

TECHNICKÝ VÝBĚR DO KAPSY

JAROSLAV KRUTINA

ZOPAKUJME SI MECHANIKU

PRACE

11

Tato knížka podává stručně ucelený obraz teoretické i praktické mechaniky pro technickou praxi. Výklad doprovázejí názorné obrázky a zajímavé vypočítané příklady, které ukazují užitečnost teorie a usnadňují pochopení textu. Příručka je určena k základnímu školení i k opakování učiva. Vznikla podstatným přepracováním spisu „Abeceda praktické mechaniky“, J. Krutina, Práce 1954.

Jak číst tuto knihu

Nejprve prohlédněte celou knihu najednou, abyste měli přehled o obsahu. Potom začněte znovu. Studujte podrobně s tužkou a s čtverečkovaným papírem při ruce. Teprve vážným studiem (ne pouhým čtením) něco z knihy získáte. Všechny důležitá příklady počítejte, jak je čtete, do textu nahlédněte jen pro kontrolu výsledku a postupu. *Nemůžete očekávat, že všemu porozumíte hned na první pohled.* Platí tu stará, velmi dobrá rada a mnoho lidí, kteří o ní nevědí, zbytečně ztratí odvahou: Každá učebnice mechaniky se musí číst zpředu i zadu. Pokračujte tedy vytrvale, pochopení přijde.

O B S A H

Předmluva	7
Rozdělení mechaniky	9
Kinematika	10
Relativní pohyb a relativní klid	10
Rychlost	12
Závislost rychlosti na čase, určená křivkou	14
Zrychlení čili akcelerace při pohybu	17
Zrychlení ve směru původní rychlosti	18
Zrychlení kolmo na směr původní rychlosti	18
Pohyb s konstantním (stálým) zrychlením.	19
Pohyb s proměnnou rychlostí a s proměnným zrychle- ním	21
Volný pád	22
Vodorovný vrh	26
Šikmý vrh	27
Pohyb po hladké nakloněné rovině	29
Vektory, skládání pohybů a rychlostí	30
Pohyb po kružnici	32
Převody	36
Dynamika	37
Síla a hmota	37
Pohybové zákony	39
Přímočarý pohyb	44
Impuls a hybnost	47
Pružný a nepružný ráz těles	49
Pohyb po kružnici	52
Coriolisova síla	56
Dynamická stabilita	57
D'Alembertův princip	58
Práce.	60
Pohybová energie	63
Polohová čili potenciální energie	66
Výkon	69

Účinnost	72
Podstata pohonu reakcí	75
Harmonický pohyb	77
Newtonův gravitační zákon	79
Otáčivý pohyb	79
Točivý moment	80
Výkon točivého momentu	81
Dvojice sil	82
Hmotový moment setrvačnosti	82
Vlečné tření	88
Valivé tření	94
Statika tuhých těles	94
Skládání a rozkládání sil v rovině	95
Prostorové soustavy sil	109
Těžiště	109
Pružnost a pevnost materiálů	114
Základní pojmy	114
Pevnost v tahu	121
Pevnost v tlaku	123
Pevnost v ohybu	125
Pevnost ve smyku	130
Pevnost v krutu	131
Hydromechanika a aeromechanika	132
Napětí (tlak) v kapalině	133
Hydrostatický tlak v kapalině	136
Vztlak	138
Vnitřní tření kapalin	139
Hydrodynamika	140
Reynoldsovo číslo Re	142
Dynamický tlak (rychlostní výška)	143
Kavitace	146
Venturiho jev	147
Výtok kapaliny otvorem	147
Tlak proudu kapaliny	149
Rotace v kapalinách	150
Pohyb letadla	153
Závěr	159
Abecední rejstřík	160

PŘEDMLUVA

S pokračujícím pokrokem roste i potřeba technického vzdělání. Mechaniku chceme znát všichni, abychom porozuměli vědě a technice, s níž se denně setkáváme, a mohli i přispět svou prací k jejímu rozvoji. Je prokázáno, že k nejvyšší produktivitě práce, a tím i k nejvyšší životní úrovni může dojít jen nová, socialistická společnost, v níž se úroveň všech pracujících pozvedne dosud nevídaným způsobem. Lidé přicházejí do styku s novou technikou mnohem častěji než dříve, hlavní však je, že to jsou i noví lidé, kteří jsou s to tuto techniku řídit a dál rozvíjet.

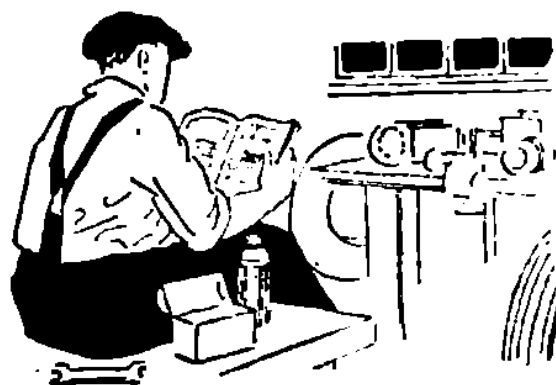
Nestačí nám už jen prosté seznámení s vědeckou pravdou. Budeme se učit umění, jak sbírat a spojovat fakta, která jsou sama o sobě jednoduchá a známá. Pochopíte to nahlédnutím, jak učí odborník nějaké věci, třeba jen skákat přes provaz. Skákat umíme nakonec všichni, ale neobratným a složitým způsobem, s velkými nesnázemi a zřídka s lepším výsledkem. Potom nám odborník ukáže, jak se má skákat správně. Když pochopíme jeho návod, je vše jednoduché a záhy se naučíme skákat dobře a lehce. Říkáme, že jsme získali dobrý styl. Stejně to platí i o technickém vědění. Přemýšlíme-li sami o nějaké složitější věci, zamotáme myšlenky a řadíme je nesprávně k sobě, až nakonec nemůžeme dál. Potom nám někdo vyloží celou věc novým způsobem. Jednotlivosti už známe a náhle se projeví, jak do sebe zapadají. Dříve nás vědění přemohlo, nyní jsme jeho pány, protože jsme získali dobrý styl v myšlení.

Máme-li se něčemu naučit, je třeba, aby výklad navazoval na praxi a na život, tedy na to, co nás zajímá. Jen tak se vyhneme nudě, největší chybě všeho učení. Na začátku studia musí být odpověď na otázky „Proč to tak je“ a „K čemu je to dobré“. Zvláště netechnik, který neměl příležitost projít delším odborným školením, nachází sám odpovědi na tyto otázky obtížně. Stále se setkává jen s technickými pojmy, se slovy, ale chybí mu podrobnější představa o jejich pravém významu a smyslu. Všem těmto otázkám se věnujeme, někdy snad i novým, zajímavým způsobem.

Učíme se nejlépe na chybách, které jsme sami překonali. Proto

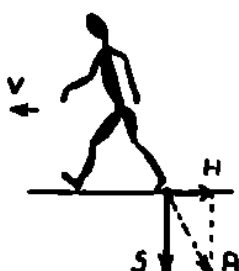
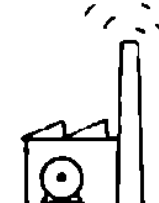
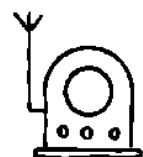
je třeba, aby čtenář sám počítal příklady a porovnával svůj výsledek s naším správným. Vnikne tak kupodivu hluboko do praktické mechaniky, a přece nemusí zdolávat překážku, již je mnohému matematika. Stačí jen základní počtářské umění (bez něhož se ostatně nedá nastudovat nic), asi v rozsahu svazečku této sbírky „Zopakujme si matematiku“.

Porovnáte-li si obsah naší malé práce s velkými a učenými spisy o mechanice, poznáte, že probírá vše podstatné, co asi musí znát z technické mechaniky nejen student na odborných i vyšších školách, ale i inženýr. Je to tedy příručka pro začátečníky i pro pokročilejší techniky v praxi, úvod k pracím velikých mistrů a učitelů, průprava k hlubšímu studiu čtenáře, který vytrvá až do konce.



ROZDĚLENÍ MECHANIKY

Přírodní vědy studující děje v přírodě dělí se na fyziku, chemii, biologii, astronomii, geologii aj. *Fyzika* (z řeckého *fysis* = příroda), studuje vlastnosti a zákonitosti všech jevů (pozorováním, pokusem); dává tak obraz o podmínkách a průběhu přírodních dějů a učí nás využít jich k prospěchu člověka. Bez znalosti fyzikálních zákonů se nedaří nič. Fyziku dělíme takto:

FYZIKA					
mechanika	akustika	kalorika	magnetismus	elektrotechnika	optika
					
Nauka o	Nauka o	Nauka o	Nauka o	Nauka o	Nauka o
pohybu a silách	zvuku	teple	magnetismu	elektrické	světla

Obr. A.

V této knížce probíráme prvou část fyziky, *mechaniku*, která studuje pohyb a jeho příčiny. Mechanika se dělí na

kinematiku

a

dynamiku

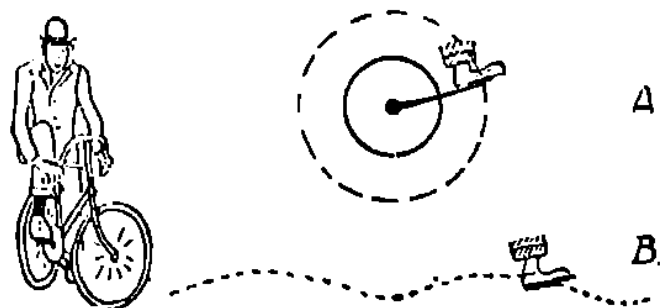
(z řeckého *kinéo* = pohybují) (z řeckého *dynamis* = síla)
nauka o pohybu v průběhu času, nauka o příčinách pohybu.

Dynamika se dělí na *statiku* (z řeckého *statos* = stojící, studuje rovnováhu sil, podmínky klidu těles), *kinetiku* (nauka o vztahu sil a pohybů) a *pružnost a pevnost*.

Zpravidla studujeme odděleně mechaniku látek tuhých (*geomechaniku*; tuhé těleso nemění při pohybu tvar), mechaniku nestlačitelných kapalin (*hydromechaniku*, hydrodynamiku, hydrostatiku) a mechaniku stlačitelných tekutin, plynů (*aeromechaniku*, aerodynamiku, aerostatiku).

KINEMATIKA

Kinematika je nauka o pohybech, nestará se však o síly (příčiny pohybu), které studuje teprve dynamika. Sleduje jen pohyb v průběhu času. Místo tuhých těles, která se pohybují



Obr. 1. Relativní pohyby nohy jezdce.

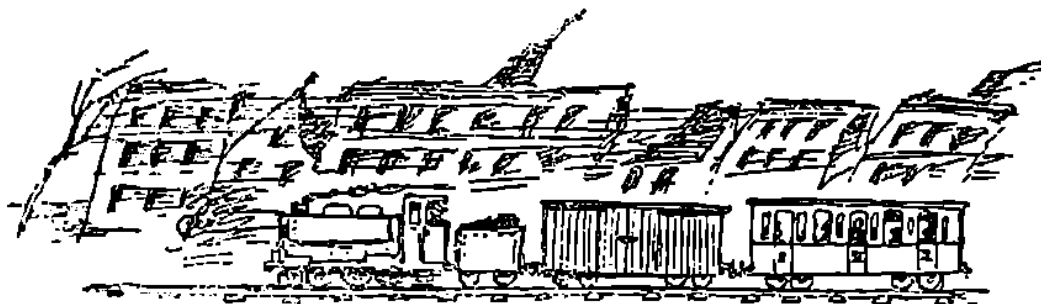
buď pohybem *postupným* (translací, hrany tělesa jsou při pohybu stále rovnoběžné s původní polohou), nebo se *otáčejí* (rotují kolem osy otáčení), zavádíme často *hmotný bod*, tj. těžiště tělesa, v němž si myslíme soustředěnu hmotu celého tělesa. Prakticky to je nemožné, hmota se nemůže smrštít v bod, v teorii to však zjednoduší úvahy.

Hmotný bod může být i pořádně veliký, např. Země se může při pohybu kolem Slunce považovat za hmotný bod. Studujeme-li však její rotaci, nemůže být hmotným bodem, protože hmotný bod se nemůže točit kolem osy, která jde jeho vnitřkem.

Relativní pohyb a relativní klid

Pohyb v mechanice znamená změnu místa vzhledem k nějakému nehybnému okolí. Velmi však záleží na tom, odkud pohyb pozorujeme. Cyklista vidí, že když šlape na pedály, jeho chodidla opisují kružnice, *obr. 1-A*. Divák, který pozoruje cyklistu z ulice, vidí, že jeho nohy opisují vlnovitou křivku, již říkáme *cykloida*, *obr. 1-B*. Zeměkouli (tj. okolí tělesa) považujeme v mechanice skoro vždy za nehybnou, ačkoli má ve vesmíru 14 různých pohybů najednou. Všechny mechanické pohyby jsou *relativní*, k něčemu se vztahující. Jedete-li ve vlaku, zdá se vám, že se pohybuje krajina. Také klid je jen

relativní vzhledem k okolí (vzájemná poloha těles se nemění), ač ve skutečnosti není v klidu vůbec nic. Pohyb obrovskými rychlostmi, které se blíží rychlosti, jíž se šíří světlo, má podle teorie relativity nevídané následky: rozměry těles se pohybem mění (metr rychle se pohybující je kratší než týž metr v klidu), hmota se pohybem mění, teplota tělesa závisí na rychlosti, jíž se pohybuje, čas v meziplanetární raketě běží pomaleji než na Zemi, člověk tam pomaleji stárne atd. Tyto složité úvahy teorie relativity zde nebudeme probírat.



Obr. 2. Relativita pohybu.

Pohyb je základní vlastností hmoty, je formou její existence. Nemůžeme oddělit pohyb od hmoty (hmota a pohyb nemohou existovat odděleně). Bez hmoty nemůže být pohybu, bez pohybu nemůže být hmoty. Namítnete, že přece existují i hmoty v klidu. Je to jen relativní klid vzhledem k okolí. Vždy existují též složité vnitřní pohyby částic hmot (atomů, molekul, ale i elektronů, protonů, neutronů aj.), které nevidíme.

Jediné těleso samo o sobě se nemůže pohybovat. Vždy musí být aspoň dvě tělesa, která se přibližují nebo vzdalují, a tím mají *relativní pohyb*. Teoreticky je stejné, říkáme-li, že vlak jede a země pod ním stojí, nebo že vlak stojí a země se pod ním pohybuje dozadu, *obr. 2*. Strojvůdce však topí v lokomotivě, ne v zeměkouli. Proto se výsledek jeho úsilí (pohyb) projevuje na lokomotivě. Je už jedno, říkáme-li, že topí, aby jel vpřed, či aby nebyl unášen pohybujícím se okolím dozadu a udržel se na místě.

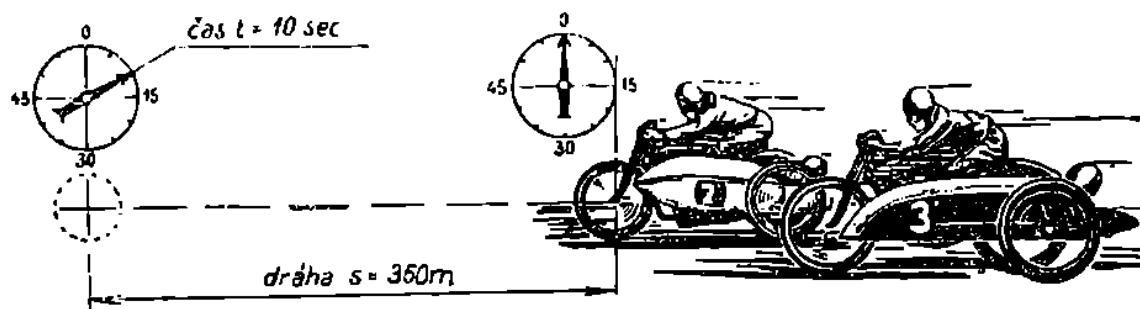
Jak píše slavný Galilei (1620): „*V kabině pod podlahou lodi, která se pohybuje rovnoměrně, nijak nepoznáš, že se loď pohybuje a nestojí na místě. Vyskočíš stejnými skoky jako na palubě stojící lodi. Mouchy budou létat na všechny strany a nebudou se držet hlavně zádi, která se k nim stále pohybuje.*“

Rychlost

Délku dráhy s při pohybu měříme v mechanice v *metrech* [m], čas pohybu t měříme ve *vteřinách* [s].

V krátkém čase Δt uběhne těleso nějakou dráhu Δs (čti „delta es“, ve smyslu dílek es).

Poměr $v_s = \Delta s : \Delta t = (\text{přírůstek dráhy}) : (\text{přírůstek času})$ nazýváme *střední rychlost* na dráze, s . Kdyby byly dráha a čas tak maličké, že už menší nemohou být, píšeme, že uběhnutá



Obr. 3. Výpočet rychlosti závodního motocyklu.

dráha je ds (diferenciál s , malý dílek s) a spotřebovaný čas je dt . Potom je

rychlost $v = (ds) : (dt) = ds/dt =$ derivace dráhy podle času (1)

Byla měřena rychlost střely z revolveru a zjistili jsme, že za $\Delta t = 1/1000$ vteřiny uletěla střela $\Delta s = 0,225$ m. Střední rychlost střely

$$v_s = \Delta s : \Delta t = 0,225 : 0,001 = 225 \text{ m za vteřinu} = 225 \text{ m/s.}$$

Rychlost má zde rozměr m/s. Můžeme ji přepočítat i na jiný rozměr. Protože $1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$, $1 \text{ s} = 1/3600$ hodiny, je

$$225 \text{ m/s} = (225 \cdot 0,001) : (1/3600) = 810 \text{ km za hodinu} = 810 \text{ km/h}$$

Je-li rychlost v stále stejná, je pohyb *rovnoměrný*. Dráha s roste úměrně s časem t (tj. za dvakrát delší čas se uběhne dvakrát delší dráha).

$s = v \cdot t \qquad v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v}$	. . . (2)
---	-----------

Příklady výpočtů podle vzorců (2):

1. Motocykl ujel dráhu $s = 360$ m za $t = 10$ s, obr. 3. Jaká je jeho rychlost v km/h?

$v = s/t = 360/10 = 36 \text{ m/s}$; za hodinu ($= 3600$ s) je $v = 36 \cdot 3600 = 129\,600 \text{ m/h} = 129,6 \text{ km/h}$.

2. Chodec udělá za minutu 140 kroků po 0,8 m. Jakou má rychlost, kolik km ujde za hodinu?

Dráha je $s = 140 \cdot 0,8 = 112$ m za $t = 60$ sec; rychlost $v = s : t = 112 : 60 = 1,866$ m/s. Dráha za 1 hodinu, to je za $t = 3600$ s, je $s = v \cdot t = 1,866 \cdot 3600 = 6720$ m = 6,72 km.

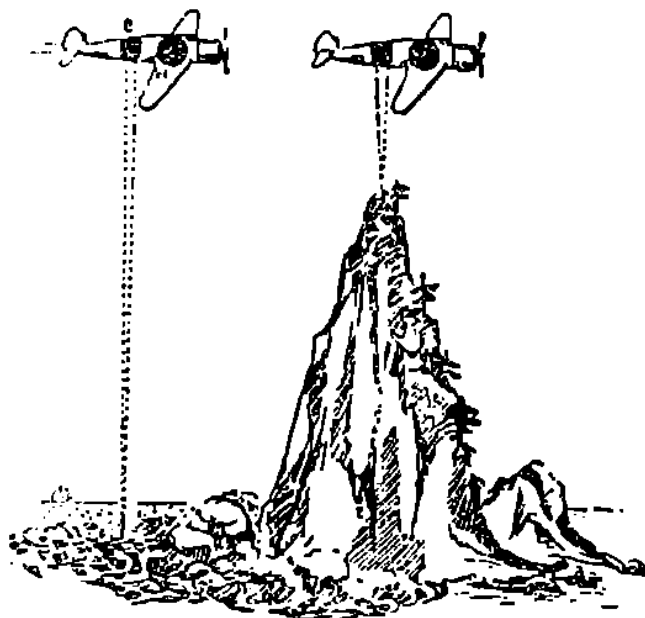
3. Letadlo měří výšku nad zemí podle času, který potřebuje zvukový signál, aby se odražen od země vrátil do zvukového výškoměru E , obr. 4. Barometrický výškoměr H zde neukáže správnou výšku nad překážkou. Vrátil-li se signál do E za 2 vteřiny, uběhl zvuk dráhu 2×330 m, letadlo je 330 m nad mořem. Zvuk má ve vzduchu rychlost $v = 330$ m/s. Uslyšíme-li zahřmění za $t = 10$ s po blesku, je blesk vzdálen $s = vt = 330 \cdot 10 = 3,3$ km.

4. Kolejnice jsou dlouhé 15 m. Nárazy vagónových kol na styčné spáry kolejnic můžeme dobře počítat. Za 22 vteřin jsme slyšeli 17 nárazů. Jak rychle jede vlak?

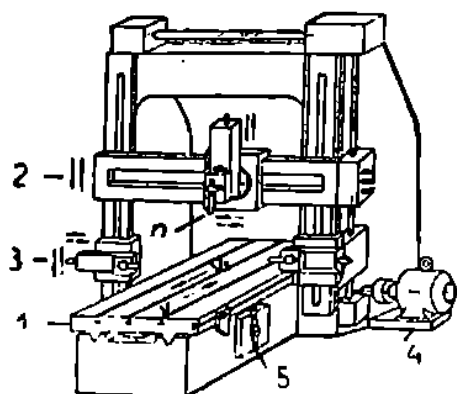
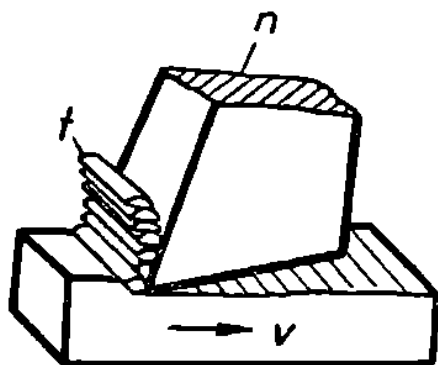
Dráha $s = 17 \cdot 15 = 255$ metrů byla projeta za čas $t = 22$ s.

Rychlost $v = \frac{s}{t} = \frac{255}{22} = 11,6$ m/s, tj. $11,6 \cdot 3600 = 41\,760$ m/h.

5. U hoblovky (obr. 5) se materiál upnutý na stole 1 posouvá rychlostí v proti noži n , upnutému na příčniku 2 nebo 3. Motor 4 stůl pohání, narážky 5 obracejí chod. Nůž řeže třísku t .



Obr. 4. Měření výšky letadla nad zemí odrazem zvukového signálu.



Obr. 5. Práce hoblovacího stroje.

Rychlost stolu $v = 0,8$ m/s. Zdvih stolu $s = 1,6$ m trvá $t = s/v = 1,6/0,8 = 2$ s.

Rezná rychlost nože $v = 0,8$ m/s je $0,8 \cdot 60 = 48$ m/min.

6. Časovou fotografickou komorou se zjistilo, že dobrý tenista vysílá míček rychlostí až $v = 67$ m/s. To je $67 \cdot 3600 = 240\,000$ m/h = 240 km/h. Takovou rychlostí se asi střelily kamenné koule ze starých kanónů, obr. 6.

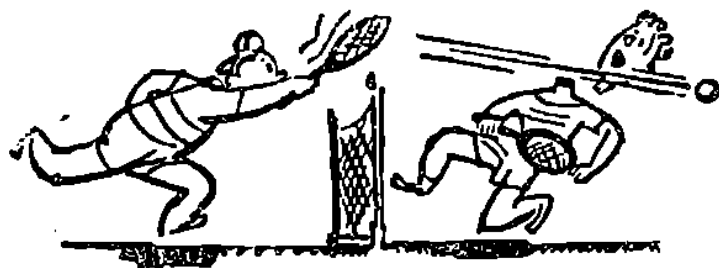
7. Na pianu můžeme zahrát až 17 tónů za vteřinu. Při vyslovení

písmene rrr (to hned zkuste) koná špička jazyka 30 až 39 kmitů za vteřinu. Hlasivky jsou ještě rychlejší, při sopránovém nejvyšším „e“ konají 1304 kmitů za vteřinu. Některý zpěvák zazpívá i nejvyšší oktávu „o“ tak, že jeho hlasivky 2070krát za vteřinu přeruší proud vzduchu.

8. Zeela zvláštní postavení mezi pohyby a rychlostmi má světlo. Běhá fantastickou rychlostí 300 000 km za vteřinu. Podstatou světla se tu nebudeme zabývat. Jenom pamatujme, že se každým světelným paprskem šíří prostorem jakési jemné chvění, vlnění. Když dopadnou tyto vlnky do zdravého oka, vidíme barvy.

Vzdálenost Slunce od Země je asi $s = 150$ milionů km. Světelný paprsek doletí ze Slunce na Zemi za

$$t = s/v = 150\,000\,000/300\,000 = 500\text{ s} = 8\text{ min } 20\text{ s}.$$



Obr. 6. Rychlosť tenisového míčku se rovná rychlosti dělové koule z doby Žižkovy.

9. Železničním vagónem jde průvodčí krokem. Vzhledem k vagónu se pohybuje pomalu, vagón však jede rychle. Vzhledem k zemi se průvodčí pohybuje rychle. Jeho *relativní rychlost* vzhledem k zemi je dána součtem rychlostí vagónu a chůze.

V dlouhé chodbě rychlíkového vozu, který jel rychlostí 100 km/h, měli dva romantičtí muži souboj. Najednou vystřelili proti sobě šípy letící také rychlostí 100 km/h.

Co se stane? Který z protivníků bude dřív zasažen, když oba míří dobře? Jeden střílí ve směru jízdy, druhý proti směru jízdy.

Odpověď (čtěte, až sami úkol promyslíte): Oba muži budou zasaženi současně, jako kdyby stříleli na zemi. Mění se jen relativní pohyb šípů vzhledem k zemi. Šíp vystřelený ve směru jízdy má vzhledem k zemi rychlost 200 km/h. Šíp vystřelený proti směru jízdy vzhledem k zemi vlastně ve vzduchu stojí a protivník letí proti němu rychlostí 100 km/h.

10. E. Zátopek překonal 27. VII. 1952 olympijský rekord v maratónském běhu, když uběhl dráhu $s = 42,195$ km průměrnou rychlostí $v = 17,6978$ km/h (tj. $17,6978 : 3600 = 4,916$ m/s) za čas

$$t = s/v = 42,195/17,6978 = 2,3842\text{ h} = 2\text{ h } 23\text{ min } 3,1\text{ s}.$$

Příklady některých rychlostí

Růst vlasů	0,000 000 3 cm/s	Vlaštovka	až 70 m/s
Růst houby	0,008 cm/s	Automobil	až 120 m/s
Hlemýžď	0,15 cm/s	Zvuk ve vzduchu . . .	330 m/s
Krev v cévách	50 cm/s	Tryskové letadlo . . .	340 m/s
Závodní kůň	až 25 m/s	Země kolem Slunce . .	29,6 km/s
Vichřice	až 40 m/s	Světlo, elektřina . . .	300 000 km/s

Závislost rychlosti na čase, určená křivkou

Nějaká veličina (třeba váha) je buď *stálá*, konstantní, nebo se může měnit a pak je *proměnná*. Váha živé husy je proměnná, váha 1 kg je konstantní. Často se stává, že jedné hodnotě (označíme si ji x) odpovídá určitá hodnota jiné proměnné y .

Říkáme, že y je funkcí x . Pišeme to: $y = f(x)$, čti ypsilon je funkcí xks.

x je nezávisle proměnná, y je závisle proměnná, protože y soustavně závisí na velikosti x .

Platí třeba $y = 2x + 1$.

Mohu zvolit libovolné x ; tím je už y určeno.

Pro $x = 1$ vyjde $y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$.

Pro $x = 3$ vyjde $y = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$ atd.

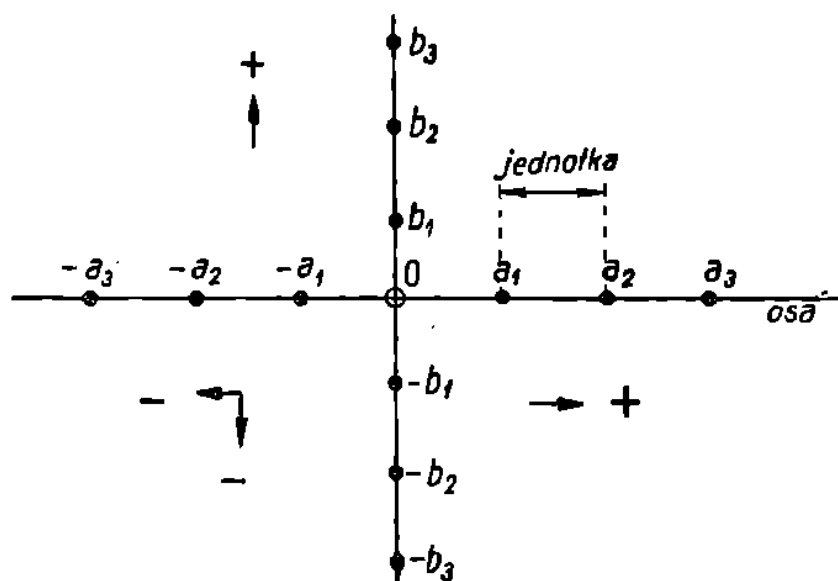
Na přímce se můžeme pohybovat dvěma směry. Smysl vpravo a nahoru značíme jako kladný, smysl vlevo a dolů jako záporný, obr. 7.

Přímce říkáme *číselná osa*. Zvolíme na ní počátek, nulu, nanese jednotky, a dostaneme tím body, které značí čísla.

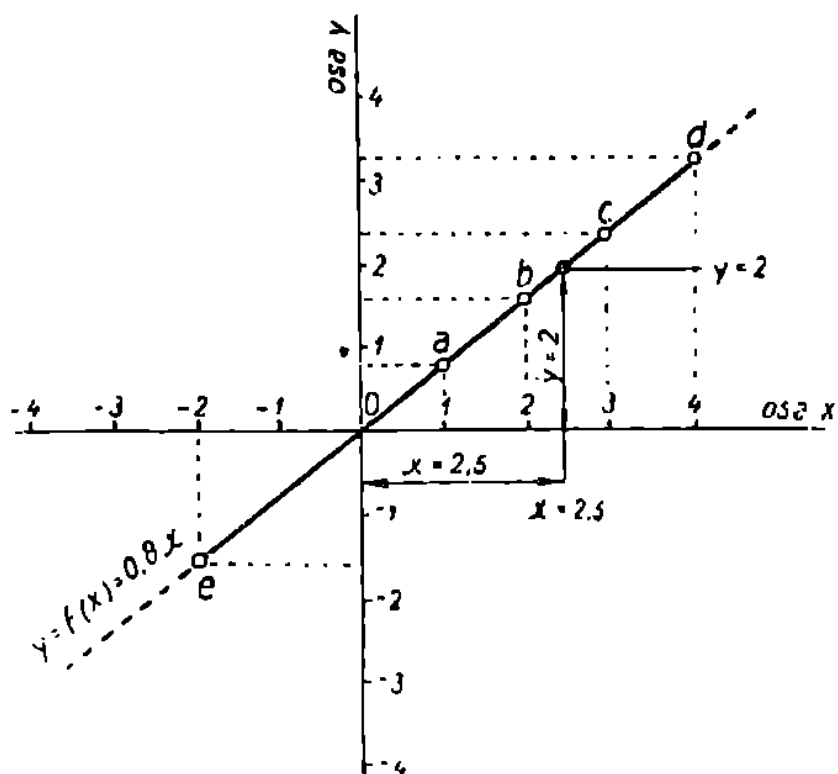
K bodu a_2 jsou 2 jednotky, a_2 tedy značí číslo 2. K bodu $-b_3$ jsou -3 jednotky, bod $-b_3$ tedy značí číslo -3 .

Uprostřed třicetileté války objevil mladý francouzský jezdecký důstojník *Descart* (který bojoval též na Bílé hoře), že se průběh funkcí $y = f(x)$ může kreslit křivkami.

Zvolil dvě osy čísel, obr. 8. Označil je X a Y . Na vodorovnou nanášel hodnoty x , v koncovém



Obr. 7. Osa kladných a záporných čísel.

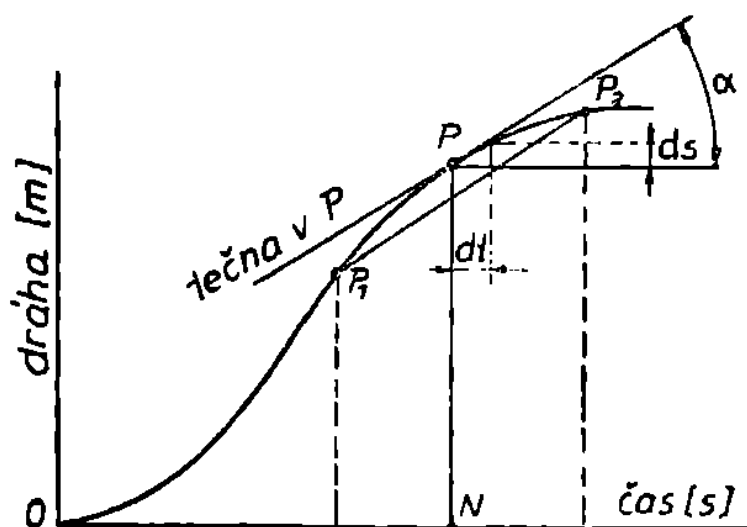


Obr. 8. Znáznornění průběhu funkce $y = 0,8 \cdot x$. Protože závislost znázorňuje přímka (latinsky *linea*), říkáme, že tato funkce je lineární. K libovolnému x můžeme bez počítání odměřit velikost y . Např. u $x = 2,5$ jdeme vzhůru k přímce $y = f(x)$ a odměříme $y = 2$.

bodě vztyčil kolmici a tam nanesl příslušné y . Dostal jeden bod. Potom zvolil jiná x , vypočetl k nim ze vztahu $y = f(x)$ příslušná y a jejich nanesením dostal další body. Spojením těchto bodů dostal křivku (nebo přímku), která značí průběh funkce $y = f(x)$.

Na obrázku je kreslen průběh funkce $y = 0,8 \cdot x$.

Zvolíme $x = 1$	2	3	4	—2
vypočteme				
$y = 0,8 \cdot 1 = 0,8$	$0,8 \cdot 2 = 1,6$	$0,8 \cdot 3 = 2,4$	$0,8 \cdot 4 = 3,2$	$0,8 \cdot -2 = -1,6$
dostaneme bod a	b	c	d	e



Obr. 9. Znáznornění proměnlivé rychlosti křivkou.

Vztah mezi dráhou s a časem t může znázornit křivka OP , obr. 9. Za čas ON je dráha NP . Střední rychlost v bodu P je ze vzorce (1)

$v = ds/dt = \operatorname{tg} \alpha = \tan$ gens sklonu tečny.

Tečna v P je rovnoběžná s P_1, P_2 , volíme-li body P_1, P_2 blízko u P . Rychlost je proměnlivá, sklon tečny α v různých bodech křivky se mění a jde-li tečna dolů, je rychlost opačná, než když jde tečna vzhůru.

Úhel sklonu tečny je značen řeckým písmenem α (čti alfa). Tak je to v geometrii zavedeno na celém světě: úhly značíme řeckými písmeny.

$\alpha = \text{alfa}$; $\beta = \text{beta}$; $\gamma = \text{gamma}$ atd.; pro některé hodnoty užíváme i jiných řeckých písmen, která si musíme zapamatovat:

$\eta = \text{éta}$

$\lambda = \text{lambda}$

$\pi = \text{pí}$

$\tau = \text{tau}$

$\kappa = \text{kappa}$

$\mu = \text{mí}$

$\sigma = \text{sigma}$

$\omega = \text{omega}$

Víme, že úhly měříme na stupně. 1 stupeň = $1^\circ = 60 \text{ minut} = 60'$. Pravý úhel (mezi dvěma kolmicemi) měří 90° .

V mechanice měříme úhly častěji v obloukové míře, poměrem

(délka oblouku : poloměr), tedy číslem bez rozměru. Jeden stupeň (1°) je zkratka pro číslo 0,0175, neboť

$$1 \text{ stupeň} = 1^\circ = \frac{2 \pi r / 360}{r} = \frac{\pi}{180} = 0,0175,$$

podobně, jako „tucet“ je zkratka pro číslo 12. Potom např. $\alpha = 100^\circ$ je vlastně $\alpha = 100 \cdot 0,0175 = 1,75$; $\alpha = 90^\circ$ znamená $\alpha = 90 \cdot \pi / 180 = \pi / 2 = 3,14 / 2 = 1,57$ atd.

Jednotka úhlu v obloukové míře je 1 *radián* = 1 rad. Je to název pro číslo 1, neboť

$$1 \text{ radián} = 1 = 0,0175 \cdot 57,3^\circ; 1 \text{ rad} = 57,3^\circ$$

Čteme-li tedy, že úhel $\alpha = 2$, neznačí to 2 stupně (2°), nýbrž 2 radiány, ve stupních $2 \cdot 57,3 = 114,6^\circ = 114^\circ 36'$.

Zrychlení čili akcelerace při pohybu

Zrychlení (značené a) znamená přírůstek rychlosti ze vteřinu. Vzroste-li za jednu vteřinu rychlost o 3 m za vteřinu, říkáme, že *zrychlení* je tři. Jednou je vteřina už v rozměru rychlosti, po druhé znamená, že se přírůstek rychlosti měří za vteřinu, máme tedy ve zrychlení vteřinu krát vteřinu a jeho rozměr je: metry za vteřinu na druhou, m/s^2 . Bylo by tedy zrychlení 3 m/s^2 . Je-li zrychlení záporné, říkáme mu *zpoždění* nebo *zpomalení* (rychlost se zmenšuje).

Na zrychlení můžeme snad nejlépe z celé mechaniky sledovat, jak pomalu rostla v lidech schopnost technicky myslet a jak po mnoho tisíciletí lidský duch dětinsky bloudil. Dnešní odborník se liší od starého tím, že ke své práci potřebuje měření, pokusy, přístroje. Starý nepotřeboval nic. Starověcí učenci se sešli a rozumovali o věcech tak, jak je viděli. Neměřili, nedělali pokusy, nepotřebovali laboratoří. Protože je zrak klamal, docházelo k velikým omylům.

Aristoteles viděl, že těžší kámen padá k zemi rychleji než lehké perí. Zapsal to a pak učil své žáky, že dvakrát těžší věc padá k zemi i dvakrát rychleji. Na pokusy a kontrolu ani nepomýšlel. Zdá se to směšné, a přece ještě 1700 let po jeho smrti jeho učení platilo. Teprve Galileo byl opravdový vědec myšlením. Však o něm ještě uslyšíme.

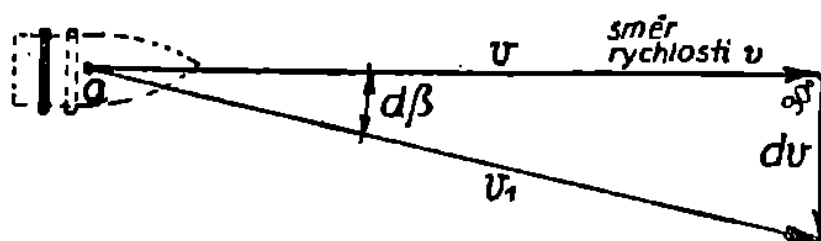
„Žádné umění není tak těžké jako umět pozorovat,“ praví Liebig, veliký chemik.

Slovo „zrychlení“ známe z denního života, jenže tam značí něco jiného než v mechanice. Zrychlená doprava je rychlejší doprava, zrychlíme vydávání polévky v kantýně. O směru pohybu se při tom vůbec nemluví. V mechanice známe dva odlišné druhy zrychlení, *radiální* a *obyčejné*. Obě jsou poměrem, vzniknou teprve vydělením dvou hodnot. Zrychlení je tedy časová změna rychlosti co se týče velikosti i co se týče směru.

Zrychlení ve směru původní rychlosti

Rychlost se může při pohybu měnit. V kratičkém čase Δt vzroste např. rychlost o Δv . Poměr

$$a = \Delta v : \Delta t = (\text{přírůstek rychlosti}) : (\text{přírůstek času}) \quad . \quad (3)$$



Obr. 10. Přírůstek rychlosti dv , kolmý k v .

nazýváme *střední zrychlení* v čase Δt . Změny rychlosti Δv v čase Δt mohou být maličké; potom dáme místo Δv , Δt diferenciály dv , dt a dostáváme vzorec pro zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d \, ds/dt}{dt} = \frac{d^2 s}{dt \cdot dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \text{zrychlení} \quad (4)$$

Za diferenciál rychlosti dv jsme dosadili ds/dr . Zatím předpokládáme, že přírůstek rychlosti dv má směr původní rychlosti. Mění se jen velikosti rychlosti, ne však její směr. Pohyb je *přímocharý*. Je-li zrychlení a stálé, máme pohyb *rovnoměrně zrychlený*. Potom je $a = v : t$; $v = at$. Z toho plyne i rozměr zrychlení $(1 \text{ m/s}) : (1 \text{ s}) = \text{m/s}^2$.

Zrychlení kolmo na směr původní rychlosti

Podle obr. 10 se bod a , který znázorňuje těžiště pohybujícího se tělesa (zde granátu), pohybuje rychlostí v . Může se stát, že přírůstek rychlosti dv není ve směru v , nýbrž je kolmý k v . Nezmění se tedy velikost rychlosti v , nýbrž jen směr pohybu.

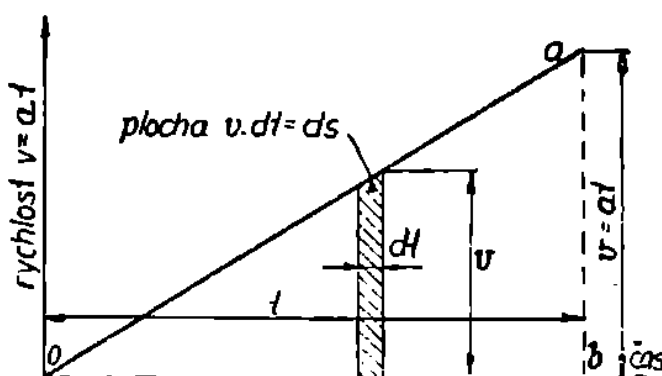
V krátkém čase dt je přírůstek dv a místo rychlosti v máme nyní rychlost v_1 , skloněnou od v o úhel $d\beta$. V tomto případě má zrychlení zvláštní název,

$$a_r = dv : dt = \text{radiální (dostředivé) zrychlení} \dots (5)$$

Z geometrie víme, že $dv : v$ je tangentou úhlu $d\beta$; protože je úhel $d\beta$ maličký, je jeho tangenta rovna přibližně úhlu, čili $d\beta = dv : v$; z toho $dv = v \cdot d\beta$. Dosadíme do vzorce (5) pro radiální zrychlení

$$a_r = \frac{dv}{dt} = v \frac{d\beta}{dt} = v \cdot \omega = (\text{rychlost}) \times (\text{úhlová rychlost}) \quad (6)$$

Zavedli jsme novou zkratku $\omega = d\beta : dt$, již říkáme **úhlová rychlost**. Úhel β dosazujeme v obloukové míře, v radiánech (hodnotu ve stupních násobíme 0,0175). Je-li např. $d\beta = 4,5^\circ$, $dt = 0,1$ s, je $\omega = d\beta/dt = 4,5 \cdot 0,0175/0,1$ s = 0,79 za s = 0,79/s. Působí-li na těleso jen radiální zrychlení, vzniká pohyb po kružnici (viz dále str. 32).



Obr. 11. Závislost rychlosti na čase: V čase t je velikost rychlosti v , znázorněná vrcholem a . Body od 0 k a vyplní přímku Oa .

Pohyb s konstantním (stálým) zrychlením

Při pohybu s konstantním (tj. stále stejným) zrychlením jsou ve stejných časech dt stejné přírůstky rychlostí dv . Říkáme, že rychlost v roste lineárně s časem t , protože v diagramu podle obr. 11 je závislost mezi rychlostí a časem udána přímkou Oa .

V čase dt uběhne těleso dráhu ds . Víme už, že $ds = v \cdot dt$, při čemž v je střední rychlost v čase dt . Dráha ds je na obrázku znázorněna vyčárkovanou ploškou. Součet všech těchto plošek ds , čili součet všech maličkých drah ds , dá celkovou dráhu s , uběhnutou v čase t . Je plochou trojúhelníka Oab . Z geometrie víme, že plocha trojúhelníka je rovna $1/2 \times \text{základna} \times \text{výška}$; zde

$$s = \frac{1}{2} t \cdot v = \frac{1}{2} t \cdot a \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{at^2}{2} \dots (7)$$

Tak jsme našli znamenitý vzorec k výpočtu dráhy s , uběhlé za čas t , při pohybu se stálým zrychlením a . Ve vzorci je druhá mocnina t , dráha roste se čtvercem času. Z dřívějších vzorců (1) (3) víme, že $v = s/t$; $a = v/t$. Dosazením do vzorce (7) a jednoduchými úpravami dostáváme řadu užitečných vzorců pro praktické výpočty pohybu z klidu:

$$\begin{array}{l}
 \text{dráha} \dots s = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{v^2}{2a} = \frac{v \cdot t}{2} ; \\
 \text{zrychlení } a = \frac{v^2}{2s} = \frac{v}{t} = \frac{2s}{t^2} ; \\
 \text{rychlost } v = at = \sqrt{2as} ; \\
 \text{čas} \dots t = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2s}{a}}
 \end{array} \dots (8)$$

Má-li těleso počáteční rychlost u a konečnou rychlost v , je při konstantním zrychlení a rychlost po 1 s rovna $u + a$, po 2 s je $u + 2a$ atd. Střední rychlost je $(u + v)/2 = u/2 + (u + at)/2 = u + at/2$. Z toho je:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{dráha } s = ut + \frac{at^2}{2} \\
 \text{rychlost } v = u + at = \sqrt{u^2 + 2as}
 \end{array} \right\} \dots (8a)$$

Příklady: 1. Električka se rozjížděla $t = 10$ s na dráze $s = 30$ m. Jaké má zrychlení? Ze vzorců (8) je zrychlení

$$a = 2s/t^2 = 2 \cdot 30/10^2 = 60/100 = 0,6 \text{ m/s}^2 = 60 \text{ cm/s}^2.$$

2. Autobus má stanice 300 m vzdálené. Rozjíždí se rovnoměrně zrychleným pohybem na dráze 50 m, pak jede rychlostí 5 m/s dráhu 200 m a zbylých 50 m se zastavuje. Jak dlouho trvá jízda?

Při rozjíždění je zrychlení $a = v^2/2s = 5^2/(2 \cdot 50) = 0,25 \text{ m/s}^2$; trvá to $t = v/a = 5/0,25 = 20$ s. Jízda trvá $t = s/v = 200/5 = 40$ s; zastavení jako rozjetí trvá 20 s. Celá jízda trvá $20 + 40 + 20 = 80 \text{ s} = 1' 20''$ (čti jedna minuta dvacet sekund).

3. Těleso se rovnoměrně zrychlí z rychlosti $u = 3 \text{ m/s}$ na $v = 19 \text{ m/s}$ za $t = 8 \text{ s}$. Zrychlení je $a = 2 \text{ m/s}^2$. Za 4 s je rychlost $3 + (2 \cdot 4) = 11 \text{ m/s}$. Střední rychlost je $(3 + 19)/2 = 11 \text{ m/s}$.

Dráha $s = 11 \cdot 8 = 88 \text{ m}$ (nebo $s = ut + at^2/2 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2/2 = 24 + 64 = 88 \text{ m}$).

4. Rychlík jel rychlostí 96 km za h. Po zabrzdění ujel ještě 550 m, než zastavil. Jaké záporné zrychlení (zpoždění) měl a jak dlouho trvalo zabrzdění?

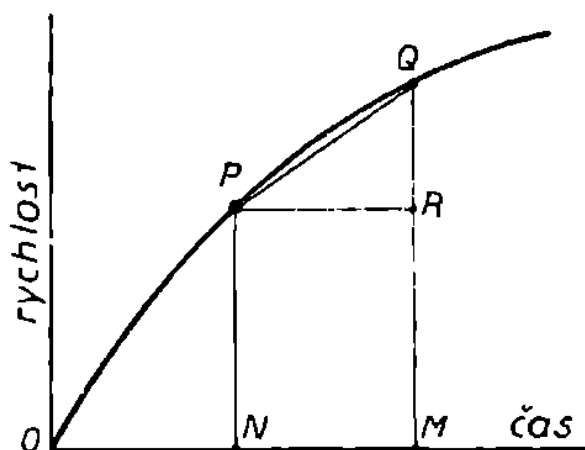
$$95 \text{ km/h} = 95\,000 : 3600 \text{ m/s} = 26,4 \text{ m/s}.$$

$$\text{Ze vzorcu (8) zpoždění } a = \frac{v^2}{2s} = \frac{26,4^2}{2 \cdot 550} = 0,63 \text{ m/s}^2.$$

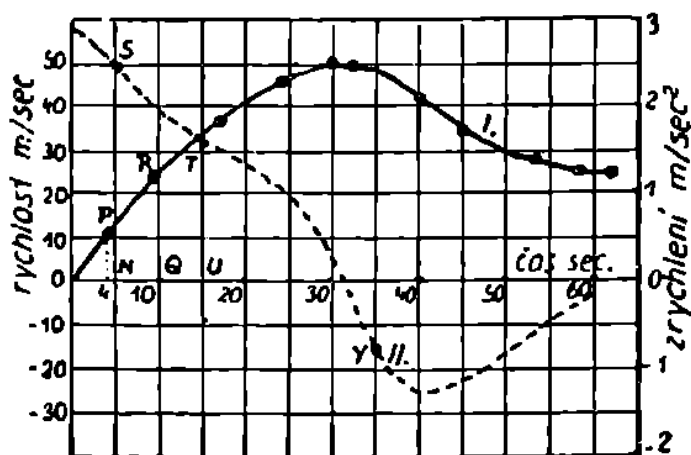
$$t = \frac{v}{a} = \frac{26,4}{0,63} = 42 \text{ s. Zabrzdění trvalo 42 vteřin.}$$

Pohyb s proměnnou rychlostí a s proměnným zrychlením

Je-li závislost rychlosti na čase dána křivkou, *obr. 12*, mění se rychlost; zrychlení není stálé, pohyb je nerovnoměrný. Z klidu (počátek *O*) má v čase *ON* těleso rychlost *PN*, za čas *NM*



Obr. 12. Pohyb s proměnnou rychlostí.



Obr. 13. Znárodnění rychlosti křivkou I a zrychlení křivkou II.

vzrostla rychlost o *QR* na *QM*. Střední zrychlení v čase *NM* je QR/NM nebo $QR/PR = \tan \alpha$. Při malém *NM* přejde *PQ* v tečnu v *P*. Zrychlení je tedy dáno tangentou tečny ke křivce.

Příklad: Měřily se vlastnosti nového motocyklu zkouškou jízdy. Za *t* vteřin od startu byly zjištěny tyto rychlosti *v* m/s:

<i>t</i> =	0	4	9	17	24	30	32	40	45	53	58	62	s
<i>v</i> =	0	11	22,6	35,6	44,5	49	48,9	40,6	33,7	26,8	24,3	24	m/s

Hledáme zrychlení tohoto motocyklu v prvních 60 vteřinách.

Na čtverečkový papír nakreslíme vodorovnou osu, na níž nanášíme čas po 10 vteřinách, *obr. 13*. Na svislou stupnici nanášíme rychlost, každý dílek je 10 m/s. Je-li čas *t* = 4, je rychlost *v* = 11. Tím dostáváme bod *P*. Času 9s odpovídá bod *R* atd. Najdeme:

<i>t</i> =	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	s
<i>v</i> =	13,5	24,2	32,8	40	45,4	49	47,5	40,6	33,7	29	25,1	24,1	m/s

Odměříme, že v bodě *Q* (kdy je čas *t* = 10 s) je rychlost *v* = 24,2 m/s. Střední zrychlení v *N* (5 s od startu) je přibližně

$$a = \frac{v}{t} = \frac{24,2}{10} = 2,42 \text{ m/s}^2.$$

Jeho nanášením podle pravé stupnice (2 dílky = 1 m/s²) dostaneme bod *S*.



Obr. 14. Pisa (podle rytiny z r. 1870) vyniká středověkými stavbami. V popředí je románský dóm a vlevo od něho světoznámá šikmá věž z bílého mramoru. Je to vlastně kampanila, zvonice vysoká 55 m, nakloněná tak, že její úchylka od svislého směru je čtyři a čtvrt metru. Sám Galilei se o pokusech na věži ve svých spisech nezmiňuje.

Podobně v druhých deseti vteřinách vzrostla rychlost o $(40 - 24,2) = 15,8$ m/s, zrychlení v U , to je 15 s po startu, je $15,8 : 10 = 1,58$ m/s². Nanesením dostaneme bod T .

Tak byly ke křivce rychlosti I nalezeny body křivky zrychlení II. Např. pro $t = 35$ s je záporné zrychlení (zpoždění, pohyb se zpomaluje) $a = -0,84$ m/s², bod Y ; v $t = 55$ sec je $a = -0,51$. Zrychlení motocyklů a aut potřebujeme znát při výpočtech brzd.

Jaké vzdálenosti od startu ujel zkoušený motocykl v libovolných časech za prvních 60 s? Jakou měl střední rychlost za celý ten čas?

V prvních 10 s je dráha přibližně rovna střední rychlosti po 5 s, násobené časem 10 s, tedy $13,5 \cdot 10 = 135$ m. V dalších 10 s je střední rychlost (pro $t = 15$ s) 32,8 m/s, dráha $32,8 \cdot 10 = 328$ m. Celková dráha za prvních 20 s je $135 + 328 = 463$ m. Tímto postupem dostáváme pro:

$t =$	10	20	30	40	50	60	s,
$s =$	135	463	917	1392	1720	1980	m.

Střední rychlost = dráha : čas = $1980/60 = 33$ m/s.

Volný pád

Vzácným případem v mechanice, kdy je zrychlení stálé, je *volný pád*, kdy působí na těleso zemské zrychlení (zrychlení tíže, vyvolané zemskou přitažlivostí, gravitací). Zrychlení tíže se značí písmenem g . Nesmíme plést s gramem, který se také

značí g , ale stojatým. Pokusy bylo změřeno, že zemské zrychlení je u nás $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (na Měsíci, který je menší než Země, je zrychlení tíže 2 m/s^2). Jeho velikost se na různých místech povrchu zeměkoule trochu mění, počítáme však s touto střední hodnotou. Někdy počítáme se zrychlením v cm/s^2 , a protože $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, je pak $g = 980 \text{ cm/s}^2$.

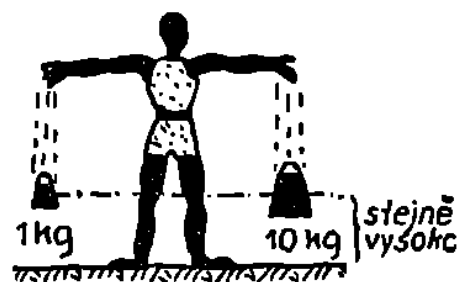
Na volném pádu a zákonech, jimiž se řídí padající těleso, nevidíme dnes nic zvláštního. A přece za časů Galileových kolem r. 1600 to byla velká sensace, která navždy proslavila nakloněnou věž v Pise, obr. 14. Staří fysikové a filosofové, třeba Aristoteles, od jejichž smrti uplynulo tenkrát už skoro 2000 let, a přece se jim stále do puntíku věřilo — tito filosofové učili, že těžké předměty padají k zemi rychleji a lehké pomaleji.

Galileo (1564—1642) zjistil, že všechna tělesa současně puštěná padají stejně rychle a na zem dopadnou současně, obr. 15. Provedl pak na tu dobu neslýchanou věc: dokazoval své tvrzení pokusem. Svrhl velkou a malou kouli s vrcholu nakloněné věže; dole stáli profesori z university, kteří si měli všimnout, jak obě koule dopadly. Skutečně dopadly současně, a přece většina z přihlížejících neuvěřila svědectví svých očí, protože to odporovalo učení Aristotelovu. Když se chtěl středověký učenec přesvědčit, jak něco je, podíval se do starých knih nebo do Bible, protože jen tam byla všechna moudrost. Roger Bacon, narozený r. 1214, hlasatel pokroku, vynálezce drobnohledu, strávil za bezbožné vědecké učení mnoho let ve vězení; byl obviněn, že se oddává černé magii.

Pozorováním volně padajících těles se zjistilo, že dráha je úměrná čtverci uplynuvšího času. Čtverec čísla 2 je $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, čtverec času t je t^2 .

Dále se zjistilo, že rychlost při volném pádu roste úměrně s časem, po který těleso padá. Za stejný čas přirůstá rychlost o stejné částky, protože zrychlení g je stále stejné, konstantní, nezávislé na váze tělesa.

Když zdvihneme větší kus železa, cítíme, že je těžší než kus malý; pustíme-li oba kusy na zem, spadnou stejně rychle, pádem se stejně zrychlují. Těžké těleso přitahuje země při-



Obr. 15. Lehké i těžké závaží padá k zemi stejnou rychlostí, má stejné zrychlení.

měřeně silněji, ale rychlost tím nevzrůstá, protože větší přitažlivá síla u něho musí zrychlovat i větší hmotu.

Za první; druhou; třetí... vteřinu volného pádu uběhne padající těleso 4,9; 14,7; 24,5... metrů čili dráhy jsou v poměru 1 : 3 : 5... Celková dráha při pádu je pak 4,9; 19,6; 44,1... metru čili celkové uběhnuté dráhy jsou v poměru 1 : 4 : 9... = 1 : 2² : 3²... Rychlost na konci jednotlivých vteřin je 9,8; 19,6; 29,4... m za s čili zisk rychlosti během jednotlivých vteřin, nazvaný zrychlení, je stálý, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Při volném pádu značíme zrychlení vždy g ; dráhu čili výšku, z které těleso padá, značíme h místo s ; ze vzorce (8) tím dostáváme vzorec pro konečnou rychlost

$$v = gt = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot h} = 4,43 \cdot \sqrt{h} \quad . \quad . \quad (9)$$

Těleso vržené svisle dolů rychlostí u má za t vteřin rychlost $u = gt$ a uběhlo dráhu $ut + gt^2/2$. Z výšky h má těleso rychlost $v = \sqrt{u^2 + 2gh}$.

Těleso vržené svisle vzhůru rychlostí u má za t vteřin rychlost $u - gt$. Zastaví se, když $gt = u$, tedy za $t = u/g$ vteřin. Za t vteřin uběhne vzhůru dráhu $ut - gt^2/2$. Do výšky h vystoupí za čas t , který najdeme z rovnice $h = ut - gt^2/2$. Určíme dvě hodnoty t , menší pro pohyb nahoru, větší pro pád dolů. Pro $u = 40 \text{ m/s}$ je $t = 40/9,8 = 4,1 \text{ s}$; $h = u^2/2g = 40^2/19,6 = 80,2 \text{ m}$.

Příklady: 1. Z výšky $h = 3 \text{ m}$ dopadne kámen na zem konečnou rychlostí $v = 4,43 \cdot \sqrt{h} = 4,43 \cdot \sqrt{3} = 7,67 \text{ m/s}$.

Ze vzorců (8) najdeme, že pád trvá $t = v/g = 7,67/9,8 = 0,78 \text{ s}$.

Za 3 s by spadl kámen do hloubky $h = gt^2/2 = 9,8 \cdot 3^2/2 = 44,1 \text{ m}$.

2. Klec důlního výtahu stoupala vzhůru rychlostí $u = 10 \text{ m/s}$, když prasklo lano. Bezpečnostní zařízení, které začne účinkovat 2 vteřiny po poruše lano, klec zastaví. Kde je v tom okamžiku klec? Počítáme přibližně se zrychlením $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

Po přetržení lana vystoupí klec ještě do výšky $h = u^2/2g = 10^2/20 = 5 \text{ m}$. Trvá to $t = u/g = 10/10 = 1 \text{ s}$. Proto další 1 s klec padá, než začne pracovat zařízení, které třením o vedení klec zastaví. Padá rychlostí $v = t \cdot g = 1 \cdot 10 = 10 \text{ m/s}$ na konci první s; proběhne dráhu $h = v^2/2g = 10^2/20 = 5 \text{ m}$. Z toho plyne, že při uvedení bezpečnostního zařízení v činnost stojí klec právě v tom místě, kde prasklo těžní lano.

Kdyby klec sjížděla dolů rychlostí $u = 10 \text{ m/s}$ a prasklo lano, má po dvou vteřinách od prasknutí rychlost $v = 10 + 10 \cdot 2 = 30 \text{ m/s} = u + gt$, označíme-li u počáteční rychlost. Uběhla by dráhu $h = (v^2 - u^2) : 2g = (30^2 - 10^2) : 20 = 40 \text{ m}$. V hloubce 40 m od místa neštěstí má klec už rychlost 30 m/s. Takové nebezpečí v praxi nikdy nehrozí.

3. Lokomotivy mohou doplňovat vodu za jízdy ze žlabu mezi kolejnicemi podle obr. 16. Do žlabu zasáhne násoska n , obr. A, voda stoupá až do výše h , jak ukazuje obr. B. Jak vysoko vystoupí voda, jede-li lokomotiva rychlostí $v = 36 \text{ km/hod}$ čili 10 m/s ?

Ze vzorce (9) je výška $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8} = 5,1 \text{ m}$.

4. Ve výkladu o padání těles stejnou rychlostí nás zarazí zkušenost, že přece tělesa *nepadají* stejně rychle k zemi. Peří nepadá stejně jako olověný brok. Zde do mechaniky zasahuje odpor *vzduchu*. Jeho velikost záleží na velikosti a na tvaru

tělesa. Peří má velký povrch, proto vzduch jeho pohyb klade větší odpor. Čím více vzduchu ubíráme, tím rychleji by i peří padalo k zemi; ve vzduchoprázdné spadne peří i brok stejně rychle. No ano, řeknete, tak to všechny dosavadní zákony a vzorečky platí jen pro vzduchoprázdný prostor, který je nemožný? Je to pravda, pokud porovnáváme dva krajní případy, právě ono peří a kus olova. V praxi však uvažujeme o pohybu technických těles a tam nejsou

takové rozdíly ve váhách. Kus oihly nebo kus olova padají už k zemi stejně rychle jako kus dřeva stejného tvaru. Vzorec platící teoreticky jen pro vzduchoprázdný prostor platí s velkou přibližností i pro pád ve vzduchu.

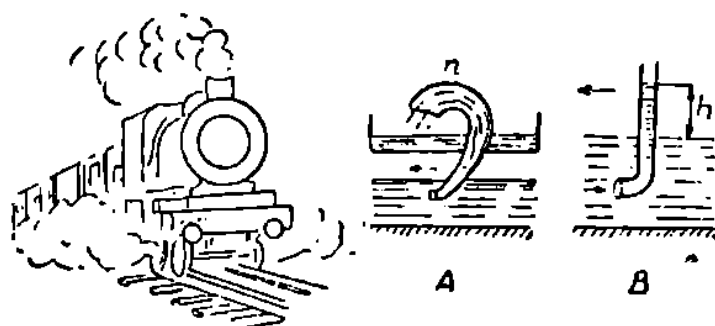
5. Z větší výšky dopadne člověk k zemi vždy stejnou rychlostí, asi 240 až 160 km za hodinu. Při skoku padákem z výšky asi 10 km bylo změřeno,

že nejprve padá letec rychlostí asi 240 km za h, padák je zatím uzavřen. Blíže k zemi, kde je hustší vzduch, roste i odpor vzduchu a rychlost padajícího muže se zmenší asi na 160 km za h. Otevřením padáku blízko nad zemí se tato rychlost zpomalí na několik metrů za s. Proto dopadne letec bez úrazu. Otevře-li letec padák třeba 300 m nad zemí, je trhnutí, které tím pocítí, nezávislé na výšce, z níž padá, protože padá k zemi stálou rychlostí. Uměním je správně odhadnout výšku nad zemí a otevřít včas padák (viz též str. 158).

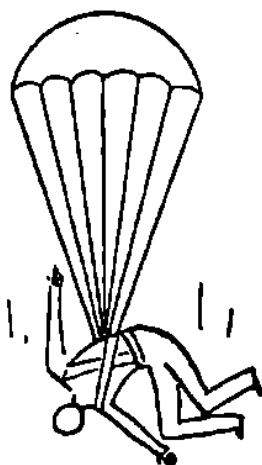
Podobný zjev nastává i u dešťových kapek, které vlivem odporů vzduchu dopadnou k zemi dost malou rychlostí. Kapka průměru $1/50 \text{ mm}$ má konečnou rychlost dopadu jen asi 12 mm/s . Desetkrát větší kapka průměru asi $1/5 \text{ mm}$ dopadne stokrát rychleji. Větší kapky vody se při pádu roztrhají o vzduch v menší. Proto se voda vysokých vodopádů roztrhává v mlhu malých kapek. Malé kapky mají

vzhledem ke své nepatrné váze poměrně velký povrch (jako to padající peří).

6. Kroupy padají k zemi rychleji než dešťové kapky. Jsou řidší než voda (led plave na vodě), ale mají větší rozměry než kapky, tedy při větší váze mají menší povrch (poměrně), a tím i menší odpor vzduchu.



Obr. 16. Čerpání vody do lokomotivy za jízdy.



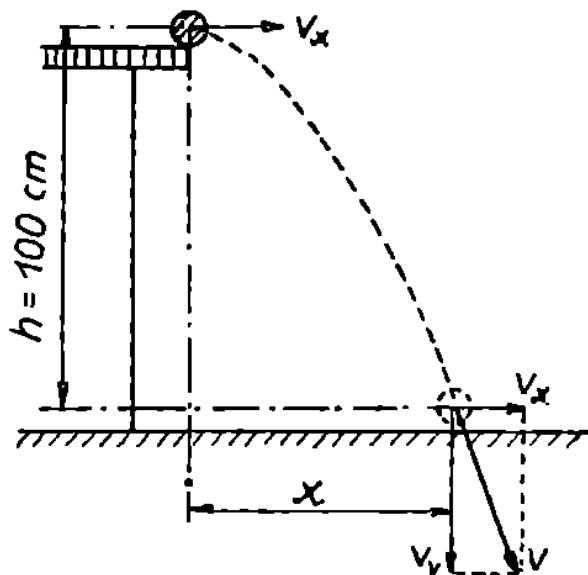
Olověné kuličky šrapnelů (průměru např. 1,5 cm) vystřelených do výšky dopadnou zpět na zem stélou, poměrně malou rychlostí tak, že jsou skoro neškodné.

7. Na Měsíci padají tělesa mnohem pomaleji než na Zemi, protože tam je malé zrychlení tíže. Člověk vážící na zemi 60 kg by na Měsíci vážil jen asi 10 kg (na pružinových vahách).

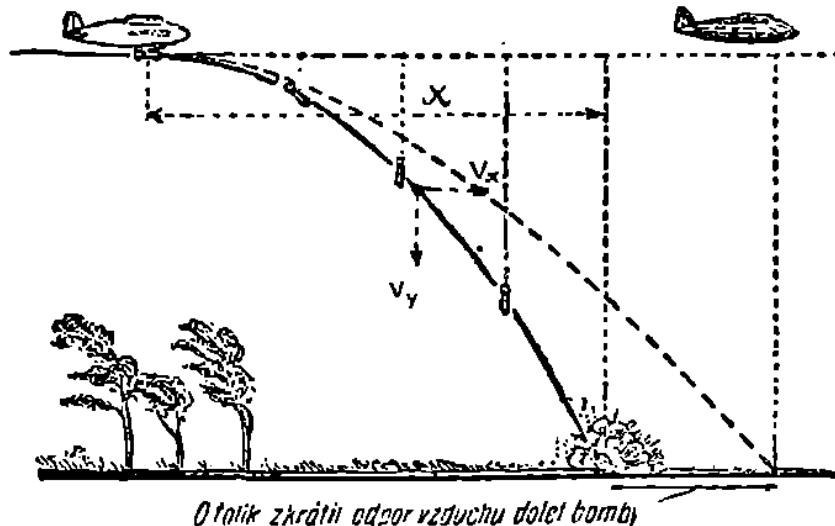
Molekuly zemského ovzduší, které se ohřátím neustále pohybují, mají jen zřídka rychlost větší než asi 11 km/s, potřebnou k tomu, aby unikly z vlivu zemské přitažlivosti do vesmíru. Molekuly ovzduší na Měsíci měly však dost velkou rychlost, aby překonaly přitažlivost Měsíce a rozběhly se do mezihvězdného prostoru.

Vodorovný vrh

Těleso se při vodorovném vrhu pohybuje vodorovnou rychlostí v a padá volným pádem. Výsledná dráha je parabola, obr. 17, jejíž vrchol je v místě vrhu.



Obr. 17. Vodorovný vrh.



Obr. 18.

Příklad: Koule kutálející se po stole vysokém $h = 100$ cm rychlostí $v_x = 100$ cm/s přejde přes hranu a dopadne na zem ve vzdálenosti x od kraje stolu.

$$\text{Doba pádu } t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 100/980} = 0,452 \text{ s.}$$

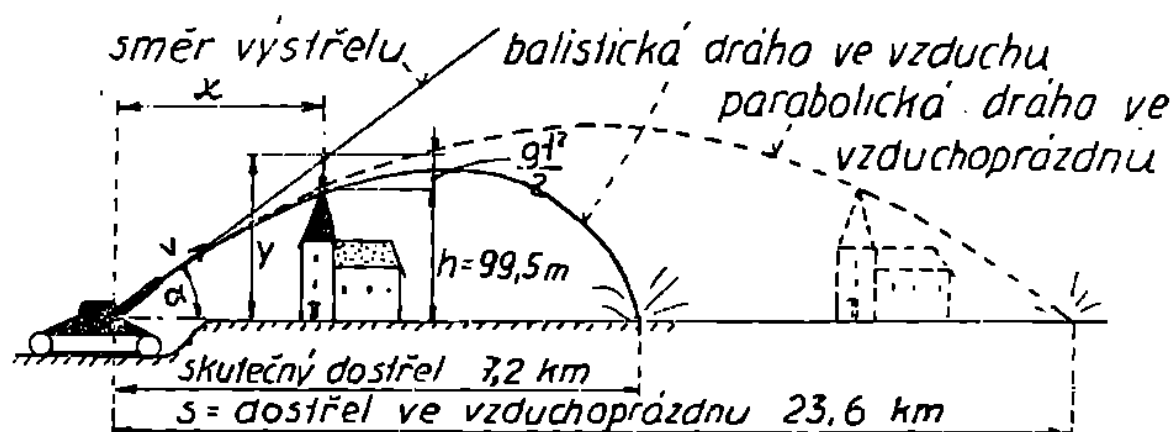
$$\text{Dráha } x = v_x \cdot t = 100 \cdot 0,452 = 45,2 \text{ cm.}$$

Svislá dopadová rychlost $v_y = gt = 980 \cdot 0,452 = 443 \text{ cm/s}$. Celková dopadová rychlost $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{100^2 + 443^2} = 454 \text{ cm/s}$.

Stejně se počítá i dráha letecké bomby, kterou musí letec uvolnit ve vzdálenosti x před cílem, *obr. 18*.

