo celistvým násobkem k jednoho dílku. Pak ovšem $\varrho/f = d/k$, značí-li d průměr zorného pole v dílcích. Je-li na př. $k = 100$, je prostě $\varrho/f = 0,01 d$. Abychom určili k , zjistíme f jako vzdálenost stupnice kolimátoru od čočky a velikost dílku najdeme, přiložíme-li k osvětlené stupnici posuvné měřítko, a zírajíce do kolimátoru, odměříme větší počet dílků.

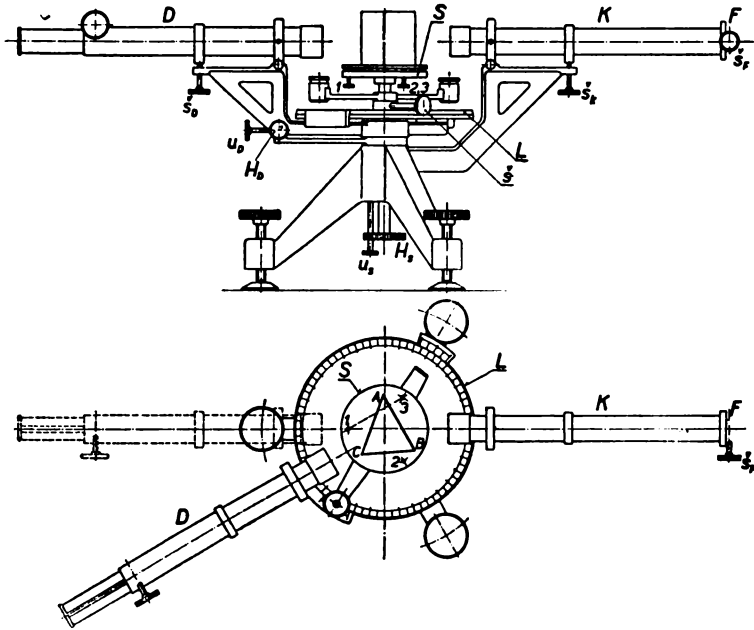
90. LOMNÝ ÚHEL HRANOLU

Definice. Lomný úhel ω hranolu je (dutý) úhel, sevřený stěnami tvořícími hranu.

Jednotky. Měří se v praktických jednotkách $[\omega]_p$, t. j. v úhlových stupních.

Přístroje

Základním přístrojem na měření úhlu hranolu je spektrometr (goniometr). **90,I**
Jeho složení je vidět z obr. 90,1; je na něm nárys a půdorys obvyklého typu tohoto přístroje (srov. 90,2).



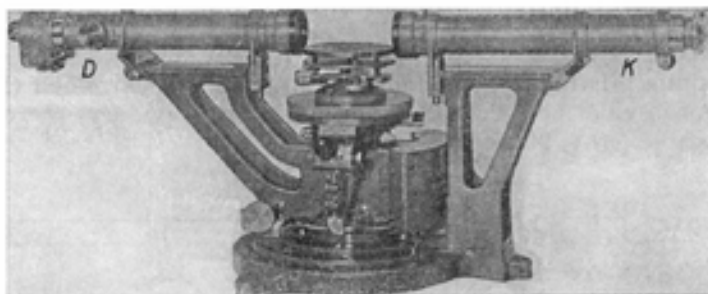
Obr. 90,1. Spektrometr (goniometr), schema.

Pevné části: Na třínožce se stavěcími šrouby je připevněn vodorovný dělený kruh L (limbus) [33, I] a kolimátor K se štěrbinou [85, II], jehož vodorovná osa protíná svislou osu děleného kruhu. Osu kolimátoru lze sklánět a zvedat šroubem δ_K . Šířka štěrbiny F se mění jemným šroubkem δ_F .

Otáčivé části: Kolem osy děleného kruhu se otáčí stolek S s vodorovnou destičkou, kterou lze urovnat stavěcími šroubky 1, 2, 3; jeho polohu vzhledem k L je však možno fixovat (zajistit) ustanovkou u_s . Chceme-li změnit polohu stolku, uvolníme nejprve u_s a pak teprve otáčíme hlavici H_s . Výšku stolku S měníme po uvolnění šroubu δ . Kolem osy kruhu L se otáčí vodorovný čtecí dalekohled [20, II] D , který mívá Gaussův okulár [20, III]. Dalekohled je unášen otáčivým ramenem, jehož natočení se čte na obou noniích alhidády spojené s ramenem (viz popis [33, I]). Osa dalekohledu se sklání a zvedá šroubkem δ_D .

Při otáčení dalekohledu se nedotýkáme jeho trubice, nýbrž ramena, kterým je nesen; předtím musíme uvolnit ustanovku u_D , kterou fixujeme jen při jemném nastavování dalekohledu hlavici H_D .

Před každým měřením musíme provést pečlivou *justaci* neboli *urovnání* spektrometru postupem uvedeným v 90.1.



Obr. 90,2. Spektrometr (goniometr) Wats & Son.

MĚŘICÍ METODY

Měření lomného úhlu hranolu se zakládá na odrazu rovnoběžných paprsků na obou stěnách hranolu, přilehlých k lomné hraně. Užívá se hlavně dvou způsobů, jejichž popis následuje po návodu k *justaci* spektrometru.

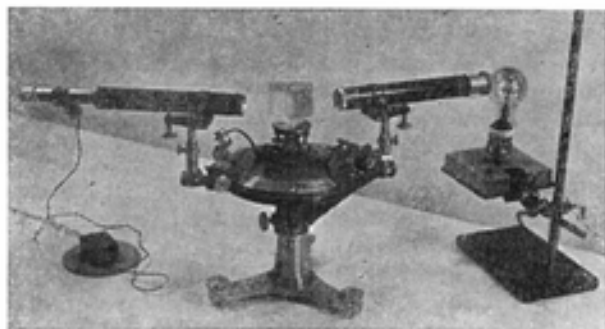
90.1. Urovnání spektrometru

Při měření spektrometrem mají být splněny co nejpřesněji tyto podmínky

a) Osy otáčení děleného kruhu, stolku a dalekohledu musí splývat.

b) Dalekohled musí být zařízen na nekonečno; jeho nitkový kříž musí ležet ve společných ohniskových rovinách objektivu a okuláru; jeho svislé vlákno musí být rovnoběžné se štěrbinou.

c) Paprsky vycházející ze štěrbiny (rovnoběžné s rotační osou spektrometru) musí po opuštění kolimátoru tvořit rovnoběžný svazek.



Obr. 90,3. Spektrometr s krytou stupnicí opatřenou čtecími lupami. Vlevo dalekohled s osvětleným nitkovým křížem podle obr. 20,6b.

d) Optické osy dalekohledu a kolimátoru musí splývat a přibližně kolmo protínat rotační osu spektrometru.

e) Lomná hrana musí být rovnoběžná s osou spektrometru.

Podmínka a) musí být splněna již výrobcem přístroje, splnění ostatních je úkolem justace; při provádění justace se doporučuje tento postup (srov. popis [20,II;V]):

A. Justace přístroje

1. Dalekohled zamíříme proti světlé ploše (papíru, zdi, oknu) a posuvem samotného okuláru zaostříme přesně nitkový kříž (který můžeme osvětlit pomocným zdrojem).

2. Dalekohled namíříme oknem na vzdálený předmět (je-li třeba, odšroubujeme jej od přístroje) a posuvem celého okuláru i s křížem zaostříme tak, abychom viděli zároveň ostře kříž i předmět, a to bez úkosu, což se bezpečně projeví stálostí obrazu vzhledem ke kříži při bočním pohybu oka (splnění b).

3. Osvětíme štěrbinu kolimátoru (plamenem, žárovkou a pod.) a otočíme dalekohled proti kolimátoru. *Posuvem trubice se štěrbinou* (aniž měníme zaostření dalekohledu) zaostříme obraz štěrbiny v dalekohledu tak, aby nejevil při pohybu oka úkos vzhledem k nitkovému kříži (splnění c).

4. Šroubkem δ_F zúžíme štěrbinu F tak, aby její obraz byl co nejtenčí a zřetelný.

5. Štěrbinu otočíme do vodorovné polohy a šroubky δ_D , δ_K upravíme polohu D a K tak, aby se obraz štěrbiny přesně kryl s vodorovným ramenem nitkového kříže (splnění d). Pak otočíme štěrbinu zpět do svislé polohy a znovu ověříme c) (podle 3).

B. Postavení hranolu

6. Měřený hranol přilepíme třemi kousky vosku na stolec S tak, aby lomná hrana A byla přibližně rovnoběžná s osou spektrometru a stěna AB kolmá k spojnici stavěcích šroubků 1 a 3 , z nichž poslední bývá nahrazen pérovou nožkou (viz obraz 90,1). Přitom hrana A budiž nedaleko osy stolku.

7. Upravíme vhodně výšku stolku a otočíme jím tak, aby stěna AB byla přibližně kolmá k ose dalekohledu; šroubkem 1 upravíme sklon stěny tak, aby obraz kříže, vzniklý na ní zrcadlením, splynul s obrazem kříže v okuláru.

8. Otočíme kolmo k dalekohledu druhou lomnou stěnu AC a zrcadlíci se kříž ztožníme s obrazem v okuláru, a to jedině otáčením šroubku 2 .

9. Přetočíme zpět první stěnu AB a diferencí obou obrazů kříže vyrovnáme z poloviny šroubkem 1 a z poloviny šroubkem 2 .

10. Dosáhneme-li opakovaním $7 \div 9$ přesného krytí obrazů vodorovných vláken na obou plochách (je splněno b), urovnání spektrometru i hranolu je skončeno.

Poznámka. Při úkonech $7 \div 10$ máme možnost pozorováním úkosu (vzájemného posouvání obou obrazů) kontrolovat podmínku b, neboť při správném zařízení na nekonečno úkos nevzniká.

90.2. Lomný úhel hranolu — určení zrcadlením štěrbiny

Z obrazu 90,4 vidíme, že

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi = 2(\alpha_1 + \alpha_2),$$

odkud plyne tato měřicí metoda:

Potřeby: Spektrometr [90,1], zdroj světla bílého nebo jednobarevného.

Postup

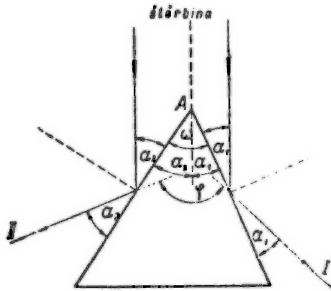
1. Provedeme justaci spektrometru a urovnání měřeného hranolu podle návodu 90.1.

2. Otočíme stolec spektrometru tak, aby rovnoběžný svazek paprsků z osvětlené štěrbiny dopadal na lomnou hranu A hranolu (obr. 90,4), a zajistíme stolec ustanovkou u_g .

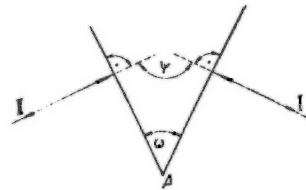
3. Vyhledáme okem obraz štěrbiny ve směru l a nastavíme dalekohled (afokální) tak, aby obraz štěrbiny splynul se svislým vláknem kříže. Čteme polohu dalekohledu na obou noních alhidády a vezmeme průměr φ_1 .

4. Vyhledáme okem obraz štěrbinu ve směru II , nastavíme dalekohled a určíme průměr φ_2 obou čtení.
5. Opakujeme úkony 3 a 4 několikrát a z hodnot φ_1 a φ_2 vezmeme průměr.
6. Vypočteme lomný úhel podle vzorce

$$\omega = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$



Obr. 90,4. Odraz rovnoběžného svazku na stě-
ných hranolu.



Obr. 90,5. Kolmý odraz na stěných
hranolu.

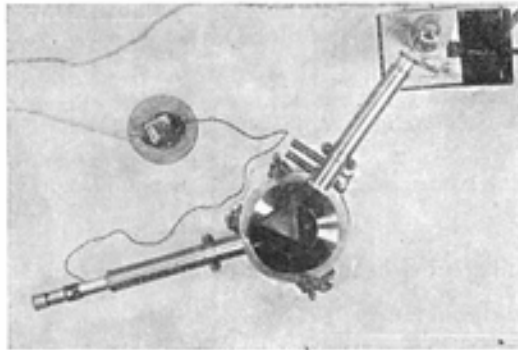
90.3. Lomný úhel hranolu — určení kolmým zrcadlením nitkového kříže

Z obr. 90,5 plyne pro úhel hranolu vztah

$$\omega = 180^\circ - \psi, \quad (2)$$

na němž je založena tato metoda:

Potřeby: Spektrometr [90,I] s *Gaussovým* okulárem [20,III] a osvětleným nitkovým křížem.



Obr. 90,6. Měření lomného úhlu hranolu zrcadlením nitkového kříže.

Postup

1. Provedeme justaci spektrometru a postavíme měřený hranol podle návodu 90.1.
2. Zajistíme stolek přítužným šroubem u_5 a osvětlíme nitkový kříž.
3. Namíříme dalekohled směrem I kolmým na jednu stěnu hranolu tak, aby obraz svislého vlákna kříže, vzniklý zrcadlením na stěně, splynul s jeho obrazem v okuláru. Určíme polohu ψ_1 dalekohledu čtením na obou noních alhidády.
4. Při nezměněné poloze hranolu přetočíme dalekohled do polohy II , v níž zase oba obrazy svislého vlákna kříže splývají. Určíme na obou noních polohu ψ_2 dalekohledu.
5. Opakujeme 3 a 4 několikrát a z hodnot ψ_1 i z hodnot ψ_2 vezmeme středy .
6. Lomný úhel ω vypočteme z (2), dosadíme tam $\psi = \psi_2 - \psi_1$.

Příklad. Lomný úhel skleněného hranolu byl měřen spektrometrem s *Gaussovým* okulárem, osvětleným čtyřvoltovou žárovkou. Kruh byl dělen na půlstupně a rameno nesoucí dalekohled bylo opatřeno jediným noniem s 30 dílky, rovnými 29 půlstupňům. Úhly byly tedy podle 19 čteny na minuty.

Přehled měření podává tabulka:

Měřené hodnoty	Průměr
$\psi_1 = 87^\circ 18'; 16'; 15'; 17'; 17'; 19'; 16'; 17'; 16'; 18';$	$87^\circ 16,9'$
$\psi_2 = 207^\circ 21'; 19'; 20'; 22'; 20'; 22'; 20'; 20'; 21'; 19';$	$207^\circ 20,4'$

Tedy

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_2 - \psi_1 = 120^\circ 3,5' \\ \omega &= 180^\circ - 120^\circ 3,5' = 59^\circ 56,5'. \end{aligned} \quad (3)$$

91. INDEX LOMU

Definice. Index lomu N prostředí je poměr rychlosti světla c ve vzduchoprázdnu k rychlosti v světla v prostředí:

$$N = \frac{c}{v}. \quad (1)$$

Takto definovaný index lomu se přesněji nazývá *absolutní* index lomu, neboť obvykle měříme *relativní* index lomu n_{12} prostředí I vzhledem k prostředí 2 , rovný poměru absolutních indexů:

$$n_{12} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (2)$$

Jednotky. Ve všech soustavách $[N] = [n_{12}] = 1$.

Přístroje

K měření indexu lomu se užívá kromě spektrometru [90,I] zvláštních přístrojů, zvaných refraktometry. Měří se jimi relativní index lomu pevných látek nebo kapalin na základě mezního úhlu.

Z běžných druhů uvedeme tři:

Polokulový refraktometr (Abbe) je podle obr. 91,1 složen z polokoule PK ze značně lámavého (těžkého flintového) skla s indexem lomu $N_0 = 1,6 \div 1,8$, jejíž horní vodorovná plocha je na okraji zbroušena. Na střední plochu, přesně rovinnou a dokonale hlazenou, položí se destička D z měřené látky s hledaným indexem N . Její spodní plocha musí být přesně rovná a hlazená; její „optický“ styk s plochou refraktometru se usnadní kapkou silně lámavé kapaliny. Osvětíme-li D se strany jednobarevným světlem, na př. sodíkovým, dopadá světlo na rozhraní prostředí s indexy N a N_0 v různých směrech, omezených největším možným úhlem dopadu, pravým úhlem. Při tomto *tečném dopadu* se světlo láme do PK pod největším možným úhlem *mezním*. Světlo tedy vystupuje z polokoule v různých směrech, které jsou však

91,I

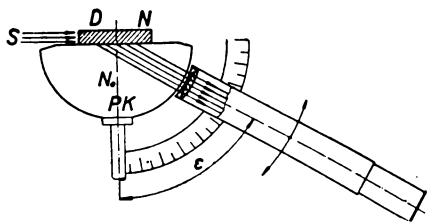
ostře ohraničeny mezním úhlem ε . Tento úhel se určí tak, že se dalekohled s nitkovým křížem skloní kolem vodorovné osy do takové polohy, aby rozhraní světla a tmy procházelo středem kříže. Mezní úhel se čte na svislém děleném kruhu.

Index lomu kapalin se měří tak, že se na horní plochu polokoule přilepí skleněný prsteneček, který se naplní kapalinou.

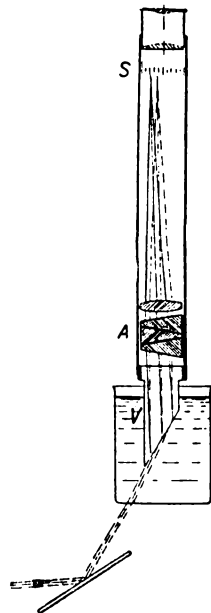
91,II

Ponorný refraktometr je určen k měření indexu lomu kapalin (obr. 91.2). Je to dalekohled s okulárovou stupnicí S , před jehož objektivem je upevněn šikmo seříznutý skleněný váleček, který se ponoří do měřené kapaliny, nalité do skleněné nádoby. Kapalina se zespoda šikmo osvětlí a pozoruje se rozhraní světla a tmy na okulárové stupnici. Z polohy rozhraní se určí podle tabulek index lomu kapaliny pro užití jednobarevné světlo.

Ponorným refraktometrem je také možno měřit střední index lomu pro světlo bílé. Vzhle-



Obr. 91.1. Abbeův refraktometr.



Obr. 91.2. Ponorný refraktometr.

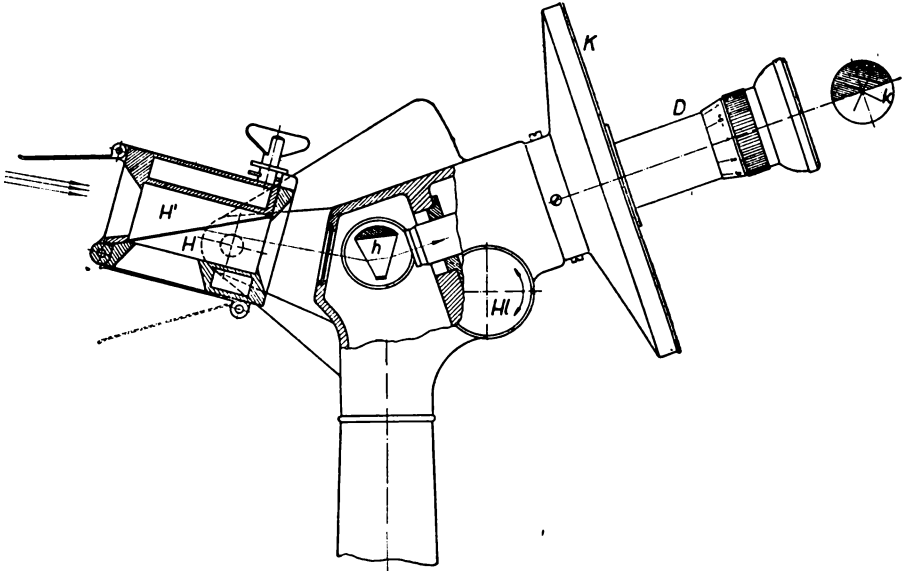
dem k rozkladu světla dostali bychom však rozhraní neostře a zbarvené; proto je mezi váleček V a objektiv vložen *Amiciho přímohledný hranol*¹⁾ A , který se dá tak natočit, aby se zrušil rozklad středních paprsků (beze změny směru).

91,III

Dvojhranolový refraktometr je rovněž především k měření kapalin. Má tu přednost, že vystačí s nepatrným množstvím zkoušené kapaliny, která se kápne na hlazenou horní plochu hranolu H . Na tuto plochu se pak přiklopí hranol H' , jehož plocha je však zrněná (obr. 91.3). Světlo dopadající bočně na hranol H' vniká do kapaliny různými směry a do H vstupuje pod úhlem nejvýše rovným meznímu úhlu, který pozorujeme dalekohledem. Měření v *jednobarevném* (sodíkovém) světle se provádí tak, že se dvojhranol HH' s kapalinou otočí hlavicí Hl tak, aby hranice světla a tmy procházela středem nitkového kříže k v dalekohledu. Poloha dvojhranolu HH' se měří na šikmém děleném kruhu K , na kterém čteme přímo index lomu měřené kapaliny. Rozklad vznikající při pozorování v *bílém* světle se ruší buď obyčejným hranolem h (*Görz*), nebo dvěma přímohlednými hranoly *Amiciho*, které v dalekohledu otočíme do takové polohy, aby rozhraní bylo bezbarvé. Z úhlu stočení, čteného na bubínku B (viz 91.4), určí se *střední disperse*²⁾ měřené kapaliny (*Abbe*).

91 ¹⁾ TF 6.4.14.91 ²⁾ TF 6.4.13.

První druh se vyrábí pro kapaliny s indexem lomu v mezích od 1,33 (voda) do 1,53, druhý typ pro $N = 1,30 \div 1,71$ nebo $1,45 \div 1,84$. Těmito refraktometry lze určovat také koncentraci cukerních roztoků, která bývá již přímo vyznačena na zvláštní stupnici. Na snímku 91,4 vidíme refraktometr, jehož dvojhranol se proudící vodou udržuje na stálé teplotě, měřené vodorovným teploměrem.



Obr. 91,3. Dvojhranolový refraktometr.

MĚŘICÍ METODY

91.1. Index lomu hranolu — měření spektrometrem

Měření se provádí obvykle *methodou nejmenší odchylky*, která je nejpřesnější z užívaných method. Dopadá-li paprsek z vakua na hranol s lomným úhlem ω pod úhlem dopadu α_1 , lomí se pod úhlem β_1 , pak dopadne na druhou stěnu pod úhlem β_2 a vystoupí z hranolu pod úhlem α_2 . Je-li N index lomu hranolu, platí podle *Snellova zákona lomu*³⁾ vztahy:

$$\sin \alpha_1 = N \sin \beta_1, \quad \sin \alpha_2 = N \sin \beta_2, \quad (3)$$

při čemž podle 91,5 je celková odchylka paprsku

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \omega, \quad (4)$$

ježto podle téhož obrazce

$$\beta_1 + \beta_2 = \omega. \quad (5)$$

Ptejme se, pod jakým úhlem α_1 musí paprsek dopadnout na první stěnu hranolu, aby výsledná odchylka byla nejmenší. Odchylka závisí na α_1 jistým vztahem,

91 ³⁾ TF 3.2.4, 6.2.2.

který bychom dostali, kdybychom z (3) a (5) vyloučili β_1 a β_2 , vypočetli a_2 jako funkci a_1 a dosadili do (4). Derivováním této rovnice plyne (ježto $\omega = \text{const}$) podmínka minima:

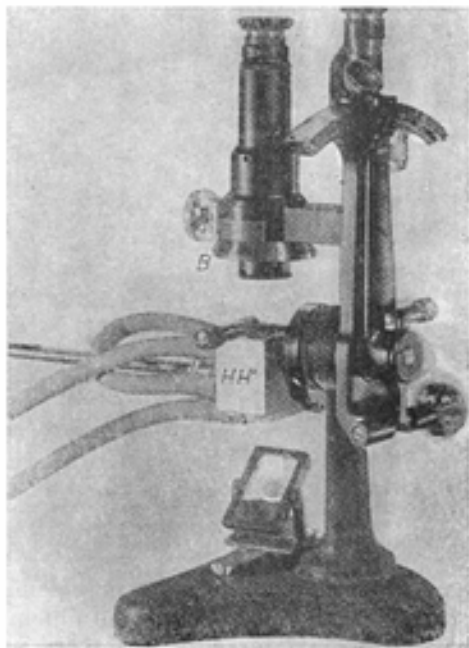
$$\frac{d\delta}{da_1} = 1 + \frac{da_2}{da_1} = 0. \quad (6)$$

a diferencováním (3) a (5) dostaneme

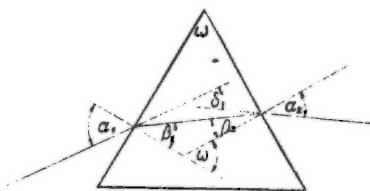
$$\cos a_1 da_1 = N \cos \beta_1 d\beta_1,$$

$$\cos a_2 da_2 = N \cos \beta_2 d\beta_2,$$

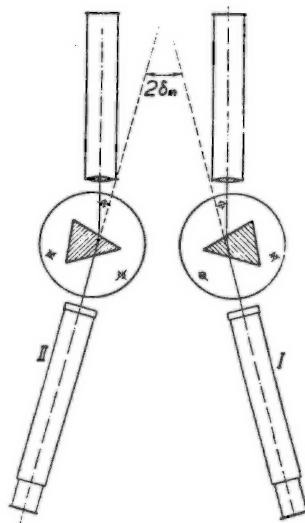
$$d\beta_1 + d\beta_2 = 0.$$



Obr. 91,4. Dvojhnanolový refraktometr firmy Spencer.



Obr. 91,5. Lom hranolem.



Obr. 91,6. Měření nejmenší odchytky.

Odtud

$$\frac{da_2}{da_1} = - \frac{\cos a_1}{\cos a_2} \cdot \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1}$$

a po dosazení do (6)

$$\frac{\cos a_1}{\cos \beta_1} = \frac{\cos a_2}{\cos \beta_2}.$$

Umocněním podle (3) dostaneme

$$\frac{1 - N^2 \sin^2 \beta_1}{1 - \sin^2 \beta_1} = \frac{1 - N^2 \sin^2 \beta_2}{1 - \sin^2 \beta_2}$$

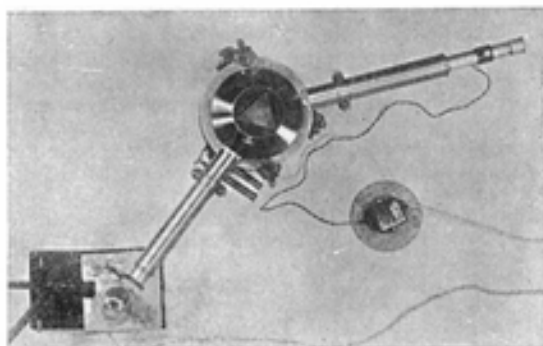
a po úpravě

$$\sin^2 \beta_1 = \sin^2 \beta_2.$$

Ježto úhly β_1 a β_2 jsou ostré, musí být $\beta_1 = \beta_2$, a tedy i $\alpha_1 = \alpha_2$, takže: *minimální odchyška nastane, když paprsek prochází hranolem souměrně k oběma stěnam.*

Pak podle (3), (4), (5)

$$N = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \delta_m)}{\sin \frac{1}{2}\omega}, \quad (7)$$



Obr. 91,7. Postavení spektrometru při měření nejmenší odchyšky v poloze *II*.

kde ω je lomný úhel hranolu a δ_m minimální odchyška paprsku. Tuto odchyšku změříme tak, že pozorujeme nejprve prostým okem pohyb paprsku lomeného hranolem, otáčejíce pomalu stolkem spektrometru. V okolí polohy *I* (obr. 91,6) pozorujeme, že obraz štěrbinu kolimátoru při otáčení stolkem mění směr svého pohybu. Do tohoto místa postavíme dalekohled a změříme jeho polohu γ_I na děleném kruhu. Pak přetočíme hranol do souměrné polohy *II* a stejně hledáme přesnou polohu γ_{II} dalekohledu. Minimální odchyška

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\gamma_{II} - \gamma_I). \quad (8)$$

Vzorec (7) byl odvozen za předpokladu, že měření konáme ve vzduchoprázdnu. Měříme-li ve vzduchu, dává výraz (7) relativní index lomu hranolu vzhledem ke vzduchu. Absolutní index lomu plyne pak z hodnoty (7) násobením absolutním indexem N_0 vzduchu, jak vidno z (2). Index lomu vzduchu závisí však na jeho teplotě t °C, na tlaku p torů a vlhkosti (napětí vodních par E torů) podle přibližného vzorce (pro bílé světlo)

$$N_0 = 1,000\,293 - 10^{-6}t + 4 \cdot 10^{-7}(p - 760) - 5 \cdot 10^{-8}E. \quad (9)$$

Tedy pro měření obvyklé přesnosti (při teplotě kolem 20 °C a tlaku asi 740 torů) stačí vzít střední hodnotu

$$N_0 = 1,000\,26, \quad (10)$$

kteřou je třeba násobit výraz (7), abychom dostali absolutní index lomu hranolu.

Potřeby: Spektrometr [90,I], světelný zdroj.

Postup

1. Provedeme urovnání spektrometru a měřeného hranolu podle 90.1.

2. Změříme methodou 90.2 nebo 90.3 lomný úhel hranolu, t. j. úhel sevřený stěnami, kterých užijeme v 4 a 5 k měření indexu lomu.

3. Index lomu je pro dispersi skla závislý na délce světelné vlny, a proto musíme, nepracujeme-li se zdrojem jednobarevným, provést měření pro určitou barvu (čáru) spektra, v které nám hranol rozloží světlo ozařující štěrbinu kolimátoru. Pracujeme-li s *Bunsenovým* kahanem, jehož nesvítivý plamen zbarvíme nějakou solí (na př. NaCl), umístíme kahan asi 10 cm od štěrbinu.

4. Otočíme stolek spektrometru tak, aby hranol byl přibližně v poloze minimální odchylky (poloha I na obr. 91,6), a otáčením stolku kolem této polohy najdeme přesně polohu nejmenší odchylky. Pak zajistíme (fixujeme) stolek v této poloze a nastavíme dalekohled tak, aby čára spektra, pro kterou chceme zjistit index lomu, procházela přesně středem nitkového křížce. Nato určíme noniem (má-li přístroj dva verniery, čteme na obou) postavení dalekohledu γ_I . Měření opakujeme několikrát a z výsledků vezmeme střed.

5. Uvolníme stolek, přetočíme jej do souměrné polohy (II na obr. 91,6) a opakujeme několikrát určení minimální odchylky; zjistíme postavení dalekohledu na děleném kruhu. Z výsledků vezmeme střed γ_{II} .

6. Ze změřených hodnot γ_I , γ_{II} vypočteme nejprve δ_m podle (8) a dosazením této odchylky a úhlu ω do (7) vypočteme index lomu n vzhledem ke vzduchu; z něho absolutní index lomu

$$N = N_p \cdot n = 1,000\ 26\ n, \quad (11)$$

jak plyne dosazením střední hodnoty (10). Přitom je třeba vždy uvést, pro kterou čáru (nebo aspoň barvu) platí získaný výsledek.

Příklad: Index lomu flintového skla pro žlutou čáru sodíkovou.

Měření byl index lomu hranolu, jehož lomný úhel ω byl zjištěn methodou 90.3; jak je uvedeno v příkladu, měl tento úhel hodnotu blízkou 60° .

Užitý spektrometr měl jediný nonius a pro postavení dalekohledu byly podle 4 a 5 nalezeny hodnoty γ_I , γ_{II} , uvedené v tabulce. Pro minimální odchylku

γ_I	γ_{II}
128° 02'	225° 20'
127° 59'	225° 18'
128° 03'	225° 19'
128° 00'	225° 22'
127° 58'	225° 18'
průměr 128° 0,4'	225° 19,4'

dostaneme podle (8)

$$\delta_m = \frac{1}{2} 97^\circ 19,0' = 48^\circ 39,5'$$

a podle (7) a 90 (3)

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} 108^\circ 36,0'}{\sin \frac{1}{2} 59^\circ 56,5'} = \frac{0,812\ 08}{0,499\ 57} = 1,6256.$$

Konečně absolutní index lomu pro žlutou čáru podle (11)

$$N = 1,6260.$$

91.2. Index lomu — měření refraktometrem

Měření indexu lomu refraktometry [91,I; II; III] se zakládá na jednoduchém vztahu mezi mezním úhlem ε a relativním indexem lomu obou prostředí. Ze *Snellova zákona lomu*⁴⁾ plyne, že se paprsek postupující v řidším prostředí rovnoběžně s rozhraním láme do hustšího prostředí pod mezním úhlem ε , který je dán vztahem

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin 90^\circ} = \sin \varepsilon = \frac{N}{N_0}.$$

Je-li tedy N_0 absolutní index lomu polokoule PK , válce V nebo hranolu H na obr. 91,1, 2, 3 a N absolutní index lomu měřené látky, pak

$$N = N_0 \sin \varepsilon. \quad (12)$$

Index N_0 se určí tak, že se změří mezní úhel ε_0 pro vzduch; potom

$$N_0 = N_0 \sin \varepsilon_0,$$

odkud

$$N = N_0 \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_0}. \quad (13)$$

Poslední měření nekonáme, známe-li dosti přesně index lomu N_0 pro dané světlo.

Podrobnější postup měření jednotlivými refraktory vyplývá z popisu jednotlivých druhů refraktometrů. Zbývá jen podotknout, že u polokulového refraktometru lze měřit mezní úhel také tím způsobem, že se polokoule PK osvětlí šikmo zdola ve směru označeném na obr. 91,1 písmenem S' . Je-li svazek paprsků mírně rozbíhavý, odráží se světlo na horní vodorovné ploše úplně pro úhly větší než mezní úhel, kdežto pro úhly dopadu menší než ε se odráží jen částečně. Volíme-li tedy směr S' tak, aby paprsky dopadaly pod úhly kolem mezního, bude část zorného pole dalekohledu světlejší a část tmavší; rozhraní odpovídá právě meznímu úhlu. Tento způsob je méně přesný, ale dá se ho použít i pro měření indexu lomu silně absorbujících látek.

92. SVÍTIVOST

Definice. Svítivost I zdroje v daném směru je světelný tok $d\Phi$, který zdroj vysílá do kužele malého prostorového úhlu $d\omega$, dělený velikostí tohoto úhlu:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}. \quad (1)$$

Přitom *prostorový úhel* ω značí část povrchu koule, omezenou kuzelem, dělenou čtvercem poloměru koule.

Světelný tok Φ je světelná energie vyzářená zdrojem za vteřinu.