Šikmý vrh

Granát vystřelený šikmo vzhůru počáteční rychlostí $v \text{ m/s}$ by opisoval ve vzduchoprázdnu parabolickou dráhu. Protože však má velkou rychlost, a tím i značný odpor vzduchu, opisuje



Obr. 19. Dráha granátu.

je nesouměrnou balistickou křivku (z řec. *balein* = házet), *obr. 19*.

Příklady: 1. Úhel výstřelu $\alpha = 30^\circ$, počáteční rychlost granátu $v = 600 \text{ m/s}$. Za $1/3 \text{ s}$ po výstřelu zasáhl granát právě špičku kostelní věže, *obr. 19*. Uletěl by po přímce $z = 600/3 = 200 \text{ m}$. Vzdálenost kostela

$x = z \cdot \cos \alpha = 200 \cdot \cos 30^\circ = 200 \cdot 0,866 = 173,2 \text{ m}$. Výška kostela $h = y - gt^2/2 = z \cdot \sin \alpha - gt^2/2 = 200 \cdot 0,5 - 9,8 \cdot 0,33^2/2 = 100 - 0,5 = 99,5 \text{ m}$.

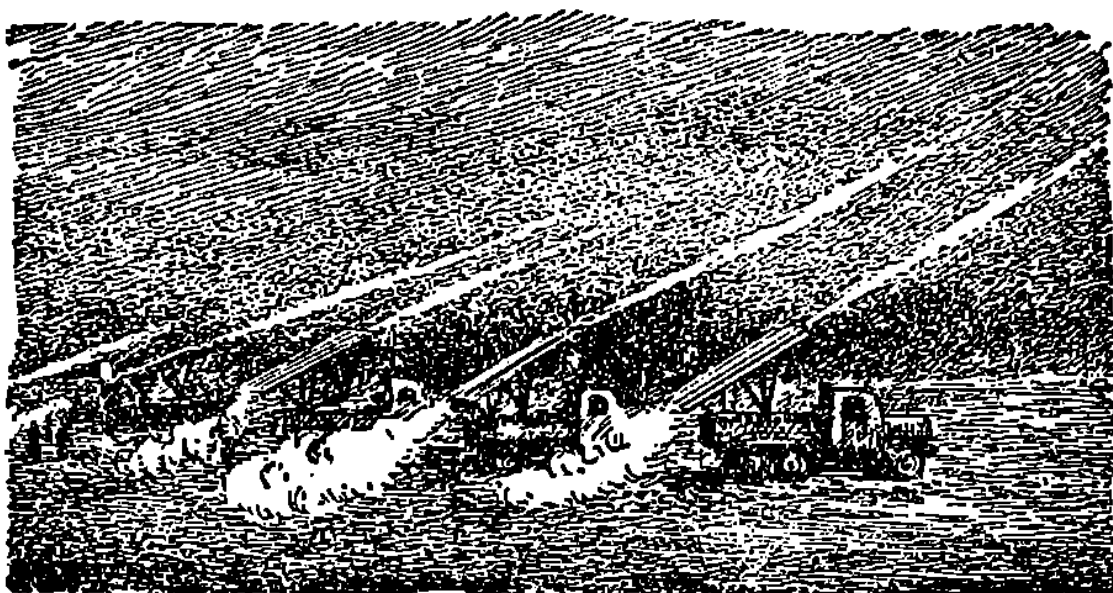
Svislá složka rychlosti $v_1 = v \cdot \sin \alpha$, vodorovná složka rychlosti $v_2 = v \cdot \cos \alpha$. Ve vzduchoprázdnu je čas pro pohyb vzhůru $t = v_1/g$ = čas pro pohyb dolů čili celkový čas letu $T = 2t = 2v \sin \alpha/g$. Rychlostí v má granát dostřel

$s = v_2 T = 2v \cdot t = 2v \cdot \cos \alpha \cdot v \sin \alpha/g = v^2 \sin 2\alpha/g$. Je největší při $\alpha = 45^\circ$, kdy $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$. Proto mají raketové minomety „Katushe“ největší dostřel při úhlu výstřelu asi 45° , *obr. 20*.

2. Rekordní vrh koule z r. 1952 (J. Skobla) byl $s = 16,33 \text{ m}$. Můžeme zanedbat odpor vzduchu a předpokládat, že úhel vrhu $\alpha = 45^\circ$. Rychlost vrhu

$$v = \sqrt{gs} = \sqrt{9,8 \cdot 16,33} = 12,65 \text{ m/s}.$$

Ze vzorce pro výpočet dráhy s plyne důležitý poznatek pro přepočtení světových rekordů (na který se však dosud nebere zřetel): Délka vrhu



Obr. 20. Střelba gardových „katuší“.

(stejně skoku) záleží na velikosti zemského zrychlení g , které není všude stejné (protože Země není přesnou koulí):

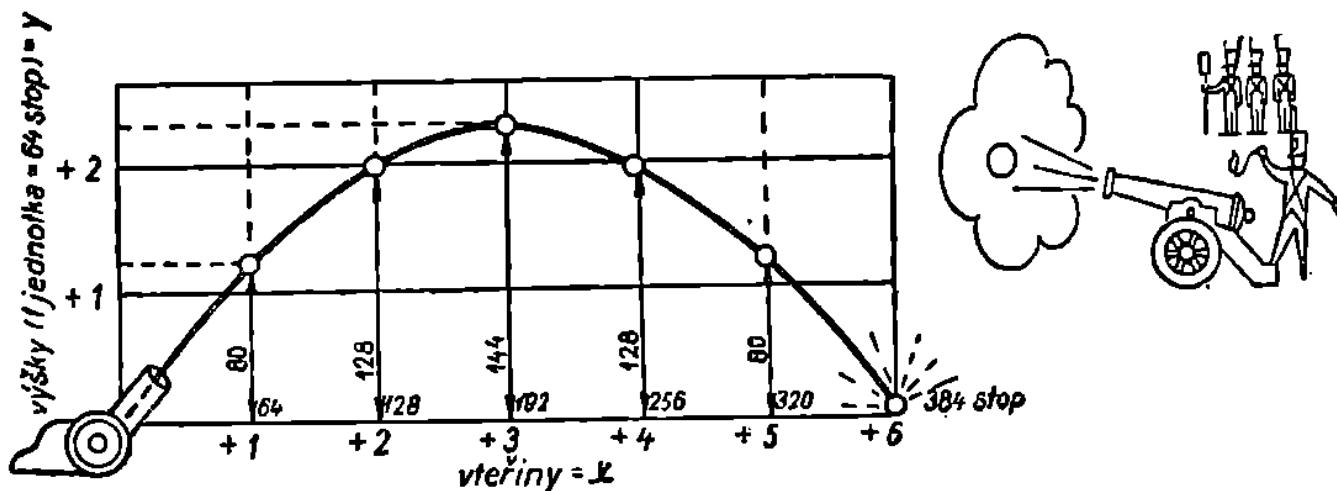
na pólu	$g = 9,83 \text{ m/s}^2$,
v Archangelsku ($64^\circ 30'$)	$g = 9,82 \text{ m/s}^2$,
v Leníngradě (60°)	$g = 9,819 \text{ m/s}^2$,
v Praze (50°)	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$,
v Káhiře (30°)	$g = 9,793 \text{ m/s}^2$,
na rovníku	$g = 9,78 \text{ m/s}^2$.

Z toho plyne, že by na rovníku při stejné počáteční rychlosti $v = 12,65 \text{ m/s}$ doletěla koule J. Skobly do vzdálenosti

$$s = \frac{v^2}{g} = \frac{12,65^2}{9,78} = 16,38 \text{ m, tedy o 5 cm dál.}$$

Tak by se vlastně měly všechny rekordy přepočítávat na rovník.

3. *Descart*, o němž byla už zmínka při výkladu o znázornění průběhu funkcí křivkami, byl dělostřelecký důstojník a řešil r. 1620 dráhu dělové koule z houfnice podle obr. 21.



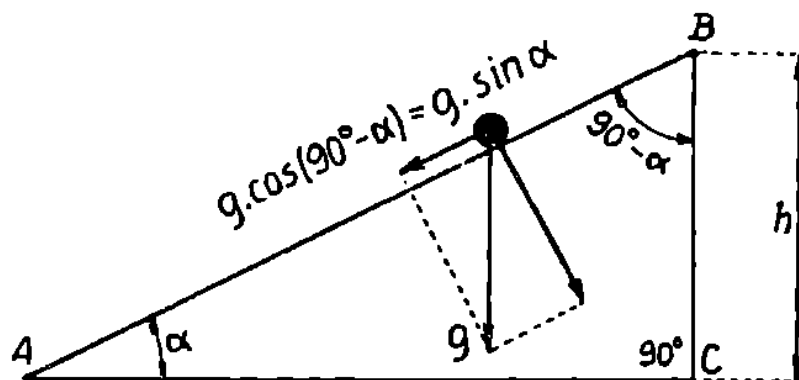
Obr. 21. Výstřel ze středověké houfnice.

Koule doletí do vzdálenosti 384 stop za 6 vteřin. Dosáhne výšky 144 stop, její dráha má tvar paraboly.

$x = 0$	1	2	3	4	5	6	sec.
$y = 0$	$1\frac{1}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	2	$1\frac{1}{4}$	0	jednotek.

Na vodorovné i svislé ose 1 jednotka = 64 stop. Museli bychom chvíli zkoušet různé vzorce pro $y = f(x)$, než bychom našli, že v tomto případě platí

$$y = f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$



Obr. 22. Nakloněná rovina bez tření.

Z toho se může vypočítat, v jaké poloze je dělová koule v každé vteřině. Např. ve čtvrté vteřině ($x = 4$) je koule 4 jednotky od děla (tj. $4 \cdot 64 = 256$ stop) a ve výšce

$$y = \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{4^2}{4} = \frac{12}{2} - \frac{16}{4} = 6 - 4 = 2 \text{ jednotky po } 64 \text{ stopách, tedy } 2 \cdot 64 = 128 \text{ stop.}$$

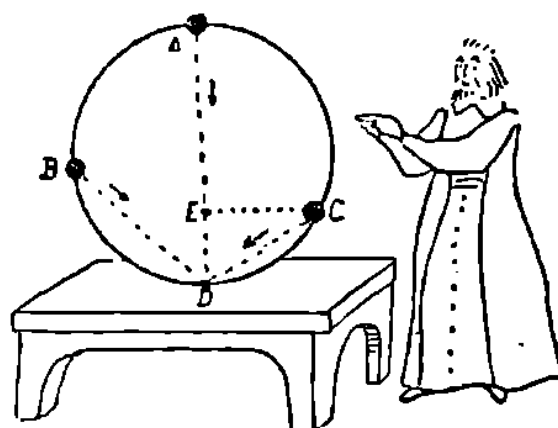
Pohyb po hladké nakloněné rovině

Sklon roviny je α , obr. 22. Těleso, které se pohybuje dolů bez tření, má svislé zrychlení g , které se rozkládá na složku rovnoběžnou s rovinou a kolmou k rovině. Je-li výška $BC = h$, je $AB = h \cdot \text{cosec } \alpha$. Začíná-li pohyb po AB v B z klidu, má těleso v A rychlost

$$v = \sqrt{2 \cdot g \sin \alpha \cdot h \cdot \text{cosec } \alpha} = \sqrt{2gh} = 4,43 \cdot \sqrt{h},$$

stejnou jako při volném pádu s výšky h .

Příklady: 1. *Slavná Galileova úloha.* Na obvodu kružnice stojící ve svislé rovině jsou v místech A, B, C podle obr. 23 kuličky. Všechny tři kuličky se současně začnou pohybovat do D po vytečkovaných drahách



Obr. 23. Galileova úloha asi z r. 1620: která ze tří kuliček A, B, C dopadne první do místa D ?

(A svisle, B , C šikmo), jako když se valí žlábkem bez tření vlivem své váhy. Která dostihne bodu D nejdřív?

Jak píše Galileo, je prokázáno výpočtem i pokusem, že všechny tři kuličky dostihnou D *současně*, ať začínají na kterémkoli místě obvodu. Je to tím, že se kuličky pohybují různými rychlostmi. Volně padající z A do B běží nejrychleji, z B do D pomaleji, z C do D nejpomaleji, protože má nejméně skloněnou dráhu.

Je-li $AD = h = gt^2/2$, je čas, za který spadne kulička z A do D , roven $t = \sqrt{2h/g}$. Z C do D přijde kulička po nakloněné rovině zrychlením a za čas $t_1 = \sqrt{2 \cdot CD/a}$. Protože $a/g = ED/CD$, čili $a = g \cdot ED/CD$, a také $ED : CD = CD : AD$, je

$$a = \frac{CD}{AD} \cdot g; \text{ po dosazení } t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot CD}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot CD \cdot AD}{CD \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot AD}{g}} = t,$$

oba časy jsou stejné.

2. *Plování těles po proudu řeky* můžeme přirovnat k volnému pádu. Voda představuje šikmou rovinu, po níž loď klouže zrychleným pohybem, ač sama voda se nezrychluje, protože se zdržuje třením o dno. Loď tedy bez veslování a bez motoru *pluje rychleji než teče voda* (tím rychleji, čím je větší), až se její rychlost ustálí. Veslo shozené z lodi zůstává pozadu, silně zatížená loď předjede slabě zatíženou. Tento neobyčejně zajímavý úkaz málokdo zná a umí vyložit.

Vektory, skládání pohybů a rychlostí

Některé veličiny jsou určeny jen velikostí (váha, čas, teplota, cena aj.). Říkáme jim *skaláry* (z latin. *scalae* = stupnice). Někdy však velikost nestačí, je třeba znát i směr (rychlost letadla je např. 600 km/h, ale musíme ještě znát směr letu). Veličiny, které mají velikost a směr, jsou *vektory* (z latin. *vector* = směřující).

Vektor je orientovaná úsečka (*přímka určité délky s šipkou určitého směru*).

Rychlosti mohou mít stejnou velikost, a přece jsou různé, mají-li různý směr. Vektory sčítáme graficky tím, že ke konci jednoho přikreslíme druhý a spojnice začátku prvního a konce druhého dá výsledný vektor.

Příklady: 1. Parník pluje na sever rychlostí 10 mil za h. Mořský proud běží na severovýchod rychlostí 3 míle za h. Jak rychle a kterým směrem parník skutečně pluje?

Nakreslíme si rychlosti jako vektory, *obr. 24*; ab značí 10 mil/h na sever, bc značí 3 míle/h, pod 45° k ab . Skutečná rychlost parníku je ac . Odměříme její velikost $ac = 12,6$ mil/h. Je od ab skloněno o úhel $\alpha = 10^\circ$.

Námořní nebo letečtí navigátoři takto počítají rychlost a polohu lodí (letadla); 1 mořská míle je asi 1609 m.

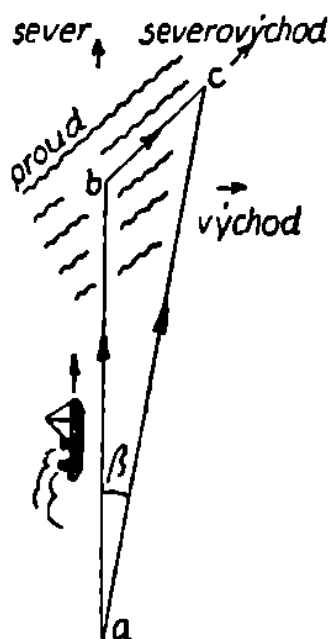
2. Turista šel z bodu a (použijeme také *obr. 24*) 12 kilometrů na sever do místa označeného b . Tam se obrátil o 90° vpravo, tedy k východu,

a šel rovně 5 kilometrů k místu c. Jak dlouhou cestu by ušel, kdyby se z c vrátil do a přímoú čarou?

Když si úlohu nakreslíme (zvolíme měřítko délek tak, že 1 km kreslíme dlouhý 1 cm), můžeme změřit délku $ac = 13$ cm. Proto je c od a vzdáleno 13 kilometrů.

Můžeme však také počítat podle starobylé Pythagorovy věty:

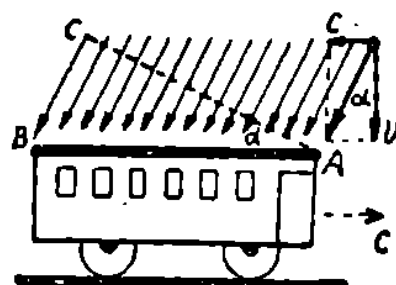
„V pravoúhlém trojúhelníku čtverec nad přeponou je roven součtu čtverců nad odvěsnami.“



Obr. 24. Skládání dvou pohybů.



Obr. 25. Zmokne méně?



Obr. 26.

Odvěsny známe $ab = 12$; $bc = 5$; neznámou přeponu ac označme x . Z Pythagorovy věty $x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$; $x = 13$.

3. Kdy promoknete víc; stojíte-li půl hodiny na dešti nebo běžíte-li půl hodiny tímto deštěm domů, obr. 25? Jinak řečeno, kdy dopadne na střechu vagónu víc vody, stojí-li v dešti nebo když jede, obr. 26?

Na stojící vagón padá voda svisle. U jedoucího vagónu voda dopadá šikmo tím, že složku rychlosti vagónu C dáme dešti, obr. 26.

Průřez F , na který voda dopadá v klidu, je úměrný délce AB . Za pohybu je průřez F_1 , vystavený dešti, úměrný délce AC .

$$F_1 : F = AC : AB = \cos \alpha.$$

Množství vody Q , dopadající za 1 s, je úměrné průřezům a výšce H , s níž voda za 1 s spadne, H je úměrné rychlosti dopadu; $H_1 : H = v_1 : v = 1 : \cos \alpha$.

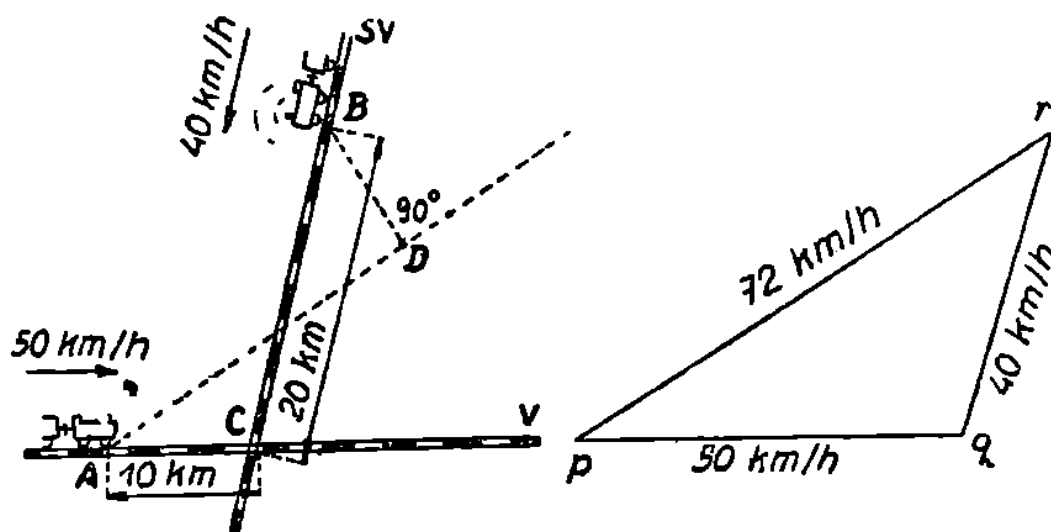
Z toho poměr dopadlých množství vody

$$Q_1 : Q = F_1 H_1 : F H = \frac{F_1}{F} \cdot \frac{H_1}{H} = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = 1.$$

Plyne z toho, že za pohybu i v klidu dopadne za stejný čas na střechu stejné množství vody. Promoknete stejně, stojíte-li v dešti nebo běžíte-li stejný čas deštěm domů. Protože se však větší rychlostí (během) zkrátí čas nutný k uražení určité vzdálenosti, zmokne méně ten, kdo bude kratší dobu na dešti, tj. kdo běží.

4. Na dvou tratích, které se křížují v C , jsou vlaky v polohách A , B , obr. 27. Jak daleko od křižovatky C budou oba vlaky ve chvíli, kdy jsou co nejbližší u sebe?

Protože vlak B jede od severovýchodu (SV), má vlak A vzhledem k nehybnému B relativní složku rychlosti 40 km/h ve směru SV a rychlost 50 km/h na východ V. Jeho výsledná relativní rychlost $pr = 72 \text{ km/h}$ se získá sečtením vektorů pq a qr . Z A nakreslíme přímku AD rovnoběžnou s pr a máme pohyb (polohy) vlaku A vzhledem k B (považovanému za nehybný). Nejbližší jsou ve vzdálenosti BD (odměříme $8,12 \text{ km}$). A ujel vzhledem k B dráhu $AD = 23,2 \text{ km}$ při rychlosti 72 km/h za $23,2/72 = 0,322$ hodin. Ujel tedy A celkem $50 \cdot 0,322 = 16,1 \text{ km}$, B celkem $40 \cdot 0,322 = 12,9 \text{ km}$. Když jsou vlaky nejbližší u sebe, je A už $6,1 \text{ km}$ za křižovatkou C a B je $7,1 \text{ km}$ před křižovatkou C .



Obr. 27. Křižovatka dvou vlaků.

Pohyb na kružnici

Chr. Huyghens odvodil asi r. 1670, že při pohybu po kružnici je radiální zrychlení a_r stálé; nemění velikost rychlosti v , mění jen směr. Ve stejných obdobích dt se mění směr rychlosti v o stejné úhly $d\beta$, jak už bylo vyloženo u obr. 10. Úhlová rychlost $\omega = d\beta/dt$ je konstantní. Za čas t oběhne těleso po kružnici N -krát. Jedna otáčka (říkáme jedna *perioda*) trvá $t/N = T$ vteřin. Počet otáček za vteřinu čili počet period nazýváme *frekvence*, $n = N/t$. Z toho plyne, že frekvence je převrácenou hodnotou periody, $n = 1/T$. Pamatujme si tyto nové názvy:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{n} = \text{perioda}; \quad n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} = \text{frekvence} \quad (10)$$

Když budeme mluvit o úhlu, je to úhel v obloukové míře, v radiánech ($1 \text{ rad} = 57,3^\circ$).

Na obvodu kružnice poloměru r je rychlost (obr. 28)

$$\boxed{v = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{2 \pi r}{T}; \omega = \frac{\text{úhel}}{\text{čas}} = \frac{2 \pi}{T}, \text{ čili } v = \omega \cdot r; \quad (11)}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega}$$

v je obvodová rychlost; ω (omega) je *úhlová rychlost*. Úhlová rychlost ω je 2π - násobkem frekvence n , tedy $\omega = 2 \pi n$. Proto se také místo úhlová rychlost někdy říká *kruhová frekvence*; otáčky n jsou tu za vteřinu. Jsou-li n

otáčky za minutu, je $\omega = \frac{2 \pi n}{60} =$

$$= \frac{\pi n}{30} = 0,105n; \quad n = 30 \omega / \pi =$$

$$= 9,55 \omega; \quad v = \frac{\pi d n}{60} = \frac{\pi r n}{30}.$$

Dělíme šedesáti, protože 1 min = 60 s.

Rozměr obvodové rychlosti v je např. metry za vteřinu, m/s.

$$120 \text{ m/s} = 60 \cdot 120 \text{ m/min} = 7200 \text{ m/min.}$$

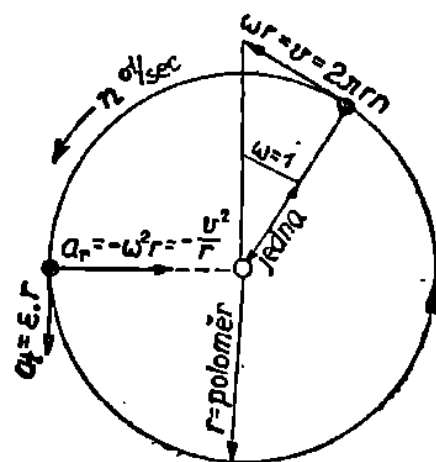
Úhlová rychlost ω má rozměr $1/\text{s} = \text{s}^{-1}$ (čti „sekunda na minus prvou“). Umocněním na -1 dostaneme převrácenou hodnotu čísla, $2^{-1} = 1/2 = 0,5$. Rozměr úhlové rychlosti vyplývá ze vzorce

$$[\omega] = \frac{v}{r} = \frac{\text{m/s}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}.$$

Počet otáček za jednotku času je také vlastně úhlová rychlost, je-li jednotkou úhlu úhel plný (360°).

Rovnice (6) a (11) jsou v mechanice velmi důležité a ten, kdo chce dál studovat, je musí znát z paměti. Považujeme-li směr od středu kružnice za kladný, působí radiální zrychlení a_r směrem ke středu, záporně. Spojíme-li rovnice (6) a (11), platí

$$\boxed{a_r = -v \cdot \omega = -\omega \cdot r \cdot \omega = -\omega^2 \cdot r = -v^2/r} \quad (12)$$



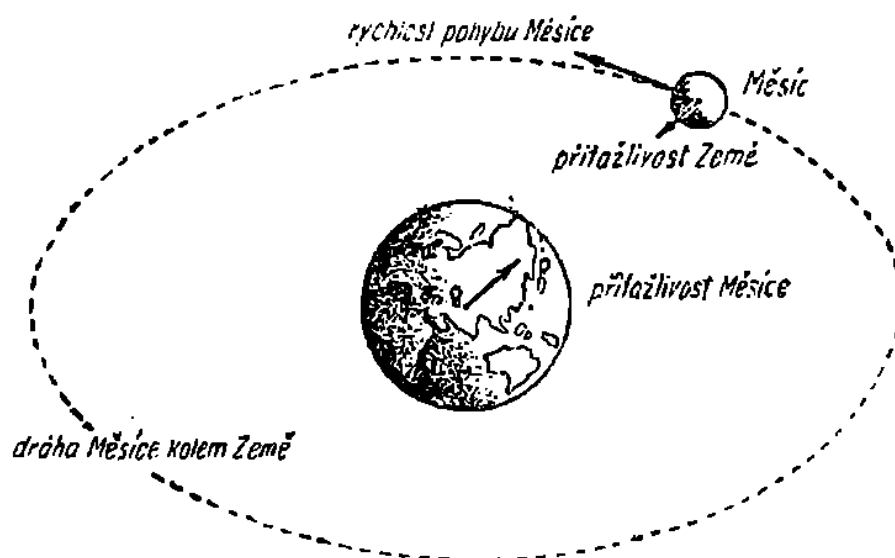
Obr. 28. Pohyb po kružnici.

Při radiálním zrychlení a_r podle (12) obíhá těleso po kružnici poloměru r stálou úhlovou rychlostí ω , čili stálou obvodovou rychlostí v . Tak např. měsíc obíhající kolem zeměkoule má radiální zrychlení $a_r = 2,7 \text{ mm/s}^2$, obr. 29.

Přírůstek úhlové rychlosti za jednotku času je úhlové zrychlení ε (epsilon).

$$\varepsilon = d\omega : dt; \text{ při } \varepsilon = \text{konst je } \omega = \varepsilon t; \varphi = \varepsilon t^2/2 \quad (13)$$

Zde φ je středový úhel pootočení v radiantech.



Obr. 29. Oběh měsíce kolem zeměkoule.

Tečné zrychlení při otáčení a_t je podle obr. 28

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon \quad \dots \dots (14)$$

Na těleso obíhající po kružnici působí tedy dvojí zrychlení; tečné a_t a radiální a_r . Tečné (ve směru tečny) působí pohyb, radiální zakřivuje dráhu.

- Příklady:** 1. Řemenice má 50 ot/min. Jaká je její úhlová rychlost?
 $\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 50/30 = 5,24 \text{ radiantů za sec} = 5,24 \text{ s}^{-1}$.
2. Na poloměru $r = 0,4 \text{ cm}$ se točí těleso úhlovou rychlostí $\omega = 50 \cdot \pi \text{ radiantů/s}$. Jaké je radiální zrychlení?
 $a_r = \omega^2 r = (50^2 \cdot \pi^2) \cdot 0,4 = 3140 \text{ cm/s}^2 = 31,4 \text{ m/s}^2$.
3. Bod na obvodu setrvačníku, vzdálený 0,8 m od středu, má obvodovou rychlost $v = 12 \text{ m/s}$. Jaká je úhlová rychlost a kolik otáček koná za minutu?
 $\omega = v/r = 12/0,8 = 15 \text{ radiantů za s}$.
 $n = 30 \cdot \omega/\pi = 30 \cdot 15/\pi = 143,24 \text{ ot/min}$.

4. Kolo má $n = 45$ ot/min. Jeho úhlová rychlost je $\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 45/30 = 4,7$ radiantů za s. Značí to, že se za 1 s otáčí každý bod kola o úhel 4,7 v obloukové míře, o 4,7 radiantů. Protože 1 radiant je asi $57,3^\circ$, značí to otočení o $4,7 \cdot 57,3 = 270^\circ$.

5. Vrtule táhne letadlo vpřed tím, že se zašroubovává do vzduchu. Bylo zjištěno, že nejrychleji běžící konec vrtule nesmí dosáhnout rychlosti zvuku ve vzduchu, tj. asi 330 m/s. Vrtule koná 1680 ot/min. Její konec nemá přestoupit rychlost 280 m/s. Jaký může být nejvyšší průměr vrtule?

$$\text{Ze vzorce } v = \frac{\pi d n}{60} \text{ je } d = \frac{60 v}{\pi n} = \frac{60 \cdot 280}{3,14 \cdot 1680} = 3,18 \text{ metru.}$$

Vypočítali jsme, že průměr (délka obou listů) vrtule nemůže v tomto případě přestoupit 318 cm.

6. Brus má průměr 40 cm, tedy 0,4 m. Aby dobře pracoval a neroztrhl se, může mít obvodovou rychlost nejvýše 25 m/s. Jaké může mít otáčky za minutu?

$$\text{Ze vzorce } v = \frac{\pi d n}{60} \text{ je } n = \frac{60 v}{\pi d} = \frac{60 \cdot 25}{3,14 \cdot 0,4} = 1190 \text{ ot/min.}$$

7. Bruska na malé díry má 36 000 ot/min. Jakou obvodovou rychlostí brousí kotouček, jehož průměr je 8 mm, tj. 0,008 m?

$$v = \frac{\pi d n}{60} = \frac{3,14 \cdot 0,008 \cdot 36\,000}{60} = 15,1 \text{ m/s.}$$

8. Obvodové čepy se soustruží podle obr. 30. Obvodová (řezná) rychlost při soustružení se určuje v metrech za minutu. Proto ve vzorci pro v nedělíme 60.

Řezná rychlost $v = \pi \cdot d \cdot n = 3,14 \cdot 0,06 \cdot 3000 = 566 \text{ m/min.}$

9. Jaká je úhlová rychlost Země? Ke Slunci se zeměkoule obrátí týměž místem za rok 365,25krát. Současně ve stejném smyslu oběhne jednou za rok kolem Slunce, čili ve směru určité stálice stojí totéž místo za rok 366,25krát. Rok má 365,25 středních slunečních dnů po 24 hod. Hvězdný den má $365,25/366,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,164 \text{ s.}$ Úhlová rychlost Země $\omega = 2\pi/86\,164 = 0,000\,0729 \text{ s}^{-1}.$

10. Kolo se roztočilo z klidu za $t = 20 \text{ s}$ na $n = 200$ ot/min, tj. na úhlovou rychlost $\omega = 0,105 n = 0,105 \cdot 200 = 21 \text{ s}^{-1}.$ Úhlové zrychlení ze vzorce (13)

$$\varepsilon = \omega/t = 21/20 = 1,05 \text{ s}^{-1}.$$

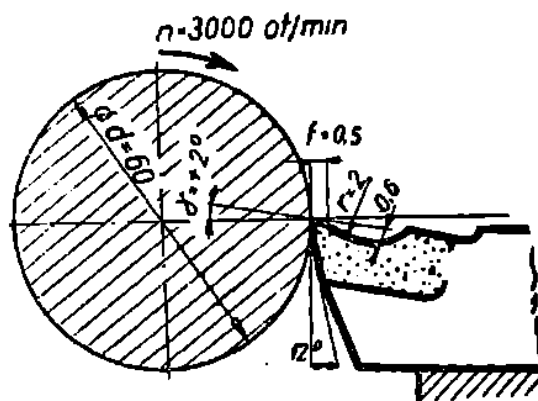
Středový úhel, který opíše bod na obvodu za $t = 20 \text{ s}$

$$\varphi = \varepsilon t^2/2 = 1,05 \cdot 20^2/2 = 201 \text{ rad.}$$

Vydělením 2π (tj. 360°) dostaneme počet otáček kola za 20 s, tedy $201/2\pi = 33,4$ ot.

Příklady otáček za minutu

Pedály velocipédu asi	45	Turbína parní, obyč.	3 000
Gramofonová deska asi	78	Vrtule letadla asi	1 500
Šroub parníku asi	130	Vřeteno brusky až	50 000
Kola osobního vlaku asi	180	Ultracentrifuga až	500 000



Obr. 30. Soustružení nožem ze slinutého karbidu.

Převody

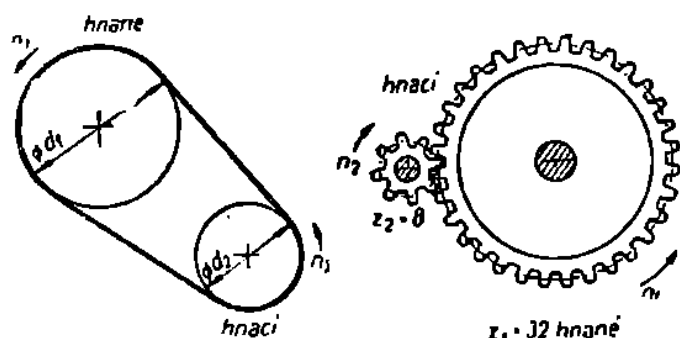
Při přenosu síly řemenem, ozubenými koly (obr. 31), řetězem užíváme názvu „převod“ pro poměr

$$\text{převod } i = \frac{\text{otáčky kola hnaného}}{\text{otáčky kola hnacího}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (15a)$$

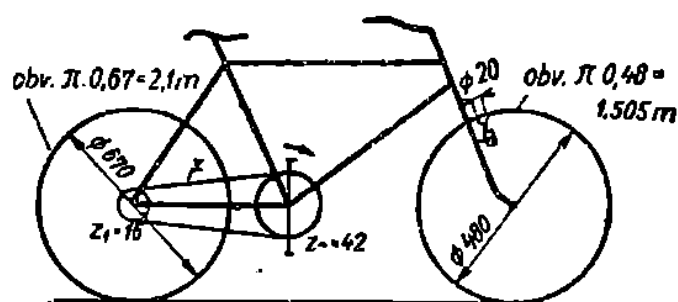
Neklouže-li řemen, jsou obvodové rychlosti stejné.

$$\pi d_1 n_1 = \pi d_2 n_2, \text{ čili } d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2 ; z_1 \cdot n_1 = z_2 \cdot n_2 \quad (15b)$$

Platí tedy základní pravidlo: větší průměr $\times$ otáčky = menší průměr $\times$ otáčky. Z toho snadno vypočítáme převody.



Obr. 31. Převod řemenem a ozubenými koly.



Obr. 32. Převody na velocipédu.

U řemenic na obr. $d_1 = 360$, $d_2 = 180$ mm. Převod $i = 180 : 360 = 1 : 2$ = jedna ku dvěma, dopomala (hnané kolo se točí pomaleji než hnací).

U ozubených kol na obr. $z_1 = 32$, $z_2 = 8$, převod $i = 8 : 32 = 1 : 4$ = jedna ku čtyřem, dopomala. Má-li hnací kolo $n_2 = 200$ ot/min, má hnané kolo $200 : 4 = 50$ ot/min.

Příklad: Na velocipédu jsou upraveny převody podle obr. 32. Jedeme po rovině rychlostí 30 km/h. Jak rychle musíme šlapat?

Počítáme se středním průměrem pneumatiky 0,67 m, tedy s obvodem $\pi \cdot 0,67 = 3,14 \cdot 0,67 = 2,1$ m.

$$\text{Převod na zadní kolo } i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{42}{16} = \frac{2,625}{1} = 2,625 : 1 \text{ dorychla.}$$

Na jednu otáčku převodníku se otočí zadní kolo 2,625krát. Ujede tím $2,625 \cdot 2,1 = 5,51$ metru.

Jedeme rychlostí 30 km = 30 000 m/h. Za hodinu musíme šlápnout $30\,000 : 5,51 = 5450$ krát. Protože 1 hod = $60 \times 60 = 3600$ vteřin, nutno šlápnout za vteřinu $5450 : 3600 = 1,515$ krát, čili za minutu musí mít převodník se šlapadly $5450 : 60 = 91$ otáček.

Je to už značná rychlost. Při cyklistických závodech však ujedou závodníci denně i několik set kilometrů obtížnou cestou a mají průměrné rychlosti až 40/h. Šlapou tedy ještě rychleji.

Jak rychle se při rychlosti 30 km/h točí kotva dynamka na svícení, poháněná předním kolem?

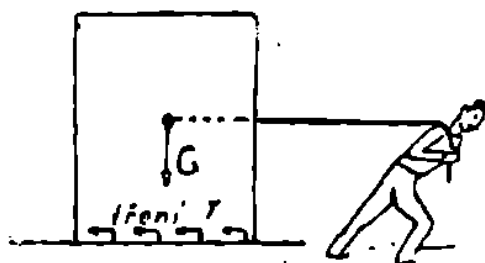
Za hodinu udělá přední kolo $30\,000 : 1,505 = 19\,950$ otáček. Za minutu má $19\,950 : 60 = 332,5$ otáček.

Otáčky dynamka ze vztahu (15 b); $d_1 n_1 = d_2 n_2$,

$$20 \cdot n_1 = 480 \cdot 332,5; n_1 = \frac{480 \cdot 332,5}{20} = 7970 \text{ ot./min}$$

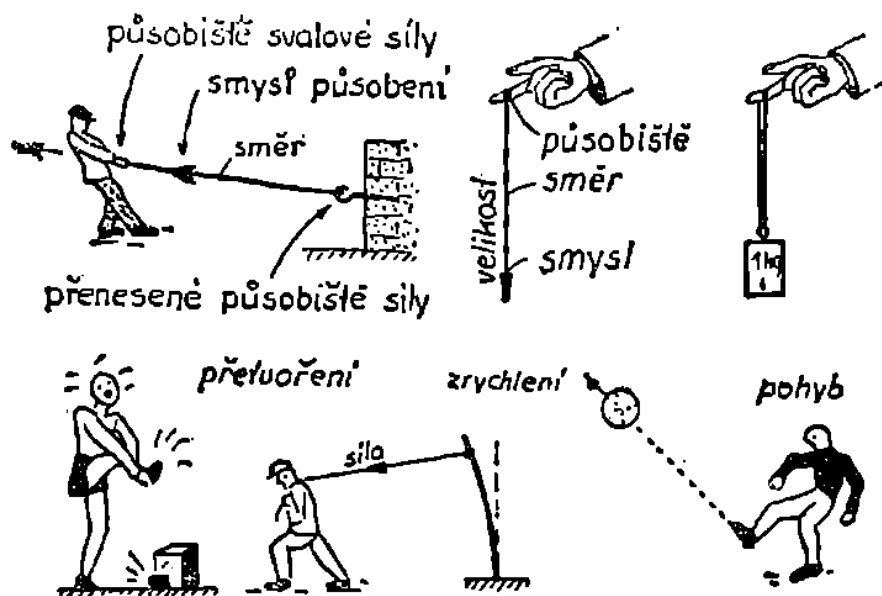
DYNAMIKA

Dynamika pojednává o silách, studuje příčiny pohybu. Zde ji dělíme na *kinetiku* (nauku o vztahu sil a pohybů), *statiku* (nauku o rovnováze sil) a *nauku o pružnosti a pevnosti*. Zatím jsme studovali jen kinematiku (nauku o pohybu), nestarali jsme se o síly, příčinu pohybu.



Síla a hmota

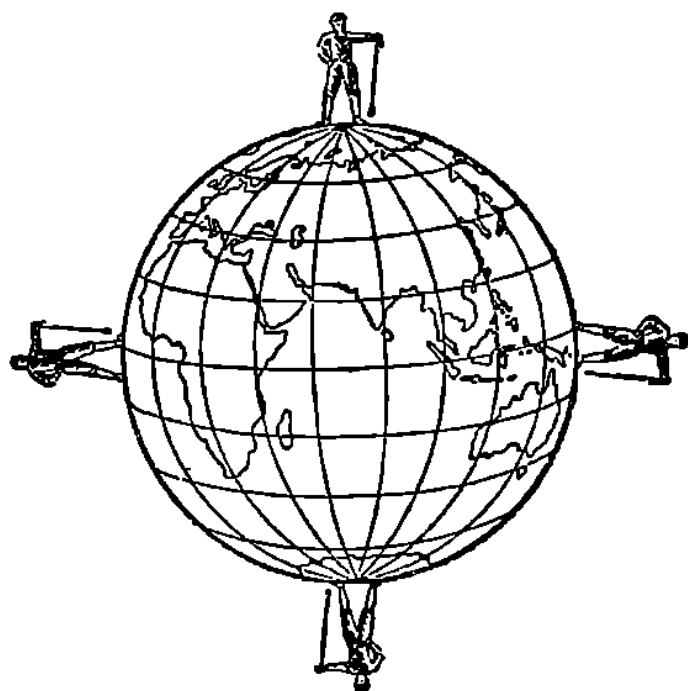
Sílu můžeme nahmatat. Je to *vektor*, obr. 33, protože má nejen *velikost*, ale i *směr* (určený přímkou) a *smysl* (určený šipkou). Působíště síly se může v jejím směru přenášet.



. Obr. 33. Vznik síly.

Nehybná tělesa síla *přetvoří*, pohyblivá tělesa síla *zrychlí*. Může však mít i jiné účinky: stlačením tělesa roste jeho teplota, stlačením krystalu vzniká elektrický proud (piezoelektrika), stlačený fosfor mění barvu atd.

Hmota v mechanice (Newton zavedl název *massa*) je něco jiného než hmota v denním životě. Není to jen název pro množství hmoty (1 kg soli značí vlastně množství soli o hmotě 1 kg), ale spíš název pro dvě základní vlastnosti každého tělesa: *váhu* a *setrvačnost*. Hmota je těžká, země ji přitahuje (na dálku, bez doteku) silou, které se říká váha, obr. 34.



Obr. 34. *Paradox gravitace (zemské přitažlivosti). Odpovídá obrázek skutečnosti? Ano, jen člověk je kreslen zvětšený. Olovnice směřuje do středu Země.*

Hmota má setrvačnost, nemění sama od sebe velikost nebo směr své rychlosti při pohybu, k změně je nutná síla.

V Sèvres u Paříže je v podzemním betonovém krytu uschován váleček z platiny a iridia, jemuž se říká *mezinárodní kilogram hmoty* [kg]. Váha tohoto válečku (síla, jíž je přitahován k zemi) je mezinárodní *jednotkou síly* [kg*, čti kilogram síly, hvězdička u kg* rozliší sílu od hmoty.] Jediným prototypem je tedy definována jednotka hmoty [kg] i jednotka síly [kg*]. Místo kg* se někdy (ve fyzice) píše kp (*kilopond*), je to přibližně také váha 1 dm³ destilované vody při 4°C.

Jednotkou síly je tedy v technice 1 kg*; často (a proto i v dalších výpočtech) hvězdičku vynecháváme, když je jasné, že jde o sílu (váhu) a ne o hmotu; píšeme např. síla $P = 100$ kg (místo 100 kg*).

Jednotkou hmoty je v technice 1 technická jednotka hmoty, tj. 9,8 kg hmoty. Dělíme-li váhu G v kg* číslem 9,8, dostaneme hmotu v technických jednotkách hmoty (jejichž rozměr je kg* s²/m). $1 \text{ kg}^* \text{ s}^2/\text{m} = 9,8 \text{ kg}$.

Při volném pádu váha 1 kg* vytvoří zrychlení 1 m/s² ve hmotě těžké 9,8 kg*. Proto má těleso o váze 9,8 kg* jednu technickou jednotku hmoty a těleso vážící 100 kg* má $100 : 9,8 \approx 10$ technických jednotek hmoty.

Poznámka: V nové fyzikální soustavě jednotek metr-kilogram-sekunda (MKS) je jednotkou hmoty 1 kg a jednotka síly je 1 *newton* ($= 1/9,8 \text{ kg}^* = 0,102 \text{ kg}^* = 1 \text{ N} = \text{síla, která tělesu hmoty 1 kg udělí zrychlení } 1 \text{ m/s}^2$). Člověk má tedy v této soustavě např. hmotu 70 kg a váží $70 \text{ kg}^* \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 700 \text{ newtonů N}$ (v technické soustavě měr má hmotu $m = 70/9,8 = 7$ technických jednotek hmoty). Jeden váhový kilogram $= 1 \text{ kg}^* = 1 \text{ kilopond} = 1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}$.

Ve starší fyzikální soustavě jednotek centimetr-gram-sekunda (CGS) je jednotka hmoty 1 g a jednotka síly 1 *dyn* ($= \text{síla, která tělesu hmoty 1 g udělí zrychlení } 1 \text{ cm/s}^2$). Jeden g váhy $= 981 \text{ dynů}$, 1 dyn $= 1 \text{ miligram}$ (asi váha komára).

V této knize počítáme vše jen v technických jednotkách m, kg*, s.

V dalších výkladech kg znamená kilogram síly, váhový kilogram.

Váha objemové jednotky se v technické soustavě měr nazývá *měrná (specifická) váha* γ ($= \text{váha v kg}^*: \text{objemem v dm}^3$). U oceli $\gamma = 7,85 \text{ kg}^*/\text{dm}^3 (= 7850 \text{ kg}^*/\text{m}^3)$.

Hmota objemové jednotky ve fyzice se nazývá *hustota* čili *měrná, specifická hmota* ρ ($= \text{hmota v kg hmoty: objemem v m}^3$). U oceli je $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ (tedy číselně $\rho = \gamma$!)

Pohybové zákony

Chlapec ze samoty, *Isaac Newton* (1643 až 1727), který vyrostl v největšího učence své doby, dal do pořádku starší i nově objevené zákony mechaniky. Navázal na dílo Itala *Galilea Galilei* (1564 až 1642) a Holandana *Christiana Huyghense* (1629 až 1695) i na práce o tisíciletí starší a shrnul zákony tzv. klasické mechaniky do tří pohybových zákonů, které jsou dodnes základem dynamiky (i když je pro velké rychlosti opravila teprve teorie relativity).

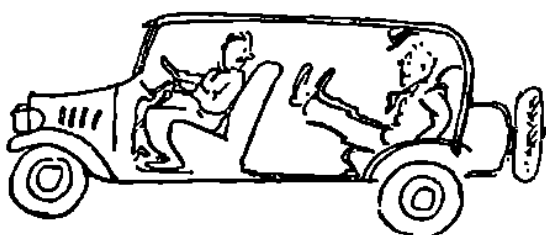
První pohybový zákon (princip setrvačnosti)

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno vnější silou tento stav změnit. Pokusem nemůžeme tento zákon dokázat, protože neznáme těleso, na něž by nepůsobila žádná síla.

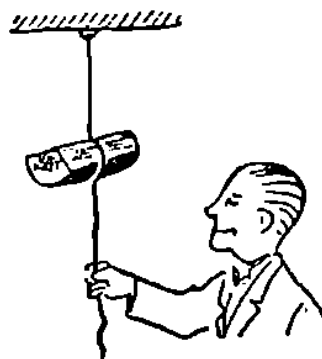
Galileo vyslovil poznatek, že každá věc „se snaží“ zachovat svůj pohybový stav a „odporuje“ jeho změně. Oba tyto výrazy jsou nepodařené, připisují hmotě vůli. Je chyba, že se dostaly do učebnic. Těleso v klidu zůstává v klidu, ale nijak se nesnaží v něm zůstat, neboť stačí nepatrná síla, aby se uvedlo do pohybu a samo od sebe se pak už nevrací do klidu. Kdyby pohybu nic nebránilo, bude se těleso pohybovat věčně. Správné je, že těleso zachovává pohybový stav,

v němž je, a teprve síly tento stav změni. Síla je příčinou změny pohybového stavu těles. Pohybový stav je pak buď klid, nebo přímočarý rovnoměrný pohyb. V obou případech na hmotu nepůsobí žádné síly, proto není příčiny, proč by se rozbíhala, zastavovala nebo měnila směr dráhy, a je-li už v pohybu, setrvává v pohybu stálou rychlostí po přímce.

Zákon setrvačnosti trochu odporuje „rozumu“. Jak to, že se tělesa mohou pohybovat věčně přímočaře rovnoměrně bez účinků sil? Jak to, že je nemusí udržovat v pohybu žádná síla, po jejímž odstranění by pohyb přestal? Na takové otázky



Obr. 35. Setrvačnost.



Obr. 36. Kde se přetrhne provázek?

stačí definice síly: Síla je příčinou změny pohybového stavu (kde není změna, není ani síla). „Rozum“ říká, že se těleso, na které působí stále stejná síla, bude pohybovat stále stejně rychle, tj. rovnoměrně. Mechanika však dokazuje něco jiného. Stálá síla vyvolá pohyb stále rychlejší, zrychlený, protože dává tělesu stále novou rychlost. Při rovnoměrném pohybu není těleso pod vlivem sil, síly by tento pohyb měnily. Tento rozpor vzniká tím, že mechanika umožňuje pohyb bez odporů, kdežto rozum usuzuje ze zkušenosti, kdy proti každému pohybu působí nějaký odpor (tření aj.), a pak skutečně i k rovnoměrnému pohybu musíme vynaložit sílu (ovšem ne k pohybu tělesa, ale k překonání odporu). Mechanika odvodila své zákony z pohybu planet nebo elektronů, kde skutečně odpor není (elektron krouží kolem jádra a nepotřebuje k tomu žádnou energii, žádný motor).

O setrvačnosti těles podá nám zprávu každý motorista, který přežil větší karambol. Motocykl se nárazem o patník zastaví, ale řidič poslouchá prvý zákon Newtonovy klasické mechaniky a letí vzduchem dál. Patníky tak už mnohého člověka naučily zákonům mechaniky, obr. 35.

Příklad: Na stropě visí vlákno s kusem dřeva. Kde se vlákno přetrhne tahem za spodní konec (obr. 36)?

Prudkým trhnutím se vlákno přetrhne pod dřevem, dřevo zachytí svou setrvačností náraz. Pomalým tahem se vlákno přetrhne nad dřevem, kde nese tah i váhu dřeva. Stejně vyložíme, proč se může prudkým trhnutím vytáhnout list papíru, na kterém stojí sklenice na stole, a sklenice se ani nepohne.

Druhý pohybový zákon (zákon síly)

Časová změna hybnosti je úměrná působící síle a má s ní stejný směr. Hybnost H je součin z hmoty a rychlosti tělesa. Je to vektor, má velikost a směr.

$$\boxed{H = mv} \quad (16)$$

Lehké těleso pohybující se rychle může mít stejnou hybnost jako těžké těleso, které se pohybuje pomalu. Hybnost můžeme značit úsečkou se šipkou stejně jako sílu nebo rychlost. Stejně hybnosti opačného směru se zruší, jejich součet je nula. Znamenitym příkladem hybnosti je celá sluneční soustava. Většina hmoty je ve slunci, ale většina hybnosti je v planetách. Planety obsahují víc než 97 % rotační hybnosti sluneční soustavy, třebaže hmota všech dohromady je menší než tisícina hmoty Slunce.

Změna hybnosti nastane pouze působením síly, a to tak, že přírůstek hybnosti ΔH , dělený časem Δt , v němž tento přírůstek nastal (tj. časová změna hybnosti), je úměrný působící síle. Z toho plyne

$$\boxed{P = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma; \text{ síla} = \text{hmota} \times \text{zrychlení}} \quad (17)$$

Platí pro *stálou hmotu* ($m = \text{const}$) a zrychlení $a = \Delta v / \Delta t$.

P je zrychlující síla při pohybu [kg]; a je zrychlení pohybu [m/s^2]; m je hmota v technických jednotkách hmoty. Vzorec (17) platí i pro váhu G [kg], jen místo zrychlení a dosadíme zrychlení tíže g [nás 9,8 m/s^2]:

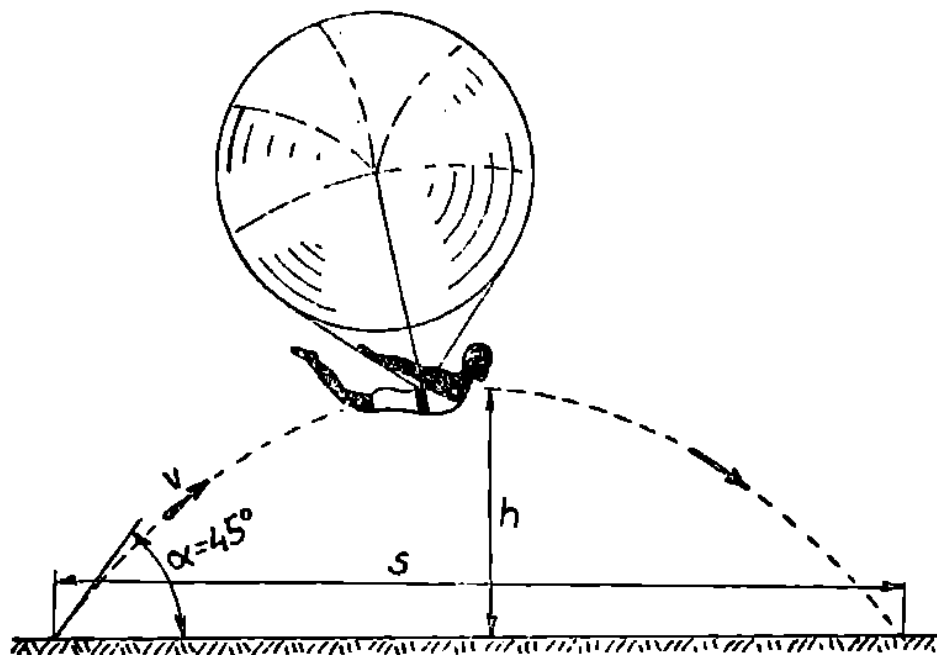
$$G = mg; m = G/g = G/9,8 = 0,102 \cdot G \quad (17a)$$

Teorie relativity (Einstein aj.) dokázala, že rovnice (17) platí jen pro malé rychlosti pohybu, kdy můžeme hmotu považovat za konstantní. Ve skutečnosti hmota m roste s rych-

lostí pohybu v ($m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, kde c je rychlost světla $3 \cdot 10^8$ m/s a m_0 je hmota v klidu). V praktické mechanice však nemá tento rozdíl význam.

Příklady: 1. Koule váží $G = 0,18$ kg. Je přitahována k zemi silou 0,18 kg. Její hmota

$m = G/g = 0,18/9,8 = 0,0184$ technických jednotek hmoty. Pohybuje-li se rychlostí $v = 100$ m/s, má hybnost $H = mv = 0,0184 \cdot 100 = 1,84$.



Obr. 37. Skokan s balónem.

2. V kilogramovém závaží $m = G/g = 1/9,8 = 0,102$ technických jednotek hmoty. Váží-li setrvačnick $G = 600$ kg, je v něm $600 \cdot 0,102 = 61,2$ technických jednotek hmoty.

3. Váha $G = m \cdot g$ = hmota $\times$ zrychlení tíže. Hmota tělesa m je stálá, ale zrychlení g se mění (viz str. 23). Proto se mění i váha téhož tělesa se změnou polohy na zemské kouli. Předmět vážící na rovníku 10 kg váží na pólu o 5 g více. Veze-li parník od pólu k rovníku náklad 20 000 t, váží jeho náklad na rovníku o 100 000 kg méně! To už je rozdíl velmi značný. Zvedáme-li pérové váhy se závažím do výše, ukazují, že se zmenšila váha 10 kg o 3 g zvednutím o každý 1 km.

4. Balón s člověkem podle obr. 37 váží $G = 80$ kg. Je-li nosná síla balónu 79 kg, váží vlastně člověk s balónem jen $P = 1$ kg a může skákat do velké výšky. Při opravách vzducholodí a výškových balónů se této úpravy s úspěchem využívá.

Zrychlení při skoku $a = P/m = P/(G/9,8) = 1/(80/9,8) = 0,123$ m/s².

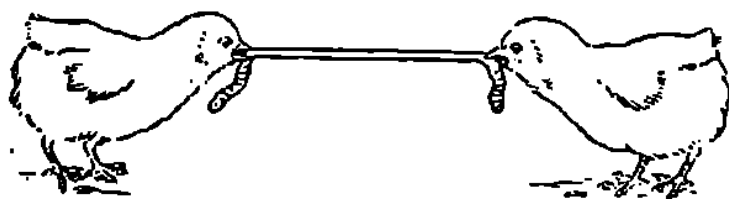
Be. balónu by člověk vyskočil např. do výšky $h = 1$ m počáteční rychlostí $v = 4,43 \sqrt{h} = 4,43 \sqrt{100} = 4,4$ m/s. S balónem, kdy jeho hmota vzrostla např. v poměru 60/80, vyskočí rychlostí $v = 4,4 \cdot 60/80 = 3,3$ m/s. Výška skoku s balónem $h = v^2/2a = 3,3^2/(2 \cdot 0,123) = 45$ m, kdyby člověk vyvinul stejné úsilí jako při skoku bez balónu do výšky 1 m.

Dálka skoku pod úhlem $\alpha = 45^\circ$, kdy $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$, je $s = v^2/a = 3,3^2/0,123 = 90$ m. Tak by mohl člověk snadno skákat přes celé bloky

Ostatně zkuste to: vezměte sám sebe pod kolony a zkuste se zvednout.

Příklad: Červa se přetrhne silou 120 g. Jedno kuře vyvine tah 75 g. Stačí dvě kuřata podle obr. 39 přetrhnout červa?

Nejdřív odpovězte sami, pak přečtěte další: Obě kuřata táhnou silou jen 75 g, jejich tahy se nesčítají, proto červa nepřetrhnou. Kdyby táhli dva muži za lano proti sobě stejně silně, např. silami po 80 kg, lano se napíná jen silou 80 kg. Místo jednoho muže můžeme dát nehybný hák ve stěně, obr. 33, který drží stejnou silou (reakcí) jako je síla (akce), jíž muž táhne.



Obr. 39. Přetrhnou dvě kuřata červa?

Přímočarý pohyb

Aby se těleso hmoty m pohybovalo zrychleně se zrychlením a , musí na ně působit síla $P = m \cdot a$. Dosazením vztahů ze vzorců (7) a (8) platí

$$P = m a = G \frac{a}{g} = G \frac{v}{g t} = 2 G \frac{s}{g t^2} = G \frac{v^2}{2 g s} \quad (18)$$

G = váha [kg], g = zemské zrychlení [$9,8 \text{ m/s}^2$], v = rychlost [m/s], t = čas [s], s = dráha [m].

Příklady: 1. Těleso volné v prostoru váží $G = 50 \text{ kg}$. Působí na ně síla $P = 10 \text{ kg}$. Jaké vznikne zrychlení? Ze vzorce (18)

$$a = \frac{Pg}{G} = \frac{10 \cdot 9,8}{50} = 1,96 \text{ m/s}^2.$$

2. Vozík vážící 100 kg uběhl dráhu $s = 40 \text{ m}$ za čas $t = 8 \text{ s}$. Jakou zrychlující silou byl poháněn, zanedbáme-li odpory třením?

Zrychlení $a = 2s/t^2 = 2 \cdot 40/8^2 = 1,25 \text{ m/s}^2$ ze vzorce (8).

Zrychlující síla $P = m \cdot a = G/g \cdot a = (100/9,8) \cdot 1,25 = 12,75 \text{ kg}$ ze vzorce (18).

3. Rychlík váží $180\,000 \text{ kg}$. Lokomotiva vyvine při jízdě po rovině tah 3000 kg . Jaké zrychlení a rychlost má vlak za 60 vteřin? Ztráty třením zanedbáváme.

Hmota vlaku je $m = 180\,000 : 9,8 = 18\,400$ technických jednotek hmoty. Zrychlení

$$a = P : m = 3000 : 18\,400 = 0,163 \text{ m/s}^2.$$

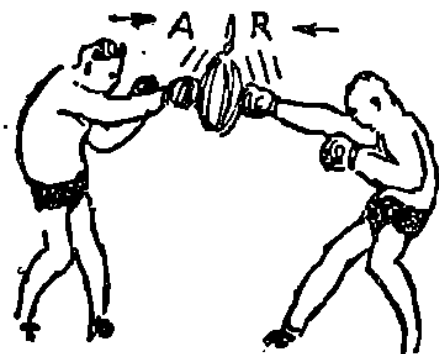
$$\text{Rychlost } v = at = 0,163 \cdot 60 = 9,78 \text{ m/s}.$$

domů. Jeden úplný skok trvá $t = 2 \sqrt{2h/a} = 2 \cdot \sqrt{45/0,123} = 54 \text{ s}$, tedy necelou minutu.

5. Hmotu nějakého tělesa je stejná na zeměkouli jako na Měsíci, váha je však na Měsíci asi šestkrát menší. Kdybychom vystřelili na Měsíci z pušky, vyletí náboj z hlavně stejně rychle jako na Zemi, protože Newtonův zákon spojuje sílu s hmotou ($P = ma$), ne s váhou. Protože však je zrychlení gravitace na Měsíci šestkrát menší než na Zemi, doletí střela šestkrát výš než na Zemi, je-li vystřelena svisle a zanedbáme-li odpor vzduchu (do výšky $h = 6v^2/2g$).

Třetí pohybový zákon (princip akce a reakce)

Každá akce vyvolá stejně velikou reakci opačného smyslu. Síly, kterými na sebe vzájemně působí dvě různá tělesa, jsou veliké a opačného směru. Váží-li kámen 10 kg a leží-li na stole, tlačí na stůl akcí 10 kg. Stůl tlačí na kámen reakcí také 10 kg. Svýmá nohama tlačí stůl na zem silou 10 kg + váha stolu a stejnou reakcí tlačí zem na stůl atd., obr. 38.



Obr. 38. Akce = reakce.

Každá akce je doplněna reakcí, ke každé síle se hned vytvoří ještě jedna opačná, síly se vyskytují vždy dvojmo (*actio = reactio*, píše Newton).

Mluvíme sice někdy jen o jedné síle, ale tím jen mlčky zanedbáváme její reakci. Jede-li vlak po kolejích dopředu, je to možné jen tím, že odstrkuje koleje dozadu. Koleje jsou však pražci přidržené k zemi, vlak se koly odstrkuje od země, chtěl by točit celou zeměkouli opačným směrem.

Kdyby byla možná jen jedna síla, mohl by silný chlapík opravdu zvedat sám sebe za kapsy nebo za límec. Zatím však to není možné, ani silák z cirkusu by sám sebe za límec nezvedl. Táhne-li se vzhůru silou třeba 80 kg, táhne límec dolů reakcí také 80 kg a nakonec jediným výsledkem zvedání je, že se límec utrhne. Váha atleta přes to, že se táhne vzhůru, se nemění.



4. Těleso váží $G = 130$ kg; má být uvedeno za $t = 5$ vteřin do pohybu tak, aby mělo rychlost $v = 1$ m/s. Jakou silou musíme působit? Ze vzorce (18)

$$P = G \frac{v}{gt} = 130 \cdot \frac{1}{9,8 \cdot 5} = 2,65 \text{ kg.}$$

Vidíme, že teoreticky (bez zřetele na odpory třením) není zrychlující síla příliš velká. Kdybychom těleso zvedali, táhneme za závěs silou $G + P = 130 + 2,65 = 132,65$ kg.

5. Ventil motoru váží $G = 3,2$ kg. Jeho zdvih $s = 2,1$ cm = 0,021 m. Má se zavřít za $t = 0,023$ s vlastní vahou a tlakem zpruhy. Jak silná musí být zpruha?

Zrychlení při zavírání

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 0,021}{0,023^2} = 79,5 \text{ m/s}^2.$$

Zrychlující síla $P = m \cdot a = \frac{G}{g} \cdot a = \frac{3,2}{9,8} \cdot 79,5 = 26$ kg. Tlak zpruhy je $P - G = 26 - 3,2 = 22,8$ kg.

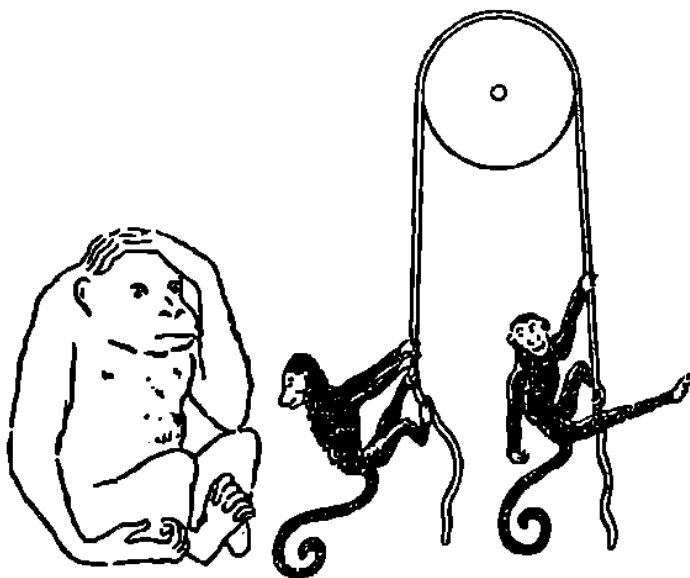
Aby vyšly ventilové zpruhy u spalovacích motorů slabší, musí být ventily lehké.

6. Motor pohání automobil vážící $G = 800$ kg stálou silou $P = 200$ kg. Na jaké vodorovné dráze s dosáhne automobil rychlosti $v = 45$ km/h = 12,5 m/s, zanedbáme-li odpory?

Zrychlení $a = P/m = Pg/G = 200 \cdot 9,8/800 = 2,45$ m/s².

Dráha $s = v^2/2a = 12,5^2/(2 \cdot 2,45) = 31,9$ m.

7. Na volně otočné kladce visí podle obr. 40 provaz, na jehož obou koncích jsou přesně stejně těžké opice. Také délky provazu jsou stejné. Co se stane, když jedna opice poleze po provaze vzhůru a druhá se bude jen bez hnutí držet? Bude se kladka točit a bude druhá opice stoupat nebo klesat?



Obr. 40. Opice na kladce.

Jen odhadem bychom velmi těžko našli správnou odpověď na tuto úlohu. Proto probereme řešení podrobněji a také si na něm ukážeme postup, jak se řeší složitější technické úkoly.

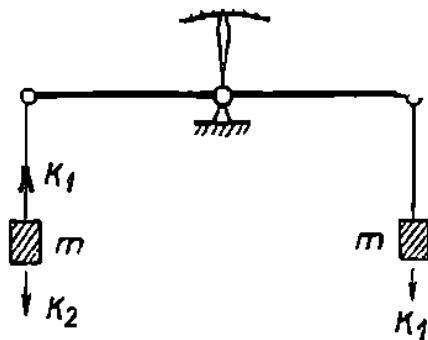
Hledáme způsob, jak úlohu zjednodušit tak, abychom ji mohli ověřit pokusem. S živými opicemi to jistě nepůjde.

Kladka je vlastně pákou, obr. 41, na které visí dvě stejná závaží. Levé závaží např. klesá po závěsu dolů, má tedy dolů směřující zrychlení. Páka by se vychýlila. Aby výchylka nevznikla, nutno zmenšit závaží vpravo čili učinit sílu K_1 menší než váhu K_2 . Součet sil K_1 a K_2 směřuje dolů, jeho velikost je $K_2 - K_1$. Tím máme sílu směřující dolů, která udělí tělesu o hmotě m dolů směřující zrychlení $a = (K_2 - K_1) : m$.

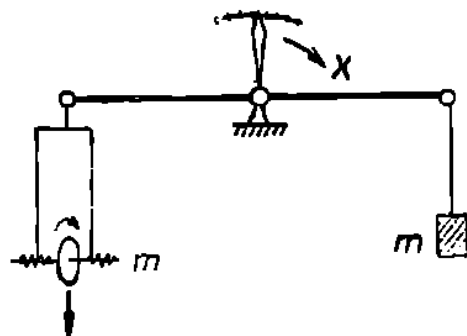
Pro pokus dáme podle obr. 42 místo opice kotouček na ose, na níž je navinuta z obou stran nit. Kotouč s nití je stejně těžký jako závaží na druhém konci vah.

Pustíme-li kotouč, nit se odvinuje a kotouč klesá zrychleně dolů (to napodobí lezení opice). Na dráze s můžeme změřit čas t , potřebný k proběhnutí, a z rovnice $s = at^2/2$ vypočteme zrychlení a . Dále můžeme měřit sílu K_1 .

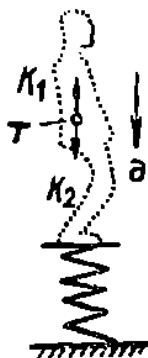
Po odvinutí celého vlákna se kotouč točí setrvačností dál, nitě se navíjí na osu, kotouč stoupá (to napodobí lezení opice vzhůru). Pohyb vzhůru je zpožděný. Proto má kotouč zrychlení záporné, a směřuje jako v předešlém směrem dolů.



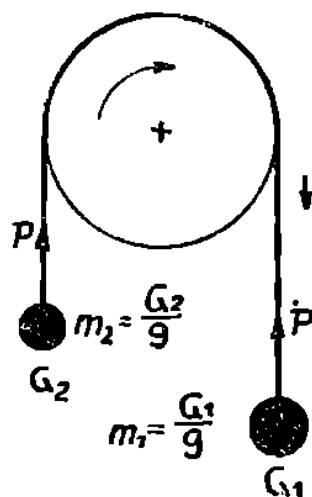
Obr. 41.



Obr. 42.



Obr. 43. Změny váhy člověka.



Obr. 44. Břemena na kladce.

Váha tedy vykýváne stejně, jako když kotouč klesal, tj. směrem X . Kladka se tedy otočí směrem X , čili pravá opice klesá dolů, leze-li levá opice zrychleně dolů nebo zpomaleně vzhůru.

8. Muž vážící $K_1 = 80$ kg stojí na pružině podle obr. 43. Pružina se tím trochu stlačí, až tlačí vzhůru silou $K_1 = 80$ kg. Nyní jsou obě síly K_1, K_2 stejné, nevzniká žádný pohyb. Kdyby bylo K_1 větší než K_2 , vznikl by pohyb vzhůru.

Přejde-li muž zrychleným pohybem do dřepu, je v té chvíli K_1 menší než K_2 , ukáže se zrychlení a síla směřující dolů, zpruha se trochu víc stlačí.

Přejde-li muž z dřepu zrychleným pohybem do stoje, zmenší se v té chvíli jeho váha K_2 , zrychlení směřuje vzhůru, zpruha se trochu odlehčí.

9. Na obou miskách citlivých vah jsou stejné skleněné nádoby. Do levé vletí mouha. Ukazují váhy výchylkou váhu mouhy?

Pokud létá moucha stále ve stejné výšce nebo stoupá a klesá konstantní rychlostí, ukazují váhy váhu mouchy. Mouchu můžeme považovat za zhuštěnou částičku vzduchu, levá láhev s mouchou je těžší než pravá bez mouchy.

Letí-li moucha zrychleně dolů (padá), ukáže váha větší výchylku. Letí-li moucha zrychleně vzhůru, její váha se zmenšuje, výchylka ručičky se zmenšuje.

10. Na lodi nebo v letadle se naše tělo může zrychleně zvedat a klesat. Zvedáním se odlehčují vnitřnosti a žaludek, tím vzniká nepříjemná „mořská nemoc“.

11. Na malé hladké kladce, obr. 44, je G_1 větší než G_2 . Jakým zrychlením a se pohybují závaží a jaký je tah v laně P ? Tření zanedbáme.