91 *) TF 3.2.4, 6.2.2.

Jednotky. MKSA $[I] = \text{joule s}^{-1} = \text{watt}^1)$.

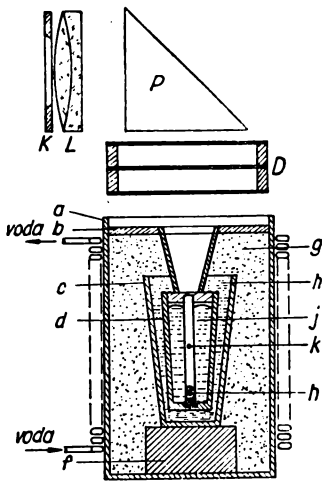
Absolutní: $[I]_a = \text{erg. s}^{-1}$.

Praktická jednotka svítivosti kandela $= 1 \text{ cd} = \frac{1}{60}$ kolmé plošné svítivosti černého tělesa při teplotě tuhnoucí platiny $= 0,9813$ mezinárodní svíčky SI $= 1,09$ Hefnerovy svíčky HK [srov. 5 (22')].

Přístroje

K měření svítivosti potřebujeme přístroje dvojího druhu: *světelné normály* neboli *etalony* a *světlooměry* neboli *fotometry*.

Pokud jde o světelné etalony, t. j. o etalony svítivosti, jsou všechny založeny na záření dokonale černého tělesa, které musí ovšem být pro přesná



Obr. 92,1. Mezinárodní světelný etalon, realizovaný černým tělesem.

měření uskutečněno jednoznačným způsobem. Mezinárodní komisí bylo r. 1939 přijato černé těleso sestavené v National Bureau of Standards (Washington 1930). Schema takového etalonu je na obr. 92,1. V úzké trubičce *k* (průměru 2,5 mm) zahřívá se rozmělněná thoriová zemina v platinové „lázni“ *j*, obsažené ve dvojitěm kelímku *c*, *d* z čisté thoriové zeminy, jehož vnitřní výška je 45 mm a vnitřní průměr 22 mm nahoře a 17 mm dole. Vše je uzavřeno v křemenném válci *a* (chlazeném proudící vodou) s křemenným krytem *b*. Ryzost platiny je dána poměrem jejího elektrického odporu při 100 °C k odporu při 0 °C, který má mít hodnotu $R_{100} : R_0 = 1,3916$. Fotometrické měření se musí provést během tání platiny (při 1769 °C, t. j. 2042 °K), kterého se dosáhne vysokofrekvenčním zahříváním a které trvá 5 až 10 minut. Postupuje se tak, že se vytvoří na destičce vizuálního fotometru reálný obraz horního otvoru zářící trubičky *k* totálně od

rážejícím hranolem *P* a achromatickou čočkou *h*, jejichž optická propustnost se zjistí přesným měřením. Kruhá clonka *D*, která určuje prostorový úhel světelného svazku, má průměr $(23,011 \pm 0,001)$ mm.

92,1 Se svítivostí tohoto základního etalonu se srovnávají podružné světelné etalony neboli *normály*, a to jsou uhlíkové nebo wolframové žárovky. Srovnání uhlíkových žárovek je zvláště přesné vzhledem k tomu, že jejich vlákno má takřka stejnou teplotu jako základní etalon, kdežto vlákno wolframové má teplotu vyšší (2360 °K ve vzduchoprázdnu, 2800 °K v žárovkách plněných inertním plynem). Při srovnávání zdrojů stejné teploty lze dosáhnout relativní přesnosti několika tisícin, při rozdílu „barevné“ teploty několika set stupňů však jen asi 1%.

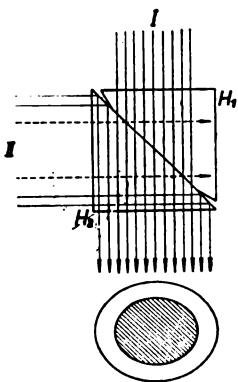
92¹⁾ Správněji bychom podle (1) měli psát rozměr svítivosti

$$[I] = \frac{\text{watt}}{\text{steradián}} = \text{W} \cdot \text{sr}^{-1},$$

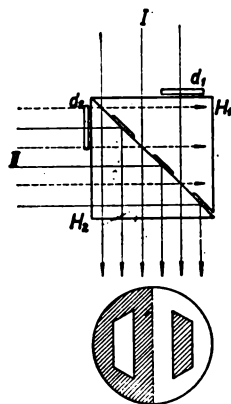
ač ovšem $[\text{sr}] = 1$. Srov. TF 2.0.6. a 6.3.2.

Pro praktické účely neuzívá se již různých druhů lamp (*Hefner, Harcourt a pod.*)²⁾, nýbrž *žárovek*, které mají při předepsaném napětí ve vodorovném směru určitou známou svítivost.

Z vlastních světloměrných přístrojů probereme nejprve subjektivní (vizuální) fotometry, u nichž se srovnávají svítivosti na základě zrakového dojmu. Skládají se v zásadě ze dvou hlavních částí: první je určena k zjištění stejného osvětlení, druhá dává možnost toto stejné osvětlení experimentálně uskutečnit.



Obr. 92,2. Světloměrná kostka na stejnou světlost.



Obr. 92,3. Světloměrná kostka na stejný kontrast.

K prvnímu účelu se většinou používá t. zv. **světloměrné (fotometrické) kostky**, která může být dvojího druhu:

Světloměrná kostka na stejnou světlost je dvojice pravoúhlých skleněných hranolů, které jsou k sobě přitisknuty hladkými diagonálními stěnami; jedna z nich je na obvodu šikmo zbroušená (obr. 92,2), takže *střední* kruhovou částí, na níž obě přeponové stěny jsou v těsném styku, prochází světlo nezeslabeno³⁾ původním směrem *I*. Naproti tomu paprsky *II*, které dopadají směrem kolmým k paprskům *I* na *obvodovou* část nezbrúšené plochy, odrážejí se na ní *úplně* a vystupují z kostky ve směru *I* rovněž nezeslabeny³⁾. Ve středu zorného pole vidíme eliptickou plochu osvětlenou paprsky *I* a kolem ní plochu osvětlenou paprsky *II*. Můžeme tak srovnávat intenzitu obou původních svazků k sobě kolmých.

92,II

Při srovnávání světel různé barvy dostaneme přesnější výsledky jiným typem kostky, t. zv. **světloměrnou kostkou na stejný kontrast** (obr. 92,3). Je sestavena také ze dvou hranolů, z nichž *H2* má opět celou přeponovou plochu hlazenou, kdežto přeponová stěna hranolu *H1* je místy vyleptána nebo zdrsněna prudkým proudem písku. Na těchto místech neprochází světlo z hranolu do hranolu. Proto světlo *I* prochází jen neporušenými částmi společné plochy a světlo *II* se odráží totálně tam, kde k hladké stěně hranolu *H2* přiléhají vyleptané plošky hranolu *H1*. Tak dostaneme v zorném poli celkem 4 plošky, osvětlené střídavě paprsky *I* a *II*. Dosud se liší obě kostky jen jiným rozložením obou světél v zorném poli. K měření na stejný kontrast se upraví tak, že se

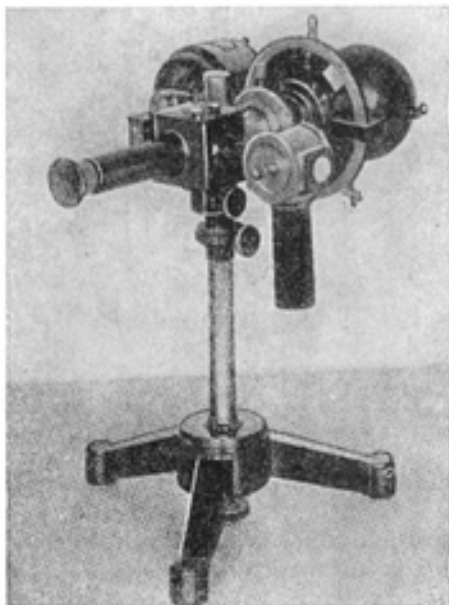
92,III

92²⁾ TF 6.3.5.

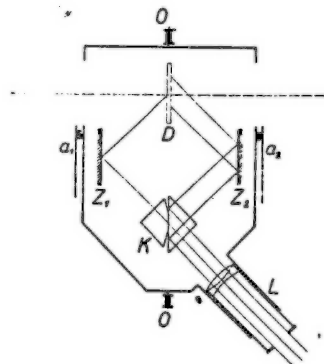
92³⁾ Nehledíme-li k nepatrné absorpci ve skle hranolů.

k oběma hranolům přiloží skleněné destičky d_1 a d_2 , kterými se zeslabí světlo dopadající na vnitřní lichoběžníkové plošky, a to ve stejném poměru (4 až 8%). Při stejné intenzitě světél I a II se pak jeví obě lichoběžníkové plošky o málo tmavší než okolí, a to v obou polovinách ve stejné míře. Tuto stejnost kontrastu v obou polovinách postihne oko přesněji než stejnou světlost u kostky [92,II], zvláště při různém zbarvení obou světél.

Nezávisle na tom, které kostky použijeme k zjištění stejné intenzity obou svazků dopadajících na kostku, můžeme volit způsob, kterým stejné intenzity dosáhneme. Zařízení, kterým měníme oba svazky v kostce tak, aby byly stejně světelné pro zdroje různých svítivostí, mohou být velmi rozmanitá; nejčastěji se užívá závislosti osvětlení na vzdálenosti plochy od zdroje nebo i metody otáčivého výřezu (rotujícího sektoru), při níž světlo ze silnějšího zdroje prochází



Obr. 92,4. *Bechsteinův* sektorový fotometr.



Obr. 92,5. *Lummer—Brodhunův* fotometr.

prudce roztočeným neprůhledným (kovovým) kotoučem s výřezem, jehož úhel měníme tak dlouho, až oba zdroje dávají stejné osvětlení⁴⁾. Takový sektorový fotometr se obvykle konstruuje tak, že kotouč s proměnným výřezem je v klidu a svazek paprsků obíhá kolem osy kotouče; dosáhne se toho rotujícími hranoly nebo čočkami (*Bechstein*, srov. snímek 92,4). Jinak lze zeslabovat světlo absorpčními klíny, stáčením polarisační roviny analysátoru, kterým prochází lineárně polarisované světlo, a pod.

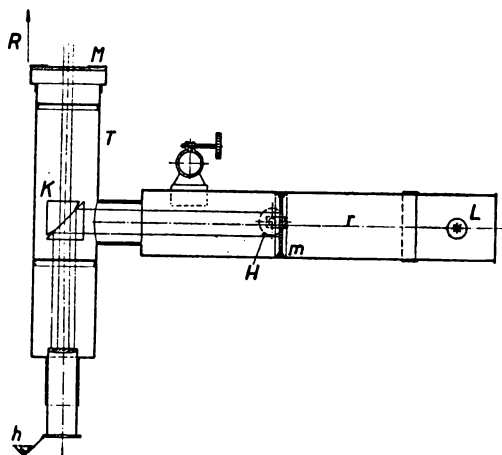
Z vizuálních fotometrů popíšeme dva.

92,IV **Lummer-Brodhunův** světloměr je kovová krabice, upevněná na posuvném stojánku optické lavice (obr. 92,5) se svislou sádrovou destičkou D , která se osvětlí s každé strany jedním ze srovnávaných zdrojů. Destička má bílý matný povrch, který rozptyluje dopadající světlo všemi směry. Světlo vystupující z obou ploch pod 45° se odráží zrcadly Z_1 a Z_2 na světloměrnou kostku [92,II; III] K a pozoruje se lupou (okulárem) L . Přístroj lze překlopit o 180° kolem

92⁴⁾ Světlo propuštěné rotujícím výřezem je podle *Talbotova* zákona úměrně jeho středovému úhlu.

osy oo , čímž se zamění oba zdroje vzhledem k přístroji, aby se vyloučil vliv možné nesouměrnosti zařízení. Po skončeném měření uzavřou se záklopký a_1, a_2 , aby se destička i kostka chránily před prachem.

Fotometr s mléčným sklem (Weber) je přenosný přístroj se světloměrnou 92,VI kostkou (obr. 92,6), na kterou dopadá světlo ze dvou stejných mléčných (opálových) skleněných destiček m a M . První z nich se prosvěcuje malou žárovkou nebo benzinovou lampou. Druhá destička se prosvěcuje měřeným zdrojem ze vzdálenosti R od destičky. Otáčením hlavice H pastorku posune se destička m



Obr. 92,6. Weberův fotometr (schema).

do takové vzdálenosti r od L , až se dosáhne stejného osvětlení obou hranolů kostky [92,II; III]. Pozorujeme lupou, před kterou lze umístit příklonný hranolek h . Trubice T s kostkou K a destičkou M je otáčivá kolem vodorovné osy, aby bylo možno měřit svítivost v různých směrech (srov. snímek 92,7). Je-li měřený zdroj příliš silný, vloží se za M další mléčné destičky, které světlo zeslabí ve známém poměru. Je-li I svítivost zdroje a i svítivost srovnávací lampy L , platí při stejnosti osvětlení obou destiček vztah

$$\frac{I}{R^2} = \frac{i}{r^2}, \quad (2)$$

kde r se čte přímo na stupnici přístroje. Na vzdálenosti destiček od kostky nezáleží, ježto z kostky přijdou do oka jen paprsky kolmo vystupující z každé destičky, tedy navzájem rovnoběžné; intenzita světla je však v rovnoběžném svazku všude stejná.

Pokud jde o objektivní fotometry, liší se zásadně od vizuálních tím, že světloměrná kostka je nahrazena citlivým měřicím orgánem, kterým může být buď fotografická deska (film), nebo fotoelektrický článok (buňka).

Abychom mohli použít fotografické desky k měření intenzity dopadajícího světla, musíme znát závislost zčernání desky (vyvolané) na osvětlení a době, po kterou byla deska exponována (vystavena účinku světla). Zčernáním rozumíme plošnou hustotu vyloučeného stříbra a posuzujeme ji podle toho, jak deska

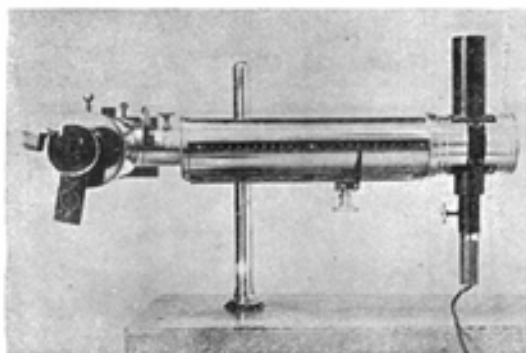
pohlcuje světlo, kterým ji prosvěcujeme. Dopadá-li na 1 cm² desky světelný tok Φ_0 , z něhož deska propustí část Φ , je *zčernání* (neboli hustota) desky

$$Z = \log \frac{\Phi_0}{\Phi}.$$

Jeho závislost na osvětlení desky se obvykle vyjadřuje *gradační* křivkou, která představuje závislost Z na logaritmu osvětlení E . V jistém středním rozmezí bývá tato křivka přibližně přímá:

$$Z = a + \gamma \log E,$$

kde γ je *gradace* desky.



Obr. 92,7. Weberův fotometr s mléčným sklem.

Známe-li gradační křivku užití fotografické emulze, stačí osvětlit měřnými zdroji dvě sousední pole téže desky, vyvolat ji, proměřit zčernání (hustotu) a vypočítat poměr osvětlení způsobených každým z obou zdrojů. Avšak křivka zčernání závisí na mnohých okolnostech a je obecně pro každou desku poněkud jiná, proto se srovnávanými zdroji osvětlí vždy táž deska a po každé se určí její gradační křivka. Lze to provést jednoduše tak, že osvětlení desky silnějším zdrojem zeslabujeme postupně ve známých poměrech (na př. vždy o 10%); tím dostaneme *stupnici zčernání*, z níž lze interpolací určit přesný poměr měřených osvětlení.

K měření zčernání (hustoty) desek byla sestrojena řada přístrojů (*densometry, densografy*), jimiž srovnáváme propustnost desky s propustností zeslabovacího *klínu*, u něhož hustota rovnoměrně klesá s jeho tloušťkou. Přístroje toho druhu jsou buď vizuální (pozorujeme světломěrnou kostkou [92,II; III]), nebo objektivní, u nichž měříme intenzitu propuštěného světla fotočlánkem.

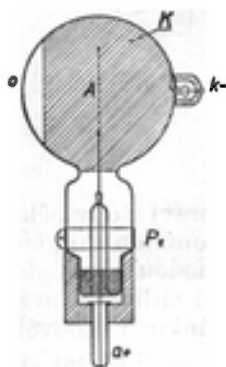
Fotoelektrické články jsou založeny na *fotoelektrickém jevu*, který záleží v tom, že se osvětlením některých látek uvolňují elektrony. Při tom rozeznáváme dva případy:

Vnitřní fotoelektrický jev vzniká při osvětlení některých krystalů. Tak na př. v krystalu šedé modifikace selenu (event. s přídavkem teluru), démantu a j. uvolňuje pohlcené záření elektrony, které vytvoří fotoelektrický proud, vložíme-li krystal mezi dvě elektrody spojené s póly baterie. Tedy osvětlením se prakticky nevodivý krystal stává vodičem, aniž v něm vzniká elektromotorická síla. Na tomto jevu sestrojené selenové buňky různé úpravy nejsou nej-

vhodnější k fotometrickým účelům: jeví setrvačnost, polarisaci, únavu a kromě toho je šedá modifikace selenu nestálá.

Vnější fotoelektrický jev vzniká při osvětlení kovů⁹²⁾. Kovy jsou vodivé i bez osvětlení, obsahující velké množství *volných elektronů*, které se pohybují v krystalické mříži iontů. Osvětlením čistého kovu však nastává za určitých podmínek *výron* elektronů z povrchu kovu, čemuž říkáme *vnější fotoelektrický jev*. Přitom se povrch kovu nabije na určitý kladný potenciál — vzniká *fotoelektrické napětí*. Postavíme-li proti povrchu kovu kladně nabitou elektrodu, vznikne fotoelektrický proud, který při dosti vysokém napětí je úměrný osvětlení. Pro *pohybovou energii* E_{kin} vymrštěných elektronů platí rovnice (Einstein)

$$E_{kin} = h(\nu - \nu_0),$$



Obr. 92.8. Fotočlánek s anodou uprostřed.



Obr. 92.9. Vakuové fotočláanky s anodou uprostřed:

1, 2 jsou skleněné fotočláanky Tungoram; 3 je křemenný fotočlánek General Electric Co.

kde $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$ je *Planckova konstanta* a ν kmitočet pohlceného záření. Konstanta ν_0 závisí na osvětlovaném kovu a nazývá se *charakteristický kmitočet*. Je to nejnižší kmitočet, který může způsobit fotoelektrický proud u dotyčného kovu.

Množství elektronů vysílaných kovem, tedy *sytný⁹³⁾ fotoelektrický proud*, je při vnějším fotoelektrickém jevu velmi přesně *úměrné osvětlení*, což má zásadní důležitost pro jeho použití ve fotometrii.

Na využití vnějšího efektu jsou založena dále popsaná zařízení.

Vakuový fotočlánek je skleněná⁹⁴⁾ baňka (obr. 92,8) vysoce vyčerpaná, která je až na vstupní okénko *o* postříbřena. Na stříbře je teprve nanášena velmi slabá, takřka jednoatomová vrstva alkalického kovu (K, Cs, Rb), který tvoří vlastní fotoelektrickou vrstvu článku. Tato vrstva *K* — *kathoda* článku — je vodivě spojena s dotykem *k* vyvedeným na povrch baňky. Uprostřed baňky je drátěná smyčka nebo síťka *A*, která tvoří anodu a je vodivě spojena s doty-

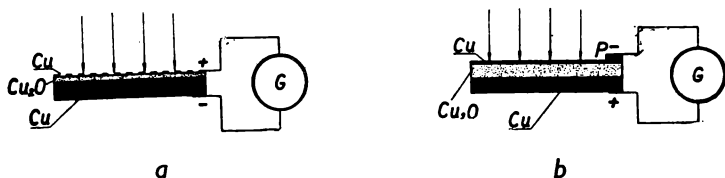
92.VIII

⁹²⁾ TF 6.7.1.

⁹³⁾ Sytný proud vznikne při dostatečně vysokém napětí, kdy všechny elektrony, uvolněné z katody, přecházejí na anodu.

⁹⁴⁾ Pro krátkovlnné světlo (ultrafialové) používá se baňek z taveného křemenu nebo skleněných baňek s křemenným okénkem.

kovým kuličkem a . Aby při vložení napětí (několika set voltů) na anodu a katodu nevznikaly povrchové proudy, umožněné slabou kondensací par na skle baňky, jsou kontakty a_+ a k_- odděleny ochranným vodivým prstencem P_1 (na př. staniolovým), který se uzemní. Podobný prsteneček (tvořený stříbrným povlakem) bývá i na vnitřní stěně baňky a je uzemněn kontaktem vyvedeným sklem. Kromě tohoto druhu článků s anodou uprostřed vyrábějí se články s katodou uprostřed; je tvořena kovovým plíškem s citlivou vrstvou. Anodou je kovová zrcadlicí vrstva na vnitřní straně baňky, která odráží světlo na katodu. Některé typy článků prvního druhu vidíme na snímku 92,9.



Obr. 92,10. Hradlový fotočlánek:
a – se zadní, b – s přední stěnou.

92,IX Citlivost těchto článků lze zvýšit tím, že se do baňky vpraví stopy některého netečného plynu, jehož molekuly se nárazem fotoelektronů ionisují, čímž se násobí množství přeneseného náboje a zvyšuje proud mezi anodou a katodou. To je tak zvaný **plynový fotočlánek**, který má výhodu větší citlivosti, avšak nasycený proud není již přesně úměrný osvětlení jako u článku vakuového.

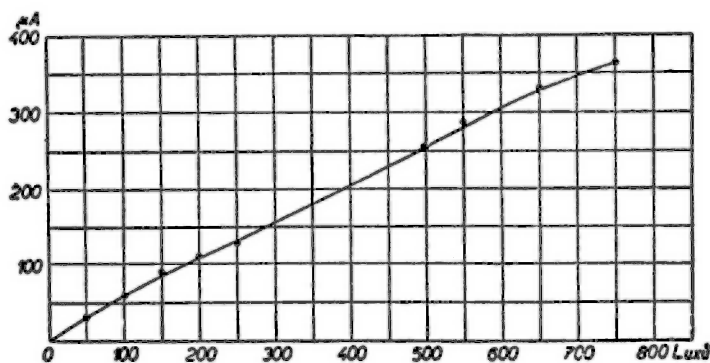
92,X Oba popsané fotočlánky vyžadují jisté anodové napětí, má-li nastat skutečně nasycený proud. Pro praktickou potřebu jsou proto výhodnější t. zv. **hradlové fotočlánky**, v nichž při osvětlení vzniká fotoproud bez pomocného napětí. **Měděný fotočlánek hradlový** je založen na *vnitřním* fotoelektrickém jevu, který nastává v polovodivé vrstvě kysličníku mědného Cu_2O , uloženého mezi dvěma měděnými elektrodami. Rozhraní mezi mědí a kysličníkem je totiž pro elektrony propustné a „ventilovým“ působením Cu_2O se uvolněným elektronům brání v pohybu do polovodiče Cu_2O , nikoliv však opačným směrem do čisté mědi. Tak vzniká ve vrstvě osvětlením elektromotorická síla, která při spojení obou elektrod přes galvanoměr dává fotoelektrický proud asi téhož řádu jako u nejcitlivějších fotočlánků s pomocným napětím.

Článek se zadní stěnou (obr. 92,10a) je upraven tak, že se tenoučká vrstva kysličníku, vyloučená na měděné desce, pokryje měděnou spirálou (chráněnou skleněnou destičkou), které použijeme jako elektrody. Světlo prochází kysličníkem až k spodní měděné stěně, kde se světlem uvolněné elektrony vymršťují až do mědi, při čemž musí překonat jen nepatrný potenciální rozdíl (několika desetín voltu). Tak vzniká fotoproud, který měříme galvanoměrem.

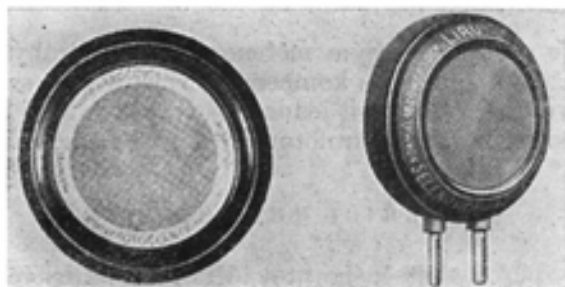
Citlivější je *článek s přední stěnou* (obr. 92,10b), u něhož světlo proniká tenkou vrstvou čisté mědi do kysličníku, kterým je však pohlceno dříve, než dospěje k spodní měděné desce, tvořící druhou elektrodu článku. Tak vzniká proud, při němž elektrony putují vzhůru (proti světlu) do povrchového měděného povlaku, který je záporným pólem, kdežto zadní deska se nabíjí kladně. Elektrický dotyk s měděným povlakem zprostředkuje měděný prsteneček P , k němu shora přitisknutý.

Velmi citlivý je také hradlový článěk selenový; je to tenká selenová vrstva 92,XI na železné destičce, pokrytá olovenou sítkou nebo průsvitným stříbrným nebo zlatým povlakem. Při osvětlení jedním luxem dává každý cm^2 plochy proud až $0,1 \mu\text{A}$. Na snímku 92,12 vidíme dva selenové články české výroby.

Proud vznikající v hradlových článcích je ve značném rozsahu přibližně úměrný osvětlení (obr. 92,11) a práce s nimi je zcela jednoduchá. Proto jsou



Obr. 92,11. Závislost proudu hradlového selenového fotočlánku zn. LIRU na osvětlení.

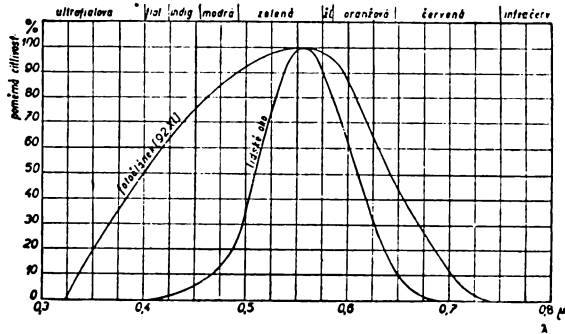


Obr. 92,12. Hradlové fotočlánky selenové zn. LIRU.

velmi vhodné k objektivnímu měření svítivosti a osvětlení. Nevýhodou je, že se jejich křivka citlivosti (udávající závislost citlivosti pro různé barvy) dosti liší od křivky citlivosti oka (obr. 92,13). Rozdíly se však dají zmenšit vhodnými filtry.

Při spektrálním rozboru vyšetřují se intenzity světél různé barvy, k čemuž se používá spektrálních fotometrů. Mohou být jak vizuální, tak objektivní; poslední z nich mají tu přednost, že jimi lze zkoumat i neviditelné části spekter. Přístroje s dvojitou štěrbinou dávají obrazy spekter obou zdrojů nad sebou, z nichž úzkou clonkou vymezíme užší obor světla, přibližně jediné barvy (frekvence). Šířku hornější nebo spodní štěrbinu upravíme tak, aby obě světla byla stejně intenzivní. Šířku štěrbinu však nelze bez újmy přesnosti měnit libovolně; široká štěrbinu nedává monochromatické světlo a na štěrbině příliš úzké vzniká ohyb světla. Proto je lépe buď měnit intenzitu jednoho zdroje rotujícím výřezem, nebo světlo nejprve lineárně polarisovat a zeslabovat stáčením analyzátoru (srov. [100,III]). Na tom je založen spektrální fotometr polarisační (Martens, König).

Objektivní spektrální fotometrii lze provádět také měřením zčernání fotografického snímku spektra, získaného spektrografem. K proměrování takových snímků se používá *mikrofotometrů* nebo *registračních mikrofotometrů*, které zapíší přímo průběh zčernání desky pro jednotlivá místa (barvy) spektra. Vlastním měřicím orgánem bývají tu fotočlánky. K prosvěcování desky je nutno použít zdroje stálé svítivosti, což u žárovek žhavených městskou sítí není dokonale splněno. Proto se konstruují registrační přístroje se dvěma fotočlánky, z nichž



Obr. 92.13. Křivka citlivosti hradlového selenového fotočlánku zn. LIRU.

jeden se osvětluje světlem prošlým měřenou deskou, druhý — osvětlovaný plným světlem užitého zdroje — kompenzuje změny jeho svítivosti. Tak je možno určit správný poměr intenzit jednotlivých spektrálních barev. Na tomto principu je založen registrační mikrofotometr *Koch-Gossův*.

MĚŘICÍ METODY

Pokud jde o způsob skutečného provádění fotometrických měření, popíšeme podrobněji jen dvě základní metody vizuální a jednu metodu objektivní.

92.1. Měření svítivosti Lummer-Brodhunovým světloměrem

Při měření světloměrem [92,V] dosahuje se obvykle změny osvětlení sádrové destičky změnou vzdáleností zdrojů. Proto bývá přístroj montován na posuvném stojánku optické lavice, na kterou také umístíme oba srovnávané světelné zdroje. Destička musí být ovšem kolmá k spojnici obou zdrojů, tedy k ose lavice. Oba zdroje umístíme do stálé vzdálenosti a měníme polohu fotometru, až dosáhneme stejného osvětlení. Přitom uijíme vhodných clonek, abychom odstínili vedlejší světlo, a měření konáme v dokonale temné místnosti s tmavými (černými) stěnami. Oba zdroje mají být zakryty tak, aby z nich vycházelo světlo jen směrem k fotometru; přitom se nesmí měnit intenzita odrazem na stěnách krytů, které musí být matně černé. Osvětlení způsobené bodovým zdrojem je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti. Tedy pro svítivosti I , I_0 dvou zdrojů, které dávají stejné osvětlení ve vzdálenostech R , R_0 , *velkých proti rozměrům zdrojů*, platí úměra

$$I : I_0 = R^2 : R_0^2. \quad (3)$$

Potřeby: Fotometr [92,V], optická lavice [85,I], srovnávací žárovka [92,I], clonky, posuvné stojánky s kryty na zdroje.

Postup

1. Doprostřed optické lavice postavíme fotometr a na oba konce umístíme srovnávané zdroje (měřený zdroj a srovnávací žárovku).
2. Polohu fotometru a obou zdrojů upravíme tak, aby jejich středy ležely v přímce procházející kolmo středem měřicí destičky fotometru.
3. Zaostríme lupu fotometru přesně na obrazec vytvořený kostkou [92,II; III] a zaznamenáme polohu p a p_0 zdrojů, kterou již neměníme.
4. Hledíce do fotometru, posouváme jej tak dlouho, až dosáhneme buď stejné světlosti, nebo stejného kontrastu. Měření opakujeme několikrát a zaznamenáme po každé polohu fotometru, čtenou na stupnici lavice. Měříme-li *vodorovnou svítivost* svíslé postavené žárovky, měříme po každé ve 4 polohách, které dostaneme otočením žárovky vždy o 90° kolem svíslé osy. Z výsledků vezmeme střed.
5. Úkon 4 opakujeme po otočení destičky fotometru o 180° .
6. Překlopíme fotometr kolem vodorovné osy do souměrné polohy a opakujeme 4 a 5.
7. Ze všech provedených čtení vypočteme průměrnou polohu P fotometru.
8. Poměr svítivosti vypočteme z (3), dosadíme-li tam

$$R = p - P, \quad R_0 = P - p_0. \quad (4)$$

9. Chceme-li určit absolutní svítivost (ve vodorovném směru) daného zdroje, dosadíme za I_0 hodnotu uvedenou na normální žárovce. Podmínkou správného výsledku ovšem je, aby žárovka byla žhavena předepsaným způsobem. Napětí nebo proud (event. příkon) žárovky musí mít předepsanou velikost, což zjistíme zapojením příslušného měřicího přístroje.

Příklad. Srovnání 120 W žárovky s etalonem svítivosti $I_0 = 25$ SI fotometrem [92,V] s kostkou na stejnou světlost. Příkon žárovky byl regulačním odporem udržován na 120 W, což bylo opětovně kontrolováno wattmetrem [76,X].

Měření se provedlo na optické lavici tak, že etalon I_0 byl postaven na dílek $p_0 = 10,0$ cm, měřená žárovka na dílek $p = 289,0$ cm. Fotometr umístěn mezi oběma. Měřená žárovka stála svíslé vzhůru na otáčivém stolku s děleným kruhem a každé měření provedeno ve 4 polohách: 0° , 90° , 180° , 270° . Příklad jednoho takového měření ukazuje schema:

Poloha žárovky	Polohy světloměru v cm	Střed P cm
0°	101,5; 101,2; 104,3; 105,0	103,0
90°	104,8; 104,6; 101,4; 101,0	102,95
180°	101,2; 100,8; 104,5; 104,3	102,7
270°	105,0; 104,1; 101,2; 101,3	102,0
	Průměr	102,66 cm

Tedy podle (4) $R_0 = P - p_0 = 92,66$ cm, $R = p - P = 186,34$ cm a dosazením do (3)

$$I : I_0 = \frac{186,34^2}{92,66^2} = 4,044,$$

takže podle 5 (22') průměrná vodorovná svítivost žárovky

$$I = 25 \cdot 4,044 \text{ SI} = \frac{101,1}{0,9813} \text{ cd} = 103,1 \text{ cd}. \quad (5)$$

92.2. Svítivost — měření Weberovým fotometrem

Měření Weberovým fotometrem [92,VI] je založeno na principu předěšlé metody 92.1. Rozdíl je jen v tom, že tu srovnáváme oba zdroje nepřímo,

prostřednictvím pomocné lampy L , jejíž svítivost i ani nemusíme znát. Nejlépe je oba srovnávané zdroje I , I_0 umístit vždy do stejné vzdálenosti $R = R_0$, takže z rovn. (2) dostaneme za předpokladu neproměnné svítivosti i úměru

$$I : I_0 = r_0^2 : r^2, \quad (6)$$

jsou-li r a r_0 vzdálenosti destičky m od L , čtené pro oba zdroje na stupnici přístroje (obr. 92,7).

Měření provedeme pro každý zdroj několikrát a při tom dbáme, aby svítivost lampy L byla neproměnná. Je-li to žárovka (nizkovoltová), žhavíme ji z větší baterie a kontrolujeme stálost příkonu. Je-li L benzinová lampa, musíme udržovat stálou výšku plamene.