Tah P je stejný v celém laně. Vpravo působí dolů zrychlující síla $G_1 - T = m_1 a$. Vlevo působí vzhůru zrychlující síla $T - G_2 = m_2 a$. Sečtením a dosazením za m_1, m_2 je

$$\frac{G_1 + G_2}{g} \cdot a = G_1 - G_2; a = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} g; P = G_1 - m_1 a = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Např. $G_1 = 12 \text{ kg}$, $G_2 = 11 \text{ kg}$. Zrychlení je $a = \frac{12 - 11}{12 + 11} \cdot g = \frac{g}{23}$, a rychlost za 2 s z klidu je $2 \cdot \frac{g}{23} = 2 \cdot \frac{9,8}{23} = 0,85 \text{ m/s}$.

Impuls a hybnost

Víme už, že hybnost je součin z hmoty a rychlosti tělesa, $H = mv$. Mezi dvěma tělesy je podle obr. 45 stlačená zpruha. Celku říkáme soustava. Když nyní obě tělesa pustíme, zpruha je odhodí. Obě tělesa dostanou stejné hybnosti. Zračí-li m_1, m_2 hmoty, v_1, v_2 rychlosti, platí

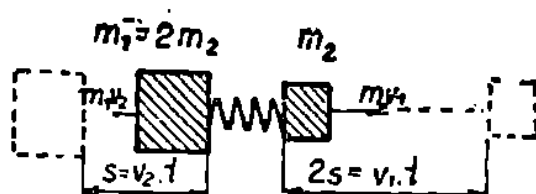
$$m_1 v_2 = -m_2 v_1; m_1 v_2 + m_2 v_1 = 0.$$

Protože hmota levého tělesa je dvakrát větší, odletí levé těleso do dvakrát menší vzdálenosti než pravé. Hybnosti, které dvěma tělesům udělí síly působící podle zákona akce a reakce, jsou stejné, součet všech hybností v soustavě je roven nule. To je *věta o zachování hybnosti*.

Při silovém nárazu se součin ze střední síly P a kratičkého času t , po který síla P působila, nazývá *impuls*, U .

Impuls = síla $\times$ čas, $U = P \cdot t$.

Prací udělíme tělesu energii; impulsem udělíme tělesu hybnost. Při pohybu z klidu



Obr. 45. Zachování hybnosti při pohybu.

$$\boxed{\text{impuls} = \text{přírůsteku hybnosti}; P \cdot t = m \cdot v} \quad (19)$$

Impuls je vektor (má velikost i směr), změna hybnosti nastane v témž směru jako působí síla a impuls. Také rychlosti $v_2 - v_1$ odčítáme vektorově (geometricky).

$$P \cdot t = m (v_2 - v_1)$$

je-li v_1 počáteční a v_2 konečná rychlost, P střední síla působící v čase t .

Příklady: 1. Těleso vážící G (hmoty $m = G/g$) se za t_1 vteřin uvede do pohybu rychlostí v m/s silou P_1 kg. Zastaví se za t_2 zpomalující silou P_2 kg. Při rozběhu je přírůstek hybnosti ve směru pohybu mv roven impulsu ve stejném směru $P_1 t_1$. Při zpomalení je úbytek hybnosti ve směru pohybu $-mv$ roven impulsu v tomto směru $-P_2 t_2$.

$$mv = P_1 t_1 = P_2 t_2 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (t_1 + t_2).$$

2. Těleso váží 2 kg; má hmotu $2/9,8 = 0,204$ jednotek hmoty. Pohybuje-li se rychlostí 6 m/s, má hybnost $m \cdot v = 0,204 \cdot 6 = 1,224$. Je-li dodána za 1 s, musí působit síla 1,224 kg. Bude-li hybnost dodána za 5 s, stačí síla $1,224/5 = 0,245$ kg.

3. Jeden vynálezce si všiml, že při výstřelu z děla hlaveň klouzne zpět. Na tom založil pohon lodí.

V loďce vážící 30 kg sedí muž 70 kg těžký. Vystřelí vodorovně z kulovnice střelu vážící 2 dkg = 0,02 kg. Rychlost střely u ústí je

$v = 900$ m/s. Zpětným nárazem se bude člun pohybovat rychlostí v_0 . Jaká je to rychlost?

Zanedbáme tření člunu o vodu a o vzduch. Tím nepůsobí na soustavu žádné vnější síly čili součet hybností se rovná nule.

$$v \cdot \frac{G}{g} + v_0 \cdot \frac{G_0}{g} = 0, \text{ čili } v_0 = -v \cdot \frac{G}{G_0}.$$

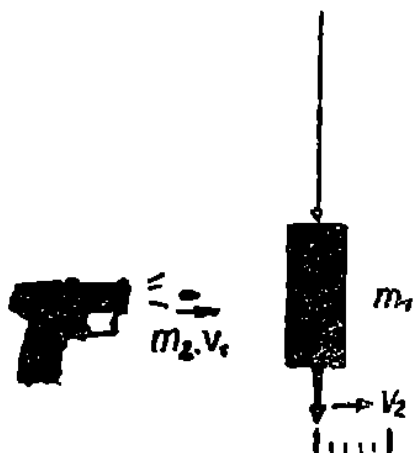
Zrychlení tíže $g = 9,8$ můžeme vynechat (vykrátí se), váhy jsou: $G = 0,02$ kg; $G_0 = 30 + 70 = 100$ kg. Rychlost člunu $v_0 = 900 \cdot \frac{0,02}{100} = 0,18$ m/s.

Z toho vidíme, že pohyb zpětným nárazem po výstřelu je možný, ale málo vydá, je drahý.

4. Střela z revolveru má hmotu $m_2 = 0,0033$ kg. Byla střelena do dřevěného špalku, který má hmotu $m_1 = 2$ kg; stopkami jsme změřili, že špalek zavěšený na dlouhém vlákně vykývne rychlostí $v_1 = 0,375$ m/s (za 1 s vykývne o 0,375 m). Jakou rychlost v_2 měla střela? Obr. 46.

Střela vletí do špalku s hybností $m_2 \cdot v_2$; špalek i se střelou má pak hybnost $(m_1 + m_2) \cdot v_1$. Obě hybnosti musí být stejné.

$m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_1$; $0,0033 \cdot v_2 = (2 + 0,0033) \cdot 0,375$; $v_2 = 227$ m/s. Střela měla rychlost 227 m/s. Tato úloha je znamenitější, než se na prvý pohled zdá. Vždyť jsme docela jednoduchým úsudkem určili rychlost střely z revolveru, jejíž změření je dost obtížné.



Obr. 46.

5. Protože je Země v prostoru volná, stačí k změně její rychlosti jakákoliv nepatrná síla. Vyskočí-li člověk do výšky, odstrčí zeměkouli určitou rychlostí. Váží-li skokan $G = 60 \text{ kg} = 6 \cdot 10^4 \text{ g}$ a zeměkoule váží $G_0 = 6 \cdot 10^{27} \text{ g}$, je při stejné hybnosti (v = rychlost člověka, v_0 = rychlost Země / $v_0 = v \cdot G/G_0 = v \cdot (6 \cdot 10^4)/(6 \cdot 10^{27}) = v/10^{23}$, čili rychlost „odstrčené“ zeměkoule je 10^{23} krát menší než rychlost skokana. Při skoku do výšky $h = 1 \text{ m}$ je počáteční rychlost $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 100} = 440 \text{ cm/s}$. Rychlost odstrčené zeměkoule je $v_0 = 440/10^{23} \text{ cm/s}$.

Kdyby se touto rychlostí Země pohybovala miliardou let, tj. $t = 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31 \cdot 10^{14}$ vteřin, uběhla by dráhu $s = v_0 t = 440/10^{23} \cdot 31 \cdot 10^{14} = 14/10^9 \text{ cm} = 0,00014 \text{ mm}$, asi $1/6$ mikronu.

Jenže jakmile se náš skokan zvedne od Země, je zemí přitahován zpět silou 60 kg , ale také sám Zemí přitahuje silou 60 kg . Tak se zmenšuje rychlost skokana v i rychlost zeměkoule v_0 na nulu. Člověk tedy tím, že vyskočí do výšky, udělí na chvíli celé zeměkouli nepatrnou rychlost, ale pohnout ji nemůže. K tomu by potřeboval oporu nespojenou se Zemí, o níž píše slavný Archimedes ze Syrakus na Sicilii asi roku 240 před naším letopočtem: „*Dejte mi pevný bod a pohnu zeměkouli*“.

6. Lokomotiva táhne vlak vážící 200 t silou 4 t do svahu $1 : 120$. Odpor proti jízdě vlaku je 5 kg na 1 t . Za jaký čas a na jaké dráze získá vlak rychlost 40 km/h ($= 11,2 \text{ m/s}$)?

Odpor jsou: složka váhy na svahu $200\,000 : 120 = 1666 \text{ kg}$; odpor proti jízdě $5 \cdot 200 = 1000 \text{ kg}$, celkem 2666 kg . Tah lokomotivy je 4000 kg , zrychlující síla $P = 4000 - 2666 = 1334 \text{ kg}$.

Je-li hledaný čas t s, je impuls = přírůstek hybnosti,

$1334 \cdot t = mv = 200\,000/9,8 \cdot 11,2$; $t = 170 \text{ s}$, tj. $2 \text{ min } 50 \text{ s}$.

Při rovnoměrném zrychlení je střední rychlost rovna $1/2$ rychlosti maximální. Dráha k rozjezdu je $0,5 \cdot 11,2 \cdot 170 = 943 \text{ m}$.

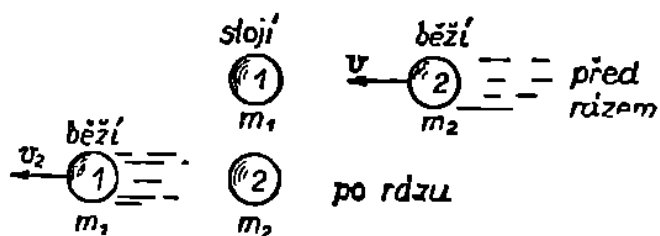
7. Automobil váží s nákladem $G = 12 \text{ t}$. Rozjíždí se z klidu, má stálý odpor proti jízdě $P_0 = 250 \text{ kg}$. Tah motoru v prvních 4 s je $P = 635 \text{ kg}$. Střední zrychlující síla v prvních 4 s je $P - P_0 = 635 - 250 = 385 \text{ kg}$ a impuls rovný přírůstek hybnosti je $385 \cdot 4 = 1540$ jednotek. Rychlost po 4 s je hybnost: hmotou $= 1540 : (12\,000/9,8) = 1,26 \text{ m/s}$, tj. $3600 \cdot 1,26 = 4540 \text{ m/h} = 4,54 \text{ km/h}$.

Pružný a nepružný ráz těles

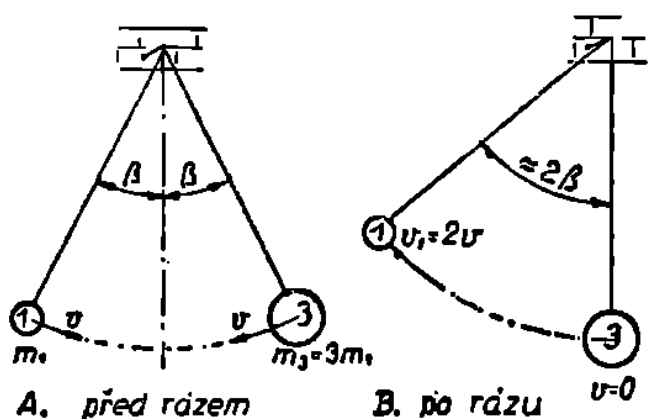
Budeme sledovat ráz dvou dokonale pružných těles, třebaš kuliček. Říkáme-li v mechanice, že materiál je pružný, neznamená to, že se dá natahovat jako gumové šle. Dokonale pružná kulička vyskočí odrazem od pružné podložky do stejné výšky, s jaké spadla. Skoro tak dobře skáče ocelová kulička nebo kulečnicková koule ze slonoviny.

Jedna koule stojí a druhá do ní narazí. Jejich společná hybnost se nezmění, platí zákon o zachování hybností. Stojící koule nemá žádnou hybnost. Má sice hmotu, ale její rychlost $= 0$; hybnost $= \text{hmota} \times 0 = 0$. Hybnost má jen pohybující se koule. Po rázu musí být stejná hybnost v jedné nebo v obou koulích. Kdyby byla v obou, pohybovaly by se obě koule dohromady, čili hmota vzrostla dvakrát. Nezbytně by rych-

lost klesla na polovinu, aby zůstal součin hmoty $\times$ rychlost stejný. Jenže by to značilo, že se naše koule rázem nějak slepily, kdežto ze zkušenosti víme, že spíš od sebe odskočí. Koule se nebudou pohybovat spolu. Ta, která se pohybovala, zůstane stát, druhá, na niž jsme narazili, poběží dál stejně rychle jako před tím prvá, jsou-li obě stejně těžké.



Obr. 47. Ráz dvou pružných koulí.



Obr. 48. Ráz zavěšených koulí.

Srazí-li se dvě stejně pružné koule, vymění si rychlosti, obr. 47. Hybnost se nemění, $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$. Protože $m_1 = m_2$, je i $v_1 = v_2$.

Příklad: Na vláčknech visí dvě koule podle obr. 48-A. Koule 3 je třikrát těžší než 1, proto i její hmoty $m = 3 m_1$. Protože výchylka β je u obou koulí stejná, srazí se koule stejnou rychlostí v . Proti hybnosti $m_1 \cdot v$ působí hybnost $3 m_1 \cdot v$. Kdyby se velká koule po rázu zastavila podle obr. B, odletí malá vlevo s výslednou hybností $3 m_1 v - m_1 v = 2 m_1 v$. Protože m_1 se nemění, vzroste rychlost v dvakrát, na $2 v$. Koule 1 se odrazí rychlostí dvakrát větší, než s jakou dopadla, odskočí proto přibližně dvakrát dále; výchylka bude 2β . Odnáší vlevo hybnost $2 m_1 \cdot v$.

Skutečné hmoty nejsou dokonale pružné. Nepružnost je u nich vyjadřována součinitelem vzpružení (restituce), značeným e . Pro určení e platí vztah

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad (20)$$

H = výška, s které koule spadne na vodorovnou podložku,
 h = výška, do které koule opět vyskočí.

U naprosto nepružných hmot, jako třeba kovu, je $e = 0$. U dokonale pružných $e = 1$.

Hmota	dřevo	sklo	ocel
má asi $e =$. . .	0,5	0,95	0,98

Velikost e závisí také na rychlosti, jíž koule dopadne; uvedené hodnoty platí pro rychlost dopadu 21,0 m na vteřinu.

Spustíme-li dobrý tenisový míček s výšky 2,5 m, má vyskočit do výšky 1,4 m, *obr. 49*. Při zkouškách bylo změřeno, že skáče do výšky 127 až 152 cm. Z toho součinitel restituce míče

$$e = \sqrt{h/H} = \sqrt{127/250} \text{ až } \sqrt{152/250} = 0,71 \text{ až } 0,78; \text{ střední } e = 0,75.$$

Při prvním skoku s výšky $H = 250$ cm by vyskočil na $h = 140$ cm (zo vzorce $\sqrt{h/250} = 0,75$). Nyní padá s výšky 140 cm a ze vzorce $\sqrt{h_1/140} = 0,75$ vypočteme, že po druhé vyskočí do výšky $h_1 = 78$ cm; po třetí do výšky $h_2 = 44$ cm.

Příklady: 1. *Živá kovadlina.* *obr. 50*. Smícháme-li 3 kg zboží po 80 Kčs/kg se 2 kg po 100 Kčs/kg, má směs cenu

$$\frac{3 \cdot 80 + 2 \cdot 100}{3 + 2} = \frac{440}{5} = 88 \text{ Kčs/kg.}$$

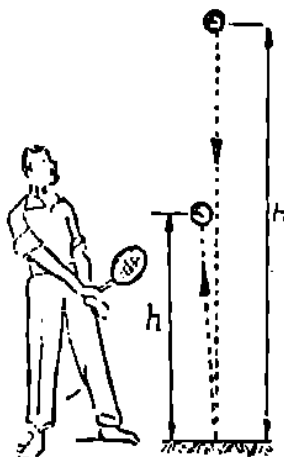
Stejně při rázu *nepružných těles*: narazí-li na hmotu $m_1 = 3$ kg, pohybující se rychlostí $v_1 = 80$ m/s, hmota $m_2 = 2$ kg, pohybující se rychlostí $v_2 = 100$ m/s stejným směrem, běží obě dál rychlostí

$$u = \frac{3 \cdot 80 + 2 \cdot 100}{3 + 2} = 88 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

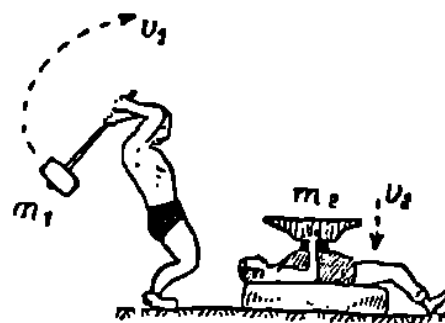
$$\text{obecně } u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}.$$

Změna rychlosti druhého tělesa je $u - v_2$. U dokonale pružných těles se změna rychlosti zdvojnásobí, $2(u - v_2)$. Je tedy konečná rychlost II. tělesa po pružném rázu

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2 = \\ &= \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2. \end{aligned}$$



Obr. 49. Určení pružnosti tenisového míčku.



Obr. 50. Živá kovadlina při produkci v divadle.

Víme, že rychlost kovadliny je $v_2 = 0$, čili platí

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 v_1 \cdot (m_1/m_2)}{(m_1/m_2) + 1} \approx 2 v_1 \frac{m_1}{m_2}.$$

Vzorec se zjednodušil tím, že jsme ve jmenovateli zanedbali malou hodnotu m_1/m_2 , protože váha kladiva je proti váze kovadliny maličká. Kovadlina váží např. 100krát víc než kladivo. Pak její rychlost po úderu

$$u_2 = 2 v_1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{v_1}{50}, \text{ tj. } \frac{1}{50} \text{ rychlosti kladiva.}$$

Tak malou rychlost artistka pod kovadlinou snadno snese, kovadlina úder zadrží.

2. Kladivo vážící G kg uhodí na hřebík vážící G_1 kg rychlostí v m/s a neodskočí. Odpor proti vnikání hřebíku do dřeva je P kg. Jak daleko vnikne hřebík do nehybného trámu? Počáteční rychlost hřebíku po rázu je v_1 .

Hybnost kladiva před rázem $v \cdot G/g$, hybnost kladiva a hřebíku po rázu je $v \cdot (G + G_1)/g$.

$$v_1 \cdot \frac{G + G_1}{g} = v \cdot \frac{G}{g}; v_1 = \frac{G}{G + G_1} \cdot v.$$

Hřebík vniká do dřeva t s. Impuls $Pt = v \cdot G/g$; $t = vG/Pg$. Střední rychlost po čas t je $v_1/2$, vzdálenost, do níž hřebík vnikne,

$$\frac{1}{2} v_1 t = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{G + G_1} v \cdot \frac{Gv}{Pg} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{Pg} \cdot \frac{G^2}{G + G_1}.$$

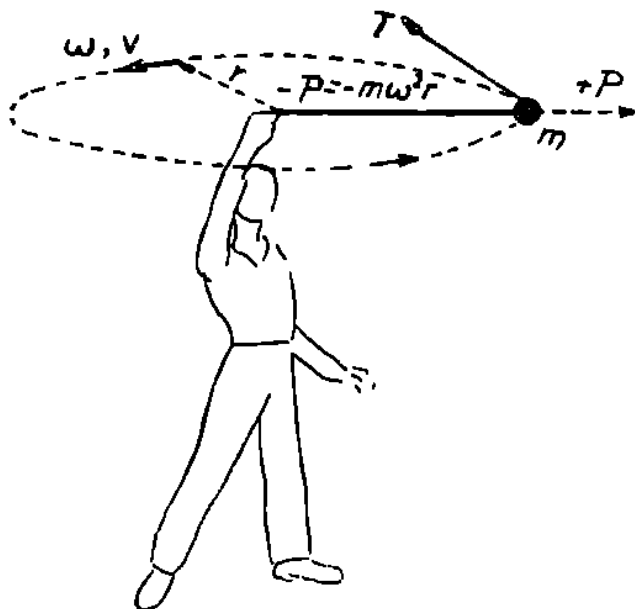
Nárazové síly, které vzniknou na styčné ploše těles při rázu, jsou tím větší, čím tvrdší jsou tělesa a čím větší je jejich vzájemná rychlost.

Příklad: Ocelová kulička průměru 5 cm váží 0,5 kg a má hmotu $0,5/9,8 = 0,051$ technických jednotek hmoty. Dopadla s výšky $h = 3$ cm kolmo na hladkou těžkou ocelovou desku rychlostí $4,43 \cdot \sqrt{h} = 0,77$ m/s.

Odskočí rychlostí o něco menší, takže celková změna rychlosti je asi 1,5 m/s. Celková změna hybnosti je $mv = 0,051 \cdot 1,5 = 0,0765$ kg m s⁻¹ = impuls U = velikost nárazu, který koule dostala.

Bylo změřeno, že ráz trval $t = 0,0002$ s. Z toho je průměrná nárazová síla

$P = U/t = 0,0765/0,0002 = 382,5$ kg při nepatrné výšce pádu 3 cm. Z toho pochopíme, proč nárazové zatížení tak škodí strojům.



Obr. 51. Vznik odstředivé síly.

Pohyb po kružnici

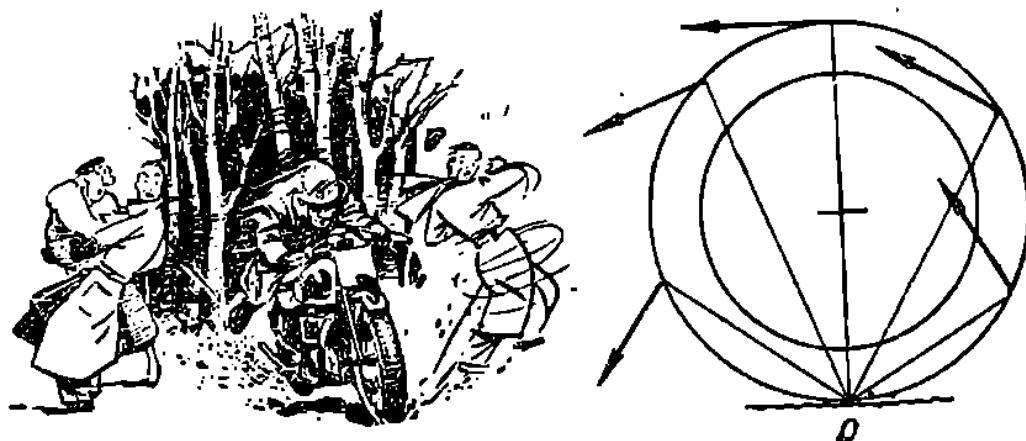
Dosud jsme uvažovali jen o pohybu přímočarém, při němž zrychlení spadá do směru rychlosti. Při rovno-

měrném pohybu po kružnici je zrychlení kolmé na směr rychlosti.

Těleso hmoty m běhá stálou úhlovou rychlostí ω po desce bez tření na kruhové dráze poloměru r . Pohyb je zrychlený, ke středu kružnice směřuje radiální zrychlení $a_r = -\omega^2 r$. Z Newtonovy základní rovnice (17) je toto zrychlení a_r vyvoláno silou směřující ke středu kružnice podle obr. 51.

$$-P = m \cdot a_r = -m \omega^2 r = -m \cdot 4 \pi^2 n^2 r = -m \cdot v^2/r \quad (21)$$

Víme, že $\omega = 2 \pi n$ značí úhlovou rychlost čili kruhovou frekvenci a n = frekvence = otáčky : časem (otáčky za 1 vteř.). Poslední vzorec (21) jsme dostali dosazením otáček n za úhlovou rychlost. Síla — P směřuje radiálně, říkáme jí *síla dostředivá*, obr. 51. Kdybychom přeřízli vlákno držící těleso, odletí těleso směrem tečny T , protože přestalo působit radiální zrychlení a_r a těleso letí stálou rychlostí v přímce. Vidíme to na každém brousicím kotouči; jiskry odletují ve směru tečny.



Obr. 52. Jak stříká bláto od kola motocyklu.

Když tedy částice z roztočeného kola odletují směrem tečny, jak to, že je blatník u velocipédu nebo motocyklu nestačí zachytit? Kdybychom pozorovali bláto odstříkující od kol motocyklu, viděli bychom, že neodletuje ve směru tečny, nýbrž směry podle obr. 52.

Části kola z hlediska pozorovatele neopisují kruhový pohyb kolem osy, nýbrž kolem středu O , v němž se právě kolo dotýká země.

Protože se síly vyskytují vždy v párech, po dvou, nemůže působit samotná dostředivá síla— P ; musí být doprovázena stejně velikou, ale opačnou silou P , jíž říkáme *síla odstředivá*. Namáhá vlákno spojující těleso se středem. Stejně jako v (21) platí

$$P = ma_r = m \omega^2 r = m \cdot v^2/r \quad (22)$$

Příklady: 1. Koule vážící $G = 20$ kg obíhá po kružnici poloměru $r = 2$ m. Jedna otáčka trvá $t = 2$ s.

Obvodová rychlost je $v = 2 \pi r/t = 2 \cdot 3,14 \cdot 2/2 = 6,28$ m/sec.

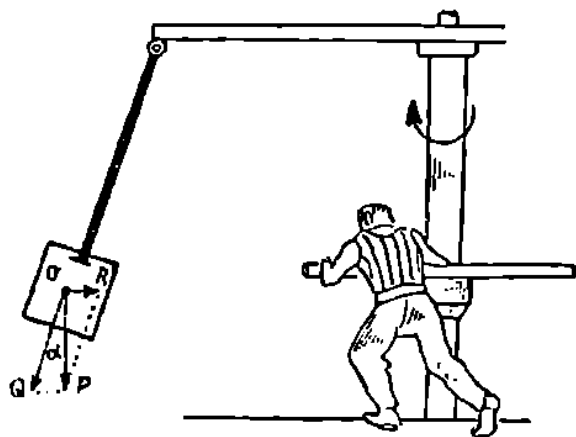
Hmota je $m = G : 9,8 = 20 : 9,8 = 2,04$ technických jednotek hmoty.

Odstředivá síla, která namáhá vlákno na přetržení, je

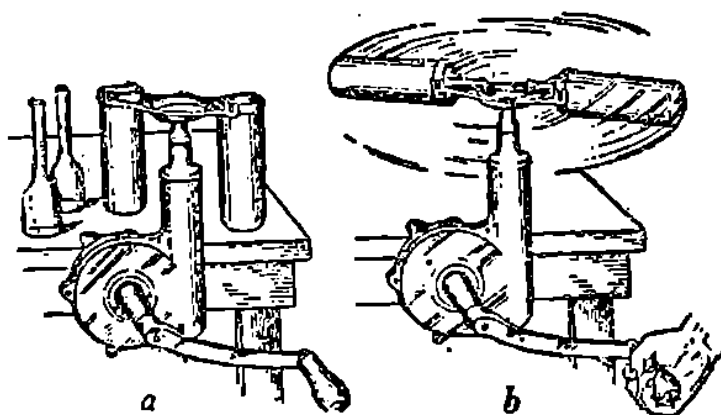
$$P = mv^2/r = 2,04 \cdot 6,28^2/2 = 40 \text{ kg.}$$

$$\text{Radiální zrychlení } a_r = v^2/r = 6,28^2/2 = 19,7 \text{ m/s}^2.$$

2. Váha chlapce na sedátku řetízkového kolotoče je P , obr. 53. Její složka R je dostředivou silou. Udrží kruhovou dráhu pohybu. Tlak Q tlačí chlapce k sedátku; má stejný vliv, jako kdyby váha vzrostla, protože $Q = P/\cos \alpha$.



Obr. 53. Řetízkový kolotoč.



Obr. 54. Laboratorní odstředivka.

Dostředivá síla R má zrychlení $a = v^2/r$; zde v = obvodová rychlost, r = vzdálenost těžiště O od osy kolotoče, např. 6 m. Kolotoč má 4 ot/min čili 1/15 ot/s. Z toho rychlost

$$v = 1/15 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6 = 2,5 \text{ m/s.}$$

$$\text{Zrychlení } a = v^2/r = 250^2/500 = 104 \text{ cm/s}^2.$$

$$\text{Hledáme úhel } \alpha; \text{tg } \alpha = 104/980 = 0,1; \alpha = 7^\circ.$$

Nová „váha“ chlapce $Q = P/\cos 7^\circ = P/0,994 = 1,006$. Kdyby vážil $P = 60 \text{ kg}$, zvětší se jeho váha o 360 gramů.

Čím větší je úhel α mezi svislým směrem a směrem řetízku, tím větší je zdánlivá váha chlapce Q (= tah za řetízek). Při jakém sklonu α je $Q = 3P$, tj. chlapec na sedátku má pocit, že jeho váha vzrostla třikrát?

$$\text{Protože } \frac{Q}{P} = 3 = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ je } \frac{1}{\cos \alpha} = 3; \cos \alpha = \frac{1}{3} = 0,333; \alpha = 71^\circ.$$

Řetízek by byl odkloněn od vodorovné polohy už jen o 19° . Kolotoč by se točil velkou rychlostí. U roztočené odstředivky se nádoby postaví vodorovně, obr. 54.

3. Řemenice váží $G = 50 \text{ kg}$. Je špatně osoustružena, takže její těžiště leží o $r = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m}$ z osy. Zdá se, že tak malá výstřednost nevádí.

Řemenice je na ose elektromotoru, který koná $n = 3000 \text{ ot/min}$. Jaká odstředivá síla na ní vzniká?

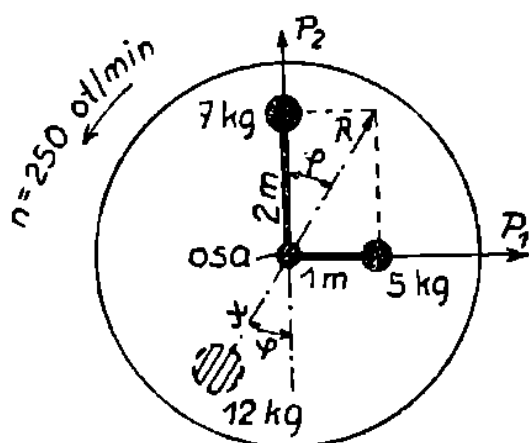
Obvodová rychlost na kružnici průměru $d = 2r$, kterou opisuje těžiště, je

$$v = \frac{\pi d n}{60} = \frac{3,14 \cdot 0,0002 \cdot 3000}{60} = 0,0314 \text{ m/s.}$$

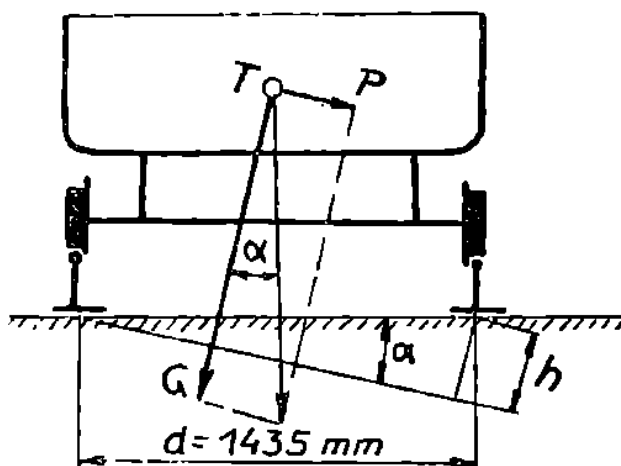
Odstředivá síla

$$P = m \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{50 \cdot 0,314^2}{9,8 \cdot 0,0001} = 50 \text{ kg.}$$

To je zajímavý a *velmi důležitý výsledek*. Platí obecně, pro každý stroj. Při 3000 otáčkách za minutu a výstřednosti jen 0,1 mm je odstředivá síla rovna váze tělesa. Stačí malá nepozornost při obrábění nebo při upínání, aby byla součást o pouhou 1/10 milimetru excentrická, a už tím vznikne při každé otáčce ráz na ložisko, rovný váze tělesa.



Obr. 55. Vyvažovaný kotouč.



Obr. 56. Kolejnice v zatáčce.

Moderní soustruhy pro rychlostní obrábění mají až 3000 ot/min. Universální sklíčidlo na jejich vřetenu působí jako setrvačnick. To přispívá ke klidnému chodu stroje. Je však třeba, aby bylo toto sklíčidlo vyváжено přesně na setinu milimetru. Jinak vyvolá chvění, které velmi rychle zničí břit nože ze slinutého karbidu.

4. Na kotouči jsou dvě závaží podle obr. 55. Kam umístíme třetí závaží 12 kg, aby byly vyváжены odstředivé síly?

Úhlová rychlost $\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 250/30 = 26,2 \text{ rad/s}$.

Odstředivé síly: $P_1 = m\omega^2 r = (5/9,8) \cdot 26,2^2 \cdot 1 = 351 \text{ kg}$; $P_2 = (7/9,8) \cdot 26,2^2 \cdot 2 = 981 \text{ kg}$. Jejich výslednice $R = \sqrt{351^2 + 981^2} = 1043 \text{ kg}$. Úhel φ ze vztahu

$$\text{tg } \varphi = 351/981 = 0,358; \varphi = 19^\circ 45'.$$

Vyvažovací závaží 12 kg ($m = 12/9,8 = 1,22$) bude na protilehlé straně na poloměru x ; ze vztahu $m\omega^2 x = R$ je $x = R/m\omega^2 = 1043/(1,22 \cdot 26,2^2) = 1,24 \text{ m}$.

5. Odstředivá síla vagónu v zatáčce je P , váha vagónu je G , obr. 56. Aby nevznikal postranní tlak kol, je vnější kolejnice vyvýšena.

$\text{tg } \alpha = P : G = (m v^2 / r) : (m / g) = (v^2 / r) : g = v^2 / r g$; při rychlosti vlaku $v = 18 \text{ m/s} = 65 \text{ km/h}$ a poloměru zatáčky $r = 600 \text{ m}$ je $\text{tg } \alpha = 18^2 / (600 \cdot 9,81) \approx 0,055$; $\alpha = 3^\circ$; $\sin 3^\circ = 0,052$.

Je-li vzdálenost kolejnice (rozvor) $d = 1435 \text{ mm}$, je vyvýšení $h = d \cdot \sin \alpha = 1435 \cdot 0,052 = 74,5 \text{ mm}$.

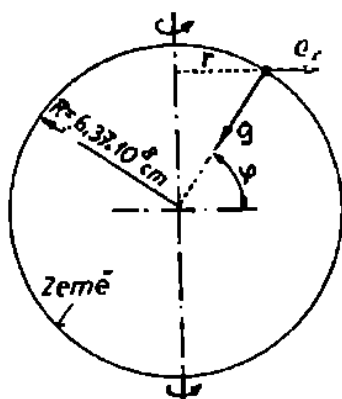
Má-li zatáčkou závodní dráhy, kde je $r = 100 \text{ m}$, projíždět automobil rychlostí $v = 20 \text{ m/s} = 70 \text{ km/h}$, musí být sklon dráhy $\text{tg } \alpha = v^2 / r g = 20^2 / (100 \cdot 9,81) = 0,4$; $\alpha = 22^\circ$.

6. Země se otáčí kolem své osy přibližně stálou úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi/(\text{hvězdný den}) = 2\pi/86\,164\text{ s} = 0,000\,072\,9/\text{s}$. Zeměpisná (geografická) šířka je dána úhlem φ , který svírá normála k zemskému elipsoidu s rovinou rovníku, *obr. 57*. V Praze je $\varphi = 50^\circ 5'$. Odstředivé zrychlení je zde

$a_r = r\omega^2 = R\omega^2 \cos \varphi = 6,37 \cdot 10^8 \cdot 0,000\,072\,9^2 \cdot \cos 50^\circ 5' = 2,59\text{ cm/s}^2$, to je asi 1/4 % zrychlení tíhového g .

7. Nový typ letadel měl být založen na využití odstředivé síly. V ohnuté trubce, *obr. 58—A*, udržuje vrtule a oběh tekutiny. Tím prý vznikne odstředivá síla P (*obr. B*), která zvedne letadlo do výšky. V čem je chyba tohoto nápadu?

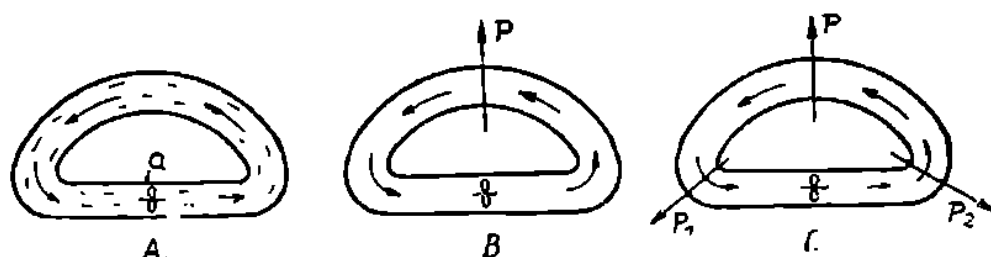
Také v rozích, kde se proud tekutiny obrací (*obr. C*), vzniknou odstředivé síly P_1, P_2 (dokonce větší než P , protože tam je menší poloměr dráhy), které jsou v rovnováze s P . V celé soustavě (trubka, tekutina, vrtule) jsou jen vnitřní síly, které nemohou přemístit těžiště. Podstatou každého létání je, že se musíme o něco opřít (o vzduch, o výfukové plyny aj.).



Obr. 57. Odstředivé zrychlení v Praze.

Coriolisova síla

Do osy desky, která se točí stálou rychlostí, posadíme muže, který drží v rukou



Obr. 58. Letadlo, které nelétalo.

u těla činky. Když nyní chce natáhnout ruce, aby rozpažil rychlostí v , cítí podivný odpor, jako kdyby pohyboval rukama v husté kapalině (třeba v medu).

Při otáčení působí totiž na tělesa vedle dostředivé síly ještě zvláštní setrvačná síla nazvaná podle objevitele *Coriolisova síla*. Pro určení její velikosti platí vzorec

$$P = 2mv\omega$$

m = hmotu, v = radiální rychlost, ω = úhlová rychlost otáčení.

Příklad: Doska, na které muž sedí, má $n = 0,5$ ot/s čili koná jednu otáčku za 2 s. Má tím úhlovou rychlost.

$$\omega = 2\pi n = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 = 3,14.$$

Činka váží 2 kg čili má hmotu $m = 2/9,8 = 0,204$ jednotek.

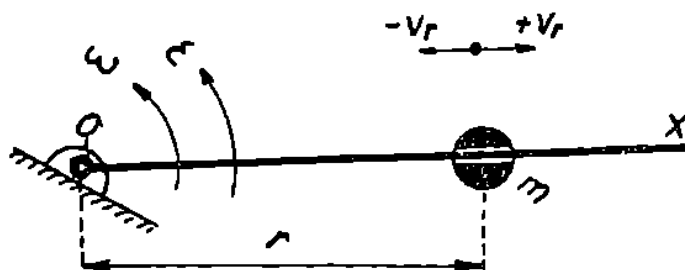
Muž chce natáhnout s činkou ruku rychlostí $v = 2 \text{ m/s}$. Coriolisova síla bránící pohybu bude

$$P = 2mv\omega = 2 \cdot 0,204 \cdot 2 \cdot 314 \approx 2,56 \text{ kg}.$$

Vidíme, že Coriolisova síla je větší než váha činky, proto je tak zřetelně cítit.

Stejně jako odstředivá síla vyskytuje se i Coriolisova síla jen při otáčení, když se točí celá soustava (prostor) i s pozorovatelem. Proto má největší význam v letectví, v balistice (při studiu dráhy střel) a všude, kde se uvažuje o pohybu prostorem vzhledem k otáčející se zeměkouli.

Vlivem Coriolisových sil se u nás uchylují střely vpravo od směru výstřelu. Vzniká tím také pravidelný severovýchodní vítr (pasát), padající kámen se u nás uchyluje na východ.



Obr. 59. Výklad Coriolisova zrychlení.

Příklad: Koule hmoty m je volně posuvná na tyči OX , otáčející se kolem pevného bodu O , obr. 59.

Radiální rychlost koule vzhledem k OX je $v_r = dr/dt$. Moment setrvačnosti koule k ose jdoucí bodem O je $J_o = mr^2$. Potřebný točivý moment

$$M = \frac{d(J_o \omega)}{dt} = \frac{d(mr^2 \omega)}{dt} = m \left(r^2 \frac{d\omega}{dt} + 2\omega r \frac{dr}{dt} \right) = mr(r\epsilon + 2\omega v_r).$$

Koule se pohybuje tak, že její zrychlení ve směru kolmém k OX je a . Působí na ni síla ma . Moment této síly k O je mar . Z rovnosti tohoto momentu a točivého momentu

$$a = r\epsilon + 2\omega v_r.$$

$r\epsilon$ je běžné zrychlení postupného pohybu, $2\omega v_r$ je postupné zrychlení koule vzhledem k tyči OX čili *Coriolisova složka zrychlení*; má stejný smysl jako úhlová rychlost ω , je-li v_r radiální směrem od O . Působí-li v_r k O , je dr/dt i $2\omega v_r$ záporné, proti smyslu ω .

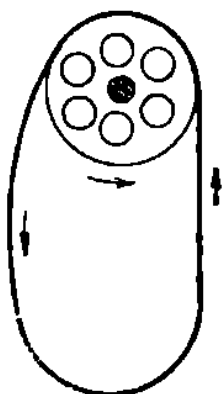
Dynamická stabilita

Představme si řetěz spojený v kruh na obvodu bubnu. Řetěz roztočíme bubnem. Kdyby jeho články nedržely pohromadě, odletěly by od obvodu jako jiskry od brusu ve směru tečen.

Když silně roztočený řetěz spadne s bubnu, běží jako tuhý prstenec (obruč) dál po podlaze. Může pružně přeskočit i několik překážek, na které narazí. Až teprve po zastavení ztratí tuhost, změní se v beztvary kus řetězu.

Říkáme, že roztočený řetěz má *dynamickou stabilitu*. Podobnou stabilitu má i prudký proud vody (třeba k rozrušování hlíny při velkých zemních stavbách). Lidské tělo by tento proud lehce prorazil, sochorem můžeme do něj uhodit jako do tyče.

Na tento podivný jev musíme dávat pozor při obsluze rychloběžných strojů (jsou brusky, jejichž vřeteno má 120 000 otáček za minutu). Spadne-li při takové rychlosti řemen s kotouče, točí se ještě chvíli v prostoru a běží po dílně jako tuhá obruč (třeba oválného tvaru) a může způsobit vážné poranění, *obr. 60*.



Obr. 60. Tuhý ovál z běhícího řemenu nebo řetězu.

D'Alembertův princip

D'Alembert, který zemřel r. 1783, upravil tvar Newtonovy základní rovnice (17). Dosud jsme říkali, že síla je příčinou zrychlení. Můžeme však stejným právem napsat základní rovnici dynamiky ve tvaru

$$P - m \cdot a = 0 \quad (a)$$

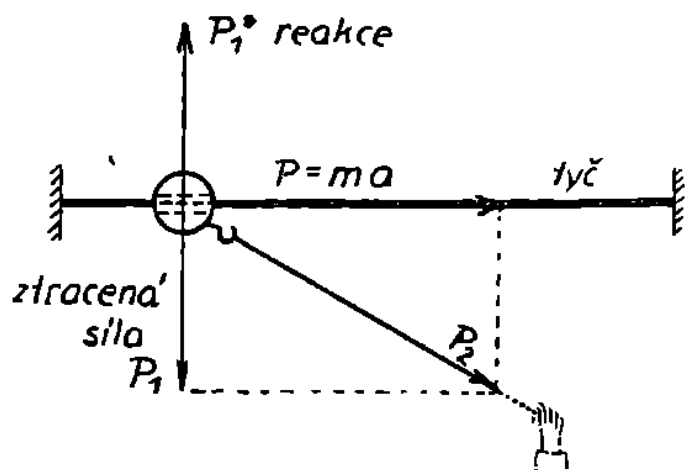
a součin $(-m \cdot a)$ můžeme nazvat silou P_a , působící proti směru zrychlení a . Síle P_a se říká d'Alembertova síla. Potom praví rovnice (a): Při každém pohybu zrychleném nebo nezrychleném i v klidu je součet všech sil, které na těleso působí, roven nule. Mlčky tím říkáme, že k silám přidáme naposled d'Alembertovu sílu $P_a = ma$, která vyváží ostatní.

D'Alembertově síle se také říká „hmotná síla“, „odpor setrvačnosti“ aj.; vzniká zrychlením, ale neúčastní se na zrychlení svého tělesa, může však zrychlit jiná tělesa. To je trochu divné, a proto některé knížky vykládají, že je to síla jen myšlená; není to pravda, myšlená síla by nemohla mít skutečné účinky.

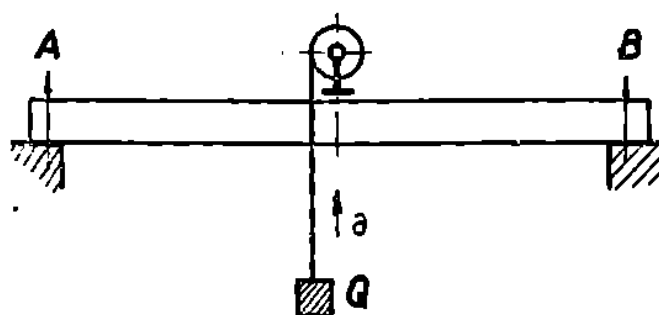
Např. při volném pádu můžeme předpokládat, že v každém okamžiku je váha rovna d'Alembertově síle, s níž je v rovnováze (jejich součet zůstává při zrychlování roven nule). Tento výklad ovšem ruší účelnou a názornou dohodu o pojmu síly, že totiž síla (při volném pádu váha) je příčinou pohybu.

Co je vlastně síla? Dvě tělesa volně pohyblivá ve vzduchoprázdném prostoru (jako třeba Země a Měsíc nebo dvě elektricky nabitá tělesa) působí na sebe úkazem, jemuž říkáme

síly. To značí, že jakýmsi dosud neznámým způsobem se tato tělesa zrychlují. Stejná zrychlení umíme vytvořit i uměle, např. pružinou, která vyvolá u mrtvých těles přetvoření, u živých hmatový pocit síly. V obou případech však nazýváme záhadný úkaz, který zrychlí těleso, silou působící na těleso. Tuto sílu měříme zrychlením a , které síla udělí tělesu o hmotě m , působí-li sama na těleso. Je tedy $P = ma$.



Obr. 61. D'Alembertova síla.



Obr. 62. Výpočet namáhání nosníku se zdvihadlem.

Na těleso mohou působit najednou dva úkazy nazvané síly tak, že se částečně nebo úplně navzájem ruší. Podstata síly není vzorcem $P = ma$ nijak vysvětlena, je to jen předpis, jak můžeme sílu změřit.

Příklady: 1. Provrtaná koule hmoty m se pohybuje po tyči tahem za vlákno P , obr. 61. Složka $P = ma$ pohyb zrychluje, složka P_1 se neužitečně ztrácí, nepatrně prohýbá tyč. Proti ní působí reakce $P_1^* = P_1$. D'Alembertův princip praví: Reakce a ztracená složka jsou v rovnováze, stejně veliké a opačného smyslu. Platí to pro libovolné soustavy těles, spojených pákami, tyčemi atd., které se nemohou volně pohybovat libovolnými směry.

2. Na nosníku opřené na obou koncích stojí uprostřed elektrické zdvihadlo, obr. 62. Zvedá břemeno $Q = 2$ tuny rovnoměrným pohybem se zrychlením $a = 5 \text{ m/s}^2$. Jaké tím vznikají dodatečné podporové reakce A, B ?

Aby se břemeno Q pohybovalo zrychleně, musí na ně působit d'Alembertova síla

$$P = m \cdot a = \frac{Q}{g} \cdot a = \frac{2000}{9,8} \cdot 5 = 1020 \text{ kg.}$$

Protože zdvihadlo visí uprostřed nosníku, je $A = B = P : 2 = 1020 : 2 = 510 \text{ kg.}$

Tlak na každou opěru vzroste o 150 kg. Váží-li zdvihadlo s nosníkem 600 kg, připadá na každou opěru polovina, tedy 300 kg. K tomu nutno přičíst polovinu břemena Q , tedy 1000 kg a odpor 510 kg. Celkem tlačí na každou opěru $300 + 1000 + 510 = 1810 \text{ kg.}$

3. Koleno potrubí má vnitřní průměr $d = 200$ mm, obr. 63. Voda jím protéká rychlostí $v = 10$ m/s. Máme určit sílu R , kterou bude koleno tlačeno vlevo (musí ji zachytit spoje A , B nebo opěra C).

Za vteřinu vyteče objem Q dm³, vážíci Q kg. Jeho hmota je Q/g , kde $g =$ = zemské zrychlení.

Voda vytéká zrychleným pohybem. Setrvačný odpor $R = -m \cdot a$.

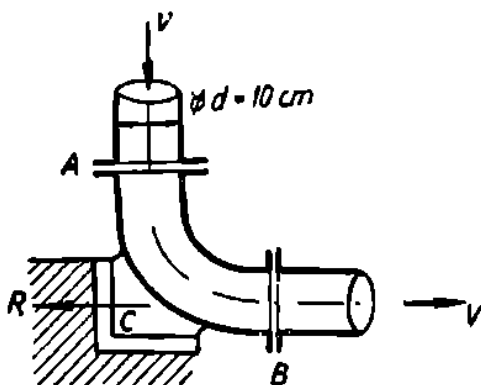
Z rovnice pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu $v = at$ je zrychlení $a = v : t$.

$$R = -m \cdot a = -m \cdot \frac{v}{t} = -\frac{m}{t} \cdot v = \\ = \frac{Q}{g} \cdot v,$$

protože m/t je hmota proteklá za vteřinu, Q/g . Za vteřinu proteče objem kapaliny $Q = Fv = 0,785 d^2 \cdot v$. Dosazením máme vzorec pro sílu

$$R = -\frac{F}{g} \cdot v^2 = \frac{0,785 d^2}{g} v^2 = \\ = \frac{0,785 \cdot 2^2}{98} \cdot 100^2 = 320 \text{ kg}.$$

Obr. 63. Výpočet tlaku vody na pravoúhlé koleno.

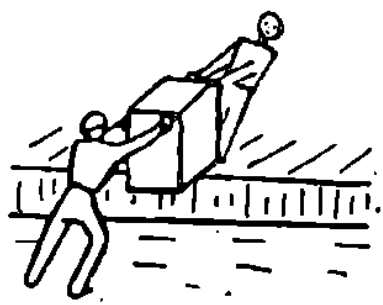


Dosazovali jsme rozměry v decimetrech, protože jsme počítali s měrnou vahou vody $\gamma = 1$ kg/dm³ a také Q je v dm³. Proto i zrychlení $g = 9,8$ m/s² = 98 dm/s².

Práce

Od pradávna museli lidé pracovat, a tak se vyvinul ve starých dobách prostodušný názor, že práce je červem, který hlodá na kořeni lidského štěstí. Zamysleli jste se někdy nad tím, že podle Bible Bůh *potrestal* člověka v ráji *prací* za neposlušnost („v potu tváře své chléb jísti budeš“)? To je vážná chyba v myšlení, která sama o sobě stačí, aby zvrátila morálku. Už několik tisíciletí nás učili, že práce je trestem, a vychovávali tak člověka k lenošení, které mělo být štěstím. Stačí se nad tím zamyslet, abychom poznali, že to není pravda.

Zde pak vyniká velikost Leninova: *osvobodil práci*. Pozvedl práci na podmínku pokroku a civilisace, na nejdražší, co člověk má. Do té doby byla práce zotročena, ponížena a zneuctěna tak, že se místo radostí stala břemenem. Teprve Lenin naučil pracujícího, že má být hrdý na svůj modrý pracovní



oblek. Nekázal jako papíroví mravokárci o tom, že je nemravné a nekřesťanské vykořisťovat bližní; prostě dal moc do rukou pracujících. Byl to jedinečný čin v historii, který jde až ke kořenům lidské společnosti a je základním sloupem mravnosti a morálky.

V této knize nebudeme blíže vykládat o sociálních názorech na práci, zajímá nás jen práce technická, mechanická. Je to pojem nový, zavedl jej Coriolis asi r. 1830, který poprvé použil názvu „práce“ v technice tak, jak mu dnes rozumíme. Jak je to možné, jakpak se říkalo práci do roku 1830? Odpověď na to je jednoduchá: nesprávně.

Galileo nerozlišil pojmy impuls, energie a práce, jako by to bylo jedno. Uhlíř, který nese pytel koksu, jistě koná práci. Její velikost záleží na váze a vzdálenosti; mechanicky řekneme na síle a dráze. Síla zde působí svisle; vzdálenost musíme při výpočtu mechanické práce měřit ve směru síly, tedy také svisle. Nezáleží na skutečné dráze, nýbrž jen na dráze ve směru síly. To je důležitá podrobnost. Kdyby náš uhlíř pytlem pohyboval vodorovně (místo vzhůru), jistě se také unaví, ale nekoná žádnou mechanickou práci! Dráha ve směru síly (svisle) by byla = 0. Kdyby chvíli stál a držel pytel, opět se unaví, ale nekoná žádnou mechanickou práci, protože dráha je nulová. Vidíme, že mechanická práce je jiná než práce v životě. Živý tvor se může unavit, i když nekoná žádnou mechanickou práci. Mechanická práce se posuzuje podle dráhy a síly, únava člověka i jen podle síly, obr. 64.

Práce v technice je součin ze síly a dráhy ve směru síly

$$\boxed{L = P \cdot s} \quad (23)$$

L = práce [kgm]; P = síla [kg]; s = dráha ve směru síly [m], podél níž je síla P konstantní (stálá).

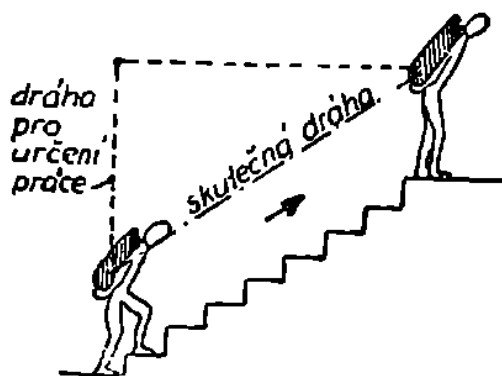
$L = +Ps$ značí, že síla P a dráha s mají stejný smysl. Síla P koná práci.

$L = -Ps$ značí, že síla P má opačný smysl než dráha s . Koná se práce proti síle P .



Obr. 64. Pokud muž s břemenem stojí, unaví se, ale nekoná mechanickou práci.

Když táhneme po vodorovné podlaze bednu, konáme mechanickou prací tím, že přemáháme odpor tření. Vykonaná práce je součinem tření T a dráhy, po níž byla bedna tažena. Spotřebovala se na přemáhání tření, změnila se v teplo; trochu ohřála dosedací plochu bedny a podlahu. Nikdy ji už nedostaneme zpět, kdežto práci vykonanou zdvižením břemene můžeme dostat zpět. Dokazují to hodiny poháněné závažím. Zdvižením závaží jsme nahromadili práci, která se pak zvolna opět uvolňuje klesáním závaží a poháním hodiny.



Obr. C.

Poznali jsme už dva druhy práce: *proti tření* (ztracená práce) a *proti tíži*. Je též práce *proti setrvačnosti*, kterou konáme, měníme-li rychlost nebo směr pohybu tělesa. Práci vynaloženou k uvedení tělesa do pohybu můžeme opět dostat zpět při zastavení tělesa.

Ze vzorce (23), který je definicí mechanické práce, odvodíme snadno i *jednotky práce*. Stačí, když tam dosadíme jednotku síly (kilogram)

a jednotku dráhy (metr). Tím vznikne jednotka práce 1 kg . 1 m = 1 *kilogrammetr* = 1 kgm (ve fyzice 1 N . m = 1 J (Joule)).

Zdvižením 1 kg do výše 1 m jsme vykonali práci 1 kilogrammetru. Stejně zdvižením 2 kg do výše 1/2 m nebo zdvižením 1/2 kg do výše 2 m. Důležité je pamatovat, že na konci tohoto pohybu je závaží v klidu (nemá žádnou rychlost), obr. 65.

Zdvižením 3 kg do výše 2 metrů vykonáme práci $3 \times 2 = 6$ kilogrammetrů = 6 kgm. Malou jednotkou práce je tedy jeden kilogrammetr, 1 kgm. Větší jednotkou práce je jedna *kilowatthodina*, 1 kWh. Je to 367 000 kgm. Má $1000 \times 3600 = 3\,600\,000$ wattvteřin [Ws].

1 kWh = 367 000 kgm = 3 600 000 wattvteřin (newtonmetrů)

Příklady: 1. Po njetí 87 000 km byla lokomotiva poslána do opravy, protože její tah poklesl. Průměrně byl tah této lokomotivy 6900 kg. Jakou práci celkem vykonala?

$$L = P \cdot s = 6900 \cdot 87\,300\,000 = 602\,400\,000\,000 \text{ kgm.}$$

To je 602 400 tun. kilometr. Tímto číslem bývá určována kvalita lokomotiv.

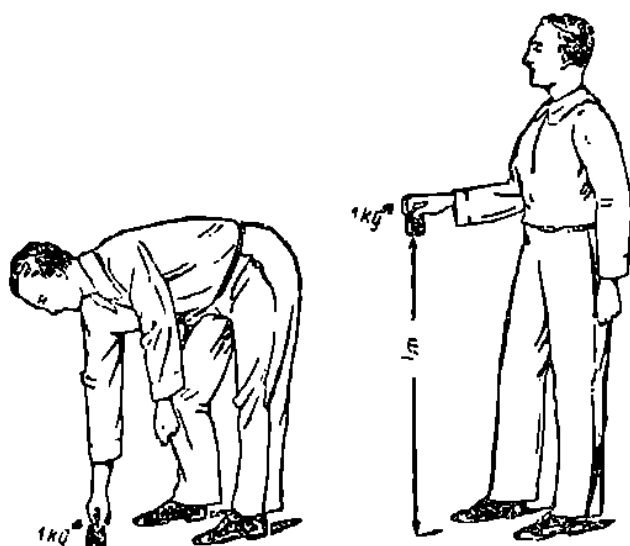
2. Horolezec vážící 70 kg vystoupil na skálu, která je 600 m nad úrovní okolí. Udělal tím mechanickou práci $70 \cdot 700 = 49\,000$ kgm, to je asi 0,15 kilowatthodin. Kilowatthodina stojí asi 1 Kčs, má tedy „práce“ horolezce mechanickou cenu 15 haléřů.

3. Skokan vážící 70 kg přeskochí lano napjaté 1,7 m nad zemí, *obr. 66*. Jakou tím vykonal práci?

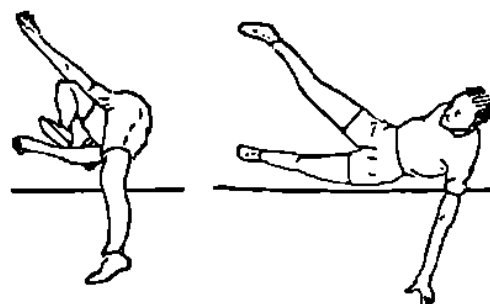
Těžiště lidského těla je asi 1 m nad zemí. Při skoku se musí zvednout asi do výše 2 m, tedy o 1 m. Vykonaná svalová práce je $70 \cdot 1 = 70$ kgm. Tato práce má cenu zlomku haléře, a přece už vyžaduje dlouhé cvičení. Práci 1 kgm vykonáme zdvižením 1 kg do výšky 1 m. Zvednutím 5 kg do výše 0,3 jsme vykonali práci $5 \cdot 0,3 = 1,5$ kgm.

4. Známe každý lodičkové houpačky na poutích. V čem je umění rozhoupat se? Jak se tu koná práce?

Ze zkušenosti jistě víte, že ani silný člověk se nerozhoupá tahá-



Obr. 65. Práce 1 kgm.



Obr. 66. Jak se skokan převálí přes lano.

ním nebo tlačení na závěsná táhla ložky, v níž stojí. Vyvinuje tím jen vnitřní síly na soustavě muž + houpačka. Těmito silami může houpačku polámat, nevyvolá však pohyb.

Snadno houpačku rozhoupá, když si střídavě sedá a opět vstává. Mění tím těžiště soustavy, koná práci.

5. Stlačením z délky 20 cm na 17 cm získáme sílu pružiny 960 kg. Jakou práci musíme vynaložit k stlačení této pružiny o další 1 cm (na 16 cm)?

Tlak pružin je přibližně úměrný stlačení. Protože je tlak 960 kg pro stlačení 3 cm, je $960 : 3 = 320$ kg pro stlačení 1 cm. Stlačením o 4 cm získáme tlak pružiny $4 \cdot 320 = 1280$ kg.

Střední tlak $\times$ dráha $1 \text{ cm} = [(960 + 1280) : 2] \cdot 1 = 1120 \text{ kgcm} = 11,2 \text{ kgm} = \text{práce k stlačení o 1 cm na délku 16 cm.}$

Pohybová energie

Pohybující se hmota, třeba proudící voda nebo rozjetý vagón, má schopnost konat práci. Schopnost konat práci nazýváme *energií*. Pohybující se hmota má tedy pohybovou energii. Protože energie a práce značí totéž, značíme je stejným písmenem, *L*. Jak se vypočte pohybová energie?

Práce = síla $\times$ dráha = $P \cdot s$; síla = hmota $\times$ zrychlení = $m \cdot a$. Při rovnoměrně zrychleném pohybu je ze vzorce (8)

dráha $s = at^2/2$, kde t je čas pohybu. Dosazením těchto vztahů do vzorce pro práci je

$$L = ma \cdot at^2/2 = ma^2t^2/2 = m(at)^2/2 = mv^2/2 \quad (24)$$

Pohybovou energii L [kgm] dostaneme, když hmotu tělesa m [v technických jednotkách hmoty, $m = G/g =$ váha v kg: :9,8] násobíme dvojnásobkem rychlosti pohybu v [m/s] a dělíme dvěma.

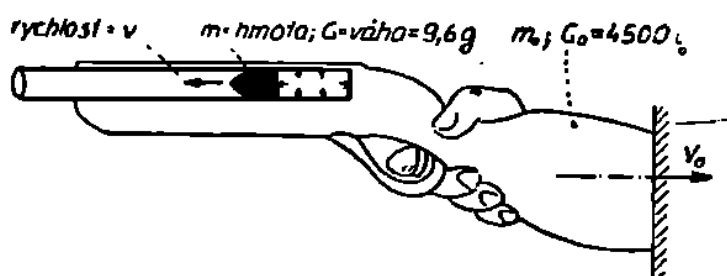
Příklady: 1. Koule vážící 3 kg pohybuje se rychlostí 25 m/s. Jaká je její pohybová energie?

Hmotu $m = G/9,8 = 3 : 9,8 = 0,306$ techn. jednotek hmoty.

Pohybová energie $L = \frac{1}{2} \cdot m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,306 \cdot 25^2 = 95,6$ kilogrammetrů.

2. Aby střela opustila zeměkouli, musela by se vystřelit vodorovně rychlostí 11 180 m/s. Na každý 1 kg váhy střely by se spotřebovala práce L , předaná střele jako pohybová energie.

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{1 \cdot 11\,180^2}{9,8 \cdot 2} = 6\,380\,000 \text{ kgm.}$$



Z toho se může vypočítat spotřeba traskaviny k vystřelení střely, protože z pokusů je známo, kolik kgm může vydat třeba 1 kg střelného prachu. Výpočet však je složitou balistickou úlohou a nemá praktický smysl. 1 kg vážící střela může mít u ústí děla rychlost třeba 1000 m/s, tedy asi desetkrát menší, než by bylo třeba, aby uletěla do vesmíru.

Obr. 67. Hybnost při výstřelu z pušky.

Výstřelem se družice Země nemůže odpálit. Je k tomu nutná asi třístupňová raketa.

3. Váží-li střela z pušky $G = 9,6 \text{ g} = 0,0096 \text{ kg}$, puška $G_0 = 4500 \text{ g} = 4,5 \text{ kg}$, rychlost střely je $v = 880 \text{ m/s}$, je zpětná rychlost pušky, obr. 67, $v_0 = v \cdot m/m_0 = v \cdot G/G_0 = 880 \cdot 9,6/4500 = 1,9 \text{ m/s}$.

Pohybová energie střely $L = mv^2/2 = (0,0096/9,8) \cdot 880^2/2 = 380 \text{ kgm}$, pohybová energie pušky $L = m_0 v_0^2/2 = (4,5/9,8) \cdot 1,9^2/2 = 0,83 \text{ kgm}$. Z toho vidíme důležitý výsledek: stejné hybnosti ještě neznačí stejné pohybové energie. Tím vyložíme omyly četných vynálezců věčného samohybu (perpetua mobile).

4. Důlní klec váží 1100 kg. Z klidu má při zdvínání získat na dráze 2 m rychlost 2 m/s. Jaký je tah v laně?

$$\text{Ze vzorce (8) je } a = \frac{v^2}{2s} = \frac{2^2}{2 \cdot 2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ zrychlení.}$$

Hmotu klec $m = G/g = 1100/9,8 = 112$ techn. jednotek.

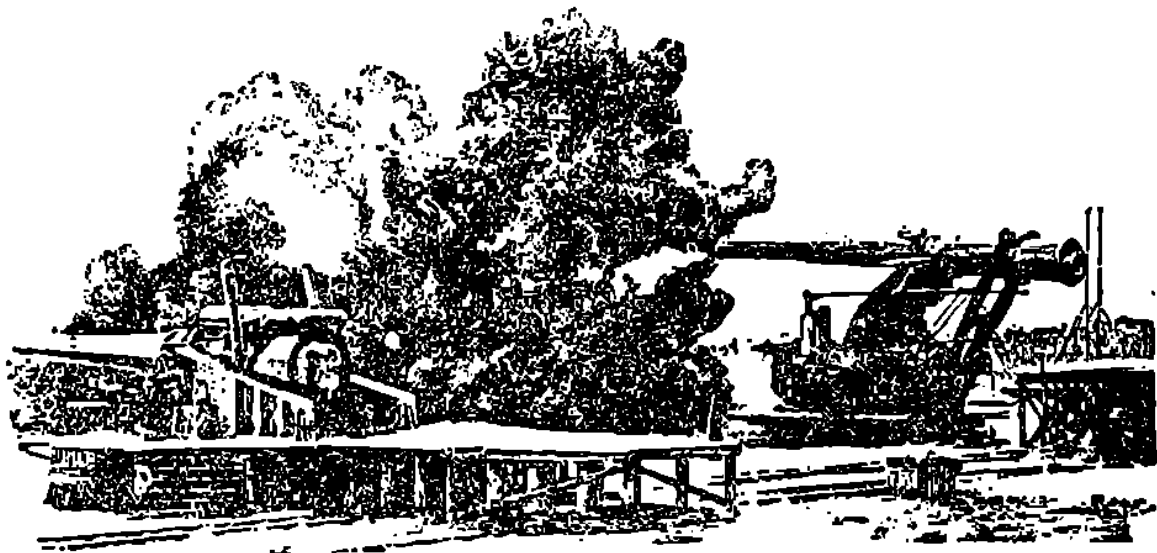
Síla ze vzorce (17) je $P = m \cdot a = 112 \cdot 1 = 112 \text{ kg}$.

Tah v laně $= G + P = 1100 + 112 = 1212 \text{ kg}$.

Do klece byla nahromaděna práce $P \cdot s = 112 \cdot 2 = 224$ kgm, která je rovna pohybové energii klece ze vzorce (24).

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{112 \cdot 2^2}{2} = 224 \text{ kgm.}$$

5. *Práce při výstřelu z děla.* Počítejme, že střela protitankového děla váží právě 1 kg a hlaveň je dlouhá 1 m. Postavíme hlaveň svisle a vystřelíme. Plyny vzniklé spálením prachu se v hlavní rozpínají a předávají svou práci střele. Na střelu tlačí plyny jen v délce hlavně, 1 metr. Zvedly tedy vlastně střelu o 1 m a předaly jí práci 1 kgm.



Obr. 68. Pevnostní děla ráže 36 cm.

Nezdá se vám, že je to málo? Jaká je chyba ve výpočtu?

Střele by byla odevzdána práce jen 1 kgm, kdyby se střela na konci hlavně zastavila. Ve skutečnosti však vyletí z hlavně rychlostí např. 600 m/s. Tím má pohybovou energii

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1 \cdot 600^2}{2} = 18\,400 \text{ kgm.}$$

Plyny při výbuchu předaly střele práci (= energii) 18 400 kgm. Víme ze zkušenosti, že střely skutečných kanónů jsou mnohokrát těžší a také hlaveň je delší než 1 m.

Granát ráže 36 cm (obr. 68) váží 720 kg. Má hmotu

$$m = \frac{G}{g} = \frac{720}{9,8} = 73,5 \text{ jednotek hmoty.}$$

Je vystřelen rychlostí $v = 800$ m/s. Jeho pohybová energie je

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{73,5 \cdot 800^2}{2} = 23\,500\,000 \text{ kgm.}$$

Tuto energii můžeme porovnat s prací elektrického proudu. 1 kilowatt-hodina elektrické práce (= práce 1 kilowattu po 1 hodinu) = 1 kWh = = 367 000 kgm. Je tedy práce utajená ve střele rovna 23 500 000 : : 367 000 = 64 kWh.

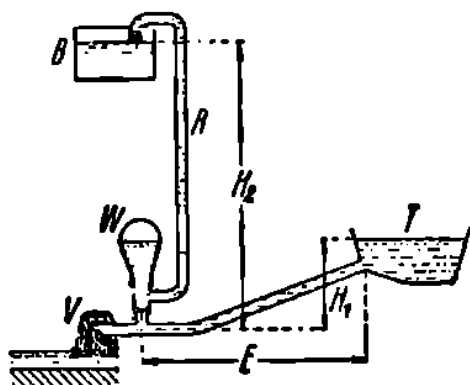
Velký oceánský parník vážící 20 000 tun (tj. 20 000 000 kg) jede rychlostí 25 uzlů za hodinu. Jeho hmota $m = 20\,000\,000 : 9,8 = 2\,040\,000$.

Uzel je námořní jednotka rychlosti. Znamená 1,8 kilometru za hodinu. Tento parník jede rychlostí $25 \cdot 1,8 = 45 \text{ km/h}$, čili $45\,000 : 3600 = 12,5 \text{ m/s}$. Nejrychlejší válečné lodi mají rychlosti okolo 30 uzlů.

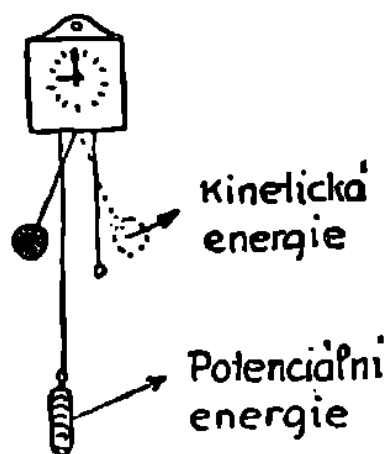
Pohybová energie parníku je

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{2\,040\,000 \cdot 12,5^2}{2} = 160\,000\,000 \text{ kgm.}$$

Vidíme, že 20 000 tun těžký parník má pohybovou energii jen jako necelých 7 granátů. Tím získáme nejlepší představu, jak rychlost zvětšuje průbojnost střely.