Chceme-li přístrojem získat absolutní hodnotu svítivosti, volíme za zdroj normální žárovku [92,I] a její svítivost I_0 dosadíme do (6). Přitom dbáme pokynů uvedených v bodu 9 metody 92.1.

Trubice T s kostkou a lupou je otáčivá kolem vodorovné osy, což dává možnost měřit svítivost zdroje v různých směrech. K tomu umístíme zdroj na výsuvný stojan a měníme jeho výšku. Při značnějším sklonu trubice je výhodné pozorovat kostku příklonným hranolkem h .

Je-li měřený zdroj příliš silný proti lampě L , volíme větší vzdálenost R nebo vsuneme za M jednu nebo více mléčných destiček. Poměrné zeslabení světla, způsobené vsunutím destičky, zjistíme snadno určením r pro týž zdroj bez destičky a s destičkou.

Přístroj má několik barevných filtrů k měření monochromatické svítivosti. Weberovým fotometrem můžeme také pohodlně studovat účinek stínítka, reflektoru a pod.

92.3. Měření fotočlánkem

Abychom mohli měřit fotometrické veličiny různými druhy fotočlánků, musíme znát jejich vlastnosti. Jsou to zejména charakteristiky fotočlánků a citlivost.

Anodová charakteristika fotonky je křivka závislosti anodového proudu I_a na anodovém napětí U_a při stálém osvětlení.

Charakteristika fotonky je křivka závislosti anodového proudu na světelném toku Φ při stálém anodovém napětí U_a .

Citlivost c_f fotonky je rovna směrnici charakteristiky, t. j. derivaci anodového proudu I_a podle světelného toku Φ při stálém anodovém napětí U_a :

$$c_f = \left(\frac{dI_a}{d\Phi} \right)_{U_a}. \quad (7)$$

Pro hradlové fotočlánky, v nichž vzniká ventilovým účinkem rozhraní mezi polovodičem a kovem při osvětlení fotoelektrické napětí, definujeme obdobně:

Charakteristika hradlového článku je křivka závislosti fotonapětí u na světelném toku Φ .

Citlivost c_h hradlového článku je rovna směrnici charakteristiky, t. j. derivaci fotonapětí podle světelného toku:

$$c_h = \frac{du}{d\Phi}. \quad (8)$$

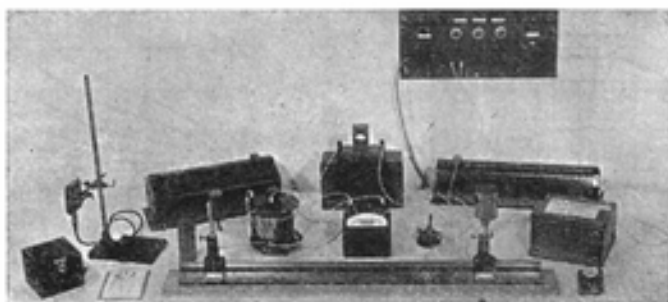
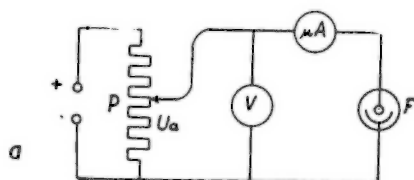
Anodový proud fotonky je úměrný ploše S cathody a totéž platí o světelném toku:

$$I_a = i_a S, \quad \Phi = ES, \quad (9)$$

kde i_a je hustota anodového proudu a E je osvětlení.

Tedy podle (1)

$$c_f = \left(\frac{di_a}{dE} \right)_{U_a} \quad (10)$$



Obr. 92,14. Měření anodové charakteristiky fotonky:
a - schema; b - praktické uspořádání.

Konečně citlivost vakuové fotonky je velmi přibližně stálá (charakteristika přímá), a proto se někdy píše

$$c_f = \left(\frac{I_a}{\Phi} \right)_{U_a} = \left(\frac{i_a}{E} \right)_{U_a} \quad (11)$$

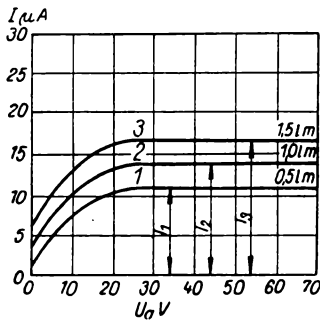
Charakteristika fotonky vyjadřuje tedy zároveň závislost $i_a(E)$ a je možno také rozumět charakteristikou závislost $I_a(E)$ a obdobně u hradlového článku křivku $u(E)$. Citlivost i různé charakteristiky fotočlánku jsou ve značné míře závislé na spektrálním složení užitého světla, a proto je třeba při každém měření podrobně popsat světelný zdroj a podmínky, za nichž zdroj pracoval (u žárovky je třeba uvést typ a žhavicí napětí).

Citlivost c_f se vyjadřuje obvykle v jednotkách A/lm nebo častěji $\mu\text{A/lm}$ nebo A/mlm. Vyjádříme-li světelnou energii, proměněnou při absorpci v teplo v cal/s, dostaneme pro citlivost jednotku $\text{A/cal s}^{-1} = \text{As/cal}$.

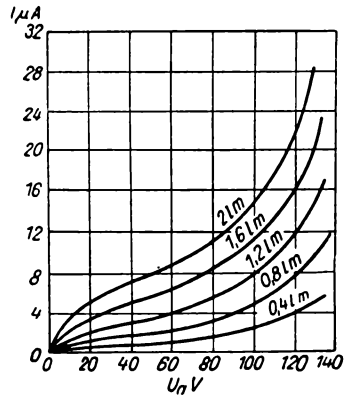
Průběh anodové charakteristiky fotonky vyšetříme takto: Zapojíme fotonku F podle schematu 92,14 a ve vhodné vzdálenosti od ní umístíme světelný zdroj (žárovku). Pak při stálém osvětlení (u žárovky použijeme stálého napětí) měníme potenciometrem P anodové napětí U_a a nakreslíme křivku údajů závislosti mikroampérmetru v μA na U_a .

U vakuových fotonek má anodová charakteristika zhruba stejný průběh jako u diody. Je to zřejmé z obr. 92,15, kde jsou naryšovány charakteristiky pro tři různé světelné toky, 0,5, 1,0 a 1,5 lm. Fotonky plynové se vyznačují tím, že nejeví sytnost; anodový proud stoupá urychleně s rostoucím anodovým napětím, protože ionty vzniklé ionisací plynu (nárazem fotoelektronů) uvolňují při dopadu na katodu další elektrony. Na obr. 92,16 je pět anodových charakteristik plynového článku pro různé světelné toky od 0,4 do 2 lm.

Abychom vyšetřili průběh charakteristiky $I_a(E)$, užijeme stejného zapojení 92,14, zvolíme však stálé anodové napětí U_a a měníme osvětlení tak, aby



Obr. 92,15. Anodové charakteristiky vakuové fotonky.



Obr. 92,16. Anodové charakteristiky plynové fotonky.

se přitom neměnilo spektrální složení světla. Nejjednodušeji to provedeme změnou vzdálenosti zdroje od fotonky, ale nespolehnáme se na přesnou platnost zákona převrácených čtverců, nýbrž zjistíme závislost osvětlení na vzdálenosti přesným luxmetrem, kterým nahradíme měřenou fotonku. Teprve po tomto přípravném měření umístíme fotonku na místo luxmetru a provedeme vlastní měření, při kterém zjišťujeme postupně velikost anodového proudu pro různé vzdálenosti zdroje od fotonky. Spojením obou závislostí dostaneme pak závislost anodového proudu na osvětlení a podle druhé rovnice (9) charakteristiku fotonky, určující anodový proud jako funkci světelného toku. U vakuových fotonek je tato funkce velmi přibližně lineární (úměrnost), kdežto u fotonek plynových stoupá fotoproud rychleji, ale nelineárně. Citlivost je tedy u vakuové fotonky stálá a snadno ji určíme jako směrnici charakteristiky.

Podobně lze postupovat při vyšetřování charakteristiky hradlového fotočlánku a průběhu jeho citlivosti v závislosti na svíceném toku nebo na osvětlení. Fotonapětí měříme ovšem milivoltmetrem.

Známe-li průběh charakteristiky fotonky nebo hradlového článku, která vyjadřuje závislost anodového proudu nebo fotonapětí na osvětlení, můžeme použít fotočlánku k absolutnímu měření svítivosti zdroje. Stačí k tomu změřit fotoproud nebo fotonapětí při dané vzdálenosti zdroje, odvodit z něho velikost osvětlení a násobit čtvercem vzdálenosti zdroje. Platí to ovšem jen s takovou přesností, s jakou lze pokládat zdroj za bezrozměrný ve srovnání s jeho vzdáleností od fotonky.

Velmi jednoduše lze objektivně srovnávat svítivost zdrojů stejné barvy, použijeme-li metody obvyklé u vizuálních fotometrů. Stačí na př. volit vzdálenosti obou zdrojů od fotočlásku tak, aby fotoelektrické napětí nebo proud byly v obou případech stejné, a z rovnice (3) vypočítat poměr svítivosti, určený poměrem čtverců vzdáleností. K tomu se hodí nejlépe hradlový fotočlánek. U různobarevných zdrojů je ovšem třeba nejprve vhodnými filtry aspoň zhruba přizpůsobit poměrnou citlivost fotočlásku pro oba zdroje citlivostí oka (srov. popis fotočlásků [92, VII ÷ XI]).

Skutečně lze dosáhnout na př. u fotonky s draslíkovou fotokathodou (nanesenou na sensibilovaném stříbře) křivky citlivosti podobné křivce citlivosti oka.

93. SVĚTELNÝ TOK

Definice. Světelný tok Φ je celková světelná energie, vysílaná zdrojem za jednotku doby.

Se (směrovou) svítivostí I souvisí podle 92 (1) vztahem

$$\Phi = \int I d\omega, \quad (1)$$

kde integrace se vztahuje na všechny prostorové úhly, názorněji řečeno, na povrch jednotkové koule (rovný 4π). Zavedeme-li *průměrnou sférickou svítivost* I_s , definovanou jako střední hodnotu svítivosti v různých směrech, bude

$$I_s = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega = \frac{\Phi}{4\pi}; \quad \Phi = 4\pi I_s. \quad (2)$$

Jednotky. MKSA jednotka je stejná jako pro svítivost (srov. pozn. 92¹⁾):

$$[\Phi] = [I] = \text{joule} \cdot \text{s}^{-1} = \text{watt} = 10^7 [I]_a.$$

Praktická jednotka

$$\text{dekalumen} = \text{Dlm} = 10 \text{ lumen} = 10 \text{ lm}$$

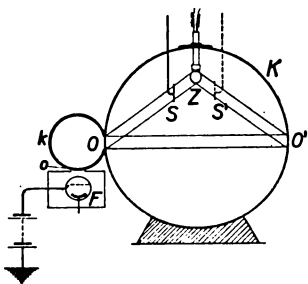
je definována podle (2) tím, že světelný tok zdroje s jednotkovou průměrnou svítivostí (rovnou kandele) je roven 4π lm.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Podle (1) mohli bychom určit světelný tok tak, že bychom změřili svítivosti zdroje ve všech možných směrech, každou svítivost bychom násobili příslušným prostorovým úhlem a tyto součiny sečetli pro všechny směry. Lze to však provést jedním měřením, a to určením nepřímého osvětlení vnitřního povrchu koule, uzavírající daný zdroj. Má-li vnitřní stěna koule všude stejný povrch, rozptylující světlo do všech směrů, je nepřímé osvětlení — vzniklé mnohonásobným odrazem na stěně koule — všude stejné, úměrné světelnému toku a nezávislé na poloze zdroje uvnitř koule. To ovšem neplatí pro přímé osvětlení stěny zdrojem; chceme-li tedy změřit toto nepřímé osvětlení v některém místě, musíme toto místo odstínit před přímými paprsky zdroje.

Na tom je založen kulový fotometr (Ulbricht 1920), schematicky narysovaný na obr. 93,1.

Je to velká kovová dutá koule (průměru $\frac{1}{2}$ až 3 m), uvnitř matně bílá, do níž se upevní měřený zdroj Z . Okénko O , malé proti povrchu koule, je buď volné, nebo zakryté mléčným sklem; před přímým světlem zdroje je chráněno stínítkem S , po obou stranách matně bílým, aby nezmenšovalo difusní osvětlení. Můžeme pak libovolným fotometrem (na př. [92,V; VI] srovnávat svítivost mléčného skla v okénku pro dva různé zdroje, a dostaneme poměr světelných toků, rovný poměru osvětlení okénka. U slabších zdrojů lze měřit okénkem také osvětlení protější stěny. Pak ovšem je nutno odstínit onu část stěny O' , kterou měříme (stínítko v poloze S').



Obr. 93,1. Kulový fotometr (Ulbrichtův).

Určíme-li absolutní hodnotu světelného toku některého zdroje podle rovnice (1) na základě směrových svítivostí, dostaneme pak absolutní hodnotu světelného toku pro libovolný zdroj, který s ním srovnáme kulovým fotometrem.

Měření lze také provádět objektivně, na př. fotočlánkem [92,VIII; IX]; pak je vhodné podle *Campbella a Ritchie* připojit k okénku O (beze skla) podobnou menší kouli k , k jejímuž okénku o teprve přiložíme měřicí fotočlánek F .

94. MĚRNÁ SPOTŘEBA A SVĚTELNÁ ÚČINNOST ŽÁROVKY

Definice. *Měrná spotřeba* s je příkon žárovky P , dělený svítivostí I :

$$s = \frac{P}{I}. \quad (1)$$

Světelná (optická) účinnost k je poměr světelného toku Φ k příkonu žárovky:

$$k = \frac{\Phi}{P}. \quad (2)$$

Jednotky. Obě veličiny se měří v jednotkách praktických:

$$[s]_p = \frac{\text{watt}}{\text{kandela}} = \text{W/cd} \text{ nebo } \text{W/SI} \text{ nebo } \text{W/HK}, \quad (3)$$

$$[k]_p = \frac{\text{dekalumen}}{\text{watt}} = \text{Dlm/W} \text{ nebo } \text{lm/W}. \quad (4)$$

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Způsob měření měrné spotřeby i světelné účinnosti je dán jejich definicí:

K zjištění s stačí určit svítivost I žárovky a její příkon P . Přitom obvykle žháváme žárovku střídavým proudem a měli bychom tedy určit její příkon podle 62 (9).

Avšak indukční i kapacitní odpor žárovky bývá malý, a proto můžeme kromě wattmetru [76,X] použít k měření P také voltmetru [76,IX] a ampérmetru [76,V] v zapojení podle 76. Pokud jde o svítivost, počítáme specifickou spotřebu podle svítivosti žárovky ve směru, který má význam při praktickém užití žárovky, nebo prostě podle průměrné svítivosti *hemisférické* (polokulové), která se definuje rovnicí podobnou 93 (2) jako světelný tok vysílaný zdrojem do spodního poloprostoru, dělený jeho prostorovým úhlem, t. j. 2π . Měření provádíme vhodným fotometrem, na př. [92,V] nebo [92,VI].

Pokud jde o světelnou účinnost, je nutno změřit světelný tok, což učiníme podle 93 kulovým fotometrem [93,I].

Podle zákonů o záření¹⁾ posunuje se s rostoucí teplotou vlákna žárovky světelná energie ke kratším délkám vlny. Při nižších teplotách připadá největší část proudem dodané energie na neviditelné dlouhovlnné (tepelné) záření. Při vyšších teplotách se přesune větší poměrná část energie na viditelné záření, při čemž jen nepatrná část připadá na krátkovlnné (ultrafialové) záření, rovněž neviditelné. Proto světelná účinnost roste s teplotou vlákna, a tedy i s příkonem žárovky, o čemž se snadno přesvědčíme měřením. Z toho důvodu musíme při měření dbát, aby žárovka byla žhavana předepsaným způsobem. Přezhavením žárovky získáme vyšší účinnost, ovšem na újmu její trvanlivosti.

Příklad. Určení měrné spotřeby žárovky 120 W s wolframovým vláknem, jejíž vodorovná svítivost byla měřena v příkladu 92,1.

Ježto žárovka byla žhavana za příkonu 120 W stále kontrolovaného, je měrná spotřeba podle (1) a 92(5)

$$s = 1,19 \text{ W/SI} = 1,16 \text{ W/cd.}$$

Kdyby žárovka měla ve všech směrech stejnou svítivost I jako v rovině vodorovné, vydávala by podle 93 (2) světelný tok

$$\Phi = 4\pi I = 1296 \text{ lm}$$

a její světelná účinnost by byla podle (2)

$$k = 10,8 \text{ lm/W} = 1,08 \text{ Dlm/W.}$$

95. OSVĚTLENÍ

Definice. Osvětlení E dané plochy je světelný tok Φ dopadající na plochu, dělený její velikostí S :

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Jednotky MKSA₁: praktickou jednotkou je podle 5 (23)

$$[E]_p = \text{lux} = 1 \text{ lx} = \text{lm} \cdot \text{m}^{-2}.$$

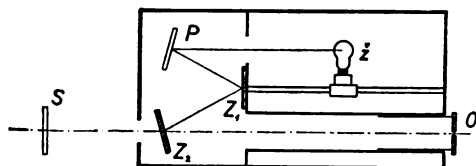
PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Osvětlení, t. j. hustotu světelného toku dopadajícího na danou plochu, můžeme měřit množstvím světla, které plocha odráží. Tak můžeme snadno určit poměr dvou osvětlení, vložíme-li na osvětlené místo v obou případech totéž stínítko, rozptylující co nejdokonaleji světlo. *Jaš*, t. j. kolmou plošnou svítivost (srov. čl. 5) stínítka, pak změříme vhodným fotometrem.

94 ¹⁾ TF 6.5.2.

Jako stínítka lze použít bílé destičky sádrové nebo z mléčného skla. Nejlépe vyhovuje malá *Ulbrichtova* koule s bílým vnitřním povrchem jako u fotometru [93,I], do níž vpouštíme měřené světlo kruhovým otvorem (srov. kouli *k* na obr. 93,1).

K měření se dobře hodí na př. *Weberův* fotometr [92,VI], z něhož vyjmeme destičku *M*. Srovnáváme pak jas stínítka (na př. sádrového), postaveného před trubici, pro obě měřená osvětlení. Absolutní hodnoty odvodíme ze srovnávacích



Obr. 95,1. *Trotterův* luxoměr.

měření, osvětlíme-li stínítka kolmo ze známé vzdálenosti R_0 metrů zdrojem známé svítivosti I_0 svíček. Toto osvětlení

$$E_0 = \frac{I_0}{R_0^2} \text{ lm}$$

a podle 92 (6) je měřené osvětlení

$$E = E_0 \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

jsou-li r_0 a r vzdálenosti destičky m fotometru od L pro známé osvětlení E_0 a měřené osvětlení E .

Fotometry upravené k snadnému měření osvětlení, které se nazývají **95,I luxometry** (luxmetry), bývají sestaveny podobně jako *Weberův* fotometr. Velmi jednoduchý je luxoměr *Trotterův* (obr. 95,1), kterým se osvětlení stínítka S pozoruje trubici O a srovnává se pomocí zrcátek Z_1 , Z_2 s osvětlením plošky P , způsobeným žárovkou Z . Sklon plošky P (nebo vzdálenost žárovky) se mění tak, aby obě osvětlení byla stejná. Stupnice udává osvětlení v luxech.

96. KONCENTRACE BAREVNÝCH ROZTOKŮ (MĚŘENÍ KOLORIMETREM)

Definice. Koncentrace c roztoku je množství m rozpuštěné látky, dělené objemem V roztoku:

$$c = \frac{m}{V}.$$

Jednotky. MKSA $[c] = \text{kgm}^{-3} = 10^{-3} [c]_a$.

Absolutní jednotka $[c]_a = \text{gcm}^{-3}$.

Zpravidla se však měří koncentrace pro každou látku v jiných jednotkách, nepřímo úměrných molekulové hmotě μ látky:

$$[c]_m = \frac{1000}{\mu} [c]_a.$$

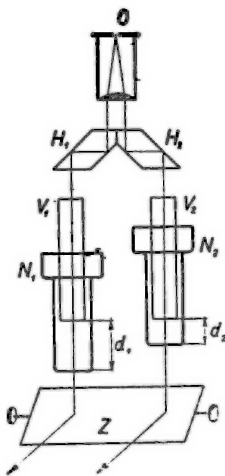
Takto vyjádřená *molekulová koncentrace* je tedy dána počtem grammolekul obsažených v 1 litru roztoku.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Koncentrace barevných roztoků může se měřit fotometricky na základě *zákona Lambert-Beerova*:¹⁾

$$I = I_0 \cdot 10^{-\epsilon cd}, \quad (1)$$

který praví, že průchodem vrstvou tloušťky d roztoku s molekulovou koncentrací c se světlo intenzity I_0 zeslabí na hodnotu I , danou výrazem (1); činitel ϵ je pro danou látku konstantní a nazývá se *molekulový extinkční koeficient*.



Obr. 96,1. Kolorimetr Duboscqův.

Obr. 96,2. Kolorimetr fy Spencer s vestavěným osvětlovacím zařízením.

Absorpci ve dvou roztocích téže látky, ale různých koncentrací c_1 a c_2 , zeslabí se tedy světlo podle (1) ve stejném poměru, jestliže vrstvy roztoků d_1 , d_2 splňují podmínku

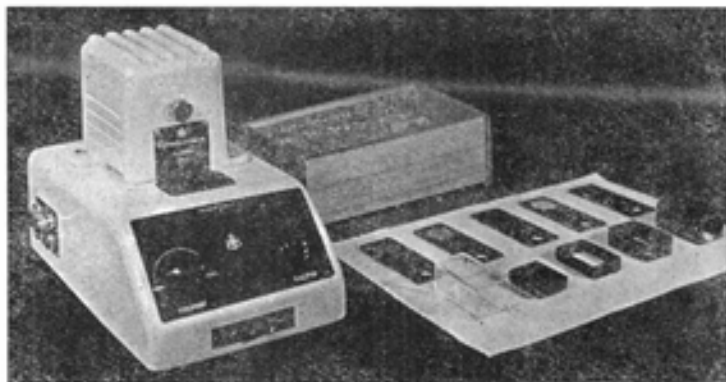
$$c_1 d_1 = c_2 d_2$$

čili jsou-li v obráceném poměru koncentrací:

$$c_1 : c_2 = d_2 : d_1. \quad (2)$$

96 ¹⁾ TF 6.4.13.

96,I Na tom jsou založeny přístroje zvané kolorimetry. Srovnávanými roztoky se naplní dvě skleněné válcové nádoby N_1 , N_2 s rovinnými skleněnými dny, které se dají svisle posouvat. Do nich zasahují dva plné skleněné válce V_1 , V_2 , které (vytlačující kapalinu) omezují sloupce roztoků, jimiž prochází světlo svisle vzhůru do oka pozorovatele (obr. 96,1). Paprsky se odrážejí v hranolech H_1 a H_2 tak, že zorné pole okuláru O je z poloviny osvětleno světlem prošlým každým roztokem. Nádoby se nastaví tak, aby obě poloviny pole byly stejně světlé a výšky sloupců d_1 a d_2 se čtou na stupnici přístroje. Poměr



Obr. 96,3. Kolorimetr československé výroby.

koncentrací se určí z rovnice (2). Popsaná úprava pochází od *Duboscqa*; vyrábí se však řada různých druhů kolorimetrů. Zrcadlem Z se vrhá denní světlo vzhůru do nádobek; také se zhotovují speciální osvětlovací lampy pro kolorimetry nebo elektrické osvětlení je přímo vestavěno do přístroje (obr. 96,2).

97. DISPERSNÍ KŘIVKA

Definice. Dispersní křivka je grafický obraz závislosti vlnové délky λ světla na odchylce světla lomem.

Obvyklý průběh je znázorněn na obr. 97,1.

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

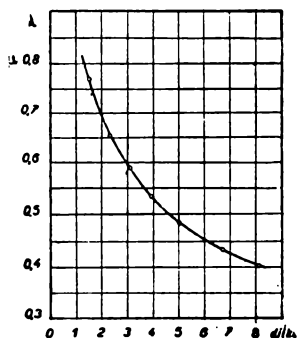
Dispersní křivku určujeme přístroji zvanými *spektroskopy* nebo fotograficky na spektrografech.¹⁾

97,I **Spektroskop Bunsenův** (obr. 97,2) je v podstatě spektrometr [90,I], obvykle bez děleného kruhu, k němuž je připojen kolimátor K' , v jehož ohniskové rovině je jemná vodorovná stupnice S (podobně jako u stupnicového kolimátoru [85,III]). Poloha kolimátoru K se štěrbinou \mathcal{S} a hranolou bývá pevná a volí se tak, aby odpovídala minimální odchylce (srov. 91.1) pro střední délku vlny viditelného spektra. Stupnicový kolimátor K' je v takové poloze, aby se obraz

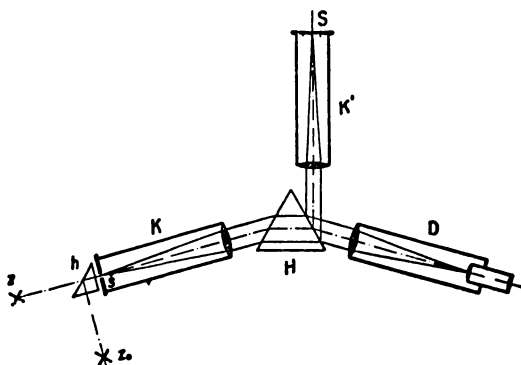
97 ¹⁾ TF 6.4.14.

stupnice po odraze na stěně hranolu H překrýval v dalekohledu s obrazem spektra. Stupnice je buď rovnoměrná, nebo (pro daný hranol) je cejchována přímo ve vlnových délkách. Před štěrbinu kolimátoru K lze přiklonit hranolek h , který odráží do spodní poloviny štěrbiny světlo ze srovnávacího zdroje Z_0 . Tak dostaneme dvě spektra nad sebou.

U novějších spektroskopů má dalekohled D okulární mikrometr, kterým lze polohu jednotlivých čar velmi přesně zjistit. Pak není třeba kolimátoru se stupnicí K' . Některé přístroje mají několik hranolů.



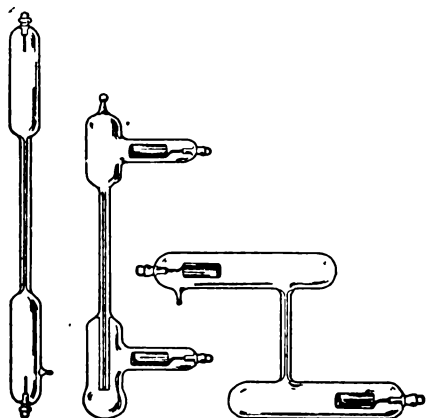
Obr. 97,1. Disperzní křivka.



Obr. 97,2. Bunsenův spektroskop.

Při měření musí spektroskop splňovat obdobné podmínky jako spektrometr [90,I]. Pokud jde o jejich zkoušení a splnění podmnek, viz 90.1.

Jako světelného zdroje používá se nesvitivého plamene *Bunsenova* kahanu, který zbarvíme nepatrným množstvím soli některého prvku, jehož spektrum je známo (Na, Li, K, Sr). Platinový drátek, zatavený do skleněné trubičky nebo tyčinky a ukončený očkem, smočíme v destilované vodě nebo v čisté solné kyselině (HCl). Nabereme jím trochu soli a vložíme do spodní části plamene, kde se sůl roztaví a původně nesvitivý plamen zbarví. Pracujeme-li s různými solemi, zbavíme vždy drátek všech zbytků užitých soli opláchnutím v H_2O i v HCl a vyžháním v plameni, neboť i nejmenší stopy (řádu 10^{-6} g) látky se objeví ve spektru (nejlépe je použít pro každou sůl jiného drátku).



Obr. 97,3. Geisslerovy výbojky.

Velmi ostré čáry poskytují *Geisslerovy* výbojky, tvarů naznačených na obr. 97,3, které postavíme před štěrbinu kolimátoru tak, aby jejich úzká přímá část byla rovnoběžná se štěrbinou. Připojí se k pólům menšího induktoru a dávají obvykle spektra vodíku, helia, neonu a jiných plynů (viz snímek 97,4).

Konečně lze použít k zjištění disperzní křivky i absorpčních čar *Fraun-*

hoferových, které pozorujeme ve slunečním spektru a jejichž vlnové délky jsou velmi přesně známy.

Vlnové délky nejdůležitějších spektrálních čar jsou uvedeny v T.XVII.

Potřeby: Spektroskop [97.I], výbojky [97.II], induktor [76.I], *Bunsenův* kahan, platinový drátek, soli, HCl, H₂O.

Postup

1. Vytvoříme spektra některých prvků a upravíme šířku štěrbinový tak, aby čáry byly co nejostřejší, ale dostatečně světlé. K získání čar plynů použijeme výbojek, spektra ostatních prvků dostaneme tavením jejich solí v plameni.

2. Na stupnici spektroskopu zjistíme co nejpřesněji polohy *s* významných čar nebo polohy *s* mikrometru, v nichž se svislé vlákno kříže kryje s pozorovanými spektrálními čarami; poznamenáme je do zápisu s udáním barvy čáry a zářivého prvku.

3. Vyhledáme v T.XVII správné vlnové délky λ pozorovaných čar.

4. Každou dvojici *k* sobě příslušných hodnot *s* a λ znázorníme bodem o souřadnicích (*s*, λ) na milimetrovém papíru.

5. Body spojíme hladkou dispersní křivkou.

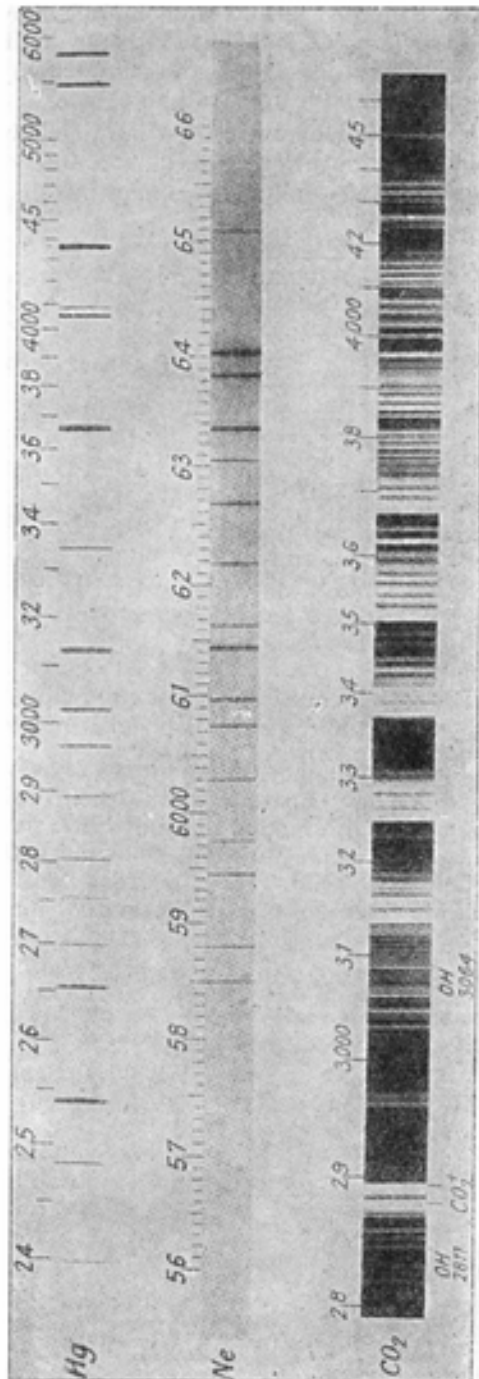
98. SPEKTRÁLNÍ ROZBOR

Definice. Spektrálním rozbořením (analyzou) rozumíme zjišťování prvků obsažených v daných látkách podle jejich spekter (srov. snímek 98,1).

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METHODY

Spektrální rozbor lze provádět zásadně dvěma způsoby: podle spektra *emisního* a podle spektra *absorpčního*.¹⁾ Princip měření je v obou případech v podstatě stejný.

98¹⁾ TF 6.4.13.

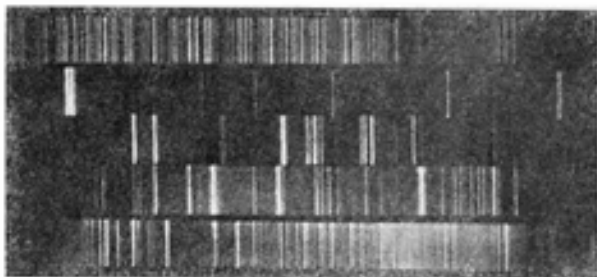


Obr. 97,4. Spektrum rtuťi, neonu a kyslíčnicku uhlíkatého podle *Pearse a Gaydona*. První dvě spektra jsou negativy. Stupnice udány v angströmech.

Potřeby jako v 97.

Postup

1. Zjistíme dispersní křivku spektroskopu podle 97.
2. Zjistíme a poznamenejme čáry, které pozorujeme ve (slabém) spektru samotného hořáku před vložením zkoumané látky do plamene. Zjistíme polohy s emisních nebo absorpčních čar spektra analysované látky a poznamenejme pro kontrolu jejich barvy.
3. Grafickou interpolací určíme z dispersní křivky pro každou pozorovanou čáru její vlnovou délku λ .
4. Vyhledáme v T, XVII ke každé pozorované čáře čáru, která jí přísluší v mezích pozorovacích chyb.



Obr. 98,1. Oblouková spektra některých prvků podle A. Fowlera.

5. Podle této tabulky připišeme ke každé čáře jméno prvku, který jí vysílá (absorbuje). K bezpečnému zjištění prvku je radno najít nejméně dvě čáry, nejlépe takové, které jsou pro onen prvek příznačné. Je důležité vyloučit *všechny* čáry, které jsme pozorovali před vložením zkoumané látky do plamene.

99. VLNOVÁ DÉLKA SVĚTLA

Definice. *Vlnová délka* λ (jednobarevného) světla je vzdálenost dvou nejbližších míst světelného paprsku, v nichž má paprsek stejný stav (stejnou fázi).

Vlnčet σ je převrácená hodnota vlnové délky a je číselně roven počtu vln na jednotkové délce paprsku.

Jednotky. Vlnovou délku viditelného světla měříme v těchto jednotkách:

$$\text{mikron} = 1 \mu = 10^{-3} \text{ mm} = 10^3 \text{ m}\mu = 10^4 \text{ \AA},$$

$$\text{milimikron} = 1 \text{ m}\mu = 10^{-3} \mu = 10 \text{ \AA},$$

$$\text{angström} = 1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-7} \text{ mm}.$$

Vlnčet měříme v absolutních jednotkách $[\sigma]_a = \text{cm}^{-1}$.

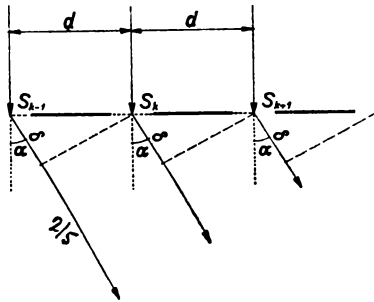
Přístroje

K měření vlnové délky světla lze použít kromě spektrometru a spektroskopu s hranolem přístrojů založených na interferenci světla.

U jedné skupiny těchto přístrojů, interferometrů, vznikají *ryze interferenční* jevy, kdežto u druhé skupiny, u ohybových mřížek, dochází ke křížení paprsků, které vzniknou *ohybem* dopadajícího světla.

Ohybová mřížka na průhled je planoparalelní skleněná deska s velkým množstvím nesmírně tenkých a hustých, navzájem rovnoběžných a stejně

vzdálených přímých vrypů. Vrypy se ryjí na zvláštních přístrojích ostrým diamantovým hrotem. Mezerami mezi vrypy prochází světlo sklem při kolmém dopadu beze změny směru, avšak na vrypech je rozptylováno (a odraženo zpět). Taková mřížka je tedy pravidelná soustava rovnoběžných štěrbin, jež se podle *Huygensova principu*¹⁾ stávají zdrojem elementárních rozruchů, které se od štěrbin šíří všemi směry. Pozorujeme-li světlo prošlé mřížkou dalekohledem zaostrěným na nekonečno, protnou se paprsky, vystupující ze všech štěrbin pod tímž úhlem α , v ohniskové rovině objektivu na téže přímce (rovnoběžné se štěrbinami).



Obr. 99,1. Ohyb světla mřížkou na průhled.

Z obr. 99,1 vidíme, že se tyto paprsky obecně nesetkají se stejnou fází. Nazveme-li vzdálenost středů S_k , S_{k+1} dvou sousedních štěrbin *mřížkovou konstantou* d , mají jejich střední paprsky dráhový rozdíl $d \sin \alpha$. Je-li tedy

$$\delta = d \sin \alpha = r\lambda \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

zesilují se střední paprsky vycházející ze všech štěrbin, a totéž platí pro stejnohlé paprsky všech štěrbin. Liší-li se však dráhový rozdíl v sousedních štěrbinách od celého počtu vln, na př. o $\frac{\lambda}{2p}$, kde p je číslo celé, bude dráhový rozdíl mezi k -tou a $(k + p)$ -tou štěrbinou $\frac{\lambda}{2}$ a světlo obou štěrbin se zruší.

Tedy při velkém počtu štěrbin budou se paprsky značně zeslabovat ve všech směrech kromě těch, které splňují podmínku (1). Jednobarevné světlo vytvoří tedy ve směrech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, daných vztahy

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \alpha_2 = 2 \frac{\lambda}{d}, \quad \dots, \quad \sin \alpha_r = r \frac{\lambda}{d}, \quad (2)$$

světelné pruhy (*maxima*), které jsou tím ostřejší, čím více vrypů mřížka obsahuje. Celé číslo r se nazývá *řád maxima*. Při dopadu bílého světla vzniknou barevné pruhy, jejichž vzdálenost od středu roste přibližně úměrně s délkou vlny.

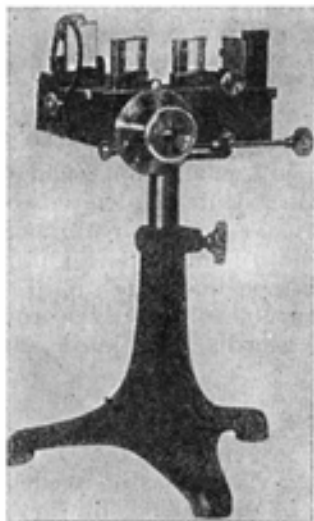
Na základě vztahů (2) lze velmi přesně měřit délku vlny, známe-li s náležitou přesností mřížkovou konstantu d . Její hodnota má být u mřížky udána; mění se ovšem s teplotou podle vztahu

$$d = d_0 (1 + \alpha' t),$$

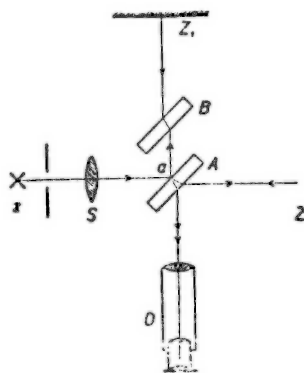
99¹⁾ TF 3.2.4.

kde a' je roztažnost skla mřížky. Konstantu d lze určit měřicím mikroskopem [31, XII], ale pro přesné zjištění vlnových délek je vhodné určit d na základě známé vlnové délky některého „vlnového normálu“ (t. j. čáry přesně známé vlnové délky), z nichž nejpřesněji je známa červená čára kadmiová. Měření konáme na spektrometru podle návodu 99.1.

Ohybová mřížka na odraz (Rowland) liší se od mřížky na průhled tím, že vrypy jsou vyryty na kovovém zrcadle. Má tu přednost, že světlo není pohlcováno sklem jako u mřížky na průhled. Děje se tak ovšem v čočkách kolimátoru a dalekohledu; ale ani tato absorpce není u Rowlandovy mřížky konkávní, jejíž mírné zakřivení a poloha štěrbin se volí tak, že duté zrcadlo mřížky vytvoří ostrý reálný obraz štěrbin na desce nebo filmu vhodně umístěných. 99,II



Obr. 99,2. Michelsonův interferometr na měření vlnové délky světla.



Obr. 99,3. Michelsonův interferometr.

Měření rovinnou mřížkou na odraz se provádí na spektrometru obdobně jako mřížkou na průhled.

Z přístrojů ryze interferenčních popíšeme podrobněji jen Michelsonův interferometr, jímž byla provedena řada důležitých fyzikálních měření fundamentálního významu, jako vyjádření internacionálního metru ve vlnových délkách červené čáry kadmiové.²⁾ Tato čára je proto základním vlnovým normálem a její vlnová délka ve vzduchu 20 °C za normálního tlaku 760 torů a při napětí vodních par 10 torů (tedy poměrné vlhkosti asi 57 %) činí 99,III

$$\lambda_{\text{Ca}} (t = 20 \text{ } ^\circ\text{C}, p = 760 \text{ torů}, E = 10 \text{ torů}) = 0,643 \ 850 \ 34 \ \mu. \quad (3)$$

Konstrukce interferometru je naznačena na obr. 99,2 a 99,3. Spojkou S vytvořený rovnoběžný svazek paprsků (z nichž je kreslen jen jediný) dopadá pod úhlem 45° na rovinnou stěnu planoparalelní skleněné destičky A , kde se odráží i láme. Tato (přední) stěna je slabě postříbřena,³⁾ aby odražený i lomený paprsek měly stejnou intenzitu. Tak se dopadající světlo dělí v bodě a na dva

99 ¹⁾ Srov. 3 (1) a výklad o interferenčním komparátoru [31, III].

99 ²⁾ Také může být postříbřena zadní stěna destičky A ; pak ovšem se svazek dělí až na zadní stěně a vyrovnávací destička B musí být mezi A a Z .

svazky: 1 — odražené paprsky dopadají kolmo na zrcadlo Z_1 , které je vrací zpět do bodu a , odkud po lomu v A jdou do dalekohledu; 2 — lomené paprsky dopadají kolmo na zrcadlo Z_2 , které je rovněž vrací do a , takže po odrazu a lomu přijdou také do dalekohledu D . Druhý svazek ovšem přitom projde celkem třikrát destičkou A , svazek první však jen jednou; proto se mu vkládá do cesty stejná a s A rovnoběžná destička B (kompensační). Pak jsou dráhy obou svazků stejné, jsou-li obě zrcadla Z_1 a Z_2 stejně daleko od bodu a . V ohnisku objektivu se tedy oba svazky zesilují. Posuneme-li však jedno ze zrcadel ve směru paprsků o čtvrtinu vlnové délky, zruší se oba svazky interferencí a střed zorného pole bude tmavý. Kolem středu vidíme pak interferenční *kroužky* (v bílém světle barevné, v jednobarevném jasné a temné), které odpovídají místům stejného sklonu paprsků, jež nevstupují do dalekohledu přesně rovnoběžně s optickou osou. Tak je tomu při dokonalé kolmosti obou zrcadel k osovému paprsku. K pozorování však lze použít také interferenčních *proužků* (málo zakřivených), které vzniknou při zcela mírném sklonu zrcadel. Obvykle má jedno z nich neměnnou vzdálenost, lze však měnit jeho sklon regulačními šroubky, kdežto druhé zrcadlo má neměnný sklon a jeho vzdálenost se mění přesným mikrometrickým šroubem s dělenou hlavicí a podélnou stupnicí. Posouváme-li totiž toto zrcadlo jedním směrem, putují interferenční proužky zorným polem dalekohledu (interferenční kroužky se buď rozestupují, nebo stahují ke středu pole). Přitom projde pevným bodem pole tolik světlých proužků, o kolik půl vln se změnila vzdálenost posuvného zrcadla. Tím je dán způsob měření, popsáný v 99.2.

M Ě Ř I C Í M E T H O D Y

Nejpřístupnější metoda měření vlnové délky byla již vlastně uvedena při výkladu spektrálního rozboru v 98. Záleží v tom, že zjistíme polohu čáry, jejíž vlnovou délku hledáme, na stupnici spektroskopu a k ní najdeme grafickou interpolaci z dispersní křivky hranolu (viz 97) příslušnou vlnovou délku.

Tato jednoduchá metoda nedosahuje ovšem přesnosti metod interferenčních, které probereme ve dvou základních případech, a to rovinné mřížky a Michelsonova interferometru.

99.1. Vlnová délka světla — měření ohybovou mřížkou

Měření se provádí na spektrometru tak, že se rovinná mřížka postaví kolmo k ose kolimátoru a měří se dalekohledem úhly, v nichž vznikají maxima různých řádů. Pozorujeme nejprve maxima 1. řádu vpravo a vlevo od směru dopadu světla a z jejich úhlové vzdálenosti $\beta_1 = 2\alpha_1$ vypočteme λ z rovnice (2). Podobně pro maxima vyšších řádů:

$$\lambda = d \sin \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{2} d \sin \frac{\beta_2}{2} = \frac{1}{3} d \sin \frac{\beta_3}{2} = \dots \quad (4)$$

Návod k měření je podán pro případ mřížky na průhled.

Potřeby: Skleněná mřížka na průhled [99,I], spektrometr [90,I], *Bunsenův* hořák nebo výbojky [97,II].

Postup

1. Podle 90.1 urovnáme nejprve spektrometr bez mřížky, postavíme dalekohled přesně proti kolimátoru a jeho polohu zajistíme přítužným šroubem.

2. Postavíme na stolec mřížku (stranou s vrypy k dalekohledu), upevníme ji voskem. Její vrypy musí být rovnoběžné se štěrbinou kolimátoru i s osou spektrometru, což provedeme stavěcími šroubky stolku podobně jako při postavení hranolu v 90.1. Při otáčení stolku s mřížkou nesmí se měnit výška obrazu štěrbin v dalekohledu (který zůstává v klidu).

3. Zakryjeme černým papírem čočku kolimátoru a otočíme stolec s mřížkou tak, aby byla kolmá k ose dalekohledu, což zjistíme podle splnutí nitkového kříže *Gaussova* okuláru s jeho zrcadlovým obrazem na mřížce (jako v 90.1 na hranolu).

4. Štěrbinu kolimátoru osvětlíme měřeným světlem a dalekohled (po uvolnění) postavíme vpravo tak, aby maximum prvního řádu leželo ve středu nitkového kříže. Čtete polohu β'_1 dalekohledu na děleném kruhu (nonius!).

5. Dalekohled přetočíme do souměrné polohy tak, aby maximum prvního řádu vlevo bylo ve středu pole: zaznamenáme polohu β''_1 .

6. Úkon 4 a 5 opakujeme několikrát a z průměrů vypočteme rozdíl $\beta_1 = \beta''_1 - \beta'_1$, který dosadíme do první rovnice (4). Známe-li mřížkovou konstantu d , vypočteme z ní vlnovou délku.

7. Měření provedeme pro maxima 2., 3. atd. řádu, pokud mají dostatečnou intenzitu, a z výsledků vezmeme průměr.

8. Neznáme-li nížzkovou konstantu, určíme ji pozorováním maxim ve světle známé vlnové délky (na př. žluté čáry sodíkové, viz T, XVII).

99.2. Vlnová délka světla — měření Michelsonovým interferometrem

Z popisu přístroje [99, III] plyne pro jednobarevné světlo tento postup měření:

1. Jednobarevný zdroj (na př. plamen *Bunsenova* hořáku, zbarvený chloridem sodným) s kruhovou clonkou umístíme v ohnisku spojky *S*.

2. Mezi spojkou a destičku *A* připevníme malou značku (na př. neprůhledný hrot, špendlík a pod.) a pozorujeme její obraz dalekohledem *D* nebo prostým okem. Pravidelně vidíme dva obrazy, vytvořené po odrazu a lomu v *z* zrcadly Z_1 a Z_2 (vedle dvou slabších obrazů, vzniklých stejným způsobem po odrazu na zadní nepostříbřené stěně destičky *A*).

3. Jedním regulačním šroubkem zrcadla Z_1 přivedeme nejprve obraz jím vytvořený do výšky druhého obrazu (vytvořeného Z_2) a pak druhým šroubkem oba obrazy ztotožníme. Při přesném postavení zrcadla vidíme pak interferenční kroužky, stačí však přibližně postavení, při němž vznikají interferenční proužky (nírně zakřivené).

4. Malou změnou sklonu zrcadla Z_1 upravíme šířku proužků tak, aby se daly dobře počítat, když zvolna otáčíme hlavici mikrometrického šroubu posouvajícího zrcadlo Z_2 .

5. Když projde větší počet proužků zorným polem dalekohledu, zastavíme pohyb tak, aby střed nitkového kříže dalekohledu ležel uprostřed jednoho světlého proužku, a čtete polohu s_0 zrcadla na podélném měřítku a na děleném kruhu.

6. Posouváme pomalu zrcadlo Z_2 tak, abychom mohli proužky prošlé středem kříže přesně spočítat. Po proléhnutí na př. 200 proužků čtete polohu s_1 zrcadla.

7. Tak pokračujeme, až máme celkem na př. 1000 proužků, a výsledek zpracujeme postupnou metodou:

0	s_0	600	s_3	$s_3 - s_0$	Δ_3
200	s_1	800	s_4	$s_4 - s_1$.
400	s_2	1000	s_5	$s_5 - s_2$.
Průměr $s = 600 \cdot \frac{\lambda}{2}$, takže $\lambda = \frac{s}{300} \pm \vartheta(\lambda)$.					

Poznámka. Při měření sodíkového světla pozorujeme, že se proužky střídavě odostřují a zase zaostřují. To proto, že sodíkové světlo není přesně jednobarevné: obsahuje dvě velmi blízké vlnové délky (čáry D_1, D_2 , viz T, XVII), které lze při správně upraveném měření rozlišit.

100. OPTICKÁ STÁČIVOST

Definice. *Optická stáčivost* (a) pevné látky je stočení a polarisační roviny světla, dělené tloušťkou l vrstvy látky:

$$(a) = \frac{a}{l}. \quad (1)$$

Stočení měříme ve stupních a tloušťku l v milimetrech, takže stáčivost se vyjadřuje v jednotkách stupeň/mm.

Měrná stáčivost $[a]$ roztoku je stočení a polarisační roviny světla, dělené tloušťkou l vrstvy a objemovou koncentrací $q/100$:

$$[a] = \frac{a}{lq/100} = \frac{100a}{lq}, \quad (2)$$

kde q značí počet gramů látky, obsažený ve 100 cm^3 roztoku. V praxi se koncentrace častěji vyjadřuje váhovými procenty p . Je-li hustota roztoku ρ , je hmota 100 cm^3 roztoku 100ρ , takže na 100 gramů roztoku připadá $p = q/\rho$ gramů rozpuštěné látky; tedy podle (2)

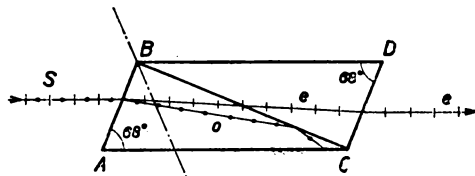
$$[a] = \frac{100a}{lp\rho}. \quad (3)$$

U roztoků měříme l v dm, takže jednotkou měrné stáčivosti je stupeň $\text{cm}^3/\text{g dm}$.

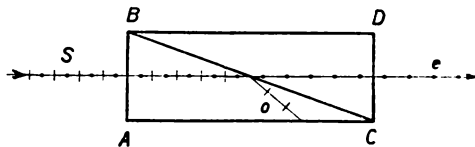
Přístroje

Na měření stáčivosti jsou vhodné polarisační přístroje (polarimetry). Jejich hlavními součástmi jsou *polarisátor* a *analysátor*; oba jsou v podstatě krystaly dvojlomného vápence, upravené tak, aby jeden svazek paprsků vznikajících dvojlomem¹⁾ byl odstraněn a zbyl jeden lineárně polarisovaný svazek paprsků. Nejobvyklejší jsou tyto dvě úpravy:

100,I **Nikol** (*Nicclův hranol*) je nejnámější polarisační zařízení; jeho úprava a chod paprsků je zřejmý z obr. 100,1. Přirozené světlo dopadá na stěnu AB krystalu islandského vápence (sbroušenou do úhlu 68°), v němž se rozdělí na



Obr. 100,1. Nikol (optická osa krystalu leží v rovině papíru).



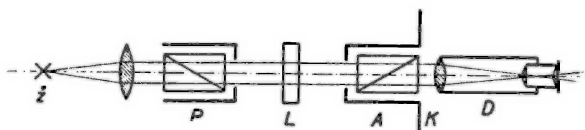
Obr. 100,2. Glan—Thompsonův hranol (optická osa je kolmá k rovině papíru).

řádny paprsek o , kmitající kolmo k rovině papíru, a na paprsek mimořádný e , kmitající v rovině papíru. Hranol je rozdělen úhlopříčným řezem a slepen kanadským balzámem, který má pro řádný paprsek tak malý index lomu, že se tento paprsek na rozhraní BC úplně odráží a je pohlcen začerněnou boční stěnou

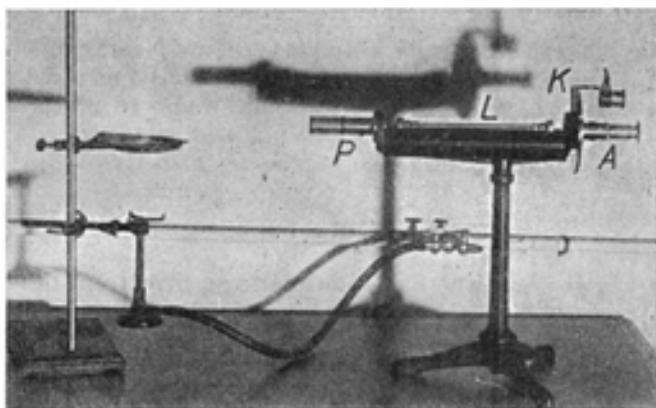
100 ¹⁾ TF 6.4.8.

AC. Mimořádný paprsek prochází řezem beze změny směru a vystupuje zadní stěnou *CD* z nikolu rovnoběžně s původním směrem.

Glan—Thompsonův hranel (obr. 100,2) je zdokonalená úprava nikolu. 100,II
Přirozené světlo dopadá kolmo na přední stěnu krystalu islandského vápence, oba paprsky *o* a *e* však postupují společně až k řezu *BC*, v němž je krystal slepen kanadským balzámem (terpentinem, lněným olejem). Zde se řádný paprsek úplně odráží a zaniká v začerněné boční stěně *AC*. Mimořádný paprsek *e* vystupuje původním směrem zadní stěnou.



Obr. 100,3. Jednoduchý polarisační přístroj.



Obr. 100,4. Polostínový polarimetr s dvojníkem.

Na obr. 100,3 je schematicky naznačen jednoduchý polarisační přístroj, 100,III
kterým se měří stočení polarisační roviny světla, způsobené preparátem vloženým mezi polarisátor *P* a analysátor *A*, na kterém je dělený kruh *K* a rameno s dvěma noniisy. Je-li polarisační rovina analysátoru stočena o 90° proti rovině polarisátoru (oba krystaly jsou zkříženy), neprochází světlo. Vložíme-li však mezi ně opticky aktivní látku *L*, rozjasní se pole dalekohledu *D* a tma opět nastane po otočení analysátoru o úhel α , který je právě roven stočení polarisační roviny světla vycházejícího z polarisátoru.

Přesnější měření stáčivosti umožňuje polostínový polarisátor. Vyznačuje se tím, že roviny polarisační jsou v obou polovinách zorného pole navzájem 100,IV
skloněny o jistý malý *polostínový úhel* φ . Lze toho dosáhnout různým způsobem.

Stálý polostínový úhel má na př. dvojníkol, který vznikne z nikolu 100,1 svislým podélným řezem, šikmým sbroušením tak vzniklých ploch a opětovným spojením obou polovin. Vznik dvojníkol je znázorněn na obr. 100,5 v pohledu proti směru vystupujícího polarisovaného světla, které kmitá ve směru šipek.

Měnitelný polostínový úhel má Lippichův polarisátor, který dostaneme, 100,V

umístíme-li do poloviny zorného pole za obvyklý polarisátor P další polarisátor p („polohranol“), poněkud stočený kolem optické osy přístroje (obr. 101,1). Měníme-li pak vzájemný sklon polarisátoru a polohranolu, měníme zároveň jemu rovný polostínový úhel.

U polostínových polarisátorů je možno zkřížit analysátor jen s polarisační rovinou jedné poloviny pole. Nelze tedy dosáhnout současně úplné tmy v celém poli. Zkřížíme-li však analysátor s rovinou souměrnosti obou polarisačních rovin, budou obě poloviny pole stejně tmavé (v polostínu). Malou změnou polohy se



Obr. 100,5. Úprava dvojníkolů.

pak jedna polovina vyjasní, druhá ještě více ztemní. Nastavení analysátoru na stejnost obou polovin pole je tu citlivější a přesnější než nastavení na tmu u přístroje [100,III]. *Lippichův* polarisátor má mimo to i výhodu, že volbou polostínového úhlu můžeme přizpůsobit polostín síle zdroje a průsvitnosti měřené látky tak, aby měření bylo co nejpřesnější.

MĚŘICÍ METODY

Stáčivost závisí jen mírně na teplotě látky a u roztoků také poněkud na jejich koncentraci; ve značné míře se však mění s barvou použitého světla. Pravidelně roste s klesající délkou vlny (rotační disperse světla).²⁾ Proto musíme měřit stáčivost vždy pro určitou barvu (spektrální čáru), k čemuž je třeba co možno monochromatického světla. Sodíkové světlo pokládáme přitom za jednoduché a jeho vlnovou délku klademe rovnu „optickému těžišti“ obou čar D_1 a D_2 (viz T,XVII):

$$\lambda_D = 5893 \text{ \AA}. \quad (4)$$

Směr stáčení polarisační roviny zjistíme pozorováním v bílém světle na základě rotační disperse. Stočení je nejmenší pro červené a největší pro fialové světlo; otáčíme-li analysátorem vpravo, tedy ve smyslu pohybu hodinových ručiček, následují barvy u pravotočivé látky v pořadí: červená, žlutá, zelená, modrá, fialová, červená atd. U látek levotočivých je sled barev při stejném směru otáčení opačný: červená, fialová, modrá, zelená, žlutá atd.

Stáčivost pevných látek zjistíme tak, že světlo necháme projít známou vrstvou látky (l mm), změříme a a dosadíme do (1). Specifickou stáčivost roztoků určíme podle rovn. (2), v níž tloušťku vrstvy l vyjádříme v dm a za q dosadíme objemovou koncentraci v procentech.

100.1. Stáčivost — měření polostínovým polarimetrem

Polostínový polarimetr je polarisační přístroj typu [100,III], jehož polarisátor je však polostínový, na př. jeden z přístrojů [100,IV] a [100,V] jako na

100²⁾ TF 6.4.10.

snímku 100,4. Podáme návod na měření stáčivosti pevné látky (na př. křemene) pro sodíkové světlo.

Postup

1. Změříme tloušťku l křemenné destičky v milimetrech mikrometrem (methodou 31.1) nebo sférometrem (methodou 31.2).
2. Pozorováním v bílém světle zjistíme, je-li křemen pravotočivý nebo levotočivý.
3. Plamen *Bunsenova* hořáku s asbestem nasyceným roztokem soli nebo s tyčinkou ze sodného skla umístíme asi 1 dm před polarisátor a zaostříme dalekohled na rozhraní levé a pravé poloviny pole.
4. Určíme několikrát nulovou polohu analysátoru α_0 , čtouce na obou noních polohu, při níž jsou obě poloviny pole stejně tmavé.
5. Vložíme měřnou destičku mezi polarisátor a analysátor, který otočíme *ve smyslu stáčení polarizační roviny destičkou* (je-li pravotočivá, vpravo, je-li levotočivá, vlevo) do takové polohy, aby celé pole zase bylo stejně tmavé. Čteme údaje obou noniů a opakujeme měření v poloze změněné o 180° .
6. Předšlé měření provedeme několikrát a z výsledků vezmeme průměr α_1 .
7. Opakujeme určení α_0 podle 4.
8. Do rovn. (1) dosadíme $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ a l v milimetrech.

101. KONCENTRACE CUKERNÍHO ROZTOKU

Definice. Koncentrace (viz definici 100) cukerních roztoků se obvykle počítá ve váhových procentech p , což je počet kilogramů cukru rozpuštěného ve 100 kg roztoku.

Jednotky. MKSA a praktická jednotka: procento (%).

PŘÍSTROJE A MĚŘICÍ METODY

Měření koncentrace cukerních roztoků se provádí dvěma optickými metodami: První z nich využívá závislosti jejich indexu lomu na koncentraci; k tomu mívá na př. *dvojhranový refraktometr* [91,III] stupnici udávající přímo koncentraci měřeného roztoku, jak již bylo uvedeno v 91.

Druhá metoda je založena na vztahu 100 (3), z něhož plyne pro koncentraci výraz

$$p = \frac{100}{[\alpha]} \frac{a}{l\rho}, \quad (1)$$

kde a je stočení polarizační roviny vrstvou l dm roztoku hustoty ρ g/cm³. Měrná stáčivost $[\alpha]$ (srov. 100) má pro sodíkovou čáru D [viz 100(4)] při teplotě 20°C a při koncentraci $q = 26,000$ g/cm³ (váženo na vzduchu mosaznými závažími) hodnotu

$$[\alpha]_{20}^D = 66,523^\circ \text{ cm}^3/\text{g dm},$$

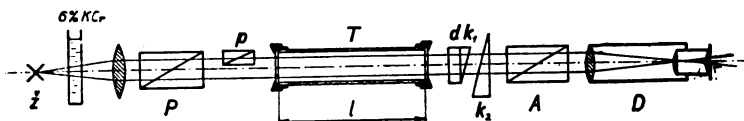
takže v okolí 20° a při obvyklých koncentracích můžeme psát

$$p = 1,503 \frac{a}{l\rho} \%$$

Na základě této rovnice můžeme určit koncentraci vodného roztoku čistě sacharosy, změříme-li a libovolným polarimetrem, nejlépe polostínovým, podle návodu 100.1. Hustotu ρ určíme některou z method 36.4; 5; 6, na př. *Mohrovými* vážkami [36,II].

Polarimetry lze měřit také *cukernatost* P látek (na př. surového cukru), t. j. jejich procentový obsah (podle váhy) čisté sacharosy. Polarimetry vhodně upravené k rychlému měření cukernatosti se nazývají **sacharimetry**. Liší se od obyčejných polarimetrů tím, že se u nich otáčení analysátoru nahrazuje změnou polohy t. zv. *kompenzátoru*, který se vřadí před nehybný analysátor. Základním přístrojem toho druhu je

101,I Soleiliv klínový kompenzátor, založený na tom, že křemen má přibližně stejnou rotační dispersi jako sacharosa. Je schematicky naznačen na obr. 101,1 mezi trubicí T a analysátorem A . Skládá se z pravotočivé křemenné



Obr. 101,1. Polostínový sacharimetr s kompenzátozem.

destičky d a ze dvou levotočivých klínů k_1 , k_2 , vyřiznutých kolmo k optické ose krystalu; d a k_1 jsou pevně spojeny, kdežto k_2 se mikrometricky posouvá kolmo k optické ose přístroje a jeho poloha se určí na stupnici noniem. Nula této stupnice značí polohu, v níž oba levotočivé klíny ruší účinek pravotočivé destičky. Dílek označený číslem 100 °S (zkratka anglického *sugar*), t. j. sto stupňů cukernatosti, přísluší takové poloze klínu k_2 , v níž kompenzátor právě vyrovná pravotočivý účinek vrstvy 2 dm 26% roztoku čisté sacharosy (který obsahuje ve 100 cm³ přesně 26,000 g cukru váženého na vzduchu mosazným závažím). Tím je definována *mezinárodní stupnice cukernatosti*.

Kompenzátozem se cejchují *křemennými normály*; jsou nejčastěji určeny pro kontrolu bodu 100 °S, kterému odpovídá pravotočivá destička tloušťky 1,593 mm.

Obr. 101,1 podává schema uspořádání polostínového sacharimetru; světlo sodíkové nebo bílé světlo, filtrované vrstvou 1,5 cm 6% roztoku dvojchromanu draselného, mění se spojku v rovnoběžný svazek, který se polarisuje *Lippichovým* polostínovým polarisátorem $P - p$. Nakreslený polarisátor [100,V] má proměnný polostínový úhel; u sacharimetrů se užívá zpravidla stálého úhlu 8°. Trubice T obsahuje měřený roztok a má normální délku $l = 2$ dm. Po průchodu kompenzátozem a analysátorem A vstupuje světlo do dalekohledu D , který se musí přesně zaostřit na rozhraní obou polovin pole. Analysátor zkrížený s polarisátorem (s jeho střední polarisační rovinou) je v pevné poloze. Při nulové poloze 0 °S kompenzátozem musí se jevit oba polostíny přesně stejně tmavé. Cukernatost P se určí takto:

Odvážíme 26,000 g (bez opravy na vztlak) měřené látky (surového cukru), rozpustíme v čisté vodě a doplníme na 100 cm³. Roztokem naplníme trubici délky 20 cm, vložíme do sacharimetru a vykompenšujeme. Na stupnici kompenzátozem čteme cukernatost v mezinárodních stupních (°S); měření je správné jen při teplotě kolem 20 °C. Čelní sklička trubice T nesmějí se příliš utahovat, aby se dvojlomem ve stlačeném skle nesnižovala přesnost měření.

ČÁST ČTVRTÁ

Tabulky

Seznam tabulek

I. Oprava vážení na vztlak	577
II. Hustota vody při teplotě 0–30 °C	577
III. Hustota suchého vzduchu (a jeho chemické složení)	578
IV. Převod tlaku vzduchu, měřeného rtuťovým tlakoměrem, na 0 °C	579
V. Kapilární deprese rtuti	580
VI. Hustota rtuti	580
VII. Oprava čtení na přímé stupnici při měření zrcátkovou methodou	581
VIII. Redukce doby kyvu na nulový rozkvy	581
IX. Kontrolní teploty mezinárodní stupnice	582
X. Oprava rtuťového teploměru na normální teplotu	582
XI. Napětí nasycené vodní páry a absolutní vlhkost vzduchu nasyceného parami	583
XII. Bod varu za tlaku 690 ÷ 789 torů	584
XIII. Převod absolutní míry kinematické vazkosti na míry technické	584
XIV. Konstanty pevných látek	585
XV. Konstanty kapalin	587
XVI. Konstanty plynů	539
XVII. Délky světelných vln v Å	590
XVIII. Zeměpisná poloha, nadmořská výška a tíhové zrychlení některých míst v ČR	594
XIX. Různé konstanty	594
XX. Mechanické jednotky soustav MKS, technické a absolutní	595
XXI. Tepelné jednotky soustav MKS, praktické a absolutní	596
XXII. Elektrické a magnetické jednotky v soustavě MKSA (r), v absolutní soustavě elektrostatické a elektromagnetické	597
XXIII. Goniometrické funkce	598
XXIV. Čtyřmístné logaritmy desetinné	599

Řecká abeceda

α A alfa	ν N ný
β B béta	ξ X ksí
γ Γ gamma	o O omíkrón
δ Δ delta	π Π pí
ϵ E epsilon	ρ P ró
ζ Z zéta	σ Σ sígma
η H éta	τ T tau
θ Θ théta	υ Y ypsílon
ι I ióta	φ Φ fí
κ K kappa	χ X chí
λ Λ lambda	ψ Ψ psí
μ M mí	ω Ω ómega

T.I. Oprava vážení na vztlak

Správné závaží, vyvažující látku hustoty $\rho_M = 600 - 22\,000 \text{ kg m}^{-3}$ ve vzducho-prázdnou, dostaneme z velikosti Z gramů mosazného závaží (hustoty $\rho_Z = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, zjištěného vážením ve vzduchu hustoty $\delta = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$) přičtením opravy ζ v miligramech výrazem 28 (13) $\zeta = kZ$, kde k značí hodnotu v tabulce *se zřetelem na znaménko*.

e_M (kg m ⁻³)	k	e_M (kg m ⁻³)	k	e_M (kg m ⁻³)	k
0,6 · 10 ³	+ 1,86	2,0 · 10 ³	+ 0,457	9 · 10 ³	—0,010
0,7	1,57	2,5	0,337	10	—0,023
0,8	1,36	3,0	0,257	11	—0,034
0,9	1,19	3,5	0,200	12	—0,043
1,0	1,06	4,0	0,157	13	—0,051
1,1	0,95	4,5	0,124	14	—0,057
1,2	0,86	5,0	0,097	15	—0,063
1,3	0,78	5,5	0,075	16	—0,068
1,4	0,71	6,0	0,057	17	—0,072
1,5	0,66	6,5	0,042	18	—0,076
1,6	0,61	7,0	0,029	19	—0,080
1,7	0,56	7,5	0,017	20	—0,083
1,8	0,52	8,0	+0,007	21	—0,086
1,9	+ 0,49	8,5	—0,002	22	—0,088

T.II. Hustota vody při teplotě 0 ÷ 30 °C

Teplota °C	Hustota kg/m ³	Teplota °C	Hustota kg/m ³
0	999,841	15	999,099
1	999,900	16	998,943
2	999,941	17	998,775
3	999,965	18	998,596
4	999,973	19	998,406
5	999,965	20	998,205
6	999,941	21	997,994
7	999,902	22	997,772
8	999,849	23	997,540
9	999,782	24	997,299
10	999,701	25	997,047
11	999,606	26	996,786
12	999,498	27	996,515
13	999,377	28	996,235
14	999,244	29	995,946
15	999,099	30	995,649

T,III. Hustota suchého vzduchu

při teplotě $t = 0 \div 30$ °C a tlaku $p = 700 \div 780$ torů (mm Hg při 0 °C a při normálním zrychlení $9,80665 \text{ ms}^{-2}$).