Obr. 69. Schéma vodního trkače.



Obr. 70. Pohybová (kinetická) a polohová (potenciální) energie.

6. *Vodní trkač*, obr. 69, je příkladem využití pohybové energie vody. V hornatých krajinách, kde je při ruce dost vody při malém spádu, se trkačem čerpá voda do velké výšky.

Pohybová energie vody $0,5 mv^2$ tlačí na ventil u ústí trubky V a zavře tento ventil. Tím stoupá voda ve větrníku W a v potrubí R . Za chvíli se pohybová energie, a tím i rychlost vody ztratí. Ventil V se otevře vlastní váhou, voda opět chvíli vytéká, až získá novou pohybovou energii a zavře ventil V .

Trkač se osvědčuje pro spády $H_1 = 2$ až 8 m , čerpá do výšky $H_2 = (5 \text{ až } 10) \cdot H_1$. Voda má v potrubí rychlost asi 1 m/s . Konstrukce je jednoduchá, pracuje bez poruch a dobře nahradí drahé elektrické čerpadlo.

Polohová čili potenciální energie

Zdvíháme-li předmět, vkládáme do něj práci; má pak větší zásobu energie. Velikost této energie měříme prací, již jsme vykonali při zdvižení. Ve zdviženém předmětu je energie uložena, můžeme ji získat zpět. Protože její velikost záleží na poloze předmětu, tj. na tom, jak vysoko jsme zdvihli, říkáme vložené energii *energie polohová*. Je to druh energie potenciální. Závaží hodin má polohovou energii, kdežto v kyvadle je pohybová energie, obr. 70.

Kámen na kopci má energii polohovou, když se valí po stráni dolů, jeho polohová energie se ztrácí, mění se však v energii pohybovou, již rychlost kamene stále roste. Dole na rovině se pohybová energie kamene neúčinně spotřebuje na rozbití překážek, které mu stojí v cestě, až se kámen zastaví a je bez energie. Říkáme, že předměty na zemském povrchu (přesněji na hladině moře) už nemají polohovou energii, protože už nemají, kam padat. Mohly by padat nejvýše do studny nebo do dír v zemi, o tom však v technice neuvažujeme.

Potenciálních energií je velké množství, nemusí to být jen důsledek přitažlivosti. Elektrická potenciální energie je uložena v mracích; v akumulátoru, kterým startujete automobil, je uložena elektrochemická potenciální energie. Ve stlačené tekutině je velká pot. energie. Některé tyto energie nám dává příroda zadarmo, ani jich ještě nedovedeme dobře využít (jako třeba tepelné nebo světelné energie sluneční). Různé druhy energií mohou přecházet z jedné formy na druhou, nemohou však vznikat z ničeho nebo se beze zbytku ztratit. Někdy můžeme energii přinutit, aby konala užitečnou práci.

Málokdy se stane, aby se jeden druh energie změnil v stejné množství energie jiné. Obvykle se část energie ztrácí jako při tažení bedny po zemi: mění se neúčinně v teplo. Jenže teplo je také pohybovou energií maličkých částíček, jímž říkáme molekuly. Je pro nás ztracena, protože pohybu nepatrných molekul už neumíme nijak využít.

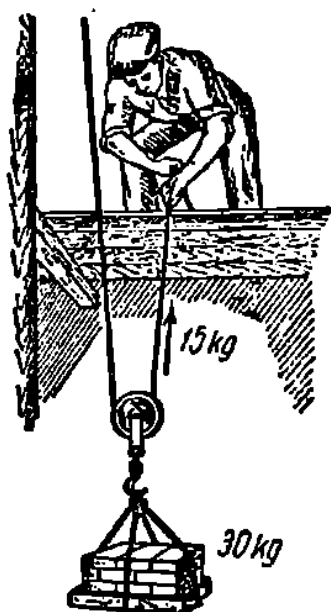
Platí zde velmi důležitý princip zachování energie: *Energii nelze z ničeho vytvořit ani ji nelze zničit*, může se jenom změnit, ale nezávisle na tom, kde nebo jak mění tvar, je její hodnota vždy stejně velká.

Zákon o zachování hmoty a energie, dvě strany jediného přírodního zákona, objevil veliký ruský vědec *Lomonosov* (1711 až 1765). Dokázal, že „kolik pohybu odchází od jedné částíček, tolik se ho přidává k druhým“. Roku 1760 napsal v „Úvaze o tuhosti a tekutosti těles“:

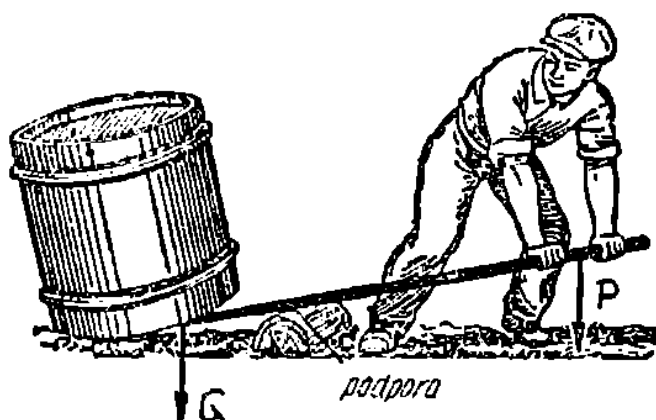
„Všechny přeměny v přírodě se dějící jsou takového rázu, že kolik se čeho u jednoho tělesa odejme, tolik se přidá ke druhému. Tak ubude-li kde trochu hmoty, přibude jí na jiném místě.“

„Zlaté pravidlo mechaniky“ praví: Zisk na síle je při každé práci roven ztrátě na dráze. To značí, že dráha ve směru síly je tolikrát delší, tolikrát menší je síla. Z tohoto pravidla snad-

no počítáme práci jednoduchých strojů (páky, kladky aj.). Břemeno 30 kg visí např. na kladnici volné kladky, obr. 71, tedy na dvou lanech. Proto je v každém lanu tah $30 : 2 = 15$ kg. Táhneme-li za volný konec lana, břemeno se zvedá. Protože je síla poloviční, musí se vytáhnout kus provazu dvakrát delší než je zdvih břemena. Podobně u páky je síla tím menší, čím delší je rameno, obr. 72 (blíže viz obr. 120).



Obr. 71. Volná kladka.



Obr. 72. Dvojramenná páka. Tlakem $P = 40$ kg na ramenu (vzdálenosti k podpoře) 150 cm zvedne dělník břemeno $Q = 3 \cdot 40 = 120$ kg na ramenu třikrát menším, 50 cm. Z rovnováhy momentů vzhledem k podpoře $Q \cdot 50 = P \cdot 150$.

Příklady: 1. Pohyb po svislé kruhové dráze, obr. 73. Obíhající těleso b má v místě a pohybovou energii $0,5 mv_a^2$. V b je polohová energie $G \cdot \overline{ac}$ a pohybová energie $0,5 mv^2$. Protože na dráze ba se žádná práce neztrácí ani nezískává, musí být energie v b rovna energii v a čili

$$0,5 mv^2 + G \cdot \overline{ac} = 0,5 mv_a^2; \quad v_a^2 = v^2 + 2g \cdot \overline{ac} \quad \dots \dots \dots (a)$$

Tah za vlákno (nebo tlak na válcovou stěnu, po níž těleso běhá) vznikne sečtením odstředivé síly mv^2/r a složky váhy $G \cos \varphi$. Je

$$R = mv^2/r + G \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (b)$$

Známe-li v_a , můžeme ze vzorce (a) najít v pro libovolnou polohu a dosadit do (b). Min R bude v d . Není-li v_a dost velké, aby v tomto vrcholu bylo R větší než 0, neopíše těleso úplnou kružnici. Musí být $R_d > 0$ čili $mv_d^2/r + G \cos 180^\circ > 0$. Protože $\cos 180^\circ = -1$ je $-mv_d^2/r > G$ čili $v_d^2 > gr$.

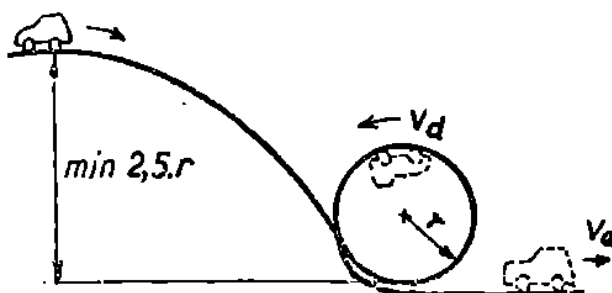
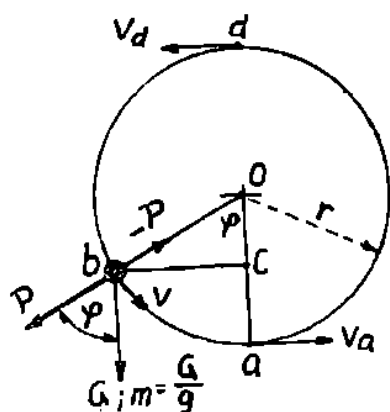
Protože $v_d^2 = v_a^2 - 2g \cdot \overline{ad} = v_a^2 - 4rg$, musí platit

$$v_a^2 - 4rg > gr; \quad v_a^2 > 5gr; \quad v_a = \sqrt{5gr}.$$

Rychlost v bodu *a* musí být větší než rychlost při pádu s výšky $5r/2 = 2,5r$. Tím je určena např. výška rozjezdového stupínku při „jízdě smrti“ svislým kolem v círku, obr. 74.

2. Bomba vážíci $G = 60$ kg má hmotu $m = G/g = 60/9,8 = 6,12$ technických jednotek hmoty. Ve chvíli, kdy je 30 m nad zemí, má rychlost $v = 45$ m/s.

Je v ní utajena polohová energie $L_1 = Gh = 60 \cdot 30 = 1800$ kgm a pohybová energie $L_2 = mv^2/2 = 6,12 \cdot 45^2/2 = 6192,6$ kgm, tedy celkem $L = L_1 + L_2 = 7992,6$ kgm.



Obr. 73. Pohyb po svislé kružnici. Obr. 74. „Jízda smrti“ ve varieté.

Výkon

Tento odstavec pročtete zvlášť pozorně, protože v praxi se často výkon plete s prací. Výkon je poměr práce a času, za který byla práce udělána; je to tedy rychlost práce. Výkon dostaneme, když práci vydělíme časem, čili je číselně roven práci vykonané za jednotku času. Pozor však, není to práce!

Když zvednu 10 kg do výše 1 m, vykonám práci 10 kg · 1 m = 10 kgm. Udělám-li to za 2 vteřiny, mám výkon 10 kgm : 2 s = 10/2 kgm/s = 5 kilogrammetrů za vteřinu. Kdybych zvedl 10 kg do výše 1 m za 1/2 s, mám výkon (ovšem jen v této 1/2 s) 10 : 0,5 = 20 kgm/s.

$$\boxed{\text{Výkon } N = \frac{\text{práce}}{\text{čas}} = \frac{L}{t} = \frac{P \cdot s}{t} = P \cdot \frac{s}{t} = P \cdot v} \quad (25)$$

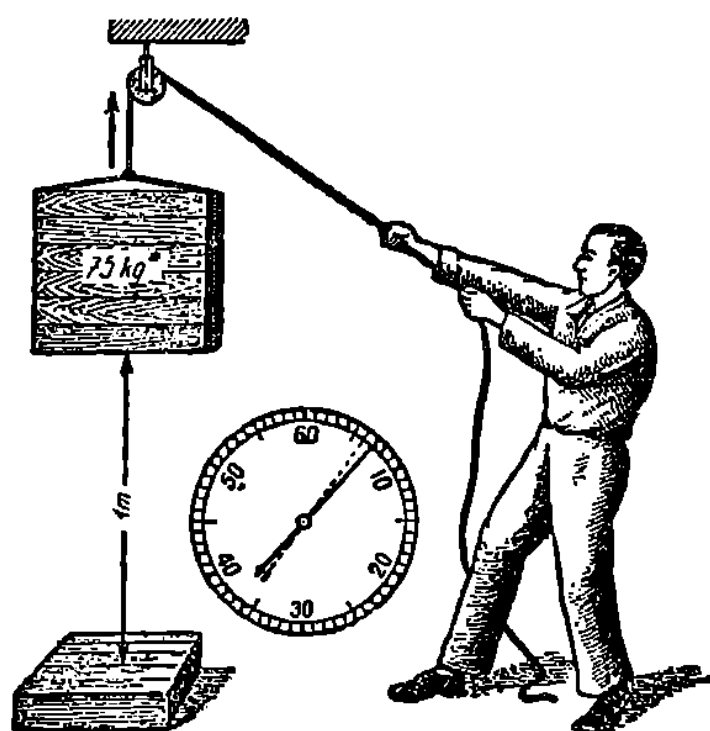
N je výkon [kgm/s], L je práce [kgm], t je čas [s], P je síla [kg], s je dráha [m], v je rychlost [m/s]. Výkon = síla × rychlost pohybu.

Jednotkou výkonu je 1 watt, zkratka 1 W; 1000 W je kilowatt, kW.

$$1 \text{ watt} = 1 \frac{\text{newtonmetr}}{\text{sekunda}} = 0,102 \frac{\text{kilogrammetr}}{\text{sekunda}} = 1 \frac{\text{joule}}{\text{sekunda}}$$

1 kilowatt = 102 kilogrammetrů za s.

Jinou jednotkou výkonu je jeden kůň (nesprávně se dříve říkalo koňská síla), obr. 75.



Obr. 75. Výkon 1 k má muž, který za každou vteřinu zvedne 75 kg do výše 1 m.

1 k = 1 kůň = 75 kilogrammetrů/s = 0,735 kilowattů;
1 kW = 1,36 k.

Práci tedy měříme v kgm, výkon v kgm/s, nebo lépe ve wattech, kilowattech a koních. Kilowatt je víc než kůň, přibližně 3 kW = 4 koně.

Watt je rychlost práce, při níž se za každou vteřinu udělá práce 1 joule nebo přibližně 0,1 kilogrammetru. Chlapec vážící 50 kg představuje v mechanice 50 kg síly. Vystoupí-li výše o 1 cm, to je o 0,01 m, vykoná práci 50 kg · 0,01 m = 0,5 kgm, to je asi 5 joulů (= 5 watts).

Kdyby to trvalo 1 s, má výkon 5 joulů/s = 5 wattsec/s = 5 wattů. Maličká žárovka

má výkon 25 W, tedy pětkrát větší. Kdyby chlapec běžel po schodech, z nichž každý je vysoký 20 cm, takže udělá jeden krok za s, má výkon asi 5 · 20 = 100 W, jako 4 malé žárovky.

1 kůň = 75 kgm/s = 75 · 9,8 = 735 wattů = 0,735 kW = výkon.

1 hodinový kůň = 75 · 60 · 60 = 270 000 kgm = práce.

1 kilowatt = 1 kW = 1,36 koně = 102 kgm/s = výkon.

1 kilowatthodina = 1 kWh = 120 · 60 · 60 = 367 000 kgm = práce.

Tyto rozdíly si musíme dobře pamatovat. Elektrické počítadlo měří práci elektrického proudu, kilowatthodiny. Turbina v elektrárně má výkon např. 100 000 kilowattů (kW), ne však 100 000 kWh. Žehlička spotřebuje výkon 500 W = 0,5

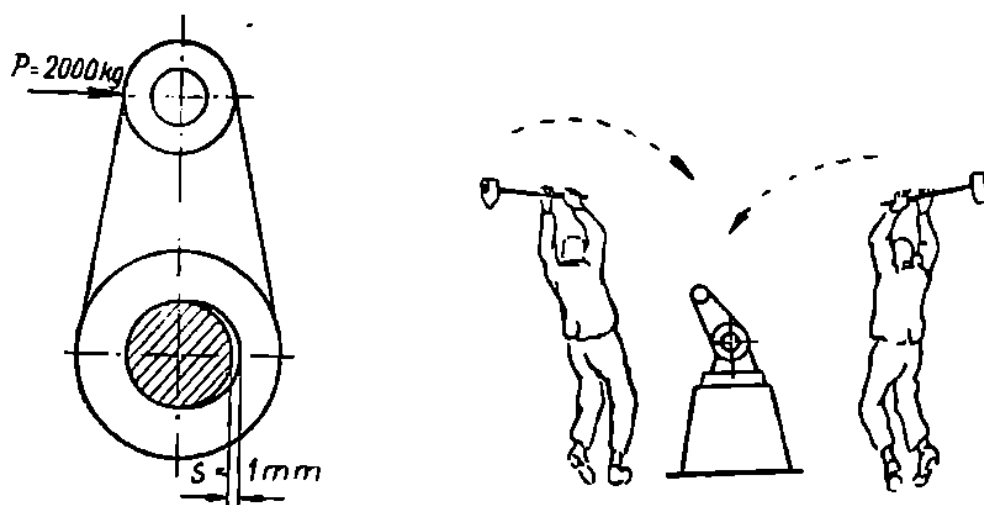
kW, tedy za 1 hodinu spotřebuje práci $0,5 \text{ kW} \times 1 \text{ hod} = 0,5 \text{ kWh}$.

Příklady: 1. Motor, který má výkon jednoho koně, by mohl zvedat každou vteřinu 75 kg do výšky jednoho metru. Název „kůň“ vznikl v Anglii za starých časů, když mechanik Watt vymýšlel parní stroj, aby čerpal vodu z dolů místo koní. Živý koník má výkon o trochu menší než mechanický kůň. Sportovec, který váží 75 kg a vyběhne za vteřinu do výšky jednoho metru, má výkon jednoho koně. Cvičený závodník vyběhl po schodech za 3 vteřiny do výšky 6 metrů. Vážil 70 kg. Vykonal tím práci $70 \text{ kg} \times 6 \text{ m} = 420 \text{ kgm}$.

Protože to trvalo 3 vteřiny, měl výkon

$420 \text{ kgm} : 3 \text{ vteř.} = 140 \text{ kilogrammetrů za vteřinu}$.

To je $140 : 75 = 1,87$ koní nebo $140 : 102 = 1,36$ kilowattů.



Obr. 76. Škodlivý účinek vůle v ložisku.

Na kratičkou chvíli může mít člověk výkon až dva koně, ale při trvalé práci, když točí klikou rumpálu u studně, má výkon sotva desetiny koně. Lokomotiva s výkonem 4000 koní koná práci jako 40 000 mužů!

Lezete-li na kopec nebo na žebřík, zvedáte své tělo, a konáte tím práci. Ani svaly nevyrábějí práci z ničeho, musí se v nich topit potravou. Kam-pak se ta práce ztratí? Hromadí se jako polohová energie ve vašem těle. Snadno se poučíte o její vydatnosti, když s žebříku spadnete. Energie nahromaděná v těle zdvižením o několik metrů už stačí, aby člověka i zabila.

Protože výkon nezáleží jen na práci (tj. na síle), ale také na čase, pochopíme, proč vytrvalá přičinnivost vede k většímu výkonu než nárazový zápal, který trvá jen chvíli.

2. Nesprávně seřazená a vyběhaná ložiska velmi nebezpečně ničí stroje. Počítejme, že klikový hřídel parního stroje má v ložisku vůli 1 mm, obr. 76. Na kliku působí tlak ojnice $P = 2000 \text{ kg}$.

Při každé otáčce kliky se hřídel v ložisku posune o tento milimetr vpřed a zpět. V náraz na pánev ložiska se přemění práce

$$L = 2 \cdot 2000 \cdot 0,001 = 4 \text{ kgm}.$$

Má-li stroj 4 otáčky za vteřinu, vynaloží se tím v každé vteřině na rozbíjení práce $4 \cdot 4 = 16 \text{ kgm}$, čili výkon $16 : 75 = 0,21$ koně stroj trvale ničí. Takový výkon mají dva silní muži.

Závěr: Vůle 1 mm v ložisku má stejný účinek jako dva kováři, kteří velkými kladivy vytrvale stroj rozbíjejí. Jistě uznáte, že se jim to nakonec podaří.

Z toho plyne *důležité pravidlo* pro strojníky a údržbáře: ložiska musíme včas seřizovat, aby v nich nebyly větší vůle, než je třeba k mazání.

3. Lokomotiva táhne nákladní vlak silou $P = 12\,000$ kg rychlostí 32 km/hod = $32\,000/3600$ m/s = 8,9 m/s. Její výkon

$N = Pv = 12\,000 \cdot 8,9 = 106\,800$ kilogrammetrů za s čili $106\,800 : 75 = 1423$ koní nebo $106\,800 : 102 = 1057$ kilowattů.

4. Motor traktoru má výkon $N = 10$ k = $10 \cdot 75 = 750$ kgm/s. Na první rychlost jede rychlostí $v = 2,45$ km/h = 0,68 m/s.

Tah traktoru $P = N/v = 750/0,68 = 1100$ kg.

5. Při chůzi rychlostí 5 km/h = 1,4 m/s má člověk, který představuje 70 kg síly, výkon asi 60 wattů. Nepatrné zvětšení rychlosti vyžaduje velké zvýšení výkonu. Při rychlosti 7 km/h spotřebuje už 200 wattů. Při jízdě na kole rychlostí 9 (nebo 18) km/h spotřebuje též člověk 30 (nebo 120) wattů. Nad tím se bystrý čtenář zamyslí:

Jak je možné, že při jízdě na kole, kdy člověk pohybuje nejen svým tělem, ale ještě velocipédem, je spotřeba výkonu menší? Při obyčejné chůzi se každým krokem těžiště našeho těla zvedá asi o 6 cm, zbytečně vysoko (proto bychom se měli učit lépe chodit, unavilo by nás to méně). Při jízdě na kole je zbytečné zvedání těla zamezeno, proto je spotřebovaný výkon mnohem menší (viz obr. 144).

6. Letadlo vážící 2600 kg stouplo do výše 645 m za 4 min 20 s. Jakému výkonu to odpovídá (teoreticky, protože neuvažujeme o ztrátách)?
4 min 20 s = 260 s.

$$\text{Výkon } N = \frac{L}{t} = \frac{2600 \cdot 645}{260} = 6450 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} = \frac{6450}{75} \text{ k} = 86 \text{ k.}$$

Účinnost

Když spálíme v automobilu litr benzínu, svezeme se z každé koruny, kterou jsme za benzin zaplatili, za 8 haléřů. Zbytek, prostě řečeno benzin za 92 haléřů z každé koruny, neužitečně ohřívá okolní krajinu. A přece proti lokomotivě pracuje automobil velmi hospodárně. Spálením uhlí za 1 Kčs nás lokomotiva svezí za 5 haléřů, zbylých 95 haléřů se ztrácí. Tak měli kus pravdy posměváčkové, když o první Stephensonově Raketě tvrdili, že to je jen drahé zařízení na zakuřování a ohřívání okolní krajiny.

Jak je to možné? Lokomotiva má účinnost jen 5 %, to je 0,05. Automobil má účinnost 0,08, to je 8 %. Víme, že jedno procento, 1 %, je jedna setina, 0,01. Práce zužitkovaná přímo pro jízdu je u auta jen 8 % přivedené energie. Dodáme-li v benzínu 100 koní, spotřebuje se na skutečný pohyb vpřed jen 8 koní. Největší ztráty energie vznikají žhavým výfukem, chlazením motoru, třením v převodech a v pneumatikách. Snad ani netušíte, že guma pneumatik se jízdou silně ohřívá a sotva se stačí chladit o vzduch, a proto únava vláken (kordu)

důmyslným obalením vrstvičkami kaučuku, aby se zmenšilo vnitřní tření, je základem kvality pneumatiky.

Vynaložená práce násobená účinností dá užitečnou práci.

V palivu jsme do lokomotivy přivedli (tedy vynaložili) 100 koní. Při účinnosti 0,05 je užitečná práce $100 \times 0,05 = 5$ koní. Účinnosti motorů a strojů byly změřeny po dlouhém pozorování v praxi a jsou důležitým znakem kvality stroje. I dobře jdoucí stroj je špatný, má-li malou (tedy špatnou) účinnost.

Vodní kolo, které žene starý mlýn na řece, má účinnost asi 20 procent $= 20/100 = 0,20$. To znamená, že mění v užitečnou práci jen 20 % energie vody. Je-li v tekoucí vodě utajen výkon 100 koní, získáme na hřídeli kola jen 20 % ze sta, to je $0,2 \times 100 = 20$ koní. Zbylých 80 koní se ztrácí vířením vody.

Původní Wattův parní stroj měl účinnost menší než 1 %. Z každých 100 kg spáleného uhlí se 99 kg ztrácelo. Nejlepší motory mají dnes účinnost asi 30 %, tedy stále ještě 70 % energie utíká nevyužito do vzduchu. Mnohem lepší účinnost má mohutný přírodní parní stroj — mrak. Na rovníku dodává slunce jednomu čtverečnímu metru povrchu mraku energii jednoho koně.

Na čtverečním kilometru mraků dopadá tak sluneční energie $1000 \times 1000 \times 1 = 1\,000\,000$ koní. Tato obrovská energie způsobí vnitřní pohyb v mraku, stoupání teplého vzduchu. Tím jsou udržovány ve vzduchu miliony tun vody. Teprve když mrak nasál z okolí tolik chladného vlhkého vzduchu, že proudění neudrží kapky, začne pršet.

$$\text{Účinnost } \eta = \frac{\text{výkon odváděný}}{\text{výkon přiváděný}} \quad (26)$$

Přivádíme-li do stroje 30 koní a odvádíme 24 koní (6 koní se ztratilo přemáháním tření), je účinnost η (čti éta) $= \frac{24}{30} = 0,8 = 80 \%$.

Příklady: 1. Motor jeřábu má výkon 25 koní. Účinnost jeřábu je 0,74. Jakou rychlostí se zvedá břemeno 30 tun?

25 koní $= 25 \cdot 75 = 1875$ kgm/s.

Odváděný výkon $N = 1875 \cdot \eta = 1875 \cdot 0,74 = 1390$ kgm/s.

$$\text{Z } N = P \cdot v \text{ plyne } v = \frac{N}{P} = \frac{1390}{30\,000} = 0,046 \text{ m/s.}$$

2. Parní stroj pohání podle náčrtu na obr. 77 čerpadlo Č. Do válce se přivádí potrubím 1 pára, která má napětí $p = 6$ kg/cm² (na každý čtvereční centimetr tlačí silou 6 kg).

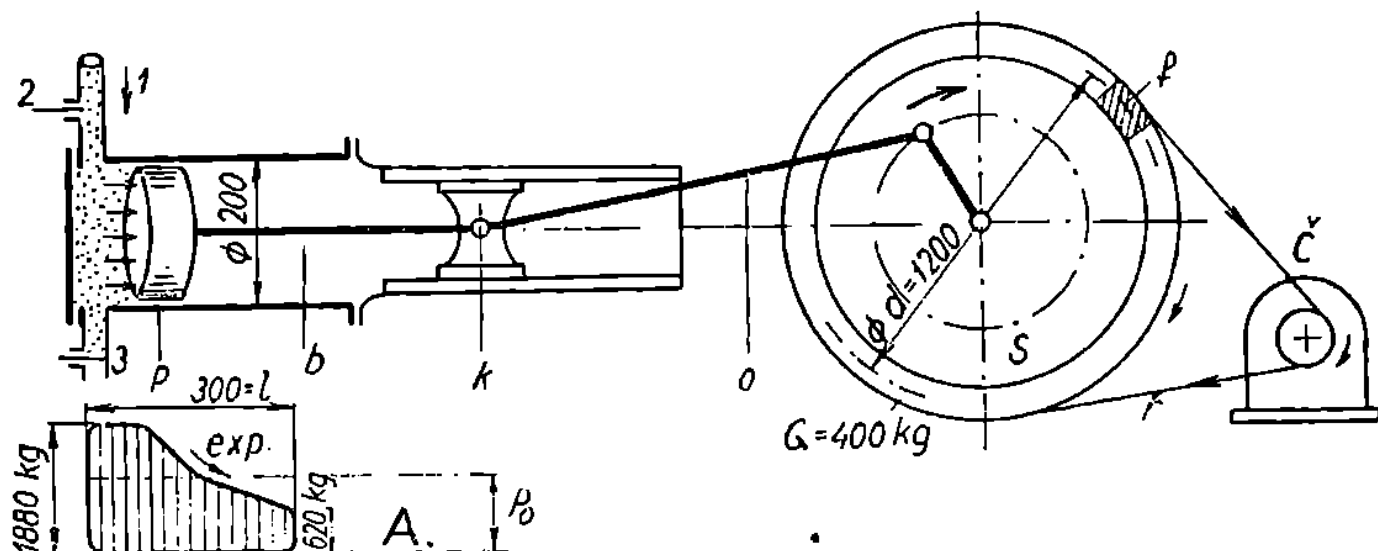
Pára tlačí též na píst. Plocha pístu $F = \pi \cdot d^2/4 = 3,14 \cdot 20^2/4 = 314 \text{ cm}^2$.

Tlak páry na píst je $P = F \cdot p = 314 \cdot 6 = 1884 \approx 1880 \text{ kg}$.

Píst má zdvih 300 mm. Nová pára se vpouští jen po část zdvihu, pak se šoupátko 2 zavře a pára ve válci expanduje čili rozpíná se. Její napětí klesá a objem roste, až na konci expanse je podle obr. A tlak páry na píst jen 620 kg.

Obrázek A se jmenuje pracovní diagram páry ve válci. Je na něm nakresleno, jaké jsou tlaky páry na píst v každé poloze.

Z pístu se přenáší tlak pístnicí na křížák a od křížáku ojnici na kliku. Tím klikou točí. Na klikovém hřídeli je také setrvačnick S. Z jeho obvodu se řemenem ř pohání řemenice čerpadla č.



Obr. 77. Schéma parního stroje; p píst, b pístnice, k křížák, o ojnice, S setrvačnick, č čerpadlo. Dnes se už tak jednoduché parní stroje nestavějí, pára pracuje vždy z obou stran pístu.

Abychom mohli určit práci páry počítáme, že místo proměnlivého tlaku působí po celý zdvih l střední tlak P_0 . Plocha diagramu A odpovídá velikosti celé práce, tedy také $P_0 \cdot l$. Čárkovaný obrazec diagramu převedeme na obdélník dlouhý l a vysoký (v tomto případě) $P_0 = 1280 \text{ kg}$. Práce páry je

$$P_0 \cdot l = 1280 \cdot 0,3 = 284 \text{ kgm}.$$

Při zpětném pohybu musí píst vyfouknout potrubím 3 páru z válce. Vzduch tlačí na všechny předměty tlakem 1 kg/cm^2 , proto musí mít výfuková pára o něco větší tlak, např. $1,1 \text{ kg/cm}^2$. Protože píst má plochu $F = 314 \text{ cm}^2$, spotřebuje se k výfuku tlak $314 \cdot 1,1 = 345 \text{ kg}$. Tento tlak pracuje na zdvihu $l = 0,3 \text{ m}$. Proto se k výfuku spotřebuje práce

$$345 \cdot 0,3 \approx 103 \text{ kgm}.$$

Při jednom chodu vpřed a zpět, tj. při jedné otáčce kliky, dává stroj práci

$$284 - 103 = 181 \text{ kgm}.$$

Část této práce se ztrácí ve stroji třením (na př. 30 %). K využití zbývá 70 % z 181, tedy $0,7 \cdot 181 = 127 \text{ kgm}$ práce pro každou otáčku kliky.

Rozvod stroje je tak upraven, že stroj má 252 otáček za minutu čili $252 : 60 = 4,2$ otáčky za vteřinu.

Při každé otáčce získáme práci 196 kgm. Za 1 s získáno tedy výkon $196 \cdot 4,2 = 823 \text{ kgm/s}$.

Protože 75 kgm/s odpovídá výkonu 1 koně, má stroj výkon

$$823 : 75 = 11 \text{ koní,}$$

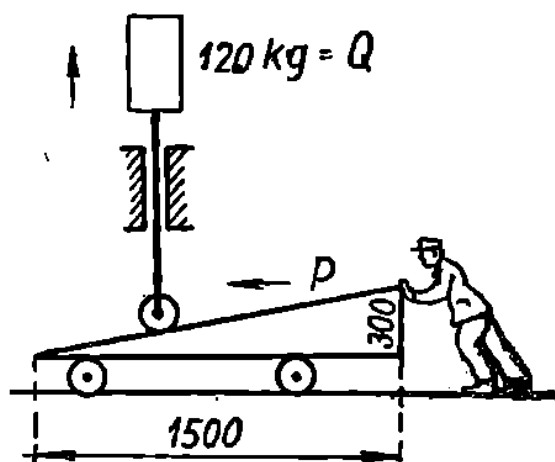
Na klikovém hřídeli je setrvačnick S, který váží 400 kg. Průměr do středu jeho věnce f je $d = 1200 \text{ mm}$.

Obvodová rychlost na průměru je d

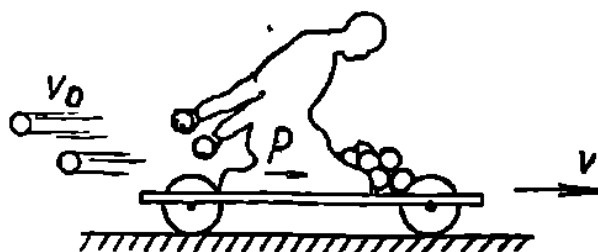
$$v = \pi \cdot d \cdot n = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 4,2 = 15,8 \text{ m/s.}$$

Pohybová energie utajená v roztočeném setrvačnicku

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{Gv^2}{2g} = \frac{400 \cdot 15,8^2}{2 \cdot 9,8} = 5100 \text{ kgm.}$$



Obr. 78. Zdvíhání klínem.



Obr. 79. Pohon reakcí.

Svou velkou energií setrvačnick zachycuje a vyrovnává nepravidelnosti v chodu stroje.

Čerpadlo je seřizeno tak, aby spotřebovalo celou práci parního stroje, tedy 196 kgm za každou otáčku. Je tedy práce utajená v setrvačnicku značně větší. I kdyby parní stroj na několik otáček vynechal, dodá setrvačnick potřebnou práci. Jeho otáčky se zpomalí. Stroj běží klidněji. Je to nutné zvláště při pohonu generátorů na výrobu elektrické energie.

2. U každého stroje v nejlepším případě práce vynaložená se rovná práci získané (v praxi získáme vždy o něco méně než jsme vynaložili, protože ve stroji se část práce ztrácí třením).

Z tohoto zákona můžeme počítat i složitější mechanismy. Břemeno Q se např. zvedá klínem na válečcích podle obr. 78. Muž tlačí silou P na dráze 1500 mm. Zvedne tím břemeno Q o 300 mm.

Zdvižením břemena vykonal práci $Q \cdot 0,3 = 120 \cdot 0,3 = 36 \text{ kgm}$. Stejnou práci vykoná síla P čili platí

$$P \cdot 1,5 = 36; P = 36 : 1,5 = 24 \text{ kg.}$$

Muž tedy tlačí silou 24 kg, aby zvedl břemeno 120 kg.

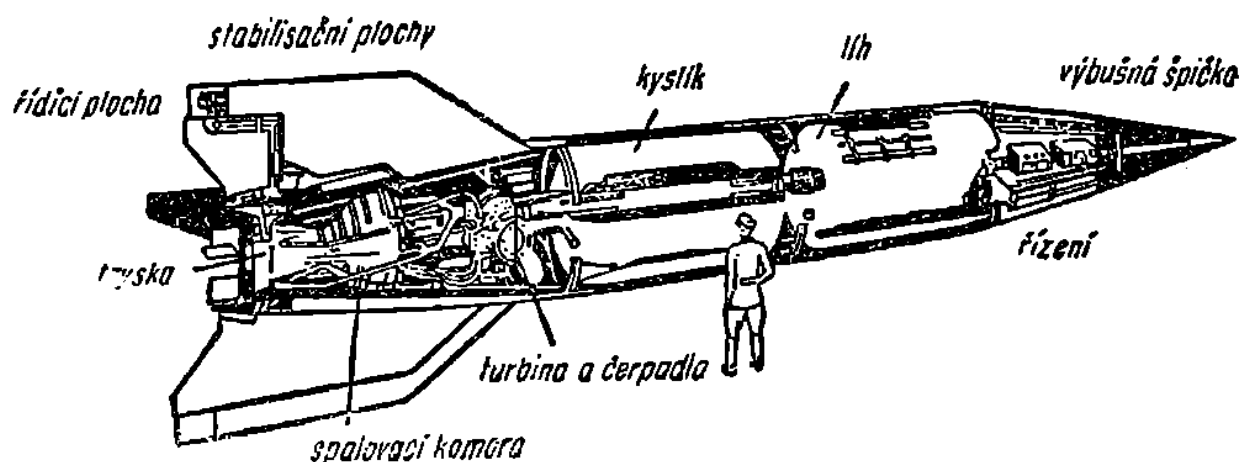
Podstata pohonu reakcí

Loď nebo letadlo, poháněné reakčním (tryskovým) motorem, můžeme si znázornit pro výklad vozíkem, obr. 79. Muž

na vozíku má kameny a pohání vozík tím, že tyto kameny hází dozadu. Zcela jednoduchý pokus ukáže, že to je možné, vozík by skutečně jel.

V čase t odhodí muž kameny hmoty m rychlostí v_0 . Kameny tím odnášejí z vozíku hybnost $m \cdot v_0$, za t vteřin dostává vozík impuls $P \cdot t$ opačného směru.

$Pt = -mv_0$; $P = -mv_0/t =$ hnací síla (tah motoru). U rakety je poměr m/t malý, rychlost v_0 je velká (výfukové plyny). Není to však výhodné. Z výkonu obsaženého v palivu se mění



Obr. 80. Dálková raketa, která je poháněna kapalinovým raketovým motorem. Délka rakety je 14 m; největší průměr 1,7 m; váha za letu 12,4 t; třaskavá nálož 770 kg; zásoba pohonné látky 4,2 t; zásoba zkapalněného kyslíku 5,2 t; dolet 320 km.

v užitečnou práci, kdy síla P pracuje po čas t rychlostí v , část $L_1 = Ptv = mvv_0$. Neužitečná odhazovaná pohybová energie výfuku je $L_2 = mv_0^2/2$. Motor musí dodávat práci $L_1 + L_2$, užitečná je však jen L_1 . Účinnost

$$\eta = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{mvv_0}{mvv_0 + mv_0^2/2} = \frac{1}{1 + v_0/2v}.$$

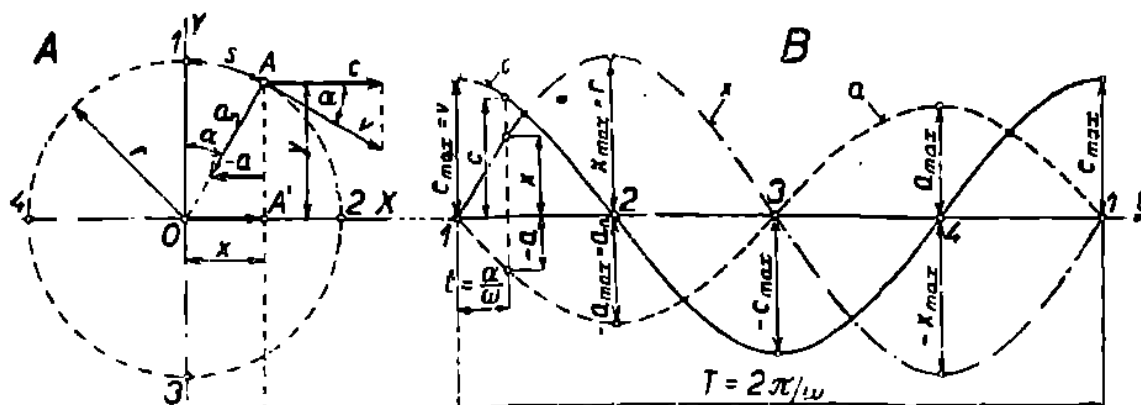
Aby byla velká účinnost, musí být rychlost výfukových plynů v_0 malá. Potom však musí být hmota m velká. Bylo by výhodnější házet z vozíku, obr. 79, hodně kamenů, pomalu.

U rakety, která nese odhazovanou hmotu m (palivo) s sebou, je účinnost

$$\eta = \frac{v(v + 2v_0)}{(v + v_0)^2}; \quad \begin{array}{l} v = \text{rychlost letu,} \\ v_0 = \text{rychlost vyfukujících plynů, obr. 80.} \end{array}$$

Harmonický pohyb

Malé těleso A (hmotný bod) na obr. 81 obíhá na kružnici poloměru r kolem osy O stálou obvodovou rychlostí $v = \omega r$. Poloměr (průvodič) OA se otáčí, opisuje úhel $\alpha = \omega t$. Průmět bodu A na vodorovnou osu X kmitá nerovnoměrným periodickým pohybem z 2 do 4 a zpět.



Obr. 81. Kmitání v sinusovce.

Okamžitá rychlost $c = \frac{dx}{dt} = v \cdot \cos \omega t = \omega r \cdot \cos \omega t$.

Okamžité zrychlení $a = \frac{dc}{dt} = -a_r \cdot \sin \omega t = -r\omega^2 \cdot \sin \omega t$.

Dráha průmětu $x = r \cdot \sin \omega t$.

Protože dráha, rychlost a zrychlení závisí jen na $\sin \omega t$ nebo $\cos \omega t$, je diagram dráhy x , rychlosti c a zrychlení a sinusovka (obr. B), nanášeli se na vodorovnou osu čas t .

Doba jedné periody (jednoho kmitu) je $T = 2\pi/\omega$, počet kmitů (period) za jednu vteřinu čili frekvence $f = 1/T = \omega/2\pi$; ω je kruhová frekvence $= 2\pi f$.

Dosadíme-li do předešlých rovnic pro c a a za $\sin \alpha = x/r$ a za $\cos \alpha = y/r$, je

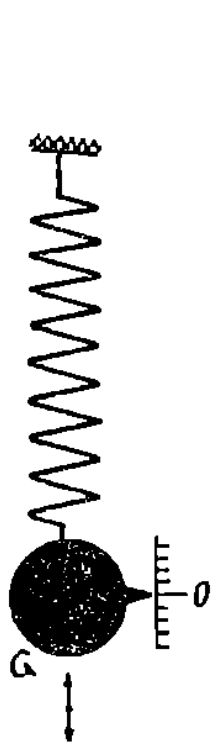
$$\boxed{c = v \frac{y}{r} = \omega y \quad a = -\omega^2 r \frac{x}{r} = -\omega^2 x} \quad (27)$$

Největší rychlost $c_{\max} = \pm v$ je ve středních polohách 1 a 3 bodu A, největší zrychlení $a_{\max} = \pm r\omega^2$ je v krajních polo-

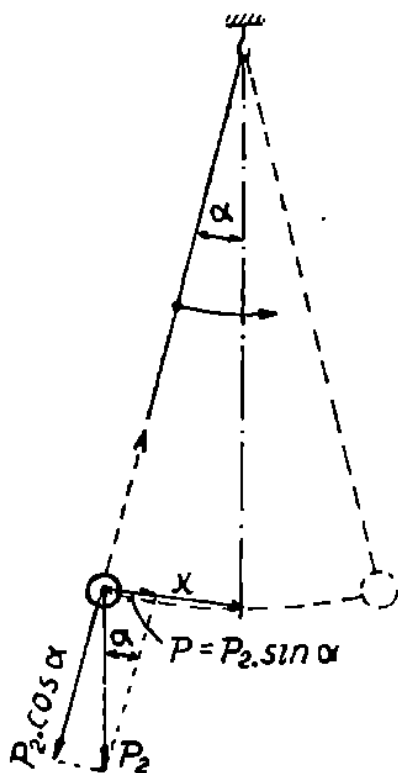
hách 2 a 3 bodu A , největší výchylka ze střední polohy (amplituda, výkmit) je $x_{\max} = \pm r$.

Síla zrychlující kmitající bod

$$P = ma = -m\omega^2 x = -Dx, \text{ je-li } D = m\omega^2; \omega = 2\pi f \quad (28)$$



Obr. 82. Kmitání závaží na pružině.



Obr. 83. Matematické kyvadlo.

Zrychlující síla musí být úměrná výkmitu x a má opačný smysl. Tak tomu je např. u závaží zavěšeného svisle na pružině, které kmitá nahoru a dolů, obr. 82. Zrychlující síla je úměrná vzdálenosti z rovnovážné polohy 0, a protože se hmota nemění, je i zrychlení (síla : hmotou) úměrné vzdálenosti z 0. Poměr (váha G) : (natažení pružiny v klidu) dává konstantu D , tuhost pružiny (např. síla v kg, která vyvolá natažení 1 m). K natažení o x je nutná síla $D \cdot x$ kg.

$$\text{Doba jednoho kmitu } T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{G/Dg} = 1/f \text{ [s]} \quad (29)$$

$$\text{Frekvence (počet kmitů za s)} f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (30)$$

Příklady: 1. Strojní součást kmitá $f = 200$ kmity za min. Váží 5 kg. Doba jednoho kmitu $= 60/200 = 0,3 \text{ s} = T$.

Zrychlení pro výkmit $x = 1$ m ze střední polohy $a = \omega^2 \times x = \omega^2 = (2\pi/T)^2 = (2\pi/0,3)^2 = 400 \pi^2/9 \text{ m/s}^2$.

Zrychlující síla např. ve vzdálenosti 0,25 m od střední polohy je $P = 0,25 \cdot m \cdot a = 0,25 \cdot (5/9,8) \cdot 400 \pi^2/9 = 56 \text{ kg}$.

2. Svisle zavěšená pružina se natáhne o 1 cm závažím 7 kg. Kolika kmity za min bude kmitat se závažím 7 kg?

Tuhost = síla pro natažení 1 m = $D = 7 : 0,01 = 700 \text{ kg}$.

Doba kmitu $T = 2\pi\sqrt{G/Dg} = 2\pi\sqrt{7/(700 \cdot 9,8)} = 0,2 \text{ s}$. Počet kmitů za min $f = 60/0,2 = 300$.

3. Matematické kyvadlo je hmotný bod (závaží) zavěšený na vlákně, obr. 83. Váha $P_2 = mg$ se rozloží v složku $P_2 \cos \alpha$, která napíná vlákno,

a $P = P_2 \sin \alpha \doteq P_2 x/l$, jež udělí závaží zrychlení $a = g \sin \alpha \doteq g \cdot x/l = \omega^2 x$. Protože je výkyv α malý, můžeme klást $\sin \alpha = x/l$.

Úhlová rychlost $\omega = \sqrt{g/l}$. Doba jednoho kyvu (z A do B) je polovina periody $t = T/2 = \pi/\omega = \pi \sqrt{l/g}$.

$$\text{Perioda (doba 1 kmitu)} \quad \frac{1}{f} = T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots \quad (29a)$$

Vteřinové kyvadlo, které má dobu kyvu $t = 1$ s, je dlouhé $l = g/\pi^2 = 9,8/9,8696 = 0,994$ m.

Hodiny se zpožďují o 1 s za hodinu, tedy o 1 s za 3600 s. Kyvadlo udělá 3599 kyvů místo 3600 kyvů za h.

Správná délka: skutečné délce $= 3599^2 : 3600^2 \doteq (1 - 1/3600)^2 \dots$
 $= 1 - 1/1800$, čili kyvadlo se musí zkrátit o hodnotu $\frac{\text{skutečná délka}}{1800}$.

4. Lampa v kostele, zavěšená na vrcholu klenby, je 4 m nad podlahou. Rozkýveme-li ji, kýve 15krát za minutu, 1 kyv trvá 4 s. Jak vysoko je zavěšena?

Doba kyvu matematického kyvadla $t = \pi \sqrt{l/g}$; z toho délka kyvadla

$$l = \frac{t^2 g}{\pi^2} = \frac{4^2 \cdot 9,81}{3,14^2} = 15,9 \text{ m. K závěsu je } 15,9 + 4 = 19,9 \text{ m.}$$

Newtonův gravitační zákon

Dvě tělesa, jejichž hmoty jsou m, M [v kg hmoty], vzdálená r [m], se přitahují navzájem silou P [newtonů]

$$P = \gamma \frac{mM}{r^2}; \text{ gravitační konstanta } \gamma = \frac{6,68}{10^{11}} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right]. \quad (31)$$

Když těleso o hmotě M stojí a těleso hmoty m se může volně pohybovat, má zrychlení

$$a = \gamma M/r^2. \quad (32)$$

Příklad: Střední poloměr Země je $r = 6400$ km $= 6,4 \cdot 10^6$ m. Zrychlení na zemském povrchu $a = g = 9,81$ m/s². Hmotu Země

$$M = \frac{ar^2}{\gamma} = \frac{9,81 \cdot \text{ms}^{-2} \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2}{6,68 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$

Objem Země je asi $1,1 \cdot 10^{21}$ m³. Střední hustota (měrná váha) Země je $(6 \cdot 10^{24} \text{ kg}) : (1,1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3) = 5500 \text{ kg/m}^3 = 5,5 \text{ g/cm}^3$. Hlína a kamení na povrchu má měrnou váhu asi $2,5 \text{ g/cm}^3$, proto musí být měrná váha vnitřku Země značně větší, zemské jádro obsahuje asi mnoho železa a povrch, na kterém žijeme, je jako lehká struska (nečistota) vyplavená z jádra.

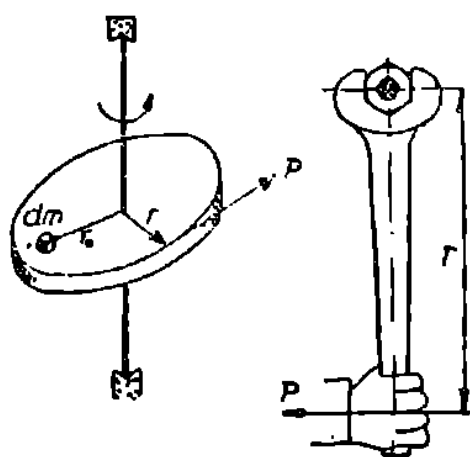
Otáčivý pohyb

Dosud jsme mluvili o pohybu *posuvném* (kdy všechny body tělesa opisují rovnoběžné přímé dráhy) nebo o *postupném křivočarém pohybu* (kdy všechny body tělesa opisují v každém

okamžiku stejně dlouhé a rovnoběžné dráhy). Při *otáčivém pohybu* kolem nehybné osy opisují všechny body tělesa kružnice v rovnoběžných rovinách kolmých k ose otáčení, mají stejnou úhlovou rychlost ω .

Točivý moment

Deska má podle *obr. 34* svislou osu opřenou v ložiskách. Chceme ji roztočit. Nestačí k tomu libovolná síla, potřebujeme



Obr. 84. Točivý moment
 $M = Pr.$

sílu, která má točivý účinek čili má točivý moment. Musí ležet v rovině otáčení desky nebo mít složku rovnoběžnou s touto rovinou a nesmí procházet osou otáčení. Točivý moment nazýváme součin ze síly P a kolmé vzdálenosti od osy r , již říkáme *rameno*, *obr. 84*.

Točivý moment = síla $\times$ rameno;

$$M = P \cdot r. \quad (33)$$

Měříme ho v kilogrammetrech. Síla $P = 10$ kg vyvolá na ramenu $r = 0,3$ m točivý moment $M = 10 \cdot 0,3 = 3$ kgm. Stejný moment vytvoří síla $P = 5$ kg na ramenu

$0,6$ m. Známe-li jen velikost momentu, nevíme, jak velká je síla a jak dlouhé je rameno. Proto můžeme moment nahradit jiným stejně velikým. Často působí současně několik sil na různých ramenech a skládají se ve výsledný točivý moment. Tak se roztočí kotva elektromotoru.

Točivý moment má sice stejný rozměr jako práce, ale při výpočtu práce měříme dráhu ve směru síly, kdežto při výpočtu momentu měříme rameno kolmo na směr síly. Moment vytvoří nehybná síla, při práci musí vždy vznikat pohyb.

Příklady: 1. Mlýnský kámen má 100 ot/min, průměr 1 m; přivádíme mu výkon 2 kilowatty. Jaká síla působí na jeho obvodu, tj. jaká obvodová síla by kámen zastavila?

Výkon $2 \text{ kW} = 2 \cdot 102 \text{ kgm/s} = 204 \text{ kgm/s} = \text{síla} \times \text{rychlost} = P \cdot 2 \pi r n / 60 = P \cdot 2 \pi \cdot 0,5 \cdot 100 / 60 = 5,23 \cdot P$; obvodová síla $P = 204 : 5,23 = 39$ kg. Její točivý moment je

$$M = P r = 39 \cdot 0,5 = 19,5 \text{ kgm}.$$

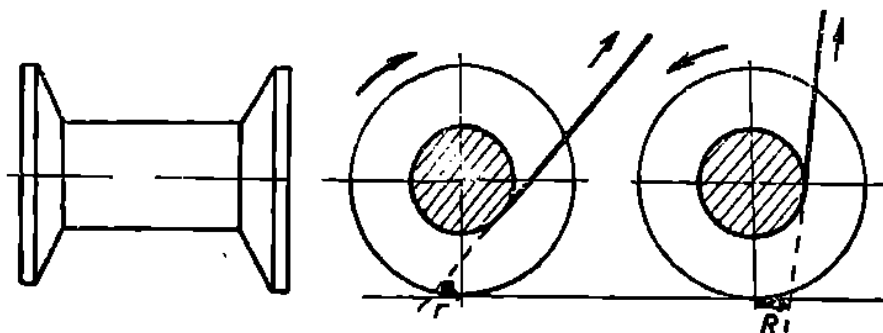
2. Točivý moment můžeme dobře studovat na cívce s nití. Položte na zem cívku a táhněte za nit, která se s cívky odvinuje. Měňte sklon nitě

vzhledem k zemi. Zjistíte, že někdy se k nám cívka blíží, jindy se vzdaluje. Jak to vysvětlíte?

Podle obr. 85 není osou otáčení osa cívky, nýbrž bod styku s podlahou. Podle sklonu nitě má tah od tohoto bodu rameno r nebo R . Tím vznikají točivé momenty opačného smyslu.

Výkon točivého momentu

Víme už, že výkon $N = P \cdot v = \text{síla} \times \text{rychlost}$ a točivý moment $M = P \cdot r = P \cdot d/2$, píšeme-li $r = d/2$, poloměr =



Obr. 85. Jak přitáhneme cívku tahem za nit.

= půl průměru d . Aby byl výkon v koních, dělíme 75, tedy při otáčení silou P na průměru d je

$$N = \frac{P v}{75} = \frac{P}{75} \cdot \frac{\pi d n}{60} = P \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi n}{75 \cdot 30} = M \cdot \frac{3,14 \cdot n}{75 \cdot 30} = \frac{M \cdot n}{716,2}$$

Z toho je důležitý vzorec, který si dobře zapamatujte:

$$\text{Točivý moment} = M = 716,2 \cdot \frac{N}{n}; \quad N \text{ koně, } n \text{ ot/min, } M \text{ kgm} \quad (34a)$$

$$M = 975 \cdot \frac{N}{n}; \quad N \text{ kilowatty, } n \text{ ot/min, } M \text{ kgm} \quad (34b)$$

Příklady: 1. Je-li výkon motoru $N = 30$ koní, má $n = 3000$ ot/min, je jeho moment

$$M = 716,2 \cdot \frac{30}{3000} = 7,162 \text{ kgm, to je } 716,2 \text{ kgcm.}$$

Na poloměru 7,162 cm působí síla 100 kg.

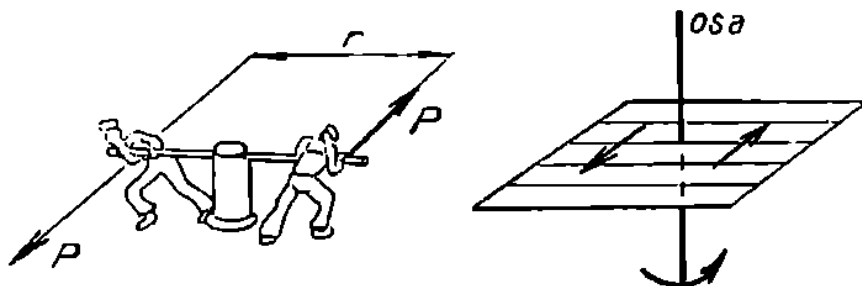
2. Bylo změřeno, že na hřídeli letecké vrtule je při $n = 1432$ ot/min točivý moment 216 kgm. Jakému výkonu to odpovídá?

$$N = \frac{M \cdot n}{716,2} = \frac{216 \cdot 1432}{716,2} = 432 \text{ koní.}$$

3. Břemeno $P = 900$ kg visí na laně na bubnu zdvihadla, jehož poloměr je $r = 0,25$ m, a otáčí bubnem $n = 12$ ot/min. Jaký dává výkon?

Točivý moment $M = Pr = 900 \cdot 0,25 = 225$ kgm.

Výkon $N = Mn / 975 = 225 \cdot 12 / 975 = 2,77$ kW.



Obr. 86. Dvojice sil.

Dvojice sil

Dvojici tvoří dvě rovnoběžné síly stejně veliké, opačného směru, obr. 86. Točivý moment dvojice je roven součinu z jedné síly a celého ramena

$$M = P \cdot r \text{ kgm} \quad (35)$$

Příklad: Je-li na obr. 86. $P = 50$ kg, $r = 3$ m, je točivý moment dvojice $M = Pr = 50 \cdot 3 = 150$ kgm.

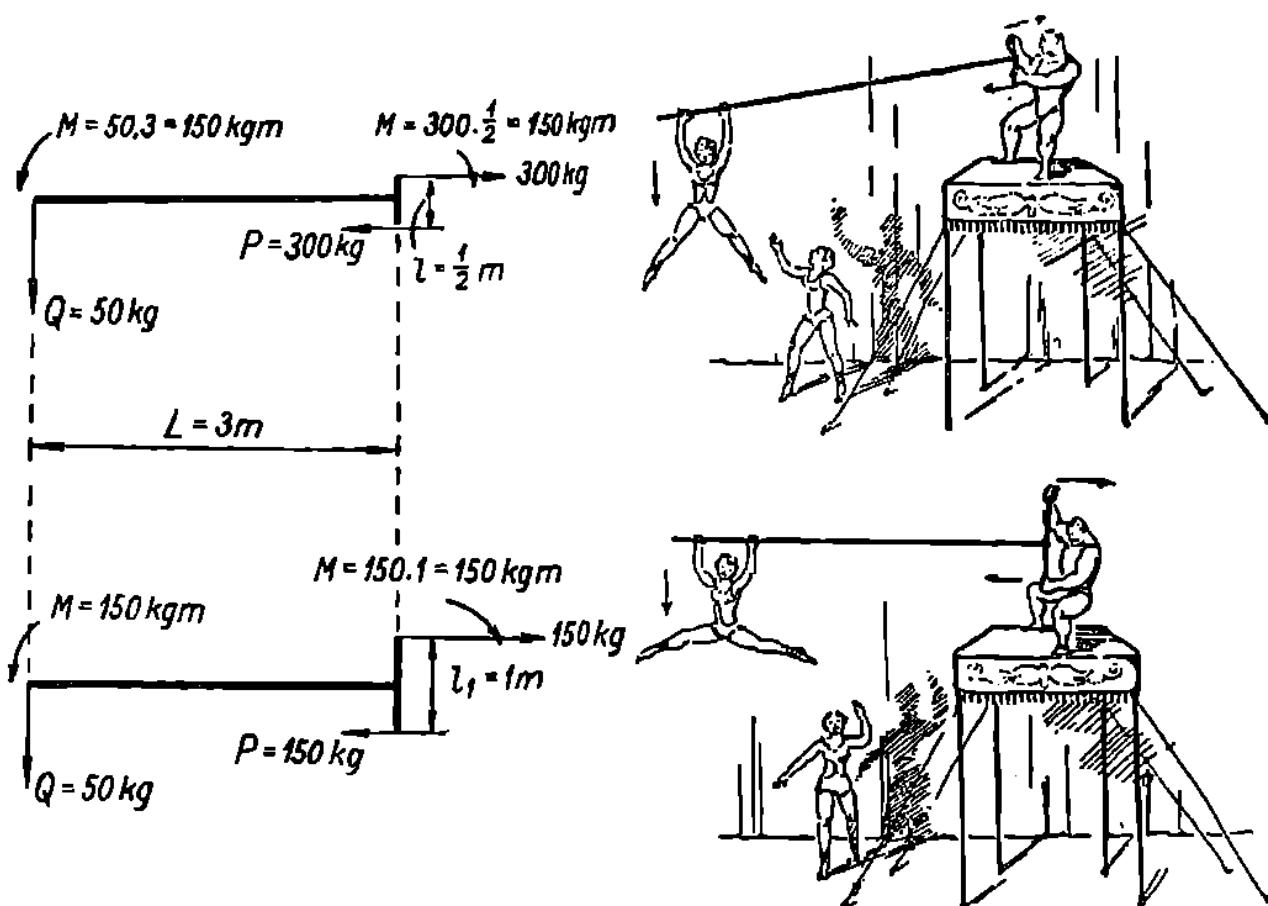
Každou dvojici můžeme nahradit jinou, pokud se nemění její moment (kolikrát zvětšíme rameno, tolikrát zmenšíme sílu).

Příklad dvojice sil ukazuje obr. 87. Drží-li atlet ocelovou páku na krátkém ramenu l , nevyvine už dost velkou sílu, aby udržel moment $Q \cdot L$, jímž páku naklání artistka. Teprve při zvětšeném ramenu l_1 je rovnováha.

Hmotový moment setrvačnosti

Hledáme pohybovou energii roztočeného tělesa. Každá jeho částice, vzdálená r od osy, mající hmotu Δm , má pohybovou energii $\frac{1}{2} \cdot \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m r^2 \cdot \omega^2$. Sečtením všech těchto energií pro celý objem tělesa dostaneme pohybovou energii tělesa, které se točí stálou úhlovou rychlostí $\omega = v/r$.

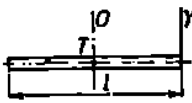
$$L = \frac{1}{2} \cdot \Sigma (\Delta m r^2 \cdot \omega^2) = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot J [\text{kgm}] \quad (36)$$



Obr. 87. Příklad rovnováhy momentu dvojice síly. V horním případě $P \cdot l$ je menší než $Q \cdot L$, páka s artistkou klesá, atlet ji neudrží. Ve spodním případě $P \cdot l_1 = Q \cdot L$, vše je v pořádku.

$J = \Sigma (\Delta m r^2) =$ hmotový moment setrvačnosti [$\text{kg s}^2 \text{m}$]; Σ je značka pro součet. Hodnoty momentů setrvačnosti byly určeny výpočtem (vyšší matematikou), např. podle následujících vzorců:

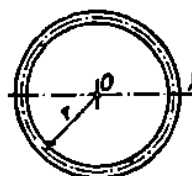
Tyč:



$$J_o = \frac{m l^2}{12},$$

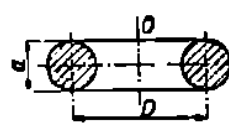
$$J_y = \frac{m l^2}{3}.$$

Kruhový věnec:



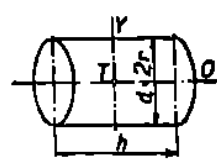
$$J_o = m r^2.$$

Prstenec:



$$J_o = \frac{1}{4} m (D^2 + 3 d^2).$$

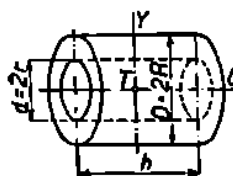
Válec:



$$J_o = \frac{m d^2}{8} = \frac{m r^2}{2},$$

$$J_y = \frac{1}{16} m \left(d^2 + \frac{4}{3} h^2 \right).$$

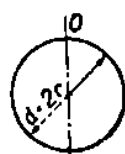
Dutý válec:



$$J_o = \frac{1}{8} m (D^2 + d^2),$$

$$J_y = \frac{1}{16} m \left(D^2 + d^2 + \frac{4}{3} h^2 \right).$$

Koule:



$$J_o = 0,4 m r^2 = 0,1 m d^2,$$

Obr. B.

Hmotové momenty setrvačnosti; index u J značí osu (J_0 k ose 0, atd.); m je hmota v technických jednotkách hmoty, r , l , d , D , h jsou rozměry v m.

U postupného pohybu byla pohybová energie $\frac{1}{2} \cdot mv^2$, u otáčení je $\frac{1}{2} \cdot J \omega^2$.

Místo hmoty m dosazujeme hmotový moment setrvačnosti, místo rychlosti v dosazujeme úhlovou rychlost ω . Těleso, které se točí úhlovou rychlostí ω i posouvá rychlostí v , má pohybovou energii

$$L = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 J + \frac{1}{2} \cdot mv^2 \text{ [kgm]}$$

Proč roztahuje artista při produkci na vratkém kole ruce, obr. 88? Protože tím zvětší moment setrvačnosti svého těla k svislé ose 16krát ($J = 8 \text{ kg hmoty} \times \text{m}^2$) proti muži, který by stál rovně s připaženými pažemi (kdy má $J = 0,5 \text{ kg hmoty} \times \text{m}^2$). Skrčený člověk v dřepu s rukama při těle má k svislé ose $J = 2,3 \text{ kg hmoty} \times \text{m}^2$, obr. 89.

Poloměr setrvačnosti $i = \sqrt{J/m}$. Je to vzdálenost od osy otáčení, v které by musela být soustředěna hmota m ,

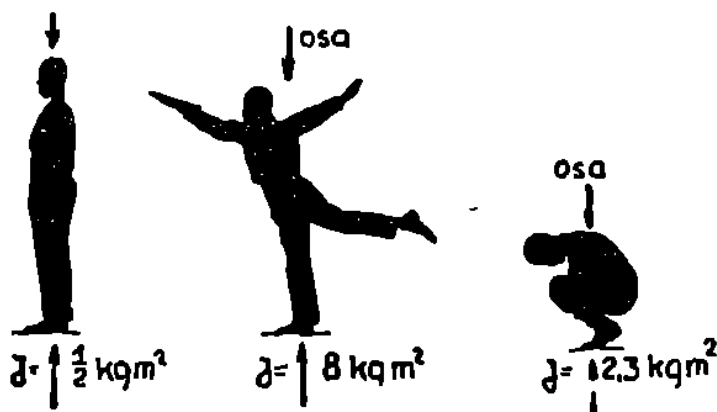
aby mělo stejný moment setrvačnosti J jako skutečné těleso. U kruhové desky poloměru R je $i = 0,7 R$; $i^2 = 0,5 R^2$.

Obvodová síla k roztočení tělesa váhy G kg na n ot/min za t s na ramenu r m je

$$P = mi \varepsilon = (G/g) \cdot i \cdot \omega/t = 0,01068 Gi^2 n/rt. \dots (37)$$



Obr. 88.



Obr. 89. Momenty setrvačnosti lidského těla ve třech polohách. Šipky značí osu otáčení (podle Pohla).

Příklady: 1. Setrvačnick se skládá z náboje naklínovaného na hřídeli, z věnce a ramen, která spojují věnec s nábojem. Při výpočtech setrvačnicků počítáme jen s věncem. Náboj a ramena mají nepatrný vliv, takže celý setrvačnick považujeme za dutý válec (viz předešlou tab). Velký setrvačnick měl např. $D = 8$ m, $d = 7,2$ m, tedy střední průměr průřezu věnce $d_s = (8 + 7,2) : 2 = 7,6$ m; $n = 80$ ot/min; vážil $G = 31$ t.

Obvodová rychlost na středním průměru $v = \pi d_s n / 30 = 3,14 \cdot 7,6 \cdot 80 / 30 = 32$ m/s.

Moment setrvačnosti věnce $J = (D^3 + d^3) \cdot m / 8 = (8^3 + 7,2^3) \cdot 31\,000 / (8 \cdot 9,8) = 45\,500$ kgs²m.

Setrvačnick vyrovnává výkyvy přetížení stroje. V čase $t = 2,4$ s klesla jeho rychlost z 32 m/s na 23 m/s. Jaký výkon se tím uvolnil k vyrovnání přetížení?

Úhlová rychlost $\omega_1 = v/r_s = 32/3,8 = 8,42$ klesla na $\omega_2 = 23/3,8 = 6,05$. Zpomalením se uvolnila pohybová energie

$$L = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot J \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 45\,500 \cdot (8,42^2 - 6,05^2) = 805\,000 \text{ kgm}.$$

Výkon v kgm/s dostaneme, vydělíme-li energii (práci) časem. Dělíme hned ještě 102, aby vyšel výkon v kW (protože 1 kW = 102 kgm/s). Zpožděním setrvačnicku se uvolnil výkon

$$N = L / 102 \text{ t} = 805\,000 / (102 \cdot 2,4) = 3320 \text{ kW}.$$

2. Jak rozeznáme dutou a plnou kouli, mají-li obě stejné rozměry a stejnou váhu a neslyšíme rozdíl poklepáním?

Pustíme obě koule dolů po nakloněné rovině. Obě jsou stejně zrychlovány, dutá však má hmotu soustředěnu na větším poloměru, má proto větší moment setrvačnosti než plná. Proto má menší úhlové zrychlení, přiválí se dolů značně později než plná.

3. Kruhová deska poloměru $R = 0,23$ m, vážící $G = 5$ kg, se roztočí na $n = 300$ ot/min za $t = 10$ s silou P na ramenu $r = 0,2$ m.

Poloměr setrvačnosti desky $i = 0,7 R = 0,7 \cdot 0,23 = 0,161$ m.

Obvodová síla $P = 0,01068 \text{ } Gi^2 n / r t = 0,01068 \cdot 5 \cdot 0,161^2 \cdot 300 / (0,2 \cdot 10) = 0,21$ kg.

Točivý moment. Při postupném pohybu síla = hmota $\times$ $\times$ zrychlení. Při otáčení *točivý moment* = *moment setrvačnosti* $\times$ $\times$ *úhlové zrychlení*, $M = J \varepsilon$.

Příklad: Setrvačnick má moment setrvačnosti $J = 1000$ kg s² m. Má 120 ot/min. K roztočení za 1 minutu, tj. úhlovému zrychlení $\varepsilon = \omega / t = (\pi \cdot 120 / 30) / 60 = \pi / 15 \text{ s}^{-1}$, je nutný točivý moment

$$M = J \varepsilon = 1000 \cdot \pi / 15 = 209 \text{ kgm}.$$

Točivost. Při postupném pohybu hybnost = hmota $\times$ $\times$ rychlost. Při otáčení *točivost* (dral) = *moment setrvačnosti* $\times$ $\times$ *úhlová rychlost*, $D \times J \omega$.

Příklady: 1. Na lehce otočné stoličce sedí muž, který má v pravé ruce setrvačnick na ose (např. kolo velocipédu). Levou rukou kolo za dráty prudce roztočí. Tím dostane kolo točivost $J_1 \omega_1$ proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Z věty o akci a reakci (zde o zachování točivosti, impulsů) musí mít muž s židlí stejně velikou točivost opačného smyslu, čili začne se otáčet ve směru pohybu hodinových ručiček úhlovou rychlostí $\omega_2 = \omega_1 \cdot J_1 / J_2$, je-li J_2 jeho moment setrvačnosti, obr. 90.

Dáme-li sedícímu muži do ruky už roztočené kolo, neroztočí se s židlí, dodali jsme mu už kolo s točivostí. Obrátí-li však muž roztočené kolo

o 180° tím že je bude držet za druhý konec, změni točivost $+D$ na $-D$, tedy o $2D$, roztočí se i s židlí.

Leží-li muž na otočné židli např. na zádech a trochu do něj strčíme, aby se kýval, může se skrčením nohou ve vhodnou chvíli (změnami momentu setrvačnosti svého těla) roztočit i se židlí.