Uvedené hodnoty jsou vyjádřeny v MKSA kg/m^3 a platí pro vzduch v místnosti, který obsahuje 0,06% (podle objemu) kysličníku uhlíčitého.

t °C	p torů										
	700	710	720	730	740	750	760	770	780		
0	1,191	1,208	1,225	1,242	1,259	1,276	1,293	1,310	1,327	17	
1	187	204	221	238	255	272	288	305	322	tor	2
2	182	199	216	233	250	267	284	301	318	1	3
3	178	195	212	229	246	262	279	296	313	2	3
4	174	191	207	224	241	258	274	291	308	3	5
										4	7
5	170	186	203	220	236	253	270	287	303	5	8
6	165	182	199	215	232	249	265	282	299	6	10
7	161	178	194	211	228	244	261	277	294	7	12
8	157	174	190	207	223	240	256	273	289	8	14
9	153	169	186	202	219	235	252	268	285	9	15
10	149	165	182	198	215	231	247	264	280	16	
11	145	161	178	194	210	227	243	259	276	tor	
12	141	157	173	190	206	222	239	255	271	1	2
13	137	153	169	186	202	218	234	251	267	2	3
14	133	149	165	181	198	214	230	246	262	3	4
										4	6
15	129	145	161	177	193	210	226	242	258	5	8
16	125	141	157	173	189	205	221	238	254	6	10
17	121	137	153	169	185	201	217	233	249	7	11
18	117	133	149	165	181	197	213	229	245	8	12
19	113	129	145	161	177	193	209	225	241	9	14
20	110	126	141	157	173	189	205	221	236	15	
21	106	122	137	153	169	185	201	216	232	tor	
22	102	118	134	149	165	181	197	212	228	1	1
23	098	114	130	145	161	177	193	208	224	2	3
24	095	110	126	142	157	173	189	204	220	3	4
										4	6
25	091	107	122	138	153	169	185	200	216	5	7
26	087	103	118	134	149	165	181	196	212	6	9
27	084	099	115	130	146	161	177	192	208	7	10
28	080	096	111	126	142	157	173	188	204	8	12
29	077	092	107	123	138	153	169	184	200	9	13
30	073	088	104	119	134	150	165	180	196		

Složení atmosférického vzduchu

Plyn	N ₂	O ₂	A	CO ₂	H ₂	Ne	He	Kr	X
objemová %	78,03	20,99	0,933	0,030	0,01	0,0018	0,0005	0,0001	0,09
váhová %	75,47	23,20	1,28	0,046	0,001	0,0012	0,00007	0,0003	0,04

T,IV. Převod tlaku vzduchu, měřeného rtuťovým tlakoměrem, na 0 °C
[podle 22 (5) a (6)]

Barometrický tlak b_0 , převedený na 0 °C, dostaneme v torech z výšky b mm sloupce rtuti, čtené na mosazném měřítku barometru při teplotě t °C > 0, odečteme-li od b opravu získanou interpolací v tabulce. Je-li měřítko tlakoměru *skleněné*, odečteme od b opravu zvětšenou o součin 0,008 t , uvedený v posledním sloupci tabulky.

t °C	Výška sloupce Hg v mm											0,008 $\times t$ mm
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,02
4	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,04
6	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,05
7	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,89	0,06
8	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,02	0,06
9	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13	1,14	0,07
10	1,11	1,12	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	0,08
11	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,40	0,09
12	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	0,10
13	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	1,65	0,10
14	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	0,11
15	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	0,12
16	1,77	1,80	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,03	0,13
17	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,13	2,16	0,14
18	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	0,14
19	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	2,35	2,38	2,42	0,15
20	2,22	2,25	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	2,54	0,16
21	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	0,17
22	2,44	2,47	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	2,80	0,18
23	2,55	2,59	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,81	2,85	2,89	2,92	0,18
24	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	0,19
25	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,02	3,06	3,10	3,14	3,18	0,20
26	2,88	2,92	2,97	3,01	3,05	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	3,31	0,21
27	2,99	3,04	3,08	3,12	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	3,39	3,43	0,22
28	3,10	3,15	3,19	3,24	3,29	3,33	3,38	3,42	3,47	3,51	3,56	0,22
29	3,21	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,55	3,59	3,64	3,69	0,23
30	3,33	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,81	0,24
31	3,44	3,49	3,54	3,59	3,64	3,69	3,74	3,79	3,84	3,89	3,94	0,25
32	3,55	3,60	3,65	3,70	3,76	3,81	3,86	3,91	3,96	4,02	4,07	0,26
33	3,66	3,71	3,77	3,82	3,87	3,93	3,98	4,03	4,09	4,14	4,20	0,26
34	3,77	3,82	3,88	3,93	3,99	4,05	4,10	4,16	4,21	4,27	4,32	0,27
35	3,88	3,94	3,99	4,05	4,11	4,16	4,22	4,28	4,34	4,39	4,45	0,28

T,VII. Oprava čtení na přímé stupnici při měření zrcátkovou metodou 33.1

Od pozorované výchylky v odečteme hodnotu, kterou najdeme v tabulce pro v a R (vyjádřené v týchž díleích), a dosadíme do 33 (1) za n n_0 .

R	$v = 50$	100	150	200	250	300	350	400	450	500
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02	8,54	13,33	19,49	27,15	36,35
1100	0,03	0,28	0,92	2,16	4,18	7,12	11,13	16,35	22,85	30,71
1200	0,03	0,23	0,77	1,82	3,53	6,03	9,45	13,90	19,47	26,25
1300	0,02	0,20	0,66	1,65	3,01	5,16	8,10	11,94	16,78	22,67
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61	4,47	7,03	10,38	14,61	19,76
1500	0,02	0,15	0,49	1,17	2,27	3,90	6,15	9,10	12,82	17,37
1600	0,02	0,13	0,44	1,03	2,00	3,44	5,43	8,03	11,33	15,38
1700	0,01	0,12	0,39	0,92	1,79	3,06	4,82	7,15	10,09	13,72
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59	2,73	4,30	6,39	9,04	12,29
1900	0,01	0,09	0,31	0,73	1,43	2,45	3,88	5,76	8,14	11,08
2000	0,01	0,08	0,28	0,66	1,29	2,22	3,51	5,21	7,37	10,05
2200	0,01	0,07	0,23	0,55	1,07	1,83	2,91	4,32	6,12	8,35
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90	1,54	2,45	3,64	5,16	7,05
2600	0,01	0,05	0,16	0,39	0,77	1,32	2,09	3,11	4,42	6,03
2800	0,01	0,04	0,14	0,34	0,66	1,14	1,81	2,69	3,82	5,21
3000	0,00	0,04	0,12	0,29	0,58	0,99	1,58	2,35	3,33	4,55
3200	0,00	0,03	0,11	0,26	0,51	0,87	1,38	2,07	2,93	4,01
3400	0,00	0,03	0,10	0,23	0,45	0,77	1,23	1,83	2,60	3,56
3600	0,00	0,03	0,09	0,21	0,40	0,69	1,10	1,64	2,32	3,18
3800	0,00	0,02	0,08	0,18	0,36	0,62	0,98	1,47	2,09	2,86
4000	0,00	0,02	0,07	0,17	0,32	0,56	0,89	1,33	1,88	2,58

T,VIII. Redukce doby kyvu na nulový rozkvy

Dobu kyvu τ_0 kyvadla pro nekonečně malý rozkvy dostaneme z doby kyvu τ_α při rozkvy α° , odečteme-li od τ_α součin $k\tau_\alpha$; k je dáno vztahem 39 (7).

α°	k	α°	k	α°	k	α°	k				
0	0,00000	0	10	0,00048	10	20	0,00190	20	30	0,00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	33
7	023	7	17	138	17	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	35
9	039	9	19	172	19	29	400	27	39	723	37
10	0,00048	9	20	0,00190	18	30	0,00428	28	40	0,00761	38

T,IX. Kontrolní teploty mezinárodní stupnice

z r. 1948

za tlaku $b = (760 + 1000 \Delta_p)$ tor, $\left(\Delta_p = \frac{b - 760}{1000}\right)$

Bod	Teplota °C
varu kyslíku	— 182,97 + 12,6 Δ_p — 6,5 Δ_p^2
sublimace CO ₂	— 78,50 + 15,95 Δ_p — 11 Δ_p^2
tání rtuti	— 38,87
tání ledu	0,00
tání Na ₂ SO ₄ + 10 H ₂ O	32,38
varu vody	100,00 + 36,8578 Δ_p — 20,159 Δ_p^2 + + 16,21 Δ_p^3
varu naftalenu	217,96 + 58,4 Δ_p — 33 Δ_p^2
tání cínu	231,85
varu benzofenonu	305,9 + 64,2 Δ_p — 37 Δ_p^2
tání kadmia	320,9
tání olova	327,3
tání zinku	419,5
varu síry	444,60 + 90,8028 Δ_p — 47,573 Δ_p^2 + + 43,61 Δ_p^3
tání antimonu	630,5
tání stříbra	960,8
tání zlata	1063,0
tání mědi	1083,0
tání niklu	1453
tání paladia	1552
tání platiny	1769
tání rhodia	1960
tání iridia	2443
tání wolframu	3380

T,X. Oprava rtuťového teploměru na normální teplotu

t °C	Jenské sklo		t °C	Jenské sklo		t °C	Jenské sklo	
	č. 16	č. 59		č. 16	č. 59		č. 16	č. 59
— 30	+ 0,28	+ 0,13	+ 30	— 0,11	— 0,04	+ 90	— 0,03	+ 0,02
— 20	+ 0,16	+ 0,07	40	— 0,12	— 0,03	100	0,00	0,00
— 10	+ 0,07	+ 0,03	50	— 0,12	— 0,03	150	+ 0,01	— 0,23
0	0,00	0,00	60	— 0,10	— 0,02	200	— 0,29	— 0,84
+ 10	— 0,06	— 0,02	70	— 0,08	— 0,01	250	— 1,1	— 2,2
+ 20	— 0,09	— 0,04	80	— 0,06	0,00	300	— 2,7	— 4,4

T, XI. Napětí nasycené vodní páry a absolutní vlhkost vzduchu nasyceného parami

Napětí E nasycené páry a maximální vlhkost Φ vzduchu při teplotě
 $t = -50 \div +30 \text{ }^\circ\text{C}$

$t \text{ }^\circ\text{C}$	E tor	Φ g/m ³	$t \text{ }^\circ\text{C}$	E tor	Φ g/m ³	$t \text{ }^\circ\text{C}$	E tor	Φ g/m ³	$t \text{ }^\circ\text{C}$	E tor	Φ g/m ³
-50	,029	,038	-30	0,28	0,33	-10	1,95	2,14	+10	9,2	9,4
-49	,033	,043	-29	0,31	0,37	-9	2,13	2,33	11	9,8	10,0
-48	,037	,048	-28	0,34	0,41	-8	2,32	2,54	12	10,5	10,7
-47	,042	,054	-27	0,38	0,46	-7	2,53	2,76	13	11,2	11,4
-46	,047	,060	-26	0,42	0,51	-6	2,76	2,99	14	12,0	12,1
-45	,052	,067	-25	0,47	0,55	-5	3,01	3,24	15	12,8	12,8
-44	,058	,074	-24	0,52	0,60	-4	3,28	3,51	16	13,6	13,6
-43	,066	,083	-23	0,58	0,66	-3	3,57	3,81	17	14,5	14,5
-42	,074	,093	-22	0,64	0,73	-2	3,88	4,13	18	15,5	15,4
-41	,083	,104	-21	0,70	0,80	-1	4,22	4,47	19	16,5	16,3
-40	,093	,117	-20	0,77	0,88	0	4,58	4,84	20	17,5	17,3
-39	,105	,130	-19	0,85	0,96	+1	4,9	5,2	21	18,7	18,3
-38	,119	,144	-18	0,93	1,05	2	5,3	5,6	22	19,8	19,4
-37	,134	,160	-17	1,03	1,15	3	5,7	6,0	23	21,1	20,6
-36	,150	,178	-16	1,13	1,27	4	6,1	6,4	24	22,4	21,8
-35	,167	,198	-15	1,24	1,38	5	6,5	6,8	25	23,8	23,0
-34	,185	,220	-14	1,36	1,51	6	7,0	7,3	26	25,2	24,4
-33	,205	,244	-13	1,49	1,65	7	7,5	7,8	27	26,7	25,8
-32	,227	,271	-12	1,63	1,80	8	8,0	8,3	28	28,3	27,2
-31	,252	,301	-11	1,78	1,96	9	8,6	8,8	29	30,0	28,7
-30	,280	,333	-10	1,95	2,14	+10	9,2	9,4	+30	31,8	30,3

Napětí E nasycené vodní páry při teplotě $t = 95 \div 140 \text{ }^\circ\text{C}$

t	95°	96°	97°	98°	99°	100°	t	100°	110°	120°	130°	140°
,0°	633,9	657,7	682,2	707,4	733,3	760,0	0°	760,0	1074,6	1489,1	2025,7	2710,5
,1	636,2	660,1	684,7	709,9	736,0	762,7	1	787,6	1111,2	1536,7	2087,1	2788,2
,2	638,6	662,6	687,2	712,5	738,6	765,4	2	815,9	1148,8	1585,9	2150,1	2867,5
,3	640,9	665,0	689,7	715,1	741,2	768,2	3	845,1	1187,5	1636,1	2214,4	2948,9
,4	643,3	667,4	692,2	717,7	743,9	770,9	4	875,1	1227,3	1687,6	2280,5	3031,8
,5	645,7	669,9	694,7	720,3	746,6	773,7	5	906,1	1268,0	1740,6	2347,0	3116,6
,6	648,1	672,3	697,2	722,9	749,2	776,4	6	937,9	1309,9	1794,8	2416,2	3203,4
,7	650,4	674,8	699,8	725,5	751,9	779,2	7	970,6	1352,9	1850,4	2488,0	3292,2
,8	652,8	677,2	702,3	728,1	754,6	782,0	8	1004,4	1397,2	1907,4	2560,5	3382,8
,9	655,2	679,8	704,9	730,6	757,3	784,8	9	1038,9	1442,6	1965,8	2634,8	3475,6
1,0	657,7	682,2	707,4	733,3	760,0	787,6	10	1074,6	1489,1	2025,7	2710,5	3570,4

T,XII. Bod varu vody za tlaku $p = 690 \div 789$ tor

počítaný v °C podle rovnice (uvedené v T,IX)
 $\Theta = 100,000 + 36,8578 \Delta_p - 20,159 \Delta_p^2 + 16,21 \Delta_p^3$

tor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
690	97,316	355	395	435	475	514	554	594	634	673
700	97,713	752	792	831	870	910	949	987	*026	*065
710	98,105	144	183	222	260	299	338	377	416	454
720	98,492	531	569	608	646	685	723	761	800	838
730	98,876	914	951	990	*028	*066	*103	*141	*179	*217
740	99,255	293	330	368	406	442	481	517	554	592
750	99,629	666	704	741	778	815	852	889	926	963
760	100,000	037	074	110	147	184	220	257	294	330
770	100,367	403	439	476	512	548	584	620	657	694
780	100,730	766	802	837	873	909	945	981	*016	*053

T,XIII. Převod absolutní míry kinematické vazkosti na míry technické

Kinematická vazkost ν stok (cm ² /s)	Englerovy stupně E s/s	Redwoodova vteřin. číslo R s	Sayboltova vteřin. číslo S s
0,010	1,00	29,2	31,1
0,018	1,10	30,5	32,9
0,028	1,20	32,8	35,6
0,039	1,30	35,4	38,8
0,050	1,40	38,2	42,1
0,0625	1,50	41,4	46,0
0,0745	1,60	44,9	49,6
0,085	1,70	48,2	53,8
0,096	1,80	51,0	57,8
0,107	1,90	54,5	62,1
0,118	2,00	57,9	66,3
0,128	2,10	61,1	70,0
0,138	2,20	64,5	73,6
0,148	2,30	67,8	77,2
0,157	2,40	70,8	81,2
0,166	2,50	73,7	85,2
0,211	3,00	89,0	104
0,254	3,50	105	122
0,293	4,00	119	140
0,333	4,50	133	157
0,373	5,00	149	174
0,412	5,50	163	192
0,451	6,00	178	209
0,529	7,00	206	242
$\nu > 0,53$	13,16 ν	408,5 ν	480,2 ν

T, XIV. Konstanty pevných látek

Hustota ρ_{18} kg m⁻³ při 18 °C. — Délková roztažnost α °C⁻¹ mezi 0–100 °C. — Měrné teplo c_{18} kcal °C⁻¹ kg⁻¹ při 18 °C. — Tepelná vodivost λ_{18} cal °C⁻¹ m⁻¹ s⁻¹ při 18 °C. — Bod tání ϑ °C. — Skupenské teplo l kcal kg⁻¹ tání. — Bod varu Θ °C při tlaku 760 torů. — Specif. magn. susceptibilita $\chi_{18} = \frac{1}{4\pi} (\mu_r - 1) \rho^{-1} \text{m}^3 \text{kg}^{-1}$ při 18 °C.

Látka	ρ_{18}	$\alpha \cdot 10^4$	c_{18}	λ_{18}	ϑ	l	Θ	$\chi_{18} \cdot 10^{18}$
Antimon \parallel s osou \perp k ose	6 690	8	0,050	0,042	630,5	39,2	1 635	-0,50 -1,38
Arsen	5 720	6	0,079		814			-0,3
Baryum	3 600		0,07		704		1 537	+ 1,8
Benzofenon	1 090		0,38		47,9	22	305,9	
Beryllium	1 860	13	0,457	0,40	1 280	\approx 300	2 970	-0,97
Bor	1 730		0,3		2 300			-0,7
Bromnaftalen	1 500				68		280,4	
Cín	7 280	27	0,054	0,154	321,9	14,5	2 430	+ 0,026
Cukr třtinový	1 590	83	0,29	0,00139	160	13,4		-0,57
Draslík	860	84	0,18	0,32	63	14,7	762	+ 0,52
Dusičnan draselný	2 100	78	0,23		339	26		-0,34
Dusičnan sodný	2 260		0,261		310	45		-0,30
Fenol	1 060	290	0,338		41		183	
Fosfor bílý	1 830	125	0,18		44,1	5,0	280	-0,88
Hliník	2 720	23	0,214	0,585	660	94,6	2 500	+ 0,62
Hofčfík	1 740	26	0,24	0,41	650,1	89,0	1 100	+ 0,8
Chlorid draselný	1 990	32	0,166	0,0166	768	86	1 420	-0,47
Chlorid sodný	2 160	40	0,206	0,015	802	123,5	1 440	-0,40
Chrom	7 100	8	0,105		1 800	75,5	2 330	+ 3,7
Iridium	22 400	6,6	0,0308	0,141	2 443			+ 0,13
Jod	4 940	90	0,052		114	28,8	184	
Kadmium	8 640	41	0,06	0,24	320,9	13	767	-0,17
Kobalt	8 800	13	0,10	0,17	1 492	62,2	3 180	
Křemík	2 330	2	0,168		1 410	33,8	2 400	\approx -0,1
Sklo křemičité	2 210	0,6	0,174	0,0032	1710(β)			\approx -0,5
Křišťál \perp k ose	2 640	16	0,178	0,0165				\approx -0,5
Křišťál \parallel s osou	2 640	9,6	0,178	0,032				\approx -0,5
Lithium	534	56	0,81	0,17	185	159	1 330	+ 0,5
Mangan	7 300	23	0,121		1 250	63,2	2 030	\approx + 8,4
Měď	8 930	14	0,092	0,95	1 083	48,9	2 560	-0,09
Molybden	10 200	5	0,064	0,34	2 600	69,4	4 700	+ 0,60
Mosaz 62 Cu, 38 Zn	\approx 8 300	18	0,092	0,19	\approx 920			
Naftalen	1 150	94	0,30	0,0009	80,1	36	217,9	
Nikl	8 800	13	0,11	0,22	1453	71,6	3 100	
Olovo	11 340	29	0,031	0,083	327,3	5,92	1 750	-0,12
Osmium	22 500	5	0,031		2 700			+ 0,05
Paladium	11 500	12	0,059	0,16	1 552	38,7		+ 5,2
Platina	21 400	9,0	0,0316	0,17	1 769	24,1	\approx 3 800	+ 1,0
Porcelán berlínský	2 300	3,8		0,0025± 0,0030				
Selen kovový	4 800	66	0,079		217	15,4	690	-0,32
Síra kosočtverčná	2 056	90	0,171	0,00064	112,8		444,60	-0,49
Síra jednoklonná	1 960		0,176		118,8	9,2	444,60	-0,46
Síran sodný (bezvodý)	2 680		0,210		887	41,2	1 700	-0,64
Sklo jenské 16 III	2 580	8,1	0,186	0,0023				
Sklo jenské 59	2 400	5,9	0,19	0,0022				
Sodík	970	70	0,29	0,23	97,8	27,4	883	+ 0,55
Stříbro	10 510	20	0,0556	1,00	960,5	25,1	2 180	-0,19

Dokončení tabulky T,XIV

Látka	ρ_{18}	$\alpha \cdot 10^6$	ϵ_{18}	λ_{18}	ϑ	l	θ	$\chi_{18} 10^{18}$
Thorium	11 500	12	0,03		1 800			+ 0,1
Uhlík: dĕmant	3 514	1,3	0,118	0,40	≈ 3600			- 18,1
Tuha α	2 260	2			≈ 3600			hex. osa - 2,1
Tuha β	2 220		0,165	0,39	≈ 3600			hex. osa
Antracit	1 350		0,23	0,00057				
Uran	18 700		0,03		1 690			+ 3,3
Vápenec \perp k ose	2 710	-5,4	0,19	0,010				- 0,40
Vápník	1 550		0,15		850	55,8	1 700	+ 1,1
Vismut	9 800	14	0,029	0,019	271	12,5	1 560	- 1,37
Wolfram	19 300	4	0,032	0,40	3 380	45,8	$\approx 4 800$	+ 0,30
Zinek	7 120	36	0,0925	0,268	419,5	24,5	910	- 0,14
Zlato	19 300	14	0,031	0,74	1 063,0	15,4	2 950	- 0,12
Železo (čistĕ)	7 860	12	0,111	0,20	1 539	64	2 880	
Ocel litá	7 840	11	0,104 ÷	0,10 ÷	1 450 ÷			
			0,123	0,14	1 520			
Litina ředá	7 200	9	0,129	0,12 ÷	1 150 ÷			
				0,15	1 250			

T, XV. Konstanty kapalin

Hustota ρ_{18} kg m⁻³ při 18 °C. — Povrchové napětí σ_{18} dyn cm⁻¹ při 18 °C ($[p]$ proti vlastní páře, $[v]$ proti vzduchu). — Vazkost η_{18} poise (g cm⁻¹ s⁻¹) při 18 °C. — Objemová roztažnost β_{18} °C⁻¹ při 18 °C. — Měrné teplo c_{18} kcal kg⁻¹ °C⁻¹ při 18 °C. — Rod tihnutí ϕ °C. — Kryoskopická konstanta K °C (při jednotkové změně molality). — Skupenské teplo tání l kcal kg⁻¹. — Bod varu θ °C. — Zvýšení bodu varu $\delta\theta$ °C při zvětšení tlaku o 1 tor. — Ebulioskopická konstanta E °C (při jednotkové změně molality). — Skupenské teplo varu l' kcal kg⁻¹. — Dielektrická konstanta relativní (ϵ_r)₁₈ při 18 °C.

Kapalina	ρ_{18}	σ_{18}	$10^4 \eta_{18}$	β_{18}	c_{18}	ϕ	K	l	θ	$\delta\theta$	E	l'	(ϵ_r) ₁₈
Aceton	791	23,3 (p)	0,33	0,00143	0,51	— 94,3		19,6	+56,3	39	1,7	123	20
Amylalkohol	812	24,4 (v)	3,8	0,93	0,5	—117			131,6	39	2,6	120	15,0
Anilin	1022	40,5 (p)	4,82	0,84	0,49	—6,2	5,87	21,0	184,4	51	3,69	104	6,7
Benzen	879	29,1 (v)	0,67	1,06	0,41	+5,48	5,07	30,4	80	43	2,61	94	2,3
Benzoan amylnatý	1010	24		0,84					260				5,0
Benzoan ethylnatý	1060	35	2,36	0,91	0,39	— 34,2			213				6,0
Benzoan methylnatý	1100	38,3	2,07	0,80					199,5				6,6
Brom	3140	44	1,02	1,11	0,11	— 7,3	9,7	16,2	58,7		5,2	44	3,1
Bromoform	2890	51	2,07	0,91	0,13	+ 9	14,4	10,9	150,5				4,5
Butylalkohol	804	22,8 (p)	4,29	0,94	0,61	—108			108,2	35	1,94	138	19
Ethylalkohol	790	22,0 (p)	1,24	1,10	0,57	—114,2		25,8	78,4	34	1,20	201	24
Ethylether	716	16,4 (p)	0,248	1,62	0,56	—123,4	1,79	23,5	34,6	36	2,16	86	4,2
Ethyljodid	1937	29	0,602	1,17	0,16	—111			73	44	5,2	47	7,4
Glycerin	1260	62,5 (v)	1656	0,49	0,57	+ 18			290				43
Chinolin	1095	44 (p)	≈ 3,6	0,30		— 22,6			238		5,33	95	9
Chloral	1512	24,6	≈ 1,1	0,83	0,24	— 57,5			98			54	6,7
Chlorbenzen	1106		0,82	0,99	0,31	— 45			132,0	49		78	5,6
Chlorid arsenitý	2162	40		1,02	0,17	— 18			130		7,2	44	13
Chlorid fosforitý	1580	28		1,20	0,20	—112			75		4,7	51	4,7
Chlorid uhličitý	1590	25,9 (p)	1,01	1,22	0,20	— 22,9	20,8	4,2	76,7		4,8	46	2,2

Pokračování tabulky T,XV

Kapalina	ρ_{20}	σ_{20}	$10^4 \eta_{20}$	β_{20}	c_{20}	ϕ°	K	l	θ	$\delta \theta$	E	ν	$(\sigma_p)_{20}$
Chloroform	1489	26,5 (p)	0,58	0,00128	0,225	- 63,7	4,9	17,9	61,1	40	3,8	59	4,6
Kyselina mravenčí	1373	37,8 (v)	1,87	102	0,53	+ 8,4	2,77	66,0	100,7	44	2,4	116	58
Kyselina octová	1049	28,0 (v)	1,26	107	0,48	+ 16,6	3,9	46,7	118,2	42	3,07	111	9,7
Kyselina propionová	988	26,4	1,12	109	0,51	- 21,5			139,9	41	3,5	91	3,1
Methylalkohol	791	22,7 (v)	0,616	119	0,575	- 97,1	14	16,4	64,5	35	0,84	263	34
Methylenjodid	3270			082		+ 5			181				
Methylijodid	2282		0,504	121		- 64			43	41	4,3	46	7,1
Nitrobenzen	1203	430, (v)	2,07	083	0,35	+ 5,7	8,1	22,5	210,8	48	5,0	79	36
Octan amylnatý	873	24	0,9						141		4,83		4,8
Octan ethylnatý	903	23,4	0,461	135	0,46	- 83,7		25,6	77,2	45	2,18	88	6,1
Octan methylnatý	934	24,2	0,388	135		- 98,5			57,0	38	2,1	98	7,1
Olej olivový	915	33	80,8	072	0,47								3,1
Olej ricinový	961	36,4 (v)	1278		0,43								4,6
Olej terpeninový	870	27	2,19	097	0,42	≈ -10			161	57		70	2,3
Pentan -n	626		0,234	162	0,540	-130,8		27,8	36,1	39		85	
Petrolej	850	27 (v)		096	0,50								2,1
Propylalkohol-n	805	21,1 (p)	2,34	099	0,56	-126,1		20,7	97,2	36	1,6	164	22
Pyridin	984	36,6	0,98	112	0,41	- 42	4,97	21,7	115,5	45	2,69	107	12
Rtuť	13551	491 (v)	1,566	018	0,033	-38,83		2,7	357	75	11,4	68	
Sirouhlik	1265	33,8 (p)	0,372	118	0,24	-111,8	3,83	17,7	46,2	42	2,29	87	2,6
Toluen	866	28,4 (v)	0,602	109	0,41	- 95,0		17,2	110,7	45		83	2,3
Voda	998,62	72,97 (v)	1,065	019	0,999	0,00	1,85	79,7	100	38	0,52	538,9	81,57
Xylen-m	864	29,8 (v)	0,63	099	0,40	- 49,3		25,8	139,3	49		82	2,4

T, XVI. Konstanty plynu

Hustota ρ_n kg m⁻³ za normálních podmínek (0 °C, 760 tor). — Hmotnost Δ . — Rozpínavost γ °C⁻¹ při 10³ tor. — Tepelná vodivost λ_0 kcal. m⁻¹. s⁻¹. °C⁻¹ při 0 °C. — Měrné teplo c_p kcal kg⁻¹. °C⁻¹ při stálém tlaku. — Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_v$ (c_v = měrné teplo při stálém objemu). — Rychlost zvuku c m s⁻¹ při 0 °C. — Kritický tlak p_k atm. — Bod tání θ °C. — Bod varu θ °C při 760 tor. — Zvýšený $\delta\theta$ °C bodu varu při zvýšení tlaku o 1 tor. — Hustota ρ_1 kg m⁻³ kapalného skupenství. — Skupenské teplo varu l kcal kg⁻¹. — Vazkost η_0 poise (g cm⁻¹ s⁻¹) při 0 °C. — Index lomu N_D pro Fraunhofer. čáru D při 0 °C 760 tor. — Dielektrická konstanta relativní ϵ_r při 0 °C a 760 tor. — Měrná susceptibilita $\chi_{18} = \frac{1}{4\pi} (\mu_r - 1) \cdot \rho^{-1}$ při 18 °C.

Plyn	ρ_n	d	γ	λ_0	c_p	$\frac{c_p}{c_v}$	c	t_k °C	p_k	θ	θ	$\frac{10^3}{\delta\theta}$ 10 ⁻³ $\frac{1}{\rho_1}$	l'	10 ³ η_0	N_D	ϵ_r	10 ³ χ_{18}
Vzduch (bez CO ₂)	1,28279	1,0000	0,003875	0,00000578	0,240	1,40	331,6	-140,7	88	-193	50	1,000292	1,000594	171	0,00292	1,000594	+24
Acetylen C ₂ H ₂	1,17087	0,9057	3676	0,450	0,402	1,23	327	+35,9	64	81,7	0,61	89,6	102	102	0,598		-0,48
Argon	1,78385	1,3791		0,388	0,124	1,67	308	-122	50	-189,3	12	185,8	39,8	212	0,282		-0,48
Bromovodík HBr	3,6441	2,8188		0,525	0,085	2,00	200	+30,0	87	-87,0		66,8	52	171	0,673		
Čpavek NH ₃	0,7714	0,5986	3802	0,525	0,523	1,31	415	+132	119	77,7	30	33,5	30	93	0,383	0,72	1,1
Dusík N ₂	1,25047	0,9873	3674	0,580	0,248	1,40	337,6	-147,1	35	-210	11	195,8	47,6	166	0,288	0,061	-0,50
Ethan C ₂ H ₆	1,356	1,0489		0,435	0,411	1,23	303	+32,1	50	-183,6		88,6	116,9	86	0,76		-0,91
Ethylen C ₂ H ₄	1,26047	0,9750		0,415	0,355	1,25	317	+9,5	52	-169,4	21	0,57	125	94	0,725	0,146	-0,43
Fluo.	1,685	1,3227		0,179				-129	57	-220		189,1	1,11	41,0	0,195		-0,43
Helium	0,1785	0,1351	9660	3,430	1,25			-287,9	2,34	-271,4	1	288,94	1	6	0,035	0,0074	-0,48
Chlor	3,22	2,4907		0,117	1,36	2,05	205	+144	79	103		33,95	1,56	123	0,781		-0,59
Chlorovodík HCl	1,63906	1,2678		0,181	1,40	2,04,1	204,1	+51,4	86	115		85	27	138	0,447	0,3	
Krypton	3,74	2,8952		0,209	1,68			-62,5	66	-157,0		152,9	2,15	233	0,428		
Kyslík	1,42891	1,1053	3674	0,587	0,219	1,40	315,5	-118,8	51	-219,8		182,97	13	192	0,271	0,055	+104
N ₂ O	1,9779	1,5300		0,352	1,28	2,04,1	204,1	+37	74	90,6		89,5	23	90	0,516	0,114	+4,9
NO	1,34016	1,0366	368	0,556	0,238	1,39	324	-93	66	-163,7		151,54	11	111,2	0,297		
SO ₂	2,9352	2,2638	385	0,200	0,152	1,27	209	+157,5	80	75,3		10,0	29	117	0,670	0,099	-0,30
CO	1,25017	0,9670	367	0,550	0,249	1,40	337	-139	30	-205		191,43	11	166	0,335	0,069	-0,46
CO ₂	1,9768	1,5290	3720	0,342	0,20	1,30	258	+31,0	75	56		79,48	16	138	0,430	0,036	-0,46
Methan CH ₄	0,71678	0,5544		0,722	0,527	1,30	430	-82,5	47	-183		161,4	16	102	0,442	0,094	-12,2
Methylchlorid CH ₃ Cl	2,307	1,7822		0,217	0,248	1,64		+143	65	-103		23,65	30	100	0,070		-0,67
Neon	0,89968	0,6961	8661	1,109	0,948			-228,7	28	-248,6		246,1	1,20	298	0,087		-40,50
Propan C ₃ H ₈	2,0189	1,5617		0,360				+96	48	-180,3		44,5	107	75			
Sirovodík H ₂ S	1,53916	1,1882		0,310	0,250			+100,4	92	-85,6		60,47	21	116	0,640	0,026	-2
Vodík	0,09898	70,0695	3682	4,180	3,41	1,41	1261	-239,9	13,2	-258,2	5	252,78	0,06	84	0,1396		
Xenon	5,9958	4,5605		0,124	1,60			+10,6	60	-111,0		107,1	3,52	240	0,703		

T,XVII. Délky světelných vln v Å

v suchém vzduchu při 15 °C a norm. tlaku 760 torů

Vlnové délky jsou sestaveny abecedně podle chemických značek prvků, jejichž páry je vysílají. U některých čar je uvedeno také jejich označení ve spektru (kursivou nebo řeckými písmeny). U čar vhodných k určení dispersní křivky hranolu je před číslem vyznačena jejich barva: *f* (fial.), *m* (modrá), *n* (modrozelená), *z* (zelená), *ž* (žltá), *o* (oranžová), *č* (červená), *t* (tmavočervená). U velmi intenzivních čar jsou písmena *F* až *T* velká, u středně silných malá (*f*, ..., *t*) a u slabých drobně tištěná (*f*, ..., *t*). Kromě toho jsou normály vlnových délek tištěny tučně a t. zv. zhytkové čáry (které při klesající koncentraci prvku pozorujeme v jiskrovém spektru jako poslední) jsou označeny hvězdičkou.