2. Je-li ventilátor s elektromotorkem šikmo na otočné ose, obr. 91, vytvoří vrtule proud vzduchu a ještě točivost, kterou se celý přístroj točí kolem svislé osy. Točí-li se křídla ve směru pohybu hodinových ruček, hledíme-li na ně směrem x , točí se motorek proti směru pohybu hodinových ruček, hledíme-li směrem y .



Obr. 90. Pokusy s točivostí.



Obr. 91. Točivost u ventilátoru.

Rotační impuls. Při postupném pohybu impuls = síla $\times$ čas. Při otáčení rotační impuls = točivý moment $\times$ čas, $M \cdot t$.

Je-li moment M po dobu t stálý, je rotační impuls roven přírůstku točivosti

$$Mt = D_2 - D_1 = J \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad (38)$$

je-li ω_1 , ω_2 počáteční a konečná úhlová rychlost.

Příklad: Koule má moment setrvačnosti $J = 0,0415 \text{ cm}^2 \text{ kg}$. Je roztočena na $n = 180 \text{ ot/min}$. Za jak dlouho ji zastaví (ubrzdí) stálý moment $M = 5 \text{ cmkg}$, působící v rovině kolmé k ose otáčení, a kolik otáček koule udělá, než se zastaví?

Úhlová rychlost $\omega_1 = \pi n/30 = \pi \cdot 180/30 = 6\pi \text{ s}^{-1}$.

Pro $\omega_2 = 0$ je $Mt = -J\omega_1$; z toho čas k ubrzdění $t = -J\omega_1/M = -0,0415 \cdot 6\pi/5 = 0,156 \text{ s}$. Úhel natočení

$$\alpha = \frac{Mt^2}{2J} = \frac{0,0415 \cdot (6\pi)^2}{2 \cdot 5} = 1,46 \text{ radiantů} = 0,232 \text{ ot.}$$

Výkon při otáčení. Při postupném pohybu výkon = síla $\times$ rychlost. Při otáčení výkon = točivý moment $\times$ úhlová rychlost, $N = M\omega$.

Příklady: 1. Zdvihadlo má vyvinout na bubnu točivý moment $M = 34,58 \text{ kgm}$ při úhlové rychlosti bubnu $\omega = 41,7 \text{ s}^{-1}$. Potřebný výkon v koních

$$N = M\omega/75 = 34,58 \cdot 41,7/75 = 19,2 \text{ k.}$$

2. Setrvačnick váží 100 kg je na hřídeli průměru 6 cm. Na hřídeli je navinuto lano, na němž visí závaží 20 kg. K překonání tření v ložiskách při otáčení by stačilo závaží 2 kg. Tím, že závaží 20 kg klesne o 1 m za 7 s, roztáčí setrvačnick z klidu. Jaký je moment setrvačnosti a poloměr setrvačnicku?

Střední rychlost závaží je $1/7 \text{ m/s}$. Zrychlení je stálé, proto je max rychlost klesajícího závaží $2 \cdot 1/7 = 2/7 \text{ m/s}$.

Práce, kterou klesající závaží vykoná, zmenšená o práci tření, je $(20 - 2) \cdot 1 = 18 \text{ kgm}$. Pohybová energie závaží je $\frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 20/9,8 \cdot (2/7)^2 = 0,08 \text{ kgm}$.

Moment setrvačnosti setrvačníku je J a úhlová rychlost ω . Práce závaží = pohybové energie setrvačníku čili

$$18 \text{ kgm} = \frac{1}{2} \cdot J\omega^2 + 0,08 \text{ kgm}; \quad \frac{1}{2} J\omega^2 = 17,92 \text{ kgm}.$$

Max úhlová rychlost $\omega = \text{max rychlost lana v m/s, dělená poloměrem hřídele v m čili}$

$$\omega = (2/7) : 0,03 = 9,5 \text{ rad/s}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot J \cdot 9,5^2 = 17,92; \quad J \approx 0,4 \text{ kgs}^2 \text{ m}; \quad \text{ze vztahu } mi^2 = J \text{ plyne } i^2 = J : m = 0,4 : (100/9,8) = 0,0392; \quad i = 0,198 \text{ m}.$$

3. Jakého momentu M je třeba, aby se předloha na obr. 92 rozběhla za 10 s na $n_1 = 1500 \text{ ot/min}$? Momenty setrvačnosti v cmkgs^2 jsou na obr. připsány. Hledaný krouticí moment $M = J_1 \cdot \omega_1/t + J_2 \cdot \omega_2/t \cdot 3/2$.

Úhlové rychlosti: $\omega_1 = \pi \cdot 1500/30 = 157/\text{s}$; $\omega_1/t = 157/10 = 15,7/\text{s}^2$; $\omega_2/t = 3/2 \cdot \omega_1/t = 23,6/\text{s}^2$. Dosazením

$$M = 1000 \cdot 15,7 + 800 \cdot 23,6 \cdot 3/2 = 44\,100 \text{ cmkgs}^2.$$

Potřebný výkon $N = M \omega_1 / (100 \cdot 75) = 920 \text{ koní}$.

4. Setrvačník má moment setrvačnosti $J = 1000 \text{ mkgs}^2$. Koná 120 ot/min. K jeho roztočení s úhlovým zrychlením $\varepsilon = \omega/t = (\pi \cdot 120/30)/60 = \pi/15/\text{s}^2$ je třeba točivý moment $M = J \cdot \varepsilon = 1000 \cdot \pi/15 = 209 \text{ kgm}$.

5. Rozbíhající se motor vyvine na klice po 1 min stálý točivý moment 140 kgm. K přemáhání odporů se spotřebuje stálý moment 110 kgm. Setrvačník má poloměr setrvačnosti 1,5 m a váží 900 kg. Jaké otáčky má motor za 1 min, zanedbáme-li pohybové energie všech ostatních částí, protože jsou malé, porovnány s energií setrvačníku?

Setrvačník se roztočí z klidu na úhlovou rychlost ω čili má za 60 s střední rychlost $60 \cdot \omega/2 = 30\omega \text{ rad}$. Užitečná práce za 1 min $(140 - 110) \cdot 30\omega = 900\omega \text{ kgm}$.

$$900\omega = \frac{1}{2} \cdot J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot m i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot (900/9,8) \cdot 1,5^2 \cdot \omega^2; \quad \omega = 8,65 \text{ rad/s}.$$

$$\text{otáčky stroje } n = 30 \omega / \pi = 30 \cdot 8,65/3,14 = 83 \text{ ot/min}.$$

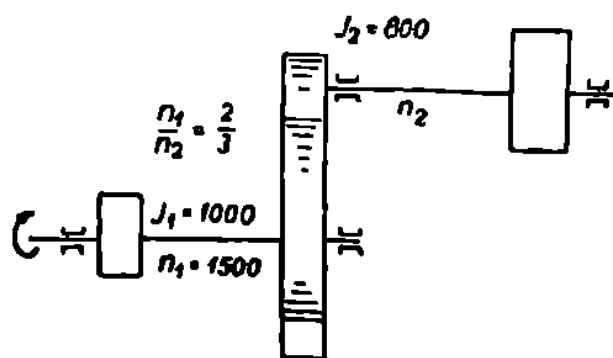
6. Kruhová deska má průměr 0,25 m a váží 3 kg. Je zavěšena vodorovně na drátu spojeném se středem desky. Zkroutili-li se trochu drát otočením desky a pustí se, deska se *kroutivě rozkmitá* harmonickým pohybem. Točivý moment 0,14 kgm zkroutil drát o 10° .

Moment pro 1 rad zkroucení je $M = 0,14 : (10 \cdot \pi/180) = 0,8 \text{ kgm}$. Čtverec poloměru setrvačnosti $i^2 = 0,5r^2 = 0,5 \cdot 0,125^2 = 0,0078 \text{ m}^2$. Moment setrvačnosti desky $J = mi^2 = (3/9,8) \cdot 0,0078 = 0,0024 \text{ kgs}^2 \text{ m}$.

Perioda (doba 1 kmitu) podobně jako při harmonickém pohybu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,0024}{0,8}} = 0,342 \text{ s} \quad (29b)$$

Počet kmitů za min je $60 : 0,342 = 176$.

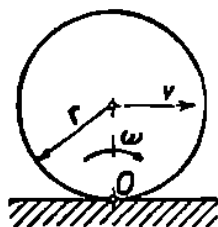


Obr. 92.

7. Válec hmoty m se valí (tj. posouvá) po rovině rychlostí v , obr. 93. Otáčí se kolem osy úhlovou rychlostí $\omega = v/r$. Jeho pohybová energie je rovna součtu pohybové energie při posuvném a otáčivém pohybu

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{\omega^2}{2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

8. Válec se valí po nakloněné rovině, obr. 94. Tlak na rovinu T rozložíme v síly N a P . Síla pohybující válcem dolů je $G \sin \alpha - P$. Je-li ε úhlové zrychlení válce k ose O a a lineární zrychlení pohybu dolů po rovině, je $\varepsilon = a/R$.



$$J \cdot \varepsilon = PR; P = J\varepsilon/R = Ja/R^2.$$

Síla pohybující válcem dolů je $G \sin \alpha - Ja/R^2$, je-li J moment setrvačnosti válce, R poloměr válce.

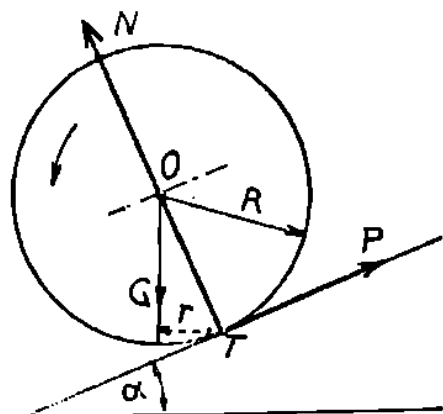
$a = \text{síla} : \text{hmota} = (G \sin \alpha - Ja/R^2) : (G/g) = g \sin \alpha - ai^2/R^2 = g \sin \alpha \cdot R^2/(R^2 + i^2)$, kde i = poloměr setrvačnosti

Jakou dráhu ujede válec za 20 s, z klidu, při $\alpha = 30^\circ$?

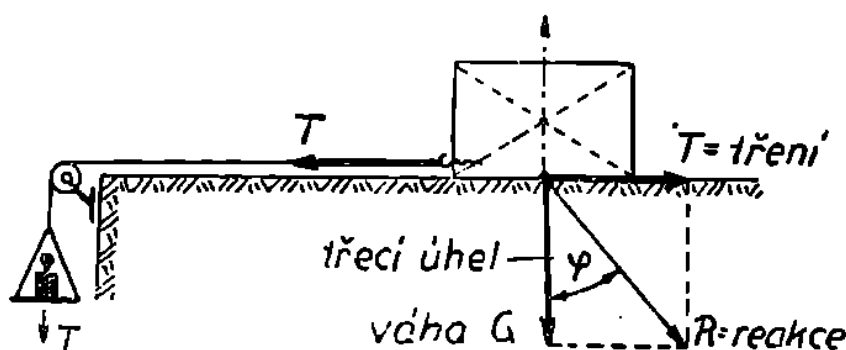
Obr. 93. Válec na rovině.

Zrychlení $a = 9,8 \cdot \sin 30^\circ \cdot [R^2/(R^2 + R^2/2)] = 9,8 \cdot 0,5 \cdot 2/3 = 3,27 \text{ m/s}^2$. Rychlost za 20 s je $20 \cdot a = 20 \cdot 3,27 = 65,4 \text{ m/s}$. Střední rychlost při pohybu z klidu je $65,4/2 = 32,7 \text{ m/s}$. Dráha je $20 \cdot 32,7 = 654 \text{ m}$.

Pohybová energie je stejná, jako kdyby kotouč spadl s výšky 654. $\sin 30^\circ = 327 \text{ m}$. Váží-li válec 5 kg, je jeho pohybová energie po 20 s rovna $327 \cdot 5 = 1635 \text{ kgm}$.



Obr. 94. Válec na nakloněné rovině. Otáčí se momentem $M = Gr$.



Obr. 95. Jak změříme tření T zdvažíme.

Vlečné tření

Na vodorovné podložce leží špalík, vážící G kg, obr. 95. Tahem T za provázek začne klouzat. Na styčné ploše působí před uvedením do pohybu odpor proti pohybu T , jemuž říkáme *tření v klidu*. Velikost tření v běžných případech nezáleží na velikosti styčné plochy, ale záleží na vlastnostech této plochy a na váze G . Když už se špalík pohybuje (klouže), vzniká také tření a pokusy ukázaly, že *tření za pohybu* je u tvrdých

hmot většinou menší než tření v klidu a s rostoucí rychlostí pohybu klesá až o 80 %.

Obyčejně se velikost vlečného tření T v kg počítá z váhy tělesa G [kg] ze vzorce

$$T = \mu \cdot G; \mu = \text{součinitel tření} \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{G} = \frac{\mu G}{G} = \mu; \varphi = \text{třecí úhel} \quad . \quad . \quad (40)$$

Příklady součinitelů tření

Tře se po sobě	μ v klidu			μ za pohybu		
	za sucha	maz. olejem	maz. vodou	za sucha	maz. olejem	maz. vodou
Ocel po oceli	0,15	0,1	—	0,1	0,01	—
Ocel po litině, bronzu	0,18	0,1	—	0,16	0,01	—
Kov po dřevě	0,55	0,1	—	0,4	0,05	0,24
Dřevo po dřevě	0,65	0,2	0,7	0,3	0,1	0,25

U strojů nám vnější tření vadí, brání pohybu těles po sobě a mění energii neužitečně v teplo. Hledíme je proto snížit tím, že poměrně velké vnější tření nahradíme vnitřním třením kapalin. Upravíme mazání. Mazivem může být olej nebo i prášek (např. rozmělněný grafit).

Tření o nehybné těleso pokládáme v mechanice za sílu, ač se zdá, že nemůže vyvolat žádný pohyb. Tření je síla proto, že zpomaluje pohyb (mění pohybový stav) jednoho tělesa a zrychluje těleso druhé, původně nehybné.

Pozoruhodný je velmi malý součinitel tření mezi ocelí a ledem. Dosvědčí to každý, kdo přišel v bruslích na kluziště. Otázka byla vědecky studována a vykládá se tzv. *regelací*. Vysokým tlakem ostří bruslí se sníží bod tání ledu, led se pod bruslí tlakem maličko taví a voda tvoří mazivo.

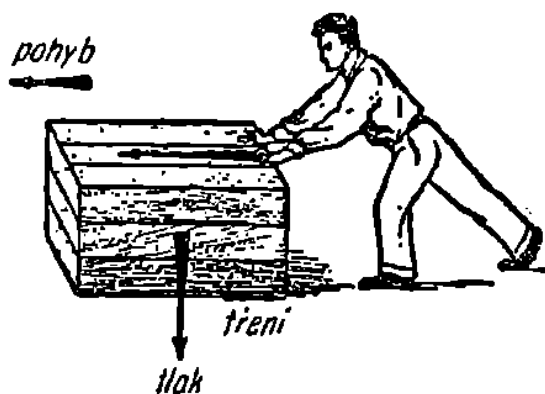
Příklady: 1. Bedna okovaná železem, vážící $G = 200$ kg, se uvede do pohybu po plechem obložené podlaze (tření v klidu, zasucha, ocel po oceli, $\mu = 0,15$) silou

$$T = \mu G = 0,15 \cdot 200 = 30 \text{ kg, obr. 96.}$$

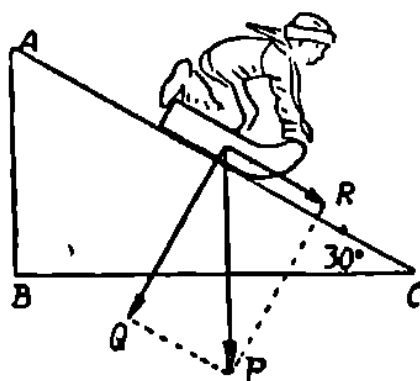
Kdybychom ji táhli (už v pohybu) po dřevěné vodou navlhčené podlaze ($\mu = 0,24$), je třeba síly $T = \mu G = 0,24 \cdot 200 = 48$ kg.

2. Na svahu skloněném pod 30° sjíždějí sánky. Uježděný sníh má součinitele tření $\mu = 0,02$. Délka svahu $AC = 12$ m, obr. 97, za svahem jedou sánky dál po vodorovné rovině. Jak daleko dojedou?

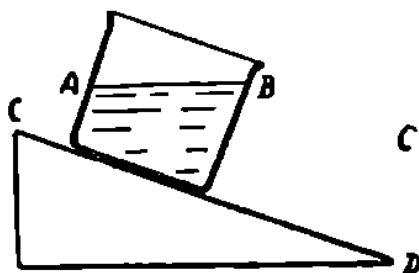
Výška svahu $AB = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6$ m. Váží-li sáně s chlapcem P kg, je jejich energie nahoře $6 \cdot P$ kgm. Tření je $0,02$ kolmého tlaku Q , který je $Q = P \cdot \cos 30^\circ = 0,87 P$. Práce tření při jízdě po svahu dolů je $0,02 \cdot 0,87 P \cdot 12 = 0,21 P$ kgm.



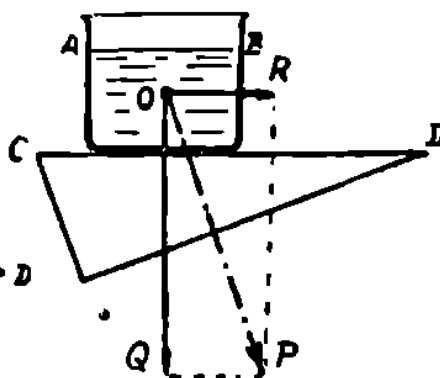
Obr. 96.



Obr. 97. Sánky na svahu.



Obr. 98.



Obr. 99.

Dole na svahu mají sánky ještě pohybovou energii $6 \cdot P - 0,21 \cdot P = 5,79 \cdot P$ kgm a uběhnou ještě dráhu l m. Tření $0,02 \cdot P$ na ní vykoná práci $0,02 \cdot P \cdot l$ kgm, až se celá pohybová energie spotřebuje.

$0,02 \cdot P \cdot l = 5,79 \cdot P$; z toho vychází $l = 290$ m. Po dokonale rovné dráze, třeba po zarovnaném ledu, by sáně ujely ještě 290 m od bodu B.

3. Na nakloněné rovině stojí nádoba s vodou. Hladina vody AB je vodorovná, obr. 98. Co se stane s hladinou, když začne nádoba klouzat po svahu dolů? Zůstává hladina vodorovná?

Kdyby se pohybovala nádoba po svahu dolů bez tření, postaví se hladina vody do roviny rovnoběžně se svahem. Plyne to z obr. 99. Váhu částičky P můžeme si rozložit na složky Q a R . Síla R vyvolá pohyb dolů, voda tlačí na stěnu za pohybu stejně jako v klidu. Síla Q tlačí částici na dno. Hladina se postaví kolmo ke Q , která nyní zastupuje tíži. Kdyby třeba vlivem odporu tření klouzala nádoba dolů rovnoměrným pohybem, zůstává hladina vodorovná. Plyne to už z mechanické zásady, že rovnoměrný pohyb je dynamicky roven klidu.

4. Třením se ve strojích ztrácí veliký výkon nejen neúčinně, ale i škodlivě. Stroj se tím zbytečně ohřívá a rychleji opotřebí. Proto věnujeme největší péči správné obsluze, hlavně mazání ložisek.

Ložiskový čep podle obr. 100 nese zatížení $G = 4$ tuny. Střední hodnota součinitele tření v ložiskách s bronzovou pánví je $\mu = 1/16 = 0,06$.

Tření po obvodě čepu $T = G \cdot \mu = 4000 \cdot 0,06 = 240$ kg.

Práce tření při jedné otáčce čepu $L = \pi \cdot d \cdot T = 3,14 \cdot 0,24 \cdot 240 = 181$ kgm.

Čep má 200 ot/min, tedy $200 : 60 = 3,34$ ot/s.

Výkon ztracený třením (= práce tření na 1 s) je $181 \cdot 3,34 = 635$ kgm/s.

Protože 75 kgm/s = 1 kůň, ztrácí se v tomto případě jen třením čepu $635 : 75 = 8,5$ koně.

Tyto velké ztráty se mohou zmenšit úpravou lepšího ložiska (pánve z komposice nebo z umělé hmoty, lepší mazání apod.).

5. Tření není jen škodlivým jevem. V mnoha případech je užitečné, je na něm založena práce četných strojů. Třením se např. brzdí, bez tření by nemohl jet vlak po kolejích. Propočítáme brzdění vlaku.

18 vagonů, z nichž každý váží 15 tun, se má zabrzdit z rychlosti 60 km/h, tj. $60\,000 : 3600 = 16,7$ m/s.

Střední součinitel tření při zabrzděných kolech je $\mu = 0,11$.

Tření $T = \mu \cdot G = 0,11 \cdot 18 \cdot 15\,000 = 28\,500$ kg.

Hmota vlaku je $m = \frac{G}{g} = \frac{18 \cdot 15\,000}{9,8} = 27\,500$ technických jednotek hmoty.

Ze základní dynamické poučky (síla = $m \cdot a$) je zpoždění

$$a = \frac{\text{síla}}{m} = \frac{T}{m} = \frac{28\,500}{27\,500} = 1,04 \text{ m/s}^2.$$

Brzdí se pohybem rovnoměrně zpožděným na dráze [viz vzorec (8)]

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{16,7^2}{2 \cdot 1,04} = 134 \text{ metrů.}$$

$$\text{Čas k zastavení vlaku je } t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 134}{16,7} = 16 \text{ vteřin.}$$

Mohli bychom také počítat z pohybové energie

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{27\,500 \cdot 16,7^2}{2} = 3\,840\,000 \text{ kgm.}$$

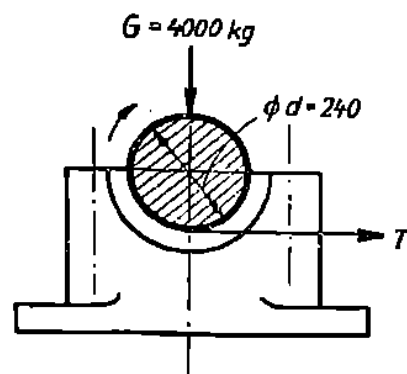
Tato energie se zničí třením T na dráze s , tedy prací $T \cdot s$;

$T \cdot s = 28\,500 \cdot s = 3\,840\,000$; z toho dráha $s = 3\,840\,000 : 28\,500 = 134$ metrů.

6. Pohyb po nakloněné rovině, obr. 101 a obr. 102.

a) Těleso je v klidu, $G = R$, váha = reakci. Teprve když byl úhel větší než třecí úhel φ , začne těleso klouzat dolů.

b) Na těleso tlačí vodorovná síla P . Pohyb vzhůru nastane, když reakce R bude skloněna od normály o třecí úhel φ . Ze silového trojúhelníku $P/G = \tan(\alpha + \varphi)$. K uvedení tělesa do pohybu je nutná síla $P = G \cdot \tan(\alpha + \varphi)$.



Obr. 100. Čep v ložisku.

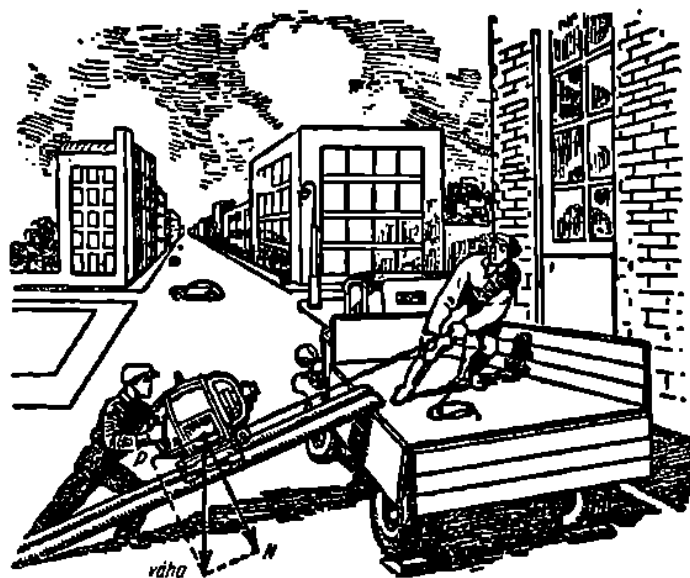
c) Vodorovná síla, která uvede těleso do pohybu dolů po nakloněné rovině ze silového trojúhelníku $P = G \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$.

d) Síla rovnoběžná s nakloněnou rovinou, která uvede těleso do pohybu vzhůru po rovině, ze vztahu $P : G = \sin (\alpha + \varphi) : \sin (90^\circ - \varphi)$, je $P = G \cdot \sin (\alpha + \varphi) / \cos \varphi$.

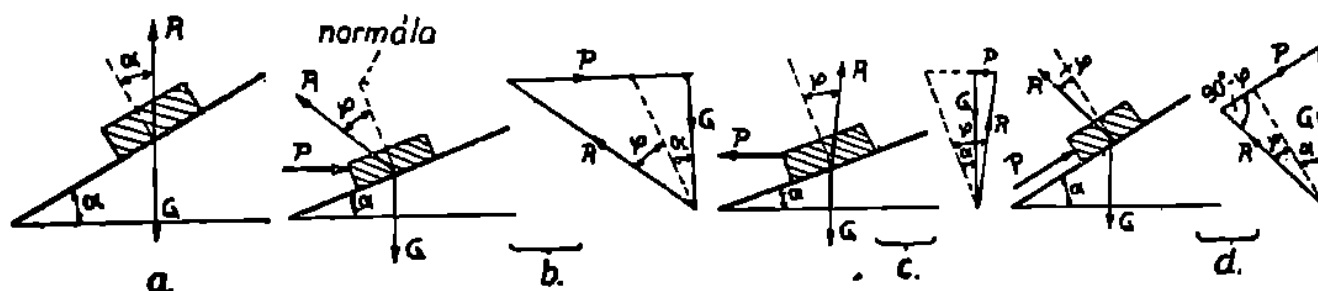
7. Tření šroubu v matici, *obr. 103*. Šroubový závit můžeme považovat za nakloněnou rovinu navinutou na válec. Působí-li hnací síla P v rovině kolmé k ose šroubu, je její velikost na ramenu a při zdvímání břemena

$P = G \frac{r}{a} \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$; r je střední poloměr závitu, α úhel stoupání závitu. U šroubu bez tření bude pro $\varphi = 0^\circ$ ideální hnací síla $P_0 = = Q \frac{r}{a} \operatorname{tg} \alpha$, takže účinnost šrou-

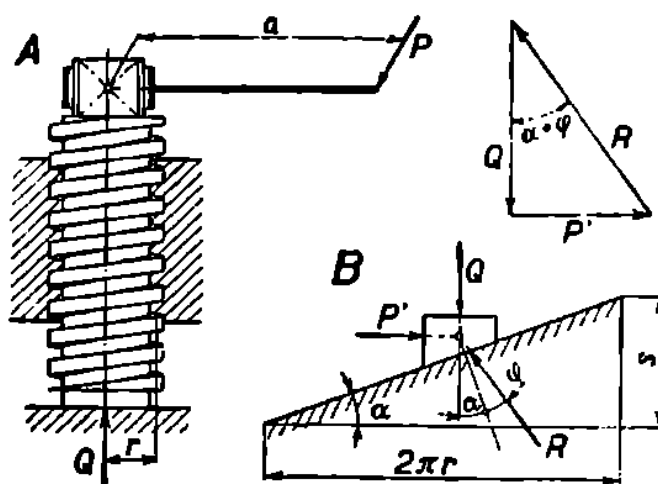
bu je $\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}$ (41)



Obr. 101. Nakloněná rovina v praxi.



Obr. 102. Pohyb s třením po nakloněné rovině.



Obr. 103. Tření na závitu šroubu.

Při spouštění je nutno břemeno zadrž. silou $P_1 = Q \cdot (r/a) \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$. U samovzpěrného šroubu musí být síla $P_1 < 0$, tj. úhel stoupání šroubu $\alpha < \varphi$.

8. Dřevěný špalek vážící $G = 12$ kg vlečeme po ocelové desce vodorovnou silou $T = 3,5$ kg. Jaký je součinitel tření mezi dřevem a ocelí (v tomto případě)?

$\mu = T/G = 3,5/12 = 0,291 = = 7/24 = \operatorname{tg} \varphi$.

Jak velká síla P , skloněná vzhůru o 30° (*obr. 104*), stačí k vleku?

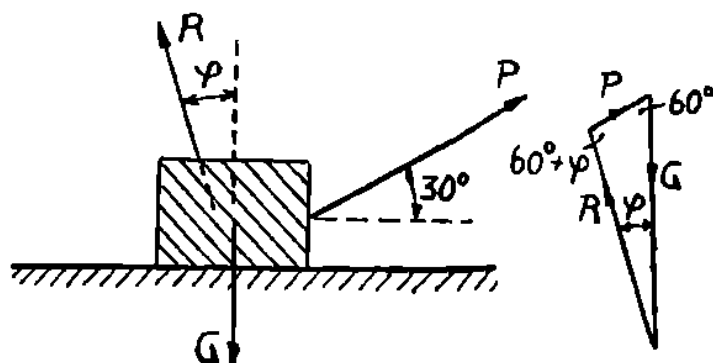
Kolmý tlak špalku na podložku

je $12 - P \cdot \sin 30^\circ$; vodorovný tah je $P \cdot \cos 30^\circ = \mu \cdot (12 - P \cdot \sin 30^\circ)$.
Z toho $P = 3,46 \text{ kg}$.

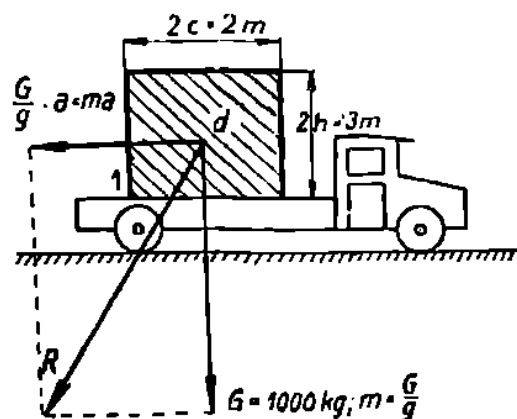
9. Šroub s plochým závitem má střední poloměr $r = 1 \text{ cm}$. Má dva chody na 1 cm délky, tedy stoupání $s = 0,5 \text{ cm}$ (viz obr. 103). Má vyvinout tlak $Q = 3 \text{ t}$.

Úhel stoupání závitu α ; $\tan \alpha = s/2\pi r = 0,5/(2 \cdot 3,14 \cdot 1) = 0,0796$.
Součinitel tření $\mu = \tan \varphi = 0,02$.

Síla P' , působící vodorovně na středním poloměru závitu,
 $P' = Q \cdot \tan(\alpha + \varphi) = Q \cdot (\tan \alpha + \tan \varphi) : (1 - \tan \alpha \tan \varphi) = 3 \cdot (0,0796 + 0,02) : (1 - 0,0796 \cdot 0,02) = 0,2993 \text{ tun}$.



Obr. 104. Šikmá síla při pohybu.



Obr. 105. Bedna na automobilu.

10. Nákladní automobil veze podle obr. 105 okovanou bednu, v níž je zabalen stroj pro zámořskou dopravu. Automobil se rozjíždí na betonové silnici tak, že za 20 vteřin jeho rychlost stoupne z 12 km/h na 48 km/h . Neposune se bedna nebo nepřevrátí se kolem hrany 1?

Rychlost stoupla z $12 \text{ km/h} = 12\,000 : 3600 = 3,33 \text{ m/s}$ na čtyřnásobek, $13,32 \text{ m/s}$. Trvalo to 20 s .

$$\text{Zrychlení } a = \frac{13,32 - 3,33}{20} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m/s}^2.$$

Bedna sedí na okované podlaze auta, na níž je součinitel tření $\mu = 0,15$. Bedna by se posunula silou

$$T = \mu \cdot G = 0,15 \cdot 1000 = 150 \text{ kg}.$$

Klouzne, když $ma_0 = T = \mu \cdot G$ čili když je zrychlení $a_0 = \mu \cdot g = 0,15 \cdot 9,8 = 1,47 \text{ m/s}^2$.

V tomto případě je zrychlení skoro třikrát menší, bedna neklouzne. Mohla by však snadno klouznout při prudkém rozjetí auta.

Převrácení nastane, když platí rovnice momentové rovnováhy k hraně 1:

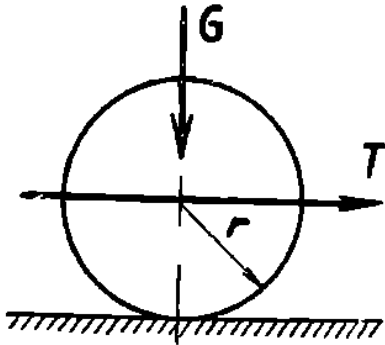
$$m \cdot a_1 \cdot h = G \cdot c \text{ čili při zrychlení } a_1 = g \cdot \frac{c}{h}.$$

Dosazením $a_1 = 9,8 \cdot \frac{1}{1,5} = 6,53 \text{ m/s}^2$. Této hodnoty nedosáhneme, není nebezpečí, že se bedna převrátí (nejvýše snad by se převrátila při velmi prudkém zabrzdění, ale ani brzdy nestačí k vytvoření zpždění $6,53 \text{ m/s}^2$).

Valivé tření

Odpor proti valení, vznikající deformacemi těles, jež se při valení stýkají, nazvaný *valivé tření*, počítáme ze vztahu $T = Gf/r$, obr. 106.

f = součinitel valivého tření v cm, např. $f = 0,09$ cm pro kola vozů na dlažbě, $f = 0,05$ cm pro kola železničních vagónů na kolejkách, $f = 0,0005$ cm pro kuličky valivých ložisek.



Obr. 106. Válec v pohybu.

Válec parního válce váží $G = 2$ tuny. Má průměr 2 m, tedy poloměr $r = 1$ m. Valí se po kamenné dlažbě. Jaká síla P musí působit v ose, aby se udržel v pohybu?

$$T = \frac{G \cdot f}{r} = \frac{2000 \cdot 0,09}{100} = 1,8 \text{ kg.}$$

Vidíme, že odpor proti valení je opravdu nepatrný. Mnohem větší síly je třeba k uvedení válce do pohybu.

Čím větší je r , tím menší je valivé tření T ; proto vůz s velkými koly lehčeji jede než vůz s malými koly. To znali sedláci už před 4000 lety, stavěli hospodářské vozy s obrovskými koly.

Proti valivému tření musíme překonávat točivý moment $M = G \cdot f = T \cdot r$ kg/cm, působí-li proti středu poloměru r síla T .

Při obvodové rychlosti v m/s se ztrácí valivým třením výkon $L = T \cdot v$ kgm/s.

Valivé tření je mnohem menší než vlečné tření, proto jsou ve valivých ložiskách (kuličkových, válečkových) menší ztráty třením než v ložiskách kluzných.

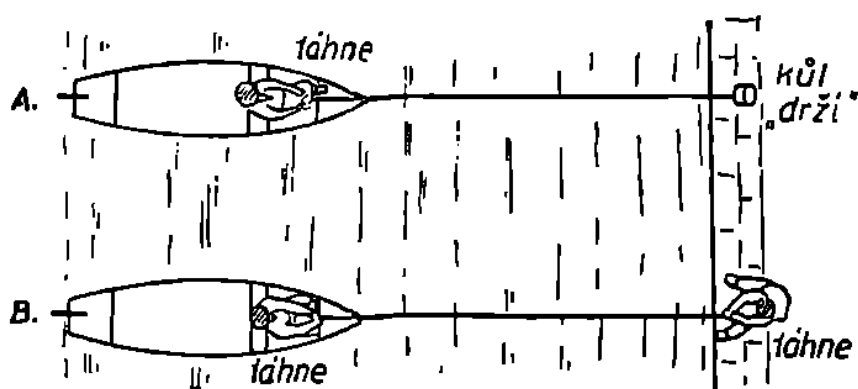
STATIKA TUHÝCH TĚLES

Jedná o rovnováze sil a těles, na něž síly působí, jsou-li tělesa v klidu. Tělesa považujeme za tuhá; jejich tvar se působením sil nemění. Dokonale tuhé není nic, většina technických materiálů je však přibližně tuhá a jejich pružnost sledujeme v nauce o pružnosti a pevnosti, o níž bude výklad později.

Dvě síly, které působí v téže přímce, jsou v rovnováze, jsou-li stejně veliké a mají opačný smysl. Je to zřejmé na prvý pohled; táhnou-li dva muži za lano proti sobě stejně silně, je lano v klidu. Ze statického hlediska je to stejné, jako kdyby netáhl

nikdo, protože síly, které jsou v rovnováze, můžeme vynechat, a pro statické úvahy se tím nic nemění. Při výpočtu pevnosti však nesmíme žádné síly vynechávat, i naše dvě síly v lano napínají lano na tah.

Velikosti sil, které působí v téže přímce stejným směrem, můžeme sčítat. Táhne-li jeden kůň silou 30 kg, můžeme přidat druhého koně, který táhne silou třeba 40 kg, a oba dohromady táhnou výslednou silou 70 kg, již říkáme *výslednice*. Víme už, že výslednice buď těleso přetvoří, nebo zrychlí jeho pohyb.



Obr. 107. Která loďka bude dřív u břehu?

Příklad: Ve stejné vzdálenosti od břehu stojí dvě stejné loďky. V každé je jeden muž, který táhne za lano. U jedné loďky je podle obr. 107 A druhý konec lana přivázán na břehu, u druhé loďky podle obr. 107 B táhne za druhý konec námořník na břehu. Všichni tři muži zde táhnou stejnou silou. Která loďka přijede dřív ke břehu? Nejprve o tom uvažujte sami, potom čtete dále správné řešení.

Na první pohled se nám zdá, že loďka tažená dvěma muži přijede dřív, rychleji, protože na ni působí dvojnásobná síla. Není to však pravda. Táhne-li muž v loďce stejnou silou jako námořník na břehu, je tah v laně roven síle jen jednoho z nich, čili v obou případech působí na loďku stejná síla, obě loďky přijedou ke břehu současně (viz též obr. 38–39).

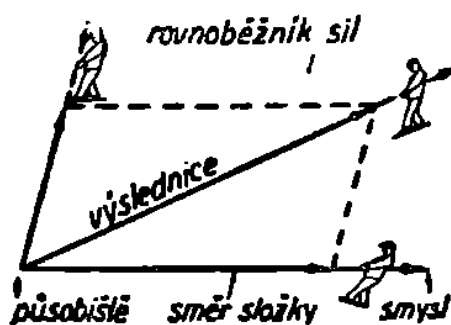
Jeden fyzik řešil úlohu takto (připomínáme hned, že je to nesprávně): Aby jela loďka ke břehu, přitahuje muž k sobě lano. Dva muži přitáhnou dvakrát větší kus lana, čili v druhém případě jede loďka 2× rychleji.

Zdá se nám to snad přirozené a správné. Aby však měla loďka dvojnásobnou rychlost, musí na ni působit i větší síla. V úloze však bylo řečeno, že všichni muži táhnou stejnou silou. Dva muži na obr. B tedy táhnou loďku stejně rychle jako jeden na obr. A, pokud táhnou všichni stejnou silou. Dva se ovšem méně unaví než jeden, pohyb však nezrychlí.

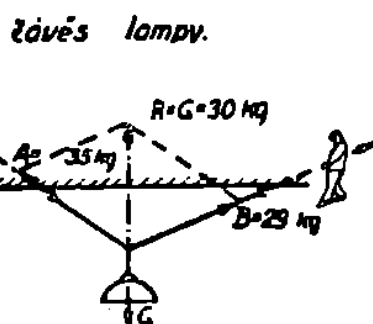
Skládání a rozkládání sil v rovině

Působí-li na těleso větší počet sil, poznáme jejich celkový účinek. Proto je hledíme nahradit jedinou výslednicí, jejíž

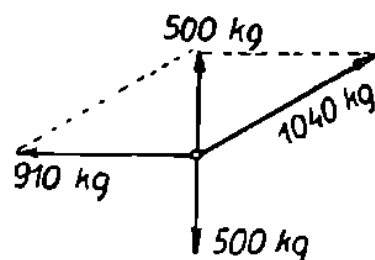
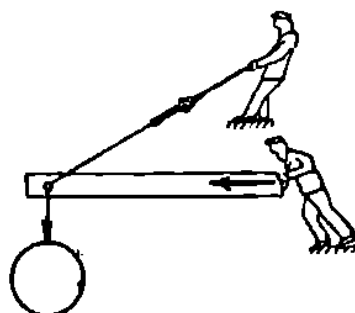
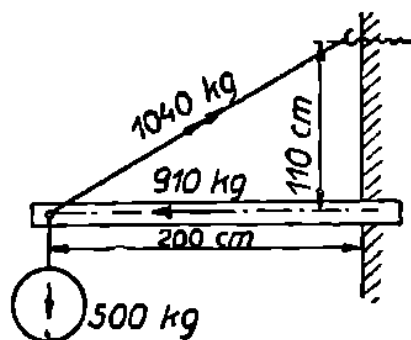
účinek už poznáme. Působí-li např. výslednice pěti sil svisle vzhůru, víme, že bude těleso zvedat nebo zrychlovat, čili účinek všech pěti sil těleso zvedá, i když některá z nich působí třeba šikmo. Jindy opět působí na těleso jediná síla šikmo; abychom lépe poznali její účinek, rozkládáme ji na svislou složku (o níž víme, že těleso zvedá) a na vodorovnou složku (o níž víme, že bude těleso vodorovně zrychlovat).



Obr. 108. Skládání sil.



Obr. 109.



Obr. 110.

Síly sčítáme geometricky, rovnoběžníkem sil, jak ukazuje obr. 108. Nakreslíme obě síly jako úsečky, vedeme tečkovaně rovnoběžky a úhlopříčka je výslednicí obou sil. Má stejný účinek jako obě současně působící síly (táhla by působíště šikmo vzhůru vpravo).

Lampa na obr. 109 váží $G = 30$ kg. Její váha je zadržena dvěma závěsnými lany, v nichž vznikly tahy $A = 35$ kg, $B = 29$ kg. Jejich velikosti můžeme odměřit z přesnějšího obrázku nebo vypočítat geometricky (jsou to jednoduché výpočty délky stran trojúhelníku). Jsou zapsány na obrázku.

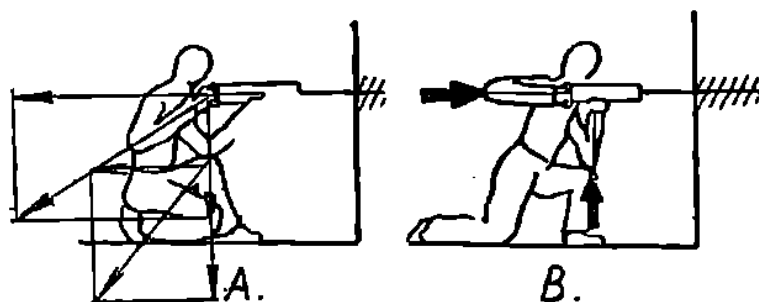
Na konsoli na obr. 110 visí 500 kg. Tato síla se rozkládá v tlak 910 kg do trámu a v tah 1040 kg do táhla. Vidíme, že

složky namáhající konstrukci jsou zde mnohem větší než vlastní břemeno.

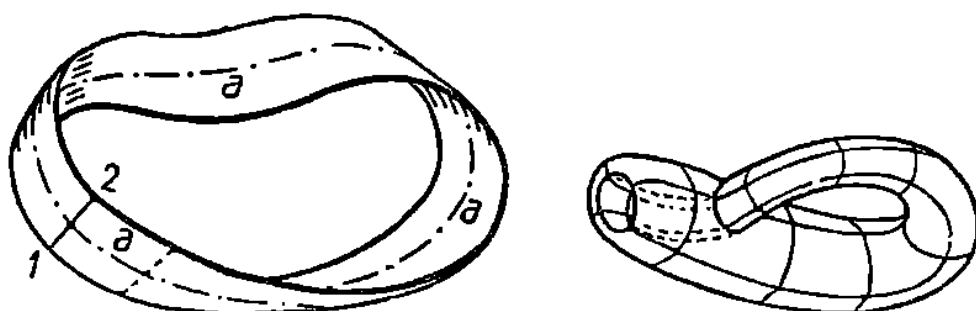
Rozklad sil při vrtání uhlí pneumatickou vrtačkou ukazují obr. 111. Vidíme tu jasně, že při špatném postoji podle *A* vzniká mnoho složek sil, které horník nemůže svým tělem dobře zachytit. Obr. *B* ukazuje správný postoj. Podobným způsobem si kreslíme síly při řešení každé technické úlohy, abychom získali přehled, kam se síly přenášejí, a podle toho je zachytili vhodnými opěrami.

Zvědavější čtenář se může zeptat: A proč vlastně sčítáme síly rovnoběžníkem sil?

Platí to? Na to je těžká odpověď. Můžeme jen dokázat pokusem, že to odpovídá praxi. Ostatně teorie relativity praví, že rovnoběžník sil neplatí stejně jako podobný rovnoběžník ke



Obr. 111. Vrtání skály, *A* chybně, *B* správně.



Obr. 112. Möbiusova plocha a Kleinova láhev.

skládání pohybů. Jenže tam se pracuje s rychlostmi světla, a proto tím naše mechanika není dotčena. Při vědeckých úvahách se často setkáme s podobnými na pohled neobvyklými závěry.

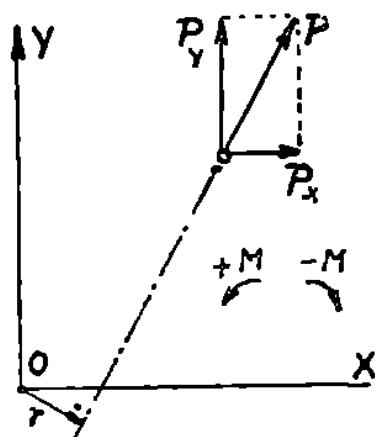
Tak např. těžko asi uvěříte, že jsou možné plochy, vytvořené třeba z kusu papíru, které mají jen jednu stranu. Jsme navykli myslet v „zaběhaných pojmech“. Papír přece má vždy dvě strany. Vystříhněte proužek papíru a slepte ho na nakroucení v místech 1—2, jak ukazuje obr. 112. Prostředkem šířky nakreslete tužkou čáru *a*. Poznáte, že čára bude jedním tahem

na obou stranách papíru, prostě tato Möbiusova plocha má jen jednu stranu.

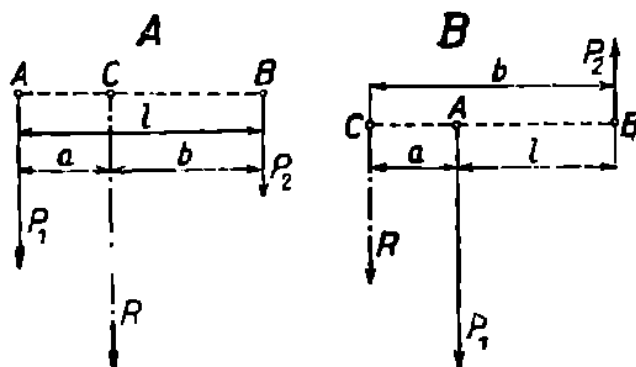
Zajímavé úkoly (zkuste napřed najít odpověď, pak to proveďte):

a) Co vznikne, když tuto plochu rozstříhneme podle čáry a „na dva kousky“?

b) Co vznikne, když pak tento stříh ještě jednou opakujeme?



Obr. 113. Rozklad síly na dvě složky.



Obr. 114. Skládání rovnoběžných sil.

Na pravém obrázku je Kleinova láhev, nejpodivnější fantasmie matematiky. Je to uzavřený povrch, do něhož můžeme třeba nalít vodu, který nemá žádný vnitřek ani vnějšek, má jen jednu stranu.

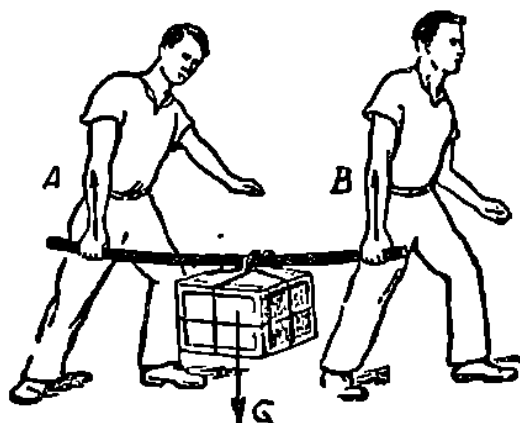
Řešení. Prvním rozstřížením vznikne jediný prstenec, druhým dva prstence zavěšené v sobě.

V praxi je velmi častý případ, že síly působí ve společné myšlené rovině. Může jich být více, stačí však, když uvažujeme o jedné z nich, P , obr. 113. Přikreslíme si dvě osy X , Y . Sílu P rozložíme na složky P_x , P_y ve směru os X , Y . Rameno síly P vzhledem k počátku souřadnic je r , moment síly je $M = P \cdot r$. Tak se dají všechny síly rozkládat ve složky P_x , P_y a mají nějaké momenty M . Aby byla rovnováha (tj. účinek všech sil se rušil), musí být součet všech složek $= 0$ a součet všech momentů také $= 0$.

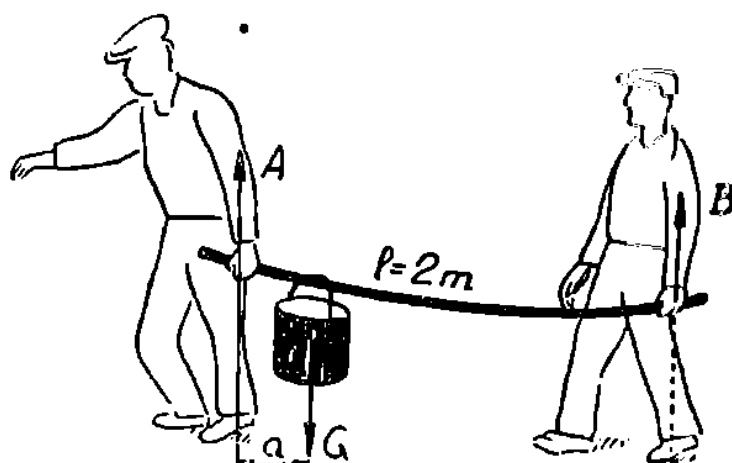
$$\boxed{\Sigma P_x = 0; \Sigma P_y = 0; \Sigma M = 0} \quad (42)$$

Písmeno Σ značí suma, součet ΣP_x čteme „součet všech sil působících ve směru osy X .“ Moment M je roven nule, když jde prodloužený směr síly P bodem O (tj. rameno $r = 0$).

Dvě rovnoběžné síly (obr. 114). Výslednice sil téhož smyslu (obr. 114A) se rovná součtu sil, $R = P_1 + P_2$; její poloha je určena silami P_1 a P_2 a určí se z rovnosti momentů k bodu A na adle P_1 , $Ra = P_1 \cdot 0 + P_2 l$, z čehož je rameno $a = P_2 l / R$. Síly opačných smyslů (obr. 114B) dávají výslednici $R = P_1 - P_2$, její smysl souhlasí se smyslem větší síly. Poloha výslednice je vně sil na straně větší síly ve vzdálenosti $a = P_2 l / R$ od sily P_1 .



Obr. 115.



Obr. 116.

Podobný postup platí i pro větší počet rovnoběžných sil. Je-li např. $P_1 = 100$ kg, $P_2 = 60$ kg, $P_3 = 240$ kg, $P_4 = 150$ kg a působí od P_1 v kolmých vzdálenostech $a_1 = 0,6$ m, $a_2 = 1,4$ m, $a_3 = 1,8$ m, je velikost výslednice $R = \Sigma P = 100 + 60 + 240 + 150 = 550$ kg a vzdálenost výslednice od síly P je

$$a = \frac{\Sigma Pa}{R} = \frac{100 \cdot 0 + 60 \cdot 0,6 + 240 \cdot 1,4 + 150 \cdot 1,8}{550} = 1,17 \text{ m.}$$

Příklad: Dva muži nesou závaží $G = 80$ kg na tyči. Visí-li závaží uprostřed, obr. 115, nese každý muž polovinu, $A = B = G/2 = 40$ kg a nezáleží na délce tyče.

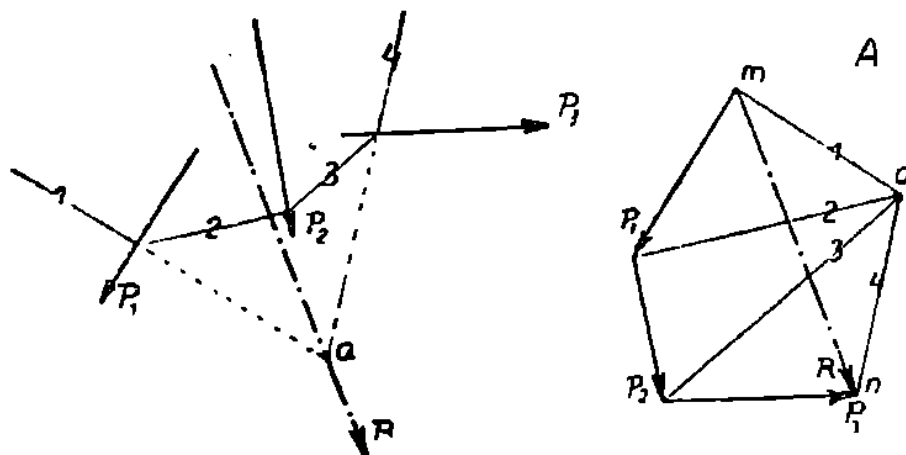
Je-li tyč dlouhá $l = 2$ m a vzdálenost od prvního muže k závaží je $a = 50$ cm, obr. 116, pak z rovnováhy momentů vzhledem k A je $G \cdot a = B \cdot l$, čili $B = Ga/l = 80 \cdot 0,5/2 = 20$ kg; $A = G - B = 80 - 20 = 60$ kg. První muž nese třikrát větší váhu než druhý.

Graficky skládáme síly v rovině podle obr. 117. Jsou dány např. tři síly P_1, P_2, P_3 , jejichž výslednici hledáme. Podle tzv. složkového obrazce (obr. A) síly sčítáme tím, že je připojíme jednu k druhé; spojnice začátku první (m) s koncem třetí (n) už dá velikost a směr výslednice R , jenže nevíme, kde výslednice leží.

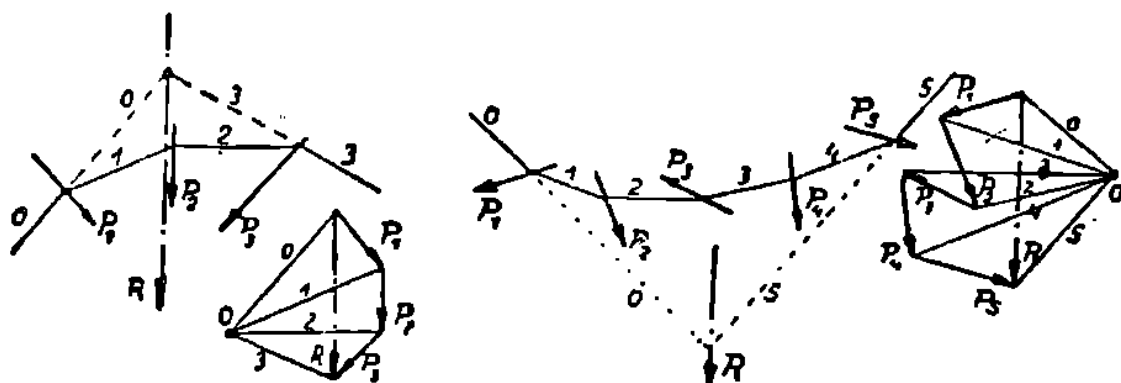
Zvolíme libovolně bod O , nazvaný pól; spojíme ho pólovými paprsky 1 2 3 4 s konci sil. Na silách vedeme rovnoběžky s pó-

lovými paprsky, které tvoří tzv. čáru výslednicovou 1 2 3 4 (na levém obrázku). Průsečík prodloužených směrů (obou krajních) 1 a 4 udává bod (a), jímž výslednice R prochází.

Jiné dva příklady jsou na obr. 118—119. Zvolte si podobně několik sil a třeba jen přibližným nákresem od ruky hledejte



Obr. 117. Skládání tří různoběžných sil.



Obr. 118. Příklady skládání různoběžných sil.

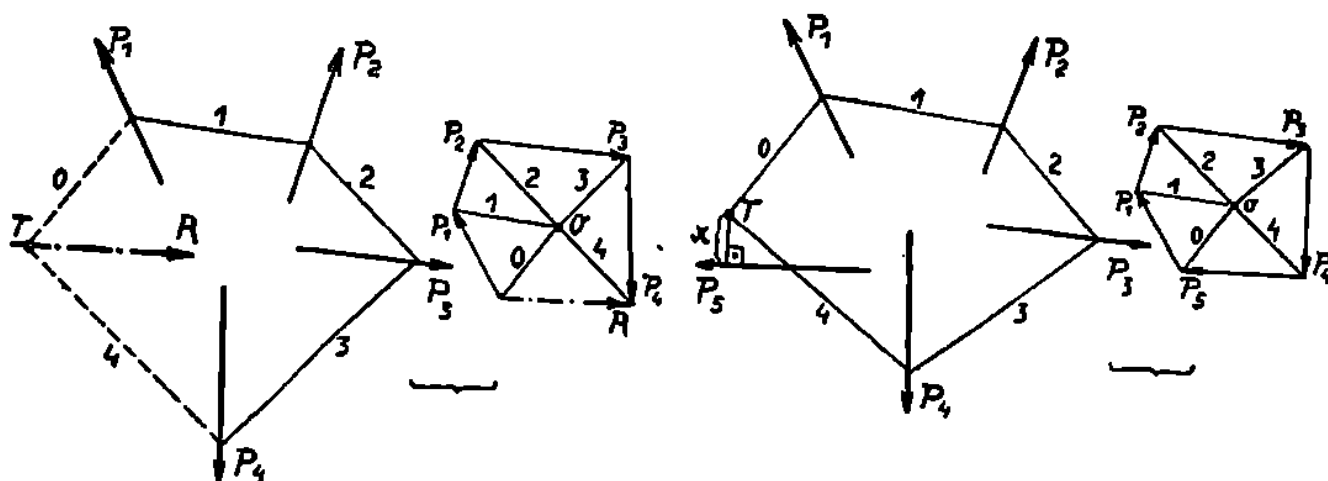
jejich výslednici. Je to zajímavé a užitečné cvičení. Kdyby byl složkový obrazec obr. A uzavřen, bod (n) padne do (m), je $R = 0$, síly jsou v rovnováze, nemají žádnou výslednici.

Příklady: 1. Praktické případy, kdy vyšetřujeme rovnováhu, jsou někdy složité jen na pohled. Vyložíme to zde na jednoduché *páce* a určíme, nevyvrátí-li prudký vítr věž. Použití páky vidíme u každých kupeckých vah. Protože jsou ramena s miskami stejně dlouhá, musí být břemena na obou stejně těžká, aby jazýček ukazoval na rovnováhu. Např. závaží 3 kg $\times$ rameno 20 cm = zboží 3 kg $\times$ rameno 20 cm.

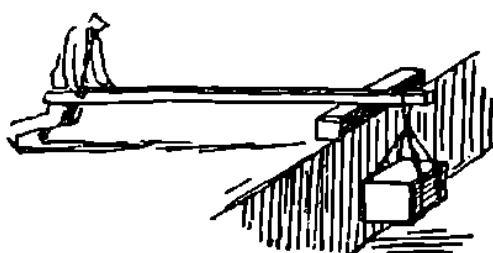
Nejjednodušší použití páky vidíme na obr. 120. Je to tyč podepřená blízko jednoho konce na pevné podložce. Na delším konci se opírá člověk. Kratším koncem je možno nadzvednout třeba i velmi těžký kvádr.

Chce-li si technik znázornit, jaké tu vznikají síly, udělá si jednoduchý náčrt, v němž vynechá všechno, co pro výpočet sil není nutné. Především

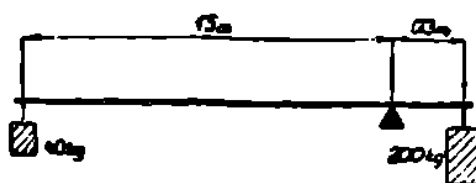
znázorní páku pouhou přímkou. Pro výpočet sil je lhostejné, je-li tyč ze železa nebo ze dřeva, je-li silná nebo tenká, oblá nebo hranatá. Také oporu znázorníme způsobem co nejjednodušším, obr. 121, a to trojúhelníkem, o jehož vrchol se páka opírá (podobně jako rameno vah o ostří trojbokého hranolu). Rovněž je lhostejné, působí-li na delším ramenu síla člověka



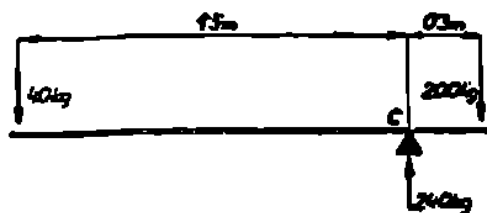
Obr. 119. Skládání různoběžných sil. Vlevo: Výslednice R uzavírá složkový obrazec, jde průsečíkem T na výslednicové čáře (ve vlnkovém obrazci). Vpravo: Pět sil je v rovnováze, protože složkový obrazec je uzavřený, ale síla P (nahrazující výslednici) nejde průsečíkem T . To značí, že těchto pět sil dává složením dvojici (moment) $P_5 \cdot x$, je-li x kolmá vzdálenost P_5 od T . Taková soustava sil se nemůže složit v jedinou výslednici.



Obr. 120.



Obr. 121.



Obr. 122.

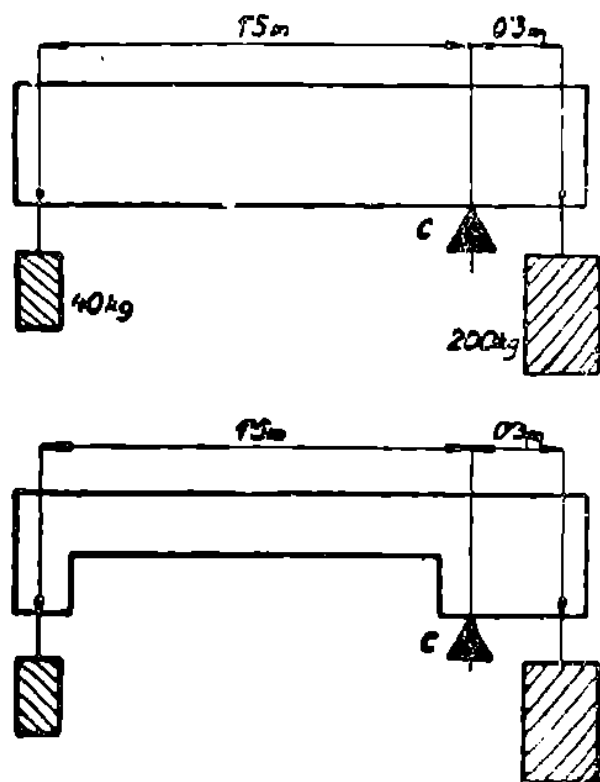


Obr. 123.

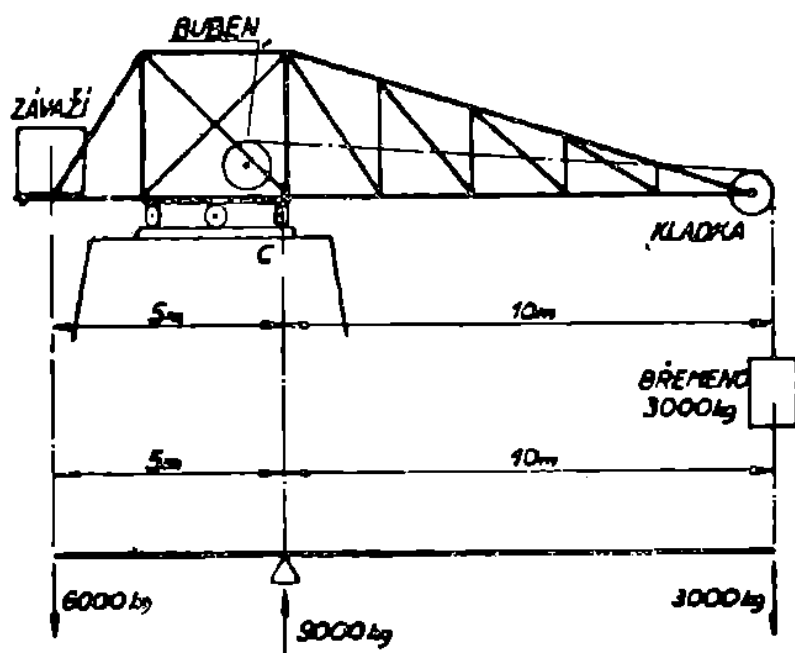
anebo je-li tam zavěšeno závaží. V dalším obr. 122 jsme si věci ještě více zjednodušili (schematisovali): místo závaží zakreslíme jenom šipky, které udávají směr, jímž síly působí, a připsali jsme k nim jejich velikost v kg. Pro začátek si myslíme, že páka je velmi lehká a že její váha nemá pro předběžný výpočet význam.

Řekněme, že zvedaný kámen váží 200 kg a že dlouhé rameno páky je pětkrát delší než krátké. Aby člověk kámen nadzdvihl, musil by tlačit

silou pětikrát menší, to je $\frac{1}{5}$ z $200 \text{ kg} = 40 \text{ kg}$. Stejného účinku by dosáhl, kdyby na konec dlouhého ramena zavěsil závaží 40 kg . Říkáme, že na páku působí síly 200 a 40 kg . *Působí na ni jenom tyto síly a už žádná jiná?* Kdybychom oporu v místě C odstranili a páku v tomto místě položili na rameno člověka, jak je naznačeno na obr. 123, dovedeme si představit, jak se tento muž musí vzpírat, jakou sílu musí vyvinout, aby celou tuto houpačku udržel. V našem případě by ji ovšem jediný člověk neunesl, poněvadž jen břemena váží $200 + 40 = 240 \text{ kg}$. Bylo by tu zapotřebí několika lidí, aby nahradili oporu. Je tedy zřejmé, že v opoře působí smě-



Obr. 124.



Obr. 125.

rem *vzhůru* další síla. Tato síla v místě opory se nazývá *reakce*. Kdyby ji nebylo, nebylo by páky.

Z těchto poznatků vyplývá velmi důležitý zákon pro rovnováhu páky: *síly, které na páku působí, musí se vzájemně vyvažovat*. Není proto možné, aby na páku, která je v rovnováze, působily síly jenom v jednom směru, je vždycky zapotřebí také sil působících ve směru opačném. Nezapomínejme ovšem, že jsme si páku pro lepší představu a pro průhlednější předběžný výpočet úplně *odhmotnili*. Při konečném výpočtu nesmíme ovšem nikdy zapomenout na vlastní váhu těles, s nimiž počítáme. Můžeme ji zanedbat jenom tehdy, když je velmi nepatrná, porovnáme-li ji s ostatními silami, které na páku působí.

Rovněž se nesmíme zaleknout, má-li páka nějaký složitější tvar, jiný než jednoduchá tyč. Představme si uvedenou páku jako prkno, z něhož vyřízneme tvar naznačený na obr. 124; změní se působení sil, zůstane-li délka ramen táž? Nezmění, nehledíme-li opět k vlastní váze páky. I toto složité těleso lze schematicky znázorniti jednoduchou přímkou jako v případě předešlém. Pro rovnováhu celku je lhostejné, jaký tvar má těleso, jímž se přenáší síla 40 kg k opoře C .

Této zásady lze přímo užít také na otočný jeřáb znázorněný na *obr. 125*. Jeřáb se otáčí na třech kolech. Břemeno, které má zvedat (3000 kg), visí na delším ramenu jeřábu, a to na laně, které jde přes kladku a navíjí se na buben. Kdyby jeřáb neměl vyvažovací závaží, břemeno by jej zvrátilo kolem kola C.

Jak velké musí být závaží, aby se jeřáb nepřekotil, má-li rozměry zapsané v obrázku? Při tomto výpočtu nezáleží na tom, že je břemeno zavěšeno na laně, ani na tom, jak jeřáb vypadá. Jde opět v podstatě o jednoduchou páku znázorněnou v spodní části téhož obrázku. Z tohoto náčrtku můžeme vypočíst všechno, co potřebujeme k výpočtu rovnováhy jeřábu. Váha břemena 3000 kg působí ve vzdálenosti 10 m od opory; poněvadž vyvažující závaží působí ve vzdálenosti 5 m od opory, musí být dvakrát tak těžké, to je 6000 kg. Na kolo C působí pak reakce: $3000 + 6000 = 9000$ kg.

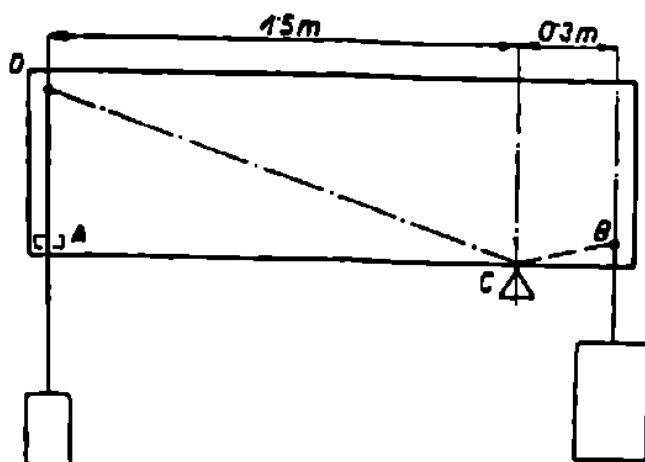
Místo abychom říkali: při polo-
vičném ramenu páky musí být
síla dvojnásobná, můžeme si před-
stavit, že místo opory je bod
otočný. Má-li být páka v rovno-
váze, v klidu, je zřejmé, že se
nesmí otáčet. Kdyby na ni půso-
bila jenom síla 3000 kg, otáčela
by se vpravo, ve směru hodino-
vých ručiček. Kdyby na ni půso-
bila jenom síla závaží 6000 kg,
otáčela by se ve směru opačném.

Nesmí se však otáčet ani v jednom, ani v druhém směru. Proto říkáme: *Točivé účinky obou sil se musí vyrovnávat*. Břemeno 3000 kg působí na ramenu 10 m a jeho otáčivý účinek čili *moment* je $3000 \text{ kg} \times 10 \text{ m} = 30\,000 \text{ kgm}$ (kilogrammetrů). Moment závaží je $6000 \text{ kg} \times 5 \text{ m} = 30\,000 \text{ kgm}$. Že by se jeřáb působením závaží překotil na druhou stranu, je nepravděpodobné, poněvadž otočným bodem by se stalo levé kolo a závaží by působilo jen na malém ramenu. Proti němu pak by působila celá váha pravého ramena, která by zabránila převrácení.

Moment tedy vypočteme, násobíme-li sílu jejím ramenem. Co je ra-
meno síly? Vzdálenost síly od otočného bodu. Jenomže zde musíme být
opatrní. Vraťme se k prvnímu *obr. 124*, k páce, která měla tvar prkna.
Ale tentokrát nezavěsíme závaží v téže výšce s oporou, nýbrž menší
závaží zavěsíme mnohem výše, v bodu D, *obr. 126*, a větší jenom o něco
výše, v bodu B. Říkáme, že jsme *působíště* síly posunuli ve směru síly.
Změní se tím rovnováha páky? Kdybychom lano, na němž visí menší
závaží, zaklesli nebo připevnili v bodu A, je zřejmé, že se nezmění nic.

Pro výpočet rovnováhy na páce nezáleží tedy na šikmých vzdálenostech
závěsných bodů D a B od opory C, nýbrž je zřejmé, že *rameny páky* (tj.
rameny sil) zůstávají vzdálenosti 1,5 m a 0,3 m. Jaké jsou to vzdálenosti?
Jsou to vzdálenosti sil od otočného bodu, měřené kolmo ke směru sil. To je
velmi důležité. Rameno síly je tedy kolmá vzdálenost síly od otočného
bodu; *moment síly = síla × rameno*.

Z toho vyplývá, že i u jeřábů se šikmým ramenem, naznačených v dal-
ších *obr. 127—128*, vypočteme „protizávaží“ stejným způsobem jako
u jeřábu s ramenem vodorovným. Na pohled složitý obrazec můžeme opět
převést na zcela jednoduchou páku, *obr. 127*. Vyvažovací závaží musí však



Obr. 126.

ve skutečnosti být o něco větší než vypočtená hodnota 6000 kg. Představme si, že bychom potřebovali zvednout břemeno, které je ve větší vzdálenosti než 10 m od předního kola, *obr. 128*. Tažné lano bude šikmé — a jaké je tu rameno síly? Zřejmě větší, poněvadž je musíme měřit kolmo k síle, řekněme 12 m. Pak ovšem při stejném břemenu 3000 kg je i moment větší, to je $3000 \text{ kg} \times 12 \text{ m} = 36\,000 \text{ kgm}$. Má-li jej udržet závaží

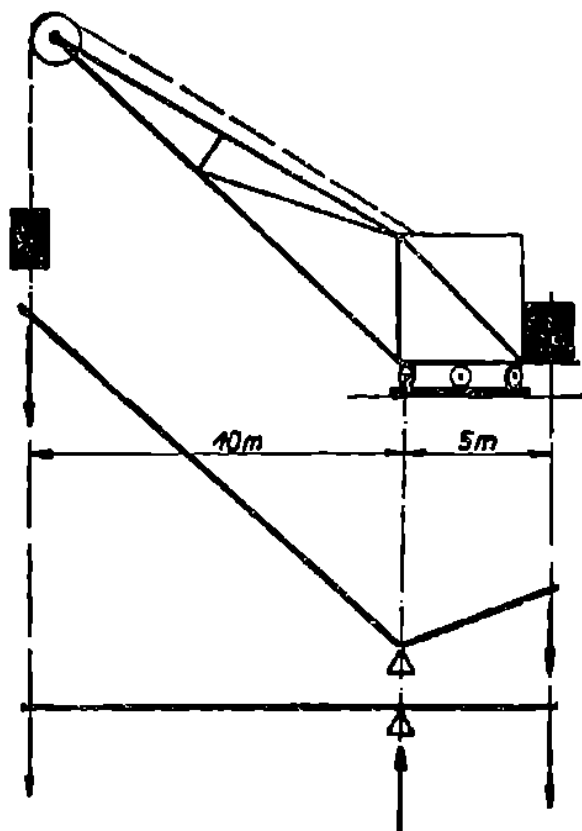
v rovnováze, musí proti němu působit stejný moment, ale opačného smyslu.

Součin jeho ramena (5 m) a závaží musí dát tedy opět 30 000 kgm.

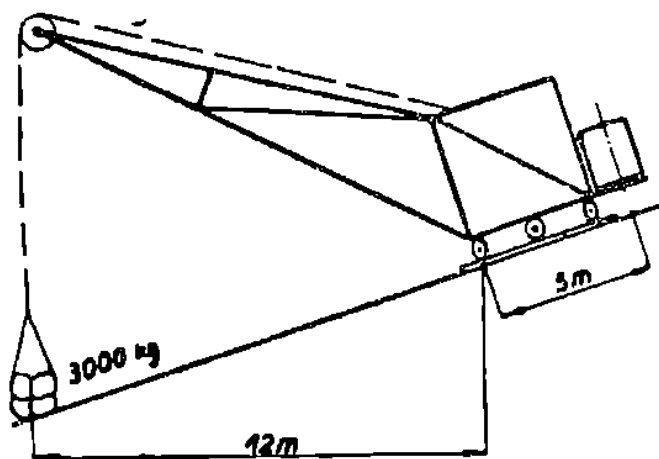
Je zřejmé, že závaží musí být těžké

$$\frac{36\,000 \text{ kgm}}{5 \text{ m}} = 7200 \text{ kg};$$

zkouška: $7200 \text{ kg} \times 5 \text{ m} = 36\,000 \text{ kgm}$.



Obr. 127.



Obr. 128.

Abychom se však dostali ke své věži. Podobně jako jsme u jednoduché páky lidskou sílu vyjádřili počtem kg, můžeme také v kilogramech vyjádřit sílu větru, který se opírá o nějakou stavbu. Pro budovy stojící o samotě můžeme zpravidla předpokládat, že velmi silný vítr tlačí na každý čtverečný metr silou 125 kg. Naše věž (třeba dřevěná) je 8 m vysoká a má čtvercový půdorys 2 m × 2 m, *obr. 129*.

Fouká-li vítr kolmo z levé strany, působí na plochu $2 \text{ m} \times 8 \text{ m} = 16 \text{ m}^2$. Celkový tlak na tuto plochu je tedy

$$16 \times 125 \text{ kg} = 2000 \text{ kg}.$$

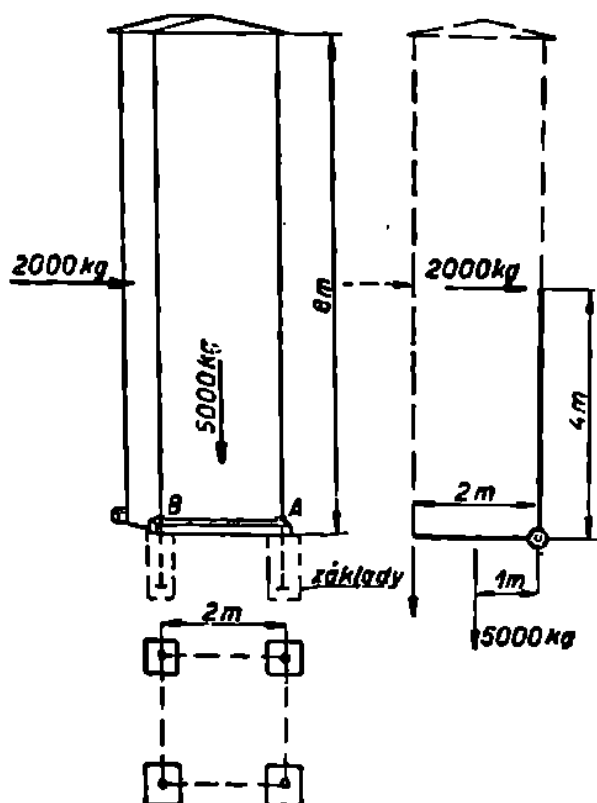
Předpokládejme, že se tento tlak rozdělí na celou plochu rovnoměrně — je tedy v podstatě jeho účinek stejný, jako by celý působil uprostřed plochy. Kdyby se věž zvrátila, sklopila by se kolem místa A, *obr. 129*. Pro výpočet můžeme si ji tedy nahradit úhlovou pákou, znázorněnou na obrázku. Víme už, že se rovnováha na páce nemění, přeložíme-li působíště síly jinak, ovšem ve směru síly. Ve vodorovném směru působí síla 2000 kg na ramenu 4 m točivým momentem $2000 \text{ kg} \times 4 \text{ m} = 8000 \text{ kgm}$.

Proti tomuto momentu působí váha věže (řekněme 5000 kg). Opět si můžeme představit, že působí uprostřed věže, ve vzdálenosti 1 m od místa A, momentem $5000 \text{ kg} \times 1 \text{ m} = 5000 \text{ kgm}$. Je zřejmé, že by tento

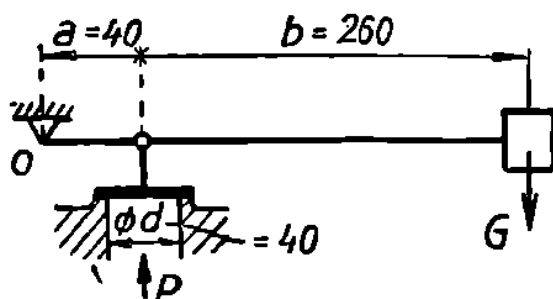
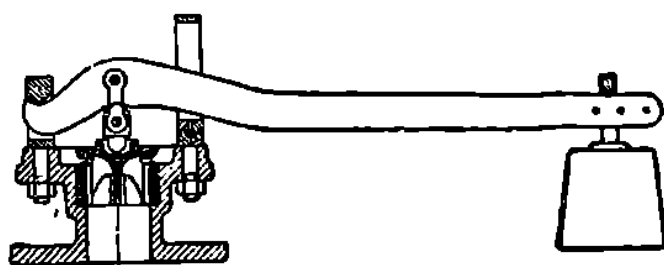
moment (od pouhé váhy věže) neudržel rovnováhu s momentem od tlaku větru. Zbyl by tu ještě přebytek $8000 \text{ kgm} - 5000 \text{ kgm} = 3000 \text{ kgm}$, to je vítr by byl s to věž překotit, kdybychom ji ještě jiným způsobem nepřichytili. To se provede tak, že se zděné bloky, které tvoří základy věže, spojí s věží silnými (základovými) šrouby. Kdyby se měla věž překlát, bylo by třeba, aby se bloky zvedly do výše. Jak velké musí být tyto základové bloky?

Úloha je podobná výpočtu „protizávaží“ u jeřábu. Poněvadž váha dvou levých bloků působí svisle ve vzdálenosti 2 m od místa A a její moment musí být nejméně 3000 kgm, vypočteme tuto váhu stejně jako dříve, dělíme-li moment ramenem, to je $3000 \text{ kgm} : 2 \text{ m} = 1500 \text{ kg}$. Oba bloky musí vážit nejméně 1500 kg, jeden 750 kg. Poněvadž pak jeden krychlový metr zdiva váží asi 1600 kg, je zřejmé, že každý blok bude mít obsah o něco menší než půl krychlového metru, že by tedy mohlo být půl kostky o straně 1 m, to je hranol rozměrů $0,5 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 0,5 \text{ m}^3$. Chceme-li, aby (k dosažení většího tření o půdu) byl tento hranol vyšší, a má-li mít čtvercovou základnu, vyhověl by také např. blok o rozměrech $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 0,25 \text{ m}^3 \times 2 \text{ m} = 0,5 \text{ m}^3$.

Měl-li by mít výšku jen 1,5 m, jaká by byla strana základního čtverce? Dělíme-li obsah výškou, dostaneme plochu základny: $0,5 \text{ m}^3 / 1,5 \text{ m} = 0,33 \text{ m}^2 = 3300 \text{ cm}^2$. Provedeme-li stranu bloku 58 cm = 0,58 m, bude plocha základny $0,58 \text{ m} \times 0,58 \text{ m} = 0,3364 \text{ m}^2$ a obsah tělesa $0,3364 \text{ m}^2 \times 1,5 \text{ m} = 0,5046 \text{ m}^3$, což je více než $0,5 \text{ m}^3$. Poněvadž $0,5 \text{ m}^3$ zdiva váží 800 kg a podle našeho výpočtu je zapotřebí na jeden blok jen 750 kg, byly



Obr. 129.



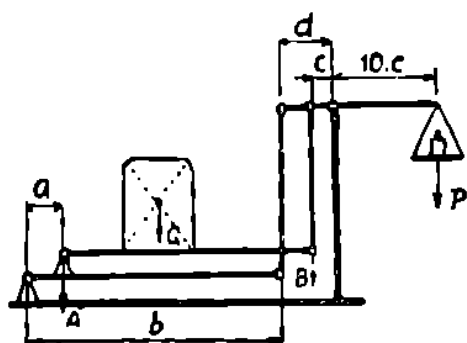
Obr. 130. Pojišťovací ventil parního kotle. Topič, který obsluhuje parní kotel, musí ventily pravidelně zkoušet, aby se nezapekly. Kdyby ventil nefungoval (tj. neotevřel se při vzrůstu tlaku páry přes dovolenou hranici), mohl by kotel vybuchnout. Proto je obsluha parních kotlů odpovědnou prací, topiči musí být zřetelně zkoušeni.

by tyto rozměry více než dostačující, aby se věž větrem nevyvrátila. Protože je blok základového zdiva v každém rohu, může působit tlak větru z libovolné strany a věž se nepřevrátí.

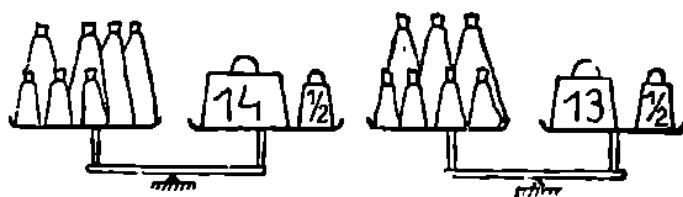
2. Pojistovací ventil parního kotle je upraven podle obr. 130. Talíř je přitlačován na sedlo závaží na páce G . Ventil se má otevřít, jakmile přetlak páry pod talířem přestoupí 5 atp = 6 kg/cm². Máme určit velikost závaží G .

Pára tlačí na talíř na plochu $0,785 \cdot d^2 = 0,785 \cdot 4^2 = 12,6 \text{ cm}^2$ tlakem $12,6 \cdot 6 = 75,6 \text{ kg} = P$.

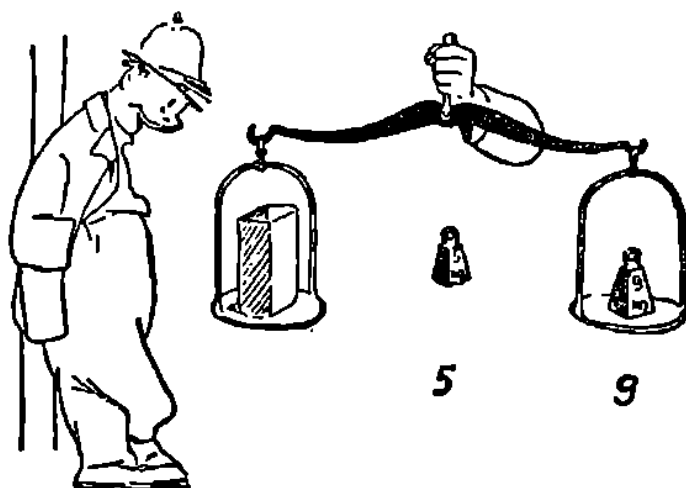
Vzhledem k otočnému bodu páky O musí být součet momentů všech sil



Obr. 131. Decimálky.



Obr. 132. Kolik váží malý a velký sáček?



Obr. 133. Jak navážíme balíčky po 2 kg?

roven nule. Váhu páky a talíře zanedbáme. Nahoru tlačí síla P , dolů závaží G .

$$\begin{aligned} P \cdot a - G \cdot (a + b) &= 0; \\ 75,6 \cdot 40 - G \cdot 300 &= 0; \\ G \cdot 300 &= 75,6 \cdot 40 = 3024; \\ G &= 3024 : 300 \approx 10 \text{ kg} \end{aligned}$$

Závaží je těžké 10 kg.

Decimální váhy můžeme schematicky nakreslit podle obr. 131. Aby nezáleželo na tom, kde leží břemeno G , musí být poměr pák $a : b$ roven poměru $c : d$. Kdyby leželo břemeno příliš vlevo, bude reakce A velká proti B . Z A se na horní páku přenáší jen část

v poměru $a : b$. Volbou ramena na závaží $10 c$ stačí k vyvážení břemena $P = 0,1 \cdot G$.

4. Na vahách počítáme vlastně s rovnováhou momentů. Zboží $\times$ rameno = závaží $\times$ rameno; protože jsou ramena stejná, váha zboží = váze závaží. Příklady:

a) Čtyři velké a tři malé sáčky váží 14 $\frac{1}{2}$ kg. Dále tři velké a čtyři malé sáčky váží 13 $\frac{1}{2}$ kg. Máme určit, jak těžký je malý a velký sáček, obr. 132.

b) Potřebujeme rozvážit obsah dvacetikilového pytle do deseti balíčků po 2 kg. Jak ukazuje obr. 133, máme k tomu váhy a závaží jen 5 a 9 kg, dále pytel s 20 kg. Jak zboží rozvážíme bez použití jiných závaží?

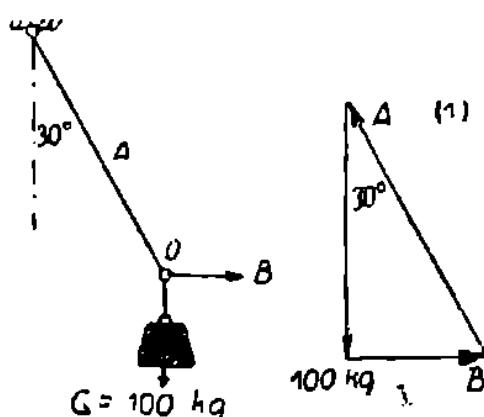
c) Jedna cihla váží $\frac{3}{4}$ cihly a $\frac{3}{4}$ kg. Kolik váží cihla? Zkuste určit sami, že váží 3 kg.

d) Čtyři kočky a tři kořata váží 3,7 kg. Tři kočky a čtyři kořata váží 3,3 kg. Kolik váží kočka a kolik kořátko? Určete, že kočka váží 0,7 kg, kořátko 0,3 kg.

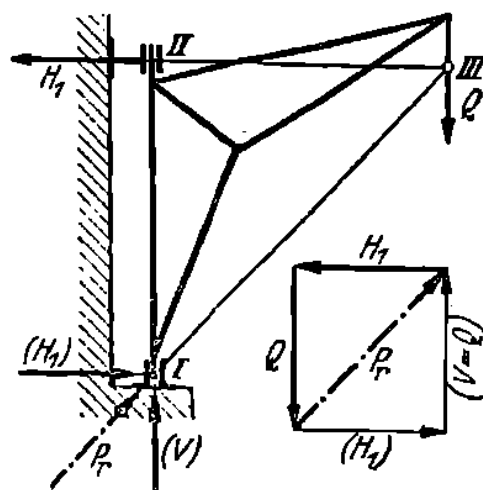
Odpověď: a) Velký sáček váží 2,5 kg, malý 1,5 kg. b) Použitím obou závaží odvážíme 14 kg, v pytli zůstává 6 kg. Od 6 odvážíme 5, zůstane 1 kg. Tím jako závažím navážíme další kg a máme dávku 2 kg.

Závaží 100 kg, pověšené na laně, je tahem směrem *B*, obr. 134, vychýleno ze svislé polohy o 30° . Jaká síla působí nyní v laně *A* a jak velký je tah *B*?

Pokud viselo lano *A* svisle, neslo sílu 100 kg. Přikreslíme-li podle (1) k váze 100 kg vodorovnou a šikmou čáru, značící směr sil *B*, *A*, můžeme



Obr. 134.



Obr. 135.

odměřit $B = 58 \text{ kg}$, $A = 116 \text{ kg}$ použitím měřítka, v němž byla nanesena váha 100 kg.

Také můžeme počítat geometricky:

$B = G \cdot \tan 30^\circ = 100 \cdot 0,58 = 58 \text{ kg}$; $A = G : \cos 30^\circ = 100 : 0,866 = 116 \text{ kg}$.

6. Otočný jeřáb je podle obr. 135 opřen v patním ložisku I a v závěsu II. Máme určit graficky tlaky (reakce) v ložiskách.

Kdybychom odstranili horní závěs II, musela by jeřáb držet vodorovná síla H_1 . Její směrnice se protíná s břemenem Q v bodu III.

Tři různoběžné síly v rovině jsou v rovnováze, když se jejich prodloužené směry protínají v jednom bodě a šipky ve složkovém obrazci jdou za sebou. Proto je spojnice $I \rightarrow III$ směrnicí spodní reakce P_r . Doplněním složkového obrazce podle obrázku dostáváme velikosti reakcí H_1 a P_r . Šikmo působící reakce P_r se může rozložit na vodorovnou složku (H_1) a svislou složku (V).

7. Na páku působí podle obr. 136 síly P_1 a P_2 . Hledáme reakci P_r v ložisku.

V průsečíku všech tří sil si prodloužíme směrnice sil, nanese velikosti P'_1 , P'_2 . Rovnoběžníkem sil získáme velikost výslednice P'_r .

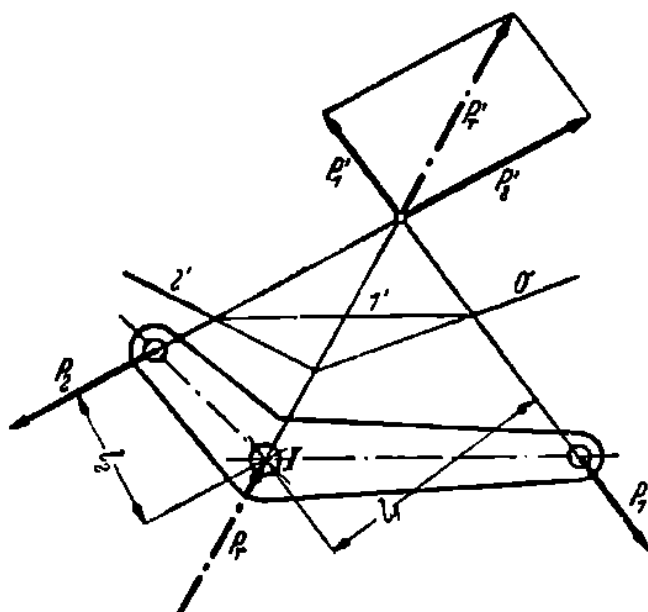
Z rovnováhy momentů $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$. Ramena l_1 , l_2 měříme kolmo na síly.

8. Tyč dlouhá 18 m, vážící $G = 40 \text{ kg}$, je opřena horním koncem o hlad-

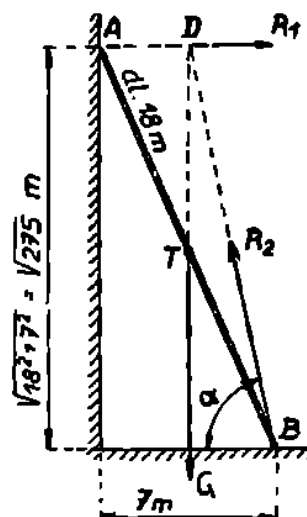
kou stěnu. Druhý konec se opírá o zem ve vzdálenosti 7 m od stěny. Hledáme reakce R_1 , R_2 na stěně a na zemi, *obr. 137*.

Váha G působí svisle uprostřed tyče v bodu T , reakce R je kolmá ke stěně. Aby byly tři síly G , R_1 , R_2 v rovnováze, musí jít společným bodem D .

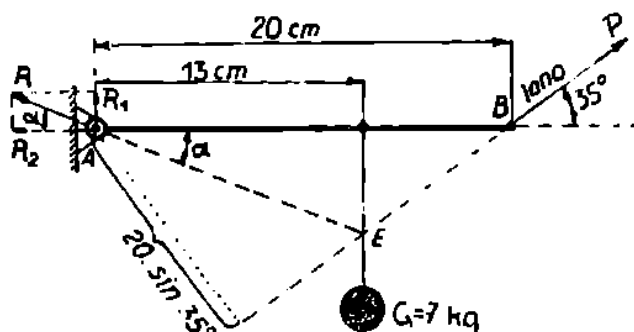
Z rovnováhy momentů sil k bodu B je: $R_1 \cdot \sqrt{275} = G \cdot 3,5 = 140$; $R_1 = 8,44$ kg. Protože R_2 je výslednicí vodorovné síly R_1 a svislé G , je



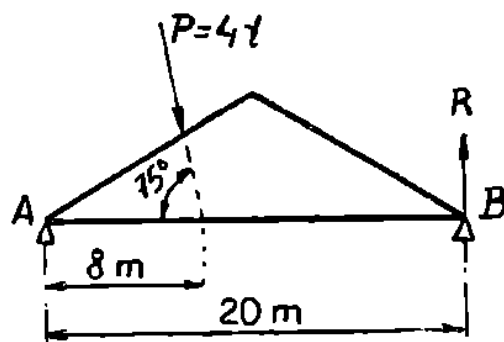
Obr. 136.



Obr. 137. Tyč opřena o stěnu.



Obr. 138. Páka otočná v A a zavěšená v B .



Obr. 139. Hledáme reakci R .

$R_2 = \sqrt{R_1^2 + G^2} = \sqrt{8,44^2 + 40^2} = 40,9$ kg. Její sklon α se vztahem $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{275/3,5} = 4,74$; $\alpha = 78,1^\circ$.

9. Páka otočná v A visí na laně v B a nese břemeno v D podle *obr. 138*. Jaký je tah v laně P a tah v závěsu R ? Směry sil G , P , R plynou z obrázku, protože se musí protínat v jednom bodě E .

Z rovnováhy momentů k bodu A je $P \cdot 20 \sin 35^\circ = 7 \cdot 13$; $P = 7,93$ kg.

Svislá složka reakce v A je $R_1 = 7 - P \sin 35^\circ = 2,45$ kg; vodorovná složka $R_2 = P \cos 35^\circ = 6,5$ kg. Z toho $R = \sqrt{6,5^2 + 2,45^2} = 6,95$ kg; její sklon $\operatorname{tg} \alpha = 2,45/6,5 = 0,377$; $\alpha = 20^\circ 40'$.

10. Na střešní konstrukci působí šikmo tlak $P = 4$ t, *obr. 139*. Jak velká je svislá reakce opěry R v bodu B ?

Reakce v A neznáme, její moment k bodu A je roven nule. Moment reakce R k bodu A je $R \cdot 20 \text{ tm}$, moment svislé složky síly P k bodu A je $R \cdot \sin 75^\circ \cdot 8 \text{ tm}$. Oba momenty musí být stejné.
 $R \cdot 20 = 4 \cdot \sin 75^\circ \cdot 8$; $R = 32 \cdot \sin 75^\circ / 20 = 1,6 \cdot 0,9659 = 1,545 \text{ t}$.

Prostorové soustavy sil

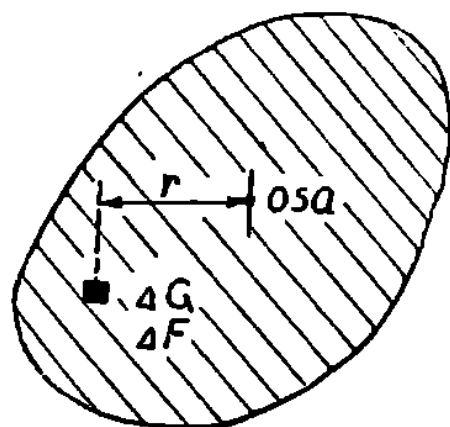
Nosníky ocelových konstrukcí nebývají jen v rovině, jsou rozloženy prostorově různě šikmo apod. Rozklad sil je zde složitější. Při statickém výpočtu takové soustavy hledáme, jak je každý nosník (prut) namáhán, abychom podle toho určili jeho rozměry. Na první pohled mnohdy ani nepoznáme, které pruty budou taženy a které tlačeny (místo tažených prutů mohou být na letadle lana, tlačené jsou např. z trubek).

Libovolná soustava prostorově působících sil se může nakonec zjednodušit na jednu sílu a jeden moment. Zvolíme si počátek, v němž se protínají tři navzájem kolmé osy. Při rovnováze musí být

a) součet průmětů všech sil do tří kolmých os roven nule,

b) součet momentů vzhledem k těmto třem osám roven nule.

Je tedy třeba splnit šest podmínek rovnováhy. Vhodnou volbou polohy os, vzhledem ke kterým počítáme rovnováhu momentů, se řešení prostorové konstrukce značně zjednoduší.



Obr. 140. Určení těžiště.

Těžiště

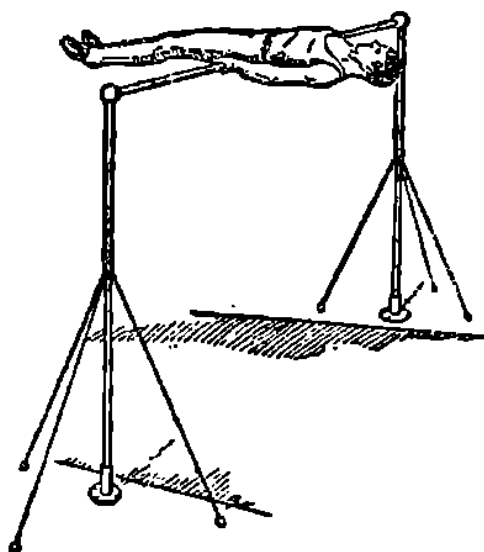
Těleso (plochu, čáru) si můžeme rozdělit na malé kousky hmoty (plochy, délky), obr. 140, z nichž každý má určitou váhu (plošný obsah, délku). Všechny tyto váhy (plošné obsahy, délky) můžeme znázornit prostorovou soustavou rovnoběžných sil. Jejich výslednice prochází vždy jedním bodem, jemuž říkáme *těžiště* (tělesa, plochy, čáry). Hmotu celého tělesa (pro výpočty) často soustředíme do těžiště.

U koule, hranolu, krychle, válce, kruhu, čtverce, kružnice atd. leží těžiště ve středu. U těles, ploch a čar, které mají osu souměrnosti, leží těžiště na této ose. Každá přímka, která prochází těžištěm, se jmenuje *těžnice*.

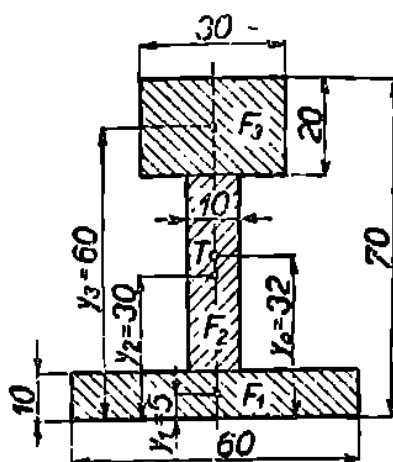
Částička ΔG (obr. 140), vzdálená r od osy otáčení, snaží se natočit momentem $r \cdot \Delta G$. Tím se těleso otáčí. Jde-li však osa těžištěm tělesa, těleso se netočí, obr. 141. Z toho plyne, že k ose jdoucí těžištěm je součet všech momentů ($\Sigma r \cdot \Delta G$) roven nule.

$$\left. \begin{array}{l} \text{U tělesa: } G \cdot R = \Sigma r \cdot \Delta G \\ \text{U plochy: } F \cdot R = \Sigma r \cdot \Delta F \end{array} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

G je váha [kg], F je plošný obsah [cm²], R je vzdálenost těžiště od osy otáčení [cm], r je vzdálenost částice váhy ΔG nebo částice plochy ΔF od osy otáčení.



Obr. 141. Atlet na hrazdě, opřený proti těžišti.



Obr. 142.

Statický moment tělesa (plochy, čáry) k libovolnému bodu (ose) je dán algebraickým součtem momentů všech částí tělesa (plochy, čáry, tedy objemových, plošných, čárových) k témuž bodu (ose), který můžeme nahradit součinem z celkové váhy (obsahu, plochy, délky) a vzdálenosti těžiště útvaru od příslušného bodu (osy). Statický moment tělesa (plochy, čáry) k těžišti nebo k ose jdoucí těžištěm je rovný nule.

Příklady: 1. Hledáme těžiště T plochy, obr. 142. Protože je to obrazec souměrný podle svislé osy, určíme jen souřadnici $y_0 = R$. Plochu rozdělíme na tři obdélníky, jejichž těžiště známe:

$$\begin{aligned} F_1 &= 6 \cdot 1 = 6 \text{ cm}^2, y_1 = 0,5 \text{ cm}; \\ F_2 &= 1 \cdot 4 = 4 \text{ cm}^2, y_2 = 3 \text{ cm}; \\ F_3 &= 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2, y_3 = 6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Souřadnice těžiště } y_0 &= (\Sigma y \cdot \Delta F) : F = \\ &= (F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3) : F = (6 \cdot 0,5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6) : (6 + 4 + 6) = \\ &= 3,2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

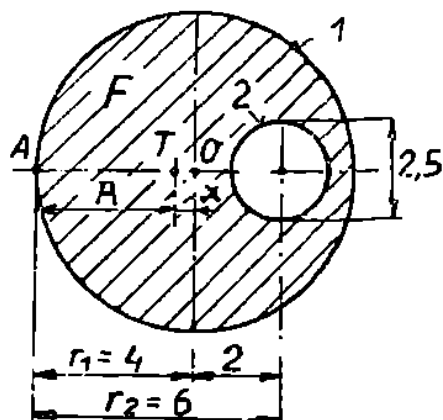
Podobně se dá zjistit, že trojúhelník má těžiště vždy v $1/3$ výšky na těžnici (tj. spojnici vrcholu s půlícím bodem protilehlé strany).

2. Hledáme těžiště T čárkované plochy F na obr. 143 (kruh s výstředním otvorem).

Plný kruh 1 má plošný obsah $F_1 = 0,785 \cdot 8^2$, otvor 2 má plošný obsah $F_2 = 0,785 \cdot 2,5^2$. Vzhledem k ose jdoucí bodem A je

$$R \cdot F = r_1 \cdot F_1 - r_2 \cdot F_2;$$

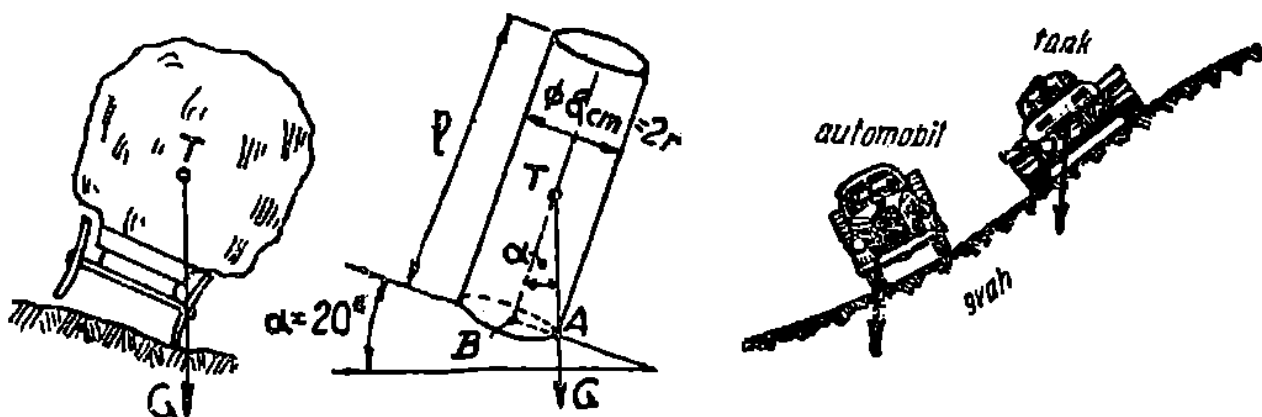
$R \cdot 0,785 \cdot (8^2 - 2,5^2) = 4 \cdot 0,785 \cdot 8^2 - 6 \cdot 0,785 \cdot 2,5^2$; $R = 3,783$ cm. Vzdálenost těžiště T od osy O je $x = 4 - 3,783 = 0,217$ cm.



Obr. 143.



Obr. 144. Těžiště člověka při saltu a při chůzi.



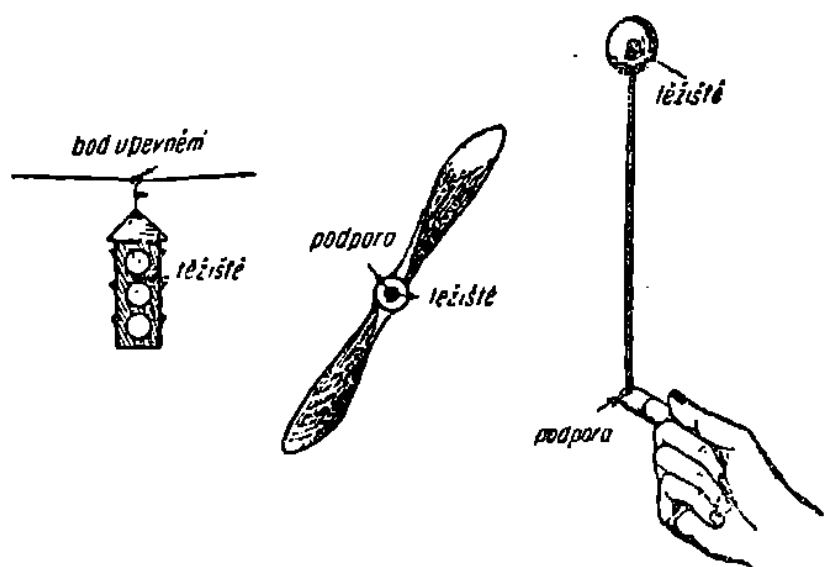
Obr. 145. Stabilita na nakloněné rovině.

3. Proměřením polohy těžiště skokana při saltu (obr. 144-A) se zjistilo, že se výška těžiště nad zemí skoro nemění. Mírným předklonem, se zdviženými rukama, aby mělo tělo co největší moment setrvačnosti, získá skokan točivost kolem osy těžištěm tím, že se prudce skrčí. Moment setrvačnosti těla se zmenší asi na třetinu, tím vzroste rychlost otáčení a akrobat se otočí až třikrát ve vzduchu. Natažením nohou má opět velký moment setrvačnosti a zastaví se. Salto vyžaduje odvahu, k otáčení není třeba zvláštní síly.

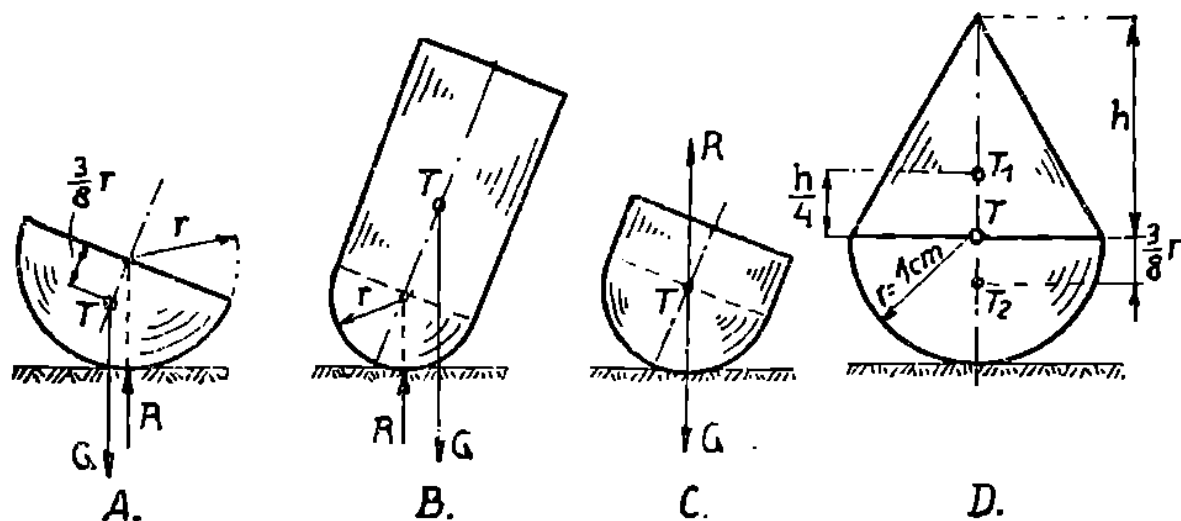
Při každém kroku při chůzi po rovině se těžiště těla zdvedne o 6 cm. Kdybychom připevnili k boku chodce křídlo, kreslí se při chůzi na stěnu vlnovka podle obr. 144-B. Z toho plyne, že únava při chůzi záleží hlavně

na technice chůze. Kdo umí chodit tak, že zvedá tělo méně, unaví se méně. Práce vykonaná zdvižením tělesa je rovna součinu z váhy tělesa a svislé dráhy těžiště.

4. Jak dlouhý může být válec stojící na nakloněné rovině, aby se ještě nepřevrátil vlastní vahou, obr. 145?



Obr. 146. Rovnováha stabilní (vlevo), indiferentní (uprostřed) a labilní (vpravo).



Obr. 147. Rovnováha stabilní A, labilní B, indiferentní C; G je váha v těžišti, T , R je reakce podložky, procházející vždy středem polokoule o poloměru r .

V krajním případě může svislá váha G z těžiště T procházet bodem A . Potom $TB = 0,5 l = r \cdot \cotg \alpha = 4 \cdot \cotg 20^\circ = 4 \cdot 2,7475 = 10,99$ cm. Průměr válce $2r = 2 \cdot 10,99 = 21,98$ cm.

5. Rovnováha tělesa je *stabilní*, snaží-li se těleso po malém vychýlení vrátit do původní polohy. Snaží-li se síly vzniklé malým vychýlením těleso převrátit, je rovnováha *nestabilní*, *labilní*. Zůstává-li vychýlené těleso v té poloze, do které bylo vychýleno, je rovnováha *indiferentní*, *neutrální*, obr. 146 a obr. 147-A-B-C.

U tělesa *obr. 147-D*, složeného z polokoule a z kužele, hledáme výšku kužele h , při níž bude rovnováha neutrální, tj. při níž těžiště celého tělesa bude ležet v bodu T , ve středu polokoule, $r = 1$ cm.

Objem kužele je $\pi r^2 h / 3 = \pi h / 3$, jeho těžiště je T_1 . Objem polokoule je $2\pi r^3 / 3 = 2\pi / 3$, její těžiště je T_2 .

$(T_1 T) : (T_2 T) = (h/4) : (3/8) = (\text{váha polokoule}) : (\text{váha kužele}) = = (2\pi/3) : (\pi h/3)$, čili $2h/3 = 2/h$. Z toho $h^3 = 3$, $h = \sqrt[3]{3} = 1,732$ cm. Je-li h větší než 1,732 cm, je rovnováha labilní. Je-li h menší než 1,732 cm, je rovnováha stabilní.

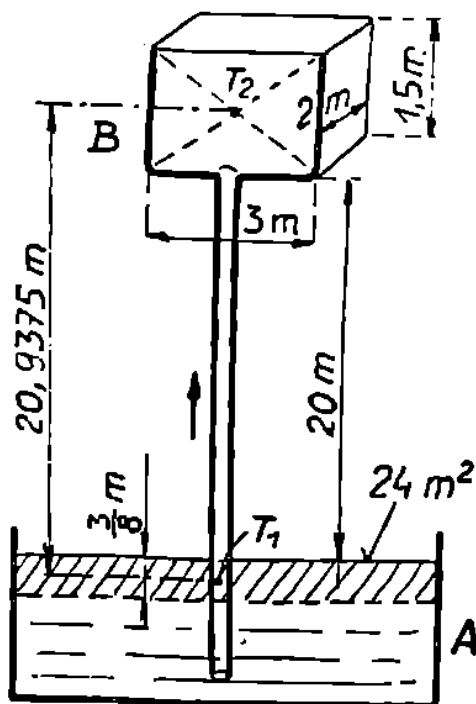
6. Z nádrže *A*, jejíž půdorys je 24 m^2 , plníme vodou nádrž *B*. Jaké práce je k tomu teoreticky třeba, *obr. 148*?

Zdvíháme objem nádrže *B*, tj. $3 \times 2 \times 1,5 = 9 \text{ m}^3$ vody. Tím klesne spodní hladina o čárkovaný objem, o výšku $9/24 = 3/8$ m. Těžiště čerpané vody se zvedne z T_1 do T_2 , tj. o $(3/16 + 20 + 3/4) = 20 \frac{15}{16} \text{ m} = 20,9375 \text{ m}$. Protože 1 m^3 vody váží 1000 kg, spotřebuje se práce $1000 \cdot 20,9375 = 2093,75 \text{ kgm}$.

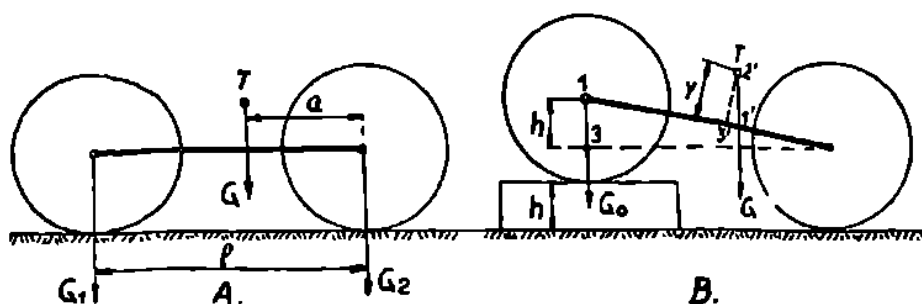
7. Těžiště motocyklu nebo velocipédu T zjistíme vážením podle *obr. 149*. Jsou-li tlaky kol G_1, G_2 , je váha $G = G_1 + G_2$, *obr. A*. G je vlastně výslednicí sil G_1, G_2 , její vzdálenost od pravého kola je $a = l \cdot G_1 / G$.

Zvedneme-li přední kolo o h , *obr. B*, je tlak tohoto kola na váhu G_0 . Z podobnosti trojúhelníku 123 a $1'2'3'$ je

$$y : 1'3' = 23 : h = \sqrt{l^2 - h^2} : h; 1'3' = = 23' - 21' = l \cdot G_1 / G - l \cdot G_0 / G = l$$



Obr. 148. Práce při čerpání vody.



Obr. 149. Těžiště velocipédu.

$(G_1 - G_0) / G$. Z toho pro případ, že jsou stejná kola, vzdálenost od spojnice os k těžišti je

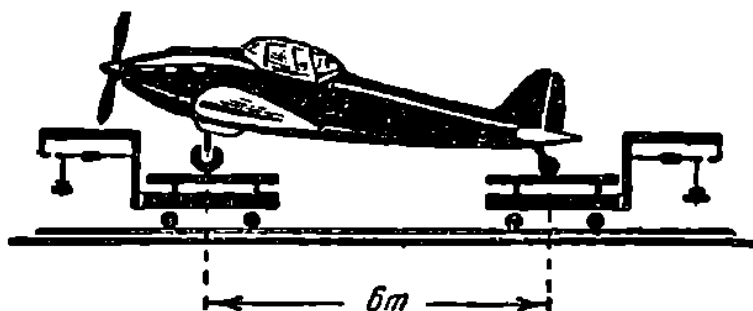
$$y = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h} \cdot l \cdot \frac{G_1 - G_0}{G}.$$

Měřený velocipéd měl např. rozvor $l = 112$ cm, na váze bylo $h = 15$ cm,

vážil $G = 15$ kg. Když stála kola na vodorovné rovině, byl tlak na přední kolo $G_1 = 6,6$ kg. Při vážení se zdviženým kolem bylo $G_2 = 6,3$ kg.

$$y = \frac{\sqrt{112^2 - 15^2}}{15} \cdot 112 \cdot \frac{6,6 - 6,3}{15} = 16,5 \text{ cm.}$$

Výška těžiště nad zemí je rovna (poloměru kol) + 16,5 cm. Vodorovná vzdálenost těžiště od zadní osy je $a = l \cdot G_1/G = 112 \cdot 6,6/15 = 49,3$ cm. Podobně se zjišťuje i těžiště lokomotiv a letadel, obr. 150.



Obr. 150. Těžiště letadla.

PRUŽNOST A PEVNOST MATERIÁLŮ

Každá část stroje přenáší nějaké síly a musí být přiměřeně silná, aby nepraskla. Nesmí však být příliš silná, aby nebyla drahá a těžká. Proto rozměry součástí počítáme podle zatížení. Nejprve součást navrhujeme, pak ji pro výpočet zjednodušíme v nějaké geometrické těleso, odhadneme, jaké síly bude přenášet, a nyní počítáme, zda materiál tyto síly snese. Nesmí se ani porušit, ani příliš přetvořit, čili počítáme pevnost a pružnost. Je to mnohem obtížnější úloha než se zdá na první pohled. Vezměte obyčejnou ocelovou kuličku; jakou silou bude rozdrcena? Nutno studovat nejobtížnější oddíly vyšší matematiky, než se můžete na takovou „jednoduchou“ úlohu odvážit. Určit namáhání v článku natahovaného řetězu je mistrovským kouskem. Dvacet let už trvá spor o tom, jaké namáhání vznikne v laně jeho ohnutím. O výpočtu stěny lokomotivního pístu byla napsána tlustá kniha a je to práce pro zručného matematika s počítačím stroji na měsíc.

Základní pojmy

Působením sil se těleso chce pohybovat. Nemůže-li, přetvoří se. Podrží-li přetvořený tvar i po odstranění sil, je z nepružného, plastického materiálu (jako např. mastná hlína). Některé materiály nabývají původního tvaru, když přestanou síly působit (guma, zpruha). Jsou pružné, elastické.

Pružným přetvořením se nemění přetvárná mechanická práce v teplo, přetvoření je vratná stavová změna.

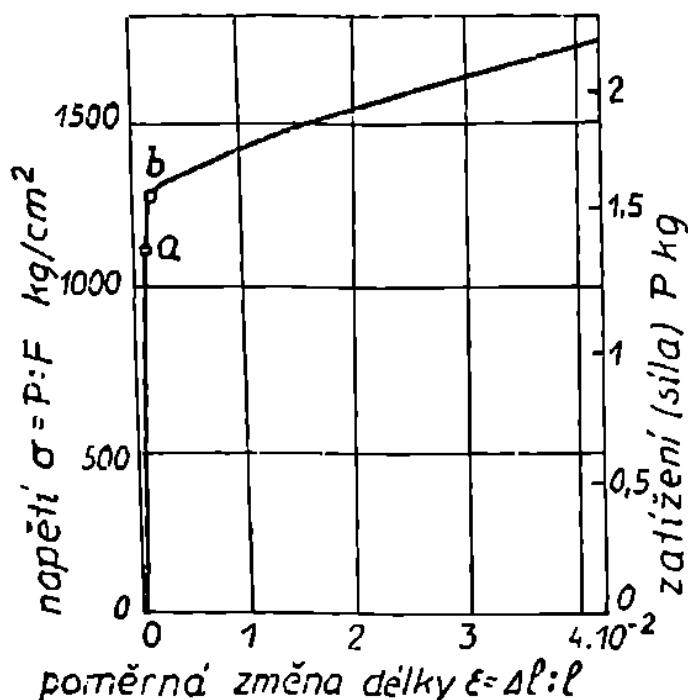
Natahujeme-li např. drát, původní délka l se prodlouží o změnu délky Δl (delta, „díl ek el“). Poměr

$$\Delta l : l = \text{poměrná změna délky (poměrné prodloužení)} \quad . \quad (44)$$

Kolmé zatížení průřezu (síla v kg, již označíme σ), připadající na 1 cm^2 plochy průřezu F , nazýváme *napětí* (přesněji *normální napětí*, ve směru normály, tj. kolmice k průřezu).

$$\sigma = P : F \quad [\sigma \text{ v kg/cm}^2; P \text{ v kg}; F \text{ v cm}^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Zkoušíme např. na tah měděný drát průměru $d = 0,04 \text{ cm}$, jehož kolmý průřez má plochu $F = 0,785 \cdot d^2 = 0,785 \cdot 0,04^2 = 0,00126 \text{ cm}^2$. Na-
nášíme-li ve zkušebním diagramu na vodorovnou osu poměrnou změnu délky ε a na svislou osu napětí σ v kg/cm^2 , dostaneme obr. 151. Až k bodu a (k *mezi úměrnosti*) roste ε úměrně s napětím σ , od a k b roste už rychleji. Až k bodu b (k *mezi kluzu*, nazvané též *mez průtažnosti*), kdy je ε asi $1/1000$, je prodloužení pružné, ztratí se po odlehčení. Za



Obr. 151. Zkušební (pracovní) diagram měděného drátu.

bodem b roste prodloužení velmi rychle, částice materiálu uvnitř drátu kloužou po sobě, a proto se b jmenuje *mez kluzu*. Drát tím ztverdne, je pevnější (zpevňuje se), ale po odlehčení už zůstane natažen a změkne teprve vyžiháním.

Až k napětí na *mezi úměrnosti* a platí *Hookův* (čti *Hukův*) *zákon*: Prodloužení je úměrné napětí. Podíl napětí σ a příslušné poměrné změny délky ε je pro každý materiál stálý a značí se E .

$$\sigma : \varepsilon = E = \text{modul pružnosti v tahu v kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

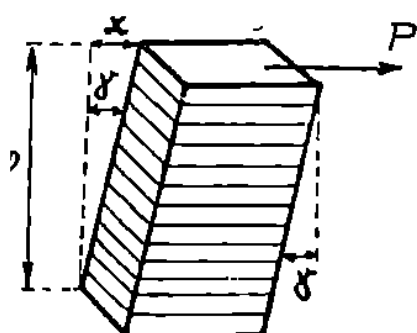
U oceli je např. $E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$, u šedé litiny je $E = 1\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Prodloužením se průměr drátu d zmenší (zkrátí) o Δd .
 Poměr $\Delta d : d = \varepsilon_p = \text{poměrné zúžení (lineární)} \dots (47)$
 Přibližně je poměr poměrného zúžení k změně délky pro každý materiál stálý,

$$\varepsilon_p : \varepsilon = \mu = \text{Poissonův poměr} \dots (48)$$

U oceli je např. $\mu = 0,3$, u hliníku a mědi $\mu = 0,34$, u olova $\mu = 0,45$, u nestlačitelné kapaliny $\mu = 0,5$. V praxi často počítáme s převrácenou hodnotou μ ,

$$1/\mu = \varepsilon : \varepsilon_p = m = \text{Poissonova konstanta} \dots (49)$$



Obr. 152. Zatížení smykem.

která je u oceli $m = 3,3$, u litiny $m = 8,3$ až 3,6 (záleží na napětí).

Prodloužením a zúžením se změní objem natahovaného drátu V o ΔV . Krychle se změní v kvádr. Její výška se změní o $(1 + \varepsilon)$, její průřez o $(1 - \mu \varepsilon)^2$. *Poměrné objemové roztažení*

$$\Delta V : V = (1 + \varepsilon) \cdot (1 - \mu \varepsilon)^2 - 1 \approx (1 - 2\mu) \varepsilon = \text{kubická dilatace} \dots (50)$$

Protože 2μ je vždy menší než 1, objem natahovaného drátu (tělesa) se zvětšuje a objem stlačovaného tělesa se zmenšuje. Působí-li stejné zatížení (např. tlak) všemi směry, mluvíme o *prostorové napjatosti* (u natahovaného drátu byla jen *jednoosá napjatost*), při níž dosazením z Hookova zákona

$$\Delta V : V = 3 \cdot (1 - 2\mu) \sigma / E = \kappa \cdot \sigma;$$

$\kappa = 3 \cdot (1 - 2\mu) / E = \text{součinitel objemového přetvoření}$. Často v praxi počítáme s jeho převrácenou hodnotou

$$1/\kappa = E / (3 - 6\mu) = K = \text{modul stlačitelnosti} \dots (51)$$

Příklad: Krystal kubického pyritu má modul pružnosti v tahu $E = 3\,530\,000 \text{ kg/cm}^2$ a Poissonův poměr záporný, $\mu = -1/7$. Jeho modul stlačitelnosti

$$K = E / (3 + 6/7) = 915\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Při natahování se tyčka vyříznutá určitým směrem z pyritu proti všemu očekávání *rozšiřuje* na strany, místo aby se její průřez zužoval. Vykládá se to dvojením krystalů.

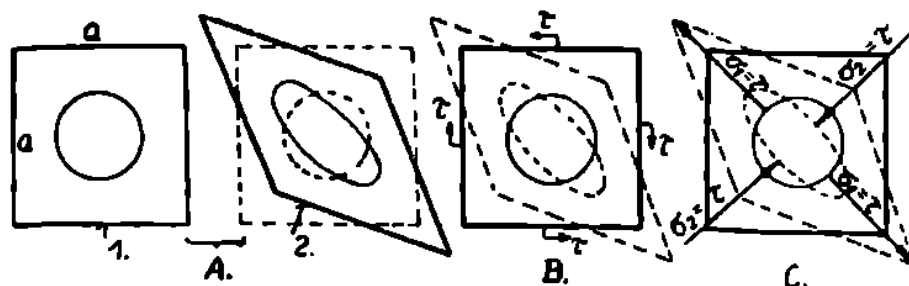
Dosud působila síla P kolmo k průřezu. Může však také působit rovnoběžně s rovinou průřezu, obr. 152. Těleso si před-

stavíme jako sloupek hracích karet. Svislé hrany se pootočí o malý úhel γ , vznikne poměrné posunutí

$$x : l = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = z \cos, \text{ měřený v radiantech} \quad (52)$$

Síla v rovině průřezu v kg, již označíme v tomto případě τ , připadající na 1 cm^2 plochy průřezu F , se jmenuje **smykové napětí** (tečné napětí).

$$\tau = P : F \quad [\tau \text{ b kg/cm}^2, P \text{ v kg, } F \text{ v cm}^2] \quad (53)$$



Obr. 153. Hlavní normální a smyková napětí.

Pokusy ukázaly, že pro malé přetvoření je $z \cos$ úměrný smykovému napětí. Podíl smykového napětí τ a příslušného $z \cos$ γ je pro každý materiál stálý a značí se G .

$$\tau : \gamma = G = \text{modul pružnosti ve smyku v kg/cm}^2 \quad (54)$$

U oceli je např. $G = 850\,000 \text{ kg/cm}^2$, u šedé litiny $G = 380\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Pro materiály, které mají ve všech směrech stejné vlastnosti (které jsou *isotropické*), známe tedy tři konstanty pružnosti: E , G , μ . Jejich vztah je:

$$E = 2 G (1 + \mu); G = E / (2 + 2 \mu) \quad (55)$$

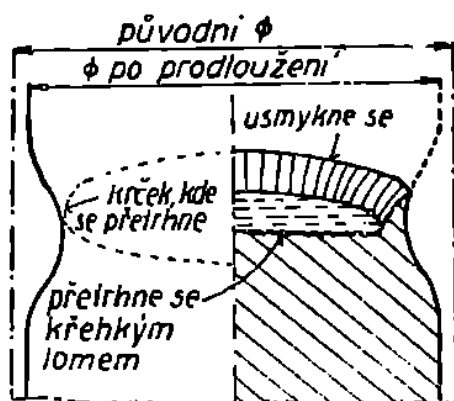
Pro ocel, která má $\mu = 0,3$, je např. $E = 2,6 G$; $G = 0,385 E$.

Chceme-li čtvercovou destičku 1, tlustou 1 cm, obr. 153A, která je např. z kaučuku, přetvořit ve tvar 2, potřebujeme k tomu buď čtyři síly P , rovnoběžné s hranami a , tedy na všech stranách stejná smyková napětí $\tau = P/a$, obr. B, nebo v úhlopříčkách tahové a tlakové normální napětí σ_1 a σ_2 , obr. C, vyvolané tahem a tlakem ve směru úhlopříček. Do směru úhlopříček se skládají vždy dvě a dvě síly P ve výslednice $P \cdot \sqrt{2}$, které stojí kolmo na řez destičkou v úhlopříčce, dlouhý $a \sqrt{2}$ a tlustý 1 cm. Proto jsou normální napětí stejně veliká jako smyková, $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau = P/a$.

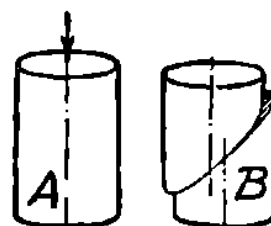
Kružnice nakreslená na destičce se změní v elipsu. Působí-li na těleso jen normální napětí a žádná smyková napětí, říkáme jim *hlavní napětí*.

Hlavní napětí σ_1 , σ_2 mají směr úhlopříček, a jsou proto skloněna o 45° k směru největších smykových napětí. To platí vždycky.

Natahovaný nebo stlačovaný materiál se *poruší* buď kolmo na směr největších normálních napětí, nebo pod úhlem $\pm 45^\circ$,

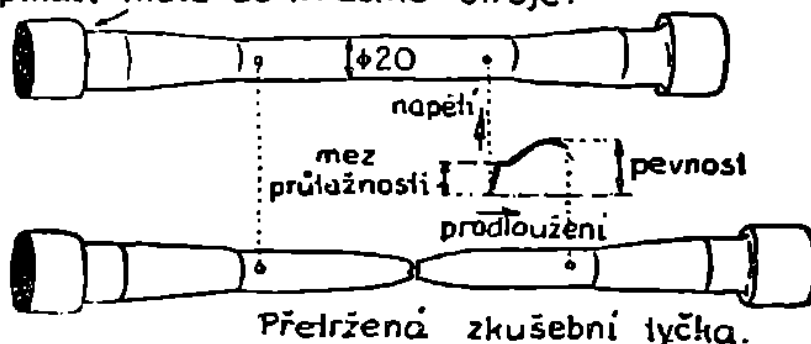


Obr. 154. Přetržení ocelové tyče.



Obr. 155. Porušení tlakem.

upínací hlava do trhacího stroje.



Obr. 156. Zkušební tyč z oceli před přetržením a po přetržení.

rovnoběžně s rovinami největších smykových napětí, obr. 154 až 155.

Pevnost materiálů se zkouší přetržením zkušebních tyčí na trhacím stroji. Tyče mají tvar např. podle obr. 156. Od mezo kluzu (meze pružnosti) materiál teče zastudena, průřez se na některém místě zužuje v krček, až se tyč přetrhne při dosažení napětí na mezi pevnosti σ_P kg/cm², počítanému pro původní průřez tyče, ne pro zúžený.

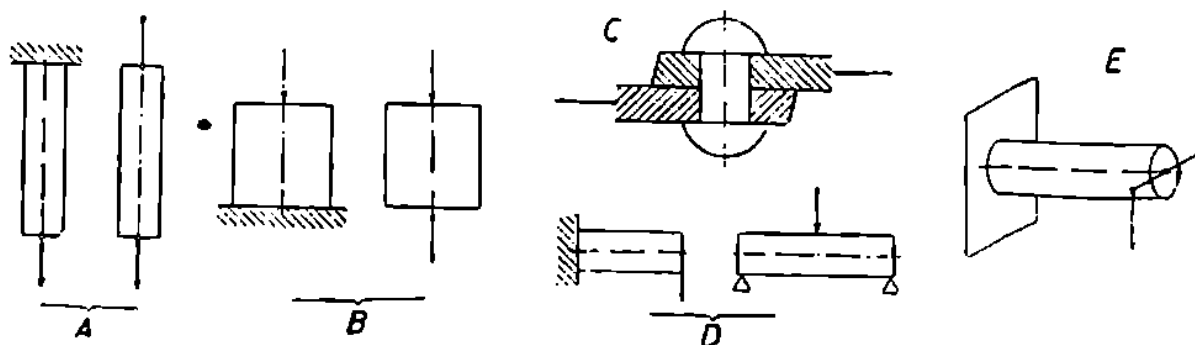
Příklady mezí pevnosti σ_P kg/cm² : ocel 3500 až 20 000, hliník 3000, olovo 200, měď 4000, křemenné sklo 8000. Má-li ocel

pevnost v tahu $\sigma_P = 6000 \text{ kg/cm}^2$, značí to, že by se tyč průřezu 2 cm^2 přetrhla silou $2 \cdot 6000 = 12\,000 \text{ kg}$.

Základní případy prosté pevnosti ukazuje *obr. 157*.

Tah způsobuje síla působící v ose tělesa a kolmo k průřezu (*obr. A*); síla způsobí normální napětí σ a těleso prodlužuje (snaží se je přetrhnout).

Tlak je způsoben silou působící v ose tělesa a kolmo na průřez (*obr. B*); síla způsobí v tělese normální napětí σ a těleso stlačuje (snaží se je rozdrtit).



Obr. 157.

Střih čili *smyk* způsobuje síla působící kolmo na osu tělesa a ležící v průřezu (*obr. C*); síla způsobuje smykové napětí τ a pošunutí průřezů po sobě (snaží se těleso přestříhnout).

Ohyb způsobuje ohybový moment síly, jehož rovina prochází osou tělesa (*obr. D*); ohybový moment způsobí v průřezu normální napětí σ a rovnoběžné průřezy vzájemně naklání (snaží se těleso ohnout a ulomit).

Krut způsobuje dvojice sil v rovině kolmé k ose tělesa (*obr. E*); krouticí moment dvojice sil způsobí v průřezu tělesa smykové napětí τ a rovnoběžné průřezy vzájemně pootočí (snaží se těleso zkroutit nebo ukroutit).

Při výpočtu pevnosti součástí nás zajímá **dovolené namáhání**, to je napětí, které můžeme v praxi u materiálu připustit, aby se neporušil ani trvale nepřetvořil (může se však přetvořit pružně, např. most se pod vlakem prohne, ale opět narovná). Podle toho, jak působí zatížení, rozeznáváme tři případy dovolených namáhání:

I. případ, namáhání *klidné*, síla je stálá.

II. případ, namáhání *proměnlivé*, součást je libovolně zatěžována a odlehčována;

Dovolená namáhání v kilogramech na 1 mm²

Materiál	Ocel obyčejná	Ocel lepší	Litá ocel	Litina obyčejná	Litina lepší	Duralumin kalený
Mez pevnosti v tahu mln : Mez kluzu (průtažnosti)] : :	37 20	50 28	45 22	14 —	26 —	34 22
Dovolená namáhání kg/mm ²						
Tah, k_t ,						
klidný I.	10 — 16	14 — 21	10 — 15	3,5 — 4,5	6,5 — 8,5	11 — 16
proměnlivý II.	8,5 — 9,5	9 — 13,5	6,5 — 9,5	2,7 — 3,7	5 — 6,7	5 — 7
střídavý III.	4,5 — 7	6,5 — 9,5	4,5 — 7	2 — 3	3,5 — 5	3,5 — 5,5
Tlak, k_p ,						
klidný I.	10 — 15	14 — 21	11 — 16,5	8,5 — 11,5	16 — 21,5	11 — 16
proměnlivý II.	6,5 — 9,5	9 — 13,4	7 — 10,5	5,5 — 7,5	10 — 13,5	5 — 7
střídavý III.	4,5 — 7	6,5 — 9,5	4,5 — 7	2 — 3	3,5 — 5	3,5 — 5,5
Ohyb, k_0 ,						
klidný I.	11 — 16,5	15 — 22	11 — 16,5	5 — 7	10 — 13,4	12 — 17,5
proměnlivý II.	7 — 10,5	10 — 15	7 — 10,5	3,5 — 5	6,5 — 9	5 — 7
střídavý III.	6 — 7,5	7 — 10,5	5 — 7,5	2,5 — 3,5	4 — 6	3,5 — 5,5
Kroucení, k_k , (Smyk, k_s)						
klidné I.	6,5 — 9,5	8,5 — 12,5	6,5 — 9,5	4 — 5,5	7,5 — 10	6,5 — 9,5
proměnlivé II.	4 — 6	5,5 — 8,5	4 — 6	3 — 4	5,5 — 7,5	3,2 — 4,8
střídavé III.	3 — 4,5	4 — 6	3 — 4,5	2 — 3	3,5 — 5	2,2 — 3,2

III. případ, namáhání střídavé, síla mění směr (přechází např. z tahu v tlak, ohýbá oběma směry apod.).

Pro tyto tři případy zatížení byla nalezena dovolená namáhání podle připojené tabulky; jsou značena písmenem k a indexem, který udává druh zatížení (tl = tlak, o = ohyb atd.). V první řádce jsou materiály, pod nimi pevnosti, pak meze pružnosti a dovolená namáhání v kg na mm². Abychom dostali hodnoty v kg/cm², musíme čísla z tabulky násobit stem.

Příklad: Lepší ocel má z tabulky pevnost nejméně 50 kg/mm² = 5000 kg/cm². Její mez pružnosti je 28 kg/mm² = 2800 kg/cm². V klidném tahu připustíme dovolené namáhání $k_l = (14 \text{ až } 21) \text{ kg/mm}^2 = 1400 \text{ až } 2100 \text{ kg/cm}^2$ (= 1. případ zatížení).

Při střídavém zatížení tahem a tlakem, III. případ, připustíme jen 6,5 až 9,5 kg/mm² = 650 až 950 kg/cm², tedy méně než polovinu klidného.

Pevnost v tahu]

Obě tyče na obr. 158 jsou z téhož materiálu. Mají čtvercové průřezy; první 6,25 cm², druhá 9 cm². Kolik nese každý cm²?

U levé tyče 6,25 cm² nese 1250 kg čili 1 cm² nese 1250 : 6,25 = 200 kg; u pravé tyče 9 cm² nese 2070 kg čili 1 cm² nese 2070 : 9 = 230 kg. Pravá tyč je o 30 kg na 1 cm² více namáhána než levá. Tahové napětí je v ní 230 kg/cm².

Vždy platí: Tahové napětí σ [kg/cm²] = síla [kg] : plochou průřezu [cm²].

$$\sigma = P/F; P_{dov} = F \cdot k_t$$

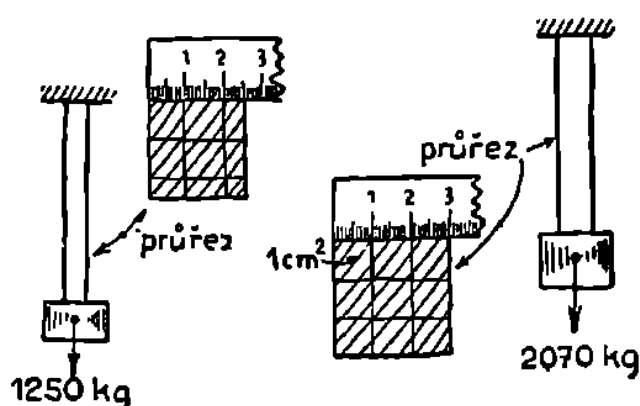
k_t = dovolené namáhání v tahu (též znač. $\sigma_{dov t}$) (56)

Příklady: 1. Dlouhá tyč z oceli, průřezu 4 × 2 cm², nese 5600 kg; jaké je v ní napětí v tahu? Průřez tyče 2 · 4 = 8 cm² = F .

Napětí $\sigma = P : F = 5600 : 8 = 700 \text{ kg/cm}^2$.

Tahové napětí, které by tyč přetrhlo, nazýváme pevnost v tahu. Obvyčejná uhlíková ocel má pevnost v tahu asi 4000 až 7000 kg/cm².

2. Táhlo z duraluminu (je to hliníková slitina používaná hlavně v letectví) má průřez 10 cm². Bude namáháno proměnlivou silou, tahem, který klesá na nulu a opět roste, tedy vlastně kmitá mezi 0 a + hodnotou. Kolik může činit nejvýše tento tah?



Obr. 158. Tyče zatížené tahem.