Ag	3280,68*	Ca <i>R</i>	3179,34	Cd pokr.	4662,352	Fe	2373,737	
	3382,89*				4678,150		2413,312	
Al	4055,25	<i>H',K</i> <i>H</i> <i>g</i> <i>G</i>	3933,670*	10395	4799,914	2562,541	2628,300	
	5209,079				5085,8221		2679,064	
	5465,487				5154,659		2714,417	
	1670,81				4226,728*		2739,551*	
	1854,67				4283,01		2749,325*	
	1862,8				4307,74		2755,74*	
	1990,53				5588,74		2778,227	
	2367,06				5602,84		2813,289	
	2567,99				5857,49		2851,800	
	2575,112				6102,74		2874,167	
	3092,718				6122,24		2912,160	
	3944,025*				6162,19		2941,346	
3961,537*	6439,10	2987,297						
Ar	4044,419	8498,0	8542,1	3503,49*	3605,330*	3047,611	3075,725	
	4200,88						6212,9	3100,671
	4259,362						6723,3	3125,664
	4348,06						8521,15	3175,449
Ba	8115,308	Cd	2144,40	8943,6	4555,3*	3075,725	3100,671	
	3935,72						10026	3125,664
	4554,037*						10123	3175,449
	4937,09*						13591	3225,791
	4947,32						14696	3271,003
	5159,93						30104	3323,741
	5267,03						34892	3370,787
	5302,81						36128	3399,336
	5535,53						3247,549*	3440,612
	5997,10						3273,965*	3445,151
	6063,10						4022,70	3485,341
	6110,80						4062,70	3513,819
6141,76	4275,13	3581,195						
6341,69	4480,38	3606,682						
6595,35	4530,84	3640,392						
Ba	7672,10	3981,8	3610,510	5218,202	3247,549*	3666,682	3640,392	
	7780,50						5220,05	3677,630
	7905,77						5700,25	3719,938
	8210,32						7933,23	3724,378
	8559,91						8092,77	3734,867
	3935,72						8466,201	3753,612
	4554,037*						8467,656	3805,344
	4937,09*						8610,510	3815,843
	4947,32						8612,875	3820,430
	5159,93						3981,8	3821,182
	5267,03						4412,31	3825,885
	5302,81							3843,258
5535,53		3865,525						
5997,10		3906,484						
6063,10								
6110,80								
6141,76								
6341,69								
6595,35								
7672,10								
7780,50								
7905,77								
8210,32								
8559,91								

Pokračování tabulky T, XVII

Fe pokr.	8935,814	Fe pokr.	6663,445	Hg pokr.	2536,520*	Kr pokr.	3631,9			
	8977,743		6677,993		2576,31		4088,36			
f	4021,869	e	6750,154	2652,07	3021,50	4453,92	4154,5			
	4118,549		6843,673	2653,69			4273,97			
	4184,682		6945,209	2655,14			4318,55			
	4147,674		6978,856	2752,79			4319,58			
	4282,406		7090,407	2803,5			4355,50			
	4315,087		7187,336	2893,60			4376,12			
	4325,767		7223,669	2925,4			4399,97			
	4352,737		7311,102	2967,278			4453,92			
	4375,932		7445,773	3021,50			4463,69			
	4383,547		7568,931	3023,48			4475,0			
e	4427,311	d	7664,306	3125,62	3021,50	4502,3551	4577,2			
	4466,556		7748,286	3131,56			4619,12			
	4494,567		8046,086	3131,84			4624,29			
	4531,152		8220,413	3341,47			4671,23			
	4547,850		8387,786	3650,15			4738,98			
	4592,685		8468,425	3654,83			4765,7			
	4602,946		8688,640	3663,27			4807,06			
	4647,436		8824,238	3906,44			5208,33			
	4668,146		H	f 4101,736			3983,96	f 4046,56	3021,50	5562,22
	4678,851						δ, h			
c	4789,652	c	f 4340,466	4108,07	3021,50	5649,5626	5700,8			
	4859,747		β, F	n 4861,327			4339,21	5700,8		
	4957,604		α, C	\bar{C} 6562,785*			4347,50	5870,9154		
	5012,071		He	2829,06			M 4358,343	3021,50	5993,8	
	5049,824			2945,10			n 4916,036			6056,1
	5083,342		3187,74	Z 5460,724			6456,2902			
	5110,414		3447,59	5675,9			7587,41			
	5127,365		3613,64	Z 5769,596			7601,55			
	5167,490		3705,003	Z 5790,657			7694,24			
	5171,601		3888,65	5859,35			8112,94			
5269,538	3964,725	6072,64								
5270,361	4026,190	6234,35								
5371,493	4120,81	6907,49								
5405,777	4143,76	10140								
5434,526	4143,76	K	Li	4602,0						
5455,613	4143,76			β {	4603,2*					
5497,518	4143,76	4044,15*	α	6103,53						
5506,782	4143,76	f 4047,22*		\bar{C} 6707,843*						
5535,418	f 4387,93	5782,7	Mg	8126,4						
5709,393	M 4471,480	5832,1		2795,541*						
5763,013	m 4713,147	6911,5	2802,712*							
5934,675	n 4921,926	6939,0	2852,123*							
5952,739	z 5015,678	T 7664,94	3832,31							
6003,036	z 5047,73	T 7699,01	3838,30							
6027,058	Z 5875,623	Kr	b ₄	5167,34						
6065,486	\bar{C} 6678,149			2464,75	b ₃	5172,69				
6137,696	t 7065,197	2712,4	b ₁	5183,61						
6191,561	7281,349	3245,7	N	1745,26						
6230,727	10830	3264,8								
6265,139	20581	3325,7	3995,00							
6318,021	Hg	3488,59		4097,32						
6335,338		2378,36			3507,4					
6393,603	2399,40	3607,9			4379,09					
6430,850	2446,91									
6494,983	2464,07									
6546,242	2482,04									
6592,918										

Pokračování tabulky T,XVII

N pokr.	4447,03	Ne pokr.	6074,337	Ni pokr.	4904,41	Pt pokr.	4498,75	
	4630,55		6096,163		5035,35		4520,90	
Na	4640,64	Ni	6143,062	O	5146,47	Rb	4523,00	
	5005,14		6163,594		5155,76		4552,42	
	5679,56		6117,280		5168,66		4657,95	
	6484,88		6266,495		5476,91		4879,53	
	7468,74		6304,789		5694,97		5044,04	
	3302,4*		6328,16		5760,843		5059,43	
	3303,0*		6334,428		5805,211		5227,64	
	5682,7		6382,991		5857,759		5301,02	
	5688,2		6402,246		5892,878		5368,99	
	Σ 5889,965*		6506,528		6086,33		5390,79	
Σ 5895,932*	6532,882	6176,80	5475,78					
D_2	6598,593	6339,17	5478,50					
D_1	6678,276	6643,66	5840,13					
8183,33	6717,043	6767,79	5844,82					
8194,93	6929,466	7122,29	6326,60					
Ne	2647,42	7032,411	7393,67	7727,68	7217,58	Si	2435,159	
	2675,24	7173,938	7917,47	7917,47	8224,79		2506,904	
	2974,71	7245,165	O	703,85	Rb		4201,81*	2516,120*
	3126,19	7438,892		833,74			4215,58*	6159,622
	3369,905	7544,052	895,37	3947,3	6206,309		2881,587*	3862,59
	3417,903	8377,62	8783,74	4189,79	6298,327		Sr	4077,714*
	3447,703	Ni	1398,5	4368,30	7800,30			4215,515*
	3454,158	2302,99*	2316,04*	4414,88	7947,63		4607,341*	5480,84
	3460,524	2394,55	2416,15*	5330,7	Si		2435,159	5970,2
	3466,547	2437,90	2510,90	6282,9			2516,120*	6408,48
	3472,573	2502,491	3002,491	6867,2	Pb		3683,471*	6504,01
	3501,214	3050,824	3057,648	7608,2	Pt		4057,830*	6550,27
	3515,189	3101,879	3134,104	7772,0			2424,90	6643,55
	3520,470	3160,476	3213,42	8446,7	2659,45		6878,37	7070,12
	4422,52	3213,42	3269,576	Pb	4245,1		Sr	4077,714*
	4424,81	3380,578	3392,992		3683,471*			4245,1
	4475,65	3392,992	3414,770*	4057,830*	4386,6		3905,51	4607,341*
	4488,09	3414,770*	3446,262	4245,1	5372,3		Si	2435,159
	4537,76	3446,262	3458,467	4386,6	5608,8			2516,120*
	4540,38	3458,467	3461,660	4425,1	6660,15		2881,587*	3862,59
4715,34	3461,660	3492,963	4425,1	7228,98	Sr	4077,714*		
4753,63	3492,963	3524,539	4057,830*	Pt		4215,515*	4607,341*	
4957,63	3524,539	3566,374	4245,1		2424,90	5480,84	5970,2	
5037,74	3566,374	3619,392	4386,6	2659,45	6408,48	6504,01		
5080,38	3619,392	3858,33	4425,1	2733,95	6550,27	6643,55		
5116,49	3858,33	4401,552	4057,830*	2929,79	6878,37	7070,12		
5122,25	4401,552	4470,484	4245,1	2997,96	Sr	4077,714*		
5144,93	4470,484	4648,656	4386,6	3064,71		4215,515*	4607,341*	
5203,90	4648,656	4714,418	4425,1	3408,14	3905,51	5480,84		
5330,78	4714,418	4786,542	4057,830*	Pt	4057,830*	5970,2		
5341,097	4786,542	4855,418	4245,1		2424,90	6408,48	6504,01	
5400,5634	4855,418		4386,6	2659,45	6550,27	6643,55		
5764,42			4425,1	2733,95	6878,37	7070,12		
5852,488			4057,830*	2929,79	Sr	4077,714*		
5881,895			4245,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
5944,834			4386,6	3064,71	3905,51	5480,84		
5975,534			4425,1	3408,14	Si	2435,159		
6029,998			4057,830*	Pt		2424,90	2506,904	
			4245,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4386,6	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4425,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4057,830*	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4245,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4386,6	3408,14	Si	2435,159		
			4425,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4057,830*		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4245,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4386,6	2929,79	Sr	4077,714*		
			4425,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4057,830*	3064,71	3905,51	5480,84		
			4245,1	3408,14	Si	2435,159		
			4386,6	Pt		2424,90	2506,904	
			4425,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4057,830*	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4245,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4386,6	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4425,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4057,830*	3408,14	Si	2435,159		
			4245,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4386,6		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4425,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4057,830*	2929,79	Sr	4077,714*		
			4245,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4386,6	3064,71	3905,51	5480,84		
			4425,1	3408,14	Si	2435,159		
			4057,830*	Pt		2424,90	2506,904	
			4245,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4386,6	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4425,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4057,830*	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4245,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4386,6	3408,14	Si	2435,159		
			4425,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4057,830*		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4245,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4386,6	2929,79	Sr	4077,714*		
			4425,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4057,830*	3064,71	3905,51	5480,84		
			4245,1	3408,14	Si	2435,159		
			4386,6	Pt		2424,90	2506,904	
			4425,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4057,830*	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4245,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4386,6	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4425,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4057,830*	3408,14	Si	2435,159		
			4245,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4386,6		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4425,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4057,830*	2929,79	Sr	4077,714*		
			4245,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4386,6	3064,71	3905,51	5480,84		
			4425,1	3408,14	Si	2435,159		
			4057,830*	Pt		2424,90	2506,904	
			4245,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4386,6	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4425,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4057,830*	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4245,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4386,6	3408,14	Si	2435,159		
			4425,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4057,830*		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4245,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4386,6	2929,79	Sr	4077,714*		
			4425,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4057,830*	3064,71	3905,51	5480,84		
			4245,1	3408,14	Si	2435,159		
			4386,6	Pt		2424,90	2506,904	
			4425,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4057,830*	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4245,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4386,6	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4425,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4057,830*	3408,14	Si	2435,159		
			4245,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4386,6		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4425,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4057,830*	2929,79	Sr	4077,714*		
			4245,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4386,6	3064,71	3905,51	5480,84		
			4425,1	3408,14	Si	2435,159		
			4057,830*	Pt		2424,90	2506,904	
			4245,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4386,6	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4425,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4057,830*	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4245,1	3064,71	3905,51	5480,84		
			4386,6	3408,14	Si	2435,159		
			4425,1	Pt		2424,90	2506,904	
			4057,830*		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4245,1	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4386,6	2929,79	Sr	4077,714*		
			4425,1	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4057,830*	3064,71	3905,51	5480,84		
			4245,1	3408,14	Si	2435,159		
			4386,6	Pt		2424,90	2506,904	
			4425,1		2659,45	2516,120*	2528,516	
			4057,830*	2733,95	2881,587*	3862,59		
			4245,1	2929,79	Sr	4077,714*		
			4386,6	2997,96		4215,515*	4607,341*	
			4425,1	3064,71	3905,51			

Dokončení tabulky T,XVII

Tl pokr.	3229,75	X	8280,12	Zn pokr.	3302,96	Slunce		
	3519,22				3345,03*	r	3145,2	
	3529,41	Zn	2025,5		3345,5	Q	3286,8	
	3775,73*				2062,5	3345,9	P	3361,2
	5350,48*				2100,5	4292,9	a	7184,5
					2138,6	4629,810	Z	8227
X					2684,19	4680,140	X ₁	8497
	2475,9				2712,50	4722,168*	X ₂	8542
	2605,6				2770,88	4810,584*	X ₃	8662
	3781,0				2770,95	5181,984	X ₄	8806
	4078,8				2800,06	5308,5	Y	8989
	4462,2				2800,79	5772,2		
	4500,975				3075,88	6362,845		
	4671,226				3035,80	6928,7		
					3282,32			
		3302,60						
		8231,62		11054				

T, XVIII. Zeměpisná poloha, nadmořská výška a tíhové zrychlení některých míst v ČR

Místo	Zeměpisná šířka	Zeměpisná délka	Nadmořská výška	Normální zrychlení podle 41 (2)
Praha II (Ústav techn. fyziky ČVUT, Karlovo nám 13)	sev.	vých.	m	gal (cm s ⁻²)
	50° 4,67'	14° 25,15'	223	981,040
Bratislava	48° 9'	17° 7'	164	980,863
Brno	49° 12'	16° 37'	227	980,937
Hradec Králové	50° 13'	15° 50'	244	981,022
Košice	48° 43'	21° 16'	211	980,899
Olomouc	49° 36'	17° 15'	220	980,975
Ostrava	49° 50'	18° 17'	217	980,997
Plzeň	49° 45'	13° 22'	311	980,960

T, XIX. Různé konstanty

Zákl. přír. log.: $e = 2,718\ 282$; $\log e = 0,434\ 294$; $\ln 10 = 2,302\ 585$.

$\pi = 3,141\ 593$; $\pi^2 = 9,869\ 604$; $1/\pi = 0,318\ 310$;

$\log \pi = 0,497\ 150$; $\frac{180^\circ}{\pi} = 57,2958^\circ = 3437,75' = 206\ 265''$;

$\text{arc } 1^\circ = 1,745\ 329 \cdot 10^{-2}$; $\text{arc } 1' = 2,908\ 881\ 6 \cdot 10^{-4}$; $\text{arc } 1'' = 4,848\ 136 \cdot 10^{-6}$.

Angl. palec (inch) = 1 in = 2,539 998 cm; amer. palec = 1 in = 2,540 005 cm.

Angl. yard = 1 yd = 0,914 399 m; amer. yard = 1 yd = 0,914 402 m.

Angl. libra (av. pound) = 453,5924 g; angl. tuna (long ton) = 1,016 047 t.

Angl. koňská síla = 1 HP = 550 librostop = 76,0399 kg* m s⁻¹.

Britská tepelná jednotka = 1 BTU = 252,0 cal; 1 kcal = 3,968 BTU.

Normální zrychlení zemské tíže = 980,665 gal (cm s⁻²).

Normální objem grammolekuly plynu (0 °C, 760 tor) = 22,421 l.

Avogadrovo číslo (počet molekul v 1 kilomolu) $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ kmol⁻¹

Plynová konstanta pro 1 grammolekulu

$$R = 1,987 \text{ cal } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = 8\ 317 \text{ joule } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ kmol}^{-1} = 0,082\ 08 \text{ l atm } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

Boltzmannova (plynová) konstanta (pro 1 molekulu)

$$k = 3,29 \cdot 10^{-24} \text{ cal } ^\circ\text{K}^{-1} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ joule } ^\circ\text{K}^{-1}.$$

Hmotnost molekuly o molekulové hmotě μ je $1,66 \cdot 10^{-27} \mu$ kilogramů.

Mechanický ekvivalent tepla

$$J = 4,1863 \text{ joule cal}^{-1} = 426,77 \text{ kg* m (kcal)}^{-1} \doteq \frac{1}{860} \text{ kWh (kcal)}^{-1}.$$

Tepelný ekvivalent práce

$$K = 0,2389 \text{ cal joule}^{-1} = 2,343 \text{ cal (kg* m)}^{-1} \doteq 860 \text{ kcal (kWh)}^{-1}.$$

Energetický ekvivalent hmoty = $8,987 \cdot 10^{20} \text{ erg g}^{-1} = 8,987 \cdot 10^{16} \text{ Ws kg}^{-1}$.

Elementární náboj (elektronu) $e = 4,80 \cdot 10^{-10} [q]_{\text{es}} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Faradayův náboj (fyzikální) $F = 9,6522 \cdot 10^7 \text{ C kgekviv}^{-1} = 2,895 \cdot 10^{14} [q]_{\text{es}} \text{ gekviv}^{-1}$.

Elektronvolt (energie elektronu prošl. pot. rozd. 1 V)

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 4,48 \cdot 10^{-26} \text{ kWh}.$$

Planckova konstanta (účinkové kvantum) $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2$.

T,XX. Mechanické jednotky MKSA, technické a absolutní

Velikost jméno znak		Jednotka MKSA jméno znak		Jednotek technických	Jednotek absolutních
Kinematika	délka l	metr	m	$1 \times m$	$10^2 \times cm$
	plocha S		m^2	$1 \times m^2$	$10^4 \times cm^2$
	objem V		m^3	$1 \times m^3$	$10^6 \times cm^3$
	čas t	vteřina	s	$1 \times s$	$1 \times s$
	rychlost v	$m \cdot s^{-1}$		$1 \times m \cdot s^{-1}$	$10^2 \times cm \cdot s^{-1}$
	zrychlení a	$m \cdot s^{-2}$		$1 \times m \cdot s^{-2}$	$10^2 \times cm \cdot s^{-2}$
	kmitočet f, ν kruhová frekvence ω	cykl. s^{-1} (Herz)	$c \cdot s^{-1}$ (Hz)	$1 \times s^{-1}$	$1 \times s^{-1}$
	vazkost kinematická ν	$m^2 \cdot s^{-1}$		$1 \times m^2 \cdot s^{-1}$	$10^4 \times cm^2 \cdot s^{-1}$
Dynamika	hmota m	kilogram	kg	$0,102 \times kg^* \cdot s^2 \cdot m^1$	$10^3 \times g$
	hustota ρ, δ, ϱ	$kg \cdot m^{-3}$		$0,102 \times kg^* \cdot s^2 \cdot m^{-4}$	$10^{-3} \times cm^{-3} \cdot g$
	moment setrvačnosti J	$m^2 \cdot kg$		$0,102 \times m \cdot kg^* \cdot s^2$	$10^7 \times cm^2 \cdot g$
	síla F	newton $= m \cdot kg \cdot s^{-2}$	N	$0,102 \times kg^*$	$10^5 \times cm \cdot g \cdot s^{-2}$ (dyn)
	hybnost b	(leibnitz) = $= m \cdot kg \cdot s^{-1}$		$0,102 \times kg^* \cdot s$	$10^5 \times cm \cdot g \cdot s^{-1}$
	měrná váha γ	$N \cdot m^{-3}$		$0,102 \times kg^* \cdot m^{-3}$	$10^{-1} \times cm^{-2} \cdot g \cdot s^{-2}$
	tlak napětí norm. σ tečné τ modul pruž- nosti v tahu E ve smyku G	(giorgi) = $N \cdot m^{-2}$		$0,102 \times kg^* \cdot m^{-2}$	$10 \times cm^{-1} \cdot g \cdot s^{-2}$
	moment (dvojice) M, D	$N \cdot m$		$0,102 \times m \cdot kg^*$	$10^7 \times cm^2 \cdot g \cdot s^{-2}$
	energie práce A teplo Q	joule $J = N \cdot m$		$0,102 \times m \cdot kg^*$	$10^7 \times cm^2 \cdot g \cdot s^{-2}$ (erg)
	výkon P	watt $W = J \cdot s^{-1}$		$0,102 \times m \cdot kg^* \cdot s^{-1}$	$10^7 \times cm^2 \cdot g \cdot s^{-3}$
	vazkost dynamická η	$N \cdot s \cdot m^{-2}$		$0,102 \times kg^* \cdot s \cdot m^{-2}$	$10 \times cm^{-1} \cdot g \cdot s^{-1}$
	povrchové napětí σ	$N \cdot m^{-1}$		$0,102 \times kg^* \cdot m^{-1}$	$10^3 \times g \cdot s^{-2}$

T,XXI. Tepelné jednotky v soustavě MKS a jejich vztah k jednotkám praktickým a absolutním

Veličina X jméno znak	Jednotka MKS [X]	Jednotek praktických	Jednotek absolutních
Teplo (energie) Q	joule = $J = W \cdot s =$ $= A \cdot V \cdot s =$ $= \frac{1}{3,6} 10^{-6} \text{ kWh}$	0,2389 cal	$10^7 \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-2}$ (erg)
Měrné teplo c	$J \cdot \text{kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} =$ $= Ws \cdot \text{kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-4} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ($\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)	$10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ($\text{erg} \cdot \text{g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)
Molekulové teplo C	$J \cdot \text{kmol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-4} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$10^4 \text{ erg} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Skupenské teplo pro 1 kmol L	$J \cdot \text{kmol}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-4} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1}$	$10^4 \text{ erg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Entropie pro 1 kmol S	$J \cdot \text{kmol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-4} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$10^4 \text{ erg} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Tepelná vodivost λ	$J \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-3} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \times$ $\times \text{ }^\circ\text{C}^{-1} = 0,86$ $\times \text{ kcal} \cdot \text{m}^{-1} \text{ h}^{-1} \times$ $\times \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$10^5 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ $^\circ\text{C}^{-1}$
Teplotní vodivost a	$\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$	$10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} =$ $= 3600 \text{ m}^2 \text{ h}^{-1}$	$10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
Intensita vyzářování úhrnná H_e	$J \cdot \text{m}^2 \text{ s}^{-1} = W \cdot \text{m}^{-2}$	$2,389 \cdot 10^{-5} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$	$10^3 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
Intensita vyzářování spektrální H_λ	$J \cdot \text{m}^{-3} \text{ s}^{-1}$	$2,389 \cdot 10^{-7} \times$ $\times \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$	$10 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$

V tabulce užitě označení *mol* je zkratka slova *grammolekula*, které znamená množství rovné tolika gramům látky, kolik činí její molekulová hmota. Tisíckrát větší množství se nazývá *kilogrammolekula* nebo *kilomol* a značí se $\text{kmol} = 1000 \text{ mol}$.

T,XXII. Elektrické a magnetické jednotky v soustavě MKSA (r), v absolutní soustavě elektrostatické a elektromagnetické

($c = 299\,790\text{ km s}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu)

Velikost jméno	znak	Jednotka MKSA jméno	znak	Jednotek abs. elektrostatických	Jednotek abs. elektromagnetických
Proud (elektr.)	I	ampér	A	$\frac{c}{10} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}$	$10^{-1} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$
Náboj (elektr.)	Q	coulomb C = As		$\frac{c}{10} \times \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$10^{-1} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2}$
Napětí potenc. r.	V	volt $V = \frac{J}{C} = \frac{W}{A}$		$\frac{10^8}{c} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$10^8 \times \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}$
Odpor	R	ohm $\Omega = \frac{V}{A}$		$\frac{10^9}{c^2} \times \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}$	$10^9 \times \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$
Měrný odpor	ρ	$\Omega \cdot \text{m}$		$\frac{10^{11}}{c^2} \times \text{s}$	$10^{11} \times \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Měrná vodivost	λ	$\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$		$c^2 \cdot 10^{-11} \times \text{s}^{-1}$	$10^{-11} \times \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}$
Intensita el. pole	E	$V \cdot \text{m}^{-1}$		$\frac{10^6}{c} \times \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$10^6 \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}$
Kapacita	C	farad $F = \frac{C}{V}$		$c^2 \cdot 10^{-9} \times \text{cm}$	$10^{-9} \times \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$
Dielektr. konstanta	ϵ	$F \cdot \text{m}^{-1}$		$4 \pi \cdot 10^{-11} c^2 \times 1$	$4 \pi \cdot 10^{-11} \times \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^2$
Dielektr. konst. rel.	ϵ_r	1		1×1	1×1
Indukčnost	L	henry $H = V \cdot \text{s} \cdot A^{-1}$		$\frac{10^9}{c^2} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$	$10^9 \times \text{cm}$
Magnetický pól	p	weber $\text{Wb} = J \cdot A^{-1}$		$\frac{10^8}{4 \pi \cdot c} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2}$	$\frac{10^8}{4 \pi} \times \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$
Intensita magn. pole	H	$A \cdot \text{m}^{-1} = N \cdot \text{Wb}^{-1}$		$4 \pi \cdot c \cdot 10^{-3} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^2$	$4 \pi \cdot 10^{-3} \times \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ (oersted)
Induk. tok	Φ	weber $\text{Wb} = V \cdot \text{s}$		$\frac{10^8}{c} \times \text{cm}^{1/2} \cdot \text{g}^{1/2}$	$10^8 \times \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ (maxwell)
Magn. indukce	B	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$		$\frac{10^4}{c} \times \text{cm}^{-3/2} \cdot \text{g}^{1/2}$	$10^4 \times \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ (gauss)
Magn. permea- bilita	μ	$H \cdot \text{m}^{-1}$		$\frac{10^7}{4 \pi \cdot c^2} \times \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^2$	$\frac{10^7}{4 \pi} \times 1$
Magn. permea- bilita relativní	μ_r	1		1×1	1×1
Magnetický moment	M	$\text{Wb} \cdot \text{m}$		$\frac{10^{10}}{4 \pi \cdot c} \times \text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2}$	$\frac{10^{10}}{4 \pi} \times \text{cm}^{5/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$
Magnetisace	J	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$		$\frac{10^4}{4 \pi \cdot c} \times \text{cm}^{-3/2} \cdot \text{g}^{1/2}$	$\frac{10^4}{4 \pi} \times \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$

T,XXIII. Goniometrické funkce

↓ 0°	Sinus		Tangens		Kotangens		Kosinus		90
0°	0,0000	175	0,0000	175	∞		1,0000	02	90
1	,0175	174	,0175	174	57,29		0,9998	04	89
2	,0349	174	,0349	174	28,64		,9994	08	88
3	,0523	175	,0524	175	19,08		,9986	10	87
4	,0698	174	,0699	176	14,30		,9976	14	86
5	,0872	173	,0875	176	11,43		,9962	17	85
6	,1045	174	,1051	177	9,514		,9945	20	84
7	,1219	173	,1228	177	8,144		,9925	22	83
8	,1392	172	,1405	179	7,115		,9903	26	82
9	,1564	172	,1584	179	6,314	801	,9877	29	81
10	,1736	172	,1763	181	5,671	643	,9848	32	80
11	,1908	171	,1944	182	5,145	526	,9816	35	79
12	,2079	171	,2126	183	4,705	440	,9781	37	78
13	,2250	169	,2309	184	4,331	374	,9744	37	77
14	,2419	169	,2493	186	4,011	320	,9703	41	76
15	,2588	168	,2679	188	3,732	279	,9659	44	75
16	,2756	168	,2867	188	3,487	245	,9613	46	74
17	,2924	166	,3057	190	3,271	216	,9563	50	73
18	,3090	166	,3249	192	3,078	193	,9511	52	72
19	,3256	164	,3443	194	2,904	174	,9455	56	71
20	,3420	164	,3640	197	2,747	157	,9405	58	70
21	,3584	162	,3839	199	2,605	142	,9397	61	69
22	,3746	161	,4040	201	2,475	130	,9336	64	68
23	,3907	160	,4245	205	2,356	119	,9272	67	67
24	,4067	159	,4452	207	2,246	110	,9205	70	66
25	,4226	158	,4663	211	2,145	101	,9135	72	65
26	,4384	158	,4877	214	2,050	95	,9063	75	64
27	,4540	155	,5095	218	1,963	87	,8988	78	63
28	,4695	155	,5317	222	1,881	82	,8910	81	62
29	,4848	153	,5543	226	1,804	77	,8829	83	61
30	,5000	152	,5774	231	1,732	72	,8746	86	60
31	,5150	150	,6009	235	1,664	68	,8660	88	59
32	,5299	149	,6249	240	1,600	64	,8572	92	58
33	,5446	147	,6494	245	1,540	60	,8480	93	57
34	,5592	146	,6745	251	1,483	57	,8387	97	56
35	,5736	144	,7002	257	1,428	55	,8290	98	55
36	,5878	142	,7265	263	1,376	52	,8192	102	54
37	,6018	140	,7536	271	1,327	49	,8090	104	53
38	,6157	139	,7813	277	1,280	47	,7986	106	52
39	,6293	136	,8098	285	1,235	45	,7880	108	51
40	,6428	135	,8391	293	1,192	43	,7771	109	50
41	,6561	133	,8693	302	1,150	42	,7660	111	49
42	,6691	130	,9004	311	1,111	39	,7547	113	48
43	,6820	129	,9325	321	1,072	39	,7431	116	47
44	,6947	127	,9657	332	1,036	36	,7314	117	46
45	,7071	124	1,0000	343	1,000	36	,7193	121	45° ↑
							,7071	122	
	Kosinus		Kotangens		Tangens		Sinus		

T,XXIV. Čtyřmístné logaritmy desetinné

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	24
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	19
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.

Dokončení tabulky T,XXIV

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
100	00000	0043	0087	0130	0173	0217	0260	0303	0346	0389	43
101	00432	0475	0518	0561	0604	0647	0689	0732	0775	0817	43
102	00860	0903	0945	0988	1030	1072	1115	1157	1199	1242	42
103	01284	1326	1368	1410	1452	1494	1536	1578	1620	1662	42
104	01703	1745	1787	1828	1870	1912	1953	1995	2036	2078	42
105	02119	2160	2202	2243	2284	2325	2366	2407	2449	2490	41
106	02531	2572	2612	2653	2694	2735	2776	2816	2857	2898	41
107	02938	2979	3019	3060	3100	3141	3181	3222	3262	3302	40
108	03342	3383	3423	3463	3503	3543	3583	3623	3663	3703	40
109	03743	3782	3822	3862	3902	3941	3981	4021	4060	4100	40
110	04139	4179	4218	4258	4297	4336	4376	4415	4454	4493	39
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.