Z tabulky je dovolené namáhání pro případ II 5 až 7 kg/mm², volíme střední hodnotu

$$k_t = 6 \text{ kg/mm}^2 = 600 \text{ kg/cm}^2. \text{Síla} = \text{napětí} \times \text{průřez.}$$

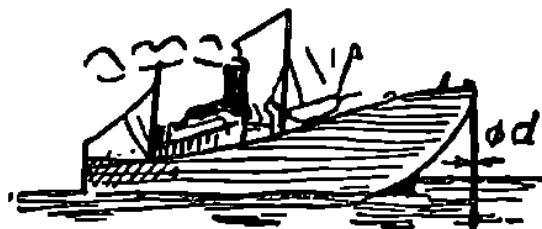
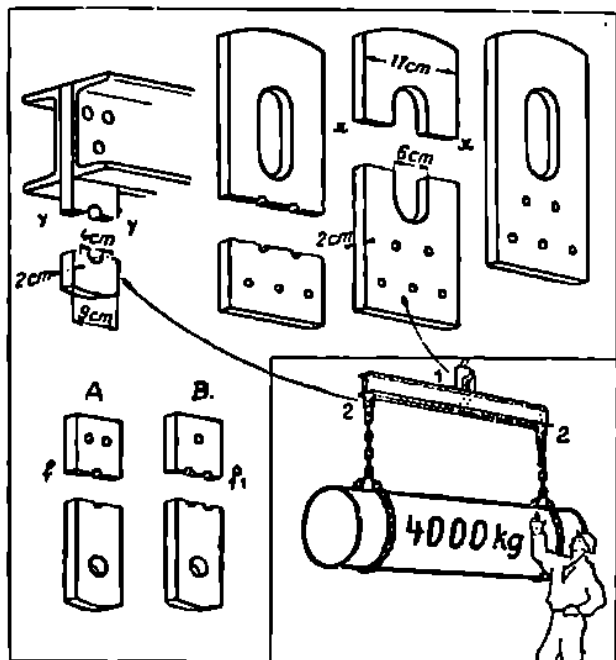
$$P_{dov} = k_t \cdot F = 600 \cdot 10 = 6000 \text{ kg. Táhlo unese 6000 kg.}$$

3. Lidský vlas vyniká pevností nad většinu technických materiálů. Unese průměrně 100 g, má průměr asi 0,05 mm. Průřez $\pi \cdot 0,05^2/4 = 3,14 \cdot 0,0025/4 = 0,002 \text{ mm}^2 = 1/500 \text{ mm}^2$. Z toho plyne, že průřez 1 mm² by unesl váhu $500 \cdot 100 = 50\,000 \text{ gramů} = 50 \text{ kg}$. To je pevnost dobré oceli.

4. Propočteme namáhání závěsů ocelového ingotu, který váží podle obr. 159 4 tuny.

Střední oko pro hák 1 má v nejslabším místě průřez x — x, totiž

$$F = (17 - 6) \cdot 2 = 22 \text{ cm}^2.$$



Obr. 159. Jeřábová traversa nese ingot.

Obr. 160. Měření hloubky moře.

Tahové napětí v tomto průřezu x — x je

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{4000}{22} = 182 \text{ kg/cm}^2.$$

To není příliš mnoho, protože plochá ocel, z níž je oko uděláno, má pevnost v tahu aspoň 4000 kg/cm².

Dále kontrolujeme pevnost závěsů 2, z nichž každý nese 2 tuny. V nejslabším místě y — y je průřez $F = (9 - 4) \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2$. Napětí v tomto průřezu y — y je

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{2000}{10} = 200 \text{ kg/cm}^2.$$

Ani zde není závěs přetížen. Je také důležité, jak jsou rozloženy nýty spojující závěsy s U-železy traversy. Jedna díra dole a dvě nad ní podle obr. A je výhodnější než dvě díry dole podle obr. B. Jednou dírou je závěs méně zeslaben, průřez f je větší než f_1 .

5. Měření hloubky moře. V některých místech je moře hluboké asi 11 km = 11 000 m. Olovnice pro měření mořské hloubky je zavěšena na měděném lanku, které považujeme pro výpočet za plný kruhový průřez průměru d cm, obr. 160. Ve vodě váží 1 cm³ mědi asi 8 gramů.

Lanko dlouhé 11 km váží

$$0,785 \cdot d^2 \cdot 11\,000 \cdot 8 = 6\,900\,000 \cdot d^2 \text{ gramů.}$$

Kdyby mělo průměr jen 3 mm = 0,3 cm, vážilo by $6\,900\,000 \cdot 0,3^3 = 620\,000$ g, to je 620 kg.

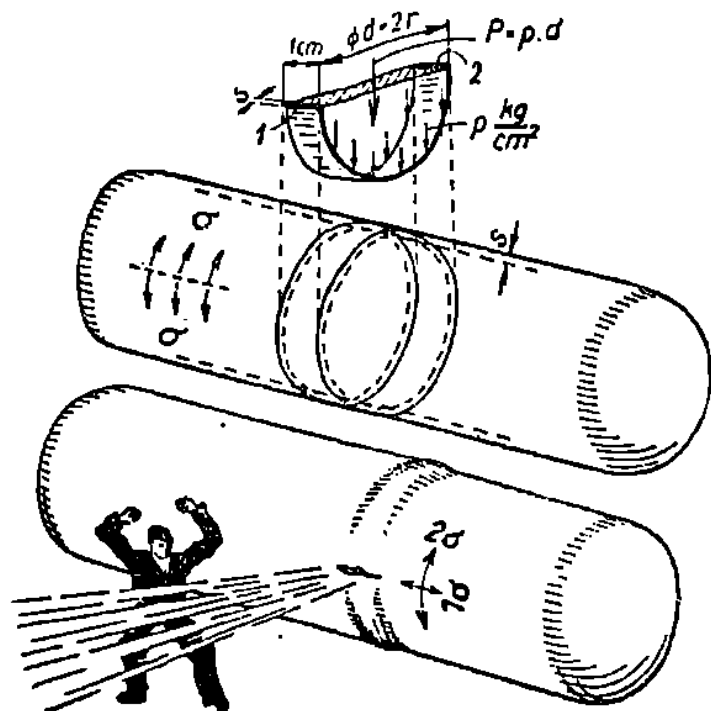
Měď má pevnost v tahu asi 4000 kg/cm², lanko by uneslo tah $0,785 \cdot 0,3^3 \cdot 4000 = 283$ kg.

Vidíme, že zde nemůžeme použít měděného lana, protože by neuneslo ani vlastní váhu, 620 kg. Hloubka mořského dna se měří zvláštními lany z oceli slité se vzácnějšími kovy (niklem, chromem), aby lano nerezavělo.

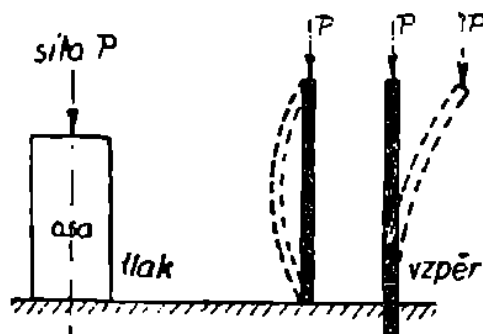
Aby se zmenšila jeho váha, průměr se ke konci zeslabuje.

6. V kotli je vnitřní přetlak p kg/cm², obr. 161. Na proužek široký 1 cm, vyříznutý ze stěny, tlačí zevnitř síla $P = p d$ kg. Proti přetržení drží proužek dva průřezy 1 a 2, tedy plocha průřezu $F = 2 \cdot s \cdot 1 = 2s$ cm². Napětí ve stěně kotle

$$\sigma = P/F = p d / 2s = p r / s \text{ kg/cm}^2$$



Obr. 161. Výpočet stěny tlakové nádoby.



Obr. 161a. Tlak a vzpěr.

Má-li např. stlačený vzduch v kotli přetlak $p = 12$ kg/cm², poloměr kotle je $r = 63$ cm a stěna je tlustá $s = 1,6$ cm, je napětí ve stěně $\sigma = p r / s = 12 \cdot 63 / 1,6 = 472,5$ kg/cm². Dovolené namáhání kotlového plechu se volí např. až 900 kg/cm², kotel tedy není přetížen.

7. Plynojem má průměr $d = 7200$ cm. Je z plechu 3 mm tlustého, $s = 0,3$ cm. Svítiplyn má tlak 9 cm vodního sloupce, to je 0,009 kg/cm², protože 10 m vodního sloupce značí tlak 1 kg/cm²; 1 m vod. sl. vyvolá tlak 0,1 kg/cm²; 1 cm vodního sloupce vyvolá tlak 0,001 kg/cm².

Jak je namáhána stěna plynojemů?

$$\text{Napětí ve stěně } \sigma = \frac{p r}{s} = \frac{0,009 \cdot 3600}{0,3} = 1908 \text{ kg/cm}^2$$

Z toho vidíme, že ani u velkého plynojemů (průměr 72 metrů) není stěna příliš přetížena, ač je jen 3 mm tlustá.

Pevnost v tlaku

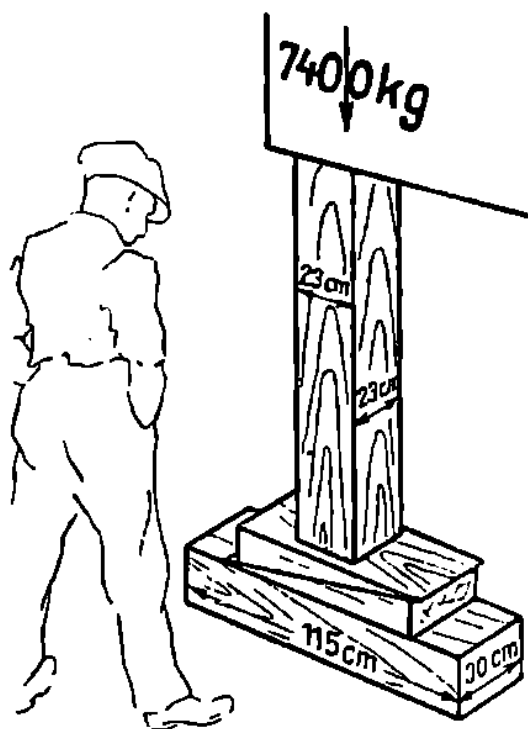
Na prostý tlak můžeme počítat jen krátké silné části, u nichž působí obtížení v ose, a proto se nebudou ohýbat. Tenké dlouhé tyče namáhané tlakem musíme počítat na vzpěr. Takový vý-

počet je už složitější a nebudeme jej zde probírat (obr. 161a). Pevnost v tlaku počítáme podobně jako v tahu:

Tlakové napětí σ [kg/cm²] = síla [kg] : plochou průřezu [cm²]

$$\sigma = P/F; P_{dov} = F \cdot k_{tl}$$

k_{tl} = dovolené namáhání v tlaku (též znač. σ_{dov}) (57)



Obr. 162. Dřevěný sloupek.

Příklady: 1. Váleček z kalené chromové oceli měl průměr 1,2 cm a výšku také 1,2 cm. Byl postaven na jedno čelo a na zkušebním stroji zatěžován. Rozdrtil se silou $P = 53\,900$ kg.

Průřez (= plocha kruhu o průměru 1,2 cm) je $F = \pi d^2/4 = 3,14 \cdot 1,2^2/4 = 1,13$ cm².

Pevnost v tlaku = síla : průřezem = $53\,900 : 1,13 = 47\,700$ kg/cm².

2. Eiffelova věž v Paříži, postavená před 60 lety podle 12 000 výkresů a statického výpočtu. vysoká 300 m, váží 9 milionů kg. Její základy mají plochu 450 m². Tlakové napětí mezi základy a zemí = tlak na 1 cm² je

$\sigma = P : F = 9\,000\,000 : 4\,500\,000 = 2$ kg/cm².

Měrný tlak 2 kg/cm² nepřesahuje napětí, jímž tlačí základy obytného domu na zem. Dobrá půda se může zatížit 3 až 5 kg/cm². K zachycení tlaku 1000 kg by stačila plocha asi

$F = P : \sigma = 1000 : 3 = 333$ cm².

3. Dřevěný sloupek podle obr. 162 nese tlak 7400 kg. Máme propočítat jeho pevnost.

Průřez sloupku je $F = 23 \cdot 23 = 529$ cm².

Tlakové napětí $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{7400}{529} = 14$ kg/cm².

U jehličnatého dřeva připouštíme ve směru vláken dovolené namáhání v tlaku k_{tl} až 80 kg/cm². Sloupek tedy není přetížen.

Podložka dosedá na zem plochou $F = 115 \times 30 = 3450$ cm². Mezi zemí a podložkou vznikne tlakové napětí

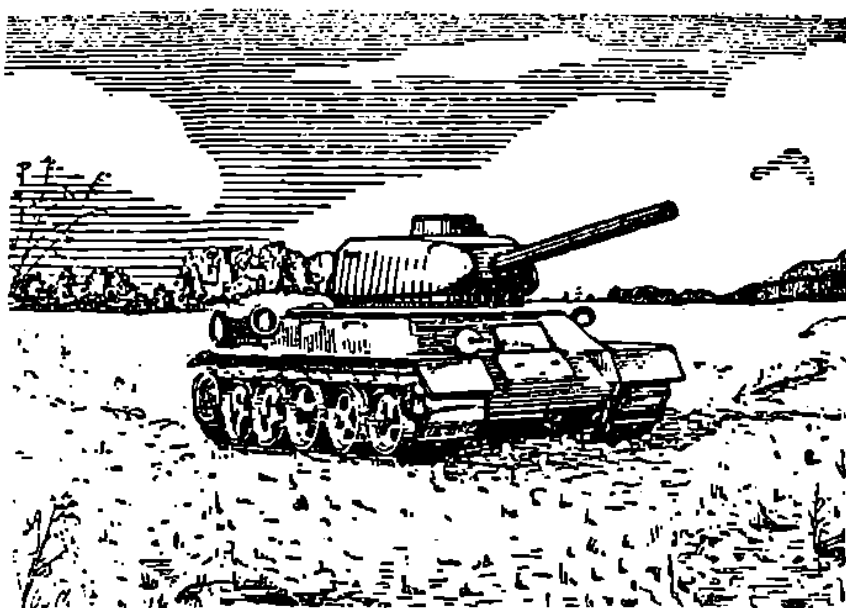
$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{7400}{3450} = 2,14$ kg/cm²,

menší než dovolené namáhání ulehle půdy (3 až 5 kg/cm²).

4. Tank váží $Q = 40$ t, obr. 163. Plocha jeho pásů je $F = 16$ m². Měrný tlak mezi pásy a půdou je $\sigma = P/F = 40\,000/160\,000 = 0,25$ kg/cm², více než desetkrát menší než je dovolené namáhání půdy. Dospělý člověk má plochu chodidel asi 450 cm², váží-li 70 kg, je měrný tlak chodidel $70/450 =$

$= 0,156 \text{ kg/cm}^2$. Dosedací plocha lyží je asi $40 \text{ dm}^2 = 4000 \text{ cm}^2$, měrný tlak mezi lyžemi a sněhem je asi $70/4000 = 0,0175 \text{ kg/cm}^2$.

5. *Proč nerostou obrovské stromy?* Na tuto otázku můžeme odpovědět jednoduchým výpočtem. Kdyby vzrostly rozměry stromu 100krát, vzrostl by objem 100³krát, tj. milionkrát. Průřez však by se zvětšil jen



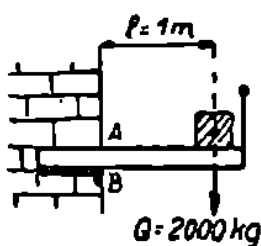
Obr. 163.

100²krát, tedy 10 000krát. Každý čtvereční cm průřezu by nesl 100krát větší zatížení jen vlastní vahou stromu než před tím. Jistě by to nevydržel, protože pevnost dřeva by se celkem nezměnila.

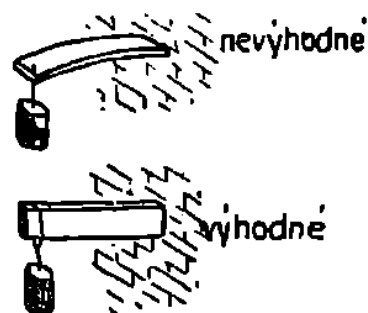
Stéblo rýže, vysoké 150 cm, je 500krát delší, než je jeho průměr. Bambus vysoký 30 m je už jen 130krát delší než jeho průměr. Nejvyšší borovice, vysoká 40 m, je asi 40krát delší než průměr kmene. Obrovský australský blahovičník (eucalyptus), vysoký 130 m, je jen 28krát vyšší, než je průměr kmene.

Pevnost v ohybu

Trám je jedním koncem vetknut ve zdi, obr. 164. Ve vzdálenosti 1 m



Obr. 164.

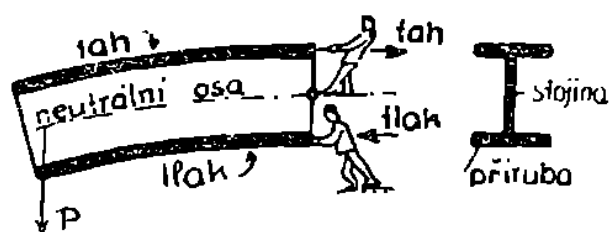


Obr. 165.

od zdi nese břemeno 2000 kg. Kdyby byl trám tenký, příliš se prohne a nakonec by se ulomil v místě A u vetknutí; při ohybu nezáleží jen na velikosti průřezu, nýbrž hlavně na tom, jak je materiál průřezu rozložen, obr. 165. Největší napětí jsou v krajních vláknech, proto se dělají nosiče průřezu I, aby bylo nahoře a dole co nejvíce materiálu, obr. 166.

Čím dále od vetknutí leží břemeno, tím větší má ohybový účinek. Nosník se poruší tím dřív, čím větší je břemeno Q a rameno břemena l ; součinu $Q \cdot l$ říkáme ohybový moment; $M = Q l$.

Příklad: Oba trámy na obr. 167 jsou stejné, z téhož materiálu. Který je víc namáhán? Ten, u něhož je větší ohybový moment.



Obr. 166.

Trám A: $M = 600 \text{ kg} \times 175 \text{ cm} = 105\,000 \text{ kgcm}$ (kilogramcentimetrů).

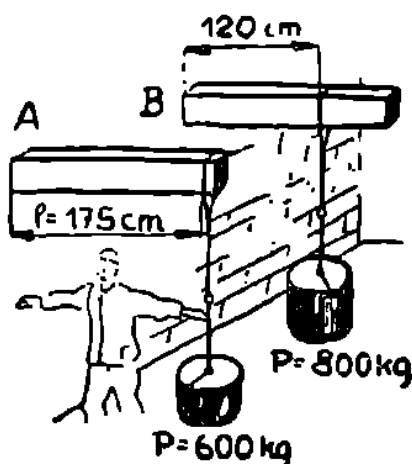
Trám B: $M = 800 \text{ kg} \times 120 \text{ cm} = 96\,000 \text{ kgcm}$.

Ohybový moment na trám A je větší, proto je tento trám více namáhán, ač nese menší břemeno. Síla však působí na delším ramenu.

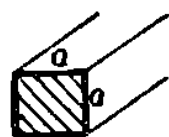
Pevnost v ohybu počítáme ze vzorce

$$M_{dov} = W \cdot k_0 \quad (58)$$

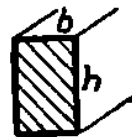
M_{dov} = dovolený ohybový moment v nebezpečném průřezu



Obr. 167.



$$W = \frac{a^3}{3}$$



$$W = \frac{bh^2}{6}$$



$$W = \frac{d^3}{10}$$

Obr. 168. Vzorce pro výpočet průřezových modulů W .

zu, tj. tam, kde by nosník praskl, v kgcm; W = průřezový modul nazývaný též moment odporu, jehož velikost záleží na rozměrech a tvaru průřezu nosníku, v cm^3 , např. podle obr. 168; k_0 = dovolené namáhání v ohybu v kg/cm^2 , značené též σ_{dov} .

Příklad: 1. Jaké namáhání vzniká v nosníku, obr. 169? Nejvíce jsou namáhána krajní vlákna těsně u vetknutí. Ohybový moment

$$M = Ql = 400 \text{ kg} \times 90 \text{ cm} = 36\,000 \text{ kgcm}.$$

$$\text{Moment odporu } W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 18^2 = 540 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Napětí } k_0 = M : W = 36\,000 : 540 = 66,7 \text{ kg/cm}^2.$$

V tabulkách bychom našli, že dřevo má pevnost v ohybu $\sigma_P = 500 \text{ kg/cm}^2$. Je tedy napětí $500 : 66,7 = 7,5$ krát menší než pevnost. Říkáme, že počítáme s bezpečností 7,5. Nosník by začal praskat v krajních vláknech při obtížení $400 \cdot 7,5 = 3000 \text{ kg}$ na stejném ramenu l .

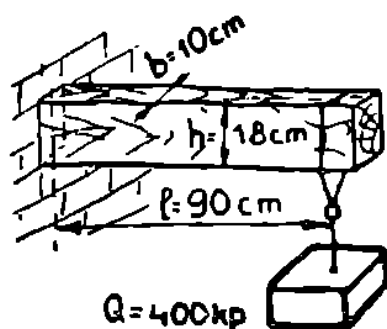
2. Kolik se může zavěsit na kruhovou tyč podle *obr. 170*? Tyč je z obyčejné oceli, která snáší podle dříve uvedené tabulky při klidném zatížení dovolené napětí v ohybu $k_0 = 11$ až $16,5 \text{ kg/mm}^2$; volíme nejnižší mez 1100 kg/cm^2 .

Ohybový moment $M = Ql = Q \cdot 110 \text{ kgcm}$.

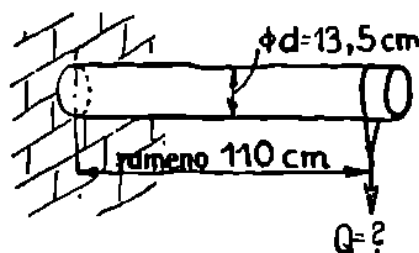
Moment odporu $W = 0,1 \cdot d^3 = 0,1 \cdot 13,5^3 = 246 \text{ cm}^3$. Dosadíme do ohybové rovnice

$$M = Q \cdot 110 = W \cdot k_0 = 246 \cdot 1100 \text{ kgcm}.$$

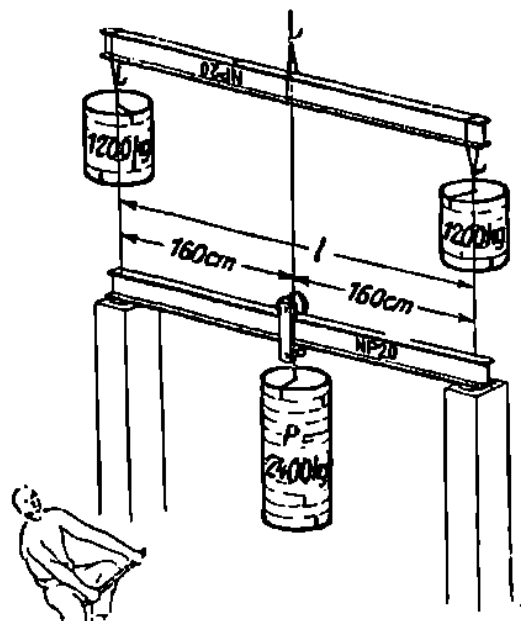
Z toho břemeno $Q = 246 \cdot 1100 : 110 = 246 \cdot 10 = 2460 \text{ kg}$.



Obr. 169.



Obr. 170.



Obr. 171.

Na konec tyče můžeme zavěsit břemeno 2460 kg , aby byla v krajních vláknech napětí $k_0 = 1100 \text{ kg/cm}^2$.

3. Je-li nosník opřen na koncích a zatížen uprostřed, *obr. 171*, je namáhán jako tyč, kterou chceme o koleno zlomit. Pro výpočet jsou to tedy dva vetknuté nosníky uprostřed spojené. Je jedno, visí-li tento nosník za střed a má poloviční břemena na koncích (horní obr.) nebo je-li na koncích opřen a dvojnásobné břemeno je uprostřed.

Ohybový moment M je v obou případech

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot 2} = \frac{Pl}{4} = \frac{2400 \cdot 320}{4} = 192\,000 \text{ kgcm}.$$

Na nosníku je vyražena značka NP 20. To znamená „Normální profil 20“. Z tabulek profilů najdeme, že tento profil má moment odporu $W = 214 \text{ cm}^3$. Ohybové napětí v nosníku je tedy

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{192\,000}{214} = 897 \text{ kg/cm}^2.$$

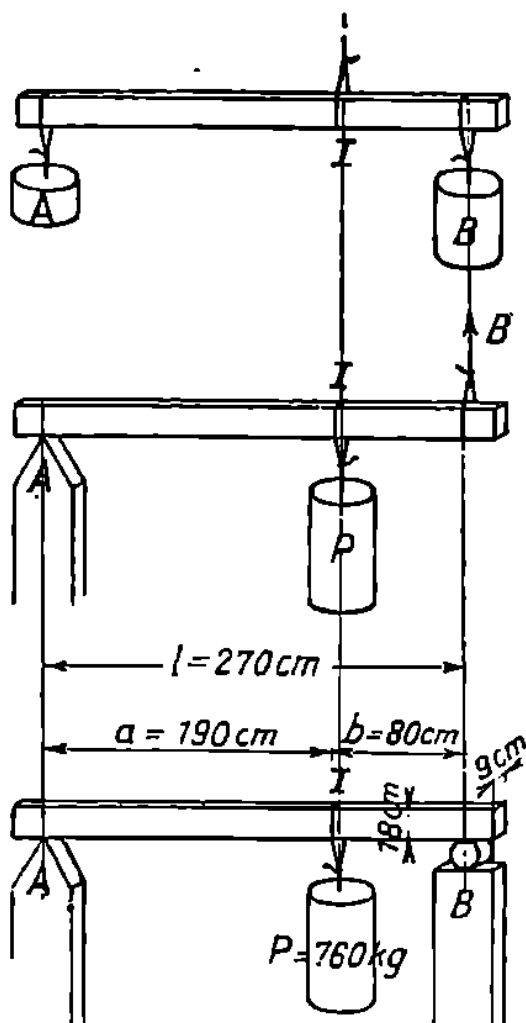
U válcovaných ocelových nosníků je dovolené napětí až 1400 kg/cm^2 . Není tedy tento nosník břemenem $2,4$ tuny přetížen.

4. Není-li břemeno P uprostřed nosníku, *obr. 172*, nese v tomto případě pravá podpora větší jeho část B . Levá podpora nese část břemena A . Silám A, B říkáme též podporové reakce.

$A + B = P$ (váhu nosníku jsme zanedbali).

K určení velikosti B nahradíme pravou podporu závěsem (střední *obr.*). Vznikne tím páka opřená v A . Z rovnováhy momentů sil na páce

$$B \cdot l = P \cdot a; B = P \frac{a}{l}; \text{podobně } A = P \frac{b}{l}.$$



Obr. 172.

Víme už z předešlého příkladu, že si nosník převádíme na dva vetknuté nosníky v P spojené, zatížené silami A, B na koncích. Ohybové momenty na obou jsou stejné.

$$M = B \cdot b = A \cdot a$$

Dosadíme do tohoto vzorce místo B výraz $P \cdot a/l$:

$$M = P \frac{a}{l} \cdot b = P \frac{a b}{l}.$$

Kdyby bylo břemeno uprostřed, je $a = b = 0,5 \cdot l$, a $M = P \cdot l^2/4 l = Pl/4$ jako v předchozím.

V našem případě (*spodní obr.*)

$$M = P \frac{ab}{l} = 760 \frac{190 \cdot 80}{270} = 42\,800 \text{ kgcm.}$$

$$\text{Moment odporu obdélníku } W = \frac{bh^3}{6} = \frac{9 \cdot 18^3}{6} = 486 \text{ cm}^3.$$

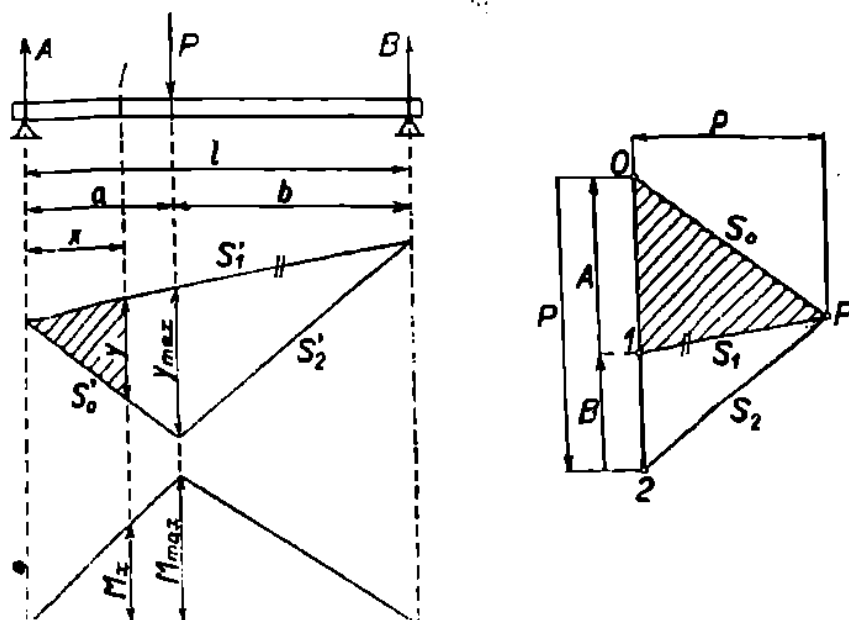
Ohybové napětí $\sigma = M : W = 42\,800 : 486 = 88 \text{ kg/cm}^2$. Toto napětí je u dřevěných trámů dovoleno.

5. Grafické řešení nosníku na dvou podporách, zatíženého osamělou silou P , *obr. 173*.

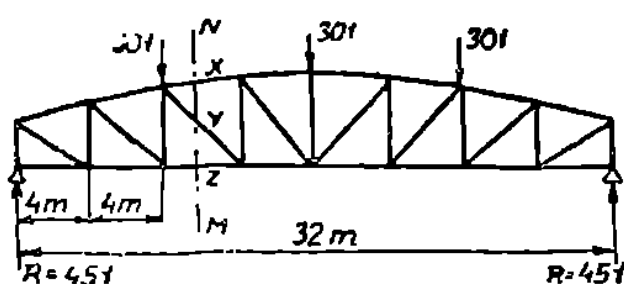
Graficky se určí reakce rozložením síly P ve dvě rovnoběžné složky za pomoci silového (složkového) a vláknového obrazce; velikosti reakcí určuje v silovém obrazci pólový paprsek S_1 , rovnoběžný se závěrnou stranou vláknového obrazce S_1' .

Ohybový moment. Síla P namáhá nosník ohybem; ohybový moment v libovolném průřezu se rovná algebraickému součtu momentů všech vnějších sil a reakcí, které působí po jedné straně příslušného průřezu; zpravidla volíme tu stranu, kde je méně sil. V *obr. 173* je ohybový moment v průřezu I , přihlížíme-li k silám na levé straně průřezu, $M_x = Ax$. Z podobnosti trojúhelníků ve vláknovém a silovém (pólovém) obrazci plyne $y : x = A : p$, z čehož ohybový moment $Ax = py$. Protože $p = \text{konst.}$ jsou ohybové momenty $M_x = Ax$ úměrné pořadnicím y ve vláknovém obrazci; udávají tudíž pořadnice y ve vláknovém obrazci průběh ohybových mo-

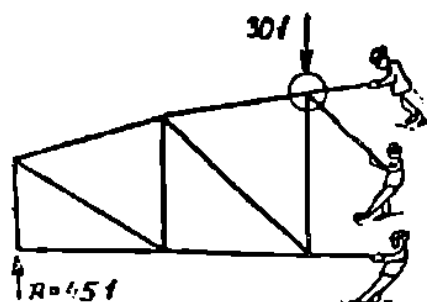
mentů v celé délce nosníku v určitém měřítku. Proto se vláknový obrazec nazývá též *momentový obrazec*. Z vláknového obrazce plyne, že největší ohybový moment je pod silou P , $M_{max} = Aa = Bb$. Jsou-li délky naneseny v měřítku $1 \text{ cm} = a \text{ m}$ a síly v měřítku $1 \text{ cm} = b \text{ kg}$ a je-li pólová vzdálenost $p \text{ cm}$, je měřítko pro ohybové momenty (pořadnice y) ve vláknovém



Obr. 173.



Obr. 174.



Obr. 175.

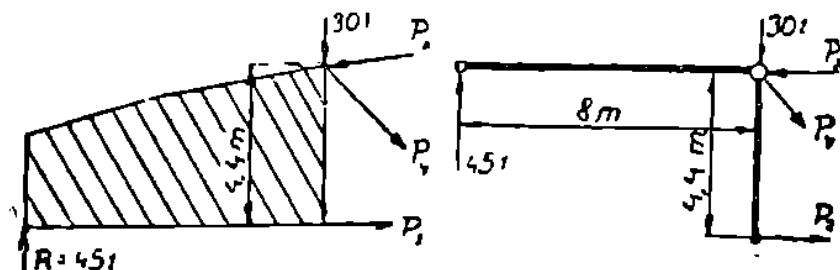
obrazci $1 \text{ cm} = pab \text{ kgm}$. Momentový obrazec možno též sestavit ve zvoleném měřítku nezávisle na vláknovém obrazci; tu se volí osa úseček vodorovná.

6. *Prutové soustavy* jsou tuhé soustavy z tyčí (prutů), které jsou navzájem spojeny (klouby nebo i pevně); taková soustava těles se nazývá *příhradový nosník*. Na příhradový nosník působí vně zatěžovací síly a reakce podpor (vnější síly), v tyčích (prutech) působí vnitřní síly; vnitřní síly v prutech se navzájem ruší, takže se pro rovnováhu sil na nosníku přihlíží pouze k silám vnějším (zatěžujícím a reakcím). V každém jednotlivém kloubu musí být v rovnováze síly vnitřní s vnějšími. Nepůsobí-li na prut žádná vnější síla, shoduje se směr vnitřní síly se spojnicí kloubů.

Máme určit, jakou sílu přenáší prut označený z na mostním nosníku obr. 174. Nosník nese tři břemena po 30 t. Protože je zatížen souměrně, jsou reakce v obou podporách $R = 45 \text{ t}$.

Představme si most, který je v rovině $N - M$ přeříznut. Aby levá část nespadla, přidržují ji tři muži (v každém prutu jeden) podle *obr. 175*. Dva táhnou, třetí tlačí.

Podle *obr. 176* si část nosníku převedeme na jediný kus tvořící páku. Síly 30 t, P_x , P_y tlačí do otočného bodu, nepotřebujeme o nich uvažovat (nepůsobí na žádném ramenu). Zbývá reakce $R = 45$ t na ramenu 8 m a síla $P_z = ?$ t na ramenu 4,4 m.

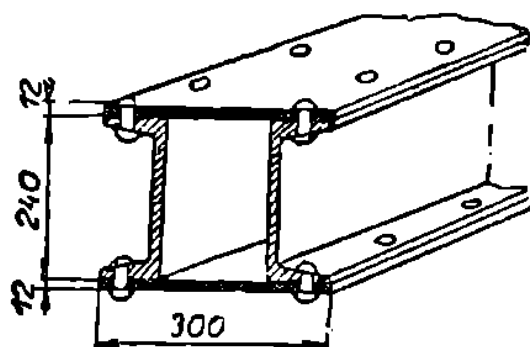


Obr. 176.

Moment reakce = $R \times \text{rameno} = 45 \cdot 8 = 360$ tun. metry. Je roven momentu síly P_z , to je $P_z \cdot 4,4$ m, aby byla rovnováha, tj. most byl v klidu.

Z toho $P_z = 360 : 4,4 = 82$ t = 82 000 kg.

Tím jsme zjistili, že v prutu z působí tah 82 tun. Tento prut je vytvořen



Obr. 177.

ze dvou profilů U , spojených nýtováním plechy 12 mm tlustými podle *obr. 177*. Celkový průřez obou nosníků a plechů, po odečtení nýtových otvorů je 106 čtverečních centimetrů. Na 1 cm^2 připadá síla:

$$82\,000 : 106 = 770 \text{ kg,}$$

čili 7,7 kg/mm^2 .

V dříve uvedené tabulce dovolených namáhání najdeme, že obyčejná ocel snáší na tah proměnlivé obtížení 6,5 až 9,5 kg/mm^2 . Není tedy prut přetížen, most dobře vyhoví.

Pevnost ve smyku

V přibližném výpočtu se předpokládá, že napětí, při kterém se materiál přestříhne (a tím se vlákna posunou proti sobě) rozdělí se rovnoměrně po průřezu, čili platí:

Smykové napětí τ [kg/cm^2] = síla [kg] : plochou průřezu [cm^2].

$$\tau = P/F; P_{\text{dov}} = F \cdot k_s$$

k_s = dovolené namáhání ve smyku (též znač. $\tau_{\text{dov } s}$) (59)

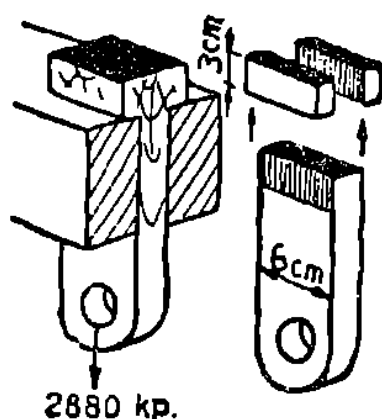
Příklady: 1. U závěsu z bukového dřeva, *obr. 178*, se ustříhla hlava na ploše $F = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$ zatížením $P = 2880 \text{ kg}$. Střední smykové napětí (mez pevnosti ve smyku) bylo

$$\tau = P/F = 2880/36 = 80 \text{ kg/cm}^2 \text{ ve směru podél vláken.}$$

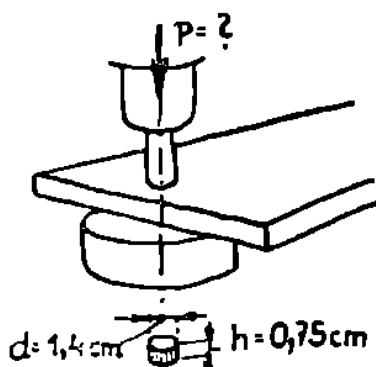
2. Jakou silou se prostříhne v plechu tlustém $0,75 \text{ cm}$ díra o průměru $1,4 \text{ cm}$, *obr. 179*? Stříhaná ocel má pevnost ve smyku 3500 kg/cm^2 . Průřez, na kterém se materiál stříhá,

$$F = \pi d h = 3,14 \cdot 1,4 \cdot 0,75 = 3,3 \text{ cm}^2.$$

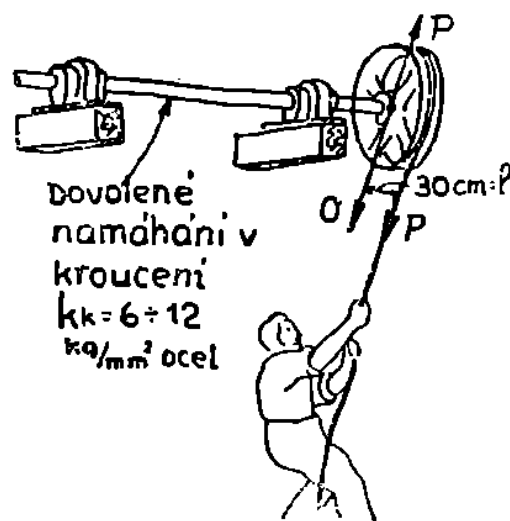
$$\text{Síla } P = F \cdot \tau = 3,3 \cdot 3500 = 11\,600 \text{ kg} = 11,6 \text{ tun.}$$



Obr. 178.



Obr. 179.



Obr. 180. Kruh hřídele.

Pevnost v krutu

Krouticí moment $M_k = P \cdot l = (\text{síla}) \times (\text{rameno})$ zkrucuje podle *obr. 180* hřídel. Největší smykové napětí, které tím vzniká na obvodu hřídele, počítáme ze vzorce

$$\boxed{\tau = M_k : W_k; M_{kdov} = W_k \cdot k_k} \quad (60)$$

τ je smykové napětí v kg/cm^2 ; M_k je krouticí moment v kgcm , W_k je průřezový modul v krutu, který je např. u kruhového průřezu $W_k = 0,2 d^3$, je-li d průměr, u čtvercového průřezu $W_k = 0,21 a^3$, je-li a hrana, cm^3 ; k_k je dovolené namáhání v krutu v kg/cm^2 , značená také $\tau_{dov k}$.

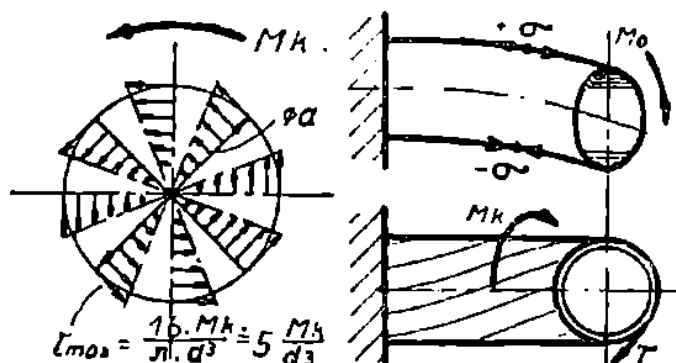
Nejlépe krutu vzdorují uzavřené, např. duté profily, jako trubky apod. Na ohyb unese trubka málo, protože má malý průřezový modul W ; unese však velký krouticí moment, protože má nejvíce materiálu průřezu u obvodu a tam je také největší smykové napětí τ , *obr. 181*.

Hřídel dlouhý l [cm] se zkroutí o úhel φ rad [radiantů]; $\varphi^\circ = 57,3 \cdot \varphi_{\text{rad}}$.

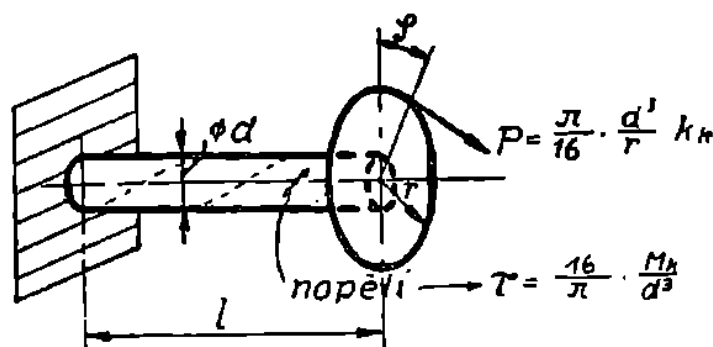
$$\varphi_{\text{rad}} = \frac{2 l \tau}{G d} = \frac{32 l M_k}{\pi d^4 G} \quad \dots \dots \dots (61)$$

G je modul pružnosti ve smyku v kg/cm^2 , d je průměr hřídele v cm.

Příklady: 1. Táhne-li muž na obr. 180 za lano silou $P = 40$ kg, vytvoří kroutilý moment $M_k = Pl = 40 \text{ kg} \cdot 30 \text{ cm} = 1200 \text{ kgcm}$.



Obr. 181-2. Ohýbaná a kroucená trubka.



Obr. 183.

Hřídel průměru $d = 5$ cm má průřezový modul v krutu $W_k = 0,2 d^3 = 0,2 \cdot 5^3 = 25 \text{ cm}^3$. Napětí na obvodu hřídele

$\tau = M_k/W_k = 1200/25 = 48 \text{ kg/cm}^2$. Dovolené namáhání ocelových hřídelů v krutu je $k_k = 550$ až 850 kg/cm^2 .

2. Na konci hřídele je kolo průměru 1,2 m, na jehož obvodě působí tah (např. tah řemene, tlak v zubech aj.) 2 t, obr. 183. Kroutilý moment $M_k = 2000 \cdot 60 = 120\,000 \text{ kgcm}$.

Hřídel má průměr $d = 10$ cm a je dlouhý $l = 500$ cm. Hledáme jeho namáhání a úhel zkroutení. Modul $G = 830\,000 \text{ kg/cm}^2$. Smykové napětí

$\tau = M_k/W_k = 120\,000/(0,2 \cdot 10^3) = 610 \text{ kg/cm}^2$.

Úhel zkroutení v obloukové míře $\varphi_{\text{rad}} = 2 l \tau / G d = 2 \cdot 500 \cdot 610 / (830\,000 \cdot 10) = 0,0735 \text{ rad}$, tj. $0,0735 \cdot 57,3 = 4,2^\circ$.

HYDROMECHANIKA A AEROMECHANIKA

Mechaniku kapalin a plynů studujeme najednou. Až do rychlosti 70 m/s můžeme např. vzduch i v přesnějších výpočtech považovat za nestlačitelnou kapalinu. Teprve když se plyny stlačují, a tím stoupá jejich teplota, studujeme jejich vlastnosti odděleně v nauce o teple.

Slovo tekutina v mechanice znamená skutečnou kapalinu nebo plyn. Dříve se některým plynům říkalo *pára*. Dnes nečiníme mezi plynem a párou rozdíl, název „pára“ se udržel u vodní páry. V technice je sice také běžný název „vodní plyn“,

to však je název hořlavého plynu vyráběného v generátorech vháněním vzduchu a vodní páry do žhavého koksu.

Pára je plyn blízko bodu zkapalnění. Každý plyn dnes umíme zkapalnit. Tekutý vzduch není zvláštností, podobá se vzhledem mléku.

Hydromechanika a aeromechanika jsou nauky příliš obsáhlé. Proto je nemůžeme v celé šíři nastudovat z této malé knížky. Poznáme zde jen některé hlavní pojmy a pak to, co je pro praxi nejcennější: metodu, způsob a postup řešení úloh z tohoto oboru. Prostě se seznámíme s některými novými technickými výrazy a myšlenkami (jejich objevení trvalo tisíciletí, i když se nám nyní zdají zřejmé a jednoduché) a s pracovním stylem, jak jich využít k řešení praktických úloh.

Tato knížka je psána pro ty, kteří se zajímají o vědění a rádi by získali základní návod k technickému myšlení. Právě proto, že zde pracujeme s pojmy novými a je nutno užívat nových slov k jejich vysvětlení, zdají se některé části výkladu suchopárné a nudné. Oživí je jen upřímný zájem čtenáře a důkazy (příklady), jak užitečné jsou tyto věci v praxi.

Napětí (tlak) v kapalině

Plyny se mohou po určitém ochlazení stlačit tak, že se změní v kapalinu. Samo stlačení nestačí. Kapaliny se velmi těžce stlačují. Tlakem 5000 kg na každý cm^2 povrchu se zmenší objem stlačované vody o 0,5 %. Proto voda rozmačká např. střelu z vojenské pušky, která se do ní strelí.

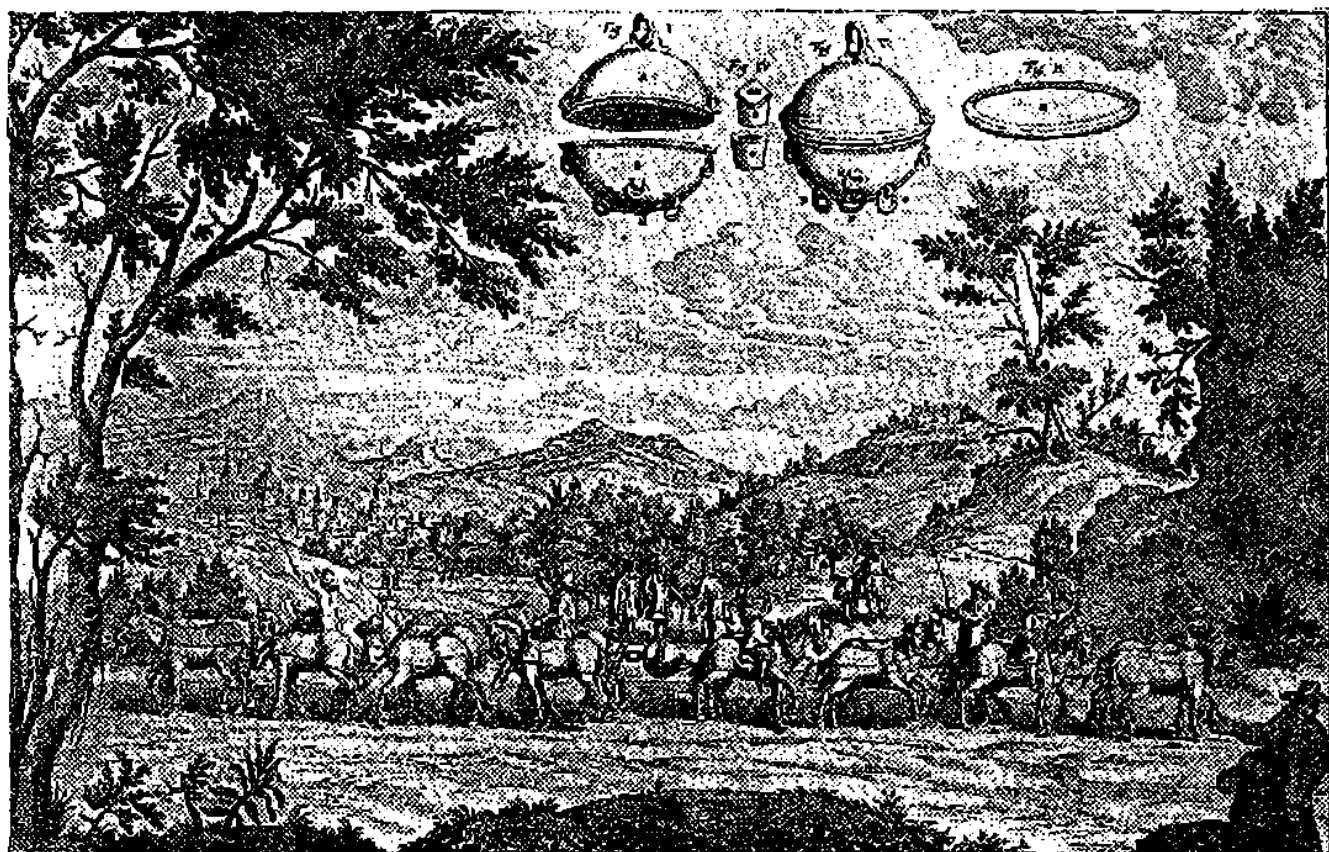
Napětí je tlak na plošnou jednotku. Nejčastěji se určuje v kg na 1 centimetr čtvereční.

Napětí 1 kg na $\text{cm}^2 = 1 \text{ kg/cm}^2 = 1$ technická atmosféra = 1 at.

Stejné napětí vytvoří 10 m vysoká vrstva vody nebo 735,5 mm vysoká vrstva rtuti při 0° Celsia a při zrychlení tíže $g \doteq 9,81 \text{ m/s}^2$. Také vzduch tlačí přibližně tlakem 1 at na všechny předměty.

Proto také barometr slavného Pascala (1623 až 1662), který ukazoval tlak vzduchu trubicí naplněnou vodou, byl pořádně veliký.

Nad tím se zamyslete: na každý cm^2 povrchu těla tlačí vzduch tlakem asi 1 kg, tedy jen na plochu dlaně tlakem přes 100 kg. Jak je možné, že tlak necítíme? Nejsme vzduchotěsní, neboť jinak by nás tato obrovská síla rozdrtila. Celé naše tělo je



Obr. 184. *Magdeburské polokoule* (obrázek z r. 1654). Starověci i středověcí učenci věřili, že odnese-me-li těleso, odstraníme tím zároveň část prostoru jím zabraného. Považovali za věc naprosto nemožnou, že by se z nádoby mohl vyčerpát vzduch a ještě tam zůstat prostor. Se vzduchem se měl vytáhnout i prostor, stěny nádoby měly srůst v jednu. (Purkmistr Guericke měl těžký život. Roku 1631 jeho město dobyla císařská vojska. Charváti přelezli hradby u Labe, zatím co konšelové na radnici rokovali, má-li se město vzdát či ne. Když pak vnikli do města ostatní císařští, nastalo hrozné plenění a vraždění. Zahynulo mnoho tisíc lidí, mužů, žen i dětí. Do večera město úplně vyhořelo, Guericke byl napřed vysvěcený do košile honěn po ulicích, potom ho vyhnali z města.)

prostoupěno vzduchem nebo kapalinami, které tlačí proti vnějšímu tlaku.

Stroje k vyčerpávání vzduchu se jmenují *vývěvy*. Vytvářejí téměř vzduchoprázdný prostor, vakuum. Takový prostor je v žárovkách, elektronkách.

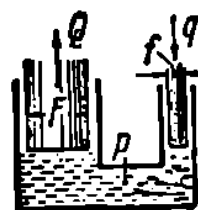
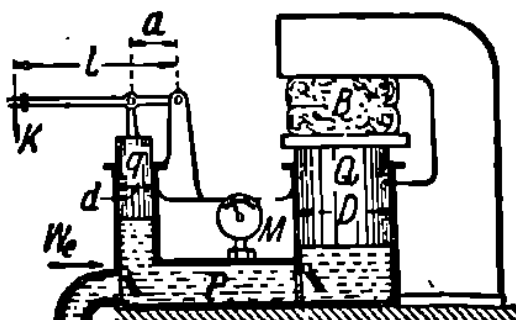
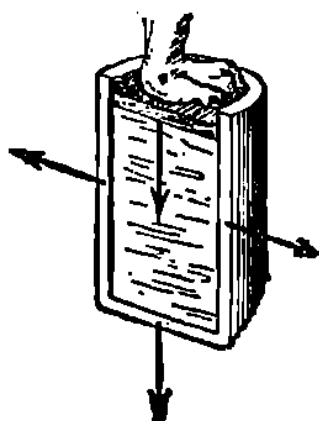
Vývěvu vymyslel magdeburský purkmistr Otto Guericke (1602—1686). Provedl také pokus s dutými polokoulemi, které měly průměr 42 cm. Po vyčerpání vzduchu byly k sobě tlačeny silou

$$0,785 \cdot d^3 \cdot p = 0,785 \cdot 42^3 \cdot 1 = 1400 \text{ kg.}$$

Z každé strany muselo být zapřaženo osm koní, aby polokoule odtrhli od sebe, obr. 184.

Můžeme říkat, že žijeme na dně vzdušného oceánu, jako různí živočichové žijí na dně moří. Protože se voda horními vrstvami stlačí jen nepatrně, roste tlak rovnoměrně s hloubkou. Na každý metr hloubky vzroste tlak asi o 0,1 at. V hloubce 40 m je tlak vody 4 at.

Vzduch je naopak horními vrstvami velmi značně stlačen; 5,4 kilometru nad zemským povrchem už klesne hustota vzduchu asi na polovinu, ve výši 11 km na čtvrtinu.



Obr. 185. Tlak kapaliny.

Obr. 186. Schéma ručního hydraulického lisu.

V tekutinách se tlak šíří všemi směry, vždy kolmo k stěně nádoby, v níž tekutiny jsou. Napětí plynů je však jiného původu než napětí vyvolané kapalinou.

Kapalina tlačí na stěnu buď svou váhou, nebo přenáší na všechny strany napětí, které tlačí na její povrch, obr. 185. Plyny tlačí na stěnu nárazy molekul, které se teplem rozkmitaly a malými úderky bubnují na stěnu. Molekuly kapalin se sice ohřátím také rozkmitají, ale na napětí to nemá přímý vliv.

Napětí měřené od nuly se jmenuje „absolutní“. Absolutní atmosféra = ata. Ovzduší má tlak asi 1 ata. Je-li v kotli napětí 10 ata, je rozdíl proti ovzduší jen 9 atmosfér. Říkáme, že přetlak je 9 atp.

Příklad: Hydraulický lis, obr. 186, využívá šíření tlaku v kapalině všemi směry. Pákovým převodem tlačíme na malý píst silou q , velký píst vyvine tlak Q . Napětí tlakového oleje $p = q/f = Q/F$, čili $Q : q = F : f$.

Tlačíme-li na páku ručního čerpadla silou K , platí:

$$K \cdot l = q \cdot a = 0,785 \cdot d^2 \cdot p; \quad Q = 0,785 \cdot D^2 \cdot p = K \cdot l/a \cdot D^2/d^2.$$

Síla na páce je např. $K = 20$ kg; délky ramen jsou v poměru $l : a = 8$. Plochy pístů jsou v poměru $D : d = 6$. Tlak lisu

$$Q = 20 \cdot 8 \cdot 6^2 = 5760 \text{ kg}.$$

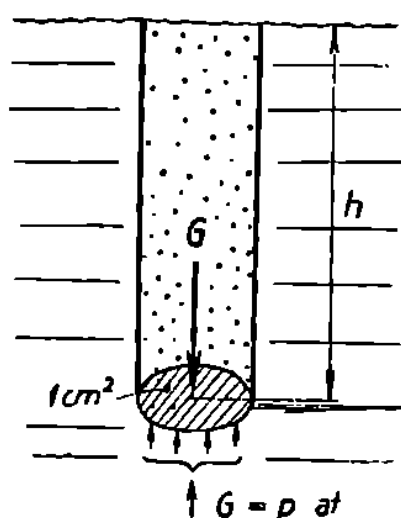
Hydrostatický tlak v kapalině

Oddělíme si pod hladinou myšlený válec tekutiny, sahající do hloubky h , *obr. 187*. Válec má průřez 1 cm^2 , váží G kg. Aby „nespadl dolů“, musí být podpírán také silou G . Protože síla G působí na 1 cm^2 , je to vlastně napětí p v at.

Válec má objem $O = \text{základna} \times \text{výška} = 1 \text{ cm}^2 \times h = h$. Jeho váha je objem $\times$ specifická váha vody $= O \times \gamma = h \times \gamma = p$.

Tím jsme našli důležitý vzorec

$$p = h \cdot \gamma, \text{ kg/cm}^2 \text{ (tedy at)} \quad \dots \dots \dots (62)$$



Obr. 187.

Specifická (měrná) váha γ (= řecké písmeno gamma) je váha 1 dm^3 v kg. Vzorec praví: v hloubce h je v kapalině napětí $p = h \cdot \gamma$. Říkáme mu *hydrostatický tlak*.

Čistá voda má $\gamma = 1 \text{ kg/dm}^3$, v hloubce $20 \text{ m} = 200 \text{ dm}$ by v ní bylo napětí $p = 200 \text{ kg/dm}^2 = 2 \text{ at}$.

Mořská voda má měrnou váhu $\gamma = 1,1 \text{ kg/dm}^3$ (je zahuštěna solemi). V hloubce $h = 2000 \text{ m} = 20\,000 \text{ dm}$ je v ní napětí

$$p = h \cdot \gamma = 20\,000 \cdot 1,1 = 22\,000 \text{ kg/dm}^2 = 220 \text{ at}.$$

Jak je možné, že křehké ryby vydrží tlaky, které by rozmačkaly ocelovou ponorku? Je to tím, že nejsou vodotěsné jako ponorka. Voda jimi proniká i zevnitř, ve všech směrech působí na tkáň ryby stejný tlak. Když takovou rybu vylovíme z veliké hloubky, nemá někdy tlaková voda dost času, aby pomalu vyběhla propustnými blanami a tkáněmi rybího těla. Ryba se nadme a roztrhá, vybuchne.

Lovci perel v Tichomoří se potápějí až do hloubky 20 m . Tam je tlak vody 2 at . Protože má lidské tělo povrch asi $14\,000 \text{ cm}^2$, působí na ně v hloubce 20 m tlak $2 \cdot 14\,000 = 28\,000 \text{ kg}$.

Je to až neuvěřitelné, jak může člověk takový tlak vydržet. Škodí to ovšem zdraví potápěčů.

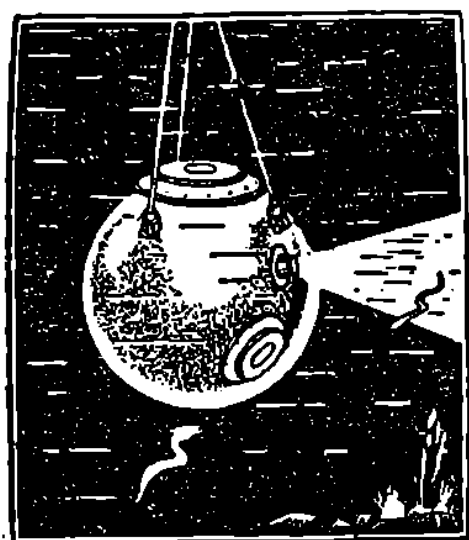
V ocelových koulích s okénky (bathysférách) bylo již dosaženo v moři hloubky přes 900 m , *obr. 188*.

Tlak na vodorovné dno, jehož plocha je F , je

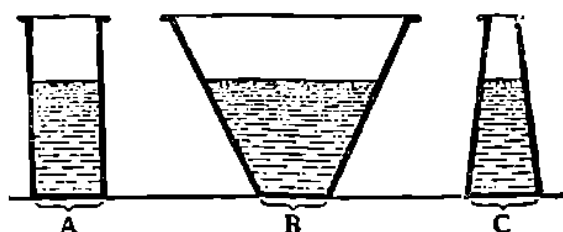
$$\boxed{Q = F \cdot h \cdot \gamma} \quad (63)$$

Hydrostatický tlak v tekutině nemá určitý směr, na každou plochu působí kolmo. Plochy stejného hydrostatického tlaku jsou hladiny. Nulovou hladinou je povrch kapaliny.

Ze vzorce pro výpočet hydrostatického tlaku plyne na pohled neuvěřitelná věc: napětí, a tím i tlak pod hladinou nezáleží na množství tekutiny, nýbrž jen na výšce hladiny. Nezáleží na tvaru nádoby ani na množství vody v nádobě. U nádoby, v níž



Obr. 188. Bathysféra.



Obr. 189. Tlaky na dna nádob jsou stejné, jsou-li stejná dna.

jsou jen 2 l vody, je tlak na dno stejný jako u nádoby, v níž je 15 litrů vody, pokud mají obě nádoby stejně veliká dna. To se zdálo neuvěřitelné, proto se tento jev jmenuje *hydrostatické paradoxon* (Pascal), obr. 189.

Příklad 1. Do moře spadl nabitý revolver a padl do hloubky 4000 m. Tam náhlý rák zavřel kohoutek a vyšla rána. Co se stalo? Vyletěla vůbec střela z hlavy?

Hlava je dlouhá 32 cm. Má vrtání 7 mm. Střela váží na vzduchu 16 g.

Při výstřelu na vzduchu by střela vyletěla z hlavní rychlostí 270 m/s.

V hloubce 4 km je napětí vody

$$p = h \cdot \gamma = 10\,000 \cdot 1,1 = 11\,000 \text{ kg/dm}^3 \approx 440 \text{ at.}$$

Hledáme nyní, jaké je napětí plynů při výstřelu a zda toto napětí stačí, aby překonalo napětí vody, 440 at.

Rychlost střely $v = 270 \text{ m/s}$, dráha v hlavní $s = 0,22 \text{ m}$. Ze vzorce (8) je zrychlení při výstřelu

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{270^2}{2 \cdot 0,22} = 165\,000 \text{ m/s}^2.$$

Síla, působící na střelu, je $P = m \cdot a = \frac{G}{g} \cdot a = \frac{0,0071}{9,8} \cdot 165\,000 = 118 \text{ kg}$.

Průřez hlavně je $F = 0,785 d^2 = 0,785 \cdot 0,7^2 = 0,385 \text{ cm}^2$. Napětí plynů $p = P : F = 118 : 0,385 = 307 \text{ kg/cm}^2$.

Tlak plynů při výstřelu ve chvíli, kdy střela opouští hlaveň, je jen 307 at. Voda tlačí napětím 440 at. Střela by proto při výstřelu ani nevylétla z hlavně.

2. V ponorce, která se potopila do hloubky $h = 120 \text{ m}$, je poklop na průřezu průměru $d = 0,4 \text{ m}$. Jakou silou by musela posádka tlačít na poklop, aby jej otevřela?

Hydrostatický tlak $Q = Fh\gamma = 0,785 \cdot 0,4^2 \cdot 120 \cdot 1000 = 15\,100 \text{ kg}$. Vidíme, že je nemožné, aby posádka poklop otevřela tlakem přes 15 tun, ani by člověk nesnesl tlak vody v tak veliké hloubce. Už v hloubce $h = 1,2 \text{ m}$ pod hladinou by byl tlak k otevření poklopu $Q = 0,785 \cdot 0,4^2 \cdot 1,2 \cdot 1000 = 151 \text{ kg}$.

Vztlak

Kus oceli, potopený ve vodě, je zavěšen na ramenu váhy. Váha ukazuje, že ocel ve vodě váží méně než na vzduchu. Archimedes stanovil už před více než 2000 roky, že těleso ponořené v kapalině je nadlehčováno silou (vztlakem), jež se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Působíště vztlaku splývá s těžištěm kapaliny, která byla dříve na místě ponořeného tělesa.

Příklad: Kámen má objem $V = 10 \text{ dm}^3$. Je-li celý ponořen do vody, vytlačí 10 dm^3 vody, čili vztlak bude 10 kg (1 dm^3 vody váží přibližně 1 kg).

Specifická váha kamene je $\gamma = 2,3 \text{ kg/dm}^3$. Na vzduchu proto váží tento kámen

$$G = V \cdot \gamma = 10 \cdot 2,3 = 23 \text{ kg. Ve vodě váží } 23 - 10 = 13 \text{ kg.}$$

Člověku byla dána přirozená *ochrana před utopením*. Neumí jí však vždy využít. Lidské tělo je o něco lehčí než stejně veliký objem vody. Proto plove samo na povrchu vody. Rovnováha je však velmi přesná, každá částička těla musí vytlačovat vodu. Vztyčí-li tonoucí člověk ruce nad vodu, *obr. 190-A*, nevytlačuje objem rukou vodu, a proto hlava klesne pod hladinu.

Na *obr. C-B* jsou dva způsoby, jak se udržíte nad hladinou vody. Zvláště výhodná je poloha *obr. C*. Silným vdechnutím držíme v plicích co nejvíce vzduchu, hlavu tlačíme dozadu, aby vyčnívala jen část obličeje. Dýcháme opatrně, abychom v hrudníku udržovali co nejvíce vzduchu. K pohybu ve vodě pak stačí malé pohyby, dlaněmi u těla. Tak se můžete začít učit plovat.

Podle vztlaku můžeme měřit objem nepravidelných těles. Součást váží na vzduchu 20 kg, ve vodě 15 kg.

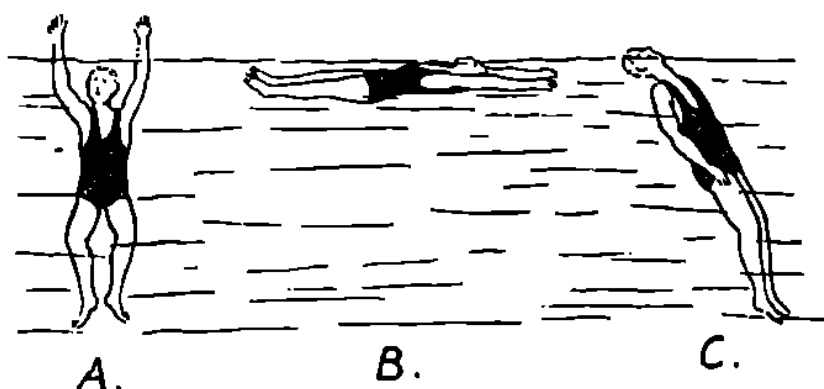
Vztlak = váha vytlačené vody = 5 kg. Její objem je 5 litrů.
Objem tělesa je z toho 5 dm³.

Specifická (měrná) váha $\gamma = \frac{G}{V} = \frac{20}{5} = 4 \text{ kg/dm}^3$.

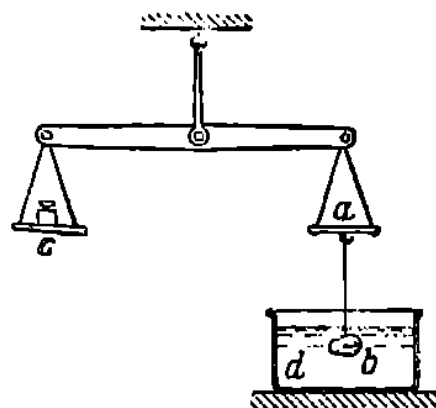
Vážením ve vodě zjistíme měrnou váhu podle obr. 191. Na misku vah *a* zavěsíme těleso, jehož měrnou váhu γ hledáme. Na misku *c* dáme závaží, aby byla váha v rovnováze (na př. 150 g).

Těleso ponoříme celé do vody. Miska *c* klesá. Na *a* přidáváme závaží tak dlouho, až je opět rovnováha (na př. 20 g).

Měrná váha $\gamma = (\text{závaží na } c) : (\text{závaží na } a) = 150 : 20 = 7,5$. Těleso je z litiny, která má $\gamma = 7,5 \text{ kg/dm}^3$. Tak se poznává např. těžké zlato od lehčí napodobeniny.



Obr. 190. Jak se udržíme nad vodou.



Obr. 191.

Vnitřní tření kapalin

Vytahujeme-li z nádoby s kapalinou plechovou desku svisle vzhůru, unáší s sebou deska část kapaliny, tvořící tzv. *mezní vrstvu*. Její tloušťka je dost značná, u vody snadno několik milimetrů. Částičky kapaliny v mezní vrstvě se roztočí, protože se povrch mezní vrstvy na desce pohybuje nejrychleji. K roztočení částic se spotřebuje pohybová energie. Tuto energii musíme vynaložit na vytažení desky z kapaliny čili na překonání vnitřního tření.

Mezi třením tuhých těles a kapalin jsou velmi značné rozdíly.

Tření tuhých těles:

1. Odpor tření málo závisí na rychlosti pohybu, je největší při nejmenší rychlosti.
2. Odpor tření je úměrný tlaku, jímž na sebe plochy doléhají.
3. Odpor tření nezávisí na velikosti třoucí plochy.
4. Odpor tření silně závisí na stavu povrchů, např. na jejich drsnosti.

Tření kapalin:

1. Odpor tření značně závisí na rychlosti pohybu, je nejmenší při velmi malé rychlosti.
2. Odpor tření nezávisí prakticky na tlaku.
3. Odpor tření je úměrný velikosti plochy stýkající se s kapalinou.
4. Při středních rychlostech odpor tření nezávisí na stavu povrchu, který se stýká s kapalinou.

K vyjádření velikosti vnitřního tření kapalin slouží součinitelé viskosity (vazkosti) τ , ν , $^{\circ}E$ aj.

Tečné napětí mezi vrstvami kapaliny, které se proti sobě posouvají, označené τ , je úměrné růstu rychlosti posuvu (spádu) $\Delta v / \Delta y$, je-li Δv rozdíl rychlosti mezi dvěma sousedními vrstvami kapaliny, vzdálenými od sebe o malou délku Δy . Podle Newtona platí

$$\tau = \eta \cdot \Delta v / \Delta y; \eta = \text{dynamická viskozita} \quad (64)$$

$$\nu = \eta / \rho = \eta \cdot g / \gamma; \nu = \text{kinematická viskozita} \quad (65)$$

$\rho = \gamma / g$ = hustota (hmota objemové jednotky) v kgs^2/m ,
 $g = 9,81$ = zrychlení tíže m/s^2 , γ = měrná váha (váha objemové jednotky) v kg/m^3 .

Dynamická viskozita η se měří ve fyzice v *poise* [P] a *centipoise* [cP = P/100]. Technická jednotka $1 \text{ kgs/m}^2 = 98,1 \text{ P}$, čili dynamickou viskozitu v technických jednotkách dostaneme, dělíme-li poise 98,1.

Kinematická viskozita ν se měří ve fyzice ve *stok* [St = cm^2/s] a *centistok* [cSt = St/100]. Technická jednotka kinematické viskosity $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10\,000 \text{ St}$. V praxi se však měří kinematická viskozita i v různých jiných jednotkách, např. ve stupních Englera [$^{\circ}E$]. Přibližně $\nu = 0,0864^{\circ} E - 0,08/^{\circ}E$ [St]. Protože viskozita silně záleží na teplotě (u kapalin s teplotou klesá, u plynů s teplotou roste), musí být vždy uvedeno, při jaké teplotě určitá viskozita platí.