L I T E R A T U R A

- [1] *Macků, B. — Novák, V. — Nachtikal, F.*: Základy praktické fyziky. 5. vyd., Brno 1939
- [2] *Nachtikal, F.*: Technická fyzika, 3. vyd., Praha: JČMF 1946
- [3] *Strouhal, Č.*: Thermika, Praha: JČMF 1908
- [4] *Kučera, B.*: Nástin geometrické optiky a základů fotometrie, Praha: JČMF 1915
- [5] *Čuřík, F.*: Počet vyrovnávací, Praha: Čes. matice techn. 1936
- [6] *Horák, Z. — Krupka, F. — Šindelář, V.*: Základy technické fyziky, 2. vyd., Praha: Práce 1955
- [7] *Horák, Z.*: Úvod do molekulové a atomové fyziky, 2. vyd., Praha: SNTL 1956
- [8] *Řezníček, J.*: Jednotky v energetice, Praha: NČSAV 1954
- [9] *Teysler, V.*: Technická měření ve strojnictví — Tlak, teplota a vlhkost, Praha: ČMT 1947
- [10] *Šindelář, V. — Krupka, F.*: Měření teploty, Praha: Práce 1955
- [11] *Pilát, V.*: Návodky k základním fyzikálním měřením, Praha: SNTL 1955
- [12] *Friš, S. E. — Timoreva, A. V.*: Kurs fyziky I, II, III, Praha: NČSAV 1953, 1954
- [13] *Iveronova, V. I.*: Fizičeskij praktikum, Moskva 1955
- [14] *Kohrausch, F.*: Praktische Physik, 19. vyd., Leipzig: B. G. Teubner 1953
- [15] *Malikov, R. S.*: Osnovy metrologii I, Moskva 1949
- [16] *Malikov, S. F.*: Praktičeskije električeskije jedinicy i absolutnyje, Moskva 1947
- [17] *Jakovlev, K. P.*: Matematičeskaja obrabotka rezultatov izmerenij, Moskva 1950
- [18] *Halaunbrenner, M.*: Cwiczenia praktyczne z fizyki, Warszawa 1949
- [19] *Strong, J.*: Modern Physical Laboratory Practice, London—Glasgow: Blackie & Son 1943
- [20] *Wien, W. — Harms, F.*: Handbuch der Experimentalphysik I—XXVI a doplňky, Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft 1926 — 1935
- [21] *Geiger, H. — Scheel, K.*: Handbuch der Physik I—XXIV Berlin: J. Springer 1926—1929
- [22] *Ollivier, H.*: Travaux Pratiques de Physique Générale, Paris: J. Hermann 1924
- [23] *Shrader, J. E.*: Manual of Experiments in Physics, New York—London: McGraw—Hill 1937
- [24] *Schaefer, C. — Bergmann, L. — Kliefoth, W.*: Grundaufgaben des physikalischen Praktikums, Leipzig—Berlin: B. G. Teubner 1944
- [25] *Pohl, R. W.*: Einführung in die Physik I, II, III, Berlin: Springer 1941
- [26] *Pavlov, M. P.*: Technika izmerenija skorostěj i vremeni, Moskva 1950
- [27] *Sena, L. A.*: Jedinicy izmerenija fizičeskich veličin, Moskva: 1951
- [28] *Turubiner, I. — Ippie, M. D.*: Technika izmerenija plotnosti, Moskva 1949
- [29] Tables Annuelles de Constantes et Données Numériques (Association intern. des Académies), Paris: Gauthier—Villars (vychází každoročně od roku 1910)
- [30] International Critical Tables I—VII a index, National Research Council, New York—London: McGraw—Hill 1926—1933
- [31] *Landolt—Börnstein*: Physikalisch-chemische Tabellen, 2 základní a 5 doplňkových svazků, Berlin: J. Springer 1923—1936
- [32] Smithsonian Physical Tables, 7. vyd., Washington: Smithsonian Institution 1923
- [33] *Knoll, M. — Ollendorf, F. — Rompe, R.*: Gasentladungs-Tabellen, Berlin: J. Springer 1935

- [34] *Mattauch, J. — Fluegge, S.*: Nuclear Physics Tables, New York: Interscience Publishers 1946
- [35] *Hodgman, Ch. D.*: Handbook of Chemistry and Physics, 30. vyd., Cleveland: Chemical Rubber Publ. Co. 1948
- [36] *Oberg, E. — Jones, F. D.*: Machinery's Handbook, 13. vyd., New York: The Industrial Press 1946
- [37] *Gehlhoff, G.*: Lehrbuch der Technischen Physik I—III, Leipzig: J. A. Barth 1924—1929
- [38] *Sutton, R. M.*: Demonstration Experiments in Physik, New York—London: McGraw—Hill 1938
- [39] *Wood, A. B.*: A Textbook of Sound, London: G. Bell & Sons 1930
- [40] *Bragg, W.*: The Universe of Light, London: G. Bell & Sons 1933
- [41] *Cotton, H.*: Electric Discharge Lamps, London: Chapman & Hall 1946
- [42] *Simon, H. — Suhrmann, R.*: Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendungen, Berlin: J. Springer 1932
- [43] *Hoje, C. v.*: Fernoptik, Leipzig: J. A. Barth 1941
- [44] *Judge, A. W.*: Engineering Precision Measurements, London: Chapman & Hall 1944
- [45] *Klingler, R.*: Lehren und Lehrgerätebau, Zürich: Schweizer Druck und Verlags-haus
- [46] *Pérard, A.*: Les Unités Principales de Longueur, de Masse, d'Électricité, de Lumière, de Chaleur et l'Échelle Thermométrique (Appareils de Mesure et de contrôle I, Comité général d'Org. des Industries Mécaniques), Paris 1943
- [47] *Salmon*: Normalisation et Métrologie (Appareils de Mesure et de Contrôle I, Comité Général d'Org. des Industries Mécaniques), Paris 1943
- [48] *Fayolle, P.*: Indicateur de Contact Electrostatique à Battements, Travaux et Mém. du Laboratoire Central des Industries Mécaniques No. 3, Paris 1946
- [49] *Pérard, A.*: Compte Rendu Abrégé de la Session 1946 du Comité Int. des Poids et Mesures, Microtechnic Vol. I, No. 1, Lausanne 1947
- [50] *Rocard, Y.*: Electricité. Paris: Masson et Cie 1951
- [51] *Gerthsen, Ch.*: Physik, Berlin 1951
- [52] *Bodea, E.*: Giorgis Rationales MKS-Mass-System mit Dimensionskohärenz, Basel 1949
- [53] *Johnson, J. J.*: Precision Measurements, London 1948
- [54] *Wothing, A. G. — Geffner, J.*: Treatment of Experimental Data, New York 1950
- [55] *Lemon, H. B.*: Od Galilea ke kosmickým paprskům. Praha: B. Janda 1937
- [56] *Horák, Z. — Krupka, F.*: Technický přístroj k měření tepelné vodivosti oceli do 500 °C, Praha: Sborník ČVUT 1951
- [57] *Šimonová—Čeřovská*: Ultrazvuk a jeho užití v praxi, 2. vyd., Praha: ESČ 1945
- [58] *Horák, Z.*: Zobecnění normálního zákona chyb, Čs. čas. fys. 3 (1953), str. 348—365
- [59] *Kladivo, B.*: Měřické chyby a jejich vyrovnání, Cesta k vědění, sv. 24, Praha: JČMF 1943
- [60] *Horák, Z.*: Vyrovnání měření táry mikroskopů komparátoru, Zeměměř. věstník XXVI (1938), str. 17—21
- [61] *Horák, Z.*: Teplotní koeficienty tepelné vodivosti práškových hmot, Techn. obzor XLV (1937), str. 68—71, 85—89
- [62] *Horák, Z.*: Jednoduchá metoda měření tepelné vodivosti kapalin, Strojnický obzor XV (1935), str. 233—238
- [63] *Horák, Z.*: Rotační technický viskosimetr, Stroj. obzor XIX (1939), str. 8—12
- [64] *Horák, Z.—Goldbach, V.*: Technický rotační viskosimetr s odstraněným koncovým vlivem, Strojřensství 3 (1953), str. 928—932
- [65] *Horák, Z.*: Nová technická metoda měření dynamické pružnosti umělých hmot a ložiskových koulí, Strojnický sborník 8 (1954), str. 103—116
- [66] *Bars—Bastille*: Journ. Math. and Phys., MIT, Massachusetts 1923
- [67] *Stránský, J.*: Základy radiotechniky I, 2. vyd., Praha: Melantrich 1949
- [68] *Prokop, M.*: a kol: Světelná technika, Praha: SNTL 1955
- [69] *Sokolnikoff, J. — Sokolnikoff, E.*: Higher Mathematics for Engineers and Physicists, New York—London: McGraw—Hill Book Co. 1941
- [70] *Horák, Z.*: Početní zpracování fyzikálních měření, Praha: SPN 1953
- [71] *Čuřík, F.*: Matematika (Techn. průvodce), 2. vyd., Praha 1944

- [72] *Pascal — Epstein*: Repetitorium der Höheren Mathematik, Leipzig: B. G. Teubner 1910
- [73] *Horák, Z.*: Skupinové vyrovnání ekvidistantních měření a grafické vyrovnání kvadratické závislosti. Sborník I. vědecké konference fakulty strojního inženýrství ČVUT, Praha 1956
- [74] *Aljanski, P. J. — Gausner, S. J. — Žavoronkov, M. S. — Pokrovskij, V. S.*: Veso izmeritělnyje pribory, Moskva 1950
- [75] *Destable, P.*: Étude d'Une Méthode Rapide de Mesure des Coefficients de Conductibilité Thermique, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, No. 86, Paris 1949
- [76] *Jones, H. A. — Langmuir, I.*: General Electric Review **30** (1927), str. 313
- [77] *Dushman, S.*: Review of Modern Physics **2** (1930), str. 381
- [78] *Braun, A. a Busch, G.*: Helvetica Physica Acta, **20** (1947), str. 33—66
- [79] *List, V.*: Základy elektrotechniky I, 2. vydání, Praha: SNTL 1954
- [80] *Horák, Z.*: Sur une méthode approximative de compensation des fonctions empiriques, Čas. mat. a fys., **68** (1939), str. 177—197.

REJSTŘÍK

Číslice značí stránky, čísla v lomených závorkách (uvedená u jmen autorů citovaných pod čarou) se vztahují k seznamu literatury. Každý pojem najdete u podstatného jména, které v něm přichází v 1. pádu. Názvy tvořené z *vlastních* jmen uvádím také u těchto jmen.

A

„a“ komorní 326
Abbe 352
 —, metoda 522
 —, refraktometr dvojhranolový 536
 — — polokulový 535
Adams 23
 akomodace oka 523
 akumulátor ocelový *Edisonův* Ni—Fe 449
 — olověný 449
 — stříbrný 449
 alhidáda 241
Amici, přímohledný hranol 536
 ampér (absolutní) 37
 — atomový 51
 — mezinárodní 42
 ampérmetr 445
 — dilatační 490
 — elektromagnetický, technický 490
 — kalibrace normálního ampérmetru 452
 — kontrola coulometrem na vodík 455
 — — *Hofmannovým* přístrojem 455
 — — normálním ampérmetrem 452
 — normální 446
 — tepelný 490
 — termoelektrický 490
 —, zapojení 491
 ampérsekunda 38
 amplion 328
 analýsa spektrální 562
 analysátor 568
Andrews 334
 —, kalorifer 372
 aneroid 161
 angström 563
 areometr *Bauméův* 257
 —, konstanta 263
 —, kontrola 263
 aretace (zajištění vah) 183
Archimedes 253
Arnulf 353
Arrhenius, vazkoměr kapilární 303
 —, —, měření 311
Assmann, psychrometr 416
 atmosféra 34

— technická 34
Avogadro, číslo 267
 —, zákon 162, 265

B

baňka odměrná 251
 bar 34
Barkhausen, měření hlasitosti 348
 —, vztah, rovnice 500
 barograf 161
 barometr, viz tlakoměr
Barss [66] 339
Barus 427
 barye 34
Bastille [66] 339
 baterie akumulátorová 449
Baumé, areometr 257
 —, stupeň 258
Baumgardt, radiometr 343
Beckmann, přístroj k určení bodu tuhnutí 408
 —, — — — varu 412
 —, — — — teploty 168, 412
Behr, vlhkoměr samopisný 416
Bechstein, fotometr sektorový 544
 bel 35
Benoît 26
Bergel 387
Bessel, metoda 520, 521
Bingham 304
Biot, rovnice 403
Biot-Savart, zákon 29, 41, 420
Blairley 335
 bočník 445, 450
 bod hlavní čočky 516
 — mrazu 410
 — rosný 415
 — tání 407
 — — čistých látek 408
 — — z průběhu teploty 408
 — tuhnutí 407
 — — přechlazením 409
 — —, snížení bodu tuhnutí přístrojem *Beckmannovým* 410

bod tuhnutí z průběhu teploty 408
 — — varu 411
 — — kapalin 412
 — — normální 411
 — —, zvýšení bodu varu *Beckmannovým*
přístrojem 413
Boltzmann, konstanta 23, 502
Borda, metoda 204
Bourdon 161
Boyle, radiometr 343
Boyle-Gay-Lussac, zákon 162
Boyle-Mariotte, zákon 378
Braun 503
 British Thermal Unit (B. T. U.) 36
Brooks, induktometr 492
Brown, pohyb 444
 B. T. U. 36
Bunsen 267
 —, kalorimetr 364
 —, metoda 270
 —, spektroskop 560
 —, zákon 268
 buňka selenová 546
Busch [78] 503
 busola tangentská 440
 byreta 251
 bzučák 489
 — rázový, záznějový 327

C

Campbell 556
Callendar, přístroj 365
Carnot, stroj 28
 cd 36
 cejchování mikrofonu 330
Celsius, stupeň 163, 408
 centimetr 25
 centipoise 302
 centistok 302
 citlivost fotonky 552
 — galvanoměru 444
 — hradlového článku 552
 —, křivka 211, 212
 — libely 243, 244
 — vah 190, 210, 215, 218
 cívka indukční 491
Clément-Desormes, metoda 379
Compton 428
Couette 305, 311
 coulomb 38, 430
 — atomový 51
Coulomb 181, 330
 —, zákon 29
 —, zákony o tření 299
 coulometr na měď 447
 — na stříbro 446
 — (voltametru) na vodík 447
 cukernatost 572
 —, mezinárodní stupnice 572
Curie, P. destička 430
 —, —, konstanta 430, 431

Č

čáry *Fraunhoferovy* 562
 — spektrální 562
 čas, měření 151
 četnost chyb 59
 —, normální zákon četnosti 54
 činitel převodní tangentské busoly 441, 456
 číslo *Avogadrovo* 267
 — převodní planimetru 247
 — *Redwoodovo* vteřinové 303, 305
 — *Reynoldsovo* 303
 — *Sayboltovo* vteřinové 303, 305
 článek fotoelektrický 545
 — galvanický 450
 — normální *Westonův*, kadmiový 457
 — tepelný 171
 čočka, čočková rovnice 517
 —, hlavní bod 516
 —, ohnisková délka 515
 —, optická mohutnost 515
 — tenká 517
 — —, ohnisková délka 519, 520, 521
 — tlustá 517
 — —, ohnisková délka 522
 — vydutá (konkávní) 517
 — vypuklá (konvexní) 517
 čtení na stupnici 142

D

dalekohled afokální 528
 — čtecí 147, 531
 — hvězdářský *Keplerův* 526
 — se stupnicí 149
 —, zorné pole 529
 —, zvětšení 526
 délka konvenční 523
 — ohnisková čočky 515
Dalton, zákon 162
Daniel, vlhkoměr 415
Davis 348
 decibel 35, 347
 deflegmátor 413
 dekalumen 36
 dekrement logaritmický 193
 délka redukovaná magnetu 505
 — — fyzického kyvadla 274
 — vlnová 563
 — — světla mřížkou 566
 — — interferometrem 567
 — — nadzvukové vlny interferometrem
 337
 — — zvukové vlny *Kundtovou* trubicí 335
 — — zvukové vlny interferenční metodou
 337
 — — zvukové vlny rezonátorem 335
 densimetr 257
 densograf 546
 densometr 546
 deprese 320
Deprez-D'Arsonval, galvanoměr 441

Despretz, metoda 399
Destable, P. [75] 397
 destička *Curieova* 430, 431
 — *Rayleighova* 342
Dewar, kalorimetr 362, 363
 —, nádoba 362
 —, přiklop 387
 děje periodické 273
 dělič napětí 460
 dilatometr *Dulongův-Petitův* 357
 — *Edelmannův* 315
 — interferenční, křemenný 352
 — — *Priestův* 353
 — kapilární 357
 dioda 496
 —, anodová charakteristika 496
 dioptrie 515
 disperse střední 536
 doba kmitová 273, 330
 — kyvu 273, 291
 — — postupnou methodou 273
 — oběžná 273
 — periodického děje 273
 dopad tečný 535
 dráha náběhová 311
 drobnohled čtecí 146, 285, 524
 — měřicí 229
 —, tára 101, 148
 —, zvětšení 525
Duboscq (kalorimetr) 560
Duddell 491
Dulong-Petit, kathetometr 238
 — —, dilatometr 357
Dumas, metoda 264
Du Noüy, přístroj 320
Dushman [77] 502, 503
 dvojlom 568
 dvojníkol 569
 dyn 28, 32, 34
 dynametr (*Ramsden*) 527
 dynamometr 490
 —, převodní součinitel 490

E

Edelmann, dilatometr (přístroj) 351
Edison, akumulátor 449
 efekt ochlazovací 345
 efusimetr *Bunsenův* 268
 ekvivalent práce, tepelný 362
 — tepla mechanický 361, 367, 370
Einstein 547
 elektřina, schematické značky 420
 —, základní vztahy 429
 elektroakustika 325
 elektrodynamometr 490
 elektrolysa 447
 —, *Faradayovy* zákony 420
 elektrolyt, specifická vodivost 487
 elektrometr absolutní 463
 — dvouvláknový 428
 — jednovláknový 429
 — kvadrantový 427

— strunový 429
 elektronvolt 40
 elevace (vzestup) kapilární 320
 elinvar 326
 emise thermoelektronová, wolframu 503
 — —, závislost na teplotě 501
 energie proudu 39
 — tepelná 35
 — —, měření 362
Engler, stupeň 33, 302
 —, vazkoměr 304
 —, —, měření 313
 erg 28
Erk, teplotní křivka vazkosti 318
 etalon 137
 —, napětí 457
 — odporový 467
 — světelný 542
 —, svítivost 43
Eucken 392
 eudiometr 252, 447
 excés sférický 94
 extinkce, koeficient molekulový 559
 extrapolace 140

F

Fabry 26
 faktor redukční staničního tlakoměru 158
 — — tangentové busoly 441
 farad 38
Faraday, zákon elektrolytický 420
 — — indukční 41, 421
Fayolle [48] 228
 fáze 332
 —, zpoždění 422
Fizeau 352
Florisson 286
 fon 348
Fortin, tlakoměr 157
 —, —, měření 161
 fotočlánek hradlový 548
 — — měděný 548
 — — selenový 549
 — plynový 548
 — s anodou uprostřed 548
 — s kathodou uprostřed 548
 — s přední stěnou 548
 — se zadní stěnou 548
 — vakuový 547
 fotometr, viz světloměr
Fraunhofer, čáry 562
Freyer 334
 frekvence, viz kmitočet
 funkce chyb 68

G

gal 281
Galilei 180
Galton, binomický přístroj 56
 —, píšťala 327

- galvanoměr balistický 442
 — —, měření krátkých dob 155
 —, graduace 450
 —, konstanta balistická 443
 — ručkový 444
 — s měřicí cívkou *D:prez-D'Arsonvalův* 441
 — stupnicový *Zeiss* 444
 — thermoelektrický 491
 — zroátkový 441
 — — *Multiplex* 444
 gauss 40
Gauss 88, 204, 506
 —, metoda 204
 — —, hor. složka zemského pole mag. 513
 — —, měření magnetisace 511
 —, nitkový prostor 518
 —, okulár 147, 513
 —, poloha 506, 507
 —, postup 89
 —, soustava měř 24, 31
Gay-Lussac, tlakoměr 156
 —, —, měření 160
Geissler, výbojka 353, 561
 generátor střídavého proudu 489
 — tónový 328
 — zvukový 325
 — — elektrický 328
 — — elektromechanický 329
 — — elektronkový 328
 — — *Hartmannův* 327
 — — krystalový, piezoelektrický 328
 — — magnetostrikční 329
 — — mechanický 325, 327
Gerdien 433
Giorgi 43
Glan-Thomson, hranol 569
Goldbach V. 307
Goldschmidt 392
 goniometr (spektrometr) 531
 grad 28
 gradace desky 546
 — —, křivka gradační 546
 gradient rychlosti 301
 graduace galvanoměru 450
 — rtuťového teploměru 175
 — thermočláнку 176
 gram 28
Grant 186
- H**
- Hagen*, oprava 311
Harcourt, lampa 43
Hartmann, zvukový generátor 327
Hatschek, viskosimetr 305
Heaviside 45
Hejmer, svíčka HK 36, 542
Heisenberg, rovnice nepřesnosti 52
 henry 49
 hertz 34
Hertz 325
 hladina hlasitosti 347
 — — intensity 347
 hlukoměr 349
 hmota měrná (specifická) 257
 —, měření 180
 — molekulová 257, 269
 — — svítíplynu 270
 — — vzduchu 270
 — — z hutnosti 270
 — — ze snížení bodu mrazu 410
 — poměrná 265
 — prášková 395
 — setrvačná 180
 — těžká 180
 hodiny atomové 28
 —, chod 152
 — křemenné 27
 —, stav 152
 — terciové 152
 hodnota tepelná kaloriferu (thermoforu 372)
 — veličiny nejpravděpodobnější 70
 — vodní 363
Hoeppler, ultrathermostat 309
 —, vazkoměr 310
Hoje [43] 528
Hofmann, přístroj 448, 455, 456
Hooke, zákon 284, 292
Horák, Z. [7] 27, 28, 51, [56] 387, 402, [58] 134, [60] 101, [61] 110, [62] 395, [63] 306, [65] 295, [70] 58, 59, [80] 110
 —, metoda valené koule 296
 —, vzorec pro vzájemný koef. restituce 295
 HP 32
 hranol *Glanův-Thomsonův* 569
 — lomný úhel 531
 — *Nicolův* 568
 —, postavení 533
 — přímohledý 536
Hubbard 334, 337
 hustoměr 257
 hustota 32, 257
 — drobných tělísek pyknometrem 261
 — hydrostatickou methodou 260
 — kapalin *Mohrovými* vážkami 262
 — — ponorným tělískem 262
 — — pyknometrem 261
 — par pyknometrickou methodou (*Dumas*) 264
 — plynů methodou pyknometrickou 263
 — pravděpodobnosti 58
 — přímou methodou 259
 — světelného toku 557
 — svítíplynu 264
 — tepelného proudu 392
 — vzduchu 156, 162, 205
 — — vlhkého 163
 — závaží 205
 hutnost 257, 265
 — methodou výtlačovou 266
 — z doby výtoku 267
 — z hustoty 266
Huygens 281
 —, princip 564
 hygrometr, viz vlhkoměr

K

- kalibrace ampérmetru normálním ampérmetrem 452
 — byrety 256
 — miliampérmetru normálním voltmetrem 453
 — můstku 474
 — normálního voltmetru *Westonovým* článkem 462
 — šroubu 238
 — teploměrné trubice 175
 — trubice 231
 — voltmetru normálním voltmetrem 462
 kalorie 35
 kalorifer (thermofor) 372
 kalorimetr 362
 — elektrický 363
 — ledový *Bunsenův* 364
 —, oprava teploty 366
 — parní 364
 — *Regnaultův*, plechový 363, 372
 — směšovací 363
 — vodní 363
 kandela 36
 kapacita 38, 432
 — balistickou methodou 434
 — odporová 485
 —, srovnávání kapacit 434
 — tepelná 363
 — — kalorimetru 372
 kapaliny anomální 305
 kathetometr 238
 —, justace 239
Kelvin (viz též *Thomson*)
 —, můstek 470, 476
 —, —, měření malých odporů 476
 —, stupeň 28, 45
 —, váhy 426
Kepler, dalekohled hvězdářský 526
 kilogram 26, 45
 — atomový 51
 kilogramekvivalent chemický 420
 kilogramometr 32
 kilovolt 38
 kilowatt 40
 kilowatthodina 39
 — mezinárodní 43
Kirchhoff, zákony 422, 425
Kladivo [59] 97, 100
 klín absorpční 544
 klinometr kyvadlový, *Wattsův* 242
 — libelový 242
 kmitač 328
 kmitna 332
 kmitočet (frekvence) 34, 273, 325
 — absolutním měřením 331
 — charakteristický 547
 — chronografickou methodou 330
 — proudu 422
 —, relativní měření 331
 —, poměr kmitočetů strunákem 331
 —, rozdíl kmitočetů z počtu rázů 331
 — strunákem 331
 — ultrazvuku 325
 — z délky vlny a rychlosti zvuku 332
 koeficient molekulový extinkční 559
 — restituce 295
 — tepelné vodivosti 385
 — teplotní odporu můstkovou methodou 480
 — — roztažnosti 350
 — tření 299
 — viz též součinitel
Kohlrausch, odporová nádoba 484
Koch-Goss, registrační mikrofotometr 550
 koincidence 143
Kolářek, specifické teplo 374, 376
 kolečko integrující, měřicí 246
 kolimátor 531
 — stupnicový 516
 kolorimetr 560
 — *Duboscqův* 560
 komora tlaková 344
 komparátor 221, 354
 — interferenční 222
 — příčný (transversální) 221, 354
 — šroubový 224
 — ultramikrometrický 228
 — universální 227
 kompas 507
 kompensátor klínový, *Soleilův* 572
 koncentrace roztoku cukerného 571
 — — kolorimetrem 558
 — — molekulová (molární) 559, 410
 kondensátor absolutní 433
 — — válcový 433
 — deskový s ochranným prstěncem 433
 — methoda měření krátkých dob 156
 — měřicí, slídový 433
 —, náboj 420
 — normální otočný, vzduchový 433
 — rozkládací 439
 — stíněný
 kondensátor 524
König 345, 549
 —, vzorec 342
 konstanta ampérmetru 455
 — areometru 443
 — balistická 433
 — *Boltzmannova* 23, 502
 — *Curieova* 430, 431
 — dielektrická, viz permitivita
 — ebullioskopická 413
 — galvanoměru 444
 — gravitační 23, 180
 — kapilární 319
 — kryoskopická 410
 — mřížková 564
 — *Planckova* 23, 547
 — plynová 267, 410, 413
 — *Poissonova* 338, 378
 — —, stanovení konstant methodou nejmenších čtverců 99
 — universální 23

- konstrukce paraboly při ekvidistantních měřeních 118
 kontakt elektrostatický 227
 kontrola ampérmetru coulometrem na vodič 455
 — — *Hofmannovým* přístrojem 455
 — — normálním ampérmetrem 452
 — areometru 263
 — miliampérmetru normálním milivoltmetrem 453
 — normálního ampérmetru coulometrem na měď 454
 — — voltmetru *Westonovým* článkem 462
 — pipety 255
 — stopek 153, 154
 — vážení 201
 — voltmetru 461
 — — normálním voltmetrem 462
 — základních bodů teploměru 174
 — závaží 208
 koreláty 92
Küsters 222
 kostka světloměrná, fotometrická na stejnou světlost 543
 — —, — na stejný kontrast 543
 kroucení 291
 kroužek interferenční 566
 kruh dělený 241, 531
 — oční 529
Krupka, F. [56] 387, 402
 kružnice nulová 248
 křemen krystalový 222
 —, normál 572
 — tavený 222
 křivka citlivosti fotočlánku 550
 — — oka 550
 — — vah 211, 212
 — četnosti normální 59
 — dispersní 560
 — frekvenční 346
 — *Gaussova* 59
 — gradační 546
 — stejné hlasitosti 349
 — teplotní, *Erk* 318
 — vodící 246
 kříž nitkový 146, 532
Kundt, metoda (poměr rychlostí zvuku) 335, 340
 — trubice 333
 kůň 32
 kyv torzní 291
 kyvadlo fyzické, redukovaná délka 274
 — matematické 274
 — převratné, reversní 281
 — —, tíhové zrychlení 282
 kývání misek 195
 — tlumené 191, 442
- L**
- ladění okruhu 327
 ladička 326
 —, *Davis* 348
 — elektromagnetická 326
 — elektronková 326
 lambert 36
Lambert-Beer, zákon 559
Lambrecht, vlhkoměr 415
 lampa *Harcourtova* 43
 — značková 151
Langmuir [76] 503
Laplace, integrál 59
 —, vzorec 338
 lavice optická 515
Lebeděv, metoda můstková s elektrometrem 437
Legendre 88
Le Chatelier, thermočlánek 173
Lees, dvojdeskový přístroj 389
Lemon [55] 181
Lewis 23
Lichtenecker 438
 libela, citlivost 243, 244
 — komůrková, sklípková 241
 — kulová 241
 —, rektifikace libely 243
 — trubková 241
 librostopa 32
 limbus 531
Lindeck, kompenzační zapojení 174
Lippich, polarisátor 569
List [79] 442
 litr 26, 34, 250
 litratmosféra 34
 lm 36
 lom, index lomu světla 535
 —, — — refraktometrem 541
 —, — — spektrometrem 537
 —, *Snellův* zákon 537, 541
Lorentz, soustava měř 24
 lumen 36
Lummer-Brodhun, světloměr 544
 lupa (okulár), zvětšení 146, 523
 — —, — přímou metodou 524
Lutz 429
 lux(lx) 36
 luxoměr 558
 — *Trotterův* 558
- M**
- magnet, moment 505
 —, —, tangentovou busolou 509
 —, redukovaná délka 505
 magnetisace 505
 — *Gaussovou* metodou 511
 magnetismus, magnetické množství 29, 30, 40
 —, pole zemské 513
 magnetoměr astatický 506
 — jednoduchý 505
 magnetometr 505
 magnetostrikce, jev 329
 —, zvukový generátor 329
Malikov, R. S. [15] 81
Mance, metoda 478

- manganin 467
Martens (fotometr) 549
 maxwell 40
Maxwell 30, 427
Mendělejev, metoda 204
 mensura 250
 metoda *Abbeova* 522
 — absolutní (nezávislá) 137
 — —, indukčnost 492
 — —, roztažnost pevných látek 354
 — —, vzájemná indukčnost 495
 — balistická 434
 — *Besselova* 520, 521
 — *Bordova* 204
 — *Bunsenova* 270
 — *Clément-Desormesova* 379
 — *Despretzova* 399
 — *Dumasova* 264
 — dvojího vážení 204, 260
 — dynamická 292
 — —, magnetický moment 508
 — *Fitchova* 398
 — *Gaussova* 204
 — —, hor. složka zem. pole mag. 513
 — —, magnetisace 511
 — grafická vyrovnání 115
 — hydrostatická 253
 — —, hustota 260
 — chronografická, kmitočet 330
 — interferenční, vlnová délka zvuku 337
 — interpolační 139
 — —, vážení 196
 — kapková, povrchové napětí 324
 — kompenzační 138, 470, 475
 — —, elektromotorická síla 464
 — —, magnetický moment 509
 — —, měrná vodivost elektrolytů 487
 — —, napětí 461
 — —, odpor 471, 475
 — —, technickým můstkem 475
 — kondensátorová, měření krátkých dob 156
 — krajních poloh 529
 — *Kundtova*, poměr rychlostí zvuku 335, 340
 — *Manceova* 478
 — *Mendělejevova* 204
 — *Meyerova* 266, 270
 — *Michelsonova* 224
 — momentová 99, 104
 — můstková 480
 — —, indukčnost 493
 — —, měrná vodivost elektrolytů 486
 — — s elektrometrem (*Lebeděv*) 437
 — — se stejnosměrným proudem 435
 — — se střídavým proudem 434
 — — vlastní, odpor 471
 — — vnitřní odpor článku 478
 — — *Wheatstonova* 473
 — nejmenších čtverců 87, 88, 92
 — —, stanovení konstant 99
 — nejmenší odchylky 537
 — nepřímá 137
 — —, plocha 248
 — — nezávislá (absolutní) 137
 — — nulová 138
 — — omezovací 140, 141
 — —, měření periody 275
 — — otáčivého výřezu 544
 — — postupná 140, 249, 336
 — —, délka zvukové vlny 336
 — —, doba kyvu 273
 — — přehled method 137
 — — přehlušení 348
 — — přímá 93, 137, 461
 — —, hustota 259
 — —, moment setrvačnosti 276
 — —, napětí proudu 461
 — —, objem 252
 — —, odpor 471
 — —, povrchové napětí 320
 — —, zvětšení dalekohledu 527
 — —, zvětšení drobnohledu 525
 — —, zvětšení lupy, okuláru 524
 — pyknometrická 254
 — —, hustota plynů 263
 — rázu, kmitočet 330
 — registrační, oscilografická, kmitočet 330
 — relativní, roztažnost pevných látek 353
 — rotujícího sektoru 544
 — skupinová, 106, 109, 111
 — spojených trubíc 361
 — srovnávací 137, 181
 — —, napětí proudu 461
 — — relativní 137
 — —, vlastní indukčnost 492
 — —, vzájemná indukčnost 495
 — —, zvuk 348
 — stálého zatížení 205, 260
 — statická, magnetický moment 506
 — —, modul pružnosti ve smyku 292
 — *Stokesova*, viskozita 318
 — substituční 138
 — —, odpor 471, 472
 — tárovací 204, 260
 — *Thomsonova* 476
 — topného drátu 297
 — valené koule 296, 298
 — vyrovnávací 138
 — výtlačková, hutnost 266
 — zprostředkujících měření 92
 — zrcátková 149
 — zrcátková, modul pružnosti 286
 — —, roztažnost tyčí 354
 — —, úhly 242
 — —, výstup šroubu 237
 metr 25, 31, 45
Meyer 266, 342
 —, metoda 266
 měrka, absolutní měření 224
 — koncová *Johansonova* 222
 měření 21
 — definice 22
 — fotočlánkem 552
 —, praktické pokyny 177
 —, příprava měření 178

- měření, váha jednoho měření 96
 —, vyrovnání měření různé váhy 95
 — — závislých měření 92
 —, výsledek nejpravděpodobnější 67
 —, základní pravidla 178
 měřítka čárková 221
 — dotykové, viz posuvné
 — kalibrové, viz posuvné
 — koncové 222
 — kontaktní, viz posuvné
 — normální 221
 — pásové 221
 — posuvné (posuvka) 224
 — tyčové 221
 — zrcadlové 231, 323
Michelson, interferometr 565, 567
 — metoda 224
 mikroampérmetr 445
 mikrobar 34
 mikrofon, cejchování 330, 344
 — kapacitní, kondensátorový 344
 —, nízkofrekvenční zapojení 346
 —, síla zvuku 346
 mikrofotometr 550
 — registrační (*Koch-Goss*) 550
 mikrometr 224
 — okulární (vláknový) 148
 — *Zeissův* 148
 mikron 563
 mikroskop, viz drobnohled
 mikrováhy 186
 — torsní, *Nernstovy* 186
 miliampérmetr 445
 —, kalibrace normálním milivoltmetrem 453
 —, kontrola normálním milivoltmetrem 453
 milimikron 563
 milivoltmetr 458
 míra přesnosti 59
 množství (kvantita) 21
 — elektrické 430
 — tepla 35
 modul penetrační 296
 — pružnosti 33, 284
 — —, dynamická metoda 294
 — — objemový 338
 — —, statická metoda 292
 — — ve smyku 294
 — —, z protažení 286
 — —, z průběhu tyče 288
 — —, z rychlosti zvuku 290
 — *Youngův* (v tahu) 284
Mohr, vážky 259, 262
 mohutnost optická čočky 515
Moirve, poučka 193
 moment magnetický 40, 505
 — magnetu tangentovou busolou 509
 — setrvačnosti 33, 276
 — — přímou metodou 276
 — — z doby kyvu 278
 — — z torsních kmitů 279
 monochord (strunák) 325
Morrin 299
 mřížka ohybová 564
 — —, konstanta 564
 — — na odraz, *Rowland* 565
 — — na průhled 563
 — řidičí 498
 můstek dvojitý, *Thomsonův-Kelvinův* 425, 470, 476
 — jednoduchý, *Wheatstonův* 568, 569
 — — kalibrace 474
 — — kapacitní 435, 485
 — —, metody měřící 471, 473, 480
 — — odporový 468
 — — pravitkový 468
 — — technický, dekadický 469
 — — válcový 469
 — *Wheatstonův* s přímým drátem 435, 468
 — — s šroubovým drátem 435, 469
 — — zapojení 423
Müller 335
- N
- náboj 30, 430
 — balistickým galvanoměrem 442
 — elektrometrem 431
 — kondensátoru 420
 nádoba kalibrovaná, měrná, odměrná 250
 nádobka odporová 484
 — — s pevnými elektrodami 484
 — — s posuvnými elektrodami 484
 napětí (elektrické) 38
 —, ampérmetrem 461
 —, efektivní (účinné) 488
 —, etalon, standard napětí 457
 — fotoelektrické 547
 — kolmé, normální 284
 — ohmické (*Ohmovo*) 420, 457
 — povrchové 319
 — — kapkovou metodou 324
 — — metodou přímou 320
 — — z kapilárního vzestupu 322
 — proudu 457
 — regulace 461
 — svorkové 463
 — tečné 301
 — термоelektrické 171
 — vodních par 583
 nasycení 497
 nekonečno umělé 516
Nernst 181
 —, torsní mikrováhy 186
 nerovnoramennost vah 201
 newton 45, 47
 — atomový 51
Newton, druhý pohybový zákon 180
 —, gravitační zákon 180
 nikol, *Nicolův* hranol 568
 nonius (vernier) 144, 145
 normál 137
 — indukčnosti vzájemné 495
 — křemenný 572

normál světelný 542
 — svítivosti 43
 — vlnový 565
 — — základní 565
Nusselt 399
Nu. l. k rič, chronograf 155