Příklad: Voda má při 20°C měrnou váhu $\gamma = 998 \text{ kg/m}^3$, hustotu $\rho = \gamma / g = \gamma / 9,81 = 101,7 \text{ kgs}^2/\text{m}^4$, dynamickou viskozitu $\eta = 0,000\,102 \text{ kgs/m}^2 = 1 \text{ cP}$, kinematickou viskozitu $\nu = 0,000\,001\,01 \text{ m}^2/\text{s} = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Glycerin má při 20°C $\nu = 971 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Vzduch má při 20°C a tlaku 760 mm sloupce rtuti $\gamma = 1,20 \text{ kg/m}^3$; $\rho = 0,123 \text{ kgs}^2/\text{m}^4$; $\eta = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ kgs/m}^2$; $\nu = 15,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Strojní olej má při 20°C kinematickou viskozitu $\nu = 3,8 \text{ St} = 3,8 \text{ cm}^2/\text{s}$; při 10°C 7,3 St; při 50°C 0,62 St; při 100°C asi 0,1 St.

Ložiskový olej má při 50°C viskozitu 3 až $7^{\circ} E$.

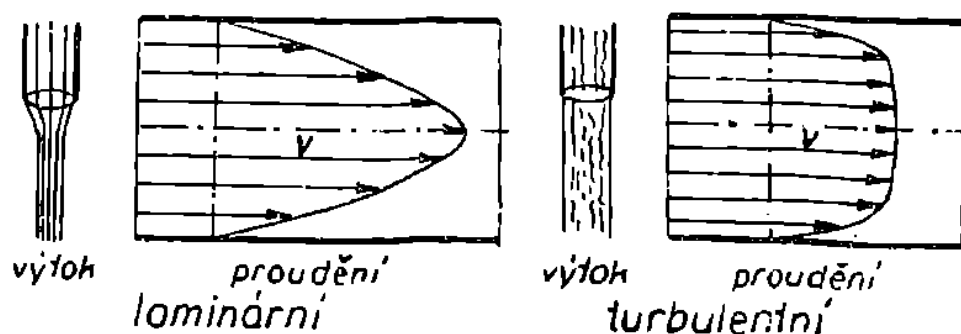
Hydrodynamika

Čára určující směr proudění se jmenuje *proudnice*. Proudí-li kapalina stále stejně (na každém místě je velikost a směr rychlosti stálý), je proudění ustálené čili *stacionární* (z lat. *stare* = státi). To je v praxi nejčastější.

Proudící kousek kapaliny může konat tři pohyby: 1. posuvný, 2. otáčivý, 3. dilatační (při němž se mění tvar částice kapaliny).

Neotáčejí-li se částice kapaliny při proudění, je proudění *potenciální*. Když se částice při pohybu posouvají, otáčejí a ještě se mění jejich tvar, je proudění *vířivé*.

Proti vzájemnému pošnutí částic odporuje kapalina vnitřním třením, čímž se projeví její *viskozita*. Pro zjednodušení byla v teorii zavedena zjednodušená pomyslná *dokonalá kapalina*, v níž není žádné vnitřní tření, je tam možný potenciální pohyb. Dokonalá kapalina klouže podél stěn trubky jako tuhé těleso bez tření. Účinkem tření vzniká ve skutečné kapalině točivý pohyb částic a dvojí druh proudění: *laminární* nebo *turbulentní*.



Obr. 192. *Laminární a turbulentní proudění.*

Laminárně proudí kapalina trubkou ve vrstvách jako se vytahují pouzdra námořního dalekohledu. Částice kapaliny se pohybují ve vlákních rovnoběžných s osou. Barvivo vstříknuté do laminárního proudu vytvoří barevné vlákno. Laminární proudění je však vířivé. Částice kapaliny může mít jednu stranu blíž k ose, kde je pohyb rychlejší. Tím se částice roztočí, vznikají maličké kruhové víry v celém proudu. Při malé rychlosti se laminární proudění udrží. Při větší rychlosti se účinkem vírů vlákna propletou a proudění laminární se změní v proudění turbulentní.

Při *turbulentním* (vířnatém) proudění opisují částice nepravidelné a neurovnané prostorové dráhy. Vstříkne-li se do turbulentního proudu barvivo, zbarví se celý proud.

Až k určité tzv. *kritické rychlosti* proudí kapalina jako vláknitá hmota, laminárně. O určení této rychlosti viz další odd. Reynoldsovo číslo. Překročením kritické průtočné rychlosti nastává proudění turbulentní.

Při laminárním proudění je největší rychlost uprostřed trubice, při turbulentním proudění je rychlost po celém průřezu trubky skoro stejná (podobá se proudění potenciálnímu), obr. 192.

Voda v řekách, vzduch v povětří proudí turbulentně. Laminární proudění je vzácné: teče tak někdy olej, proudí tak kapaliny malými trubičkami a kapaliny velmi husté, jako třeba roztavené sklo nebo krev ve vlasečnicích našeho těla.

Kapiláry (vlasečnice), jimiž proudí v našem těle krev, jsou dlouhé celkem asi 100 000 km (2,5krát obvod Země). U jejich stěn je rychlost krve nulová, v ose je rychlost největší. Při namáhavější svalové práci musí vzrůstat průtočný objem krve. Kapiláry se rozšiřují, dodatečná krev proudí např. z jater.

Turbulencí se kapalina silně vírnatě promíchá, zvětšuje se jí viskozita kapaliny a vnitřní tření. Kapalina vyvinuje šelest, kdežto laminárně proudí kapaliny potichu. Toho využívají lékaři. Na krčních tepnách pozná lékař podle šelestu krve chudokrevnost. Normálně má krev proudit tiše, laminárně, víření krve v cévách má zhoubné následky, vede k trombose. Příkladem turbulentního proudění je vítr, vichřice, sněhové vánice.

Vdechovaný vzduch proudí nosními dutinami laminárně. Má-li někdo rozšířené nosní dutiny, stává se, že vzduch pak proudí jeho nosem turbulentně. Vzniká tím dojem stálého ucpání nosu, cítíme turbulentní odpory.

Při laminárním, stacionárním proudění se určí průtočný objem kapaliny z *Hagen-Poiseuilleho* vzorce

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (66)$$

Q je průtočný objem v m^3 ; r je vnitřní poloměr trubky; η je dynamická viskozita v kgs/m^2 , $p_1 - p_2$ je rozdíl tlaků na obou koncích trubky na délce l , v kg/m^2 ; l je délka trubky v m. Střední rychlost kapaliny v trubkách je pak $v_s = Q/F = Q/\pi r^2$.

Reynoldsovo číslo Re

Reynolds zjistil r. 1883, že turbulentní pohyb kapaliny nastává, překročíme-li kritickou velikost určitého čísla Re , nazvaného *Reynoldsovo číslo*, které je

$$Re = l \cdot v/\nu = l v \rho/\eta = (\text{setrvačné síly}) : (\text{síly vnitřního tření}) \quad (67)$$

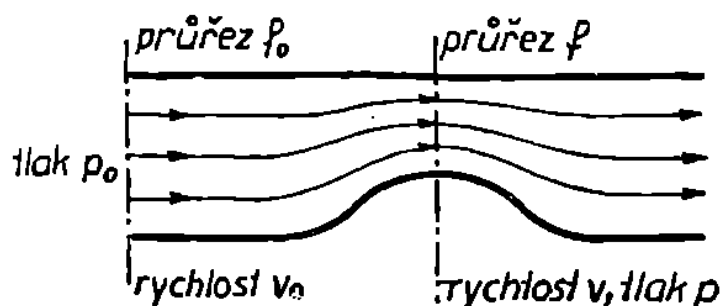
l je nejdůležitější charakteristická délka vyšetřovaného tělesa (jehož vlastnosti studujeme), u trubky např. vnitřní

průměr v m; v je rychlost kapaliny, u trubky např. střední rychlost v_s v m/s; ν je kinematická viskozita v $\text{m}^2/\text{s} = \eta/\rho$.

Kritické hodnoty čísla Re se mohou určit jen pokusně. Např. pro hladké trubky je *krit* $Re = 2320$. Při této hodnotě čísla Re přejde laminární proudění v turbulentní.

Číslo Re má veliký význam při studiu proudění. Umožní pokusy a měření na malých modelech, protože můžeme výsledky přepočítat na skutečné rozměry, zvolíme-li vhodné rychlosti v a hustoty ρ .

U letadel jsou čísla Re násobkem 10^6 , což je velmi nepříjemné. V aerodynamických zkušebních tunelech nevystačíme s malými modely. I když v přetlakovém tunelu zvětšíme hustotu vzduchu desetkrát, dosáhneme tak velikého Re jen



Obr. 193. Průtok zúženým průřezem.

obrovskou rychlostí vzduchu, která se blíží rychlosti zvuku. Pak už vzduch nemůžeme považovat za nestlačitelnou kapalinu, dosavadní úvahy přestávají platit. Proto se stavějí aerodynamické tunely obrovských rozměrů, s dmýchadly poháněnými parními turbinami pro výkony několika set tisíc kW.

Příklady: 1. Ve vzduchovém tunelu se má zkoumat model karosérie automobilu při rychlosti jízdy (tj. rychlosti dmýchaného vzduchu) 108 km/h, tj. 30 m/s. Skutečný automobil je vysoký $l = 1,5$ m, do tunelu se vejde jen model vysoký $l = 1$ m. Jakou rychlostí v_1 musíme hnát proti modelu vzduch, aby byly výsledky měření stejné jako při jízdě skutečného vozu?

Vůz má $Re = lv/\nu = 1,5 \cdot 30/\nu$. Model má $Re_1 = l_1 v_1/\nu = 1 \cdot v_1/\nu$. Je-li $Re = Re_1$, je $1 \cdot v_1 = 30 \cdot 1,5/1 = 45$ m/s. Vzduch se žene rychlostí 45 m/s.

2. Koleno v potrubí klade odpor průtoku vody. Chceme tento odpor změřit tím, že ženeme potrubím vzduch místo vody. Průměr potrubí je $d = 0,1$ m, rychlost vody $v = 2,2$ m/s. Jaká musí být rychlost vzduchu? Kinematická viskozita vody $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6}$, vzduchu $\nu_1 = 15,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (viz str. 140).

$Re = dv/\nu = dv_1/\nu_1$; $0,1 \cdot 2,2/1,01 = 0,1 \cdot v_1/15,1$. Rychlost vzduchu $v_1 = 2,2 \cdot 15,1/1,01 = 33$ m/s.

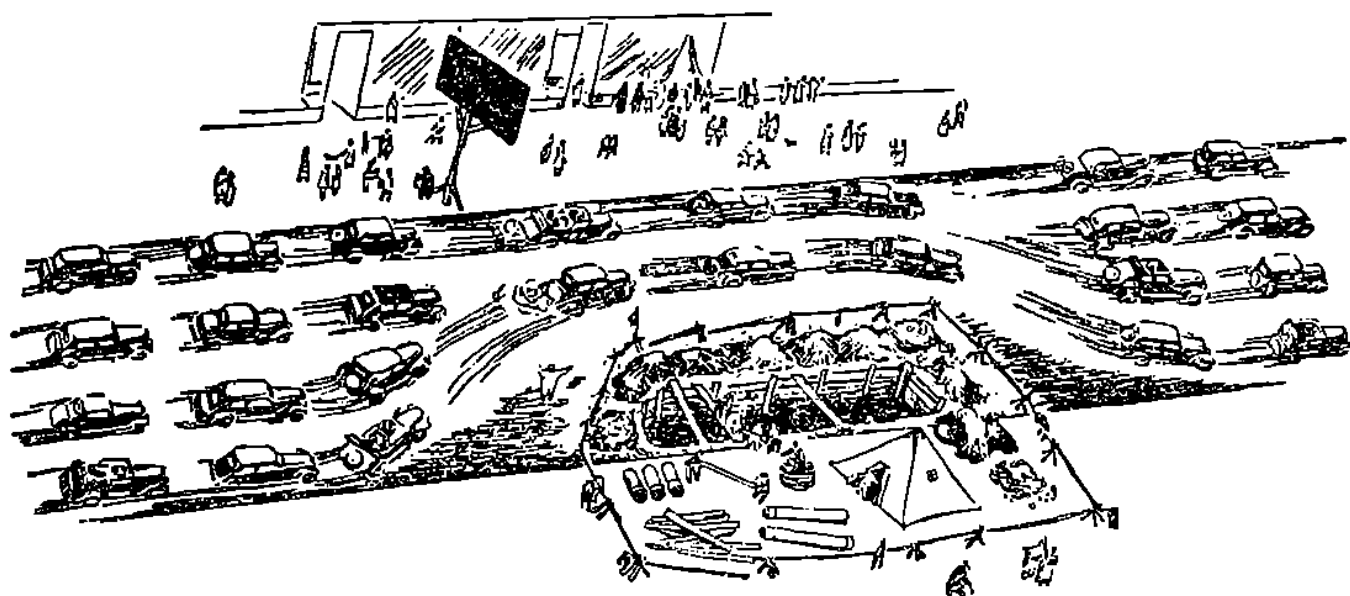
Dynamický tlak (rychlostní výška)

Aby se proud nepřerušil v místě, kde se průřez zužuje (aby byl kontinuální), musí se vo zúženém průřezu vlákna přiblížit k sobě, obr. 193, a kapalina tam musí proudit rychleji, aby

protékalo stále stejné množství. Jsou-li f , f_0 průřezy a v , v_0 rychlosti, musí platit *zákon spojitosti proudu*

$$f \cdot v = f_0 \cdot v_0 = \text{konstanta} \quad (68)$$

Ze zákona o zachování energie je zřejmé, že když roste rychlost, musí klesat tlak, protože do užšího průřezu nepřivádíme žádnou dodatečnou energii, z níž by se vytvořila větší rychlost. Ve zúžení tedy roste rychlost a klesá napětí.



Obr. 194. Ve zúženém průřezu roste rychlost.

Důležitý zákon, že v zúženém průřezu roste rychlost, pochopíme z *obr. 194*. Nemá-li být proud automobilů zpomalen zúžením silnice, musí automobily projíždět užším místem rychleji. Poněvadž se tam vejdou jen dvě řady místo čtyř, musí se rychlost jízdy zdvojnásobit.

Aby vnikla kapalina do zúženého místa (*obr. 193*), musí být zrychlena z v_0 na v . K tomu je třeba vynaložit práci rovnou přírůstku pohybové energie:

$$V \cdot (p_0 - p) = \frac{m (v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{V \cdot \gamma}{2g} (v^2 - v_0^2); \text{ vydělíme}$$

objemem V ; $p + \frac{\gamma v^2}{2g} = p_0 + \frac{\gamma v_0^2}{2g} = \text{konstanta} \quad (69)$

V je protékající objem v m^3 ; m je hmota protékající kapaliny = $V \cdot \gamma/g$, kde γ je měrná váha kapaliny v kg/m^3 , g je zrych-

lení tíže $9,81 \text{ m/s}^2$, $V\gamma$ je protékající váha; p je hydrostatický tlak kapaliny v kg/m^2 .

S tlakem p můžeme počítat jen tlak. Proto říkáme hodnotě $\frac{\gamma v^2}{2g}$ *dynamický tlak* (nebo hodnotě $\frac{v^2}{2g}$ *rychlostní výška*),
 obr. 195.

Hydrostatický tlak p + dynamický tlak p_d = celkový tlak p_1 . Vzorcem to napíšeme:

$$p + \frac{\gamma v^2}{2g} = p_1 \quad (70)$$

Hydrostatický tlak $p = h \cdot \gamma$;
 tlaková výška $h = p/\gamma$.

Dynamický tlak $\gamma v^2/2g =$
 $= p_1 - p$; rychlostní výška $h_d =$
 $= v^2/2g$.

Celkový tlak p_1 ; $h_1 = h + h_d$.
 Pro vzduch $\gamma = 1,226 \text{ kg/m}^3$;
 $\gamma/2g = 1/16$.

Příklady: 1. Zúženou trubici upravenou podle obr. 196 proudí voda. Hledáme tlak p na nejúžším místě.

Kolik vody přitéká, tolik odtéká. Ze vzorce (68) $f \cdot v =$
 $= f_0 \cdot v_0$,

$7,785 \cdot d^3 \cdot v = 0,785 \cdot d_0^3 \cdot v_0$,
 čili $d^3 \cdot v = d_0^3 \cdot v_0$;

Hledané $v = v_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^3 =$
 $= 4 \cdot \left(\frac{20}{14}\right)^3 = 4 \cdot 1,43^3 =$
 $= 4 \cdot 20,4 = 8,16 \text{ m/s}$.

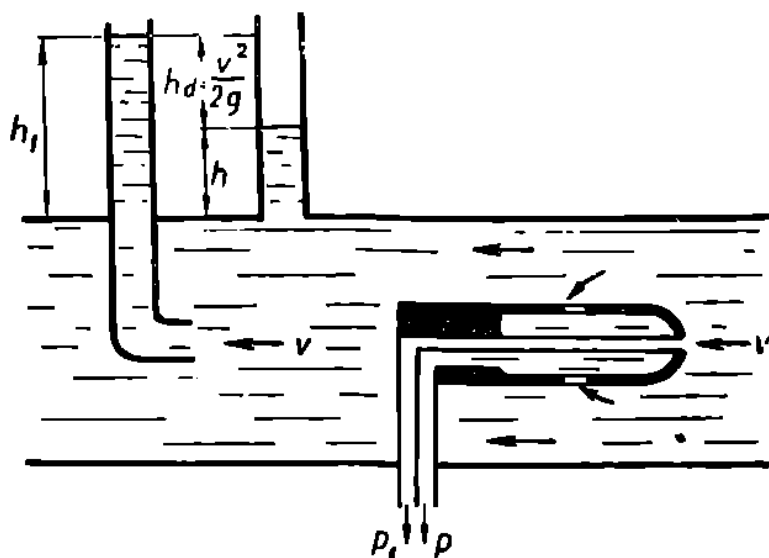
Tím známe také rychlost v na nejúžším místě. Snížení tlaku ze vzorce (69)

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{2g} \cdot (v^2 - v_0^2) = \frac{1000}{2 \cdot 9,8} (8,16^2 - 4^2) = 2570 \text{ kg/m}^2.$$

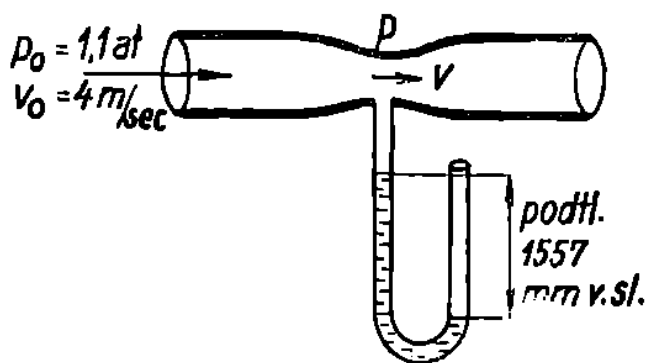
Protože dosazujeme kilogramy a metry, vyjde i napětí (specifický tlak, jemuž tu prostě říkáme tlak) v kg na 1 m^2 . Napětí 1 kg/m^2 vytvoří vodní sloupec vysoký právě 1 mm (protože vrstvička vody 1 mm tlustá na ploše 1 m^2 váží 1 kg).

$1 \text{ kg/m}^2 = 1 \text{ mm}$ vodního sloupce $= 0,0001 \text{ at}$.

Rozdíl tlaků $2570 \text{ kg/m}^2 = 0,257 \text{ at}$.



Obr. 195.



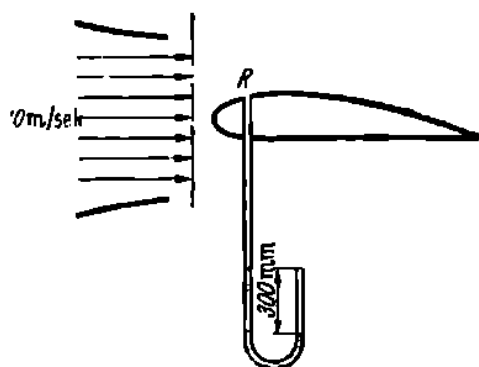
Obr. 196.

Tlak v nejúžším místě $p = 1,1 - 0,257 = 0,843$ at. To značí, že tam je podtlak $1 - 0,843 = 0,157$ at = 1570 mm vod. sl.

2. Podle stejných zákonů, jako jsme počítali proudění vody, můžeme počítat i proudění plynů, např. vzduchu. Rozdíl je jen v měrné váze γ . U vody $\gamma = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$, u vzduchu při teplotě 15°C a tlaku 1,1 at $\gamma = 1,3 \text{ kg/m}^3$ (krychlový metr vzduchu váží 1,3 kg).

Snížení tlaku ve zúženém potrubí

$$p_0 - p = \frac{1,3}{2 \cdot 9,8} (8,15^2 - 4^2) = 3,35 \text{ mm vod. sloupce.}$$



Obr. 197. Měření na profilu křídla.

Je tedy tlak v užším místě $p = 11\,000 - 3,35 = 10\,996,65$ mm vod. sl. Měrná trubička by ukázala ve vzduchu 996,65 mm vod. sl. přetlaku.

3. Ventilátor má dodávat 7200 m^3 vzduchu za hodinu o tlaku 300 mm vodního sloupce. Z praxe víme, že účinnost ventilátorů je asi $\eta = 0,6$. To značí, že 40 % výkonu se v nich ztrácí. Kolik koní potřebuje ventilátor k pohonu?

Výkon ventilátoru v kgm/s dostaneme, násobíme-li objem $V \text{ m}^3/\text{s}$ přetlakem p v kg/m^3 , tj. v mm vod. sloupce. Aby vyšel výkon v koních, dělíme výsledek 75 (1 kůň = 75 kgm/s).

$$N = \frac{V p}{75 \eta} = \frac{2 \cdot 300}{75 \cdot 0,6} = 13,33 \text{ koní.}$$

Objem V jsme určili vydělením $V = 7269 \text{ m}^3 : 3600 \text{ s} = 2 \text{ m}^3/\text{s}$.

4. Voda proudí trubkou průměru $D = 0,1 \text{ m}$ rychlostí $v_1 = 4 \text{ m/s}$. Napříč trubkou prochází čep průměru $d = 30 \text{ mm}$. Jak tím klesá tlak v nejúžším průřezu?

Průřez v nejúžším místě $f_1 = 0,785 \cdot D^2 - d \cdot D = 0,785 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 = 48,5 \text{ cm}^2$.

Průřez trubky $f_2 = 0,785 \cdot 10^2 = 78,5 \text{ cm}^2$.

Ze vzorce spojitosti proudu $f_1 \cdot v_1 = f_2 \cdot v_2$; $v_1 = v_2 \cdot f_2/f_1 = 4 \cdot 78,5/48,5 = 6,47 \text{ m/s}$.

Tlakový pokles v nejúžším místě

$$p = \frac{\gamma}{2g} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1000}{2 \cdot 9,8} (6,47 - 4)^2 = 311 \text{ mm vodního sloupce.}$$

5. Ve vzduchovém tunelu se zkoušelo křídlo letadla podle obr. 197. Na profil se hnál vzduch rychlostí $v = 40 \text{ m/s}$. V místě R byl změřen podtlak 300 mm vodního sloupce = $p_1 - p_2$. Jak velká je tam rychlost vzduchu?

$$p_1 + \gamma/2g \cdot v_1^2 = p_2 + \gamma/2g \cdot v_2^2; \gamma/2g = 1/16. \text{ Z toho}$$

$$v_2 = \sqrt{16(p_1 - p_2) + v_1^2} = \sqrt{16 \cdot 300 + 40^2} = 80 \text{ m/s.}$$

Kavitace

Zužováním prostoru, jímž protéká voda, roste rychlost a klesá tlak vody. Vzduch tlačí na vodu tlakem 1 at, tlakovou výškou $h = 10 \text{ m}$. Při velkém zúžení může úbytek tlaku odpovídat celé tlakové výšce, ve vodě je pak tlak proti ovzduší =

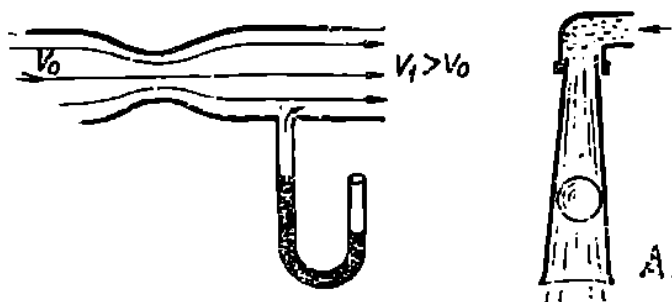
$= 0$. Ve zúženém prostoru vzniká vzduchoprázdňý prostor, vakuum.

V takových místech se velmi rychle odpařují a opět srážejí (kondensují) kapičky vody. Vznikají tím ostré rázy (stoupání a klesání tlaku), trvající sotva miliontinu vteřiny, rychle za sebou. Potrubí, lopatky, stroje se tím velmi rychle ničí. Tomuto jevu říkáme *kavitace*.

Kavitace vzniká někdy ve vodních motorech a je velmi škodlivá.

Venturiho jev

Ve zúžené trubici se proudící kapalina zrychlí. Rozšíří-li se opět trubice, zachová voda získanou energii a zvolna mění rychlost v tlak (Venturiho jev), obr. 198. Proto trubice za zúžením nasává z okolí kapalinu nebo plyn. V technice se toho využívá v četných případech: v *injektorech* k napájení parních kotlů vodou (proud páry nasává vodu a tlačí ji do kotle), u *karburátorů* spalovacích motorů (proud vzduchu nasává mlhovinu paliva), u leteckých rychloměrů aj.



Obr. 198. Venturiho jev. Jeho důkaz jednoduchým pokusem podle obr. A: Ke kohoutku vodovodu připevníme rozšiřující se trubici, v níž je ocelová kulička. Čekali bychom, že voda kuličku vyrazí. Při vhodné rychlosti vody nastává pravý opak. Kulička je nejen držena vodou, ale zřetelnými nárazy tlouče na trubici a střídavě ji zavírá. K tomu je třeba značné energie. Rozšíření průřezu je spojeno s velkými ztrátami energie. Dobrá, řeknete, a co je s tou energií, když tam není žádná kulička? Spotřebuje se na víření vody a vstřebávání vzduchu.

Výtok kapaliny otvorem

Ve dně nádoby je podle obr. 199—200 otvor. Jeho velikost označme f m². Nade dnem stojí kapalina do výšky h m. Víme už, že hydrostatický tlak kapaliny v otvoru je

$$p = \gamma \cdot h,$$

značí-li γ měrnou váhu kapaliny v kg/m³ (u vody $\gamma = 1000$). V prostředí, do něhož kapalina vytéká, je tlak $p_0 = 1$ at.

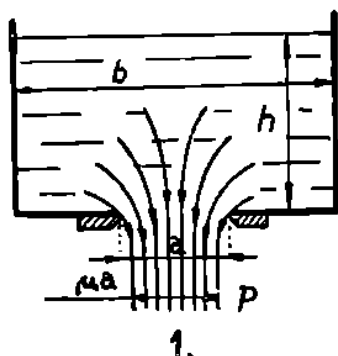
Tlak p se změní v pohybovou energii čili výška h je rychlostní výškou, pro niž platí

$$h = \frac{v^2}{2g}; v^2 = 2g h,$$

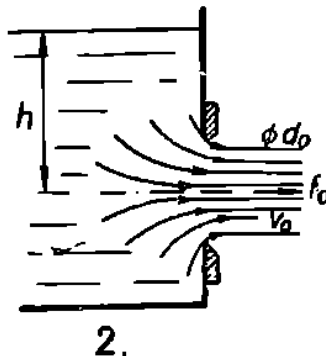
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot h} = 4,43 \cdot \sqrt{h} = 4,43 \cdot \sqrt{p/\gamma} \quad (71)$$

Průřezem $f \text{ m}^2$ vyteče za vteřinu množství $q = f \cdot v \text{ m}^3/\text{s}$.

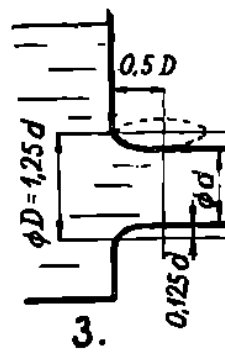
Praktickým měřením bylo zjištěno, že vyteklé množství kapaliny záleží na mnoha vlivech (tvaru otvoru, jeho poloze



Obr. 199. Výtok otvorem ve dně; $\mu \approx 0,62$ u vody a vzduchu.



Obr. 200. Výtok otvorem ve stěně.



atd.) a je trochu menší než q . Teoretické q násobíme výtokovým součinitelem μ , který je menší než 1, abychom dostali skutečné q_{sk} .

$$q_{sk} = \mu \cdot q = \mu \cdot f \cdot v = f \cdot \mu v = f \cdot v_{sk} \quad (72)$$

Protože se plocha otvoru nemění, musí se zmenšovat rychlost na v_{sk} .

$\mu = 0,6$ až $0,99$ podle úpravy hran otvoru a jeho polohy. Dokonalé zaoblení výstupní hrany a úprava krátkého nátrubku podle obr. 200 (ať ve dně, nebo ve stěně) značně zvětší μ . Znali to už staří Egypťané, jak ukazují zbytky jejich zavodňovacích zařízení.

Všechny tyto vzorce platí také pro výtok otvorem ve stěně, když měříme spád h k ose otvoru, obr. 200. Proud se z průřezu f zužuje na průřez $f_0 = f \cdot \alpha$, kde α = součinitel zúžení.

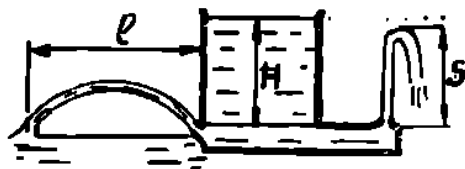
U ostrých hran $\alpha = 0,64$ čili proud má průměr $d_0 = 0,8 \cdot d$. Rychlost vody v průřezu f_0 je tedy (při $\mu = 0,9$)

$$v_0 = \frac{q_{sk}}{f_0} = \frac{\mu \cdot f \cdot v}{0,64 f} = \frac{0,9}{0,64} \cdot v = 1,4 \cdot v \quad (73)$$

Rychlost vzrostla proti teoretické o 40 %.

Příklady: 1. Z nádrže, v níž je tlak $p = 10 \text{ kg/m}^2$, tj. 10 mm vodního sloupce, vytéká vzduch otvorem s ostrými hranami. Výtokový součinitel $\mu = 0,62$. Měrná váha vzduchu $\gamma = 1,3 \text{ kg/m}^3$.

Skutečná výtoková rychlost $v_{sk} = \mu \cdot v = \mu \cdot 4,43 \cdot \sqrt{p/\gamma} = 0,62 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{10/1,29} = 7,65 \text{ m/s}$.



Obr. 201. Jak zkoušeli poždr-
nící hadice.

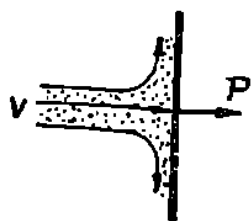
2. Byly zkoušeny stříkačky úpravou podle obr. 201. Pro spád vody H se měřila výška s v m, dostřik l v m, kam doletí souvislý proud vody (kapličky doletí i dvakrát dál). Je-li průměr nátrubku u ústí d asi 0,25 světlosti hadice, je nejlepší délka nátrubku na hadici (0,5 až 1). d a nátrubek se k ústí zužuje pod úhlem asi 6° , aby tvořil lepší proud vody.

Spád H m	10	30	50
$\varnothing d = 19 \text{ mm}$	$s = 7,3; l = 7$	$s = 16,2; l = 14$	$s = 23,6; l = 17,7$
$\varnothing d = 35 \text{ mm}$	$s = 7,9; l = 9,5$	$s = 18,3; l = 20,4$	$s = 27,7; l = 25$

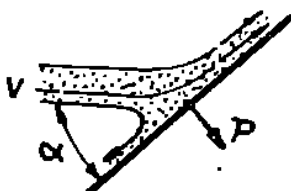
Z pokusů plyne, že je lepší jeden větší nátrubek než dva malé, protože dál dostříkne, a že největší dostřik byl při sklonu 32° .

Tlak proudu kapaliny

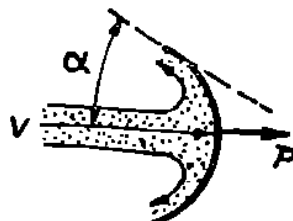
Průřezem F proteče za vteřinu rychlostí v objem $V = F \cdot v \text{ m}^3/\text{s}$. Váha tohoto objemu je $V \cdot \gamma$ (je-li γ měrná váha kapaliny kg/m^3) a průtočná hmota (proteklá za 1 s) je $V \cdot \gamma/g$.



Obr. 202.



Obr. 203.



Obr. 204.

Tlak proudu (síla) $P = \text{hmota} \times \text{zrychlení}$. Z rovnice $v = a \cdot t$ je zrychlení $a = v/t$ a síla

$$P = m \cdot a = m \cdot \frac{v}{t} = \frac{m}{t} \cdot v = \frac{V \cdot \gamma}{g} \cdot v, \text{ kg} \quad (74)$$

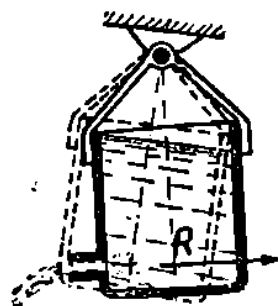
protože m/t je hmota proteklá za 1 vteřinu. Tím máme vzorec pro tlak proudu kolmo na desku, obr. 202.

Na desku skloněnou pod úhlem α° , obr. 203, tlačí proud silou

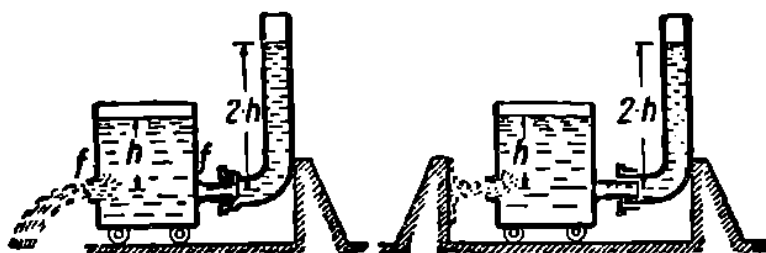
$$P = \frac{V \cdot \gamma}{g} \cdot v \sin \alpha \quad (75)$$

Na zaoblenou desku, obr. 204, tlačí kapalina silou

$$P = \frac{V \cdot \gamma}{g} \cdot v \cdot (1 + \cos \alpha); \text{ pro } \alpha = 0^\circ \text{ je } P = \frac{2 V \cdot \gamma}{g} \cdot v \quad (76)$$



Obr. 205. Reakce proudu kapaliny.



Obr. 206. Využití reakce proudu.

Vytéká-li kapalina z nádoby, obr. 205, je levá stěna o plochu otvoru f menší. Tím tlačí na protější stěnu síla větší o $f h \gamma$. Současně však odnáší kapalina při výtoku energii, a tím také vzniká reakce na protější stěnu $f h \gamma$ kg. Celková reakce proudu je

$$R = 2 f h \gamma = f \cdot \gamma \cdot v^2 / g \quad (77)$$

R v kg, průřez otvoru f v m^2 , výška od osy otvoru k hladině h v m, měrná váha γ v kg/m^3 , rychlost v v m/s.

Kdybychom upravili na druhé stěně pohyblivé nádrže píst, který má průřez rovněž f , aby zacházel do trubky, obr. 206, udrží reakce výtoku v rovnováze sloupec kapaliny, vysoký $2h$. Nezáleží na tom, zda voda volně odtéká či zda naráží na stěnu.

Příklad: Měříme výtokovou rychlost vody z kohoutku tím, že voda tlačí kolmo na desku podle obr. 202.

Za vteřinu vyteče 1,2 l vody.

Proud tlačí na desku silou $P = 2,32$ kg.

$$\text{Rychlost vody } v = \frac{P \cdot g}{\gamma V} = \frac{2,32 \cdot 9,8}{1000 \cdot 0,0012} = 18,95 \text{ m/s.}$$

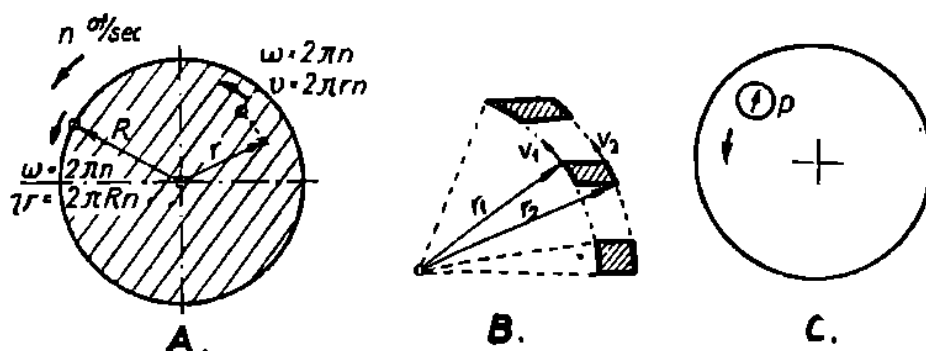
Rotace v kapalinách

Zmíníme se zde i o velmi obtížných pojmech, jako je *rotace* a *cirkulace* kapalin. Ve větších spisech bývají vyloženy už jen použitím vyšší matematiky.

Kapalina se při pohybu roztočí. Jde nyní o to, čemu říkáme točení čili rotace kapaliny. Roztočené pevné těleso si umíme představit: všechny body mají stejnou úhlovou rychlost ω , obr. 207-A.

Částice kapaliny se mohou volně posouvat. Tím vzniká otáčení značně odlišné od otáčení pevných těles. Částice mění při otáčení tvar, obr. 207-B. Při rovinném otáčení zde platí

$$v_1 \cdot r_1 = v_2 \cdot r_2 \quad (78)$$



Obr. 207.

Body v točící se kapalině mohou mít různou úhlovou rychlost čili pro celou kapalinu se nemůže stanovit nějaká společná úhlová rychlost. Místo ní byl zaveden nový pojem, který bere zřetel na proměnlivé rychlosti v uvažované částici. Říkáme mu *rotor rychlosti v*, zkratkou *rot v*.

Rotor můžeme změřit pokusem. Do kapaliny ponoříme plováček s šipkou, malý proti poloměru zakřivení dráhy, obr. 207-C. Šipka plováku bude měnit směr úhlovou rychlostí ω_1 .

$$\text{Rotor } v = \text{rot } v = 2 \cdot \omega_1 \quad (79)$$

Točí-li se částice kapaliny jako tuhé těleso úhlovou rychlostí ω_1 , je rotor roven dvojnásobku této úhlové rychlosti. Netočí-li se částice kapaliny, je $\text{rot } v = 0$. Místo „rotor“ se někdy říká „curl“ rychlosti v , zkratkou *curl v*.

Cirkulace se značí Γ (řecké velké písmeno gamma). Je to součet hodnot $v \cdot s$, utvořený podél libovolné uzavřené dráhy (v = rychlost, s = částice příslušné dráhy).

$$\Gamma = v_1 \cdot s_1 + v_2 \cdot s_2 + v_3 \cdot s_3 + \dots \quad (80)$$

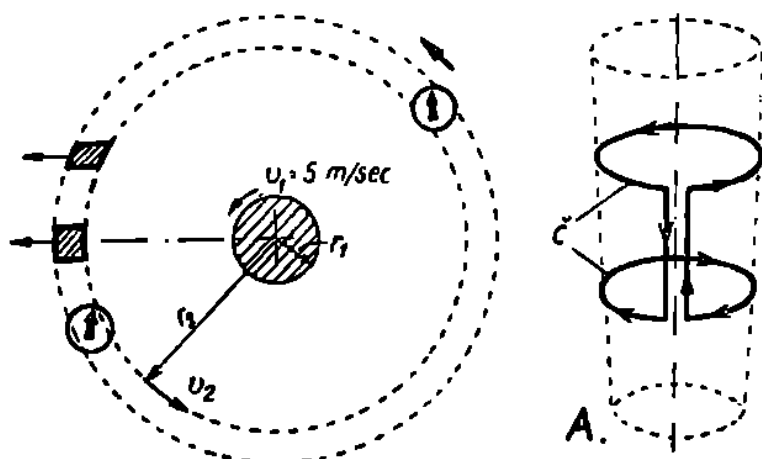
Příklad: Máme určit velikost cirkulace pro vír, u něhož ve vzdálenosti $r = 20$ cm od osy je obvodová rychlost $v = r \cdot \omega = 4$ m/s.

Součet všech drah, které tvoří uzavřenou dráhu, je obvodem kružnice $2\pi r$. Rychlost v je stále stejná. Proto platí ze vzorce (80)

$$\Gamma = v \cdot s = v \cdot 2\pi r = 3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 = 5 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Dráha s , složená z částí $s_1, s_2, s_3 \dots$ je opsána kolem částice plochy F . Pro vztah mezi rotorem rychlosti a cirkulací platí

$$\text{rot } v = \frac{\Gamma}{F} \quad (81)$$



Obr. 208. Potenciálový vír; A = vírová trubice, ℓ = vírová čára. Směr proudění částic kapaliny značí šipky. Tenká vírová trubice přechází ve vírové vlákno.

Cirkulace podél uzavřené dráhy, která oběhne jednou dokola, jmenuje se *síla víru*. Pojem cirkulace je nejdůležitějším pojmem aerodynamiky letadel (viz vzorec 82).

Příklad: Ve velké válcové nádrži se točí v ose válec o průměru 100 mm obvodovou rychlostí 5 m/s, obr. 208. Počítejme, že je v nádrži dokonalá kapalina, bez vnitřního tření. Víme, že v takové kapalině nemůže vznikat točení (protože nevznikají žád-

ná smyková napětí). Částičky kapaliny obíhají bez tření po kruhových drahách, deformují se (obíhají a mají pohyb dilatační). Na poloměru $r_2 = 500$ je ze vzorce (78) rychlost

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{5 \cdot 50}{500} = 0,5 \text{ m/sec}.$$

Tato úvaha platí přesně jen pro teoretickou (dokonalou) kapalinu. Přibližně však platí i u vody, vzduchu a podobných kapalin, v nichž je vnitřní tření maličké. Válcová roztočená tyč vytvoří tuhé *vírové jádro*. Kolem tyče vzniká netočivé vírové pole, jemuž říkáme *potenciálový vír*. Zde je třeba si ještě přesněji ujasnit pojmy.

Kapalina *obíhá* po kruhové dráze, ale její částice se *netočí*. Proto je pole netočivé. Šipka plováku také obíhá, nemění směr. Z toho plyne, že

$$\text{rot } v = 0; v \cdot r = \text{konstanta}.$$

Takový potenciálový vír se vytvoří kolem otvoru, jímž vytéká z nádrže voda. Jistě jste to pozorovali při vypouštění vody z koupací vany.

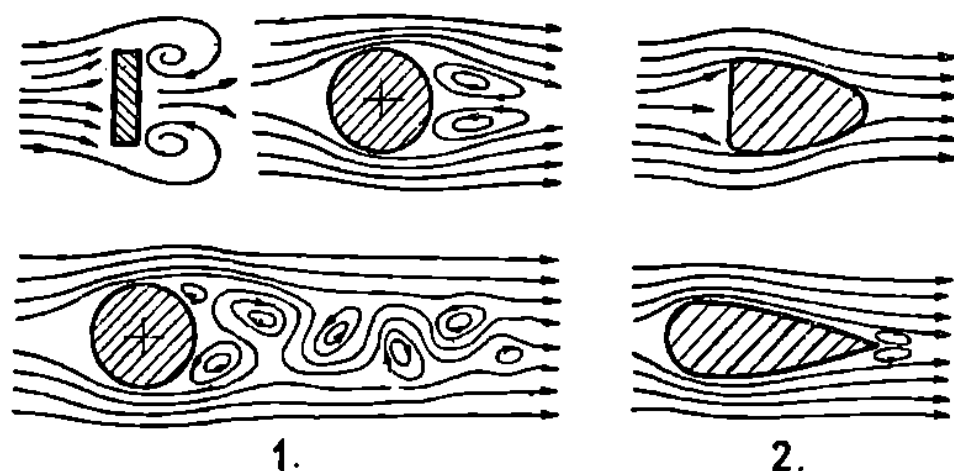
Jádro víru se vytvoří točícím se proudem kapaliny, v němž je neroztočený sloupec vzduchu. Průměr jádra se směrem dolů

zužuje, až vytvoří vírovou trubici a nakonec vírové vlákno, *obr. 208A*.

Také vírové jádro může být vytvořeno válcovou roztočenou tyčí nebo jen sloupcem vzduchu. Tyč má úhlovou rychlost ω . Netočivé vírové pole kolem ní má sílu víru $\Gamma = 2\omega$.

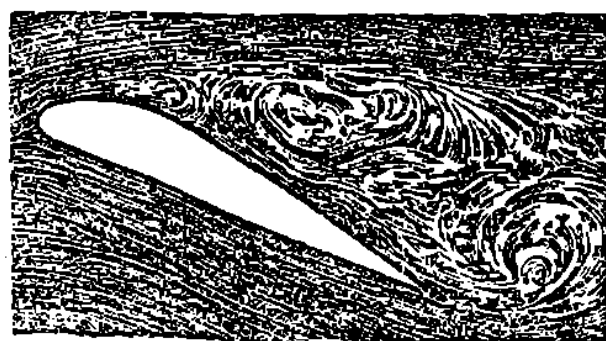
Pohyb letadla

Pohybuje-li se těleso, např. válec a deska, *obr. 209*, nebo křídlo letadla, *obr. 210*, v prostředí, vytvoří se za tělesem víry.



Obr. 209. Víry za tělesem.

Tím dostávají částice prostředí (např. vzduchu) pohybovou energii. K tomu spotřebujeme práci, těleso klade *odpor* pohybu. Zmenší-li se víry, je menší i odpor proti pohybu. Víry za tělesem zmenšíme úpravou *zadní části* tělesa v tzv. aerodynamický tvar, jak to vidíme na těle včely, u automobilů a u letadel.



Obr. 210. „Přetažení“ křídla.

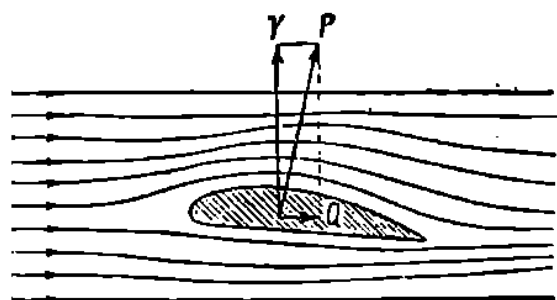
Vlnění (jímž jsou i víry) se může prostředím šířit nejvýše rychlostí zvuku. Při 15°C je rychlost zvuku ve vzduchu

$$340 \text{ m/s} = 340 \cdot 60 \cdot 60 \text{ m/h} = 1\,224\,000 \text{ m/h} = 1224 \text{ km/h}.$$

Překročí-li tryskové letadlo nebo raketa rychlost zvuku, má *nadzvukovou* (supersonickou) rychlost, při níž odpor proti

pohybu silně roste (tzv. zvuková bariéra). Zhuštěný vzduch nemá čas k tomu, aby se uhýbal, před letadlem vzniká přetlak, za ním podtlak.

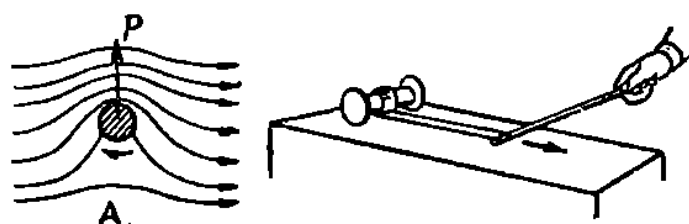
Má-li těleso vhodný tvar (např. jako křídlo ptáků nebo letadla), vytvoří se kolem něho v proudícím prostředí z vírů vírové pole, které se sčítá s prouděním prostředí podle obr. 211.



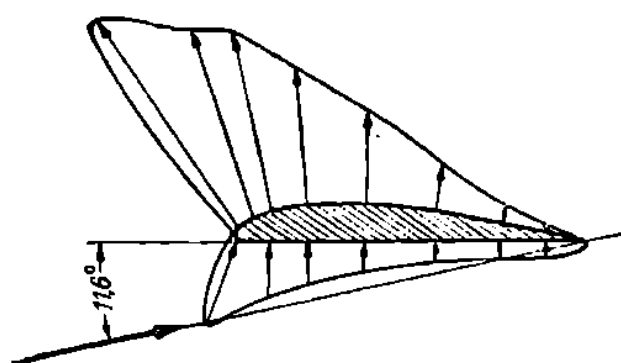
Obr. 211. Vztlak na profilu křídla.

Nad průřezem proudí vzduch mnohem rychleji než dole, jak ukázal i obr. 197, těleso je nasáváno vzhůru, obr. 213, vzniká na něm *dynamický vztlak*.

Tento vztlak můžeme vytvořit i uměle. Těleso má tvar válce, který se točí slabým motorkem, obr. 212A. Vzniká



Obr. 212. Dynamický vztlak P u roztočeného válce (Magnusův jev z r. 1852). Vír kolem válce se sčítá s proudem vzduchu, nad válcem roste rychlost proudění a klesá tlak vzduchu. Pokus s cívkou to dokáže: Na cívce je proužek látky, připevněný k tyčce. Při prudkém vodorovném pohybu tyči vyletí cívka vztlakem v oblouku do výšky.



Obr. 213. Tlaky nad křídlem a pod křídlem letadla. Šipky značí jejich smysl, délky úseček jejich velikosti; w je směr větru.

netočivé vírové pole, a tím i dynamický vztlak. Pro technické využití se tento způsob neosvědčil, ač byl zkoušen u lodí i u letadel. Můžeme jím vyložit „falše“ při každé „řezané“ ráně tenisovým míčem, v kopané. Řezaný míček (roztočený) letí o kus dále než obyčejný, protože dráha letu je plochá.

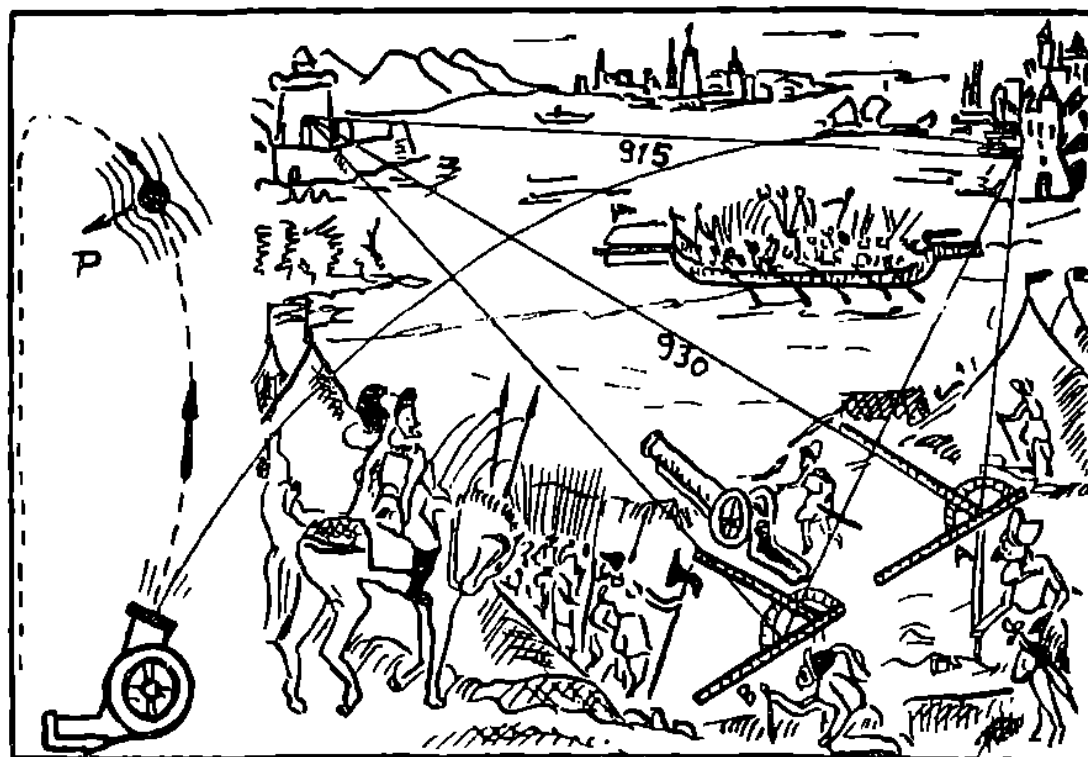
Také staří dělostřelci, kteří stříleli hladkými koulemi, byli znepokojováni neznámými odchylkami od dráhy. Stávalo se, že koule vystřelená z moždíře dopadla dokonce *za moždířem*, když se náhodou v hlavní silně roztočila, obr. 212a.

Zakladatel vědecké nauky o létání těles těžších vzduchu,

ruský fysik *Žukovskij*, odvodil r. 1910 vzorec pro výpočet dynamického vztlaku

$$P = v\Gamma b \cdot \gamma/g \dots\dots\dots (82)$$

γ je měrná váha prostředí, u vzduchu např. $1,226 \text{ kg/m}^3$; g je zrychlení tíže $9,8 \text{ m/s}^2$; v je rychlost pohybu prostředí nebo tělesa v m/s ; Γ je cirkulace netočivého vírového pole (viz str. 151); b je délka, rozpětí tělesa (křídla, válce aj.).



Obr. 212a. Dělostřelecké zaměřování ve středověku. Obrázek podle Zublerova díla o měřických nástrojích (r. 1607). Podle levého náčrtu se stávalo, že střela z moždíře spadla i za moždířem.

Pro výpočty letadel se vztlak P rozkládá na svislou složku $Y = P_z = \text{vztlak}$ a vodorovnou složku $Q = P_x = \text{odpor}$ proti pohybu v kg , obr. 211, pro které platí vzorce:

$$\boxed{P_z = c_z pF; P_x = c_x pF} \dots\dots\dots (83)$$

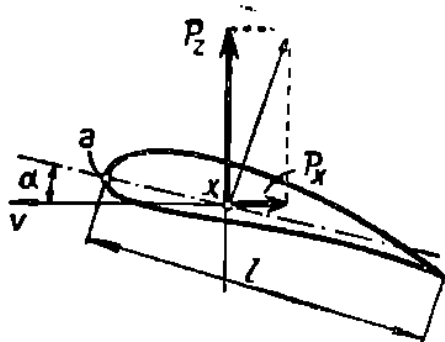
F je nosná plocha půdorysu křídla, daná zpravidla největším pravoúhlým průmětem křídla do roviny vodorovné, v m^2 ; p je dynamický tlak $= \gamma v^2/2g$, kde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, γ je měrná váha vzduchu v kg/m^3 , v je rychlost letu v m/s (pro $v = 100, 200, 400 \text{ km/h}$ vyjde $p = 48, 193, 771 \text{ kg/m}^2$); c_z je vztlakový

součinitel, c_x je odporový součinitel určený pokusně v závislosti na úhlu náběhu profilu α , obr. 214. Najde se v diagramech profilů, např. podle obr. 215.

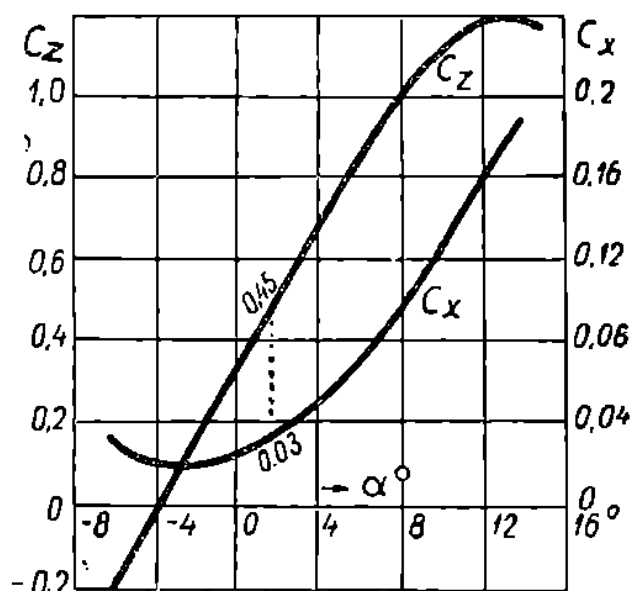
c_z/c_x = jemnost křídla,
 c_w/c_z = klouzací poměr,

l/b = stranový poměr,
 b/l = štíhlost.

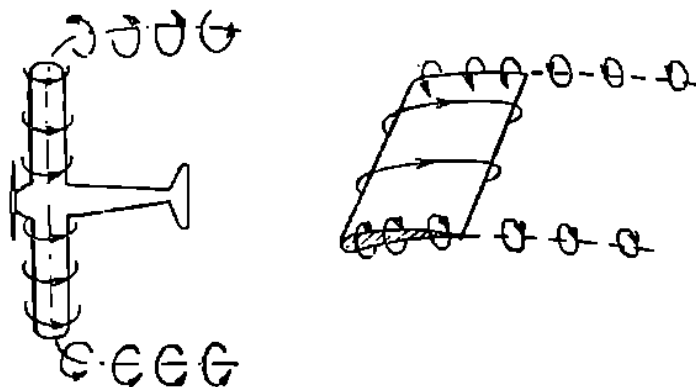
Délka křídla (rozpětí) je b m, střední hloubka křídla je l m, plocha křídla je $b \cdot l$ m².



Obr. 214. Vztlak P_z a odpor P_x ; α je úhel náběhu, a je náběžná hrana l je hloubka křídla, x je působiště vztlaku, v je rychlost pohybu křídla nebo vzduchu proti křídlu.



Obr. 215. Vztlakový a odporový součinitel pro určitý profil křídla v závislosti na úhlu náběhu α° . Pro $\alpha = 8^\circ$ je $c_x = 0,1$; $c_z = 1,0$. Jemnost křídla $1 : 0,1 = 10$. Normální profily křídel mají nejvýše asi $c_z = 1,3$. Při přistávání rychlostí 100 km/h je třeba $c_z = 3,5$. Dosahuje se toho přistávacími klapkami, šterbinami na křídlech a jinak.



Obr. 216. Indukovaný odpor na koncích křídel.

Na koncích křídel se tvoří víry, obr. 216. K tomu se také spotřebuje práce, již musí dodávat motor letadla, a vzniká indukovaný odpor, který je 5 až 10 % vztlaku. Vzduch v těch místech proudí směrem vzhůru. Je zajímavé, kdo to vyložil divokým husám a čápům, kteří létají za sebou v šipce, aby využili těchto vzestupných proudů. Prvá, vedoucí husa na špici nezískává nic, proto se střídá, ostatní však letí v proudu vzduchu směřujícího vzhůru, a proto se méně unaví. Platí to i při letu letadel v šipce, ale i v řadě za sebou. Není tedy útvar

v šípce z tohoto hlediska nutný, zde by mohly i divoké husy změnit taktiku.

Indukovaný odpor určíme jako odpor P_x zavedením součinitele indukovaného odporu

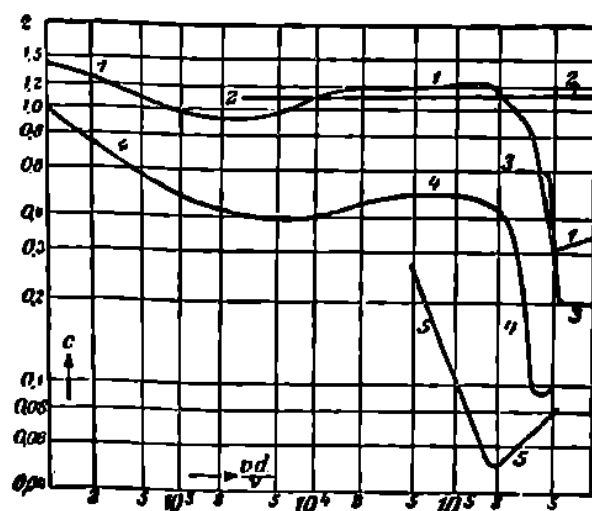
$$c_{xi} = \frac{c_z^2 \cdot l}{\pi b} \quad \dots \dots \dots (84)$$

c_z = součinitel vztlakový, l = hloubka křídla, b = délka křídla.

Souhrn: Pohybem tělesa v kapalině vzniká tření v laminární nebo turbulentní mezní vrstvě (která je např. u větrů a zeměkoule několik km vysoká) a ještě vznikají tři síly: odpor vířením za tělesem, *dynamický vztlak* netočivým vírovým polem kolem tělesa jako jádra (napříč k směru pohybu) a současně s ním *indukovaný odpor* proti směru pohybu.

Odpor vznikající vířením za tělesem není jen škodlivý, umíme ho také využít. U *padáku* se zmenšuje rychlost při volném pádu z 60 m/s asi na 5,5 m/s. Využívá se ho u *lodí* poháněných lopatkovými koly, u *větrných motorů* s miskovitým i křídly, např. u *anemometrů* k měření rychlosti větru, Odpor konkávní (vyhloubené) strany křidélek je čtyřikrát větší než u obrácené (konvexní) vypuklé strany.

Závislost odporových součinitelů c_x na Reynoldsově čísle $Re = vd/\nu$ pro několik tvarů těles uvádí *obr. 217*. Odporové součinitele pro běžné typy automobilních karosérií jsou 0,34 až 0,52. Až do rychlosti 70 km/h nemá odpor vzduchu při jízdě automobilu vzhledem k velikosti ostatních odporů větší význam. Při rychlostech přes 100 km/h je však už odpor vzduchu tak veliký, že se vyplácejí aerodynamické tvary karosérií.



Obr. 217. Závislost odporového součinitele c_x na Reynoldsově čísle Re :
 1 pro kruhový váleček, viz obr. 209,
 2 pro kruhovou desku, jejíž rovina je kolmá k rychlosti, 3 pro elipsoid, stojící napříč k proudu, 4 pro kouli, 5 pro elipsoid stojící podél proudu, vzduch proudí směrem nejdelší osy.

Příklady: 1. Letadlo se pohybuje rychlostí $v = 220$ km/h. Jeho křídla mají vytvořit vztlak $P_z = 2930$ kg.

Nosná plocha křídel $S = l \times b = 2 \times 14 = 28$ m².

Profil tohoto křídla byl proměřen a má hodnoty součinitelů podle obr. 215.

Rychlost letu $v = 220\,000 : 3600 = 61$ m/s.

$$\text{Dynamický tlak } p = \frac{\gamma v^2}{2g} = \frac{1,226 \cdot 61^2}{2 \cdot 9,8} = 233 \text{ kg/m}^2.$$

$$\text{Vztlakový součinitel } c_z = \frac{P_z}{pS} = \frac{2930}{233 \cdot 28} = 0,45.$$

Z diagramu obr. 215 je k $c_z = 0,45$ odporový součinitel $c_x = 0,03$. To je příliš mnoho, lepší profil křídla by měl $c_x = 0,015$. Počítáme však s touto hodnotou, protože křivky pro jiný profil nemáme.

Součinitel indukovaného odporu

$$c_{xi} = \frac{c_z^2 \cdot l}{\pi \cdot b} = \frac{0,45^2 \cdot 2}{3,14 \cdot 14} = 0,0093.$$

Celkový součinitel odporu je $c_{x0} = 0,03 + 0,0093 = 0,0393$.

Odpor proti pohybu křídla $P_x = c_{x0} p S = 0,0393 \cdot 233 \cdot 28 = 256$ kg.
Teoretický výkon motoru letadla

$$N = P_x \cdot v = 256 \cdot 61 = 15\,616 \text{ kgm/s, tj. } 15\,616/75 = 208 \text{ koní.}$$

Na letadle vznikají ještě jiné odpory než je odpor křídel. Z celkového odporu proti letu připadá u moderního dopravního letadla na křídla 55 %, na trup s motory 18 %, na řízení 15 %, na chladič, armatury a anténu 12 %. Aby byl odpor co nejmenší, je celý povrch letadla co možná hladký, bez výčnělků, vyhlazený.

2. Zavřený osobní automobil normální konstrukce jede za bezvětří rychlostí 100 km/h. Jeho čelní plocha (= průmět do plochy kolmé k rychlosti) je $S = 2$ m². Jaký výkon motoru je teoreticky nutný jen k překonání odporu vzduchu?

$$v = 100\,000 : 3600 = 27,8 \text{ m/s.}$$

Odporového součinitele zvolíme asi $c_x = 0,48$. Odpor vzduchu proti jízdě

$$P_x = c_x \cdot p \cdot S = c_x \cdot \frac{\gamma v^2}{2g} \cdot S = 0,48 \cdot \frac{1,226 \cdot 27,8^2}{2 \cdot 9,8} \cdot 2 = 46 \text{ kg.}$$

Výkon nutný k překonání tohoto odporu $N = P_x \cdot v = 46 \cdot 27,8$ kgm/s; dělíme 75, abychom dostali výkon v koních $N = 46 \cdot 27,8 : 75 = 17$ koní. Potřebný výkon motoru roste s třetí mocninou rychlosti jízdy. Za rychlost v dosazujeme rychlost jízdy + rychlost protivětru.

3. Z rychlosti větru se počítá také tlak větru na stavební konstrukce. Obtížný je zvláště odhad největší rychlosti, jaká se asi může vyskytnout, neboť orkán dosahuje rychlosti až $v = 210$ m/s, které by málokterá stavba snesla. Při vyšších stavbách se počítá s největší rychlostí větru max $v = 45$ m/s.

Komín je vysoký $h = 40$ m. Je to válec středního průměru $d = 3$ m. Jaký tlak vyvine vítr na tento komín za vichřice, při rychlosti větru

$v = 40 \text{ m/s}$? Kinematická viskozita vzduchu $\nu = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 0,14 \text{ St.}$
 Reynoldsovo číslo $Re = vd/\nu = 40 \cdot 3/0,000\,014 = 8\,580\,000 = 8,58 \cdot 10^6$. Z obr. 217 najdeme, že pro tak velké Re je odporový součinitel asi $c_x \doteq 0,4$. Spodní stupnice obr. 217 končí asi hodnotou $Re = 10^6$, kdy pro válec (1) je $c_x = 0,34$. Pro vzduch je $\gamma/2g = 1/16$. Tlak na komín

$$P = c_x p S = c_x \cdot \gamma/2g \cdot v^2 \cdot d \cdot h = 0,4 \cdot 1/16 \cdot 40^2 \cdot 3 \cdot 40 = 4800 \text{ kg.}$$

U paty komína tím vzniká ohybový moment $M = Ph/2 = 4800 \cdot 4000/2 = 9\,600\,000 \text{ kgcm}$. Komín vážící $G \text{ kg}$ se tím skloní od svislé čáry o úhel $\alpha = M/G$ radiantů.

Závěr

V podstatě je tato malá práce elementární, pro každého. Nezůstává však na rozdíl od učebnic jednoduchá tam, kde je projednávána otázka složitá. Proto se nevyhýbá ani věcem vážnějším, zavede čtenáře i hlouběji do lesa. Nestraší však čtenáře nesrozumitelnými formulkami a nadbytečnou matematikou, značky Δ a d (které zde čteme „dílek“), zavádí jen jako užitečné zkratky místo dlouhého mluvení. Je psána v naději, že pomůže čtenářům pochopit přírodní zákony, jejichž trpělivé studium vede zvláště v socialistické společnosti k tak pozoruhodnému rozvoji vědy a techniky, jakého jsme denně svědky všude, kam jen se podíváme. Též v naději, že zláká čtenáře k hlubšímu studiu prací přesnějších a podrobnějších, k soustavné radosti z učení a k dalšímu využití vědomostí v praxi. Neboť o to hlavně jde: nesmíme zůstat věčnými školáky, kteří se k životu jen připravují, musíme také umět svého mladého vědění užít při společném díle. Prvým dalším krokem při studiu může být spis „Přehled technické mechaniky“, J. Krutina, nakl. Práce, Praha 1954, 500 str., 570 obrázků, který vás už přivede k pracím velkých mistrů i k řešení většiny úloh, s nimiž se v běžné praxi setkáte.



REJSTŘÍK

- | | | |
|--|---|--|
| <p>Aeromechanika 132
 bathysféra 137
 bomba, let 26
 cirkulace 151
 Coriolis 56
 D'Alembert 58
 dvojice 82
 energie 63
 frekvence 32
 Galileo 23
 gravitace 38
 hmota 38
 Huygens 39
 hybnost 41
 hydromechanika 132
 impuls 47
 kavitace 146
 kinematika 10
 kmitání 77
 krut 131
 letadlo 153
 Lomonosov 67
 moment 80</p> | <p>namáhání 120
 napětí 115
 Newton 39
 odstředivá síla 52
 ohyb 125
 otáčení 33, 52, 79
 pád těles 22
 páky 101
 perioda 32
 pevnost 114
 plování 139
 pohyb 20, 44
 práce 60
 proudění 140
 pružnost 114
 převody 36
 rakety 76
 ráz těles 49
 reakce 43
 relativita 10
 Reynolds 142
 rotace vody 150
 rotor 152
 rychlost 12
 setrvačnost 39
 síla 37</p> | <p>síly, skládání 96
 sinusovka 77
 smyk 117
 statika 94
 střelba 27
 střih 130
 tah 121
 těžiště 109
 tlak 123
 — proudu 149
 — ve vodě 136
 tření 88
 účinnost 72
 úhlová rychlost 33
 váhy 106
 vektory 30
 Venturi 147
 vír 152
 viskozita 139
 výkon 69
 výslednice 96
 výstřel z děla 65
 výtok vody 147
 vztlak 138
 — letadla 154
 zrychlení 17
 Žukovskij 155</p> |
|--|---|--|

Jaroslav Krutina

ZOPAKUJME SI MECHANIKU

Vydala PRÁCE, vydavatelství a nakladatelství ROH v knižnici Technický výběr do kapsy, svazek 11, jako svou 2.971. publikaci. Odpovědný redaktor Jindřich Beránek. Obálku navrhl Cyril Mika.

Ze sazby písmem petit Latinka vytiskla tiskárna MÍR 01 v Praze.
Formát papíru 70 × 100 cm. — AA 9.08 — VA 9.22 — A-04966

1. vydání — náklad 15.450

05/7

Brož. 7,— Kčs

TECHNICKÝ VÝBĚR DO KAPSY

Knižnice Technických novin. Druhá desítka populárních kapesních příruček pro každého, kdo se o techniku zajímá.

Program II. ročníku 1959:

11. J. Krutina: Zopakujme si mechaniku
 12. 250 technologických novinek ze světové techniky
 13. Inž. J. Tříška: Základní elektrotechnické tabulky
 14. M. Tomsa: Zázraky televize
 15. A. Vacek: Zopakujme si matematiku
 16. O. Ženíšek: Letectví dnes a zítra
 17. F. Blabolil: Použití plastických hmot ve strojírenství
 18. J. Bartoň: Novinky v radiotechnice
 19. Inž. Z. Chalupa: Atom dobývá svět
 20. B. Dobrovolný: Pokrokové konstrukce lisovacích nástrojů
- Prémiový svazek: Malá encyklopedie přírodních věd

Ročně vyjde 10 svazků nejméně o 128 stranách, s obrázky a tabulkami.

Při odběru nejméně šesti svazků obdržíte zdarma neprodejnou prémii Malá encyklopedie přírodních věd.

Při odběru celého ročníku obdržíte ještě zdarma obal na knížky z umělé hmoty PVC

Předplatné na celý ročník Kčs 70,—, na šest svazků Kčs 42,—.
Jednotlivý svazek Kčs 7,—.

Tyto publikace nejsou na knižním trhu k dostání. Prospekty si vyžádejte a objednávky posílejte:

PRÁCE NAKLADATELSTVÍ ROH

Praha 3, Václavské nám. 17.

Tem. skup. 05/7
Cena brož. 7,— Kčs