O

objektiv 524
 objem 34, 250
 — methodou přímou 252
 — vážením 253
 obor regulační 482
 obraz neskutečný, zdánlivý 521
 obsah plošný 244
 — — průřezu trubice 249
 — — tenké vrstvy 249
 — — výpočtem 248
 odchylka kladná 79
 — od průměru 72, 73
 odpor 38, 466, 467
 — galvanoměru *Thomsonovou* methodou 476
 — klikový 468
 — kolíkový 467
 — malý, dvojitým můstkem *Kelvinovým* 476
 — methodou kompenzační 470
 — — můstkovou (vlastní) 473
 — — přímou 471
 — — substituční 472
 — mezní 442
 — měrný pevných vodičů 478
 — normální 467
 — ohmický 466
 — posuvný 468
 — předřadný 460
 — regulační 468
 — technickým můstkem 475
 — teplotní součinitel 479
 — vnitřní článku 477, 478
 — — triody 500
 — — — graficky 500
 — — zdánlivý 422
 — — zvukový 345
 — — žárovkový 468
 — — železný 482
 oersted 40
 ohm (absolutní) 39
 — mezinárodní 42, 467
Ohm, napětí (ohmické) 466
 — zákon 453
 ohmmetr 469
 ohnisko čočky, ohnisková dálka 515
 — — tenké rozptylky 521, 522
 — — — spojky 519, 520
 — — tlustých čoček 522
 ohyb světelných vln 338
 okulár 524
 — *Gaussův* 147, 531
 — *Huygensův* 147
 — lupa, zvětšení 523

— — — přímou methodou 524
 — *Ramsdenův* 147, 148
 olej ricinový, vazkost 317
 operace měřící, elementární 143
 oprava absolutní (závaží) 209
 — bodu mrazu 174
 — bodu varu 175
 — *Hagenova* 311
 — na kapilaritu rtuti 159
 — na výškový rozdíl 201
 — na vztlak 205
 — pipety 255
 — relativní (závaží) 209
 — rtuťového teploměru 168
 — teploty kalorimetru 366
 — tlaku barom. na 0 °C 159
 — vážení 201
 — vlhkoměru 416, 417
 — závaží 209
 oscilace mechanické 328
 oscilátor (kmitač) 328
 — elektronkový 490
 oscilografické metody (kmitočet) 330
Ostwald, kapilární vazkoměr 304
 osvětlení 36, 557
 ověření výsledku 179

P

Palm 427
 páry, hustota pyknometrickou methodou (*Dumas*) 264
 —, hutnost 265
 —, molekulová hmota 269
Pérard 25, 165, 167, 458
 —, interferometr 224, 353
 perioda 273
 — methodou omezovací 275
 — — postupnou 273
 permitivita 438
Perot 26
Petit 238
Pierce 329
 —, zapojení 337
 piezoelektrina, destička *Curieova* 430, 431
 —, generátor 328
Pijk 397
 pikofarad 437
 pipeta 251
 —, kontrola pipety 255
 —, oprava 255
 píšťala 327
 — *Galtonova* 327
Planck 23
 —, konstanta 23, 547
 —, vyzařovací zákon 164, 165, 174
 planimetr 245
 — kompenzační 248
 —, měření plochy 249
 — pólový (polární) 247
 — přímkový (lineární, vozíkový) 246
 planum 225
 plášť ochranný 362, 387

- plocha kulová, poloměr sférometrem 232
 — válcová, poloměr sférometrem 234
 plyny, hustota methodou pyknometrickou 263
 —, hutnost 265
 —, molekulová hmota 269
 —, specifická tepla, poměr 378
 počet vyrovnávací 87
 poddajnost 295
 pohyb harmonický 274
 — — tlumený 193
 poise 33, 302
Poiseuille, zákon 311
Poisson, konstanta 378
 —, poměr 296
 —, rovnice 378
 pokles kapilární 320
 pól magnetu 29, 40
 — planimetru 247
 polarimetr 568
 — polostínový 569
 polarisace, 568
 polarisátor *Lippich*'v 569
 — polostínový 569
 pole magnetické zemské 506
 — — —, horizontální intenzita 513
 — — —, horizont. intenzita *Gaussovou* methodou 513
 — — —, horizont, intenzita tangentovou busolou 513
 — zorné dalkohledu 529
 poloha *Gaussova* 506, 507
 — nulová (vah) 189, 193, 195, 215, 217, 219
 — rovnovážná (vah) 189, 193, 196, 199, 200, 217, 219
 poloměr kapiláry vážením rtuti 231
 — — — z hustoty 231
 — kulové plochy sférometrem 232
 — setrvačnosti 276
 — válcové plochy sférometrem 234
 polychord 325
 poměr kmitočtů strunákem 331
 — *Poisson* 'v 296
 — specifických tepel plynů 378
 — zvukových rychlostí 340
 posuvka (měřítka posuvné) 224
 potenciál elektrostatický 426
 —, rozdíl 38, 426
 potenciometr 460
 — kompenzační 461, 463
 poučka *Moirrova* 193
Pouillet 155
 práce 34
 —, tepelný ekvivalent 362
 — výstupní 502
 práh zvukový 348
 pravděpodobnost, hustota 58
 —, nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny 67
 —, pravděpodobná chyba 68
 pravidla základní o měření 178
 pravidlo logaritmické, použití 179
Priest, dilatometr interferenční 353
 princip grafického vyrovnání parabolou 116
 — *Huygensův* 564
 prodloužení poměrné 284
 prostor měření 221
 — nitkový *Gaussův* 518
 proud (elektrický) 439
 — efektivní 440, 488
 —, frekvence (kmitočet) 422, 489
 — harmonický, sinový 488
 —, regulace 482
 — střídavý 488
 — sytný, fotoelektrický 547
 — sytný nasycený 503
 — vířivý 442
 proudění laminární, nevírové 303
 — ustálené 342
 proudoměr tepelný (*Schmidt*' 392
 proužek interferenční 223, 566
 průměr aritmetický, přesnost 71
 — váhový 96
 — válce (sférometrem) 230
 — válečku 229
 průnik triody 500
 pružnost 284
 — dynamická 295
 — — desek 297
 —, modul pružnosti 284
 — —, — — v tahu 234
 —, — — ve smyku 291
 —, —, z poměrného prodloužení drátu 286
 —, —, z průhybu tyče 288
 —, —, z rychlosti zvuku 290
 přehlušení, hlasitost methodou přehlušení 348
 přechlazení 409
 přesnost aritmetického průměru 71
 —, měření jednotkové váhy 96
 —, míra přesnosti 59
 — vah 210
 přestup tepla, součinitel přestupu tepla 399
 převod na stejnou váhu 98
 — tlaku na 0 °C 159
 — vážení na vakuu 205
 přezmen 182
 přímka *Richardsonova* 502
 příprava měření 178
 přístroj *Beckmann* v, k určení bodu tuhnutí 408
 — —, — — — varu 412
 — *Callendarův* 365
 — *Clément-Desormesův* 379
 — čtyřkyvadlový 281
 — *Galtonův* binomický 54
 — *Du Noüyho* 320
 — dvojdeskový 389
 — *Edelmann* v 351
 — *Fitch* v 389
 — *Hofmann* 'v 448, 455, 456
 — *Jakobův* 387
 — kontrolní 446
 — nulový 445

přístroj optický čtecí 146
 — pneumatický 228
 — polarisační jednoduchý 569
 — proudoměrný 445
 — *Rubensův* 364
 — *Searleův* 365
 — technický 387
 — válcový 390
 přívazek 190, 196
 psychrometr aspirační *Assmannův* 416
 — s vlhkým teploměrem 416
Pulfrich 352
 pupila 528
 pyknometr 251
 —, hustota drobných tělísek 261
 —, — kapalin 261
 pyknometrická metoda 254
 — —, hustota plynů 265
 pyrometr 173

Q

Quincke, trubice 333, 337

R

Radakovič 156
 radián 34
 radiometr *Baumgardtův* 343
 — *Boyleův* 343
 radius gyrační 276
Ramsden 147, 527
 —, dynamometr 527
 —, okulár 147, 526
Raoult, zákony 413
Rayleigh, destička 342
 —, —, síla zvuku 345
 ráz těles 295
 rázy 331
 —, rozdíl blízkých kmitočtů 331
 redukce na stejnou váhu 98
 — tlaku na 0 °C 159
 — vážení na vakuum 205
Redwood, vazkoměr 305
 —, vteřinové číslo *R* 303, 305
 refraktometr dvojhnanolový 536, 571
 — polokulový (*Abbe*) 535
 — ponorný 536
Regnault, kalorimetr 363, 372
 regulace napětí 461
 — proudu 482
 — teploty 170
 rektifikace libely 243
 reostat 461, 463, 467
 — klikový 468
 — kompenzační 461
 — žárovkový 468
 resonance 332
 rezonátor otevřený 332, 340
 — uzavřený 332, 340
Reynolds, číslo 303
Richardson 345
 —, přímka 502
Richardson-Dushman, vzorec 502

Ritchie 556
Roentgen 431
 rovnice *Barkhausenova* 500
 — *Biotova* 403
 — čočková 517
 — *Einsteinova* 547
 — *Heisenbergova* 52
 — normální 89, 100, 102
 — odchytkové 101, 103, 104, 111
 — osobní 53
 — *Poissonova* 578
 rovnováha (vah), poloha 189, 193, 196, 199, 200, 217, 219
Rowland (mřížka) 565
 rozbor spektrální 562
 rozdíl kmitočtů z počtu rázů 331
 — potenciální 426
 — výšek 238
 — — barometrem 240
 — — kathetometrem 240
 — — nivelačním strojem 240
 rozkryv nulový 274, 283
 rozložení chyb 62
 — — nejpravděpodobnější 63
 — — normální 70
 rozměr fyzikální 24
 rozptylka 517
 —, ohnisková délka 521, 522
 roztažnost 36
 — délková 350
 — kapalin 357
 — — kapilárním dilatometrem 359
 — — pravá metodou spoj. trubice 361
 — — pyknometrem 358
 — metodou zroátkovou 354
 — objemová 350
 — — vážením 356
 — pevných látek 350
 — pravá 351
 — průměrná 351
 — relativní, zdánlivá 351
 — teplotní 36
 — — pevných látek 350
 — zdánlivá 351
Rubens, přístroj 364
Ruhmkorff, transformátor 489
 rychlost 33
 — efektivní (kmitová) 344
 — mezní 318
 —, spád (gradient) rychlostní 301
 — světla 23
 — úhlová 273
 — zvuku 338
 — —, kmitočet 332
 — —, modul pružnosti tyče 290
 — —, poměr rychlosti zvuku 340
 — — srovnáním vlnových délek 340
 — — v plynech a kapalinách 340
 — — v tyči měřením kmitočtu 340

Ř

řád maxima 564
 — proužku 223

S

- sada 138
 — indukčních cívek 492
 — ladiček 326
 — závaží 186
 sacharimetr 572
 samoindukčnost, viz indukčnost 491
 Saybolt, vazkoměr 305
 — vteřinové číslo 303, 305
 Searle, přístroj 365
 Seignett, sůl 328
 setrvačnost, moment setrv., viz moment
 —, poloměr setrvačnosti 276
 —, zákon 299
 sférometr 225
 —, poloměr kulové plochy 232
 —, — válcové plochy 234
 Shackleton 492
 shunt 445, 450
 Schmidt, tepelný proudoměr 392
 Schriever, setrvačné váhy 181
 síla 34
 — elektromotorická 38, 463
 — — methodou kompenzační (potenciometrem) 464
 — magnetická 40
 — —, horizont. složka 513
 — zvuku 35, 341
 — — absolutní metoda 345
 — — kapacitním mikrofonem 346
 — — Rayleighovou destičkou 345
 — — základní 347
 siréna 327
 síť střídavého proudu 489
 sklonoměr kyvadlový (*Wattsův*) 242
 — libelový 242
 skok teplotní 396
 složení vzduchu atmosférické 578
 Snell, zákon lomu 537, 541
 Soleil, klínový kompensátor 572
 Solex, pneumatický měřicí přístroj 228
 sonometr (strunák) 325
 součinitel busoly převodní 441
 — délkové teplotní roztažnosti 350
 — dynamometru převodní 490
 — objemové teplotní roztažnosti 350, 357
 — přestupu tepla 399
 — teplotní odporu 479, 480
 — tření smykového 299
 — — — kinetický 299
 — — — kinetický sklonným tribometrem 301
 — — — — vodorovným tribometrem 300
 — — — — statický 299
 soustava měr absolutní 24, 25
 — — — — elektromagnetická 24, 30
 — — — — elektrostatická 24, 30
 — — — — elektrotechnická 24
 — — — — *Gaussova* 24, 31
 — — — — *Giorgiho* 43
 — — — — *Lorentzova* 24
 — — — — MKS 24, 43
 — — — — praktická 24, 33
 — — — — přirozená 23
 — — — — ryzí 23
 — — — — smíšená 24
 — — — — statická 31
 — — — — technická 24, 31
 — — — — *Weberova* 24
 — — optická 518
 spád rychlostní 301
 — teplotní 385
 spektrograf 560
 spektrometr (goniometr) 531
 —, urovnání (justace) 532
 spektroskop *Bunsenův* 560
 spektrum absorpční 562
 — akustické 349
 — emisní 562
 spojení bočné (vedle sebe, paralelně, souběžně) 422, 423
 — kvadrantové 428
 — řadové (za sebou, v serii) 422, 423
 spojka 517
 — ohnisková, délka tenké spojky 519, 520
 spoluznění 332
 spotřeba měrná (žárovky) 556
 Sprengel, pyknometr 251
 srážec 383
 stáčivost měrná roztoku 568
 — optická 568
 — polostínovým polarimetrem 570
Stahlane 397
 standard 137
 — napětí 457
 stav hodin 152
 Steele 186
 Steiner, věta 276, 278
 stellit 222
 stílb 36
 stok 33, 302
 Stokes 318
 —, měření vazkosti 318
 —, vazkoměr 310
 —, vzorec 310
 stopky 152
 —, kontrola 153, 154
 — registrační 152
Stránský [67] 490, 497
 strmost triody 500
 stroj nivelační 239
Strömberg 186
 strunák 325
 — poměr krmitočtů 331
 stříh (smyková deformace) 284
 stupeň *Baumého* 257
 — *Celsiův* 28, 163, 411
 — *Engleriův* 33, 302
 — *Kelvinův* 28, 45, 163
 stupnice cukernatosti mezinárodní 572
 — termodynamická 163
 — vodíková normální 164
 — zčernání 546
 sůl *Seignettova* 328
 světlo jednobarevné (monochromatické) 567

- světlo polarisované 568
 — sodíkové 536
 světloměr (fotometr) 542
 — kulový (*Ulbricht.v*) 555, 558
 — *Lummer v-Brodhu.ův* 544
 — objektivní 545
 — polarizační 549
 — s mléčným sklem (*Weberův*) 545
 — sektorový 544
 — spektrální 549
 — subjektivní, vizuální 543
 světlost trubice 230, 231
 — — kapilární 230
 svíčka *Hefnerova*, HK 36, 542
 — mezinárodní SI 36, 542
 — nová 36, 43
 svítivost, molekulová hmota 270
 svítivost 36, 541
 — etalon 43
 — hemisférická 557
 — průměrná sférická 555
 — světloměrem *Lummerovým-Brodhu-novým* 550
 — *Weberovým* fotometrem 551
 —, zdroje absolutním měřením 554
- Š
- šent (shunt) 445, 450
Šimonová-Čeřovská [57] 325
 šroub, kalibrace šroubu 238
 — mikrometrický 224
 — prázdný (mrtvý) chod 224
 — výstup 237
- T
- tabulka oprav vlhkoměru 416, 417
Talbot, zákon 544
 tání, bod tání čistých látek 381
 —, — — z průběhu teploty 408
 tára mikroskopu 148
 telefon 328
 teplo, ekvivalent práce tepelný 362
 —, — tepla mechanický 361
 — měrné 36, 371
 —, měření 362
 —, přestup 399
 — skupenské 380
 — — ledu 382
 — — tání 381, 382
 — — varu 383
 — — varu elektrickým kalorimetrem 384
 — — — kondensací 383
 —, součinitel přestupu 399
 — specifické (měrné) 36, 371
 — — kapalin kalorimetrem elektrickým 377
 — — — — směšovací 373
 — — — — vodním 376
 — — pevných látek směšovací kalorimetrem 375
 teploměr *Beckmannův* 168, 412
 — dvoukovový, bimetalický 170
 — kontaktní (rtuťový) 170
 — normální 168
 — odporový platinový 170
 — přestavný (metastatický) *Beckmannův* 168, 408, 412
 — rtuťový 167, 363
 — —, graduace 175
 — —, kalibrace trubice teploměrné 175
 — —, oprava 168
 — — spínací (kontaktní) 170
 — termoelektrický 166, 171
 — vodíkový 166
 teplota 36
 — absolutní 29, 163
 —, měření 163
 —, skok 396, 398
 —, spád 385
 těžiště optické 570
 theorie chyb 52
 — rovnoramenných vah 188
 thermočlánek 171
 —, graduace 176
 — *Le Chatelierův* (platinorhodium — platina) 173
 — měd-konstantan 173
 — nikl chrom-konstantan 173
 termodynamická stupnice 163
 termoelektrony, emise wolframu 503
 termoelektrina, ampérmetr 490
 —, článek 171
 —, galvanoměr 491
 —, teploměr 171
 thermofon 330
 thermofor (kalorifer) 372, 376
 thermogalvanoměr 491
 thermograf 170
 thermokříž 490
 thermostat 170
Thiesen 200
Thomson, elektrometr 426, 427
 —, metoda 476
 —, můstek 425, 470, 476
 —, vztah 327
 tíže, zrychlení 280
 —, — převratným kyvadlem 282
 tlak 39
 — efektivní (zvukové vlny) 341, 343
 — kapilární 159
 — vzduchu 156
 tlakoměr *Fortinův* 157
 — —, měření 161
 — *Gay-Lussac'v* 156
 — —, měření 160
 — normální 157
 — —, měření 161
 — staniční, variační 158
 — —, —, měření 161
 tloušťka destičky 229
 — tenké vrstvy 238
 tlumení, viz útlum
Todd 392
 tok indukční 421
 — světelný 36, 541, 555

tón, absolutní výška 325
 —, harmonický 326
 — referenční (srovnávací) 348
 tor 156
Torricelli 156
 transformátor *Ruhmkorffův* (induktor) 489
 tribometr sklonný 300
 — vodorovný 299
 trioda 498
 —, charakteristika anodová 497, 498
 —, — statická převodní 498, 499
 —, průnik 500
 —, strmost 500
 —, vnitřní odpor 500
Trotter, luxoměr 558
 trubice *Kundtova* 333
 — měrná 252
 — odměrná 447
 —, *uincského* 333, 337
 tryska měřicí 228
 tření, koeficient 299
 —, úhel tření (torný) 301
 — vnitřní 301
 —, zákon *Coulombův* 299
 tuhnutí, bod tuhnutí 407
 —, — — přechlazením 409
 —, —, snížení přístrojem *Beckmanno-*
vým 410
 —, — — z průběhu teploty 408
 turbulence 303

U

Ubbelohde, vazkoměr 312
 —, —, měření 312
 účinník 489
 účinnost světelná 556
 úhel 34, 240
 — lomný hranolu 531
 —, měření 240
 —, — metodou zrcátkovou 242
 — mezní 535
 — polostínový 569
 — prostorový 541
 — — zrcadlením nitk. kříže 534
 — — — štěrbinou 533
 — torný (tření) 301
 — zorný 523
 úhломěr 241
 —, měření 243
 úhly v trojúhelníku 243
 ukazatel optický 146
 — ručkový 227
 úkon prvotní měřicí 143
Ulbricht, kulový světloměr 555, 558
 ultraakustika 325
 ultrathermostat *Hoepplerův* 309
 ultrazvuk 325
 — interferometr ultrazvukový 333
 urovnání spektrometru 532
 ustálení proudění 342
 útlum aperiodický 192, 442, 460
 —, dekrement logaritmický 193
 — galvanoměru 442, 443
 — vah 192, 194, 197
 uzal, zvuk 332

V

váha jednotková 97
 — měrná, specifická 32, 257
 —, měření 96
 — objemová 257
 — průměru 96
 váhy 180
 — analytické 183
 — — brzdění, aperiodické 185, 219
 — — nebrzděné 183, 217
 — centesimalní 182
 —, citlivost 190, 210
 — decimální 182
 — hydrostatické 186
 — *Kelvinovy* 426
 — lékárnické 182, 214
 — listovní 182
 — mikrováhy 186
 — nerovnoramenné 182
 —, nerovnoramennost 201
 — pákové 181
 — pérové 181
 — praktikantské 207, 214
 — proudové 47
 — pružné 181
 —, přesnost 210
 — rovnoramenné 182, 188
 — setrvačné 181
 — specifické 257
 —, theorie 188
 — torsní 181
 —, útlum 194, 197
 val potenciální 502
 válec měrný 260
 válec, poloměr sférometrem 234
van't Hoff, vzorec 410
 var, bod varu 411
 —, — — normální 411
 —, — —, zvýšení *Beckmannovým* přístro-
 jem 413
 variátor 482
 variometr 492
 vazkoměr 303
 — *Arrheniův* kapilární 303
 — —, měření 311
 — *Englerův* 304
 — —, měření 313
 — *Hoepplerův* 310
 — kapilární 303
 — — *Ostwaldův* 304
 — — —, měření 311
 — — *Ubbelohdův* 304
 — *Redwoodův* 305
 — rotační 303, 305
 — *Sayboltův* 305
 — *Stokesův* 310
 — technický 304
 — —, absolutní měření 314
 — — rotační 306
 — — tělískový 303, 310

- vazkoměr technický torsní 305
 — — výtokový 303
 vazkost 301
 — dynamická 33, 302
 — kinematická 33, 302
 — poměrná 303, 311
 — ricinového oleje 317
 — *Stokesovou* metodou 318
 —, teplotní křivka *Erkova* 317
 vážení absolutní 203
 —, metoda interpolační 196
 —, — stálého zatížení 205
 —, — tárovačí 204
 —, oprava na vztlak 205
 —, opravy a kontroly 201
 —, postup 214
 — relativní 203, 214
 —, základy 195
 vážky *Mohrovy* 257, 259
 — —, měření 262
 vernier (nonius) 144, 145
 věta *Steinerova* 276
Vidi 161
 vír 303
 viskosimetr, viz vazkoměr 303
 viskozita, viz vazkost
 vlhkoměr (hygrometr, psychrometr)
 — aspirační 416
 — *Asemannův* 416
 — *Daniellův* 415
 — *Lambrechův* 415
 — registrační 416
 — rosný 415
 — s vlhkým teploměrem 416
 — samopisný 416
 — vlasový 416
 vlhkost vzduchu 414
 — — absolutní (prostá) 415, 417
 — — relativní (poměrná) 418, 419
 vlna zvuková, délka 290
 — —, kmitočet 325
 vlnočet 563
 vodivost měrná (specifická) 39, 478
 — — elektrolytů 484
 — — tepelná 36, 385
 — — kapalin 398
 — — kovů 387
 — — — technickým přístrojem 402
 — — pevných izolátorů 394, 395
 — — plynů 392
 — —, srovnávání 398
 — — sypkých látek 395
 — teplotní 373, 386
 vodováha, viz libela
Vogel 302
 —, vzorec 313
Vojtěch 192, 274
 volt (absolutní) 38, 457
 — mezinárodní 42, 457
 voltmetr viz coulometr
 voltampér 40
 voltmetr 458, 463
 —, kalibrace norm. voltmetrem 462
 —, kontrola 461
 — normální 460
 — normální, kalibrace *Westonovým* článkem 462
 — pro střídavé napětí 491
 —, zapojení 491
 volumetr 252
 vteřina 27, 45
 — atomová 41
 výbojka (*Geisslerova*) 353, 561
 výchylna balistická 432, 443
 výkon 34
 — proudů stejnosměrného 40, 465
 — — střídavého, střední 488
 výkyvy 193, 197
 vypařování 381
 vypuklost 517
 vyrovnání lineární závislosti a úměrnosti 109
 — metodou nejmenších čtverců 92
 — — momentovou 99, 104
 — měření ekvidistantních (skupinové) 114
 — — nepřímých 87
 — — — přímkové závislosti (skupinové) 110
 — — — přímých 87
 — — — různé váhy 95
 — — — závislých 92, 87
 — — zprostředkujících 87, 88
 — parabolou v obojím případě, grafické 122
 — úhlů v trojúhelníku 94, 98
 — úměrnosti a lineární závislosti přímkou, grafické 115
 vysílač 490
 výsledek, číselné stanovení 76
 —, hodnota nejpravděpodobnější 67
 —, odvození 179
 —, ověření 179
 výstup šroubu 237
 výška tónu, prostá 325
 —, rozdílné výškové 238
 — — barometrem 240
 — — kathetometrem 240
 — — nivelačním strojem 240
 výtok plynu (měření hutnosti) 267
 vyzařovač posuvný 400
 vzdálenost konvenční 523
 vzduch, atmosférické složení 578
 —, hmota molekulová 270
 —, hustota 162, 205
 —, tlak a hustota 156
 — vlhký, hustota 163, 207
 vzestup kapilární 320
 — — měření povrchového napětí 321
 vzorec interpolační 139
 — *Königův* 342
 — *Laplaceův* 338
 — pro vzájemný koeficient restituace 295
 — *Richardson-Dushmanův* 502
 — *Stokesův* 310
 — *van't Hoffův* 410
 — *Vogelův* 313
 vzpruživost 295

vzpruživost koulí 298
vztah *Barkhausenův* 500
— *Thomsonův* 327
— základní (elektřina) 420

W

Waetzmann 345
Wagner, kladívko 489
Watt 465
watt (absolutní) 35, 40
— mezinárodní 43
wattmetr pro stejnosměrný proud 466
— pro střídavý proud 491
—, zapojení 491
Watts, klinometr 242
weber 41
Weber, soustava měř 24
—, světloměr, fotometr 545, 558
Wehnelt, přerušovač 489
Wente, mikrofon 344
Weston, ampérmetr 445
—, normální články kadmiové 457
Wheatstone, metoda 473
—, můstek 423, 435, 468
Wien-Harms [20] 306
Wollaston, drát 428, 429
Wulff 428, 429

Y

Young, modul 284

Z

zajištění (aretace) vah 183
zákon *Archimedův* 253
— *Avogadrův* 265
— *binomický* 54
— *Biot-Savartův* 29, 41, 420
— *Boyle-Gay-Lussacův* 162
— *Boyle-Mariottův* 378
— *Bunsenův* 268
— *Coulombův* 29
— — o tření 299
— četnosti normální 54
— *Daltonův* 162, 267
— *Faradayův* elektrolytický 420
— — indukční 41, 421
— *Gaussův* 59
— *Hookův* 284, 292
— chyby normální 59
— indukční (*Faradayův*) 431
— *Joulův* 363, 420
— *Lambertův-Beerův* 559
— *Laplaceův* 59
— *Newtonův* druhý pohybový 180
— — gravitační 180
— *Ohmův* 420
— *Planckův* (vyzařovací) 164, 165, 174
— pohybový pro tuhé těleso otáčivé 191
— *Poiseuillův* 311
— *Raoultův* 413, 455
— setrvačnosti 299
— *Snellův* 537, 541

— *Talbotův* 544
zákony empirické 124
— —, metoda grafická 124
— — —, momentová 104
— *Kirchhoffovy* 422
zapojení ampérmetru 491
— *Lindeckovo* kompenzační 172
— mikrofonu nízkofrekvenční 346
— můstkové 423
— *Pierceovo* 337
— voltmetru 491
— wattmetru 491
— zpětnovazební 490
zatížení vah 190, 211, 212
závaží 180, 186
— analytická 187
—, hustota 205
—, kontrola 208
— normální 208
— správné 201, 216, 218, 220
zázněje (rázy) 331
zdroj proudu stejnosměrného 449
— zvuku 325
zjev, viz jev
značka čtecí 146
—, lampa značková 151
značky schematické (elektřina) 420
zpoždění fázové 422, 489
zrychlení 28, 33
— normální (třhové) 31, 280
— třhové 280
— — převratným kyvadlem 282
— úhlové 191
ztráty tepelné 366
zvětšení dalekohledu 526
— — afokálního 528
— — přímou metodou 527
— drobnohledu 524
— — přímou metodou 525
— lupy, okuláru 523
— — přímou metodou 524
zvuk, délka vlny nadzvukové interferometrem 337
—, — — postupnou metodou 336
—, — — resonátorem 335
—, — — v plynech *Kundtovou* trubicí 335
—, generátory 325
—, hladina hlasitosti 347
—, hlasitost 347
—, kmity 325, 330
—, odpor zvukový 345
—, práh zvukový 348
—, rychlost v plynech a kapalinách 339
—, — v tyči 340
—, síla 341
—, — absolutně 345
—, — kapacitním mikrofonem 346
—, — *Rayleighovou* destičkou 395
—, — základní zvuku 347

Ž

• žároměr optický 137

Prof. RNDr Zdeněk Horák
P R A K T I C K Á F Y S I K A

DT 53

Vazbu navrhl Václav Truhlář — Grafická úprava a technická redakce: Vlasta Vítová — Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, n. p., Praha II, Spálená 51 v únoru 1958 jako svou 2644. publikaci, typové číslo L 11-B3-5-II/1151 v řadě theoretické literatury — 624 strany, 390 obrázků, 43 tabulek — Odpovědný redaktor: Karel Husárek — Jazyková úprava a tiskové korektury: Fr. Zierisová — Z nové sazby písmem Latinka vytiskla Práce, n. p., Praha — Formát papíru 70×100 cm — 59,62 AA, 63,23 VA — 38869/55/SV3 — D561284 — Sazba 16. 11. 1956, tisk 18. 12. 1957
10 200 výtisků — Vydání třetí, přepracované

301 03-5

Cena váz. 54,50 Kčs

56/III-4 (B3)

Publikace je určena pracovníkům ve výzkumu a provozních laboratořích, posluchačům vysokých škol

RNDr. ZDENĚK HORÁK,
profesor Českého vysokého
učení technického v Praze

PRAKTICKÁ FYSIKA

Tato kniha je určena především posluchačům Českého vysokého učení technického, jímž má být theoretickou učebnicí i praktickým návodem k laboratorním cvičením. Současně má širší poslání: být základní příručkou praktické fyziky, kterou dosud naše fyzikální literatura postrádá.

Část první (Theorie fyzikálních měření) pojednává o fyzikálních jednotkách a jejich soustavách, o měřicích chybách a vyrovnání měření. Při základních statistických úvahách teorie chyb nespokojil se autor povrchností, běžnou v učebnicích praktické fyziky; úvahy tyto bývají pro začátečníka nesnadné a jejich znalost je prospěšná v mnohých oborech moderní fyziky. Kromě přesné metody nejmenších čtverců zdůrazňuje též přibližné metody vyrovnávací. Domnívá se totiž, že je lépe užít jednoduché metody méně přesné než prostě neužít pracné metody přesnější, jak se často děje.

Část druhá (Základní měření) obsahuje přehled měřicích metod a základních měřicích úkonů, jakož i výklad o měření času, teploty, hmoty, prostoru a hustoty. Zvláštní pozornost je věnována metodám přesného vážení pro jejich důležitost a pedagogickou hodnotu. V příslušné stati podává elementární teorii vah a podrobný praktický návod k vážení.

Část třetí (Měřicí přístroje a metody) je nejobširnější. Je rozdělena v pět statí: Mechaniku, Akustiku, Termiku, Elektřinu a magnetismus a Optiku, v nichž jsou uvedeny definice a jednotky nejdůležitějších fyzikálních veličin, po-

psány hlavní přístroje a vloženy měřicí metody. Základní metody (zvláště ty, které se prakticky provádějí ve fyzikálních cvičeních na Českém vysokém učení technickém) jsou blíže osvětleny souhrnným výčtem měřicích potřeb a jednotlivých úkonů, po př. číselnými příklady měření provedených z valné části posluchači ve cvičné laboratoři ústavu technické fyziky.

Část čtvrtá (Tabulky) obsahuje 21 tabulek různých fyzikálních veličin. Pro úsporu místa jsou zde jen tabulky, které se častěji potřebují při základních měřeních. Podrobnější tabulky najde čtenář v kompendiích, zmíněných v přehledu spisů na konci knihy.

Při psísování knihy měl autor na paměti, že má být především elementární učebnicí a základní praktickou příručkou. Proto věnoval dosti místa podrobnému popisu důležitých přístrojů a zevrubnému výkladu všech základních měřicích metod. Aby pak rozsah knihy nepřekročil kritickou hodnotu, upustil autor od zpracování některých speciálních metod, zejména z oboru krátkovlnného záření (paprsků X, radioaktivity, kosmického záření), hmotové spektrografie a praktické atomové fyziky. Výklad, který by nebyl jen povrchně informativním, ale prakticky upotřebitelným poučením a návodem k měření veličin, o nichž v běžných učebnicích mluví jen povšechně, vyžádal by si zajisté více místa než výklad základních metod.

Má-li být kniha při jejím rozsahu a rozmanitosti používána nejen jako učebnice k soustavnému studiu, nýbrž i jako praktická laboratorní příručka k okamžitému poučení, musí připouštět rvchlou orientaci. Autor toho dosáhl soustavným a přehledným uspořádáním látky.